

01170  
7



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**“ANÁLISIS MATEMÁTICO DE LA TRAYECTORIA  
DE LOS SATÉLITES DE ÓRBITAS BAJAS:  
METODOLOGÍA PARA LA DOCENCIA”**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA ELECTRICA  
(TELECOMUNICACIONES)**

PRESENTA

**Ing. Guillermo López Maldonado**

DIRECTOR: DR. SALVADOR LANDEROS AYALA.



Ciudad Universitaria

Noviembre, 2002

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALI  
DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: Juan Guillermo López  
FECHA: 17 de Nov del 2002 19:45  
FIRMA: [Firma]

## Agradecimientos

La elaboración de esta tesis pudo llevarse a cabo gracias a la participación de muchas personas a quienes admiro profundamente. Agradezco el tiempo dedicado y el interés por este estudio, a pesar de sus múltiples actividades, al Dr. Salvador Landeros Ayala director de este trabajo, y a su secretaria la Srita. Beatriz Delgado por su siempre entusiasta ayuda. Así mismo agradezco a los profesores que formaron el jurado y quienes revisaron y sugirieron las correcciones pertinentes: Dr. Víctor García Garduño, Dr. Aleksandr Martynyuk, Dr. Miguel Moctezuma, Dr. Gianfranco Bisiacchi Giraldi y al Ing. Mario Ibarra. Agradezco también al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología a través de su representante en la UNAM la Lic. Cecilia Martínez por el soporte económico durante la maestría. Le doy las gracias también a todos mis profesores y a la UNAM la formación que generosamente me brindaron. Le agradezco la preocupación e interés por la conclusión de este trabajo a Miguel Ángel Ríos y a Carlos Rodríguez directores de los departamentos de Ing. Mecánica y de Ing. Eléctrica respectivamente del ITESM-CEM. Muy especialmente les doy las gracias a Cliselda y Guillermo, mis padres, y a mis hermanos Polo, Jorge, Grisel, Poncho y Martha por todo lo que representan para mí. No puede faltar el agradecimiento a mis amigos y amigas, con quienes he disfrutado momentos incomparables en la Universidad: José Luis, Hesiquio, Yara, Alejandro, Irazú, Beto, Paty, Hugo, Pepe, Otón, etc, etc..... Y Desde luego a ti Araceli muchas gracias.

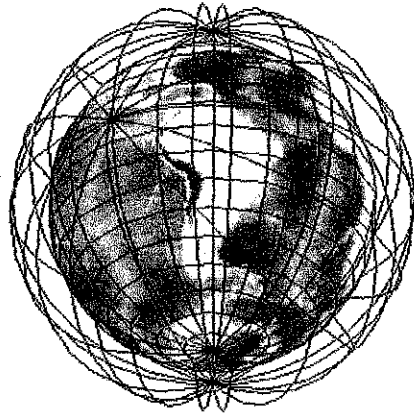
## Dedicatoria

Dedico este trabajo a quienes estoy seguro continuarán con nuevos y mejores logros Juan Guillermo, Marcos, Memo, Misael y Ramón.

Noviembre del 2002.







**Análisis matemático de la trayectoria  
de los satélites de órbitas bajas:  
Metodología para la docencia.**

Guillermo López Maldonado.

Noviembre del 2002.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Resumen

El objetivo de este trabajo, es mostrar un estudio que describa de manera detallada y realista la trayectoria seguida por los satélites de órbitas cercanas a la Tierra, llamadas comúnmente, órbitas bajas (*"LEO's Low Earth Orbits"*).

Bajo este tratamiento, se describen en la primera parte los antecedentes, perspectivas presentes y la tendencia del empleo de estas órbitas. En la segunda parte, se presenta un desarrollo matemático amplio e idealizado que permite obtener gráficamente los datos más importantes de las órbitas cercanas a la Tierra. En la tercera parte, se presenta un marco de referencia que permite ubicar la posición de cualquier satélite con respecto a la Tierra, se da también continuidad al estudio introduciendo el efecto real producido por las distintas fuerzas que alteran la trayectoria de la órbita, y se analizan un conjunto de fórmulas que consideran a la atracción gravitacional y a la resistencia aerodinámica, como las fuerzas principales que alteran la trayectoria ideal del satélite; con esto, se obtienen nuevamente de manera gráfica los datos más importantes de las órbitas en estudio. Finalmente, en la cuarta parte, se dan las conclusiones del trabajo.

Todos los datos importantes se muestran gráficamente empleando códigos programados en MATLAB.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

# Contenido

---

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>I</b>  | <b>Introducción</b>  | <b>6</b>  |
| <b>1</b>  | <b>Orbitas cercanas a la Tierra</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1       | Antecedentes históricos . . . . .  | 8         |
| 1.2       | Tendencia actual . . . . .   | 10        |
| 1.3       | Trayectorias seguidas . . . . .  | 15        |
| 1.4       | Aplicación . . . . .   | 22        |
| 1.4.1     | Telefonía celular móvil mediante bases de células y empleando satélites en órbitas bajas . . . . . | 22        |
| <b>II</b> | <b>Obtención de las ecuaciones fundamentales para una órbita baja ideal</b>                        | <b>27</b> |
| <b>2</b>  | <b>Leyes de Kepler y ley de la gravitación de Newton</b>   | <b>29</b> |
| 2.1       | Leyes de Kepler para el movimiento planetario . . . . .  | 29        |
| 2.2       | Ley de la gravitación de Newton . . . . .  | 29        |
| 2.3       | Potencial de gravitación y energía potencial . . . . .   | 30        |
| 2.3.1     | Campo de gravedad de una esfera . . . . .  | 32        |
| <b>3</b>  | <b>Interacción "Tierra- Satélite"</b>  | <b>35</b> |
| 3.1       | Atracción gravitacional mutua entre dos cuerpos esféricos $m_1$ y $m_2$ . . . . .                  | 35        |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| 3.2        | Movimiento de una masa (satélite) relativo a otra (Tierra) . . .                                      | 37        |
| 3.3        | Energía cinética . . . . .  | 38        |
| 3.4        | Energía potencial . . . . .   | 38        |
| 3.5        | Ecuación de la órbita . . . . .   | 38        |
| <b>4</b>   | <b>Geometría de la órbita</b>   | <b>44</b> |
| 4.1        | Elipse y círculo . . . . .  | 44        |
| <b>5</b>   | <b>Conexiones entre las relaciones orbitales</b>  | <b>47</b> |
| 5.1        | Constantes dinámicas y geométricas . . . . .  | 47        |
| 5.2        | Período de la órbita . . . . .  | 49        |
| 5.3        | Anormalidad excéntrica, un replanteamiento de la ecuación de<br>órbita . . . . .                      | 50        |
| 5.4        | Cronometraje y ubicación de la órbita . . . . .   | 52        |
| 5.4.1      | Órbita elíptica . . . . .   | 52        |
| <b>6</b>   | <b>Órbitas cercanas a la Tierra (bajas) seguidas por los satélites</b>                                | <b>54</b> |
| 6.1        | Órbita circular . . . . .   | 54        |
| 6.2        | Órbita en general con respecto a la Tierra . . . . .  | 56        |
| <b>7</b>   | <b>Datos que proporcionan las ecuaciones ideales obtenidas.</b>                                       | <b>60</b> |
| <br>       |   |           |
| <b>III</b> | <b>Análisis realista de la trayectoria orbital seguida<br/>por los satélites cercanos a la Tierra</b> | <b>63</b> |
| <b>8</b>   | <b>Parámetros utilizados como referencia orbital</b>  | <b>66</b> |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| <b>9</b>  | <b>Fuerzas que alteran la trayectoria de un satélite en órbita</b> | <b>73</b>  |
| 9.1       | Efectos del campo gravitacional terrestre . . . . .                | 73         |
| 9.2       | Resistencia aerodinámica . . . . .                                 | 79         |
| 9.3       | Efectos lunisolares . . . . .                                      | 84         |
| 9.4       | Presión de la radiación solar . . . . .                            | 84         |
| 9.5       | Otras perturbaciones . . . . .                                     | 86         |
| 9.6       | Resumen de perturbaciones . . . . .                                | 86         |
| <b>10</b> | <b>Datos que proporcionan las ecuaciones reales obtenidas.</b>     | <b>89</b>  |
| <br>      |  |            |
| <b>IV</b> | <b>Conclusiones</b>  | <b>92</b>  |
| <br>      |  |            |
| <b>A</b>  | <b>Códigos programados en MATLAB</b>                               | <b>96</b>  |
| <br>      |  |            |
| <b>B</b>  | <b>Propiedades atmosféricas</b>                                    | <b>115</b> |

---

## Lista de Figuras

---

|      |  |    |
|------|--|----|
| 1.1  | Constelación de satélites. . . . .   | 13 |
| 1.2  | Cobertura utilizando un solo satélite. . . . .   | 14 |
| 1.3  | Conjunto de órbitas bajas. . . . .   | 16 |
| 1.4  | Órbitas polares. . . . .   | 17 |
| 1.5  | Órbita baja y órbita geoestacionaria a escala. . . . .   | 18 |
| 1.6  | Órbitas inclinadas. . . . .  | 19 |
| 1.7  | Relación geométrica entre el centro de la Tierra, la estación y el satélite. . . . .                                       | 20 |
| 1.8  | Gráfica que muestra tanto del número órbitas como de satélites por órbita. . . . .   | 21 |
| 1.9  | Configuración de un sistema telefónico celular. . . . .  | 23 |
| 1.10 | División de células. . . . .   | 24 |
| 1.11 | Enlace de dos usuarios en movimiento a través de una central MTSO. . . . .   | 25 |
| 1.12 | Estructura celular formada por un satélite de órbita baja. . . . .   | 26 |
| 3.1  | Sistema de dos cuerpos en donde se muestran sus vectores de posición. . . . .  | 35 |
| 3.2  | Coordenadas polares para una partícula $m$ que experimenta una atracción cuadrado-inversa hacia un foco fijo $F$ . . . . . | 39 |
| 4.1  | Elipse. . . . .  | 45 |
| 5.1  | Anormalidades auténtica y excéntrica. . . . .  | 51 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 6.1  | Angulo de la trayectoria de vuelo de un satélite. . . . .   | 57 |
| 7.1  | Intensidad del campo gravitacional que siente un satélite con respecto a la altura de la órbita. . . . .                        | 60 |
| 7.2  | Velocidad del satélite con respecto a la altura de la órbita. . .   | 61 |
| 7.3  | Período del satélite para diferentes alturas de la órbita. . . . .  | 62 |
| 7.4  | Energía total por unidad de masa para diferentes alturas de la órbita. . . . .  | 62 |
| 8.1  | Sistema de coordenadas básico. . . . .  | 67 |
| 8.2  | Orbita elíptica generalizada. . . . .   | 68 |
| 8.3  | Parámetros orbitales para describir la trayectoria orbital alrededor de la Tierra vista desde el satélite. . . . .              | 69 |
| 8.4  | Diagrama que define $i$ , $\Omega$ , y $\omega$ , desde la Tierra. . . . .  | 70 |
| 8.5  | Diagrama que muestra el semieje mayor $a$ y la excentricidad $e$ . . . . .  | 71 |
| 9.1  | Precesión del nodo ascendente. . . . .  | 74 |
| 9.2  | Precesión del nodo descendente. . . . .   | 75 |
| 9.3  | Desplazamiento longitudinal debido a la no circularidad del plano ecuatorial de la Tierra. . . . .                              | 78 |
| 9.4  | Contracción de una órbita elíptica bajo la acción de la resistencia aerodinámica. . . . .                                       | 80 |
| 10.1 | Desplazamiento de la órbita causado por la fuerza gravitacional. . . . .  | 90 |
| 10.2 | Cambio en el radio de la órbita debido al efecto de la resistencia aerodinámica. . . . .  | 91 |
| 10.3 | Decaimiento de la órbita debido a la resistencia aerodinámica. Las alturas se consideran desde la superficie terrestre. . . . . | 91 |

**Parte I**  
**Introducción**

---

## 1. Órbitas cercanas a la Tierra

---

Los satélites son componentes esenciales para el desarrollo de los negocios alrededor del mundo. Hasta el año 2000, el sistema de comunicaciones vía satélite representaba una inversión bastante cuantiosa, más de 50 mil millones de dólares E. U.[1]

Un satélite de comunicaciones es un medio para enviar información a distancia, o más apropiadamente, es una estación repetidora de microondas que permite a dos o más usuarios entregar o intercambiar información en varias formas. Sus servicios también son adecuados para informar a través de medios múltiples y para lograr una comunicación personal efectiva. Puede verse por ejemplo, como los satélites han mejorado muchísimo la calidad de los servicios de la telefonía pública uniendo a las naciones; y como han logrado también que casi toda la cobertura de T.V. que viaja por el espacio llegue hasta los hogares a través de su participación. Incluso en la edad de los cables de fibra óptica de banda ancha y de los sistemas de conmutación digital, los satélites permanecen satisfaciendo las necesidades de comunicación básica para la mayoría de los países alrededor del mundo.

Por otra parte, la demanda creciente de servicios de comunicación, el aumento sensible en la cantidad de información que se transmite, la saturación de la órbita geostacionaria y el aprovechamiento eficiente del desarrollo tecnológico actual, han originado la puesta en marcha de proyectos que consideran la utilización de sistemas vía satélite que operen en órbitas diferentes a las que se han venido utilizando tradicionalmente.

Estas órbitas, se encuentran en un intervalo de altitud que va de los 120 *km* hasta los 2000 *km* desde la superficie terrestre<sup>1</sup>, las cuales se denominan órbitas bajas o cercanas a la Tierra, diferenciándose de las órbitas geostacionarias tradicionales, básicamente porque estas últimas se encuentran a 35786 *km* desde la superficie terrestre en el plano ecuatorial. La velocidad

---

<sup>1</sup>La "International Telecommunications Union ITU", asignó la altura máxima de los satélites cercanos a la Tierra en 2000 *km*.

con la que un satélite cercano se mueve es mayor a  $7700 \text{ m/s}$  y tienen un período de  $1.8 \text{ hrs}$ , mientras que los satélites geoestacionarios se mueven en su órbita a  $3000 \text{ m/s}$  y tienen un período de  $24 \text{ hrs}$ .

Para las órbitas bajas, la altitud mínima está impuesta por la resistencia aerodinámica atmosférica, y la altitud máxima está determinada por el primer cinturón de radiación de Van Allen<sup>2</sup>, el cual es determinante para la electrónica de abordo.

Las relaciones matemáticas de las órbitas bajas, se rigen fundamentalmente al igual que las órbitas geoestacionarias por las 3 leyes de Kepler, la ley de la gravitación universal y las leyes del movimiento de Newton.

De lo anterior, surge inmediatamente la pregunta: ¿Cuál es la razón de considerar una nueva descripción matemática para las órbitas bajas, si estas como se menciona, tienen el mismo fundamento matemático que las órbitas geoestacionarias terrestres?; como se explica en seguida, las razones son claras.

## 1.1 Antecedentes históricos

Las órbitas bajas han retomando un auge importante en los años recientes. Esto significa, en principio, que los servicios que ofrecen no son algo nuevo; como ejemplos de aplicaciones que se les han dado pueden mencionarse las siguientes:

- a) Investigación desde el espacio exterior de los recursos naturales;
- b) estudios de fenómenos meteorológicos;
- c) experimentos de microgravedad y,
- d) observación en cuanto a defensa estratégica.

---

<sup>2</sup>El cinturón interior se extiende desde los  $800 \text{ km}$  hasta los  $4000 \text{ km}$  sobre la superficie terrestre. Está compuesto por protones y electrones que provienen de la desintegración de los neutrones producidos en la atmósfera por los rayos cósmicos, la variación de sus partículas está asociada con la actividad solar y su salida del cinturón de radiación causa las auroras y puede interrumpir las transmisiones de radio

Estas partículas cargadas se mueven con rapidez, y se encuentran atrapadas por el campo magnético terrestre.

El primer satélite de comunicaciones activo lanzado para permanecer en una órbita elíptica fue el proyecto Score en 1958. Este satélite era capaz de efectuar transmisiones de voz y teletexto en tiempo real o después de almacenarla para retransmitirla.

En 1960 el proyecto Courier ubicó un satélite en una órbita a 1100 km, el cual podía recibir, almacenar y retransmitir teletextos cada vez que pasaba sobre las estaciones terrestres.

Posteriormente, el primer satélite activo de comunicaciones colocado en una órbita baja fue el TELESTAR I, enviado al espacio en 1962, operando a una altura de 944 km, con un período orbital de 145 minutos y una trayectoria inclinada 45°. Fue utilizado para transmisiones de TV entre E.U., Francia e Inglaterra. La frecuencia utilizada para el enlace de subida era del orden de 6 GHz, mientras que la del enlace de bajada era de 4 GHz. Se caracterizó también por ser un proyecto perteneciente a un programa no gubernamental.

En el mismo año el satélite RELAY se lanzó a una altura de 1300 km, sus funciones comprendían la transmisión de TV, de datos y de facsímil. Su órbita estaba inclinada 45° con un período orbital de 185 minutos, operando a una frecuencia de enlace de subida de 4 GHz, y una frecuencia de enlace de bajada de 1.7 GHz.

No solamente fueron lanzados satélites para comunicaciones, como ejemplos de estos se tienen el Explorer y el Vanguard, que tenían como propósito la experimentación científica, meteorológica y de navegación. El TIROS (Television Infra Red Observation Satellites) se lanzó en 1960 con propósitos de navegación. Estos satélites se movían en órbitas bajas polares o inclinadas. Como contribuciones utilizando este tipo de satélites se tienen:

- a) Descubrimiento de los cinturones de radiación de Van Allen.
- b) Construcción de los perfiles de densidad atmosférica.
- c) Estudio del achatamiento de la Tierra.
- d) Construcción de perfiles de temperatura espacial.
- e) Supervivencia humana en el espacio.
- f) Estudio ambiental con presencia de micrometeoritos.



En esos tiempos, la razón del uso de órbitas bajas se debía a que no se contaba con una tecnología confiable y de desempeño elevado en cuanto a factores como las condiciones ambientales en las que operaría el satélite, las potencias de transmisión, los anchos de banda, la permanencia en órbitas muy altas, al tiempo de vida de los satélites, al procesamiento de la información y al almacenamiento de energía. Así mismo, la tecnología para colocar satélites en órbitas muy altas no estaba completamente desarrollada. Con la evolución tecnológica se pensó de inmediato en elevar las órbitas, quedando las órbitas bajas en un plano secundario.

## 1.2 Tendencia actual

En la década de los 90's se retoma el propósito de colocar satélites en órbitas bajas, empleando para ello todo lo más reciente de la tecnología, es decir, la miniaturización debida a la integración elevada de microcomponentes en equipos de radio frecuencia, computadoras para navegación y procesamiento de datos, desempeño elevado de los sistemas de almacenamiento y conversión de energía, nuevos materiales y finalmente, tanto la reducción de los costos como el mejoramiento de las técnicas para el lanzamiento de pequeños vehículos en órbitas bajas.

Por otra parte, el interés de los grupos comerciales y gubernamentales han contribuido significativamente en la propuesta y desarrollo de proyectos para colocar satélites en órbitas bajas, con la idea adicional, de complementar el trabajo de los satélites geostacionarios. Sin embargo, mucho del avance tecnológico que impulsa su tendencia actual lo realiza la industria militar, cuyos propósitos son cubrir tareas tanto de operación táctica como de colaboración con satélites específicos ubicados en órbitas altas[2].

El propósito comercial más importante de su desarrollo está en el campo de las telecomunicaciones; donde se pretenden impulsar servicios tales como la telefonía celular de cobertura mundial; la ubicación de la posición de objetos en movimiento como autos, barcos o aviones; búsqueda; rescate; y la transmisión de todo tipo de información a través de la red mundial de comunicación.

Los satélites de órbitas bajas están pensados principalmente para ofrecer servicios de comunicación de voz y datos.

A esta generación de satélites nuevos ideados para ubicarlos alrededor de los 1500 *km* de altura se les denomina también satélites ligeros, microsátélites o satélites económicos debido a que su peso puede ser menor a 500 *kg*, son de dimensiones pequeñas y a que su costo puede ir desde 1 millón hasta los 10 millones de dólares E.U[2]. Así mismo, pueden operar también en órbitas geoestacionarias, sin embargo, se encuentran por debajo de la amplia capacidad de comunicación de los satélites geoestacionarios.

Debido a su capacidad limitada, las frecuencias utilizadas por los satélites de órbitas bajas se restringe a las bandas de radio VHF y UHF del espectro electromagnético; sin embargo, actualmente se impulsa el aumento del intervalo de uso a frecuencias más altas para la transmisión. Los satélites de órbitas bajas ofrecen también la posibilidad de compartir su espectro con otros servicios en la misma banda de operación.

Los siguientes incisos muestran las ventajas principales que los caracterizan:

- a) Se requieren motores propulsores de potencia menor para poner un micro-satélite en órbita, y no se requiere tampoco de las múltiples etapas necesarias para ubicarlos en órbita.
- b) La operación en alturas cercanas reduce considerablemente la pérdida de la señal por el espacio. Se reducen también los requerimientos de suministro de potencia, demandándose consecuentemente, menos celdas solares y menos paquetes de baterías.
- c) Es posible un control de altitud simplificado.
- d) La altura cercana reduce los requerimientos de ganancia tanto para la antena del satélite como de la antena de la estación terrestre. Además de que se reduce la complejidad del seguimiento.
- e) Para comunicación de voz, los problemas de ecos son menores debido a que los retrasos en la señal son pequeños.
- f) En Tierra, la capacidad de resolución es superior.
- g) Los costos para construir y lanzar un satélite son menores.
- h) Si se emplean órbitas polares u órbitas inclinadas se pueden ofrecer servicios en latitudes elevadas.

- i) No se requieren mayores progresos tecnológicos.
- j) Pueden construirse y lanzarse en períodos cortos de tiempo; de uno a dos años o menos.
- k) Su tamaño y peso pequeños permiten que en un solo lanzamiento se envíen varios satélites a la vez.
- l) Puede ubicarse su posición mediante cambio o variación Doppler<sup>3</sup>.
- m) Los requerimientos de radiación de potencia son reducidos.
- n) Las frecuencias bajas de operación permiten utilizar antenas de costos reducidos.
- o) La cobertura de la comunicación en Tierra, puede ser tanto independiente de la localización del usuario, como global y móvil.

Por otra parte, las desventajas que se presentan cuando se tienen satélites operando en órbitas bajas son:

- a) La cobertura de un sólo satélite va de entre un 5% a un 10 % del área total de la Tierra, por lo que se requiere de un conjunto de satélites para mantener un sistema de comunicación en tiempo real entre dos puntos muy distantes, Fig. (1.1). La otra posibilidad es operar con un solo satélite que recibe la información al pasar por la estación terrestre que envía el mensaje, lo almacena, y cuando queda en línea de transmisión de información con la estación terrestre de destino se reenvía el mensaje, Fig. (1.2).
- b) Debido a su gran movilidad con respecto al receptor, las señales transmitidas experimentan el efecto Doppler<sup>4</sup> por lo cual requieren de compensación. La cantidad de corrección está en función de la altitud

---

<sup>3</sup>Una técnica plausible para separar la señal recibida de la señal transmitida cuando hay movimiento relativo entre el radar y el satélite se basa en efectuar un reconocimiento del cambio de la frecuencia de la señal repetida "eco", causada por el efecto doppler.

<sup>4</sup>Es bien conocido en el campo de la óptica y de la acústica que si ya sea una fuente de oscilación o un observador de la fuente de oscilación está en movimiento, un cambio aparente en la frecuencia de oscilación ocurrirá. Este es el efecto doppler.

Las señales transmitidas por los satélites están sujetas a experimentar el efecto de dopplerización. Esto es resultado tanto del movimiento del satélite como del movimiento de

**Altura de las órbitas: 1000 [km].**  
**Plano de las órbitas: Polar.**  
**Tipo de cobertura: Global.**  
**Número de órbitas: 6.**  
**Número de satélites por órbita: 10.**

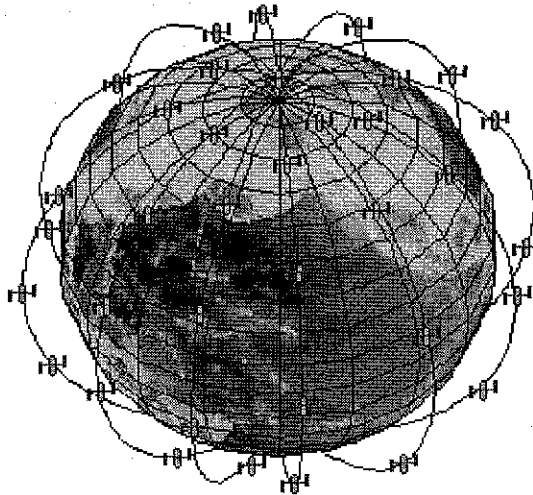


Figura 1.1: Constelación de satélites.

del satélite, la frecuencia utilizada, y de la trayectoria de vuelo con respecto a la señal transmitida (enlace de subida o de bajada).

- c) Debido a que el satélite es eclipsado por la Tierra, las baterías tienen la estación en Tierra debido a su propia rotación. Manifestándose como un cambio en frecuencia debido al movimiento relativo entre ambos.

El cambio en la frecuencia doppler es:

$$f_d = \frac{2v_r f_0}{c}$$

con

$f_0$  = frecuencia transmitida.

$v_r$  = velocidad relativa (o radial) del satélite con respecto a la antena.

$c$  = velocidad de la luz.

**TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN**

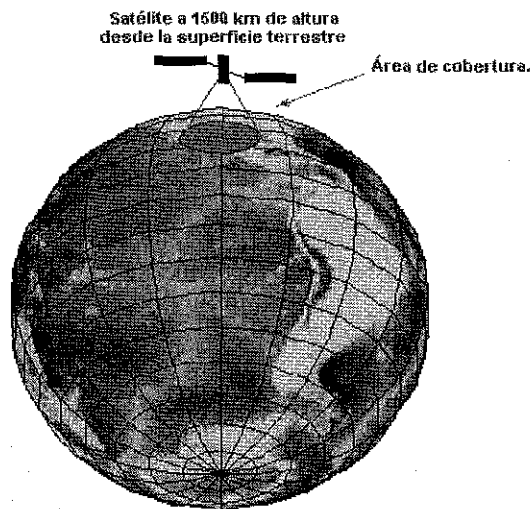


Figura 1.2: Cobertura utilizando un solo satélite.

que ser bastante eficientes para soportar la demanda de carga durante las etapas de sombra y luego recargarse durante las etapas de Sol. Los períodos de eclipse pueden reducirse al aumentar la altitud del satélite, esto es, si los requerimientos de la misión lo permiten. Algunos sistemas tienen que desactivarse durante la etapa de eclipse para conservar la carga.

- d) Las estaciones terrestres tienen que seguir el movimiento rápido de los satélites. Este problema puede minimizarse mediante el empleo de antenas tanto de cobertura hemisférica como de antenas de seguimiento direccional activadas electrónicamente o mecánicamente. En esta última, puede requerirse de intercomunicación entre satélites de la misma órbita si se requiere de servicios continuos.
- e) Tienen menor capacidad que los satélites geoestacionarios.
- f) El sistema de administración de la red de satélites es más complejo.
- g) Tienen un período de vida corto que va desde los 5 hasta los 10 años, debido fundamentalmente a la cantidad limitada de combustible que pueden almacenar, y a que están expuestos tanto a fuerzas que alteran su trayectoria así como también a un ambiente de radiación

severo.

Como puede verse, el número de ventajas que ofrece el uso de satélites en órbitas bajas es mayor que los inconvenientes que sobrevienen y, conforme evoluciona la tecnología, estos pueden disminuir aún más, de ahí la importancia que toman los proyectos de esta naturaleza.

### 1.3 Trayectorias seguidas

Una órbita se define como la trayectoria que sigue un satélite a lo largo de una curva cerrada en el espacio. En estas, los satélites de comunicaciones permanecen próximos a la Tierra siguiendo la misma trayectoria orbital durante un lapso de tiempo. Muchas órbitas diferentes han sido empleadas, teniendo cada una de ellas ventajas en cuanto a la ubicación, estacionamiento, cobertura, y calidad de la comunicación del satélite<sup>5</sup>.

Básicamente se emplean 4 órbitas para los satélites de comunicaciones[3], estas son:

- a) geoestacionaria,
- b) geosíncrona,
- c) molniya
- d) bajas.

Los parámetros básicos de estas órbitas se muestran en la tabla I.

Tabla I

Principales características de las órbitas.

| órbita   | apogeo [km] | perigeo [km] | excentricidad | período     | inclinación [grad] | efecto Doppler |
|----------|-------------|--------------|---------------|-------------|--------------------|----------------|
| geoest.  | 35786       | 35786        | 0             | 1 DS*       | 0.0                | de 0 a bajo    |
| geosínc. | 35786       | 35786        | casi 0        | 1 DS        | 0-90               | bajo           |
| molniya  | 39400       | 1000         | grande        | 1/2 DS      | 62.9               | elevado        |
| baja     | variado     | variado      | 0             | 100 min ó + | 0-90               | muy elevado    |

<sup>5</sup>Tiempo de retraso, potencia de transmisión y disponibilidad de la señal.



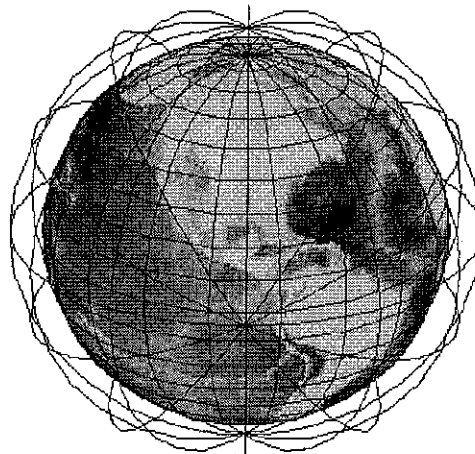
\*D.S.: Día sideral, es el tiempo que toma la Tierra para completar una revolución respecto a la bóveda celeste de estrellas fijas.

Como referencia, se analizán únicamente las características básicas de las órbitas geostacionarias ya que son las más ampliamente utilizadas:

Las órbitas geostacionarias tienen geometría circular y se localizan sobre el plano ecuatorial terrestre, siguiendo el mismo sentido de rotación que la Tierra. Su período dura 86164.1 s, igual al período rotacional de la Tierra en el espacio inercial, es decir, un día sideral. Mediante la tercera ley de Kepler, se obtiene que el radio de la órbita es de 46164 km, y ya que el radio ecuatorial de la Tierra es de 6378 km, la altitud de la órbita geostacionaria es de 35786 km. Un satélite en esta órbita, aparece permaneciendo fijo en un punto dado sobre el ecuador de la Tierra. La órbita geostacionaria es única, y puede considerarse como un recurso natural limitado.

Ahora bien, los satélites ubicados en órbitas bajas siguen básicamente trayectorias casi circulares, pudiendo tener inclinaciones que van desde los 0°, en el plano ecuatorial, hasta los 90° en el plano polar, o pueden ir más allá de los 90° cuando se trata de aplicaciones especiales. Fig. (1.3).

Altura de las órbitas: 1000 [km].  
Planos: Polares, inclinados y ecuatorial.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.3: Conjunto de órbitas bajas.

Las órbitas que se encuentran entre los  $0^\circ$  y los  $90^\circ$  se denominan progresivas, la que se sitúan en los  $90^\circ$  se conocen como polares, y las que van más allá de los  $90^\circ$  se denominan retrógradas. En las órbitas polares, los satélites pasan muy próximos a los polos. El número de satélites que se mueven en estas órbitas debe contar con un sistema de navegación apropiado Fig. (1.4).

**Altura de las órbitas: 1000 [km].**

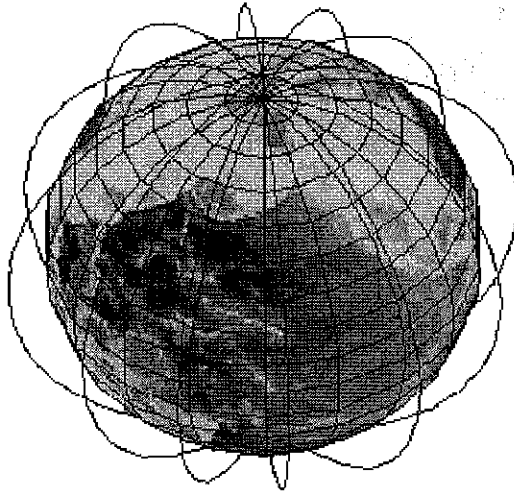


Figura 1.4: Órbitas polares.

En la Fig. (1.5) se muestra una comparación entre una órbita geostacionaria y una órbita polar baja.

Las órbitas inclinadas generalmente no proporcionan una cobertura completa en los polos, y de estas, existen normalmente varias separadas en longitud como se muestra en la Fig. (1.6).

La trayectoria de la órbita puede también ser aleatoria, es decir, el recorrido que siguen los satélites tiene variaciones en su inclinación, dando como resultado, una variación de la fase en el plano de su seguimiento en Tierra.

Para cualquiera de estos tipos de trayectoria, el área máxima de cobertura tratándose ya sea de un solo satélite, o de un grupo de satélites en una órbita, o de una constelación global satélites, está en función directa de su altitud.



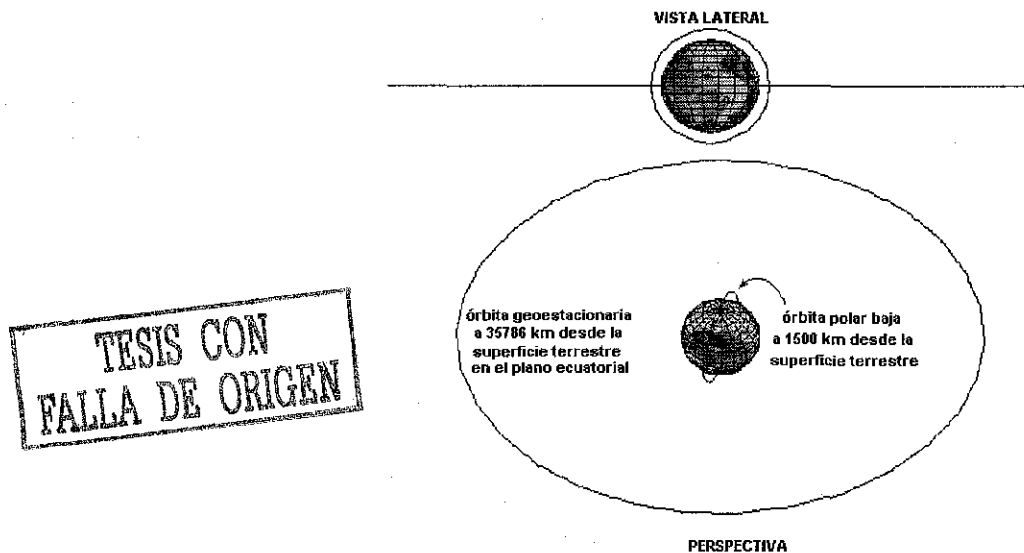


Figura 1.5: Órbita baja y órbita geoestacionaria a escala.

Por otra parte, para lograr que la transmisión sea global y en tiempo real tienen que efectuarse enlaces de comunicación entre los satélites de la constelación, los cuales pueden ser bastante complejos[4].

La primera consideración en la elección de una constelación de satélites, esta orientada para lograr una diversidad de cobertura previamente especificada, empleando para ello la menor cantidad posible de satélites. El área de cobertura que proporciona cada satélite, se determina mediante un ángulo mínimo de elevación que corresponde a la altitud del satélite, y cuya elección se basa en consideraciones de visibilidad, potencia del satélite, tamaño de la antena, tiempo de propagación de la señal y del período de eclipsamiento al cual esta sujeto el satélite.

La geometría básica entre un satélite y la estación en Tierra es mostrada por el triángulo de la figura (1.7). El primer vértice del triángulo se localiza en el centro de la Tierra, y los dos restantes, indican la posición de la estación sobre la superficie terrestre y la posición del satélite en el espacio. Usualmente son proporcionados dos lados del triángulo. Estos lados son la distancia que hay de la estación al centro de la tierra, ( $6378.14 [km]$ ), y la distancia del satélite también al centro de la Tierra. Las otras cuatro cantidades, es decir un lado y tres ángulos, son:

Altura de las órbitas: 1000 [km].

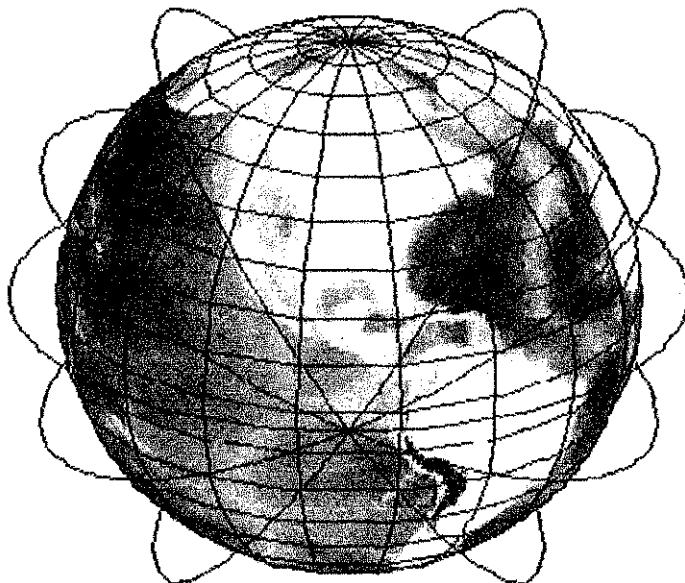


Figura 1.6: Órbitas inclinadas.

- $h$  = ángulo de elevación [grad]
- $\beta_0$  = ángulo central [grad]
- $S$  = intervalo de inclinación [km]
- $\alpha_0$  = ángulo del nadir [grad]

En una constelación de satélites, la planificación más eficiente consiste en mantener los satélites distribuidos de manera uniforme dentro de un plano orbital dado, y a su vez, manteniendo los planos igualmente espaciados con referencia al ecuador. Por lo que el número total de satélites resulta del producto del número de planos orbitales por el número de satélites en cada plano.

La visibilidad de la estación en Tierra para la comunicación mútua entre dos ó más satélites está en función de la altitud del satélite, y se requiere de un ángulo mínimo de elevación del eje del haz de la antena instalada en Tierra.

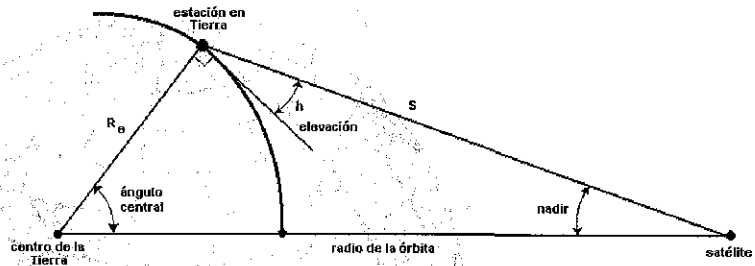


Figura 1.7: Relación geométrica entre el centro de la Tierra, la estación y el satélite.

El ángulo de elevación normalmente está dictado por el nivel aceptable de las señales de múltiples trayectorias. Este ángulo puede estar en un intervalo que va de los  $10^\circ$  a los  $20^\circ$  [4].

El número total  $N$  de satélites con orbitación polar requeridos para una cobertura ininterrumpida y global, con un ángulo mínimo de elevación de  $10^\circ$  como función de la altitud, se obtiene empleando la Ec. (1.1) [4]

$$N = ps \tag{1.1}$$

$$\approx \frac{4\sqrt{3}}{9} n \left\{ \frac{\pi}{\sin^{-1} \left[ \frac{\sqrt{(R_E+h)^2 - (R_E \cos \theta)^2} - R_E \sin \theta}{R_E+h} \right]} \right\}^2$$

donde

$$p \approx \frac{2}{3} k \frac{\pi}{\gamma}; \text{ número de planos}$$

$$s \approx \frac{2}{\sqrt{3}} j \frac{\pi}{\gamma}; \text{ número de satélites por plano}$$

$$R_E = 6378000 \text{ [m]}; \text{ radio de la Tierra}$$

$$h = \text{ altitud de la órbita}$$

- $\theta$  = ángulo de elevación
- $\gamma$  = ángulo central
- $j$  = área de cobertura dada por los satélites de un solo plano
- $k$  = área de cobertura dada por los satélites de planos vecinos
- $n = jk$  totalidad del área cubierta

La Ec. (1.1) resulta, del análisis de los parámetros geométricos para ubicar al satélite y de la capacidad de cobertura de cada satélite.

Al graficar la Ec. (1.1), se obtiene tanto el número de satélites como el número de órbitas en función de la altitud, lo cual se muestra en la Fig. (1.8).

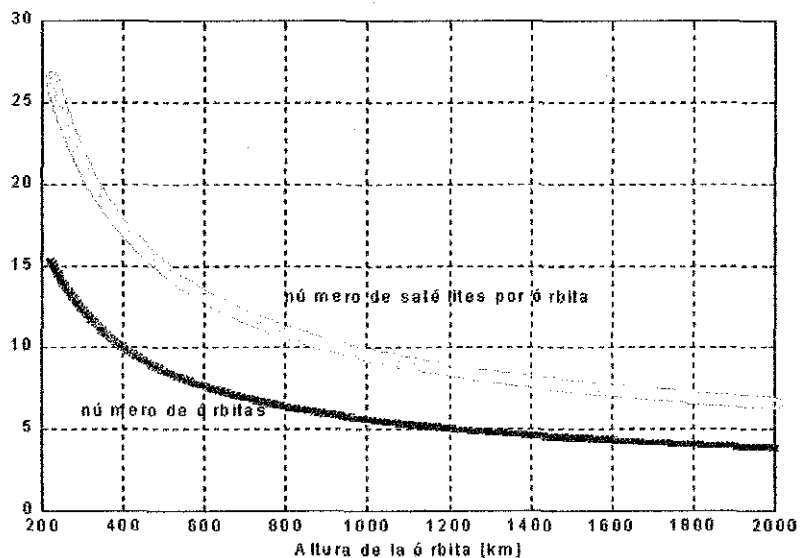


Figura 1.8: Gráfica que muestra tanto del número órbitas como de satélites por órbita.

Como puede verse, para cada altitud existen valores óptimos tanto en el número de órbitas como en el de satélites por órbita para lograr una cobertura global en tiempo real e ininterrumpida.

La determinación de la configuración más eficiente es un problema geométrico complejo, ya que un número específico de satélites tienen que ser visibles simultáneamente para un punto cualquiera sobre la Tierra.

El problema de la optimización de constelaciones ha sido estudiado por autores tales como Lüders (1961), Kork (1962) Walker (1977), y Adams y Rider (1987).

Existen básicamente siete proyectos[5] que tienen planeada la puesta en órbita de constelaciones de satélites cercanos a la Tierra, estas se muestran en la tabla II.

Tabla II

Características de los principales proyectos en órbitas bajas.

| Nombre del proyecto y costo [MMDEU]*               | No. de satélites,<br>No. de planos e<br>inclinación [grad]. | Forma de la órbita,<br>altura [km] y peso<br>del satélite [kg]. |
|--|---|---|
| 1 Iridium, Motorola, EUA, 3.4**                    | 66; 6; 90   | circular; 764.9; 1600   |
| 2 Globalstar, Loral-Qualcomm, EUA, 1.7             | 48; 8; 52   | circular; 1389; 222.3   |
| 3 Arics, Constellation Comm., Inc., EUA, 0.4 - 0.5 | 48; 4; 90   | circular; 1018.6; 124.7   |
| 4 Teledesic, Teledesic, EUA, 9.0                   | 840; 21; 98.2   | sinrosol; 700; 793.8  |
| 5 Orbcomm, Orbital Sciences Corp., EUA, ?          | 18; 2; 45<br>2; 1; 90                                       | circular; 785.2; 38.5   |
| 6 Starsys, Starsys Positioning Inc., EUA, ?        | 24; 3 6 4; 60   | circular; 1300; 100   |
| 7 Leostar, Italspuzio, Italia, ?                   | 2; 4; 90  | circular; 800; 40-60  |

\*Miles de millones de dólares estadounidenses.

\*\*Proyecto cancelado.

## 1.4 Aplicación

### 1.4.1 Telefonía celular móvil mediante bases de células y empleando satélites en órbitas bajas

La compañía de teléfonos Bell desarrolló el sistema actual de telefonía celular denominado AMPS "Advanced Mobile Phone Service", al que se hace referencia comúnmente como radio celular móvil.

El concepto celular consta esencialmente de un arreglo regular de estaciones transmisoras y receptoras llamadas bases de células.



La Fig. (1.9) muestra un sitio de bases celulares con 21 células que son utilizadas por 7 grupos de canales diferentes. Las células cubren el área geográfica que será atendida por el sistema. La forma exagonal fue elegida después de estudios detallados que demostraron la ventaja de poseer un costo reducido y permitir un sistema de administración más eficiente.

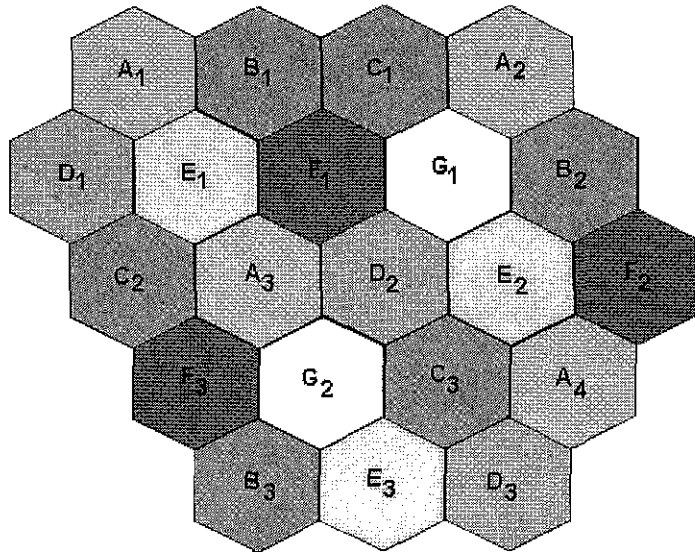


Figura 1.9: Configuración de un sistema telefónico celular.

Las dos técnicas que se emplean principalmente en los sistemas celulares son:

- a) Reuso de frecuencia: Este es un proceso que emplea la misma frecuencia de portadora (canal) en diferentes células que están separadas geográficamente. Los niveles de portadora se mantienen suficientemente bajos, así, la interferencia entre canales a la misma frecuencia no representa un conflicto.

Los sitios de células  $A_1$  y  $A_2$  en la Fig. (1.9) emplean canales a la misma frecuencia pero tienen la separación suficiente como para no interferir una con otra.

A través del reuso de frecuencia, un sistema celular puede manipular un número de llamadas simultáneas, excediendo en gran medida el número de canales asignados. El factor multiplicador por el cual la capacidad

del sistema excede los canales asignados depende primeramente del número de bases de células.

- b) Compartición de células: Un cierto número de canales de frecuencia se asignan a cada célula del sistema para formar lo que se denomina un conjunto del canal. Obviamente, se requiere de un canal para cada llamada telefónica que tome lugar en un instante cualquiera. Si el tráfico en su totalidad se incrementa más allá de la capacidad estimada, un proceso denominado compartición de células se utiliza. La Fig. (1.10) ilustra este proceso. Una célula de la Fig. (1.10) es dividida en un número de células más pequeño que cubren una área menor y que quizás correspondan al área centro de una ciudad en donde el tráfico telefónico es severo. Si es necesario, etapas sucesivas de división de células pueden ir incrementando la disponibilidad del tráfico de llamadas.

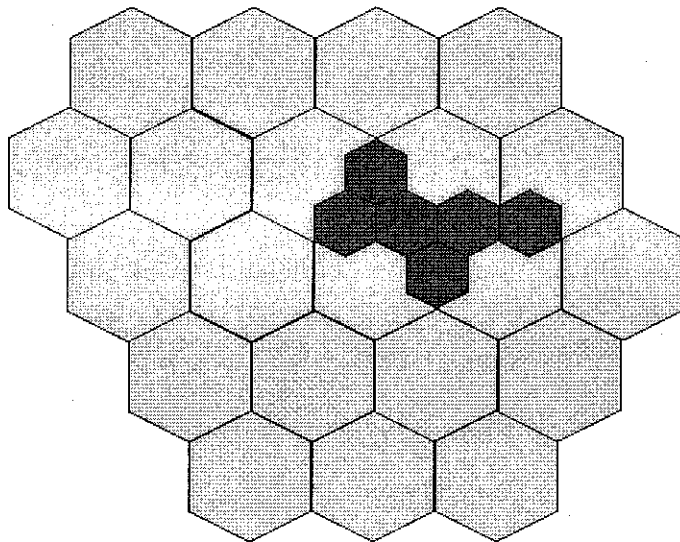


Figura 1.10: División de células.

Las técnicas de reuso de frecuencia y de división de células permiten dar servicio a lo largo y ancho del área mientras se emplea un espectro de frecuencias asignado relativamente pequeño.

El sistema AMPS opera empleado modulación de la frecuencia con una desviación pico de  $12\text{ kHz}$  y un espaciamiento del canal de  $30\text{ kHz}$ . Una

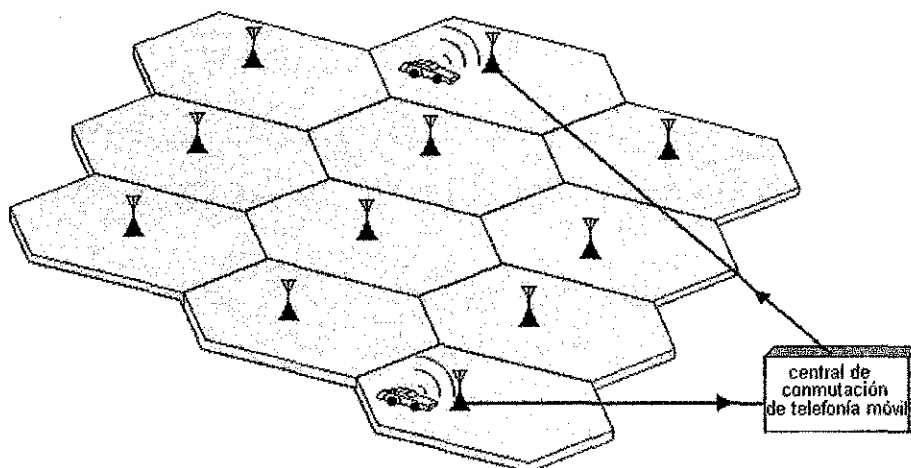


Figura 1.11: Enlace de dos usuarios en movimiento a través de una central MTSO.

conversación telefónica duplex requiere un canal de 30 kHz para transmisión y otro para recepción. Así, un sistema metropolitano típico con 666 canales duplex requiere por tanto la asignación de un espectro de 40 MHz ( $30 \text{ kHz} \times 2 \times 666$ ).

El sistema incluye una MTSO "mobile telephone switching office", las bases de las células y las unidades móviles. El procesador central MTSO controla el equipo de conmutación necesario para interconectar a los usuarios en movimiento o con la red telefónica fija; controla también la acción de las bases de las células y muchas de las acciones de la unidad móvil a través de comandos transmitidos a estos a través de las bases de las células.

Un sistema de 11 células se muestra en la Fig. (1.11) con el MTSO proporcionando un enlace a dos usuarios móviles.

Ahora bien, con los satélites de órbitas bajas, es posible irradiar todo el planeta o irradiar solo ciertas regiones de interés simulando una topología celular global. Debido a la altitud de la órbita y a la apertura de las antenas, el haz irradiado puede abarcar grandes áreas del orden de cientos de kilómetros de diámetro, a las cuales se hace referencia como megaceldas en comparación con las macro o microceldas de los sistemas celulares terrestres, cuyas áreas de cobertura son de alrededor de los  $32 \text{ km}^2$ . Adicionalmente, el haz irra-



diado puede interactuar también con la infraestructura celular existente en Tierra.

En los sistemas de comunicación celular basados en satélites de órbitas bajas, también es factible de emplearse la técnica de reuso de frecuencia para multiplicar el número de canales de que se dispone en el espectro asignado, volviendo al sistema más eficiente. Así, la estructura celular de un sistema de comunicación móvil por satélite, divide el área de cobertura en células mediante los haces múltiples irradiados provenientes de una sola antena, “antena multihaz”, y así como en los sistemas celulares terrestres, se emplea también la técnica de acceso múltiple por división de frecuencia FDMA (*frequency division multiple access*).

La Fig (1.12) ilustra un sistema celular mediante un satélite de órbita baja.

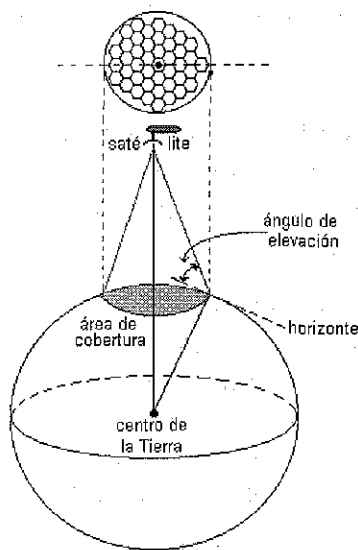


Figura 1.12: Estructura celular formada por un satélite de órbita baja.

Con esta perspectiva del tema, es posible justificar la necesidad de una descripción matemática de las órbitas terrestres bajas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## **Parte II**

# **Obtención de las ecuaciones fundamentales para una órbita baja ideal**

El punto de partida para establecer un planteamiento matemático ideal, comienza con la suposición de la forma de la órbita para el caso particular de los satélites que se mueven en trayectorias cercanas a la Tierra.

Si se consideran los casos idealizados de que la Tierra fuera esférica, no tuviera atmósfera, estuviera aislada de los demás cuerpos del sistema solar y los efectos gravitacionales fueran uniformes sobre toda su superficie, la órbita seguida por cualquier satélite sería elíptica, con forma y tamaño indefinidamente constantes, y la dirección del plano de órbita permanecería siempre constante con respecto a las estrellas.

Así, la idea de suponer una órbita elíptica es apropiada como una primera consideración, no obstante, debido a la cercanía de la órbita en la que se mueve el satélite con la Tierra, la órbita tiende a tomar una forma casi circular, que para efectos prácticos es considerada como circular.

Por lo anteriormente expuesto, se considera el movimiento de un satélite en una órbita cuya forma puede ser ya sea elíptica o circular.

Adicionalmente se distingue al estudiar la trayectoria de un satélite en órbita, que su movimiento está relacionado en gran medida con algunas de las características más importantes de la trayectoria seguida por una partícula que se mueve bajo la influencia de un campo gravitacional considerado uniforme, por lo tanto, se enfatizará en la trayectoria que sigue una partícula que experimenta los efectos de una fuerza de atracción hacia un punto.

Con estas suposiciones, se logrará obtener paso a paso un conjunto de ecuaciones que describan en movimiento de los satélites artificiales que giran en torno a la Tierra a través de una órbita baja.

---

## 2. Leyes de Kepler y ley de la gravitación de Newton

---

### 2.1 Leyes de Kepler para el movimiento planetario

El estudio del movimiento planetario dio lugar al descubrimiento de los factores principales que alteran la fuerza gravitacional ejercida sobre un cuerpo, es decir, se logró determinar, como actúa la fuerza gravitacional al tratar de entender bajo que condiciones los cuerpos se mueven. Johannes Kepler, después de realizar un análisis cuidadoso de los datos observados por Tycho Brahe, encontró que podía predecir el movimiento de los planetas al considerar los siguientes principios:

- a) *La órbita de cada planeta es elíptica con el Sol en uno de los focos.*
- b) *El radio vector dirigido desde el Sol al planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.*
- c) *Los cuadrados de los períodos de los planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de sus órbitas respectivas.*

Estas, son las 3 leyes de Kepler. Las primeras dos se publicaron en 1609 y la tercera en 1619 y precedieron a las leyes del movimiento de Newton por aproximadamente 70 años.

### 2.2 Ley de la gravitación de Newton

Una de las contribuciones más importantes al desarrollo de la mecánica es la ley de gravitación, la cual puede expresarse como sigue:

*Dos partículas cualesquiera se atraen una a otra con una fuerza que actúa a lo largo de la línea que las une y su magnitud es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Esta ley puede plantearse cuantitativamente en forma de ecuación:

$$F_r = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son las masas de las partículas,  $r$  es su separación, y  $G$  la constante universal que es independiente de la naturaleza de las masas o de su localización en el espacio y cuyo valor es

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \left[ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right].$$

El signo menos de la Ec. (2.1) es debido a que  $F_r$  es una fuerza de atracción.

### 2.3 Potencial de gravitación y energía potencial

La fuerza ejercida por un campo de atracción sobre una masa  $m$  hacia un punto fijo es completamente radial y es igual a

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} \\ &= -\frac{K}{r^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $V$  es la energía potencial,  $K$  una constante y  $r$  es la distancia que hay desde el centro de atracción a la partícula. Ya que la fuerza es función únicamente de  $r$ , puede integrarse la Ec. (2.2) dando como resultado

$$V = -\frac{K}{r} + C$$

$C$ , es una constante arbitraria de integración. Para el caso de la atracción que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, se considera  $C = 0$ , lo que implica que la energía potencial  $V$  es siempre negativa y se aproxima a cero a medida que  $r$  tiende a infinito. Entonces, la energía potencial puede expresarse como:

$$V = -\frac{K}{r} \quad (2.3)$$

habiéndose elegido la referencia cero para la energía potencial en  $r = \infty$ , esto es, para una separación infinita entre las partículas. Así, para el caso de la atracción gravitacional entre dos partículas, se encuentra que

$$K = Gm_1m_2. \quad (2.4)$$

Considérese ahora, la fuerza que actúa sobre una masa unitaria debida a la presencia de una segunda masa  $m_2$ . Fijando  $m_1 = 1$ , se obtiene de la Eq. (2.1) que la fuerza puede escribirse en la siguiente forma

$$\mathbf{f} = -\frac{Gm_2}{r^2}\mathbf{e}_r \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{e}_r$  es un vector unitario dirigido de  $m_2$  hacia la masa unitaria. Al mover la masa unitaria, el vector  $\mathbf{f}$  puede evaluarse en todos los puntos del espacio, excepto en  $m_2$ . La fuerza en cada punto es una medida de la intensidad del campo gravitacional debido a  $m_2$  y se denomina intensidad del campo gravitacional. Las unidades de  $\mathbf{f}$  son fuerza por unidad de masa, o aceleración. De hecho,  $\mathbf{f}$  es justamente la aceleración absoluta que la masa unitaria podría tener si esta fuera liberada en cualquier punto.

Lo anterior, se considera como la aceleración gravitacional en ese punto.

Ahora bien, la fuerza ejercida sobre una partícula por un campo de fuerza conservativo es

$$\mathbf{F} = -\nabla V$$

en donde  $\nabla$  representa el gradiente de la función escalar  $V$  definido por

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Es claro entonces, que para este caso en el cual  $m_1 = 1$ , pueda escribirse

$$\mathbf{f} = -\nabla\phi \quad (2.6)$$

donde

$$\phi = -\frac{Gm_2}{r}. \quad (2.7)$$

Esta expresión representa la energía potencial por unidad de masa, es decir, para  $m = 1$ , y se denomina potencial de gravitación.

Si se requiere encontrar la fuerza ejercida sobre una masa unitaria debido a la presencia de otras  $n$  partículas, entonces, las fuerzas individuales se sumarán.

Para el caso de dos partículas, se define el potencial  $\phi$  en un punto dado como la energía potencial por unidad de masa. La energía potencial, no obstante, puede considerarse también como el trabajo requerido para mover el sistema desde una configuración predefinida a otra cualquiera. En este caso, el potencial  $\phi$  es justo el trabajo hecho contra el campo para atraer una masa unitaria desde el infinito hasta un punto dado<sup>1</sup>.

### 2.3.1 Campo de gravedad de una esfera

Considerese ahora una esfera con distribución de masa simétrica, es decir, que su densidad dependa exclusivamente de la distancia que hay desde su centro, y que además, ésta distancia permanezca esencialmente constante para una envoltura o cascarón esférico delgado cuyo centro coincide con el de la esfera; se podrá determinar en consecuencia, la intensidad de su campo de gravedad de la siguiente manera: Primero, se calcula el potencial debido al cascarón esférico delgado, pudiéndose obtener entonces, el potencial de la esfera sólida superponiendo los resultados de todos los cascarones cuyo radio varíe desde cero hasta el valor del radio de la esfera.

Así, el potencial  $\phi$  afuera del cascarón esférico delgado está determinado matemáticamente por

$$\phi = -\frac{Gm}{r}, \quad (r > a) \quad (2.8)$$

y adentro del cascarón esférico el potencial es

$$\phi = -\frac{Gm}{a}, \quad (r \leq a).$$

---

<sup>1</sup>Lo anterior, no incluye el trabajo que se requiere para reunir a las  $n$  masas en sus posiciones dadas, y por lo tanto, no se debe relacionar directamente a la energía potencial del sistema.

La masa total del cascarón esférico es la densidad de superficie  $\sigma$  veces el área, es decir

$$m = 4\pi a^2 \sigma,$$

con  $r$  la distancia que hay desde el centro hasta el punto de interés,  $a$  el radio de la esfera y  $\sigma$  la masa por unidad de área.

Al emplear la Ec. (2.6) se observa que la expresión para la fuerza gravitacional por unidad de masa es

$$\mathbf{f} = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (r > a)$$

para todos los puntos afuera de la esfera. Aquí, la distancia  $r$  es también mayor que el radio  $a$  de la esfera, y  $\mathbf{e}_r$  es un vector unitario radial.  $\mathbf{f} = 0$  para todos los puntos adentro de la esfera.

De lo anterior se deduce, que el campo de gravedad externo de un cascarón esférico delgado es el mismo como si toda su masa estuviera concentrada en el centro, y por otra parte, el cascarón no ejercerá fuerza gravitacional alguna sobre cualquier partícula que pudiera encontrarse en su interior.

Al considerar ahora una esfera sólida compuesta de cascarones esféricos concéntricos, puede verse entonces que el campo externo es justo aquel debido a la suma de las masas de los cascarones concentrados en un centro común, por lo que el potencial  $\phi$  afuera de la esfera puede escribirse como

$$\phi = -\frac{Gm}{r}, \quad (r > a). \quad (2.9)$$

donde  $m$  es ahora la masa total de la esfera, y  $r$  es nuevamente la distancia que hay desde el centro a un punto de interés.

La intensidad correspondiente al campo de gravedad es

$$\mathbf{f} = -\frac{Gm}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad (r > a). \quad (2.10)$$

Nuevas deducciones surgen: a medida que se avanza radialmente desde el centro a la superficie de una esfera homogénea, la intensidad del campo se



incrementa linealmente con la distancia; después de que la superficie se ha alcanzado, la intensidad decrece como el cuadrado inverso de la distancia.

Concluyendo finalmente, que la fuerza ejercida por la esfera sobre una partícula externa, es idéntica a la que ejercería la masa de la esfera concentrada en su centro.

---

### 3. Interacción “Tierra- Satélite”

---

#### 3.1 Atracción gravitacional mutua entre dos cuerpos esféricos $m_1$ y $m_2$

Nuevamente se considera que las distribuciones de masa son simétricamente esféricas para cada uno de los cuerpos, así, cada cuerpo puede considerarse como una partícula cuando se determina el movimiento de sus centros. Adicionalmente, ahora los cuerpos se encuentran en un marco de referencia inercial elegido arbitrariamente que se traslada con el centro de masa del sistema (un sistema aislado).

Sean  $r_1$  y  $r_2$  los vectores de posición de  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente, en relación al centro de masa como se muestra en la Fig. (3.1).

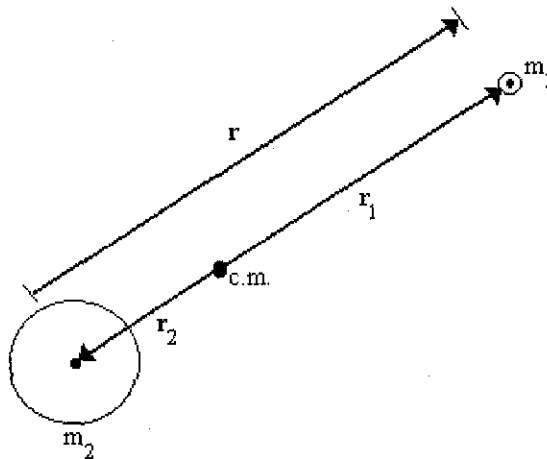


Figura 3.1: Sistema de dos cuerpos en donde se muestran sus vectores de posición.

Empleando la ley de la gravitación de Newton se encuentra que la fuerza mútua entre  $m_1$  y  $m_2$  es

$$f_{1-2} = f_{2-1} = \frac{Gm_1m_2}{(r_1 + r_2)^2}. \quad (3.1)$$

Ya que  $r_1$  y  $r_2$  se han medido desde el centro de masa del sistema bi-particular, se tiene:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (3.2)$$

La fuerza que siente  $m_1$  es:

$$f_{12} = -\frac{K_1}{r_1^2} \quad (3.3)$$

donde,

$$K_1 = \frac{Gm_1m_2}{\left[1 + \frac{m_1}{m_2}\right]^2} \quad (3.4)$$

y la fuerza que siente  $m_2$  es:

$$f_{21} = -\frac{K_2}{r_2^2} \quad (3.5)$$

donde,

$$K_2 = \frac{Gm_1m_2}{\left[1 + \frac{m_2}{m_1}\right]^2}. \quad (3.6)$$

De las Ecs. (3.3) y (3.5) se concluye que la fuerza ejercida sobre cada masa varía con el cuadrado inverso de su distancia desde el centro de masa; este centro de masa se encuentra fijo como se dijo en un marco de referencia inercial.

Se distingue por lo tanto, que el problema de la interacción entre los dos cuerpos se reduce al problema de encontrar el movimiento de una partícula la cual es atraída por una fuerza que variará con el cuadrado inverso de la distancia hacia un punto fijo.

### 3.2 Movimiento de una masa (satélite) relativo a otra (Tierra)

Usualmente se trabaja considerando el movimiento de la masa más pequeña, por ejemplo un satélite, relativo a la atracción de la masa que es mucho más grande, como la Tierra. Supóngase entonces que el vector de posición  $m_1$  relativo a  $m_2$  es

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2. \quad (3.7)$$

Ahora, empleando la Ec. (3.1) y la ecuación de movimiento de Newton se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{12} &= m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ &= -m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{r^3} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De las Ecs. (3.7) y (3.5) resulta

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ &= -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.9)$$

se tiene por lo tanto que

$$\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_{12}, \quad (3.10)$$

pudiéndose interpretar este resultado como sigue: el movimiento de  $m_1$  relativo a  $m_2$  es el mismo como si  $m_2$  estuviera fijo y  $m_1$  fuera reemplazado por la masa reducida  $m_{r1}$

$$m_{r1} = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}; \quad (3.11)$$

manteniéndose la fuerza  $\mathbf{f}_{12}$  sin cambio.

### 3.3 Energía cinética

La energía cinética del sistema relativa a un marco de referencia inercial que se mueve con el centro de masa, y en donde se supone también que tanto  $m_1$  como  $m_2$  se mueven con respecto al centro de masa a un ritmo angular  $\omega$ , está dada por:

$$E_k = \frac{1}{2}m_{r1} \left( \dot{r}^2 + r^2\omega^2 \right) \quad (3.12)$$

en donde  $m_{r1}$  es la masa reducida dada por la Ec. (3.11).

Este resultado muestra que la energía cinética correcta del centro de masa con respecto al marco de referencia inercial, se obtiene al suponer que  $m_2$  está fijo, y al emplear la masa reducida  $m_{r1}$  en lugar de  $m_1$  en la ecuación típica para la energía cinética.

### 3.4 Energía potencial

La energía potencial esta dada por:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{Gm_1m_2}{r} \\ &= -\frac{Gm_{r1}m_{r2}}{r} \end{aligned} \quad (3.13)$$

en donde

$$m_{r2} = (m_1 + m_2). \quad (3.14)$$

Si se supone que  $m_2$  está fijo y si se reemplazan las masas  $m_1$  y  $m_2$  por  $m_{r1}$  y  $m_{r2}$  respectivamente, entonces, el cálculo tanto de las fuerzas, como de los movimientos relativos y las energías del sistema serán correctos.

### 3.5 Ecuación de la órbita

Posterior al estudio del problema de los dos cuerpos, el cual se redujo al estudio de una masa que está siendo atraída hacia un punto fijo por una fuerza que varía en proporción inversa al cuadrado de la distancia que la

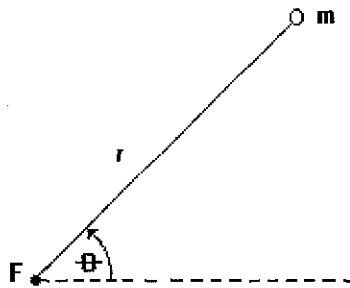


Figura 3.2: Coordenadas polares para una partícula  $m$  que experimenta una atracción cuadrado-inversa hacia un foco fijo  $F$ .

separa, puede considerarse ahora, el caso de una partícula de masa  $m$  que es atraída hacia un foco fijo  $F$ , como se muestra en la Fig. (3.2):

Ya que la única fuerza que actúa sobre la partícula está en la dirección radial negativa, se observa que su movimiento está confinado al plano descrito tanto por el radio vector como por el vector de velocidad de la partícula, razón por la que también la aceleración está en ese plano en cualquier instante.

Empleando coordenadas polares, con  $r$  medido desde un foco fijo y  $\theta$  medido desde una línea de referencia fija, puede escribirse la ecuación de movimiento en términos de fuerza y aceleración para las componentes  $r$  y  $\theta$ :

$$\begin{aligned}
 F_r &= ma_r & (3.15) \\
 &= m \left( \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 F_\theta &= ma_\theta & (3.16) \\
 &= m \left( r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} \right).
 \end{aligned}$$

Para incluir la fuerza por unidad de masa conviene escribir:

$$\frac{F_r}{m} = -\frac{\mu}{r^2} \quad (3.17)$$

donde  $\mu$  es una constante positiva conocida como el coeficiente de gravitación. Puede verse de la Ec. (3.14) que para el caso del estudio del problema de la interacción de dos cuerpos en el cual  $m_2$  se considera fijo

$$\mu = G(m_1 + m_2). \quad (3.18)$$

El valor de  $\mu$  puede obtenerse de manera similar para los casos del movimiento de  $m_1$  o de  $m_2$  con respecto a su centro de masa común.

De las Ecs. (3.15) y (3.17) se obtiene:

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \quad (3.19)$$

ya que  $F_\theta = 0$ , se observa de la Ec. (3.16) que

$$r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} = 0$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (3.20)$$

Las Ecs. (3.19) y (3.20) son las ecuaciones diferenciales de movimiento para la partícula  $m$ .

Al integrar directamente la Ec. (3.20) se obtiene:

$$h = r^2 \dot{\theta} \quad (3.21)$$

en donde  $h$  es una constante que representa el momento angular por unidad de masa; de aquí que la Ec. (3.21) establezca que el momento angular de la partícula con respecto al foco de atracción  $F$  se conserve.

La forma en que la Ec. (3.19) está planteada corresponde a una ecuación diferencial no lineal, en donde la variable independiente es el tiempo, sin

embargo, es preferible resolver directamente para  $r$  como función de  $\theta$ . Así, se efectúa el siguiente cambio de variable:

$$r = \frac{1}{u} \quad (3.22)$$

al despejar  $\theta$  de la Ec.(3.21) se obtiene

$$\theta = hu^2. \quad (3.23)$$

En suma, se encuentra que

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \\ &= -h \frac{du}{d\theta} \end{aligned} \quad (3.24)$$

y

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} \\ &= -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

substituyendo en la Ec.(3.19) se obtiene:

$$-h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2 u^3 = -\mu u^2$$

o equivalentemente

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (3.26)$$

La solución general para la Ec. (3.26) tiene la forma

$$u = \frac{\mu}{h^2} + C \cos(\theta - \theta_0) \quad (3.27)$$



donde  $C$  y  $\theta_0$  son constantes.

Las constantes pueden evaluarse considerando el sistema cuando  $\theta = \theta_0$ . De las Ecs. (3.24) y (3.27), se observa que  $\dot{r} = 0$  en ese instante; por lo tanto la energía total  $e$  por unidad de masa es:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{\mu}{r} \\ &= \frac{1}{2} h^2 u^2 - \mu u \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituyendo  $u$  de la Ec. (3.27) en la Ec. (3.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{2} h^2 \left( \frac{\mu}{h^2} + C \right)^2 - \mu \left( \frac{\mu}{h^2} + C \right) \\ &= \frac{1}{2} h^2 C^2 - \frac{\mu^2}{2h^2} \end{aligned}$$

despejando  $C$  resulta

$$C = \sqrt{\frac{\mu^2}{h^4} + \frac{2e}{h^2}} \quad (3.29)$$

donde se eligió arbitrariamente la raíz cuadrada positiva, ya que cualquier cambio posterior de signo puede manipularse mediante la elección de  $\theta_0$ . No obstante, es evidente que la elección de  $\theta_0$  especifique la dirección de la línea de referencia desde la cual  $\theta$  se mide, por lo que se fija  $\theta_0 = 0$  por conveniencia, y como resultado, se obtiene la ecuación de la órbita

$$u = \frac{\mu}{h^2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{\mu^2}} \cos \theta \right) \quad (3.30)$$

o

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \left( \frac{2eh^2}{\mu^2} \right) \cos \theta}} \quad (3.31)$$

Se observa que  $r = r_{\min}$  cuando  $\theta = 0$ ; por lo tanto  $\theta$  se mide partiendo de la línea dibujada desde  $F$  al punto más cercano de la órbita.

$e$  y  $h$  son ahora independientes de la posición de la partícula en una órbita dada y se denominan constantes dinámicas de la órbita. Puede verse que para un coeficiente de gravitación  $\mu$  dado, el tamaño y la forma de una órbita están completamente determinadas por estas dos constantes.

El cálculo de la tasa a la cual, la línea que une el centro de atracción con la partícula recorre el área, se obtiene como:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} h \end{aligned} \quad (3.32)$$

se denomina velocidad de área recorrida, y es constante para cualquier órbita dada. De aquí la segunda ley de Kepler, que establece que la velocidad de área recorrida de cada planeta es constante, y que es equivalente al planteamiento que hace el momento angular, debido a que el movimiento orbital de cada planeta alrededor del Sol es constante.

---

## 4. Geometría de la órbita

---

La ecuación de órbita dada ya sea por la Ec. (3.30) o por la Ec. (3.31) es la representación en coordenadas polares de una clase de curvas denominadas secciones cónicas.

Para propósitos de este estudio, se presentan inicialmente las características geométricas más importantes de dos tipos de secciones cónicas: el círculo y la elipse. Con estas bases, se podrán correlacionar las propiedades geométricas de las órbitas circulares y elípticas con las constantes dinámicas  $e$  y  $h$ .

La ecuación general de una sección cónica escrita en términos de coordenadas polares es:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (4.1)$$

donde  $p$  es el *semilatus rectum* y  $\epsilon$  es la excentricidad;  $p$  es un parámetro que gobierna el tamaño de la sección cónica y representa el valor de  $r$  para  $\theta = \pm\pi/2$ ; por otra parte, la excentricidad  $\epsilon$  determina la forma de la sección cónica.

### 4.1 Elipse y círculo

Para una elipse  $0 \leq \epsilon < 1$ , mientras que para el círculo, considerado como un caso especial, se tiene que  $\epsilon = 0$ . Una elipse puede definirse como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia desde un punto dado  $F$ , es un factor constante  $\epsilon$  multiplicado por su distancia desde una línea recta llamada directriz Fig. (4.1). Alternativamente puede definirse también, como el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de sus distancias a los dos focos,  $F$  y  $F'$ , es una longitud constante  $2a$  la cual es también la longitud del eje mayor. La distancia entre los focos es justamente  $\epsilon$  veces la longitud del eje mayor. Puede verse de la Fig. (4.1) que el semi eje menor  $b$  está relacionado con el semieje mayor  $a$  por la ecuación

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (4.2)$$

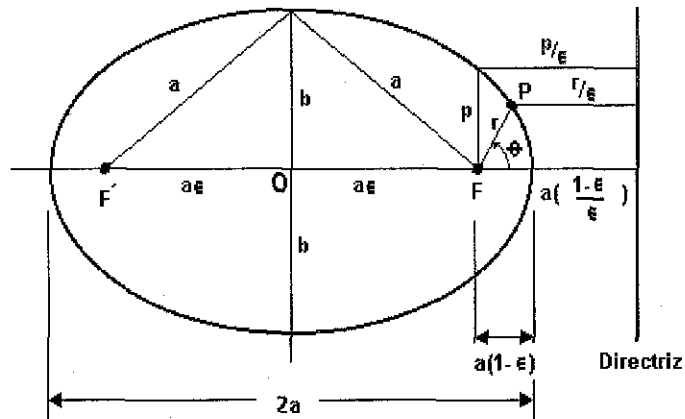


Figura 4.1: Elipse.

De la Ec. (4.1) y de la Fig. (4.1) se obtiene que el valor mínimo de  $r$ , es decir *el perigeo*, esta representado por

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{p}{1 + \epsilon} \\ &= a(1 - \epsilon) \end{aligned} \quad (4.3)$$

y de manera similar, el valor máximo de  $r$ , *el apogeo*, esta expresado matemáticamente por

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{p}{1 - \epsilon} \\ &= a(1 + \epsilon). \end{aligned} \quad (4.4)$$

De las Ecs. (4.3) y (4.4) se observa que

$$a = \frac{1}{2} (r_p + r_a) \quad (4.5)$$

lo cual indica la razón por la que  $a$  es algunas veces conocida como la distancia media. También, se obtiene de estas ecuaciones una expresión para la excentricidad  $\epsilon$ , esta es:

$$\epsilon = \frac{1}{2a} (r_a - r_p). \quad (4.6)$$

De cualquiera de las Ecs. (4.3) o (4.4) se encuentra que:

$$p = a(1 - \epsilon^2) \quad (4.7)$$

y por lo tanto, la ecuación general para la elipse dada por la Ec. (4.1) puede escribirse también en la forma siguiente:

$$r = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (4.8)$$

Esta es la ecuación para una elipse en términos de sus constantes geométricas  $a$  y  $\epsilon$ .

El área de la elipse puede calcularse distinguiendo que ésta es justo el área proyectada de un círculo de radio  $a$  sobre un plano no paralelo, de lo que resulta una deformación de proporción  $b/a$  para todas las líneas paralelas al eje menor. De aquí que el área total de la elipse es:

$$\begin{aligned} A &= \pi a^2 \left( \frac{b}{a} \right) \\ &= \pi ab. \end{aligned} \quad (4.9)$$

---

## 5. Conexiones entre las relaciones orbitales

---

### 5.1 Constantes dinámicas y geométricas

De la Ec. (3.31), se concluyó que tanto la dimensión como la forma de la órbita están determinadas por las constantes dinámicas  $e$  y  $h$ ; y por otra parte, se encontró que una sección cónica, puede expresarse en términos de las constantes geométricas  $a$  y  $\epsilon$ .

Ahora, se determina como, las constantes dinámicas y geométricas están relacionadas.

Para tal efecto, inicialmente se comparan las Ecs: (3.31) y (4.1) encontrándose que:

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2eh^2}{\mu^2}} \quad (5.1)$$

y

$$p = \frac{h^2}{\mu}. \quad (5.2)$$

Se encuentra también de las Ecs. (4.7) y (5.2) que el semieje mayor puede escribirse alternativamente como

$$a = \pm \frac{h^2}{\mu(1 - \epsilon^2)} \quad (5.3)$$

o substituyendo  $\epsilon$  de la Ec.(5.1) en la Ec. (5.3) se obtiene

$$a = \pm \frac{\mu}{2e} \quad (5.4)$$

donde la elección del signo corresponderá ya sea al caso de la órbita elíptica (-) (o al caso de la órbita hiperbólica (+) no estudiado en este trabajo). Se

observa también que para una cierta masa  $m$  y un coeficiente gravitacional  $\mu$  dado, el *semilatus-rectum*  $p$ , es solamente una función del momento angular, y el semieje mayor  $a$  es solamente una función de la energía total.

Se han definido  $a$  y  $\mu$  como cantidades positivas. Consecuentemente, se observa de la Ec. (5.4) que la energía total tiene que ser negativa para una órbita elíptica (positiva para una órbita hipérbolica y cero para el caso límite, es decir, una órbita parabólica).

De manera general, la energía total por unidad de masa es justamente la suma de las energías cinética y potencial:

$$e = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (5.5)$$

donde  $v$  es la velocidad de la partícula en órbita. Puede verse que tal energía se conserva; por lo tanto,  $e$  puede considerarse como la energía cinética residual en la medida que  $r$  se aproxima a infinito. Para el caso de una órbita elíptica,  $e$  es negativa y la partícula no puede escapar debido a que la energía cinética tiene que ser positiva o cero en todo momento.

De las Ecs. (5.4) y (5.5), obtenemos la siguiente ecuación:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} \pm \frac{1}{a} \right). \quad (5.6)$$

Este resultado, que se conoce como la integral *vis-viva*, es esencialmente un planteamiento de la conservación de la energía, el cual indica un hecho importante: si una partícula a una distancia  $r$  desde el foco  $F$  tiene una cierta velocidad  $v$ , entonces, el semieje mayor de su órbita es el mismo, a pesar de la dirección en la cual la partícula se mueve.

Para el caso particular de una órbita circular, se observa que  $r = a$ , y se obtiene de la Ec.(5.6) que

$$v^2 = \frac{\mu}{r}, \quad (\epsilon = 0) \quad (5.7)$$

y de la Ec. (5.5),

$$e = -\frac{\mu}{2r}, \quad (\epsilon = 0). \quad (5.8)$$

Finalmente, conviene escribir de manera general la ecuación para una sección cónica en términos de  $r_p$ . De las Ecs. (4.1) y (4.3) se encuentra que:

$$r = \frac{r_p(1 + \epsilon)}{1 + \epsilon \cos \theta} \quad (5.9)$$

esta ecuación es válida para el caso elíptico (y también para el caso hiperbólico no estudiado). Ahora se define  $r_a$  como el valor de  $r$  correspondiente a  $\theta = \pi$ . De la Ec. (5.9) se obtiene

$$r_a = \frac{r_p(1 + \epsilon)}{1 - \epsilon}$$

o

$$\epsilon = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (5.10)$$

( $r_a$  es negativo para el caso hiperbólico, no estudiado).

## 5.2 Período de la órbita

El período  $T$  del movimiento en una órbita elíptica se encuentra al dividir el área total entre la velocidad de área recorrida. De las Ecs. (3.32), (4.2) y (4.9) se encuentra que

$$\begin{aligned} T &= \frac{\pi ab}{\dot{A}} \\ &= \frac{2\pi a^2 \sqrt{1 - \epsilon^2}}{h} \end{aligned}$$

Pero de la Ec. (5.3) se observa que

$$h = \sqrt{\mu a (1 - \epsilon^2)}$$

y por lo tanto el período es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \quad (5.11)$$



Esta ecuación es el planteamiento de la tercera ley de Kepler. Destacando, que es aplicable exáctamente para el caso de una partícula que está siendo atraída hacia un punto fijo por una fuerza que actúa conforme al cuadrado inverso de la distancia que la separa.

### 5.3 Anormalidad excéntrica, un replanteamiento de la ecuación de órbita

Ya se han descrito algunos de los factores más importantes que influyen tanto en la forma como en el tamaño de las órbitas circulares y elípticas, asociados estos, con la fuerza de atracción que actúa en relación al cuadrado inverso de la distancia.

Ahora bien, cuando se introduce el factor tiempo dentro del análisis, ya sea para encontrar la posición como función del tiempo o vice versa, los cálculos se ven facilitados al introducir  $E$ , otro parámetro geométrico denominado anormalidad excéntrica, Fig. (5.1)

Recuerdese el hecho de que una elipse puede considerarse como la proyección de un círculo de radio  $a$  sobre un plano no paralelo, resultando un factor de deformación  $b/a$  para todas las líneas que son paralelas al eje menor. Invirtiendo este proceso, se encuentra que el punto  $P$  sobre la elipse corresponde a  $P'$  sobre el círculo auxiliar. El ángulo  $E$  que se mide con respecto al centro  $O$ , y que da la posición de  $P'$  relativa al perigeo, se conoce como la *anormalidad excéntrica*. Por otra parte, el ángulo  $\theta$  que da la posición actual  $P$ , como se ve desde el foco  $F$ , se conoce como la anormalidad auténtica. La ecuación que relaciona  $E$  y  $\theta$  se encuentra de la Fig. (5.1) al distinguir que:

$$AP = \frac{b}{a}AP'$$

donde  $b/a$  es la relación de deformación.

De aquí

$$\begin{aligned} r \sin \theta &= \frac{b}{a} (a \sin E) \\ &= a \sqrt{1 - \epsilon^2} \sin E \end{aligned} \tag{5.12}$$

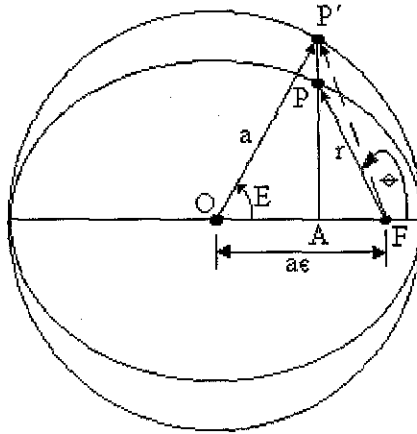


Figura 5.1: Anormalidades auténtica y excéntrica.

empleando la ecuación general para la elipse dada en la Ec. (4.8), se obtiene

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin \theta}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (5.13)$$

También se observa de la Fig. (5.1) que

$$r \cos \theta = a (\cos E - \epsilon). \quad (5.14)$$

Ahora, si se elevan al cuadrado y se suman las Ecs. (5.12) y (5.14) se obtiene la ecuación de órbita en términos de la anomalía excéntrica, esto es,

$$r = a (1 - \epsilon \cos E). \quad (5.15)$$

De las Ecs. (5.14) y (5.15), se obtiene

$$\cos E = \frac{\epsilon + \cos \theta}{1 + \epsilon \cos \theta}. \quad (5.16)$$

Finalmente, de las Ecs. (5.13) y (5.16), se obtiene otra ecuación que relaciona  $E$  y  $\theta$ , es decir

$$\begin{aligned}\tan \frac{E}{2} &= \frac{\sin E}{1 + \cos E} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \tan \frac{\theta}{2}.\end{aligned}\tag{5.17}$$

## 5.4 Cronometraje y ubicación de la órbita

### 5.4.1 Órbita elíptica

Se obtendrá ahora una expresión que relaciona el tiempo con la posición en una órbita elíptica. Para ello se emplea la convención de que el tiempo  $t$  se mide a partir del instante en que la partícula pasa por el perigeo. Inicialmente, se retoma de la segunda ley de Kepler el hecho de que el radio vector  $FP$  de la Fig. (5.1) recorre áreas iguales en tiempos iguales. De manera similar, la línea  $F'P'$  recorre áreas iguales en tiempos iguales ya que, como se vio,  $F'P'$  es la proyección de  $FP$  sobre el plano de la órbita, y todas las áreas se verán reducidas de acuerdo con el factor constante  $b/a$  como resultado de esta proyección. El área recorrida por  $F'P'$  es el área total multiplicada por la fracción de período desde su paso por el perigeo, o  $\pi a^2 t/T$ . Sin embargo, esta área es justo el área de un sector del ángulo  $E$  menos el área del triángulo  $OFF'$ . Así, puede escribirse

$$\frac{\pi a^2 t}{T} = \frac{1}{2} a^2 E - \frac{1}{2} a^2 \epsilon \sin E$$

o empleando la Ec. (5.11)

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (E - \epsilon \sin E).\tag{5.18}$$

Esta ecuación puede escribirse también en la forma:

$$\begin{aligned}M &= \frac{2\pi t}{P} \\ &= E - \epsilon \sin E\end{aligned}\tag{5.19}$$

donde la anomalía media  $M$  es el desplazamiento angular desde el perigeo de una línea que se mueve a un ritmo angular promedio  $n = 2\pi/T$ . La Ec. (5.19) se conoce como la ecuación de Kepler y la tasa angular  $n$  se denomina el movimiento medio.

Para calcular el tiempo requerido entre dos puntos cualesquiera  $\theta_1$  y  $\theta_2$  en una órbita, simplemente se evalúa  $t_2 - t_1$ , donde  $t_1$  y  $t_2$  son los correspondientes tiempos medidos desde el perigeo. Esto se complementa en cada caso al evaluar inicialmente la anomalía excéntrica  $E$  a partir del conocimiento de  $e$  y  $\theta$ ; entonces, el tiempo se obtiene de la ecuación de Kepler.

---

## 6. Órbitas cercanas a la Tierra (bajas) seguidas por los satélites

---

En esta sección se emplearán las ecuaciones obtenidas previamente con la finalidad de aplicarlas en el contexto orbital terrestre; además, se replantearán algunas de estas en términos de proporciones adimensionales más apropiadas para que sean particularmente más aplicables en este caso.

### 6.1 Órbita circular

Si el movimiento de un satélite se considera relativo al de la Tierra, puede emplearse entonces el coeficiente gravitacional dado por la Ec. (3.18), es decir

$$\mu = G(m_t + m_s) \quad (6.1)$$

en donde  $m_t$  es la masa de la Tierra y  $m_s$  es la masa del satélite. Para el caso de los satélites artificiales, se observa que  $m_s \ll m_t$  y por lo tanto puede menospreciarse  $m_s$  en el cálculo de  $\mu$ . También, la masa reducida en este caso es justo la masa del satélite, como puede verse de la Ec. (3.11).

Otro enfoque expresa  $\mu$  en términos de la aceleración gravitacional  $g_0$ . Al fijar la fuerza gravitacional por unidad de masa igual a la aceleración en la superficie de la Tierra, se obtiene de la Ec. (3.17) que

$$-\frac{\mu}{R^2} = -g_0$$

o

$$\mu = g_0 R^2 \quad (6.2)$$

donde  $R$  es el radio de la Tierra;

$$\begin{aligned}
 R &= 6.373 \times 10^6 \text{ m} \\
 g_0 &= 9.814 \text{ m/s}^2 \\
 \mu &= 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2.
 \end{aligned}$$

Supongase ahora, que un satélite se encuentra en una órbita circular con respecto a la superficie de la Tierra, y además, que la resistencia aerodinámica no existe. Al observar que la atracción gravitacional por unidad de masa es igual a la aceleración centrípeta, se obtiene

$$g_0 = \frac{v_c^2}{R}$$

o

$$v_c = \sqrt{g_0 R} \quad (6.3)$$

donde  $v_c$  es la velocidad del cuerpo en una órbita circular con respecto a la superficie de la Tierra:

$$v_c = 7909 \text{ m/s.}$$

De las Ecs. (7.2) y (7.3) se obtiene  $\mu$  en terminos de  $v_c$

$$\mu = Rv_c^2 \quad (6.4)$$

Similarmente, para una órbita circular alrededor de la Tierra, la velocidad  $v$  se encuentra igualando las magnitudes de las fuerzas gravitacional y centrífuga por unidad de masa. Así, en acuerdo con la Ec. (5.7),

$$\frac{v^2}{r} = \frac{\mu}{r^2}$$

o, empleando las Ecs. (7.3) y (7.4), se obtiene

$$\begin{aligned}
 v &= v_c \sqrt{\frac{R}{r}} \\
 &= R \sqrt{\frac{g_0}{r}}.
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

La energía total se encuentra de las Ecs. (5.8) y (7.4); esto es

$$\begin{aligned}
 e &= -\frac{Rv_c^2}{2r} \\
 &= -\frac{g_0 R^2}{2r}.
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

El período de una órbita circular rasante en la superficie de la Tierra es

$$\begin{aligned}
 T_c &= \frac{2\pi R}{v_c} \\
 &= 5063 \text{ s} \\
 &= 84.38 \text{ min.}
 \end{aligned}$$

Para una órbita circular de radio  $r$ , se obtiene de la tercera ley de Kepler que el período es

$$T = \left(\frac{r}{R}\right)^{3/2} P_c.
 \tag{6.7}$$

## 6.2 Órbita en general con respecto a la Tierra

Supongase que un satélite tiene en un cierto punto de su órbita una velocidad  $v$  y un ángulo de trayectoria de vuelo  $\gamma$ . El ángulo  $\gamma$  es positivo si asciende desde el plano horizontal local hacia el vector de velocidad  $\mathbf{v}$ , como se muestra en la Fig. (7.1).

Al conocer  $r$ ,  $v$ , y  $\gamma$  en un instante dado, es suficiente para calcular los parámetros principales de la órbita, además de la orientación del plano orbital en el espacio, como se demuestra a continuación:

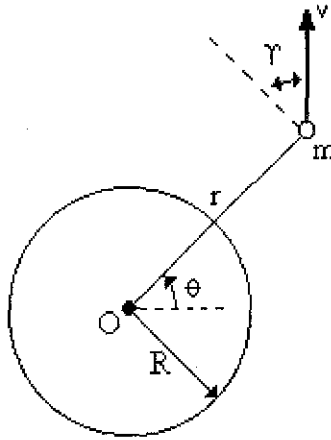


Figura 6.1: Angulo de la trayectoria de vuelo de un satélite.

Primeramente se observa que el momento angular por unidad de masa es:

$$h = rv \cos \gamma \quad (6.8)$$

de la Fig. (7.1) se tiene que

$$\tan \gamma = \frac{\dot{r}}{r \dot{\theta}} \quad (6.9)$$

También, de las Ecs. (5.5) y (7.4) se observa que

$$e = \frac{1}{2} v_c^2 \left[ \left( \frac{v}{v_c} \right)^2 - 2 \frac{R}{r} \right] \quad (6.10)$$

Ahora, de las Ecs. (5.4), (7.4), y (7.10), se obtiene una expresión para el semieje mayor:

$$a = \pm \frac{R}{2(R/r) - (v/v_c)^2} \quad (6.11)$$

donde el signo + corresponde a la órbita elíptica (el signo - corresponde al caso de la órbita hiperbólica). La excentricidad  $e$  se encuentra de la Ec. (5.1)



mediante la substitución de las expresiones precedentes para  $e$  y  $h$ , resultando

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 \left(2\frac{R}{r} - \frac{v^2}{v_c^2}\right) \cos^2 \gamma} \quad (6.12)$$

o

$$\epsilon = \sqrt{\sin^2 \gamma + \left(1 - \frac{rv^2}{Rv_c^2}\right)^2 \cos^2 \gamma}. \quad (6.13)$$

Hasta la Ec. (6.13) se han calculado las constantes dinámicas  $h$  y  $e$  así como las constantes geométricas  $a$  y  $\epsilon$  a partir del conocimiento anticipado de  $r$ ,  $v$ , y  $\gamma$  en un instante dado, tal información se obtiene de los datos de seguimiento para un caso práctico.

Otro parámetro de importancia es la anormalidad auténtica  $o$ , equivalentemente, la ubicación del perigeo. De la ecuación general de una sección cónica, se obtiene

$$\cos \theta = \frac{1}{\epsilon} \left[ \pm \frac{a}{r} (1 - \epsilon^2) - 1 \right] \quad (6.14)$$

que al derivar con respecto al tiempo resulta

$$\sin \theta = \frac{\pm a}{\epsilon r^2} (1 - \epsilon^2) \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}}. \quad (6.15)$$

Dividiendo la Ec. (7.15) entre la Ec. (7.14) y observando que  $\tan \gamma = \dot{r} / r \dot{\theta}$ , se encuentra que

$$\tan \theta = \frac{\pm (a/r) (1 - \epsilon^2)}{\pm (a/r) (1 - \epsilon^2) - 1} \tan \gamma.$$

Pero de las Ecs. (7.11) y (7.12), vemos que

$$\pm \frac{a}{r} (1 - \epsilon^2) = \frac{r}{R} \left(\frac{v}{v_c}\right)^2 \cos^2 \gamma$$

y por lo tanto

$$\tan \theta = \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\cos^2 \gamma - \frac{R}{r} \left( \frac{v_c}{v} \right)^2}. \quad (6.16)$$

Finalmente, es conveniente escribir la ecuación para la velocidad orbital en términos de proporciones adimensionales. De las Ecs. (5.6) y (7.4), obtenemos

$$v^2 = Rv_c^2 \left( \frac{2}{r} \pm \frac{1}{a} \right). \quad (6.17)$$

---

## 7. Datos que proporcionan las ecuaciones ideales obtenidas.

---

De las ecuaciones obtenidas, se pueden mostrar ya los datos más relevantes para un satélite que se mueve en una órbita circular, pudiendo ir esta desde los 220 km hasta los 2000 km de altura sobre la superficie terrestre.

Con la ayuda del lenguaje de programación MATLAB, se muestra un conjunto de gráficas que permiten visualizar el comportamiento de las siguientes variables:

- De la Ec. (2.10) se obtiene la gráfica de la intensidad del campo gravitacional que experimenta el satélite en diferentes órbitas debido a la masa de la Tierra, Fig. (7.1).

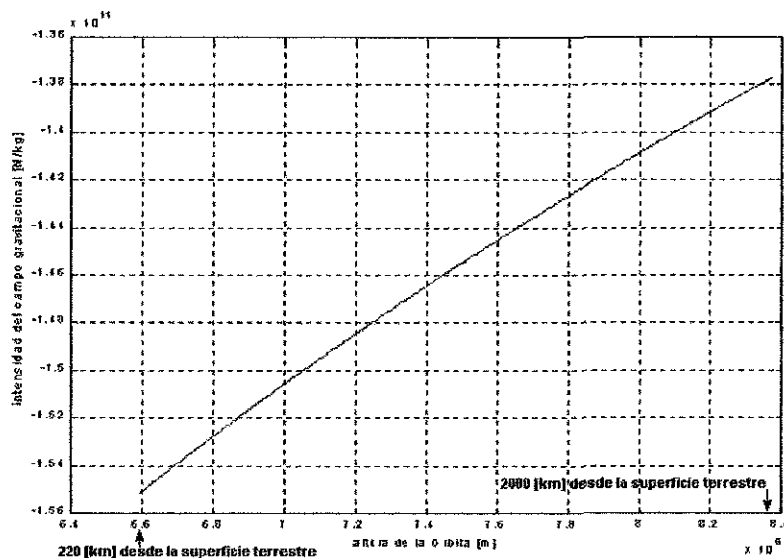


Figura 7.1: Intensidad del campo gravitacional que siente un satélite con respecto a la altura de la órbita.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- De la Ec. (6.5) se construye la gráfica de la velocidad del satélite para distintas alturas de la órbita, Fig. (7.2):

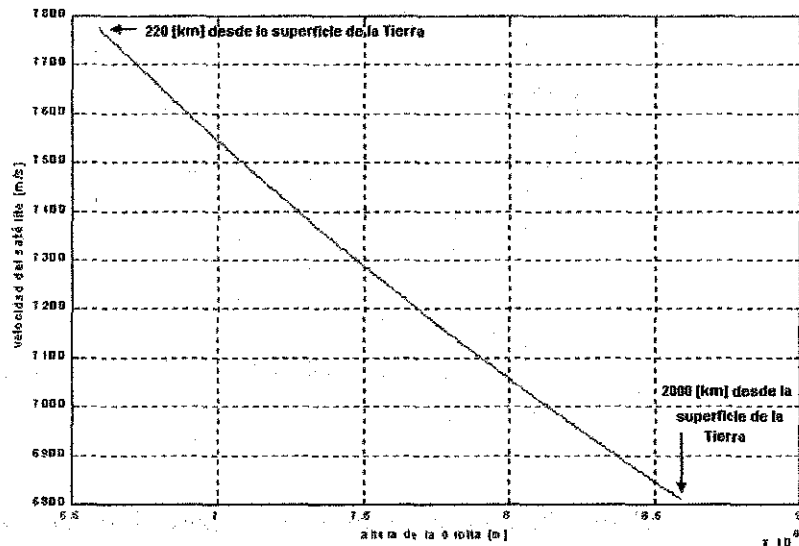


Figura 7.2: Velocidad del satélite con respecto a la altura de la órbita.

- De la Ec. (6.7) se construye la gráfica del período del satélite para diferentes alturas de la órbita, Fig. (7.3):
- De la Ec. (7.6) se obtiene la energía total (suma de las energías potencial y cinética) por unidad de masa para diferentes alturas de la órbita, Fig. (7.4):

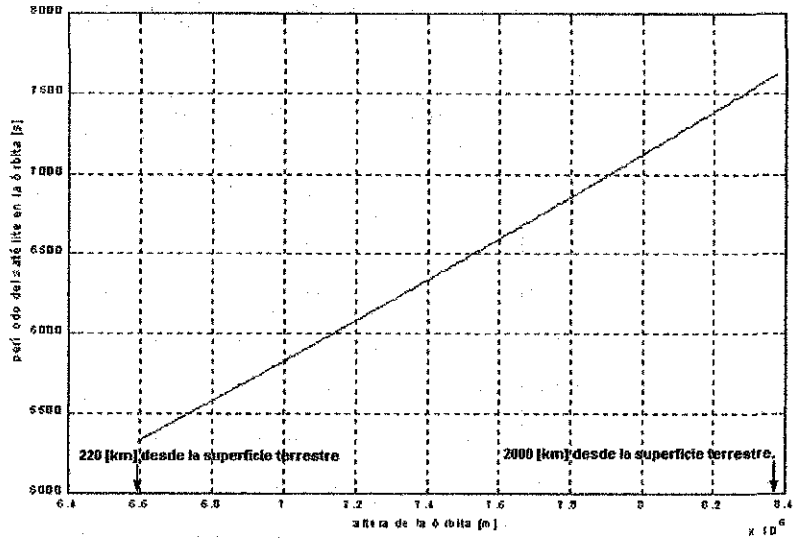


Figura 7.3: Período del satélite para diferentes alturas de la órbita.

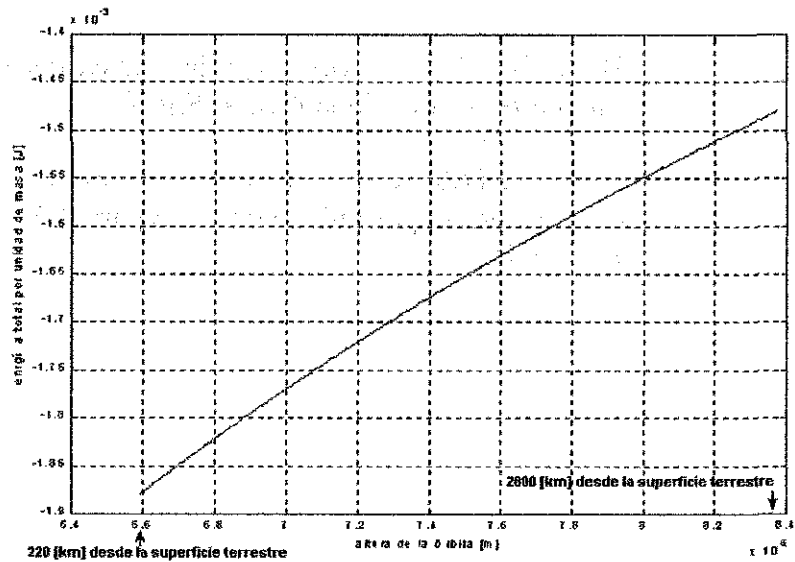


Figura 7.4: Energía total por unidad de masa para diferentes alturas de la órbita.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## **Parte III**

# **Análisis realista de la trayectoria orbital seguida por los satélites cercanos a la Tierra**

Los conceptos matemáticos detallados hasta aquí, serían suficientes para describir la trayectoria de cualquier satélite que girara en torno a la Tierra bajo condiciones ideales. Sin embargo, todos los satélites que se encuentran actualmente en cualquier tipo de órbita, se ven expuestos inevitablemente a un conjunto de fuerzas y fenómenos que alteran su permanencia en dicha trayectoria.

En esta parte, se proporciona en forma general un análisis de los factores principales que en la realidad alteran la trayectoria de un satélite, y que en consecuencia, limitan su permanencia indefinida en una órbita.

Las fuerzas ejercidas sobre el satélite tienen diversos orígenes, una de ellas lo es el campo gravitacional producido por la Tierra. Este fue el eje del análisis ideal al suponerlo con una atracción radial uniforme. Sin embargo, en la realidad, el comportamiento del campo no es uniforme, debido a la morfología de la Tierra, y tiene como se verá, una influencia importante para que el satélite en órbita modifique su trayectoria.

Por otra parte, ya que el propósito de este trabajo se restringe únicamente al análisis de la trayectoria del movimiento de los satélites que se ubican en órbitas cercanas a la Tierra, se tiene que [6]:

- Un satélite que se mueve por debajo de los 120 *km*, usualmente permanece en órbita solo por unas cuantas revoluciones.
- Cualquier satélite que se desplace dentro de los primeros 100 *km* de altura, saldrá inmediatamente de órbita debido a la resistencia aerodinámica enorme, sumergiéndose en la atmósfera baja para dejar una estela incandescente.
- Los satélites que se encuentran a 1000 *km* de altura sienten una resistencia aerodinámica apreciable.
- Los satélites que exceden los 2000 *km*, dejan de experimentar considerablemente el efecto de la resistencia aerodinámica, pero se ven afectados por otro conjunto de fuerzas que también alteran su trayectoria.

En consideración a lo anterior, se define un satélite en una órbita cercana a la Tierra u órbita baja, si se encuentra a una altura promedio de 1500 *km*. Esta consideración es útil para valorar ordenes de magnitud y especificar límites de validez para un satélite que se mueve en dichas órbitas.

La fuerza gravitacional de la Tierra y la resistencia aerodinámica son los factores que alteran de manera determinante la trayectoria orbital de un satélite cercano a la Tierra. Sin embargo, también se suman a estas otro conjunto de fuerzas que tienen una influencia mucho menor, como ejemplos de ellas están: La fuerza gravitacional lunisolar, el efecto de la radiación solar directa y reflejada, los efectos de las mareas en la Tierra y en mucho menor escala, la fuerza gravitacional ejercida por los planetas.

A continuación se proporciona un análisis de todas ellas, no obstante, es importante presentar inicialmente un marco de referencia que nos permita ubicar una posición en el espacio.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



---

## 8. Parámetros utilizados como referencia orbital

---

Este estudio comienza con la descripción de un marco de referencia que permita ubicar por completo una posición en el espacio.

Para ubicar cualquier punto sobre la superficie de la Tierra se consideran inicialmente los siguientes conceptos:

- El eje imaginario de rotación de la Tierra atraviesa su superficie en dos puntos: los polos norte y sur.
- Si se traza un círculo que pase a través de los polos se denominará *meridiano*; el meridiano que pasa por Greenwich Inglaterra es conocido como el primer meridiano.
- El círculo de perímetro máximo que divide a la Tierra formando los hemisferios norte y sur se llama *ecuador*.
- La *latitud* de un punto cualquiera es su distancia angular con vértice en el centro de la Tierra medida ya sea al norte o al sur del ecuador.
- La *longitud* se define como la distancia angular con vértice en el centro de la Tierra entre el primer meridiano y cualquier otro meridiano "*sobre el plano del ecuador*". La longitud puede medirse ya sea hacia el este o hacia el oeste. Lo anterior se ilustra en la Fig. (8.1).

La órbita elíptica más general, con el satélite ubicado en el plano del ecuador terrestre se muestra en la Fig. (8.2). El centro de la Tierra se encuentra en el foco 1<sup>1</sup>, mientras que el foco 2 se mantiene vacante.

Los símbolos indicados en la Fig. (8.2) representan:

$$a = \text{semieje mayor}$$

---

<sup>1</sup>Primera ley de Kepler.

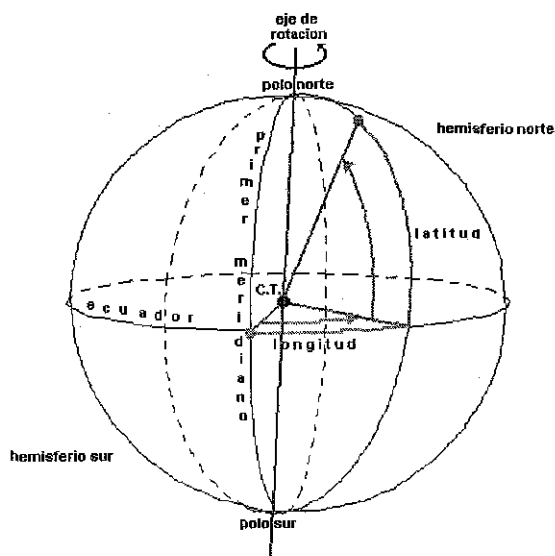


Figura 8.1: Sistema de coordenadas básico.

- $b$  = semieje menor
- $P$  = *perigeo*, medido desde el centro de la Tierra
- $A$  = *apogeo*, medido desde el centro de la Tierra
- $c$  = distancia desde el foco al centro de la órbita
- $\epsilon$  = excentricidad
- $\theta$  = anomalía auténtica, ángulo con vértice en el foco entre la línea absidal (eje mayor) y el radio vector trazado desde el foco al satélite en órbita.
- $r$  = radio vector
- $Ke$  = *p*; *semi-latus-rectum* de la elipse.

En la sección 3.2, se dijo, que el movimiento relativo de un sistema aislado compuesto de dos cuerpos, puede reducirse al estudio del problema del movimiento de una partícula que es atraída por una fuerza que varía con el inverso de la distancia al cuadrado desde un punto fijo. De lo que resultó la ecuación vectorial de movimiento, Ec. (3.9), que es equivalente a tres ecuaciones diferenciales escalares de segundo orden, por lo tanto, seis constantes de integración aparecen en la solución completa. Estas constantes, pueden

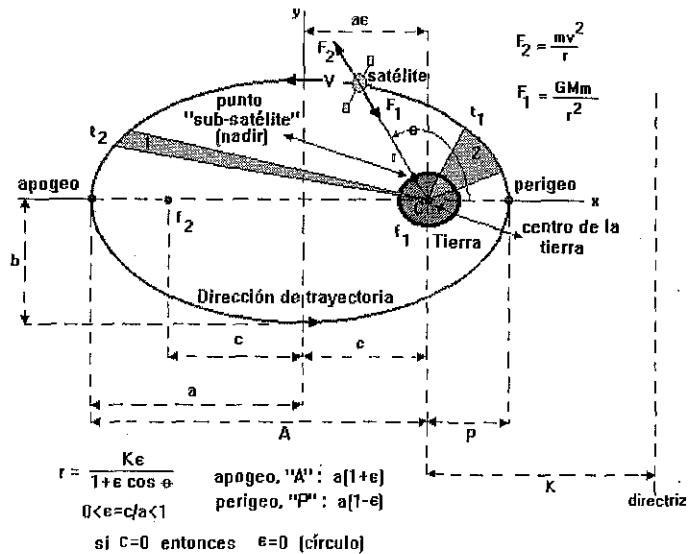


Figura 8.2: Órbita elíptica generalizada.

evaluarse mediante el conocimiento previo de seis condiciones iniciales independientes, tales como las componentes de posición y velocidad relativas a un tiempo inicial  $t_0$ . El tamaño, la forma y orientación de la órbita, así como la posición del cuerpo dentro de la órbita en cualquier tiempo  $t$ , estarán determinados por los valores de estas seis constantes.

En lugar del empleo directo de estas seis condiciones iniciales, es más conveniente utilizar otro conjunto de seis parámetros independientes, los cuales son equivalentes pero más apropiados para determinar el tamaño, forma y la orientación de la órbita. Estos se denominan elementos orbitales.

Por lo tanto, para construir el desarrollo matemático realista de un sistema orbital, se requiere definir un sistema de referencia que permita determinar completamente la posición de un satélite en su recorrido alrededor de la Tierra. Para ilustrar el significado de los elementos orbitales, se considera el caso particular de una órbita alrededor de la Tierra Fig. (8.3).

El cuadro de referencia  $xyz$  es no rotacional con su origen  $C$  en el centro de la Tierra, y el eje positivo  $z$  es correspondiente al Polo Norte. Se elige el eje positivo  $x$  para apuntar hacia la dirección del Sol, equinoccio de primavera, esto es, a lo largo de la línea de intersección entre el plano ecuatorial de la

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

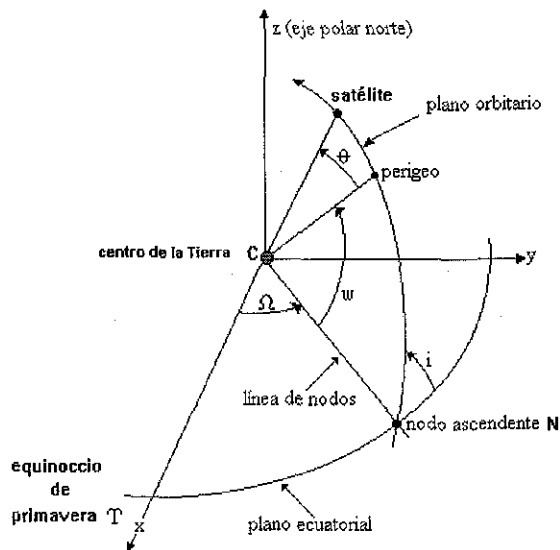


Figura 8.3: Parámetros orbitales para describir la trayectoria orbital alrededor de la Tierra vista desde el satélite.

Tierra y el plano eclíptico<sup>2</sup>.

Así, primero se definen los tres ángulos que dan la orientación de la órbita de los satélites en el espacio Fig. (8.4).:

- **Inclinación orbital  $i$** , ( $0 \leq i \leq \pi$ ). El ángulo  $i$  se mide entre el plano ecuatorial y el plano orbital del satélite, o equivalentemente, entre el eje del Polo Norte y el vector de momento angular. La definición de la inclinación  $i$ , es tal que si  $0 \leq i < \pi/2$  para un satélite que se mueve de este a oeste, la órbita va en progreso, es decir, en la misma dirección en que la Tierra rota. La inclinación determina la latitud máxima alcanzada por el satélite: la máxima latitud es igual a  $i$  si  $i < 90^\circ$ , o  $(180^\circ - i)$  si  $i > 90^\circ$ . Para  $\pi/2 < i \leq \pi$ , la órbita es retrograda.
- **Ascensión recta del nodo ascendente RAAN  $\Omega$** , ( $0 \leq \Omega < 2\pi$ ). El nodo ascendente  $N$ , es el punto donde el plano de la órbita del satélite cruza el plano ecuatorial con una componente de velocidad dirigida hacia el norte. El ángulo  $\Omega$ , se mide hacia el este en el plano ecuatorial entre la dirección del Sol, equinoccio de primavera, y el nodo

<sup>2</sup>Plano orbital de la Tierra.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

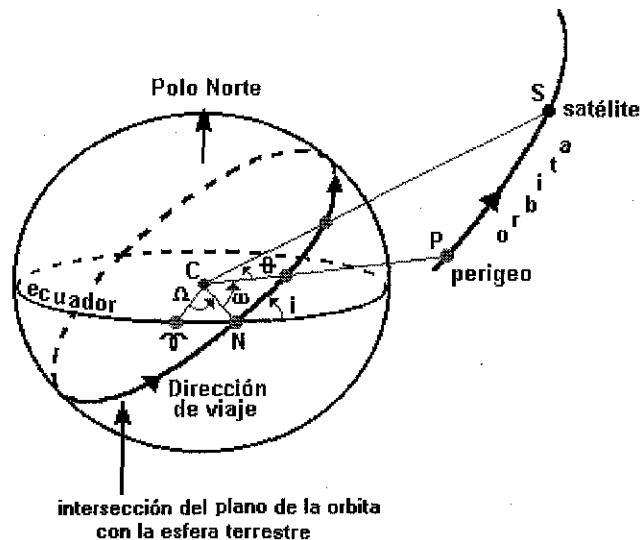


Figura 8.4: Diagrama que define  $i$ ,  $\Omega$ , y  $\omega$ , desde la Tierra.

ascendente.  $\Upsilon$  es el punto fijo en el cielo conocido como el primer punto de Aries o también equinoccio de primavera, el cual sirve como referencia para ubicar todas las posiciones de las estrellas. En realidad,  $\Upsilon$  indica la intersección entre plano de la eclíptica<sup>3</sup> y el ecuador de la Tierra, no está fijo en relación a las estrellas, ya que el eje de la Tierra tiene un movimiento rotacional retrógrado alrededor del polo de la eclíptica, que produce un movimiento gradual de los equinoccios hacia el oeste<sup>4</sup> una vez cada 26 000 años; este movimiento es muy lento, y no afecta las estimaciones de estudio.

La ascensión recta de una estrella medida hacia el este desde  $\Upsilon$ , es simplemente otro nombre para su longitud, y el ángulo  $\Omega$ , o  $\Upsilon CN$ , pueden llamarse ya sea ascensión recta del nodo ascendente, o simplemente la longitud del nodo. La línea de intersección de los planos orbital y ecuatorial se denomina la línea de nodos.

Si un satélite cruza el ecuador yendo de sur a norte en el equinoccio de primavera  $RAAN=0^\circ$ .

<sup>3</sup>Plano de la órbita terrestre alrededor del Sol.

<sup>4</sup>Precesión.

- **Argumento del perigeo  $\omega$** , ( $0 \leq \omega < 2\pi$ ). Especifica la dirección  $CP$  del perigeo dentro del plano orbital.  $\omega$ , es el ángulo entre el nodo ascendente y el perigeo medido siguiendo la órbita en la dirección de movimiento; esto es, si  $\omega = 0^\circ$ , el perigeo está sobre el ecuador, y si  $\omega = 90^\circ$ , el perigeo está en la latitud norte máxima. Especifica la orientación de la órbita dentro del plano orbital.

El ángulo formado por  $ON$  y  $OP$ , permanece fijo para un solo valor de inclinación.  $\omega$  es un ángulo entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ .

Los tres elementos orbitales restantes son el semieje mayor  $a$ , la excentricidad  $\epsilon$  y, finalmente, el instante de tiempo al pasar por el perigeo, con referencia al ángulo  $\theta$ .

El tamaño y la forma de la órbita están definidos mediante el semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $\epsilon$ , como se distingue en la Fig.(8.5).

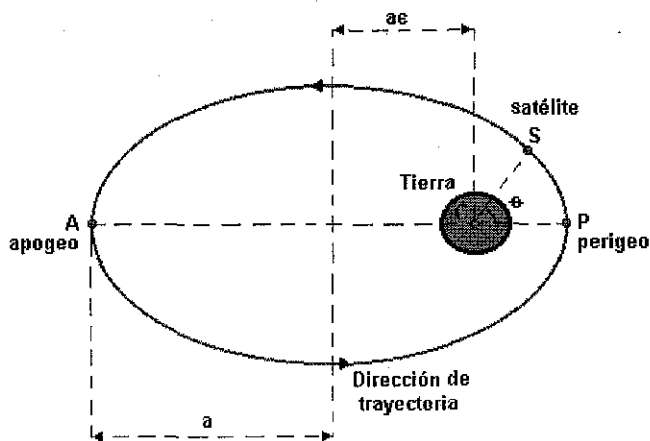


Figura 8.5: Diagrama que muestra el semieje mayor  $a$  y la excentricidad  $\epsilon$ .

El punto  $P$  donde el satélite se encuentra más próximo al centro de la Tierra se denomina *perigeo*; la distancia  $CP$  del perigeo es  $a(1-\epsilon)$ . Al otro extremo del semieje mayor se encuentra el *apogeo*  $A$ , en este lugar el satélite se encuentra en el punto más alejado del centro de la Tierra, y  $CA=(1+\epsilon)$ . El semieje mayor  $a$  puede considerarse como la distancia media desde el satélite

al centro de la Tierra, en el sentido de que es el promedio de las distancias del perigeo y el apogeo.

La tercera ley de Kepler asegura que  $a^3$  es proporcional a  $T^2$ , donde  $T$  es el período de la órbita, es decir, el tiempo necesario para efectuar una revolución.

Es conveniente definir también el movimiento medio  $n$  como  $2\pi/T$ ; así la tercera ley de Kepler puede expresarse como:

$$n^2 a^3 = \mu \quad (8.1)$$

con  $\mu$  la constante gravitacional de la Tierra igual a  $398\,600 \text{ [km}^3\text{s}^{-2}\text{]}$  y  $n$ , medida en radianes por segundo.

La ubicación del satélite  $S$  en su órbita, puede especificarse mediante la distancia angular que este hubo viajado reactiva al centro de la Tierra desde su paso por el perigeo, esto es, el ángulo  $PCS$  en la Fig.(8.4). Este ángulo  $\theta$  es la anormalidad auténtica.

Algunas veces se emplea como una variable angular la anormalidad media  $M$ , la cual, si  $n$  es constante, esta dada por  $M = nt$ , donde  $t$  es el tiempo después de haber pasado por el perigeo.

De manera frecuente se hace referencia a los primeros tres componentes orbitales como elementos de orientación orbital; y a los últimos tres, como elementos de dimensionamiento orbital.

En resumen, los valores de los seis elementos orbitales  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  y  $\theta$  especifican el tamaño, la forma, y la orientación de la órbita, así como la posición del satélite a lo largo de la órbita para cualquier instante dado  $t$ .

---

## 9. Fuerzas que alteran la trayectoria de un satélite en órbita

---

La idea de una órbita casi circular se ha planteado como una aproximación adecuada a la geometría que tiene en realidad la Tierra, sin embargo, esa trayectoria casi circular se ve alterada por los efectos de las siguientes factores:

- a) La no uniformidad de la atracción gravitacional terrestre.
- b) La resistencia aerodinámica que surge del movimiento rápido del satélite a través de la atmósfera superior.
- c) La atracción gravitacional del Sol y la Luna.
- d) La presión de la radiación solar.
- e) Otras fuerzas usualmente pequeñas, como la presión de la radiación solar reflejada por la Tierra y el efecto gravitacional de los demás planetas.

En las siguientes secciones se proporcionan explicaciones generales de cada una de ellas:

### 9.1 Efectos del campo gravitacional terrestre

La presencia de los satélites en órbitas cercanas depende en gran medida del campo gravitacional, el cual tiene en realidad un comportamiento no uniforme. La Tierra es apreciablemente achatada, siendo el diámetro ecuatorial  $42.77 \text{ km}$  más grande que el diámetro polar, y los cambios producidos en el campo gravitacional debidos a este achatamiento provocan la existencia de dos perturbaciones muy significativas en la órbita de un satélite, estas son:

- 1) El plano de la órbita rota con respecto al eje de la Tierra en dirección opuesta al movimiento del satélite, por lo que (si  $i < 90^\circ$ ) el ángulo  $\Omega$  mostrado en la Fig. (8.4) decrece gradualmente, mientras  $i$  permanece constante. Esta anomalía se ilustra más claramente como un avance



o una regresión de la línea de nodos o ascensión recta del nodo ascendente, RAAN en las Figs. (9.1) y (9.2). La tasa de cambio [6] de  $\Omega$  está dada por la Ec. (9.1)

$$\dot{\Omega} \simeq -9.964 \left(\frac{R}{a}\right)^{3.5} (1 - \epsilon^2)^{-2} \cos i \text{ [grados/día]}. \quad (9.1)$$

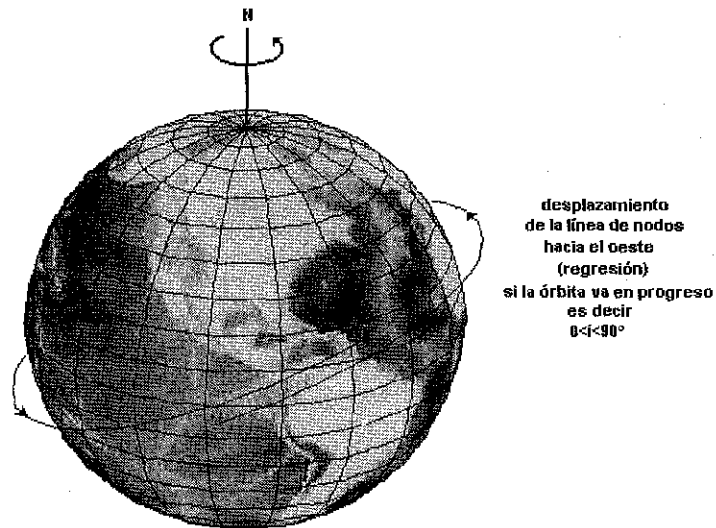


Figura 9.1: Precesión del nodo ascendente.

- 2) El eje mayor de la órbita, o línea de apsidés, rota en el plano orbital, por lo que el argumento del perigeo  $\omega$  se incrementa [6] a un ritmo dado por la Ec. (9.2)

$$\dot{\omega} \simeq 4.982 \left(\frac{R}{a}\right)^{3.5} (1 - \epsilon^2)^{-2} (5 \cos^2 i - 1) \text{ [grados/día]}. \quad (9.2)$$

- Este incremento se relaciona más directamente a las órbitas elípticas, ya que para órbitas circulares como es el caso de las órbitas bajas, tiene un efecto insignificante.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

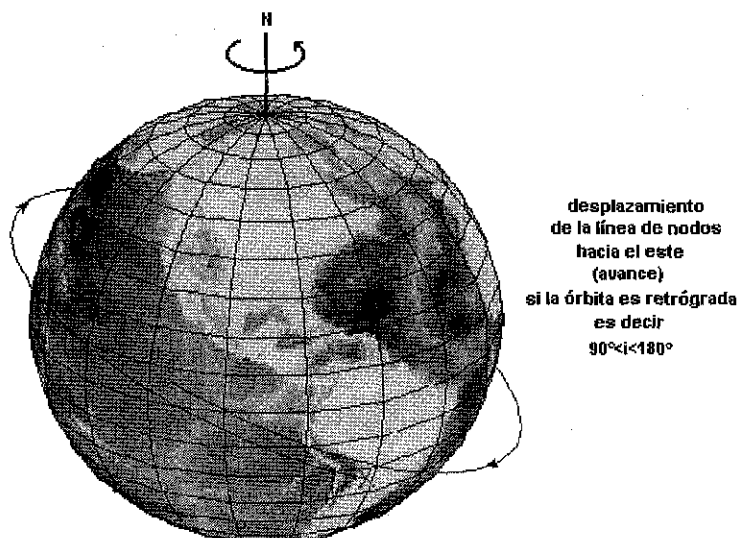


Figura 9.2: Precesión del nodo ascendente.

Las Ecs. (9.1) y (9.2) son aproximaciones, ya que solo expresan el efecto del segundo armónico de zona <sup>1</sup>, siendo que en realidad, los armónicos de zona más altos también contribuyen.

Ambos efectos suman varios grados por día para satélites cercanos a la Tierra.

Por ejemplo, para una órbita casi circular a una altura media de 1000 km, se encuentra que

$$\dot{\Omega} \simeq -6 \cos i \left[ \frac{\text{grad}}{\text{día}} \right],$$

y

$$\dot{\omega} \simeq 3 (5 \cos^2 i - 1) \left[ \frac{\text{grad}}{\text{día}} \right].$$

<sup>1</sup>El segundo armónico de zona expresa el efecto principal del achatamiento de la Tierra. Cada uno de los armónicos de zona son independientes de la longitud y corresponden a una forma particular de la superficie equipotencial.

Así,  $\left| \dot{\Omega} \right|$  decrecerá de  $6 \left[ \frac{\text{grad}}{\text{día}} \right]$  a cero en la medida que  $i$  se incrementa desde  $0^\circ$  (órbita ecuatorial) hasta  $90^\circ$  (órbita polar); pero  $\dot{\omega}$  decrecerá desde  $12 \left[ \frac{\text{grad}}{\text{día}} \right]$  para  $i = 0^\circ$  hasta cero en  $i = 63.4^\circ$ , la inclinación crítica, donde  $\cos^2 i = 0.2$ . Cuando  $i$  se incrementa arriba de  $63.4^\circ$ ,  $\dot{\omega}$  se vuelve negativo y  $\dot{\omega} = -3 \left[ \frac{\text{grad}}{\text{día}} \right]$  en  $i = 90^\circ$  para este ejemplo.

Estas rotaciones del plano de órbita y del eje mayor, resultan del achatamiento de la Tierra y son las perturbaciones gravitacionales más significativas.

Existen otras dos alteraciones de menor magnitud debidas a la asimetría esférica de la Tierra y tiene también efectos importantes.

- 3) Oscilación Norte-Sur

La asimetría norte-sur es usualmente conocida como el efecto "forma de pera" [6]: Con respecto al ecuador, el nivel del mar en el Polo Norte es  $45 \text{ m}$  más alto que el nivel del mar en el Polo Sur, y la consecuente asimetría norte-sur del campo gravitacional produce una oscilación en la excentricidad  $\epsilon$ , sin alterar el semieje mayor  $a$ . Esta oscilación tiene al igual que el argumento del perigeo  $\omega$ , el mismo período, y si  $\epsilon$  no es muy pequeño (generalmente no menor que  $0.02$ ), puede considerarse proporcional al  $\sin \omega$  [6]. La distancia del perigeo  $a(1 - \epsilon)$  puede expresarse entonces como:

$$a(1 - \epsilon) = Q - B \sin \omega, \quad (\epsilon > 0.02) \quad (9.3)$$

en donde  $Q$  puede suponerse constante en ausencia de la resistencia aerodinámica. La amplitud  $B^2$  [6] de la oscilación depende en gran medida de la inclinación y toma valores muy grandes en inclinaciones cercanas a  $63.4^\circ$ , porque  $\dot{\omega}$  es entonces muy pequeño y la perturbación puede consolidarse progresivamente através de varios años.

No hay una fórmula simple disponible para  $B$ , pero tomando  $B = 8 \sin i \text{ [km]}$  es correcta para una amplitud de oscilación de un  $\text{[km]}$  si  $0 < i < 54^\circ$ , y correcta para  $2 \text{ [km]}$  si  $71^\circ < i < 90^\circ$ . Para la mayoría de las inclinaciones,  $B > 0$ , y  $a(1 - \epsilon)$  tiene por lo tanto, un mínimo

---


$${}^2 B = \frac{R \sin i}{J_2} \left[ \frac{1}{2} J_3 - \frac{1}{5 \cos^2 i - 1} (\text{términos en } J_5, J_7, \dots) \right]$$

en  $\omega = 90^\circ$  (vértice norte). En inclinaciones entre  $63.4^\circ$  y cercanas a  $66^\circ$ , donde  $B < 0$ , el mínimo de  $a(1 - \epsilon)$  está en  $\omega = 270^\circ$  (vértice sur).

Cuando  $\epsilon < 0.02$ , la variación de  $\epsilon$  con respecto a  $\omega$  en ausencia de resistencia aerodinámica está representada más apropiadamente en forma de un círculo en el plano  $(\epsilon, \omega)$ , esto es, con  $\epsilon$  como coordenada radial y  $\omega$  como coordenada angular. El centro del círculo está sobre el eje  $\epsilon \sin \omega$ , a una distancia  $\frac{B}{a}$  desde el origen.

Ya que la resistencia aerodinámica en el perigeo es crucial para determinar los efectos que la atmósfera ejerce sobre una órbita, esta oscilación que comprende varios kilómetros en la altura del perigeo es una perturbación de magnitud importante.

- 4) Desplazamiento longitudinal:

El achatamiento de la Tierra en los polos se conoce desde hace siglos, sin embargo, otras irregularidades en la forma de la Tierra se descubrieron hasta que los satélites artificiales fueron lanzados. Una de ellas muestra que el plano ecuatorial no es circular, por lo que la Tierra es descrita más apropiadamente como un elipsoide triaxial, y no como un elipsoide de revolución con respecto al eje polar [3]. Apesar de lo anterior, es posible demostrar que incluso un modelo simétrico triaxial no describe completamente el potencial gravitacional de la Tierra. Para las órbitas bajas, el efecto que produce la irregularidad ecuatorial se va promediando a cero después de varias revoluciones en la medida que el satélite es atraído primero en un sentido y después en otro.

En virtud de la triaxialidad de la Tierra, la fuerza de atracción gravitacional se carga hacia la protuberancia ecuatorial más cercana, y no exactamente hacia el centro de la Tierra; lo que crea una componente de fuerza que actúa ya sea en la misma dirección o en la dirección opuesta a la velocidad del satélite.

Si la fuerza actúa en la misma dirección, se incrementará la energía, lo que significa un incremento en la altitud, es decir, en el radio de la órbita, en consecuencia, hay un incremento en el período de la órbita y un descenso en la velocidad promedio. Así, la fuerza que actúa en la misma dirección que la velocidad, provoca una disminución de la velocidad promedio. Por lo tanto, una fuerza dirigida hacia el este incrementará un desplazamiento hacia el oeste.

Contrariamente, si la fuerza se opone a la velocidad, la energía decrecerá. Esto significa un descenso en la altitud, un descenso en el período de la órbita, y un incremento en la velocidad promedio. De esta manera, una fuerza dirigida hacia el oeste incrementará el desplazamiento hacia el este.

En cada caso, las componentes de la fuerza gravitacional están dirigidas hacia la protuberancia ecuatorial Fig. (9.3).

La dirección de la aceleración del desplazamiento del satélite es contraria a la protuberancia ecuatorial, y la dirección de la aceleración longitudinal estará dirigida hacia dos puntos que son casi opuestos uno del otro: El primer punto se ubica alrededor de los  $75^\circ\text{E}$ , sobre un punto cercano a Sri Lanka, en el Océano Indico. El segundo punto se encuentra a  $252^\circ\text{E}$  (o  $108^\circ\text{O}$ ) sobre el Océano Pacífico, en las costas de Ecuador[3]. Este efecto es causado por irregularidades muy pequeñas en la distribución de la masa de la Tierra. La protuberancia ecuatorial es equivalente a una diferencia menor a  $100 [m]$  entre los dos puntos sobre el ecuador.

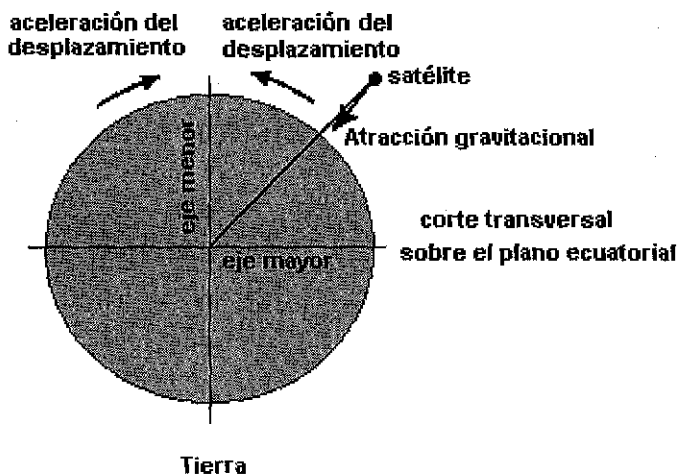


Figura 9.3: Desplazamiento longitudinal debido a la no circularidad del plano ecuatorial de la Tierra.

En resumen, las perturbaciones orbitales causadas por la anomalía geométrica de la Tierra, se indican en los puntos siguientes:

1. Si  $i = 63.4^\circ$  o  $i = 116.6^\circ$ , no hay rotación de la línea de apsides, pero hay regresión nodal, es decir precesión.
2. Cuando  $\dot{\omega}$  es positivo,  $i < 63.4^\circ$  o  $i > 116.6^\circ$ , la rotación del argumento del perigeo sigue la misma dirección del satélite.
3. Cuando  $\dot{\omega}$  es negativo,  $i > 63.4^\circ$  o  $i < 116.6^\circ$ , la rotación del argumento del perigeo es opuesta a la trayectoria del satélite.
4. Para  $i = 90^\circ$  no hay regresión nodal, sin embargo hay rotación de la línea de apsides si la órbita es elíptica.
5. **La rotación de la línea de apsides para una órbita circular no tiene significado, y no existe precesión si  $i = 90^\circ$ .**

## 9.2 Resistencia aerodinámica

El efecto perturbador que produce la resistencia aerodinámica sobre la órbita de un satélite, es muy diferente del que produce el campo gravitacional. Además de que es difícil obtener un modelo matemático que represente fielmente el comportamiento de la atmósfera debido a su gran cantidad de variaciones.

Son particularmente importantes en la evaluación del efecto que la resistencia aerodinámica tiene sobre un satélite, las variaciones de su densidad con el tiempo, así como sus variaciones con el día y la noche, pero sobre todo, la dependencia que existe entre su densidad y la actividad solar.

Ya que la densidad del aire decrece rápidamente a medida que se incrementa la altura sobre la Tierra, un satélite con una órbita de excentricidad apreciable se ve afectado más fuertemente por la resistencia aerodinámica en una sección pequeña de la órbita, a saber, donde este se encuentra más cerca de la Tierra. Inicialmente, se considera que el efecto de la resistencia aerodinámica retarda el paso del satélite a medida que este pasa por el perigeo de su órbita, consecuentemente, el satélite no puede moverse tan lejos de la Tierra en el apogeo subsecuente, así, la altura del apogeo se reduce mientras la altura del perigeo permanece casi constante. La órbita contraída y transformada casi en un círculo, se muestra en la Fig. (9.4), los elementos orbitales  $a$  y  $e$  decrecen de manera uniforme, mientras  $a(1 - e)$  decrece muy lentamente.

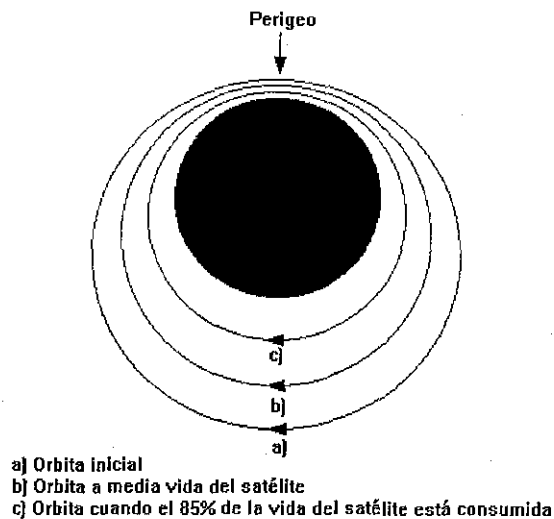


Figura 9.4: Contracción de una órbita elíptica bajo la acción de la resistencia aerodinámica.

Las trayectorias empleadas para los satélites de órbitas cercanas a la Tierra no son totalmente circulares aunque su aproximación es considerable.

Si la Tierra se considerara esférica, una órbita circular se mantendría inicialmente en la misma trayectoria circular, y los efectos producidos por la resistencia aerodinámica reducirían solamente a  $a$  a un ritmo creciente, por lo que el satélite se movería en espiral.

Por otra parte, si la atmósfera fuera estacionaria y esférica,  $a$  y  $e$  serían los únicos elementos susceptibles de alteración bajo la acción de la resistencia aerodinámica. Pero en realidad, en los límites de 120 a 2000  $km$  de altura, la atmósfera rota aproximada pero no exactamente a la misma velocidad que la Tierra, y esta rotación expone al satélite a fuerzas laterales pequeñas las cuales alteran suavemente la orientación del plano orbital, conduciendolo lentamente a cambios pequeños que causan incrementos en la inclinación y a cambios también pequeños y periódicos en  $\Omega$ . No obstante, y ya que la atmósfera es achatada como la Tierra [6], la consecuente asimetría en la resistencia aerodinámica alterará  $\omega$  en una magnitud usualmente pequeña, pero que puede llegar a incrementarse para órbitas casi circulares.

En términos cuantitativos, la fuerza que ejerce la resistencia aerodinámica

sobre un satélite cuando este se mueve en una órbita que se encuentra por debajo de los 800 [km] sobre la superficie terrestre [4] puede expresarse como

$$D = -\frac{1}{2}C_D A \rho v^2 \quad (9.4)$$

donde

- $C_D$  = coeficiente de resistencia aerodinámica
- $A$  = sección transversal de área
- $\rho$  = densidad atmosférica
- $v$  = velocidad del satélite

Esta ecuación pierde precisión arriba de 500 [km].

Al emplear la ecuación de movimiento, Ec. (3.19), se podrá determinar el efecto que la resistencia aerodinámica tiene sobre una órbita circular. Esto se manifiesta como una disminución del radio de la órbita, entonces, el intervalo de tiempo que tiene que transcurrir para que la órbita decrezca [4] de un radio inicial  $r_0$  a un radio final  $r_1$  está dado por

$$\Delta t = \frac{\sqrt{R_E + h_0} - \sqrt{R_E + h_1}}{B \sqrt{\mu} \rho} \quad (9.5)$$

con

- $h_0$  = altitud inicial
- $h_1$  = altitud final
- $\rho$  = densidad atmosférica promedio
- $B = \frac{C_D A}{2m}$

Es claro que en este proceso, habrá un trabajo realizado por la fuerza de la resistencia aerodinámica en contra del satélite por cada revolución disminuyendo el radio de su órbita, y será igual al cambio de la energía total, así



$$\begin{aligned}
 W &= -\Delta E \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{m\mu}{r^2} \Delta r
 \end{aligned}$$

El cambio en el radio  $\Delta r$  ocurrirá en el lapso de tiempo  $\Delta t = T$ , siendo  $T$  el período de la órbita, Ec. (5.11). Así

$$\Delta r = -4\pi B \rho r^2. \quad (9.6)$$

Para un régimen de altitud limitado, la densidad atmosférica puede aproximarse mediante la siguiente[4] función exponencial

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \rho_0 &= \text{densidad en un punto específico} \\
 z &= \text{altitud del nivel de referencia} \\
 \lambda &= \text{altura de la escala de densidad}
 \end{aligned}$$

Ahora bien, un modelo más realista puede desarrollarse al considerar una órbita elíptica[4]. En este caso, la resistencia aerodinámica afectará la longitud del eje semimayor  $a$  y por lo tanto, la excentricidad  $\epsilon$  de la órbita se verá también alterada en cada revolución que el satélite de. La variación de tales parámetros se expresa matemáticamente como:

$$\Delta a = -4\pi B \rho_0 a^2 \exp(-c) \left[ \left(1 + \frac{3}{2} \epsilon^2\right) I_0(c) + \left(2\epsilon - \frac{3}{2} \frac{\epsilon^2}{c}\right) I_1(c) \right] \quad (9.7)$$

$$\Delta \epsilon = -4\pi B \rho_0 a (1 - \epsilon^2) \exp(-c) \left[ \epsilon I_0(c) + \left(1 - \frac{\epsilon}{c}\right) I_1(c) \right] \quad (9.8)$$

con

$$c = \frac{a\epsilon}{\lambda}$$

$I_0, I_1$  son funciones de Bessel modificadas de orden 0 y 1 respectivamente<sup>3</sup>.

Bajo el mismo efecto, el cambio en la altura del perigeo por cada revolución es

$$\Delta r_p \approx -\frac{B\rho_0 a^2}{c} \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \quad (9.9)$$

mientras que el cambio en la altura del apogeo en cada revolución está dado por

$$\Delta r_a \approx -4B\rho_0 a^2 (1 + 2\epsilon) \sqrt{\frac{2\pi}{c}} \quad (9.10)$$

La proporción en la que cambia  $\Delta r_p$  con respecto al cambio de  $\Delta r_a$  se obtiene fácilmente

$$\begin{aligned} \frac{\Delta r_a}{\Delta r_p} &\approx 4c \\ &= \frac{4a\epsilon}{\lambda} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Cuando se obtienen valores grandes de  $c$  el ritmo de cambio del período se expresa como

$$\dot{T} = -3\sqrt{\frac{2\pi}{c}} B\rho_0 a$$

---

<sup>3</sup>La función de Bessel modificada de orden  $k$  para valores de  $x$  grandes representada por la expansión asintótica en series es:

$$I_k(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 - \frac{m-1}{8x} + \frac{(m-1)(m-9)}{2!(8x)^2} - \frac{(m-1)(m-9)(m-25)}{3!(8x)^3} + \dots \right]$$

donde  $m = 4k^2$ .

Finalmente, la forma geométrica del satélite juega un papel importante en el efecto que sobre este tiene la resistencia aerodinámica, prefiriéndose básicamente en su diseño las formas cilíndricas[6]. Desde luego, la geometría propia del satélite se ve afectada debido al arreglo de las fotoceldas requeridas para su obtención de energía.

### 9.3 Efectos lunisulares

Las órbitas de los satélites se ven también perturbadas por la atracción gravitacional del Sol y de la Luna.

Los efectos de la atracción gravitacional lunisolar son generalmente pequeños y periódicos: así los cambios en la distancia del perigeo raramente exceden 2 *km* para un satélite de órbita baja con  $\epsilon < 0.2$ [6], a pesar de que cambios mucho más grandes ocurren para órbitas altamente excéntricas.

Los cuatro parámetros orbitales  $\epsilon$ ,  $i$ ,  $\Omega$  y  $\omega$  se ven afectados, permaneciendo únicamente  $a$  constante.

La fuerza gravitacional lunisolar cambia el plano de la órbita del satélite, siendo esta fuerza la misma que produce las mareas en la Tierra.

Cuando el plano de la órbita está inclinado con respecto al ecuador, el satélite oscilará diariamente de norte-sur, estas oscilaciones incrementarán a diario su amplitud. Si el Sol o la Luna no están en el plano ecuatorial, hay una componente norte sur de esta fuerza, la cual cambiará también el plano de la órbita del satélite.

Es importante distinguir que la aceleración producida por la Luna, es casi el doble de la que produce el Sol.

### 9.4 Presión de la radiación solar

Las perturbaciones debidas a la presión de la radiación solar son también pequeñas para los satélites de construcción normal en una órbita baja, pero pueden llegar a ser mucho más grandes para satélites con forma esférica, los cuales tienen relaciones área a masa muy grandes. Los efectos de la presión de la radiación solar son usualmente periódicos, y todos los elementos orbitales se ven alterados si se toma en cuenta la sombra de la Tierra[6].

La presión debida a la radiación electromagnética es  $S_c/c$ , y una estimación aproximada de la aceleración debida a la radiación es[3]

$$a = \frac{S_c A}{mc} \text{ [km/s}^2\text{]} \quad (9.12)$$

donde

$$S_c = \text{ constante de flujo solar } \approx 1370 \text{ [W/m}^2\text{]}$$

$$A = \text{ sección de área iluminada del satélite [m}^2\text{]}$$

$$m = \text{ masa del satélite [kg]}$$

$$c = \text{ velocidad de la luz [m/s]}$$

$$S_c/c = \text{ ritmo de cambio de la presión de la radiación } = 4.57 \times 10^{-6} \text{ [N/m}^2\text{]}$$

La aceleración exacta depende de si la radiación es reflejada, y de serlo, en que dirección.

La presión de la radiación solar es la fuerza externa principal que afecta la forma circular de la órbita. Al amanecer, en el tiempo local del satélite, la fuerza es opuesta a la velocidad del satélite frenandolo. El efecto principal de esta fuerza se manifiesta 12 horas después, cuando la altura del satélite se ve disminuida. Contrariamente, al anochecer, la fuerza está en la misma dirección que la velocidad del satélite, por lo que su velocidad se ve incrementada. Al volver amanecer, el satélite habrá incrementado nuevamente su altitud. El efecto dependerá en gran medida de la relación masa-área del satélite.

La presión de la radiación solar, así como la resistencia aerodinámica, es una fuerza que actúa sobre la superficie, y su efecto es proporcional a la relación área a masa del satélite. En alturas por arriba de 600 *km*, la presión de la radiación solar excede la fuerza de la resistencia aerodinámica y es necesario evaluarla, aunque, la resistencia aerodinámica se mantiene generalmente con mayor influencia, debido a que la presión de la radiación solar es típicamente periódica en sus efectos.

## 9.5 Otras perturbaciones

Son fuerzas que es necesario tener en cuenta para órbitas especiales, o en el análisis y la determinación de órbitas con un grado de precisión elevado, estas incluyen la presión de la radiación solar reflejada por la Tierra; los efectos gravitacionales de las mareas; efectos de relatividad, y las perturbaciones gravitacionales planetarias. También son necesarios de considerar los efectos de la nutación u oscilación periódica del eje de la Tierra, causada principalmente por la atracción lunar, y por los efectos de la precesión del eje de la Tierra, es decir, el movimiento retrógrado de los puntos equinocciales o de intersección del ecuador con la eclíptica, por el que se anticipan las estaciones debido a un cambio lento de la dirección del eje de la Tierra.

Para los satélites expuestos a una resistencia aerodinámica elevada, todos estos efectos son muy pequeños comparados con las consecuencias debidas a la resistencia aerodinámica, siendo en general más insignificantes que los errores originados por las aproximaciones necesarias de la teoría[6]. Sin embargo, para órbitas muy precisas de resistencia aerodinámica débil, algunas de las fuerzas mencionadas anteriormente pueden ser de magnitud similar a las de la resistencia aerodinámica y es fundamental tenerlas siempre en cuenta.

## 9.6 Resumen de perturbaciones

Se ha descrito de manera general como las tres principales fuentes de perturbación: gravitacional, atmosférica y lunisolar afectan a los elementos orbitales en varios sentidos. Para satélites en órbitas cercanas a la Tierra y de construcción normal, es decir no esféricos, los efectos se resumen de manera útil, en la tabla III.

Tabla III

Características de las fuerzas que alteran la trayectoria orbital.

|               | Creciente<br>Grande | Creciente<br>Pequeña | Periódica<br>Moderada | Periódica<br>Pequeña             |
|---------------|---------------------|----------------------|-----------------------|----------------------------------|
| Gravitacional | $\Omega, \omega$    | —                    | $\epsilon$            | $i, \Omega, \omega$              |
| Atmosférica   | $a, \epsilon$       | $i$                  | —                     | $\Omega, \omega$                 |
| lunisolar     | —                   | —                    | —                     | $a, \epsilon, i, \Omega, \omega$ |



Aquí, creciente significa que se consolida progresivamente; las perturbaciones periódicas tienen generalmente ciclos entre un mes y un año. Las perturbaciones grandes pueden ser tanto como 100 *km* por día o más, aunque las perturbaciones atmosféricas son únicamente grandes, cuando el perigeo está próximo a la Tierra y consecuentemente la resistencia aerodinámica es severa; contrariamente si la resistencia es débil, las perturbaciones atmosféricas se transferirán a la columna "pequeña". Las perturbaciones moderadas son del orden de 10 *km* por mes; los efectos pequeños raramente exceden 1 ó 2 *km*[6].

Para su estudio, los efectos producidos por las fuerzas que perturban fuertemente pueden separarse bastante bien. Así, los efectos de la resistencia aerodinámica pueden dissociarse para estudiar los efectos del campo gravitacional, mientras los principales efectos del campo pueden aislarse antes de analizar los cambios producidos por la resistencia aerodinámica.

La resistencia aerodinámica es típicamente responsable de finalizar con la vida del satélite a través de la reducción continua de  $a$  y  $\epsilon$ , como se muestra en la Fig. (9.4), Algunas veces, sin embargo, otras fuerzas controlan el tiempo de vida: oscilaciones grandes de  $\epsilon$ , y consecuentemente en la altura del perigeo, pueden deberse a las perturbaciones gravitacionales lunisolares si la órbita tiene excentricidad grande ( $>0.5$ ), o por la presión de la radiación solar si el satélite es de tipo esférico. Estas oscilaciones pueden tener una influencia decisiva en la vida del satélite, ya que pueden atrapar al perigeo en una altitud muy baja, en donde la resistencia aerodinámica es fuerte y puede causar un rápido decaimiento de la órbita. Otra posibilidad es una órbita que esté en resonancia<sup>4</sup> con respecto a las perturbaciones lunisolares, causando que la altura del perigeo decrezca progresivamente conduciendolo hacia la atmósfera baja, terminando así con la vida del satélite.

La órbita contraída de un satélite por la acción de la resistencia aerodinámica puede pasar a través de varias de estas resonancias durante su vida, y si su paso es bastante lento durante la resonancia, la perturbación puede volverse

---

<sup>4</sup>Las frecuencias particulares para las cuales la frecuencia orbital del satélite se vuelve pequeña son denominadas frecuencias resonantes; estas son particularmente útiles en la evaluación de los coeficientes de potencial correspondientes. Por ejemplo, la respuesta más fuerte del satélite al campo gravitacional ocurre para las frecuencias resonantes, esto es, todo satélite es especialmente sensible a sus propias frecuencias de resonancia. El efecto resonante se manifiesta como: 1) variaciones en la inclinación de la órbita, y 2) alteraciones en la excentricidad de la órbita.

muy grande afectando el análisis de las variaciones debidas a la resistencia aerodinámica. Como se aprecia, el efecto de las resonancias siempre es necesario tenerlo en cuenta en los análisis orbitales.

Algunas órbitas especiales son resonantes con respecto a las perturbaciones lunisolares, consolidando progresivamente sus efectos en lugar de que sean periódicos. Para estas órbitas, las perturbaciones lunisolares son especialmente importantes y es necesario tomarlas en cuenta antes de que los cambios debidos a la resistencia aerodinámica sean evaluados.

Estas órbitas especiales son inusuales, y cerca del 95% de todos los satélites (aquellos de construcción normal en órbitas no resonantes que no son demasiado excéntricas) están expuestos a la fricción originada por el rozamiento con el aire.

Finalmente, se tiene que las variaciones de la gravedad con la longitud generalmente producen solo perturbaciones pequeñas y periódicas en los elementos orbitales, las cuales no son importantes cuando se discuten los efectos producidos por la resistencia aerodinámica en cientos o miles de revoluciones. Sin embargo, los efectos de las variaciones longitudinales en la gravedad pueden ir consolidándose gradualmente para órbitas resonantes especiales, las cuales repiten todos los días su curso sobre la Tierra.

---

## 10. Datos que proporcionan las ecuaciones reales obtenidas.

---

Las ecuaciones que expresan de manera aproximada el efecto que tienen las fuerzas reales que alteran la trayectoria orbital de un satélite se ilustran a continuación mediante gráficas. La información permite decidir en cuanto a la elección de los parámetros que debe tener la órbita para que ésta resulte ser óptima.

La Fig. (10.1) es el resultado de graficar la Ec. (9.1), correspondiente al desplazamiento de  $\Omega$  debido al efecto de la no uniformidad de la fuerza de atracción gravitacional. Lo interesante aquí, es que si la órbita se encuentra en cualquier plano polar, es decir a  $90^\circ$  con respecto al ecuador, la órbita no siente el efecto de la precesión causada por el campo gravitacional de la Tierra.

Como la órbita tiene una excentricidad muy próxima a cero, su forma es casi circular, y por lo tanto no está sujeta a la rotación del eje semimayor expuesta por la Ec. (9.2).

En la Fig. (10.2), se muestra la reducción del radio de la órbita causado por el efecto de la resistencia aerodinámica, puede observarse como casi desde los 1000 [km] de altura, el efecto de la resistencia es prácticamente nulo. Los datos de la densidad atmosférica fueron obtenidos de tablas elaboradas a partir de los datos enviados por satélites experimentales (apéndice B[4]). Los puntos de la Fig. (10.2) resultan de evaluar la Ec. (9.6).

Utilizando la Ec. (9.5), puede mostrarse de manera gráfica en la Fig. (10.3) el tiempo que tiene que transcurrir para que la órbita vaya disminuyendo gradualmente su altitud desde los 1000 [km] sobre la superficie de la Tierra hasta los primeros 50 [km]. De la gráfica es claro deducir, que la órbita permanecerá en su trayectoria durante mucho tiempo cuando se encuentre por arriba de los 1000 [km].



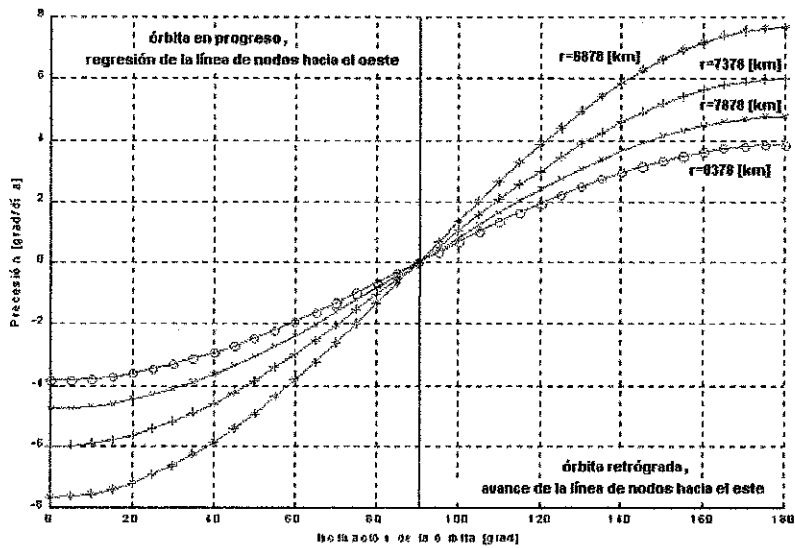


Figura 10.1: Desplazamiento de la órbita causado por la fuerza gravitacional.

En cuanto a los efectos que tiene la fuerza gravitacional lunisolar y la presión de la radiación solar, estos pueden considerarse pequeños comparativamente con los expuestos anteriormente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

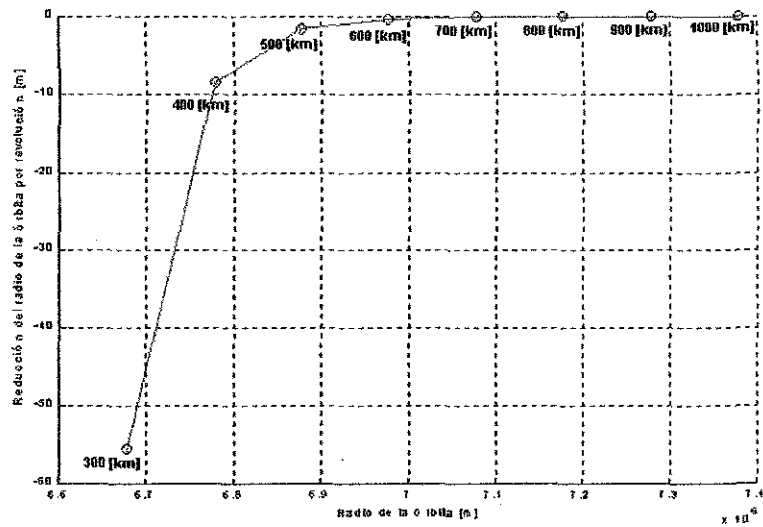


Figura 10.2: Cambio en el radio de la órbita debido al efecto de la resistencia aerodinámica.

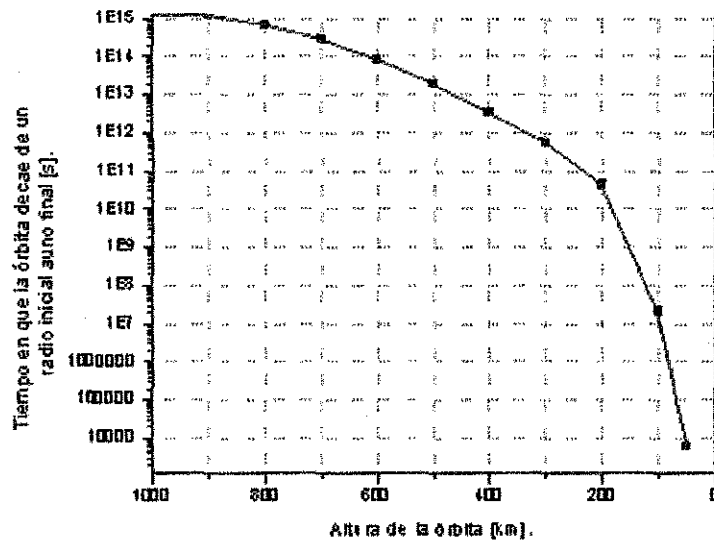


Figura 10.3: Decaimiento de la órbita debido a la resistencia aerodinámica. Las alturas se consideran desde la superficie terrestre.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Parte IV

## Conclusiones

Los beneficios que representa la utilización de los satélites como medio de comunicación a distancia son determinantes.

El uso de otras órbitas diferentes a las geoestacionarias se plantea como una posibilidad viable para satisfacer la necesidad creciente de servicios de comunicación.

Los antecedentes históricos descritos, muestran la importancia que en un principio representó la utilización de las órbitas cercanas a la Tierra. Fueron estas la realización de todo el material teórico con que se contaba desde hace más de cuatro siglos. Con ello, se logró comprobar que la utilización de órbitas a mayores alturas era posible, impulsando también la evolución tecnológica de los satélites y mejorando por mucho la manera de efectuar la comunicación.

La idea de retomar las órbitas bajas mediante el empleo de constelaciones de satélites ligeros muy evolucionados, se plantea como una posibilidad eficaz para cubrir hoy en día las necesidades crecientes de comunicación móvil, global e ininterrumpida de voz y datos a un costo accesible.

Para entender con facilidad el movimiento en una órbita cercana alrededor de la Tierra, se plantearon y desarrollaron los conceptos matemáticos más relevantes a través de un tratamiento idealizado, empleando para ello, un conjunto de leyes fundamentales; estas son:

- a) Las 3 Leyes de Kepler
- b) La ley de la gravitación de Newton
- c) Las leyes de movimiento de Newton.

La dinámica de la interacción entre dos partículas en donde una se supone mucho menor en comparación con la otra, fue el modelo empleado para representar el comportamiento de un satélite y la Tierra. Aquí, la única fuerza considerada fue la atracción gravitacional que ejerce la masa más grande sobre la pequeña, que además, fue supuesta uniforme en todos sus puntos.

De este análisis, se obtuvo una relación importante, la Ec. (3.30), que es la ecuación de órbita.

A través de gráficas se muestran los valores que adquieren las variables más relevantes obtenidas que expresan como se comporta el satélite en una órbita

baja. Estas variables son:

- a) La intensidad que ejerce el campo gravitacional terrestre sobre el satélite a diferentes alturas.
- b) La velocidad del satélite en función de la altura de la órbita.
- c) El período de revolución para el satélite en cada altura de la órbita.
- d) La energía total del satélite por unidad de masa de acuerdo con la altura de la órbita.

Las ecuaciones utilizadas en cada caso fueron: (2.11), (6.5), (6.7) y (7.6).

Estos resultados nos permiten disponer de información completa en cuanto a la trayectoria idealizada del satélite en una órbita baja.

Hasta este punto, la teoría está lista para incluir los efectos reales del movimiento de un satélite en órbita.

La ubicación de la posición de un satélite en el espacio a través de un conjunto de parámetros fue la primera tarea elaborada, lo cual permitió tener un marco de referencia completo. El resultado fue la descripción de los siguientes seis elementos orbitales  $a$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\omega$  y  $\theta$  que fueron tratados con detalle.

Posteriormente, del análisis realista se observó que las fuerzas que alteran mayormente a los elementos orbitales que identifican el movimiento de un satélite en una órbita baja, son principalmente de dos tipos:

- a) Las causadas por la no uniformidad del campo gravitacional, debido a las irregularidades de la forma de la Tierra.
- b) Las causadas por el efecto de la resistencia aerodinámica.

La primera es de tipo periódica, es decir, "más predecible", mientras que la segunda, refleja un comportamiento contrario dada la naturaleza de la atmósfera, además de que puede irse consolidando gradualmente.

Los efectos gravitacionales lunisolares y las perturbaciones causadas por otras fuerzas como la presión de la radiación solar reflejada y el efecto gravitacional planetario no son tan relevantes para el caso de una órbita cercana a la Tierra.

Los dos efectos principales son mostrados gráficamente en las Figs. (10.1), (10.2) y (10.3), de donde se obtienen resultados interesantes.

Es importante mencionar, que la forma de la construcción del satélite tiene una influencia determinante, ya que la relación área-masa, como es el caso de los satélites esféricos, permite recibir mayores efectos de las fuerzas que actúan superficialmente como la resistencia aerodinámica y la radiación de la presión solar.

Del efecto de las fuerzas que alteran la trayectoria se concluye, que las órbitas permitidas para una constelación de satélites es casi circular, y que para consideraciones generales puede suponerse sin mayor problema como circular, siendo las más apropiadas las que se encuentran en los planos polares ( $90^\circ$ ) con respecto al ecuador. En cuanto a la altitud, una órbita a  $1000 [km]$  desde la superficie terrestre se considera como una buena alternativa.

El cálculo del número de órbitas y de satélites por órbita que forman una constelación que logra una cobertura global en tiempo real e ininterrumpida, está sustentada en consideraciones de trigonometría esférica espacial, que se ve reflejada en la Ec. (1.1), aunque en esta, no se incluyen los efectos de las perturbaciones causadas a los elementos orbitales.

El desarrollo de una serie de códigos programados en MATLAB, permitió obtener resultados gráficos importantes, así como también desarrollar estimaciones matemáticas que de otra forma hubieran resultado muy extensas.

Finalmente, este trabajo es una aproximación inicial para correlacionar los efectos de las fuerzas que alteran la trayectoria ideal de un satélite en una órbita baja, con la finalidad de poder predecir de manera aproximada la vida útil de una constelación de satélites en el espacio. Aunque esto no podrá determinarse con exactitud, ya que los cambios producidos sobre todo en la atmósfera permitirán hacer solo aproximaciones.

Así, un análisis más sólido deberá incluir un modelo matemático que represente de manera conjunta los efectos de por lo menos la resistencia aerodinámica y los efectos del campo gravitacional.

---

## Apéndice A. Códigos programados en MATLAB

---

% Código 1: Superpone una órbita circular sobre el globo terraqueo.

n = 30;

a = 1.157

r = [a a]';

t = (0:n)/n\*2\*pi;

s = sin (t);

b = 0

m = [b b]';

x = r \* (cos (t)/1);

y = m \* cos (t);

z = r \* s;

hold on

surf (x,y,z)

load topo

[x,y,z]=sphere(18);

surface(x,y,z,'FaceColor','texture','CData',topo);

view(45,45)

axis equal

axis off

% Código 2: Calcula tanto el número de satélites en órbitas cercanas, como el número de planos orbitales

% que forman una constelación de satélites con cobertura global, ininterrumpida y en tiempo real, Ec. (1.1).



```

h=input('proporcione la altura de la órbita, desde 220 [km] hasta 2000 [km]:');

R=6378;

r=R+h;

t=input('proporcione el ángulo de elevación entre 10 y 20 [grad]:');

T=(t*(pi/2))/90;

A=((r)^2)-((R*cos(T))^2);

b=sqrt(A);

c=R*sin(T);d=b-c;

g=asin((d/r)*cos(T));

G=g*(180/pi);

n=1;

j=n;

k=1;

s=((2*j*180)/sqrt(3))/G

p=((2*k*180)/3)/G

% Código 3: De acuerdo a la Ec. (1.1), se grafica tanto el número de satélites en órbitas cercanas, como el número
% de planos orbitales que forman una constelación con cobertura global, ininterrumpida, y en tiempo real.

h=(220:1:2000);

R=6378;

r=R+h;

t=10;

T=(t*(pi/2))/90;

A=((r)^2)-((R*cos(T))^2);

b=sqrt(A);

c=R*sin(T);

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



```

d=b-c;

g=asin((d./r)*cos(T));

G=g*(180/pi);

n=1;

j=n;

k=1;

s=((2*j*180)/sqrt(3))./G;

p=((2*k*180)/3)./G;

plot(h,p,'r-x')

hold on

plot(h,s,'g-o')

grid on

xlabel('Altura de la órbita [km]')

text(300,6,'número de órbitas')

hold on

text(800,13,'número de satélites por órbita')

% Código 4: Calcula y despliega gráficamente 4 variables relevantes de la trayectoria ideal de un satélite

% en diferentes órbitas bajas, Ecs (2.10), (6.5), (6.7) y (7.6).

% Intensidad del campo gravitacional [N/kg]:

G = 6.673e-11;

m = 5.97e+24;

f = -(G*m)./(sqrt(r));

% plot (r,f)

% grid on

% xlabel ('altura de la órbita [m]')

```



```

% ylabel ('intensidad del campo gravitacional [N/kg]')

% Velocidad del satélite en la órbita [m/s]:

r = (6593000:1000:8373000);

R = 6373000;

g = 9.814;

v = R *(sqrt(g./r));

% plot(r,v)

% grid on

% xlabel ('altura de la órbita [m]')

% ylabel ('velocidad del satélite [m/s]')

% Periodo de la órbita [s]:

a = 5062.93;

b = (r./R).^ (3/2);

p = b .* a;

% plot(r,p)

% grid on

% xlabel ('altura de la órbita [m]')

% ylabel ('período del satélite en la órbita [s]')

% Energía total del satélite por unidad de masa [J]

c = g*(sqrt(R));

d = (2.*r);

e = -(c./d);

% plot(r,e)

% grid on

% xlabel ('altura de la órbita [m]')

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

```

% ylabel ('energía total por unidad de masa [J]')

% Código 5: Calcula el desplazamiento (precesión del nodo ascendente) de la
% órbita, Ec. (9.1), causado por la no uniformidad de la fuerza gravitacional.

a = input ('¿radio de la órbita [km]?=');

R = 6378;

b = input ('¿excentricidad de la órbita?=');

A = -9.964 * ((R/a)^(3.5))*(1-(b^2))^(-2);

i = 0:5:180;

I = (i*pi)/180;

j = cos (I);

O = A.*j;

hold on

plot(i,O,'m-o')

grid on

xlabel('Inclinación de la órbita [grad]')

ylabel('Precesión [grad/día]')

```

```

% Código 6: Proporcina el cambio en el radio de la órbita por revolución
% debido al efecto de la resistencia aerodinámica, Ec. (9.6).

r=input('¿radio de la órbita desde el centro de la Tierra [m]?=');

d=input('¿densidad atmosférica [kg/m^3]?=');

b=(2.3*2.25)/(1000);

D=-(4)*pi*b*d*(r^2);

hold on

plot(r,D,'g-x')

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

grid on

xlabel('Radio de la órbita [m]')

ylabel('Reducción del radio de la órbita por revolución [m]')

% Código 7: Calcula el tiempo de decaimiento en [s] en que una órbita pasa de una altura inicial a
% una final debido al efecto de la densidad atmosférica, Ec. (9.5).

m=input('¿altura inicial de la órbita [m]?=');

n=input('¿altura final de la órbita [m]?=');

o=input('¿densidad inicial [kg/m^3]?=');

p=input('¿densidad final [kg/m^3]?=');

q=(o+p)/2;

b=(2.3*2.25)/(1000);

R=6378000;

s=sqrt(398600.5);

u=(sqrt(R+m))-sqrt(R+n);

v=b*s*q;

t=u/v

% Código 8: opb: órbita polar baja: Este código produce una imagen gráfica del globo terraqueo, incorpo-
% rando el conjunto de órbitas polares bajas necesarias para formar, una constelación de satélites que
% logren una comunicación global, en tiempo real e ininterrumpida. Además, proporciona los siguientes
% datos suponiendo condiciones ideales en el transcurso del viaje del satélite por la órbita:

% a) Número de planos orbitales polares,

% b) número de satélites por órbita,

% c) número total de satélites requeridos,

% d) intensidad del campo gravitacional sentida por el satélite en la órbita,

```



```

% e) velocidad del satélite en la órbita,

% f) tiempo requerido para que el satélite efectúe una revolución y

% g) energía total del satélite por unidad de masa.

h=input('¿Altura de la opb partiendo de los 220 [km] y hasta los 2000 [km] dlst? =');

% dlst = desde la superficie terrestre.

R=6378;

r=R+h;

t=10;

T=(t*(pi/2))/90;

A=((r)^2)-((R*cos(T))^2);

b=sqrt(A);

c=R*sin(T);

d=b-c;

g=asin((d/r)*cos(T));

G=g*(180/pi);

n=1;

j=n;

k=1;

Pl=((2*k*180)/3)/G;

No_de_planos_orbitales_polares=round(Pl)

St=((2*j*180)/sqrt(3))/G;

No_de_sats_x_orbita=round(St)

Stt=(No_de_sats_x_orbita)*(No_de_planos_orbitales_polares);

No_total_de_sats=round(Stt)

mu= 6.673e-11;

```



```

mas = 5.97e+24;

Intens_dcl_camp_grav_terr_Nxkg = -((mu*mas)./(sqrt(r*1000)))

fag = 9.814;

Vel_del_sat_eu_orb_mxs = (R*1000)*(sqrt(fag./(r*1000)))

aaa = 5062.93;

bbb = ((r*1000)./(R*1000)).^(3/2);

Periodo_orbital_s = bbb .* aaa

ccc = fag*(sqrt(R*1000));

ddd = (2.*(r*1000));

Ener_tot_del_sat_x_unid_d_mas_J = -(ccc./ddd)

N = 30;

AA = (r)/6378;

rr = [AA AA]';

tt = (0:N)/N*2*pi;

ss = sin (tt);

pp = No_de_planos_orbitales_polares;

load topo

[x,y,z]=sphere(24);

surface(x,y,z,'FaceColor','texture','CData',topo);

for m = (0:.5:pp)/pp*2*pi

f = cos (m);

u = sin (m);

x = rr*cos(tt)*f;

y = rr*cos(tt)*u;

z = (rr * ss);

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

hold on

surf(x,y,z)

end

view(175,45)

axis equal

axis off

```

Código 9: Orbitas

```

function orbitas(action)

% ORBITAS: Simula la evolución de una órbita y su interacción con el mapamundi.

% El código ORBITAS, produce una ventana interactiva que permite analizar diferentes órbitas segun-
% das por un satélites, así como su traza dejada sobre mapamundi resultante de la rotación de la Terra.

% El satélite interactúa continuamente con el mapamundi en cada punto desplegando su posición.

% Escrito por: E. Byrus, E. Brown; modificado por Guillermo López Maldonado.

if nargin == 0; action = 'initialize'; end

switch action

case 'initialize'

% Construye la ventana de la interface

objhandles = orbpanel;

% Carga el mapamundi desplegándolo

load worldmtx

countries = strvcat(nations(:).name);

colors = [0 0 0

0 0.7500 1.0000

0 0 0

ones(size(countries,1)-3,1)*[0 0 0]];

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

axes(objhndls(1))

axesm behrmann; colormap(colors);

axis([-2.7207 2.7207 -1.1547 1.1547])

% Números codificados para behrmann; el ajuste de los ejes causa que la traza de la órbita se pierda
% al detener el programa.

set(objhndls(1),'ButtonDownFcn','')

meshm(map,maplegend,[30 50],'ButtonDownFcn','');

% Despliega la órbita inicial

apogee = get(objhndls(5),'Value');

perigee = get(objhndls(8),'Value');

inclination = get(objhndls(11),'Value');

[newcoord,lat,long] = orbcalcs('nonrotating',apogee,perigee,inclination,(0:360)*pi/180);

hold on; axes(objhndls(1));

objhndls(17) = plot3m(lat,long,1.01*ones(size(lat)),'r','EraseMode','xor','MarkerSize',6,...
'ButtonDownFcn','');

axes(objhndls(2));

objhndls(18) = plot3(newcoord(1,:), newcoord(2,:), newcoord(3,:), 'r-', 'EraseMode','normal');

hold on;

plot3(0,0,0,'b.', 'MarkerSize',60); hold off

axis([-6 6 -6 6 -6 6]); axis('off'); drawnow

% Guarda los datos tanto de los objetos de manipulación como del mapa

set(objhndls(3),'UserData',map);

set(objhndls(4),'UserData',maplegend);

set(objhndls(5),'UserData',countries);

set(gcf,'UserData',objhndls,'Visible','on');

```



```

case 'run' % Botón de arranque activado

objhndls = get(gcf,'UserData');

qryhndls = get(objhndls(3),'UserData');

set(objhndls(5), 'Enable', 'off')

set(objhndls(8), 'Enable', 'off')

set(objhndls(11), 'Enable', 'off')

set(objhndls(14), 'Enable', 'off')

set(objhndls(15), 'Enable', 'on')

set(objhndls(16), 'Enable', 'off')

% Obtención de los datos necesarios

apogee = get(objhndls(5),'Value');

perigee = get(objhndls(8),'Value');

inclination = get(objhndls(11),'Value');

map = get(objhndls(3),'UserData');

maplegend = get(objhndls(4),'UserData');

countries = get(objhndls(5),'UserData');

% El ciclo se mantiene hasta que el usuario lo detiene. Despliega

% la posición del mapamundi y de la gráfica en 3D.

loop = 0; tottime = 0; theta = 0;

set(objhndls(2),'UserData',1); hold on;

while get(objhndls(2),'UserData')

% Calcula la posición nueva.

loop = loop + 1;

[newcoord,lat,long,theta,tottime] = orbcales('simulate',...

apogee,perigee,inclination,theta,tottime);

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

```

% Actualiza el desplegado de lat/long

set(objhndls(21),'String',num2str(fix(lat)));

set(objhndls(22),'String',num2str(fix(long)));

% Determina la posición del marco del mapamundi. Actualiza el desplegado si
% no se encuentra sobre un margen.

cellval = ltn2val(map,maplegend,lat,long);

if cellval ~= 1

set(objhndls(13),'String',countries(cellval,:))

end

% Actualiza el desplegado en el mapa y elimina el desplegado antiguo en la gráfica 3D.

if loop > 1

set(hnd1,'MarkerSize',10);

set(hnd2,'Xdata',newcoord(1),'Ydata',newcoord(2),'Zdata',newcoord(3) )

else

axes(objhndls(2));

hnd2 = line(newcoord(1),newcoord(2),newcoord(3),'MarkerFaceColor','red','MarkerEdgeColor','red',...

'Marker','.', 'EraseMode','xor', 'MarkerSize',20);

end

% Despliega el punto nuevo sobre el mapamundi

axes(objhndls(1));

hnd1 = plot3m(lat,long,1.01*ones(size(lat)),'r','MarkerSize',20, 'EraseMode','xor','ButtonDownFcn','');

drawnow;

end

% En este punto, el usuario ha detenido la simulación.

% Se fijan los deslizadores y botones para que estén disponibles nuevamente.

```



```

set(objhndls(5), 'Enable', 'on')

set(objhndls(8), 'Enable', 'on')

set(objhndls(11), 'Enable', 'on')

set(objhndls(14), 'Enable', 'on')

set(objhndls(15), 'Enable', 'off')

set(objhndls(16), 'Enable', 'on')

% Elimina el desplegado del satélite.

% Borra las trazas antiguas de las órbitas.

delete([hnd1 hnd2]);

oldorbits = get(objhndls(1), 'Children');

if length(oldorbits) > 6

delete(oldorbits(1:length(oldorbits)-6)); clear oldorbits

end

case 'sliders' % El usuario ha activado un deslizador

% Recoge los datos y redondea el valor del deslizador

objhndls = get(gcf, 'UserData');

apogee = get(objhndls(5), 'Value');

apogee = fix(apogee/100)*100;

perigee = get(objhndls(8), 'Value');

perigee = fix(perigee/100)*100;

% Fija los valores desplegados del deslizador y sincroniza sus límites

set(objhndls(4), 'String', num2str(apogee));

set(objhndls(5), 'Value', max(apogee, 110), 'Min', max(perigee, 110));

set(objhndls(7), 'String', num2str(perigee));

set(objhndls(8), 'Value', perigee, 'Max', max(min(apogee, 2000), 110));

```



```

% Obtiene y despliega la información del deslizador de la inclinación

inclination = get(objhndls(11),'Value');

inclination = fix(inclination);

set(objhndls(10),'String',num2str(inclination));

set(objhndls(11),'Value',inclination);

% Despliega una órbita nueva

[newCOORD,lat,long] = orbcalcs('nonrotating',apogee,perigee,inclination,(0:360)*pi/180);

datastruct = gcm(objhndls(1));

[x,y,z] = mfwdran(datastruct,lat,long,0,'none');

set(objhndls(17),'Xdata',x,'Ydata',y,'Zdata',1.01*ones(size(x)));

set(objhndls(18),'Xdata',newCOORD(1,:), ...

'Ydata',newCOORD(2,:), 'Zdata', newCOORD(3,:));

case 'stop' % Botón de detener seleccionado

% Para falso, fija el ciclo while una prueba variable

objhndls = get(gcf,'UserData');

set(objhndls(2),'UserData',0);

end

%*****

function [newCOORD,lat,long,theta,tottime] = orbcalcs(action,apogee,perigee,inclination,theta,tottime)

%ORBCALCS Calcula la posición de la órbita (empleada con ORBITS)

% ORBCALCS determina la posición de la órbita de un satélite tanto en el espacio tridimensional

% como en el espacio relacionado con la latitud y la longitud de la Tierra. Estas estimaciones se desarrollan

% para las consideraciones rotacional y no rotacional de la Tierra. Las funciones emplean propiedades

% de las secciones cónicas para determinar la posición de un satélite en un instante específico de su órbita.

% El enfoque de la sección cónica requiere, no obstante, que la variable dependiente sea el tiempo

```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

% y no el ángulo así que la simulación desplegada tiene las características de velocidad apropiadas.

```
mu = 3.986E5;

radearth = 6371;

omega = 7.2921158553e-5;

e = abs(apogee-perigee)/(apogee + perigee + 2*radearth);

semimajor = (apogee+perigee)/2 + radearth;

totarea = pi*semimajor*sqrt(semimajor^2 * (1-e^2));

period = 2*pi*sqrt(semimajor^3/mu);

rotation = [cos(inclination*pi/180) 0 -sin(inclination*pi/180)
0 1 0
sin(inclination*pi/180) 0 cos(inclination*pi/180)];

if strcmp(action,'nonrotating')

radius = semimajor*(1-e^2) ./ (1+e*cos(theta));

oldcoord = [radius.*cos(theta); radius.*sin(theta); zeros(size(theta))];

newcoord = (rotation * oldcoord)/radearth;

long = atan2(newcoord(2,:),newcoord(1,:));

long = long*180/pi;

lat = atan(newcoord(3,:)/sqrt(newcoord(1,:).^2 + newcoord(2,:).^2));

lat = lat*180/pi;

elseif strcmp(action,'simulate')

delttime = period/50;

dclarea = deltime * totarea / period;

tottime = tottime + deltime;

radius = semimajor*(1-e^2) ./ (1+e*cos(theta));

delta = 2*dclarea/radius^2;
```

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

```

theta = theta + delta;

radius = semimajor*(1-e^2) ./ (1+e*cos(theta));

oldecoord = [radius.*cos(theta); radius.*sin(theta); zeros(size(theta))];

newcoord = (rotation * oldecoord)/radearth;

long = atan2(newcoord(2,:),newcoord(1,:));

long = (long - omega*tottime);

long = atan2(sin(long),cos(long))*180/pi;

lat = atan(newcoord(3:)./sqrt(newcoord(1,:).^2 + newcoord(2,:).^2));

lat = lat*180/pi;

end

%*****

function savehdl = orbpnl

%ORBPANL Crea los objetos de la interface para ORBITAS

% Los datos para que opere este código están almacenados en diferentes ubicaciones de datos del

% usuario en los objetos de la interface.

limits = [220 2000 2000]; % Datos del deslizador del apogeo y del perigeo

degrees = [-180 180 90]; % Datos del deslizador de la inclinación

% Calcula el factor de escalamiento del pixel y de la fuente así que las figuras de

% las ventanas y las fuentes aseguran su efectividad a través de todas las plataformas

PixelFactor = guifactm('pixels');

FontScaling = guifactm('fonts');

figure('Visible','off', 'Units','Points','Resize','on', 'Name',...

'Trayectorias de los Satélites de Orbitas Bajas. Escrito por: E. Byrns, E. Brown; adaptado por G. L. Maldonado',...

'Numbertitle','off','Renderer','zbuffer');

colordef(gcf,'white')

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```

figclr = get(gcf,'Color');

% Ejes del mapa

savehdl(1) = axes('Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.45 0.90 0.50]);

% Espacio de los ejes 3D

savehdl(2) = axes('Units','Normalized', 'Position',[0.45 0.05 0.50 0.40],...
'View',[-37.5 30], 'Visible','off', 'DrawMode','Fast');

% Objeto: Deslizador del apogeo

savehdl(3) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String','Apogeo (km)',...
'Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.35 0.13 0.04], 'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','black');

savehdl(4) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String',num2str(limits(2)),...
'Units','Normalized', 'Position',[0.19 0.35 0.12 0.04], 'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','black');

savehdl(5) = uicontrol(gcf, 'Style','slider','Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.31 0.18 0.03], ...
'Min',limits(2), 'Max',limits(3)+10, 'Value',limits(2), 'Callback','orbits("sliders");');

% Objeto: Deslizador del perigeo

savehdl(6) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String','Perigeo (km)',...
'Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.25 0.15 0.04], 'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','black');

savehdl(7) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String',num2str(limits(2)),...
'Units','Normalized', 'Position',[0.19 0.25 0.12 0.04], 'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','black');

savehdl(8) = uicontrol(gcf, 'Style','slider','Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.21 0.18 0.03], ...
'Min',limits(1), 'Max',limits(2), 'Value',limits(2), 'Callback','orbits("sliders");');

% Objeto: Deslizador de la inclinación

```



```

savehndl(9) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String','Inclinación (grad)',...
'Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.15 0.18 0.04],'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','black');

savehndl(10) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String',num2str(degrees(3)),...
'Units','Normalized', 'Position',[0.21 0.15 0.08 0.04],'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','black');

savehndl(11) = uicontrol(gcf, 'Style','slider','Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.11 0.18 0.03], ...
'Min',degrees(1), 'Max',degrees(2), 'Value',degrees(3),'CallBack','orbits("sliders");');

% Espacio de texto para el título de Localización
savehndl(12) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String','Localización actual', ...
'Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.05 0.17 0.04],'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','red' );

% Espacio de texto para la posición actual
savehndl(13) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String'," ...
'Units','Normalized', 'Position',[0.22 0.05 0.29 0.04],'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','red' );

% Espacio de texto para el título Lat/Long
savehndl(20) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String','Lat/Long:', ...
'Units','Normalized', 'Position',[0.05 0.01 0.09 0.04],'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','red' );

% Espacio de texto para la Latitud
savehndl(21) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String'," ...
'Units','Normalized', 'Position',[0.15 0.01 0.08 0.04],'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','red' );

% Espacio de texto para la Longitud

```



```

savehnd1(22) = uicontrol(gcf, 'Style','Text', 'String','', ...
'Units','Normalized', 'Position',[0.24 0.01 0.09 0.04], 'HorizontalAlignment','left',...
'BackgroundColor',figclr, 'ForegroundColor','red' );

% Botón de inicio

savehnd1(14) = uicontrol(gcf, 'Style','push', 'String','Iniciar',...
'Units','Normalized', 'Position',[0.29 0.31 0.10 0.06], 'Callback','orbits("run");', 'Interruptible','on');

% Botón de detención

savehnd1(15) = uicontrol(gcf, 'Style','push', 'String','Detener',...
'Units','Normalized', 'Position',[0.29 0.24 0.10 0.06], 'Callback','orbits("stop");', 'Enable','off');

% Botón de salida

savehnd1(16) = uicontrol(gcf, 'Style','push', 'String','Salir',...
'Units','Normalized', 'Position',[0.29 0.17 0.10 0.06], 'Callback','close');

%*****
%*****

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

---

## Apéndice B. Propiedades atmosféricas

---

La siguiente tabla muestra algunas propiedades atmosféricas[4].

Tabla VI: Propiedades atmosféricas

| Altura desde la superficie<br>de la Tierra [km] | Temperatura [K] | Presión [pa]            | Densidad [kg/m <sup>3</sup> ] | Altura de la escala<br>de densidad [km] |
|---|-----------------|-------------------------|-------------------------------|---|
| 0   | 288.150         | 101325                  | 1.2250                        | 8                                       |
| 50  | 270.650         | 79.779                  | $1.0269 \times 10^{-3}$       | 8                                       |
| 100   | 195.08          | $3.2011 \times 10^{-2}$ | $5.604 \times 10^{-7}$        | 6                                       |
| 200   | 854.56          | $8.4736 \times 10^{-5}$ | $2.541 \times 10^{-10}$       | 30                                      |
| 300   | 976.01          | $8.7704 \times 10^{-6}$ | $1.916 \times 10^{-11}$       | 44                                      |
| 400   | 995.83          | $1.4518 \times 10^{-6}$ | $2.803 \times 10^{-12}$       | 55                                      |
| 500   | 999.24          | $3.0236 \times 10^{-7}$ | $5.215 \times 10^{-13}$       | 59                                      |
| 600   | 999.85          | $8.2130 \times 10^{-8}$ | $1.137 \times 10^{-13}$       | 67                                      |
| 700   | 999.97          | $3.1908 \times 10^{-8}$ | $3.070 \times 10^{-14}$       | 84                                      |
| 800   | 999.99          | $1.7036 \times 10^{-8}$ | $1.136 \times 10^{-14}$       | 117                                     |
| 900   | 1000            | $1.0873 \times 10^{-8}$ | $5.795 \times 10^{-15}$       | 175                                     |
| 1000  | 1000            | $7.5138 \times 10^{-9}$ | $3.561 \times 10^{-15}$       | 236                                     |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

## Bibliografía

---

- [1] Bruce R. Elbert, *Introduction to Satellite Communications*, Artech House Inc., Norwood, MA 1999.
- [2] Bruno Pattan, *Satellite Systems Principles & Technologies*, Van Nostrand Reinhold, 1993.
- [3] Gary D. Gordon & Walter L. Morgan, *Principles of Communications Satellites*, John Wiley & Sons, Inc, 1993.
- [4] Wilbur L. Pritchard, Henri G. Suyderhoud, Robert A. Nelson, *Satellite Communication System Engineering*, Prentice Hall P T R, New Jersey, 1993.
- [5] Tom Logsdon, *Mobile Communication Satellites Theory and Applications*, Mc Graw-Hill, Inc., 1995.
- [6] Desmond King-Hele FRS, *Satellite Orbits in an Atmosphere: Theory and Applications*, Blackie and Son Ltd., London, 1987.
- [7] M Richharia, *Satellite Communication Systems Design Principles*, Mc Graw-Hill, Inc., 1995.
- [8] Dr. M. N. Sweeting, *Satellite Communication System IEE Telecommunications Series 18; Cost Effective Spacecraft Engineering in Low Earth Orbit Satellites*, Peter Peregrinus Ltd., U. K., 1987.
- [9] Bruno Pattan, *Satellite Based Cellular Communications*, Mc Graw-Hill, 1998.
- [10] Proceedings of the Third European Workshop on Mobile Personal Satcoms EMPS 98, *Mobile and Personal Satellite Communications 3*, Springer Verlag, London Ltd., 1999.
- [11] G. Maral, M. Bousquet, *Satellite Communication Systems; Systems, Techniques and Technology*, John Wiley & Sons Ltd., 1993.
- [12] Gary M. Miller, *Modern Electronic Communication*, Prentice Hall, 1999.

- [13] Louis Brand, *Vectorial Mechanics*, John Wiley & Sons Inc., 1954.
- [14] H. C. Corben, Philip Stehle, *Classical Mechanics*, John Wiley & Sons Ltd., 1974.
- [15] Donald T. Greenwood, *Principles of Dynamics*, Prentice Hall, Inc. 1998.
- [16] D. Boccaletti, G. Pucacco, *Theory of Orbits; Perturbative and Geometrical Methods*, Springer Verlag, 1999.
- [17] J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, William Bell, Inc., 1992.
- [18] V. C. Dragomir, D. N. Ghitau, M. S. Mihailescu, M. G. Rotaru, *Theory of the Earth's Shape*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.
- [19] Petr Vaníček, Edward J. Krakiwsky, *Geodesy the concepts*, Elsevier Science Publishing Company, 1986.
- [20] G. Bomford, *Geodesy*, Oxford University Press, 1980.
- [21] Merrill I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, Mc Graw-Hill, Inc., 1962.
- [22] Dolores M. Etter, *Engineering Problem Solving with Matlab*, Prentice-Hall, Inc. 1997.
- [23] *Using MATLAB*, Math Works, Inc., 1997.

