

01162
6



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Diques arrecife como elementos
de protección litoral.

TESIS

Como requisito para obtener el grado de:

Maestro en Ingeniería Civil

(Hidráulica)

Presenta:

MENDOZA BALDWIN EDGAR GERARDO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. RODOLFO SILVA CASARÍN



MÉXICO, DF

NOVIEMBRE 2002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Autorizo a la Dirección General de
UNAM a difundir en formato electrónico
el contenido de mi trabajo.

NOMBRE: Edgardo
Mendoza Balderas

FECHA: 8/11/02

FIRMA: [Signature]

*A mi esposa Yazmín
por el amor y paciencia
que me has tenido todos estos años*

TESTE CON
FALLA DE ORIGEN

AGRADECIMIENTOS

Descubrir que el cumplimiento de una meta personal lleva implícito el trabajo y dedicación de muchas otras personas es por sí mismo, un gran paso. Quiero entonces reconocer a quienes, tanto o más que yo, son merecedores de este triunfo.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México por ser la MÁXIMA CASA DE ESTUDIOS, mi escuela, mi trabajo y mi hogar.

A la Facultad de Ingeniería y en especial a la División de Estudios de Posgrado, sus profesores y alumnos, por estar ahí para formarme.

Una mención especial para el Instituto de Ingeniería por brindarme la oportunidad de llegar hasta donde yo decida.

Gracias al Dr. Rodolfo Silva Casarín por las inagotables lecciones de vida misma durante todo este tiempo.

Muchas gracias a mis amigos del Grupo de Ingeniería de Costas y Puertos Georges, Juan Carlos, Megumi, Gustavo, Alberto, Diana, Paulo, Dulce y Gregorio por sus consejos y ayuda, en especial Evelyn gracias por estar conmigo en la otra vida, en esta y ojalá en la próxima. Gracias también a los que no están físicamente aquí: Gabriel, Adolfo, Roberto y Martha.

Mil gracias a mis padres y a mi hermano, su invaluable apoyo desde siempre ha sido el motor de cualquier logro en mi vida.

Y gracias a ti Señor por que he logrado aprender que separado de ti nada puedo hacer.

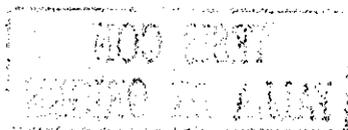
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ÍNDICE

RESUMEN	1
ÍNDICE.....	3
LISTA DE FIGURAS.....	5
LISTA DE TABLAS.....	7
LISTA DE SÍMBOLOS	9
1. INTRODUCCIÓN.....	15
1.1 Introducción.....	15
1.2 Objetivos.....	16
1.3 Organización del trabajo.....	16
2. ECUACIONES FUNDAMENTALES.....	21
2.1 Ecuación de Continuidad.....	21
2.2 Ecuación de Laplace.....	21
2.3 Ecuaciones de Navier-Stokes.....	21
2.4 Ecuaciones de Euler.....	22
2.5 Ecuación de Bernoulli.....	22
3. TEORÍA LINEAL.....	25
3.1 Condiciones de contorno.....	25
3.1.1 Condición de contorno cinemática.....	25
3.1.2 Condición de contorno dinámica.....	28
3.1.3 Condición de contorno mixta de superficie libre.....	29
3.2 Teoría de ondas de pequeña amplitud en agua sobre fondo horizontal.....	31
3.2.1 Separación de la variable profundidad.....	35
3.2.2 Condición de periodicidad espacial.....	36
3.3 Solución general.....	37
3.4 Ecuación del potencial de velocidades en 3-D.....	38
3.5 Ecuación del potencial de velocidades en 2-D.....	41
3.6 Tren de ondas propagándose en agua sobre una corriente uniforme U_0	42
3.6.1 Condición de contorno dinámica de superficie libre.....	42
3.6.2 Condición de contorno cinemática de superficie libre.....	44
3.7 Nota 1. Problema regular de Sturm-Liouville.....	45
3.8 Nota 2. Teoremas de la ecuación de Helmholtz.....	45
3.9 Nota 3. Autovalores y autofunciones del problema en la variable z con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$	46
4. ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE.....	51
4.1 Reseña histórica.....	51
4.2 Ecuación modificada de la pendiente suave.....	52
4.3 Relación de dispersión.....	58
4.4 Disipación de energía.....	59
4.4.1 Fricción de fondo.....	60
4.4.2 Rotura.....	62
4.5 Zonas de tierra.....	66
5. MODELO DE PROPAGACIÓN EN PRESENCIA DE DIQUES ARRECIFE... 69	69
5.1 Introducción.....	69
5.2 Descripción del modelo de propagación.....	70

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

5.3	Descripción del modelo de avance de playa.....	73
5.3.1	Hipótesis de partida.....	73
5.3.2	Perfil de equilibrio.....	74
5.4	Metodología.....	74
6.	RESULTADOS.....	79
6.1	Introducción.....	79
6.2	Validación.....	79
6.2.1	Comparación con datos de laboratorio.....	79
6.2.2	Comparación con datos medidos en campo.....	81
6.3	Resultados del modelo.....	83
6.3.1	Cambio en la profundidad sobre la estructura.....	83
6.3.2	Cambio en el ancho de la estructura.....	86
6.3.3	Cambio en la pendiente del dique.....	89
6.3.4	Cambio en la profundidad a pie de dique en la zona protegida.....	91
7.	CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO.....	97
7.1	Conclusiones.....	97
7.2	Futuras líneas de trabajo.....	98
	BIBLIOGRAFÍA.....	101
	ANEXO A. MMSE EN DOS DIMENSIONES.....	107



LISTA DE FIGURAS

Figura 3-1 Principales parámetros que describen el oleaje	25
Figura 3-2 Esquema del problema en el agua	32
Figura 3-3 Obtención gráfica de las raíces reales	46
Figura 3-4 Obtención gráfica de las raíces de la ecuación de la dispersión imaginarias puras de la ecuación de la dispersión	47
Figura 4-1 Perfil idealizado de la zona de rompiente para el modelo de disipación por rotura, (Dally, W. et al. 1985)	63
Figura 5-1 Esquema de una playa colgada	69
Figura 5-2 Esquema de la sección transversal del caso unidireccional	70
Figura 6-1 Comparación de resultados, caso $H=0.435\text{m}$, $T=4\text{s}$	80
Figura 6-2 Comparación de resultados, caso $H=0.375\text{m}$, $T=3\text{s}$	80
Figura 6-3 Comparación de resultados, caso $H=0.405\text{m}$, $T=2.5\text{s}$	80
Figura 6-4 Comparación de resultados, caso $H=0.54\text{m}$, $T=3.5\text{s}$	81
Figura 6-5 Comparación de resultados, caso $H=0.27\text{m}$, $T=2.5\text{s}$	81
Figura 6-6 Esquema del escenario de cambio en la profundidad sobre la estructura	83
Figura 6-7 Resultados para $A'=1.4$	84
Figura 6-8 Resultados para $A'=1.9$	84
Figura 6-9 Resultados para $A'=2.43$	85
Figura 6-10 Resultados para $A'=2.7$	85
Figura 6-11 Esquema del escenario de cambio en el ancho de cresta del dique sumergido	86
Figura 6-12 Resultados para $A'=1.4$	87
Figura 6-13 Resultados para $A'=1.9$	87
Figura 6-14 Resultados para $A'=2.4$	88
Figura 6-15 Resultados para $A'=2.7$	88
Figura 6-16 Esquema del escenario de cambio en la pendiente de los taludes	89
Figura 6-17 Resultados para $k_e h_e=0.524$	90
Figura 6-18 Resultados para $k_e h_e=0.288$	90
Figura 6-19 Esquema del escenario de cambio en la profundidad a pie de dique en la zona protegida	91
Figura 6-20 Resultados para $k_e h_e=0.524$	92
Figura 6-21 Resultados para $k_e h_e=0.412$	92
Figura 6-22 Resultados para $k_e h_e=0.340$	93
Figura 6-23 Resultados para $k_e h_e=0.288$	93
Figura 6-24 Resultados para $k_e h_e=0.252$	94

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

700 2227
LIBRE COM.
UNIVERSIDAD ALIAT

LISTA DE TABLAS

Tabla 3.1 Posibles soluciones a la ecuación de Laplace, basados en la técnica de separación de variables, Dean, y Dalrymple (1984).....	35
Tabla 3.2 Resumen de las características del oleaje para aguas intermedias.....	39
Tabla 3.3 Resumen de las características del oleaje para aguas someras.....	40
Tabla 3.4 Resumen de las características del oleaje para aguas profundas.....	41
Tabla 4.1 Valores de los factores experimentales para el modelo de disipación.....	65
Tabla 6.1 Comparación entre los resultados de avance de playa.....	82

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

700 2187
FALTA DE ORDEN
MEDIO 20 ALLAY

LISTA DE SÍMBOLOS

a	amplitud de ola rugosidad del fondo
a_x, a_y, a_z	componentes del vector aceleración
d	profundidad sobre la estructura sumergida
div	divergencia
f_B	función de disipación por fricción de fondo
f_D	función de disipación por rotura
f_w	coeficiente de fricción
$f(z)$	función de profundidad
g	aceleración debida a la fuerza de gravedad
$grad$	gradiente
h	profundidad
h_e	profundidad total a pie de dique
h_i	profundidad a pie de dique en la zona protegida
$h(x,y,z)$	representación del fondo variable
i	unidad compleja
k	número de onda vector número de onda
k_e	número de onda relativo a la profundidad h_e
k_x, k_y	componentes del vector número de onda
m	masa
n	vector unitario normal a una superficie
p	presión
q	módulo del vector número de onda
r	rugosidad de Nikuradse
\vec{r}	vector de posición
t	variable tiempo
u	componente del vector velocidad
\vec{u}	vector velocidad
u^b	velocidad en el fondo fuera de la capa límite
\hat{u}_e	amplitud efectiva de u
v	componente del vector velocidad
w	componente del vector velocidad
x	coordenada horizontal
$x(x,y)$	vector horizontal
y	coordenada horizontal
z	coordenada vertical
A	parámetro de forma amplitud de ola máxima local
A_l	parámetro de forma del material local
A_R	parámetro de forma del material de relleno
A_0	amplitud incidente
A'	relación de los parámetros de forma de relleno y local
B	ancho de berma de la estructura

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

B_0	altura de la berma de la playa
C	celeridad
C_g	celeridad de grupo
$C(x,z,t)$	función de integración
D_{50}	diámetro para el que el 50%, en peso, del material de una muestra es mayor o igual a él. Diámetro medio.
E	energía de la onda por unidad de superficie
E_c	energía cinética
E_p	energía potencial
F	vector de fuerzas
$F(x,y,z)$	representación de una superficie cualquiera
F_x, F_y, F_z	componentes del vector de fuerzas
H	altura de ola
H_a	función hamiltoniana
H_B	altura de ola de rotura
H_i	altura de ola incidente
H_r	altura de ola reflejada
$I(z)$	función de la profundidad
K	coeficiente de decaimiento
L	longitud de onda
R	coeficiente de reflexión
R_0	amplitud reflejada
T	periodo
U_0	velocidad de la corriente
U_r	parámetro de Ursell
V	vector velocidad
$\overline{W_e}$	longitud desde la costa hasta pie de dique
\overline{W}	vorticidad del flujo
X	eje coordenado
\overline{X}	sumatoria de fuerzas por unidad de masa
\overline{X}	vector de fuerzas
Y	eje coordenado
Z	eje coordenado
α	ángulo del fondo con la horizontal
	ángulo del talud del dique con la horizontal
δ	derivada variacional
$\delta(x)$	tasa de disipación de energía por unidad de superficie
ϕ	potencial de velocidades plano
ϕ^*	potencial de velocidades independiente del tiempo
$\eta(x,y,z)$	representación del desplazamiento de la superficie libre
φ	amplitud compleja
μ	viscosidad dinámica del agua
	constante de integración
θ	ángulo de incidencia del oleaje
ρ	densidad del fluido

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1000 STREET
FREDMO SO ALLAT

σ	frecuencia angular esfuerzo normal
τ	esfuerzo cortante
ν	viscosidad cinemática del agua
ω	velocidad de caída
Δx	incremento en la dirección x
Δy	avance de la playa seca
Φ	potencial de velocidades
Γ	factor de proporcionalidad
Ω	fase del movimiento ondulatorio
Re	número de Reynolds
∇	gradiente
∇_h	gradiente horizontal
$L()$	operador hamiltoniano
$\Re()$	parte real del argumento
$ $	módulo del argumento
$\langle \rangle$	valor medio del argumento en un periodo

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

NOUVEAU
SERVIR À L'ALLIANCE

RESUMEN

La preocupación por la protección de la zona litoral obedece a la necesidad de contar con áreas costeras seguras que permitan el desarrollo nacional. En este trabajo se presenta, como alternativa, el uso de diques arrecife o sumergidos los cuales, además de un bajo costo, tienen la ventaja de no impactar el entorno visual y servir de hábitat a especies marinas.

Para tal efecto, la tesis inicia presentando el desarrollo tanto de las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica como de la propagación de las ondas de pequeña amplitud. Sentadas estas bases en la suposición de flujo incompresible, homogéneo e irrotacional, es posible estudiar la interacción de las estructuras sumergidas con el oleaje, así como analizar el efecto que se produce en la estabilidad y eventual crecimiento de la playa seca.

Se presenta una metodología, para la estimación de dicho avance del perfil de playa, derivada de la combinación de un modelo de propagación de oleaje (Ecuación Modificada de la Pendiente Suave) con un modelo para el cálculo del avance de la playa seca. Esta metodología acepta que el perfil de playa tiende a un estado de equilibrio y puede ser representado con una ecuación parabólica.

Los resultados del modelo se comparan con mediciones tanto de campo como de laboratorio ofreciendo excelentes resultados.

Finalmente el modelo se utiliza para analizar la relación entre las características geométricas de la estructura sumergida, el tamaño del material de relleno y el oleaje incidente con el comportamiento del perfil de playa. Cabe mencionar que el diseño geométrico de los diques arrecife queda fuera de los alcances de este trabajo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

WOC TEST
KENDAL DE ALMA

CAPÍTULO I.
INTRODUCCIÓN

14

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Introducción

La protección costera obedece a la necesidad de contar con zonas seguras para la práctica de actividades como la generación de energía, el desarrollo portuario, la cría de especies marinas así como turísticas y recreativas. La capacidad de una localidad de mantener el equilibrio tanto en el perfil de playa como en la línea de costa es uno de los factores más importantes en la toma de decisiones respecto a la ubicación de los proyectos e infraestructura que requieren dichas actividades.

Muchos sitios costeros presentan, ya sea todo el año o estacionalmente, condiciones erosivas. Éstas pueden ser ocasionadas por causas naturales (p.e. tormentas) o como consecuencia de la disposición de estructuras en zonas aledañas. Cualquiera que sea el caso, la estabilidad o equilibrio de la playa ha de garantizarse durante la planeación de cualquier actividad y resulta urgente cuando en la zona ya existe infraestructura y corre peligro.

Entre las alternativas existentes para la consecución de la estabilidad costera se cuentan las no estructurales y las estructurales. Las primeras consisten básicamente en el relleno artificial de las zonas erosionadas, soluciones que pese a correr el riesgo de nunca alcanzar el equilibrio deseado, requieren de la existencia y de los medios de transporte de grandes cantidades de material. Sin embargo, cuando las condiciones son favorables, el material de relleno se distribuye naturalmente hacia las playas cercanas favoreciendo también su estabilidad.

Por lo que respecta a las soluciones estructurales la práctica tradicional consiste en la construcción de obras no rebasables (espigones y rompeolas) las cuales, si bien han demostrado cumplir cabalmente con el propósito de su diseño, son estructuras con costos de construcción y mantenimiento muy elevado. Por otro lado, cuando la finalidad de proteger la zona costera es el desarrollo de actividades turísticas, la existencia de grandes diques provoca un fuerte impacto visual negativo.

Una alternativa ampliamente aceptada en los años recientes es el uso de diques arrecife o sumergidos. Aún más, un tipo de solución ideal es la combinación de la disposición de un dique arrecife con un relleno artificial, de este modo, la arena que conformará el perfil de playa en equilibrio será la acarreada artificialmente en lugar de atrapar material, deteniendo así la distribución natural hacia otras playas.

Existen muchas variantes en el diseño de proyectos de protección costera con diques arrecife, entre las que se encuentran: un dique solo largo, varios segmentos, totalmente sumergidos o emergentes y de cresta larga o corta. En todo caso el principio de funcionamiento de estos diques es modificar los procesos de transporte de sedimento en la vecindad de la estructura. Esto se logra con los efectos combinados de provocar una zona

de calma y la presencia de frentes difractados en dirección a la parte protegida del dique. El resultado es una depositación de material.

En virtud de lo anterior, el presente trabajo está enfocado al estudio de la interacción entre la estructura sumergida y el oleaje, prestando especial atención a su influencia en la estabilidad y el eventual crecimiento de la playa seca.

1.2 Objetivos

Considerando lo expuesto en el apartado anterior, los principales objetivos de este trabajo son:

- Estudiar la interacción del oleaje con un dique arrecife.
- Analizar los efectos, en la estabilidad del perfil de playa, de la presencia de estructuras sumergidas.
- Aplicar los modelos de propagación de oleaje (Ecuación Modificada de la Pendiente Suave) y de avance de perfil de playa combinados, para diferentes escenarios geométricos del dique arrecife.
- Comparar dichos modelos numéricos con mediciones, tanto de laboratorio como en campo, para efectos de calibración y validación.
- Presentar una metodología simple para la estimación del crecimiento de la playa seca debida a la disposición de un dique sumergido.

1.3 Organización del trabajo

Con la finalidad de cumplir con los objetivos planteados, el presente trabajo se ha organizado de la siguiente manera:

Capítulo I. Introducción.

Se presenta la introducción, objetivos y organización del trabajo.

Capítulo II. Ecuaciones Fundamentales.

Se presenta, bajo el supuesto de fluido incompresible, homogéneo e irrotacional, el desarrollo de las ecuaciones de Laplace, Navier-Stokes y Bernoulli. Éstas sientan la base para todos los desarrollos posteriores.

Capítulo III. Teoría Lineal.

Se muestran las ecuaciones que describen la propagación de las ondas de pequeña amplitud, conocida como teoría lineal. Se presentan también tablas con las propiedades ingenieriles de dicha teoría para aguas profundas, intermedias y someras.

Capítulo IV. Ecuación de la pendiente suave.

Se presenta una breve reseña histórica de la ecuación de la pendiente suave y el desarrollo de la Ecuación Modificada de la Pendiente Suave. Siendo esta última la ecuación con la que se determina la propagación del oleaje.

Capítulo V. Modelo de propagación en presencia de diques arrecife.

Se describen el tipo de solución empleado para la Ecuación Modificada de la Pendiente Suave y los términos disipativos.

Se describe el modelo de avance de perfil de playa y se presenta la metodología para estimar el avance del perfil.

Capítulo VI. Conclusiones y futuras líneas de trabajo.

Se presentan las conclusiones a las que se llegó con este trabajo y las líneas de trabajo que quedan pendientes.

CAPÍTULO II.
ECUACIONES FUNDAMENTALES

2. ECUACIONES FUNDAMENTALES

En este capítulo se presentan las ecuaciones que sirven como base a la mecánica de fluidos y que, por tanto, son el fundamento de los desarrollos que se presentan a lo largo de todo este trabajo.

Como se verá mas adelante, la ecuación de Laplace es la ecuación de gobierno, dentro del dominio, para el problema de propagación de ondas; mientras que para determinar las condiciones en las interfaces, tanto agua-aire como agua-fondo, se utilizan las ecuaciones de Continuidad y Bernoulli. De modo que para seguir un orden lógico, en este capítulo se desarrollará la ecuación de Continuidad, a partir de la cual se deriva la de Laplace. Por otro lado, planteadas las ecuaciones de Saint Venant, se obtendrán las de Navier-Stokes y las de Euler, para finalmente determinar la ecuación de Bernoulli. Ver por ejemplo Govaere, (2002).

2.1 Ecuación de Continuidad

Aceptando el supuesto de flujo incompresible, la ecuación de continuidad puede escribirse como

$$\rho \operatorname{div} V = \operatorname{div} V = 0 \quad (2.1)$$

2.2 Ecuación de Laplace

Si se acepta la hipótesis de flujo irrotacional, se puede definir un potencial de velocidades Φ tal que

$$u = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right); v = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right); w = \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \quad (2.2)$$

con el que, a partir de (2.1) se obtiene la expresión conocida como ecuación de Laplace para flujo incompresible e irrotacional.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.3)$$

2.3 Ecuaciones de Navier-Stokes

Existen diferentes maneras de abordar el desarrollo de las ecuaciones de Navier-Stokes, para mayor detalle consultar Govaere, (2002).

Las ecuaciones de Navier-Stokes, en forma vectorial, para flujo incompresible son:

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + \bar{X} \quad (2.4)$$

2.4 Ecuaciones de Euler

La aplicación de la ecuación (2.4) depende del conocimiento de las tensiones en el fluido. La suposición más conveniente, la cual es razonablemente válida para muchos problemas relacionados con la hidráulica, es considerar que las tensiones tangenciales son iguales a cero, es decir, asumir que los efectos de fricción son relativamente pequeños y que el flujo es no viscoso. Si además se acepta que las fuerzas sobre el volumen de control por unidad de masa son $-g$ en la dirección z y cero en las direcciones x e y , el resultado son las llamadas ecuaciones de Euler

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (2.5)$$

donde g es la aceleración debida a la fuerza de gravedad.

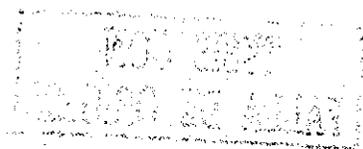
2.5 Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una forma integrada de las ecuaciones de Euler y proporciona una relación entre el campo de presiones y de cinemática. Para flujo incompresible la ecuación de Bernoulli es:

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (2.6)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO III.
TEORÍA LINEAL



3. TEORÍA LINEAL

Este capítulo trata las ecuaciones que representan la propagación de ondas de pequeña amplitud (o teoría lineal) en el agua sobre fondo horizontal impermeable. Para encontrarlas, conocida la ecuación diferencial de gobierno (Laplace), se determinan las condiciones de contorno cinemática (de fondo y superficie libre), dinámica y mixta que completan el problema.

La solución de dicha ecuación diferencial es la expresión que define el potencial de velocidades en el fluido, sin embargo, en el camino se obtendrán relaciones para el desplazamiento de la superficie libre y el número de onda (ecuación de dispersión).

Finalmente se presentan las expresiones del potencial de velocidades en dos y tres dimensiones, así como la de propagación de oleaje en presencia de corrientes.

A continuación, y a modo de introducción, se presenta un esquema con las principales características empleadas en la caracterización del oleaje.

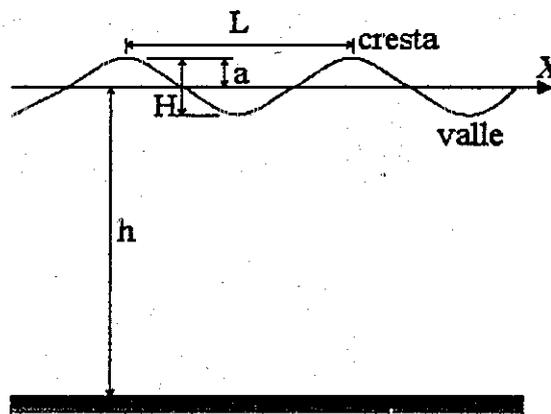


Figura 3-1 Principales parámetros que describen el oleaje

En la Figura 3-1 L es la longitud de onda, H la altura de ola, a la amplitud de onda, T el periodo y h la profundidad.

3.1 Condiciones de contorno

3.1.1 Condición de contorno cinemática

Para encontrar una expresión que represente una condición cinemática de contorno puede emplearse la ecuación que describe dicho contorno, considérese entonces que cualquier superficie fija o móvil puede ser expresada como

$$F(x, y, z, t) = 0$$



(3.1)

La dependencia del tiempo se incluye ya que el fenómeno físico en estudio, una onda propagándose en el agua, así lo manifiesta. Esto conlleva a que la derivada total de la superficie con respecto al tiempo sea cero, esto es

$$\frac{DF(x, y, z, t)}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{F(x, y, z, t)=0} = 0 \quad (3.2)$$

lo cual también puede escribirse como

$$-\frac{\partial F}{\partial t} = \bar{u} \cdot \nabla F = \bar{u} \cdot n |\nabla F| \quad (3.3)$$

donde n es un vector unitario normal a la superficie libre, definido por

$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \quad (3.4)$$

Reagrupando, la condición cinemática de contorno puede ser expresada como:

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{|\nabla F|} \quad \text{en} \quad F(x, y, z, t) = 0 \quad (3.5)$$

donde

$$|\nabla F| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} \quad (3.6)$$

3.1.1.1 Condición cinemática en el fondo

Si el fondo es impermeable

$$\bar{u} \cdot n = 0 \quad (3.7)$$

La ecuación que describe el fondo es:

$$F(x, y) = z + h(x, y) = 0 \quad (3.8)$$

Sustituyendo la ecuación (3.8) en la ecuación (3.4), se obtiene



$$n = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{\frac{\partial h}{\partial x}i + \frac{\partial h}{\partial y}j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.9)$$

Realizando el producto punto de \bar{u} por n , multiplicando por la raíz cuadrada del denominador y recordando la definición del potencial de velocidades, ec. (2.2), se obtiene

$$u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + w = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \quad (3.10)$$

de donde

$$w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = - \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \quad (3.11)$$

siendo $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Para fondo horizontal, la expresión (3.11) queda

$$w = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

Que es la condición de contorno cinemática en el fondo.

3.1.1.2 Condición cinemática en la superficie libre

La superficie libre del agua puede ser descrita por medio de la siguiente expresión

$$F(x, y, z, t) = z - \eta(x, y, t) = 0 \quad (3.13)$$

donde η es el desplazamiento de la superficie libre del agua sobre el nivel z .

Sustituyendo la ecuación (3.13) en la ecuación (3.5), se obtiene la siguiente expresión

$$\bar{u} \cdot n = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.14)$$

Por otro lado, de sustituir la ecuación (3.13) en la (3.4), se obtiene

$$n = \frac{-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + k}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.15)$$

Realizando el producto punto de \bar{u} por n , ecuación (3.15) e igualando con la ecuación (3.14), se obtiene:

$$\bar{u} \cdot n = \bar{u} \cdot \frac{\left(-\frac{\partial \eta}{\partial x} i - \frac{\partial \eta}{\partial y} j + k\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + 1}} \quad (3.16)$$

operando igual que en el caso anterior se llega a

$$w = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.17)$$

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \quad \text{en} \quad z = \eta(x, y, t) \quad (3.18)$$

La expresión (3.18) es la condición de contorno cinemática de superficie libre.

3.1.2 Condición de contorno dinámica

La ecuación de Bernoulli (2.6)

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.19)$$

que también puede ser expresada como

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (3.20)$$

define la condición dinámica de superficie libre.

Cuando el movimiento es considerado irrotacional, se desprecian los términos cuadráticos, por tanto, la solución del problema consiste en determinar la función del potencial de velocidades $\Phi(x, y, z, t)$ que satisface las condiciones de contorno en la superficie libre y en el fondo

3.1.3 Condición de contorno mixta de superficie libre

Bajo la hipótesis de fluido incompresible, ecuación (2.1), la conservación de la masa se define como

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad (3.21)$$

donde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \quad (3.22)$$

$$\bar{u} = (u, v, w) \quad (3.23)$$

La condición de irrotacionalidad en el flujo se expresa por

$$\nabla \times \bar{u} = \bar{W} = 0 \quad (3.24)$$

donde \bar{W} es la vorticidad del fluido.

Si el flujo es irrotacional, entonces se puede demostrar que existe una función potencial $\Phi(x, y, z, t)$, tal que

$$\bar{u} = -\nabla \Phi \quad (3.25)$$

Bajo este supuesto, la expresión de la conservación de la masa se puede expresar por

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.26)$$

que es la ecuación de Laplace.

Para integrar esta ecuación, se deben establecer condiciones en el contorno del dominio de integración. Estas condiciones son las que se desarrollaron en los apartados 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3.

La condición cinemática de fondo impermeable, ecuación (3.10), se expresa como

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{en} \quad z = -h(x, y) \quad (3.27)$$

La condición cinemática de superficie libre, ecuación (3.17)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \quad (3.28)$$

La condición dinámica de superficie libre a presión atmosférica, ecuación (3.20)

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + g\eta = 0 \quad \text{en } \eta(x, y, t) = 0 \quad (3.29)$$

Para obtener una condición de contorno mixta de superficie, las ecuaciones (3.28) y (3.29) se pueden combinar, para tal efecto, primero considérese la derivada total de la ecuación (3.29)

$$\begin{aligned} g \frac{d\eta}{dt} &= g \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

La cual también se puede expresar como

$$\begin{aligned} g \left(-\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) &\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.31) \\ &\quad \text{en } z = \eta(x, y, t) \end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación (3.31) en (3.28), se obtiene



$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (3.32)$$

en $z = \eta(x, y, t)$

Dado que no es posible evaluar $\eta(x, y, z, t)$ a priori, se puede hacer una estimación haciendo uso de una expansión en serie de Taylor, tal que

$$\Phi = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_m \quad (3.33)$$

$$\eta = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \eta_m \quad (3.34)$$

Donde ε es un parámetro pequeño que tiene que ser evaluado, y cada potencial de velocidades debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi_m = \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial z^2} = 0 \quad (3.35)$$

Las condiciones de contorno de superficie libre (3.29) y (3.31) se expanden en series de Taylor sobre el nivel de reposo del agua $\eta = 0$

$$\eta = -\frac{1}{g} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \quad \text{en } z = 0 \quad (3.36)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\eta^{m-1}}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad (3.37)$$

3.2 Teoría de ondas de pequeña amplitud en agua sobre fondo horizontal

La teoría de ondas de pequeña amplitud es un desarrollo lineal, por ello los términos de inercia convectivos no lineales son considerados pequeños. Es llamada teoría de pequeña amplitud porque las ecuaciones son teóricamente exactas cuando el movimiento tiende a cero. Esta asunción es extremadamente conveniente porque la elevación de la superficie

libre puede ser despreciada a priori y tal solución es válida no obstante que el movimiento del oleaje sea diferente de cero.

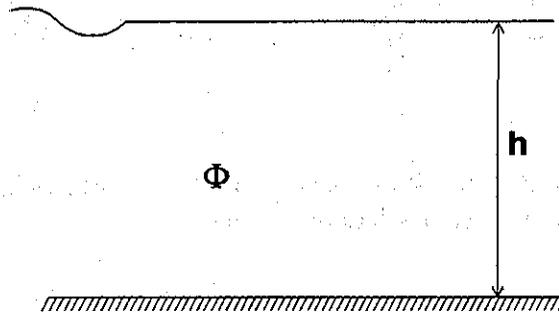


Figura 3-2 Esquema del problema en el agua

Considérese la expansión en series de Taylor de primer orden, de una onda viajando en la dirección $x(x,y)$ sobre un fondo horizontal.

Entonces $(\partial h/\partial x = 0$ y $\partial h/\partial y = 0)$ y la expresión (3.27) queda

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = -h \quad (3.38)$$

Despreciando los términos de segundo orden o mayores, las condiciones de contorno de superficie libre y dinámica (3.36) y (3.37), respectivamente, son

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad z = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (3.40)$$

Para la condición completa del dominio de integración, es necesario definir dos condiciones laterales, las cuales dependen del problema. Si el movimiento del fluido es armónico (con período T) y longitud de onda L , las condiciones laterales se reducen a una condición de periodicidad. Por ejemplo, para la propagación en el plano x es

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x + L, z, t) \quad (3.41)$$

donde $x = f(x, y)$, y la condición de periodicidad temporal puede ser considerada como una condición inicial del problema.

$$\Phi(x, z, t) = \Phi(x, z, t + T) \quad (3.42)$$

A partir de aquí, se aplica el método de separación de variables para encontrar las soluciones del problema de contorno definido por la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno en $z = 0$, $z = -h$ y las condiciones laterales. Dado que la ecuación de Laplace no incluye derivadas temporales, el problema analizado se reduce al caso de un tren periódico T ; así, la función potencial Φ se puede escribir

$$\Phi(\mathbf{x}, z, t) = \Re[\phi^*(\mathbf{x}, z)e^{i\sigma t}] \quad (3.43)$$

donde \Re indica la parte real de la función compleja y σ es la frecuencia angular, definida por

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} \quad (3.44)$$

Con lo que la ecuación de Laplace, (3.26), queda ahora en función de ϕ^*

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial z^2} = 0 \quad (3.45)$$

Es decir, en el caso y a diferencia de otras ecuaciones en derivadas parciales, la separación de la variable tiempo no ha impedido que el problema de contorno estudiado siga siendo una ecuación en derivadas parciales. Las condiciones de contorno de este problema son homogéneas para la variable z , por lo que se cumple la condición exigida para aplicar el método de separación de variables, es decir, la ecuación diferencial lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

A la vista de las condiciones del problema analizado, se considera ahora la siguiente separación de variables

$$\phi^*(\mathbf{x}, z) = \phi(\mathbf{x}) \cdot f(z) \quad (3.46)$$

donde $\phi(\mathbf{x})$ es una función todavía desconocida de las variables x e y , que se denominará potencial de velocidades plano.

Un caso particular del problema rectangular es el movimiento que se realiza en la dirección del eje x , que no está confinado en el sentido y . Este caso, que se conoce con el nombre de ondas de crestas largas, se reduce al problema en dos dimensiones (x, z) . Todos aquellos dominios o regiones que no son rectangulares o circulares no admiten una separación del potencial plano $\phi(x, y)$. Para dichos casos, esta metodología no es válida.

Sustituyendo la descomposición de la función potencial ϕ^* en la ecuación de Laplace (3.45) se obtiene

$$f(z) \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + \phi(x) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.47)$$

y dividiendo la ecuación anterior por el producto $\phi(x) f(z)$, resulta

$$\frac{1}{\phi(x)} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.48)$$

El primer término de la ecuación depende solamente de la variable x , mientras que el segundo depende solamente de z . Por tanto, es posible escribir la ecuación de la siguiente forma

$$\frac{1}{\phi(x)} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] = - \frac{1}{f(z)} \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (3.49)$$

donde k debe ser una constante. Se han obtenido de esta forma dos ecuaciones:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 \cdot f(z) = 0 \quad (3.50)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right] + k^2 \cdot \phi(x) = 0 \quad (3.51)$$

La segunda ecuación, (3.51), sigue siendo una ecuación en derivadas parciales, que se conoce con el nombre de ecuación de Helmholtz, ver apartado 3.8. La constante se ha expresado $-k^2$ porque, como se verá más adelante, de esta forma se obtiene para $k^2 > 0$ una dependencia en x que no es oscilatoria, sino exponencial (o decreciente con la profundidad). Sin embargo, más adelante se considerarán los casos $k^2 < 0$ y en ellos el movimiento en z será oscilatorio, lo cual corresponde a los llamados modos evanescentes.

Con la separación anterior se ha obtenido un problema de contorno homogéneo con condiciones de contorno homogéneas en z , ecuación (3.50). Aplicando las condiciones de contorno establecidas en las ecuaciones (3.38) y (3.40), resulta:

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = \phi \frac{df(z)}{dz} = 0; \quad \frac{df(z)}{dz} = 0 \quad z = -h \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g} \phi^* = \phi \left[\frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) \right] = 0; \quad \frac{df(z)}{dz} - \frac{\sigma^2}{g} f(z) = 0 \quad z = 0 \quad (3.53)$$

Es decir, es el problema de autovalores del tipo Sturm-Liouville, (apartado 3.7), y además es regular.

3.2.1 Separación de la variable profundidad

En la Tabla 3.1 se presentan las posibles soluciones que tiene la ecuación de Laplace. De estas, se obvia la correspondiente a $k^2 = 0$, dado que la solución sería trivial. Para incluir las soluciones imaginaria y real en una sola, la primera se puede expresar como la correspondiente a $k^2 > 0$, se define, entonces

$$k^2 = -\mu^2 \quad -\mu^2 > 0 \tag{3.54}$$

y con ello la solución se puede escribir

$$f(z) = A \cos(\mu z) + B \operatorname{sen}(\mu z) = A \cos(ikz) + B \operatorname{sen}(ikz) = Ae^{kz} + Be^{-kz} \tag{3.55}$$

Tabla 3.1 Posibles soluciones a la ecuación de Laplace, basados en la técnica de separación de variables, Dean, y Dalrymple (1984).

Carácter de la constante de separación k	Ecuación diferencial ordinaria	Solución
Real $k^2 > 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0$	$X(x) = A \cos kx + B \operatorname{sen} kx$ $Z(z) = Ce^{kz} + De^{-kz}$
$k^2 = 0$	$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$	$X(x) = Ax + B$ $Z(z) = Cz + D$
Imaginaria $k^2 < 0, k = i k $ $ k = \text{magnitud de } k$	$\frac{d^2 X}{dx^2} - k ^2 X = 0$ $\frac{d^2 Z}{dz^2} + k ^2 Z = 0$	$X(x) = Ae^{ k x} + Be^{- k x}$ $f(z) = C \cos k z + D \operatorname{sen} k z$

Adoptando la misma estructura de solución para los casos $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$, la aplicación de la condición en el fondo, ecuación (3.52), conduce a

$$k [Ae^{-kh} - Be^{kh}] = 0 \tag{3.56}$$

$$A = B e^{2kh}$$



$$\tag{3.57}$$

$$f(z) = 2Be^{kh} \left[\frac{e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}}{2} \right] = B' \cosh k(h+z) \quad (3.58)$$

Sustituyendo este valor en la condición de contorno mixta en la superficie, $z = 0$, ecuación (3.53), se obtiene:

$$B'k \operatorname{senh} kh - \frac{\sigma^2}{g} B' \cosh kh = 0 \quad (3.59)$$

o expresado de otra forma

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (3.60)$$

La ecuación (3.60) relaciona k , a partir de aquí llamado número de onda, con σ y permite identificar los autovalores del problema de contorno estudiado. Conocidos estos, se está en condiciones de analizar las soluciones del problema definido por la ecuación (3.51). La relación de dispersión, ecuación (3.60), tiene una solución real e infinitas soluciones imaginarias puras, conocidos como modos evanescentes, para k , (ver apartado 3.9).

3.2.2 Condición de periodicidad espacial

La ecuación (3.51), ahora debe de cumplir con la condición de contorno lateral dada por la condición de periodicidad espacial:

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} + L) \quad (3.61)$$

El problema en \mathbf{x} no tiene la estructura del problema regular de Sturm-Liouville, es decir, no tiene dos condiciones de contorno homogéneas y lineales. En este caso no se cumple el teorema por el cual a cada autovalor le corresponde una única autofunción. De hecho, en la resolución de la ecuación diferencial se obtienen dos autofunciones (seno y coseno) linealmente independientes para el mismo autovalor. Este problema se dice que es un problema singular (o no regular) de Sturm-Liouville y al cual se le pueden aplicar la mayoría de los teoremas correspondientes al problema regular, en particular el correspondiente a la ortogonalidad de las autofunciones; si bien para ello, en algunos casos, es necesario aplicar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Por conveniencia para desarrollos posteriores, la solución de $\phi(\mathbf{x})$ (Tabla 3.1), se escribirá en forma compleja, dada la posibilidad de aplicar el principio de superposición.

La solución adoptada en este desarrollo es

$$\phi(x) = Ae^{\pm ikx} \quad (3.62)$$

Aplicando la condición de periodicidad, (3.61), se tiene,

$$e^{\pm ikx} = e^{\pm ik(x+L)} \quad (3.63)$$

$$e^{\pm ikL} = 1 \quad (3.64)$$

dicha ecuación se puede expresar como:

$$\cos kL = 1 \quad (3.65)$$

$$\text{sen}kL = 0 \quad (3.66)$$

por tanto,

$$kL = n\pi \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (3.67)$$

Las dos soluciones iniciales, $n = 0$ y $n = 2$, corresponden a las dos primeras repeticiones del movimiento periódico, por tanto,

$$k = \frac{2\pi}{L} \quad (3.68)$$

3.3 Solución general

De la condición dinámica en el nivel medio, $z = 0$, ecuación (3.39), se obtiene una relación entre el potencial total, $\Phi(x, z, t)$, y la superficie libre, η , dada por:

$$\eta = + \frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad z = 0 \quad (3.69)$$

$$\eta = \Re \left[-\frac{i\sigma}{g} \cosh(kh) \cdot A \cdot e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (3.70)$$

Dado que se busca una solución periódica de la superficie libre que represente una onda progresiva, se define

$$\eta = \Re \left[a e^{i(kx - \sigma t)} \right] \quad (3.71)$$

donde $a = H/2$ es la amplitud del movimiento y H la altura de ola.

Comparando las expresiones (3.70) y (3.71), se obtiene:

$$A = -\frac{g}{i\sigma} \frac{a}{\cosh kh} \quad (3.72)$$

Sustituyendo (3.72) en el potencial

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{+i(kx-\sigma t)} \right] \quad (3.73)$$

tomando el signo negativo en la exponencial,

$$\Phi(x, z, t) = \Re \left[-\frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(kx-\sigma t)} \right] \quad (3.74)$$

La ecuación (3.74) es la solución general del potencial de velocidades para una onda propagándose sobre un fondo horizontal.

A partir de la ecuación (3.74), se derivan las llamadas propiedades ingenieriles de la teoría lineal, que son las expresiones con las que se determinan las características del flujo. En las Tablas 3.2 a 3.4 se presenta un resumen de dichas propiedades distinguiendo entre aguas intermedias, someras y profundas.

3.4 Ecuación del potencial de velocidades en 3-D

El caso en tres dimensiones, aunque complicado, es el más completo y el que permite simular la mayor variedad de escenarios, además de ser más cercano a la realidad.

Frecuentemente se hace uso de las expresiones de un tren de ondas propagándose oblicuamente con respecto a los ejes coordenados (x, y) . En estas condiciones, es fácil ver que el número de onda k se puede expresar como un vector $\mathbf{k}(k_x, k_y)$, cuyas componentes según los ejes coordenados son

$$k_x = |\mathbf{k}| \cos \theta \quad (3.75)$$

$$k_y = |\mathbf{k}| \sin \theta \quad (3.76)$$

$$|\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (3.77)$$

En un punto $P(x, y)$ del tren, cuya posición está dada por el vector posición, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, la fase del movimiento ondulatorio esta definida dada por :

$$\Omega = \vec{k} \cdot \vec{r} - \sigma t = k_x x + k_y y - \sigma t = \sqrt{|\mathbf{k}|^2} x + k_y y - \sigma t \quad (3.78)$$

Es común denotar k_y con λ y definir $q = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$, con lo que el potencial de un tren de ondas oblicuo es:

$$\Phi(x, y, t, z) = \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(\sqrt{k^2 - \lambda^2} x + \lambda y - \sigma t)} = \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(qx + \lambda y - \sigma t)} \quad (3.79)$$

Tabla 3.2 Resumen de las características del oleaje para aguas intermedias.

Longitud de onda	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh(kh)$
Celeridad	$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k} = \frac{gT}{2\pi} \tanh(kh)$
Celeridad de grupo	$C_g = nC = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right)$
Velocidad de las partículas: Horizontal	$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Vertical	$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$
Aceleración de las partículas: Horizontal	$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = agk \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = -agk \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Desplazamiento de las partículas: Horizontal	$\zeta = \int u dt = -a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$\xi = \int w dt = a \frac{gk}{\sigma^2} \frac{\sinh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Presión total (hidrostática + dinámica)	$p = -\rho gz + \rho g \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} \cos(kx - \sigma t)$
Flujo de energía	$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \frac{\sigma}{k} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \right]$

TESIS CON
FALLA DE OBJETIVO

Tabla 3.3 Resumen de las características del oleaje para aguas someras.

Longitud de onda	$L = T\sqrt{gh}$
Celeridad	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gh}$
Celeridad de grupo	$C_g = C = \sqrt{gh}$
Velocidad de las partículas:	
Horizontal	$u = a\sqrt{\frac{g}{h}} \cos(kx - \sigma t)$
Vertical	$w = a\sigma \left(1 + \frac{z}{h}\right) \sin(kx - \sigma t)$
Aceleración de las partículas:	
Horizontal	$a_x = a\sigma\sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$a_z = -a\sigma^2 \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(kx - \sigma t)$
Desplazamiento de las partículas:	
Horizontal	$\zeta = -a\sigma\sqrt{\frac{g}{h}} \sin(kx - \sigma t)$
Vertical	$\xi = a \left(1 + \frac{z}{h}\right) \cos(kx - \sigma t)$
Presión total (hidrostática + dinámica)	$p = -\rho gz + \rho g\eta$
Flujo de energía	$\bar{F} = \left(\frac{1}{8}\rho gH^2\right)\sqrt{gh}$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tabla 3.4 Resumen de las características del oleaje para aguas profundas.

Longitud de onda	$L = \frac{gT^2}{2\pi}$
Celeridad	$C = \frac{gT}{2\pi}$
Celeridad de grupo	$C_g = \frac{C}{2}$
Velocidad de las partículas: Horizontal Vertical	$u = a\sigma e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$ $w = a\sigma e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$
Aceleración de las partículas: Horizontal Vertical	$a_x = a\sigma^2 e^{kz} \sin(kx - \sigma t)$ $a_z = -a\sigma^2 e^{kz} \cos(kx - \sigma t)$
Desplazamiento de las partículas: Horizontal Vertical	$\zeta = -ae^{kz} \sin(kx - \sigma t)$ $\xi = ae^{kz} \cos(kx - \sigma t)$
Presión total (hidrostática + dinámica)	$p = -\rho gz + \rho g \eta e^{kz}$
Flujo de energía	$\bar{F} = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2\right) \frac{1}{2} C$

3.5 Ecuación del potencial de velocidades en 2-D

El caso más sencillo de analizar se corresponde con el problema bidimensional, donde:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 ; \quad k_y = 0 \quad (3.80)$$

Por tanto, el potencial de velocidades quedaría expresado como:

$$\Phi(x, y, t, z) = \pm \frac{ig}{\sigma} a \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh} e^{-i(kx - \sigma t)} \quad (3.81)$$

3.6 Tren de ondas propagándose en agua sobre una corriente uniforme U_0

Asúmase que el potencial de velocidades representa una corriente uniforme U_0 y una ola progresiva, la cual satisface la ecuación de Laplace

$$\phi = -U_0 x + A \cosh k(h+z) \cos(kx - \sigma t) \quad (3.82)$$

La forma de esta solución garantiza la periodicidad del oleaje en el espacio y en el tiempo y satisface la condición de contorno de no flujo a través del fondo, (3.38). La ecuación (3.82) debe cumplir con las condiciones de contorno cinemática y dinámica de superficie libre.

3.6.1 Condición de contorno dinámica de superficie libre

Dado que se asume que la amplitud de la onda es relativamente pequeña, la ecuación de Bernoulli, (3.19), se puede aproximar a

$$\left[\frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=\eta(x,t)} \approx \left[\frac{1}{2}(u^2 + w^2) + gz - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_{z=0} = C(t) \quad (3.83)$$

de la ecuación (3.82), la velocidad horizontal es

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = U_0 + Ak \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) \quad (3.84)$$

y, por lo tanto, el término u^2 es

$$u^2 = U_0^2 + 2AkU_0 \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) + A^2 k^2 \cosh^2 k(h+z) \sin^2(kx - \sigma t) \quad (3.85)$$

Bajo la premisa de que, para ondas de pequeña amplitud, la componente de velocidad horizontal (Ak) es pequeña, $(Ak)^2$ debe de ser mucho más pequeña. Por tanto, la ecuación (3.85), despreciando el último término, puede aproximarse a

$$u^2 = U_0^2 + 2AkU_0 \cosh k(h+z) \sin(kx - \sigma t) \quad (3.86)$$

Despreciando los términos cuadráticos de la velocidad vertical, ya que son del orden $(Ak)^2$, la ecuación de Bernoulli, (3.83), evaluada en $z = 0$, queda expresada como

$$\frac{1}{2} [U_0^2 + 2AkU_0 \cosh kh \sin(kx - \sigma t)] + g\eta - A\sigma \cosh kh \sin(kx - \sigma t) = C(t) \quad (3.87)$$

despejando $\eta(x, t)$

$$\eta(x, t) = -\frac{U_0^2}{2g} + \frac{A\sigma}{g} \left(1 - \frac{U_0 k}{\sigma}\right) \cosh kh \sin(kx - \sigma t) + C(t) \quad (3.88)$$

La manera de determinar el término $C(t)$, consiste, primero, en realizar un promedio espacial de la ecuación (3.88), tomando en cuenta que el valor espacial promedio de $\eta(x, z)$ y de $\sin(kx - \sigma t)$, para un tiempo arbitrario, son iguales a cero,

$$\bar{\eta}(x, t) = -\frac{U_0^2}{2g} + C(t) = 0 \quad (3.89)$$

despejando

$$C(t) = \frac{U_0^2}{2g} \quad (3.90)$$

quedando definida una ecuación para $\eta(x, z)$, de la siguiente forma

$$\eta(x, t) = \frac{A\sigma}{g} \left(1 - \frac{U_0 k}{\sigma}\right) \cosh kh \sin(kx - \sigma t) \quad (3.91)$$

Al igual que para el caso de las ondas progresivas, se define

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \sin(kx - \sigma t) \quad (3.92)$$

Sustituyendo (3.91) en (3.92), se obtiene que el valor de A es igual a:

$$A = \frac{Hg}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma) \cosh kh} \quad (3.93)$$

De esta forma, haciendo uso de las ecuaciones (3.82) y (3.93), el potencial de velocidades queda definido por la siguiente expresión:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\phi = -U_0 x + \frac{gH \cosh k(h+z) \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma) \cosh kh} \quad (3.94)$$

quedando todavía como incógnita el valor del número de onda, k .

3.6.2 Condición de contorno cinemática de superficie libre

La condición de contorno cinemática de superficie libre al primer orden, (3.28), está dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0 \quad (3.95)$$

sustituyendo las ecuaciones (3.91) y (3.94) en la (3.95), se obtiene,

$$\left[-\frac{H\sigma}{2} \cos(kx - \sigma t) \right] + \left[U_0 + \frac{gHk \cosh kh \sin(kx - \sigma t)}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma) \cosh kh} \right] \left[\frac{H}{2} k \cos(kx - \sigma t) \right] + \left[\frac{gHk \tanh kh \cos(kx - \sigma t)}{2\sigma(1 - U_0 k / \sigma)} \right] = 0 \quad (3.96)$$

dividiendo la ecuación (3.96) por $H/2 \cos(kx - \sigma t)$, y despreciando los términos del orden $(Hk)^2$, se obtiene:

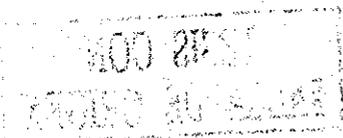
$$-\sigma + U_0 k + \frac{gk \tanh kh}{\sigma(1 - U_0 k / \sigma)} = 0 \quad (3.97)$$

despejando σ , se obtiene:

$$\sigma^2 = \frac{gk \tanh kh}{(1 - U_0 k / \sigma)^2} \quad (3.98)$$

tal que la relación de la dispersión para el caso de oleaje-corriente se puede expresar de la siguiente forma

$$\sigma^2 \left(1 - \frac{U_0 k}{\sigma} \right)^2 = gk \tanh kh \quad (3.99)$$



3.7 Nota 1. Problema regular de Sturm-Liouville

Se considera a continuación la teoría de Sturm-Liouville, cuya principal aplicación es la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales mediante el método de separación de variables.

Se conoce como problema de Sturm-Liouville al problema de contorno de segundo orden definido por:

$$[p(x)y']' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad a < x < b$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$$

$$\tau y(b) + \delta y'(b) = 0$$

donde p , p' , q y r son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ siendo a y b finitos. Además $p(x) > 0$ y $r(x) > 0$ en dicho intervalo; α , β , τ y δ no pueden ser simultáneamente cero. a , b , $p(x)$, $r(x)$, α , β , τ , δ son reales.

Se trata, pues, de un problema definido por una ecuación diferencial, lineal y homogénea, con condiciones de contorno lineales y homogéneas.

3.8 Nota 2. Teoremas de la ecuación de Helmholtz

Este problema es análogo al problema regular de autovalores de Sturm-Liouville y todos los teoremas que se dan a continuación tienen su correspondiente en el problema de una dimensión. A continuación solamente se dará el enunciado del teorema, sin entrar en su demostración que, por otra parte, es muy compleja.

- Todos los autovalores son reales.
- Existe un número infinito de autovalores. Existe un autovalor mínimo, pero no existe uno máximo.
- A un autovalor le puede corresponder más de una autofunción.
- Las autofunciones $\phi_k(x, y)$ forman un conjunto completo en el dominio en el que han sido obtenidas. Cualquier función $f(x, y)$ suave por tramos puede representarse por medio de una serie de Fourier generalizada de las autofunciones:

$$f(x, y) \sim \sum_{\lambda} a_{\lambda} \phi_{\lambda}(x, y)$$

donde el término del sumatorio expresa una combinación lineal de todas las autofunciones. La serie así obtenida converge en la medida que los coeficientes a_k se eligen correctamente.

- e. Las autofunciones pertenecientes a diferentes autovalores k_1 y k_2 son ortogonales (de peso unitario) en el dominio, es decir,

$$\iint_{\text{Dominio}} \phi_{k_1} \phi_{k_2} dx dy = 0 \quad k_1 \neq k_2$$

- f. Un autovalor k puede ser relacionado con la autofunción por medio del coeficiente de Rayleigh

$$k = \frac{-\oint \phi \nabla \phi \cdot \bar{n} ds + \iint_{\text{Dominio}} (\nabla \phi)^2 dx dy}{\iint_{\text{Dominio}} \phi^2 dx dy}$$

\bar{n} es la normal exterior y $\oint ds$ es una integral de línea cerrada sobre todo el contorno del dominio bidimensional estudiado.

3.9 Nota 3. Autovalores y autofunciones del problema en la variable z con $k^2 > 0$ y $k^2 < 0$

Las soluciones a la relación de la dispersión, ecuación (3.60), pueden obtenerse gráficamente. En la Figura 3-3 se ha dibujado kh contra las dos partes de la ecuación de la dispersión, $\sigma^2 h / gkh$ y $\tanh(kh)$. Como se puede observar, existen dos raíces reales $\pm k$ que son los dos autovalores que tienen una única autofunción, a saber, $\cosh k(h+z)$, por lo que solamente es necesario considerar la raíz positiva, denotada comúnmente como k_0 .

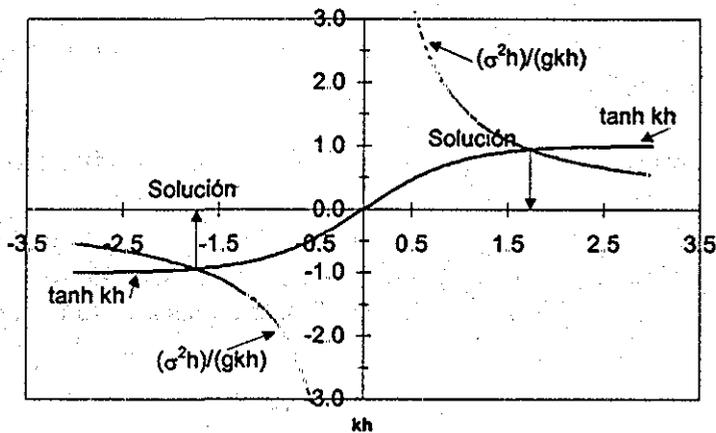


Figura 3-3 Obtención gráfica de las raíces reales

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

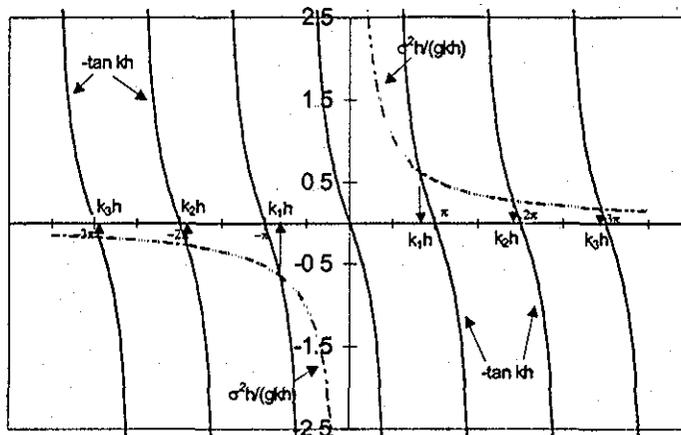


Figura 3-4 Obtención gráfica de las raíces de la ecuación de la dispersión imaginarias puras de la ecuación de la dispersión

Además, la ecuación de la dispersión tiene raíces (autovalores) imaginarias puras, correspondientes a $k^2 < 0$

$$k = i \cdot \mu$$

cuyas soluciones se pueden ver en la Figura 3-4. A diferencia de la raíz real y puesto que la función tangente tiene ramas infinitas; ahora se obtiene un número infinito de raíces $\mu = \pm k_n$, cuya correspondiente autofunción es $\cosh[ik_n(h+z)] = \cos k_n(h+z)$. Al igual que en el caso anterior, solamente se debe de usar uno de los signos. Para este caso se considerará la raíz negativa pues con ello se representan los modos oscilantes en vertical que se amortiguan al propagarse. Estas raíces se encuentran en los intervalos $\pi/2 < k_1h < \pi$, $3\pi/2 < k_2h < 2\pi, \dots; (n - 1/2)\pi < k_nh < n\pi$.

Por definición, una onda viajará una distancia de una longitud de onda L , en un periodo T . Recordando que $\sigma = 2\pi/T$ y que $k = 2\pi/L$, es evidente que la celeridad de propagación de la onda C , puede ser expresada como

$$C = \frac{L}{T} = \frac{\sigma}{k}$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

LIBRARY
UNIVERSITY OF TORONTO
100 St. George Street
Toronto, Ontario
M5S 1A5

CAPÍTULO IV.

ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE

4. ECUACIÓN DE LA PENDIENTE SUAVE

4.1 Reseña histórica

El oleaje que se aproxima a la línea de costa sobre un fondo cuya profundidad cambia lentamente, sufre transformaciones debidas a los procesos de refracción, difracción, reflexión, someramiento, presencia de corrientes y disipación de energía por turbulencia, fricción de fondo y rotura. Este fenómeno está gobernado por la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera apropiadas, problema para el que solo se han encontrado soluciones analíticas en los casos de geometrías muy simples con fronteras lineales. Como consecuencia existe una gran variedad de simplificaciones; una de las cuales consiste en eliminar la coordenada vertical integrando en la profundidad. El resultado de este procedimiento es la llamada "ecuación de la pendiente suave" derivada por primera vez por Berkhoff, (1973). Otros autores que han derivado esta ecuación son Smith y Spinks (1975), Lozano y Meyer (1976), Massel (1989) y Miles (1991).

Por su parte Massel (1993), Chamberlain y Porter (1995), Kirby y Misra (1998) y Silva et al. (2002) desarrollaron la llamada ecuación modificada de la pendiente suave, la cual, al considerar los términos de segundo orden que despreciara Berkhoff (1973), representa con mejor precisión la propagación del oleaje en presencia de batimetrías complicadas como es el caso de fondo móvil.

La ecuación modificada de la pendiente suave es una diferencial de tipo elíptico y ha sido resuelta como un problema de valores en la frontera. Algunos autores que han desarrollado soluciones son Tsai y Liu (1983) quienes utilizaron un esquema de elemento finito, otros autores han propuesto resolver la ecuación de la pendiente suave aproximándola con una ecuación de tipo parabólico o hiperbólico, entre ellos se encuentran Radder (1979), Copeland (1985), Kirby (1986b), Martin et al. (1997) y Kaihatu (2001). Este tipo de soluciones presentan principalmente dos desventajas: (Panchang et al. 1991)

- El oleaje debe tener una dirección principal y los efectos de difracción están restringidos solo a la dirección perpendicular.
- Se desprecia la componente del oleaje en la dirección contraria a la de propagación (reflejada).

Dadas las dos desventajas anteriores, estas aproximaciones no son útiles en los casos en que la batimetría o alguna estructura marítima (muros verticales) generan reflexión importante, así como en los que el ángulo de incidencia es muy variable.

Con el fin de resolver el problema en su forma elíptica, recientemente, autores como Panchang et al. (1991), Li y Anastasiou (1992) y Zhao y Anastasiou (1996) han utilizado técnicas iterativas de solución del tipo Gradiente Conjugado (CG) y Residuo Mínimo Generalizado (GMRES) adaptadas a mallas regulares; mientras que Borthwick et al. (1997)

resolvió la ecuación modificada de la pendiente suave implementado técnicas iterativas a mallas de tipo jerárquico (*quadtree*).

4.2 Ecuación modificada de la pendiente suave

El desarrollo de esta ecuación, Chamberlain y Porter (1995), supone flujo incompresible, homogéneo e irrotacional sobre un fondo $h(x, y)$, siendo x e y las coordenadas cartesianas horizontales. La coordenada vertical, z , es positiva hacia arriba y el nivel $z = 0$ se encuentra en el nivel medio del mar.

La ecuación de gobierno, Laplace, es:

$$\nabla_h^2 \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad -h(x, y) \leq z \leq 0 \quad (4.1)$$

Donde $\Phi(x, y, z, t)$ es el potencial de velocidades que describe el flujo, t es el tiempo y $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Las condiciones de frontera son similares a las utilizadas en teoría lineal, esto es

- Condiciones dinámica y cinemática de superficie libre

$$\eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad z = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad z = 0 \quad (4.3)$$

- Condición de impermeabilidad en el fondo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \nabla_h h \cdot \nabla_h \Phi = 0 \quad z = -h(x, y) \quad (4.4)$$

En la que, empleando el método de separación de variables, el potencial de velocidades se ha descompuesto en

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, t) I(z) \quad (4.5)$$

donde

$$I(z) = \frac{\cosh k(h+z)}{\cosh kh}$$

h profundidad

- k número de onda. Obtenido a partir de la relación de dispersión adecuada (ver apartado 4.3)
- φ amplitud compleja

Una forma de resolver este problema, en el que las variables dependientes son el potencial de velocidades, $\Phi(x, y, z, t)$, y el desplazamiento de la superficie libre del agua, $\eta(x, y, t)$, Chamberlain y Porter (1995) y Silva (2001), es aplicando el principio variacional de Hamilton. El cual establece que la energía total en un sistema es igual a la integral, en todo el dominio, de la suma de las energías cinética y potencial. De modo que se puede definir el operador $L(H_a)$ como

$$L(H_a) = \iint H_a dx dy = \iint (E_p + E_c) dx dy \quad (4.6)$$

donde

H_a función hamiltoniana

E_p energía potencial, definida como $E_p = \frac{1}{2} \rho g \eta^2$

E_c energía cinética, definida por $E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^0 \left[(\nabla_h \Phi)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz$

ρ densidad del agua

g aceleración debida a la fuerza de gravedad

η desplazamiento de la superficie libre del agua medido desde el nivel medio del mar

La función hamiltoniana queda entonces

$$H_a = E_c + E_p = \frac{1}{2} \rho \left[\int_{-h}^0 \left[(\nabla_h \Phi)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dz + g \eta^2 \right] \quad (4.7)$$

Si se considera la descomposición del potencial presentada en la ecuación (4.5) y aceptando que la función $I(z)$ depende de x e y , se tiene

$$\nabla_h \Phi = I \nabla_h \varphi + \varphi \nabla_h I$$

$$\nabla_h I = \frac{\partial I}{\partial h} \nabla_h h$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \varphi \frac{\partial I}{\partial z}$$

de modo que la ecuación (4.7) queda

$$H_a = \frac{1}{2} \rho \left[\int_{-h}^0 \left[(I \nabla_h \phi + \phi \nabla_h I)^2 + \left(\phi \frac{\partial I}{\partial z} \right)^2 \right] dz + g \eta^2 \right] \quad (4.8)$$

desarrollando el binomio se llega a

$$H_a = \frac{1}{2} \rho \left[I_1 (\nabla_h \phi)^2 + (I_2 + I_4) \phi^2 + 2I_3 \phi \nabla_h \phi + g \eta^2 \right] \quad (4.9)$$

donde

$$I_1 = \int_{-h}^0 I^2 dz \quad I_2 = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial I}{\partial z} \right)^2 dz \quad I_3 = \int_{-h}^0 I \nabla_h I dz \quad I_4 = \int_{-h}^0 (\nabla_h I)^2 dz$$

Por otro lado, el principio variacional puede ser expresado como

$$\delta L = \delta \iint H_a dx dy = \delta \iint (T + V) dx dy \quad (4.10)$$

donde δ denota derivada variacional, que por definición, es

$$\delta L(\eta, \Phi) = L(\eta + \delta\eta, \Phi + \delta\Phi) - L(\eta, \Phi) \quad (4.11)$$

así, aplicando la derivada variacional a la función hamiltoniana, H , se tiene

$$\begin{aligned} \delta L(\eta, \Phi) &= \\ &= \frac{1}{2} \rho \iint \left\{ g(\eta + \delta\eta)^2 + \int_{-h}^0 [\nabla(\Phi + \delta\Phi)]^2 dz \right\} dx dy - \frac{1}{2} \rho \iint \left\{ g\eta^2 + \int_{-h}^0 (\nabla\Phi)^2 dz \right\} dx dy \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. Operando y despreciando los términos de más alto orden

$$\delta L = \rho \iint \left\{ g\eta\delta\eta + \int_{-h}^0 (\nabla\{\Phi \cdot \nabla\delta\Phi\}) dz \right\} dx dy \quad (4.13)$$

Empleando la ecuación de Laplace, $\nabla^2\Phi = 0$, y separando los términos del operador nabla, el segundo término de la derecha de la ecuación (4.13) puede escribirse como

$$\int_{-h}^0 \nabla(\Phi \cdot \nabla\delta\Phi) dz = \int_{-h}^0 \nabla(\delta\Phi \nabla\Phi) dz = \int_{-h}^0 \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\delta\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) + \nabla_h (\delta\Phi \nabla_h \Phi) \right] dz \quad (4.14)$$

Buscando simplificar la expresión anterior, considérese la Ley de Leibnitz,

$$\frac{d}{dc} \int_a^b f(x,c) dx = \int_a^b \frac{d}{dc} f(x,c) dx + f(b,c) \frac{db}{dc} - f(a,c) \frac{da}{dc} \quad (4.15)$$

aplicando la cual, la ecuación (4.14) queda

$$\int_{-h}^0 \nabla(\delta\Phi \nabla\Phi) dz = \left[\delta\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right]_{-h}^0 + \nabla_h \int_{-h}^0 \delta\Phi \nabla\Phi dz - [\delta\Phi \nabla\Phi \cdot \nabla_h h]_{-h} \quad (4.16)$$

Si se acepta que el movimiento se amortigua en el infinito, el segundo término de la derecha de la ecuación anterior no interviene en la horizontal y puede despreciarse. Por tanto la expresión (4.13) resulta

$$\delta L = \rho \iint g\eta \delta\eta dx dy + \rho \iint \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\}_{z=0} \delta\Phi dx dy - \rho \iint \left\{ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \nabla\Phi \cdot \nabla_h h \right) \delta\Phi \right\}_{z=-h} dx dy \quad (4.17)$$

Aplicando la condición de contorno de impermeabilidad en el fondo, dada en (4.4) la ecuación anterior se resume a

$$\delta L = \rho \iint g\eta \delta\eta dx dy + \rho \iint \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\}_{z=0} \delta\Phi dx dy \quad (4.18)$$

Derivando lo anterior respecto de η se tiene

$$\frac{\delta L}{\delta\eta} = \rho g \eta$$

la cual, igualada con la condición dinámica de superficie libre, ec. (4.2), resulta en la primera ecuación canónica

$$\frac{\delta L}{\delta\eta} = -\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} = g\eta \quad (4.19)$$

La segunda ecuación canónica se obtiene derivando (4.18) respecto de Φ , esto es,

$$\frac{\delta L}{\delta\Phi_{z=0}} = \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

que, igualada con la condición cinemática de superficie libre, ec. (4.3), queda

$$\frac{\delta L}{\delta \Phi} = \frac{\delta L}{\delta \varphi} = \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (4.20)$$

Por otro lado, el desarrollo en serie de la derivada variacional puede escribirse como

$$\frac{\delta L}{\delta p} = \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial H}{\partial p_x} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial H}{\partial p_{xx}} \right] - \dots \quad (4.21)$$

aplicando dicha definición, término a término, a la ecuación (4.9) se tiene

$$\frac{\delta \left(I_1 (\nabla_h \varphi)^2 \right)}{\delta \varphi} = 2I_1 \nabla_h \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla_h \varphi) - \nabla_h \left[\frac{\partial I_1 (\nabla_h \varphi)^2}{\partial \nabla_h \varphi} \right] = -\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \varphi)$$

$$\frac{\delta \left((I_2 + I_4) \varphi^2 \right)}{\delta \varphi} = 2\varphi (I_2 + I_4) - \nabla_h \left[\frac{\partial (I_2 + I_4) \varphi^2}{\partial \nabla_h \varphi} \right] = 2\varphi (I_2 + I_4)$$

$$\frac{\delta (2I_3 \varphi \nabla_h \varphi)}{\delta \varphi} = 2I_3 \left[\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\nabla_h \varphi) + \nabla_h \varphi \right] - \nabla_h \left[\frac{\partial 2I_3 \varphi \nabla_h \varphi}{\partial \nabla_h \varphi} \right] = 2I_3 \nabla_h \varphi - \nabla_h (2I_3 \varphi) = -2\varphi \nabla_h \cdot I_3$$

Al sustituir estos resultados en la ecuación (4.20) queda

$$\frac{1}{\rho} \frac{\delta L}{\delta \varphi} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \varphi) + (I_2 + I_4 - \nabla_h \cdot I_3) \varphi \quad (4.22)$$

Ahora, si se deriva la expresión (4.19) respecto del tiempo

$$-\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi^2}{\partial t^2} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

y se iguala con la ecuación (4.22) se obtiene la ecuación de la pendiente suave independiente del tiempo, esto es,

$$\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla_h \cdot (I_1 \nabla_h \varphi) + (I_2 + I_4 - \nabla_h \cdot I_3) \varphi = 0 \quad (4.23)$$

Para incorporar a esta ecuación el movimiento armónico, considérese la siguiente separación del potencial de velocidades

$$\varphi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{-i\sigma t} \quad (4.24)$$

donde ϕ es el potencial de velocidades plano.

Por otro lado, multiplicando la función I_2 por ϕ se puede llegar a

$$I_2 \phi = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - I_1 k^2 \phi \quad (4.25)$$

Ahora, al derivar la función I_3 , considerando que $\nabla_h I = \frac{\partial I}{\partial h} \nabla_h h$ y aplicando la ley de Leibnitz, ec. (4.15), se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_h \cdot I_3 &= \nabla_h^2 h \cdot I_{31} + \nabla_h h \cdot \nabla_h I_{31} = \nabla_h^2 h \cdot I_{31} + \nabla_h h \cdot \left\{ \int_{-h}^0 \nabla_h \left(I \frac{\partial I}{\partial h} \right) dz + \left(I \frac{\partial I}{\partial h} \right)_{z=-h} \cdot \nabla_h h \right\} = \\ &= \nabla_h^2 h \cdot I_{31} + (\nabla_h h)^2 \cdot \left\{ \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^2 + I \cdot \frac{\partial^2 I}{\partial h^2} \right\} dz + \left(I \frac{\partial I}{\partial h} \right)_{z=-h} \end{aligned}$$

donde

$$I_{31} = \int_{-h}^0 I \frac{\partial I}{\partial h} dz$$

Reagrupando y aplicando de nuevo la ley de Leibnitz

$$\nabla_h \cdot I_3 = \nabla_h^2 h \cdot I_{31} + (\nabla_h h)^2 \frac{\partial I_{31}}{\partial h} \quad (4.26)$$

Finalmente, aplicando $\nabla_h I = \frac{\partial I}{\partial h} \nabla_h h$ en la función I_4

$$I_4 = (\nabla_h h)^2 I_{41} \quad (4.27)$$

donde

$$I_{41} = \int_{-h}^0 \left(\frac{\partial I}{\partial h} \right)^2 dz$$

Al sustituir las ecuaciones (4.25), (4.26) y (4.27) en la (4.23) se llega a la ecuación armónica de la pendiente suave

$$\nabla_h \cdot I_1 \nabla_h \phi + \mathbf{k}^2 I_1 \phi + (\nabla_h^2 h \cdot I_{31}) \phi + (\nabla_h h)^2 \left(\frac{\partial I_{31}}{\partial h} - I_{41} \right) \phi = 0 \quad (4.28)$$

Si se define la función $r(h) = \nabla_h \cdot I_3 - I_4$ la ecuación modificada de la pendiente suave (MMSE por sus siglas en ingles) es obtenida

$$\nabla_h \cdot I_1 \nabla_h \phi + (\mathbf{k}^2 I_1 + r(h)) \phi = 0 \quad (4.29)$$

Para considerar la pérdida de energía, a la ecuación anterior se le incorpora un término disipativo, el cual se detallará en el apartado 4.4, quedando

$$\nabla_h \cdot I_1 \nabla_h \phi + ((\mathbf{k}^2 - i\sigma W) I_1 + r(h)) \phi = 0 \quad (4.30)$$

donde

- W término disipativo
- σ frecuencia angular
- T periodo
- H_B altura de ola de rotura

Metodologías alternativas para encontrar la ecuación (4.30) han sido desarrolladas por diversos autores, entre los que destacan Chamberlain y Porter (1995) quienes utilizaron el método de Galerkin y Smith y Spinks (1975); Kirby (1986a), Mase y Takeba (1994) y Silva et al. (2002) quienes derivaron la ecuación modificada de la pendiente suave utilizando la segunda identidad de Green.

4.3 Relación de dispersión

El desarrollo de la ecuación modificada de la pendiente suave está basado en la teoría lineal o de Stokes (Cap. II), por lo que el modelo está restringido a condiciones en las que dicha teoría es válida. La relación de dispersión para aguas intermedias y profundas que ofrece la teoría lineal es

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4.31)$$

Una forma de medir la no linealidad del fenómeno es el número de Ursell definido como

$$Ur = \frac{HL^2}{h^3} \quad (4.32)$$

donde

- Ur número de Ursell

H altura de ola local
 L longitud de onda
 h profundidad

Cuando Ur es mayor de 40 la solución de Stokes deja de ser válida, lo cual ocurre en aguas poco profundas.

Con la finalidad de extender la aplicación del modelo a zonas con muy poca profundidad, Hedges, T.S. (1976), propuso una modificación a la relación de dispersión lineal, la cual incluye la dispersión debida a la amplitud.

$$\sigma^2 = gk \tanh \left(kh \left(1 + \frac{A}{h} \right) \right) \quad (4.33)$$

Donde A es la amplitud máxima local, calculada a partir de

$$A = |\phi| \quad (4.34)$$

En que $|\phi|$ representa la norma del potencial de velocidades

Esta relación, en aguas poco profundas, tiende a la dispersión para una onda solitaria

$$\sigma^2 = gk^2 (h + A) \quad (4.35)$$

mientras que en aguas profundas, dado que A/h tiende a cero, la ecuación (4.33) se aproxima asintóticamente a la relación lineal de dispersión, ec. (3.60),

$$\sigma^2 = gk \tanh kh \quad (4.36)$$

Por lo que la aplicación de la ecuación (4.33) supone una transición de teoría de Stokes (válida en aguas profundas) a la expresión no lineal de Hedges (válida en aguas someras) conforme se propagan las ondas.

4.4 Disipación de energía

En función de las condiciones de cada caso en estudio, será necesario considerar o no los efectos de la disipación de energía. Físicamente, cuando en algún punto del dominio, en el fondo o a lo largo de la columna de agua, se presenta disipación, el oleaje sufrirá los procesos de difracción y/o atenuación. La inclusión de un término de pérdida de energía, en un modelo de propagación fue realizado por primera vez por Booij, N (1981) y extendido por Dalrymple, R.A. et al. (1984a).

Dentro del término disipativo se pueden considerar los siguientes fenómenos:

- Amortiguamiento del oleaje por presencia de capas laminares viscosas de fondo o de superficie.
- Pérdida de energía por la presencia de capa límite turbulenta en el fondo.
- Amortiguamiento por fricción de fondo.
- Disipación de energía debida a la rotura del oleaje.

Así, el término disipativo, W , de la ecuación (4.30) está compuesto por una sumatoria de los coeficientes de disipación correspondientes a cada fenómeno. En este trabajo sólo se considera el efecto de los dos últimos, dado que son los que mas influencia tienen en el cálculo de la altura de ola.

4.4.1 Fricción de fondo.

En este apartado se describe brevemente la obtención de la función de disipación, f_B , por fricción de fondo en ausencia de corrientes.

Sea el esfuerzo cortante en el fondo

$$\tau = \frac{1}{2} f_w \rho |u^b| u^b \tag{4.37}$$

donde

- τ esfuerzo cortante en el fondo
- f_w coeficiente de fricción, adimensional. (ver 4.4.1.1)
- u^b velocidad en el fondo fuera de la capa límite

y la ecuación de momento

$$\langle \tau \cdot u^b \rangle = \rho h \langle f_B u \cdot u^b \rangle \tag{4.38}$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota el valor medio del argumento a lo largo de un periodo y la variable u es un valor característico de la velocidad horizontal, el cual no debe ser función de z . Para el caso de la ecuación modificada de la pendiente suave, la mejor opción es evaluar el vector velocidad en $z = 0$. Aunque u y u^b se consideran colineales, no necesariamente están en la misma fase, de tal suerte que pueden escribirse como

$$u(x,t) = v(x) \text{sen}(\sigma t + \alpha) \quad u^b(x,t) = v^b(x) \text{sen}(\sigma t) \tag{4.39}$$

y las funciones v y v^b se relacionan mediante

$$v^b = \frac{v}{\cosh kh} \tag{4.40}$$

Aplicando el principio de disipación equivalente la disipación durante un periodo de onda es:

$$\int_0^{T/4} dt \frac{\tau}{\rho h} u^b = \int_0^{T/4} dt f_B u \cdot u^b \quad (4.41)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.37), (4.39) y (4.40) en la (4.41) se llega a

$$f_B = \frac{1}{2} \frac{f_w}{h} \frac{|v|}{\cosh^2 kh} \frac{\langle |\sin^3 \sigma t| \rangle}{\langle \sin \sigma t \sin(\sigma t + \alpha) \rangle} \quad (4.42)$$

de donde, con $\langle |\sin^3 \sigma t| \rangle = \frac{4}{3\pi}$ y $\langle \sin \sigma t \sin(\sigma t + \alpha) \rangle = \frac{1}{2} \cos \alpha$ se llega a

$$f_B = \frac{4}{3\pi} \frac{f_w}{h} \frac{\hat{u}_e}{\cosh^2 kh} \quad (4.43)$$

donde \hat{u}_e es la amplitud efectiva de u , definida como $\hat{u}_e = |v|/\cos \alpha$, siendo α el ángulo del fondo con la horizontal. Para mayor detalle sobre la obtención de f_B ver Dingemans, Maarten (1997)

4.4.1.1 Selección del coeficiente de fricción, f_w

En los casos reales de propagación el fondo marino está formado por una gran variedad de diámetros de grano los cuales son puestos en movimiento por el flujo, este fenómeno hace que un modelo de fondo fijo sea una idealización. Sin embargo, dado que la disipación de la energía de las ondas en la superficie debida al movimiento de las partículas en el fondo no se ha estudiado lo suficiente Dingemans, Maarten (1997), el fondo fijo resulta una aceptable aproximación ingenieril.

Desde dicho punto de vista el factor de fricción, f_w , se obtiene a partir de las siguientes expresiones

- Para flujo laminar

$$f_w = 2\text{Re}^{-0.5} \quad (4.44)$$

donde Re es el número de Reynolds definido como $\text{Re} = \frac{v_b a}{\nu}$, siendo a la rugosidad de fondo y ν la viscosidad cinemática del agua. Para el cálculo de la rugosidad de fondo consultar Espinal (2002).

- Para régimen turbulento suave

$$f_w = 0.09\text{Re}^{-0.2} \quad (4.45)$$

- Para régimen turbulento, (Tomé, M 1997)

$$f_w = \begin{cases} 0.3 & \frac{\sigma r}{u} \geq 0.683 \\ \exp \left[5.5 \left(\frac{\sigma r}{u} \right)^{0.2} - 6.3 \right] & \frac{\sigma r}{u} < 0.683 \end{cases} \quad (4.46)$$

r es el parámetro de rugosidad de Nikuradse definido como $r = 2.5D_{50}$, siendo D_{50} el diámetro medio del grano.

4.4.2 Rotura

La rotura es uno de los procesos que más influye en el comportamiento hidrodinámico cerca de la costa, ya que impacta directamente en las corrientes litorales y el transporte de sedimentos. Adicionalmente, este fenómeno es en el que las ondas que se acercan a la playa pierden la mayor parte de su energía.

Son principalmente dos los factores que pueden producir la rotura de oleaje: la disminución de la profundidad y el consecuente peraltamiento de las ondas al acercarse a la costa; rotura que se produce en la llamada zona de rompientes o *surf* y la presencia de una pendiente muy pronunciada que obliga al oleaje a liberar energía.

En modelos de propagación es importante realizar un adecuado análisis de la rotura, a fin de obtener datos como la altura y profundidad de rotura, delimitar la zona de rompientes, estimar la energía perdida y la capacidad de reconstitución de las ondas en el área de estudio. La rotura del oleaje, dentro de los modelos numéricos, puede tratarse de diferentes formas, siendo las siguientes tres las más comunes

- a. Modelos que limitan la altura de ola
- b. Modelos de propagación de ondas solitarias
- c. Modelos que determinan la variación espacial de la energía del oleaje

En este trabajo, la rotura del oleaje se simula con un modelo del último tipo. La ventaja de este tipo de modelos es que pueden describir tanto la rotura como la eventual recomposición de las ondas. Esto es, en la naturaleza, una vez que una ola ha roto puede

tener la suficiente energía como para volver a iniciar el movimiento oscilatorio e inclusive volver a romper

El modelo empleado en este trabajo, y que simula dicho fenómeno, es el desarrollado por Dally, W. et al. (1985), quienes consideraron un perfil, partiendo de aguas profundas, con una inclinación suave, el cual en algún punto, ya en aguas someras, cambia a horizontal, Figura 4-1. Sobre dicho perfil, se propaga una onda con características tales que la rotura inicia justo en el punto en que el perfil se vuelve horizontal. En tales condiciones la rotura continúa hasta que la ola alcanza una altura estable y reinicia el movimiento ondulatorio, es decir, se recompone.

Este hecho ya había sido verificado experimentalmente por Horikawa, K. y C.T. Kuo (1966) en un modelo similar al de la Figura 4-1.

De acuerdo con Dally, W. et al. (1985) la ecuación que gobierna el balance de energía de una onda propagándose en la dirección del eje x es

$$\frac{\partial}{\partial x}(EC_g) = -\delta(x) \tag{4.47}$$

donde

- E energía de la onda por unidad de superficie
- C_g celeridad de grupo
- $\delta(x)$ tasa de disipación de energía por unidad de superficie

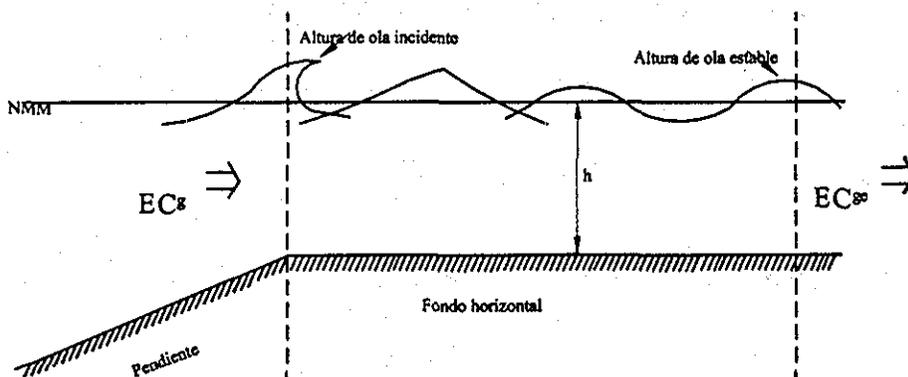


Figura 4-1 Perfil idealizado de la zona de rompiente para el modelo de disipación por rotura, (Dally, W. et al. 1985)

Por otro lado, la tasa de disipación de energía es proporcional a la diferencia entre el flujo de energía local y el flujo de energía asociado a la condición estable, esto es

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$$\frac{\partial EC_g}{\partial x} = -\frac{K}{h} (EC_g - (EC_g)_e) \quad (4.48)$$

donde

$$EC_g = \left(\frac{1}{8} \rho g H^2 \right) \sqrt{gh} \quad (4.49)$$

es el flujo de energía integrado en la vertical y promediado en el tiempo tal como lo propone la teoría lineal para aguas someras (Tabla 3.3). K es un coeficiente de decaimiento adimensional, h es la profundidad en el fondo horizontal y $(EC_g)_e$ es el flujo de energía asociado a la altura de ola que la onda rompiendo trata de alcanzar.

Los ensayos de Horikawa, K. y C.T. Kuo (1966) mostraron que la altura de ola estable se alcanza siguiendo una relación del tipo

$$H_e = \Gamma h \quad (4.50)$$

donde

H_e altura de ola estable

Γ factor de proporcionalidad con valores entre 0.35 y 0.5

Sustituyendo (4.49) y (4.50) en (4.48) se llega a

$$\frac{\partial}{\partial x} (H^2 \sqrt{h}) = -\frac{K}{h} (H^2 \sqrt{h} - \Gamma^2 h^{5/2}) \quad (4.51)$$

La expresión (4.51) es una ecuación diferencial del tipo

$$G' + P(x)G = Q(x)$$

en la que $G = H^2 \sqrt{h}$, $P(x) = K/h$ y $Q(x) = K\Gamma^2 h^{5/2}$ y cuya solución general está dada por

$$G e^{\int P(x) dx} = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} + C \quad (4.52)$$

Se tiene, entonces que

$$\int P(x)dx = K \int h^{-1} dx \quad (4.53)$$

y con ello

$$\int Qe^{\int P(x)dx} dx = K\Gamma^2 \int h^{3/2} e^{K \int h^{-1} dx} dx \quad (4.54)$$

La aplicación de este modelo de disipación depende del conocimiento de la expresión que describe la variación del fondo. Dally, W. et al. (1985) determinaron las soluciones de la ecuación (4.52) para tres casos

- Fondo plano
- Pendiente uniforme
- Perfil de equilibrio (perfil de Dean)

En todas las soluciones impusieron la condición inicial $G_{(x=0)} = H_B^2 h^{1/2}$ a fin de obligar la condición de rotura incipiente en $x=0$. El modelo fue calibrado con las mediciones de laboratorio de Horikawa, K. y C.T. Kuo (1966), los valores de Γ y K para las tres pendientes ensayadas se presentan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Valores de los factores experimentales para el modelo de disipación

Pendiente	Γ	K
1/80	0.350	0.100
1/65	0.355	0.115
1/30	0.475	0.275

Sin embargo, de acuerdo con Dally, W. et al. (1985) es conveniente utilizar como valores medios $\Gamma = 0.40$ y $K = 0.15$.

Kirby, J.T. y R. A. Dalrymple (1986) adaptaron este modelo para aplicarlo a la simplificación parabólica de la ecuación modificada de la pendiente suave empleando el término de disipación, f_D , desarrollado por Dalrymple, R.A. et al. (1984a), para ello definieron la ecuación de balance de energía como

$$\frac{\partial EC_g}{\partial x} = -f_D E \quad (4.55)$$

donde

$$f_D = \frac{KC_g}{h} \left(1 - \frac{E_e}{E} \right) \quad (4.56)$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.49) y (4.50) en la (4.56) se tiene

$$f_D = \frac{KC_g}{h} \left(1 - \frac{H_e^2}{H^2} \right) = \frac{KC_g}{h} \left(1 - \frac{(\Gamma h)^2}{H^2} \right) = \frac{KC_g}{h} \left[1 - \left(\frac{\Gamma h}{2A} \right)^2 \right] \quad (4.57)$$

donde A está definido como en la ecuación (4.34), H corresponde a la altura de ola de rotura y f_D es el factor de disipación incluido en la simplificación parabólica, Kirby, J.T. y R. A. Dalrymple (1994).

Con el fin de aplicar el mismo modelo de disipación en la ecuación modificada de la pendiente suave, ecuación (4.29), Silva C., Rodolfo et al. (2002) modificaron f_D para incluirlo dentro del término multiplicado por la función I_1 . Así, dividiendo por CC_g y tomando $K = 0.15$ y $\Gamma = 0.4$ se llega a

$$f_D = \frac{0.15k}{\sigma h} \left[1 - \left(\frac{0.4h}{H_B} \right)^2 \right] \quad (4.58)$$

El modelo de propagación empleado en este trabajo considera que cuando $H < 0.78h$ no se presenta rotura, por tanto $f_D = 0$. Cuando $H \geq 0.78h$ inicia la rotura y f_D se calcula a partir de (4.58). La rotura continua hasta que $H < 0.78h$, donde f_D vuelve a ser nulo, de modo que la ola reconstituida sigue propagándose hasta eventualmente volver a romper, es decir, el cálculo de la disipación de energía por rotura es iterativo.

4.5 Zonas de tierra

La existencia de islas o costas que sobresalen de la superficie libre del mar pueden generar zonas de rotura. Estas formaciones se tratan con la llamada "técnica de la película delgada" Dalrymple, R. A. et al. (1984b), la cual consiste en sustituir las zonas de tierra por bajos con profundidades muy pequeñas (del orden de un centímetro), esto se traduce en ondas pasando sobre el bajo con tan poca energía que resulta despreciable. Con esta técnica se logra que el modelo calcule en un solo paso tanto las islas como las zonas de aguas profundas, a la vez que considera la acción de las mismas en el flujo y se evitan inestabilidades numéricas durante la solución.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO V.

**MODELO DE PROPAGACIÓN EN
PRESENCIA DE DIQUES ARRECIFE**

...
...
...
...
...

...
...
...
...
...

5. MODELO DE PROPAGACIÓN EN PRESENCIA DE DIQUES ARRECIFE

5.1 Introducción

Existe una gran variedad de metodologías para favorecer o mantener el equilibrio de una playa, incluido el eventual crecimiento de la misma. Comúnmente se busca ejercer acciones que tiendan a disminuir la energía de oleaje incidente como son la construcción de espigones y rompeolas no rebasables soluciones que, como ya se dijo, además de ser de muy alto costo, provocan un impacto visual negativo en la zona. Como alternativa, en este trabajo se considera el efecto de construir una estructura longitudinal sumergida o dique arrecife, es decir, aquella cuya cota de coronación se encuentra por debajo del nivel medio del mar; con la finalidad de soportar el perfil existente o, en su caso, un nuevo perfil generado naturalmente o por un relleno artificial.

La nueva playa, así generada, se conoce con el nombre de playa colgada la cual puede definirse también como una playa cuyo perfil presenta una discontinuidad provocada por la estructura sumergida que a la vez la soporta. Este tipo de solución permite extender o crear zonas costeras útiles tanto para desarrollo comercial como para actividades recreativas. La Figura 5-1 muestra un esquema de este tipo de playas.

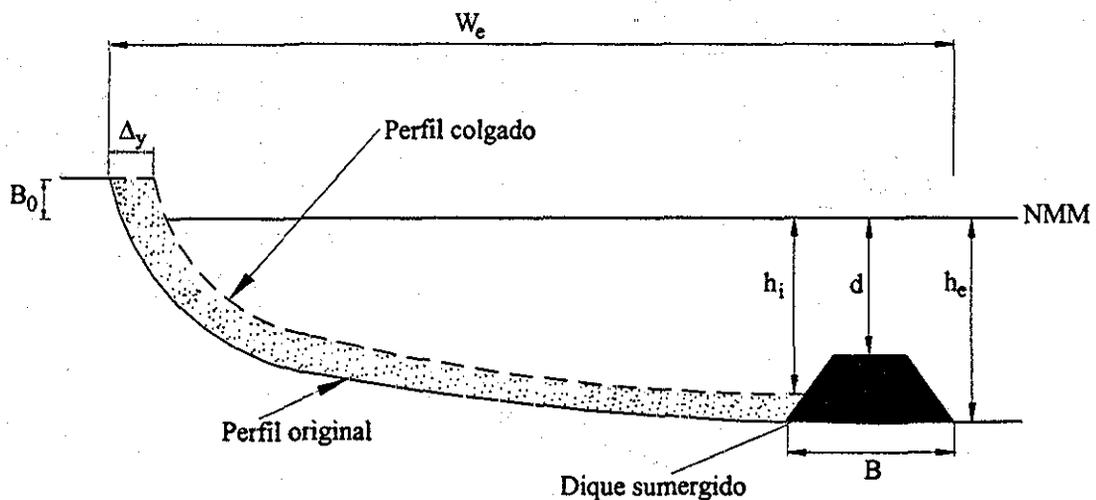


Figura 5-1 Esquema de una playa colgada

En la Figura 5-1

- Δ_y avance de la playa
- B_0 altura de la berma de la playa
- h_i profundidad a pie de dique dentro de la zona protegida
- d profundidad sobre la corona

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- h_e profundidad a pie de dique en la zona expuesta
- B ancho de la estructura
- W_e distancia desde la línea de costa original hasta pie de dique en la zona expuesta

El diseño de una playa colgada incluye tanto la estabilidad de la estructura sumergida como la del nuevo perfil de playa. Por lo que respecta a la estabilidad del dique, lo cual queda fuera de los alcances de este trabajo, se recomienda consultar Pope, J. y J.L Dean (1986) y Vidal, C. et al. (1995).

En este capítulo se presentan los modelos que permiten conocer la hidrodinámica inducida por el dique arrecife, vía la ecuación modificada de la pendiente suave, así como las características del perfil de playa resultante en la zona protegida.

5.2 Descripción del modelo de propagación

Inicialmente se estudiará el caso en el que el gradiente del fondo en la dirección del eje y es nulo, esto es equivalente a considerar una onda plana que se propaga sobre un fondo impermeable cuya única variación espacial es en el sentido de la propagación.

En la Figura 5-2 se muestra un esquema de este problema, en el que el eje y es perpendicular al plano dibujado.

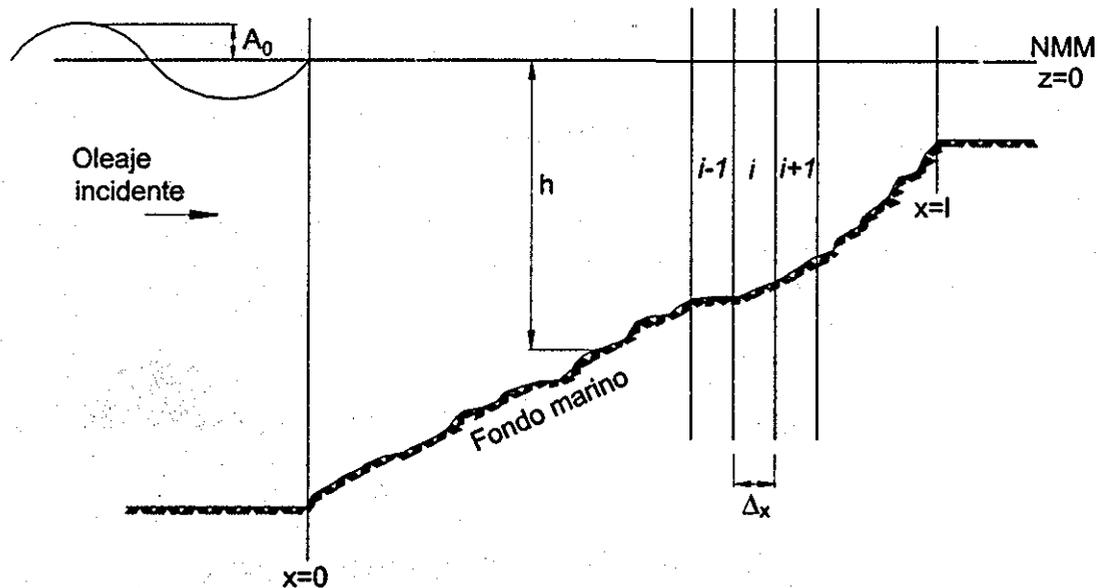


Figura 5-2 Esquema de la sección transversal del caso unidireccional

La ecuación de gobierno en la zona de interés, $0 < x < l$, es la expresión (4.30), a saber,

$$\nabla_h \cdot I_1 \nabla_h \phi + ((k^2 - i\sigma W) I_1 + r(h)) \phi = 0$$



en la que, dadas las características del caso, $\partial h/\partial x = 0$ por lo que $\nabla_h = (\partial/\partial x)$.

Las características de las fronteras, para este caso, son las siguientes

- En la frontera mar adentro, $x = 0$, se asume la llegada de una onda incidente, de amplitud A_0 , que se propaga desde $x = -\infty$ sobre un fondo plano. Adicionalmente, el potencial de velocidades en $x \leq 0$ está compuesto por la superposición de una onda incidente de amplitud A_0 y una reflejada de amplitud R_0 , esto es,

$$\phi_{x \leq 0} = A_0 I e^{-ikx} + R_0 I e^{ikx} \quad (5.1)$$

- La frontera cerca de la línea de costa, $x = l$, se considera no reflejante por lo que la amplitud en ese punto es la transmitida a través de toda la zona de estudio, T_0 . Se asume que el fondo luego de este punto es plano.

$$\phi_{x=l} = T_0 I e^{-ikx} \quad (5.2)$$

Para encontrar las ecuaciones en las fronteras, debe cumplirse continuidad entre las zonas justo antes del dominio y al inicio del mismo. Es decir, ha de existir igualdad de presiones e igualdad de flujo de masa, lo cual puede expresarse como:

$$\text{En } x = 0 \quad \phi_1 = \phi_2$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$$

$$\text{En } x = l \quad \phi_2 = \phi_3$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial \phi_3}{\partial x}$$

donde

$$\phi_1 = A_0 I_1 e^{-ikx} + R_0 I_1 e^{ikx} \quad (x \leq 0) \quad (5.3)$$

$$\phi_2 = I_2 \phi \quad (0 < x < l) \quad (5.4)$$

$$\phi_3 = T_0 I_3 e^{-ikx} \quad (x \geq l) \quad (5.5)$$

En la frontera mar adentro, igualando (5.3) y (5.4) se tiene

$$A_0 I_1 e^{-ikx} + R_0 I_1 e^{ikx} = I_2 \phi \quad (5.6)$$

Por otro lado, derivando las mismas ecuaciones igualando

$$-ik(A_0 I_1 e^{-ikx} - R_0 I_1 e^{ikx}) = I_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial I_2}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.7)$$

ya que, por haberse asumido fondo plano en $x \leq 0$, se cumple que $\frac{\partial I_1}{\partial x} = 0$. Además, es

conveniente recordar que $\nabla_h I = \frac{\partial I}{\partial h} \nabla_h h$.

Al sustituir (5.6) en (5.7) y evaluar en $x = 0$ se llega a

$$-ik(2A_0 I_1 - I_2 \phi) = I_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial I_2}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.8)$$

Ortogonalizando e integrando desde $z = -h$ hasta $z = 0$ se obtiene

$$-ik(2A_0 X - X\phi) = X \frac{\partial \phi}{\partial x} + Y\phi \frac{\partial h}{\partial x} \quad (5.9)$$

donde $X = \int_{-h}^0 I(z) I(z) dz$ $Y = \int_{-h}^0 I(z) \frac{\partial I(z)}{\partial h} dz$, las cuales coinciden,

respectivamente, con las funciones I_1 e I_{31} definidas en el apartado 4.2.

Finalmente, dividiendo por I_1 , la ecuación correspondiente a la frontera mar adentro es obtenida

$$-ik\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{I_{31}}{I_1} \frac{\partial h}{\partial x} \phi = -2ikA_0 \quad (5.10)$$

Operando de la misma forma las ecuaciones (5.4) y (5.5) se obtiene la expresión correspondiente a la frontera cerca de la línea de costa, esto es

$$ik\phi + \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{I_{31}}{I_1} \right) \phi = 0 \quad (5.11)$$

Con el fin de implementar un esquema numérico en la zona de estudio, el dominio se divide en dovelas separadas una distancia Δx (ver Figura 5-2), constante para este trabajo, en las que ϕ_i representa el valor del potencial de velocidades plano en toda la dovela i . Es

decir, la discretización en diferencias finitas de la ecuación (4.30) se realiza en esquema centrado.

La ecuación (4.30) discretizada para el caso unidireccional es

$$\left(\frac{I_1^{i+1/2}}{\Delta_x^2}\right)\phi^{i+1} + \left(\frac{I_1^{i-1/2}}{\Delta_x^2}\right)\phi^{i-1} + \left(-\frac{I_1^{i+1/2}}{\Delta_x^2} - \frac{I_1^{i-1/2}}{\Delta_x^2} + (\mathbf{k}^2 - i\alpha f_D)^i I_1^i + r(h)^i\right)\phi^i = 0 \quad (5.12)$$

y las ecuaciones (5.10) y (5.11), respectivamente son

$$\left(\frac{1}{\Delta_x}\right)\phi^{i+1} + \left(\left(\frac{I_{31}}{I_1}\right)^i \frac{h^{i+1/2} - h^{i-1/2}}{\Delta_x} + \frac{1}{\Delta_x} - i\mathbf{k}^i\right)\phi^i = -2i\mathbf{k}A_0 \quad (5.13)$$

$$-\left(\frac{1}{\Delta_x}\right)\phi^{i-1} + \left(\left(\frac{I_{31}}{I_1}\right)^i \frac{h^{i+1/2} - h^{i-1/2}}{\Delta_x} + \frac{1}{\Delta_x} + i\mathbf{k}^i\right)\phi^i = 0 \quad (5.14)$$

Las expresiones (5.12) a (5.13) generan un sistema de ecuaciones lineales del tipo $Ax = b$ cuya matriz de coeficientes es compleja y tridiagonal, característica que facilita su resolución. Es importante notar que el vector de términos independientes tiene como único elemento no nulo el correspondiente a la frontera mar adentro, siendo éste el único elemento en donde se indica al sistema la amplitud incidente.

El vector solución del sistema de ecuaciones contiene el potencial de velocidades plano en cada una de las dovelas del dominio.

5.3 Descripción del modelo de avance de playa

Además de proporcionar apoyo al perfil de playa, el principal objetivo de la disposición de un dique arrecife es reducir la energía del oleaje mediante la reflexión que produce, esto se traduce en una disminución de la altura de ola y consecuentemente en avance de la playa seca. En este apartado se describe un modelo que, en función de dicha reflexión permite determinar el avance de la playa.

5.3.1 Hipótesis de partida

- El dique sumergido es lo bastante angosto, $B \ll L$, donde L es la longitud de onda, tal que su único efecto sobre el oleaje incidente es la reflexión de parte de su energía.
- Solo la parte del movimiento oscilatorio que no esta involucrado en el proceso de rotura contribuye a la reflexión.
- Sobre la corona del dique arrecife se permite una altura de ola ($H > 0.78h$) dado que la ola no tiene la distancia suficiente para acomodarse a la nueva profundidad.

- Una playa responde a las fuerzas del oleaje ajustando su forma a un perfil de equilibrio o constante distinto para cada oleaje incidente y tamaño del sedimento.

5.3.2 Perfil de equilibrio

Como se dijo antes, un perfil de equilibrio es la forma que adquiere la playa para un oleaje y tamaño del sedimento dados, ya que, aunque Dean (1977) mostró que la forma del perfil solo depende del tamaño del grano; es la altura de ola quien determina la posición de la línea de costa.

La expresión propuesta Bruun (1954) y Dean (1977), que es también la más utilizada para simular perfiles de equilibrio, es la siguiente

$$h = Ax^{2/3} \quad (5.15)$$

donde

- h profundidad
 x distancia desde la costa hacia mar adentro
 A parámetro de forma

En este trabajo el parámetro A se determina de la siguiente forma González (1995)

$$A = 0.51\omega^{0.44}$$

donde ω es la velocidad de caída del sedimento calculada a partir de

$$\omega = \begin{cases} 1.1 \cdot 10^6 D_{50}^2 & D_{50} < 0.1 \text{ mm} \\ 273 D_{50}^{1.1} & 0.1 \text{ mm} \leq D_{50} \leq 1 \text{ mm} \\ 4.36 D_{50}^{0.5} & D_{50} > 1 \text{ mm} \end{cases}$$

5.4 Metodología

Conocidos el perfil de equilibrio de la playa, las características geométricas de la estructura sumergida y el clima marítimo es posible determinar el coeficiente de reflexión a pie de dique en la zona expuesta. A partir de dicho coeficiente se calcula la profundidad a pie de dique en la zona de calma con la expresión: (González et al. 1999)

$$h_t = h_e (1 - R)^{2/5} \quad (5.16)$$

donde

- R coeficiente de reflexión

El coeficiente de reflexión es por definición $R = H_r/H_i$, donde H_r y H_i son la altura de ola reflejada e incidente, respectivamente. Éste se estima a partir del potencial de velocidades obtenido del modelo de propagación de la siguiente forma:

El potencial total en la dovela correspondiente a pie de dique es

$$\phi = A_0 I e^{-ikx} + R_0 I e^{ikx} \quad (5.17)$$

Derivando la ecuación (5.17) y evaluando en $x = 0$ se obtiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik(-A_0 + R_0) \quad (5.18)$$

Sustituyendo la ecuación (5.17) en la (5.18) se llega a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + ik\phi - 2ikR_0 = 0 \quad (5.19)$$

De donde, despejando la amplitud reflejada y para el caso en que la altura de ola incidente es unitaria se tiene

$$R = R_0 = \frac{1}{2} \left[\frac{-i}{k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \phi \right] \quad (5.20)$$

Considerando la nueva profundidad h_i se calcula el nuevo perfil de playa y con ello se determina de nuevo la reflexión y se repite el proceso hasta que el coeficiente de reflexión y h_i converjan. Es de notar que el perfil de equilibrio de la playa colgada ha de calcularse con el tamaño de grano correspondiente al material del relleno.

Una vez encontrado el valor de h_i y su correspondiente perfil de equilibrio el avance de playa, Δ_y , se calcula a partir de

$$\Delta_y = W_e - B - x \quad (5.21)$$

en la que x es la distancia desde la costa hasta pie de dique estimada a partir de la expresión del perfil de equilibrio como

$$x = \left(\frac{h_i}{A} \right)^{3/2} \quad (5.22)$$

En resumen, la metodología para encontrar el perfil de equilibrio de playas en presencia de diques arrecife es la siguiente

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- Conocidas la características geométricas del dique, el tamaño del sedimento tanto local como de relleno y el oleaje incidente calcular el coeficiente de reflexión, ec. (5.20).
- Utilizando la expresión (5.16) calcular los nuevos h_i y perfil de equilibrio.
- Repetir los dos primeros pasos hasta que R y h_i converjan.
- Determinar el avance de playa con la ecuación (5.21)



CAPÍTULO VI.

RESULTADOS

...
...
...

6. RESULTADOS

6.1 Introducción

Una vez descritos los modelos con que se estudia la interacción entre los diques arrecife y el oleaje, es posible evaluar su funcionamiento como elementos de protección costera. Para tal efecto se presentan los resultados que ofrecen los modelos combinados de propagación y avance de playa.

Este capítulo está dividido en dos partes: la primera referente a la validación del modelo, es decir, se comparan los resultados obtenidos con datos medidos tanto en laboratorio como en campo; mientras que en la segunda se presentan relaciones entre diferentes características tanto del oleaje como de la geometría del dique sumergido con el comportamiento del perfil de playa en la zona protegida.

6.2 Validación

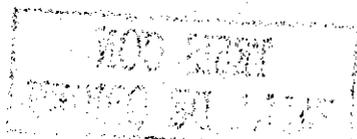
6.2.1 Comparación con datos de laboratorio

Las mediciones consideradas en este apartado son las realizadas por Tomé, M (1997). El modelo físico de Tomé es un canal con fondo impermeable (concreto) sobre el que se dispuso un dique de escollera sumergido. La parte más profunda del canal es de 3.06 m y la pendiente del fondo es 1:15. La profundidad a pie de dique es 1.5m, el talud en ambos lados del mismo es 1:1.5 y la profundidad sobre la corona del dique es de 0.38m. Tomé realizó ensayos con oleaje regular e irregular, sin embargo, en este trabajo solo se compararán los casos de oleaje regular.

Este modelo físico, dadas sus características, permite analizar el comportamiento del término de disipación por fricción de fondo, ya que el fondo de concreto puede idealizarse como liso y solo las piezas de la estructura provocarán dicha disipación. De tal suerte que es posible comparar los resultados obtenidos incluyendo solo la disipación por rotura con los resultados incluyendo ambos términos.

En las Figura 6-1 a la Figura 6-5 se presentan los resultados del modelo de propagación de oleaje incluidos los términos de disipación por rotura y por fondo, junto con las mediciones de laboratorio. En ellas se muestran los puntos de superficie libre máxima medidos por Tomé y dos líneas, la discontinua es el resultado del modelo considerando solo el término de disipación por rotura y la línea discontinua representa los valores obtenidos utilizando ambos términos disipativos.

El oleaje viaja de izquierda a derecha y tanto la altura de ola incidente como el periodo se reportan en cada figura. Debajo de cada comparación se ha colocado la línea del fondo con el fin de ubicar la posición de la estructura y detectar así el efecto de la misma sobre el



ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

oleaje, esto es, la reflexión, la eventual rotura y la recomposición de la onda luego de romper.

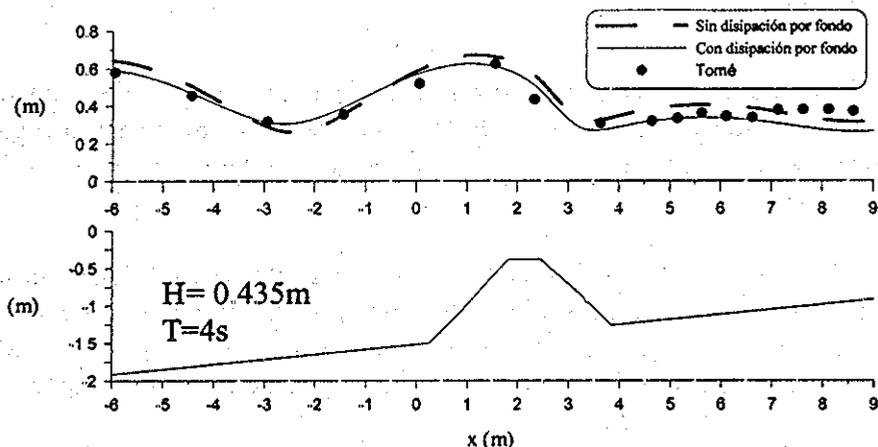


Figura 6-1 Comparación de resultados, caso H=0.435m, T=4s

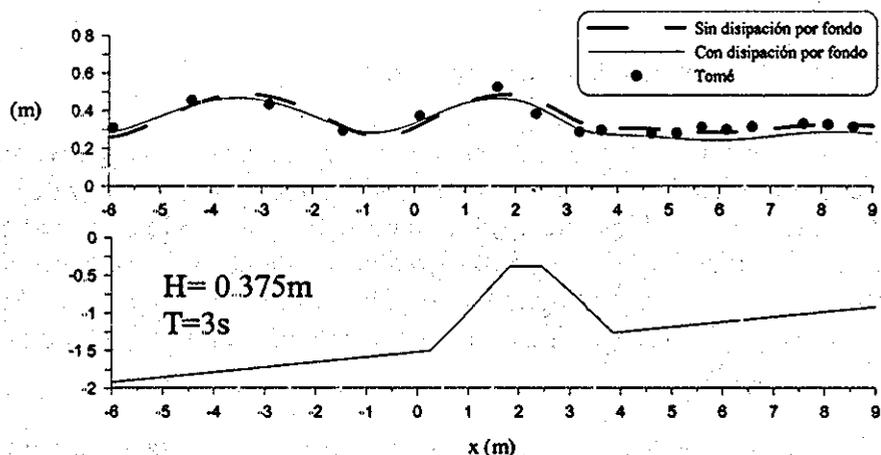


Figura 6-2 Comparación de resultados, caso H=0.375m, T=3s

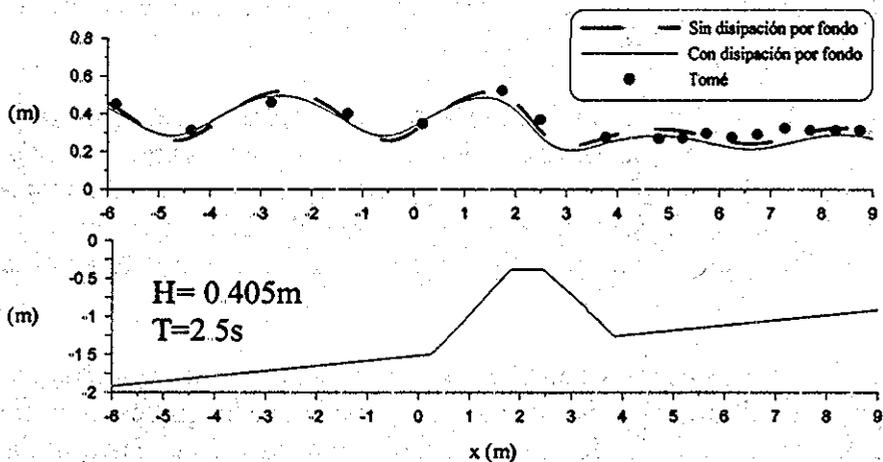


Figura 6-3 Comparación de resultados, caso H=0.405m, T=2.5s

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

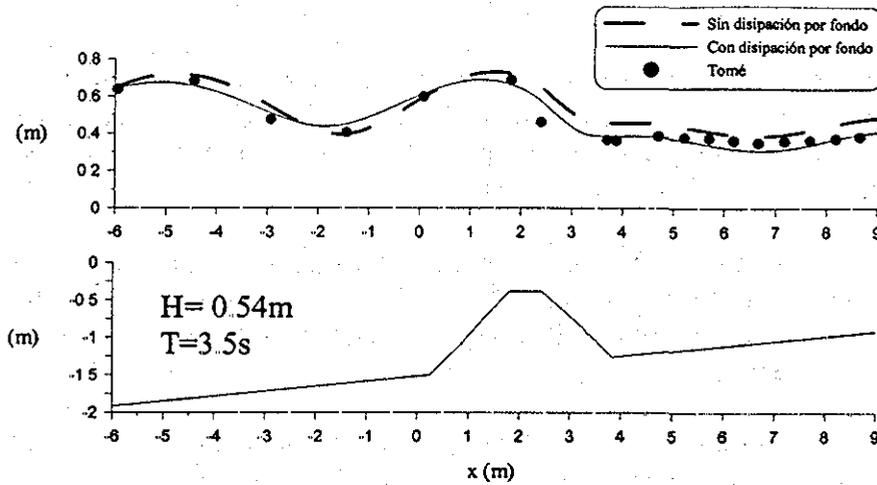


Figura 6-4 Comparación de resultados, caso $H=0.54m$, $T=3.5s$

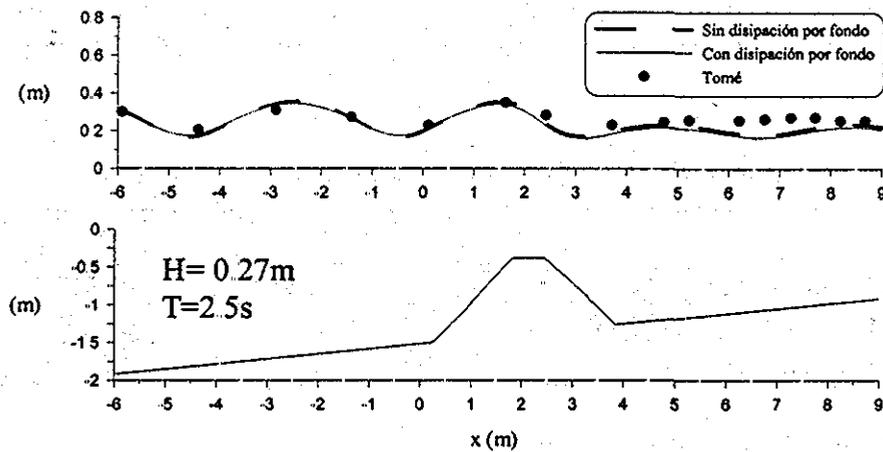


Figura 6-5 Comparación de resultados, caso $H=0.27m$, $T=2.5s$

De las figuras anteriores es claro que el término de disipación por fricción de fondo, como se esperaba, disminuye los valores de la altura de ola. Esta atenuación del oleaje, en general, mejora el ajuste del modelo con respecto al caso en que solo se considera disipación por rotura, sin embargo, en la mayoría de los casos el punto de máximo peraltamiento de la onda resulta subestimado.

Es de notar que aunque después de la rotura el ajuste no es perfecto, el modelo simula bastante bien la reconstitución de la onda, lo que se observa en la recuperación de la forma sinusoidal.

6.2.2 Comparación con datos medidos en campo

En este apartado se verifican los resultados de la metodología presentada en el inciso 5.4 para estimar el nuevo perfil de equilibrio en playas debido a la presencia de un dique arrecife.



Las mediciones en campo son las realizadas por Ferrante et al. (1992) en un proyecto de relleno artificial de playa soportado por un dique arrecife. Este mismo proyecto fue estudiado por González et al. (1999) quien desarrolló un modelo matemático para el cálculo de perfiles de equilibrio en playas colgadas.

El dique se construyó a 150m de la playa a una profundidad de 4m. La estructura tiene un ancho de berma de 15m y la profundidad sobre la misma es de 1.5m. El talud del dique es 1:5 y está hecho de escollera. El diámetro medio original del perfil es de 0.1mm y el del relleno es de 0.6mm

Para la simulación, se acepta que el perfil de playa local puede representarse adecuadamente por un perfil Dean (ecuación 4.15), la aplicación del cual supone ampliar el perfil original ya que no está completo.

La Tabla 6.1 muestra una comparación entre los datos calculados por la metodología presentada en este trabajo con los calculados por González et al. y los medidos por Ferrante et al.

Tabla 6.1 Comparación entre los resultados de avance de playa

	d/h_e	A'	B	W_e	Δ_y/W_e
Ferrante et al. (1992)	0.37	2.4	15	472.2	0.72
González et al. (1999)	0.37	2.4	20	472.2	0.76
Propuesto	0.37	2.4	15	472.2	0.70

El parámetro A' está definido como

$$A' = \frac{A_R}{A_L} \quad (6.1)$$

donde

A_R factor de forma (perfil de Dean) del material de relleno
 A_L factor de forma (perfil de Dean) del material local

El parámetro A' se espera que siempre sea mayor que la unidad, ya que en general, el diámetro medio del material de relleno es mayor que el existente en la playa.

En la comparación mostrada se observa que los resultados que ofrece el modelo son bastante buenos, inclusive, un poco mejores que los obtenidos con el modelo de González. Esto se debe a que dicho modelo considera una estructura sumergida vertical, si bien con una berma mas ancha, todo el conjunto resulta más delgado que la estructura real, lo que se traduce en una sobrestimación del avance del perfil.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Adicionalmente la metodología propuesta en este trabajo incluye la capacidad de conocer las características del flujo (presión, velocidades, altura de ola) en cualquier punto.

6.3 Resultados del modelo

Una vez que se han encontrado buenos resultados en la validación del modelo, es posible analizar algunas relaciones entre la geometría del dique arrecife y el avance en el perfil de playa. Esta práctica tiene como objetivo el desarrollo de herramientas para el diseño aunque, si bien el actual estado del arte no permite presentar ecuaciones o nomogramas definitivos, sí es posible lograr una mejor comprensión del fenómeno. Es importante recalcar que, dichas relaciones parten del supuesto de que la estabilidad del dique está garantizada por un adecuado diseño geométrico del dique sumergido.

A continuación se muestran, en función de parámetros adimensionales, los resultados obtenidos para cambio en la profundidad sobre la estructura, cambio en el ancho de la berma, cambio de la pendiente y cambio en la profundidad a pie de dique en la zona de calma.

6.3.1 Cambio en la profundidad sobre la estructura

En este caso, para facilitar el cálculo, se considera una estructura vertical sumergida con ancho de berma, B , de 20m, profundidad, h_e , de 4m y diámetro medio del material local 0.0001m. Se presentan los resultados para distintos valores de A' y de $k_e h_e$, donde k_e es el número de onda a la profundidad h_e .

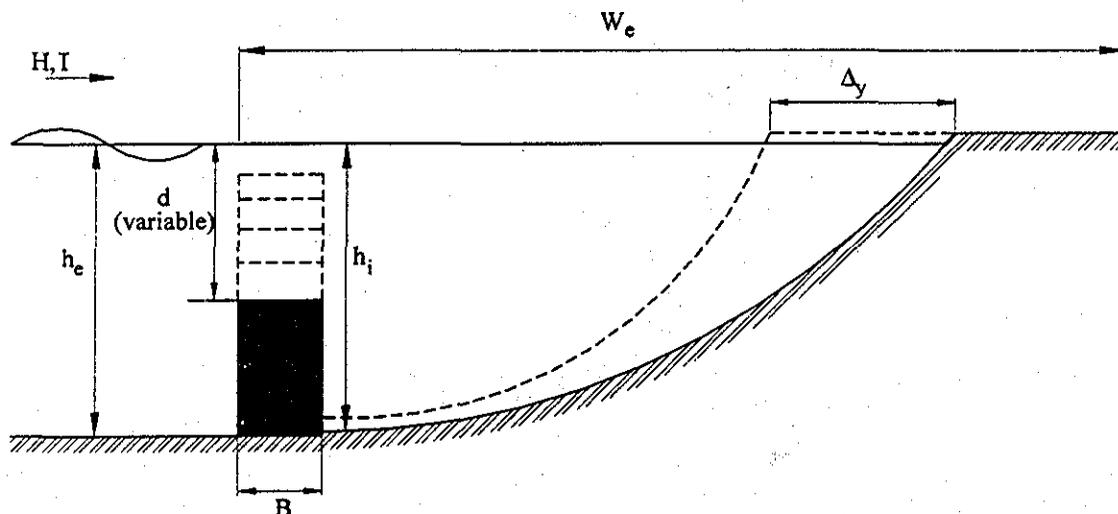


Figura 6-6 Esquema del escenario de cambio en la profundidad sobre la estructura

En la Figura 6-6 se muestra un esquema del problema del dique vertical sumergido de altura variable. El oleaje incide de izquierda a derecha y se muestra también el avance del

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

perfil de playa. Es de notar que el nuevo perfil no es necesariamente paralelo al original debido a que el tamaño del sedimento es distinto, lo que se traduce en un cambio en la pendiente del perfil de Dean.

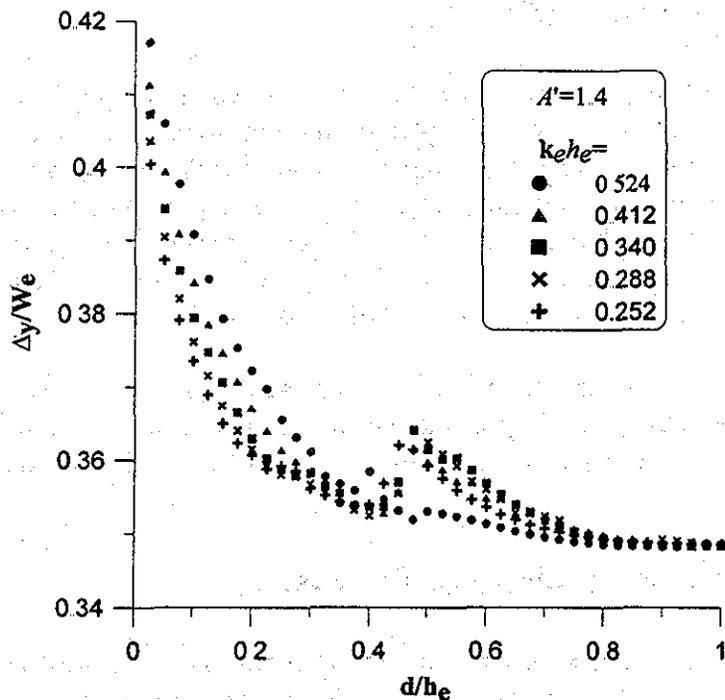


Figura 6-7 Resultados para $A'=1.4$

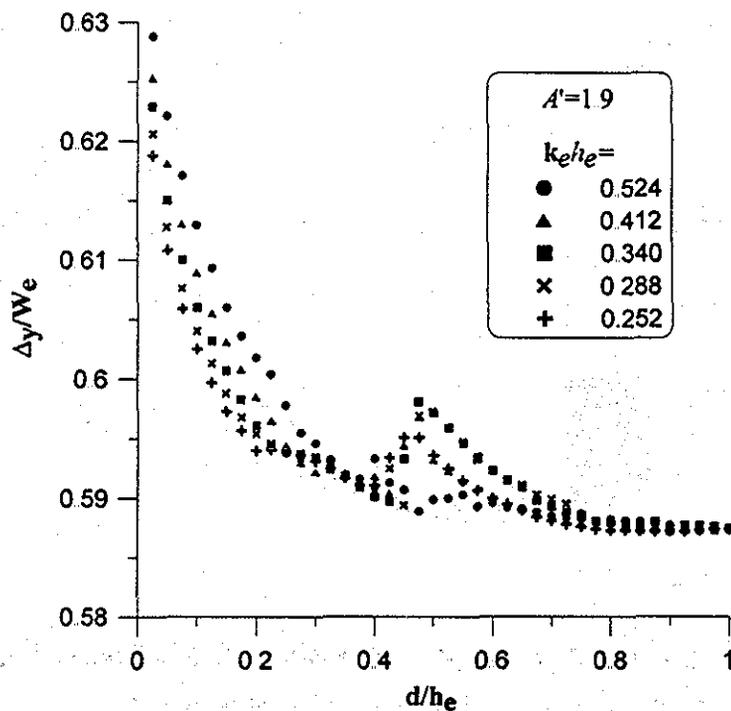


Figura 6-8 Resultados para $A'=1.9$

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
 INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS Y FÍSICA
 CUERPO ACADÉMICO

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

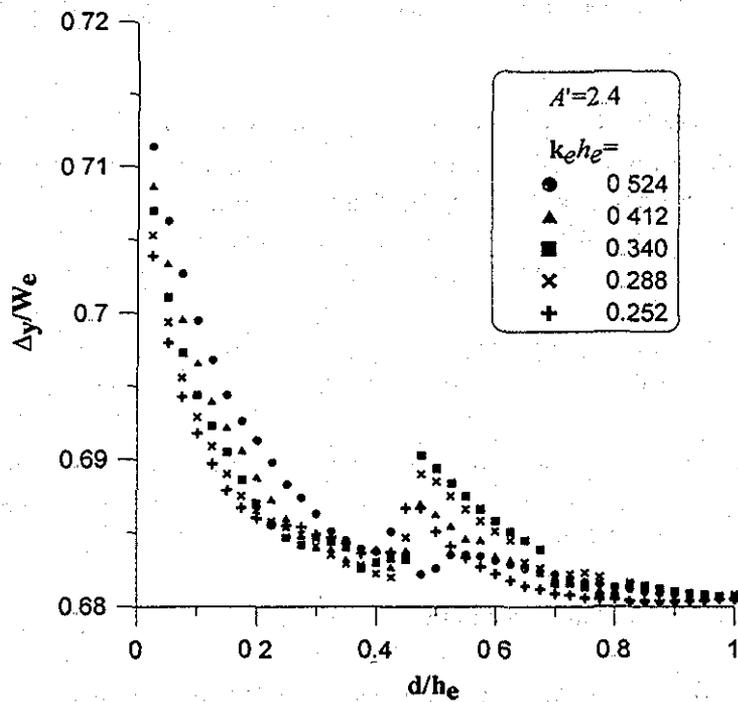


Figura 6-9 Resultados para $A'=2.43$

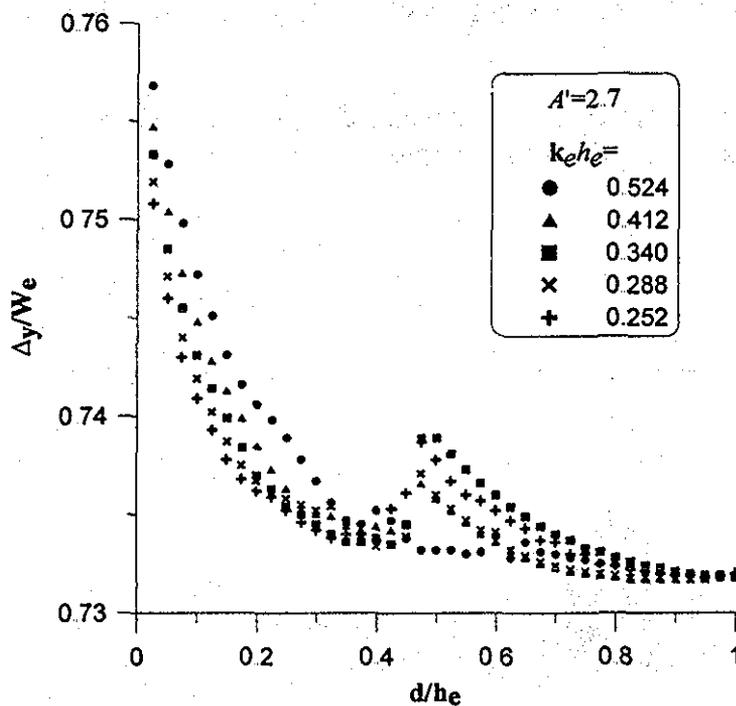


Figura 6-10 Resultados para $A'=2.7$

En las Figura 6-7 a la Figura 6-10 se puede observar que, en general, el avance del perfil relativo es menor al aumentar la profundidad relativa sobre la corona. Esto era de esperarse



ya que mientras más alta sea la estructura, la reflexión generada es también mayor, lo que se traduce en menor altura de ola en la zona protegida, lo que permite que el perfil de playa avance.

En todos los casos analizados se observa que en el rango $0.4 < d/h_e < 0.5$ el comportamiento arriba descrito se revierte y regresa al comportamiento original fuera de dichos valores. Esto es, cuando la profundidad sobre la estructura es cerca de la mitad de la profundidad total, se presenta una condición que parece óptima, ya que con una altura del dique arrecife relativamente baja el avance del perfil presenta un máximo.

Por otro lado, es notorio que para el rango estudiado de valores de $k_e h_e$, el cambio en éste último no genera cambios importantes en Δ_y/W_e .

Otra relación importante se obtiene al comparar las Figura 6-7 a la Figura 6-10, en las que se observa que al aumentar el diámetro del material de relleno (aumento en el parámetro A') el avance del perfil es mayor.

6.3.2 Cambio en el ancho de la estructura

Para este caso utilizó un dique sumergido vertical con profundidad, h_e , de 4m, diámetro medio del material local 0.0001m y profundidad sobre la estructura de 1.5m. A continuación se presentan los resultados para los mismos valores de A' y $k_e h_e$ que en el inciso anterior.

A continuación se presenta un esquema del problema abordado, en el que muestra el cambio en el ancho del dique sumergido.

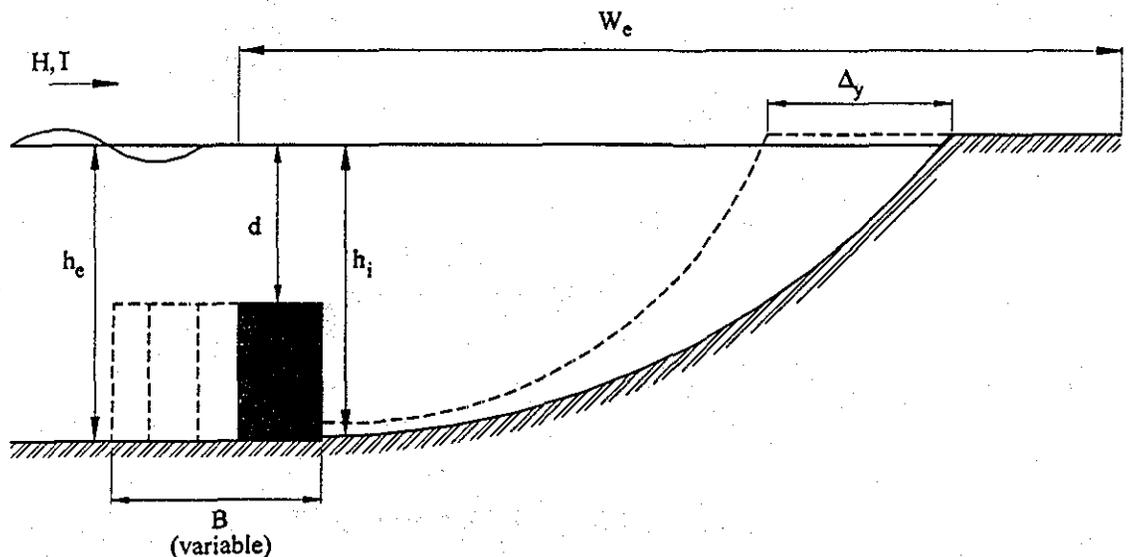


Figura 6-11 Esquema del escenario de cambio en el ancho de cresta del dique sumergido

END DEPT
UNIVERSIDAD DEL ALTIPLANO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

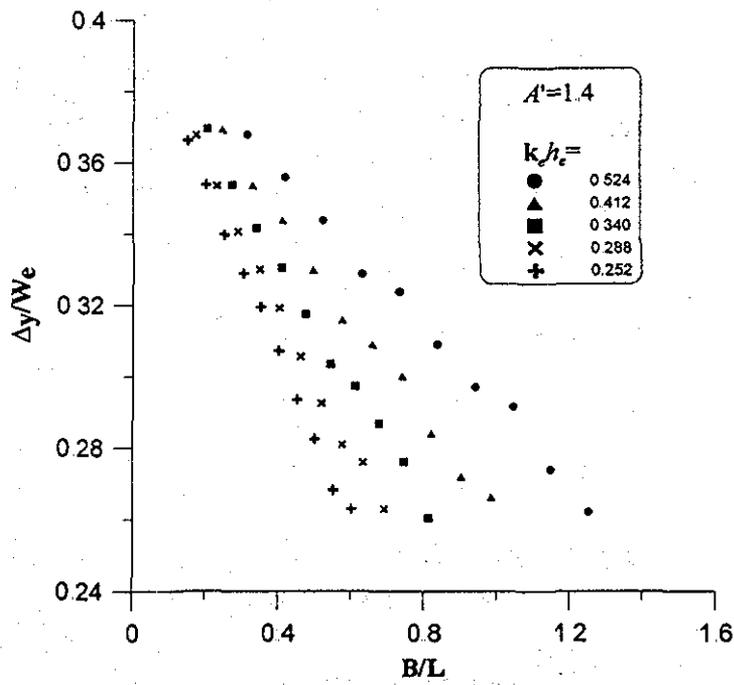


Figura 6-12 Resultados para $A'=1.4$

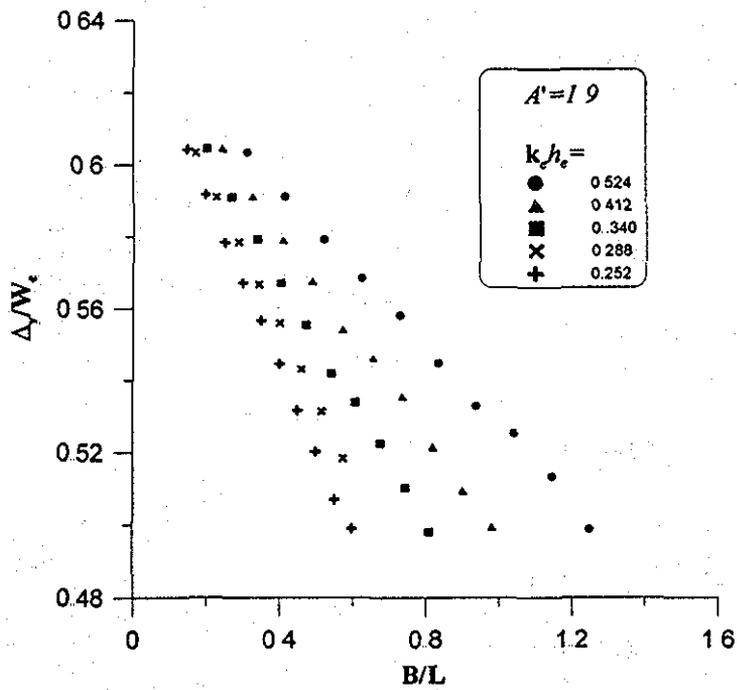


Figura 6-13 Resultados para $A'=1.9$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

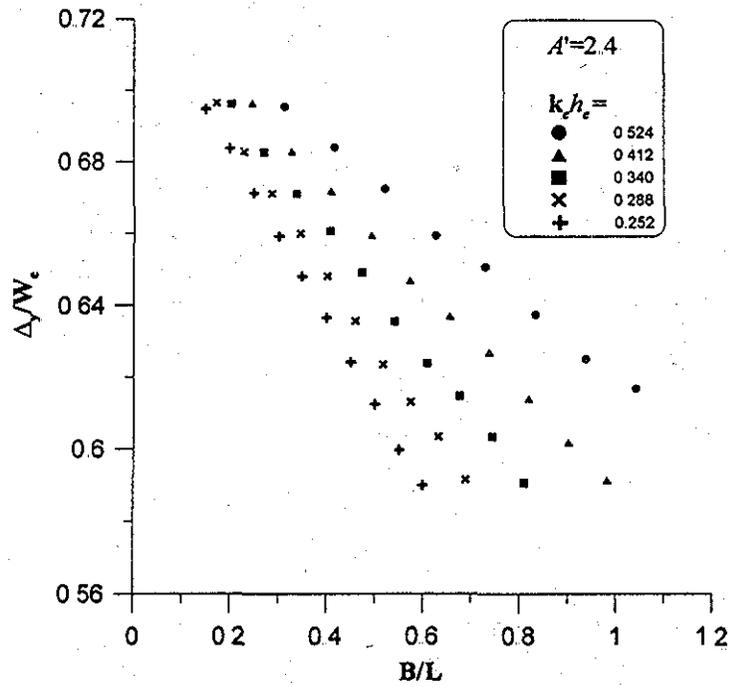


Figura 6-14 Resultados para $A'=2.4$

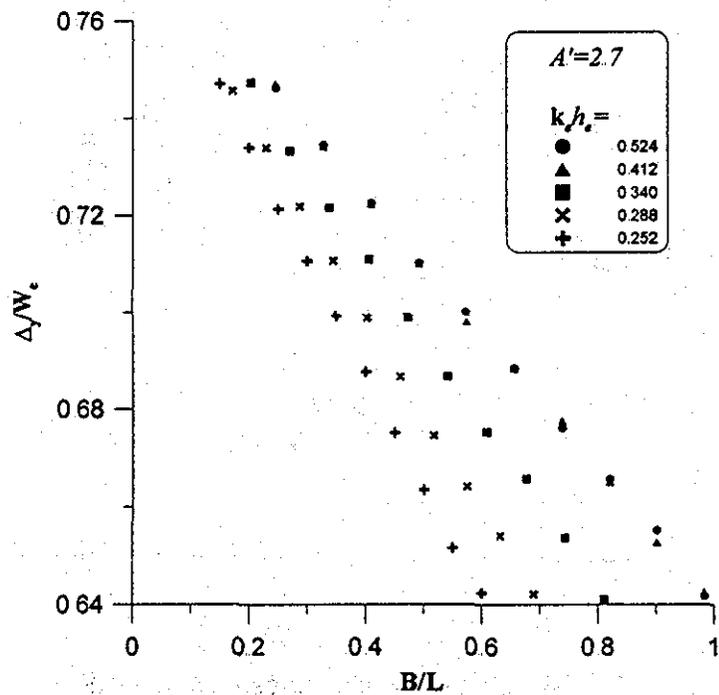


Figura 6-15 Resultados para $A'=2.7$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Al analizar las Figura 6-12 a la Figura 6-15 lo primero que salta a la vista es confirmar que el avance del perfil de playa es directamente proporcional al tamaño del material de relleno. A la vez que es claro que para las mismas condiciones geométricas, el cambio en el periodo no genera cambios importantes en el avance del perfil.

Por lo que respecta al comportamiento de cada caso de A' , es interesante notar que la relación entre el ancho de berma y el avance de playa relativo es aparentemente lineal y pareciera que el avance tiende a converger, para todos los valores de $k_e h_e$, a medida que B/L disminuye.

En las mismas figuras se observa que a medida que el valor del ancho de la berma se acerca al de la longitud de onda, el avance tiende a disminuir. Esto se debe, posiblemente a que la onda encuentra suficiente espacio para reconstituirse y recuperar la energía.

6.3.3 Cambio en la pendiente del dique

En este apartado se presentan los resultados obtenidos para un dique con 1.5m de profundidad sobre la estructura, profundidad total, h_e , de 4m, diámetro local de 0.0001m y ancho de berma, B , de 20m. En este caso se agruparon en una misma figura los casos con el mismo valor de $k_e h_e$ y se dibujó el avance del perfil de playa contra la cotangente de α , siendo α el ángulo que forma el talud del dique con la horizontal. Para facilitar el cálculo los taludes en las zonas protegida y expuesta se consideraron iguales.

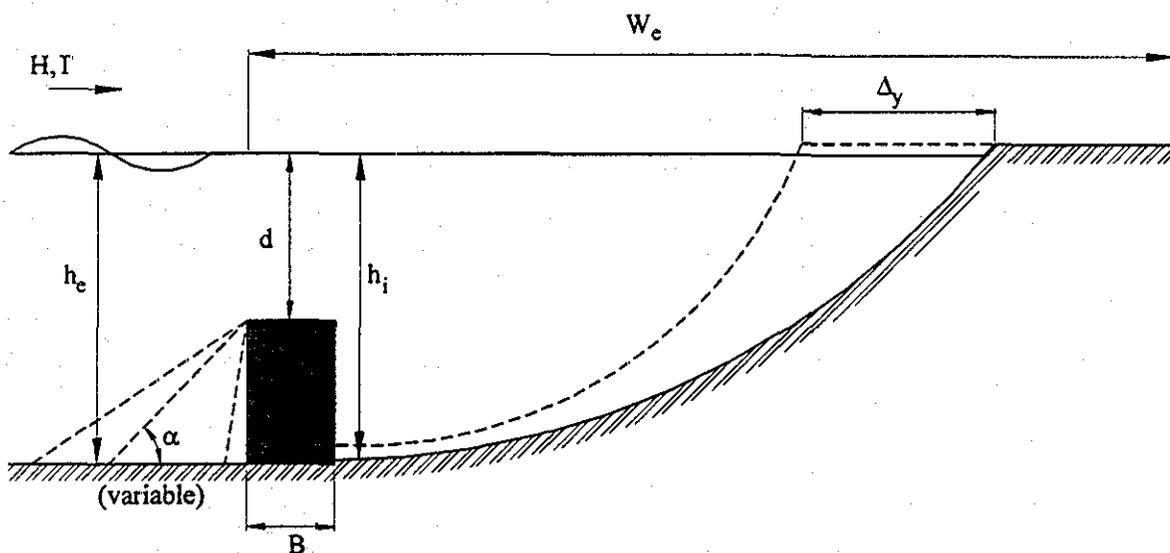


Figura 6-16 Esquema del escenario de cambio en la pendiente de los taludes

La Figura 6-16 muestra un esquema del cambio en la pendiente del dique sumergido. Este caso es el único en el que la longitud W_e es diferente para cada caso, ya que al aumentar la pendiente la longitud de la estructura, sobre todo al acercarse al fondo, es mucho mayor.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado, este cambio provoca también, que el punto en el que se calcula la reflexión se desplace junto con el pie de la estructura.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

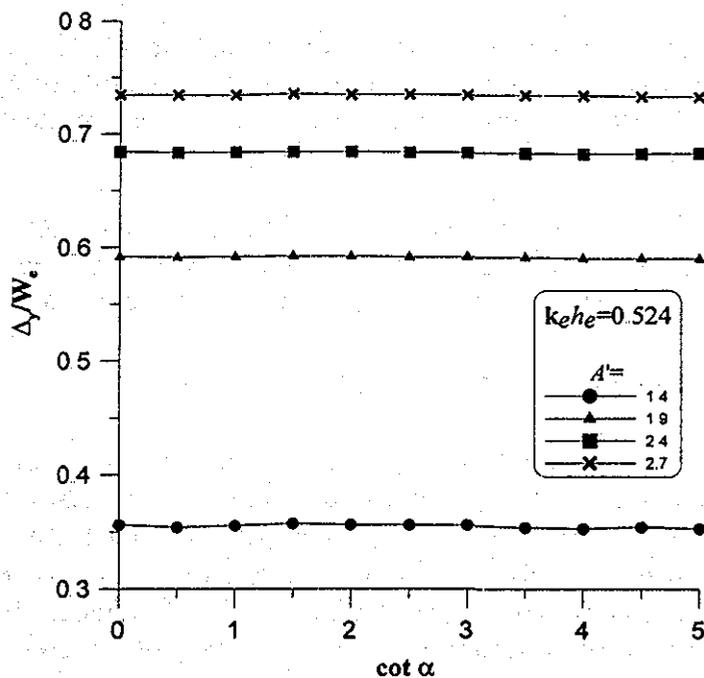


Figura 6-17 Resultados para $k_e h_e = 0.524$

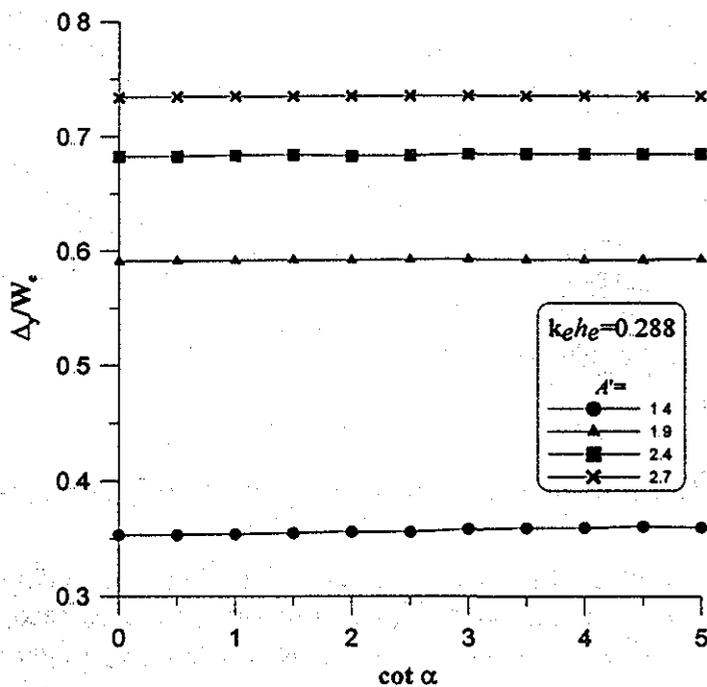


Figura 6-18 Resultados para $k_e h_e = 0.288$

En este caso solo se presentan dos valores de $k_e h_e$ puesto que es claro que el cambio en la pendiente no afecta considerablemente el avance del perfil. De modo que la pendiente del dique sumergido quedará en función únicamente de la estabilidad del dique.

Una vez más se observa que, para el rango de periodos estudiados, el cambio en el valor de $k_e h_e$ no es un parámetro importante para la determinación del avance del perfil de playa, al contrario del diámetro del material de relleno, el cual sí debe considerarse como una variable fundamental en cualquier proyecto tanto de relleno artificial como de protección costera.

6.3.4 Cambio en la profundidad a pie de dique en la zona protegida.

Estos casos se realizaron tratando de representar el efecto de la presencia de un escalón, es decir, cuando las profundidades a pie de dique en la zona protegida y en la expuesta no son iguales.

Para este análisis se consideró de nuevo un dique vertical sumergido, con ancho de berma de 20m, 1.5m de profundidad sobre la estructura y 4m de profundidad total h_e . El diámetro del material local es de 0.0001m. Al igual que en el apartado anterior los resultados se agruparon por el valor de $k_e h_e$ y en cada figura se dibujaron los resultados para diferentes valores de A' .

Los valores considerados de h_i/h_e solo caen dentro del rango 0.75 - 1.0, ya que se espera que el escalón sea natural y no que el dique sumergido funcione también como muro de retención.

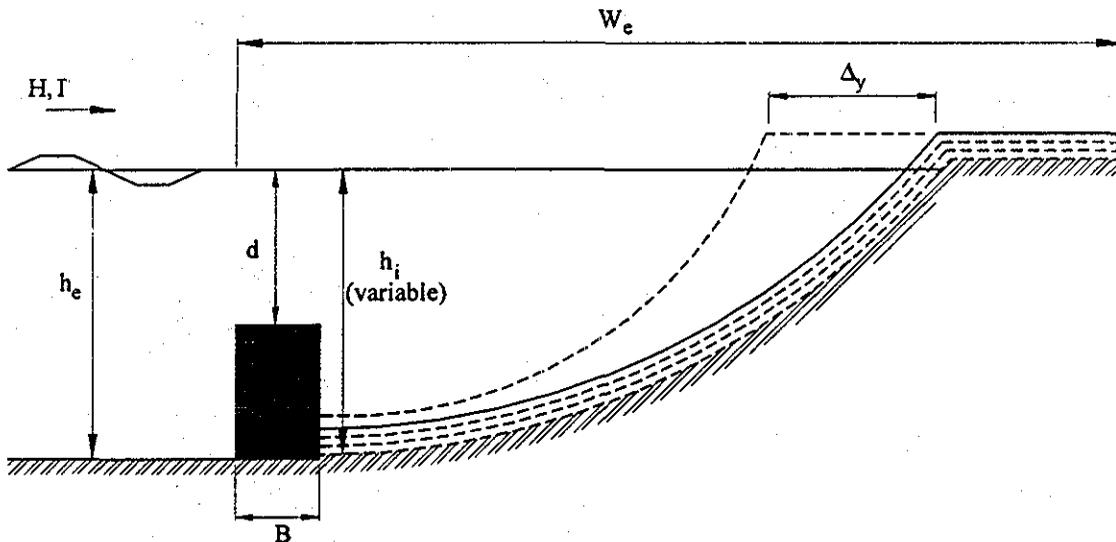


Figura 6-19 Esquema del escenario de cambio en la profundidad a pie de dique en la zona protegida

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El esquema del problema considerando diferentes profundidades a pie de dique en las zonas protegida y expuesta se muestra en la Figura 6-19.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

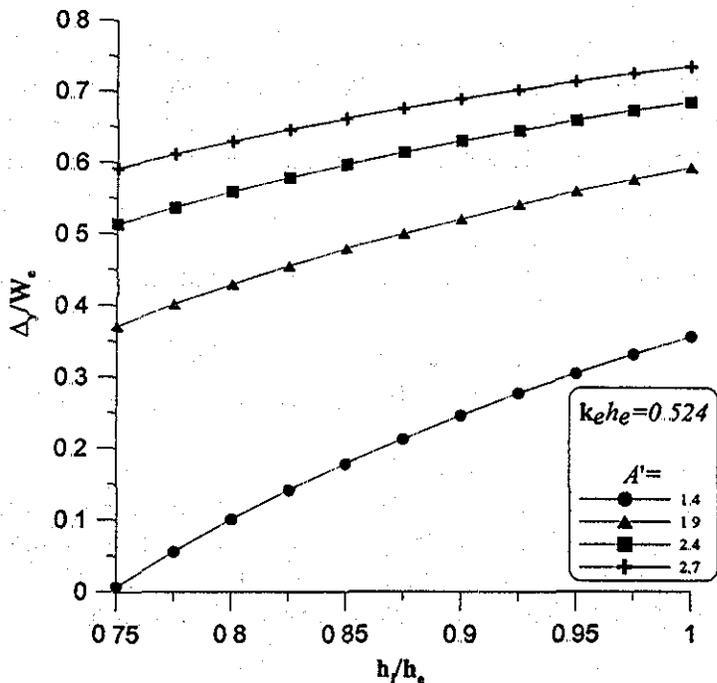


Figura 6-20 Resultados para $k_e h_e = 0.524$

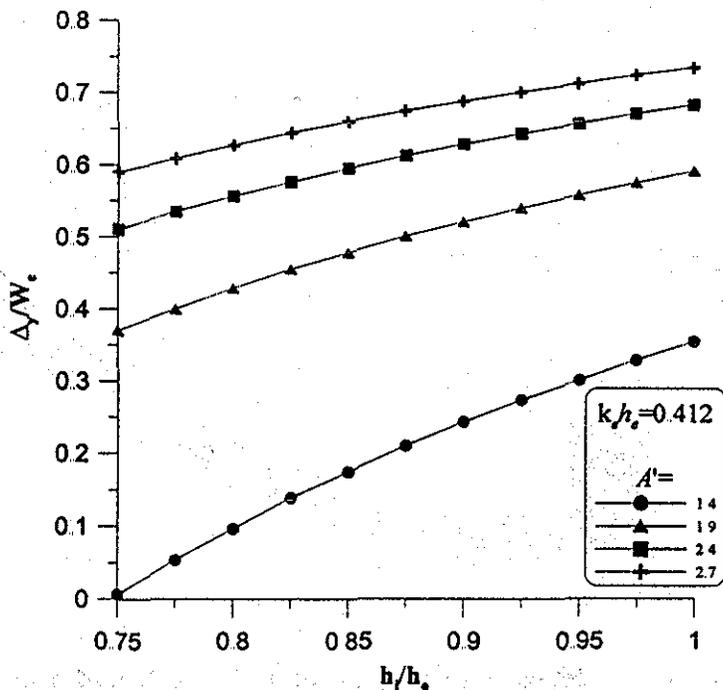


Figura 6-21 Resultados para $k_e h_e = 0.412$

IMPRESA
MEXICO

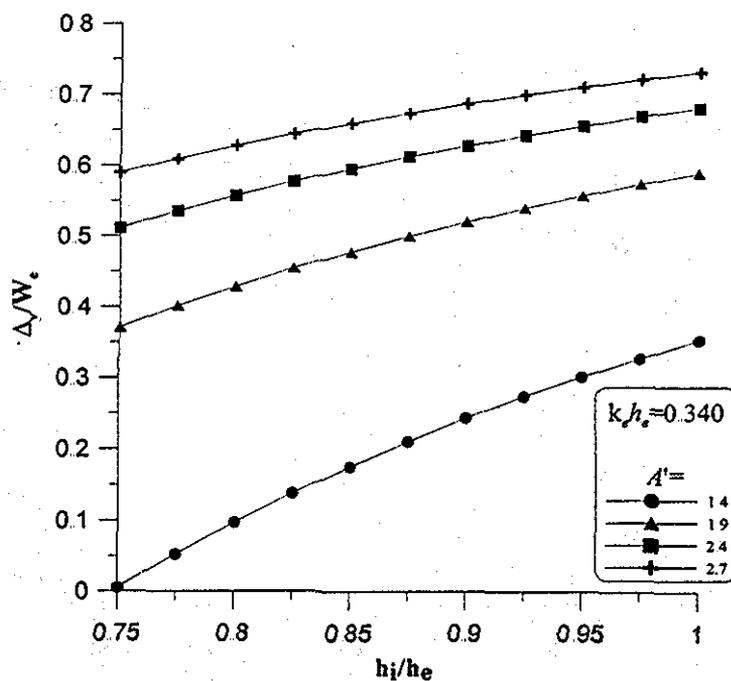


Figura 6-22 Resultados para $k_e h_e = 0.340$

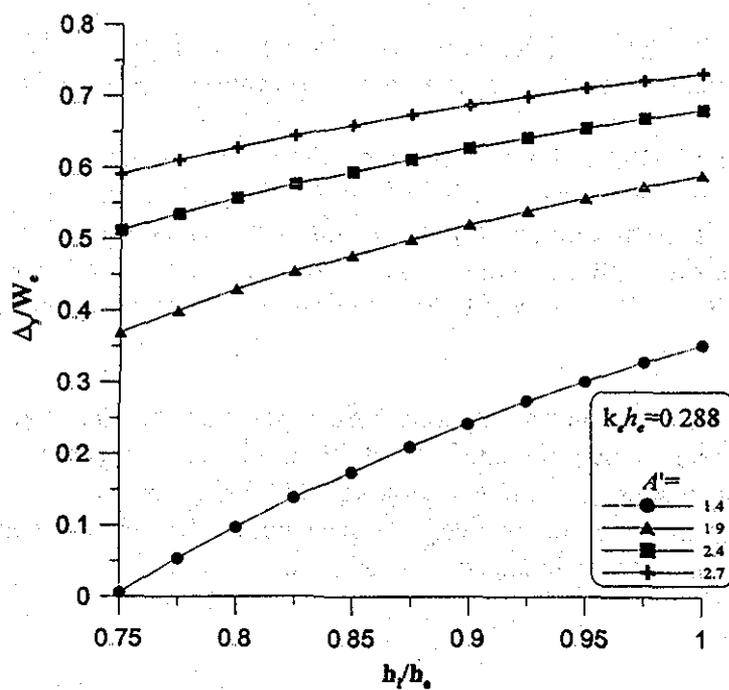


Figura 6-23 Resultados para $k_e h_e = 0.288$

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
 EN INGENIERIA Y CIENCIAS

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

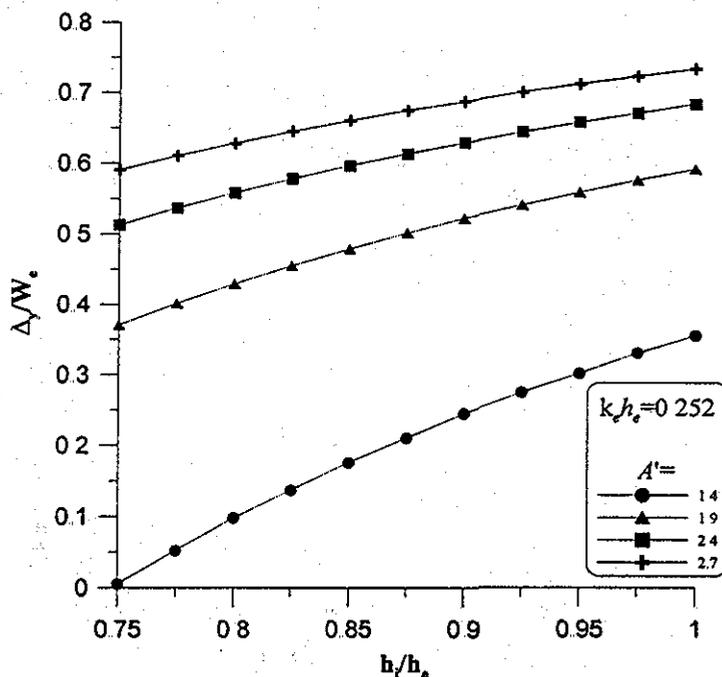


Figura 6-24 Resultados para $k_e h_e = 0.252$

Dada la forma de los resultados presentados en las Figura 6-20 a la Figura 6-24 es interesante notar que pueden ser ajustadas a un polinomio de segundo grado.

Por otro lado se observa que entre más pequeño sea el escalón el avance del perfil de playa aumenta, esto hace pensar que un buen diseño de protección costera es aquel en que se busca construir la estructura sumergida en una zona plana del perfil. Por el contrario si el escalón es demasiado alto el avance puede resultar nulo o inclusive un mal diseño de la protección puede convertir el perfil en más erosivo de lo que originalmente era.

Se han presentado, entonces, algunas relaciones que pueden ayudar en el diseño de protecciones costeras que tiendan a estabilizar el perfil existente o aún a aumentar la longitud de playa seca. No debe olvidarse que cualquier proyecto ha de considerar los posibles efectos al entorno, es decir, la protección de una zona en particular no debe producir efectos negativos en las zonas aledañas.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN
 MARCO A LA LARGA

CAPÍTULO VII
CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

CONCLUSIONES

CONCLUSIONES Y FUTURAS LINEAS DE TRABAJO

7. CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

7.1 Conclusiones

Luego del desarrollo del presente trabajo se han alcanzado interesantes conclusiones, entre las que se cuenta la consecución de una mejor aproximación al fenómeno de la propagación de oleaje de aguas profundas a someras al incluir en la ecuación de gobierno, pendiente suave ec. (4.30), términos que consideran la disipación de energía debida tanto a la rotura del oleaje como a la fricción por fondo. Dicha ecuación se comparó con mediciones de laboratorio, Figuras 6-1 a 6-5, ofreciendo excelentes resultados.

El análisis a detalle de los resultados obtenidos indica que la inclusión de la disipación de energía por fricción de fondo resulta en una disminución importante de la altura de ola local la cual resulta, en ocasiones un poco menor que la medida. También es notorio que el modelo de propagación aplicado representa bastante bien la recomposición de la onda sinusoidal luego de la rotura, sin embargo, el valor de la superficie libre máxima es un poco menor de lo reportado en laboratorio.

La aplicación de la ecuación arriba citada, junto con un modelo para la estimación del avance de playa, ha permitido el desarrollo de una metodología, apartado 5.4, para determinar el desplazamiento del perfil de playa debido a la presencia de un dique sumergido. La metodología propuesta se ha comparado con resultados en campo, Tabla 6-1, mostrando un muy cercano apego a la realidad. Se ha confirmado también la adecuada representación de un perfil de equilibrio a través de la expresión propuesta por Dean, ec. (5.15).

Con respecto a los resultados presentados en el Capítulo 5, es importante resaltar que el tamaño del material de relleno es el parámetro más relevante en el diseño de playas colgadas. Mientras que, por lo que se refiere a los diferentes escenarios modelados en el mismo capítulo, se concluye que:

- El avance del perfil de playa es inversamente proporcional a la profundidad sobre la estructura. Es de notar que si la estructura sumergida tiene altura de cerca de la mitad de la profundidad total, el avance en el perfil de playa presenta un máximo.
- El aumento en el ancho del dique genera disminución en el avance del perfil de playa y la relación entre ambas es lineal.
- La pendiente de los taludes del dique no influye en el avance del perfil, por lo que su valor queda determinado por la estabilidad de la estructura.
- La presencia de un escalón a pie de dique en la zona protegida tiende a disminuir o eliminar el avance del perfil.

7.2 Futuras líneas de trabajo

Este trabajo ha dejado pendientes una serie de líneas de trabajo, el desarrollo de las cuales permitirá un mayor acercamiento con la realidad. Entre dichas líneas se cuenta:

- La solución de los modelos en dos dimensiones y el análisis de la forma de la playa en planta.
- La estimación del avance del perfil con oleaje irregular.
- La comparación de la metodología con diferentes expresiones para el perfil de equilibrio.
- La inclusión de modos evanescentes.

BIBLIOGRAFÍA

100

BIBLIOGRAFÍA

1. Berkhoff, J.C. (1973). Computation of combined refraction-diffraction. Proc. 13th International Conference on Coastal Engineering, Vancouver, Canadá, ASCE.
2. Booij, N (1981) Gravity waves on water with non-uniform depth and current Tesis Doctoral. Technical University of Delft
3. Borthwick, A., K.F. Yiu and K. Anastasiou (1997). GMRES solution of the mild-slope equation on quadtree grids. Proc. XVII IAHR Congress, San Francisco, USA.
4. Bruun, P. (1954) Coast erosion and the development of beach profiles Beach Erosion Board, Technical Memorandum
5. Chamberlain, P.G. y D. Porter (1995). "The modified mild-slope equation." Journal of Fluid Mechanics Vol. 291.
6. Copeland, G.J.M. (1985). "A practical alternative to the mild-slope wave equation." Coastal Engineering Vol. 9.
7. Dally, W., R. Dean y R.A. Dalrymple (1985). "Wave height variation across beaches of arbitrary profiles." Journal of Geophysics Research Vol. 90.
8. Dalrymple, R. A., J. T. Kirby y D.W. Mann (1984b). Wave propagation in the vicinity of islands. Proc. 16th Offshore Technology Conference, Houston, EUA.
9. Dalrymple, R.A., J.T. Kirby y P.A. Hwang (1984a). "Wave diffraction due to areas of energy dissipation." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Division, ASCE Vol. 110.
10. Dean, R. y R. A. Dalrymple (1984). Water wave mechanics for engineers and scientists. Singapore, World Scientific.
11. Dean, R.G. (1977) Equilibrium beach profiles: US Atlantic and Gulf coasts University of Delaware. Delaware
12. Dingemans, Maarten (1997). Water wave propagation over uneven bottoms, World Scientific.
13. Espinal G., Juan Carlos (2002) Caracterización del transporte de sedimentos en las bocas del Carmen y Puerto Real en Laguna de Términos, Campeche. Tesis de Maestría. UNAM
14. Ferrante, A., L. Franco y S. Boer (1992). Modeling and monitoring of a perched beach at Lido di Ostia (Rome). 23rd International Conference on Coastal Engineering.

- 15 González R., M. (1995) Morfología de playas en equilibrio. Planta y perfil. Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria
16. González R., M., R. Medina y M.A. Losada (1999). "Equilibrium beach profile model for perched beaches." Coastal Engineering Vol. 36.
17. Govaere, G.A. (2002) Acción del oleaje sobre estructuras disipativas de simetría radial Tesis Doctoral. UNAM
18. Hedges, T.S. (1976). An empirical modification to linear wave theory. Proc. Institute of Civil Engineering, Vol. 61.
19. Horikawa, K. y C.T. Kuo (1966). A study of wave transformation inside surf zone. Proc. 10th. Conference on Coastal Engineering, Nueva York, EUA, Vol. 1.
20. Kaihatu, J.M. (2001). "Improvement of parabolic nonlinear dispersive wave model." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering Vol. 127.
21. Kirby, J.T. (1986a). "A general equation for waves over ripple beds." Journal of Fluid Mechanics Vol. 162.
22. Kirby, J.T. (1986b). "Higher-order approximations in the parabolic equation method for water waves." Journal of Geophysics Research Vol. 91.
23. Kirby, J.T. y R. A. Dalrymple (1986). "Modeling waves in surf zones and around islands." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering Vol. 112.
24. Kirby, J.T. y R. A. Dalrymple (1994) REF/DIF 1 Version 2.5 Center for Applied Coastal Research, Universidad de Delaware
25. Kirby, J.T. y S.K. Misra (1998) A Note on the Modified Mild-Slope Equation Center for Applied Coastal Research Newark, Delaware
26. Li, B. y K. Anastasiou (1992). "Efficient elliptic solvers for the mild-slope equation using the multigrid technique." Applied Ocean Research Vol. 13.
27. Lozano, C. y R.E. Meyer (1976). "Leakage and response of waves trapped by round islands." The Physics of Fluids Vol. 19.
28. Martin, P.A., R.A. Dalrymple y J.T. Kirby (1997). Parabolic modeling of water waves, in Gravity waves in water of finite depth. Advances in Fluid Mechanics. J. N. Hunt, Computational Mechanics Publications. Vol. 10.
29. Mase, H. y K. Takeba (1994). Bragg scattering of gravity waves over a porous rippled bed. 24th International Conference on Coastal Engineering, Kobe, Japón.

30. Massel, S.R. (1989). "Hydrodynamics of coastal zones." Elsevier Oceanography Series Vol. 48.
31. Massel, S.R. (1993). "Extended refraction-diffraction equation for surface waves." Coastal Engineering Vol. 19.
32. Miles, J.W. (1991). "Variational approximations for gravity waves in water of variable depth." Journal of Fluid Mechanics Vol. 232.
33. Panchang, V.J., R. Pearce, G. Wei y B. Cushman-Roisin (1991). "Solution of the mild-slope problem by iteration." Applied Ocean Research Vol. 13.
34. Pope, J. y J.L. Dean (1986). Development of design criteria for segmented breakwaters. 20th International Conference on Coastal Engineering, Taipei, ASCE.
35. Radder, A.C. (1979). "On the parabolic equation method for water-wave propagation." Journal of Fluid Mechanics Vol. 95.
36. Silva C., Rodolfo (2001). Apuntes del Curso: Hidráulica Marítima. DEPMI, UNAM.
37. Silva C., Rodolfo, P. Salles y A. Palacio (2002). "Linear waves propagating over a rapidly varying finite porous bed." Coastal Engineering Vol. 44.
38. Smith, R. y T. Spinks (1975). "Scattering of surface waves by a conical island." Journal of Fluid Mechanics Vol. 72.
39. Tomé, M (1997) Modelado hidrodinámico de la circulación 2DH inducida por el oleaje en presencia de diques sumergidos Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña
40. Tsai, T.K. y P.L. Liu (1983). "A finite element model for wave refraction and diffraction." Applied Ocean Research Vol. 5.
41. Vidal, C., M.A. Losada y E.P.D. Mansard (1995). "Stability of low-crested rubble mound breakwater heads." Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering Vol. 121 (2).
42. Zhao, Y. y K. Anastasiou (1996). "Modeling of wave propagation in the near shore region using the mild-slope equation with GMRES-based iterative solvers." International Journal for Numerical Methods in Fluids Vol. 23.

[Faint, illegible text, likely a list of references or a table of contents]

ANEXO A.

MMSE EN DOS DIMENSIONES

ANEXO A. MMSE EN DOS DIMENSIONES

La ecuación de gobierno dentro del dominio es la ecuación modificada de la pendiente suave (MMSE por sus siglas en inglés), es decir, la expresión (4.30)

$$\nabla_h \cdot I_1 \nabla_h \phi + \left((k^2 - i\sigma f_D) I_1 + r(h) \right) \phi = 0$$

en la que, para este caso, $\nabla_h = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

Con el fin de simplificar el problema, es conveniente trabajar con la ecuación de Helmholtz, (Radder, A.C. 1979). Para tal efecto, sean $R = (k^2 - i\sigma f_D) I_1 + r(h)$ y la transformación

$$\hat{\phi} = I_1^{1/2} \phi \quad (\text{A.1})$$

Con lo que la ecuación (4.30) se convierte en

$$\nabla_h \left(I_1 \nabla_h \left(\hat{\phi} I_1^{-1/2} \right) \right) + R \left(\hat{\phi} I_1^{-1/2} \right) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Operando y agrupando términos se llega a

$$I_1^{1/2} \nabla_h^2 \hat{\phi} - \hat{\phi} \nabla_h^2 I_1^{1/2} + R \hat{\phi} I_1^{-1/2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

de donde, dividiendo por $I_1^{-1/2}$ se tiene

$$\nabla_h^2 \hat{\phi} - \frac{\nabla_h^2 I_1^{1/2}}{I_1^{1/2}} \hat{\phi} + \frac{R \hat{\phi}}{I_1} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Si se define $R' = \frac{R}{I_1} - \frac{\nabla_h^2 I_1^{1/2}}{I_1^{1/2}}$ la ecuación de Helmholtz es obtenida

$$\nabla_h^2 \hat{\phi} + R' \hat{\phi} = 0 \quad (\text{A.5})$$

Para discretizar la ecuación (A.5) en un esquema centrado en diferencias finitas, se puede operar como sigue:

Aplicando las derivadas correspondientes a ∇_h^2

$$\frac{\hat{\phi}_{i+1,j} - 2\hat{\phi}_{i,j} + \hat{\phi}_{i-1,j}}{\Delta_x} + \frac{\hat{\phi}_{i,j+1} - 2\hat{\phi}_{i,j} + \hat{\phi}_{i,j-1}}{\Delta_y} + R'\hat{\phi}_{i,j} = 0$$

Agrupando y reacomodando términos se llega una ecuación similar a la utilizada por Panchang, V.J. et al. (1991), con la salvedad de que ellos consideraron $\Delta_x = \Delta_y$,

$$\left(\frac{1}{\Delta_x^2}\right)\hat{\phi}_{i+1,j} + \left(\frac{1}{\Delta_x^2}\right)\hat{\phi}_{i-1,j} + \left(\frac{1}{\Delta_y^2}\right)\hat{\phi}_{i,j+1} + \left(\frac{1}{\Delta_y^2}\right)\hat{\phi}_{i,j-1} + \left(-\frac{2}{\Delta_x^2} - \frac{2}{\Delta_y^2} + R'\right)\hat{\phi}_{i,j} = 0 \quad (A.6)$$

Esta última expresión genera un sistema de ecuaciones lineales, $Ax = b$, en el que la matriz de coeficientes es compleja y pentadiagonal. Existen una gran variedad de métodos para la encontrar el vector solución. En este trabajo el sistema se resuelve empleando un método del tipo ADI (*Alternating Direction Iterative*), para la aplicación del cual, han de separarse los términos con dependencia de x e y en cada lado de la igualdad, quedando

$$\left(-\frac{1}{\Delta_x^2}\right)\hat{\phi}_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{\Delta_x^2}\right)\hat{\phi}_{i-1,j} + \left(\frac{2}{\Delta_x^2} - \frac{1}{2}R'\right)\hat{\phi}_{i,j} = \left(\frac{1}{\Delta_y^2}\right)\hat{\phi}_{i,j+1} + \left(\frac{1}{\Delta_y^2}\right)\hat{\phi}_{i,j-1} + \left(-\frac{2}{\Delta_y^2} + \frac{1}{2}R'\right)\hat{\phi}_{i,j}$$

Finalmente se adiciona artificialmente la variable tiempo y se desfazan los términos dependientes de cada variable espacial. Así:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{\Delta_x^2}\right)\hat{\phi}_{i+1,j}^{n+1/2} + \left(-\frac{1}{\Delta_x^2}\right)\hat{\phi}_{i-1,j}^{n+1/2} + \left(-\frac{2i\sigma}{I_{1(i,j)}\Delta_t} + \frac{2}{\Delta_x^2} - \frac{1}{2}R'_{i,j}\right)\hat{\phi}_{i,j}^{n+1/2} = \\ = \left(\frac{1}{\Delta_y^2}\right)\hat{\phi}_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{1}{\Delta_y^2}\right)\hat{\phi}_{i,j-1}^{n+1} + \left(-\frac{2i\sigma}{I_{1(i,j)}\Delta_t} - \frac{2}{\Delta_x^2} + \frac{1}{2}R'_{i,j}\right)\hat{\phi}_{i,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (A.7)$$

A continuación se derivan las ecuaciones que describen el flujo en las fronteras

- Frontera mar adentro

Considérese una onda propagándose desde fuera de la zona de estudio, tal que su potencial de velocidades está definido por

$$\phi_{inc} = A_0 Ie^{-i(k_x x + k_y y)} \quad (A.8)$$

donde k_x es equivalente a $k \sin \theta$, siendo θ el ángulo de incidencia del oleaje.

Sin embargo, el potencial de velocidades total, en la frontera, está compuesto por la suma del oleaje incidente con el reflejado por todo el sistema

$$\phi_{i,j} = A_0 Ie^{-i(k_x x + k_y y)} + R_0 Ie^{i(k_x x + k_y y)} \quad (A.9)$$

La derivada del potencial expresado en (A.9) es

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} = -ik_x I \left\{ A_0 e^{-i(k_x x + k_y y)} - R_0 e^{-i(k_x x + k_y y)} \right\} \quad (\text{A.10})$$

Sustituyendo (A.8) y (A.9) en (A.10) se llega a

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} = -ik_x I (2\phi_{inc} - \phi_{i,j}) \quad (\text{A.11})$$

Por otro lado, según la transformación (A.1), la derivada del potencial en la frontera puede escribirse como

$$\frac{\partial \phi_{i,j}}{\partial x} = \frac{\partial (\hat{\phi} I_1^{-1/2})}{\partial x} = \hat{\phi} \frac{\partial I_1^{-1/2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} I_1^{-1/2} \quad (\text{A.12})$$

Al igualar (A.11) y (A.12) se obtiene, aplicando (A.1) y dividiendo por $I_1^{-1/2}$

$$-ik_x (2\hat{\phi}_{inc} - \hat{\phi}_{i,j}) = \hat{\phi} I_1^{1/2} \frac{\partial I_1^{-1/2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (\text{A.13})$$

Aplicando de nuevo (A.1) al potencial incidente, acomodando términos y evaluando en $x=0$ se llega a

$$-2ik_x A_0 e^{-i(k_y y)} I_1^{1/2} = -ik_x \hat{\phi}_{i,j} + \hat{\phi} I_1^{1/2} \frac{\partial I_1^{-1/2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (\text{A.14})$$

La que discretizada en diferencias finitas queda

$$\left(-ik_x + I_{1(1,j)}^{1/2} \left(\frac{I_{1(2,j)}^{-1/2} - I_{1(1,j)}^{-1/2}}{\Delta_x} \right) - \frac{1}{\Delta_x} \right) \hat{\phi}_{1,j} + \left(\frac{1}{\Delta_x} \right) \hat{\phi}_{2,j} = -2ik_x A_0 e^{-ik_y y} \quad (\text{A.15})$$

- Frontera en la costa

El potencial de velocidades transmitido por todo el dominio, ϕ_T , se puede escribir como

$$\phi_T = T I e^{-i(k_x x + k_y y)} \quad (\text{A.16})$$

de donde la derivada del potencial en la frontera es

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi_T}{\partial x} = -ik_x \phi \quad (\text{A.17})$$

Ahora, considerando la transformación (A.1) y su derivada, ec. (A.12), al igualarla con (A.17) se obtiene

$$-ik_x \hat{\phi} I_1^{-1/2} = \hat{\phi} \frac{\partial I_1^{-1/2}}{\partial x} + I_1^{-1/2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \quad (\text{A.18})$$

Dividiendo por $I_1^{-1/2}$ y discretizando, la ecuación para la frontera aguas abajo queda

$$\left(-\frac{1}{\Delta_x} \right) \hat{\phi}_{Nx-1,j} + \left(I_1^{1/2} \left(\frac{I_1^{-1/2} - I_1^{-1/2}}{\Delta_x} \right) + \frac{1}{\Delta_x} + ik_x \right) \hat{\phi}_{Nx,j} = 0 \quad (\text{A.19})$$

Donde Nx es el número total de celdas en la dirección del eje x .

- Frontera lateral izquierda

La derivada del potencial en la frontera es

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = ik_y \phi = ik_y \hat{\phi} I_1^{-1/2} \quad (\text{A.20})$$

La cual igualando con (A.12) y dividiendo por $I_1^{-1/2}$ resulta

$$\left(I_1^{1/2} \frac{\partial I_1^{-1/2}}{\partial y} - ik_y \right) \hat{\phi} + \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A.21})$$

La forma en diferencias finitas de la ecuación (A.21) es

$$\left(I_1^{1/2} \left(\frac{I_1^{-1/2} - I_1^{-1/2}}{\Delta_y} \right) - \frac{1}{\Delta_y} - ik_y \right) \hat{\phi}_{i,1} + \left(\frac{1}{\Delta_y} \right) \hat{\phi}_{i,2} = 0 \quad (\text{A.22})$$

- Frontera lateral derecha

Este caso es similar al anterior, con la diferencia de que se considera oleaje propagándose en sentido contrario, por lo que la derivada del potencial es

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -ik_y \phi \quad (\text{A.23})$$

Con un proceso análogo al anterior se llega a la expresión discretizada para la frontera lateral

$$\left(I_{1(i N_y)}^{1/2} \left(\frac{I_{1(i, N_y)}^{-1/2} - I_{1(i, N_y-1)}^{-1/2}}{\Delta_y} \right) + \frac{1}{\Delta_y} + ik_y \right) \hat{\phi}_{i, N_y} + \left(-\frac{1}{\Delta_y} \right) \phi_{i, N_y-1} = 0 \quad (\text{A 24})$$

Donde N_y es el número total de celdas en la dirección del eje y .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN