

01190  
17

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN INGENIERÍA

TESIS

Diseño de observadores para sistemas no lineales con propiedades reducidas de observabilidad

presentada por:

Alejandro Vargas Casillas

para obtener el grado de:

DOCTOR EN INGENIERÍA

Jurado doctoral:

- Dr. Jaime A. Moreno Pérez
- Dr.-Ing. Michael Zeitz
- Dr. Gerardo R. Espinosa Pérez
- Dr. Luis A. Álvarez-Icaza Longoria
- Dr. Jesús Álvarez Calderón
- Dr. Alexander Poznyak
- Dr. Marco Arteaga Pérez

... a la Dirección General de Bibliotecas...  
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso...  
contenido de mi trabajo recepcional  
NOMBRE: Alejandro Vargas Casillas  
FECHA: 18/11/2002  
FIRMA: [Signature]

Ciudad Universitaria, noviembre de 2002

I TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

---

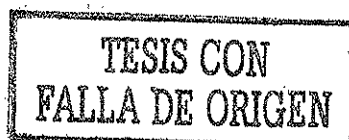
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES Y ENSEÑANZA DE QUÍMICA  
CARRERAS DE QUÍMICA Y QUÍMICA INDUSTRIAL  
CARRERA DE QUÍMICA INDUSTRIAL  
CARRERA DE QUÍMICA INDUSTRIAL

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Prólogo</b>	<b>VII</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>XV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Propiedades reducidas de observabilidad . . . . .	1
1.2. Aportes de la tesis . . . . .	4
1.3. Organización de la tesis . . . . .	5
1.4. Notación . . . . .	6
<b>2. Observabilidad y diseño de observadores</b>	<b>9</b>
2.1. Observabilidad y el mapa de observabilidad . . . . .	10
2.2. Técnicas de diseño de observadores . . . . .	13
2.3. El observador de alta ganancia . . . . .	15
2.3.1. La forma de $n$ -observabilidad . . . . .	15
2.3.2. El observador de alta ganancia . . . . .	16
2.3.3. Prueba de convergencia . . . . .	18
2.4. Reducciones de observabilidad . . . . .	19
<b>3. Extensiones de orden de sistemas no lineales</b>	<b>23</b>
3.1. Observadores continuos y de alta ganancia . . . . .	24
3.2. Extensiones de orden . . . . .	26
3.3. Construcción de extensiones de orden . . . . .	28
3.3.1. Construcción con derivadas de la salida . . . . .	28
3.3.2. Construcción usando estructuras . . . . .	30
3.4. Desventajas . . . . .	32

3.5. Resumen . . . . .	33
<b>4. Observadores aproximados continuos de alta ganancia</b>	<b>35</b>
4.1. Observadores continuos . . . . .	35
4.2. Semi-equivalencia de trayectorias . . . . .	37
4.3. Observador aproximado de alta ganancia . . . . .	41
4.4. Resumen . . . . .	45
<b>5. Observadores basados en eventos</b>	<b>49</b>
5.1. Eventos y la forma de pseudo-observabilidad . . . . .	50
5.1.1. El mapa de suspensión . . . . .	50
5.1.2. Vecindad de puntos de entrada mala y otros conjuntos	51
5.1.3. La forma de pseudo-observabilidad . . . . .	52
5.1.4. Eventos y trayectorias admisibles . . . . .	55
5.2. OBE continuo de alta ganancia . . . . .	57
5.2.1. Resultado principal . . . . .	57
5.2.2. Prueba del Teorema 5.2 . . . . .	58
5.2.3. La parte algebraica y algunos comentarios . . . . .	59
5.2.4. Un ejemplo . . . . .	61
5.3. Implementación en coordenadas originales . . . . .	62
5.3.1. Resultado principal . . . . .	62
5.3.2. Prueba del Teorema 5.3 . . . . .	65
5.3.3. Un ejemplo . . . . .	67
5.4. Resumen . . . . .	69
<b>6. Un biorreactor como ejemplo</b>	<b>71</b>
6.1. Modelo matemático . . . . .	71
6.2. Extensión de orden . . . . .	73
6.3. Diseño del observador . . . . .	74
6.3.1. Una forma de observabilidad con inyección de salida .	74
6.3.2. Observador basado en eventos continuo . . . . .	76
6.3.3. Implementación en las coordenadas originales . . . . .	78
6.4. Resultados de simulación . . . . .	80
6.5. Resumen . . . . .	84
<b>7. Conclusiones</b>	<b>85</b>
<b>A. Teoremas y definiciones útiles</b>	<b>89</b>
A.1. Conceptos topológicos . . . . .	89
A.2. Funciones y mapas . . . . .	91

<b>B. Propiedades de la matriz <math>S_\theta</math></b>	<b>95</b>
B.1. Definitividad positiva . . . . .	95
B.2. Solución explícita . . . . .	96
B.3. Propiedades de la norma $\  \cdot \ _{S_\theta}$ . . . . .	96
<b>C. Modelo del biorreactor aerobio</b>	<b>99</b>
C.1. Modelo matemático riguroso . . . . .	99
C.2. Modelo matemático simplificado . . . . .	101
C.3. Determinación of funciones de entrada mala . . . . .	103
C.4. Análisis de observabilidad . . . . .	104
C.5. Extensión de orden . . . . .	105
<b>D. Parámetros del modelo del biorreactor</b>	<b>109</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>111</b>



*Índice general*

---

Índice general

# Índice de figuras

4.1. Trayectorias de estado para un observador $\epsilon$ -aproximado de alta ganancia . . . . .	46
4.2. Error de estimación error para dos observadores $\epsilon$ -aproximados de alta ganancia . . . . .	46
5.1. Diagrama esquemático del una vecindad del conjunto de puntos de entrada mala . . . . .	51
5.2. Diagrama esquemático del conjunto compacto $\mathcal{K}$ . . . . .	52
5.3. La forma de pseudo-observabilidad form . . . . .	56
5.4. Simulación del OBE continuo de alta ganancia para un ejemplo	63
5.5. Implementación de OBE de alta ganancia en coordenadas originales para un ejemplo . . . . .	68
6.1. Gráfica de $\mu(x_2)$ . . . . .	72
6.2. Función de entrada usada en las simulaciones . . . . .	81
6.3. Resultados de simulación para el OBE continuo de alta ganancia para el ejemplo del biorreactor . . . . .	82
6.4. Resultados de simulación para el OBE implementado en las coordenadas originales para el ejemplo del biorreactor . . . . .	83
C.1. Cinética de la ley de Haldane . . . . .	101



*Índice de figuras*

---

# Lista de símbolos

## Vectores

$x$  : Vector de estado del sistema, de dimensión  $n$

$\hat{x}$  : Estado estimado, de dimensión  $n$

$\tilde{x}$  : Error de estimación  $\tilde{x} = \hat{x} - x$ , de dimensión  $n$

$x_0$  : Condición inicial del sistema, de dimensión  $n$

$\hat{x}_0$  : Condición inicial del observador, de dimensión  $n$

$u$  : Vector de entrada, de dimensión  $p$

$\underline{u}$  : Vector de la entrada y  $w$  derivadas temporales, de dimensión  $p(w + 1)$ ,  
i.e.

$$\underline{u} = \left[ u^T, \dot{u}^T, \dots, {}^{(w)}u^T \right]^T$$

$\underline{y}$  : Vector de la salida y  $r - 1$  derivadas temporales, de dimensión  $r$ , i.e.

$$\underline{y} = \left[ y, \dot{y}, \dots, {}^{(r-1)}y \right]^T$$

$z$  : Vector de estado en coordenadas de observabilidad, de dimensión  $n$  ó  $r$

$\hat{z}$  : Estado estimado en coordenadas de observabilidad, de dimensión  $n$  ó  $r$

$e$  : Vector de error en coordenadas de observabilidad, de dimensión  $n$ , i.e.  
 $e = \hat{z} - z$

$\xi$  : Vector de estado extendido, de dimensión  $r$

$\hat{\xi}$  : Vector de estado extendido estimado, de dimensión  $r$

- 
- $\xi_a$  : Primeros  $n$  elementos de  $\xi$ ; asemeja a  $x$   
 $\xi_b$  : Últimos  $m$  elementos de  $\xi$ ; asemeja a  $\psi(x)$   
 $l$  : Ganancia del observador, de dimensión  $n$  ó  $r$

## Escalares

- $t$  : Tiempo  
 $y$  : Salida del sistema  
 $n$  : Dimensión (orden) del sistema dinámico  
 $p$  : Dimensión del vector de entrada o un número natural (en ejemplos)  
 $r$  : Orden del mapa de observabilidad,  $r \geq n$   
 $m$  : Dimensión de los estados añadidos en una extensión de orden,  $m = r - n$   
 $w$  : Número de derivadas temporales de la entrada en el vector  $\underline{u}$   
 $k$  : Constante de Lipschitz de las funciones no lineales  $\varphi$ ,  $\varphi_L$  ó  $\bar{\varphi}$   
 $\theta$  : Parámetro de ganancia en los observadores de alta ganancia  
 $\epsilon$  : Un escalar positivo (pequeño),  $\epsilon > 0$   
 $\delta$  : Otro escalar positivo (pequeño),  $\delta > 0$   
 $\delta_M$  : El valor supremo de la función temporal  $\delta(t)$  para una trayectoria dada, i.e.  $\delta_M = \sup_t |\delta(t)|$   
 $t_i^{\text{in}}$  : El instante de entrada de una trayectoria de estado-entrada al complemento del conjunto compacto  $\mathcal{K}$ , iniciando el  $i$ -ésimo evento  
 $t_i^{\text{out}}$  : El instante de salida de una trayectoria de estado-entrada del complemento del conjunto compacto  $\mathcal{K}$ , terminando el  $i$ -ésimo evento  
 $\tau_i$  : La duración del  $i$ -ésimo evento, i.e.  $\tau_i = t_i^{\text{out}} - t_i^{\text{in}}$   
 $T_i$  : La duración desde el fin del  $(i - 1)$ -ésimo evento hasta el inicio del  $i$ -ésimo evento, i.e.  $T_i = t_i^{\text{in}} - t_{i-1}^{\text{out}}$   
 $T$  : Un periodo de tiempo,  $T > 0$

$\beta$  : Un escalar apenas mayor que 1

$\varepsilon$  : Valor pequeño empleado para definir vecindades

$c_1$  : El valor propio mínimo de  $\mathbf{S}_1$

$c_2$  : El valor propio máximo de  $\mathbf{S}_1$

$\kappa$  : El valor  $\kappa = \frac{k\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{c_1}$ , donde  $\mathbf{S}_{1n,n}$  es el elemento  $(n, n)$  de  $\mathbf{S}_1$

$\gamma$  : Tasa de convergencia mínima en observador de alta ganancia:  $\gamma = \frac{1}{2}\theta - \kappa$

## Campos vectoriales, funciones y operadores

$\mathbf{f}$  : Campo vectorial que describe la dinámica del sistema

$\mathbf{f}_u$  : Campo vectorial dependiente de la entrada que describe la dinámica del sistema:  $\mathbf{f}_u = \mathbf{f}(\cdot, \mathbf{u})$

$\mathbf{F}$  : Campo vectorial que describe la dinámica de una extensión de orden

$\mathbf{g}_i$  : Funciones vectoriales en la forma afín en la entrada

$\mathbf{g}(y)$  : Un término de inyección de salida

$h$  : Función de salida del sistema

$H$  : Función de salida de una extensión de orden

$V$  : Una función de Lyapunov

$L_{\mathbf{f}}^k h$  : La  $k$ -ésima derivada de Lie de la función  $h$  a lo largo del campo vectorial  $\mathbf{f}$

$L_{\mathbf{f}_u}^k h$  : La  $k$ -ésima derivada de Lie dependiente de la entrada de la función  $h$  a lo largo del campo vectorial  $\mathbf{f}_u$

$\Phi$  : Una transformación de coordenadas no lineal

$\mathbf{q}_r$  : El mapa de  $r$ -observabilidad

$\mathbf{q}_r^{-1}$  : Inversa del mapa de  $r$ -observabilidad

$\mathbf{Q}_r$  : Mapa de suspensión de orden  $r$ , i.e.  $\mathbf{Q}_r(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = [\mathbf{q}_r^T(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \mathbf{u}^T]^T$

$\mathbf{Q}_r^{-1}$  : Inversa del mapa de suspensión

- 
- $\mathbf{Q}_r^I$  : Inversa generalizada del mapa de suspensión (con dominio extendido)  
 $\varphi$  : No linealidad característica de la forma de  $r$ -observabilidad  
 $\bar{\varphi}$  : Aproximación Lipschitz continua de la no linealidad característica  $\varphi$  con dominio extendido  
 $\varphi_L$  : Parte Lipschitz continua de  $\varphi$  después de una decomposición  
 $\varphi_\Delta$  : Complemento de  $\varphi_L$  para recuperar  $\varphi$ , i.e.  $\varphi_\Delta = \varphi - \varphi_L$   
 $\varphi_{\mathcal{K}}$  : La no linealidad  $\varphi$  con dominio restringido  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$   
 $\tilde{\varphi}$  : Diferencia  $\varphi(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{z}, \mathbf{u})$   
 $\tilde{\bar{\varphi}}$  : Diferencia  $\bar{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) - \bar{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{u})$   
 $\psi$  : Función empleada para definir una extensión de orden  
 $\mathbf{E}$  : Mapa tal que  $\mathbf{E}(\mathcal{X})$  es positivamente invariante,  $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}^T, \psi^T(\mathbf{x})]^T$   
 $\eta$  : Función empleada como grado de libertad  
 $\varrho$  : La función temporal  $\varrho(t) = L_{\hat{\mathbf{x}}_u}^n h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$   
 $\delta$  : La función temporal  $\delta(t) = \varrho(t) - \bar{\varphi}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))$  empleada en la forma de pseudo-observabilidad (no confundir con el escalar  $\delta$ )  
 $\psi_\epsilon$  : Función continua que aproxima la función inversa  $1/(\cdot)$  en una vecindad de cero con amplitud  $\epsilon$   
 $\beta$  : Función continua que aproxima  $1/\det \mathbf{J}$  fuera del conjunto compacto  $\mathcal{K}$

## Matrices

- $\mathbf{I}$  : La matriz identidad, i.e.  $\mathbf{I}_{i,j} = \delta_{i,j}$   
 $\mathbf{A}_n$  : Matriz de  $n \times n$  con unos en la supradiagonal, i.e.  $\mathbf{A}_{n,i,j} = \delta_{i,j-1}$   
 $\mathbf{B}_n$  : Matriz de  $n \times 1$   $\mathbf{B}_n = [0, \dots, 0, 1]^T$   
 $\mathbf{C}_n$  : Matriz de  $1 \times n$   $\mathbf{C}_n = [1, 0, \dots, 0]$   
 $\mathbf{S}_\theta$  : Matriz de  $n \times n$  usada en el diseño del observador de alta ganancia  
 $\mathbf{S}_1$  : La matriz  $\mathbf{S}_\theta$  con  $\theta = 1$

$\mathcal{O}$  : Matriz de observabilidad

$\mathbf{J}$  : Jacobiano  $\partial \mathbf{q}_n / \partial \mathbf{x}$  del mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n$

$\mathbf{J}^*$  : Una aproximación continua a la inversa  $\mathbf{J}^{-1}$

$\Delta$  : La matriz  $\Delta = \mathbf{J}\mathbf{J}^* - \mathbf{I}$

## Conjuntos

$\mathbb{N}_+$  : El conjunto de números naturales positivos  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$\mathbb{R}$  : El conjunto de números reales

$\mathbb{R}_+$  : El conjunto de números reales no negativos

$\mathbb{R}^n$  : El espacio euclideo de dimensión  $n$

$\mathcal{C}^0$  : El conjunto de funciones continuas

$\mathcal{C}^k$  : El conjunto de funciones diferenciables  $k$  veces

$\mathcal{X}$  : El espacio de donde el vector de estados  $\mathbf{x}$  toma valores,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$

$\Xi$  : El espacio de donde el vector extendido  $\xi$  toma valores,  $\Xi \subset \mathbb{R}^r$

$\mathcal{U}$  : El espacio de donde el vector de entradas  $\mathbf{u}$  toma valores,  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$

$\underline{\mathcal{U}}$  : El espacio de donde el vector  $\underline{\mathbf{u}}$  toma valores,  $\underline{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^{p(w+1)}$

$\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}$  : El espacio de estados-entradas  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}} = \mathcal{X} \times \underline{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^{n+p(w+1)}$

$\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^B$  : El conjunto de puntos de entrada mala,  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^B \subset \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}$

$\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^G$  : El conjunto de puntos de entrada "buena",  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^G = \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}} \setminus \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^B$

$\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^C$  : Un subconjunto compacto de  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}$ , i.e.  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^C \subset \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}$

$\mathcal{N}_\epsilon$  : Una vecindad abierta del conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^B$

$\mathcal{N}_\epsilon^{comp}$  : El complemento de  $\mathcal{N}_\epsilon$  en  $\mathbb{R}^n \times \underline{\mathcal{U}}$ , i.e.  $\mathcal{N}_\epsilon^{comp} = (\mathbb{R}^n \times \underline{\mathcal{U}}) \setminus \mathcal{N}_\epsilon$

$\mathcal{K}$  : El conjunto compacto  $\mathcal{K} = \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^C \cap \mathcal{N}_\epsilon^{comp}$

$\mathcal{Y}_r$  : La imagen del mapa de  $r$ -observabilidad,  $\mathcal{Y}_r = \mathbf{q}_r(\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}})$  o  $\mathcal{Y}_r = \mathbf{q}_r(\mathcal{X})$

$\Delta_i^*$  : El  $i$ -ésimo evento, i.e. el intervalo abierto de tiempo  $\Delta_i^* = (t_i^{in}, t_i^{out})$

$\mathcal{B}_\epsilon$  : La bola abierta donde  $|\det \mathbf{J}| < \epsilon$

---

## Trayectorias y soluciones

$x(t; x_0, u(t))$  : Solución de sistema dinámico invariante en el tiempo que pasa por  $x_0$  en  $t = 0$  y sujeto a la función forzante  $u(t)$

$\hat{x}(t; \hat{x}_0, u(t), y(t))$  : Solución de sistema dinámico invariante en el tiempo que pasa por  $x_0$  en  $t = 0$  y sujeto a la función forzante  $u(t)$  y a la función de salida  $y(t)$  de otro sistema

$x(t; x_0)$  : Solución de sistema dinámico autónomo que pasa por  $x_0$  en  $t = 0$

$\hat{x}(t; \hat{x}_0, y(t))$  : Solución de sistema dinámico que pasa por  $x_0$  en  $t = 0$ , forzado por la función de salida  $y(t)$  de otro sistema

$z(t; z_0)$  : Solución de sistema dinámico autónomo que pasa por  $z_0$  en  $t = 0$

$Z(t; z_0)$  : Conjunto de soluciones que pasan por  $z_0$  en  $t = 0$  cuando no existen soluciones únicas.

$y(t, x_0, u(t))$  : Trayectoria de salida de un sistema forzado,  $y(t, x_0, u(t)) = h(x(t; x_0, u(t)))$

$y(t, x_0)$  : Trayectoria de salida de sistema autónomo,  $y(t, x_0) = h(x(t; x_0))$

$Y(t; z_0)$  : Conjunto de trayectorias de salida cuando el sistema no posee soluciones únicas,  $Y(t; z_0) = \bar{h}(Z(t; z_0))$

## Símbolos relacionados con biorreactor

$\mu(x_2)$  : Tasa de crecimiento específica

$w(t)$  : La función dependiente de la entrada  $w(t) = \exp \left[ - \int_0^t u(\tau) d\tau \right]$

$\lambda(x_3)$  : La función  $\lambda = 1 - a_2 x_3$  en la extensión de orden

$\alpha(x_2, u)$  : La función  $\alpha = b_2 u - k_2 k_1 w x_3$  en la extensión de orden

$\sigma(x_3, u)$  : Función que describe el conjunto de puntos de entrada mala, i.e.  $\sigma = \alpha \lambda - u x_3$  y  $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}^B = \{(x, u) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}} : \sigma = 0\}$

$\mathbf{T}(x, u)$  : Transformación a la forma de observabilidad mas inyección de salida

# Resumen

El objetivo del trabajo es diseñar observadores de alta ganancia para sistemas no lineales de orden  $n$  con una salida y propiedades reducidas de observabilidad. Se consideran tres reducciones, con respecto al mapa de  $r$ -observabilidad, que mapea el estado (y la entrada y un número finito de sus derivadas) al vector de la salida y  $r-1$  derivadas temporales. El diseño clásico de observadores de alta ganancia requiere que este mapa sea difeomórfico y de orden  $r = n$ , y por lo tanto que su forma de  $r$ -observabilidad sea Lipschitz.

La primera reducción de observabilidad sucede cuando se necesita  $r > n$  para que el mapa de  $r$ -observabilidad sea inyectivo. Se propone construir una *extensión de orden*, que es un sistema de orden  $r$  que contiene las trayectorias del sistema original de orden  $n$ . Además debe poseer un mapa de  $r$ -observabilidad inyectivo en casi todas partes para que se pueden diseñar observadores de alta ganancia.

La segunda reducción aparece cuando el mapa de  $n$ -observabilidad es semi-difeomórfico, pero su forma de  $n$ -observabilidad no es Lipschitz continua. Se propone el uso de un *observador aproximado de alta ganancia* y las trayectorias del error resultan uniformemente finalmente acotadas.

La tercera reducción es la existencia de un subconjunto no vacío de *puntos de entrada mala* donde el mapa de  $n$ -observabilidad pierde inyectividad. Restringiendo trayectorias, el *observador basado en eventos continuo de alta ganancia* usa una aproximación continua de la forma de  $n$ -observabilidad y el error en las coordenadas de observabilidad resulta uniformemente finalmente acotado.

Las estrategias de diseño de observadores son ilustradas con ejemplos académicos y probadas en el modelo matemático simplificado de un biorreactor aerobio con una cinética de reacción no inyectiva. Se muestran también los resultados de simulaciones.

**Palabras clave:** observador, observabilidad reducida, sistema no lineal



---

# Abstract

The objective is to design high gain observers for single output forced nonlinear systems of order  $n$  with reduced observability properties. Three reductions are considered with respect to the (input-dependent)  $r$ -observability map, which maps the state (and the input and a finite number of its time derivatives) to the output and  $r - 1$  time derivatives. Classical high gain observer design requires this map to be diffeomorphic and of order  $r = n$  and thus its  $n$ -observability form to be Lipschitz.

The first reduction of observability happens when  $r > n$  for the  $r$ -observability map to be injective. An  $r$ -th *order extension* is proposed, which contains the trajectories of the original  $n$ -th order system and has an almost everywhere injective  $r$ -observability map, so that high gain observer design strategies can be applied.

The second reduction happens when the  $n$ -observability map is semi-diffeomorphic, but its  $n$ -observability form is not Lipschitz continuous. The *approximate high gain observer* is proposed, such that error trajectories are uniformly ultimately bounded.

The third reduction happens when there exists a nonempty set of *bad input points* where the  $n$ -observability map loses injectivity. Restricting trajectories, the *continuous high gain event-based observer* uses a continuous approximation of the  $n$ -observability form and the error in observability coordinates becomes uniformly ultimately bounded.

The observer design strategies are illustrated using academic examples and tested on the simplified mathematical model of an aerobic bioreactor with noninjective reaction rate kinetics. Results of computer simulations are shown.

**Keywords:** observer, reduced observability, nonlinear system





# Prólogo

Este trabajo doctoral lo realicé entre febrero de 1999 y octubre de 2002 en la Coordinación de Automatización del Instituto de Ingeniería de la UNAM, aunque entre abril de 2000 y marzo de 2002 realicé una estancia de investigación en el *Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik* (Instituto de Dinámica de Sistemas y Control Automático) de la Universidad de Stuttgart, Alemania.

El tema de tesis fue motivado por el trabajo previo de la Maestría, en el cual no pudimos construir un observador satisfactorio para el modelo matemático del biorreactor piloto empleado para tratamiento de agua residual que se encontraba en la Coordinación de Bioprocesos Ambientales del Instituto. Con la investigación doctoral quisimos aportar una solución a la existencia de *entradas malas* para el modelo y otras reducciones de observabilidad. Durante la estancia en Stuttgart el tema de investigación quedó consolidado y después de mi regreso a México lo seguí trabajando hasta concluir la investigación y finalizar con este reporte escrito.

Quiero aprovechar este espacio en la tesis para agradecer a todos aquellos que me ayudaron en esta tarea. Primero a mis dos tutores. Le agradezco al Dr.-Ing. Jaime Moreno por todo el apoyo que me ha brindado desde que inicié mi proyecto de tesis de Maestría, con comentarios y consejos siempre certeros y amistosos. Así mismo también agradezco de manera especial al Prof. Dr.-Ing. Michael Zeitz por estar siempre atento a mis dudas y por el especial apoyo brindado durante la estancia en Stuttgart. Me gustaría también agradecer a los miembros del Jurado Doctoral por tomarse un tiempo para leer y criticar el trabajo: a los Dres. Luis Álvarez-Icaza, Gerardo Espinosa, Marco Arteaga, Alexander Poznyak y Jesús Álvarez.

No puedo tampoco dejar de agradecer los apoyos económicos de aquellas instituciones que me ayudaron a terminar este periodo de formación académica: la Dirección General de Estudios de Posgrado, el DAAD de Alemania (Deutscher Akademischer Austauschdienst) y el CONACYT y la DGAPA-UNAM durante los últimos meses con becas de proyecto.

---

Agradezco también el apoyo de mis padres, hermanos, suegros y cuñados, quienes siempre estuvieron presentes con un apoyo moral importante. Por supuesto agradezco a todos los amigos que cumplieron una función similar, tanto los viejos de aquí como los nuevos de allá.

Por último y de manera especial quiero hacer un agradecimiento especialísimo a Blanca, mi esposa, sin quien nada de nada podría haberse logrado. Por supuesto les debo agradecer también a nuestras dos hijas, Ana Sofía y Sara Emilia, quienes implícitamente han fomentado todas mis acciones desde su nacimiento. Para ellas, mis tres mujeres, va esta tesis dedicada.

México D.F., a 13 de noviembre de 2002

Alejandro Vargas Casillas

# Capítulo 1

## Introducción

El presente trabajo de tesis trata el diseño de *observadores* para sistemas no lineales forzados de una salida,

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0, \quad y = h(x), \quad (1.1)$$

donde  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $y \in \mathbb{R}$  es la única salida y  $u(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$  es una función de entrada exógena suficientemente diferenciable.

Un observador es un sistema dinámico empleado para obtener una estimación confiable  $\hat{x}(t)$  del estado  $x(t)$ , dado el conocimiento del modelo  $f(\cdot, \cdot)$  y  $h(\cdot)$  y mediciones de la salida  $y(t)$  y la entrada  $u(t)$ , *sin* conocimiento completo de la condición inicial  $x_0$ , incluso sin conocimiento alguno.

En los últimos 30 años muchas técnicas para el diseño de observadores han sido propuestas (Walcott, Corless y Žak, 1987; Misawa y Hedrick, 1989; Nijmeijer y Fossen, 1999). La mayoría de ellas requieren la satisfacción de ciertas *propiedades de observabilidad* del sistema (1.1), que en algunos casos llegan a ser demasiado estrictas y poco aplicables a problemas reales. Esta tesis explora el diseño de observadores prácticos bajo *propiedades reducidas de observabilidad*, y este capítulo introductorio da un panorama general de las reducciones consideradas usando distintas variantes de un ejemplo sencillo. Posteriormente se da un esquema de la organización de la tesis.

### 1.1. Propiedades reducidas de observabilidad

Considérese el siguiente sistema de una entrada y una salida.

**Ejemplo 1.1**

$$\dot{x} = ax + u, \quad x(0) = x_0, \quad y = x^p \quad (p \in \mathbb{N}_+) \quad (1.2)$$

con  $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ , y  $a \in \mathbb{R}$ .

Considérese primero el caso  $p = 1$ ; entonces el sistema (1.2) es lineal y *observable*. Considérese ahora el siguiente sistema

$$\dot{\hat{z}} = a\hat{z} + u + l \cdot [y - \hat{z}] \quad (l \in \mathbb{R}), \quad \hat{z}(0) = \hat{x}_0, \quad (1.3)$$

$$\hat{x} = \hat{z} \quad (1.4)$$

La dinámica del error  $e = \hat{z} - x$  está dada por

$$\dot{e} = (a - l)e, \quad e(0) = \hat{z}_0 - x_0. \quad (1.5)$$

Si  $l$  se escoge tal que  $a - l < 0$ , entonces el error  $e(t)$  tiende exponencialmente a cero, independientemente de cómo se escoja la condición inicial del observador (1.3). Por supuesto, esto implica que el error  $\tilde{x}$  entre el estado  $x$  y su estimado  $\hat{x}$  también tiende a cero, porque en este caso trivial  $e = \tilde{x}$ .

Este sencillo ejemplo muestra la estructura de los observadores que se tratan en esta tesis: una parte dinámica (1.3) que comprende la dinámica del sistema en su *forma de observabilidad* mas un término corrector que depende de la salida (y quizá también de la entrada), y una parte algebraica (1.4) que se emplea para obtener el estimado del estado en las coordenadas originales.

Para un sistema lineal, las definiciones de *observabilidad* (Hermann y Krener, 1977) son todas equivalentes y un observador global siempre puede ser construido si el sistema es (globalmente) observable. Para sistemas no lineales, además de la observabilidad, otras propiedades simplifican el diseño de observadores. Algunas de estas propiedades de observabilidad se vuelven necesarias para poder aplicar muchas de las técnicas de diseño reportadas en la literatura. Sin embargo, un sistema podría tener *propiedades reducidas de observabilidad* y no es posible emplear las técnicas clásicas de diseño de observadores.

Considérese el Ejemplo 1.1 con  $p = 3$ . Es evidente que su linealización de Taylor ( $\mathbf{A} = a$ ,  $\mathbf{C} = 0$ ) alrededor del punto de operación  $x = 0$ ,  $u = 0$  no es observable. Sin embargo, es posible construir un observador (Krener, 1994):

$$\dot{\hat{z}} = a\hat{z} + u + l \cdot [\sqrt[3]{y} - \hat{z}] \quad (l > a), \quad \hat{z}(0) = \hat{x}_0, \quad (1.6)$$

$$\hat{x} = \hat{z} \quad (1.7)$$

Este observador está inteligentemente construido, pero su construcción es heurística y no sigue ninguna metodología. Nótese que no es suave (i.e.  $\mathcal{C}^\infty$ ),

pero tiene un lado derecho que es continuo. Con la misma motivación, Xia y Zeitz (1997) proponen la construcción de *observadores continuos* cuando el llamado *mapa de observabilidad* no es un difeomorfismo, pero tiene una inversa continua. Este mapa relaciona el estado  $x$  con la salida  $y$  y un cierto número de sus derivadas temporales  $\dot{y}, \ddot{y}, \dots$ . Usándolo como transformación de coordenadas se obtiene la *forma normal de observabilidad*<sup>1</sup>.

Para el sistema (1.2) con  $p = 3$ , el mapa de observabilidad  $q(x) = x^3$  es inyectivo en todas partes, pero no es difeomórfico, ya que su inversa  $q^{-1}(z) = z^{1/3}$  es continua —mas no diferenciable— en  $z = 0$ . Su forma de observabilidad está dada por

$$\dot{z} = 3az + 3uz^{2/3}, \quad z(0) = x_0^3, \quad y = z. \quad (1.8)$$

No es posible diseñar un observador continuo (Xia y Zeitz, 1997), porque (1.8) no es Lipschitz continua para toda  $u$ . Con esto se ejemplifica una reducción de observabilidad, la que sucede cuando la no linealidad característica  $\varphi(z, u) = 3az + 3uz^{2/3}$  de la forma de observabilidad no es Lipschitz. Para resolver este problema, se considera el uso de un *observador aproximado de alta ganancia* (Moreno y Vargas, 2000).

Considérese nuevamente el Ejemplo 1.1, pero ahora con  $p = 2$ . Su linealización de Taylor ( $A = a$ ,  $C = 0$ ) alrededor del punto de equilibrio  $x = 0$ ,  $u = 0$  no es observable. El mapa de observabilidad usual  $q(x) = x^2$  no es globalmente inyectivo. Sin embargo, considérese el mapa de 2-observabilidad, que mapea el estado y la entrada a la salida y su primera derivada,

$$q_2(x) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2(ax^2 + xu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Este mapa separa puntos  $x \in \mathbb{R}$  si  $u \neq 0$ , así que es inyectivo si la entrada  $u$  no es nula. De hecho, si la *función de entrada*  $u(t)$  es idénticamente cero para todo tiempo, entonces cualquier mapa de  $r$ -observabilidad con  $r \geq n$  resulta no inyectivo cuando  $u = \dot{u} = \dots = \overset{(r-2)}{u} = 0$ . Esto sucede porque para  $u(t) \equiv 0$ , la condición inicial  $x_0$  no se puede distinguir de  $-x_0$  (una condición inicial distinta) simplemente observando sus salidas (son idénticas). Esto es, el par de condiciones iniciales  $(x_0, -x_0)$  *no es distinguible* con la *función de entrada mala*  $u(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0$ .

Se podría argumentar que una función de entrada mala difícilmente sucede en la práctica, o bien, que este tipo de funciones de entrada se pueden evitar. Sin embargo, podría suceder que durante ciertos instantes de tiempo

<sup>1</sup>En el Capítulo 2 estos conceptos se definen mejor.





alguna trayectoria cruce puntos del espacio de estados-entradas donde se pierde la inyectividad de algún mapa de  $r$ -observabilidad. A estos puntos se les llama *puntos de entrada mala* (Vargas, Moreno y Zeitz, 2001) del mapa de  $r$ -observabilidad. Para el ejemplo anterior y su mapa de 2-observabilidad, esto sucede cada vez que la entrada  $u(t)$  cruza el valor cero, i.e. los puntos de entrada mala están caracterizados por  $\{(x, u)^* : x \in \mathbb{R}, u = 0\}$ . No se puede construir o simplemente no existe una forma de observabilidad mientras se crucen puntos de entrada mala. Esta es otra reducción importante en la observabilidad que se analiza en este trabajo. La solución que se propone es el uso de *observadores basados en eventos* (Vargas et al., 2001).

Para el ejemplo anterior con  $p = 2$ , existe otra reducción de observabilidad. Nótese que el mapa de 1-observabilidad  $\mathbf{q}_1(x) = x^2$  no es inyectivo en ninguna parte, pero el de 2-observabilidad sólo pierde inyectividad en los puntos de entrada mala, los cuales forman un subconjunto relativamente pequeño del espacio de estados-entradas  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . La inyectividad se obtiene (al menos parcialmente) hasta que se considera un mapa de observabilidad de *orden superior* al sistema. Esta es la tercera reducción de observabilidad que se considera en esta tesis: necesitar  $r > n$ .

Para tratar esta reducción, aquí se propone que se *inmerja* al sistema original en un sistema de dimensión  $r$  que tenga un mapa de  $r$ -observabilidad inyectivo en casi todas partes y que además contenga las trayectorias del sistema original de dimensión  $n$ . Esto se hace *antes* de realizar el diseño del observador. Para el sistema (1.2) con  $p = 2$ , dicha inmersión es en el sistema bilineal

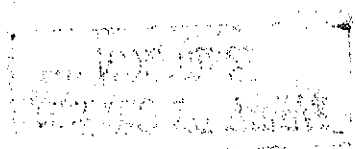
$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2u & 2a \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \xi(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0^2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \xi. \quad (1.10)$$

Su mapa de 2-observabilidad  $\mathbf{q}_2(\xi) = [\xi_2, 2(u\xi_1 + a\xi_2)]^T$  es inyectivo en todas partes, excepto en el subconjunto de puntos de entrada mala, donde  $u = 0$ . Nótese que si se escoge la condición inicial  $\xi(0)$  como en (1.10), la trayectoria de  $\xi_1$  asemeja la de  $x$ , mientras que la de  $\xi_2$  asemeja la de  $y = x^2$ .

## 1.2. Aportes de la tesis

Los principales aportes de esta tesis son los siguientes:

- La definición de los *puntos de entrada mala* y la  *$r$ -observabilidad*, con el fin de caracterizar algunas reducciones de observabilidad; véanse las Definiciones 2.1 y 2.2, respectivamente;



- La propuesta de realizar una *extensión de orden* y así obtener primero un sistema  $r$ -observable de orden  $r$  antes del diseño del observador propiamente; véase el Capítulo 3;
- La propuesta de emplear un *observador aproximado de alta ganancia* para sistemas con un mapa de  $r$ -observabilidad semi-difeomórfico, pero con una forma de  $r$ -observabilidad no Lipschitz continua, completando así el resultado de Xia y Zeitz (1997) con respecto a los observadores continuos, cf. los Teoremas 4.2 y 4.3;
- La propuesta de usar *observadores basados en eventos* cuando existe un conjunto de puntos de entrada mala no vacío, restringiendo las trayectorias del sistema a ser  $\delta_M$ -admisibles; véase el Teorema 5.2;
- La aplicación de la teoría desarrollada a un ejemplo práctico: el modelo simplificado de un biorreactor aerobio con una tasa de crecimiento no inyectiva; véase el Capítulo 6.

### 1.3. Organización de la tesis

El siguiente Capítulo 2 empieza definiendo las nociones de observabilidad pertinentes a esta tesis. Se introduce el mapa de  $r$ -observabilidad y se reseñan algunos de los métodos de diseño de observadores bajo propiedades completas de observabilidad. Luego se presenta la forma de  $n$ -observabilidad y se explica la técnica de diseño del *observador de alta ganancia*. Se da una prueba detallada de la convergencia de este observador, pues también se usa en capítulos posteriores. Después se presentan las *reducciones de observabilidad* que se tratan en la tesis y se definen el importante concepto de  $r$ -observabilidad y los *puntos de entrada mala*.

Los siguientes tres capítulos presentan las soluciones a las tres reducciones de observabilidad consideradas. El estado del arte en las investigaciones para cada reducción se reseña en su capítulo correspondiente.

El Capítulo 3 trata las *extensiones de orden* para solventar el problema de falta de inyectividad del mapa de  $r$ -observabilidad hasta considerar  $r > n$ . La idea es inmergir el sistema original (1.1) en uno de orden  $r$  que además sea  $r$ -observable, conservando las coordenadas originales y agregando  $r - n$  estados auxiliares. Las sugerencias de cómo construir esta inmersión son ilustradas con ejemplos sencillos.

El Capítulo 4 primero reseña el diseño de *observadores continuos* (Xia y Zeitz, 1997) cuando el mapa de  $n$ -observabilidad es semi-difeomórfico, i.e.



suave con una inversa continua. Luego se extiende el resultado para incluir el caso en que la forma de observabilidad resultante no es Lipschitz. Se presentan los conceptos de *semi-equivalencia de trayectorias* y de *observabilidad en trayectorias*, así como algunas propiedades de la forma de  $n$ -observabilidad. Los Teoremas 4.2 y 4.3 sintetizan el resultado de este capítulo, que es la construcción de *observadores aproximados de alta ganancia*. Su prueba de convergencia aproximada, algunos comentarios y un ejemplo terminan el capítulo.

El Capítulo 5 presenta el caso en que, habiendo escogido un mapa de  $r$ -observabilidad, aún existe un subconjunto (pequeño) de puntos de entrada mala donde el mapa no es inyectivo. Se dan algunas definiciones y se introduce la *forma de pseudo-observabilidad*, así como el concepto de *evento* y la definición de *trayectorias  $\delta_M$ -admisibles*. El resultado principal es el Teorema 5.2, que propone la construcción de *observadores basados en eventos continuos de alta ganancia* bajo restricciones en las trayectorias. Le sigue una prueba de convergencia y un ejemplo ilustrativo. El capítulo termina con una nota acerca de su posible implementación en coordenadas originales.

Es importante resaltar que, aún cuando hayan sido presentadas por separado, las tres reducciones de observabilidad puede presentarse simultáneamente en un sistema. Sin embargo, las soluciones aquí propuestas pueden ser aplicadas independientemente. Como un ejemplo práctico de aplicación, en el Capítulo 6 se presenta el modelo simplificado de un biorreactor aerobio empleado en el tratamiento de aguas residuales tóxicas. Este modelo requiere un mapa de  $r$ -observabilidad de orden superior y tiene un conjunto de puntos de entrada mala no vacío. Después de inmergir el sistema original de orden 2 en uno de orden 3, se diseña un observador basado en eventos de alta ganancia y se presentan resultados de simulación.

Finalmente, en el último capítulo se presentan las conclusiones y perspectivas del trabajo. Varios apéndices al final presentan conceptos no incluidos en el texto principal para facilitar la lectura del mismo.

## 1.4. Notación

En esta tesis, las variables se representan con letras itálicas, los vectores con letras negritas itálicas, los campos vectoriales y las funciones con negritas sencillas, y las matrices con mayúsculas negritas, e.g.  $y$ ,  $x$ ,  $f$  y  $A_r$ , respectivamente. Los conjuntos se representan con letras caligráficas, e.g.  $\mathcal{X}$ . Las derivadas con respecto al tiempo se muestran como puntos sobre la variable, como en  $\dot{y}$  ó  $\dot{u}$ , o bien, por supraíndices entre paréntesis, como en



$\underline{u}^{(p)}$ . El vector construido con la variable y un número finito de sus primeras derivadas temporales se representa con una letra en negrita y subrayada. Por ejemplo,  $\underline{u}$  se define como

$$\underline{u} = \left[ \mathbf{u}^T, \dot{\mathbf{u}}^T, \dots, \mathbf{u}^{(w)T} \right]^T. \quad (1.11)$$

En este caso en particular, el subconjunto donde  $\underline{u}$  toma sus valores se denota con  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{p(w+1)}$ .

Tres matrices especiales son usadas en esta tesis, principalmente para escribir la forma de  $r$ -observabilidad. Las matrices  $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ ,  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  y  $\mathbf{C}_r \in \mathbb{R}^{1 \times r}$  están dadas por

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_r = [1, \mathbf{0}^T], \quad (1.12)$$

donde  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{r-1}$  es un vector de ceros e  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de dimensión  $r - 1$ .

La solución única del sistema (2.1) que pasa por  $\mathbf{x}_0$  cuando  $t = 0$  y sujeta a la función forzante de entrada  $\mathbf{u}(t)$  se representa por  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t))$  ó —si no existe confusión— simplemente por  $\mathbf{x}(t)$ . De manera similar,  $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t))$  representa  $h(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)))$ , con  $\mathbf{y}(t)$  escrita a veces. Esta misma notación se usa para el sistema autónomo (2.3), en cuyo caso  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$  e  $\mathbf{y}(t; \mathbf{x}_0)$  representan las trayectorias del estado y de la salida, respectivamente.



## Capítulo 2

# Observabilidad y diseño de observadores

En este capítulo se presentan el concepto de observabilidad y las reducciones que se consideran en esta tesis. Se introduce el mapa de  $r$ -observabilidad y se reseñan algunas técnicas clásicas de diseño de observadores para sistemas no lineales. Se hace énfasis en el observador de alta ganancia, ya que las soluciones que se presentan en capítulos posteriores lo usan como base.

Se consideran sistemas no lineales forzados de una salida

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad y = h(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}$  es el vector de estados que pertenece al espacio de estados  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  es la salida y  $\mathbf{u}(t): [0, \infty) \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^p$  es una función suficientemente suave que actúa como entrada exógena al sistema (2.1). Se asume que el campo vectorial  $\mathbf{f}$  y la función  $h$  son suaves (infinitamente diferenciables).

En algunos casos, el sistema (2.1) aparece en su forma afín en las entradas

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{g}_i(\mathbf{x})u_i, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad y = h(\mathbf{x}) \quad (2.2)$$

con  $\mathbf{f}$  el llamado término de deriva de (2.2) y  $\mathbf{g}_i: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  para  $i = 1, \dots, p$ .

Para facilitar la exposición de algunos temas, a veces sólo se considerarían sistemas no forzados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad y = h(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

con  $\mathbf{x} \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}$  y las funciones  $\mathbf{f}$  y  $h$  suficientemente suaves.

A lo largo de este capítulo, los conceptos introducidos se ilustran con variantes del siguiente sistema afín en los estados:

**Ejemplo 2.1**

$$\dot{x}_1 = x_2^p + g(x)u \quad (p \in \mathbb{N}_+) \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad y = x_1 \quad (2.4)$$

con  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ ,  $u(t): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  una función de entrada suficientemente diferenciable y  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar.

## 2.1. Observabilidad y el mapa de $r$ -observabilidad

La propiedad de *observabilidad* es esencial para el diseño de observadores para sistemas no lineales (2.1). Existen muchas nociones de observabilidad (Hermann y Krener, 1977), pero sólo algunas serán consideradas en este apartado.

La observabilidad de un sistema se relaciona con el concepto de *indistinguibilidad* (Nijmeijer y van der Schaft, 1990). Un par de condiciones iniciales  $(x_0, \bar{x}_0)$  es indistinguible si para *cada* función de entrada admisible  $u(t)$ , sus funciones de salida correspondientes son idénticas en su dominio de definición común. Un sistema se dice *observable* si la indistinguibilidad de cualquier par de condiciones iniciales  $(x_0, \bar{x}_0)$  implica  $\bar{x}_0 = x_0$ .

En otras palabras, el sistema (2.1) es observable si para *cada* par de condiciones iniciales distintas  $(x_0, \bar{x}_0)$ , existe *al menos una* función de entrada admisible  $u^0(t)$  que las distinga a partir de sus salidas, i.e.  $y(t; x_0, u^0(t)) \neq y(t; \bar{x}_0, u^0(t))$  (Sussmann, 1979).

La propiedad de observabilidad es genérica (Aeyels, 1981) y cuando un sistema es observable, la existencia de funciones de entrada que distinguen *cualquier* par de condiciones iniciales distintas también es genérica (Sussmann, 1979); estas entradas son llamadas *universales*. Los sistemas para los cuales toda función de entrada admisible es universal son llamados *observables para toda entrada*. Muchos métodos de diseño de observadores requieren que se satisfaga esta propiedad, especialmente los de alta ganancia (Gauthier, Hammouri y Othman, 1992), ya que permite caracterizar al sistema en términos de su *forma de observabilidad* (véase la siguiente Sección 2.2).

Cuando un sistema *no* es observable para toda entrada, entonces existen *funciones de entrada mala*  $u^*(t)$  (Gauthier y Bornard, 1981) que provocan que cierto par de condiciones iniciales  $(x_0^*, \bar{x}_0^*)$  sea indistinguible para esta entrada, i.e.  $y(t; x_0^*, u^*(t)) \equiv y(t; \bar{x}_0^*, u^*(t))$  para todo  $t \geq 0$ . La existencia

de funciones de entrada mala no es una mera curiosidad matemática, sino de hecho es crítica para el diseño de observadores.

Si un sistema (2.1) es observable y la salida es la suma de una función del estado inicial y una función de la entrada, entonces es observable para toda entrada (Hermann y Krener, 1977). Este es el caso de los sistemas lineales invariantes en el tiempo.

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad y = Cx \quad (2.5)$$

con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  y  $u \in \mathbb{R}^p$ . Para estos sistemas, la observabilidad se puede probar fácilmente verificando el rango de la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Si el rango de  $\mathcal{O}$  es  $n$ , entonces el sistema (2.5) es (globalmente) observable. Este es el conocido criterio del rango de Kalman; se dice entonces que  $(A, C)$  es un par observable.

**Ejemplo 2.2 (Ejemplo 2.1 con  $p = 1$  y  $g(x) \equiv b \in \mathbb{R}$ )** El sistema lineal resultante es (globalmente) observable, ya que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para sistemas no lineales (2.1), el criterio de Kalman se puede verificar para la linealización alrededor de un punto de operación  $(x_s, u_s)$  con  $f(x_s, u_s) = 0$  definiendo

$$A_s = \frac{\partial f}{\partial x}(x_s, u_s), \quad C_s = \frac{\partial h}{\partial x}(x_s). \quad (2.7)$$

Si  $\text{rank} \mathcal{O}_s = n$ , entonces el sistema es *localmente observable en el punto de operación*  $(x_s, u_s)$ . Sin embargo, esta condición es sólo suficiente.

**Ejemplo 2.3 (Ejemplo 2.1 con  $p = 3$  y  $g(x) = x_1$ )** Los puntos de operación son  $x_s = 0$ ,  $u_s = \bar{u}$  (con  $\bar{u}$  un número real) y el sistema es globalmente observable, pero la matriz de observabilidad  $\mathcal{O}_s$  tiene rango  $1 < n = 2$  para cualquier  $\bar{u}$ .



## 2.1. Observabilidad y el mapa de observabilidad

Para sistemas no lineales (2.1), la observabilidad es usualmente probada usando el mapa de  $r$ -observabilidad (Inouye, 1977; Zeitz, 1984), el cual relaciona el estado  $\mathbf{x}$  del sistema (2.1) con su salida  $y$  y  $r-1$  de sus derivadas temporales. Se define de la siguiente manera:

$$\mathbf{q}_r(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = [L_{\mathbf{f}_u}^0 h, L_{\mathbf{f}_u}^1 h, \dots, L_{\mathbf{f}_u}^{r-1} h]^T = \begin{bmatrix} y & \dot{y} & \dots & y^{(r-1)} \end{bmatrix}^T, \quad (2.8)$$

donde  $L_{\mathbf{f}_u}^k h$  son formas dependientes de la entrada de las derivadas de Lie de  $h$ , definidas por  $L_{\mathbf{f}_u}^0 h(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = h(\mathbf{x})$  y

$$L_{\mathbf{f}_u}^k h(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = \frac{\partial L_{\mathbf{f}_u}^{k-1} h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}_u + \frac{\partial L_{\mathbf{f}_u}^{k-1} h}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \cdot \frac{d\underline{\mathbf{u}}}{dt}, \quad k \geq 1. \quad (2.9)$$

En esta notación  $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^{p(w+1)}$  se define como en (1.11) con  $w$  suficientemente grande, tal que la entrada  $\mathbf{u}$  aparece explícitamente hasta la  $(r-w)$ -ésima derivada de Lie (2.9), mientras que la salida  $y$  y sus primeras  $k$  derivadas temporales con  $k < r-w$  pueden ser expresadas como funciones únicamente del estado  $\mathbf{x}$ . Las expresiones para  $L_{\mathbf{f}_u}^k h$  con  $k \geq r-w$  no dependen de todo  $\underline{\mathbf{u}}$ , sino tan sólo de sus primeros  $(k+1) - (r-w)$  términos, i.e.

$$\dots, L_{\mathbf{f}_u}^{r-w-1} h(\mathbf{x}), L_{\mathbf{f}_u}^{r-w} h(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}), L_{\mathbf{f}_u}^{r-w+1} h(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}, \dot{\underline{\mathbf{u}}}), \dots, L_{\mathbf{f}_u}^r h(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}). \quad (2.10)$$

Por lo tanto,  $w-1$  es el orden superior de derivadas de la entrada que aparece en el mapa de  $r$ -observabilidad. Sin embargo, para facilitar la notación se escribe como en (2.8) con  $\underline{\mathbf{u}} \in \underline{\mathcal{U}}$ , siendo  $\underline{\mathcal{U}}$  el conjunto donde la entrada  $\underline{\mathbf{u}}$  toma sus valores.

La propiedad más importante de este mapa es la *inyectividad*. Un mapa es globalmente inyectivo si cada punto en la imagen corresponde a un único punto en el dominio (para las definiciones de estos conceptos véase el Apéndice A). Un mapa es localmente inyectivo si cada punto en la imagen puede ser distinguido de sus vecinos por medio de sus puntos correspondientes en el dominio. La inyectividad global implica la existencia de una *inversa (izquierda)* que mapea puntos en la imagen a puntos en el dominio. Es importante resaltar que el dominio de la inversa tan sólo es la imagen del mapa, y no necesariamente todo el co-dominio. Para el mapa de  $r$ -observabilidad (2.8) la inyectividad depende de la entrada  $\underline{\mathbf{u}}$ .

Una condición suficiente para la observabilidad para toda entrada es la inyectividad global para toda  $\underline{\mathbf{u}}$  del mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  para alguna  $r \geq n$ . Por otro lado, el criterio de Kalman puede ser usado para verificar la observabilidad *local* definiendo la *matriz de observabilidad no*

lineal (Nijmeijer y van der Schaft, 1990) como el jacobiano del mapa de  $n$ -observabilidad

$$\mathcal{O}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.11)$$

Si esta matriz es regular en todo  $\mathcal{X}$ , i.e. su rango es  $n$ , entonces el sistema (2.1) es localmente observable, mientras que si el rango es  $n$  en algún punto  $\mathbf{x}_e$ , entonces es localmente observable en  $\mathbf{x}_e$ . Si  $\mathbf{x}_e$  es un punto de operación, entonces (2.11) también se puede construir con (2.6) usando (2.7).

**Ejemplo 2.3 (continuación)** El mapa de 2-observabilidad es globalmente inyectivo para toda  $u$ ,

$$z = \mathbf{q}_2(\mathbf{x}, u) = [x_1, x_2^3 + x_1 u]^T, \quad \mathbf{x} = \mathbf{q}_2^{-1}(z, u) = [z_1, \sqrt[3]{z_2 - z_1 u}]^T, \quad (2.12)$$

y por lo tanto el sistema es globalmente observable para toda entrada.

## 2.2. Reseña de técnicas de diseño de observadores

La mayoría de las técnicas de diseño de observadores requieren que el sistema (2.1) satisfaga algunas propiedades de observabilidad. En esta sección se reseñan algunos de estos métodos y sus requerimientos.

Dado un modelo del sistema (2.1) y ningún conocimiento previo de la condición inicial  $\mathbf{x}_0$ , un observador es un sistema dinámico empleado para estimar el estado  $\mathbf{x}(t)$  midiendo únicamente la salida  $y(t)$  y la entrada  $\mathbf{u}(t)$ . Usualmente se usan observadores de tipo Luenberger,

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \mathbf{l} \cdot [y - h(\hat{\mathbf{x}})], \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0. \quad (2.13)$$

Esta es una copia de la dinámica del sistema (2.1) mas un término corrector que depende linealmente del error de salida  $y - h(\hat{\mathbf{x}})$ . Es un observador de *orden completo*, ya que su dinámica tiene la misma dimensión que el estado del sistema  $\mathbf{x}$ , o sea  $n$ .

En su forma más simple el diseño del vector de ganancia  $\mathbf{l}$  se realiza linealizando el sistema de error alrededor de un punto de operación, por ejemplo en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_s$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s$ . Esto conduce a un observador local y requiere al menos la detectabilidad del par  $(\mathbf{A}_s, \mathbf{C}_s)$  dado por (2.7).

Desde el resultado clásico de Thau (1973) se han venido haciendo intentos por determinar (localmente) condiciones para la convergencia asintótica o exponencial de  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  hacia  $\mathbf{x}(t)$  usando esta técnica. La mayoría de estos resultados se basan en argumentos de Lyapunov (Rajamani y Cho, 1998; Rajamani, 1998).

Sin embargo, quizá el observador para sistemas no lineales más empleado en la actualidad sea el filtro de Kalman extendido (Jazwinski, 1970; Gelb, 1974), el cual no considera un punto de operación, sin que linealiza alrededor de las trayectorias del estado estimado. Esto conduce a un vector de ganancia  $l(t)$  variante en el tiempo. Además agrega  $\frac{1}{2}n(n+1)$  ecuaciones diferenciales para ser resueltas, las cuales corresponden a la matriz de covarianza del error. El filtro de Kalman extendido es por lo tanto un observador de *orden extendido*, ya que su dinámica evoluciona en un espacio de estados de dimensión  $\frac{1}{2}n(n+3)$ . A pesar de su amplia aceptación y su buen desempeño (usualmente), generalmente no se realiza un análisis de convergencia global, aunque algunos trabajos sí apuntan en esta dirección. Por ejemplo Reif, Sonnemann y Unbehauen (1998) dan condiciones para la convergencia global usando argumentos de Lyapunov, mientras que Deza, Bossanne, Busvelle, Gauthier y Rakotopara (1993) usan argumentos de alta ganancia.

De los métodos basados en la geometría diferencial han surgido las técnicas de diseño de *observadores en forma normal* (Krener y Isidori, 1983; Bestle y Zeitz, 1983; Krener y Respondek, 1985). Aquí se busca un difeomorfismo del estado  $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y un difeomorfismo de la salida  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que con la transformación de estados no lineal  $x^* = \Phi(x, u)$  y la transformación de salida  $y^* = \gamma(y)$  se lleve al sistema (1.1) a una forma observable con inyección de salida (y posiblemente también con inyección de entrada):

$$\dot{x}^* = Ax^* + \alpha(y^*, \underline{u}), \quad x^*(0) = \Phi(x_0), \quad y^* = Cx^*. \quad (2.14)$$

El diseño del observador se hace en estas nuevas coordenadas, donde la dinámica del error  $\tilde{x}^* = \hat{x}^* - x^*$  es exactamente lineal, y por lo tanto hay convergencia exponencial. Dado que  $\Phi$  es un difeomorfismo y  $\gamma$  es inyectiva, la implementación también se puede llevar a cabo en las coordenadas originales  $x$ . El problema principal con esta técnica es encontrar las transformaciones  $\Phi$  y  $\gamma$ , para lo cual la condición de rango (2.11) y condiciones (estrictas) de integrabilidad deben ser satisfechas. Tanto la verificación de estas condiciones, como el encontrar  $\Phi$  y  $\gamma$ , también se puede hacer usando técnicas algebraicas (Keller, 1987; Birk y Zeitz, 1988; Phelps, 1991).

Dado que la clase de sistemas transformables a la forma observable con inyección de salida (2.14) es relativamente pequeña (en lo particular deben ser observables para toda entrada), se han buscado alternativas similares. Éstas relajan algunas de las condiciones de integrabilidad permitiendo aproximaciones de esta forma observable hasta cierto grado (Nam, 1997; Kazantzis y Kravaris, 1998; Lynch y Bortoff, 2001; Krener y Xiao, 2001). Otro

trabajo en esta dirección es el observador de Luenberger extendido (Birk y Zeitz, 1988; Schaffner y Zeitz, 1999).

Existen además técnicas más particulares para el diseño de observadores (Walcott et al., 1987; Misawa y Hedrick, 1989), incluyendo los observadores adaptables (Cho y Rajamani, 1997; Besançon, 2000) y aquellos basados en modos deslizantes (Walcott y Žak, 1987). Sin embargo, esta tesis sólo se concentra en el diseño de observadores de *alta ganancia* (Tornambè, 1992; Gauthier et al., 1992; Ciccarella, Dalla Mora y Germani, 1993; Jouan y Gauthier, 1996), los cuales se explican con más detalle en la Sección 2.3.

## 2.3. El observador de alta ganancia

### 2.3.1. La forma de $n$ -observabilidad

Considérese el mapa de  $n$ -observabilidad dependiente de la entrada  $\mathbf{q}_n$ , dado por (2.8) con  $r = n$ , y considérese parametrizado por  $\underline{\mathbf{u}}$ , tal que  $\mathbf{q}_n: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Supóngase que  $\mathbf{q}_n$  es *inyectivo* y que se puede hallar una inversa (izquierda)  $\mathbf{q}_n^{-1}$ , parametrizada por  $\underline{\mathbf{u}}$ . Además, supóngse también que el sistema (2.1) es *observable para toda entrada* y que por lo tanto la inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$  existe independientemente del “parámetro”  $\underline{\mathbf{u}}$ .

Con el mapa de  $n$ -observabilidad como transformación de coordenadas,

$$\mathbf{z} = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{q}_n^{-1}(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}}), \quad (2.15)$$

el sistema (2.1) se transforma en

$$\dot{\mathbf{z}} = \left( \frac{\partial \mathbf{q}_n \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{q}_n \dot{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{u}}} \right) (\mathbf{q}_n^{-1}(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}}), \underline{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \underline{\mathbf{u}}(0)), \quad (2.16)$$

$$\mathbf{y} = h(\mathbf{q}_n^{-1}(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}})). \quad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.17) conducen a la *forma de  $n$ -observabilidad* dependiente de la entrada

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_n \mathbf{z} + \mathbf{B}_n \varphi(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \underline{\mathbf{u}}(0)), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}_n \mathbf{z} \quad (2.19)$$

con la *no linealidad característica*  $\varphi$  definida por

$$\varphi(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}}) = L_{\mathbf{f}_u}^n h(\mathbf{q}_n^{-1}(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}}), \underline{\mathbf{u}}) \quad (2.20)$$

y las matrices  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  y  $\mathbf{C}_n$  dadas por (1.12). La forma de  $n$ -observabilidad es una cadena de integradores y todas las no linealidades están concentradas en

un único término  $\varphi$ , el cual describe la dinámica de la  $(n-1)$ -ésima derivada temporal de la salida, correspondiente a  $z_n$ , mientras que  $z_1$  corresponde a la salida  $y$ .

**Ejemplo 2.3 (continuación)** Su forma de 2-observabilidad está dada por

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left( 3(z_2 - z_1 u)^{1/3} z_1 + z_2 u + z_1 \dot{u} \right), \quad y = z_1. \quad (2.21)$$

### 2.3.2. El observador de alta ganancia

El diseño de observadores de alta ganancia emplea la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19), por lo que el sistema (2.1) debe ser observable para toda entrada. Más aún, se supone que  $\mathbf{q}_n$  es un *difeomorfismo*, i.e. suave con una inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$  también suave, de tal manera que la no linealidad  $\varphi$  también resulta suave<sup>1</sup>. Se presupone también que  $\varphi$  satisface en todas partes una condición de Lipschitz para toda  $\mathbf{u}$ , i.e. existe una constante  $k \geq 0$ , tal que

$$|\varphi(\hat{z}, \mathbf{u}) - \varphi(z, \mathbf{u})| \leq k \|\hat{z} - z\| \quad \text{para toda } \mathbf{u} \in \mathcal{U}. \quad (2.22)$$

La parte dinámica del observador se diseña de la siguiente manera:

$$\dot{\hat{z}} = \mathbf{A}_n \hat{z} + \mathbf{B}_n \varphi(\hat{z}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \cdot [y - \mathbf{C}_n \hat{z}], \quad \hat{z}(0) = \mathbf{q}_n(x_0, \mathbf{u}(0)) \quad (2.23)$$

con  $\mathbf{S}_\theta$  la matriz de  $n \times n$  que satisface la ecuación de Lyapunov

$$\theta \mathbf{S}_\theta + \mathbf{A}_n^T \mathbf{S}_\theta + \mathbf{S}_\theta \mathbf{A}_n = \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n. \quad (2.24)$$

El resultado principal de los observadores de alta ganancia (2.23)–(2.24) (Gauthier et al., 1992) dice que existe una ganancia  $\theta \geq 1$  suficientemente grande, tal que el error de estimación  $\mathbf{e} = \hat{z} - z$  en las coordenadas de observabilidad converge exponencialmente a cero, i.e.

$$\|\mathbf{e}(t)\| = \|\hat{z}(t) - z(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

La inversa del mapa de  $n$ -observabilidad se usa como parte algebraica del observador de alta ganancia:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{q}_n^{-1}(\hat{z}, \mathbf{u}). \quad (2.26)$$

<sup>1</sup>Tal no es el caso del Ejemplo 2.3 anterior, pero sí lo es para el Ejemplo 2.1 si  $p = 1$  y  $g(x) = x_1$ , ya que entonces  $\varphi(z) = z_1 + z_2 u + z_1 \dot{u}$ .

Si la inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$  es uniformemente continua, entonces la convergencia en las coordenadas de observabilidad también implica la convergencia en las coordenadas originales, i.e.

$$\|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.27)$$

Más aún, dado que el mapa  $\mathbf{q}_n$  es difeomórfico, el observador de alta ganancia (2.23)–(2.26) también puede ser implementado en las coordenadas originales:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \right]^{-1} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \cdot [y - h(\hat{\mathbf{x}})]. \quad (2.28)$$

**Comentario 2.1** Si el sistema es afín en las entradas (2.2) y es uniformemente observable para toda entrada (Gauthier et al., 1992), entonces es posible definir al mapa de  $n$ -observabilidad del sistema de deriva (sin entradas, para  $\mathbf{u} \equiv 0$ ) como la transformación de coordenadas. Entonces  $z_i = L_f^{i-1} h(\mathbf{x})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , y el sistema (2.2) se transforma en

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_n \mathbf{z} + \mathbf{B}_n \varphi(\mathbf{z}) + \mathbf{G}(\mathbf{z}) \mathbf{u}, \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0), \quad y = \mathbf{C}_n \mathbf{z}, \quad (2.29)$$

donde la matriz  $\mathbf{G}(\mathbf{z})$  tiene una estructura triangular inferior, con elementos  $g_{i,j}(\mathbf{z}) = g_{i,j}(z_1, \dots, z_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, p$ . El obtener la estructura (2.29) de a partir del mapa de  $n$ -observabilidad del sistema de deriva que sea difeomórfico es una condición necesaria y suficiente para la observabilidad uniforme para toda entrada.

**Ejemplo 2.3 (nuevamente)** Este sistema es observable para toda entrada (más no uniformemente) y el resultado en este caso es

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 3z_2^{2/3} + \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad y = z_1 \quad (2.30)$$

Se puede construir un observador de alta ganancia para la forma de 2-observabilidad (2.29) agregando el mismo término corrector que en (2.23) a la parte dinámica si  $\varphi$  y las  $g_{i,j}$  son Lipschitz continuas (que no es el caso de (2.30)). La prueba de convergencia que se presenta a continuación con algunas pequeñas modificaciones también puede aplicarse para estos casos.

**Comentario 2.2** Se han explorado otras transformaciones a formas observables (similares), e.g. a sistemas bilineales (Hammouri y Gauthier, 1988) o afines en el estado (Glumineau y López-Morales, 1999). Aunque estas estrategias de diseño son menos restrictivas que los métodos basados en la forma



normal de observador discutidos anteriormente, encontrar la transformación sigue siendo una tarea relativamente difícil y sólo una clase especial de sistemas satisfacen las condiciones requeridas.

### 2.3.3. Prueba de convergencia

Se puede mostrar que, dada la estructura observable del par  $(\mathbf{A}_n, \mathbf{C}_n)$ , la ecuación de Lyapunov (2.24) siempre tiene una solución positiva definida  $\mathbf{S}_\theta = \mathbf{S}_\theta^T > \mathbf{0}$  para todo  $\theta > 0$ . Considérese la norma  $\|e\|_{\mathbf{S}_\theta} = (e^T \mathbf{S}_\theta e)^{1/2}$ . Entonces las siguientes desigualdades son satisfechas para toda  $e \in \mathbb{R}^n$ :

$$\frac{\theta^{1/2}}{c_2} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq \|e\| \leq \frac{\theta^{n-1/2}}{c_1} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \quad (2.31)$$

con  $c_1^2 = \lambda_{\min}[\mathbf{S}_1]$  y  $c_2^2 = \lambda_{\max}[\mathbf{S}_1]$ , siendo  $\mathbf{S}_1$  la solución de (2.24) cuando  $\theta = 1$  (véase el Apéndice B).

Defínase el error  $e = \hat{z} - z$  y la función  $\tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u}) = \varphi(z, \mathbf{u}) - \varphi(\hat{z}, \mathbf{u})$ ; entonces

$$\dot{e} = (\mathbf{A}_n - \frac{1}{2}\mathbf{S}_\theta^{-1}\mathbf{C}_n^T\mathbf{C}_n)e + \mathbf{B}_n\tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u}). \quad (2.32)$$

Considérese la función candidata de Lyapunov  $V(e) = e^T \mathbf{S}_\theta e = \|e\|_{\mathbf{S}_\theta}^2$ . De (2.32) y usando (2.24),

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= e^T (\mathbf{A}_n^T \mathbf{S}_\theta + \mathbf{S}_\theta \mathbf{A}_n - \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n) e + 2e^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u}) \\ &= -\theta e^T \mathbf{S}_\theta e + 2e^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ya que  $\dot{V}(e) = \frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta}^2 = 2\|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta}$ , usando (2.33) y la definición de  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}_\theta}$  se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} = -\frac{1}{2}\theta \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{1}{\|e\|_{\mathbf{S}_\theta}} e^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u}). \quad (2.34)$$

Considérese ahora la desigualdad de Schwartz

$$e^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u}) \leq \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \|\mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \mathbf{u})\|_{\mathbf{S}_\theta} \quad (2.35)$$

y el hecho que  $\|\mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\cdot)\|_{\mathbf{S}_\theta} = |\tilde{\varphi}(\cdot)| \sqrt{\mathbf{S}_{\theta n, n}} = |\tilde{\varphi}(\cdot)| \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n, n}}}{\theta^{n-1/2}}$ , donde  $\mathbf{S}_{1n, n} > 0$  es el elemento  $(n, n)$  de la matriz  $\mathbf{S}_1$  (véase el Apéndice B). La condición de Lipschitz (2.22) conduce a

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\frac{1}{2}\theta \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{k\sqrt{\mathbf{S}_{1n, n}}}{\theta^{n-1/2}} \|e\|$$

y gracias a (2.31),

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{S_\theta} \leq -\frac{1}{2}\theta \|e\|_{S_\theta} + \frac{k\sqrt{S_{1n,n}}}{c_1} \|e\|_{S_\theta} = -\gamma \|e\|_{S_\theta} \quad (2.36)$$

con  $\gamma = \frac{1}{2}\theta - \kappa$  y  $\kappa = \frac{k\sqrt{S_{1n,n}}}{c_1}$ . Finalmente escójase  $\theta$  tal que  $\gamma > 0$  y por lo tanto

$$\|e(t)\|_{S_\theta} \leq \|e(0)\|_{S_\theta} \exp[-\gamma t]. \quad (2.37)$$

Se ha probado la convergencia exponencial para un valor de  $\theta$  suficientemente grande, aquél que opaca la constante de Lipschitz  $k$ . Para expresar (2.37) empleando la norma euclídeana, úsense las relaciones (2.31); entonces

$$\|e(t)\| \leq \frac{\theta^{n-\frac{1}{2}}}{c_1} \|e(t)\|_{S_\theta} \leq \frac{\theta^{n-\frac{1}{2}}}{c_1} \|e(0)\|_{S_\theta} \exp[-\gamma t]$$

y finalmente,

$$\|e(t)\| \leq \theta^{n-1} \left( \frac{c_2}{c_1} \right) \|e(0)\| \exp[-\gamma t]. \quad (2.38)$$

Esto explica una de las principales desventajas de los observadores de alta ganancia, que es el sobrepaso inicial en el error de estimación, el cual se incrementa conforme  $\theta$  aumenta su valor.

## 2.4. Reducciones de observabilidad

Con la excepción de algunos cuantos, la mayoría de los métodos reseñados requiere observabilidad para la linealización alrededor de algún punto de operación; de otra manera no se garantiza la existencia de un observador exponencial (Xia y Gao, 1988). Por otro lado, como en el caso de los observadores de alta ganancia, usualmente se requiere que el mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n$  sea un difeomorfismo, lo cual no siempre sucede. Además no todos los sistemas observables lo son para toda entrada. En esta tesis se estudian estas reducciones de observabilidad, basándose en las propiedades del mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  para alguna  $r \geq n$ .

La primera reducción de observabilidad concierne la necesidad de considerar  $r > n$  para obtener inyectividad.

**Ejemplo 2.4 (Ejemplo 2.1 con  $p = 2$  y  $g(x) \equiv 0$ )** Es claro que el mapa de 2-observabilidad  $[y, \dot{y}]^T = [x_1, x_2^2]^T$  no es inyectivo y considerar otra derivada



## 2.4. Reducciones de observabilidad

de la salida  $\ddot{y} = 2x_1x_2$  tampoco ayuda mucho, puesto que si  $x_1 = 0$ , entonces el mapa de 3-observabilidad pierde inyectividad en estos puntos. Sin embargo, el mapa de 4-observabilidad es inyectivo en todas partes<sup>2</sup>, ya que  $\ddot{y} = 2(x_1^2 + x_2^3)$  y por lo tanto una inversa (izquierda)  $\mathbf{q}_4^{-1}$  está definida por

$$[x_1, x_2]^T = \left[ y, \sqrt[3]{\frac{1}{2}\ddot{y} - y^2} \right]^T,$$

con un *dominio* restringido a tan sólo  $\mathbf{q}_4(\mathbb{R}^2)$ . Su forma de 4-observabilidad una no linealidad  $\varphi$  que sólo está definida en este subconjunto de dimensión 2.

En el Capítulo 3 se discute esta reducción de observabilidad. La solución propuesta consiste en realizar una *extensión de orden* antes de diseñar el observador.

Cuando la propiedad de difeomorfismo no se cumple, pero el mapa  $\mathbf{q}_n$  tiene una inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$  continua no diferenciable en todas partes, entonces el mapa es llamado *semi-difeomórfico* (Xia y Zeitz, 1997), como en el Ejemplo 2.3, véase (2.12). Es entonces todavía posible obtener una forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19), pero ahora ya no se garantiza que  $\varphi$  resulte suave o Lipschitz, como en (2.21) o en (2.30). Para el caso en que  $\varphi$  es Lipschitz continua, la solución propuesta por Xia y Zeitz (1997) es el *observador continuo*, el cual tiene una parte dinámica en las coordenadas de observabilidad (2.18) y una parte algebraica definida por la transformación inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$ . En esta tesis, el observador continuo es generalizado para los casos en que  $\varphi$  no es necesariamente Lipschitz. El resultado es el *observador aproximado de alta ganancia* presentado en el Capítulo 4.

La inyectividad del mapa de  $r$ -observabilidad (2.8) es dependiente de la entrada y es común que para los sistemas no lineales existan *funciones de entrada mala*  $\mathbf{u}^*(t)$  para las cuales cierto par de condiciones iniciales  $(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{x}}_0)$  con  $\mathbf{x}_0 \neq \bar{\mathbf{x}}_0$  generan exactamente la misma función de salida. En este caso la observabilidad se pierde en  $\mathbf{x}_0$  (y en  $\bar{\mathbf{x}}_0$ ). Como consecuencia el mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  no es inyectivo con cualquier  $r \geq n$  para la  $\mathbf{u}$  correspondiente a esta entrada, ya que implica que  $y, \dot{y}, \dots$  son iguales para ambas condiciones iniciales para todo tiempo. Una caracterización más sutil está dada por la

**Definición 2.1** *Considérese una  $r \geq n$  finita. Los puntos  $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$  donde el mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  dado por (2.8) no es inyectivo son llamados puntos de entrada mala del mapa  $\mathbf{q}_r$ . Esto es, el conjunto de puntos de*

<sup>2</sup>Lo mismo sucede si se considera  $g(\mathbf{x}) = x_1$ .

entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$  para una  $r \geq n$  dada está definido por<sup>3</sup>

$$\mathcal{X}_{\underline{U}}^B = \{(x^*, \underline{u}^*) : \exists (x \neq x^*) \in \mathcal{X}, \text{ s.t. } \mathbf{q}_r(x, \underline{u}^*) = \mathbf{q}_r(x^*, \underline{u}^*)\}. \quad (2.39)$$

**Comentario 2.3** Evidentemente si un sistema admite funciones de entrada mala  $\underline{u}^*(t)$ , cualquier mapa de  $r$ -observabilidad tendrá puntos de entrada mala, los cuales contienen un vector  $\underline{u}^*$  apropiado. Sin embargo, aún cuando un sistema sea observable para toda entrada, podría tener puntos de entrada mala, en el sentido que toda *función* de entrada admisible sea universal, pero que las trayectorias generadas pasen por puntos de entrada mala en algún momento para alguna  $r \geq n$ . Recuérdese que esta es una propiedad algebraica.

**Definición 2.2** Supóngase que  $\underline{u}$  toma sus valores en  $\underline{U} \subset \mathbb{R}^{p(w+1)}$  para algún  $w \geq 0$  y llámese  $\mathcal{X}_{\underline{U}} = \mathcal{X} \times \underline{U}$  al espacio de estados-entradas. El sistema (2.1) se dice  $r$ -observable si el complemento  $\mathcal{X}_{\underline{U}} \setminus \mathcal{X}_{\underline{U}}^B$  del conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$  del mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  es denso en  $\mathcal{X}_{\underline{U}}$  con respecto a la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+p(w+1)}$ .

**Comentario 2.4** La condición de densidad anterior implica que el conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$  es un conjunto “pequeño” cuando se compara con el espacio de estados-entradas  $\mathcal{X}_{\underline{U}}$ . Si  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$  es una variedad de dimensión menor en  $\mathcal{X}_{\underline{U}}$ , entonces automáticamente se cumple el requerimiento.

**Ejemplo 2.5** (Ejemplo 2.1 con  $p = 1$  y  $g(x) = -x_2$ )

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_2 u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad y = x_1.$$

Su mapa de 2-observabilidad  $\mathbf{q}_2(x) = [x_1, x_2(1-u)]^T$  es inyectivo excepto cuando  $u = 1$ . Por lo tanto el conjunto de puntos de entrada mala está dado por

$$\mathcal{X}_{\underline{U}}^B = \{(x, u) \in \mathcal{X}_{\underline{U}} : u = 1\}$$

y el sistema es 2-observable. Nótese que la función de entrada mala es  $\underline{u}^*(t) \equiv 1$  para cualquier condición inicial.

En el Capítulo 5 se tratan los casos como el Ejemplo 2.5 y se proponen los *observadores basados en eventos* como una solución para sistemas que son  $r$ -observables pero cuyo mapa de  $r$ -observabilidad define un conjunto de puntos de entrada mala no vacío.

<sup>3</sup>El superíndice  $B$  viene del Inglés: bad input points.

#### 2.4. Reducciones de observabilidad

---

Las tres reducciones de observabilidad que se consideran en esta tesis — un orden superior  $r > n$ , una  $\varphi$  no Lipschitz en (2.18) y un  $\mathcal{X}_U^B$  no vacío — son independientes una de la otra y pueden aparecer simultáneamente en un sistema dado. Sin embargo las propuestas de diseño de observadores que se presentan en los siguientes capítulos pueden ser aplicadas independientemente.

## Capítulo 3

# Extensiones de orden de sistemas no lineales

En este capítulo se trata con sistemas (2.1) que son  $r$ -observables con  $r > n$  de acuerdo a la Definición 2.2. Esta reducción de observabilidad ya ha sido estudiada (Levine y Marino, 1986; Gauthier, Hammouri y Kupka, 1991; Jouan y Gauthier, 1996; Hou, Busawon y Saif, 2000), pero la construcción del observador está limitada a los casos en que el mapa de  $r$ -observabilidad es un *embedding*<sup>1</sup>.

En este capítulo aún no se propone diseño de observadores. En vez de esto se da una metodología para un paso previo, que consiste en *inmergir* al sistema original (2.1) de orden  $n$  en uno de orden  $r$  que además sea  $r$ -observable y conserve las coordenadas originales del sistema (Vargas, Moreno y Zeitz, 2002). Esto simplifica la posterior construcción de un observador, e.g. uno de alta ganancia (Gauthier et al., 1992).

Defínase la imagen del dominio  $\mathcal{X}$  del mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  dado por (2.8) como  $\mathcal{Y}_r = \mathbf{q}_r(\mathcal{X})$ . Recuérdese que la inyectividad de  $\mathbf{q}_r$  implica la existencia de una única función inversa (izquierda)  $\mathbf{q}_r^{-1}$ , cuyo dominio *sólo* está dado por  $\mathcal{Y}_r$ . Esta inversa es continua si  $\mathcal{X}$  es compacto (véase el Teorema A.3 en el Apéndice A). Sin embargo, para el diseño de observadores es conveniente extender el dominio de la inversa fuera de  $\mathcal{Y}_r$ . Los grados de libertad empleados en la construcción de esta extensión son ingredientes importantes en el posterior diseño de un observador.

La metodología usual de diseño de alta ganancia también aborda el caso  $r > n$  y esto se reseña a continuación. Lo que se obtiene es un observador

---

<sup>1</sup>Desgraciadamente no hay una traducción satisfactoria de esta caracterización de los mapas; quizá la más correcta sea *incrustación* y no algo así como *embebimiento*.

contínuo (Xia y Zeitz, 1997) de orden extendido. Como metodología alternativa, en la sección siguiente se definen las *extensiones de orden* y se discute su utilidad. Posteriormente se dan sugerencias de cómo contruir estas extensiones de orden y se ilustran con ejemplos. Finalmente se discuten algunas desventajas del método usando un ejemplo sencillo.

### 3.1. Observadores contínuos y de alta ganancia

La metodología de diseño del observador de alta ganancia (Gauthier et al., 1991) también puede ser usada en sistemas  $r$ -observables con  $r > n$ . Se requiere que el mapa  $\mathbf{q}_r$  sea un *embedding*, i.e. un difeomorfismo global que conserve la topología. La inversa  $\mathbf{q}_r^{-1}$  debe ser suave en su dominio  $\mathcal{Y}_r$ ; esto se ilustra a continuación.

**Ejemplo 3.1** ( $n = 2, r = 3$ )

$$\dot{x}_1 = x_2(x_2 + a), \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad y = x_1, \quad (3.1)$$

con  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . El mapa de 2-observabilidad no es inyectivo porque dos valores de  $x_2$  pertenecen a la misma  $\dot{y}$ . Sin embargo, con el mapa de 3-observabilidad

$$y = x_1, \quad \dot{y} = x_2^2 + ax_2, \quad \ddot{y} = 2x_2\dot{x}_2 + ax_2 \quad (3.2)$$

se obtiene un sistema de ecuaciones lineales en  $x_1, x_2$  y  $x_2^2$ . Por lo tanto es globalmente inyectivo y una expresión (no única) para su inversa es

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}_3^{-1}(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \begin{bmatrix} y \\ (2\dot{y} - \ddot{y})/a \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Evidentemente esta inversa  $\mathbf{q}_3^{-1}: \mathbf{q}_3(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}^2$  es suave, y por lo tanto  $\mathbf{q}_r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbf{q}_r(\mathbb{R}^2)$  es un *difeomorfismo* global. Otra expresión para la inversa (quizá innecesariamente complicada) se puede construir resolviendo para  $x_2^2$ , tal que  $x_2 = \pm\sqrt{\dot{y} - \ddot{y}}$ , y determinando el signo adecuado de  $x_2$  a partir del signo de  $(2\dot{y} - \ddot{y})/a$ , i.e.

$$\mathbf{x} = \mathbf{q}_3^{-1}(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \begin{bmatrix} y \\ \text{sign}[(2\dot{y} - \ddot{y})/a] \cdot \sqrt{\dot{y} - \ddot{y}} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Nótese que (3.3) y (3.4) son expresiones *equivalentes* en  $\mathcal{Y}_3 = \mathbf{q}_3(\mathbb{R}^2)$ , dando el mismo resultado para todo  $[y, \dot{y}, \ddot{y}]^T$  en  $\mathcal{Y}_3$ ; por lo tanto (3.4) también es suave en  $\mathcal{Y}_3$ . Para ver esto, nótese de (3.2) que cuando  $2\dot{y} - \ddot{y} = 0$ , entonces también  $\dot{y} - \ddot{y} = 0$  (lo cual sólo sucede cuando  $x_2 = 0$ ).

Por simplicidad, considérese primero un sistema autónomo (2.3) que sea  $r$ -observable con  $r > n$ . Supóngase que su mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  es globalmente difeomórfico. El planteamiento de Gauthier et al. (1991) o de

Jouan y Gauthier (1996) primero requiere la construcción de la forma de  $r$ -observabilidad

$$\dot{z} = \mathbf{A}_r z + \mathbf{B}_r \varphi(z), \quad z(0) = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0), \quad y = \mathbf{C}_r z \quad (3.5)$$

con  $\mathbf{A}_r$ ,  $\mathbf{B}_r$  y  $\mathbf{C}_r$  como en (1.12), y además

$$\varphi(z) = L_f^r h(\mathbf{q}_r^{-1}(z)). \quad (3.6)$$

Dado que  $\mathbf{q}_r^{-1}$  es suave y  $\varphi$  es Lipschitz, se hace una *extensión* del dominio de  $\varphi$  a todo  $\mathbb{R}^r$ , tal que la función  $\varphi$  mantenga su propiedad de continuidad Lipschitz. De hecho, suponiendo que  $\mathcal{X}$  es compacto, Gauthier et al. (1991) sugieren una forma de hacerlo. Consiste en definir una vecindad  $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^r$  de  $\mathcal{Y}_r = \mathbf{q}_r(\mathcal{X})$  y una función real  $\alpha(z)$  que sea  $\mathcal{C}^\infty$ , soportada compactamente en  $\mathcal{V}$ , y que sea igual a 1 en  $\mathcal{Y}_r$ . Entonces la extensión  $\varphi_e: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\varphi$  está dada por

$$\varphi_e(z) = \begin{cases} \alpha(z) L_f^r h(\mathbf{q}_r^{-1}(z)) & \text{for } z \in \mathcal{V}, \\ 0 & \text{for } z \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

**Ejemplo 3.1 (continuación)**  $L_f^3 h = 4x_2^2 + ax_2$ , así que usando (3.6) con (3.3) conduce a

$$\varphi(z) = \frac{4}{a^2} (2z_2 - z_3)^2 + (2z_2 - z_3) \quad (3.7)$$

mientras que usar (3.4) resulta en

$$\varphi(z) = 4(z_3 - z_2) + |a| \text{sign}[2z_2 - z_3] \sqrt{z_3 - z_2}. \quad (3.8)$$

Ambas expresiones son equivalentes en  $\mathcal{Y}_r$ . La expresión (3.7) es suave (por lo tanto Lipschitz en todas partes) y definida en todo  $\mathbb{R}^3$ , mientras que (3.8) ni es Lipschitz, ni está definida en todo  $\mathbb{R}^3$ , así que la primera es más adecuada para el diseño de un observador de alta ganancia. De hecho, la extensión de Gauthier et al. (1991) explicada anteriormente es innecesaria en este caso. La implantación de dicho observador tiene una parte dinámica en las coordenadas de observabilidad con  $\varphi$  dada por (3.7) y una parte algebraica que consiste en la inversa extendida (contínuamente) del mapa de  $r$ -observabilidad (3.3), tal como en los observadores contínuos (Xia y Zeitz, 1997).

Para este ejemplo se puede hacer aún otra extensión de  $\varphi$  a todo  $\mathbb{R}^3$ , sustituyendo las expresiones  $x_2^2 = z_3 - z_2$  y  $ax_2 = 2z_2 - z_3$  en la de  $L_f^3 h$ , resultando

$$\varphi(z) = -2z_2 + 3z_3, \quad (3.9)$$

lo cual conduce a una forma de  $r$ -observabilidad lineal (y observable). Entonces puede usarse un simple observador lineal de Luenberger para estimar  $z$  y la parte algebraica aún se puede llevar a cabo con la inversa (3.3). Esto ilustra los grados de libertad ganados con  $r > n$  al diseñar un observador.

### 3.2. Extensiones de orden

Si el jacobiano del mapa de  $r$ -observabilidad no es de rango completo en todas partes, entonces no se puede construir una inversa  $\mathbf{q}_r^{-1}$  que sea suave. Sin embargo, si  $\mathbf{q}_r^{-1}$  existe y es continua, i.e.  $\mathbf{q}_r$  es un semi-difeomorfismo, entonces un diseño de observador continuo (Xia y Zeitz, 1997) extendido aún es posible. Las propiedades de  $\varphi$  (e.g. continuidad Lipschitz) y cómo se extienden los dominios de  $\varphi$  y de su inversa  $\mathbf{q}_r^{-1}$  representan ingredientes adicionales que juegan un papel significativo en el diseño de observadores.

**Ejemplo 3.2** ( $n = 2, r = 3$ )

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_2^3, \quad y = x_1. \quad (3.10)$$

El jacobiano del mapa de 3-observabilidad pierde rango en  $x_2 = 0$ , pero el mapa  $\mathbf{q}_3$  es semi-difeomórfico. Nótese que  $\ddot{y} = \dot{y} + x_2^3$ , así que una inversa  $\mathbf{q}_3^{-1} \in C^0$  está dada por el mapa continuo

$$x_1 = y, \quad x_2 = (\ddot{y} - \dot{y})^{1/3}. \quad (3.11)$$

Dado que  $\ddot{y} = L_f^3 h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2^3 + x_2^2 + \frac{3}{2}x_2^4$ , usando (3.6) se obtiene

$$\varphi(\mathbf{z}) = z_1 - z_2 + z_3 + (z_3 - z_2)^{2/3} + \frac{3}{2}(z_3 - z_2)^{4/3}, \quad (3.12)$$

la cual no es Lipschitz continua, pero definida en todo  $\mathbb{R}^3$ . Se puede hallar otra extensión notando que  $x_2^4 = (x_2^2)^2$ ,  $x_2^2 = \dot{y} - y$  y  $x_2^3 = \ddot{y} - \dot{y}$ , así que una sustitución directa en  $L_f^3 h(\mathbf{x})$  conduce a

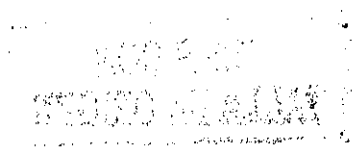
$$\varphi(\mathbf{z}) = z_3 + \frac{3}{2}(z_2 - z_1)^2. \quad (3.13)$$

Con esta  $\varphi$  sí se permite el diseño de un observador continuo extendido (Xia y Zeitz, 1997), ya que ahora la forma de  $r$ -observabilidad tiene un lado derecho Lipschitz continuo (3.13). Si se usara (3.12), se tendría que diseñar el observador aproximado de alta ganancia de la Sección 4.3. Nótese que en ambos casos la inversa (3.11) ya se encuentra definida en todo el dominio extendido  $\mathbb{R}^3$ .

En cualquier caso, la forma de  $r$ -observabilidad (3.5) con una no linealidad  $\varphi$  con dominio extendido, empleada para el diseño de observadores, es un *sistema de orden extendido* en el cual el sistema original se encuentra *inmerso*. Para el diseño de observadores es importante poder hacer este tipo de inmersiones, ya que la dinámica de (3.5) es modificada por un término corrector y las trayectorias del observador no necesariamente permanecen en  $\mathcal{Y}_r$ , aún si inician ahí.

### 3.2. Extensiones de orden

La forma de  $r$ -observabilidad (3.5) no es la única inmersión a un sistema de orden superior que ha sido propuesta en la literatura. Por ejemplo, Levine



y Marino (1986) proponen inmersiones a sistemas lineales observables, e.g. el Ejemplo 3.1 usando (3.9). En el resto de este capítulo se consideran inmersiones a sistemas  $r$ -observables que preservan las coordenadas originales del sistema (2.1).

La siguiente definición introduce el concepto de *extensión de orden* de un sistema autónomo (2.3).

**Definición 3.1** *El sistema de orden  $n + m$*

$$\dot{\xi} = F(\xi), \quad \xi(0) = \xi_0, \quad y = H(\xi), \quad (3.14)$$

con  $\xi$  definido en un subconjunto abierto  $\Xi \subset \mathbb{R}^{n+m}$ , es llamado la  $(n + m)$ -ésima extensión de orden del sistema (2.3) si existe un mapa inyectivo  $E: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ , tal que  $E(\mathcal{X}) \in \Xi$  sea positivamente invariante, i.e.  $\xi_0 \in E(\mathcal{X}) \implies \xi(t; \xi_0) \in E(\mathcal{X})$  para todo  $t \geq 0$ . Además, las trayectorias del sistema (2.3) son mapeadas por  $E$  de manera única a trayectorias del sistema (3.14), i.e. existe una única transformación homeomórfica del tiempo  $\rho: \tau \mapsto t$ , tal que  $\xi(\rho(\tau); E(x_0)) = E(x(\tau; x_0))$ , siendo  $\tau$  el "tiempo" en (2.3). Finalmente,  $H \circ E(x) = h(x)$  para toda  $x \in \mathcal{X}$ .

**Comentario 3.1** La forma de  $r$ -observabilidad (3.5) con  $\varphi$  definida en  $\mathcal{Z}$  y  $\mathcal{Z} \supset \mathcal{Y}_r$  un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^r$  es una  $r$ -ésima extensión de orden del sistema (2.3) con el mapa  $E(x) = \mathbf{q}_r(x)$ .

**Comentario 3.2** La definición anterior puede ser fácilmente extendida a sistemas forzados como (2.1). Sin embargo, con el fin de facilitar la exposición, en el resto del capítulo sólo se consideran sistemas autónomos (2.3).

Para un sistema no lineal  $r$ -observable (2.3), las extensiones de orden que aquí se proponen consisten en escoger una función  $\psi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$  con  $m = r - n$ , tal que

$$E(x) = \begin{bmatrix} x \\ \psi(x) \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Considérese el vector  $\xi$  de (3.14) particionado como  $\xi^T = [\xi_a^T, \xi_b^T]$  con  $\xi_a \in \Xi_a \subset \mathbb{R}^n$  y  $\xi_b \in \Xi_b \subset \mathbb{R}^m$ ; tanto  $\Xi_a$  como  $\Xi_b$  son subconjuntos abiertos. Entonces la trayectoria  $\xi_a(t)$  asemeja la de  $x(t)$  del sistema original (2.1) cuando  $\xi_a(0) = x_0$ , mientras que  $\xi_b$  representan estados adicionales auxiliares.

La extensión de orden (3.14) más directa se logra escogiendo

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi_a) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{f}(\xi_a) \quad \text{y} \quad H(\xi) = h(\xi_a). \quad (3.16)$$



### 3.3. Construcción de extensiones de orden

Sin embargo, para diseñar observadores es conveniente que la extensión (3.14) también sea  $r$ -observable, i.e.

$$\mathbf{q}_r(\xi) = [H(\xi), L_{\mathbf{F}}H(\xi), \dots, L_{\mathbf{F}}^{r-1}H(\xi)]^T \quad (3.17)$$

debe ser inyectivo en casi todas partes. Los muchos grados de libertad presentes en la selección de  $\psi$  y el diseño de  $\mathbf{F}$  y  $H$  puede ser empleados para alcanzar este objetivo.

Los beneficios de realizar una extensión de orden (3.14) que sea  $r$ -observable con (3.15) antes de hacer el diseño del observador se pueden ver al considerar el caso en que el mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r$  de (3.14) es difeomórfico. Entonces un observador de alta ganancia (2.28) para el sistema (2.3) puede ser implementado como

$$\dot{\hat{\xi}} = \mathbf{F}(\hat{\xi}) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_r}{\partial \xi}(\hat{\xi}) \right]^{-1} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_r^T \cdot [y - H(\hat{\xi})], \quad \hat{x} = \hat{\xi}_\alpha, \quad (3.18)$$

donde  $\partial \mathbf{q}_r / \partial \xi$  es el jacobiano de  $\mathbf{q}_r$ . También tiene sentido práctico escoger la condición inicial dependiente del estimado inicial  $\hat{x}_0$ :

$$\hat{\xi}(0) = [\hat{x}_0^T \quad \psi^T(\hat{x}_0)]^T. \quad (3.19)$$

Ya no es necesario construir explícitamente la forma de  $r$ -observabilidad y además un estimado de  $x$  se obtiene viendo las primeras  $n$  componentes de  $\hat{\xi}$ , es decir viendo a  $\hat{\xi}_\alpha$ .

### 3.3. Construcción de extensiones de orden

La construcción de extensiones de orden sería sencilla si no se requiriera la  $r$ -observabilidad. Esta restricción y los muchos grados de libertad hacen que la construcción de extensiones sea una tarea no fácil que se basa más en criterios heurísticos que en una metodología estricta. Sin embargo, conforme se determina el entero  $r > n$  para verificar la  $r$ -observabilidad del sistema original (2.3), se obtienen algunas pistas acerca de cómo conviene construir la extensión. A pesar de su naturaleza heurística, las siguientes proposiciones dan algunas sugerencias.

#### 3.3.1. Construcción con derivadas de la salida

**Proposición 3.1** Escójanse los componentes de  $\psi$  como

$$\psi_i(x) = L_{\mathbf{f}}^{k+(i-1)}h(x), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad m = r - n \quad (3.20)$$

habiendo previamente escogido una  $k \leq n-1$ . Entonces el siguiente sistema es una  $r$ -ésima extensión de orden del sistema (2.1)

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_a \\ \dot{\xi}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{f}(\xi) \\ \mathbf{A}_m \xi_b + \mathbf{B}_m \phi(\xi) \end{bmatrix}, \quad y = H(\xi) \quad (3.21)$$

con  $\mathbf{A}_m$  y  $\mathbf{B}_m$  como en (1.12) y  $\bar{f}$ ,  $\phi$  y  $H$  satisfaciendo

$$\bar{f} \circ E = f, \quad \phi \circ E = L_f^{k+m} h, \quad H \circ E = h. \quad (3.22)$$

**Prueba:** Defínase  $y_i = \frac{d^k y}{dt^k}$  y por tanto  $y_i(t)$  representa la trayectoria de la  $i$ -ésima derivada temporal de la salida.  $H \circ E(x) = h(x)$  se satisface por construcción. Supóngase que  $\xi_a(0) = x_0$  y  $\xi_b(0) = \psi(x_0)$ . Gracias a la primera condición en (3.22), es evidente que  $\xi_a(t)$  permanece en  $\mathcal{X}$  para todo  $t \geq 0$ . Dado que  $E(\mathcal{X}) = \mathcal{X} \times \psi(\mathcal{X})$ , falta mostrar que bajo la condición inicial pedida,  $\xi_b(t) \in \psi(\mathcal{X})$  para todo  $t \geq 0$ . Recuerdese que  $y_k(t) = L_f^k h(\xi_a(t))$ , así que si  $\xi_{b,m}(0) = L_f^{k+m-1} h(x_0)$ , entonces  $\dot{\xi}_{b,m} = L_f^{k+m} h(x)$  implica que  $\xi_{b,m}(t) = y_{k+m-1}(t)$  para todo  $t \geq 0$ . La cadena de integradores  $\dot{\xi}_{b,i} = \xi_{b,i+1}$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , entonces implica que  $\xi_{b,i}(t) = y_{k+i-1}(t)$  si  $\xi_{b,i}(0) = L_f^{k+i-1} h(x_0)$ . Por lo tanto  $\xi_b(t) \in \psi(\mathcal{X})$ . La transformación del tiempo  $\rho$  de la Definición 3.1 es la identidad.  $\square$

La extensión sugerida por la Proposición 3.1 agrega derivadas de la salida como los estados auxiliares  $\xi_b$ . Aún no supone ninguna propiedad de observabilidad, pero el diseño ahora nada más se limita a escoger el entero  $k$  en (3.20) y después diseñar  $\bar{f}$ ,  $\phi$  y  $H$ . Usualmente tiene sentido iniciar con  $k = 1$  y hacer  $H(\xi) = h(\xi_a)$ . Después, para hallar  $\bar{f}$  se sustituyen en  $f$  las estructuras definidas por las distintas  $\psi_i$ . Posteriormente se construye el mapa de  $r$ -observabilidad (3.17) y finalmente se escoge  $\phi$  para que el mapa de  $r$ -observabilidad  $\mathbf{q}_r(\xi)$  de (3.21) sea inyectivo.

**Ejemplo 3.1 (construcción de la extensión)** Escójase  $\psi(x) = L_f^1 h(x) = x_2^2 + ax_2$ . Ya que se quiere que  $\xi_3(t)$  asemeje a  $L_f^1 h(x) = x_2^2 + ax_2$ , escójase  $\bar{f}_1(\xi) = \xi_3$  para que  $\dot{\xi}_3(t)$  asemeje a  $L_f^2 h(x) = 2x_2^2 + ax_2 = 2(x_2^2 + ax_2) - ax_2$ ; entonces una selección obvia es  $\phi(\xi) = 2\xi_3 - a\xi_2$ . La extensión de orden 3 está dada por

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_3 = 2\xi_3 - a\xi_2, \quad y = \xi_1. \quad (3.23)$$

Este es un sistema lineal observable, así que se puede diseñar un observador exponencial suave, tal como el observador de alta ganancia (3.18)–(3.19) o cualquier otro de tipo Luenberger. Se esperaba obtener una extensión de orden lineal, ya que la forma de  $r$ -observabilidad con (3.9) también era lineal.

### 3.3. Construcción de extensiones de orden

**Ejemplo 3.2 (construcción de la extensión)** Escójase  $\psi(x) = L_f^1 h = x_1 + x_2^2$  y  $\hat{f}_1 = \xi_3$ . Dado que  $L_f^2 h = L_f^1 h + x_2^3$ , una extensión de orden 3 que además es 3-observable está dada por

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \frac{1}{2}\xi_2^2, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_3 + \xi_2^3, \quad y = \xi_1. \quad (3.24)$$

Esta extensión tiene un mapa de 3-observabilidad semi-difeomórfico

$$\mathbf{q}_3(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_3 \\ \xi_3 + \xi_2^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ (z_3 - z_2)^{1/3} \\ z_2 \end{bmatrix},$$

y la no linealidad característica  $\varphi(z) = z_3 + \frac{3}{2}(z_3 - z_2)^{4/3}$  de su forma de 3-observabilidad es Lipschitz continua. Se puede diseñar un observador continuo. Nótese que otra extensión es posible con  $\dot{\xi}_2 = \frac{1}{2}(\xi_3 - \xi_1)$ ; tiene el mismo mapa de 3-observabilidad, pero  $\varphi(z) = z_3 + \frac{3}{2}(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)^{2/3}$  resulta no Lipschitz.

#### 3.3.2. Construcción usando estructuras

**Proposición 3.2** Escójanse un mapa  $\psi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m = r - n$ , y las siguientes funciones matriciales:

$$\eta_a: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \eta_b: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \eta_y: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times m}. \quad (3.25)$$

Entonces el siguiente sistema es una  $r$ -ésima extensión de orden del sistema (2.1):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_a \\ \dot{\xi}_b \end{bmatrix} &= \mathbf{F}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi_a) \end{bmatrix} \mathbf{f}(\xi_a) + \begin{bmatrix} \eta_a \\ \eta_b \end{bmatrix} \cdot (\psi(\xi_a) - \xi_b), \\ y &= H(\xi) = h(\xi_a) + \eta_y \cdot (\psi(\xi_a) - \xi_b). \end{aligned} \quad (3.26)$$

**Prueba:** Nótese que si  $\xi_b(t) = \psi(\xi_a(t))$  para todo  $t \geq 0$ , entonces desaparecen los segundos términos en (3.26), tal que  $\mathbf{F} = \left[ \mathbf{f}^T, \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{f} \right)^T \right]^T$  y  $H = h$ .

Esto sucede si  $\xi(0) = [x_0^T, \psi^T(x_0)]^T$  y por lo tanto la trayectoria  $\xi_a(t)$  asemeja la trayectoria  $x(t)$ , mientras que  $\xi_b(t)$  asemeja a  $\psi(x(t))$ .  $\square$

Usualmente lo que se hace es reconocer las estructuras problemáticas en el campo vectorial  $\mathbf{f}$  que causan la no inyectividad del mapa de  $n$ -observabilidad, e.g. términos al cuadrado y similares. Defínanse a  $\psi_i$  como estas estructuras y sustitúyanse por  $\xi_{i+m}$  en  $\mathbf{f}$  y  $\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{f}$ . También usualmente se escoge  $\eta_y = 0$ , tal que la construcción de la extensión se simplifica considerablemente. Para ilustrar este procedimiento, considérese el siguiente ejemplo debido a A.J. Krener (comunicación personal), en el que la construcción de la extensión no es tan obvia.

**Ejemplo 3.3** Considérese el sistema escalar

$$\dot{x} = f(x) = x(1 - x^2), \quad y = h(x) = x \left(x - \frac{1}{2}\right). \quad (3.27)$$

Un observador de orden completo (de dimensión 1) de tipo Luenberger no puede converger globalmente. Cuando  $x(0) = 1$ , entonces  $x(t) \equiv 1$  y  $y(t) \equiv \frac{1}{2}$  para todo  $t \geq 0$ . Si  $\hat{x} = -\frac{1}{2}$  en algún momento, entonces  $f(\hat{x}) < 0$  y  $h(\hat{x}) = y$ , así que  $\hat{x}(t) \leq -\frac{1}{2}$  para todo  $t \geq 0$  cuando  $\hat{x}(0) \leq -\frac{1}{2}$ .

Es evidente que el mapa de 1-observabilidad no es inyectivo. Tampoco el mapa de 2-observabilidad, ya que para  $x_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm \sqrt{5})$ , se tiene que  $h(x_1) = h(x_2)$  y  $L_f h(x_1) = L_f h(x_2)$ . Sin embargo estos dos valores de  $x$  pueden ser distinguidos usando el mapa de 3-observabilidad, ya que  $L_f^2 h(x_1) \neq L_f^2 h(x_2)$ . La estructura problemática aquí es la ecuación de salida  $h(x)$ , que es cuadrática. También resulta problemático el hecho de que  $f(x)$  sea cúbica.

Si se usa la Proposición 3.1, no resulta tan directa la construcción de la extensión, porque las derivadas de Lie de  $h$  a lo largo de  $f$  son polinomios de  $x$ , cuyo orden se incrementa conforme el orden de las derivadas de Lie aumenta. Sin embargo, nótese que tanto  $x^2$  como  $x^3$  se pueden expresar en términos  $x$  e  $y$ , i.e.

$$x^2 = \frac{1}{2}x + y, \quad x^3 = x \cdot x^2 = \frac{1}{2}x^2 + xy = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + xy. \quad (3.28)$$

Entonces  $\dot{x} = f(x) = x - x^3$  también puede escribirse como

$$\dot{x} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y - xy.$$

Sea  $\psi = [h(x), x \cdot h(x)]^T = [y, xy]^T$  y por lo tanto  $\frac{\partial \psi}{\partial x} f = [2x - \frac{1}{2}, 3x^2 - x]^T = (\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y + xy)$ . Háganse algunas sustituciones usando (3.28)

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{3}{8}x + \frac{7}{4}y - \frac{3}{2}xy - 2y^2, \\ (\dot{xy}) &= \frac{3}{16}x + \frac{3}{8}y + \frac{7}{4}xy - 2y^2 - 3xy^2, \end{aligned}$$

y considérese que el último término  $-3xy^2$  puede ser escrito como  $(\eta-3)y^2x - \eta y(xy)$  con el escalar  $\eta \in \mathbb{R}$  un grado de libertad a escoger. La extensión de orden es entonces el sistema afín en los estados con inyección de salida

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}(y)\xi + \mathbf{g}(y), \quad y = \mathbf{C}\xi \quad (3.29)$$

con

$$\mathbf{A}(y) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{4} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{16} + (\eta-3)y^2 & \frac{3}{8} & \frac{7}{4} - \eta y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(y) = - \begin{bmatrix} 0 \\ 2y^2 \\ 2y^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0].$$

### 3.4. Desventajas

para este caso el mapa de 3-observabilidad es globalmente inyectivo si la matriz de observabilidad

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}(y) \\ \mathbf{C}(\mathbf{A}^2(y) + \dot{\mathbf{A}}(y, \dot{y})) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}(y) \\ \mathbf{CA}^2(y) \end{bmatrix} \quad (\text{porque } \mathbf{CA} = \mathbf{0})$$

es no singular en todas partes. Ahora  $\eta$  puede escogerse tal que esto suceda para toda  $y$ , i.e.

$$\det \mathcal{O} = \frac{9}{4} \left( (\eta - 3)y^2 - \frac{1}{4}\eta y + \frac{1}{2} \right) > 0 \quad \text{para toda } y \in \mathbb{R}. \quad (3.30)$$

La desigualdad (3.30) se satisface si  $\eta$  está entre los dos valores  $4(4 \pm \sqrt{10})$ . Por ejemplo, con  $\eta = 6$  el mínimo de (3.30) sucede en un valor máximo. Por último, un observador de tipo Luenberger se puede implantar como un observador global, e.g. el observador continuo de alta ganancia

$$\dot{\hat{\xi}} = \mathbf{A}(y)\hat{\xi} + \mathbf{g}(y) + \mathbf{l}(\hat{\xi}) \cdot [y - \mathbf{C}\hat{\xi}], \quad \hat{\xi}(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ h(\hat{x}_0) \\ \hat{x}_0 h(\hat{x}_0) \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$\hat{x} = \hat{\xi}_2 \quad (3.32)$$

con  $\mathbf{l}(\xi) = [\partial \mathbf{q}_3 / \partial \xi]^{-1} [3\theta, 3\theta^2, \theta^3]^T$  y  $\theta > 1$ . Nótese lo simple que resulta la parte algebraica (3.32).

### 3.4. Algunas desventajas

A veces, después de construir una extensión de orden que sea  $r$ -observable se pierden algunas de las propiedades originales del sistema. Para ilustrar esto, considérese el siguiente

#### Ejemplo 3.4

$$\dot{x}_1 = x_2^{2p} \quad (p \geq 1), \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad y = x_1. \quad (3.33)$$

Se logra la inyectividad global hasta que se considera el mapa de 4-observabilidad. De  $\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2^{2p}$  se obtienen dos posibles valores para  $x_2$ . Estos dos valores pueden ser distinguidos usando  $\ddot{y} = 2px_2^{2p-1}\dot{x}_2$ , pero sólo si  $y = x_1 \neq 0$ . Considérese entonces otra derivada:  $\ddot{y} = 2p(2p-1)x_1^2 x_2^{2(p-1)} + 2px_2^{4p-1}$ . Dado que  $x_2^{2p} \geq 0$  para cualquier  $x_2$ , entonces

$$x_2^{2(p-1)} = \left( x_2^{2p} \right)^{2(p-1)/2p} = (\dot{y})^{(p-1)/p},$$

y por lo tanto  $\ddot{y}$  también se puede escribir

$$\ddot{y} = 2p \left( (2p-1)y^2 \dot{y}^{(p-1)/p} + x_2^{4p-1} \right).$$

Como  $4p - 1$  es impar, una inversa continua del mapa de 4-observabilidad es

$$x_1 = y, \quad x_2 = \left( \frac{1}{2p} \ddot{y} - (2p - 1)y^2 \dot{y}^{(p-1)/p} \right)^{\frac{1}{4p-1}}. \quad (3.34)$$

Usando la Proposición 3.1, escójanse  $\psi_1 = L_f^1 h = \dot{y}$  y  $\psi_2 = L_f^2 h = \ddot{y}$ . La extensión se construye fácilmente como

$$\dot{\xi}_1 = \xi_3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1, \quad \dot{\xi}_3 = \xi_4, \quad \dot{\xi}_4 = \phi(\xi), \quad y = \xi_1 \quad (3.35)$$

con

$$\phi(\xi) = 2p \left( (2p - 1) \xi_1^2 \xi_3^{(p-1)/p} + \xi_2^{4p-1} \right). \quad (3.36)$$

El mapa de 4-observabilidad  $\mathbf{q}_4(\xi)$  del sistema extendido (3.35)–(3.36) es inyectivo y su inversa  $\mathbf{q}_4^{-1}$  es continua, pero (3.36) *no es* Lipschitz continua, así que la unicidad de soluciones ni siquiera puede garantizarse, a pesar de que el sistema original (3.4) sí posee esta propiedad. Como consecuencia, la forma de 4-observabilidad construida con  $\mathbf{q}_4(\xi)$  es discontinua. Se necesitan entonces emplear otras estrategias de diseño de observadores, por ejemplo los observadores basados en eventos del Capítulo 5.

### 3.5. Resumen

Se han propuesto extensiones de orden no lineales de un sistema de dimensión  $n$  a uno de dimensión  $r$  con la propiedad de  $r$ -observabilidad. Estas permiten la construcción de la parte dinámica de un observador de orden extendido para el sistema original usando cualquier técnica de diseño de observadores que requiera un mapa de  $r$ -observabilidad inyectivo en casi todas partes, e.g. los observadores de alta ganancia continuos, aproximados o basados en eventos que se describen en los siguientes capítulos. La parte algebraica para dicho observador de orden extendido se puede llevar a cabo fácilmente fijándose en los primeros  $n$  componentes del vector de estados extendido. Sin embargo, la construcción de las extensiones de orden no siempre es directa, ya que existen varios grados de libertad y la heurística juega un papel significativo en este diseño.



### 3.5. Resumen

---

Waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan tugas ini adalah 10 hari. Hal ini disebabkan karena tugas ini melibatkan banyak hal yang harus dilakukan, seperti mencari referensi, mengumpulkan data, dan menganalisis data tersebut. Selain itu, tugas ini juga melibatkan banyak hal yang harus dilakukan, seperti mencari referensi, mengumpulkan data, dan menganalisis data tersebut.

## Capítulo 4

# Observadores aproximados contínuos de alta ganancia

En este capítulo se consideran sistemas cuyo mapa de  $n$ -observabilidad es inyectivo en todas partes, pero *no es* un difeomorfismo, aunque su inversa (izquierda) es continua pero no diferenciable en todas partes. También pueden considerarse sistemas que son  $r$ -observables con  $r > n$  si previamente se ha realizado una extensión de orden (véase el Capítulo 3).

Primero se revisa el diseño de los observadores contínuos (Xia y Zeitz, 1997; Zeitz, 1998) y se discuten algunas de sus desventajas. Después se introduce el concepto importante de la *semi-equivalencia de trayectorias* y se establecen algunas propiedades de la forma de  $n$ -observabilidad. Se sigue con la construcción de los *observadores aproximados de alta ganancia*, junto con una prueba de convergencia. Finalmente, se presenta un ejemplo con simulaciones digitales.

### 4.1. Observadores contínuos

Se puede diseñar un observador local para el sistema (2.1) si su linealización alrededor de un punto de operación es observable o al menos detectable. De hecho la mayoría de las metodologías de diseño de observadores consideran esta suposición (Walcott et al., 1987; Krener, 1994; Schaffner y Zeitz, 1999). Sin embargo, no existe un observador suave si la linealización posee algún modo no detectable (Xia y Gao, 1988). Para paliar este problema Xia y Zeitz (1997) proponen el *observador contínuo*. Su enfoque se basa en la transformación del sistema (2.1) a la forma normal de observabilidad. La parte dinámica se implanta en estas coordenadas, mientras que la parte



algebraica se realiza con la transformación inversa.

La transformación a la forma normal de observabilidad se lleva a cabo mediante el mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n$  definido por (2.8) (con  $r = n$ ). Xia y Zeitz (1997) permiten que  $\mathbf{q}_n$  sea un *semi-difeomorfismo*, i.e. un mapa suave con una inversa continua  $\mathbf{q}_n^{-1}$ , pero se deben satisfacer dos requisitos: la inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$  debe ser uniformemente continua y la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19) debe tener soluciones únicas. En la práctica el segundo requisito se satisface si el lado derecho es Lipschitz en su dominio. Esto permite el diseño de observadores de alta ganancia (Gauthier et al., 1992; Atassi y Khalil, 2000) y asegura la convergencia asintótica del error de estimación a cero. Su resultado principal se plantea para sistemas autónomos (2.3).

**Teorema 4.1 (Xia and Zeitz, 1997)** *Considérese un sistema autónomo (2.3), cuyo estado  $x$  evoluciona en  $\mathcal{X}$ , con un mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n$  semi-difeomórfico, y defínase  $\mathcal{Z} = \mathbf{q}_n(\mathcal{X})$ . Si  $\varphi(z) = L_f^n(\mathbf{q}_n^{-1}(z))$  es Lipschitz continua en un subconjunto  $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{Z}$  y  $\mathbf{q}_n^{-1}(z)$  es uniformemente continua en  $\mathcal{Z}'$ , entonces el sistema (2.3) admite un observador continuo en  $\mathcal{X}' = \mathbf{q}_n^{-1}(\mathcal{Z}')$  con vector de ganancia  $l \in \mathbb{R}^n$*

$$\dot{\hat{z}} = \mathbf{A}_n \hat{z} + \mathbf{B}_n \varphi(\hat{z}) + l \cdot [y - \mathbf{C}_n \hat{z}], \quad \hat{z}(0) = \mathbf{q}_n(\hat{x}_0), \quad (4.1)$$

$$\hat{x} = \mathbf{q}_n^{-1}(\hat{z}), \quad (4.2)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  y  $\mathbf{C}_n$  están dadas por (1.12), si  $\hat{z}(t)$  permanece en  $\mathcal{Z}'$  para toda  $t \geq 0$ .

**Ejemplo 4.1** Considérese el sistema de segundo orden

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2, \quad y = x_1 \quad (4.3)$$

definido en  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ . El mapa de 2-observabilidad es inyectivo en todas partes, pero su inversa no es suave, i.e.

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_2(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_2^{-1}(z) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2^{1/3} \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Su forma de 2-observabilidad es Lipschitz continua

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -3z_1 z_2, \quad y = z_1, \quad (4.5)$$

así que es posible construir un observador continuo (4.1)–(4.2).

Para extender el resultado a sistemas forzados como (2.1), se debe suponer una entrada  $u(t)$  suficientemente diferenciable y que sus derivadas  $\dot{u}(t)$ ,  $\ddot{u}(t)$ , ... estén disponibles.

**Corolario 4.1 (Xia and Zeitz, 1997)** *Supóngase que el mapa de  $n$ -observabilidad dependiente de la entrada  $\mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  del sistema forzado (2.1) es semi-difeomórfico para cualquier entrada  $\mathbf{u}$  y que su inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{u})$  es uniformemente continua en la región de interés  $\mathbf{q}_n(\mathcal{X}, \mathcal{U}) \times \mathcal{U}$ . Si la forma de  $n$ -observabilidad admite una solución global y única con respecto a cualquier condición inicial, entonces el sistema (2.1) admite un observador continuo (4.1)–(4.2) con  $\varphi(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) = L_{\mathbf{f}_u}^n(\mathbf{q}^{-1}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}), \mathbf{u})$  y parte algebraica  $\mathbf{q}_n^{-1}(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u})$ .*

En este capítulo los resultados de Xia y Zeitz (1997) son complementados en el sentido de que ya no se requiere la continuidad Lipschitz de la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19). Esto se hace porque en general, cuando el mapa de  $n$ -observabilidad es sólo un semi-difeomorfismo, la forma normal de observabilidad no resulta Lipschitz, sino tan sólo continua.

## 4.2. Semi-equivalencia de trayectorias y la forma de $n$ -observabilidad

Considérese un mapa suave inyectivo  $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y denótese su imagen como  $\mathcal{Z} = \Phi(\mathcal{X})$ . De acuerdo al Lema 3 de Xia y Zeitz (1997),  $\Phi$  es un semi-difeomorfismo con una inversa continua  $\Phi^{-1}: \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Usando este mapa como transformación de coordenadas  $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$ , el sistema (2.3) queda (Schaffner y Zeitz, 1999)

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0, \quad \mathbf{y} = \bar{h}(\mathbf{z}), \quad (4.6)$$

donde

$$\bar{\mathbf{f}} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right) \circ \Phi^{-1} \quad \text{y} \quad \bar{h} = h \circ \Phi^{-1}. \quad (4.7)$$

Cuando  $\Phi$  no es un difeomorfismo, pero tiene una inversa continua  $\Phi^{-1}$ , entonces se puede diseñar un observador continuo con la parte dinámica implantada en las coordenadas transformadas  $\mathbf{z}$  y una parte algebraica o estática implantada con  $\Phi^{-1}$ . Por ejemplo, un observador continuo de tipo Luenberger está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \bar{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{z}}) + \mathbf{l}(\hat{\mathbf{z}}) [y - \bar{h}(\hat{\mathbf{z}})], \quad \hat{\mathbf{z}}(0) = \Phi(\hat{\mathbf{x}}_0) = \hat{\mathbf{z}}_0, \quad (4.8)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \Phi^{-1}(\hat{\mathbf{z}}). \quad (4.9)$$

## 4.2. Semi-equivalencia de trayectorias

Dado que  $\Phi^{-1}$  es continua, en general los lados derechos de (4.7) tan sólo son continuos. Por lo tanto  $\bar{f}$  en (4.6) resulta ser localmente no Lipschitz y el sistema (4.6) podría perder la propiedad de unicidad de soluciones para algunas condiciones iniciales, mientras que el sistema original (2.3) en efecto satisface esta propiedad.

**Ejemplo 4.2** Considérese el siguiente sistema de segundo orden:

$$\dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad y = x_1 \quad (4.10)$$

definido en  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ . El mapa de observabilidad es el mismo que para el Ejemplo 4.1; véase (4.4). Su forma de 2-observabilidad es

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = -3z_1z_2^{2/3}, \quad y = z_1, \quad (4.11)$$

con su lado derecho no Lipschitz en el conjunto  $\{z: z_2 = 0\}$  con  $\varphi(z) = -3z_1z_2^{2/3}$ . Además tiene múltiples soluciones para las condiciones iniciales  $z_0 = [a, 0]^T$ ,  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , que corresponden a  $x_0 = [a, 0]^T$ . Estas condiciones iniciales son puntos de equilibrio para (4.11), mientras que el sistema original (4.10) sólo tiene al origen como único punto de equilibrio. Queda claro entonces que tanto  $z(t; [a, 0]^T) = \mathcal{Q}_2(x(t; [a, 0]^T))$  como  $z(t; [a, 0]^T) \equiv [a, 0]^T$  son soluciones al mismo problema de valor inicial de (4.11). Un observador continuo (4.1)–(4.2) no puede ser construido para este sistema.

Para construir observadores usando la transformación  $\Phi$ , se necesita algún tipo de correspondencia entre las trayectorias de estado de los sistemas (2.3) y (4.6)–(4.7). El concepto de *equivalencia de trayectorias* de Xia y Zeitz (1997) se extiende aquí para estos casos.

Sea  $\mathcal{Z}(t; z_0)$  el conjunto of soluciones (trayectorias de estado) del sistema (4.6) que pasan por  $z_0$  en  $t = 0$ , y sea  $\mathcal{Y}(t; z_0)$  el conjunto correspondiente de trayectorias de salida.

**Definición 4.1** El sistema (2.3) se dice semi-equivalente en trayectorias al sistema (4.6) si existe un mapa inyectivo  $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ , tal que si  $x(t; x_0)$  y  $h(x(t; x_0))$  son las trayectorias únicas del estado y la salida del sistema (2.3), entonces  $\Phi(x(t; x_0))$  y  $\bar{h}(\Phi(x(t; x_0)))$  son trayectorias del estado y la salida del sistema (4.6).

Adicionalmente, para cada  $z_0 \in \mathcal{Z}$  existe una única trayectoria  $z(t; z_0) \in \mathcal{Z}(t; z_0)$  de (4.6), tal que  $\Phi^{-1}(z(t; z_0))$  es la trayectoria única del estado del sistema (2.3), y  $h(x(t; \Phi^{-1}(z_0))) = \bar{h}(z(t; z_0)) \in \mathcal{Y}(t; z_0)$ .

Cuando  $z_0 = \Phi(x_0)$ , esta equivalencia se denota  $x(t; x_0) \rightleftarrows z(t; z_0)$ , donde  $z(t; z_0) \in \mathcal{Z}(t; \Phi(x_0))$  es única para cada  $x(t; x_0)$ .

Nótese que esta equivalencia se define sólo en una dirección; un sistema, e.g. (2.3), es semi-equivalente en trayectorias a otro, e.g. (4.6)–(4.7), pero no se puede decir lo contrario.

En general para diseñar la parte dinámica (4.8) de un observador continuo, algunas propiedades de observabilidad del sistema (4.6) deben ser satisfechas. Recuérdese que un sistema se dice *observable* si la indistinguibilidad de salida de dos estados iniciales implica la identidad de estos dos estados iniciales (Nijmeijer y van der Schaft, 1990) (véase la Sección 2.1). Para sistemas con unicidad de soluciones, la observabilidad implica una correspondencia una-a-uno entre la salida y las trayectorias del estado. Sin embargo, para sistemas sin soluciones únicas, podría suceder que para la misma condición inicial se tengan dos trayectorias (soluciones) distintas del estado, pero si sus salidas son idénticas entonces aún así seguiría considerándose observable. Se requiere una propiedad más fuerte que la observabilidad.

**Definición 4.2** *El sistema (4.6) se dice observable en trayectorias si cada trayectoria de salida corresponde a una y sólo una trayectoria de estado.*

Nótese que la observabilidad en trayectorias se reduce al concepto usual de observabilidad para sistemas con soluciones únicas, para los cuales cada condición inicial genera una única trayectoria de estado.

**Proposición 4.1** *Dado un sistema observable (2.3), si el mapa  $\Phi$  es un semi-difeomorfismo de  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Z}$  y el sistema transformado (4.6) es observable en trayectorias, entonces el sistema (2.3) es semi-equivalente en trayectorias al sistema (4.6).*

**Prueba:** De la ecuación (4.7) es obvio que si  $x(t; x_0)$  es una trayectoria de estado de (2.3), entonces  $\Phi(x(t; x_0))$  es una trayectoria de estado de (4.6) pasando por  $\Phi(x_0)$  en  $t = 0$ , con lo que se prueba el primer requerimiento de la Definición 4.1. Para probar el segundo requerimiento considérese la trayectoria de estado  $x(t; \Phi^{-1}(z_0))$  del sistema (2.3). Usando la primera parte de esta prueba,  $\Phi(x(t; \Phi^{-1}(z_0)))$  es una trayectoria de estado del sistema (4.6), pasando por  $\Phi(\Phi^{-1}(z_0)) = z_0$  en  $t = 0$ . Por (4.7) sucede que  $y(t; \Phi^{-1}(z_0)) = h(x(t; \Phi^{-1}(z_0))) = \bar{h}(\Phi(x(t; \Phi^{-1}(z_0))))$ . Dado que el sistema (4.6) es observable en trayectorias, esta salida corresponde a la trayectoria única

$$z(t; z_0) = \Phi(x(t; \Phi^{-1}(z_0))) \in \mathcal{Z}(t; z_0).$$

Por lo tanto,

$$\Phi^{-1}(z(t; z_0)) = x(t; \Phi^{-1}(z_0)) \quad (4.12)$$



## 4.2. Semi-equivalencia de trayectorias

es una trayectoria de estado del sistema (2.3).  $\square$

Dado que la parte dinámica del observador es en sí misma un observador para el sistema transformado (4.6), la convergencia en estas coordenadas debe implicar lo mismo en las coordenadas originales por medio de la parte algebraica. Esto verdaderamente sucede, como lo muestra la siguiente proposición.

**Proposición 4.2** *Sea  $\zeta(t)$  una función del tiempo evolucionando en  $\mathcal{Z}$ . Si  $\Phi$  es un semi-difeomorfismo de  $\mathcal{X}$  a  $\mathcal{Z}$  con  $\Phi^{-1}$  uniformemente continua en  $\mathcal{Z}$ , tal que el sistema (2.3) sea semi-equivalente en trayectorias al sistema (4.6), entonces*

$$\|\zeta(t) - z(t; z_0)\| \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

implica

$$\|\Phi^{-1}(\zeta(t)) - x(t; \Phi^{-1}(z_0))\| \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

siempre que  $x(t; \Phi^{-1}(z_0)) \rightrightarrows z(t; z_0)$ .

Además, para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $T > 0$  y  $\delta(\epsilon) > 0$ , tal que

$$\|\zeta(t) - z(t; z_0)\| < \epsilon \quad \text{para toda } t \geq T \quad (4.15)$$

implica

$$\|\Phi^{-1}(\zeta(t)) - x(t; \Phi^{-1}(z_0))\| < \delta \quad \text{para toda } t \geq T. \quad (4.16)$$

**Prueba:** La semi-equivalencia de trayectorias implica una correspondencia entre trayectorias de estado válidas. La continuidad uniforme de  $\Phi^{-1}$  implica de (4.13) que

$$\|\Phi^{-1}(\zeta(t)) - \Phi^{-1}(z(t; z_0))\| \rightarrow 0.$$

Usando la prueba de la Proposición 4.1 y la observabilidad en trayectorias, se satisface (4.12); por lo tanto también se satisface (4.14). La segunda parte se infiere de la continuidad uniforme de  $\Phi^{-1}$ .  $\square$

Considérese el mapa de  $n$ -observabilidad (2.8). Si éste es globalmente inyectivo, entonces es un semi-difeomorfismo (véase el Lema 3 del artículo de Xia y Zeitz (1997)) y puede ser usado como la transformación  $\Phi$  para diseñar el observador continuo. Una propiedad crucial de un mapa de  $n$ -observabilidad inyectivo es la siguiente

**Proposición 4.3** *Un sistema en la forma normal de observabilidad (2.18)–(2.19) es estructuralmente observable en trayectorias.*

**Prueba:** Es obvio que dos trayectorias de salida distintas corresponden a trayectorias de estado distintas pues  $y = z_1$ . Ahora se prueba que dos trayectorias de estado distintas  $z(t; z_0^{(1)}) \neq z(t; z_0^{(2)})$  generan diferentes trayectorias de salida. La solución *única* a la ecuación diferencial escalar  $\dot{z}_{k-1} = z_k$  es

$$z_{k-1}(t; z_0) = z_{0,k-1} + \int_0^t z_k(\tau, z_0) d\tau,$$

la cual, para diferentes  $z_k^{(i)}(t; z_0^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ , resulta en trayectorias escalares distintas  $z_{k-1}^{(i)}(t; z_0^{(i)})$ , porque  $z_k^{(i)}(t; z_0^{(i)})$  son funciones absolutamente continuas del tiempo y por tanto deben ser diferentes en un conjunto con medida no cero. Entonces sus integrales también deben ser diferentes. Iterativamente, distintas  $z_k^{(i)}(t; z_0^{(i)})$  implican  $z_1^{(i)}(t; z_0^{(i)})$  distintas, lo cual significa que  $y^{(1)}(t; z_0^{(1)}) \neq y^{(2)}(t; z_0^{(2)})$ .

En la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19), la no unicidad de soluciones sólo puede ocurrir para la ecuación diferencial escalar  $\dot{z}_n = \varphi(z)$ . Aún si esto sucede para alguna condición inicial, la discusión anterior muestra que sus trayectorias de salida son distintas.  $\square$

Las Proposiciones 4.1 y 4.3 implican que el sistema original (2.3) es semi-equivalente en trayectorias a la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19) por medio del semi-difeomorfismo  $\mathbf{q}_n$ . Adicionalmente, gracias a la Proposición 4.2, un observador en las coordenadas de observabilidad (2.18) puede usarse como la parte dinámica de un observador para el sistema (2.3), mientras que  $\mathbf{q}_n^{-1}$  puede ser usado como la parte algebraica si es uniformemente continua.

### 4.3. El observador aproximado de alta ganancia

Cuando la no linealidad  $\varphi$  definida por (2.20) es Lipschitz, se puede implantar un observador exponencial para el sistema (2.18)–(2.19) con uno de alta ganancia (Gauthier et al., 1992). En la siguiente sección, en vez de tratar de diseñar un observador exacto para el sistema (2.18)–(2.19) con una no linealidad  $\varphi$  no Lipschitz, se propone el *observador  $\epsilon$ -aproximado de alta ganancia*. Este tipo de observador asegura la convergencia del error a una bola del origen de radio arbitrario en un tiempo finito. La segunda implicación (4.15)–(4.16) de la Proposición 4.2 muestra que también existe convergencia aproximada en la coordenadas originales (2.3) si la inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}$  es uniformemente continua, i.e. para un  $\epsilon > 0$  dado, existe una  $T \geq 0$  tal

que

$$\|\hat{x}(t; \hat{z}_0, h(x(t; x_0))) - x(t; x_0)\| \leq \epsilon \quad \text{para toda } t \geq T. \quad (4.17)$$

El observador  $\epsilon$ -aproximado de alta ganancia que aquí se propone tiene la siguiente estructura:

$$\dot{\hat{z}} = \mathbf{A}_n \hat{z} + \mathbf{B}_n \bar{\varphi}(\hat{z}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T [y - \mathbf{C}_n \hat{z}], \quad \hat{z}(0) = \mathbf{q}_n(\hat{x}_0), \quad (4.18)$$

$$\hat{x} = \mathbf{q}_n^{-1}(\hat{z}), \quad (4.19)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  y  $\mathbf{C}_n$  están dadas por (1.12), la matriz positiva definida  $\mathbf{S}_\theta$  resuelve la ecuación algebraica de Lyapunov (2.24) y la función escalar no lineal  $\bar{\varphi}$  aún no se define, pero es similar, aunque no necesariamente igual a la  $\varphi$  dada por (2.20).

Nótese que en un subconjunto compacto  $\Gamma \subset \mathcal{Z}$ , cualquier función continua  $\varphi(z)$  puede ser reescrita como

$$\varphi(z) = \varphi_L(z) + \varphi_\Delta(z), \quad (4.20)$$

donde  $\varphi_L$  es una función Lipschitz en todas partes, satisfaciendo

$$|\varphi_L(\hat{z}) - \varphi_L(z)| \leq k \|\hat{z} - z\| \quad \text{para toda } \hat{z}, z \in \Gamma \quad (4.21)$$

y  $\varphi_\Delta(z)$  es continua (quizá no Lipschitz). Además  $\varphi_L$  se puede escoger tal que para una  $\delta \geq 0$  dada se cumpla lo siguiente:

$$\sup_{z \in \Gamma} |\varphi(z) - \varphi_L(z)| = \sup_{z \in \Gamma} |\varphi_\Delta(z)| = \frac{\delta}{2}. \quad (4.22)$$

Esto es posible para cualquier  $\delta \geq 0$  y todo compacto  $\Gamma$ , como consecuencia del Teorema de Stone-Weierstrass (Rudin, 1976).

**Teorema 4.2** *Para un sistema en la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19) con  $\varphi$  continua existen  $\theta > 1$  suficientemente grande y una función continua  $\bar{\varphi}$ , tal que (4.18) es un observador  $\epsilon$ -aproximado de alta ganancia con  $\epsilon \geq 0$  arbitrariamente pequeño.*

**Prueba:** La prueba de este teorema sigue muy de cerca la prueba propuesta por Gauthier et al. (1992) que se explica en la Sección 2.3.3. Defínase  $e(t) = \hat{z}(t; \hat{z}_0, y(t)) - z(t; z_0)$ , donde  $z(t; z_0)$  y  $\hat{z}(t; \hat{z}_0, y(t))$  son, respectivamente, la solución de (2.18) y la solución de (4.18) forzado por la salida (2.19). Entonces

$$\dot{e} = (\mathbf{A}_n - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n) e + \mathbf{B}_n [\bar{\varphi}(\hat{z}) - \varphi(z)]. \quad (4.23)$$

Propóngase la función de Lyapunov  $V(e) = e^T \mathbf{S}_\theta e = \|e\|_{\mathbf{S}_\theta}^2$ . Esto se permite porque la teoría de Lyapunov también es válida para sistemas continuos (Bacciotti, 1992). Sígase la prueba de la Sección 2.3.3, reemplazando a  $\varphi(\hat{z})$  por  $\bar{\varphi}(\hat{z})$  hasta que

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} = -\frac{1}{2}\theta \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} |\bar{\varphi}(\hat{z}) - \varphi(z)|. \quad (4.24)$$

¿Cómo debe escogerse la función  $\bar{\varphi}$  para asegurar la convergencia aproximada de  $e(t)$  al origen? Una posibilidad es escoger  $\bar{\varphi} = \varphi$ , la cual se puede descomponer como en (4.20), con  $\varphi_L$  satisfaciendo (4.21) y  $\varphi_\Delta$  satisfaciendo (4.22) en un subconjunto compacto  $\Gamma \subset \mathcal{Z}$ . Entonces

$$|\varphi(\hat{z}) - \varphi(z)| \leq |\varphi_L(\hat{z}) - \varphi_L(z)| + |\varphi_\Delta(\hat{z})| + |\varphi_\Delta(z)| \leq k\|e\| + \delta. \quad (4.25)$$

Usando esta desigualdad en (4.24),

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\frac{1}{2}\theta \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{k\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} \|e\| + \frac{\delta\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}}$$

y gracias a (2.31), finalmente

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\gamma \|e\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{v}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} \quad (4.26)$$

con  $\gamma = \frac{1}{2}\theta - \kappa$ , donde  $\kappa = \frac{k\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{c_1}$  y  $v = \delta\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}$ . Escójase  $\theta$  tan grande como para que  $\gamma > 0$ , y por lo tanto

$$\|e(t)\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq \|e(0)\|_{\mathbf{S}_\theta} \exp[-\gamma t] + \frac{v}{\gamma\theta^{n-\frac{1}{2}}} (1 - \exp[-\gamma t]). \quad (4.27)$$

Ahora úsese las desigualdades (2.31) para expresar este resultado con la norma euclídeana:

$$\|e(t)\| \leq \theta^{n-1} \left( \frac{c_2}{c_1} \right) \|e(0)\| \exp[-\gamma t] + \frac{v}{c_1\gamma} (1 - \exp[-\gamma t]). \quad (4.28)$$

Queda claro que el primer término decae exponencialmente a cero conforme  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo, el segundo término crece también exponencialmente al valor  $v/(c_1\gamma)$ . Por lo tanto, escogiendo una  $\beta > 1$  (ligeramente mayor), existe una  $T \geq 0$ , tal que

$$\|e(t)\| \leq \beta \frac{v}{c_1\gamma} \quad \text{para toda } t \geq T \text{ y cualquier } e(0) \in \Gamma \subset \mathcal{Z}. \quad (4.29)$$



### 4.3. Observador aproximado de alta ganancia

De hecho no es difícil ver que la cota superior para  $T$  depende del error inicial  $e(0)$  si  $c_2\gamma\theta^{n-1}\|e(0)\| > \beta v$  y está dada por

$$T \leq \frac{1}{\gamma} \log \left[ \frac{\frac{c_2\gamma\theta^{n-1}\|e(0)\| - 1}{v}}{\beta - 1} \right] \quad (4.30)$$

y  $T = 0$  en otro caso. □

**Comentario 4.1** Conforme la ganancia  $\theta$  se incrementa, decrece la cota final  $\beta v/(c_2\gamma)$ . Nótese, sin embargo, que para aplicaciones prácticas la ganancia  $\theta$  no debe ser demasiado alta. De lo contrario existe un sobrepaso inicial en la cota del error  $\|e(t)\|$  debido al término multiplicativo  $\theta^{n-1}$  en (4.28).

**Comentario 4.2** Para cualquier descomposición (4.20) con  $\varphi_L$  satisfaciendo (4.21) y  $\varphi_\Delta$  satisfaciendo (4.22) siempre es posible encontrar una ganancia  $\theta$  suficientemente alta para lograr, ya sea una tasa mínima de convergencia  $\gamma$ , o una cota final deseada  $\beta v/(c_2\gamma)$ . Sin embargo, es imposible saber estos valores con certeza, puesto que no se sabe *a priori* cuál descomposición (4.20) es la que realmente está siendo usada por el observador (en el sentido de la prueba, por supuesto).

**Comentario 4.3** En un trabajo anterior (Moreno y Vargas, 2000) se muestra que  $\bar{\varphi}$  también puede escogerse como alguna aproximación Lipschitz  $\varphi_L$ . Simplemente modifíquese (4.25)

$$|\bar{\varphi}(\hat{z}) - \varphi(z)| \leq |\varphi_L(\hat{z}) - \varphi_L(z)| + |\varphi_\Delta(z)| \leq k\|e\| + \frac{1}{2}\delta, \quad (4.31)$$

tal que  $v = \frac{1}{2}\delta\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}$  y entonces puede seguirse el resto de la prueba. La ventaja de este planteamiento es que tanto la tasa mínima de convergencia  $\gamma$  como la cota final  $\beta v/(c_1\gamma)$  pueden ser explícitamente calculadas. Sin embargo, tiene la desventaja de necesitar la aproximación Lipschitz  $\varphi_L$ .

**Comentario 4.4** Si  $\varphi$  deja de ser Lipschitz sólo en un subconjunto compacto de  $\mathcal{Z}$  y las trayectorias transformadas de (2.3), i.e.  $\mathbf{q}_n(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ , permanecen fuera de este subconjunto, entonces  $\varphi_\Delta = 0$  y por lo tanto (4.18) se vuelve un observador exacto.

El siguiente teorema, que usa el resultado del Teorema 4.2 para el diseño de *observadores  $\epsilon$ -aproximados continuo de alta ganancia* —con parte algebraica—, ahora puede ser presentado sin necesidad de prueba.

**Teorema 4.3** Para un sistema (2.3), cuyo mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n$  es globalmente inyectivo en  $\mathcal{X}$  con una inversa uniformemente continua  $\mathbf{q}_n^{-1}$ , existe una ganancia  $\theta$  suficientemente alta, tal que (4.18)–(4.19) es un observador  $\epsilon$ -aproximado continuo de alta ganancia en algún subconjunto  $\mathcal{X}' = \mathbf{q}^{-1}(\mathcal{Z}')$  con  $\mathcal{Z}' \subset \mathbf{q}_n(\mathcal{X})$ .

**Comentario 4.5** EL observador aproximado (4.18) converge a una vecindad de cualquier trayectoria solución de la forma normal no Lipschitz (2.18)–(2.19). Dado que el término corrector depende de la salida única del sistema (2.3), cuando (4.18) es usado como parte dinámica de un observador, éste converge a la trayectoria solución única de (2.18)–(2.19) correspondiente a esta salida en particular, i.e.  $\mathbf{q}_n(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$  (recuérdese la propiedad de observabilidad en trayectorias).

**Comentario 4.6** Así como en el Corolario 4.1, estos resultados pueden extenderse a sistemas forzados (2.1), siempre y cuando la función de entrada sea suficientemente diferenciable, usando el mapa de  $n$ -observabilidad dependiente de la entrada  $\mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  (Zeitz, 1989; Zeitz, 1998). Por supuesto este mapa debe ser inyectivo para cualquier entrada admisible y la inversa  $\mathbf{q}_n^{-1}(z, \mathbf{u})$  debe ser continua, i.e. el sistema (2.1) debe ser observable para toda entrada (Gauthier et al., 1991).

**Ejemplo 4.2 (continuación)** El observador  $\epsilon$ -aproximado (4.18)–(4.19) usando  $\bar{\varphi} = \varphi$  estaría dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ -3\hat{z}_1\hat{z}_2^{2/3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \frac{1}{2}\theta^2 \end{bmatrix} [y - \hat{z}_1], \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2^{1/3} \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

En las Figuras 4.1 y 4.2 se muestran resultados de simulación. La primera figura muestra ambos estados  $x_1$  y  $x_2$ , mientras que la segunda muestra la evolución del error  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$ . Corresponden a  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$ , i.e.  $\mathbf{q}_2(\mathbf{x}_0) = [1, 1]^T$ , y  $\hat{\mathbf{z}}_0 = [1, 0]^T$ . La ganancia es  $\theta = 5$ . Nótese que para esta condición inicial la forma de  $n$ -observabilidad (4.11) no tiene soluciones únicas. Para comparar, en la segunda figura también se muestra el resultado empleando un observador  $\epsilon$ -aproximado con una aproximación Lipschitz  $\bar{\varphi}(z) = \varphi_L(z) = -3z_1\psi(z_2)$ , donde  $\psi(z_2) \in C^0$  aproxima a  $z_2^{2/3}$  cuando  $|z_2| < 0,05$ ; la ganancia  $\theta$  es la misma. Es evidente que se obtienen mejores resultados si no se construye explícitamente una aproximación  $\varphi_L$ .

#### 4.4. Resumen

Cuando el mapa de  $n$ -observabilidad (2.8) es sólo un semi-difeomorfismo, la no linealidad característica  $\varphi$  en la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19)



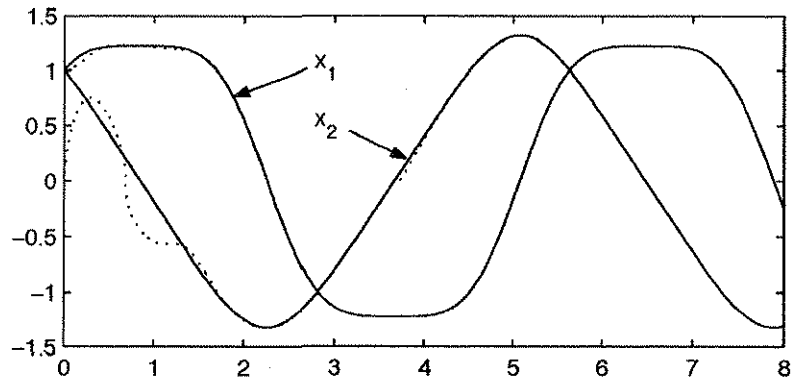


Figura 4.1: Trayectorias de estado [—] para el Ejemplo 4.2 y el observador (4.32) [ $\cdot\cdot\cdot$ ] usando  $\bar{\varphi} = \varphi$  y  $\theta = 5$ .

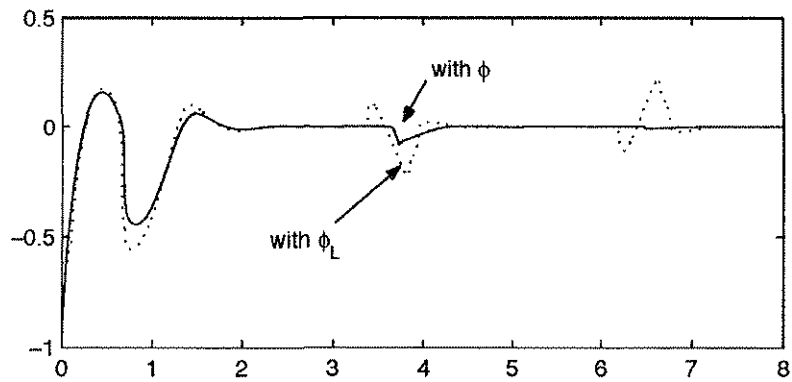


Figura 4.2: Error  $e_2 = \hat{x}_2 - x_2$  para dos observadores  $\epsilon$ -aproximados de alta ganancia para el Ejemplo 4.2: uno con  $\bar{\varphi} = \varphi$  [—] y otro con  $\bar{\varphi} = \varphi_L$  [ $\cdot\cdot\cdot$ ].

tan sólo se garantiza continua. Si ésta no es Lipschitz, entonces no se puede realizar el diseño de un observador continuo de alta ganancia. Sin embargo, usando la misma estructura se obtiene un observador  $\epsilon$ -aproximado de alta ganancia, tal que las trayectorias del error son uniformemente finalmente acotadas en una vecindad  $\epsilon$  del origen. El valor de  $\epsilon$  puede hacerse tan pequeño como se desee incrementando la ganancia  $\theta$  del observador, pero esto puede tener efectos secundarios indeseables, como mayor sensibilidad a ruido y un sobrepaso grande en la estimación. El observador  $\epsilon$ -aproximado de alta ganancia también puede ser implantado reemplazando la función  $\varphi$  por una aproximación Lipschitz continua  $\varphi_L$ .

#### 4.4. Resumen

---

## Capítulo 5

# Observadores basados en eventos

La existencia de la forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19) requiere que por lo menos el mapa de  $n$ -observabilidad (2.8) sea inyectivo. Si este mapa es difeomórfico, entonces la forma de  $n$ -observabilidad es suave y puede ser usada para el diseño de un observador clásico de alta ganancia. Si esta suposición se relaja a un semi-difeomorfismo como se muestra en el Capítulo 4, entonces la no linealidad  $\varphi$  es al menos continua; para este caso se proponen los observadores continuos o aproximados. En este capítulo se considera el caso en que la inyectividad del mapa de  $n$ -observabilidad (2.8) no se satisface para un conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_U^B$  (véase la Definición 2.1) y por lo tanto no es posible definir globalmente una forma de  $n$ -observabilidad. Sin pérdida de generalidad se pueden considerar sistemas  $r$ -observables con  $r > n$  si previamente se ha realizado una extensión de orden (véase el Capítulo 3).

El problema de diseño de observadores prácticos para sistemas no lineales que admiten *entradas malas* ha sido poco estudiado en la literatura. Para sistemas bilineales y afines en los estados la solución consiste en permitir únicamente entradas *estrictamente persistentes* y diseñar un observador de alta ganancia convencional (Celle, Gauthier y Sallet, 1989; Celle, Gauthier, Kazakos y Sallet, 1989; Hammouri y De León Morales, 1990; Glumineau y López-Morales, 1999). Para cierta clase de sistemas no lineales, otra posibilidad es aprovechar ciertas propiedades estructurales (e.g. detectabilidad) (Besançon y Hammouri, 1996; Besançon, 1999). Aquí se propone el uso del *observador basado en eventos* (OBE), la cual es aplicable a una clase más amplia de sistemas no lineales observables. Se basa en identificar el conjun-

to de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$  y restringir las trayectorias a que sean de algún modo admisibles. Antes de explicar su diseño, en la siguiente sección se definen los *eventos* y se introduce la *forma de pseudo-observabilidad*. Posteriormente se presenta el *OBE continuo de alta ganancia* y su prueba de convergencia (aproximada). Finalmente se discute una posibilidad de implantación en las coordenadas originales del sistema a observar.

## 5.1. Eventos y la forma de pseudo-observabilidad

Dado que no se satisface la inyectividad del mapa de  $n$ -observabilidad del sistema (2.1) para algún conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$ , no es posible contruir una forma de  $n$ -observabilidad (2.18)–(2.19) usando (2.20). ¿Será posible contruir algo similar, cuyas trayectorias asemejen aquellas de la salida  $y(t)$  y sus derivadas? En esta sección se da una respuesta positiva a esta pregunta: la *forma de pseudo-observabilidad*. También se definen el concepto de *evento* y un subconjunto de trayectorias admisibles para el diseño de *observadores basados en eventos* (OBEs).

### 5.1.1. El mapa de suspensión

Para evitar la parametrización del mapa de  $n$ -observabilidad (2.8) por el vector  $\underline{u}$  de la entrada y un número finito de sus derivadas, recuérdese que  $\mathcal{X}_{\underline{U}}$  representa el espacio de entradas-estados  $\mathcal{X} \times \underline{U}$  y considérese el *mapa de suspensión*  $\mathbf{Q}_n$  (Jouan y Gauthier, 1996), definido por

$$\mathbf{Q}_n: \mathcal{X}_{\underline{U}} \rightarrow \mathbb{R}^n \times \underline{U}, \quad \mathbf{Q}_n \left( \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{u} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_n(\underline{x}, \underline{u}) \\ \underline{u} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

El mapa de suspensión es entonces el mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n$ , junto con una transformación identidad de la entrada  $\underline{u}$ . Es evidente que este mapa es suave si  $\mathbf{q}_n$  lo es. Además  $\mathbf{Q}_n$  es inyectivo en todas partes excepto en el conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$ . Restringiendo el dominio de  $\mathbf{Q}_n$  al complemento del conjunto de puntos de entrada mala<sup>1</sup>

$$\mathcal{X}_{\underline{U}}^G = \mathcal{X}_{\underline{U}} \setminus \mathcal{X}_{\underline{U}}^B, \quad (5.2)$$

existe una inversa (izquierda)  $\mathbf{Q}_n^{-1}: \mathbf{Q}_n(\mathcal{X}_{\underline{U}}^G) \rightarrow \mathcal{X}_{\underline{U}}^G$  con un dominio restringido, que es la imagen de  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^G$  bajo  $\mathbf{Q}_n$ .

<sup>1</sup> $\mathcal{X}_{\underline{U}}^G$  es el conjunto de puntos de entrada *buena*; por eso el superíndice  $G$  (del Inglés).

### 5.1.2. Vecindad de puntos de entrada mala y otros conjuntos

Constrúyase una vecindad *abierta* al conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$ . Por ejemplo considérese la siguiente vecindad  $\epsilon$  del conjunto de puntos de entrada mala<sup>2</sup>  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{(\mathbf{x}, \underline{u}) \in \mathcal{X}_{\underline{U}}^B : d(\mathcal{X}_{\underline{U}}^B, (\mathbf{x}, \underline{u})) < \epsilon\} \quad (5.3)$$

donde  $d(\mathcal{Y}, \mathbf{y})$  es la distancia del punto  $\mathbf{y}$  al conjunto  $\mathcal{Y}$ . No todas las vecindades abiertas contienen una vecindad  $\epsilon$ , como se puede mostrar con ejemplos sencillos (von Querenburg, 2000). Sin embargo, la notación  $\mathcal{N}_\epsilon$  es usada en el resto del capítulo para denotar una vecindad abierta de  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$ , aún cuando no sea una vecindad  $\epsilon$  o no contenga alguna.

Ahora constrúyase el complemento de  $\mathcal{N}_\epsilon$  en  $\mathbb{R}^n \times \underline{U}$ , que es *cerrado* por definición,

$$\mathcal{N}_\epsilon^{comp} = (\mathbb{R}^n \times \underline{U}) \setminus \mathcal{N}_\epsilon. \quad (5.4)$$

Veáse la Figura 5.1 para visualizar mejor estos conjuntos.

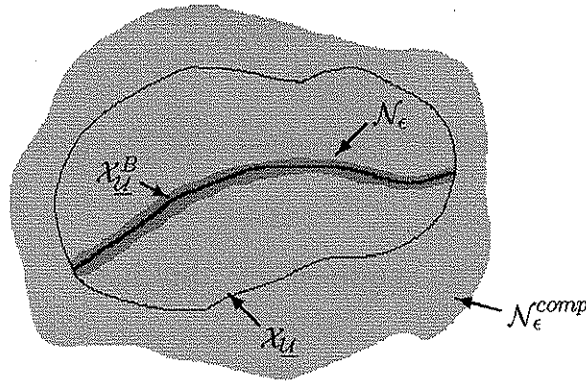


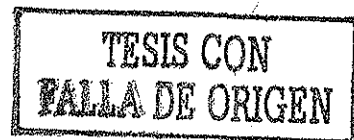
Figura 5.1: Los conjuntos  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^B$ ,  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^C$ ,  $\mathcal{N}_\epsilon$  y  $\mathcal{N}_\epsilon^{comp}$ .

Considérese un subconjunto *compacto*  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^C$  de  $\mathcal{X}_{\underline{U}}$  y defínase

$$\mathcal{K} = \mathcal{X}_{\underline{U}}^C \cap \mathcal{N}_\epsilon^{comp}. \quad (5.5)$$

El conjunto  $\mathcal{K}$  es compacto, porque  $\mathcal{X}_{\underline{U}}^C$  es compacto y  $\mathcal{N}_\epsilon^{comp}$  es cerrado, así que  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$  es compacto (véase el Teorema A.2). El conjunto  $\mathcal{K}$  es representado esquemáticamente en la Figura 5.2. Además, dado que  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}_{\underline{U}}$  *no*

<sup>2</sup>Las definición de vecindad  $\epsilon$  y otros conceptos topológicos aparecen en el Apéndice A.





contiene puntos de entrada mala,  $\mathbf{Q}_n$  con dominio restringido a  $\mathcal{K}$  es inyectivo y la inversa  $\mathbf{Q}_n^{-1}$  restringida a  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$  es continua (véase el Teorema A.3). Llamando  $\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}$  a esta inversa restringida se tiene que

$$\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}: \mathbf{Q}_n(\mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{K}, \quad \mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1} \in \mathcal{C}^0. \quad (5.6)$$

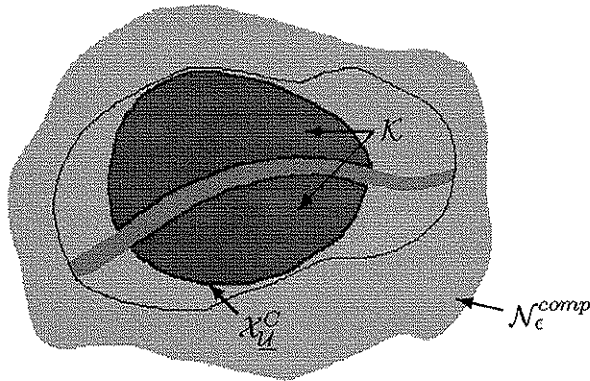


Figura 5.2: Los conjuntos  $\mathcal{N}_e^{comp}$ ,  $\mathcal{X}_u^C$  y  $\mathcal{K}$ .

### 5.1.3. La forma de pseudo-observabilidad

Los conjuntos definidos anteriormente resultan útiles para contruir la *forma de pseudo-observabilidad*. Sus trayectorias de estado asemejan la imagen bajo  $\mathbf{q}_n$  de las trayectorias del sistema original (2.1), i.e. su salida y primeras  $n - 1$  derivadas temporales. Esta forma de pseudo-observabilidad se usa posteriormente en el análisis de convergencia del observador basado en eventos que se propone en la Sección 5.2.

Nótese primero que si sólo se considera el conjunto  $\mathcal{K}$ , entonces la no linealidad  $\varphi$  en (2.18) puede ser unívocamente definida, i.e.

$$\varphi_{\mathcal{K}}: \mathbf{Q}_n(\mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mathcal{K}} = L_{\mathbf{f}_u}^n h \circ \mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}, \quad (5.7)$$

pero esto aún no es suficiente. Se debe extender el dominio de  $\varphi$  para que también incluya puntos fuera del conjunto  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$ . El siguiente teorema resulta útil para este propósito.

**Teorema 5.1 (Tietze)** (von Querenburg, 2000) Sea  $\mathcal{X}$  un espacio métrico,  $\mathcal{Y}$  un subconjunto cerrado de  $\mathcal{X}$  y  $f: \mathcal{Y} \rightarrow [0, 1]$  una función continua. Entonces  $f$  tiene una extensión continua  $g: \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ .

Dado que  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$  es compacto (i.e. cerrado y acotado) y la inversa  $\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}$  es continua, por el teorema anterior es posible “completar” a  $\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}$  y proponer una función continua  $\mathbf{Q}_n^I$  con las siguientes propiedades:

$$\mathbf{Q}_n^I: \mathbb{R}^n \times \underline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}, \quad \mathbf{Q}_n^I \in \mathcal{C}^0, \quad \mathbf{Q}_n^I|_{\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})} = \mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}. \quad (5.8)$$

Ahora se puede construir una función no lineal  $\bar{\varphi}$ , tal que

$$\bar{\varphi}: \mathbb{R}^n \times \underline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{\varphi} = L_{\mathbf{f}_u}^n h \circ \mathbf{Q}_n^I. \quad (5.9)$$

**Comentario 5.1** El Teorema de Tietze 5.1 también puede ser empleado para proponer a  $\bar{\varphi}$  sin necesidad de extender previamente la inversa restringida  $\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}$  y después usar la ecuación (5.9). Constrúyase  $\varphi_{\mathcal{K}}$  usando la ecuación (5.7) y después extiéndase su dominio; el teorema puede ser usado porque  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$  es compacto y  $\varphi_{\mathcal{K}}$  es continua. Entonces  $\bar{\varphi}|_{\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})} = \varphi_{\mathcal{K}}$ .

### Ejemplo 5.1

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 - u x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad y = x_1 \quad (5.10)$$

con  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  y  $\underline{\mathcal{U}} = \mathbb{R}^2$ . El sistema es 2-observable, ya que  $\dot{y} = L_{\mathbf{f}_u} h = (x_1 - u)x_2 = (y - u)x_2$  y

$$\mathbf{q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2(x_1 - u) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2(x_1 - u) \\ u \\ \dot{u} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

Los puntos de entrada mala están dados por  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^4: x_1 = u\}$  con  $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$  y  $\mathbf{u} = [u, \dot{u}]^T$ . Se puede construir la vecindad  $\epsilon$  como  $\mathcal{N}_{\epsilon} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^4: |x_1 - u| < \epsilon\}$ . Nótese que

$$\mathbf{Q}_n^{-1} = \left[ y, \frac{\dot{y}}{y-u}, u, \dot{u} \right]^T \quad \text{con dominio} \quad \mathbf{Q}_n(\mathcal{N}_{\epsilon}^{comp}). \quad (5.12)$$

Dado que  $L_{\mathbf{f}_u}^2 h = [(x_1 - u)x_2 - \dot{u}]x_2 - (x_1 - u)x_1$ , entonces

$$L_{\mathbf{f}_u}^2 h \circ \mathbf{Q}_n^{-1} = \frac{\dot{y}(\dot{y} - \dot{u})}{y - u} - (y - u)y. \quad (5.13)$$

### 5.1. Eventos y la forma de pseudo-observabilidad

Para construir  $\bar{\varphi}$ , propóngase una aproximación continua a  $1/(y-u)$  en la vecindad  $|y-u| < \epsilon$ . Por ejemplo usando

$$\psi_\epsilon(w) = \begin{cases} 1/w & \text{si } |w| \geq \epsilon \\ w/\epsilon^2 & \text{si } |w| < \epsilon \end{cases} \quad (5.14)$$

entonces  $\bar{\varphi}$  puede ser construido como

$$\bar{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = (z_2^2 - \dot{u}z_2) \cdot \psi_\epsilon(z_1 - u) - z_1^2 + uz_1. \quad (5.15)$$

Supóngase que  $\bar{\varphi}$  puede ser construida Lipschitz continua en todas partes y si no, que puede ser aproximada por una función Lipschitz. Considérese

$$\dot{\zeta} = \mathbf{A}_n \zeta + \mathbf{B}_n \bar{\varphi}(\zeta, \mathbf{u}), \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad y = \mathbf{C}_n \zeta \quad (5.16)$$

con  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  y  $\mathbf{C}_n$  dadas por (1.12). Si  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{K}$  y la trayectoria  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t))$  de (2.1) permanece en  $\mathcal{K}$  para  $t \in [0, T]$ ,  $T > 0$ , y además  $\zeta_0 = \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0))$ , entonces la trayectoria  $\zeta(t; \zeta_0, \mathbf{u}(t))$  de (5.16) corresponde a  $\underline{\mathbf{y}}(t)$  con  $\underline{\mathbf{y}} = \left[ y, \dot{y}, \dots, \overset{(n-1)}{y} \right]^T$ ; por supuesto sólo mientras  $t \in [0, T]$ .

Tan pronto como  $t > T$ , la trayectoria del estado de (5.16) deja de parecerse a la salida de (2.1) y sus derivadas. Sin embargo, se sabe que la salida y sus derivadas son funciones continuas del tiempo. De hecho pueden ser calculadas dadas las trayectorias de (2.1) usando las derivadas de Lie dependientes de la entrada (2.9). Considérense entonces la función continua en el tiempo

$$\varrho: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varrho \in \mathcal{C}^0, \quad \varrho(t) = L_{\mathbf{f}_u}^n h(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (5.17)$$

y el sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_n \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_n \varrho(t), & \mathbf{z}(0) &= \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_n \mathbf{z}(t). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Viendo a  $\varrho(t)$  como una señal externa al sistema (5.18) —generada usando el sistema (2.1)— es evidente que las soluciones  $\mathbf{z}(t; \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0)), \varrho(t))$  son iguales a las trayectorias  $\mathbf{q}_n(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t)), \mathbf{u}(t))$ , que a su vez corresponden a  $\underline{\mathbf{y}}(t)$ . Defínase ahora la señal  $\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\delta(t) = \varrho(t) - \bar{\varphi}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)), \quad (5.19)$$

donde  $\bar{\varphi}$  se ha construido usando el Teorema de Tietze 5.1, extendiendo el dominio de  $\varphi_{\mathcal{K}}$  de  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$  a  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$ ; véase e.g. (5.7).

**Proposición 5.1** *La señal  $\delta(t)$  posee las siguientes dos propiedades:*

1.  $\delta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es (absolutamente) continua en todas partes,
2.  $\delta(t) = 0$  cuando  $(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathcal{K}$ , o bien cuando  $(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)) \in \mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$ .

**Prueba:** Dado que (5.17) es continua con respecto al tiempo, las soluciones  $\mathbf{z}(t)$  de (5.18) también son funciones continuas del tiempo. Además  $\bar{\varphi}$  también es continua, de tal manera que de su definición (5.19) se infiere que  $\delta(t)$  también es continua.

La segunda propiedad se desprende del hecho que  $\mathbf{z}(t)$  asemeja a  $\mathbf{y}(t)$ . De la construcción de  $\bar{\varphi}$  es claro que  $\bar{\varphi}(t)$  y  $\varrho(t)$  coinciden en  $\mathcal{K}$ ; por lo tanto  $\delta(t) = 0$ .  $\square$

Usando (5.19), otra manera de escribir (5.18) es<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_n \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_n [\bar{\varphi}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t)) + \delta(t)], & \mathbf{z}(0) &= \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_n \mathbf{z}(t). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Esta forma (5.20) es llamada la *forma de pseudo-observabilidad* del sistema (2.1). Sus trayectorias reproducen exactamente las de  $\mathbf{y}(t)$ , la salida  $\mathbf{y}$  del sistema y sus primeras  $n - 1$  derivadas temporales. La construcción de esta forma de pseudo-observabilidad se muestra esquemáticamente en la Figura 5.3. Nótese que esencialmente (5.20) es similar a la forma usual de  $n$ -observabilidad, pero los “defectos” en la no linealidad característica  $\bar{\varphi}$  son corregidos por una señal externa  $\delta(t)$ . Esta señal no puede ser medida, pero tiene las propiedades de la Proposición 5.1, las cuales resultan útiles en el posterior análisis.

#### 5.1.4. Eventos y trayectorias admisibles

Evidentemente, no se puede hacer uso de la señal  $\delta(t)$  en la implantación de un observador, pero sus propiedades pueden ser usadas para el diseño. Una trayectoria que permanece cerca de los puntos de entrada mala o fuera del conjunto  $\mathcal{K}$  genera una señal  $\delta(t)$  diferente de cero en la forma de pseudo-observabilidad (5.20). Por lo tanto es deseable *restringir* las trayectorias del sistema para que generen una señal  $|\delta(t)|$  que al menos sea acotada. Esto se hace con la misma motivación que la condición de *excitación persistente* en control y observación adaptable (Sastry y Bodson, 1989; Besançon, 2000),

<sup>3</sup>Se hace énfasis a la dependencia del tiempo, pero luego se elimina en la notación.

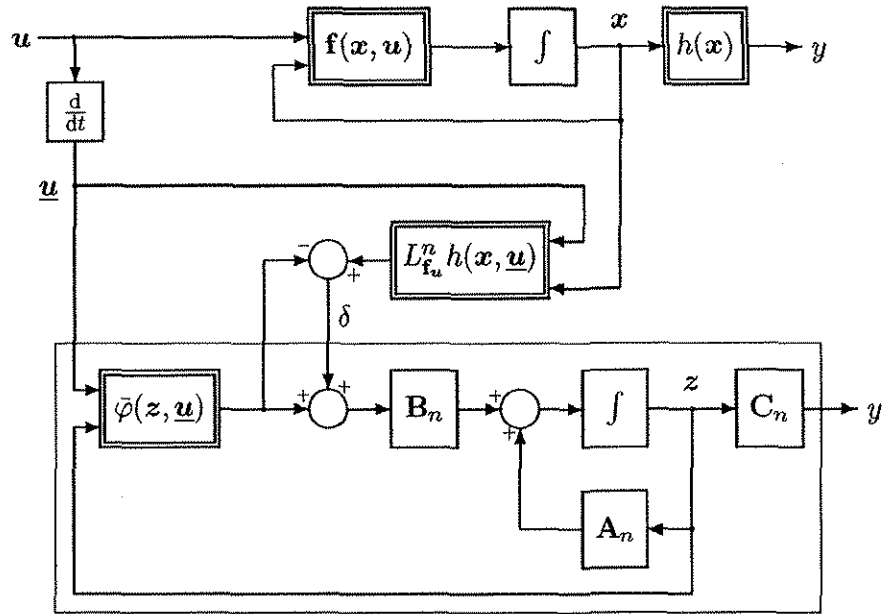


Figura 5.3: El sistema original y la construcción de la forma de pseudo-observabilidad (5.20) (enmarcada)

o las *entradas regularmente persistentes* necesarias para el diseño de observadores para sistemas bilineales o afines en los estados (Celle, Gauthier, Kazakos y Sallet, 1989; Hammouri y De León Morales, 1990; Glumineau y López-Morales, 1999). Así, no se permite que las trayectorias permanezcan por mucho tiempo cerca de los puntos de entrada mala.

**Definición 5.1** Para un conjunto compacto  $\mathcal{K}$  y una no linealidad  $\bar{\varphi}$ , una trayectoria  $x(t; x_0, u(t))$  del sistema (2.1) se dice  $\delta_M$ -admisibles (para el diseño de observadores basados en eventos) con  $\delta_M > 0$  finita si la señal  $|\delta(t)|$  de su forma de pseudo-observabilidad es acotada por  $\delta_M$ , i.e.

$$|\delta(t)| \leq \delta_M \quad \text{para toda } t \geq 0. \quad (5.21)$$

Cada vez que una trayectoria sale del conjunto compacto  $\mathcal{K}$ , la señal  $\delta(t)$  deja de ser nula. La cota  $\delta_M$  sobre la señal  $\delta(t)$  de alguna manera implica que las trayectorias no salen de  $\mathcal{K}$  (incluso de  $\mathcal{X}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{C}}$ ) por periodos prolongados de tiempo y cruzan los puntos de entrada mala suficientemente rápido. De lo contrario, la señal  $\delta(t)$  podría crecer demasiado. Los periodos fuera de  $\mathcal{K}$  son llamados *eventos*.

**Definición 5.2** Dada un trayectoria  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t))$  del sistema (2.1), abreviada  $\mathbf{x}(t)$ , constrúyase el vector  $\underline{\mathbf{u}}(t)$  correspondiente a la función de entrada  $\mathbf{u}(t)$  y considérense la vecindad abierta  $\mathcal{N}_\epsilon \subset \mathcal{X}_{\underline{\mathbf{u}}}$  y el conjunto compacto  $\mathcal{K}$  dado por la ecuación (5.5). El  $i$ -ésimo evento  $\Delta_i^* = (t_i^{\text{in}}, t_i^{\text{out}})$  es el intervalo de tiempo tal que

$$(\mathbf{x}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)) \in \mathcal{K}^{\text{comp}} = \mathcal{X}_{\underline{\mathbf{u}}} \setminus \mathcal{K} \quad \text{para toda } t \in \Delta_i^*. \quad (5.22)$$

Para cada trayectoria  $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t))$  correspondiente a una entrada  $\mathbf{u}(t)$  existe una secuencia de eventos  $\{\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots\}$  que puede o no ser finita, e incluso puede ser vacía. En casos extremos, e.g. una función de entrada mala, puede existir un único evento:  $\Delta_1^* = [0, \infty)$ .

**Comentario 5.2** Si sólo se consideran trayectorias para las cuales los eventos son finitos, i.e.  $t_i^{\text{out}} - t_i^{\text{in}}$  es finito, y no ocurren escapes a infinito durante los eventos, entonces éstas son  $\delta_M$ -admisibles para algún  $\delta_M > 0$ . Esto se ve fácilmente recordando la propiedad de continuidad de  $\delta(t)$  y el hecho que  $\delta(t_i^{\text{in}}) = \delta(t_i^{\text{out}}) = 0$ , ya que implica que  $|\delta(t)|$  tiene un máximo  $\delta_i^M$  durante  $\Delta_i^*$ ; hágase entonces  $\delta_M = \max_i \delta_i^M$ . La señal  $|\delta(t)|$  es *pulsante*.

En la siguiente sección se presenta el resultado principal del capítulo como un teorema seguido de su prueba. Luego se discuten algunas consideraciones para su implementación.

## 5.2. Observador basado en eventos continuo de alta ganancia

### 5.2.1. Resultado principal

Un planteamiento similar al del observador continuo de Xia y Zeitz (1997) considera un diseño con una parte dinámica en las coordenadas de observabilidad  $\mathbf{z}$  y una parte algebraica para obtener un estimado  $\hat{\mathbf{x}}$  en las coordenadas originales. El *observador basado en eventos continuo de alta ganancia* emplea una aproximación de la forma de  $n$ -observabilidad usando  $\bar{\varphi}$ . Esto conduce a un observador aproximado de alta ganancia que estima a  $\underline{\mathbf{y}}(t)$ , la salida y sus primeras  $n-1$  derivadas temporales. La parte algebraica se lleva a cabo usando una inversa generalizada  $\mathbf{Q}_n^I$ .

Considérese el sistema

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_n \bar{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \cdot [y - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{z}}], \quad \hat{\mathbf{z}}(0) = \hat{\mathbf{z}}_0 \quad (5.23)$$

con las matrices  $\mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{B}_n$  y  $\mathbf{C}_n$  como en (1.12).  $\mathbf{S}_\theta$  es la matriz que resuelve (2.24) y  $\bar{\varphi} \in \mathcal{C}^0: \mathbb{R}^n \times \underline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$  se construye como se ha explicado en la Sección 5.1.3.

**Teorema 5.2** *Considérese un sistema (2.1)  $n$ -observable y algún  $\delta_M > 0$ . Para cualquier vecindad abierta  $\mathcal{N}_\varepsilon$  del conjunto de puntos de entrada mala, algún compacto  $\mathcal{K}$  de (5.5) y la aproximación  $\bar{\varphi}$  correspondiente, existe un valor de  $\theta > 1$  suficientemente grande para el sistema (5.23), tal que el error  $\mathbf{e}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)$  converge a la bola de radio arbitrario  $\varepsilon > 0$  en un tiempo finito para cualquier trayectoria  $\delta_M$ -admisibles, i.e. las trayectorias del error son uniformemente finalmente acotadas.*

La prueba de este resultado se basa en la suposición de que el estado  $\mathbf{z}(t)$  de la forma de pseudo-observabilidad (5.20) asemeja la salida y sus primeras  $n - 1$  derivadas temporales  $\underline{\mathbf{y}}(t)$ . Defínase el error  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$ , cuya dinámica está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = \left( \mathbf{A}_n - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \right) \mathbf{e} + \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + \mathbf{B}_n \delta, \quad (5.24)$$

con  $\tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) = \bar{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) - \bar{\varphi}(\mathbf{z}, \underline{\mathbf{u}})$ .

### 5.2.2. Prueba del Teorema 5.2

Al igual que en la prueba del observador de alta ganancia convencional (véase la Sección 2.3.3), considérese la función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{e}$ . Usando (5.24),

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \left( \mathbf{A}_n^T \mathbf{S}_\theta + \mathbf{S}_\theta \mathbf{A}_n - \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \right) \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + 2\mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \delta$$

y empleando la ecuación de Lyapunov (2.24) se obtiene

$$\dot{V}(\mathbf{e}) = -\theta \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + 2\mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \delta. \quad (5.25)$$

Con la norma  $\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta}^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{e}$  y usando la desigualdad de Schwartz,

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\frac{1}{2} \theta \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta} + \|\mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}})\|_{\mathbf{S}_\theta} + \|\mathbf{B}_n \delta\|_{\mathbf{S}_\theta}, \quad (5.26)$$

y así como en la Sección 2.3.3, de la expresión anterior se obtiene

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\gamma \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} |\delta(t)|, \quad (5.27)$$

donde  $\gamma = \frac{1}{2}\theta - \kappa$  con  $\kappa = \frac{k\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{c_1}$  y  $k$  es la constante de Lipschitz de  $\bar{\varphi}$  (recuérdese que se supuso así). Se puede entonces obtener una expresión explícita para una cota superior de  $\|e(t)\|_{\mathbf{S}_\theta}$ :

$$\|e(t)\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq \exp[-\gamma t] \|e(0)\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)] |\delta(\tau)| d\tau. \quad (5.28)$$

Usando las desigualdades (2.38), esta cota puede ser expresada usando la norma euclídeana:

$$\|e(t)\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \theta^{n-1} \exp[-\gamma t] \|e(0)\| + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{c_1} s(t) \quad (5.29)$$

con

$$s(t) = \int_0^t \exp[-\gamma(t-\tau)] |\delta(\tau)| d\tau. \quad (5.30)$$

El primer término de la desigualdad anterior (5.29) decae exponencialmente a cero, a pesar de que puede ocurrir un sobrepaso inicial en la cota de  $\|e(t)\|$ . El segundo término es una función continua y acotada porque  $|\delta(t)|$  es acotada. De hecho es la respuesta de un sistema lineal de primer orden a una función forzante  $|\delta(t)|$ . Por lo tanto

$$s(t) \leq \frac{\delta_M}{\gamma} \quad \text{para toda } t \geq 0. \quad (5.31)$$

Finalmente, usando el resultado (5.31) en (5.29) se obtiene

$$\|e(t)\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \theta^{n-1} \exp[-\gamma t] \|e(0)\| + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{c_1} \cdot \frac{\delta_M}{\gamma}. \quad (5.32)$$

Entonces para cada  $\|e(0)\|$  existe  $T_\epsilon \geq 0$ , tal que

$$\|e(t)\| < \epsilon \quad \text{para toda } t \geq T_\epsilon. \quad (5.33)$$

El valor de  $\epsilon$  se puede hacer arbitrariamente pequeño incrementando el valor de  $\gamma$ . Para finalizar el diseño del observador, escójase  $\theta = 2(\gamma + \kappa)$ .

### 5.2.3. La parte algebraica y algunos comentarios

El Teorema 5.2 garantiza la convergencia aproximada a cero *sólo* en las coordenadas de observabilidad, i.e.  $\|\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t)\| < \epsilon$  después de cierto tiempo  $T_\epsilon \geq 0$ . ¿Acaso sucede esto también en las coordenadas originales  $\mathbf{x}$ ?



La respuesta es que sí, pero sólo cuando no ocurre un evento; durante los eventos no existe ninguna certeza.

La inversa  $\mathbf{Q}_n^{-1}$  es uniformemente continua en  $\mathbf{Q}_n(\mathcal{K})$ , dado que  $\mathcal{K}$  es compacto. Si las trayectorias están la mayor parte del tiempo en este conjunto, entonces al menos en  $\mathcal{K}$  existirá convergencia a cero del error de estimación  $\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ . Por supuesto, durante los eventos no puede garantizarse nada.

¿Cómo debe implementarse la parte algebraica? No existe una respuesta definitiva; depende de la intuición del diseñador, pero ciertamente ayuda mucho emplear la inversa restringida  $\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}$  mientras las trayectorias se encuentren en el conjunto  $\mathcal{K}$ . Una posibilidad es usar la función  $\mathbf{Q}_n^I$  definida en (5.8)<sup>4</sup>, i.e.

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}_n^I(\hat{\mathbf{z}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)), \quad (5.34)$$

pero esto puede acarrear efectos no deseados o problemas numéricos (véase el Ejemplo 5.1 en la siguiente Sección 5.2.4). Otro camino puede ser simplemente mantener un valor constante de  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  durante el evento y posteriormente volver a utilizar a  $\mathbf{Q}_n^I$ ; esto es

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{Q}_n^I(\hat{\mathbf{z}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)) & \text{cuando } t \notin \Delta_i^* \\ \hat{\mathbf{x}}(t_i^{\text{in}}) & \text{cuando } t \in \Delta_i^*. \end{cases} \quad (5.35)$$

En algunos casos también se pueden usar argumentos de continuidad de  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  y maneras alternativas para el cálculo de la inversa  $\mathbf{Q}_n^{-1}$ . Esto se ejemplifica posteriormente para el ejemplo del biorreactor del Capítulo 6.

Otros comentarios son los siguientes:

**Comentario 5.3** Si  $\delta(t)$  es pulsante y la trayectoria genera una secuencia de eventos finitos, entonces defínase para el  $i$ -ésimo evento

$$T_i = t_i^{\text{in}} - t_{i-1}^{\text{out}} \quad \text{y} \quad \tau_i = t_i^{\text{out}} - t_i^{\text{in}}. \quad (5.36)$$

Se sabe que  $|\delta(t)|$  tiene máximos  $\delta_i^M$  para cada evento  $\Delta_i^*$ . Sin importar que tan grande sea  $\tau_i$ , o que tan pequeño sea  $T_i$ , durante  $\Delta_i^*$  el error  $\|\mathbf{e}(t)\|$  converge al menos a  $\delta_i^M/\gamma$ .

**Comentario 5.4** Si una trayectoria  $\delta_M$ -admisibles tiene una secuencia de eventos finita  $\{\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_N^*\}$ , entonces defínase  $t_N^{\text{out}} = T$  y por lo tanto  $\delta(t) \equiv 0$  para toda  $t > T$ . Queda claro entonces que después del  $N$ -ésimo evento, se tendrá convergencia exponencial a cero del error  $\mathbf{e}$ . Esta conclusión

<sup>4</sup>Se hace un abuso de notación, porque  $\mathbf{Q}_n^I$  también incluye un mapa identidad para  $\underline{\mathbf{u}}$ .

se traslada al error de estimación del estado, i.e.  $\|\hat{x} - x\| \rightarrow 0$  conforme  $t \rightarrow \infty$  para  $t > T$  y así se concluye que la convergencia depende de las propias trayectorias del sistema (2.1).

**Comentario 5.5** El “grosor” de la vecindad abierta  $\mathcal{N}_\epsilon$  y la selección del conjunto compacto  $\mathcal{X}_M^C$  representan un compromiso con el conjunto de trayectorias que son consideradas  $\delta_M$ -admisibles. Conforme  $\mathcal{N}_\epsilon$  se hace más pequeño, el conjunto de trayectorias  $\delta_M$ -admisibles se hace más grande, lo cual podría parecer benéfico. Sin embargo, usualmente la constante de Lipschitz  $k$  de la aproximación  $\bar{\varphi}$  también crece y en consecuencia la ganancia  $\theta$  también tendrá que diseñarse más grande.

**Comentario 5.6** En el análisis que se ha hecho, el valor de  $\theta$  puede resultar muy grande. Sin embargo, es probable que una ganancia de menor valor sea adecuada para aplicaciones prácticas. También, los cálculos de  $\varphi$  y  $\mathbf{Q}_{n,\mathcal{K}}^{-1}$ , junto con las construcciones de  $\bar{\varphi}$  y  $\mathbf{Q}_n^I$ , pueden resultar muy complejas para sistemas de orden superior.

#### 5.2.4. Un ejemplo

Recuérdese el Ejemplo 5.1 y la aproximación  $\bar{\varphi}$  que se escogió, dada por (5.15) usando (5.14). La parte dinámica de un OBE continuo de alta ganancia se implementaría

$$\dot{\hat{z}} = \begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ \bar{\varphi}(\hat{z}, \underline{u}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \theta \\ \theta^2/2 \end{bmatrix} \cdot [y - \hat{z}_1], \quad \hat{z}(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,0} \\ (\hat{x}_{1,0} - u(0)) \hat{x}_{2,0} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

Evidentemente, conforme  $\epsilon$  se hace más pequeño y la aproximación continua a  $1/(y - u)$  se hace más exacta, la constante de Lipschitz de  $\bar{\varphi}$  crece, necesitando así un valor mayor para  $\theta$ . Por otro lado, una  $\epsilon$  más pequeña hace que más trayectorias sean consideradas  $\delta_M$ -admisibles para un  $\delta_M$  dado. El compromiso es claro.

La parte algebraica de este OBE continuo de alta ganancia podría implementarse usando la inversa aproximada (dependiente de la entrada)  $\mathbf{q}_2^I$  del mapa de 2-observabilidad  $\mathbf{q}_2$  como se muestra a continuación (compárese con (5.12)):

$$\hat{x} = \mathbf{q}_2^I(\hat{z}, \underline{u}) = \begin{bmatrix} \hat{z}_1 \\ \hat{z}_2 \cdot \psi_\epsilon(\hat{z}_1 - u) \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

con  $\psi_\epsilon(\cdot)$  dada por (5.14). Sin embargo, cada vez que  $\hat{z}_1 = u$  se tiene que  $\psi_\epsilon = 0$  (véase (5.14)) y por lo tanto el valor estimado de  $\hat{x}_2$  es forzado a

### 5.3. Implementación en coordenadas originales

cero. Esto no es deseable, pues se sabe que  $x_2$  no siempre es cero cuando  $y = x_1 = z_1 = u$ . La otra posibilidad es proceder como se explica en (5.35); considérese el conjunto

$$\widehat{\mathcal{N}}_\epsilon = \{(\hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) : |\hat{z}_1 - u| < \hat{\epsilon}\}, \quad \hat{\epsilon} > 0, \quad (5.39)$$

y calcúlese el valor de  $\hat{\mathbf{x}}$  a partir de (5.38), i.e.  $\hat{x}_2 = \hat{z}_2/(\hat{z}_1 - u)$ , hasta que la trayectoria entre al conjunto  $\widehat{\mathcal{N}}_\epsilon$ . Este valor se conserva constante hasta que la trayectoria sale de  $\widehat{\mathcal{N}}_\epsilon$  (nótese que este conjunto *no es* la vecindad  $\mathcal{N}_\epsilon$ ). El resultado es un estimado  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  discontinuo, con pequeños “saltos” cada vez que la trayectoria sale del conjunto  $\widehat{\mathcal{N}}_\epsilon$ .

En la Figura 5.4 se muestran algunos resultados de simulación para este ejemplo. La condición inicial del sistema es  $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$  y la función de entrada es  $u(t) = -\cos t$ . La ganancia es  $\theta = 20$  y la no linealidad  $\bar{\varphi}$  se construye como en (5.15) usando (5.14) con  $\epsilon = 0,02$ . El error  $e_2(t)$  en coordenadas de observabilidad se muestra en la figura de arriba; nótese el sobrepaso inicial y cómo el error diverge de cero cada vez que ocurre un evento. En la figura de abajo se muestra la estimación  $\hat{x}_2(t)$  de  $x_2(t)$  usando el método con “saltos” explicado en el párrafo anterior. La vecindad  $\widehat{\mathcal{N}}_\epsilon$  se define como en (5.39) con  $\hat{\epsilon} = 0,14$ . Nótese que  $\hat{\epsilon} > \epsilon$ ; esto se hace porque conforme  $e_2$  diverge de cero durante los eventos, el cálculo de  $\hat{x}_2$  usando (5.38) tiene problemas numéricos y aparece un pico alto en su valor. Al permitir que la vecindad  $\widehat{\mathcal{N}}_\epsilon$  sea más “gruesa” que  $\mathcal{N}_\epsilon$ , estos picos no se ven inmediatamente después de los eventos y se deja un tiempo para que  $\hat{z}_2/(\hat{z}_1 - u)$  empiece nuevamente a converger a  $x_2$ .

## 5.3. Implementación en coordenadas originales

### 5.3.1. Resultado principal

A pesar de que el OBE continuo de alta ganancia de la sección anterior garantiza la convergencia del error en las coordenadas de observabilidad  $\mathbf{z}$  para un conjunto de trayectorias  $\delta_M$ -admisibles, tiene la desventaja que la parte algebraica aún debe ser implementada. En esta sección, bajo suposiciones adicionales, se muestra que un observador basado en eventos también se puede llevar a cabo en las coordenadas originales como en el caso de (2.28). Considérese

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \frac{1}{2} \mathbf{J}^*(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \cdot [y - h(\hat{\mathbf{x}})], \quad (5.40)$$

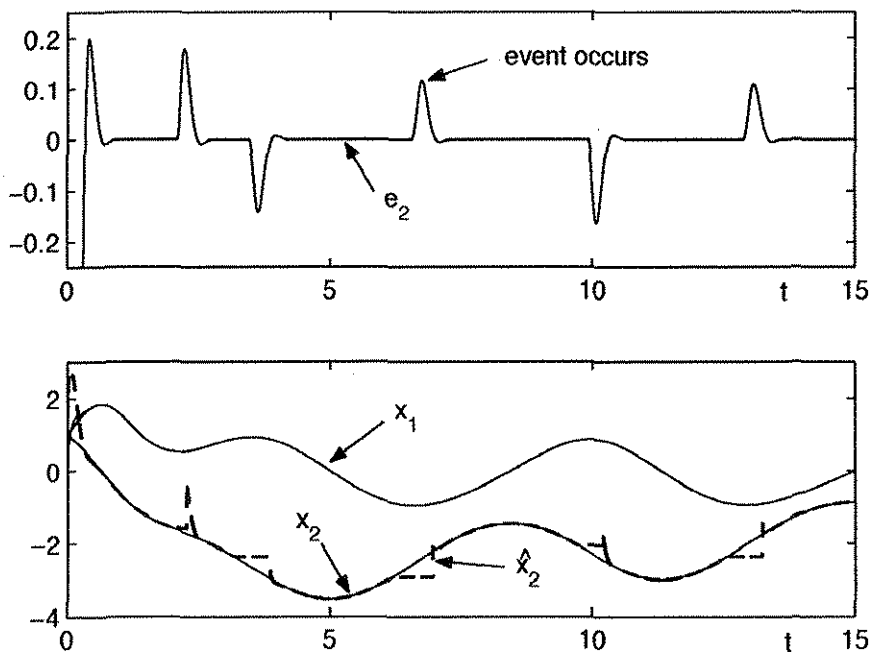


Figura 5.4: OBE continuo de alta ganancia (5.37) para el Ejemplo 5.1: error  $e_2(t)$  y estimación del estado  $\hat{x}(t)$  (- -) en coordenadas originales  $x(t)$  (—).

### 5.3. Implementación en coordenadas originales

donde la matriz  $\mathbf{J}^*$  se construye como se explica a continuación. Primero defínase el jacobiano del mapa de  $n$ -observabilidad  $\mathbf{q}_n(\hat{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})$ :

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = \left[ \frac{\partial \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{x}} \right]. \quad (5.41)$$

Ahora considérese la adjunta (única)  $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})$  del jacobiano  $\mathbf{J}$ , tal que

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = (\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})) \cdot \mathbf{I} \quad (5.42)$$

con  $\mathbf{I}$  la matriz identidad. Considérese

$$\mathcal{B}_\epsilon = \{(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) : |\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})| < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0 \quad (5.43)$$

una vecindad abierta de  $\det \mathbf{J} = 0$ , donde la función  $1/\det \mathbf{J}: \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}} \rightarrow \mathbb{R}$  es discontinua. Al igual que en la Sección 5.1.3, constrúyase un conjunto compacto  $\mathcal{K}$  como en (5.5) usando la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$  y algún compacto  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^C$ . Luego úsese el Teorema 5.1 (de Tietze) para construir una aproximación *continua*  $\beta: \mathbb{R}^n \times \underline{\mathcal{U}} \rightarrow \mathbb{R}$  (con dominio extendido) de la función  $1/\det \mathbf{J}$ , i.e.

$$\beta \in C^0, \quad \beta(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = \frac{1}{\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})} \quad \forall (\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) \in \mathcal{K} = \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^C \cap \mathcal{B}_\epsilon^{comp}, \quad (5.44)$$

donde  $\mathcal{B}_\epsilon^{comp} = \mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}} \setminus \mathcal{B}_\epsilon$  es el complemento de  $\mathcal{B}_\epsilon$ . Finalmente

$$\mathbf{J}^*(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = \beta(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}). \quad (5.45)$$

La matriz  $\mathbf{J}^*$  es una aproximación de la inversa  $\mathbf{J}^{-1}$  del jacobiano  $\mathbf{J}$ , tal que  $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^{-1}$  en el conjunto  $\mathcal{K}$ . Además se satisface lo siguiente:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{J}^*(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = \mathbf{I} - \Delta(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}), \quad \text{con } \Delta = (1 - \beta \cdot \det \mathbf{J})\mathbf{I}. \quad (5.46)$$

Ahora es posible presentar el siguiente resultado:

**Teorema 5.3** *Considérese un sistema (2.1)  $n$ -observable y algún  $\delta_M > 0$ . Supóngase que el conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_{\underline{\mathcal{U}}}^B$  está contenido en la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$  definida por (5.43) y considérese el sistema (5.40) con  $\mathbf{J}^*$  diseñado como en (5.46). Para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un valor de  $\theta > 1$  suficientemente grande, tal que el error  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_n(\hat{\mathbf{x}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)) - \underline{\mathbf{y}}(t)$  converge a una bola de radio arbitrario  $\epsilon > 0$  en un tiempo finito para un subconjunto de las trayectorias  $\delta_M$ -admisibles.*

La ventaja de usar (5.40) en vez de un observador basado en eventos continuo de alta ganancia (5.23) es que la parte algebraica ya no debe ser explícitamente implementada, puesto que el estado estimado está ya accesible. Adicionalmente no es necesario construir la no linealidad  $\bar{\varphi}$ . Sin embargo, tiene la desventaja de que no existe ninguna garantía de que efectivamente  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  converja a  $\mathbf{x}(t)$  durante los eventos, puesto que la convergencia aproximada se prueba sólo para las coordenadas de observabilidad  $\mathbf{z}$ .

### 5.3.2. Prueba del Teorema 5.3

En esta prueba se emplea la forma de pseudo-observabilidad (5.20) del sistema (2.1), considerando  $\bar{\varphi}$  de acuerdo con la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$ . Usando la transformación  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{q}_n(\hat{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}})$ , el sistema (5.40) queda como

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_n \left[ \bar{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + \hat{\delta} \right] + \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \hat{\Delta}) \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \cdot [y - \mathbf{C}_n \hat{\mathbf{z}}], \quad (5.47)$$

donde se ha usado (5.46), i.e.

$$\frac{\partial \mathbf{q}_n}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{J}^*(\hat{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T = (\mathbf{I} - \hat{\Delta}) \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \quad (5.48)$$

con  $\hat{\delta}(t)$  tal que  $\hat{\mathbf{z}}(t; \mathbf{q}_n(\hat{\mathbf{x}}_0, \underline{\mathbf{u}}(0)), \underline{\mathbf{u}}(t))$  asemeje a  $\mathbf{q}_n(\hat{\mathbf{x}}(t; \hat{\mathbf{x}}_0, \underline{\mathbf{u}}(t)), \underline{\mathbf{u}}(t))$  para todo tiempo, y

$$\hat{\Delta}(t) = \nu(t) \mathbf{I} \quad \text{con} \quad \nu(t) = 1 - \beta(\hat{\mathbf{x}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)) \cdot \det \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t)). \quad (5.49)$$

Tanto la señal  $\hat{\delta}(t)$ , como la matriz  $\hat{\Delta}(t)$  desaparecen cuando las trayectorias se encuentran en el conjunto  $\mathcal{K}$ .

Considérese la siguiente construcción  $\mathcal{C}^0$  de  $\beta$  (compárese con (5.14)):

$$\beta(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) = \psi_\epsilon(\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})) = \begin{cases} 1/\det \mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}}) & \text{si } |\det \mathbf{J}| \geq \epsilon \\ \det \mathbf{J}(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})/\epsilon^2 & \text{si } |\det \mathbf{J}| < \epsilon, \end{cases} \quad (5.50)$$

tal que  $\beta \cdot \det \mathbf{J}$  toma valores en el intervalo  $[0, 1)$  cuando se está en  $\mathcal{B}_\epsilon$  y es igual a 1 fuera de este conjunto. Entonces  $\nu(t) \in [0, 1]$  con  $\nu(t) = 0$  fuera de  $\mathcal{B}_\epsilon$  y  $\nu(t^*) = 1$  precisamente cuando  $\det \mathbf{J}(\hat{\mathbf{x}}(t^*), \underline{\mathbf{u}}(t^*)) = 0$ .

La dinámica del error  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{z}$  está dada por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} = & (\mathbf{A}_n - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n) \mathbf{e} + \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + \\ & + \mathbf{B}_n (\delta - \hat{\delta}) + \frac{1}{2} \hat{\Delta} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

### 5.3. Implementación en coordenadas originales

De manera similar a la prueba de convergencia para el OBE continuo de alta ganancia, considérese la función candidata de Lyapunov  $V(\mathbf{e}) = \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{e}$  y la ecuación de Lyapunov (2.24), tal que

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{e}) = & -\theta \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) + \\ & + 2\mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{B}_n (\delta - \hat{\delta}) + \nu(t) \mathbf{e}^T \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde se ha usado la definición (5.49) de  $\hat{\Delta}$ .

Defínase la norma  $\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta}^2 = \mathbf{e}^T \mathbf{S}_\theta \mathbf{e}$  y úsense la desigualdad de Schwartz, propiedades de  $\|\mathbf{B}_n \tilde{\varphi}(\cdot)\|_{\mathbf{S}_\theta}$  y la constante de Lipschitz  $k$  de  $\tilde{\varphi}$ ; entonces

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\left(\frac{1}{2}\theta - \kappa\right) \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} |\delta - \hat{\delta}| + \frac{\nu(t) e_1^2}{2\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta}}. \quad (5.53)$$

A partir de propiedades de la matriz  $\mathbf{S}_\theta$  se puede verificar que  $e_1^2 \leq n\theta \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{S}_\theta}^2$  (véase el Apéndice B), de tal manera que la desigualdad (5.53) queda

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{S}_\theta} \leq -\gamma(t) \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{S}_\theta} + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{\theta^{n-\frac{1}{2}}} |\delta(t) - \hat{\delta}(t)| \quad (5.54)$$

con

$$\gamma(t) = \frac{1}{2}(1 - n\nu(t))\theta - \kappa. \quad (5.55)$$

Así como en (5.29), se puede obtener una expresión explícita para la cota superior de  $\|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{S}_\theta}$  y usando (2.31) una cota superior para  $\|\mathbf{e}(t)\|$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}(t)\| \leq & \left(\frac{c_2}{c_1}\right) \theta^{n-1} \exp\left[-\int_0^t \gamma(s) ds\right] \|\mathbf{e}(0)\| + \\ & + \frac{\sqrt{\mathbf{S}_{1n,n}}}{c_1} \int_0^t \exp\left[-\int_s^t \gamma(\vartheta) d\vartheta\right] |\delta(s) - \hat{\delta}(s)| ds. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Ahora el problema es que  $\gamma(t)$  no es positiva todo el tiempo, sin importar cuan grande se escoja a  $\theta$ . Algún tiempo después de que la trayectoria del observador entra a la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$ ,  $\gamma(t)$  se hace negativa. De hecho esto sucede cuando

$$\nu(t) < \frac{\bar{\gamma}}{n(\bar{\gamma} + \kappa)} \quad \text{si} \quad \theta = 2(\bar{\gamma} + \kappa) \quad \text{para alguna} \quad \bar{\gamma} > 0.$$

Nótese, sin embargo, que  $\gamma(t)$  es acotada por debajo por  $\bar{\gamma} - n(\bar{\gamma} + \kappa)$  (cuando  $\nu = 1$ ). Impónganse entonces las siguientes dos restricciones en las trayectorias del observador:

1. Las trayectorias  $\hat{\mathbf{x}}(t; \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}(0), y(t))$  cruzan la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$  suficientemente rápido como para existir una  $T_\gamma \geq 0$  (preferentemente pequeña), tal que

$$\int_0^t \gamma(s) ds > 0 \quad \text{para toda } t \geq T_\gamma; \quad (5.57)$$

2.  $\hat{\delta}(t)$  es acotada por alguna  $\hat{\delta}_M > 0$ , tal que  $|\delta(t) - \hat{\delta}(t)| \leq \delta_M + \hat{\delta}_M$ .

Este es justamente el subconjunto de trayectorias  $\delta_M$ -admisibles consideradas en el Teorema 5.3, y depende de los parámetros del observador (5.40), es decir de  $\theta$ ,  $\mathbf{J}^*$  y  $\hat{\mathbf{x}}_0$ .

Fuera de la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$ , dado que  $\nu(t) = 0$ , escogiendo  $\theta \geq 2(\bar{\gamma} + \kappa)$  con  $\bar{\gamma} > 0$  se asegura que existe convergencia exponencial hasta una cota última, tal como se muestra en la prueba del OBE continuo de alta ganancia (véase la Sección 5.2.2). Cuando se entra a la vecindad, las trayectorias del error en algún momento empiezan a diverger, porque tanto  $\gamma(t) < 0$  como  $|\delta(t) - \hat{\delta}(t)| \neq 0$ . Sin embargo, argumentos similares a los presentados anteriormente muestran que después de salir de la vecindad las trayectorias vuelven a converger (hasta el próximo evento).

Vale la pena recalcar que las dos restricciones impuestas en las trayectorias del observador *no pueden ser garantizadas* tan sólo a partir de la  $\delta_M$ -admisibilidad de las trayectorias del sistema, pero son altamente plausibles si las trayectorias del observador convergen con un margen suficientemente bueno cuando se encuentran fuera de la vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$ .

### 5.3.3. Un ejemplo

Volviendo al Ejemplo 5.1, considérese el jacobiano  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{q}_2 / \partial \mathbf{x}$  de (5.11) y su determinante

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_2 & x_1 - u \end{bmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = x_1 - u. \quad (5.58)$$

El conjunto de puntos de entrada mala coincide con el conjunto donde  $\det \mathbf{J} = 0$ . La vecindad  $\mathcal{B}_\epsilon$  se puede escoger como

$$\mathcal{B}_\epsilon = \{(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) : |\hat{x}_1 - u| < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0. \quad (5.59)$$

Usando (5.50),  $\mathbf{J}^*$  se escoge como

$$\mathbf{J}^*(\hat{\mathbf{x}}, u) = \beta(\hat{\mathbf{x}}, u) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 - u & 0 \\ -\hat{x}_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$



### 5.3. Implementación en coordenadas originales

con  $\beta(\hat{x}, u) = \psi_\epsilon(\hat{x}_1 - u)$  (véase (5.14)). Entonces

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \hat{x}_2 - u \hat{x}_2 \\ -\hat{x}_1 \end{bmatrix} + \beta(\hat{x}, u) \begin{bmatrix} \theta(\hat{x}_1 - u) \\ \theta(\frac{1}{2}\theta - \hat{x}_2) \end{bmatrix} \cdot [y - \hat{x}_1]. \quad (5.61)$$

Nótese que en este caso en particular, el conjunto de puntos de entrada mala depende sólo de variables medibles, i.e. la entrada  $u$  y la salida  $y$ , de manera que sería más sensato implementar el observador usando  $y$  en vez de  $\hat{x}_1$  en el cálculo de  $\mathbf{J}^*$ . Los eventos entonces serían verdaderamente detectados en línea.

Los resultados de simulación que se presentan en la Figura 5.5 muestran el error  $-\tilde{x}_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  para la misma condición inicial y la misma entrada que en la simulación previa del OBE continuo de alta ganancia (véase la Sección 5.2.4). La ganancia es  $\theta = 3$  y se usa  $\epsilon = 0,2$  para el cálculo de  $\beta$ . Los eventos se muestran sombreados y son relativamente frecuentes. A pesar de ello el desempeño es aún aceptable.

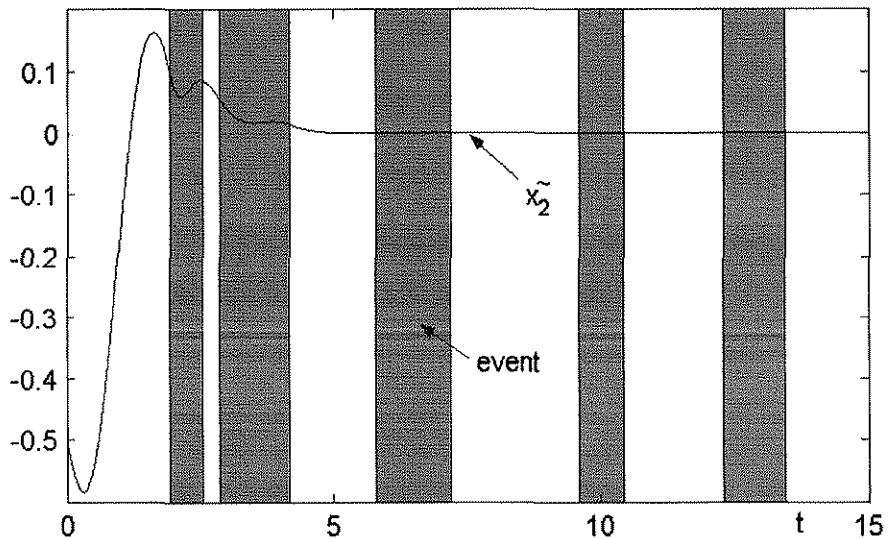


Figura 5.5: Error  $\tilde{x}_2(t)$  en la implementación de un OBE de alta ganancia en coordenadas originales (5.61) para el Ejemplo 5.1, mostrando los eventos (sombreados).

## 5.4. Resumen

Se han propuesto observadores de alta ganancia para sistemas no lineales (2.1) cuyo mapa de  $n$ -observabilidad tiene un subconjunto relativamente pequeño de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_U^B$  en su dominio  $\mathcal{X}_U$ . Se les llama observadores basados en eventos porque identifican al conjunto de puntos de entrada mala  $\mathcal{X}_U^B$  y proponen una forma aproximada de  $n$ -observabilidad fuera de un subconjunto compacto  $\mathcal{K}$  que no contiene una vecindad de  $\mathcal{X}_U^B$ . Los intervalos fuera de este compacto  $\mathcal{K}$  son llamados eventos. La parte dinámica se diseña con un observador de alta ganancia que emplea esta forma de  $n$ -observabilidad aproximada y continua. La parte algebraica se lleva a cabo con una inversa restringida del mapa de  $n$ -observabilidad cuando las trayectorias se encuentran en la imagen de  $\mathcal{K}$  y con otras técnicas (quizá heurísticas) cuando se encuentran fuera de este conjunto, i.e. durante los eventos. Las trayectorias se restringen a ser  $\delta_M$ -admisibles, lo cual de alguna manera garantiza que permanecen en el conjunto  $\mathcal{K}$  la mayor parte del tiempo. Bajo restricciones adicionales, es posible implementar el observador basado en eventos también en las coordenadas originales.

#### 5.4. Resumen

---

## Capítulo 6

# Un biorreactor como ejemplo

Como ejemplo de aplicación de las teorías expuestas en capítulos anteriores, en este capítulo se presenta el modelo matemático simplificado de un biorreactor aerobio empleado para el tratamiento de aguas residuales tóxicas. El modelo tiene dos reducciones de observabilidad: es  $r$ -observable con  $r = n + 1$  y posee un conjunto de puntos de entrada mala que no es vacío. Se diseña un observador basado en eventos de alta ganancia, pero primero se realiza una extensión de orden. También se presentan y discuten los resultados de simulación.

### 6.1. Modelo matemático

El modelo matemático que se considera es la simplificación de uno de cuarto orden con dos salidas. El modelo completo y su simplificación se detallan en el Apéndice C. El modelo usado aquí es el sistema de una salida

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 w \mu(x_2) - a_1 x_1 + (b_1 - x_1)u, & x_1(0) = x_{1,0}, \\ \dot{x}_2 = -k_2 k_1 w \mu(x_2) + (b_2 - x_2)u, & x_2(0) = x_{2,0}, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$y = x_1 \quad (6.2)$$

con dos entradas:  $u(t)$  y  $w(t)$ . La entrada  $u(t)$  tiene la restricción integral  $\int_0^t u(\tau) d\tau \leq U$  con  $U > 0$  constante, mientras  $w(t)$  depende de  $u(t)$ <sup>1</sup>

$$w(t) = \exp \left[ - \int_0^t u(\tau) d\tau \right], \quad \text{i.e. } \dot{w}(t) = -u(t)w(t), \quad w(0) = 1. \quad (6.3)$$

---

<sup>1</sup>El modelo (6.1)–(6.2) también puede ser visto como uno de 3er orden con  $w$  como estado adicional —con condición inicial fija— y otra salida:  $y_2 = w$ . De hecho,  $w(t)$  es proporcional a la concentración de la biomasa, considerada constante.

La función no inyectiva  $\mu(x_2)$  es mostrada en la Figura 6.1 y está dada por

$$\mu(x_2) = \frac{x_2}{\frac{1}{2}x_2^2 + a_2x_2 + \frac{1}{2}}. \quad (6.4)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

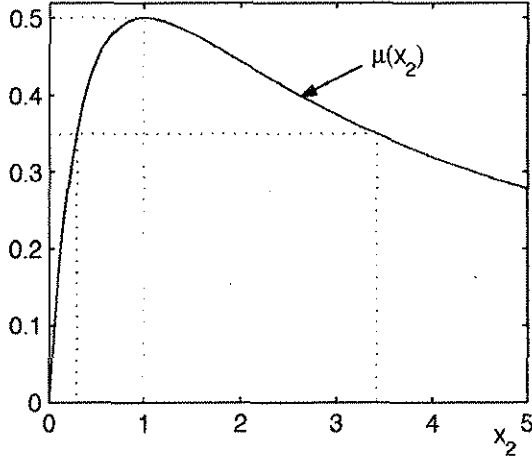


Figura 6.1: La función  $\mu(x_2)$  dada por (6.4) (aquí con  $a_2 = 1$ )

Los espacios de estados y de entradas de (6.1) están dados por

$$\mathcal{X} = [0, 1] \times [0, \infty) \quad \text{and} \quad \mathcal{U} = [0, \infty) \times (0, 1]. \quad (6.5)$$

Este sistema admite *funciones de entrada mala*  $u^*(t)$  (con un  $w^*(t)$  correspondiente). Para cada condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  existe una función de entrada mala  $u^*(t)$ , tal que con esta misma entrada otra condición inicial  $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \neq \mathbf{x}_0$  genera la misma función de salida para todo tiempo. De hecho

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ 1/x_{2,0} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad u^*(t) = \frac{k_2 k_1 \mu[x_2(t)] w^*(t)}{b_2 - \frac{2x_2(t)}{[x_2(t)]^2 + 1}}. \quad (6.6)$$

Esta función de entrada mala  $u^*(t)$  se puede construir para cualquier condición inicial y es positiva para todo tiempo si  $b_2 > 1$ , lo cual generalmente sucede. La determinación de este resultado se muestra en el Apéndice C.3.

Un análisis de observabilidad (véase el Apéndice C.4) muestra que el sistema de segundo orden (6.1) es 3-observable, i.e.  $r = n + 1 = 3$ , con un conjunto de puntos de entrada mala no vacío y dado por

$$\mathcal{X}_{\mathcal{U}}^B = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in \mathcal{X}_{\mathcal{U}} : \frac{u}{w} = \frac{k_1 k_2 \bar{\mu}(x_2)}{b_2 - 2x_2/(x_2^2 + 1)} \right\}. \quad (6.7)$$

Aunque este conjunto coincide puntualmente con la función de entrada mala (6.6), define más puntos en el espacio de estados-entradas  $\mathcal{X}_u$  que una verdadera función de entrada mala, ya que (6.6) también implica un cierto valor para  $\dot{u}^* = L_{f_u} u^*(x)$  en cada instante, mientras que  $\mathcal{X}_u^B$  contiene *cualquier* valor de la derivada temporal  $\dot{u}$ . Esto muestra que funciones de entrada “buena” podrían poseer puntos de entrada mala cada vez que las trayectorias del sistema crucen el conjunto de puntos de entrada mala. Las funciones de entrada mala (y sus estados iniciales relacionados) hacen que las trayectorias permanezcan en este conjunto de puntos de entrada mala para todo tiempo.

El conjunto de puntos de entrada mala (6.7) está caracterizado por una sola ecuación, i.e. es una hipersuperficie en el espacio  $\mathcal{X}_u$ . Por lo tanto se cumple la condición de densidad de la Definición 2.2; véase el Comentario 2.4.

## 6.2. Extensión de orden

Dado que el modelo del bioreactor (6.1) tiene un conjunto no vacío de puntos de entrada mala, se tiene que diseñar un observador basado en eventos. Sin embargo, como es 3-observable, se diseña primero una extensión de orden (véase el Capítulo 3), tal que el sistema de segundo orden (6.1) sea inmerso en uno de tercer orden y se puedan aplicar los resultados del Capítulo 5.

La metodología para diseñar la extensión se puede seguir con detalle en el Apéndice C.5. El nuevo estado que se agrega corresponde a la tasa de crecimiento específica  $\mu$ . Se usa la Proposición 3.2 con  $\psi(x) = \mu(x_2)$  por dos motivos. Primero,  $\psi = \mu$  es una estructura fácilmente reconocible de (6.1) y tiene un significado físico, así que tiene sentido estimarla como consecuencia de construir un observador extendido. En segundo lugar,  $\mu$  se puede expresar como una función de  $y$  —la salida— y su primera derivada  $\dot{y}$ , así que el mapa de 2-observabilidad de (6.1) es suficiente para recuperar  $x_1$  y  $\mu$ , y esto facilita la construcción de la extensión.

Una extensión usando  $\psi(x) = \mu(x_2)$  es

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 w x_3 - a_1 x_1 + (b_1 - x_1)u, & x_1(0) = x_{1,0}, \\ \dot{x}_2 = -k_2 k_1 w x_3 + (b_2 - x_2)u = \alpha - x_2 u, & x_2(0) = x_{2,0}, \\ \dot{x}_3 = (\lambda - x_2 x_3)(\alpha \lambda - u x_3) + (\lambda^2 - x_3^2)\alpha, & x_3(0) = \mu(x_{2,0}), \end{cases} \quad (6.8)$$

$$y = x_1, \quad (6.9)$$

donde

$$\alpha(x_3, u) = b_2 u - k_2 k_1 w x_3 \quad \text{y} \quad \lambda(x_3) = 1 - a_2 x_3. \quad (6.10)$$

Esta extensión tiene la ventaja de tener lados derechos suaves y definidos en todo  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , aún cuando el espacio de estados con las condiciones iniciales como se muestran y  $x_{0,1} \in [0, 1]$ ,  $x_{0,2} \in [0, b_2]$  está dado por el conjunto compacto

$$\mathcal{X} = [0, 1] \times [0, b_2] \times \left[0, \frac{1}{1 + a_2}\right]. \quad (6.11)$$

Esto es útil para el diseño del observador, porque no se garantiza que las trayectorias del mismo permanezcan en el espacio de estados físico (6.11).

## 6.3. Diseño del observador

### 6.3.1. Una forma de observabilidad con inyección de salida

El observador basado en eventos se diseña haciendo uso de la extensión de tercer orden (6.8)–(6.10). Nótese que el espacio de estados-entradas  $\mathcal{X}_{\underline{u}} = \mathcal{X} \times \underline{\mathcal{U}}$ , con  $\mathcal{X}$  dado por (6.11) y  $\underline{\mathcal{U}}$  propiamente definida se puede hacer compacto restringiendo las entradas a tomar valores en un compacto. El conjunto de puntos de entrada mala está dado por

$$\mathcal{X}_{\underline{u}}^B = \{(\underline{x}, \underline{u}) \in \mathcal{X}_{\underline{u}} : x_3(\alpha\lambda - ux_3) = 0\} \quad (6.12)$$

y se puede construir una vecindad  $\mathcal{N}_\epsilon$  para este conjunto. El conjunto compacto  $\mathcal{K}$  y una forma de pseudo-observabilidad pueden ser construidas (véase la Sección 5.1.3). Sin embargo, en vez de usar el mapa de 3-observabilidad como transformación de coordenadas se puede usar un mapa de 3-observabilidad modificado, el cual transforma al sistema fuera de los puntos de entrada mala a una forma de 3-observabilidad con inyección de salida. Esto simplifica algunos cálculos.

Considérese el mapa  $z = \mathbf{T}(x, u, w)$  dado por

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_2 = x_3, \\ z_3 = \frac{1}{k_1 w} [(\lambda - x_2 x_3)(\alpha\lambda - ux_3) + (\lambda^2 - x_3^2)\alpha] = \frac{\dot{x}_3}{k_1 w}. \end{cases} \quad (6.13)$$

Su inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  existe fuera de la imagen  $\mathbf{T}(\mathcal{K})$  y está dada por

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = \chi(z_2, z_3, u), \quad x_3 = z_2, \quad (6.14)$$

donde the función  $\chi(z, u)$  se puede hallar fijándose en que  $k_1 w z_3 = \dot{x}_3$  también puede ser escrita en términos de  $z_2, u$  y  $x_2$  como

$$k_1 w z_3 = \dot{x}_3 = (\bar{\lambda} - x_2 z_2) (\bar{\alpha} \bar{\lambda} - u z_2) + (\bar{\lambda}^2 - z_2^2) \bar{\alpha}$$

con

$$\bar{\alpha}(z_2, u) = b_2 u - k_2 k_1 w z_2 \quad \text{y} \quad \bar{\lambda}(z_2) = 1 - a_2 z_2, \quad (6.15)$$

tal que

$$x_2 = \chi(z_2, z_3, u) = \frac{1}{z_2} \left[ \bar{\lambda} + \frac{(\bar{\lambda}^2 - z_2^2) \bar{\alpha} - k_1 w z_3}{\bar{\alpha} \bar{\lambda} - u z_2} \right]. \quad (6.16)$$

El conjunto de puntos de entrada mala en estas nuevas coordenadas está caracterizado por

$$z_2 (\bar{\alpha} \bar{\lambda} - u z_2) = 0. \quad (6.17)$$

Bajo esta transformación, la forma de observabilidad —válida sólo en  $\mathbf{T}(\mathcal{K})$ — se puede obtener diferenciando las expresiones (6.13) y sustituyendo la inversa (6.14), mientras se reemplaza toda ocurrencia de  $x_1$  con  $y$  y se usa la expresión  $\dot{w} = -uw$  de (6.3):

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 = k_1 w z_2 - a_1 y + (b_1 - y), \\ \dot{z}_2 &= \dot{x}_3 = k_1 w z_3, \\ \dot{z}_3 &= \frac{\ddot{x}_3}{k_1 w} + u z_3 = \varphi(z, \underline{u}), \end{aligned}$$

donde después de cierta manipulación algebraica,

$$\begin{aligned} \varphi(z, \underline{u}) &= u z_3 - \left( a_2 z_3 + \frac{\bar{\alpha} z_2}{k_1 w} \right) \bar{\sigma} - 2 (a_2 \bar{\lambda} + z_2) \bar{\alpha} z_3 + (\bar{\lambda}^2 - z_2^2) \bar{\alpha}^* + \\ &\quad + \left( \frac{u}{k_1 w} - \frac{z_3}{z_2} \right) (\bar{\lambda} \bar{\sigma} + \bar{\rho}) - \frac{\bar{\rho} \bar{\sigma}^*}{\bar{\sigma}} \end{aligned} \quad (6.18)$$

con  $\bar{\lambda}(z_2)$  y  $\bar{\alpha}(z_2, u)$  dadas por (6.15) y además<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(z, u) &= (\bar{\lambda}^2 - z_2^2) \bar{\alpha} - k_1 w z_3, & \bar{\alpha}^*(z, \underline{u}) &= \frac{b_2 \dot{u}}{k_1 w} - k_2 (k_1 w z_3 - u z_2), \\ \bar{\sigma}(z_2, u) &= \bar{\alpha} \bar{\lambda} - u z_2, & \bar{\sigma}^*(z, \underline{u}) &= \bar{\alpha}^* \bar{\lambda} - (a_2 \bar{\alpha} + u) z_3 - \frac{\dot{u} z_2}{k_1 w}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Nótese que  $\bar{\alpha}^* = \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{k_1 w}$  y  $\bar{\sigma}^* = \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{k_1 w}$ .



### 6.3. Diseño del observador

Tal como se esperaba, esta forma de observabilidad tiene una discontinuidad en los puntos de entrada mala, i.e. en  $\bar{\sigma}(z_2, u) = 0$  y  $z_2 = 0$ . Se puede escribir de manera condensada como

$$\dot{z} = k_1 w \mathbf{A}_3 z + \mathbf{B}_3 \varphi(z, \underline{u}) + \mathbf{C}_3^T g(y, u), \quad z(0) = \mathbf{T}(x_0, u(0), 1), \quad (6.19)$$

$$y = \mathbf{C}_3 z, \quad (6.20)$$

donde  $\mathbf{A}_3$ ,  $\mathbf{B}_3$  y  $\mathbf{C}_3$  están dados por (1.12) y

$$g(y, u) = (b_1 - y)u - a_1 y. \quad (6.21)$$

#### 6.3.2. Observador basado en eventos continuo

Un observador basado en eventos continuo de alta ganancia usa una aproximación continua de la función discontinua  $\varphi$  en la ecuación (6.18). Las discontinuidades ocurren en  $\bar{\sigma} = 0$  y  $z_2 = 0$ . La primera corresponde a los puntos de entrada mala, mientras que los otros nunca son alcanzados por las trayectorias del sistema (si  $x_2(0) > 0$  y  $u \geq 0$ ). Sin embargo, después de construir el observador, esto ya no se garantiza, así que la función también es aproximada en estos últimos puntos.

Para construir a  $\bar{\varphi}$ , se aproximan por versiones continuas cada ocurrencia de  $1/\bar{\sigma}$  y  $1/z_2$ . Considérese la función  $C^0$

$$\psi(m, \epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } |m| \geq \epsilon \\ \frac{m}{\epsilon^2} & \text{si } |m| < \epsilon, \end{cases} \quad (6.22)$$

o la función  $C^1$

$$\psi(m, \epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{si } |m| \geq \epsilon \\ \frac{m}{\epsilon^2} \left(2 - \frac{m^2}{\epsilon^2}\right) & \text{si } |m| < \epsilon, \end{cases} \quad (6.23)$$

las cuales aproximan a  $1/m$  en una vecindad  $|m| < \epsilon$ . Fíjense  $\epsilon_{\bar{\sigma}} > 0$  y  $\epsilon_{z_2} > 0$ , y defínense  $\psi_{\bar{\sigma}} = \psi(\bar{\sigma}, \epsilon_{\bar{\sigma}})$  y  $\psi_{z_2} = \psi(z_2, \epsilon_{z_2})$ . Entonces la parte dinámica del observador continuo se realiza con

$$\dot{\hat{z}} = k_1 w \mathbf{A}_3 \hat{z} + \mathbf{B}_3 \bar{\varphi}(\hat{z}, \underline{u}) + \mathbf{C}_3^T g(y, u) + \frac{1}{2} k_1 w \mathbf{S}_{\theta}^{-1} \mathbf{C}_3^T \cdot [y - \mathbf{C}_3 \hat{z}] \quad (6.24)$$

con

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(z, \underline{u}) = & u z_3 - \left( a_2 z_3 + \frac{\bar{\alpha} z_2}{k_1 w} \right) \bar{\sigma} - 2 (a_2 \bar{\lambda} + z_2) \bar{\alpha} z_3 + (\bar{\lambda}^2 - z_2^2) \bar{\alpha}^* \\ & + \left( \frac{u}{k_1 w} - z_3 \psi_{z_2} \right) (\bar{\lambda} \bar{\sigma} + \bar{\rho}) - \bar{\rho} \bar{\sigma}^* \psi_{\bar{\sigma}}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Nótese que la dinámica del error  $e = \hat{z} - z$  está dada por (véase la Sección 5.2)

$$\dot{e} = k_1 w \left( \mathbf{A}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_3^T \mathbf{C}_3 \right) e + \mathbf{B}_3 \tilde{\varphi}(z, \hat{z}, \underline{u}) + \mathbf{B}_3 \delta. \quad (6.26)$$

Se puede seguir la prueba de convergencia de la Sección 5.2 reemplazando a  $\theta$  por  $k_1 w \theta$  en la expresión (5.25). Dado que  $k_1 w(t) > 0$  para  $u(t) > 0$ , la prueba sigue siendo válida. Más explícitamente (6.24) está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{z}}_1 \\ \dot{\hat{z}}_2 \\ \dot{\hat{z}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 w \hat{z}_2 + (b_1 - y)u - a_1 y \\ k_1 w \hat{z}_3 \\ \tilde{\varphi}(\hat{z}, \underline{u}) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k_1 w \begin{bmatrix} 3\theta \\ 3\theta^2 \\ \theta^3 \end{bmatrix} \cdot [y - \hat{z}_1], \quad (6.27)$$

$$\hat{z}(0) = \mathbf{T}(x_0, u(0), 1).$$

La parte algebraica se puede llevar a cabo usando una aproximación del mapa inverso discontinuo  $\mathbf{T}^{-1}$  dado por (6.14) y usando

$$\bar{\chi}(z_2, z_3, u) = (\bar{\lambda} + \bar{\rho} \cdot \psi_{\bar{\sigma}}) \cdot \psi_{z_2} \quad (6.28)$$

en vez de  $\chi$  en (6.14), i.e.

$$\hat{x}_1 = \hat{z}_1, \quad \hat{x}_2 = \bar{\chi}(\hat{z}_2, \hat{z}_3, u), \quad \hat{x}_3 = \hat{z}_2. \quad (6.29)$$

Sin embargo, para trayectorias cercanas a la superficie de puntos de entrada mala  $z_2 \bar{\sigma} = 0$ , esta inversa aproximada seguramente tiene problemas numéricos, ya que  $\psi_{\bar{\sigma}}$  o  $\psi_{z_2}$  son cercanos a cero. La solución discutida para el Ejemplo 5.1 en la Sección 5.2.3 se podría emplear para resolver este problema. Otra solución es la siguiente.

Considérese la definición (6.4) de  $\mu$ . Dos valores de  $x_2$  resuelven la ecuación cuadrática

$$\frac{1}{2} x_2^2 + \left( a_2 - \frac{1}{\mu} \right) x_2 + \frac{1}{2} = 0.$$

Como  $z_2 = x_3$  se parece a  $\mu$ , esta ecuación cuadrática también puede escribirse como

$$\frac{1}{2} z_2 x_2^2 + \bar{\lambda} x_2 + \frac{1}{2} z_2 = 0, \quad (6.30)$$

cuyas dos soluciones son

$$x_2 = -\frac{\bar{\lambda}}{z_2} \pm \sqrt{\left( \frac{\bar{\lambda}}{z_2} \right)^2 - 1}. \quad (6.31)$$

Aunque no existe garantía alguna que  $\hat{z}_2 = \mu(\hat{x}_2)$  cuando se usa un observador, un valor para  $\hat{x}_2$  a partir de (6.30) se puede escoger usando argumentos

de continuidad o diferenciabilidad en la trayectoria de  $\hat{x}_2(t)$ . Por ejemplo, supóngase que inicialmente la inversa (6.14) se comporta bien numéricamente. Cuando ya no es el caso (cerca de la superficie de entrada mala), cámbiese a hallar dos valores de  $\hat{x}_2$  usando (6.31) con  $\hat{z}(t)$ . Escójese aquél más cercano al que se tenía con (6.14) y continúese usando ese signo (6.31) hasta que (6.14) sea otra vez confiable.

### 6.3.3. Implementación en las coordenadas originales

El jacobiano de la transformación (6.13) está dado por

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{k_1 w} \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial x_2} & \frac{1}{k_1 w} \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Su determinante resulta ser

$$\det \mathbf{J} = -\frac{1}{k_1 w} \frac{\partial \hat{x}_3}{\partial x_2} = \frac{x_3 \sigma}{k_1 w} \quad \text{con} \quad \sigma = \alpha \lambda - x_3 u. \quad (6.33)$$

Nótese that  $\det \mathbf{J} = 0$  describe el conjunto de puntos de entrada mala. La inversa del jacobiano  $\mathbf{J}$  está dada por

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{x_3 \sigma} \begin{bmatrix} x_3 \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & -k_1 w \\ 0 & x_3 \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

donde  $\varrho = -\frac{d\hat{x}_3}{dx_2}$ , i.e.

$$\varrho(x, u) = (x_2 + a_2)(\alpha \lambda - u x_3) + (\lambda - x_2 x_3)(k_2 k_1 w \lambda + a_2 \alpha + u) + 2(a_2 \lambda + x_3)\alpha + k_2 k_1 w (\lambda^2 - x_3^2). \quad (6.35)$$

Escójase  $\epsilon > 0$  y sea  $\beta(x, u) = \psi(x_3 \sigma, \epsilon) = \psi_{x_3 \sigma}$ , que aproxima a  $1/(x_3 \sigma)$  en la vecindad  $|x_3 \sigma| < \epsilon$ , con  $\psi$  dada por la aproximación  $\mathcal{C}^0$  (6.22), o la aproximación  $\mathcal{C}^1$  (6.23). Defínase entonces

$$\mathbf{J}^* = \psi_{x_3 \sigma} \begin{bmatrix} x_3 \sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\varrho & -k_1 w \\ 0 & x_3 \sigma & 0 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

and por lo tanto  $\mathbf{J}(x, u) \cdot \mathbf{J}^*(x, u) = \mathbf{I} - \Delta(x, u)$  con

$$\Delta(x, u) = (1 - x_3 \sigma \psi_{x_3 \sigma}) \mathbf{I}. \quad (6.37)$$

Las ecuaciones del observador basado en eventos de alta ganancia (5.40) en las coordenadas originales para este sistema son

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \mathbf{J}^*(\hat{\mathbf{x}}, u) \cdot \left( \frac{1}{2} k_1 w \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_3^T \cdot [y - h(\hat{\mathbf{x}})] + \mathbf{C}_3^T \cdot [g(y, u) - g(h(\hat{\mathbf{x}}), u)] \right),$$

pero  $g(y, u) - g(h(\hat{\mathbf{x}}), u) = -(a_1 + u)[y - h(\hat{\mathbf{x}})]$ , así que

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \mathbf{J}^*(\hat{\mathbf{x}}, u) \cdot \left( \frac{1}{2} k_1 w \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_3^T - (a_1 + u) \mathbf{C}_3^T \right) \cdot [y - h(\hat{\mathbf{x}})], \quad (6.38)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0.$$

En las coordenadas de observabilidad se escribe (compárese con (5.47))

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = k_1 w \mathbf{A}_3 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{B}_3 \left( \tilde{\varphi}(\hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + \hat{\delta} \right) + \mathbf{C}_3^T g(y, u) + \left( \frac{1}{2} k_1 w (\mathbf{I} - \hat{\Delta}) \mathbf{S}_\theta^{-1} + (a_1 + u) \hat{\Delta} \right) \mathbf{C}_3^T \cdot [y - \mathbf{C}_3 \hat{\mathbf{z}}], \quad (6.39)$$

$$\hat{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{T}(\hat{\mathbf{x}}_0, u(0), 1)$$

con  $\hat{\Delta} = \nu(t) \mathbf{I}$  y  $\nu(t) = 1 - \hat{x}_3 \hat{\sigma} \hat{\psi}_{x_3 \sigma}$ . Nótese que la función  $\nu(t)$  es cero cuando las trayectorias del observador están fuera de una vecindad de  $\hat{x}_3 \hat{\sigma} = 0$ . La dinámica del error  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} - \mathbf{q}_n(\mathbf{x}, \underline{\mathbf{u}})$  está dada por

$$\dot{\mathbf{e}} = k_1 w \left( \mathbf{A}_3 - \frac{1}{2} \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_3^T \mathbf{C}_3 \right) \mathbf{e} + \mathbf{B}_3 \tilde{\tilde{\varphi}}(\mathbf{z}, \hat{\mathbf{z}}, \underline{\mathbf{u}}) + \mathbf{B}_3 \left( \hat{\delta} - \delta \right) + \nu \left( \frac{1}{2} k_1 w \nu \mathbf{S}_\theta^{-1} - (a_1 + u) \mathbf{I} \right) \mathbf{C}_3^T \mathbf{C}_3 \mathbf{e}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{e}(0) = \hat{\mathbf{z}}(0) - \mathbf{q}_n(\mathbf{x}_0, \underline{\mathbf{u}}(0))$$

Se puede seguir la prueba de convergencia de la Sección 5.3.2 y por lo tanto  $\mathbf{e}(t)$  converge a una bola de radio (pequeño) bajo restricciones en las trayectorias.

Finalmente el observador basado en eventos de alta ganancia (6.38) se implementa como

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \\ \dot{\hat{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 w \hat{x}_3 - a_1 \hat{x}_1 + (b_1 - \hat{x}_1) u \\ \hat{\alpha} - \hat{x}_2 u \\ (\hat{\lambda} - \hat{x}_2 \hat{x}_3) (\hat{\alpha} \hat{\lambda} - u \hat{x}_3) + (\hat{\lambda}^2 - \hat{x}_3^2) \hat{\alpha} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} k_1 w \hat{\psi}_{x_3 \sigma} \begin{bmatrix} \hat{x}_3 \hat{\sigma} \left( 3\theta - \frac{2(a_1 + u)}{k_1 w} \right) \\ -\theta^2 (3\hat{\rho} + k_1 w \theta) \\ 3\theta^2 \hat{x}_3 \hat{\sigma} \end{bmatrix} (y - \hat{x}_1) \quad (6.41)$$

#### 6.4. Resultados de simulación

con

$$\hat{x}_1(0) = \hat{x}_{1,0}, \quad \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{2,0}, \quad \hat{x}_3(0) = \mu(\hat{x}_{2,0}).$$

Aquí  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\lambda}$  y  $\hat{\rho}$  representan a las funciones evaluadas en  $(\hat{x}, u)$ , i.e.  $\hat{\alpha} = b_2 u - k_2 k_1 w \hat{x}_3$ ,  $\hat{\lambda} = 1 - a_2 \hat{x}_3$  y  $\hat{\rho} = \rho(\hat{z}, u)$ .

#### 6.4. Resultados de simulación

El modelo del biorreactor (6.1)–(6.2) se simula en MATLAB con los parámetros como se muestran en el Cuadro 6.1 y la condición inicial

$$x(0) = x_0 = [0, 2051, 0, 25]^T. \quad (6.42)$$

Los parámetros corresponden a los de un biorreactor experimental; véanse sus valores el Apéndice D.

$k_1 = 102,5641 \text{ [h}^{-1}\text{]}$	$a_1 = 45 \text{ [h}^{-1}\text{]}$	$b_1 = 1$
$k_2 = 0,2167$	$a_2 = 1$	$b_2 = 5$

Cuadro 6.1: Parámetros del modelo del biorreactor (6.1)

La función de entrada diferenciable  $u(t)$  usada en las simulaciones se muestra en la Figura 6.2. Con esta entrada, las trayectorias del sistema pasan muy cerca de la superficie de entrada mala por periodos prolongados, así que es una prueba “dura” para el observador. De hecho, esta función de entrada se construye tal que se le parezca a la entrada que se obtendría si se usara el control de tiempo óptimo propuesto por Moreno (1997) y explorado por Vargas, Soto, Moreno y Buitrón (2000) para este biorreactor.

Tanto el OBE continuo de alta ganancia (6.27) con (6.29) como su implementación en coordenadas originales (6.41) se simulan con la misma condición inicial:

$$\hat{x}(0) = \left[ \frac{1}{2} x_{1,0}, \quad 5x_{2,0}, \quad \mu(5x_{2,0}) \right]^T. \quad (6.43)$$

Para el OBE continuo de alta ganancia, la ganancia empleada es  $\theta = 1,8$  y la vecindad del conjunto de puntos de entrada mala se define por  $|\bar{\sigma}| < \epsilon$  con  $\epsilon = 0,05$ . Los resultados de la estimación de  $x_2$  y de  $x_3 = \mu(x_2) = z_2$  se muestran en la gráfica de arriba en la Figura 6.3, junto con aquéllos correspondientes a  $z_3$ . El error (crítico)  $\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 - x_2$  se muestra para un periodo inicial (transitorio) en la gráfica de abajo de la Figura 6.3. La gráfica

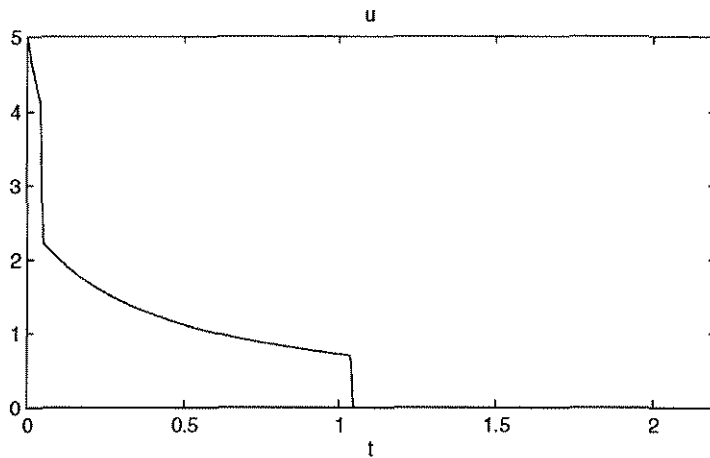


Figura 6.2: Función de entrada  $C^1$  usada en las simulaciones.

de abajo a la derecha muestra el valor de  $\bar{\sigma}$  y la región sombreada representa la vecindad de puntos de entrada mala.

Para la implementación en coordenadas originales (6.38) la ganancia usada es  $\theta = 1,8$  y la vecindad de puntos de entrada mala se define con  $|\sigma| < \epsilon = 0,05$ . La Figura 6.4 muestra arriba las estimaciones de  $x_2$  y  $x_3$ , mientras que la de abajo muestra un periodo inicial para el error  $\hat{x}_2$  y la evolución de  $\sigma$ .

En los resultados que se obtuvieron para este mismo ejemplo hace varios años (Vargas, 1999; Vargas et al., 2000) se empleó un filtro de Kalman extendido (FKE) como observador, dado que un observador convencional de alta ganancia (sin una extensión de orden) simplemente no podía funcionar ni en simulaciones, pues el término de ganancia se iba a infinito cuando las trayectorias cruzaban el conjunto de puntos de entrada mala. Sin embargo, se observó también que el FKE tampoco convergía cerca de este conjunto de puntos de entrada mala.

Los OBEs aquí presentados tienen dos ventajas. Por un lado, sólo se ajusta un parámetro y tan sólo deben resolverse tres ecuaciones diferenciales, a diferencia del FKE, donde eran nueve. Por otro lado, se obtiene convergencia (aproximada), aún cerca del conjunto de puntos de entrada mala.

6.4. Resultados de simulación

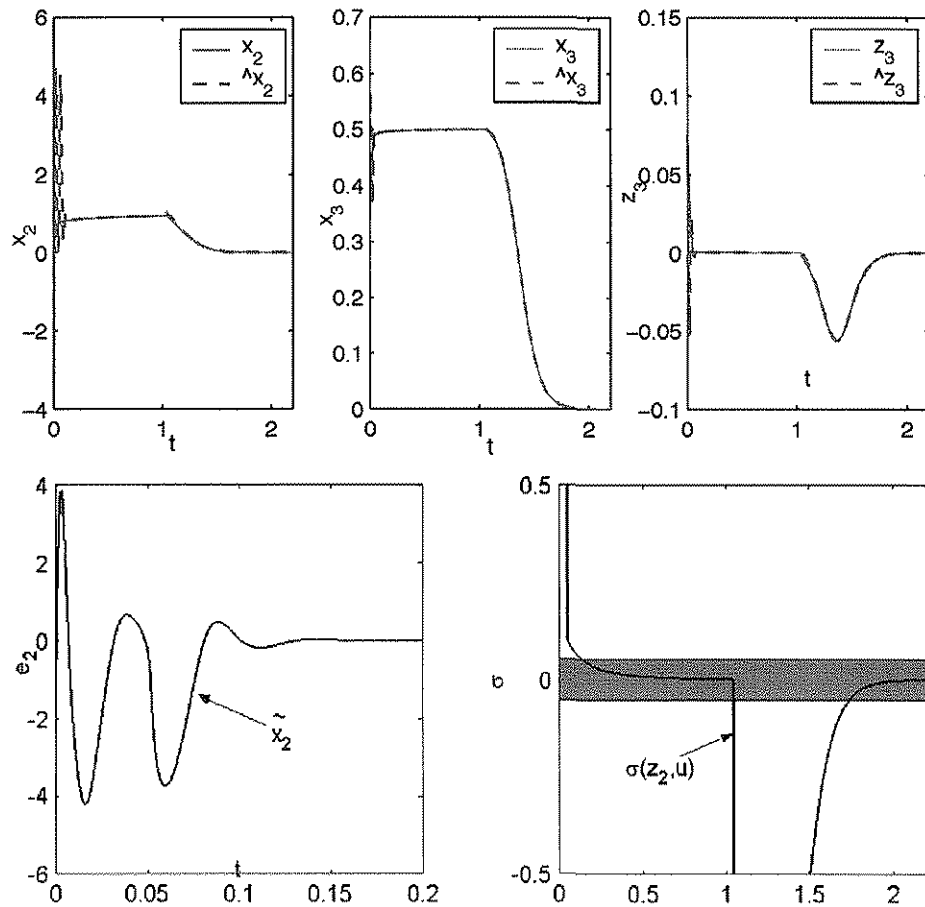


Figura 6.3: Resultados de simulación para el observador basado en eventos continuo de alta ganancia (6.27)–(6.29) con  $\theta = 1,8$  y  $\epsilon = 0,05$ . **Arriba:** Estimación de  $x_2$ ,  $x_3 = z_2$  y  $z_3$ . **Abajo:** Error  $\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 - x_2$  para un periodo inicial y evolución de  $\sigma(z_2, u)$ .

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

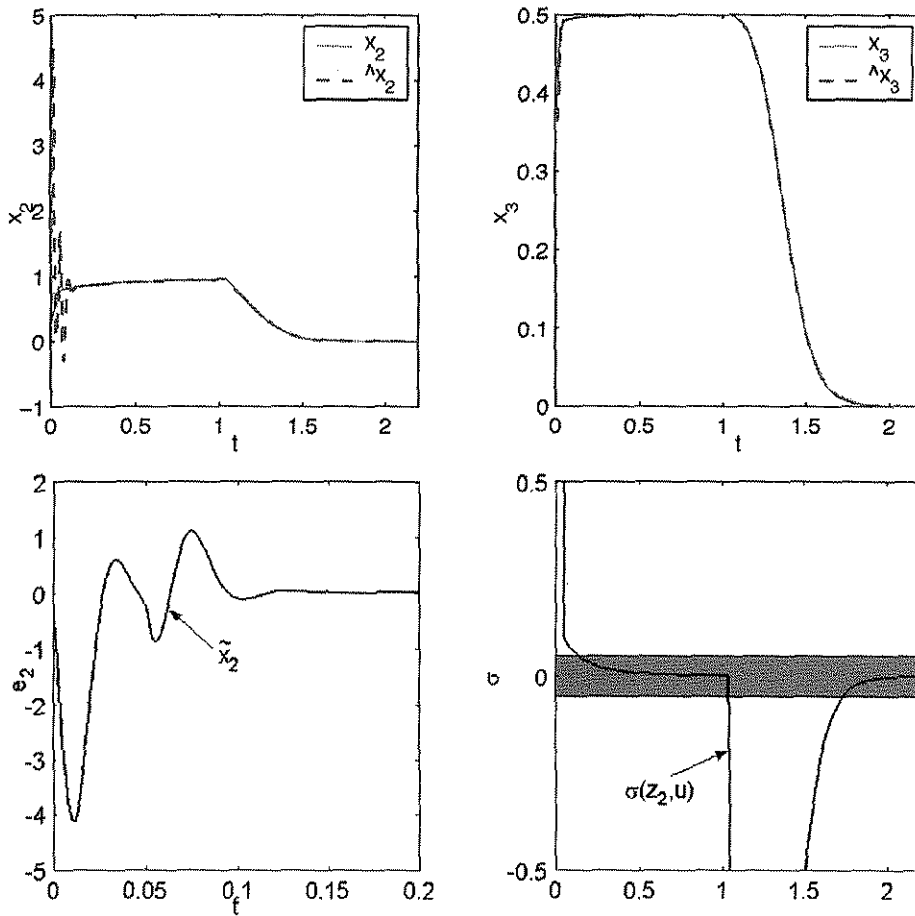


Figura 6.4: Resultados de simulación para el observador basado en eventos implementado en la coordenadas originales (6.41) usando  $\theta = 1,8$  y  $\epsilon = 0,05$ . **Arriba:** Estimación de  $x_2$  y  $x_3$ . **Abajo:** Error  $\tilde{x}_2 = \hat{x}_2 - x_2$  para un periodo inicial y evolución de  $\bar{\sigma}(z_2, u)$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## 6.5. Resumen

Se ha investigado la aplicación de un observador basado en eventos continuo de alta ganancia para el modelo de segundo orden de un biorreactor aerobio, el cual tiene los problemas de alcanzar la inyectividad hasta que se considera el mapa de 3-observabilidad y que existe un conjunto de puntos de entrada mala no vacío. Primero se propone una extensión de orden, tal que el sistema original de orden 2 se inmerge en un sistema de orden 3 que además es 3-observable y el estado auxiliar adicional tiene un significado físico. Se muestra que bajo restricciones en las trayectorias, i.e.  $\delta_M$ -admisibilidad, dicho tipo de observador basado en eventos tiene un desempeño adecuado para parámetros reales, aún cuando se implementa en las coordenadas originales. Como un producto adicional se estima la tasa de reacción como función del tiempo.

## Capítulo 7

# Conclusiones

En esta tesis se han propuesto diferentes metodologías para el diseño de observadores para sistemas de orden  $n$  con propiedades reducidas de observabilidad. Estas reducciones tienen que ver principalmente con la ausencia de algunas propiedades fundamentales del mapa de  $r$ -observabilidad, las cuales usualmente son necesarias para diseñar observadores clásicos.

El mapa de  $r$ -observabilidad, el cual relaciona al estado  $x$  con la salida y  $r - 1$  de sus derivadas temporales, es importante no sólo para determinar la propiedades de observabilidad, sino también para el diseño del observador. La propiedad más importante que se considera es la *inyectividad*. Esta propiedad define el orden  $r$  del mapa que se usa en el diseño del observador, así como el conjunto de *puntos de entrada mala* donde el mapa pierde la inyectividad. Un sistema se dice  $r$ -observable con  $r \geq n$  si el conjunto de puntos de entrada mala es relativamente pequeño si se le compara con su dominio. El mapa de  $r$ -observabilidad usado como transformación de coordenadas conduce a la forma de  $r$ -observabilidad, la cual es empleada para el diseño del observador, por ejemplo uno de alta ganancia.

Esta tesis se concentra en tres importantes reducciones de observabilidad. Primero, el hecho de que la inyectividad se logre hasta considerar un mapa de  $r$ -observabilidad de orden superior con  $r > n$ . Segundo, la posibilidad de obtener una forma de  $r$ -observabilidad no Lipschitz cuando el mapa es semi-difeomórfico (suave con una inversa continua). Finalmente, la existencia de un conjunto de puntos de entrada mala no vacío, pero pequeño.

Aunque la primera reducción de observabilidad ya ha sido considerada por otros autores, el planteamiento que se hace aquí difiere en que es un paso previo al diseño del observador propiamente y no requiere una técnica específica de diseño de observadores. La idea consiste en primero detectar

---

el orden  $r$  con el que el mapa de  $r$ -observabilidad es inyectivo en casi todas partes, para después adicionar  $m = r - n$  estados adicionales a las coordenadas originales y usar los grados de libertad existentes para que el nuevo sistema extendido sea  $r$ -observable. Al final, el nuevo sistema de orden  $r$  es una *inmersión* del sistema original de orden  $n$ , cuyo dominio contiene un subconjunto positivamente invariante (cualquier condición inicial en este subconjunto genera una trayectoria que permanece en el subconjunto) donde se encuentran las trayectorias del sistema original. Posteriormente dicha *extensión de orden* permite el uso de cualquier técnica de diseño de observadores que requiera un mapa de observabilidad inyectivo del mismo orden del sistema. Las desventajas principales de esta estrategia son que no existe una metodología fija para construir la extensión de orden y que algunas propiedades del sistema original pueden perderse en la extensión, e.g. suavidad o continuidad Lipschitz.

La segunda reducción de observabilidad, aquélla en la que la forma de  $r$ -observabilidad no resulta Lipschitz, se resuelve prácticamente usando un *observador aproximado de alta ganancia*. Tiene la misma estructura que el observador continuo de alta ganancia, pero ya no se garantiza la convergencia exacta del error de observación a cero. En vez de esto, las trayectorias del error son uniformemente finalmente acotadas en una vecindad  $\epsilon$  de cero. El valor de  $\epsilon > 0$  puede hacerse arbitrariamente pequeño incrementando la ganancia  $\theta$  del observador de alta ganancia, pero esto puede acarrear los problemas de alta sensibilidad al ruido y un sobrepaso grande en la estimación inicial. Así como en el observador continuo, la parte algebraica se lleva a cabo usando la inversa del mapa de observabilidad. En una variante de esta propuesta, la no linealidad característica no Lipschitz  $\varphi$  en la forma de  $r$ -observabilidad también puede ser reemplazada por una aproximación Lipschitz y seguir con el diseño usual del observador de alta ganancia.

Para tratar el caso de un conjunto de puntos de entrada mala no vacío —la tercera reducción de observabilidad—, se proponen los *observadores basados en eventos*. Son necesarias algunas restricciones en las trayectorias y sólo se permiten aquellas que sean  $\delta_M$ -admisibles. Así la *forma de pseudo-observabilidad* tiene una cota finita en la señal no medida  $\delta(t)$ . En los observadores basados en eventos la no linealidad característica  $\varphi$  es aproximada en una vecindad de los puntos de entrada mala por una función (Lipschitz) continua, dado que no puede ser calculada o presenta problemas numéricos severos para su implementación. Cada vez que una trayectoria entra a esta vecindad, la señal  $\delta(t)$  es no nula, y no se garantiza la convergencia del error de observación a cero. Sin embargo, al considerar sólo trayectorias  $\delta_M$ -admisibles se puede escoger una ganancia  $\theta$  lo suficientemente alta como

para lograr acotamiento final uniforme.

La estrategia del observador basado en eventos tiene varias desventajas, pero éstas parecen inevitables. Por un lado, las trayectorias deben ser restringidas porque la observabilidad se pierde completamente para algunas trayectorias (e.g. aquéllas correspondientes a una *función de entrada mala*). Por otro lado, la aproximación de la no linealidad  $\varphi$  no siempre resulta sencilla o directa, y existen muchos grados de libertad para llevarla a cabo. Además, la parte algebraica del observador no puede ser implementada con la inversa del mapa de  $r$ -observabilidad, ya que ésta no existe en todas partes, y entonces otras estrategias (heurísticas) deben ser exploradas.

Bajo suposiciones adicionales, el observador basado en eventos continuo de alta ganancia puede también ser implementado en las coordenadas originales usando el jacobiano del mapa de  $r$ -observabilidad y definiendo una vecindad del subconjunto donde éste pierde rango. Sin embargo, las suposiciones adicionales no son fáciles de verificar, y no existe ninguna garantía de que se satisfagan *a priori*, ya que dependen de las trayectorias del observador y no sólo de las del sistema.

Se debe recalcar que las tres reducciones de observabilidad pueden aparecer independientemente en un sistema. Sin embargo las soluciones que se proponen también pueden ser aplicadas por separado. Como un ejemplo de aplicación, las estrategias de diseño de observadores exploradas en esta tesis son implementadas para el modelo simplificado de un biorreactor aerobio. Este modelo tiene tanto el problema de necesitar un mapa de  $r$ -observabilidad de orden superior para lograr la inyectividad, como un conjunto no vacío de puntos de entrada mala. Primero se realiza una extensión de orden y luego se le diseña un observador basado en eventos de alta ganancia. Los resultados de simulación muestran buena convergencia práctica, a pesar de que la función de entrada empleada causa una permanencia prolongada en la vecindad de los puntos de entrada mala.

En esta tesis sólo se exploran los observadores basados en eventos de *alta ganancia*, pero la misma idea podría emplearse para otras técnicas de diseño de observadores. Por ejemplo, supóngase que los eventos, i.e. el paso por la vecindad de puntos de entrada mala, pueden ser detectados en línea, e.g. los puntos de entrada mala sólo dependen de variables que se miden: la salida y la entrada. Entonces una solución sencilla sería cancelar el término corrector en un observador convencional de tipo Luenberger durante los eventos y tan sólo hacer la estimación con un simulador del sistema. Esto funcionaría si el sistema es (globalmente) estable para la entrada dada, ya que entonces se asegura el acotamiento de las trayectorias durante los eventos.

Con toda seguridad los resultados aquí presentados pueden mejorarse y

---

ampliarse. Por un lado, no se trata el problema con *múltiples salidas*. Existen muchos más grados de libertad al escoger qué salidas y qué derivadas se emplean para construir algún mapa de  $r$ -observabilidad. Aunque el sistema aún admita funciones de entrada mala, con una selección inteligente podrían minimizarse el conjunto de puntos de entrada mala, o incluso cambiar a otro mapa de  $r$ -observabilidad compuesto de manera distinta cuando se aproxime a un punto de entrada mala. Estas cuestiones fomentan más investigaciones en esta dirección.

Por otro lado, sólo se ha considerado un término de alta ganancia *estático*. Sería muy interesante ver cómo encaja con estas estrategias un término corrector *dinámico* (variante en el tiempo), quizá también de alta ganancia. Por ejemplo, el uso de un filtro de Kalman extendido de alta ganancia basado en eventos podría disminuir la sensibilidad al ruido y el gran sobrepaso en la estimación.

Aún otra perspectiva para la continuación de este trabajo es hacer la construcción de la extensión de orden menos heruística, ya sea encontrando condiciones para su existencia, o presentando una mejor metodología para su construcción.

Por supuesto, las técnicas de diseño de observadores que se tratan en esta tesis deben ser probadas en más ejemplos prácticos, se debe analizar su robustez ante variaciones en los parámetros y por último, se deben comparar con otras técnicas de diseño en ambientes realísticos.

# Apéndice A

## Teoremas y definiciones útiles

### A.1. Conceptos topológicos

Las definiciones de los siguientes conceptos son estándar, pero los aquí presentados fueron tomados del libro de Roseman (1999). Si se considera el espacio  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $n$ , la *distancia* se define como sigue:

**Definición A.1** La función de distancia  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  entre dos puntos  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  satisface:

- (i) Definitividad positiva:  $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \geq 0$  y  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \iff \mathbf{p} = \mathbf{q}$ ;
- (ii) Simetría:  $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = d(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ;
- (iii) Desigualdad del triángulo:  $\forall \mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n, d(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \leq d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ .

La definición euclídeana usual de distancia, i.e.

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (p_i - q_i)^2}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]^T$  y  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ , de hecho satisface la Definición A.1.

Usando la función de distancia se puede definir la *bola abierta* o vecindad  $\epsilon$  a un punto  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ .

## A.1. Conceptos topológicos

---

**Definición A.2** Sean  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $\epsilon > 0$  un número dado. La bola abierta de dimensión  $n$  en  $\mathbb{R}^n$  con centro  $p$  y radio  $\epsilon$  se define como el conjunto

$$N_\epsilon(p) = \{q \in \mathbb{R}^n : d(p, q) < \epsilon\}. \quad (\text{A.2})$$

Al conjunto  $N_\epsilon(p)$  también se le llama vecindad  $\epsilon$  abierta de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Siguen los conceptos de conjuntos *abiertos* y *cerrados*

**Definición A.3** Un subconjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  si para todo  $p \in U$ , existe una  $\epsilon > 0$ , tal que  $N_\epsilon(p) \subset U$ .

**Definición A.4**<sup>1</sup> La colección de todos los subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  es llamada la topología de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición A.5** Un subconjunto  $G \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  si su complemento en  $\mathbb{R}^n$  es abierto, i.e.  $\mathbb{R}^n \setminus G$  es abierto.

**Comentario A.1** No es cierto que las propiedades de cerradura y apertura sean excluyentes. Un subconjunto puede ser *al mismo tiempo* abierto y cerrado, o no ser ninguna. Por ejemplo, tanto  $\mathbb{R}^n$  como el conjunto vacío  $\emptyset$  son tanto abiertos como cerrados, mientras que el intervalo  $[a, b) \subset \mathbb{R}$  no es ninguna de las dos cosas.

Los conceptos anteriores también pueden ser aplicados a subconjuntos de un subconjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definición A.6**  $V \subset X \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto de  $X$  si existe un subconjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $V = X \cap U$ .

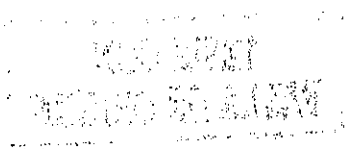
**Definición A.7** Para  $X \subset \mathbb{R}^n$ , el conjunto de todos los subconjuntos abiertos de  $X$  es llamado la topología de  $X$ .

**Definición A.8**  $W \subset X \subset \mathbb{R}^n$  es un subconjunto cerrado de  $X$  si  $X \setminus W$  es abierto.

**Definición A.9** Sea  $p \in X \subset \mathbb{R}^n$ . Dado un número positivo  $\epsilon > 0$ , una vecindad  $\epsilon$  de  $p$  en  $X$  es  $N_\epsilon(p, X) = N_\epsilon(p) \cap X$ .

---

<sup>1</sup>En el estudio más general de la Topología, otras colecciones pueden ser llamadas "conjuntos abiertos" si satisfacen ciertos axiomas. A esta definición de *topología* también se le llama la topología "estándar" o "usual" para  $\mathbb{R}^n$ .



Para caracterizar el conjunto de puntos de entrada mala y la propiedad de  $r$ -observabilidad (véanse las Definiciones 2.1 y 2.2) se usa

**Definición A.10** *El subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  es denso en  $\mathcal{X}$  si cada subconjunto abierto de  $\mathcal{X}$  contiene un punto de  $\mathcal{A}$ .*

Otros dos conceptos importantes son el acotamiento y la compacidad.

**Definición A.11** *Un subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  es un subconjunto acotado de  $\mathcal{X}$  si existe una  $\epsilon > 0$  y un punto  $\mathbf{q} \in \mathcal{X}$ , tal que  $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \epsilon$  para todo  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ .*

**Definición A.12**<sup>2</sup> *El subconjunto  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  es llamado compacto si es cerrado y acotado.*

El concepto de *vecindad* también se puede aplicar a un subconjunto  $\mathcal{Y}$  de un subconjunto  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$  con la topología usual en  $\mathbb{R}^n$ . Las siguientes dos definiciones son tomadas del libro de von Querenburg (2000).

**Definición A.13** *Dado un subconjunto  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ , un conjunto  $\mathcal{V}$  es llamado una vecindad de  $\mathcal{Y}$  si existe un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{O} \subset \mathcal{V}$ .*

**Definición A.14** *Si  $\mathcal{X}$  es un espacio métrico en la topología usual en  $\mathbb{R}^n$  (i.e. la distancia está definida), una vecindad  $\epsilon$  al subconjunto  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  está dada por*

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : d(\mathcal{Y}, \mathbf{x}) < \epsilon\}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $d(\mathcal{Y}, \mathbf{x})$  es la función de distancia de un punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  al conjunto  $\mathcal{Y}$  usando la métrica usual en la topología de  $\mathbb{R}^n$ . Nótese que una vecindad  $\epsilon$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y una vecindad según la Definición A.13.

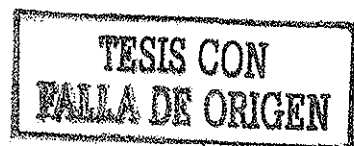
## A.2. Funciones y mapas

La mayoría de las definiciones de funciones y mapas son estándar, pero para tener una referencia, fueron tomadas del libro de Spivak (1965).

Una *función*  $\mathbf{f}$  de un conjunto  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  a otro conjunto  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$  es una relación que asocia a cada punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$  otro punto en  $\mathcal{B}$ , que se denota  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ . Se escribe  $\mathbf{f} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  para indicar que  $\mathbf{f}(\mathbf{p}) \in \mathcal{B}$  se define para todo  $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$ .

El conjunto  $\mathcal{A}$  es llamado el *dominio* de la función  $\mathbf{f}$ , mientras que el conjunto  $\mathcal{B}$  donde se define todo  $\mathbf{f}(\mathbf{p})$  es llamado el *co-dominio* de  $\mathbf{f}$ . Por

<sup>2</sup>La definición de compacidad es en realidad más compleja, pero esta es correcta para subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual.





otro lado, el conjunto  $f(\mathcal{A}) = \{q \in \mathcal{B} : q = f(p) \text{ para algún } p \in \mathcal{A}\}$  es llamado el *recorrido* o *imagen* de  $f$ . Queda claro que  $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$ .

Se dice que la función  $f$  posee una *inversa izquierda*  $f^{-1} : f(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$  si  $f(p) \neq f(q)$  cuando  $p \neq q$  y  $f^{-1}(z)$  es la única  $p \in \mathcal{A}$  con  $f(p) = z$ .

Las siguientes definiciones son adaptadas del libro de Rudin (1976). Considérense dos conjuntos  $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^m$  y funciones de distancia  $d_n$  y  $d_m$  para  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  respectivamente.

**Definición A.15** *Supóngase que  $p \in \mathcal{A}$  y  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ . Entonces  $f$  se dice continua en el punto  $p$  si para toda  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que*

$$d_m(f(x), f(p)) < \epsilon \tag{A.4}$$

para todos los puntos  $x \in \mathcal{A}$  para los cuales  $d_n(x, p) < \delta$ , i.e. para toda  $x \in \mathcal{N}_\delta(p)$ . Si  $f$  es continua en cada  $p \in \mathcal{A}$ , entonces se dice que  $f$  es continua en  $\mathcal{A}$ .

**Teorema A.1** *Si  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ , entonces una función  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$  es continua si y sólo si  $f^{-1}(\mathcal{U})$  es abierto para cada conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ .*

**Definición A.16** *El mapa  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es uniformemente continuo en  $\mathcal{A}$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que*

$$d_m(f(p), f(q)) < \epsilon \tag{A.5}$$

para todo  $p$  y  $q$  en  $\mathcal{A}$  para las cuales  $d_n(p, q) < \delta$ .

**Comentario A.2** La continuidad se define en un punto dado  $p \in \mathcal{A}$ , mientras que la continuidad uniforme se define en todo un conjunto. Dada  $\epsilon > 0$ , para la continuidad el número  $\delta > 0$  depende de  $\epsilon$  y del punto  $p$ , mientras que para la continuidad uniforme  $\delta$  depende sólo de  $\epsilon$  y su valor es válido para todo  $p \in \mathcal{A}$ .

El siguiente teorema es una consecuencia del Teorema A.1 mas un resultado respecto a la equivalencia entre continuidad uniforme y la continuidad en compactos.

**Teorema A.2** *Si  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  es continua y  $\mathcal{A}$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua y la imagen  $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$  de  $\mathcal{A}$  es compacta.*

**Teorema A.3** *Considérese el conjunto de mapas continuos  $f: A \rightarrow B$  del conjunto compacto  $A$  al conjunto Hausdorff  $B$ . Si  $f$  es inyectiva (biyectiva), entonces  $f$  es una inmersión (homeomorfismo), i.e.  $f^{-1}: f(A) \rightarrow A$  es continua.*



## Apéndice B

# Propiedades de la matriz $\mathbf{S}_\theta$

En este Apéndice se revisan algunas propiedades de la matriz  $\mathbf{S}_\theta$  que resuelve la ecuación de Lyapunov (2.24), así como de su norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{S}_\theta}$  (Gauthier et al., 1992).

### B.1. Definitividad positiva

Considérese nuevamente la ecuación de Lyapunov

$$-\theta \mathbf{S}_\theta - \mathbf{A}_n^T \mathbf{S}_\theta - \mathbf{S}_\theta \mathbf{A}_n + \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n = 0. \quad (\text{B.1})$$

$\mathbf{S}_\theta$  es la solución estacionaria de la ecuación diferencial matricial de Lyapunov

$$\dot{\mathbf{S}}_\theta(t) = -\theta \mathbf{S}_\theta(t) - \mathbf{A}_n^T \mathbf{S}_\theta(t) - \mathbf{S}_\theta(t) \mathbf{A}_n + \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \quad (\text{B.2})$$

cuya solución está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\theta(t) = & \exp[-\theta t] \cdot \exp[-\mathbf{A}_n^T t] \cdot \mathbf{S}_\theta(0) \cdot \exp[-\mathbf{A}_n t] + \\ & + \int_0^t \exp[-\theta(t-s)] \cdot \exp[-\mathbf{A}_n^T(t-s)] \cdot \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \cdot \exp[-\mathbf{A}_n(t-s)] ds. \end{aligned}$$

Si  $\mathbf{S}_\theta(0)$  es simétrica positiva definida, entonces también lo es  $\mathbf{S}_\theta(t)$ . Más aún, para cualquier  $\tau > 0$  y  $t > \tau$  se cumple

$$\mathbf{S}_\theta(t) \geq \int_{t-\tau}^t \exp[-\theta(t-s)] \cdot \exp[-\mathbf{A}_n^T(t-s)] \cdot \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \cdot \exp[-\mathbf{A}_n(t-s)] ds$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_\theta(0) &\geq \int_{-\tau}^0 \exp[\theta s] \cdot \exp[\mathbf{A}_n^T s] \cdot \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \cdot \exp[\mathbf{A}_n s] ds \\ &\geq \exp[-\theta\tau] \cdot \int_{-\tau}^0 \exp[\mathbf{A}_n^T s] \cdot \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n \cdot \exp[\mathbf{A}_n s] ds. \end{aligned}$$

Dado que el par  $(\mathbf{A}_n, \mathbf{C}_n)$  es observable,  $\mathbf{S}_\theta(0) \geq \delta \mathbf{I}$  para alguna  $\delta > 0$  y por lo tanto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{S}_\theta(t) > \delta \mathbf{I}$ .

## B.2. Solución explícita

La solución explícita  $\mathbf{S}_\theta$  de la ecuación de Lyapunov (B.1) es una matriz cuyos elementos están dados por (Gauthier et al., 1992)

$$\mathbf{S}_{\theta i,j} = \frac{1}{\theta^{i+j-1}} \mathbf{S}_{1 i,j}, \quad (\text{B.3})$$

donde  $\mathbf{S}_1$  es la solución de (B.1) para  $\theta = 1$ , i.e. la solución de

$$-\mathbf{S}_1 - \mathbf{A}_n^T \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_1 \mathbf{A}_n + \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n = 0. \quad (\text{B.4})$$

Los elementos de  $\mathbf{S}_1$  están dados por (Busawon, Farza y Hammouri, 1998)

$$\mathbf{S}_{1 i,j} = (-1)^{i+j} C_{i+j-2}^{j-1}, \quad \text{with} \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \quad (\text{B.5})$$

El vector  $\mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T$  está dado por (Busawon y De León-Morales, 2000)

$$\mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T = [C_n^1 \theta, \quad C_n^2 \theta^2, \quad \dots, \quad C_n^n \theta^n]^T, \quad (\text{B.6})$$

donde  $C_n^i$  están dados por (B.5). Nótese que estos son los coeficientes del polinomio  $p(s) = (s+1)^n = s^n + C_n^1 s^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} s + C_n^n$ , y por lo tanto los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}_n - \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n$  se ubican todos en  $-\theta$ , i.e.

$$\det[\lambda \mathbf{I} - (\mathbf{A}_n - \mathbf{S}_\theta^{-1} \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n)] = (\lambda + \theta)^n.$$

## B.3. Propiedades de la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{S}_\theta}$

Considérese la norma  $\|e\|_{\mathbf{S}} = (e^T \mathbf{S} e)^{1/2}$  usada en la prueba del observador de alta ganancia 2.3.3 y las pruebas de los Teoremas 4.2, 5.2 y 5.3.

Defínase el vector  $\xi$  con elementos  $\xi_i = e_i/\theta^i$ , donde  $e_i$  son los elementos de  $e$ . Primero nótese que para  $\theta \geq 1$

$$\theta \|\xi\| \leq \|e\| \leq \theta^n \|\xi\|, \quad (\text{B.7})$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma euclídeana usual. Desarróllese  $\|e\|_{\mathcal{S}}^2$  explícitamente y úsese (B.3),

$$e^T S_\theta e = \sum_{i,j} S_{\theta^{i,j}} e_i e_j = \sum_{i,j} \frac{S_{1i,j}}{\theta^{i+j-1}} e_i e_j = \sum_{i,j} \theta S_{1i,j} \frac{e_i}{\theta^i} \frac{e_j}{\theta^j} = \theta \sum_{i,j} S_{1i,j} \xi_i \xi_j$$

así que finalmente

$$\|e\|_{\mathcal{S}_\theta}^2 = \theta \|\xi\|_{\mathcal{S}_1}^2 \quad \text{y por lo tanto} \quad \|e\|_{\mathcal{S}_\theta} = \theta^{1/2} \|\xi\|_{\mathcal{S}_1}. \quad (\text{B.8})$$

Se sabe del álgebra lineal que las normas  $\|\cdot\|_{\mathcal{S}}$  y  $\|\cdot\|$  se relacionan mediante los valores propios máximo y mínimo de  $\mathcal{S}$ , así que defínanse  $c_1^2 = \lambda_{\min}[\mathcal{S}_1]$  y  $c_2^2 = \lambda_{\max}[\mathcal{S}_1]$  tal que

$$c_1 \|\xi\| \leq \|\xi\|_{\mathcal{S}_1} \leq c_2 \|\xi\|, \quad \frac{1}{c_2} \|\xi\|_{\mathcal{S}_1} \leq \|\xi\| \leq \frac{1}{c_1} \|\xi\|_{\mathcal{S}_1}. \quad (\text{B.9})$$

Combinando las relaciones (B.7), (B.8) y (B.9) conduce a las desigualdades

$$\frac{\theta^{1/2}}{c_2} \|e\|_{\mathcal{S}_\theta} \leq \|e\| \leq \frac{\theta^{n-1/2}}{c_1} \|e\|_{\mathcal{S}_\theta}, \quad (\text{B.10})$$

las cuales son usadas en las pruebas de convergencia para observadores de alta ganancia.

También se puede verificar que

$$\det [\mathcal{S}_1 - \frac{1}{n} C_n^T C_n] = 0 \quad (\text{B.11})$$

y por lo tanto  $\mathcal{S}_1 - \frac{1}{n} C_n^T C_n$  tiene un valor propio cero, que es también el mínimo, puesto que  $\mathcal{S}_1$  es positiva definida. Por lo tanto

$$\xi^T (\mathcal{S}_1 - \frac{1}{n} C_n^T C_n) \xi \geq 0 \quad \text{para toda} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

lo cual implica que  $n \xi^T \mathcal{S}_1 \xi \geq \xi^T C_n^T C_n \xi$ , i.e.

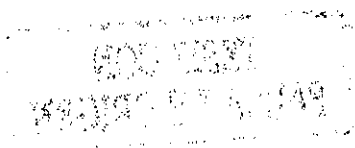
$$n \|\xi\|_{\mathcal{S}_1}^2 \geq \|\xi\|_{C_n^T C_n}^2 = \xi_1^2 \quad \text{para toda} \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Finalmente, usando la ecuación (B.8)

$$\frac{n}{\theta} \|e\|_{\mathcal{S}_\theta} \geq \xi_1^2 = \frac{e_1^2}{\theta^2} \quad \implies \quad e_1^2 \leq n \theta \|e\|_{\mathcal{S}_\theta}. \quad (\text{B.12})$$

B.3. Propiedades de la norma  $\|\cdot\|_{S_\theta}$

---



## Apéndice C

# Modelo del biorreactor aerobio

### C.1. Modelo matemático riguroso

El modelo que se considera corresponde a las fases de llenado y reacción de un bioreactor secuencial por lotes operado en modo *fed-batch* (Schügerl, 1987) y usado para el tratamiento de aguas residuales tóxicas. Se consideran cuatro estados: la concentración de *biomasa*  $X$ , la concentración de *sustrato*  $S$ , la concentración de *oxígeno disuelto*  $O$  y el *volumen* actual de agua  $V$  en el biorreactor. La biomasa o *lodos activados* es un consorcio de microorganismos previamente aclimatados suspendidos en el agua. El sustrato son los compuestos tóxicos suspendidos o disueltos en el agua residual, los cuales son degradados a sustancias inocuas por la biomasa. Se considera que los microorganismos son aerobios, por lo cual se disuelve oxígeno en el agua durante la reacción. El reactor opera en ciclos, comenzando con un cierto volumen inicial  $V_{\min}$  de agua y una alta concentración de biomasa y terminando con una capacidad máxima  $V_{\max}$ . Se supone que sólo es posible tomar mediciones continuas de la concentración de oxígeno disuelto y del volumen de agua en el reactor.

El siguiente modelo matemático considera que la biomasa total permanece constante (no así su concentración). Esto en realidad no es cierto, porque los microorganismos se reproducen más de lo que se mueren. Sin embargo, durante un ciclo su incremento es relativamente poco y en la operación usual de un biorreactor de esta naturaleza se procura mantener la biomasa constante removiendo lo suficiente manualmente periódicamente. Usando un balance de masas y considerando una distribución homogénea de las sustan-



cias en el biorreactor, el modelo está dado por (Bailey y Ollis, 1986)

$$\frac{dX(t)}{dt} = -X(t) \frac{Q_{in}(t)}{V(t)}, \quad (C.1)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{1}{Y} \mu[S(t)]X(t) + (S_{in} - S(t)) \frac{Q_{in}(t)}{V(t)}, \quad (C.2)$$

$$\frac{dO(t)}{dt} = -\frac{1}{Y_{xo}} \mu[S(t)]X(t) + (O_{in} - O(t)) \frac{Q_{in}(t)}{V(t)} + K_{la} (O_s - O(t)), \quad (C.3)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = Q_{in}(t). \quad (C.4)$$

En este modelo se considera al flujo de entrada  $Q_{in}(t)$  como única entrada. Los parámetros del modelo se suponen conocidos y son: las concentraciones de entrada de sustrato y oxígeno disuelto  $S_{in}$  y  $O_{in}$  (considerados constantes), la constante de saturación de oxígeno  $O_s$ , el coeficiente de transporte de masa de oxígeno  $K_{la}$ , el coeficiente de conversión biomasa-sustrato  $Y$  y el coeficiente de conversión biomasa-oxígeno  $Y_{xo}$ . Además la tasa de crecimiento específica de biomasa  $\mu(S)$  se considera dependiente sólo de la concentración de sustrato  $S$ , ya que se supone que siempre existe suficiente oxígeno en el reactor, i.e.  $K_{la}$  es suficientemente grande.

Obviamente el espacio de estados está restringido, ya que sólo se permiten valores positivos para los estados, i.e.  $X(t) > 0$ ,  $S(t) > 0$ ,  $O(t) > 0$ , y  $V(t) > 0$  para toda  $t \geq 0$ . Adicionalmente, la concentración de oxígeno debe ser siempre menor a la constante de saturación, i.e.  $O(t) < O_s$ . Finalmente, dado que este modelo sólo considera las fases de llenado y reacción, el flujo de entrada debe ser no negativo, i.e.  $Q_{in}(t) \geq 0$ .

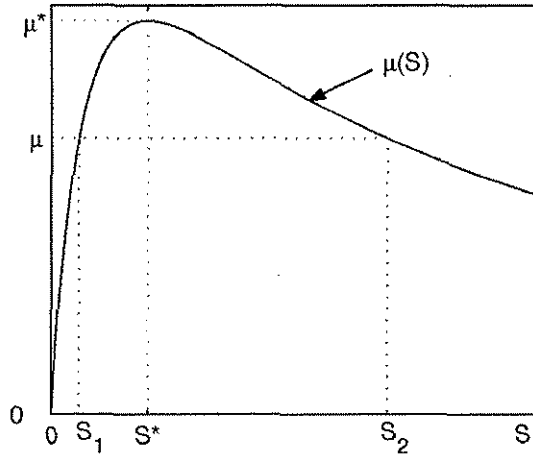
Se considera también que las sustancias a degradar son tóxicas a altas concentraciones y la cinética de la tasa de crecimiento debe reflejarlo. Ésta se modela con la *ley de Haldane*:

$$\mu(S) = \frac{\mu_{max} S}{K_s + S + S^2/K_i}. \quad (C.5)$$

Los parámetros de la ley de Haldane (C.5) son la constante de afinidad  $K_s$ , la constante de inhibición  $K_i$  y la tasa máxima de crecimiento sin inhibición  $\mu_{max}$ . En la Figura C.1 se ve claramente que la tasa de crecimiento es cero cuando no hay sustrato y que existe una tasa máxima de crecimiento  $\mu^*$  para una cierta concentración de sustrato  $S^*$ . Para valores de  $S$  mayores que  $S^*$ , la tasa de crecimiento es inhibida. Las relaciones entre estos valores

y los parámetros están dadas por

$$\mu^* = \frac{\mu_{\max}}{1 + 2\sqrt{K_s/K_i}}, \quad S^* = \sqrt{K_s K_i}. \quad (C.6)$$



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura C.1: Cinética de la ley de Haldane  $\mu(S)$ , de (C.5) o (C.7).

La ecuación de Haldane (C.5) también puede escribirse como

$$\mu(S) = \frac{\mu^* 2m S^* S}{2m S^* S + (S - S^*)^2}, \quad (C.7)$$

donde  $m > 0$  es un parámetro que determina qué tan pronunciada es la curva, i.e. conforme  $m \rightarrow \infty$  la curva se hace más plana y conforme  $m \rightarrow 0$  la curva se vuelve un pico en  $S = S^*$ . Esta representación tiene los valores de  $S^*$  y  $\mu^*$  como parámetros. Además se permiten valores entre 0 y 1 para  $m$ , lo cual corresponde a valores negativos para  $K_s$ ,  $K_i$  y  $\mu_{\max}$ , lo cual no se permite en la representación de Haldane (C.5). Los parámetros se relacionan mediante

$$\mu_{\max} = \frac{m\mu^*}{m-1}, \quad K_s = \frac{S^*}{2(m-1)}, \quad K_i = 2(m-1)S^*. \quad (C.8)$$

## C.2. Modelo matemático simplificado

Para facilitar el análisis de observabilidad y el posterior diseño del observador, se requieren hacer algunas simplificaciones al modelo (C.1)–(C.4).

## C.2. Modelo matemático simplificado

La primera simplificación se hace considerando que el volumen  $V$  no juega ningún papel significativo en el análisis de observabilidad porque su dinámica es simplemente un integrador de la entrada, el flujo  $Q_{in}$ . Por tanto, es necesario medirlo en línea y afortunadamente existen sensores confiables y económicos para ello. Definiendo la *tasa de dilución*  $D_{in}(t) = Q_{in}(t)/V(t)$  como nueva entrada se elimina un estado y el sistema se reduce a uno de tercer orden. Por supuesto, esta nueva entrada está restringida, tal que  $V_{min} \leq V(t) \leq V_{max}$ , i.e.

$$\int_0^T D_{in}(t)dt = \log \frac{V_{max}}{V_{min}}, \quad (C.9)$$

donde  $T > 0$  es la duración de la fase de llenado y reacción. Ahora, suponiendo que se conoce la concentración inicial de biomasa  $X_0$ , o sea la cantidad de biomasa constante, entonces  $X(t)V(t) = X_0V_{min}$  y de (C.1) se obtiene

$$X(t) = X_0 \exp \left[ - \int_0^t D_{in}(\tau) d\tau \right]. \quad (C.10)$$

Defínase la transformación de estados

$$x_1 = \frac{O_s - O}{O_s}, \quad x_2 = \frac{S}{S^*}, \quad (C.11)$$

tal que el sistema (C.1)–(C.4) también puede escribirse como el sistema de dos entradas y una salida

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 w \mu(x_2) - a_1 x_1 + (b_1 - x_1)u, \\ \dot{x}_2 = -k_2 k_1 w \mu(x_2) + (b_2 - x_2)u, \end{cases} \quad (C.12)$$

$$y = x_1 \quad (C.13)$$

con dos entradas:  $u(t) = D_{in}(t)$  y

$$w(t) = \exp \left[ - \int_0^t u(\tau) d\tau \right]. \quad (C.14)$$

Nótese que  $w(t)$  también puede ser descrita como la solución de la siguiente ecuación diferencial dependiente de la entrada  $u(t)$ :

$$\dot{w}(t) = -w(t)u(t), \quad w(0) = 1. \quad (C.15)$$

La función

$$\mu(x_2) = \frac{x_2}{\frac{1}{2}x_2^2 + a_2x_2 + \frac{1}{2}}. \quad (C.16)$$

no es inyectiva, lo cual se ve de la ecuación (C.7).

Los parámetros de (C.12)–(C.16) están dados por

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{X_0}{Y_{x_0} O_s} \mu^* m, & a_1 &= K_1 a, & b_1 &= \frac{O_s - O_{in}}{O_s}, \\ k_2 &= \frac{Y_{x_0} O_s}{Y S^*}, & a_2 &= m - 1, & b_2 &= \frac{S_{in}}{S^*}. \end{aligned} \quad (C.17)$$

### C.3. Determinación of funciones de entrada mala

En el modelo del biorreactor (C.12) existen *funciones de entrada mala*  $u^*(t)$  que no distinguen dos condiciones iniciales *distintas*  $(x_0, \bar{x}_0)$  a partir de sus salidas. Esto implica que cada vez que el sistema es alimentado con dicha entrada, cualquier mapa de  $r$ -observabilidad deja de ser inyectivo para toda  $t \geq 0$ .

La ecuación diferencial para la salida  $y$  puede ser escrita como

$$\dot{y}(t) = -a_1 y(t) + (b_1 - y(t)) u(t) + k_1 w(t) \mu(t), \quad y(0) = y_0, \quad (C.18)$$

donde  $\mu(t) = \mu(x_2(t))$  puede verse como otra entrada, la cual es suave. Nótese que por la ley de Haldane (C.16), existen  $x_2$  y  $\bar{x}_2$  con  $x_2 \neq \bar{x}_2$  que satisfacen  $\mu(x_2) = \mu(\bar{x}_2)$ ; de hecho  $\bar{x}_2 = 1/x_2$ .

Dado que la ecuación diferencial (C.18) es suave, su solución es única. Considérense dos condiciones iniciales distintas  $x_0 = [x_{1,0}, x_{2,0}]^T$  y  $\bar{x}_0 = [x_{1,0}, 1/x_{2,0}]^T$  en (C.12) y constrúyanse las  $\mu(t)$  y  $\bar{\mu}(t)$  correspondientes usando la misma entrada. Si resultan ser iguales para todo tiempo, entonces dado que  $y_0 = \bar{y}_0 = x_{1,0}$ , las soluciones de (C.18) para  $x(0) = x_0$  y  $x(0) = \bar{x}_0$  serían las mismas para todo tiempo.

Si existe una *función de entrada mala*  $u^*(t)$ , ésta hace que para todo tiempo  $\mu(x_2(t; x_0, u^*(t))) \equiv \mu(x_2(t; \bar{x}_0, u^*(t)))$ . Para hallar  $u^*(t)$  considérese la ecuación diferencial para  $\mu(t)$ ,

$$\dot{\mu} = L_{f_u} \mu = \mu'(x_2) (-k_2 k_1 w \mu(x_2) + (b_2 - x_2) u), \quad \mu(0) = \mu(x_{2,0}) \quad (C.19)$$

donde  $\mu' = d\mu/dx_2$ . El campo vectorial en el lado derecho es suave y por lo tanto (C.19) tiene una solución única. Lo que sigue debe cumplirse para una entrada mala  $u^*(t)$  si  $\mu(x_2) = \mu(\bar{x}_2)$ :

$$\mu'(x_2) (-k_2 k_1 w^* \mu + (b_2 - x_2) u^*) = \mu'(\bar{x}_2) (-k_2 k_1 w^* \mu + (b_2 - \bar{x}_2) u^*),$$

lo cual se reduce a

$$u^* = \frac{k_2 k_1 w^* \mu(x_2)}{b_2 - \frac{x_2 \mu'(x_2) - \bar{x}_2 \mu'(\bar{x}_2)}{\mu'(x_2) - \mu'(\bar{x}_2)}}. \quad (\text{C.20})$$

¿Cumple acaso la  $u^*(t)$  de (C.20) con  $u^*(t) \geq 0$ ? Si  $\mu(x_2(t)) \equiv \mu(\bar{x}_2(t))$ , entonces  $\bar{x}_2(t) \equiv 1/x_2(t)$ . Además  $\mu'(x_2) = \frac{1}{2}[\mu(x_2)]^2 (1/x_2^2 - 1)$ , así que

$$u^*(t) = \frac{k_2 k_1 \mu[x_2(t)] w^*(t)}{b_2 - \frac{2x_2(t)}{[x_2(t)]^2 + 1}}. \quad (\text{C.21})$$

Dado que  $0 < w^* \leq 1$  y  $\frac{2x_2}{x_2^2 + 1} \leq 1$  para toda  $x_2 \geq 0$ , si  $b_2 > 1$  (lo cual es razonable, pues  $S_{\text{in}} > S^*$ ), entonces dicha función de entrada mala es suave y positiva para cualquier  $x \in \mathcal{X}$ . Esto prueba que sí es posible construir una función de entrada mala para cualquier condición inicial  $x_0 \in \mathcal{X}$ .

## C.4. Análisis de observabilidad

El análisis de observabilidad de (C.12) se basa en el concepto de  $r$ -observabilidad definido en la Sección 2.4. Para verificar la invertibilidad y encontrar el entero  $r$ , defínanse los conjuntos

$$\mathcal{O}_0 = \{(x, \bar{x}, \underline{u}) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{U} : x \neq \bar{x}\}, \quad (\text{C.22})$$

$$\mathcal{O}_i = \{(x, \bar{x}, \underline{u}) \in \mathcal{O}_{i-1} : L_{\underline{f}_u}^{i-1} h(x, \underline{u}) = L_{\underline{f}_u}^{i-1} h(\bar{x}, \underline{u})\} \quad \text{para } i \geq 1. \quad (\text{C.23})$$

Cuando  $\mathcal{O}_i$  sea el conjunto vacío  $\emptyset$ , entonces  $r = i$ , lo cual sucede si el mapa de  $r$ -observabilidad es globalmente inyectivo. Sin embargo, para la  $r$ -observabilidad es suficiente que el complemento de la proyección de  $\mathcal{O}_r$  a  $\mathcal{X}_{\underline{u}}$  cumpla con la condición de densidad de la Definición 2.1. Esto no es fácil de verificar analíticamente, pero da un procedimiento para hacerlo numéricamente.

Para el modelo del biorreactor (C.12), el conjunto  $\mathcal{O}_1$  está dado por

$$\mathcal{O}_1 = \{(x, \bar{x}, \underline{u}) \in \mathcal{O}_0 : x_1 = \bar{x}_1\}. \quad (\text{C.24})$$

Para hallar  $\mathcal{O}_2$ , recuérdese que  $L_{\underline{f}_u} h = -k_2 k_1 w \mu - a_1 x_1 + (b_1 - x_1)u$ , y como  $\mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ , entonces  $x_1 = \bar{x}_1$ , así que este conjunto está caracterizado por  $\mu(x_2) = \mu(\bar{x}_2)$ , lo cual implica que

$$\mathcal{O}_2 = \{(x, \bar{x}, \underline{u}) \in \mathcal{O}_1 : x_2 \bar{x}_2 = 1\}. \quad (\text{C.25})$$

La proyección de  $\mathcal{O}_2$  a  $\mathcal{X}_{\underline{u}}$  es casi todo  $\mathcal{X}_{\underline{u}}$ , porque para cada  $(\mathbf{x}, \underline{u}) \in \mathcal{X}_{\underline{u}}$  es posible hallar un  $(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{u})$  correspondiente en  $\mathcal{O}_2$  (excepto por la superficie  $x_2 = 1$ ). La condición de densidad de la Definición 2.2 no se cumple, así es que considérese  $\mathcal{O}_3$ . En este caso

$$L_{\mathbf{f}_u}^2 h = -k_2 k_1 w (L_{\mathbf{f}_u} \mu - u\mu) - a_1 L_{\mathbf{f}_u}^1 h + (b_1 - L_{\mathbf{f}_u}^0 h) \dot{u} - u L_{\mathbf{f}_u}^1 h, \quad (\text{C.26})$$

donde se ha usado la relación (C.15). Como  $\mathcal{O}_3 \subset \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1$ , entonces  $L_{\mathbf{f}_u}^{i < 2} h(\mathbf{x}, \underline{u}) = L_{\mathbf{f}_u}^{i < 2} h(\bar{\mathbf{x}}, \underline{u})$  y por lo tanto  $L_{\mathbf{f}_u}^2 h(\mathbf{x}, \underline{u}) = L_{\mathbf{f}_u}^2 h(\bar{\mathbf{x}}, \underline{u})$  se reduce a la condición de que

$$L_{\mathbf{f}_u} \mu(\mathbf{x}, \underline{u}) = L_{\mathbf{f}_u} \mu(\bar{\mathbf{x}}, \underline{u}). \quad (\text{C.27})$$

Como  $x_2 \bar{x}_2 = 1$  y  $x_1 = \bar{x}_1$ , de la ecuación (C.27) se obtiene

$$\left( \frac{1}{x_2^2} - 1 \right) (-k_2 k_1 w \mu(x_2) + (b_2 - x_2)u) = (x_2^2 - 1) \left( -k_2 k_1 w \mu(x_2) + \left( b_2 - \frac{1}{x_2} \right) u \right). \quad (\text{C.28})$$

Finalmente, el conjunto  $\mathcal{O}_3$  está dado por

$$\mathcal{O}_3 = \{(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \underline{u}) \in \mathcal{O}_2 : (x_2, u) \text{ satisface (C.28)}\}. \quad (\text{C.29})$$

La proyección de  $\mathcal{O}_3$  a  $\mathcal{X}_{\underline{u}}$  es el conjunto de *puntos de entrada mala* y está dado por (después de otras manipulaciones algebraicas)

$$\mathcal{X}_{\underline{u}}^B = \left\{ (\mathbf{x}, \underline{u}) \in \mathcal{X}_{\underline{u}} : \frac{u}{w} = \frac{k_1 k_2 \mu(x_2)}{b_2 - 2x_2 / (x_2^2 + 1)} \right\}. \quad (\text{C.30})$$

El conjunto de puntos de entrada mala (6.7) está caracterizado por una sola ecuación, así que el mapa de 3-observabilidad  $\mathbf{q}_3$  es inyectivo en casi todas partes y el modelo (C.12) es 3-observable.

### C.5. Extensión de orden usando $\psi(\mathbf{x}) = \mu(x_2)$

Siguiente el procedimiento indicado por la Proposición 3.2, se escoge a  $\mu(x_2)$  como la función  $\psi(\mathbf{x})$ . Nótese que

$$\frac{d\mu}{dx_2} = \frac{\mu^2}{x_2} \left[ \left( \frac{1}{\mu} - a_2 \right) - x_2 \right] = \psi \left[ (1 - a_2 \psi) \frac{1}{x_2} - \psi \right]. \quad (\text{C.31})$$



Defínase

$$\alpha(x_3, u) = b_2u - k_2k_1wx_3, \quad \lambda(x_3) = 1 - a_2x_3, \quad (\text{C.32})$$

y propóngase la extensión

$$\dot{x}_1 = k_1wx_3 - a_1x_1 + (b_1 - x_1)u, \quad (\text{C.33})$$

$$\dot{x}_2 = \alpha - x_2u, \quad (\text{C.34})$$

$$\dot{x}_3 = x_3 \left( \frac{\lambda}{x_2} - x_3 \right) \dot{x}_2 + \eta(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot [\mu - x_3], \quad (\text{C.35})$$

$$y = x_1, \quad (\text{C.36})$$

donde la función  $\eta: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  es un *grado de libertad* empleado para hacer que la extensión sea 3-observable. Recuérdese que  $\eta$  multiplica un término que se hace cero cuando las trayectorias se encuentran en la superficie invariante  $x_3 = \psi(\mathbf{x})$ .

Es fácil ver que  $x_1 = y$ , mientras que  $x_3$  se puede expresar en términos de  $y = \dot{x}_1$ ,  $y = x_1$  y  $u$  a partir del lado derecho de (C.33). Entonces  $\dot{x}_3$  puede ser expresado en términos de  $\ddot{y}$ ,  $\dot{y}$ ,  $y$ ,  $u$  y  $\dot{u}$ , con lo cual la inyectividad del mapa de 3-observabilidad es equivalente a la inyectividad de (C.35) con respecto a  $x_2$ . El grado de libertad  $\eta$  se diseña tal que esto suceda casi en todas partes.

Primero nótese que  $1/\mu(x_2)$  es un polinomio en  $x_2$  y  $1/x_2$ , lo cual también sucede para el primer término de (C.35). Propóngase

$$\eta(\mathbf{x}, u) = \frac{\rho_0(x_1, x_3, u)}{\mu(x_2)} \quad (\text{C.37})$$

con  $\rho_0$  una función a escoger. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_3 \left( \frac{\lambda}{x_2} - x_3 \right) (\alpha - ux_2) + \rho_0 \cdot \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( x_2 + 2a_2 + \frac{1}{x_2} \right) x_3 \right] \\ &= x_3 \left( A_1x_2 - A_0 + A_{-1}\frac{1}{x_2} \right) + \rho_0\lambda, \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

donde  $A_{i=-1,0,1}$  son funciones que no dependen de  $x_2$  dadas por

$$A_1 = ux_3 - \frac{1}{2}\rho_0, \quad A_0 = u\lambda + \alpha x_3, \quad A_{-1} = \alpha\lambda - \frac{1}{2}\rho_0. \quad (\text{C.39})$$

La función  $A_0$  no importa para la inyectividad de (C.38) con respecto a  $x_2$ , mientras que  $\rho_0$  se puede escoger tal que  $A_{-1}$  o  $A_1$  desaparezca y por lo

tanto se logre la inyectividad. Escogiendo  $\rho_0 = 2\alpha\lambda$  hace que  $A_{-1} = 0$  y la extensión esté dada por

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1wx_3 - a_1x_1 + (b_1 - x_1)u, & x_1(0) = x_{1,0}, \\ \dot{x}_2 = \alpha - x_2u, & x_2(0) = x_{2,0}, \\ \dot{x}_3 = (\lambda - x_2x_3)(\alpha\lambda - ux_3) + (\lambda^2 - x_3^2)\alpha, & x_3(0) = \mu(x_{2,0}), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

Sin embargo, el mapa de 3-observabilidad de (C.40)–(C.41) es inyectivo sólo si  $x_3 \neq 0$  y  $A_1 = ux_3 - \alpha\lambda \neq 0$ . Esta condición es equivalente a (C.30) y describe el conjunto de puntos de entrada mala.

Nótese que si se escoge  $\rho_0 = 2ux_3$ , tal que  $A_1 = 0$  y  $A_{-1} = \alpha\lambda - ux_3$ , entonces se obtiene el mismo conjunto de puntos de entrada mala. La extensión que se logra es similar a (C.40)–(C.41), pero no es suave, con

$$\dot{x}_3 = x_3 \left[ (\alpha\lambda - ux_3) \frac{1}{x_2} + (u\lambda - \alpha x_3) \right]. \quad (\text{C.42})$$





## Apéndice D

# Parámetros del modelo del bioreactor

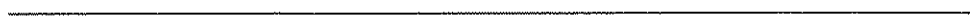
Los parámetros que se muestran en el Cuadro D.1 corresponden al modelo matemático (C.1)–(C.4) y son usados para las simulaciones de prueba de los observadores diseñados en el Capítulo 6. Se obtuvieron experimentalmente de un bioreactor piloto en el Laboratorio de Bioprocesos Ambientales del Instituto de Ingeniería de la UNAM.

$\mu^* = 0,025 \text{ [h}^{-1}\text{]}$	$S^* = 20 \text{ [mg/l]}$	$m = 2$
$S_{\text{in}} = 100 \text{ [mg/l]}$	$O_{\text{in}} = 0 \text{ [mg/l]}$	$O_{\text{sat}} = 7,8 \text{ [mg/l]}$
$K_{\text{la}} = 45 \text{ [h}^{-1}\text{]}$	$Y = 0,9$	$Y_{\text{xo}} = 0,5$
$V_{\text{min}} = 2 \text{ [l]}$	$V_{\text{max}} = 8 \text{ [l]}$	$Q_{\text{max}} = 10 \text{ [l/h]}$

Cuadro D.1: Parámetros of the bioreactor

Para las simulaciones de la Sección 6.4, el volumen inicial se supone en  $V_0 = V_{\text{min}} = 2 \text{ [l]}$  y las condiciones iniciales son

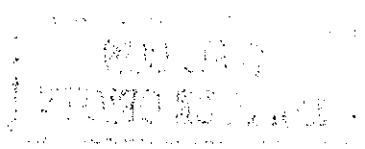
$$O_0 = 6,2 \text{ [mg/l]}, \quad S_0 = 5 \text{ [mg/l]}, \quad X_0 = 8000 \text{ [mg/l]}.$$



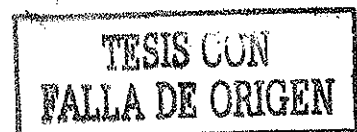
# Bibliografía

- Aeyels, D. (1981). Generic observability of differentiable systems, *SIAM J. Control and Optimization* **19**: 595–603.
- Atassi, A. y Khalil, H. (2000). Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs, *Syst. Control Lett.* **39**: 183–191.
- Bacciotti, A. (1992). *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems*, Vol. 8 of *Advances in Mathematics for Applied Sciences*, World Scientific Publishing Co, Singapore.
- Bailey, J. y Ollis, D. (1986). *Biochemical Engineering Fundamentals*, 2 edn, McGraw-Hill, New York.
- Besançon, G. (1999). A viewpoint on observability and observer design for nonlinear systems, *in* Nijmeijer y Fossen (1999), pp. 3–22.
- Besançon, G. (2000). Remarks on nonlinear adaptive observer design, *Syst. Control Lett.* **41**: 271–280.
- Besançon, G. y Hammouri, H. (1996). On uniform observation of nonuniformly observable systems, *Syst. Control Lett.* **29**: 9–19.
- Bestle, D. y Zeitz, M. (1983). Canonical form observer design for non-linear time-variable systems, *Int. J. Control* **38**: 419–431.
- Birk, J. y Zeitz, M. (1988). Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems, *Int. J. Control* **47**: 1823–1836.
- Busawon, K. y De León-Morales, J. (2000). An observer design for uniformly observable non-linear systems, *Int. J. Control* **73**: 1375–1381.
- Busawon, K., Farza, M. y Hammouri, H. (1998). Observer design for a special class of nonlinear systems, *Int. J. Control* **71**: 405–418.

- Celle, F., Gauthier, J.-P., Kazakos, D. y Sallet, G. (1989). Synthesis of nonlinear observers: A harmonic-analysis approach, *Math. Syst. Theory* **22**: 227–237.
- Celle, F., Gauthier, J.-P. y Sallet, G. (1989). Synthesis of nonlinear observers: A harmonic-analysis approach, in J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori y D. Leborgne (eds), *New Trends in Nonlinear Control Theory*, number 122 in *Lecture notes in control and information sciences*, Springer, Heidelberg, pp. 119–129.
- Cho, R. y Rajamani, R. (1997). A systematic approach to adaptive observer sythensis for nonlinear systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **42**: 534–537.
- Ciccarella, G., Dalla Mora, M. y Germani, G. (1993). A Luenberger-like observer for non linear systems, *Int. J. Control* **57**: 537–556.
- Deza, F., Bossanne, D., Busvelle, E., Gauthier, J.-P. y Rakotopara, D. (1993). Exponential observers for nonlinear systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **38**: 482–484.
- Gauthier, J.-P. y Bornard, G. (1981). Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **26**: 922–926.
- Gauthier, J.-P., Hammouri, H. y Kupka, I. (1991). Observers for nonlinear systems, *Proc. 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, England.
- Gauthier, J.-P., Hammouri, H. y Othman, S. (1992). A simple observer for nonlinear systems. Applications to bioreactors, *IEEE Trans. Automatic Control* **37**: 875–880.
- Gelb, A. (ed.) (1974). *Applied Optimal Estimation*, The Analytical Sciences Corporation, Reading.
- Glumineau, A. y López-Morales, V. (1999). Tranformation to state affine system and observer design, in Nijmeijer y Fossen (1999), pp. 59–71.
- Hammouri, H. y De León Morales, J. (1990). Observer synthesis for state-affine systems, *Proc. 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, Hawaii.
- Hammouri, H. y Gauthier, J.-P. (1988). Bilinearization up to output injection, *Syst. Control Lett.* **11**: 139–149.



- Hermann, R. y Krener, A. (1977). Nonlinear controllability and observability, *IEEE Trans. Automatic Control* **22**: 728–740.
- Hou, M., Busawon, K. y Saif, M. (2000). Observer design based on triangular form generated by injective map, *IEEE Trans. Automatic Control* **47**: 1350–1355.
- Inouye, Y. (1977). On the observability of autonomous nonlinear systems, *J. Math. Anal. Appl.* **60**: 236–247.
- Jazwinski, A. (1970). *Stochastic Processes and Filtering Theory*, Vol. 64 of *Mathematics in science and engineering*, Academic Press, New York.
- Jouan, P. y Gauthier, J.-P. (1996). Finite singularities of nonlinear systems. Output stabilization, observability and observers, *J. Dyn. Control Syst.* **2**: 255–288.
- Kazantzis, N. y Kravaris, C. (1998). Nonlinear observer design using Lyapunov's auxiliary theorem, *Syst. Control Lett.* **34**: 241–247.
- Keller, H. (1987). Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form, *Int. J. Control* **46**: 1915–1930.
- Krener, A. (1994). Nonlinear stabilizability and detectability, in U. Helmke et. al. (ed.), *Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications*, Vol. 1, Akademie Verlag, Berlin, pp. 231–250.
- Krener, A. y Isidori, A. (1983). Linearisation by output injection and nonlinear observers, *Syst. Control Lett.* **3**: 47–52.
- Krener, A. y Respondek, W. (1985). Nonlinear observers with linearizable error dynamics, *SIAM J. Control and Optimization* **23**: 197–216.
- Krener, A. y Xiao, M. (2001). Nonlinear observer design in the Siegel domain through coordinate changes, *5th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Saint Petersburg, Russia, pp. 557–562.
- Levine, J. y Marino, R. (1986). Nonlinear system immersion, observers and finite dimensional filters, *Syst. Control Lett.* **7**: 133–142.
- Lynch, S. y Bortoff, S. (2001). Nonlinear observers with approximately linear error dynamics: the multivariable case, *IEEE Trans. Automatic Control* **46**: 927–932.



- Misawa, E. y Hedrick, J. (1989). Nonlinear observers —a state-of-the-art survey, *Trans. ASME J. Dynamic Syst. Meas. Control* **111**: 344–351.
- Moreno, J. (1997). Optimal time control of sequencing batch reactors for industrial wastewater treatment, *Conference on Decision and Control (CDC)*, San Diego, California.
- Moreno, J. y Vargas, A. (2000). Approximate high gain observers for uniformly observable nonlinear systems, *Conference on Decision and Control (CDC)*, Sydney, Australia, pp. 784–789.
- Nam, K. (1997). An approximate nonlinear observer with polynomial coordinate transformation maps, *IEEE Trans. Automatic Control* **42**: 522–527.
- Nijmeijer, H. y Fossen, T. (eds) (1999). *New Directions in Nonlinear Observer Design*, number 244 in *Lecture notes in control and information sciences*, Springer, London.
- Nijmeijer, H. y van der Schaft, A. (1990). *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer, New York.
- Phelps, A. (1991). On constructing nonlinear observers, *SIAM J. Control and Optimization* **29**: 516–534.
- Rajamani, R. (1998). Observers for Lipschitz nonlinear systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **43**: 397–401.
- Rajamani, R. y Cho, Y. (1998). Existence and design of observers for nonlinear systems: relation to distance to unobservability, *Int. J. Control* **69**: 717–731.
- Reif, K., Sonnemann, F. y Unbehauen, R. (1998). An EKF-based nonlinear observer with a prescribed degree of stability, *Automatica* **34**: 1119–1123.
- Roseman, D. (1999). *Elementary Topology*, 3rd edn, Prentice-Hall, Upsaddle River.
- Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edn, McGraw-Hill, Auckland.
- Sastry, S. y Bodson, M. (1989). *Adaptive Control — Stability, Covergence and Robustness*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

- Schaffner, J. y Zeitz, M. (1999). Variants of nonlinear normal form observer design, *in* Nijmeijer y Fossen (1999), pp. 161–180.
- Schügerl, K. (1987). *Bioreaction Engineering*, Vol. 1, John Wiley & Sons, Chichester.
- Spivak, M. (1965). *Calculus on Manifolds*, Benjamin, New York.
- Sussmann, H. (1979). Single input observability of continuous time systems, *Math. Syst. Theory* **12**: 371–393.
- Thau, F. (1973). Observing the state of nonlinear dynamic systems, *Int. J. Control* **17**: 471–479.
- Tornambè, A. (1992). High-gain observers for non-linear systems, *Int. J. Syst. Sci.* **23**: 1475–1489.
- Vargas, A. (1999). *Control de tiempo óptimo de un biorreactor aerobio usando observadores no lineales*, Master's thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F., Mexico.
- Vargas, A., Moreno, J. y Zeitz, M. (2001). Nonlinear observer design strategies via observability forms, *5th IFAC Symposium Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, Saint Petersburg, Russia, pp. 539–544.
- Vargas, A., Moreno, J. y Zeitz, M. (2002). Order extension of nonlinear systems for observer design under reduced observability properties, *15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain.
- Vargas, A., Soto, G., Moreno, J. y Buitrón, G. (2000). Observer based time-optimal control of an aerobic SBR for chemical and petrochemical wastewater treatment, *Wat. Sci. Tech.* **42**: 163–170.
- von Querenburg, B. (2000). *Mengentheoretische Topologie*, 3rd edn, Springer, Berlin.
- Walcott, B., Corless, M. y Žak, S. (1987). Comparative study of non-linear state observation techniques, *Int. J. Control* **45**: 2106–2132.
- Walcott, B. y Žak, S. (1987). State observation of nonlinear uncertain dynamical systems, *IEEE Trans. Automatic Control* **32**: 166–169.
- Xia, X. y Gao, W. (1988). On exponential observers for nonlinear systems, *Syst. Control Lett.* **11**: 319–325.



*Bibliografía*

---

- Xia, X. y Zeitz, M. (1997). On nonlinear continuous observers, *Int. J. Control* **66**: 943–954.
- Zeitz, M. (1984). Observability canonical (phase-variable) form for nonlinear time-variable systems, *Int. J. Systems Science* **15**: 949–958.
- Zeitz, M. (1989). Canonical forms for nonlinear systems, *Proc. of IFAC Nonlinear Control Systems Design*, Capri, Italy, pp. 33–38.
- Zeitz, M. (1998). Nichtlineare stetige Beobachter, *ZAMM: Z. Angew. Math. Mech.* **78**(S3): 1137–1140.