60

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Teoría de Riesgo
y su Aplicación en los Seguros

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I O

PRESENTA
Leobardo Jiménez Barroso

DIRECTOR DE TESIS:
Act. Mat. César Galindo Aranza

México D. F. 2002

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "TEORIA DE RIESGO Y SU APLICACION EN LOS SEGUROS".

realizado por JIMENEZ BARROSO LEOBARDO.

con número de cuenta 8523892 - 1 , quién cubrió los créditos de la carrera de: ACTUARIA.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. MAT. CESAR GALINDO ARANZA.
Propietario	MAT. HUGO VILLASEÑOR HERNANDEZ.
Propietario	ACT. RICARDO VILLEGAS AZCORRA.
Suplente	M. en I. RAUL DE JESUS GUTIERREZ
Suplente	ACT. JUAN GABRIEL PEÑALOZA SOTO.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A MIS PADRES

Por todo el amor y bendiciones recibidos y por su apoyo incondicional durante toda la vida y por las desveladas compartidas en mis estudios

A MIS HERMANOS

Por su apoyo, sobre todo a ustedes: Lourdes y Juan Gabriel

A CESAR

Por tú amistad y apoyo durante todos los tiempos compartidos y por tú asesoramiento en el presente trabajo

A MIS SINODALES

Por compartir este trabajo y por su amistad

A PALOMA

Por tú apoyo incondicional y por todos los momentos compartidos.

A CRIS

Por tú amistad y todo el apoyo desinteresado durante la elaboración de este trabajo.

A MIS AMIGOS

Por su amistad en todo momento.

ÍNDICE

Capítulo seis: El beneficio en las empresas de seguros

INTRODUCCIÓN

En la teoría del riesgo, las técnicas actuariales convencionales son basadas en frecuencias y el monto promedio de reclamos, por ejemplo, si una aseguradora tiene una cartera de N pólizas en riesgo y si el valor medio esperado de la frecuencia de reclamos por estas pólizas durante un periodo específico es q y el tamaño promedio esperado de reclamos es m, entonces el monto total esperado de reclamos es N*q*m. Sin embargo el monto actual proveniente de muchos periodos sucesivos deferirá de este panorama esperado y fluctuará alrededor de éste. En términos probabilísticos, el monto actual de reclamos es una variable aleatoria. Las técnicas actuariales convencionales son de hecho basadas en un modelo simplificado de una cartera en el cual las variables aleatorias son reemplazadas por este valor medio, esto es, el fenómeno de fluctuación es ignorado. Mientras que, por muchas razones, este modelo simplificado es suficiente para los expertos, es innegable una sobre simplificación de los factores y es al mismo tiempo útil e interesante desarrollar los principios de las matemáticas actuariales en una base más general, en la cual tanto el número como el tamaño de los reclamos son considerados como variables aleatorias. Estudios de los diferentes tipos de fluctuación que aparecen en una cartea que empieza desde este punto de vista constituye la rama de las matemáticas actuariales denominada la "Teoría del riesgo".

Desde luego, la estructura financiera de una compañía aseguradora depende de la administración de los costos y la inversión de capital sumado a los aspectos de los reclamos, pero éstos dos factores no son objeto de fluctuaciones aleatorias de la misma manera que los reclamos, y la teoría del riesgo no es, por lo tanto, una apropiada técnica para utilizarla en su estudio. A menos que se indique lo contrario, el siguiente análisis esta por lo tanto restringido al estudio de los reclamos y no a la parte de las primas que permanecen cuando se hacen cargos para los gastos administrativos los cuales han sido reducidos, esto es, las primas netas en riesgo se incrementan por un cargo de seguridad. En particular, los intereses por las ganancias son desapreciados. El hecho es que este trabajo se realizo con motivo de simplificar los estudios relacionados solamente al negocio de riego puros.

El objeto fundamental de la teoría del riesgo que será tratado en este trabajo presentado puede, en primer lugar, ser clasificado en 3 grupos, que pueden ser descritos como aquellas que proveen de respuestas significativas a las preguntas:
¿Cuál es el resultado del negocio al final de cierto periodo T (por decir 1 año?
Esto es equivalente a encontrar las probabilidades para diferentes valores de U_T, en particular la probabilidad que la pérdida durante este periodo sea igual o mayor a la reserva inicial U_0, esto es haciendo negativo a U_T (o lo que es igual la probabilidad de ruina).
¿Cuál es el resultado si las observaciones son extendidas a cada punto de tiempo del período T?, esto es ¿Cuál es la probabilidad si la ruina ocurre en algún punto del tiempo durante este periodo?

Una modificación a este problema viene dado cuando las observaciones son tomados solo en algún punto del tiempo $T_1\,T_2.....T_n$ en el intervalo T. La pregunta de la ruina viene dada si U es negativa en uno o más de estos puntos específicos de tiempo.

¿Cuál es el resultado si el tiempo T en (b) tiene a infinito? Esto es ¿Cuál es la probabilidad que algún negocio nunca se vaya a la quiebra?

Esta pregunta y otras que provengan naturalmente de las anteriores serán tratadas de forma amplia en este trabajo. se parte del hecho de que el valor especial simplificado es considerado cuando se asume que todos los reclamos (por ejemplo las sumas aseguradas en el seguro de daños o las sumas aseguradas en el seguro de vida) son iguales al monto; en este caso, las fluctuaciones provienen únicamente de la variación aleatoria en el número de reclamos.

El presente trabajo se constituye como un estudio de tendencia didáctica y proporciona las bases fundamentales de la teoría del riesgo y del reaseguro y puede ser material de apoyo para los alumnos y docentes y en general para total persona relacionada con el manejo de riesgos y en general la administración de riesgos.

EL RIESGO

Definición y conductas del decisor frente al riesgo.
El riesgo y el enfrentamiento o lucha contra éste, son consustanciales al ser humano. Toda actividad humana comporta algún tipo de riesgo y, por esta razón, con el ser humano nacen y se desarrollan las necesidades de prevención y seguridad.
El riesgo tiene dos conceptos o definiciones: "contingencia o proximidad de un daño" y "cada una de las contingencias que pueden ser objeto de un contrato de seguro". En la terminología aseguradora se emplea también este concepto con dos *acepciones: objeto asegurado y posibilidad de que, por azar, se produzca un* acontecimiento que origine una necesidad económica o patrimonial. Su posible aparición real se previene y garantiza en una póliza porque, "...la principal finalidad del seguro es transformar incertidumbre en certidumbre proporcionando sensación de seguridad al asegurado. Las empresas de seguros asumen riesgos que agrupados convierten una gran pérdida potencial en otra pequeña y cierta".
El negocio del riesgo se traduce en un intercambio de probables pérdidas contra el pago cierto de primas por su cobertura. También como el "cambio de reservas constituidas con las primas pagadas y el capital societario, contra el proceso probabilístico determinado por la indemnización de los daños cubiertos que realmente se produzcan".
El concepto de riesgo <u>matemáticamente</u> se fundamenta en el cálculo de probabilidades y lleva implícita la idea de cobertura por parte del asegurador.
<u>Desde el punto de vista empresarial</u>, se califica y evalúa como una situación similar a la que denominamos riesgo empresarial o incertidumbre ante la obtención de un resultado que puede representar ganancias o pérdidas.
Las empresas aseguradoras están afectadas por riesgos económicos (*estructurales, coyunturales, de mercado, etc.) como las demás empresas y,* también, (debido a la actividad que desarrollan, aceptando riesgos de otras personas o empresas), por el llamado "riesgo estadístico o técnico-asegurador". Este riesgo de empresa se fundamenta en las desviaciones que pueden producirse entre las prestaciones esperadas (calculadas por métodos estadísticos y actuariales), representadas en las primas de seguro cobradas a priori a los asegurados (P), y las prestaciones pagadas (S).
El riesgo de empresa ha sido objeto de numerosos estudios y teorías, como la Teoría del Riesgo Individual, la Teoría del Riesgo Colectivo y la moderna Teoría del Riesgo, que proporcionan modelos matemáticos para determinar y analizar las desviaciones aleatorias de las prestaciones respecto a las primas desde un punto de vista global para el conjunto de riesgos asumidos por la empresa. Respecto a sus características, el riesgo tiene, esencialmente, un carácter: incierto o aleatorio, posible, concreto, lícito, fortuito y de contenido económico estando además, en constante evolución. Los avances científicos y el desarrollo de la sociedad han propiciado la aparición de una serie de nuevos riesgos derivados de la actividad individual, empresarial y social.
Conductas del decisor frente al riesgo.
Tomar una decisión ante el riesgo significa que éste se conoce. Pueden adoptarse varias actitudes ante el mismo y, si empleamos como criterio principal los

elementos subjetivos, se pueden agrupar en tres: aversión, indiferencia o preferencia por el riesgo. Además, un mismo individuo puede adoptar una u otra según sea el tipo de riesgo al que se someta e incluso, adoptar distintas actitudes ante el mismo tipo de riesgo. El aspecto subjetivo que el seguro conlleva se delimita a partir de la insuficiencia del resto de las posturas. Desde antiguo, el hombre ha utilizado diversos métodos para reducir las consecuencias desfavorables de los riesgos. Actualmente, en las empresas el Risk Management o Gerencia de Riesgos protege elementos y recursos de la misma contra daños y pérdidas derivados de un posible siniestro, lo que implica (básicamente) la identificación, análisis y cuantificación de los riesgos, técnicas de prevención, aspectos relacionados con la protección, seguridad, cobertura de seguros, recuperación y reconstrucción, etc. Analizando el comportamiento humano ante el riesgo y eligiendo las distintas actitudes que pueden adoptarse, se pueden considerar las siguientes:

1)- Autoasunción del riesgo. Actitud de indiferencia ante el peligro que supone no tomar medidas de previsión para combatir el riesgo.

2)- Prevención del riesgo. Conjunto de medidas materiales que tienden a eliminar o aminorar las consecuencias del siniestro, limitando su gravedad y magnitud. Se pueden distinguir medios de protección, prevención, salvamento, etc.

3)- Previsión. Medidas que el sujeto adopta para obtener un fondo económico que puede hacer frente, en el futuro, a las consecuencias de un siniestro. Se puede distinguir entre: ahorro, autoseguro y seguro, en función de que se transfiera o no el riesgo a un tercero y se pueden combinar varias técnicas.

El ahorro y el autoseguro son de carácter individual, mientras que el seguro es una fórmula colectiva de protección. Conceptualmente se diferencian en varios aspectos: tiempo, carácter y rendimiento.

3.a) Ahorro. Dedicación de parte de la renta de las unidades económicas a la formación de capitales futuros que -sin aplicación concreta- pueden aminorar las consecuencias económicas negativas de un siniestro.

3.b) Autoseguro. Vinculación de un patrimonio a la posible ocurrencia de un siniestro sin intervenir las entidades aseguradoras, pero la masa patrimonial que da unida específicamente al pago o compensación de posibles siniestros y contempla la organización de los medios relacionados con dicho fin. En su constitución intervienen ciertos principios económico financieros.

3.c) Seguro. Institución específica para cobertura de riesgos y alternativa que permite transformar eventualidades (a las que están sometidos los patrimonios) en probabilidades soportables gracias a su organización empresarial.

3.d) Combinación de varias técnicas. Para contrarrestar podrán combinarse las técnicas analizadas o buscar una fórmula exclusiva. Las grandes empresas (debido a la dispersión de riesgos homogéneos y a la capacidad financiera) podrán articular mejor una política que combine todas las técnicas posibles. Particulares, pequeñas y medianas empresas deberán utilizar el sistema de transferencia de riesgos a las compañías aseguradoras. Una de las combinaciones de técnicas más usuales es eliminar y/o prevenir riesgos, transferirlos, autoasegurarse y utilizar el seguro (obligatorio o libre), según el riesgo de que se trate.

CAPÍTULO UNO

DISTRIBUCIÓN DEL NÚMERO Y DE LA CUANTÍA DE LOS SINIESTROS

Los modelos probabilísticos en que se basan las principales distribuciones de los modelos de daños comprenden:
La distribución de probabilidad del número de siniestros.
La distribución de probabilidad de indemnizaciones

Comenzamos con la distribución del numero de siniestros, teniendo como principales distribuciones las siguientes:

1 .1 Distribución de Poisson

A partir del esquema de Bernouilli (probabilidad de obtener n bolas blancas en N extracciones con reemplazamiento):

$$P_n = \binom{N}{n} p^n q^{N-n} = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

Donde se tiene que:
$N \to \infty$ (Número de expuestos al riesgo tiende a infinito.)
$p \to 0$ (probabilidad de siniestro muy pequeña.)
$Np \to \lambda$ (El número medio de siniestros en el periodo de observación sea constante para cualquier período.)
Se tiene que:

$$\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \to \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Cuyos parámetros son:
Media = λ
Varianza = λ

La distribución de Poisson se basa en las siguientes hipótesis:

1- Homogeneidad en el tiempo: λ es constante para cualquier período de observación (mes, años, etc.), con independencia del tiempo físico (año 85, 80,90 etc.,).
2- Efecto de contagio nulo: la distribución de Poisson procede del paso al límite de la distribución binomial, la cual está asociada al esquema del Bernouilli que es el siguiente tipo: una urna contiene N bolas, de las cuales n son *blancas y las N – n son negras. Cada vez que se extrae una bola* se devuelve la misma a la urna; es decir, la probabilidad de la próxima extracción no resulta modificada. En nuestro caso ello equivaldría a admitir que el acaecimiento de un siniestro no tiene influencia sobre los demás expuestos al riesgo (contagio positivo) o no modifica la probabilidad del elemento siniestrado debido, por ejemplo, a una mayor precaución

En este sentido, la interpretación del contagio en el seguro se ha fundamentado mediante una sobre consideración:

a) Que al producirse un siniestro (por ejemplo de un automóvil) influya la propensión de otros objetos (es decir, conductores) hacia dicho siniestro.
b) Que al producirse un siniestro se modificara solamente la probabilidad del objeto correspondiente. Por ejemplo, un individuo que ha sufrido un accidente, en el futuro, puede mostrar una mayor propensión al accidente por pérdida de su anterior seguridad (más miedo y nervios). En este caso se trata de un contagio positivo. Por el contrario, puede suceder que dicha propensión al siniestro disminuya debido a una mayor precaución y *experiencia. En este caso se trata de un contagio negativo.*

1.2 Proceso de Poisson

Sea N_t la variable aleatoria asociada al número de siniestros en el intervalo [o,t) de forma que
$P[N_r = n] = P_n(t)$

Se demuestra que si el proceso estocástico $\{N_t;\ t \geq 0\}$ verifica las condiciones:

Es de incrementos independientes.
Es de incrementos estacionarios
La probabilidad de que en un instante $t' \in [0,t)$ ocurra más de un siniestro, y de que sucedan infinitos siniestros en un intervalo finito es nula entonces N_t sigue el modelo de Poisson, es decir:

$$P[N_t = n] = P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Donde: λ es el número medio de siniestros correspondiente a un intervalo unitario (parámetro también denominado intensidad de siniestralidad)

La primero hipótesis supone la ausencia de contagio, mientas que la tercera supone la exclusión de los siniestros múltiples, por lo que a efectos prácticos un accidente en el que intervinieran dos o más vehículos habría que considerarlo como un único siniestro.
Asimismo, se ha estudiado el proceso de riesgo obtuvimos también la distribución de Poisson asumiendo que en un intervalo cualquiera $(t, t+\Delta t)$ se producía a lo sumo el acaecimiento de un solo siniestro con una probabilidad dependiente de t pero no de n.
Una propiedad importante de esta distribución es que cumple el teorema de la adición por lo que si, por ejemplo, existe una cartera de pólizas compuesta por r *subcarteras, en las que el número de siniestros sigue la ley de Poisson con* parámetros $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_r$, la distribución correspondiente a la cartera total seguirá también el modelo de Poisson con parámetro: $\lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$

En el supuesto que λ *dependa del tiempo físico* t (*proceso no estacionario*) tal
Como hemos visto, llamando τ *(tiempo operativo*) se tiene que:

Tiempo operativo: $\int_0^t \lambda(u)du$

Además se tiene que: $P[N_{\tau} = n] = P_n(t) = \frac{\tau^n}{n!}e^{-\tau}$

El significado actuarial de τ consiste en que el paso del tiempo no se mide en años, horas segundos, son en número esperado de siniestros. Por ejemplo τ =200 equivale a tos años para una entidad que tenga 100 siniestros, media, al año.

1.3 Distribución de Poisson ponderada

Surge al considerar λ como variable aleatoria. En efecto, partiendo de la ley de Poisson que nos mide la probabilidad de que un asegurado tenga n siniestros en un período de observación unitario (por ejemplo, un año),

$$P[N_t = n / \lambda] = \frac{e^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$$

Teniendo en cuenta que debido a factores de naturaleza objetiva (por ejemplo, características del vehículo) y de naturaleza subjetiva (características del conductor que influyen en el riesgo, el parámetro{λ} no es constante, es admitir implícitamente que la cartera se compone de subcarteras homogéneas con valores de {λ} diferentes.

Si hacemos λ = t • v, donde t es una constate y {v} la variable aleatoria que recoge la heterogeneidad de la cartera, y denominado U´(v) la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria {v} la probabilidad de que un seguro elegido al azar en la cartera de la entidad tenga n siniestros vendar dada por:

$$P_0(t) = \int_0^{\infty} \frac{(tv)^0}{0!}e^{-tv}dU(v) = \int_0^{\infty} e^{-tv}dU(v)$$

Resultando los parámetros:

$$-Media \equiv E[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} \frac{(tv)^n}{n!}dU(v) = -Media \equiv E[N_t] = \sum_{n=0}^{\infty} n \int_0^{\infty} \frac{(tv)^n}{n!}dU(v) =$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(tv)^n}{n!}e^{-tv}dU(v) = \int_0^{\infty} tvdU(v)$$

ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \frac{(tv)^n}{n!}e^{-tv} = e^{-tv}\left[tv + \frac{(tv)^2}{1!} + \frac{(tv)^3}{2!} + \dots\right] = e^{-tv}tve^{tv} = tv$$

$$E[N_t] = t\int_0^{\infty} vdU(v) = t \cdot E(v)$$

$$-Varianza \equiv \sigma^2[N_t] = E[N_t]^2 - \{E[N_t]\}^2$$

$$E[N_t]^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \cdot P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \int_0^{\infty} \frac{(tv)^n}{n!}e^{-tv}dU(v)$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(tv)^n}{n!}e^{-tv}dU(v) = \int_0^{\infty} (t^2v^2 + tv)dU(v)$$

ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(tv)^n}{n!} e^{-tv} = e^{-tv}\left[(t^2v^2 + tv\left(1 + tv + \frac{(tv)^2}{2!} + \frac{(tv)^3}{3!} + \ldots\right)\right] = e^{-tv}(t^2v^2 + tv)e^{tv} = t^2v^2 + tv$$

$$\sigma^2[N_t] = \int_0^{\infty} (t^2v^2 + tv)dU(v) - t^2\{E(v)\}^2 = t^2E(v)^2 + tE(v) - t^2\{E(v)\} =$$

$$= t^2\left\{E(v)^2 - \{E(v)\}^2\right\} + tE(v) = t^2\sigma^2(v) + tE(v)$$

Se observa que en estas condiciones la varianza del numero de siniestros es siempre mayor la esperanza matemática de este numero. Solo será igual cuando $\sigma^2(v) = 0$, es decir λ sea una variable causal (distribución de Poisson del numero de siniestros).

Función característica $\equiv \varphi(is) = E\left[e^{isN_t}\right]$

$$E\left[e^{isN_t}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} \cdot P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} \int_0^{\infty} \frac{(tv)^n}{n!} e^{-tv} dU(v) =$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} \frac{(tv)^n}{n!} e^{-tv} dU(v) =$$

$$= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-tv} \frac{(e^{is} \cdot tv)^n}{n!} dU(v) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^{is} \cdot tv)^n}{n!} dU(v) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-tv} \cdot e^{e^{is}tv} dU(v) = \int_0^{\infty} e^{-tv + e^{is}tv} dU(v) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tv(e^{is}-1)} dU(v)$$

es decir,

$$\varphi(is) = \int_0^{\infty} e^{tv(e^{is}-1)} dU(v)$$

como

$$P_0(t) = \int_0^{\infty} \frac{(tv)^0}{0!} e^{-tv} dU(v) = \int_0^{\infty} e^{-tv} dU(v)$$

también resulta $\varphi(is) = P_0\left[t(1 - e^{is})\right]$

1.4 Fluctuaciones en las probabilidades básicas a lo largo del tiempo.

Tomando nuevamenteen cuenta al proceso de Poisson

$$P[N_t = n / \lambda] = \frac{e^{-\lambda}}{n!} \lambda^n$$

Si consideramos un período de tiempo suficientemente amplio es evidente que, en general el parámetro (λ) estará sujeto a fluctuaciones de carácter aleatorio que exigirán su introducción en el modelo mediante la consideración de (λ) como variable aleatoria dependiente del tiempo (t).
Para simplificar el proceso estocástico del número de siniestros [o,t) supongamos

que la intensidad de siniestralidad (λ) es constante tres aspectos a las unidades de tiempo elegidas (por ejemplo, años). Asumiendo dicha hipótesis, sea ahora (v) la variable aleatoria que recoge cada año fluctuaciones o diferencias, en valor absoluto, entre las realizaciones concretas del número de siniestros (N) y la medio de la distribución (E[λ])

A partir de la definición de la variable aleatoria $\lambda = k \bullet v$ donde k es una constante, la probabilidad de que una póliza tenga n siniestros en el primero año (t= 1),

$$P\left[N_1 = n|\lambda\right] = P_n(1) = \int_0^\infty \frac{(Kv)^n}{n!} e^{-k\cdot v} U'(v)\,dv = \int_0^\infty \frac{(Kv)^n}{n!} e^{-Kv}\,dU(v)$$

U(v)= función de distribución de probabilidad de (v).
Generalizando el proceso para el periodo $[0,t)$ la probabilidad de acaecimiento de n siniestros en t años es:

$$P\left[N_t = n|\lambda\right] = P_n(t) = \int_0^\infty \frac{[Kv(t)]^n}{n!} e^{-Kv(t)}\,dU^{*(t)}(v)$$

siendo $U^{*(t)}(v)$ La convolución t-esima de U(v).

$$v(t) = \sum_{i=1}^{t} v_i$$

En virtud de la hipótesis anteriormente establecida, las fluctuaciones anuales en el número de siniestros (Vi) son variables aleatorias igualmente distribuidas en independientes (i= 1,2,3,..,t)
Por lo tanto nos ha surgido nuevamente la <<distribución de Poisson ponderada>> cuyos parámetros E[N_t[y σ^2 [N_t].

1.5 Distribución binomial negativa

Al tenerse en cuenta el efecto de contagio resulta fundamental es estudio de la distribución binomial negativa, modelo que puede ser definido principalmente de tres formas:

a) Como límite de la distribución de Polya-Eggenberger, para el caso de sucesos raros y contagio débil.
b) Como distribución de Poisson ponderada, cuando el parámetro de la misma sigue una distribución gamma. Esto aparte de la definición del proceso de Polya como proceso estocástico de contagio positivo.
c) En el esquela de urnas de Bernouilli, como el número de pruebas a realizar hasta alcanzar un determinado número de éxitos.

De todas estas definiciones, las que mayor interés presentan desde el punto de vista actuarial son la a y la b.

1.6 Distribución de Polya-Eggenberger

Su esquema es el siguiente: Consideramos una urna con (a)bolas blancas y (b) bolas negras (a + b = N). Después de cada extracción se devuelve a la urna junto con la bola extraída, c bolas del correspondiente color. Esto supone que la extracción de la bola de un color, aumenta la probabilidad de la bola del mismo color en la próxima extracción. (En nuestro caso se produce el efecto de contagio). La probabilidad de en n extracciones, sacar primero r blancas y después s negras (r + s = n) es:

$$A=\frac{a(a+c)(a+2c)\ldots[a+(r-1)c]b(b+c)(b+2c)\ldots[b+(s-1)c]}{(a+b)(a+b+c)(a+b+2c)\ldots[a+b+(r-1)c](a+b+rc)\ldots[a+b+(n-1)c]}$$

$$A=\frac{\frac{a}{c}\left(\frac{a}{c}+1\right)\left(\frac{a}{c}+2\right)\ldots\left(\frac{a}{c}+r-1\right)\frac{b}{c}\left(\frac{b}{c}+1\right)\left(\frac{b}{c}+2\right)\ldots\left[\frac{b}{c}+(s-1)\right]}{\frac{N}{c}\left(\frac{N}{c}+1\right)\left(\frac{N}{c}+2\right)\ldots\left(\frac{N}{c}+r-1\right)\left(\frac{N}{c}+r\right)\ldots\left[\frac{N}{c}+n-1\right]}$$

y llamando;

$$\frac{a}{N}=p;\frac{b}{N}=q;\frac{c}{N}=\delta;N=a+b$$

y teniendo en cuenta la indiferencia en las sucesiones de cada n extracciones la probabilidad de r blancas en n extracciones será:

$$P_r=\binom{n}{r}A=\frac{\left(\frac{p}{\delta}+r-1\right)\left(\frac{q}{\delta}+s-1\right)}{\binom{\frac{1}{\delta}+n-1}{n}}$$

Si $\delta=0$ (efecto de contagio nulo) será c=0, y tendremos la distribución binomial: $P_r=\binom{n}{r}p^r q^{n-r}$

Del que el limite es la distribución de Poisson.
La distribución binomial negativa surge como límite de la distribución de Polya-Eggenberger par *sucesos raros y contagio débil.*

La hipótesis son las siguientes:

$n\rightarrow\infty$ (numero de expuestos al riesgo tiende a infinito)
$p\rightarrow 0$ (probabilidad de siniestro es muy pequeña)
$\delta\rightarrow 0$ (contagio débil)
$np\rightarrow\lambda$ (media)
$n\delta=\frac{1}{h}$

Después de pasar al límite se tiene la siguiente distribución, llamada<<binomial>>:

$$P_r=\binom{-\lambda h}{r}\left(-\frac{1}{1+h}\right)^r\left(\frac{h}{1+h}\right)^{\lambda h}$$

Cuyos parámetros son:
λ= Media. Es la misma que la correspondiente a la distribución de Poisson simple (sin ponderar)

$\lambda\left(1+\frac{1}{h}\right)$=Varianza Resulta superior a la de la distribución de Poisson,debido a:

h= Parámetro que mide el efecto contagio.

Así pues:
Cuando h es grande (el efecto de contagio es pequeño), la Varianza es pequeña. Si h→ ∞ desaparece el contagio y su cumple:

$$\binom{-\lambda h}{r}\left(-\frac{1}{1+h}\right)^{r}\left(\frac{h}{1+h}\right)^{\lambda h} \rightarrow \frac{\lambda^{r}}{r!}e^{-\lambda}$$

--*cuando h es pequeño(el efecto de contagio es grande) la varianza es grande.*

1.7 Distribución binomial negativa a partir de la de Poisson ponderada

Consideremos nuevamente la función de cuantía correspondiente a una clase de riesgo determinada $P[N_t = n] = P_n(t) = \int_0^{\infty} P(n/tv)dU(v)$

En la que $P(n/tv) = \frac{(tv)^n}{n!}e^{-tv}$

Donde:
t = período de observación (parámetro que ajusta la media y al considerar la intensidad de siniestralidad función del tiempo).
v = Media en el período de observación unitario. Variable aleatoria
tv =Media en el período de observación [o,t). Variable aleatoria.
n = Número de siniestros.
U(v)=Función de estructura de la clase considerada.

Al admitir que v varía entre los distintos grupos o pólizas de la clase considerada, su función de distribución, que nos permite tratar esta heterogeneidad, la denominamos U(v)
Las principales características de esta distribución son:

Media

$$E(v) = \int_0^{\infty} vU'(v)dv = \int_0^{\infty} vdU(v)$$

$-Varianza$

$$\sigma^2(v) = \int_0^{\infty} v^2 dU(v) - \{E(v)\}^2$$

Función característica $\varphi_v(is) = \int_0^{\infty} e^{isv}dU(v)$

En general, sin información previa no es posible describir la distribución de estructura o riesgo U(v). No obstante si asumimos la hipótesis de que dicha distribución es de tipo gamma, cuya función de densidad es

$$U'(v) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)}v^{mh-1}e^{-hv}; v \geq 0$$

$$Media = m; Varianza = \sigma^2 = \frac{m}{h}$$

Y cuyos parámetros son:

En tal caso, de la distribución de Poisson ponderada se llega a la binomial negativa. En efecto:

$$P_n(t) = \int_0^\infty \frac{(tv)}{n!} e^{-tv} \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} v^{mh-1} e^{-hv} dv = \frac{t^n h^{mh}}{n!\Gamma(mh)} \int_0^\infty \left[v^{n+mh-1} e^{-v(t+h)} dv\right]*$$

siendo * una integral en la que haciendo un cambio de variable:

$$v(t+h) = y; v = \frac{y}{t+h}; dv = \frac{dy}{t+h}$$

$$\int_0^\infty v^{n+mh-1} e^{-v(t+h)} dv = \int_0^\infty \left(\frac{y}{t+h}\right)^{n+mh-1} e^{-y} \frac{dy}{t+h} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{(t+h)^{n+mh}} \cdot y^{n+mh-1} \cdot e^{-y} \cdot dy = \frac{\Gamma(n+mh)}{(t+h)^{n+mh}}$$

quedando finalmente:

$$P_n(t) = \frac{t^n h^{mh}}{n!\Gamma(mh)} \cdot \frac{1}{(t+h)^{n+mh}} \Gamma(n+mh) = \frac{\Gamma(n+mh)}{n!\Gamma(mh)} \left(\frac{t}{t+h}\right)^n$$

$$\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} = \binom{n+mh-1}{n} \left(\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} =$$

$$= \binom{-mh}{n} \left(-\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}$$

donde

$$(-1)^n \binom{-mh}{n} = \binom{n+mh-1}{n}$$

1.8 Función característica de la binomial negativa

Partiendo de la función característica de la distribución de Poisson ponderada

$$\varphi(is) = \int_0^\infty e^{tv(e^{is}-1)} U'(v) dv$$

considerando

$$U'(v) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} v^{mh-1} e^{-hv}$$

$$\varphi(is) = \int_0^\infty e^{tv(e^{is}-1)} \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} v^{mh-1} e^{-hv} dv$$

tendremos

$$\varphi(is) = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \int_0^\infty e^{-v[h - t(e^{is}-1)]} \cdot v^{mh-1} dv = \frac{h^{mh}}{\Gamma(mh)} \cdot \frac{\Gamma(mh)}{[h - t(e^{is}-1)]^{mh}}$$

$$\varphi(is) = \left[1 - \frac{t}{h}(e^{is}-1)\right]^{-mh}$$

la función acumulativa en desarrollo de serie nos da los momentos acumulados serán:

$$\Psi(t) = \lg \varphi(is) = -mh \lg\left[1 - \frac{t}{h}(e^{u} - 1)\right] =$$

$$= -mh\left[-\frac{t}{h}(e^{u} - 1) - \frac{t^2}{2h^2}(e^{u} - 1)^2 ...\right] =$$

$$= -mh\left[-\frac{t}{h}\left(\frac{is}{1!} + \frac{(is)^2}{2!} + ...\right) - \frac{t^2}{2h^2}\left(\frac{is}{1!} + \frac{(is)^2}{2!} + ...\right)^2 - ...\right]$$

Parámetros:

$$\chi_1 = Coeficiente\frac{is}{1!} = Media = m \cdot t = E(v) \cdot t$$

$$\chi_2 = Coeficient \quad e\frac{(is)^2}{2!} = Varianza \quad = mt + \frac{mht^2}{h^2} = mt + \frac{mt^2}{h}$$

$$\chi_2 = \sigma^2 = mt\left(1 + \frac{t}{h}\right)$$

y como se expuso anteriormente E(v)=m

Casos :

1.Cuando h→∞ y siempre que m sea constante, la distribución de estructura o riesgo U(v) tiende a la distribución causal, es decir:

U(v) ⇒ P[v= m] = 1

Esto significa que se ha perdido el efecto de heterogeneidad y que todas las unidades de riesgo tienen la mis a medias de siniestralidad. En este sentido, el parámetro h traduce el grado de heterogeneidad de ésta, tato mayor cuanto más pequeño sea h.

Por otra parte, vamos a demostrar que cuando h→∞ la binomial negativa tiende a la de Poisson, con la misma media mt.

$$\lim_{h \to \infty} \varphi(is) = \lim_{h \to \infty}\left[1 - \frac{t}{h}\left(e^{u} - 1\right)\right]^{-mh} = e^{\lim_{h \to \infty}(-mh)\left[1 - \frac{t}{h}\left(e^{u} - 1\right) - 1\right]} =$$

$$= e^{(-m)\left[-t\left(e^{u} - 1\right)\right]} = e^{mt\left(e^{u} - 1\right)}$$

2 Cuando h→0 el grado de heterogeneidad de la cartera se hace máximo

1.9 Significado del parámetro h

De acuerdo con lo a que acabamos de ver, el parámetro h admite las sig. Interpretaciones actuariales.

El grado de heterogeneidad de la clase o cartera objeto de estudio, consecuencia de que la intensidad de siniestralidad (v) es una variable aleatoria entre los distinguidos grupos que componen la cartera.

El efecto de contagio positivo en la distribución del número de siniestros. Cuando h→∞, el efecto de contagio es nulo (distribución de Poisson).

La existencia de perturbaciones aleatorias en el modelo, debidas a factores de naturaleza *exógena (entorno económico-social, variaciones climáticas, etc.) que* originan fluctuaciones aleatorias en el número de siniestros a lo largo

1.10 Homogenización de riesgos. Aplicaciones

Aun después de hacer la clasificación de una cartera del seguro del automóvil en clases homogéneas, es decir con los mismos niveles en los distintos factores de riesgo considerados, mediante el análisis del factor se ha llegado a la conclusión de que 90% de la Varianza total corresponde a la heterogeneidad en la aparición de los accidentes, dentro de una misma clase de tarifa, es decir, entre los vehículos que tienen la misma zona, uso, potencia y tipo de construcción. Esta heterogeneidad exige aplicar la binomial negativa para que la bondad del ajuste sea buena.

	%	Varianza
Zona..................	6,5	0,0 304
Uso y profesión......................	2,0	0,0092
Potencia................................	0,3	0,0015
Tipo de construcción	1,2	0,0059
Otras causas..........................	90,0	0,4254
Varianza total	100,00	0,4724

(Heterogeneidad intrínseca de la clase considerada)

Aplicaciones

Consideremos en primer término una compañía aseguradora de que un determinado año observa que de una clase homogénea compuesta por 23.589 vehículos de una determinada característica (su potencia comprendida entre 24/25 Hp)., se presentan los siguientes resultados:

Numero de Siniestros X_i	Numero de Vehículos F	Distribución ajustada	
		Poisson	Bino-negativa
0	20.592	20.439	20.607
1	2.651	2.928	2.617
2	297	212	320
3	41	0	40
4	7	0	0
5	0	0	0
6	1	10	5
	23.589	23.589	23.589

Calculada la χ^2 para ambos ajustes se tiene

Poisson $\chi^2 \cong 157$

Bin-neg $\chi^2 \cong 3$

Al nivel del 5% se tiene:

$P(\chi_5^2 > 11.070) = 0.05$ para 5 grados de libertad (Poisson)

$P(\chi_4^2 > 9.488) = 0.05$ *para 4 grados de libertad (bin-neg)* luego el ajuste de Poisson se rechaza i el de la bin-neg se acepta .la estimación de los parámetros se realiza como sigue:

$$\hat{m} = \bar{X} = 0{,}144\,; \sigma^2 = s^2 = \left(1 + \frac{1}{h}\right)\bar{X}\,; h = \frac{\bar{X}}{s^2 - \bar{X}}$$

el coeficiente de heterogeneidad de esta cartera será

$$h = \frac{0{,}144}{0{,}1689} = 5{,}78$$

De un estudio de responsabilidad civil de autos, PH se obtuvo en dos años consecutivos (t y t+1)

Numero de Siniestros	Numero de Vehículos		Distribución Estimada (B.N)	
x_i	t	t+1	t	t+1
0	136	13	139,95	130,24
1	23	30	23,15	29,10
2	4	3	4,04	4,13
3	1	1	0,71	0,47
4 y más	0	0	0,15	0,06
	164	164	164	164

Los valores muéstrales de la χ^2 de Pearson son:

$\chi^2 = 027$ para el año t

$\chi^2 = 1.00$ para el año t+1

Por lo que la hipótesis de la binomial-negativa se acepta también para este caso.

Para la teoría relacionada con los modelos probabilísticos que intervienen en las distribuciones de los siniestros; en primer lugar, se impone una clasificación de los riesgos en clases homogéneas. Conviene distinguir dos casos:

a) Que no existan sumas aseguradas que se puedan relacionar con el valor del interés asegurado. Por ejemplo, el segur de responsabilidad civil con garantía máxima (que puede ser ilimitada).
b) Que existan sumas aseguradas susceptibles de relacionarse con el valor del interés asegurado dando lugar a los casos de infraseguro, seguro pleno y sobre seguro

Ocurrido un siniestro, da lugar a una indemnización que incluso tendiendo en cuenta la aplicación de la regla proporcional ha de ser tal que:

$$0 \leq X = \frac{1}{S} \leq 1$$

donde :

I= Indemnización

S= Suma asegurada

X= Cuantía del siniestro (por unidad). Variable aleatoria cuya distribución se va a considerar.

Teniendo en cuenta que se trata de una distribución de tipo continuo, además de los modelos bien conocidos *gamma, beta, normal y Pareto,* conviene destacar las siguientes distribuciones de probabilidad respecto a la variante <<cuanto de un siniestro>>.

1.11 Distribución logarítmico-normal

La fundamentación de esta distribución está basada en el siguiente razonamiento:
Supongamos que el tamaño de un siniestro (cuantía) se debe a unas causas
$X_s =$ Tamaño del siniestro debido a las s primeras causas.
$p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_s =$ causas o variables de impulso.
Hagamos dos hipótesis:
1ª) $p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots, p_s =$ variables independientes
2ª) supondremos que $\Delta X_s = p_{s+1} \cdot X_s$
$\Delta X_s =$ incremento de cuantía del siniestro por la incidencia de la causa p_{s+1} habiéndose producido ya las $\rho_{i(i=1,2,\ldots,s)}$

De aquí $p_{s+1} = \dfrac{\Delta X_s}{X_s}$ y $\sum_{s=0}^{n-1} p_{s+1} = \sum_{s=0}^{n-1} \dfrac{\Delta X_s}{X_s}$

Donde $\sum_{s=0}^{n-1} p_{s+1} =$ suma de las primeras n causas.

Pasando al limite

$$\sum_{\substack{s=0 \\ \Delta \to 0 \\ n \to x}}^{n-1} \frac{\Delta X_s}{X_s} = \int_1^x \frac{d_x}{x} = \log X \quad (X_o = 1,\ \text{unidad de medida})$$

al sumar *s* variables independientes y al hacer tender $n \to \infty$ damos entrada al teorema central del limite con lo que la suma $\eta = \sum_{s=0}^{n-1} \rho_{s+1}$ tiende a una distribución normal $\eta \to N(\alpha;;\sigma)$. Pero si η es $N(\alpha;;\sigma)$ y η=log,X, se dice que X es logarítmico-normal.

Función de distribución y densidad. La ley de probabilidad de η es

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\alpha}{\sigma}\right)^2}$$

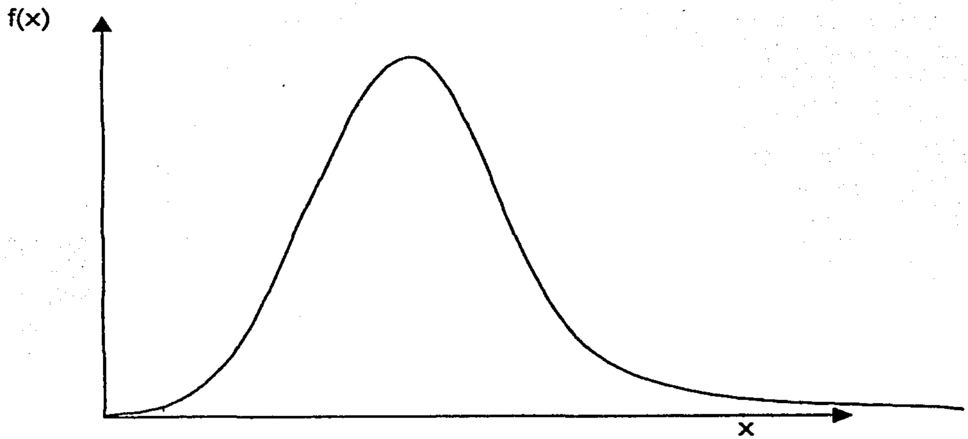
y haciendo un cambio de variable: $Y = \log x; dy = \left|\frac{1}{x}\right| dx$

la función de densidad de x sera: $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \alpha)^2}{2\sigma^2}}$

siendo su función de distribución:

$$P[\rho \leq x] = F(x) = \int_0^x \frac{1}{u\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log u - \alpha)^2}{2\sigma^2}} du$$

su representación esta dada por la siguiente gráfica:



Sus parámetros son:

$$Media = \alpha_1 = e^{\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$$Varianza = \alpha_2 - \alpha_1^2 = e^{2\sigma+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$$

que se obtienen de un caso particular

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \alpha)^2}{2\sigma^2}} dx$$

haciendo un cambio de variable

$$y = \log x; x = e^y; dx = e^y dy$$

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ny} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-y} e^{-\frac{(y-\alpha)^2}{2\sigma^2}} e^y dy = e^{n\alpha + \frac{n^2}{2\sigma^2}}$$

que al hacer n= *is* nos da la expresión de la función característica de (η):

$$\varphi_n(s) = e^{\alpha is + \frac{(is)^2}{2\sigma^2}}$$

Una propiedad importante es que el producto de variables log-normales independientes es una variable log-normal con parámetro igual a la suma de los parámetros.

1.12 Distribución logarítmico-normal ponderada

Si admitimos que el parámetro α de la distribución logarítmico-normal toma un valor diferente de un asegurado a otro, vamos a considerar que la cartera de riegos es heterogénea con respecto a la variante <<coste del siniestro>> y el parámetro (α) , que traduce esta heterogeneidad (suponemos que la cartera es homogénea con respecto a σ^2) se distribuye a priori según la ley normal de media **M** y Varianza γ^2

Es decir,

$$g(\alpha)=\frac{1}{\gamma\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}(\frac{\alpha-M}{\gamma})^2}$$

donde para un siniestro al azar la función de densidad del costo es (logaritmico normal ponderada):

$$f(y|\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{y-\alpha}{\sigma})^2\cdot g(\alpha)\cdot d\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\sigma}^2+\gamma^2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{(y-M)}{\sqrt{\sigma^2+\gamma^2}}\right\}^2};\begin{cases}E[\eta/\alpha]=E\{E|\log x\}\\ \sigma^2(\eta/\alpha)=\sigma^2+\gamma^2\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+y^2\sqrt{2\pi}}}\cdot\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\log x-M}{\sqrt{\sigma^2+y^2}}\right\}^2}$$

de donde

$$E(x)=e^{\left\{M+\frac{(\sigma^2+\gamma^2)}{2}\right\}}=e^{\left\{E\{E[\log x]\}+\frac{Var(\log x)}{2}\right\}}$$

$$Var(x)=\{E(x)\}^2\cdot\{\exp\cdot[Var(\log x)]-1\}$$

En resumen, la ley logarítmico-normal ponderada surge al considerar el parámetro (α)- esperanza matemática del logaritmo neperiano del coste de un siniestro – como variable aleatoria, es decir, que toma valores diferentes de una póliza a otra dentro de la clase considerada, mientras que el segundo parámetro –la Varianza del logaritmo neperiano del coste de un siniestro- asumimos que tiene un valor constate durante el período de observación

1.13 Distribución por polinomios exponenciales

Su función de densidad de probabilidad es:

$$\alpha_3\beta_3e^{-\beta_3x}+\alpha_2\beta_2e^{-\beta_2x}+\ldots+\alpha_n\beta_ne^{-\beta_nx};\begin{Bmatrix}x\geq 0\\ \alpha_r,\beta_r\in\Re^+\end{Bmatrix}\forall r=1,2,\ldots,n$$

siendo

$$g(x)=0$$
$$para x\prec 0$$
$$g(x)=\int_0^x g(x)dx$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1$$

su función característica:

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{isx}g(x)dx=\sum_{r=1}^{n}\frac{\alpha_r\beta_r}{\beta_r-is}$$

$sus \ldots parametros$

$$Media = E = \sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{\beta_r}$$

$$Varianza = \sigma^2 = 2\sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{\beta_r} - \left(\sum_{1}^{n} \frac{\alpha_r}{\beta_r} \right)^2$$

$donde$

$$\alpha_2(x) = 2\sum_{r=1}^{n} \frac{\alpha_r}{\beta_r}$$

1.14 Distribución de Weibull

La distribución de Weibull se define como una distribución de tipo continuo cuya función de densidad es:

$$\omega'(x) = a(ax)^{\alpha-1} e^{-(ax)\alpha/a}; a \succ 0$$

Para el caso en que α=1 $w'(x)= ae^{-ax}$. Es decir, se reduce a una distribución exponencial, que resulta ser así un caso particular de una distribución de Weibull. Otros autores prefieren expresar la función de densidad de esta distribución de la siguiente forma:

$$\omega'(x) = m\alpha_2^{-m}(x-\alpha_1)^{m-1} \exp\left[-\alpha_2^{-m}(x-\alpha_1)^m\right], x \succ \alpha_1$$

e incluso se denomina frecuentemente distribución de Weibull con tres parámetros a la que tiene por función de densidad:

$$\omega'(x) = (\delta / \theta)(x-\mu)^{\delta-1} \exp\left[-(x-\mu)\delta / \theta\right], x \succ \mu; \theta \succ 0; \delta \succ 0$$

Conviene destacar, no obstante, que en la práctica es frecuente observar que ninguno de los modelos de probabilidad estudiados es adecuado para definir correctamente la <<cuantía del siniestro>> en todo el dominio de la variable. En estos costos y a partir del correspondiente histograma de frecuencias, conviene establecer una mixtura de al menos dos distribuciones truncadas; por ejemplo, la logarítmico-normal para valores $X< X_0$ y la de Pareto para cuantías $X \geq X_0$.

1.15 La distribución del daño total

Una vez identificadas las distribuciones del número de siniestros y de la cuantía del siniestro surge el problema de la determinación de la distribución del daño total en los seguros generales.

En este caso sabemos que la distribución del daño total está integrada por las distribuciones básicas

$P_n(t)$ = Distribuciones del número de siniestros
$V(x)$= Distribución de la cuantía de un siniestro.

1.16 Distribución del costo de daños de n siniestros G(x/n)

Suponemos ocurridos n siniestros. El daño total de esos n siniestros = X vendrá dado por

$X = x_1 + x_2 + \ldots x_n$
Siendo = $x_1, x_2, \ldots x_n$ variables independientes y cada una con la misma función de distribución de probabilidad V(x). Suponiendo:

1) Que la cuantía de cada año ($x_1, x_2, \ldots x_n$)sea independiente del número de siniestros. En este caso la distribución de X será:
$G(x/n)=V(x_1)V(x_2).......V(x_n)=V^{n^*}(x)$= convolución enésima de V(x).
Para el caso, por ejemplo de la distribución Gamma para y empleando la notación de Saxer, es

$$V'(x) = \frac{C^{\alpha}\cdot}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-cx}; x \geq 0$$

$$\alpha \succ 0; c \succ 0$$

$$G'(x/n) = \frac{e^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} x^{n\alpha-1} e^{-cx} \equiv \Gamma(x,c,n,\alpha)$$

donde: $\Gamma(x,c,n,\alpha)$ es la distribución de una variable suma de n variables Γ con lo que en virtud de la propiedades de la distribución Γ será también una Γ.
Sus parámetros:

$$Media = \frac{\alpha}{c} \cdot n$$

$$Varianza = \frac{\alpha}{c^2} \cdot n$$

2) Que la cuantía de cada daño sea dependiente del número de siniestros acaecidos. Por ejemplo se ha comprobado empíricamente en muchos países que los conductores que viven habitualmente en zonas rurales tienen menor número de siniestros pero de mayor importe, media que los habitantes de núcleos urbanos (seguro de automóvil).

En este caso, ya no se puede decir que la distribución se a la convolución n-ésima de V(x)
La solución propuesta por es la siguiente: establece un modelo cuya función de densidad es:

$$G'(x/n) = \frac{(c)^{n^{2r+1}\cdot\alpha} n^{2r}}{\Gamma\left(n^{2r+1}\cdot\alpha\right)} x^{\alpha n^{2r+1}-1} e^{-cn^r x}$$

y cuya función característica es $\varphi(s) = \left(1 - \frac{is}{cn^r}\right)^{-\alpha n^{2r+1}}$ con parámetros:

$$Media = \frac{\alpha}{c} \cdot n^{r+1}$$

$$Varianza = \frac{\alpha}{c^2} \cdot n$$

Este modelo traduce el efecto de contagio solo en la medio, pues la varianza es igual en este supuesto $\left(\frac{\alpha}{c^2}\cdot n\right)$ que en el que la cuantía de cada daño sea independiente del número de siniestros. Cuando r =0 también coincide la media y está en el 1er supuesto.

1.17 Distribución del daño total

En el que nos habla de la cuantía del daño total (o porcentual en el período considerado). Siendo
G(x/n) = La probabilidad de que, ocurridos n siniestros, la cuantía de los daños sea $\leq$ x
P_n (t) = La probabilidad de que ocurran n siniestros en {o,t). La distribución del daño tal en {0,t) será: $F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\cdot G(x/n)$
Que en caso 1) de independencia resulta, como vimos al estudia real proceso de riesgo en los seguros no-vida $F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\cdot V^{n(*)}(x)$

1.18 Distribución de Poisson compuesta

P_n (t) sigue el modelo de Poisson. Es decir.:
Ya que $\lambda = tv$ (t y v constantes) distribución causal de (v)

$$P_n(t)=P[N_t=n]=\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^n}{n!}=\frac{e^{-tv}(tv)^n}{n!}$$

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}(\lambda)}{n!}V^{n(*)}(x)$$

1.19 Distribución binomial negativa compuesta

P_n (t) sigue el modelo de Poisson ponderado con función de estructura U(v) gamma. En este caso la
distribución del número de siniestros es la binomial negativa, por lo que resulta:

$$P_n(t)=\binom{-mh}{n}\left(-\frac{t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}=\int_0^{\infty}\frac{e^{-tv}(tv)^n}{n!}dU(v)$$

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-mh}{n}\left(-\frac{t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh}\cdot V^{n(*)}(x)$$

En este caso la distribución de siniestralidad total es una distribución de Poisson ponderada (con función de estructura gamma) compuesta

1.20 Características de F(x,t)

El momento ordinario de orden k es

$$\alpha_k = \int_0^{\infty} x_{(t)}^k dF(x,t) = \int_0^{\infty} x_{(t)}^k d\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) V^{n(*)}(x)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_0^{\infty} \alpha_{(t)}^k dV^{n(*)}(x)$$

siendo $C_k^{(n)} = \int_0^{\infty} x_{(t)}^k dV^{n(*)}(x)$ de donde $\alpha_k = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot c_k^{(n)}$

para K=1

$$-Media \equiv \alpha_1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot c_1^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot n = \overline{c} \cdot \overline{n}$$

$\alpha_1 = \overline{n} \cdot \overline{c} = t \cdot E(v) \cdot \overline{c}$ ($\overline{c} \equiv$ Costo medio del siniestro)

para K=2

$$\alpha_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) c_2^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot \left[\left(c_2 - \overline{c}^2\right)n + n^2 \overline{c}^2\right]$$

ya que

$$c_2^{(n)} = \int_0^{\infty} x_{(t)}^2 dV^{n(*)}(x) = (c_2 - \overline{c}^2) \cdot n + n^2 \cdot \overline{c}^2$$

luego

$$\alpha_2 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\left[\left(c_2 - \overline{c}^2\right) \cdot n\right] + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot n^2 \overline{c}^2 = (c_2 - \overline{c}^2) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot n +$$

$$+ \overline{c}^2 \sum_{n=0}^{\infty} P_{n(t)} \cdot n^2 = c_2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot n + \overline{c}^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot n^2 - \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot n\right] =$$

$$c_2 \cdot t \cdot E(v) + \overline{c}^2 \left[t^2 E(v^2) + tE(v) - tE(v)\right] = c_2 tE(v) + \overline{c}^2 t^2 E(v^2)$$

$$-Varianza \equiv \sigma^2\left[x_{(t)}\right] = \alpha_2 - \alpha_1^2 = c_2 tE(v) + \overline{c}^2 t^2 E(v^2) - \overline{c}^2 t^2 [E(v)]^2 =$$

$$= c_2 \cdot t \cdot E(v) + \overline{c}^2 t^2 \left[E(v^2) - (E(v))^2\right] = c_2 tE(v) + \overline{c}^2 t^2 \sigma^2 (v$$

es decir

$$\sigma^2\left[x_{(t)}\right] = c_2 \cdot \overline{n} + \overline{c}^2 t^2 \sigma^2(v); \overline{n} = E[N_t]$$

$$= c_2 tE(v) + \overline{c}^2 t^2 \sigma^2(v)$$

Es decir la varianza de la siniestralidad total se descompone en dos sumandos: el primero recoge el momento de segundo orden de la distribución de las cuantías mientras que el segundo depende de la varianza de la variante (v9 en la distribución del numero de siniestros.

Función característica

$$\varphi(is) = E\left[e^{isx_{(t)}}\right] = \int_0^{\infty} e^{isx_{(t)}} dF(x,t) = \int_0^{\infty} e^{isx_{(t)}} d\left\{\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \cdot V^{n(*)}(x)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) \int_0^{\infty} e^{isx_{(t)}} dV^{n(*)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\left[\varphi_{x1}(s) \cdot \varphi_{x2}(s) \ldots . \varphi_{x_n}(s)\right]$$

siendo

$$\varphi_{xj}(s) = \int_0^{\infty} e^{isx_j} dV(x_j) \quad \text{y } V(x_j) = V(x) \quad \forall j = 1,2,\ldots,n$$

por lo tanto

$$\varphi(is) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)[\varphi_x(s)]^n$$

$\varphi(is)$ = función característica de la cuantía de un siniestro
aplicando las anteriores expresiones a los dos casos de la distribución del daño total considerados, resulta:

1.21 Distribución de Poisson compuesta

$Media \equiv E[x_{(t)}] = \overline{n} \cdot \overline{c} = \lambda \cdot \overline{c} \qquad (\lambda \equiv constante)$

$Varianza \equiv \sigma^2[X_{(t)}] = c_2 \cdot \overline{n} + 0 = c_2 \cdot \lambda$

ya que $\overline{c}^2 t^2 \sigma^2(v) = 0$

se tiene que $\sigma^2(v) = 0$

1.22 Distribución binomial negativa compuesta

$Media \equiv E[x_{(t)}] = \overline{n} \cdot \overline{c} = t \cdot E(v) \cdot \overline{c}$

$Varianza \equiv \sigma^2[x_{(t)}] = c_2 \cdot \overline{n} + \overline{c}^2 t^2 \sigma^2(v) = t \cdot E(v) \cdot c_2 + \overline{c}^2 t^2 \frac{m}{h}$

ya que $\sigma^2(v) = \frac{m}{h}$ (distribución gamma)

la función característica es

$$\varphi_{x_{(t)}}(is) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-mh}{n} \left(-\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} \cdot [\varphi_x(s)]^n = \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-mh}{n} \left(-\frac{t}{t+h}\varphi_x(s)\right)^n =$$

$$= \left(\frac{h}{t+h}\right)^{mh} \left(1 - \frac{t}{t+h}\varphi_x(s)\right)^{-mh} = \left[1 - \frac{t}{h}\{\varphi_x(s) - 1\}\right]^{-mh}$$

cuando h $\to \infty$ se obtiene la distribución de Poisson compuesta

La tarificacion de los seguros de daño se basa en la estructura de la prima.
Se comenzara por analizar la estructura de la prima, es decir, su desglose en los distintos componentes que la definen, así como la modernización actuarial de aquellos casos en que exista participación del asegurado en la garantía.
Sistemas de tarificación, o principios técnicos en que se basa la elaboración de tarifas equitativas y suficientes en el sentido dado a estos conceptos por la ciencia actuarial.

1.23 Estructura de la prima en los seguros generales. Principio de equivalencia

Se pueden distinguir los siguientes componentes del precio del servicio de seguridad:
1° Prima pura con bases de segundo orden- Es la que coincide con la esperanza matemática de la siniestralidad.
Teniendo en cuenta que una de las características de los seguros no-vida es que

son, generalmente, operaciones a corto plazo, loa prima pura (con bases de segundo orden)será en base del principio de equivalencia:

$$P = E(x_t) = \int_0^{\infty} x \cdot dF(x,t) = \pi \cdot \varepsilon$$

Siendo $E(x_t)$ = la esperanza del riesgo total

2° Recargo de seguridad λ- Cuando a esta prima se le suma el recargo de seguridad se tiene la prima pura recargada o prima pura con recargo de seguridad explícito, es decir: $P_1 = P(1 + \lambda)$

En aquellos casos en que se maneja una prima pura en donde figure el recargo de seguridad implícito se dice que se trata de una prima pura con bases de primer orden.

Este recargo se destina a cubrir las desviaciones aleatorias de la siniestralidad con respecto a su valor medio, por lo que su calculo dependerá de las restantes magnitudes del subsistema de estabilidad de la entidad aseguradora (reaseguro, reservas de solvencia). Es decir tiene por objeto financiar las fluctuaciones negativas de la siniestralidad y contribuye a garantizar la solvencia del asegurador.

3° *Recargos de gestión.- A partir de aquí comienzan las componentes económicos-*comerciales del precio del seguro. Admitiendo como criterio de imputación de los costes internos y externos el que los mismos giran sobre la prima comercial y representando por:

g_1= Los costos de gestión interna a tanto por uno
g_2= Los costos de gestión externa a tanto por uno.
b= El margen de beneficio o excedente a tanto por uno.

La prima comercial viene dada por

$$P'' = P(1+\lambda) + g_1 P'' + g_2 P'' + b\,P''$$

Es decir $P'' = \dfrac{P(1+\lambda)}{1 - g_1 - g_2 - b}$

A efectos de la periodificación contable de los ingresos de primas (reservas de riesgos en curso) se define la llamada prima de inventario:

$$P' = P(1+\lambda) + g_1 P''$$

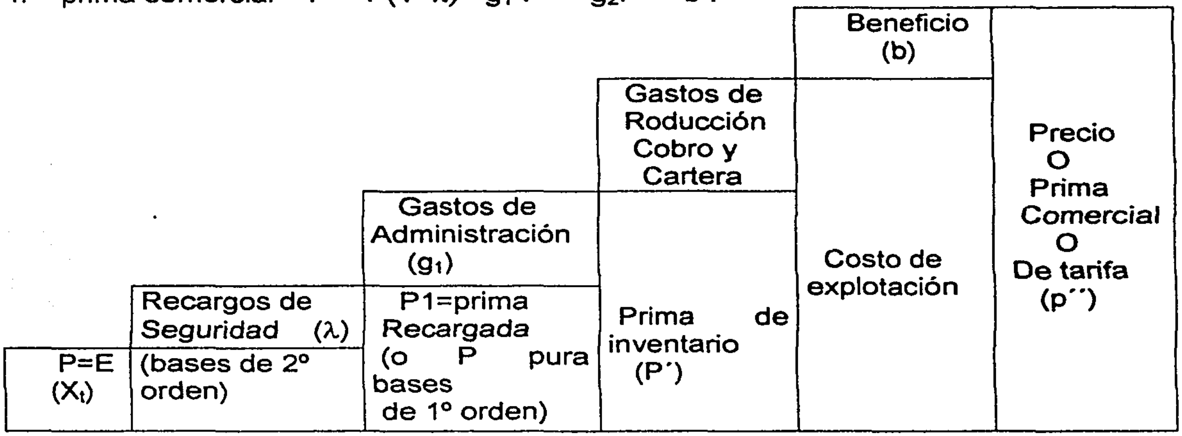
Sobre las primas comerciales giran en aquellos casos en que así está establecido, los recargos, así como los impuestos y tasas repercutibles. Con ello se tiene el importe del recibo a pagar por el asegurado.

También la legislación prevé la posibilidad de establecer un recargo externo a la prima comercial, destinado a compensar las modificaciones que puedan ocurrir en los gastos de administración y producción.

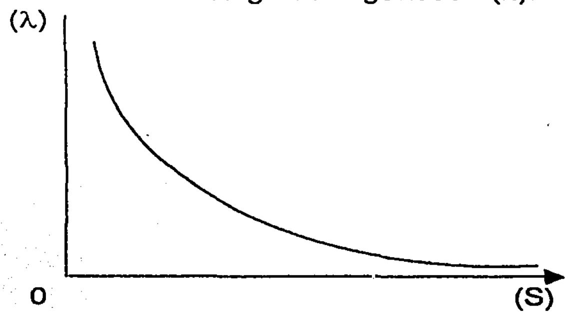
En consecuencia, la estructura del costo del seguro, incluyendo el margen de

beneficio destinado a remunerar los recursos financieros e incrementar la solvencia dinámica del asegurador, resulta como indica el esquema de la página siguiente.
Hasta llegar a la prima comercial

1. prima pura $=P$
2. prima recargada $= P_1= P(1 + \lambda)$
3. prima de inventario $= P' = P(1+\lambda)+ g_1 P''$
4. prima comercial $= P''=P(1+\lambda)+ g_1 P''+ g_2P''+ b P''$



Prima recargada. El recargo puede venir dado de forma:
1. Implícita. Entonces la prima pura P_1 se dice que está calculada con bases de primer orden. Las causas de este hecho pueden sintetizarse:
a) Causas de tipo técnico. Retraso en el desarrollo de la matemática de los seguros no-vida , debido en parte a la dificultad de operar con bases de segundo orden, dificultad mayor, desde luego que en los seguros de vida.
b) Causas de tipo económico. Inadecuadas estructuras en el sector seguro, política de precios uniformes, escasa vinculación con el desarrollo económico-social. etc.
2.- *Explicita. En este caso la primar pura P está calculada con bases de segundo* orden.
Se puede decir que en igualdad de condiciones a mayor dimensión de la empresa de seguros (S≡Reservas de solvencia o potencial económico de la empresa) *menor será el cargo de seguridad* (λ).



Prima de inventario:
P'= Prima recargada (P_1)+Gastos de gestión interna (g_1)

Los gastos de gestión interna pueden ser:

1. Fijos; no dependen de la cuantía de la prima.
2. Proporcionales al importe de la prima.

Producido un gasto g_1 en el ramo se plantea el problema de su imputación al precio del servicio (prima). En estos seguros generales existe mayor correlación entre la duración del seguro y la duración del devengo del gasto de administración (a diferencia del caso del seguro de vida), por eso se suele tomar como módulo de imputación la prima comercial.

Prima comercial.- Los gastos de gestión externa (comisiones, papeles de ventas etc.) giran habitualmente sobre la propia prima comercial, así como el recargo para beneficios si existe.

Las primas obtenidas al agregar los distintos componentes que hemos visto deben ser equitativas y suficientes de acuerdo con la naturaleza de los riesgos asumidos por el asegurador.

Tarifas. Reciben este nombre las tablas o cuadros que contienen las primas comerciales de los diferentes riesgos, así como las normas de aplicación. Ello depende del sistema de tarifación usado.

1.24 Seguros con participación del asegurado en la garantía franquicias

Veamos los siguientes casos en los que se da participación del asegurado.

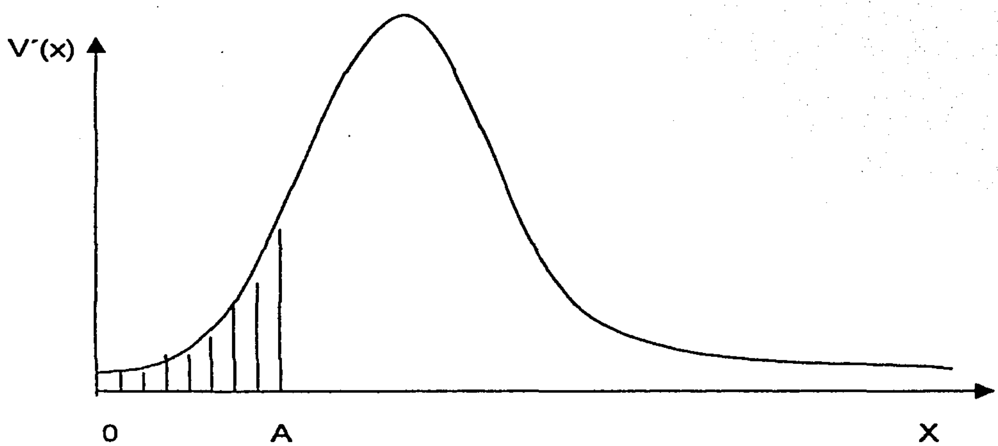
Seguro con franquicia

A= Franquicia
x= Cuantía del siniestro acaecido.

Ocurrido un siniestro de cuantía x, si
$x \leq A$ no se indemniza
$x > A$ se indemniza (x-A)

Suponiendo que la función de densidad de la distribución de x tuviera la representación gráfica de la figura 2.
Supondremos por otra parte que todo siniestro (acaecido y declarado ala compañía aseguradora) de cuantía x<A se incluye en el cómputo correspondiente para el cálculo de $\bar{n}$ pero no en el de $\bar{c}$. la prima pura en este caso será: $P_{(1)} = \bar{n} \cdot \bar{c}_A$

$\bar{c} = \int_0^\infty (x - A) dV(x) =$ costo por siniestro ocurrido



Este es el caso más frecuente en la practica, especialmente en aquellos ramos donde la frecuencia de siniestralidad de los siniestros de escasa cuantía es muy grande

<u>Seguro a primer riesgo</u>

Se define así
Si x≤M se indemniza enteramente
Si x>M se indemniza sólo M
El coste medio en este caso será

$$\bar{c}_2 = \int_0^m x dV(x) + M\int_M^\infty dV(x) = \int_0^{Mm} x dV(x) + M[1 - V(M)]$$

y la prima pura:

$$P_{(2)} = \bar{n} \cdot \bar{c}_2$$

<u>Seguro a primer riesgo y con franquicia</u>

Supone una combinación del primero y del segundo.
Si x< A no se indemniza
Si A≤x≤M se indemniza x-A
Si x>M se indemniza M-A franquicia absoluta
M franquicia relativa
El costo medio será:

$$\bar{c}_3 = \int_a^m (x - A)dV(x) + (M - A)\int_M^\infty dV(x) \qquad \text{(franquicia absoluta)}$$

prima pura:

$$P_{(3)} = \bar{n} \cdot \bar{c}_3$$

Seguro con franquicia relativa

Se define de la siguiente forma:
Si x<A no se indemniza nada
Si x≥A se indemniza x
El coste medio será

$$\bar{c}_4 = \int_A^{\infty} x \cdot dV(x)$$

y la prima pura:

$$P_{(4)} = \bar{n} \cdot \bar{c}_4$$

Este tipo de franquicia no tiene gran aplicación práctica debido a la corruptela en la peritación del daño, es decir, a forzar la valoración por encima de la franquicia para cobrarlo enteramente.

Seguro de auto participación

r = fracción del daño a cargo de la compañía 0<r<1
si acaece un siniestro de cuantía x la compañía satisface r*x
el costo medio será:

$$\bar{c}_5 = \int_0^{\infty} r \cdot x \cdot dV(x) = r \cdot \bar{c}$$

y la prima pura:

$$P_{(5)} = \bar{n} \cdot \bar{c}_5 = \bar{n} \cdot r \cdot c = r \cdot P$$

En la practica se suelen utilizar limites mínimo y máximo para la auto participación del asegurado con objeto de eliminar los pequeños siniestros y ala vez atenuar el costo para el asegurado en los siniestros importantes

CAPÍTULO DOS

TEORÍA DE LA CREDIBILIDAD

2.1 Teoría de la credibilidad

En este capitulo se dará una introducción a la teoría de credibilidad y su aplicación a la teoría del seguro
A partir de la expresión denominada fórmula general de credibilidad
$P_1=(1-c)P_0+cP_i$
En la que 1-c y c eran, respectivamente, los coeficientes de fiabilidad y credibilidad, consideremos el siguiente ejemplo:

Supongamos que se trata de determinar el tanto medio de mortalidad de los trabajadores de una importante empresa. De los antecedentes dispuestos por las entidades aseguradoras se deduce que existen tres posibles tantos (0.01.0.02, y 0,05). Con unas probabilidades a priori del 50, 30, y 20% respectivamente.
El tanto medio de mortalidad a priori será, pues,

$$\sum_{i=1}^{3} Q_i P(Q_i) = 0{,}021$$

Observada una muestra de 100 trabajadores, se han producido 5 fallecimientos, lo que arroja un tanto muestral del 0,05%.aplicando Bayes resulta:

$$E[Q / X] = \frac{\sum_i [Q_i P(Q_i) \cdot P(X / Q_i)]}{\sum_i P(Q_i) P(X / Q_i)}$$

siendo X la información muestral.
En este caso se obtiene $E[Q / X] = 0{,}042$
Es decir, podemos afirmar que la unión del tanto obtenido a priori(0021) y del tanto muestral (0,05)nos da el tanto medio mortalidad, posteriori (0,042) razonamiento que encaja perfectamente con la fórmula de credibilidad que en este caso será: 0,042=0,021(1-c) + 0,05c
Ecuación que produce c =0,72 es decir a la información muestral le damos una ponderación (índice de confianza en la misma)del 72%., El coeficiente 1-c =0,27, es el coeficiente de fiabilidad de la información a priori.
Si la muestra hubiera sido menor por ejemplo de 20 obreros, pero manteniéndose el *tanto muestral del 0,05 entonces nos hubiera resultado un coeficiente de credibilidad* del 0,17, es decir muy inferior al anterior, lo cual es consecuencia inmediata del menor tamaño de la nuestra.
En general, el problema que se plantea es hallar un valor adecuado de c, teniendo en cuenta la necesidad de eliminar las fluctuaciones aleatorias excesivas en la prima. (Teoría de la credibilidad de las fluctuaciones limitadas) es decir este valor estará

sujeto a la condición de que las fluctuaciones aleatorias en la siniestralidad no motivarán con probabilidad 1-ε un cambio en la prima a priori superior al 100p por 100 lo cual podemos expresar así:

$$c \cdot \frac{\Delta_\chi}{E(\chi)} = p$$

siendo $E(\chi)$ la siniestralidad media esperada del colectivo asegurado y $\Delta\chi$ un exceso de siniestralidad que se obtiene de:

$$F\lfloor E(\chi) + \Delta_\chi \rfloor - F\lfloor E(\chi) - \Delta_\chi \rfloor = 1 - \varepsilon$$

Donde F es la característica funcional de la distribución del daño total del colectivo. Por tanto, el valor absoluto de la desviación de la siniestralidad $(\chi - E(\chi))$ será mayor que Δ_χ solo con probabilidad ε.

Si los parámetros de χ son $E(\chi) = \bar{n} \cdot c_1$ y $\sigma^2(\chi) = \bar{n} \cdot c_2$ (Distribución de Poisson compuesta) entonces resulta,

$$\frac{\Delta_\chi}{E(\chi)} \leq \chi_\varepsilon \frac{\sqrt{c_2}}{\sqrt{\bar{n} \cdot c_1}}$$

en donde $$c_2 = \int_0^\infty \chi^2 dV(x)$$

y $\bar{n}$ es el numero medio de siniestros,

$$c_1 = \int_0^\infty \chi dV(x)$$

y V(x) la distribución de probabilidad de cuantía de un siniestro sustituyendo en (2) se obtiene

$$c = p \frac{\sqrt{\bar{n} \cdot c_1}}{\sqrt{c_2}} \cdot \frac{1}{\chi_\varepsilon}$$

si fijamos ε por ejemplo igual a 0,05 nos resulta χ_ε=1,96 en el supuesto del modelo normal de F. el valor de $\bar{n}$ que hace c=1 (plena credibilidad) será: $n_0 = \frac{\chi_\varepsilon^2}{p^2} \cdot \frac{c_2}{c_1^2}$

cuando la distribución es causal entonces el cociente c_2 / c_1^2 *es igual a1 y los valores* correspondientes del $\bar{n}_0$ se pueden hallar en las tablas de la F. en la hipótesis de normalidad de la distribución del daño total tenemos el siguiente cuadro:

ε / P	10%	5%	1%
0,01	27.057	38.416	66.347
0,05	1.082	1.537	2.654
0,1	271	384	663
0,2	68	96	166

Valores de $\bar{n}_0$

En la mayoría de los casos la cuantía de los siniestros no son iguales y el cociente c_2 / c_1^2 es distinto de 1. Esta fracción dependerá del grado de heterogeneidad de los siniestros de las anteriores expresiones se obtiene: $c = \sqrt{\frac{\bar{n}}{\bar{n}_0}}$

Que es muy empleada en los Estados Unidos con muy buenos resultados.

2.2 Prima del riesgo y Prima colectiva

En las dos últimas décadas se han elaborado modelos mucho más rigurosos que el enfoque de las fluctuaciones limitadas que acabamos de ver, dando origen a la denominada teoría de la credibilidad de la máxima precisión, según la terminología propuesta por Norberg.

Como es bien sabido, el calculo de primas se basa en el principio de equivalencia $P=\Psi[F(x,t)]$ siendo F(x,t) la función de distribución del daño total para un período fijo (o,t) y Ψ las característica funcional que asigna un número P (prima) a cada distribución F(x,t)

- si F es la función de distribución del daño total del riesgo individual, entonces $P=\Psi[F(x,t)]$ es la prima del riesgo.

Si F es la función de distribución del daño total del riesgo en el colectivo asegurado, entonces P es la prima colectiva.

Estableceremos las siguientes definiciones:

Riesgo.- Es lo referente a la siniestralidad; se caracteriza por:

1.- El proceso del número de siniestros $P_n(t)$ con sus correspondientes probabilidades de transición

2.- La distribución condicionada $G(x/n)= P[\chi_n(t)\leq x]$ siendo $\chi_n(t) = \chi_1 + \chi_2 + \ldots\ldots + \chi_n$.

Cuando χ y n son independientes G(x/n) es igual a la convolucion enésima de V(x) (V(x) es la distribución de la cuantía de siniestro).

Colectivo- Es el conjunto de riesgos. Cada riesgo está determinado por un parámetro θ, este parámetro se define con mucha generalidad, en particular no es necesario que sea un número real. En resumen el colectivo $\Omega = \{\theta\}$ expresa toda la totalidad de riesgos identificados por el parámetroθ en el colectivo Ω se formularía así:

Riesgo $\theta = \left\{P_n^{\theta}(t); G^{\theta}(x/n)\right\}$

Por ejemplo si el proceso de numero de siniestros es de Poisson con probabilidades

$$P_n^{\theta}(t) = \frac{(\theta t)^n}{n!} e^{-\theta t}$$

y $G^{(\theta)}(x/n) = V^{(n)(*)}(x)$ (convolucion n-esima de v(x))

entonces $F^{\theta}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta t)^n}{n!} V^{n(*)}(x)$

En este supuesto conocemos la forma de que es la distribución de Poisson compuesta; es el parámetro θ lo que resulta desconocido

Como ejemplo en el seguro de automóvil el riesgo θ seria la póliza determinada y el colectivo Ω podría ser el conjunto de pólizas que cubren una misma categoría y uso.

Volviendo al sistema de obtención de primas, generalmente se supone que la función cumple los siguientes principios.

a) el principio del valor esperado (con nivel λ)

$\Psi[F(x,t)] = (1+\lambda)\int x dF(x,t) = (1+\lambda)E(\chi); \lambda \in \Re^{+}$

el principio de la desviación típica (con nivel α)

$\Psi[F(x,t)] = E(\chi) + \alpha\sigma(\chi)$

donde

$\sigma(\chi) = \sqrt{\int (x - E(\chi))^2 dF(x,t)} \quad \alpha \in \Re^{+}$

el principio de la varianza (con nivel β)

$\Psi[F(x,t)] = E(\chi) + \beta\sigma^2(\chi);..\beta \in R^{+}$

el principio de la utilidad nula

P=Ψ[F(x,t)] tal que $E[u(P-\chi)] = u(0)$

La función de utilidad u(x) cumple las condiciones de ser monótona creciente y de utilidad marginal decreciente. Es decir, u´(x)>0 y u´´(x)<0 hipótesis comúnmente aceptada en la teoría económica clásica. La segunda condición expresa la acreció al riesgo del decisor. (La función de utilidad cóncava). Este principio requiere que la utilidad u(0), antes asumir la responsabilidad de hacer frente al pago de los siniestros que se produzcan, debe ser igual a la utilidad esperada $E[u(P-\chi)]$ después de asumir la citada responsabilidad a cambio de un nivel de primas P.

Hemos visto que la prima de riesgo es $\Psi[F^{(\theta)}(x,t)]$de donde resulta,

$\mu(\theta) = \int_{\theta} x dF^{\theta}(x,t)$ (costo de siniestralidad esperado del riesgo)

y $\sigma^2(\theta) = \int [x - \mu(\theta)]^2 dF^{(\theta)}(x,t)$ (varianza del costo de la siniestralidad)

A partir de aquí la prima de riesgo se calcula como:

$P(\theta) = (1 + \lambda)\mu(\theta)$ según el principio del valor esperado

$P(\theta) = \mu(\theta) + \alpha * \sigma(\theta)$ según el principio de la desviación estándar

c) $P(\theta) = \mu(\theta) + \beta\sigma^2(\theta)$ según el principio de la varianza

De forma análoga se calcula la prima colectiva . la diferencia se da en que en este caso se opera con el proceso de riesgo colectivo.

Representando la *función de siniestralidad total del colectivo por* F(x,t) si U(θ) es la distribución de probabilidad del parámetro en el colectivo (función de estructura), entonces podemos poner

$$F(x,t) = \int_{\theta} F^{\theta}(x,t)dU(\theta)$$

siendo

$$\mu = E(\chi) = \int x dF(x,t)$$

$$\sigma^2 = Var(\chi) = \int [x - E(\chi)]^2 dF(x,t)$$

Las expresiones μ y σ^2 de la prima del colectivo se obtienen de los valores de $\mu(\theta)$ y $\sigma^2(\theta)$ del riesgo. En efecto

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t) = \int_{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} x dF^{\theta}(x,t)dU(\theta) = \int_{\theta}\mu(\theta)dU(\theta) = E[\mu(\theta)]$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 dF(x,t) = \int_{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}[x - \mu(\theta) + \mu(\theta) - \mu]^2 dF^{\theta}(x,t)dU(\theta) =$$

$$= \int_{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}[x - \mu(\theta)]^2 dF^{\theta}(x,t)dU(\theta) + \int_{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}[\mu(\theta) - \mu]^2 dF^{\theta}(x,t)dU(\theta) =$$

$$= \int_{\theta}\sigma^2(\theta)dU(\theta) + \int_{\theta}[\mu(\theta) - \mu]^2 dU(\theta) = E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta)]$$

Resumiendo

$$\mu = E[\mu(\theta)]$$

$$\sigma^2 = E[\sigma^2(\theta) + Var[\mu(\theta)]]$$

Los símbolos E y Var en estas dos fórmulas deben entenderse como la varianza y valor esperado de la operación con respecto a la función de estructura, dela prima del riesgo.

Finalmente según el principio aplicado tenemos que la prima colectiva será:

a) $P = (1 + \lambda)\mu$ en el supuesto del principio del valor esperado

b) $P = \mu + \alpha * \sigma$ principio de la desviación típica

c) $P = \mu + \beta\sigma_2$ principio de la varianza

El problema que no surge es el siguiente: ¿Cómo calcular la prima de un determinado riesgo siendo conocida la prima del colectivo a que pertenece al citado riesgo? En la práctica la prima del riesgo no se llega a conocer en la mayoría de los casos. Sin embargo existen dos excepciones a esta regla general:
Si el colectivo es estadísticamente homogéneo: En este caso, como se comprueba fácilmente, la prima del riesgo coincide con la prima colectiva.
Si el riesgo puede observarse durante un largo período de tiempo y si la siniestralidad durante el período de observación es estacionaria. Esto significa que las condiciones del riesgo no varían con el tiempo físico.
Es fácil advertir que en el seguro de vida, la prima de riesgo puede estimarse en *grupos de cierto tamaño.*
Al ser aceptable la hipótesis de trabajo de homogeneidad en el colectivo lo cual se cumple raramente en los seguros de no vida por eso es mas común encontrarse con el punto b) que el a) en la practica.
Aunque la prima de riesgo no se suele poder obtener de la observación estadística, sin embargo juega un papel importante desde el punto de vista conceptual. Representa la prima teórica de cada riesgo individual y puede obtenerse por aproximación.
Una vez establecida con claridad la diferencia entre ambas primas veremos la conexión entre ellas.
La prima de riesgo se obtiene mediante la aplicación de la funcional Ψ ala función de distribución F(x,t) para un parámetro conocido. en símbolos
$P(\theta)=\psi\left[F^{\theta}(x,t)\right]$
Dentro de un colectivo Ω la prima de riesgo $P(\theta)$ es a su vez una variable aleatoria con función de distribución $V_p(\delta)=\Pr ob[P(\theta\leq\delta)]$. Esta nueva función se determina a partir de $U[\theta]$, ya que P es función de θ.
Parece natural aplicar el principio de equivalencia Ψ por segunda vez (para compensar el riesgo estructural a la nueva función $V_p(\delta)$ a fin de obtener la prima del colectivo, $P^c=\Psi[V_p(\delta)]$. Sin embargo, esta prima P^c en general no coincide con la *prima colectiva. Para verificar esto calculamos P^c por los principios de valor esperado,* de desviación típica y de varianza y comparamos los resultados con la prima calculada directamente (P). Si se cumple que P^c=P entonces el principio aplicado tiene la propiedad de ser iterativo.
principio del valor esperado

$$P(\theta)=(1+\lambda)\int xdF^{\theta}(x,t)$$

$$P^c=(1+\lambda)\int P(\theta)dU(\theta)=(1+\lambda)^2\int\int xdF^{\theta}(x,t)dU(\theta)$$

$$=(1+\lambda)^2\int xdF(x,t)=(1+\lambda)P$$

b) principio de la desviación típica

$$P(\theta) = \mu(\theta) + \alpha\sigma(\theta)$$

$$P^c = E[\mu(\theta)] + \alpha\left\{E\left[\sigma(\theta) + \sqrt{Var[\mu(\theta) + \alpha\sigma(\theta)]}\right]\right\}$$

si prescindimos de los términos en $\alpha^2 (\alpha \leq 1)$ resulta

$$P^c = E[\mu(\theta)] + \alpha\left\{E\left[\sigma(\theta) + \sqrt{Var[\mu(\theta)]}\right]\right\}$$

por otra parte el método directo nos da

$$P = E[\mu(\theta)] + \alpha \cdot \sqrt{E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta)]}$$

c) principio de la varianza

$$P[\theta] = \mu(\theta) + \beta\sigma^2(\theta)$$

$$P^c = E[\mu(\theta)] + \beta\left\{E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta) + \beta\sigma^2(\theta)]\right\}$$

prescindiendo de los términos en $\beta^2 (\beta \leq 1)$

$P^c \approx E[\mu(\theta)] + \beta\{E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta)]\}$

la prima colectiva calculada directamente es

$P = E[\mu(\theta)] + \beta\{E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta)]\}$

en conclusión:

principio de valor esperado $P^c \neq P$
principio de la desviación típica $P^c \neq P$
principio de la varianza $P^c \approx P$

Entonces el principio de la varianza es el único iterativo en una primera aproximación. Sin embargo es exactamente iterativo si la varianza del riesgo $\sigma^2(\theta)$ es independiente del parámetro θ. Esta propiedad es de gran interés teórico y motiva la mayor utilidad del principio de la varianza frente al de la desviación típica.

2.3 Concepto de prima de credibilidad

La teoría de la credibilidad trata esencialmente de determinar qué grado de ponderación se debe dar a la evidencia observada. Por ésta razón, la mayoría de los autores que tratan estas cuestiones definen la prima de credibilidad como la aproximación dela prima del riesgo por medio de una función dependiente de la siniestralidad real sufrida por ese determinado riesgo.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sea P(θ) la prima d riesgo del parámetro θ calculada de acuerdo con alguno delos principios conocidos. Representando a $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ la siniestralidad total del riesgo en

los períodos, 1,2,3....n, respectivamente (hemos supuesto que dividimos el tiempo de observación en n períodos). Se considera por hipótesis que se conoce la función de estructura U(θ) del colectivo así como la prima del mismo. El problema es entonces calcular la prima de credibilidad. $P_{n+1}(x_1,x_2,...x_n)$ que sirva de aproximación de P(θ).
En su concepción clásica la teoría de la credibilidad para obtener $P_{n+1}(x_1,x_2,...x_n)$ se basa en el principio del valor esperado. Sin embargo, es también posible extender la teoría de la credibilidad al principio de la varianza. Este segundo sistema tiene la ventaja de que no sólo estima la siniestralidad media del riesgo sino que nos proporciona también el recargo de seguridad que debe llevar la prima pura para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad. De Acuerdo con el principio del valor esperado podemos poner, para $\lambda=0$.
Prima del riesgo = P(θ)=μ(θ) y, prima colectiva P= E[μ(θ)] está referida a la función de estructura U(θ).
Formalmente se tiene que

$$\Psi\left[F^{(\theta)}(x,t)\right]=\Psi[\chi/\theta]=P(\theta)$$
$$\Psi[F(x,t)]=\Psi(\theta)=P$$

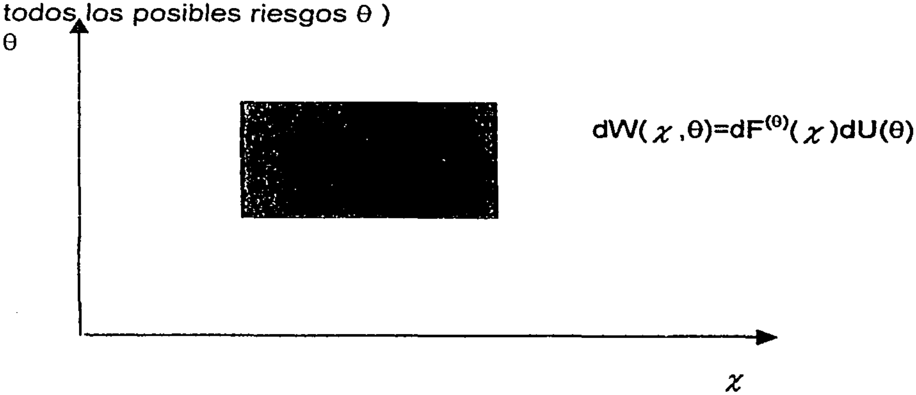
La prima del riesgo se obtiene cuando el cálculo de primas se basa en la distribución de χ para un valor de θ dado y la prima colectiva es la que se obtiene de la distribución no condicionada de χ. De forma explícita resulta

$\Psi[\chi/\theta]=P(\theta)=E(\chi/\theta)$ y $\Psi[\chi]=P=E(\chi)$

Ahora podemos definir para cualquier variable aleatoria Y definida en el espacio de probabilidad Π *Ω.

$$\psi[\chi/y]=P(y)=E[\chi/y]$$

el espacio producto aparece como el " espacio de probabilidad natural "
de las variables χ e Y (Π = conjunto de todos los valores de χ) , (Ω= conjunto de todos los posibles riesgos θ)



La probabilidad W en este espacio producto viene del elemento infinitesimal $dF^{(\theta)}(\chi)dU(\theta)$.

Volviendo nuevamente al ejercicio planteado antes, se trata de estimar la prima del riesgo P=(θ) para el período n+1 conocida la siniestralidad de cada uno de los períodos anteriores $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n$ Representando por χ la variable aleatoria que representa la siniestralidad acumulada del período n+1, tenemos que la prima del riesgo (período n+1) es P=(θ)= Ψ[χ /θ].

Por analogía se define la prima de credibilidad

$P_{n+1}(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n) = \Psi[P(\theta)/ \chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n]$

Es decir una estimación de la prima del riesgo θ conocida la siniestralidad real ocurrida $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n$

Estas expresiones pueden ser análogamente explicadas en el espacio probabilistico Π *Ω. Siendo Π el conjunto de todos los posibles valores de la sucesión de n+1 variantes $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n \chi$.

La probabilidad infinitesimal inducida será: dW= $dF^{(\theta)}(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n \chi)$dU(θ)

En el caso de que las variables $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n$ sean independientes de χ en el período n+1, podemos entonces enunciar el siguiente teorema fundamental:

Teorema: Si χ y ($\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n$) son estocásticamente independientes para un valor dado del parámetro θ entonces

$P_{n+1}(\chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n) = \Psi[\chi / \chi_1, \chi_2, \chi_3 \ldots\ldots \chi_n]$

Demostración

$P(\theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n) = \Psi[\chi / \theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n] = \Psi[\chi / \theta] = P(\theta)$

y

$P_{n+1}(\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n) = \Psi P(\theta) / \chi_1\chi_2 \cdots \chi_n)$

por definición.

Luego,

$\Psi[P(\theta)/ \chi_1\chi_2 \cdots \chi_n)] = \Psi[P(\theta)/ \chi_1\chi_2 \cdots \chi_n) / \gamma(\theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n)]$

con $\gamma(\theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n) = (\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n)$

resulta

$\Psi[P(\theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n) / \gamma(\theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n)] = \Psi[\chi / \gamma(\theta\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n)] = \Psi[\chi / \chi_1\chi_2 \cdots \chi]$

de acuerdo con el principio de iteratividad del valor esperado (para $\lambda = 0$).

En resumen se ha obtenido que,

$P_{n+1}(\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n) = E[\mu(\theta)/ \chi_1\chi_2 \cdots \chi_n]$

De donde se deduce que la prima de credibilidad es igual a la prima colectiva cuando no hay información de la siniestralidad real producida n= 0) converge en la prima verdadera P(θ) para un largo período de observación (n→∞).

4.4 Aproximación lineal

Con objeto de obtener fórmulas operativas vamos a aproximar

$$E[\mu(\theta)/\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n]$$

mediante la expresión

$a + b(\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_n)/n = a + b\overline{\chi}$

de forma que la pérdida cuadratica media sea mínima, es decir se trata de un estimador bayesiano que minimiza la esperanza de pérdida condicionada a posteriori, luego la expresión

$E\{[E[\mu(\theta)/\chi_1\chi_2 \cdots \chi_n] - (a + b\overline{\chi})]^2\}$ ha de ser mínima. Es fácil comprobar que la función $a + b\overline{\chi}$ también minimiza.

$$E\{[\mu(\theta) - (a + b\overline{\chi})]^2\} = E\{[\mu(\theta) - E(\mu(\theta)/\chi_1, \chi_2 \cdots \chi_n)] - (a + b\overline{\chi})\}^2$$

y también

$$E\{[b(\mu(\theta) - \overline{\chi}]^2\} + E\{\{[(1-b)\mu(\theta) - a]\}\}^2$$

Cada par de valores (a,b) que hace mínima la ultima expresión es también solución del problema inicial. En resumen se tiene

a=(1-b)E $[\mu(\theta)]$

deseando minimizar

$$b^2 E\{[\overline{\chi} - \mu(\theta)]^2\} + (1-b)^2 Var[\mu(\theta)]$$

que se cumple para

$$b = \frac{Var[\mu(\theta)]}{Var[\overline{\chi}]} = \frac{Var[\mu(\theta)]}{E\{[\overline{\chi} - \mu(\theta)]^2\} + Var[\mu(\theta)]}$$

de la relación

$$Var[\overline{\chi}] = E[Var(\overline{\chi}/\theta)] + Var[E(\overline{\chi}/\theta)]$$

se obtiene

$$Var[\overline{\chi}] = \frac{1}{n} E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta)]$$

con lo que obtenemos la formula de credibilidad

$$E[\mu(\theta)/\chi_1, \chi_2 \cdots \chi_n] \approx b\overline{\chi} + (1-b)E[\mu(\theta)]$$

donde b es el coeficiente de credibilidad que se calcula así:

$$b = \frac{Var[\mu(\theta)]}{Var[\overline{\chi}]} = \frac{Var[\mu(\theta)]}{\frac{1}{n} E[\sigma^2(\theta)] + Var[\mu(\theta)]} = \frac{n}{n+q}$$

con $\quad q = \dfrac{Var[\overline{\chi}]}{Var[\mu(\theta)]}$

el denominador del cociente $\quad \dfrac{Var[\mu(\theta)]}{Var[\overline{\chi}]}$

Es por naturaleza estimable a través del colectivo, hemos de opera con el numerador.

De

$$Var[\overline{\chi}]=\frac{1}{n}E[\sigma^2(\theta)]+Var[\mu(\theta)]$$

y $Var[\chi]=E[\sigma^2(\theta)]+Var[\mu(\theta)]$

se deduce que $nVar[\overline{\chi}]-Var[\chi]=(n-1)Var[\mu(\theta)]$

operando resulta b= $\dfrac{nVar[\overline{\chi}]-Var[\chi]}{(n-1)Var[\overline{\chi}]}$

Donde $\overline{\chi}=\dfrac{\chi_1+\chi_2+\chi_3+\dots\dots\dots+\chi_n}{n}$; $n\geq 2$; $\chi=\chi_1$

En esta fórmula ya sólo tenemos variables que se pueden estimar a través del colectivo. Naturalmente que la aplicación práctica de esta expresión requiere la disponibilidad de una estadística por período adecuada acerca del colectivo en cuestión, y mejor aún que cubra n períodos de observación.

Luego de esta forma hemos obtenido una solución óptima del sistema de tarifas teniendo en cuente que el subsistema de información técnica sólo nos proporciona información acerca del colectivo.

La obtención de b a partir de los datos correspondientes a un solo periodo es solo posible si existe la relación funcional entre $\mu(\theta)$ y $\sigma^2[\theta]$ en la distribución de λ para un riesgo dado θ- la ley de Poisson verifica dicha condición, ya que cumple que

$\sigma^2[\theta]=\mu(\theta)=\theta$ y por lo tanto, $E[\sigma^2(\theta)]=E[\mu(\theta)]=E(\theta)$ y

$$Var[\mu(\theta)]=Var[\overline{\chi}]-\frac{1}{n}E(\overline{\chi})$$

el coeficiente de credibilidad es entonces

$b=\dfrac{nVar[\overline{\chi}]-E(\overline{\chi})}{nVar[\overline{\chi}]}=\dfrac{\text{"exceso de varianza"}}{\text{"}VARIANZA\text{"}}$ la denominación "exceso de varianza

proviene del hecho de que en el caso de Poisson simple

$$Var[\overline{\chi}]=\frac{E(\overline{\chi})}{n}$$

Conclusión

La teoría de la credibilidad permite resolver problemas derivados de la heterogeneidad de una clase o cartera de riesgos a la hora de tarificar es decir, en síntesis permite utilizar la información de la clase así como la del propio riesgo individual a fin de:

Diseñar la estructura optima de una tarifa aplicada a una clase o cartera heterogénea

Analizar el nivel de eficiencia de una tarifa vigente

El fundamento actuarial de los sistemas de tarificacion experience rating es la teoría

de credibilidad. Obsérvese el isomorfismo que se presenta entre la expresión $E[v/n]=\frac{h}{t+h}m+\frac{t}{t+h}\left(\frac{n}{t}\right)$ con la aproximación lineal de la prima de credibilidad $P(\theta\chi_1\chi_2\cdots\chi_n)\approx(1-b)E[\mu(\theta)]+b\overline{\chi}$ donde b(coeficiente de credibilidad)= $\frac{n}{n+q}$ en efecto, n (numero de periodos de observación) equivale al t de capitulo anterior, y si el parámetro q de la prima de riesgo (R^+)
Viene dado por h –parámetro que traducía la heterogeneidad de la clase considerada— entonces las expresiones de $E[v/n]$ y de $P(\theta\chi_1\chi_2\cdots\chi_n)$ son isomorfas.

CAPÍTULO TRES

TEORÍA DEL RIESGO Y APLICACIONES

En este capitulo se desarrollara la teoría de riesgo con aplicaciones en los seguros, el objeto de toda teoría del riesgo es el de proporcionar un modelo de naturaleza estocástica respecto a las fluctuaciones aleatorias derivadas de las operaciones de seguro, a fin de instrumentar las medidas necesarias para garantizar la solvencia dinámica de la empresa.

Lógicamente este modelo será susceptible de aplicación a todas aquellas instituciones financieras (bancos, fondos de inversión, etc.) en donde se den los mismos principios científicos, en cuanto a la naturaleza aleatoria derivada de sus operaciones específicas.

Pero estas medidas deben ser compatibles con el objetivo del beneficio *correspondiente a la actividad aseguradora, y sin que tampoco encarezca* excesivamente el precio del seguro.

Por otra parte se puede conseguir el mismo grado de estabilidad o solvencia con distintas combinaciones (λ, S, M) con lo cual se presenta un problema de elección que exige dar entrada a criterios económicos.

Toda teoría del riesgo relaciona las siguientes magnitudes:

Número de pólizas
Cartera Distribuciones básicas .... = C
Grado de homogeneidad
Reservas de solvencia .... = S
Reasegura cedido .... = M
Recargo de seguridad .... = λ
Índice de estabilidad o probabilidad de ruina .... = ε

Es decir: ψ [C, S, M, λ, ε] = 0

El índice de estabilidad ε es un elemento subjetivo que podemos fijar, como valor estándar, en el 0,3 % .

Así, por ejemplo, para una cartera dada C y fijado el índice de estabilidad ε se tiene una relación entre las otras tres magnitudes: φ [S, M, λ] = 0

En la literatura actuarial sobre esta materia encontramos dos clases de teorías del riesgo: individual y colectiva.

3.1 Teoría del riesgo individual

Considera el riesgo total de la compañía como el resultado de la que acontece a todas las pólizas individuales que componen su cartera. Es decir, la siniestralidad total en un período de tiempo determinado (por ejemplo, un año) será la suma de las variables aleatorias correspondientes a la siniestralidad anual de cada una de las pólizas individuales.

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n$$

$\zeta \equiv$ Siniestralidad total de la cartera
$\zeta_1 \equiv$ Siniestralidad de la póliza i-ésima (i = 1, 2, ..., n).

Asumiendo que los sumandos son variables independientes, con la misma función de distribución $F(X_i)$. La variante suma (ζ) tendrá por función de distribución
$F(X) = F(X_1) * F(X_2) * F(X_3) * \ldots * F(X_n) = F^{n(*)}(X_i)$
Es decir, la conversión n-ésima de $F(X_i)$.
De acuerdo con el teorema central del límite la distribución de ζ será aproximadamente normal si el número de sumandos (número de pólizas) es suficientemente grande.

3.2 Elementos del riesgo individual

Consideremos una cartera C formada por n pólizas distribuidas en (h) categorías homogéneas
$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_h$.
Cada categoría j (j = 1, 2, ..., h) está formada por pólizas cuyos factores de reisgo *tienen el mismo nivel. Por ejemplo, en el seguro del automóvil, vehículos de similar* potencia, uso particular, misma zona de circulación, etc.
Denominemos (ζ_{ij}) la variable aleatoria asociada a la siniestralidad anual de la póliza i perteneciente a la categoría homogénea j. Es decir,

$$\zeta_1 = \zeta_{11} + \zeta_{21} + \zeta_{31} + \ldots + \zeta_{n11} = \sum_{\iota=1}^{n_1} \xi_{i1}$$

siendo ζ_1 la siniestralidad anual total de la primera categoría.
Los parámetros de ζ_{i1} son
$E[\zeta_{i1}] = P_1$; $\sigma^2[\zeta_{i1}] = \sigma^2{}_1$; $\forall$ i = 1, 2, 3, ..., n_2
Análogamente para las restantes categorías resulta

$$\zeta_2 = \zeta_{12} + \zeta_{22} + \zeta_{32} + \ldots + \zeta_{n22} = \sum_{i=1}^{n_2} \xi_{i2}$$

$$\left.\begin{array}{l} E[\zeta_{i2}] = P_2 \\ \sigma^2[\zeta_{i2}] = \sigma^2{}_2 \end{array}\right\} \quad \forall\ i = 1, 2, 3, \ldots, n_2$$

....

$$\zeta_h = \zeta_{1h} + \zeta_{2h} + \zeta_{3h} + \ldots + \zeta_{nhh} = \sum_{i=1}^{n_2} \xi_{ih}$$

$$\left.\begin{array}{l} E[\zeta_{in}] = P_n \\ \sigma^2[\zeta_{in}] = \sigma^2{}_n \end{array}\right\} \qquad \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n_n$$

$[\zeta_n] \equiv$ Siniestralidad anual total de la hª categoría.
La variante ζ (siniestralidad anual de toda la cartera) es:

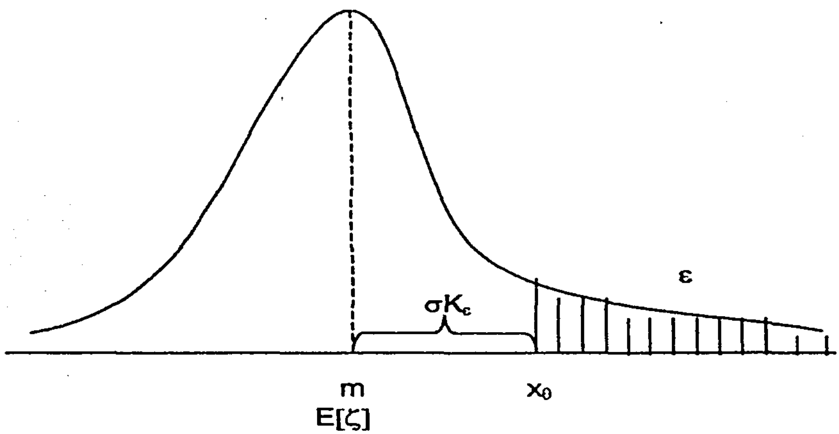
$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n$$

con parámetros (asumiendo la hipótesis de independencia de los sumandos)

$$E[\zeta] = m = E[\zeta_1] + E[\zeta_2] + E[\zeta_3] + \ldots + E[\zeta_n] = \sum_{j=1}^{h} n_j p_j$$

$$\sigma^2[\zeta] = \sigma^2 = \sigma^2[\zeta_1] + \sigma^2[\zeta_2] + \sigma^2[\zeta_3] + \ldots + \sigma^2[\zeta_n] = \sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2$$

Si el número total de pólizas que componen la cartera es suficientemente grande, aplicando el teorema central del límite se puede aproximar ζ por el modelo normal (m: σ)



$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx = \varepsilon$$

Fijado un índice de estabilidad o probabilidad de ruina ε tal que $P[\zeta > X_0] = \varepsilon$ resulta:

$$P[\zeta > X_0] = P\left[\frac{\xi - m}{\sigma} > \frac{X_0 - m}{\sigma}\right] = P\left[v > \frac{X_0 - m}{\sigma}\right] = P[v > K\varepsilon] = \varepsilon$$

$K\varepsilon$ se obtiene de las tablas de la distribución normal (0, 1) una vez fijado ε. Como
$X_0 = \sigma * K\varepsilon + m$
La diferencia
$D = X_0 - m = \sigma * K\varepsilon$
Debe cubrirse con las magnitudes de estabilidad del ente asegurador.

3.3 Magnitudes de estabilidad

Recargo técnico o de seguridad (λ)

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j \geq D$$

de donde se deduce que

$$\lambda \geq \frac{K_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^{h} n_j P_j}$$

Reservas de solvencia (S)
El recargo técnico (λ) y las reservas de solvencia (S) deben cumplir la condición:

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j + S \geq D$$

es decir,

$$\lambda \geq \frac{K_\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2} - S}{\sum_{j=1}^{h} n_j P_j}$$

o bien,

$$S \geq \qquad K\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2} - \sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j +$$

Reasegura cedido (M)
Denominando $P_j(M)$ la siniestralidad media anual de cada póliza de la categoría j, neta de reaseguro, y $\sigma_j(M)$ la desviación típica de la siniestralidad a cargo de la cedente, la ecuación básica del modelo es:

$$\sum_{j=1}^{h} \lambda n_j P_j(M) + S \geq K\varepsilon \sqrt{\sum_{j=1}^{h} n_j \sigma_j^2(M)}$$

Ecuación en la que considerados como datos (λ) y (S) figura M (retención propia) como variable de decisión.

Ejemplo
Una Cartera compuesta de 1,000 pólizas, agrupadas en 4 categorías homogéneas, tiene los siguientes parámetros de siniestralidad neta de reaseguro.

P_1 = 4,000 u.m./póliza	P_2 = 6,000 u.m./póliza	n_1 = 100 pólizas
σ_1 = 1,000 u.m./póliza	σ_2 = 1,000 u.m./póliza	n_2 = 400 pólizas
P_3 = 8,000 u.m./póliza	P_4 = 10,000 u.m./póliza	n_3 = 200 pólizas
σ_3 = 1,200 u.m./póliza	σ_4 = 2,000 u.m./póliza	n_4 = 300 pólizas

Obtener el recargo técnico (λ) en el supuesto de no considerar reservas de solvencia y en el supuesto de que las reservas S afectas a esta modalidad de seguro sean 100,000 u.m. (ε = 0.5%)
Los parámetros básicos de la variable suma ζ son:

$$E(\zeta) = m = \sum_{j=1}^{4} n_j P_j(M) = 4 * 100 + 6 * 400 + 8 * 200 + 10 * 300$$
$$= 7{,}400 \text{ M u.m.} = 7{,}400{,}000 \text{ u.m.}$$
$$\sigma^2(\zeta) = \sum_{j=1}^{4} n_j \sigma_j^2(M) = 1{,}988{,}000 \text{ M u.m.}^2 \rightarrow \sigma(\zeta) = 44{,}580\text{m.}$$

de donde $\zeta \equiv N(7{,}400{,}000 : 44{,}580)$.
En las tablas de la distribución normal, para ε = 0.5% es $K\varepsilon$ = 2.58, de donde,
$$\lambda = \frac{2.58 * 44.58M}{7{,}400M} = 0.0155$$
es decir, λ = 1.55% de la prima pura.
Para S = 100M, resulta.
λ = (2.58 * 44.58 – 100)/ 7.400M = 0.2% de la prima pura

El mismo índice de estabilidad (ε) se puede alcanzar actuando sobre (S), (λ) o (M). Esta indeterminación técnica se resolverá dando entrada a criterios económicos, en función de la información proveniente de los subsistemas de tarificación, mercado del seguro directo y del reaseguro, capacidad de financiación de las reservas de solvencia, etc., es decir, considerando el enfoque sistémico en la empresa aseguradora. Sin embargo, a la teoría del riesgo individual se le señalan los inconvenientes siguientes:
Que no siempre es admisible la hipótesis de independencia de las variantes sumandos.
Que si los grupos homogéneos son de pequeño tamaño no es posible la aplicación del teorema central del límite.
Que esta teoría no da respuestas a preguntas como la siguiente: ¿cuál es la probabilidad de que la compañía se arruine en el futuro?
Que la cartera tiene, en general, una movilidad que dificulta su aplicación.

3.4 Riesgo colectivo

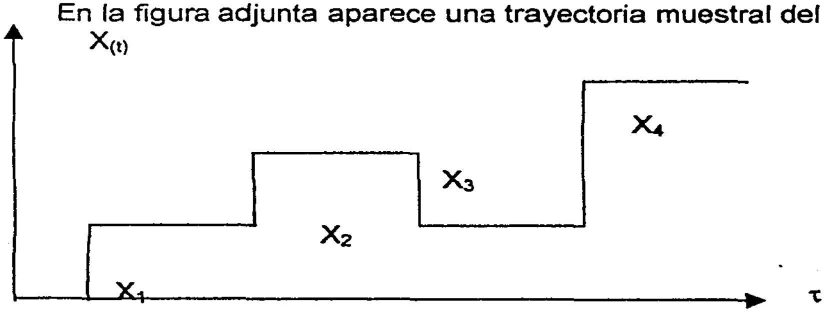
El primer trabajo con la denominación de riesgo colectivo es de P. Lundberg en 1903. Le llamó colectivo porque interviene como un todo la colectividad de los asegurados. Ellos se contrapone a la manera de pensar individual que se fija primordialmente en el riego correspondiente a cada póliza o asegurado.
Este mismo autor presentó en el año 1909, en el Congreso Internacional de Matemáticas del Seguro, un trabajo en el que consideraba el acaecimiento del riesgo de una cartera de seguros como una contingencia entre el ente asegurador, por una parte, y la totalidad de los asegurados por otra.
Estos *trabajos de Lundberg han sido los que han indicado el camino a seguir a* sus sucesores (Cramer, Segerdahl, Seal, Pentikainen, Bühlrnan, Bohman, etc.).
Es preciso tener en cuenta que Lundberg se había adelantado casi treinta años al desarrollo de] cálculo de probabilidades; pues como dice Bühlmann, lo que sucedía es que Lundberg investigaba procesos estocásticos con incrementos independientes sin disponer de la teoría de los procesos estocásticos.

3.5 Elementos de la teoría colectivo

Esta teoría se basa en los siguientes supuestos:
Opera con sumas de riesgo tanto positivas como negativas.
Opera con un tiempo (τ) llamado operacional en donde τ es igual al número medio de siniestros en el tiempo físico [0,t). Es decir, $\tau = t * E(v)$.
Ocurrido un siniestro dará lugar a una indemnización de cuantía X_k. Esta variable aleatoria tendrá distribución V(x) independiente del tiempo. Representaremos por,
$Cr = \int_0^\infty x^r * dV(x)$ = Momento de orden r. Para r = 1, C_1 = Media = Costo Medio
$\varphi_x(is) = \int_0^\infty e^{isx} dV(x)$ = Función característica
Las primas de riesgo. Son la esperanza matemática de la siniestralidad

3.6 Proceso de riesgo

En la figura adjunta aparece una trayectoria muestral del proceso de riesgo..



Donde $X_{(t)}$ representa la pérdida total en $[0, \tau)$.
Es decir,
$X_{(\tau)} = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$ (Siniestralidad total)
Siendo n la variable aleatoria asociada al número de siniestros acaecidos en el tiempo $[0,t)$.
En la figura aparecen saltos asociados al acaecimiento de riesgos con sumas positivas (ejemplo, fallecimiento en un seguro para caso de muerte) y saltos asociados a riesgos con sumas negativas (fallecimiento de un asegurado que estaba percibiendo una renta contratada a prima única).
En lo sucesivo consideraremos especialmente el caso de sumas de riesgos positivas.
Este proceso se supone que satisface las hipótesis siguientes:
Es de incrementos independientes. Es decir:

$$X(\tau_0 + h) - X(\tau_0) \text{ y } x(\tau_1 + \mu) - x(\tau_1)$$

Son independientes. Ello equivale a suponer que el acaecimiento y la cuantía de un siniestro no tienen influencia en el acaecimiento o cuantía del siguiente.
Es de incrementos estacionarios. Es decir: $X_{(\tau 0 + h)} - X_{(\tau 0)}$
Depende solamente de h y no de τ_0 . Esto supone que los riesgos son independientes del tiempo, o sea, que el número de siniestros y su cuantía es independiente de que estemos situados, por ejemplo, en el año 80 o en el 90.
Las funciones muéstrales del proceso son funciones de salto. Ello supone que acaecido un siniestro se paga inmediatamente.
Con estas hipótesis la distribución conjunta de cualquier número finito de variables $X_{(\tau 1)}\ X_{(\tau 2)} \ldots X_{(\tau n)}$ estará completamente determinada por estas propiedades, y la familia de distribuciones finito-dimensionales así obtenida satisfará las condiciones de Kolmogorov.

3.7 Distribución de $X_{(\tau)}$ en un horizonte finito

Suponiendo que en el período $[0, \tau)$ han ocurrido n siniestros, la siniestralidad total vendrá dada por: $X_{(\tau)} = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n$
Partiendo de $X_{(0)} = 0$, y para un t fijo podemos poner:

$$F(x, \tau) = P\,[X_{(\tau)} \leq X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Pn}(\tau) V^{n(*)}(x)$$

en donde

$$V^{n(*)}(x) = \int_0^{\infty} V^{n-1(*)}(x-z)\,dV(z) \quad \text{y} \quad V^{1(*)}(x) = V(x)$$

$$P_n(\tau) = P[N_t = n] = e^{-t} * \tau^n / n! \qquad \text{(Poisson)}$$

$$P_n(\tau) = P[N_t = n] = \binom{-h}{n}\left(\frac{-\tau}{\tau + h}\right)^n \left(\frac{h}{\tau + h}\right)^h \text{ binomial negativa}$$

$$E(v) = 1 \quad \text{y} \quad \sigma^2(v) = \frac{1}{h}$$

La función característica de $F(x, \tau)$ es

$$\varphi X_{(\tau)}(is) = \int_0^\infty \ell^{isx}\, dF(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\tau) \int_0^\infty \ell^{isx}\, dV^{n(*)}(x) = \quad \varphi_n[\varphi_x(is)]$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_n[\varphi_x(is)] = e^{\tau[\varphi x(is) - 1]} \\ \varphi_x(is) = \int_0^\infty e^{isx}\, dV(x) \\ \varphi_n[\varphi_x(is)] = \left[1 - \frac{\tau}{h}\varphi_x(is) - 1\right]^2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{----Poisson} \\ \\ \text{—Binomial negativa} \end{array}$$

Desarrollando en serie se obtienen los parámetros:

Media $P \equiv \tau c_1$ (Poisson) ; τc_1 (binomial negativa)

Varianza $\equiv \tau c_2$ (Poisson) ; $\tau c_2 + (\tau c_1)^2 / h$(binomial negativa)

Momentos

De tercer $\equiv \tau c_3$ *(Poisson)* ; $\tau c_3 + \frac{3\,\tau^2 c_1 c_2}{h} + \frac{2\,(\tau c_1)^3}{h^2}$ (binomial negativa)

Orden

3.8 Aproximaciones de la función de distribución de la siniestralidad total

El problema de la obtención de aproximaciones para $F(x, \tau)$ fue ya investigado por Lundberg a principios de siglo, llegando a obtener la aproximación normal para $\tau \to \infty$ así como otras aproximaciones cuando τ no tiende a infinito.

Esta teoría de las aproximaciones asintóticas ha sido desarrollada, entre otros, por Cramer, Esscher, Böhman, Pentikainen, Beard y Pesonen, pudiendo considerarse como principales métodos de aproximación de la distribución del daño total los siguientes:

---Aproximación normal

En primer lugar si denominamos:

$$P = E[X_{(\tau)}] = \tau c_1 \qquad \text{(prima pura)}$$

$$\sigma^2 = E\{x_{(\tau)} - \tau c1\}^2 \qquad \text{(varianza)}$$

$$c_1 = \int_0^\infty x\, dV(x)$$

Resulta que, operando en unidades de costo medio del siniestro, es decir, $c_1 = 1$, entonces: $P = \tau$.

La variable tipificada v es

$$V = v = \frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = \frac{X_{(\tau)} - \tau}{\sigma}$$

de donde,

Función de distribución = $F_0(v, \tau) = F(\tau + v * \sigma, \tau)$

Función de densidad = $f_0(v, \tau) = F'_0(v, \tau)$

Cumpliéndose que
$X(\tau) = \sigma * v + \tau$
El desarrollo de Edgeworth de $f_0(v, \tau)$ es

$$f_0(v, \tau) = \varphi(v) - \frac{M_3}{3!\sigma^3}\varphi^{III}(v) + \frac{1}{4!}\left(\frac{M_4}{\sigma^4}\right)\varphi^{IV}(V) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por lo que si se toma el primer término del desarrollo,

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e_{-}^{v2/2}$$

se tiene la aproximación normal.
Esta aproximación es aceptable en los siguientes casos:
Poisson. Para $\tau \rightarrow \infty$ (Essher)
Binomial negativa. Para $\tau \rightarrow \infty$; $h \rightarrow \infty$; $u/h = K$ (constante) (Ammeter).

---Aproximación NP (Normal Power)

En el desarrollo de Edgeworth aparecen las derivadas sucesivas de $\varphi(v)$ que dan lugar a que para $v \rightarrow \infty$, sea una serie divergente. No obstante para valores comprendidos en un entorno de la media el desarrollo proporciona aproximaciones aceptables. Pero desde el punto de vista de la teoría de riesgo esto no es suficiente, ya que se necesitan cálculos para casos en que la desviación supere a dos o tres veces la desviación típica.
En este sentido el método NP parte de la variable normal tipificada:

$$v = \frac{X_{(t)} - P}{\sigma}$$

por lo que la siniestralidad total será,
$X_{(\tau)} = \tau * c_1 + v * \sqrt{\tau} * c_2$
Que conduce a la aproximación normal de la distribución de Poisson compuesta:

$$F(x, \tau) \simeq \left(\frac{x - \tau * c_1}{\sqrt{\tau c_2}}\right) = \varphi(v) = \int_{\infty}^{v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

La idea consiste en aproximar v por medio del desarrollo
$\gamma = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \ldots$
en que los coeficientes a_0, a_1, a_2, ... se determinan mediante el desarrollo de Edgeworth:

$$F(x, \tau) = \varphi(v) - \frac{M_3}{3!\sigma^3}\varphi^{III}(v) + \frac{1}{4!}\left(\frac{M_4}{\sigma^4}\right)\varphi^{IV}(V) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

En efecto, mientras que la aproximación normal se establece en base a la ecuación $\varphi(v) = 1 - \varepsilon$ [1] siendo ε la probabilidad de ruina de la empresa, la nueva variable γ satisfará la ecuación:

$$1 - \varepsilon = f_0(v, \tau) = \varphi(v) \quad \varphi(v+\Delta v) - \frac{1}{6\lambda_1}\varphi^{(3)}(v+\Delta v) + \frac{1}{24\lambda_2}\varphi^{(4)}(v+\Delta v) + \dots\dots\dots [2]$$

dada la probabilidad de que $\gamma \leq v + \Delta v$ que es $1 - \varepsilon$

$$\lambda_1 = \frac{M_3}{\sigma^3} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

Los coeficientes a_i se obtienen sustituyendo en [2]
$v + \Delta v = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots$
e igualando los segundos miembros de las expresiones [1] y [2]. Para ello Δv se puede poner así:

$$F(\Delta v) = \varphi(v) - \left[\varphi(v+\Delta v) - \frac{1}{6\lambda_1}\varphi^{(3)}(v+\Delta v) + \frac{1}{24\lambda_2}\varphi^{(4)}(v+\Delta v) + \frac{1}{72\lambda_1}\varphi^{(6)}(v+\Delta v) + \dots\dots\dots\right] = 0$$

aplicando el método de Newton de acuerdo con el desarrollo

$$x = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f(\bar{x})} - \frac{1}{2}\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\left[\frac{f(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right]^2$$

se obtiene la solución de la ecuación $f(x) = 0$ donde $\bar{x}$ es una solución aproximada de la misma
Hagamos entonces $x = \Delta v$ y $x = 0$ por lo que sustituyendo y haciendo operaciones queda:

$$\Delta v = \frac{\frac{1}{6\lambda_1}(v^2-1) + \frac{1}{24\lambda_2}(v^3-3v) + \frac{1}{72\lambda_1}(v^5-10v^3+15v) + \dots}{1 + \frac{1}{6\lambda_1}(v^3-3v) + 0} + \frac{1}{2}\frac{v+0}{1+0}\left[\frac{\frac{1}{6\lambda_1}(v^2-1)}{1+0}\right]^2$$

$$= \frac{1}{6\lambda_1}(v^2-1) + \frac{1}{24\lambda_2}(v^3-3v) - \frac{1}{36\lambda^2_1}(2v^3-5v)$$

o también:

$$\frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = v + \Delta v + \frac{1}{6\lambda_1}(v^2-1) + \frac{1}{24\lambda_2}(v^3-3v) - \frac{1}{36\lambda^2_1}(2v^3-5v) + 0 \quad [3]$$

Como se puede observar la aproximación normal es un caso particular de la expresión [3] (Sólo el primer termino)

Generalmente el método NP consiste en tomar las dos primeras filas del desarrollo, es decir,

$$\frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = \nu + \frac{1}{6\lambda_1}\left(\nu^2 - 1\right) \qquad [4]$$

que nos permite, a partir de $1 - F(x, \tau) = \varepsilon$ obtener v en las tablas de la normal (0,1) y calcular $X_{(\tau)}$ en la ecuación [4].
Este método ha sido probado por actuarios nórdicos, principalmente fineses, dando aproximaciones muy notables.
---Aproximación Gamma
A partir de la función de distribución gamma

$$\Gamma(x, \alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} du$$

vamos a hacer el siguiente cambio de variable

$$\Gamma(ax + b; \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{x+b} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} du$$

la cual tiene tres parámetros, lo que permite mejorar la aproximación de la función del daño total.
Teniendo en cuenta la variable tipificada,

$$\frac{X_{(\tau)} - P}{\sigma} = z \qquad P = \tau * c_1 \qquad \sigma = \sqrt{\tau * c_2} \qquad \text{(Poisson)}$$

$$F(x,\tau) = \varphi(z) = \int_0^{z+b} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{z+b} e^{-\mu} \mu^{\alpha-1} du$$

En la distribución gamma el momento ordinario de orden k es

$$\alpha_k = \frac{\Gamma(\alpha + K)}{\Gamma(\alpha)}$$

y al ser z una variable tipificada sus tres primeros momentos son:
$\alpha_1(z) = 0$
$\alpha_2(z) = 1$
$\alpha_3(z) = \lambda_1 = \frac{M_3}{\sigma^3}$ (coeficiente de simetría)
Por tanto,
$\alpha_1(az + b) = a\,\alpha_1(z) + b = b$
teniendo en cuenta que:

$$\alpha_1 = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$$

resulta

$$b = \frac{\Gamma(\alpha + 1}{\Gamma(\alpha)} = \alpha$$

Análogamente,
$\alpha_2(az + b) = a^2\alpha_2(z) + b^2 + 2ab\alpha_1(z) = a^2 + b^2 = \alpha(\alpha + 1)$

ya que

$$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha(\alpha + 1)$$

es decir, $a = \sqrt{\alpha}$

$\alpha_3(az + b) = a^3\alpha_3(z) + b^2 + 3a^2b\alpha_2(z) + 3ab^2\alpha_1(z) + b^3 =$
$= a^3\lambda_1 + 3a^2b + b^3 = a\sqrt{a}\lambda_1 + 3\alpha^2 + \alpha^3 =$
$= \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 3)$

de donde se obtiene que:

$$\alpha = \frac{4}{\lambda_1^2}$$

La aproximación de $F(x, \tau)$ por medio de una distribución gamma es, por consiguiente,

$$F(x, \tau) \cong \Gamma(ax + b; \alpha) = \left\{\Gamma \quad \frac{X - P}{\sigma}\sqrt{\alpha} + \right\}\alpha; \alpha \quad =$$

$$F(x,\tau) = \int_0^{X - \frac{P}{\sigma}} e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\frac{X-\tau c_1}{\sqrt{\tau c_2}}} e^{-\mu}\mu^{\alpha-1}du$$

siendo la $\tau * c_1$, la media; $\sqrt{\tau * c_2}$ la desviación típica y λ_1 el coeficiente de simetría ($\alpha=4/\lambda_1$).

Este método de aproximación tiene la importante propiedad de que cuando el tamaño de la cartera crece y el numero de siniestros sigue el modelo de la binomial negativa, la correspondiente variable de Poisson ponderada compuesta tiende a la función gamma, lo que justifica teóricamente los buenos resultados empíricos puestos de manifiesto por Seal con esta aproximación.

3.9 Método de Montecarlo.

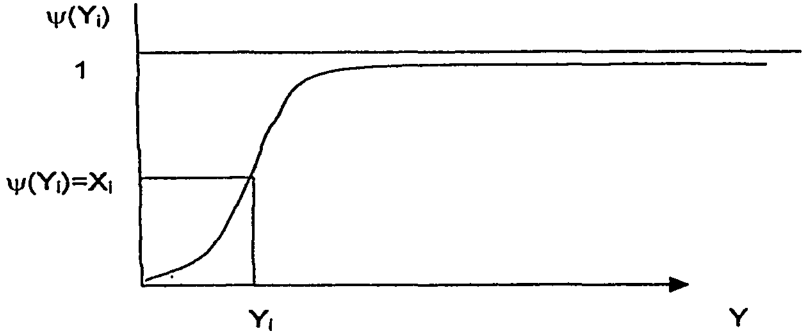
Se trata de un método de simulación basado en los números aleatorios que puede definirse de la siguiente manera: dada una variante ζ, que distribuye uniformemente en el intervalo (0,1), es decir:

$$F(X) = P[\zeta \leq X] = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{para } X \leq 0 \\ X & \text{para } 0 < X \leq 1 \\ 1 & \text{para } X > 1 \end{array} \right.$$

se toma una muestra de p valores de la variable obteniéndose una secuencia de números $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_p$. Estos números son los números aleatorios.

En general, el método de Montecarlo necesita gran cantidad de números aleatorios, por lo que es necesario que estos se generen con la ayuda de un computador.

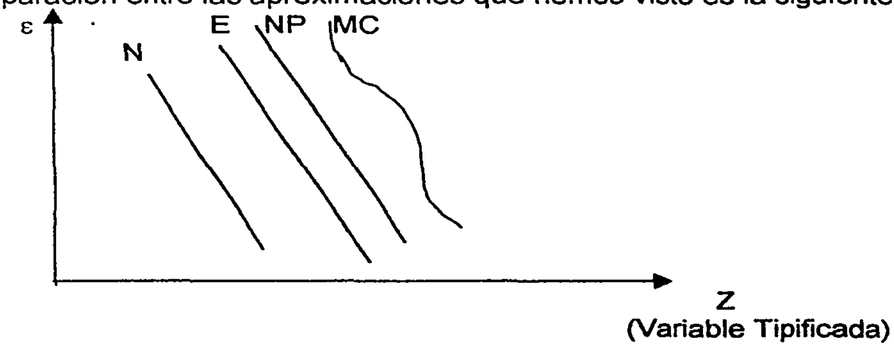
De los unifórmenle distribuidos números aleatorios X_i se pueden obtener fácilmente secuencias de nuevos números aleatorios a través de muestras de otra función de distribución $\psi(Y)$. De cada valor X_i se obtiene el correspondiente numero Y_i como se ve en el grafico.



Cada numero Y_i es la raíz de la ecuación $X_i=\psi(Y_i)$. Es decir, el método transforma una muestra aleatoria de la distribución rectangular $F(X)$ en una muestra aleatoria de otra distribución dada $\psi(Y)$, lo que nos permite aproximar esta función.

3.10 Aproximación de Esscher.

Básicamente el método de Esscher hace uso de los primeros términos del desarrollo de Edgeworth, pero después de hacer una transformación en la distribución $F(x, \tau)$ tal que el valor de x se mueva dentro del intervalo comprendido entre la media y dos o tres veces la desviación típica donde la aproximación normal, a través del desarrollo de Edgeworth, proporciona aproximación aceptables.
La comparación entre las aproximaciones que hemos visto es la siguiente:
comparación entre las aproximaciones que hemos visto es la siguiente:



siendo :
N= normal E= Edgeworth NP= Normal Power MC= Montecarlo

Y verificamos la conocida relación ξ= 1-F_0 (Z_1-τ) (probabilidad de ruina).
A medida que el numero de siniestros aumentan (n $\rightarrow \alpha$) entonces las curvas tienden a acercarse a la normal, que es la que nos da valores de z mas bajos para una misma probabilidad de ruina.

3.11 Función de distribución del daño total para toda la cartera.

En general, la información estadística utilizada para inferir la función F(x, T) suele comprender datos referentes a distintas subcarteras, por lo que se obtienen distintas funciones
$F_1(x, \tau_1)$, $F_2(x, \tau_2)$, $F_3(x, \tau_3)$,............, $F_k(x, \tau_k)$
Correspondiente a las subcarteras 1, 2 , 3.............K
Partiendo de la hipótesis de independencia entre las variantes de siniestralidad total de cada subcartera y de que todas ellas tienen la misma distribución, la función del daño total para el conjunto de la cartera es la convolución.
$F_1(x, \tau_1) * F_2(x, \tau_2) * F_3(x, \tau_3) * .... * F_k(x, \tau_k)$
Cuyos parámetros son :

$$E\left[X_{(\tau)}\right]=\sum_{i=1}^{K} E_i\left[X_{(\tau_i)}\right]$$

$$\sigma^2\left[X_{(\tau)}\right]=\sum_{i=1}^{K} \sigma^2{}_i\left[X_{(\tau_i)}\right]$$

Considerando el caso particular

$$F(x,\tau_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau_i}\tau_i^{\,n}}{n!}V_i^{\,n(*)}(x)$$

(distribución de Poisson compuesta en cada subcartera), resulta

$$\mathrm{F}(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau_i}\tau^n}{n!}V^{n(*)}$$

siendo,

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3+.......+\tau_k \qquad \text{y} \qquad V(x)=\sum_{i=0}^{K}\frac{\tau_i}{\tau}\cdot V_i(x)$$

en efecto, la función característica de la siniestralidad de la subcartera (i) es

$$\varphi(s)=e^{\tau_i\left[\varphi_{x(\tau_i)}(s)-1\right]}$$

$$\varphi_{x_{(\tau_i)}}(s)=\int e^{isx}dV_i(x)$$

con lo que

$$\varphi_{x_{(\tau_i)}}(s)=\prod_{i=1}^{K}\varphi_i(s)=\prod_{i=1}^{K}e^{\tau_i\left[\varphi_{x(\tau_i)}(s)-1\right]}$$

$$=e^{\tau_1[\varphi_{X(\tau 1)}(s)-1]}e^{\tau_2[\varphi_{X(\tau 2)}(s)-1]}\dots e^{\tau_k[\varphi_{X(k)}(s)-1]}$$

$$=e^{\sum_{i}^{k}\tau_i\left[\int_0^{\infty}e^{isx}dv_i(x)-1\right]}$$

$$=e^{\tau\left[\int_0^{\infty}e^{isx}d\sum_{i=1}^{k}\frac{\tau_i}{\tau}V_i(x)-1\right]}$$

donde se tiene que

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\dots\dots+\tau_k=\sum_{i=1}^{k}\tau_i$$

$$V(x)=\sum_{i=0}^{K}\frac{\tau_i}{\tau}\cdot V_i(x)$$

por lo que resulta

$$\varphi_{X_{(\tau)}}(s)=e^{\tau\left[\int_0^{\infty}e^{isx}dV(x)-1\right]}$$

es decir la función característica de la distribución de Poisson compuesta

$$F(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tau}\tau^{n}}{n!}V^{n(*)}(x)$$

cuya media es

$$E[X_{(\tau)}]=\sum_{i=1}^{K}\tau_i\overline{c}_{1i}$$

donde

$$\overline{c}_{1i}=\int_o^{\infty}xdV_i(x)\text{g}$$

3.12 Problema de la ruina en horizonte infinito

El problema de la ruina está basado en la distribución de la siniestralidad total en un período determinado, permite abordad decisiones a corto plazo. Sin embargo en el presente epígrafe vamos a dar entrada a otras dos magnitudes de estabilidad: las reservas de solvencia (S_0) y el recargo de seguridad (λ) lo que permite plantear el problema de la ruina de la empresa aseguradora mediante criterios de estabilidad más aptos para tomar decisiones a largo plazo.

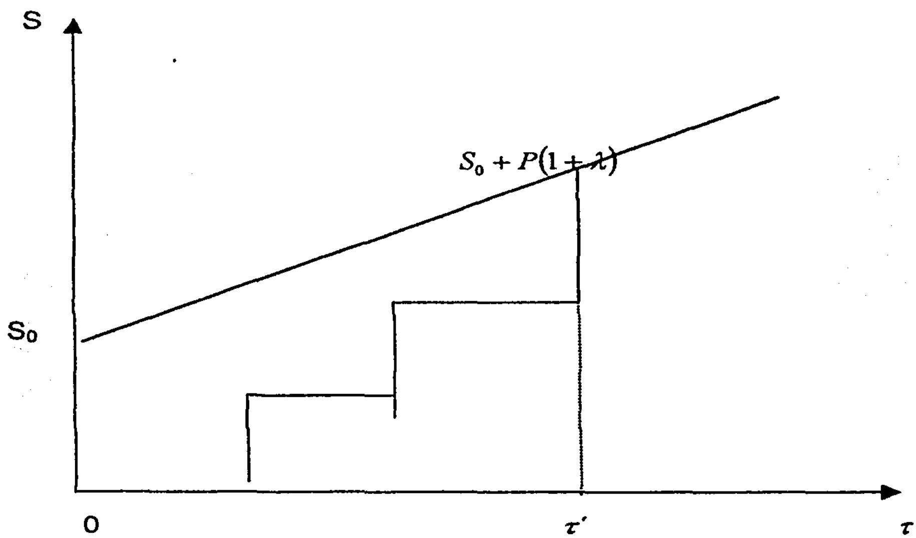
En proceso de ruina el importe de los fondos acumulados en $[0,\tau)$ esta dado por,

$$A_{(\tau)}=S_0+(1+\lambda)P-X_{(\tau)}$$

Siendo P= $\tau\cdot c_1$ y $X_{(\tau)}$ la variable asociada ala siniestralidad total en dicho periodo.

Llamaremos a:
$Y_{(\tau)} = P(1+\lambda) - X_{(\tau)} \rightarrow$ función de beneficio o ganancia en $[0,\tau)$

En la figura siguiente se muestra la representación de los fondos acumulados y una trayectoria muestral de $X_{(\tau)}$. en el momento τ' se cumple y se dice $A_{(\tau)} < 0$ que se ha presentado un proceso de ruina.
La hipótesis básica de este proceso $Y_{(\tau)}$ son las mismas que del proceso $X_{(\tau)}$ visto anteriormente, es decir, es un proceso de incrementos independientes y estacionarios.



Se llama probabilidad de ruina a la probabilidad de que se presente el suceso ruina en el futuro. Es decir, $P[A_{(\tau)} < 0]$, o bien, $P[Y_{(\tau)} < -S_0]$. Una propiedad importante de la probabilidad de ruina se da en el siguiente teorema:
Si $D[Y_{(\tau)}]$ es una función creciente y $E\left[e^{D[Y_{(\tau)}]}\right] \leq 1$, la probabilidad de ruina (ε) es igual o menor que $-D(-S_0)$, expresión independiente de τ .
En efecto, representando por $F_\tau(Y)$ la función de distribución de $Y_{(\tau)}$ tenemos

$$E\left[e^{D[Y_{(\tau)}]}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{D[Y_{(\tau)}]} dF_\tau(Y) \geq \int_{-\infty}^{-S_0} e^{D[Y_{(\tau)}]} dF_\tau(Y) \geq e^{D(-S_0)} \int_{-\infty}^{-S_0} dF_\tau(Y) = e^{D(-S_0)} dF_\tau(-S_0)$$

Como $F_\tau(-S_0)=P[Y_{(\tau)}<-S_0]=\varepsilon_{(\tau)}$, tenemos

$E[e^{D|Y_{(\tau)}|}]\geq e^{D(-S_0)}\varepsilon_{(\tau)}$

Luego

$\varepsilon_{(\tau)}\leq e^{D(-S_0)}E[e^{D|Y_{(\tau)}|}]$

pero como, por hipótesis $E[e^{D|Y_{(\tau)}|}]\leq 1$,resulta

$\varepsilon_{(\tau)}=\varepsilon\leq e^{D(-S_0)}$

la determinación de la función $D(Y_{(\tau)})$ puede hacerse mediante la siguiente consideraciones:

asumimos que las probabilidades $P[Y_{(\tau)}<0]$ y $P[Y_{(\tau)}>0]$ no son nulas, cuyo caso podemos poner (función característica):

$$\varphi(is)=E[e^{isY_{(\tau)}}]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{isY}dF_\tau(Y)=\int_{-\infty}^{-S_0}e^{\theta Y}dF_\tau(Y)$$

expresión que tiende a infinito cuando

$$\theta=is\rightarrow\begin{Bmatrix}\infty\\-\infty\end{Bmatrix}$$

por otra parte, como

$$\varphi''(\theta)=\int_{-\infty}^{-S_0}Y^2e^{\theta Y}dF_\tau(Y)>0$$

Tendremos, en definitiva, que la función característica de $Y_{(\tau)}$ tiene por representación una curva parabólica cuyo vértice, es decir su valor mínimo corresponde a $\theta\leq 0$, $\theta\geq 0$ según que sea negativa, nula, positiva. En el caso, pues, en que $E[Y_{(\tau)}>0]$ la ecuación

$$\varphi(is)=\varphi(\theta)=1$$

tiene dos raíces:

$$\theta_1=0 \text{ y } \quad \theta=r_2 \text{ siendo } r_2<0$$

luego la expresión calculada anteriormente

$$\varepsilon\leq e^{D(-S_0)}$$

podemos poner

$D(Y_{(\tau)})=r_2Y_{(\tau)}=-|r_2|Y_{(\tau)}$

ya que

$E[e^{\theta Y_{(\tau)}}]=E[e^{r_2Y_{(\tau)}}]=1$

sustituyendo según el teorema de la probabilidad de ruina queda

$$\varepsilon\leq e^{D(-S_0)}=e^{-|r_2|S_0}$$

o bien tomando $|r_2|=R$

$$\varepsilon\leq e^{-RS_0}$$

Expresión que nos da la cota superior de la probabilidad de ruina en un horizonte infinito (teorema de Definetti). La ecuación $\varepsilon \leq e^{-RS_0}$ también suele denominar " desigualdad de Lundberg" o desigualdad de Cramer " .
El coeficiente de ajuste R en que la función característica de $X_{(\tau)}$ es

$$\varphi_{X_{(\tau)}}(is) = \varphi_n[\varphi_X(is)]$$

Siendo

$$\varphi_{X_{(\tau)}}(is) = \int_0^\infty e^{isX} dV(x)$$

Y que

$$Y_{(\tau)} = P(1+\lambda) - X_{(\tau)}$$

El valor de R se obtiene de:

$$E\left[e^{-R\left[P(1+\lambda)-X_{(\tau)}\right]}\right] = e^{-P(1+\lambda)} \cdot E\left[e^{RX_{(\tau)}}\right] = 1$$

Es decir

$$e^{P(1+\lambda)-X_{(\tau)}} = E\left[e^{RX_{(\tau)}}\right] = \varphi_n[\varphi_X(R)]$$

Siendo

$$\varphi_X(R) = \int_0^\infty e^{RX} dV(x)$$

Como ya sabemos φ_n es la función característica de la distribución del numero de siniestros que ahora hemos de suponer se trata de un proceso de Poisson (exigido por las hipótesis de la independencia y estacionalidad del proceso); por lo tanto será

$$e^{(1+\lambda)RP} = \varphi_n[\varphi_X(R)] = e^{\tau[\varphi_X(R)-1]}$$

$$(1+\lambda)R \cdot P = \tau[\varphi_X(R) - 1]$$

Es decir, se obtiene de

$$\varphi_X(R) = \int_0^\infty e^{RX} dV(x) = 1 + (1+\lambda)R \cdot c_1$$

donde

$$c_1 = \int_0^\infty x dV(x) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon \leq e^{-RS_0}$$

De esta forma se ha elaborado un modelo de naturaleza estocástica que nos relaciona las dos magnitudes básicas de estabilidad o solvencia (S_0) y (λ) con la probabilidad de ruina (ε), por lo que una vez fijado ε (índice de estabilidad) se puede obtener una magnitud conocida la otra. Sin embargo nos hace falte conocer un tercer componente el reaseguro.

3.13 Generalizaciones

En el problema de la función de ruina
$\Psi(S_0)=\varepsilon\approx e^{-RS_0}$
se pueden generalizar, dentro de la teoría del riesgo colectivo, las siguientes generalizaciones:
Supongamos que la distribución de las cuantías de los siniestros depende del tiempo, es decir, que es V(x,u). en este caso, y para un periodo $[0,\tau)$, se toma:

$$\bar{V}(x,\tau)=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}V(x,u)du \qquad \text{(proceso no estacionario)}$$

en esta caso la distribución para un periodo fijo sería:

$$F(x,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\dot{P}_n(\tau)\bar{V}^{n(*)}(x,\tau)$$

en la que $P_n(\tau)=P[N_\tau=n]$
esta segunda generalización afecta ala distribución básica del numero de siniestros, consiste en suponer que es binomial negativa. En tal caso sustituyendo,

$$\varphi_n[\varphi_X(R)]=\left[1-\frac{\tau}{h}(\varphi_X(R)-1)\right]^{-h}$$

en

$$e^{(1+\lambda)PR}=\varphi_n(\varphi_X(R))$$

es decir

$$e^{-(1+\lambda)R\cdot P/h}=1-\frac{\tau}{h}(\varphi_X(R)-1)$$

y, por lo tanto, R se obtiene de

$$\varphi_X(R)=\int e^{RX}dV(x)=1+\frac{1-e^{-(1+\lambda)Rc_1\cdot\tau/h}}{\tau/h}$$

con lo cual se puede calcular la probabilidad de ruina:

$$\varepsilon\approx e^{-RS_0}$$

Esta generalización plantea el problema de que la falla de la hipótesis de no contagio que se hacia en el proceso de riesgo cuando se supone un desplazamiento del origen, ya que entonces en cada periodo se tienen subprocesos que no son independientes.

Para ello hay que suponer que en esta generalización (que da entrada a un proceso de contagio) no se desplaza la escala original y por lo tanto, que estamos en un intervalo $[0,\tau)$.

Para hacer practicas estas conclusiones son de interés las investigaciones de Segerdahl quien ha demostrado que la probabilidad de ruina para un tiempo ilimitado es prácticamente la misma que correspondería a un periodo limitado de unos diez años. En un ejemplo como el siguiente:

$dV(x)=e^{-x}dx$; $S_0=100$; $\tau=200$; $\lambda=10\%$; $\varepsilon\approx 10^{-4}$

$$c_1=\int_0^{\infty} xe^{-x}dx=1 \quad (S_0 \text{ equivale al 50\% de las primas})$$

El tiempo medio hasta la ruina es de 4.5 años aprox. , y la desviación típica de unos 2.2 años. En una aproximación normal la probabilidad condicionada de que cuando se presente *la ruina tenga lugar* antes de *los* 10 años *(aproximación* de m+2σ=4.5+2*2.2) asciende aproximadamente al 99%.

3.14 Aplicaciones de la teoría del riesgo

El modelo de riesgo colectivo está construido bajo las suposiciones de que una colección de pólizas genera un número aleatorio de reclamaciones en cada período y que cada reclamación puede ser por un monto aleatorio. Para aplicar el modelo, necesitamos información acerca de la distribución del número de reclamaciones y la distribución de los montos individuales de la reclamación.. la distribución de los montos individuales de la reclamación se ilustra en términos de 4 diferentes líneas de seguro: incendio, automóvil, invalidez temporal y hospital.
Se discutirán dos métodos de aproximación del modelo de la teoría del riesgo *individual para una cartera de seguros, por medio de un modelo colectivo.* Para situaciones a corto plazo, esto proporciona los medios para sustituir modelos colectivos por modelos individuales.

El concepto de reaseguro por exceso de siniestralidad para una cartera de pólizas es analizada en general. Los métodos para calcular la distribución del monto de las reclamaciones que proporciona los medios para el cálculo de las primas netas para el reaseguro de exceso de siniestralidad. Adicionalmente, discutimos la interpretación de un tipo de grupo asegurado dividiendo la fórmula como un reaseguro de exceso de siniestralidad).
Para dar una idea del amplio rango de aplicaciones de los modelos de la teoría del riesgo, se presentan cuatro aplicaciones específicas. La discusión está en la distribución individual de la reclamación. Esta puede combinarse con probabilidades de reclamaciones individuales ocurridas, para proporcionar un modelo de riesgo individual, o puede componerse con una distribución para el número de reclamaciones de una colección de seguros y así dar un modelo de riego colectivo. Las aplicaciones pueden ser usadas por una compañía se seguros para manejar una línea de negocios o grupo de pólizas similares, o por una firma industrial que use el modelado en su programa de riesgo.

3.15 Seguro por incendio

En este tipo de seguro, el evento de la reclamación es el fuego, el cual crea una pérdida. como el fuego puede causar un gran daño, se le debe asignar una probabilidad más alta en los montos de las reclamaciones por medio de la función de probabilidad P(x). En la literatura actuarial, algunas distribuciones han sido sugeridas, las cuales se encuentran en la siguiente tabla:

Distribuciones típicas del monto de la reclamación			
Nombre	p(x)	Media	Varianza
logaritmica normal	$(x\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \bullet \exp[\frac{-(\log x - m)^2}{2\sigma^2}]$ $\sigma > 0$ $x > 0$	$\exp(m+\sigma^2/2)$	$(e^{\sigma^2}-1)\exp(2m+\sigma^2)$
Pareto	$\frac{\alpha x_0^\alpha}{x^{\alpha+1}}$ $x > x_0 > 0,$ $\alpha > 0$	$\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}$ $\alpha > 1$	$\frac{\alpha x_0^2}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$ $\alpha > 2$
mezcla de exponenciales	$p\alpha e^{-\alpha x} + q\beta e^{-\beta x}$ $x > 0, 0 < p < 1, q = 1-p$ $\alpha, \beta > 0$	$\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}$	$\frac{p(1+q)}{\alpha^2} + \frac{q(1+p)}{\beta^2} - \frac{2pq}{\alpha\beta}$

Cuando la dispersión total de la probabilidad en el caso de la distribución (Pareto) dice que la media solo está dada para $\sigma > 1$ y para la varianza $\sigma > 2$,.

Para aplicar una de estas distribuciones estándar, los parámetros de la distribución podrían estimarse a partir de una muestra de montos de reclamación.

Daños a automóviles:

En este tipo de seguros, el evento de la reclamación está dado por un incidente que causa daño al automóvil asegurado. El monto de la reclamación no tendrá la variabilidad amplia encontrado en el seguro contra incendios. Por esta razón, la distribución gamma ha ajustado a los datos y se ha utilizado para la distribución del monto de la reclamación. Los parámetros de la distribución pueden estimarse de una muestra de los montos de reclamación.

Seguro de invalidez

Este seguro proporciona beneficios para los inválidos. Usualmente hay un periodo de espera, siete días por ejemplo, siguientes a la ocurrencia de la invalidez hasta que los beneficios comiencen. Hay también un límite máximo en el periodo de pago, de 13 semanas o hasta la edad de retiro. Cuando se asegura a un grupo, el seguro es llamado "seguro de grupo de indemnización semanal" o
"seguro de invalidez de grupo para un periodo largo", dependiendo del periodo de pago.

El *beneficio es un monto fijo por período*, y el *monto de la reclamación se fija por* el número de periodos en que continúa la invalidez. Sea Y una variable aleatoria que representa el número de periodos. De las estadísticas de las reclamaciones, la distribución de Y puede estimarse y tabularse como en la siguiente tabla . hay que notar la analogía entre la función representada en la segunda columna de la tabla y la función de supervivencia de las tablas de vida. Como se acostumbra en este caso, la función se refiere a una función continua. Esto produce probabilidades continuas de supervivencia o de la reclamación por invalidez en el tiempo dado. La función continua puede emplearse para proporcionar diferentes probabilidades de continuidad y terminación de la invalidez.

Al aplicar un modelo de riesgo colectivo para un grupo de invalidez del que está ilustrado en la tabla, Pr(N=n) debe interpretarse como la probabilidad de que n incapacidades, cada una de las cuales dura por lo menos 7 días, ocurre durante el periodo del seguro.

Si el beneficio es un monto c por día, la distribución del monto de la reclamación está dada por

$.p(x) = \Pr(Y=x/c) \qquad x=c,2c,3c,\ldots,28c,31c,\ldots,87c,91c$

El interés no está considerado para este seguro a corto plazo

Para el seguro de invalidez se usa frecuentemente la distribución Poisson para la distribución del número de incapacidades que ocurren y continúan durante el periodo de espera. El número esperado de incapacidades para la distribución se supone proporcional al número de vidas del grupo. El siguiente ejemplo ilustra cómo una *distribución Poisson compuesta pude usarse para modelar la experiencia de un* contrato de de invalidez grupal con un periodo a mediano plazo. El número de reclamaciones generadas por el grupo hasta el periodo fijado y los periodos de los beneficios, se consideran que son independientes.

Considere un contrato de seguro por invalidez que cubre un grupo de 200 mujeres todas de edad 32.

El beneficio está dado por medio de pagos mensuales de 2000 que comienzan 3 meses después de la fecha de la invalidez, hasta un número máximo de 21 pagos. Suponemos que la distribución Poisson compuesta es apropiada para S, el número total de reclamaciones para el grupo.

Duración de la reclamación (en días) y	Pr(Y>y)	Pr(Y=y)
0	1	0
1	0.965	0.035
2	0.93026	0.03474
3	0.89677	0.03349
4	0.86359	0.03318
5	0.83164	0.03195
6	0.80004	0.0316
7	0.76964	0.0304
8	0.73962	0.03002
9	0.71077	0.02885
10	0.68376	0.02701
11	0.65846	0.0253
12	0.63476	0.0237
13	0.61254	0.02222
14	0.59171	0.02083
15	0.57218	0.01953
16	0.55387	0.01831
17	0.53615	0.01772
18	0.51953	0.01662
19	0.50342	0.01611
20	0.48832	0.0151
21	0.47367	0.01465
22	0.45993	0.01374
23	0.44659	0.01334
24	0.43364	0.01295
25	0.4215	0.01214
26	0.4097	0.0118
27	0.39864	0.01106
28	0.38788	0.01076
31	0	0.06361
35	0.32427	0
38	0	0.04832
42	0.27595	0
45	0	0.03753
49	0.23842	0
52	0	0.0298
56	0.20862	0
59	0	0.02399
63	0.18463	0
66	0	0.01939
70	0.16524	0
73	0	0.01586
77	0.14938	0
80	0	0.013
84	0.13638	0
87	0	0.01077
91	0	0.12561
		1

Para la tasa de invalidez y la distribución del monto de la reclamación usamos el extracto de una tabla de continuidad mostrada abajo la cual es apropiada para un grupo de 1000 mujeres de edad 32 publicada en 1987. La tabla fue construida bajo un contexto deterministico. Para este ejemplo, los datos son apropiados para una distribución Poisson compuesta, y los encabezados han sido adaptados con Y en la columna (3). La constante de proporcionalidad para la tasa de invalidez está dada por θ.para determinar la media y la varianza de S se tiene que el monto del beneficio está denotado por X=2000Y, Y=1,2,...,21, y la función de probabilidad de Y está denotada por p(y). Note que esta formulación ignora el interés sobre el periodo de 21 meses. El número esperado de incapacidades que continúan más allá del periodo de espera para el grupo de 200 vidas es 200.Así

$E[S]=200\lambda_{32}E[X]= (2000)(200)\ \lambda_{32}\ E[Y]$

Y $Var(S)=200\lambda_{32}E[X^2]= (2000^2)(200)\ \lambda_{32}E[Y^2]$

Para expresar los momentos de S en términos de los valores dados en la tabla de continuidad procedemos como sigue:

$$E[Y]=\sum_{y=1}^{21} yp(y)+21\sum_{y=22}^{\infty} p(y)$$

$$=\sum_{y=1}^{21}(\sum_{x=1}^{y}1)p(y)+21\sum_{y=22}^{\infty} p(y)$$

$$=\sum_{x=1}^{21}[\sum_{y=x}^{21} p(y)]+21\sum_{y=22}^{\infty} p(y)$$

$$=\sum_{x=1}^{21}[\sum_{y=x}^{\infty} p(y)-\sum_{y=22}^{\infty} p(y)]+21\sum_{y=22}^{\infty} p(y)$$

$$=\sum_{x=1}^{21}\sum_{y=x}^{\infty} p(y)=\sum_{x=1}^{21}\Pr(Y\geq x)$$

Al sustituir esta expresión en E[S] se obtiene:

$E[S]=200\lambda_{32}E[X]=(2000)(200)\ \lambda_{32}E[Y]$
$= 400(2.6640+2.4008+...+0.99610) = 12,203.12$

Para el cálculo de la varianza para el total de las reclamaciones del grupo de 200 vidas, necesitamos el segundo momento que equivale a la sustitución m= $\sum_{x=1}^{m}(1)$. Puede verificarse que m^2= $\sum_{x=1}^{m}(2x-1)$. Entonces

$$E(Y^2)=\sum_{y=1}^{21}y^2p(y)+(21)^2\sum_{y=22}^{\infty}p(y)$$

$$=\{\sum_{y=1}^{21}[\sum_{x=1}^{y}(2x-1)]p(y)+(21)^2\sum_{y=22}^{\infty}p(y)\}$$

$$=\{\sum_{x=1}^{21}(2x-1)\left[\sum_{y=x}^{\infty}p(y)-\sum_{y=22}^{\infty}p(y)\right]+(21)^2\sum_{y=22}^{\infty}p(y)\}$$

$$=\sum_{x=1}^{21}(2x-1)\sum_{y=x}^{\infty}p(y)=\sum_{x=1}^{21}(2x-1)\Pr(y\geq x)$$

Sustituyendo esta expresión en Var(S) se obtiene:

Var(S)=(2000)^2(200)$\lambda_{32}E[Y^2]$

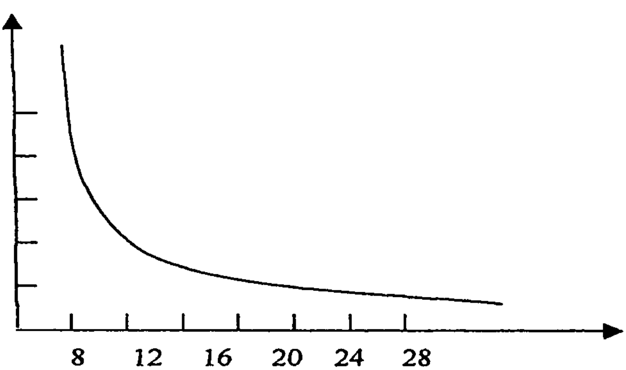
$$=(800{,}000)(1000)\,\lambda_{32}\sum_{x=1}^{21}(2x-1)\Pr(y\geq x)$$

= 800000[1(2.6640)+3(2.4008)+...+41(0.9961)]

=425.9808 $\times$ 10^6

3.16 Seguro de hospital:

Aquí consideramos el seguro de hospital que proporciona beneficio diario durante la hospitalización. Una tabla de hospitalización puede ser utilizada para producir una función de probabilidad para el periodo de permanencia en el hospital. Una gráfica de la función continua de hospitalización está dada en la que a continuación se da :



Al aplicar un modelo de riesgo colectivo para un seguro de hospital de este tipo emitido para un grupo de vidas, la Pr(N=n) debe interpretarse como la probabilidad de que n hospitalizaciones, las cuales se encuentran contenidas en la póliza, ocurren durante el periodo para los miembros del grupo cubierto. Si el monto del beneficio es de c por día, la función de probabilidad del monto de la reclamación está dada por

$p(x) = \Pr(Y = x/c)$ x=c,2c,...,mc

Donde la variable aleatoria Y representa la duración de la hospitalización en días y m es el máximo número de días cuyos beneficios ya están pagados.

El uso de modelos de riesgo en estas aplicaciones nos permite estimar la prima pura total. Además, esta estimación puede ser complementada con información acerca de la variabilidad de las pérdidas.

3.17 Aproximación al modelo individual

Los modelos de riesgo colectivo e individual son construcciones alternativas diseñadas para capturar aspectos clave de los sistemas de seguro. Cada modelo nos *conduce al desarrollo de una distribución de reclamaciones totales para el sistema* modelado del seguro. Se desarrollan dos métodos para los cuales la distribución Poisson compuesta, generalmente asociada con el modelo de riesgo colectivo, puede usarse para aproximar la distribución de las reclamaciones totales en el modelo individual.

Consideramos el modelo individual a un grupo de n pólizas. Las reclamaciones totales en el periodo de una póliza para el grupo es S= $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$

Donde X_j *es la reclamación que resulta de la póliza j (j=1,2,...,n). Distinguimos entre* la ocurrencia de una reclamación y su monto, y escribimos

$X_j = I_j B_j$

Aquí, I_j es 1 si la póliza j nos lleva a una reclamación y 0 en otro caso; B_j es el monto de tal reclamación, dado que esto ocurre. Bajo la suposición de que I_j, B_j con j=1,2,...,n son mutuamente independientes, se sigue que

$$E[S]=\sum_{j=1}^{n} q_j \mu_j$$

y

$$Var(S)=\sum_{j=1}^{n} q_j (1-q_j)\mu_j^2 + \sum_{j=1}^{n} q_j \sigma_j^2$$

donde q_j denota la probabilidad de que la póliza j conduzca a una reclamación, $\mu_j = E[B_j], y \sigma_j^2 = Var(B_j)$

Denotamos la función de probabilidad de B_j por $P_j(x)$. Si la reclamación ocurre, la probabilidad de que de que ésta provenga de la póliza j es, por el Teorema de Bayes, aproximadamente $q_j/(q_1 + q_2 + ... + q_n)$. Entonces, por la ley de la probabilidad total, la función de distribución del monto de una reclamación dada es aproximadamente

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j P_j(x)}{q_1 + q_2 + ... + q_n}$$

consideraremos dos métodos para aproximar la distribución de S por medio de la distribución Poisson compuesta.

El primer método utiliza la distribución Poisson compuesta con parámetro Poisson
$\lambda = q_1 + q_2 + ... + q_n$
y la función de probabilidad de los montos de la reclamación individual

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$$

La interpretación de $\lambda = q_1 + q_2 + ... + q_n$ es que el número esperado de reclamaciones en el modelo de la Poisson compuesta es el mismo que en el modelo original del riesgo. Similarmente, P(x)=$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$ significa que la distribución de una reclamación, dado que esta ha ocurrido, es el mismo que en los dos modelos, como se ve en

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j P_j(x)}{q_1 + q_2 + ... + q_n}$$

La distribución Poisson compuesta especificada por $\lambda = q_1 + q_2 + ... + q_n$ y P(x)=$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$ pude explicarse también como sigue: en el modelo individual, el número de reclamaciones producidas por la póliza j es una variable aleatoria Bernoulli. Aproximemos su distribución por medio de la distribución Poisson compuesta con parámetro q_j.La distribución de X_j está aproximada por la distribución Poisson compuesta dada por q_j y $P_j(x)$. Entonces se puede aproximar la distribución de S por medio de la distribución Poisson compuesta dada por $\lambda = q_1 + q_2 + ... + q_n$ y

P(x)=$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$

De P(x)=$\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$ se sigue que

$$p_k = \sum_{j=l}^{n} \frac{q_j}{\lambda} E[B_j^k] \qquad \text{k=1,2,...}$$

En particular

$$p_1 = \sum_{j=l}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \mu_i \text{ y}$$

$$p_2 = \sum_{j=l}^{n} \frac{q_j}{\lambda} (\mu_j^{\ 2} + \sigma_j^{\ 2})$$

Entonces, la media de la distribución Poisson compuesta aproximada, λp_1, coincide con la media del total de reclamaciones en el modelo individual original. Por otra lado, la varianza de la distribución Poisson compuesta aproximada, λp_2, es

$$\sum_{j=l}^{n} q_j (\mu_j^2 + \sigma_j^2)$$

y *excede a la varianza del total de reclamaciones en el modelo individual* . Sin embargo, si las q_j´s son pequeñas, las dos varianzas son aproximadamente las mismas.

Consideremos el caso especial donde el monto de la reclamación para cada póliza es constante,

$B_j = b_j$,por lo que $\mu_j = b_j$ y $\sigma_j = 0$. Entonces la función de probabilidad de los montos de las reclamaciones individuales de acuerdo con P(x)= $\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$ es

$$p(x) = \sum_{bj=x} \frac{q_j}{\lambda}$$

donde la suma se toma sobre las pólizas para las cuales $b_j = x$. Además, el radio de la varianza del total de las reclamaciones en el modelo individual a la varianza de la distribución Poisson compuesta aproximada es

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} q_j b_j^{\ 2} (1 - q_j)}{\sum_{j=1}^{n} q_j b_j^{\ 2}}$$

Esta tasa puede ser interpretada como una media ponderada de las probabilidades de que no haya reclamaciones, 1-q_j

Ejemplos

A) Consideremos una cartera de 1800 pólizas. Aproxima la distribución del monto de

las reclamaciones por medio de una distribución Poisson compuesta y discute la aproximación resultante para la varianza de el monto de las reclamaciones
se tiene que
λ=500(0.02)+500(0.02)+300(0.1)+500(0.1)=100

y

$$P(1)=\frac{500(0.02)+300(0.1)}{100}=0.4$$

$$P(2)=\frac{500(0.02)+500(0.1)}{100}=0.6$$

Entonces $p_2 = p(1)+4p(2)=2.8$, y la varianza de la aproximación de la distribución Poisson compuesta es λp_2=280. Como se esperaba, esto excede la varianza del monto de las reclamaciones en el modelo individual, que es de 256 .
El segundo método para aproximar la distribución de S utiliza la distribución Poisson compuesta con el parámetro Poisson

$$\bar{\lambda} == \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \ldots + \bar{\lambda}_n$$

donde $\bar{\lambda}_j = -\log(1-q_j)$ y la función de distribución de los montos de las reclamaciones individuales

$$\bar{P}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{\lambda}_j}{\bar{\lambda}} P_j(x)$$

La motivación para estas expresiones es similar para $\lambda = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ y

P(x)= $\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} P_j(x)$ La diferencia es que en $\lambda = q_1 + q_2 + \ldots + q_n$ los números esperados de reclamaciones en los dos modelos están combinados, mientras que $\bar{\lambda} == \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \ldots + \bar{\lambda}_n$ implica

$$e^{-\bar{\lambda}} = \prod_{j=1}^{n} (1-q_j);$$

esto es, las probabilidades de las no reclamaciones son las mismas en los dos modelos.

B) Para la cartera de 1800 pólizas del ejemplo anterior, calcule la aproximación Poisson compuesta para la distribución del monto de las reclamaciones por el segundo método

Solución:

$\lambda = $-500log(0.98)-500log(0.98)-300log(0.9)-500log(0.9)=104.5

$$p(1)=\frac{-500\log(0.98)-300\log(0.9)}{104.5}=0.399$$

$$p(2)=\frac{-500\log(0.98)-500\log(0.9)}{104.5}=0.601$$

Hemos presentado dos métodos para aproximar la distribución del monto de las reclamaciones en el modelo individual para una distribución Poisson compuesta. Si todas las q_j´s para el modelo individual son pequeñas(lo cual podría ser el caso relacionado con las pólizas de seguro de vida), los dos métodos dan resultados muy similares, en ese caso,

$$\lambda_j=-\log(1-q_j)=q_j+\frac{1}{2}q_j^{\,2}+\ldots\cong q_j$$

3.18 Reaseguro por exceso de siniestralidad

Para el concepto de seguro con un deducible. Se tiene }que la cobertura es escrita para una colección de riesgos de seguro, esta se llama reaseguro por exceso de siniestralidad que es el tema de esta sección. En una aplicación dada, S puede denotar las reclamaciones totales en un periodo dado para una compañía de seguros, o para un paquete de negocios de una compañía, o para la vida o salud del grupo al que asegura el contrato.

Para el contrato de reaseguro por exceso de siniestralidad con deducible d, el monto pagado por el reasegurador a la compañía cedente es

$$I_d=\begin{cases}0 & S\le d\\ S-d & S>d\end{cases}$$

Algunas veces esto se escribe como $I_d=(S-d)_{\oplus}$, donde el subíndice del signo + denota la parte positiva de S-d

Se observa que I_d como una función de del monto de las reclamaciones, es también una variable aleatoria. El monto de las reclamaciones retenidas por la compañía cedente es

$$S-I_d=\begin{cases}S & S\le d\\ D & S>d\end{cases}$$

Entonces, el monto retenido está limitado por d, el cual explica el nombre de contrato de exceso de siniestralidad.

Los métodos para calcular E[I_d] , las reclamaciones pagadas esperadas por el reasegurador cuando el deducible es d. Denotamos la función de distribución de S por $F_s(x)$ y primero la suposición de que S tiene una función de densidad de probabilidad $f_s(x)$ .Entonces

$$E[I_d] = \int_d^\infty (x-d) f_s(x) dx$$

Usualmente S no puede asumir valores negativos. Se pude extender la integral a $(0, \infty)$ y restar la integral sobre (0,d) para ver que

$$E[I_d] = E[S] - d + \int_0^d (d-x) f_s(x) dx$$

Si establecemos

$$f_s(x) = -\frac{d}{dx}[1 - F_s(x)]$$

En E[I_d] al integrar por partes obtenemos:

$$E[I_d] = \int_d^\infty [1 - F_s(x)] dx$$

Similarmente, obtenemos

$$E[I_d] = \int_d^\infty [1 - F_s(x)] dx \quad E[I_d] = E[S] - \int_0^d [1 - F_s(x)] dx$$

Cada una de esas cuatro expresiones para $E[I_d]$ tiene su propio mérito. Si se dispone de E[S], Las expresiones $E[I_d] = E[S] - d + \int_0^d (d-x) f_s(x) dx$ y $E[I_d] = E[S] - \int_0^d [1 - F_s(x)] dx$ se utilizan donde se requiere la integración definida, donde el rango de integración es finito. Esto reduce las posibilidades de una mala aproximación de $f_s(x)$ para x larga. Las expresiones formulas $E[I_d] = \int_d^\infty [1 - F_s(x)] dx$ y $E[I_d] = E[S] - \int_0^d [1 - F_s(x)] dx$ que sostienen distribuciones generales, incluyendo las distribuciones discretas o de tipo mixto . Si la distribución de S se da en forma analítica, por ejemplo, por una distribución normal o gamma, $E[I_d] = \int_d^\infty (x-d) f_s(x) dx$ podría ser una expresión adecuada.

3.19 Ejemplos

A) Si S tiene una distribución gamma, demuestra que

$$E[I_d]=\frac{\alpha}{\beta}[1-G(d:\alpha+1,\beta)]-d[1-G(d:\alpha,\beta)]$$

De E$[I_d]=\int_d^{\infty}(x-d)f_s(x)dx$, obtenemos

$$E[I_d]=\int_d^{\infty}xf_s(x)dx-d[1-F_s(d)]$$

$$=\int_d^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha}e^{-\beta x}dx-d[1-G(d:\alpha,\beta)]$$

Donde $\alpha\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha+1)$, el integrando es α/β veces la función de densidad de probabilidad gamma con parámetros α+1 y β.

B) Suponga que a,b son números tal que Pr(a<S<b) = 0. Demuestre que, para a<d<b, E$[I_d]$ puede obtenerse de $E[I_a]$ y $E[I_b]$ por interpolación lineal.

Solución:
De la suposición, se sigue que $F_s(x)=F_s(a)$ para a≤x<b. Usamos esto en $E[I_d]=E[S]-\int_0^{d}[1-F_s(x)]dx$ para ver que

$$E[I_d]=E[I_a]-(d-a)[1-F_s(a)];$$

esto es, $E[I_d]$ es una función lineal de d en el intervalo [a,b]

Consideremos el caso donde los valores posibles de S son integrales no negativas y denotados por $f_s(x)$ la probabilidad de S (x=0,1,2,...). Supongamos que el deducible d es un número entero. De acuerdo con el ejemplo precedente, las reclamaciones esperadas del reaseguro de exceso de siniestralidad para deducibles no integradas pueden obtenerse por interpolación lineal.

Las fórmulas

$$E[I_d]=\sum_{x=d+1}^{\infty}(x-d)f_s(x) \qquad \text{y} \quad E[I_d]=E[S]-d+\sum_{x=0}^{d-1}(d-x)f_s(x)$$

son las contrapartes de

$$\text{E}[I_d]=\int_d^{\infty}(x-d)f_s(x)dx \ \text{ y } \ \text{E}[I_d]=E[S]-d+\int_0^{d}(d-x)f_s(x)dx$$

Las integrales en $E[I_d]=\int_d^{\infty}[1-F_s(x)]dx$ y $E[I_d]=E[S]-\int_0^{d}[1-F_s(x)]dx$ pueden ser escritas por medio de sumas, como F$_s(x)$ es constante por partes . Obtenemos

$$E[I_d]=\sum_{x=d}^{\infty}[1-F_s(x)]$$

y $$E[I_d]=E[S]-\sum_{x=0}^{d-1}[1-F_s(x)]$$

C) Para la distribución del monto del reclamos es exponencial con parámetro □. calcule, por los dos métodos, las reclamaciones del reaseguro por exceso de siniestralidad cuando el deducible es de 7.

Solución:

De acuerdo con $E[I_d]=\sum_{x=d+1}^{\infty}(x-d)f_s(x)$

$E[I_7]=f_s(8)+2f_s(9)=0.0028$

y de acuerdo con $E[I_d]=\sum_{x=d}^{\infty}[1-F_s(x)]$

$E[I_7]=[1-F_s(7)]+[1-F_s(8)]=0.0028$

D) Calcule $E[I_6]$ para la distribución Poisson compuesta utilizada en el ejemplo anterior:

Como la distribución Poisson compuesta tiene un rango infinito, el uso de $E[I_d]=E[S]-d+\sum_{x=0}^{d-1}(d-x)f_s(x)$ y $E[I_d]=E[S]-\sum_{x=0}^{d-1}[1-F_s(x)]$) es más práctico. Por ejemplo, si usamos $E[I_d]=E[S]-d+\sum_{x=0}^{d-1}(d-x)f_s(x)$ obtenemos

$E[I_6]=E[S]-6+\sum_{x=0}^{5}(6-x)f_s(x)=1.7-6+4.3547=0.0547$

En general, de $E[I_d]=\sum_{x=d}^{\infty}[1-F_s(x)]$ obtenemos una fórmula recursiva

$E[I_{d+1}]=E[I_d]-[1-F_s(d)]$ d=0,1,2...

entonces

$E[I_d]$ puede obtenerse recursivamente con el valor inicial $E[I_0]=E[S]$

Esta aproximación recursiva es particularmente conveniente si S tiene una distribución compuesta que satisface las condiciones del Teorema 12.4.3. En este caso, $f_s(x)$ también puede calcularse recursivamente . Como un ejemplo, para la distribución Poisson compuesta, comenzamos con

$f_s(0)=F_s(0)=e^{-\lambda}$ y

$E[I_0]=\lambda p_1$,

y usando las fórmulas recursivas

$f_s(x)=\frac{\lambda}{x}\sum_{j=1}^{\infty}jp(j)f_s(x-j)$

$F_s(x) = F_s(x-1) + f_s(x)$,
$E[I_x] = E[I_{x-1}] - [1 - F_s(x-1)]$
sucesivamente para x= 1,2,3,...

E) Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta con λ=1.5, p(i)=2/3, p(2)=1/3. Calcule los valores de $f_s(x), F_s(x), E[I_x]$ para x=0,1,2,...,6 . entonces se tiene:
Primero,
$f_s(0) = F_s(0) = e^{-1.5} = 0.223$

y
$E[I_0] = \lambda p_1 = 1.5\frac{4}{3} = 2$

Luego, si $\lambda jp(j) = 1$ para j=1,2

$f_s(x) = \frac{1}{x}[f_s(x-1) + f_s(x-2)]$ x=1,2,...,6

Note que $f_s(1) = f_s(0)$
Los resultados se enlistan abajo

x	$f_s(x) = (1/x)[f_s(x-1)$ + $f_s(x-2)]$	$F_s(x) = F_s(x-1)$ + $f_s(x)$	$E[I_x] = E[I_{x-1}]$ + $F_s(x-1) - 1$
0	0.223	0.223	2.000
1	0.223	0.446	1.223
2	0.223	0.669	0.669
3	0.149	0.818	0.338
4	0.093	0.911	0.156
5	0.048	0.959	0.067
6	0.024	0.983	0.026

la discusión se ha enfocado en el cálculo de $E[I_d]$, las reclamaciones esperadas del reaseguro por exceso de siniestralidad . Este es un límite inferior para la prima de exceso de siniestralidad. La prima actual contendrá un cargo que refleja la variabilidad del pago del reasegurador, I_d. Una medida de esta variabilidad es
$\text{Var}(I_d) = E[I_d^2] - E[I_d]^2$

CAPÍTULO CUATRO

EL REASEGURO PRINCIPALES MODALIDADES.

4.1 Reaseguro

El reaseguro es un componente del subsistema de estabilidad de la empresa aseguradora, y se encuadra dentro de las medidas que se pueden tomar para conseguir la solvencia adecuada del ente asegurador.
Es tan íntimo como el propio seguro, aunque en los primeros tiempos estaba presidido por la idea de amortiguar los efectos de los grandes siniestros.
En el ramo de vida comenzó a practicarse en el año 1849 entre compañías escocesas bajo la modalidad de "prima de tarifa". Posteriormente aparece el sistema de asegurar el capital en riesgo que da origen al reaseguro de "primas de *riesgo", que se basa en la cesión de una parte del capital en riesgo asumido por el* asegurador directo que exceda a su retención o pleno.
Posteriormente surgen las modalidades de reaseguro no-proporcionales ("excess loss" y "stop loss").

Las causas principales que hicieron surgir el reaseguro excess-loss fueron:

Las pérdidas ocasionadas por las grandes catástrofes a las compañías de seguros;
El aumento de las comunicaciones e intercambios de información que es exigido por esta modalidad. Pues es preciso tener en cuenta que: a) los intereses del cedente y reasegurador ya no van tan paralelos como en el reaseguro de sumas o riesgos; b) los aspectos técnicos (cálculo de primas) son menos elementales; c) la posibilidad de que el reasegurador acumule riesgos de varios cedentes; d) la *política de cesiones puede favorecer al cedente (ceder malos riesgos y con primas* bajas).
La aparición desde 1920, del seguro de vehículos a motor, en especial la modalidad de responsabilidad civil.
Los seguros de accidentes donde un mismo siniestro podía afectar a varias personas.
Los seguros de aviación (1939), tormentas y heladas que ocasionaron grandes pérdidas.
Otro hecho importante ha sido la aparición de las entidades mutuas que por razones de competencia con las compañías necesitaban limitar sus pérdidas anuales.
La necesidad de reducir los costes de la operación ha sido otro factor que ha influido en el desarrollo de estas modalidades no proporcionales.
los resultados deficitarios de los reaseguros han obligado no sólo ha tomar medidas severas de restricción por parte de los reaseguradores profesionales, sino también a adoptar en los mercados de reaseguros nuevas formas contractuales.
Particularmente en lo que se refiere a la responsabilidad civil, en la que el reaseguro proporcional ha sido reemplazado casi totalmente por reaseguros no proporcionales.

4.2 Clasificación.

Desde el punto de vista actuarial podemos establecer los siguientes sistemas de reaseguro:

Reaseguro de riesgo o sumas.

Es aquel en que la suma cedida por el asegurador directo y aceptada por el reasegurador es proporcional al riesgo asumido por el cedente. De aquí que también se llama reaseguro proporcional. Las cesiones se suelen hacer por póliza. Se pueden distinguir las modalidades:

Cuota parte. La cesión es constante en relación a la suma asegurada.
Excedente. La participación varía según la suma asegurada y la naturaleza del riesgo. En este caso surge el concepto de pleno de conservación.
Mixto. Como una combinación de las dos anteriores.

Reaseguros de pérdidas o siniestros.

En este sistema las cesiones ya no se fijan en proporción a las sumas aseguradas. Por eso se llaman también no-proporcionales.

Se pueden distinguir las siguientes modalidades:

Excess-loss. El reasegurador cubre lo que supera el pleno por siniestro que fija el cedente.

Ofrece el inconveniente, especialmente en ramos como el de responsabilidad civil, de presentar fuertes fluctuaciones en el caso de que se produzcan grandes variaciones en el orden económico o monetario y que en época de inflación se registra tanto un aumento del número de siniestros que exceden el pleno, como un incremento en la cuantía de los mismos.
Para paliar estos inconvenientes se aplican cláusulas de variación de la prima o del pleno de propia retención en función de algún índice económico o de precios (cláusulas de estabilización).

Ninguna de las modalidades hasta ahora mencionadas elimina el riesgo de empresa. Esto se consigue con la modalidad.

Stop-loss. El reasegurador entra a pagar el exceso de siniestralidad total que se estipule sobre un porcentaje del total de primas del periodo (stop-loss rate) o del volumen de capitales fijado (stop-loss ratio).
Por el hecho de referirse a toda la cartera también se le llama "reaseguro totalmente colectivo".
Se le señala la ventaja de cubrir, además de siniestros de cuantía elevada, las fluctuaciones en el número de siniestro.

4.3 Otras formas de reaseguro.

Pool. Formación de consorcios reaseguradores (nacionales o internacionales) a los efectos de ampliar la capacidad de acción.
Un hecho que ha dado lugar a la aparición de nuevas modalidades ha sido la inflación. Han surgido en tratados:
ECOMOR (excedentes del coste medio relativo).
EPNOC (Excess Premiums related claims).
1.a) *Reaseguro cuota-parte.* Se trata de cesiones individuales y proporcionales al riesgo corrido por el cedente.
En la modalidad cuota-parte la cesión es constante en relación a la suma asegurada. Es decir, se retiene un porcentaje fijo.
Si 1/K (para K > 1) es la cuota retenida por el cedente, se tiene:

Suma de riesgo neta de reaseguro.............................. $\frac{1}{K}$
(St = Capital en riesgo en el seguro de vida)

Suma de riesgo reasegurada.............................. $\left(1-\frac{1}{K}\right)S_t$

Para un siniestro de cuantía.. X

A cargo del cedente.. $\frac{1}{K}X$

A cargo del reaseguro... $\left(1-\frac{1}{K}\right)X$

Esta modalidad no permite homogeneizar las retenciones del cedente pues si 1/K =0,20 cederá el 80% de todos los riesgos con independencia de las sumas aseguradas.
Para obviar este inconveniente surge la modalidad del excedente.
1.b) *Reaseguro de excedente. Aquí la participación varía según sea la suma* asegurada y la naturaleza del riesgo. Aparece el concepto de pleno de retención o conservación (M).
Si la suma asegurada es S se tiene:

Para **$S \le M$** no hay reaseguro.
Para **$S > M$** hay reaseguro.

La suma en riesgo (neta de reaseguro) viene dada por:

$$\frac{M}{S}S = M$$

Para un siniestro de cuantía X será:

A cargo del cedente.. $\frac{M}{S}X$

A cargo del reaseguro.. $\frac{S-M}{S}X$

Esta modalidad permite homogeneizar los plenos de propia retención ya que la proporción retenida varía con la suma asegurada.

1.c) También se puede señalar una modalidad mixta de cuota y excedente. Estas modalidades encuentran aplicación en aquellas entidades que comienzan, o necesitan apoyo financiero (fenómeno corriente en mercados con empresas de escasa dimensión técnica). También se aplica en los casos de retrocesiones, etc.

Desde el aspecto técnico tiene el inconveniente de que sólo reduce efectos en cuanto a la cuantía pero no en cuanto a la heterogeneidad de los riesgos, además de su mayor coste al ser las cesiones individuales.

2.a) *Reaseguro de excess-loss.* Se trata de una modalidad no.proporcional en donde el reasegurador cubre lo que supera al pleno por siniestro fijado por el cedente.

Se pueden distinguir los casos siguientes:
- Que se refiera a una sola póliza. Se le llama también excedente de siniestros *de primera especie o seguro a segundo riesgo*.
- Que se refiera a un conjunto de pólizas (ejemplo, responsabilidad civil). Se les llama también semicolectivos.

Las ventajas que tiene esta modalidad son:
- Que cubre los siniestros de elevada cuantía.
- Que cubre siniestros múltiples en un solo suceso.

Sin embargo, tiene los inconvenientes:
- Que no cubre las pérdidas que provienen de un gran número de siniestros.
- Que no cubre del riesgo de ruina de la empresa.

Para obviar estos inconvenientes surge la siguiente modalidad:

2.b) *Reaseguro stop-loss.* Constituye una modalidad de reaseguro no proporcional en donde el reasegurador asume pagar el exceso de siniestralidad total que se estipule, generalmente un tanto por ciento del total de primas.

Por referirse a la totalidad de la cartera se le llama reaseguro totalmente colectivo.

Las causas que influyen en la aparición y desarrollo de esta modalidad de reaseguro, además de las señaladas anteriormente, han sido:

- Necesidad de reducir costes del reaseguro procediendo a las cesiones después de agotar la capacidad técnica de la propia empresa.
- Disponer de una modalidad que limite el riesgo de ruina de la empresa.

Las ventajas que se señalan a esta modalidad son:

- Cubre las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad debidas tanto a grandes siniestros como a las pérdidas ocasionadas por un gran número de ellos.
- Es el único que puede eliminar el riesgo de ruina de la empresa.

4.4 Influencia en las ecuaciones de estabilidad.

El proceso de reaseguro tiene unas repercusiones en la cartera y en las ecuaciones de estabilidad que es preciso poner de manifiesto antes de abordar cualquier problema. Para ello hay que partir de una teoría del riesgo. Nosotros tomaremos la teoría del riesgo colectivo estudiada en la lección anterior. Analizaremos la influencia de las distintas modalidades en las distribuciones básicas y total (stop-loss). Las distribuciones y variables afectadas de reaseguro llevan el índice cero. Es decir,

Reaseguro		Antes	Después
Cuota-parte	Distribución de cuantías	$V(x)$	$V_0(y)$
Excedente	Costo medio	$C_1 = \int_0^\infty x\, dV(x)$	$C_1^0 = \int_0^\infty y\, dV_0(y)$
Excess-loss (XL)	Primas retenidas	$P = \tau \cdot C_1$	$P_0 = \tau C_1^0$

		Antes	Después
Stop-loss	Distribución	$F(x, \tau)$	$F_0(x, \tau)$
	Primas retenidas	$P = \int_0^\infty x dF(x, \tau)$	$P_0 = \int_0^\infty x dF_0(x, \tau)$

<u>Reaseguro cuota-parte.</u>

Siendo $1/K$ (para $K > 1$) la cuota retenida por el cedente será:

$y = \frac{1}{K} x$ ó bien $x = K \cdot y$ $V_0(y) = V(K \cdot y)$

$$P_0 = \tau \int_0^\infty y dV_0(y) = \tau C_1^0 = \frac{1}{K} P$$

$$V_0(R) = \int_0^\infty e^{Ry}\, dV(K \cdot y) = \int_0^\infty e^{Ry/k}\, dV(x)$$

Reaseguro de excedente.

Pleno de retención o conservación............................	$M < S$
Capital en riesgo neto..	$\frac{M}{S} Cr$
En seguro vida $S = Cr$ (capital en riesgo).	
Cuantía del siniestro..	X
Siniestro neto de reaseguro....................................	$\frac{M}{S} . X$
Siniestro a cargo del reaseguro...............................	$\frac{S-M}{S} . X$

Si $S \leq M$ *no hay reaseguro.*

Si $S > M$ hay reaseguro.

Influencia del reaseguro sobre $V(X)$.

$q(s)\,ds$ = probabilidad de que acaecido un siniestro la suma asegurada esté en : $(s, s + ds)$.

$Ps(x)\,dx$= probabilidad condicionada de X(cuantía del siniestro) a S.

Se tiene: $$V'_0(y) = \int_0^M q(s)\, p_s(y) ds + \int_M^{\infty} q(s)\, P_s\,(s/M^* y) ds$$

Ya que $Y = \frac{M}{S} X$ si $M<S$ e $Y = X$ si $S \leq M$

Reaseguro excess-loss con pleno M.

$$dV_0\,(y) = \begin{cases} dV(x) & \text{para } X<M \quad (Y = X) \\ \int_M^{\infty} dV(x) & \text{para } X \geq M \quad (Y = M) \end{cases}$$

$$P = \tau \cdot \int_0^{\infty} ydV0(y) = \tau \cdot \int_0^M xdV(x) + M \int_M^{\infty} dV8X) = \tau * C_1^0$$

$$V_0(R) = \int_0^M e^{RX}\, dV(x) + e^{RM} \int_M^{\infty} dV(x) = \int_0^{\infty} e^{Ry}\, dV0(y)$$

Reaseguro stop-loss con pleno N.

En esta modalidad resulta afectada la distribución del daño total como sigue:

$$dF_0(x, \tau) = \begin{cases} dF(x, \tau) & \text{para } X<N \quad (N = \%\text{ sobre primas}) \\ \int_N^{\infty} dF(x, \tau) & \text{para } X = N \end{cases}$$

$$P_0 = \int_0^N xdF(x, \tau) + N \int_N^{\infty} dF(x, \tau) = \int_0^{\infty} xdF_0(x, \tau)$$

La relación que existe, después de introducir el reaseguro, entre las magnitudes de estabilización estudiadas en la lección anterior es:

$\varepsilon \cong e^{-RSo}$ (Desigualdad de Lundberg)

$$e^{(1+\lambda)PoR} = \int_0^{\infty} e^{Rx}\, dF_0(x,\tau) = \begin{cases} e^{\tau[V0(R)-1]} & \text{(Poisson)} \\ \left[1-\frac{\tau}{h}(V_0(R)-1)\right]^h & \text{(Binomial negativa)} \end{cases}$$

siendo:

$$V_0(R) = \int_0^{\infty} e^{Ry}\, dV0(y)$$

4.5 Problemas de reaseguro.

Los tres problemas básicos que se presentan en el reaseguro son:
a) Fijación del sistema o modalidad de reaseguro.
b) Fijación del pleno.
c) Cálculo de la prima, una vez fijado el pleno.

Los dos primeros problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio de decisión.
Como estos criterios pueden estar basados en principios distintos, distinguiremos los siguientes casos:

a) Criterios basados exclusivamente en el principio de estabilidad.
b) Criterios que dan entrada, además, al coste del reaseguro.
c) Criterios que incluyen un orden de preferencia del empresario (dando entrada al mercado de reaseguro).

Nos corresponde estudiar ahora el criterio a) dejando para la lección 28 los restantes criterios.

Estamos ante un criterio de estabilidad cuando se tiene en cuenta la repercusión de cada decisión en el índice de estabilidad o probabilidad de ruina (ε).
En consecuencia tenemos:
1) *Criterio* Ψ (horizonte infinito).
Supone utilizar la probabilidad de ruina $\Psi(S0)$ de que nunca se agote la reserva S0 a la que se van abonando las primas recargadas.
Se considera que existe una estabilidad satisfactoria para $\Psi(S0)$ □ 1%. Su elección depende de la preferencia del empresario por el riesgo.
Este criterio se utiliza cuando además de los recargos de seguridad incluidos en las primas se dispone de una reserva de solvencia que se puede utilizar en cualquier momento para cubrir el exceso de siniestralidad.
De acuerdo con este criterio el pleno de propia retención se calcularía con arreglo a las siguientes fórmulas:

El valor de R_0 obtenido de

$$\Psi(S_0) = e^{-RSo} = \varepsilon_0 \Rightarrow R = R_0$$

Se sustituiría en:

$$e^{(1+\lambda)PoRo} = \begin{cases} e^{\tau[Vo(R)-1]} & \text{(Poisson)} \\ \left\{1 - \frac{\tau}{h} (V_0(R) - 1)\right\}^{-h} & \text{(Binomial negativa)} \end{cases}$$

En donde

$V_0(R) = \int_0^{\infty} e^{Ry} \; dV_0(y)$ -Función característica de la cuantía

del siniestro neta de reaseguro

2) *Criterio F* (horizontal finito).

Este criterio se basa en el cálculo de la probabilidad $\varepsilon_0 = 1 - F(\chi_0, \tau)$, es decir, la probabilidad de que las disponibilidades X_0 de un ejercicio no sean suficientes para hacer frente a la siniestralidad total.

Como dice Ammeter hay un caso en que es preciso aplicar este criterio: cuando los fondos de seguridad de la compañía se nutren exclusivamente de los recargos de seguridad que llevan las primas, o también cuando las reservas constituidas no se pueden disponer más que en casos excepcionales (como ocurre en el caso de la reserva para riesgos catastróficos).

$X(\tau)$ = siniestralidad total en $[0, \tau)$.

$C_1^0 \; \tau \cdot (1+ \lambda)$ = primas recargadas (netas de reaseguro) en $[0, \tau)$.

el criterio consiste en calcular M tal que

$$P[X(\tau) \geq C_1^0 * \tau \; (1 + 1)] = 1 - F\,[C_1^0 * \tau \; (1 + \lambda), \tau] = \varepsilon_0$$

en donde

$$F\,[C_1^0 * \tau \; (1 + \lambda), \tau]$$

se sustituye por la aproximación funcional correspondiente (normal, NP, gamma, Esscher, etc.), de acuerdo con lo estudiado en la elección anterior.

En general, si fijamos como dato el volumen de primas de propia retención, es decir, $C_1^0 * \tau \; (1 + \lambda)$, aplicando los anteriores criterios las modalidades que dan mayor estabilidad (menor probabilidad de ruina ε) siguen el orden: stop-loss; excess-loss: excedente y cuota-parte.

Análogamente, si tratamos de minimizar la varianza de la siniestralidad neta de reaseguro, las modalidades no proporcionales nos dan menor varianza que las proporcionales.

En efecto, denominando,

- Reaseguro proporcional (cuota-parte, excedente):

Para un importe X = Cedente $\quad X_0 = t \cdot X$
= Reasegurador $\quad X_1 = (1 - t) \cdot x$ $\quad \Big\} \; 0 < t < 1$

es decir, en el resto de la lección denominamos t =1/K (para k>1) la cuota retenida por el cedente.

- Reaseguro no proporcional.
  Para un pleno de propia conservación M la prima del cedente es (sin recargo de seguridad):

$$P_0 = \int_0^M xdF(x, \tau) + M\int_M^0 dF(x, \tau)$$

  Y del reasegurador

$$P_1 = \int_M^\infty (x - M)dF(x, \tau)$$

Vamos a demostrar que para un P fijo la modalidad no proporcional representa el riesgo mínimo (varianza mínima) entre todos los reaseguros admisibles, es decir, entre todos los casos en que se verifique:

$$0 \leq x_0 \leq x$$

Representando por T la transformación derivada de dar entrada al reaseguro, para un siniestro cualquiera de cuantía x resulta:

$$X_0 = T * x \qquad \text{(Cedente)}$$
$$X_1 = x - T * x \qquad \text{(Reasegurador).}$$

Y

$$P_0 = \int_0^\infty T \cdot xdF(x, \tau) = E(T \cdot x)$$

$$P_1 = \int_0^\infty (x - T \cdot x)dF(x,\tau) = P - E(T \cdot x) = P - P_0$$

$$\sigma^2 = \int_0^\infty [T \cdot x - E(T \cdot x)]^2 \, dF(x \cdot \tau) = \int_0^\infty \{[T \cdot x - M] + [M - E\,(T \cdot x)]\}^2 \, dF(x, \tau) =$$

$$= \int_0^\infty (T \cdot x - M)^2 \, dF(x, \tau) + \int_0^\infty [M - E(T \cdot x)]^2 \, dF(x, \tau) +$$

$$+ +2\int_0^\infty (T\,x - M)(M\text{-}\,E(T \cdot x)\, dF(x, \tau)$$

$$= \int_0^\infty (T \cdot x - M)^2 \, dF(x, \tau) + \int_0^\infty [M\text{-}\,E(T \cdot x)]^2 \, dF(x, \tau) +$$

$$+ 2(M\text{-}\,E(T \cdot x)) \int_0^\infty (T \cdot x - M)dF(x, \sigma)$$

El tercer sumando es

$$2(\,M - E(\,T * x\,))\,(\,E\,(\,T * x\,) - M\,) = -2[\,M - E\,(\,T * x\,)\,]$$

luego

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} (T \cdot x - M)^2 \ dF(x, \tau) - [M - E(T \cdot x)]^2 \geq$$

$$\geq \int_0^{M} (T \cdot x - M)^2 \ dF(x, \tau) - [M - Po]^2 \int_0^{M} (x - M)^2 \ dF(x, \tau) - [M - P_0]^2$$

Llamando ahora,

$$T^* \cdot x = \begin{cases} X \text{ si } 0 \leq x \leq M \\ M \quad \text{ si } x > M \end{cases}$$

$$\sigma^2 \ (T^* \cdot x) = \int_0^{M} (x - M)^2 \ dF(x, \tau) + \int_0^{M} (M - M)^2 \ dF(x, \tau) - [M - P_0]^2 =$$

$$= \int_0^{M} (x - M)^2 \ dF(x, \tau) - [M - P_0]^2$$

de donde $\sigma^2 \ (T \cdot x) \geq \sigma^2 \ (T^* \cdot x)$ c.q.d.

4.6 Limitaciones de los criterios de estabilidad.

Estas limitaciones surgen en las aplicaciones a la empresa de seguros. Así, cuando se da entrada al empresario es necesario considerar sus preferencias, lo que ha dado lugar a la teoría de la utilidad en el seguro.

Tampoco tienen en cuenta los riesgos de gestión (incluido el de gestión de inversiones) y de mercado, que junto con el propiamente técnico, derivado de las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad, ha de hacer frente el empresario de seguros.

Por otra parte, en ocasiones se dice que la teoría clásica del riesgo colectivo es restringida, ya que a medida que se van acumulando reservas el recargo de seguridad debe disminuir y entonces se plantea su generalización, con su correspondiente dificultad matemática. Todo ello al tener en cuenta que se están relacionando variables con arreglo a un criterio, el de estabilidad, que resulta insuficiente cuando se consideran las interrelaciones entre los distintos sistemas y subsistemas que integran el sistema actuarial total de la empresa de seguros y sus interacciones con el ambiente en que el decisor toma sus decisiones, en suma, cuando se da entrada al enfoque sistémico en la empresa aseguradora.

4.7 Ejemplo de reaseguro.

Una entidad aseguradora cuyos fondos afectados al ramo X son de 180 millones de pesos ofrece las características siguientes:

1) Un volumen de primas comerciales de 600 millones de pesos.
2) Los gastos de gestión (interna y externa) ascienden a 240 millones.

3) La siniestralidad imputable a las citadas primas se estima en 300 millones de pesos, y, el número medio de siniestros está estimado en 5.000.
4) La función de densidad de probabilidad de la cuantía del siniestro sigue l ley

$$\frac{dV(x)}{dx} = \alpha e^{-\alpha x} \quad x \geq 0$$

En el supuesto de haber tomado la decisión de operar con una probabilidad de ruina $\varepsilon \sim e^{-2}$ se pide:
El pleno de propia retención para la modalidad excess-loss, en las hipótesis siguientes:
   a) Cartera homogénea.
   b) Cartera no homogénea con un coeficiente de heterogeneidad h gual a 50.

Solución:
tomando las cifras

P = E(x)	= 300.000.000 pesos.
G (Gastos de gestión)	= 240.000.000 pesos
	540.000.000 pesos

El recargo técnico o de seguridad implícito es □P = 60.000.000 de pesos., es decir,

$$\lambda P = 0{,}20 * P$$

a) obtención de C_1

$$P = \tau\, C_1 = 5.000 \cdot \quad C_1 = 300.000.000$$
$$C_1 = 60.000 \text{ pesos . / siniestro.}$$

Como también podemos poner

$$C_1 = \int_0^\infty x dV(x) = \int_0^\infty x\alpha e^{-\alpha x} \quad dx = \frac{1}{\alpha}$$

queda
$\alpha = 1/60000$
b) obtención de C_1^0

$$C_1^0 = \int_0^\infty y dV0(y) = \int_0^M x dV(x) + M\int_0^\infty dV(x) = \int_0^M x\alpha e^{-\alpha x}\, dx + M\int_M^\infty \alpha e^{-\alpha x} \; dx$$

haciendo el cambio $\omega = \alpha x$, $\alpha e^{-\alpha x} \; dx = e^{-\omega} d\omega$ y efectuando operaciones resulta

$$C_1^0 = \frac{1}{\alpha} \; [1 - e^{-\alpha M} \;]$$

Si operamos en unidades de coste medio (C1 = 1), tenemos
$\alpha = 1 \;\Rightarrow\; C_1^0 = 1 - e^{-M}$ en unidades de coste medio.
c) Ecuaciones de estabilidad una vez introducido el reaseguro. podemos escribir

$$e^{(1+\lambda)P_0 R} = \left(1 - \frac{\tau}{h}\; (V_0(R) - 1) \right)^h$$

$$e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h} c_0^1 R} = 1 - \frac{\tau}{h}\; (V_0(R) - 1)$$

$$\frac{\tau}{h}V_0(R) = 1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}c_0^1 R} + \frac{\tau}{h}$$

$$V_0(R) = (1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}c_0^1 R})/(\frac{\tau}{h} + 1) \qquad [2]$$

Asimismo, la definición de V_0 (R) - función característica de la cuantía del siniestro neta de reaseguro- es

$$V_0(R) = \int_0^M e^{R\omega}\ e^{-\omega}\, d\omega + e^{RM} \int_M^\infty e^{-\omega}\ d\omega \qquad [3]$$

Al igualar [2] y [3] resulta,

$$V_0(R) = \int_0^M e^{R\omega}\ e^{-\omega}\ d\omega + e^{RM} \int_M^\infty e^{-\omega}\, d\omega = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}c_0^1 R}}{\frac{\tau}{h}}$$

$$\frac{1 - e^{-M(1-R)}}{1-R} + e^{-M(1-R)} = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}$$

$$\frac{1}{1-R}[1 - e^{-M(1-R)} + (1-R)e^{-M(1-R)}] = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}$$

$$\frac{1}{1-R}[1 - Re^{-M(1-R)}] = 1 + \frac{1 - e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}}$$

El primer miembro de esta ecuación es:

$$\frac{1}{1-R}\left\{ 1 - R\left\{ 1 - \frac{M(1-R)}{1!} + \frac{M^2(1-R)^2}{2!} - \dots \right\} \right\} =$$

$$= \frac{1}{1-R}\left\{ (1-R) + \frac{MR(1-R)}{1!} + \frac{M^2R(1-R)^2}{2!} \right\} + \dots =$$

$$= \left[1 + MR - \frac{M^2R(1-R)}{2} + \dots \right]$$

A su vez el miembro de la derecha se puede poner:

$$e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R} = 1 - (1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R + \tfrac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau^2}{h^2}(1-e^{-M})^2R^2$$

$$\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}} = (1+\lambda)(1-e^{-M})R + \tfrac{1}{2}(1+\lambda)^2\,\frac{\tau}{h}\,(1-e^{-M})^2R^2.$$

$$\cong (1+\lambda)\left\{1-\frac{M^2}{2}\right\}R - 1/2(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}M^2R^2 + \ldots$$

$$1+\frac{1-e^{-(1+\lambda)\frac{\tau}{h}(1-e^{-M})R}}{\frac{\tau}{h}} \cong 1+(1+\lambda)M\left(1-\frac{M}{2}\right)R - \tfrac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}M^2R^2+\ldots.$$

Igualando los resultados obtenidos tenemos:

$$1 + MR - \frac{M^2R(1-R)}{2} \cong 1 + (1+\lambda)M\left\{1-\frac{M}{2}\right\}R - \tfrac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}M^2R^2$$

$$1-\frac{M(1-R)}{2} \cong (1+\lambda)\left\{1-\frac{M}{2}\right\} - \tfrac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}MR$$

$$\tfrac{1}{2}(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}MR + (1+\lambda)\frac{M}{2} - \frac{M(1-R)}{2} \cong (1+\lambda) - 1$$

$$M\left[(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}R + (1+\lambda) - (1-R)\right] \cong 2\lambda$$

$$M\left[(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}R + R + \lambda\right] \cong 2\lambda \qquad [4]$$

Sustituyendo en [4] el coeficiente R obtenido a partir de la desigualdad de Lundberg

$$R = \frac{1}{S_0}(-\log\varepsilon)$$

queda:

$$M \cong \frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}R + R + \lambda} = S0\cdot\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2\frac{\tau}{h}(-\log\varepsilon) + (-\log\varepsilon) + \lambda S0}$$

(en unidades de costo medio).

d) soluciones numéricas.
Cartera no homogénea (h=50)

$$M \cong 3000\frac{2*.020}{(1.2)^2\frac{5000}{50}*2+2+.2+3000} = 1.40\cdot$$

es decir 1.40*60000=84000
cartera homogénea ($h\to\infty$)

$$M \cong 3000\frac{2*.020}{2+6000} = 2 \qquad \text{(unidades de costo medio)}$$

M ≅ 60000*2=120000 unidades monetariasε

Es lógico que paras un mismo índice de estabilidad de ruina (ε), se obtenga un pleno de propia retención mas bajo cuando la distribución del numero de siniestros es la binomial negativa (cartera heterogénea) que cuando es homogénea(Poisson)ya que esta distribución tiene menor varianza que la primera.

4.8 La decisión en el reaseguro

Como se sabe el reaseguro constituye un componente esencial del subsistema de estabilidad de la empresa de seguros, siendo junto con el recargo de seguridad y *las reservas de solvencia, una de las 3 variables de decisión sobre las que puede* actuar el empresario asegurador para lograr sus objetivos de supervivencia a corto y a largo plazo. Los 3 problemas básicos que se presentan en el reaseguro son:

a) Fijación del sistema o modalidad del reaseguro.
b) Fijación del pleno o retención propia.
d) Cálculo de la prima para las distintas modalidades y una vez fijados los plenos.

Los 2 primeros problemas son de elección y requieren la existencia de un criterio que nos permita tomar la mejor decisión.
Se pueden distinguir a este respecto los siguientes casos:

a) Criterios basados exclusivamente en el principio de estabilidad.
b) Criterios que dan entrada, además, al coste del reaseguro.
c) Criterios basados en un orden de preferencia del empresario.
d) Criterios que incluyen los intereses recíprocos de las 2 partes intervinientes *en el contrato de reaseguro. (mercado de reaseguro)*

Estamos ante un criterio de estabilidad cuando se tiene en cuenta la repercusión de cada decisión en el índice de estabilidad o probabilidad de rutina (E). Este *criterio ya fue estudiado en la lección 24 de éste libro por lo que abordaremos a* continuación los restantes criterios, los cuales surgen ante la insuficiencia que se pone de manifiesto a través de las consideraciones económicas siguientes:
Contemplando la producción del servicio de seguridad en su doble aspecto: técnico y económico.
Dando entrada a los supuestos de racionalidad del sujeto económico (empresario) que lleva a cabo tal proceso productivo.
Teniendo en cuenta la información del ambiente en que este toma sus decisiones: es decir, la concepción de sistema abierto de carácter adaptativo.

4.9 Criterios económicos

Consisten en dar entrada al coste o beneficio del reaseguro mediante una función en la cual figure el pleno como incógnita. Este pleno constituye la variable de

decisión del asegurador y se obtiene maximizando la función de beneficio (o minimizando la del coste) sometida a unas restricciones impuestas por el índice de estabilidad deseado. Una vez calculado el pleno con un criterio de optimalidad, la modalidad de reaseguro más adecuada desde el punto de vista económico será aquella que nos de le máximo beneficio o mínimo coste de entre las distintas opciones factibles.
Para elaborar el correspondiente modelo de decisión supondremos los siguientes elementos:

λ_0= Recargo de seguridad exigido por el reasegurador por las primas de reaseguro.

C= Comisiones de reaseguro

bP_o= Beneficio técnico del asegurador directo (cedente).

La función de beneficio para el asegurador directo es:

$$B = P - (\lambda_0 P_0 - bP_0) - \lambda_r P_r + c(1-\lambda_r)P_r$$

$$B = P - \lambda_0 P_0 - [b + \lambda_r - c(1+\lambda_r)]P_r + bP$$

$$B = P - \lambda_0 P_0 - \lambda_r^1 P_r + bP$$

Siendo, $\lambda_r^1 = [b + \lambda_r - c(1+\lambda_r)]$

Prescindiendo de la constante podemos escribir la función de coste:

$$C = \lambda_0 P_0 + \lambda_{r0}^1 P_r$$

Se trata de minimizar esta función con las restricciones .

$$e^{(1+\lambda)P\cdot R} = \int_0^x e^{RX} dF(x,\tau) = \varphi(R)$$

$$e^{(1+\lambda_0)P_0 R} = \int_0^x e^{RX} dF(x,\tau) = \varphi_0(R)$$

Multiplicando estas igualdades y tomando los logaritmos resulta:

$$(1+\lambda)P\cdot R + (1+\lambda_0)P_0 R = \log\varphi(R) + \log\varphi_0(R)$$

Teniendo en cuenta que P_0=P-P_r y denominando A los términos constantes, se obtiene la expresión: $C = \lambda_0 P_0 + \lambda_r^1 P_r = (1+\lambda_r^1)P_r + \frac{1}{R}\log\varphi_0(R) + A$

La condición necesaria de extremo es (H=Pleno de propia retención).

$$\frac{dC}{dH} = (1+\lambda_r^1)\frac{dP_r}{dH} + \frac{1}{R}\frac{d}{dH}\log\varphi_0(R) = 0$$

Debiéndose cumplir además la condición:

$$\left(\frac{d^2C}{dH^2}\right)_{H=H^*} \rangle 0$$

Tomando como base el proceso de Polya (distribución de Poisson ponderada compuesta). considera los siguientes sistemas de reaseguro:

4.10 Reaseguro cuota parte

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{dP_r}{dK}=\frac{rC_1}{K^2};C_1=\int_0^\infty xdV(x)$$

$$\frac{dV_0}{dK}=\frac{R}{K^2}\int_0^\infty xe^{RX/K}dV(x)$$

Resulta
$$\frac{dC(K)}{dK}=\frac{\left(1-\lambda_r^1\right)}{K^2}-\frac{\frac{r}{K^2}\int_0^\infty xe^{RX/K}\cdot dV(x)}{1-\frac{r}{h}\left[V_0(R)-1\right]}$$

La cual se anula para

$$\int_0^\infty xe^{RX/K}dV(x)=C_1(1+\lambda_r^1)\left[1-\frac{r}{h}(V_0(R)-1)\right]$$

De donde se deduce la cuota óptima K* (que ha de cumplir K* > 1). Como fácilmente puede comprobarse, la derivada segunda de C(K) en el extremo K* es positiva.

4.11 Reaseguro excess-loss.

Teniendo en cuenta

$$\frac{dP_r}{dM}=-r\int_M^\infty dV(x)=-r[1-V(M)]\ .$$

$$\frac{dV_0(R)}{dM}=\mathrm{Re}^{RM}\int_M^\infty dV(x)=\mathrm{Re}^{RM}\left[1-V(M)\right]$$

$$\frac{dC(M)}{dM}=-r(1+\lambda_r^1)(1-V(M))+\frac{\tau e^{RM}\left[1-V(M)\right]}{1-\frac{\tau}{h}\left[V_0(R)-1\right]}=0$$

Se tiene

$$\frac{dC(M)}{dM}=-r(1+\lambda_r^1)(1-V(M))+\frac{\tau e^{RM}\left[1-V(M)\right]}{1-\frac{\tau}{h}\left[V_0(R)-1\right]}=0$$

Es decir

$$e^{RM}=(1+\lambda_r^1)\left[1-\frac{\tau}{h}\left(\int_0^M e^{RX}dV(x)+e^{RM}\int_m^\infty dV(x)-1\right)\right]$$

de la cual se obtiene el pleno óptimo M=M*, ya que se cumple,

$$\left(\frac{d^2C(M)}{dM^2}\right)_{M=M^*}>0$$

cuando $h\to\infty$ (proceso de Poisson) el valor del pleno óptimo es:

$M^*=(1/R)\log(1+\lambda_r^1)$

4.12 Reaseguro stop-loss

En esta modalidad de reaseguro se puede poner

$$\rho_0(R)=\int_0^x e^{RX}dF_0(x,\tau)=\int_0^N e^{RX}dF(x,\tau)+e^{RN}\int_N^X dF(x,\tau)$$

$$P_r=\int_N^x (x-N)dF(x,\tau)$$

Es decir

$$C(N)=(1+\lambda_r^1)P_r+\frac{1}{R}\log\left[\int_0^N dF(x,\tau)+e^{RN}\int_N^\infty dF(x,\tau)\right]$$

$$\frac{dC(N)}{dN}=-(1+\lambda_r^1)(1-F(N,\tau))+\frac{e^{RN}(1-F(N,\tau))}{\rho_0(R)}=0$$

$$\frac{dC(N)}{dN}=\int_0^N e^{RX}dF(x,\tau)+e^{RN}\int_N^\infty dF(x,\tau)=\frac{e^{RN}}{1+\lambda_r^1}$$

Ecuación que nos da el pleno óptimo N=N*, ya que la segunda derivada es positiva.
En efecto,

$$C'(N)=f(N)\left[e^{RN}-(1+\lambda_r^1)\left(\int_0^N e^{RN}dF(x,\tau)+e^{RN}\int_N^x dF(x,\tau)\right)\right]$$

$f(N)>0; N\in\Re^+$

Donde

En N=N* queda

$$\frac{d^2C(N)}{dN^2}=f(N^*)\mathrm{Re}^{RN^*}\left[1-(1+\lambda_r^1)\int_0^x dF(x,\tau)\right]>0$$

Ya que

$$\int_N^x dF(x,\tau)<\frac{1}{1+\lambda_r^1}$$

De las expresiones anteriores se obtiene la modalidad de menor coste con su pleno correspondiente. Sin embargo, se puede dar entrada a modelos más complejos, al considerar como soluciones factibles al problema de optimización la combinación de considerar como soluciones factibles al problema de optimización la combinación de 2 o más sistemas de reaseguro (por ejemplo, el excess-loss y el stop-loss)

4.13 Criterios basados en un orden de preferencia

En este caso, a partir de la función de utilidad del asegurador u(x), el problema se puede formular en los siguientes términos:
Denominando:

$$P_{(M)} = \int_0^x x dF_{(M)}(x,\tau)$$

Las primas de propia retención de la cedente, la solución óptima se obtiene al maximizar

$$\int_0^\infty u\left(S_0 + P_{(M)} - x\right) dF_{(M)}(x,\tau)$$

en la que el argumento (M) indica magnitudes netas de reaseguro.
En consecuencia, la elección de la modalidad óptima dependerá de la forma de la función de utilidad, que refleja el grado de aversión al riesgo ,lo que supone maximizar la esperanza matemática; y, a mayor aversión al riesgo del asegurador directo se elegirán las modalidades que otorguen mayor estabilidad a la compañía cedente.

4.14 El mercado de reaseguro

Vamos a dar, finalmente, entrada a criterios que incluyen los intereses recíprocos del cedente y el reasegurador, quienes se encuentran en situación negociadora dentro del mercado de reaseguro.
En concreto, consideremos el caso de las compañías C_1 y C_2 cuyas variables de *siniestralidad total* ρ_1 y ρ_2, *respectivamente, se suponen independientes.* Ambas entidades desean establecer un contrato de reaseguro de base recíproca, que satisfaga las siguientes condiciones.

a) La ganancia esperada a posteriori sea nula; es decir no exista margen λ_r.
Se trata de un caso particular de la expresión $P_r^{'} = P_r + \lambda_r M_r^2$ cuando λ_r =0 siendo P_r la prima pura de reaseguro y M_1^2 la varianza de la siniestralidad a cargo del reasegurador

b) El riesgo (medido por la varianza), a posteriori, debe ser el mínimo posible para las 2 compañías, C_1 y C_2. Esta segunda condición exige que la modalidad óptima de reaseguro sobre una base recíproca sea la proporcional (cuota parte); es decir, la siniestralidad total será:

$$* A \, c\arg o \, de \, C_1 = X_{(1)} = t_1\rho_1 + (1-t_2)\rho_2$$

$$* A \, c\arg o \, de \, C_2 = X_{(2)} = t_1\rho_1 + (1-t_2)\rho_2$$

Donde t_1 y t_2 son, respectivamente, la cuota de propia retención de C_1 y C_2.

$$t_1 \in [0,1]; t_2 \in [0,1]$$

En efecto, el riesgo asumido por la compañía C_1 a posteriori lo podemos describir

$$M^2(C_1) = M_{11}^2 + M_{21}^2 \; siendo \, M_{11}^2 \; y \, M_{21}^2$$

Las varianzas de siniestralidad de propia retención y de reaseguro aceptado, respectivamente, teniendo en cuenta que ρ_1 y ρ_2, son, por hipótesis, *independientes*.
Análogamente, el riesgo a posteriori de la segunda compañía será:

$$M^2(C_2) = M_{12}^2 + M_{22}^2$$

Donde
M_{22}^2 = se refiere al propio negocio M_{12}^2 = al seguro aceptado

Si la modalidad de seguro no fuera la proporcional , entonces la compañía C_1 podría reducir el riesgo aceptado(M_{21}^2)sin alterar las demás varianzas, y análogamente la compañía C_2 podría reducir su riesgo (M_{12}^2)sin alterar al resto, y en ambos casos mediante la adopción de una forma de reaseguro proporcional, modalidad que minimiza la varianza de la siniestralidad asumida por el reasegurador.
El problema que se plantea ahora es la determinación de los valores t_1 y t_2 de las ecuaciones anterio.ꞏs. Resulta evidente que ambas partes exigirán que el riesgo a posteriori sea menor o igual que el riesgo a priori (antes del reaseguro); es decir que se verifique:

$$M^2(C_1) = t_1^2 M^2(\rho_1) + (1-t_2)^2 M^2(\rho_2) \leq M^2(\rho_1) = M_1^2$$

$$M^2(C_1) = (1-t)^2 M^2(\rho_1) + = t_2^2 M^2(\rho_2) \leq M^2(\rho_2) = M_2^2$$

Geométricamente, el punto (t_1 , t_2)se encuentra en el área comprendida por las elipses de ecuaciones

$$\frac{r_1^2}{1} + \frac{(t_2-1)^2}{M_1^2 / M_2^2} = 1 \; y \; \frac{(t_1-1)^2}{M_2^2 / M_1^2} + \frac{r_2^2}{1} = 1$$

Si ahora supusiéramos conocido $M^2(C_1)$, entonces se demuestra fácilmente que el mínimo valor de $M^2(C_2)$ se obtiene para $t_1 + t_2 = 1$. Esta nueva condición es precisamente el segmento que une los centros de ambas elipses, por lo que nos encontramos ante un problema de conflicto de intereses entre las 2 entidades C_1 y C_2 .
La primera compañía prefiere un punto (t_1 y t_2) lo más próximo posible al punto (0,1), mientras que a C_2 le ocurre lo contrario.

La solución de este problema para cada entidad debe hallarse dando entrada a la información, proveniente del mercado en que se encuentra y desarrolla su actividad; es decir, teniendo en cuenta, en este caso, la estrategia adoptada por la entidad contraria: por ejemplo si los intereses de las partes son totalmente paralelos podemos obtener como solución óptima la que corresponde al punto P de coordenadas. $t_1 = \frac{P_1}{P_1 + P_2} \; y \; t_2 = \frac{P_2}{P_1 + P_2}$

Con $P_1 = E(\rho_1)$ $P_2 = E(\rho_2)$

Este punto $P(t_1, t_2)$ es la intersección de las rectas de ecuaciones $t_1 + t_2 = 1$ con $(1-t_1)P_1 = (1-t_2)P_2$; y por encontrarse en el supuesto $t_1 + t_2 = 1$ constituye un óptimo de paralelo.

4.15 Calculo de la prima de reaseguro

Una vez fijada la modalidad y el pleno de acuerdo con alguno de los criterios anteriores (incluido el de estabilidad), se plantea el problema de la determinación de la prima de reaseguro, problema que como acabamos de ver esta interrelacionado con los otros 2.

Distinguiremos a este respecto las siguientes modalidades:

reaseguro cuota-parte

En la práctica (salvo casos especiales en que se aplica nueva tarifa) la cedente paga al reasegurador la misma prima unitaria que recibe del asegurado. Retiene, por otra parte una comisión que varia según los otros casos.

Sin embargo, el procedimiento técnico sería:

$$\text{Prima pura cedida} \ldots\ldots \left(1-\frac{1}{k}\right)P$$

$$\text{Recargo de seguridad (cedido)} \ldots\ldots \lambda_r$$

$$\text{Prima recargada cedida} \ldots\ldots P_r^{'} = \left(1-\frac{1}{k}\right)P(1+\lambda_r)$$

Donde nuevamente 1/k (k>1) es la prioridad o cuota retenida por la cedente.

Reaseguro excess-loss

Si el número medio de siniestros asociados a la cesión del excess-loss es $\tilde{n}_{xL}$, la prima pura del reaseguro será

$$P_r = \tilde{n}_{xL} \cdot \int_M^\infty (x-M)dV(x) = \tilde{n}_{xL} \cdot C_1(M)$$

En esta modalidad el recargo de seguridad (también llamado margen del reaseguro) se puede considerar proporcional a la desviación típica de subcartera cedida en reaseguro. Si F_M $(Y,\tilde{n}_{xL})$ es la distribución de la siniestralidad total asociada a esta subcartera será:

$$\sigma_M^2 = E[Y-P_r] = \int_M^\infty (Y-P_r)^2 dF_M(Y,\tilde{n}_{xL}) = \tilde{n}_{xL} \cdot C_2(M) + \frac{[\tilde{n}_{xL} \cdot C_1(M)]^2}{h}$$

Siendo

$$C_2(M) = \int_M^\infty (x-M)^2 dV(x)$$

La prima recargada será:

$$P_r^{'} = P_r + \gamma_r \sigma_M = P_r + \gamma_r \sqrt{\tilde{n}_{xL} \cdot C_2(M) + \frac{[\tilde{n}_{xL} \cdot C_1(M)]^2}{h}}$$

Obsérvese cómo cuanto más homogénea sea la subcartera cedida ($h \to \infty$) menor es la prima cedida.

Reaseguro stop-loss

Suponiendo que el pleno es N (por ejemplo N=(αP) la prima se calcularía como sigue:

$$P_r = \int_N^\infty (x-N)dF(x,\tau) = \int_{\alpha \cdot P}^\infty (x-\alpha \cdot P)dF(x,\tau)$$

Aquí el recargo de seguridad es proporcional a la desviación típica σ_N, siendo

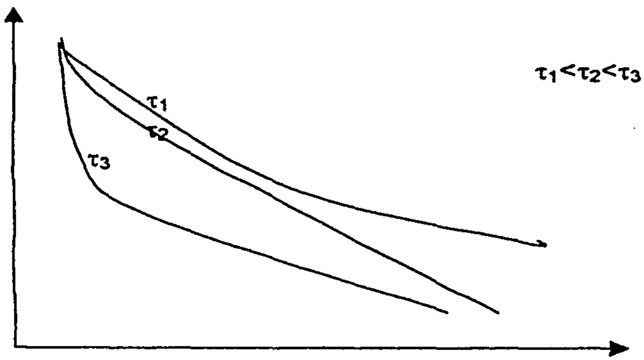
$$\sigma_N^2 = E(X - P_r)^2 = \int_N^{\infty} (x - N)^2 \, dF(x,\tau) - P_r^2$$

La prima recargada será:

$$P_r' = P_r + \beta \sigma_N$$

Debe observarse que el parámetro h aparece en los 2 sumandos de la prima recargada y cuanto mayor sea (cartera homogénea) tanto menor es la prima del reaseguro.
También se demuestra que cuanto mayor sea la cartera (medida en número medio de siniestros) tanto menor es la prima del reaeguro.

Es interesante tener en cuenta que la heterogeneidad de una cartera (h pequeño) tiene tanta mas importancia cuanto mayor sea ésta



Sea el siguiente ejemplo numérico debido a Ammeter:

$$a)\begin{cases} \tau = 100 \\ retención \;\; 100\% \end{cases} \begin{cases} h = 40 & 100 & \infty \\ P_r' = 21 & 19 & 17 \end{cases}$$

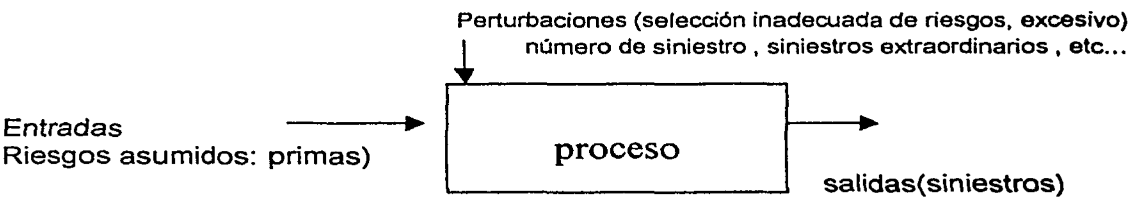
$$a)\begin{cases} \tau = 100 \\ retención \;\; 100\% \end{cases} \begin{cases} h = 40 & 100 & \infty \\ P_r' = 12{,}5 & 9 & 5{,}5 \end{cases}$$

Todo ello quiere decir que una cartera grande con gran coeficiente de heterogeneidad es más peligrosa.

4.16 El reaseguro como subsistema de control

Vamos a considerar ahora el reaseguro como un mecanismo de control que establece el asegurador para garantizar el índice de estabilidad adecuado.
En este caso, los 4 elementos que integran todo sistema de control serían los siguientes.
sistema controlado, constituido por el índice de estabilidad del cedente (probabilidad de ruina, riesgo de la cartera, etc..)
censor, constituido por la información contable y extracontable acerca de los riesgos asumidos y de los siniestros ocurridos.
Regulador, misión que lleva a cabo la dirección del departamento de reaseguros, observando si el riesgo o el siniestro están comprendidos dentro de la cobertura del contrato de reaseguro, y comunicado al reasegurador, en caso afirmativo, su obligación de aceptación o pago.
En la práctica el cedente tiene la obligación de comunicar al reasegurador los siniestros en que éste se crea afectado en el plazo más corto posible, exigiéndose en siniestros la mayoría de los casos, que acompañe un extremo de los documentos en virtud de los cuales quedó reconocida la obligación de pago o, si el reasegurador lo pide una copia exacta de los mismos.
-controlador, o intervención del reasegurador aceptando riesgos, o pagando siniestros. En la práctica los mutuos pagos de ambos contratantes suelen quedar formalizados en cuentas trimestrales o mensuales, o semestrales, etc.. debiendo ser saldados por la parte deudora una vez verificada la cuanta al final del periodo estipulado y en la moneda original estipulada en la póliza.

Si consideramos ahora el sistema input-output más sencillo del asegurador directo:



Vemos que los 2 tipos de control existentes, control por circuito abierto y por circuito cerrado, el reaseguro de sumas o riesgos constituye un mecanismo de control por circuito abierto, ya que los elementos de control miden y actúan sobre las entradas del sistema que en este caso son los riesgos asumidos que dan origen a una corriente o flujo de primas para el asegurador directo.
Este mecanismo no tiene en cuenta las perturbaciones y no garantiza, por tanto, un control efectivo de la variable controlada (el {índice de estabilidad en este caso).
Por el contrario el reaseguro de siniestro constituye un mecanismo de control por circuito cerrado, ya que actúa sobre las salidas del sistema -siniestros habidos- por al que neutraliza los efectos de las perturbaciones y realiza un control mucho más perfecto de la estabilidad del sistema.

En consecuencia, tomado como modelo de decisión el mecanismo de control óptimo, la modalidad de reaseguro más adecuado desde el punto de vista del cedente es el reaseguro de siniestros stop-loss, si bien en este caso, como el reasegurador asume el peso del control efectivo del sistema, exigirá un precio normalmente más alto del que demandaría en el supuesto de un control por circuito abierto.

CAPÍTULO CINCO

RESERVAS DE SOLVENCIA Y EL RECARGO TÉCNICO

5.1 La reserva de solvencia

Las reservas de solvencia (S) junto con el recargo de seguridad (λ) y el reaseguro (M) constituyen las tres magnitudes que definen el subsistema de estabilidad o solvencia de la empresa aseguradora
En comparación con la empresa industrial, en la empresa financiera aparece un tanto invertido el proceso productivo. Por esta razón, el volumen y estabilidad de la masa pasiva viene a ocupar el primer plano en los problemas de la solvencia del ente asegurador. Esta es la razón de por que las legislaciones exigen capitales y reservas mínimos (márgenes de solvencia y fondos de garantía) a las empresas de seguros para poder operar en el mercado.
Por tanto, en la empresa aseguradora el precio del seguro debe llevar un componente para cubrir el riesgo de empresa (recargo de seguridad), componente que es preciso detraer (dotando la correspondiente provisión) antes de definir el beneficio imputable técnicamente al ejercicio que se cierra.

Ello lleva al concepto de periodificación técnica del beneficio, que va más allá de la imputación económica de ingresos y gastos del ejercicio que daba origen a las provisiones técnicas de riesgos en curso y de siniestros pendientes . Sin embargo, ahora se trata de mantener la solvencia dinámica de la empresa en relación con su dimensión y composición de sus masas activas y pasivas, como condición previa a la fijación del beneficio técnico atribuible al ejercicio correspondiente, lo cual da origen a las provisiones técnicas de estabilización o desviación de siniestralidad, que responden a un criterio de periodificación técnica de los ingresos constituidos por los recargos de seguridad (λ) que son, en consecuencia, los componentes que financian la constitución de dichas provisiones.

5.2 Riesgo técnico, de gestión y de mercado

Las reservas de solvencia (S) cubren al asegurador de tres clases de riesgos inherentes a su actividad empresarial.
1.- Riesgo técnico, derivado de las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad (desviación del número de siniestro, excesiva cuantía de los siniestros o ambas cosas simultáneamente) con respecto a su valor medio o esperado. Se trata de un riesgo objetivo, propio de la actividad aseguradora que opera en el universo aleatorio de la siniestralidad.
2.- Riesgo de gestión, incluido el derivado de la gestión de inversiones (tarifas propias insuficientes, escasa selección de riesgos, bajo control de siniestros, costes de gestión excesivos, fluctuaciones en las cotizaciones de sus activos, etc.).

3.- Riesgo de mercado, o riesgo inherente al ambiente en que la empresa desarrolla su actividad (competencia desordenada, legislación anticuada y/o ambigua, tarifas a nivel sectorial insuficientes, etc.)
Teniendo en cuenta que, a nuestros efectos, vamos a incluir en las reservas de solvencia tanto los capitales propios como las provisiones técnicas de desviación de siniestralidad, podemos asumir que estas últimas (financiadas como se sabe por los recargos de seguridad estudiados en la lección anterior), tienen por objeto cubrir los riesgos de carácter técnico del ente asegurador, dejando los restantes componentes de las reservas de solvencia (básicamente los recursos propios) destinados a la cobertura subsidiaria de los riesgos técnicos y a la cobertura *íntegra de los riesgos de gestión y de mercado considerados anteriormente.*

5.3 Fijación de la cuantía de las reservas de solvencia: concepción estática

De acuerdo con la teoría del riesgo colectivo podemos aplicar los siguientes criterios:
- Distribución de la siniestralidad total. Se trata de un criterio válido a corto plazo basado en la distribución de la siniestralidad total, generalmente referida a un solo ejercicio. Es decir, de la ecuación.

$$\varepsilon = 1 - F[(1+\lambda_0)P + S, \tau]$$ se despeja S.

- Función de ruina. A partir del teorema de De Finetti

$$\Psi(S) = \varepsilon \approx e^{-RS}$$ con

$$E\left[e^{-R[(1+\lambda_0)\tau C_1 - X(\tau)]}\right] = e^{-R[(1+\lambda_0)\tau C_1]} E\left[e^{RX(\tau)}\right] = 1$$

Se puede considerar ahora como variable de decisión las reservas de solvencia (S) en lugar del recargo de seguridad (λ).
Asumiendo que la distribución del número de siniestros sigue el modelo de la binomial negativa, la aproximación lineal de (S) resulta

$$S = \frac{1}{2\lambda_0}\left(1 + \sigma^2 + \frac{\tau}{h}\right)(-\log\varepsilon)$$

Donde σ^2 es la varianza de la cuantía del siniestro expresada en unidades de coste medio.
Esta ecuación también se puede escribir

$$S = \frac{1}{2\lambda_0}\left(C_1 + \frac{\sigma^2(x)}{C_1} + \frac{p}{h}\right)(-\log\varepsilon)$$

En la que $\sigma^2(x)$ es la varianza de la distribución del coste del siniestro.
Es decir, las reservas de solvencia figuran como la resultante de agregar tres elementos:
S $\approx \Psi_1(\lambda_0; C_1; \varepsilon) + \Psi_2(\lambda_0; C_1; \sigma^2(x) + \Psi_3(\lambda_0; h; P; \varepsilon)$

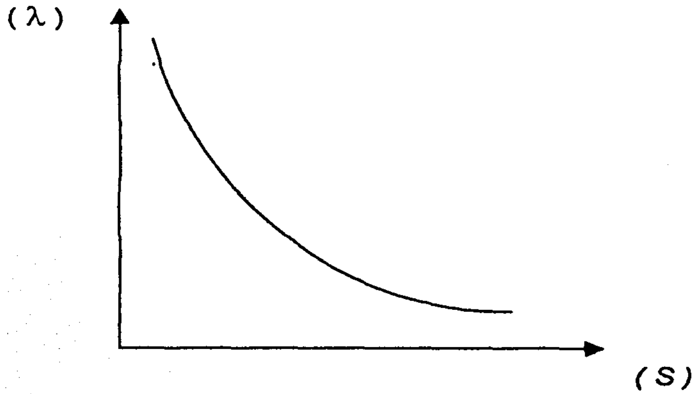
Si en los desarrollos anteriores damos entrada al reaseguro, se llegaría a la fórmula:

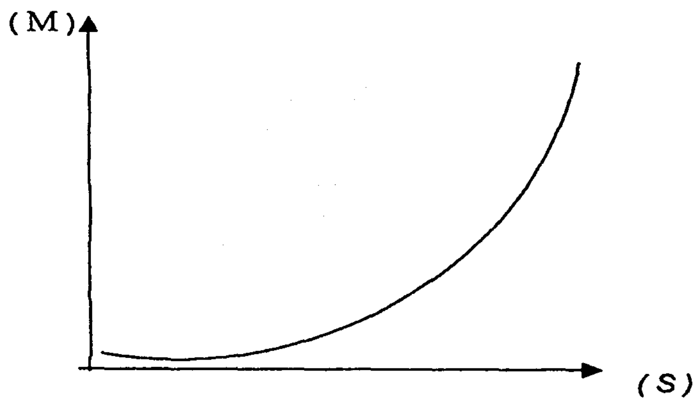
$S \approx A_1 (\lambda_0; \sigma^2_{(M)}; \varepsilon) \bullet C_1 (M) + A_2(\lambda_0; h; P; \varepsilon)\, P\, (M)$

En donde el argumento (M) indica magnitudes netas de reaseguro.
Finalmente, considerando primas comerciales (P´´) en vez de primas puras (P) se obtiene:

$$S \approx A_1\left(\lambda_0;\sigma^2_{(M)},\varepsilon\right) * C_1(M) + A'_2(\lambda_0;h;\varepsilon) * P''(M)$$

De las anteriores expresiones se derivan importantes consecuencias. En efecto, en las figuras siguientes se ponen de manifiesto las relaciones de (S) con las restantes magnitudes de estabilidad (λ y M)



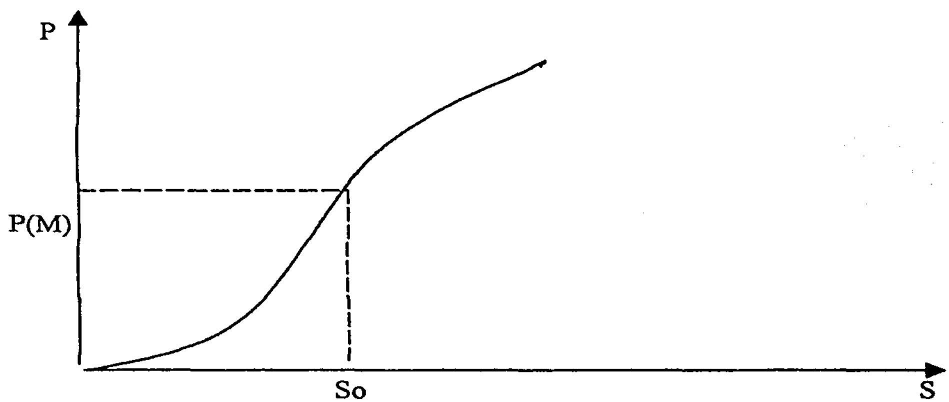


Para un mismo índice de estabilidad (ε) las relaciones son las siguientes:

a) Cuanto mayores sean las reservas de solvencia, menor recargo de seguridad se necesita. Es decir, a mayor solvencia menor precio, ya que el recargo de seguridad es una componente del precio del seguro.

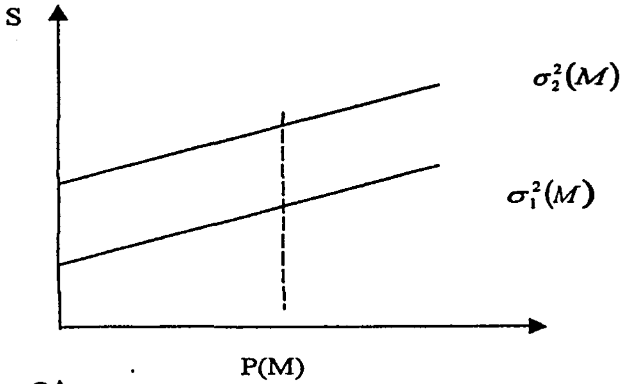
b) Cuanto mayores sean las reservas de solvencia, mayores plenos de propia retención pueden tener la empresa. Teniendo en cuenta que toda cesión de negocio resta beneficios resulta que a mayor solvencia mayor rentabilidad. Las empresas que carecen de un mínimo de solvencia sólo pueden sobrevivir a base de reducir drásticamente sus plenos de retención. Es decir, dejando de ser auténticas empresas de seguros para convertirse en meras agencias de *intermediación*.

c) Cuanto mayores sean las reservas de solvencia, mayor es el volumen de primas de propia retención de una empresa de seguros (P(M)).

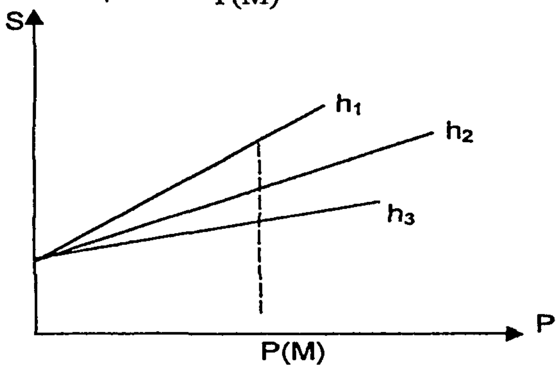


Por eso la dimensión técnica del ramo puede venir dada por el par (S_0 , P(M)).
Asimismo, a mayor dispersión del coste del siniestro, mayor S, lo cual se explica por el mayor riesgo técnico del asegurador; de forma análoga S e decreciente con h (parámetro que, como sabemos, mide la dispersión, en sentido inverso, del número de siniestros).

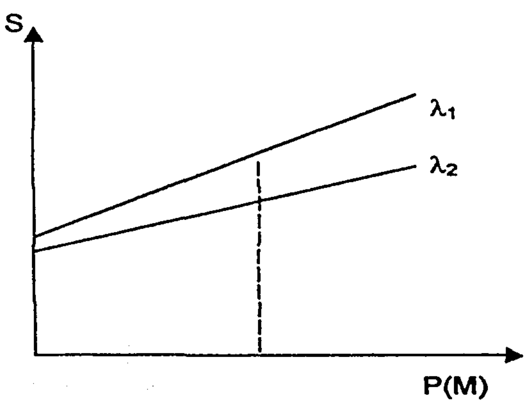
Por último, las reservas de solvencia se componen de un sumando que no depende del volumen de primas (capitales mínimos) y otro que sí depende de dicho volumen de primas.
Estas consideraciones representadas gráficamente resultan como se muestra en las *figuras siguientes*.



$\sigma_1^2(M) < \sigma_2^2(M)$



$h_1 < h_2 < h_3$



$\lambda_1 < \lambda_2$

5.4 Concepción dinámica de las reservas

Bajo un enfoque sistemático, la determinación de las reservas de solvencia (S) supone plantear un problema de decisión óptima de carácter secuencial en función de la información disponible (sistemas de información decisión).
Para ello se impone un análisis previo de las variables que intervienen en el equilibrio actuarial de la empresa. Podemos establecer la siguiente clasificación:
Dato subjetivo:

Índice de estabilidad (o probabilidad de ruina): ε

Datos técnicos;

Distribuciones básicas y coeficiente de heterogeneidad. . . . . $\left\{ \begin{array}{l} P_n(\tau) \\ V(x) \\ h \end{array} \right.$

Distribución total. . . . . $F(X, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} Pn(\tau) * V^{n(*)}(x)$

Volumen de producción en el año t. . . . P_t

Variables de decisión del subsistema de estabilidad (sobre las cuales puede actuar el empresario).

M_t = Reaseguro

λ_t = Recargos de seguridad.

S_t= Reservas de solvencia

Sin embargo, en general, las decisiones sobre S_t (tienen un carácter más autónomo que las decisiones sobre las dos primeras (M_t, y λ_t) de aquí que (S_t) aparezca como la variable de decisión más importante del subsistema de estabilidad sobre la cual puede actuar el empresario para conseguir el equilibrio *dinámico dentro del ámbito actuarial de la empresa de seguros.*
Con la finalidad de construir un mecanismo regulatorio flexible consideremos el siguiente vector de estado;

$$E_t = \begin{pmatrix} P_t \\ \lambda_t \\ G_t \\ S_t \end{pmatrix}$$

Donde :
S_t = Las reservas de solvencia antes de la definición del beneficio técnico atribuible al ejercicio t-ésimo. Es decir, los resultados del ejercicio periodificado económicamente (reservas de primas y de siniestros). Pero no técnicamente (reservas de solvencia).
P_t = Igual a volumen de primas puras del ejercicio t-ésimo.
ε_t = Índice de estabilidad (probabilidad de ruina).
G_t = Distribución de probabilidad del beneficio técnico del ejercicio t-ésimo neto de reaseguro. O sea, distribución de $Y_t = (1+\lambda_t) P_t - X_t$, en donde P_t (primas puras) y X_t (V.a. asociada a la siniestralidad) son netas de reaseguro.
Podemos establecer la siguiente relación: $S_t = S_{t-1} + P_t(1+\lambda_t) - X_t = d_t + Z_t$

Siendo:

Z_t = a la cantidad retenida como reservas de solvencia.

$d_t = S_t - Z_t$ = a la cantidad repartida como dividendo a los accionistas, o como extornos al colectivo de asegurados o mutualistas.

En relación que liga las variables (de acuerdo, por ejemplo, con la teoría del riesgo colectivo) se puede considerar: $Z_t = Z(P_t; G_t; \varepsilon_t)$,

Control. Supongamos que el empresario se propone alcanzar en un periodo de n años los objetivos siguientes:

Dimensión de la empresa. . . . . (S_n, P_n)

Beneficios Y_n con distribución. . . . . .G_n

Índice de estabilidad (o probabilidad de ruina). . . ε_n

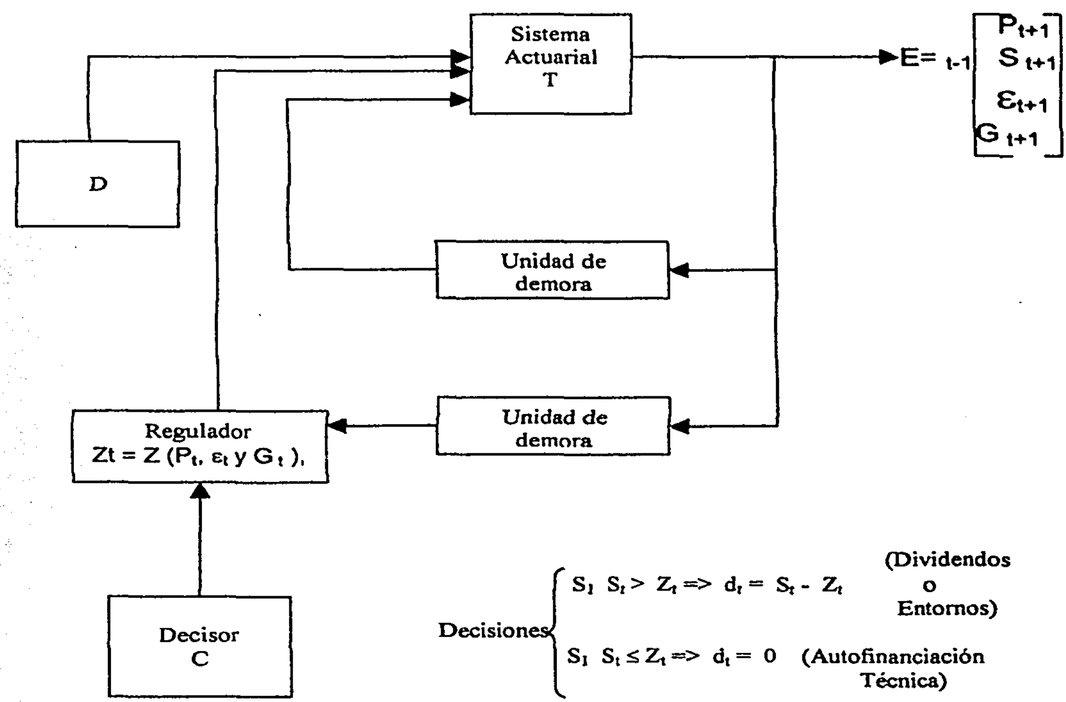
En el periodo t-1-ésimo la evolución del sistema es,

$$E_{t-1} = \begin{pmatrix} P_{t-1} \\ S_{t-1} \\ \varepsilon_{t-1} \\ G_{t-1} \end{pmatrix}$$

Si la evolución deseada para el periodo siguiente, en lo que se refiere a P_t, ε_t y G_t (variables esenciales), es P_t, ε_t y G_t , entonces son necesarias unas reservas de *solvencia (decisión):* $Z_t = Z\ (P_t, \varepsilon_t \text{ y } G_t)$,

La primera decisión Z_o estará en función de los valores iniciales Po; εo y G_o que se dan como datos de problema.

en el esquema siguiente aparece el esquema dinámico correspondiente a un *proceso de decisión secuencial* , *en donde* D *representa* las perturbaciones de entrada (técnicas y de mercado).



5.5 Modelizacion del sistema dinámico de las reservas

Con la finalidad de dar entrada a la programación dinámica introduciremos los siguientes elementos:

- Horizonte de gestión. . . . . . (0, n)

- Vector de estado. . . . . $E_t = \begin{bmatrix} S_t \\ P_t \\ \varepsilon_t \\ G_t \end{bmatrix}$

- Programa terminal. . . . . $E_n = \begin{bmatrix} Z_n \\ \varepsilon_n \\ P_n \\ G_n \end{bmatrix}$

- Variable de decisión . . . . . . Z_t

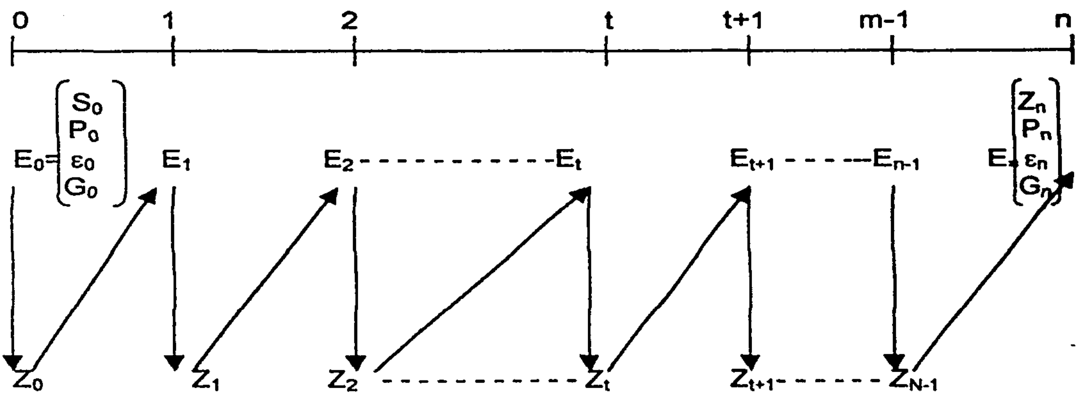
El programa terminal E_n traduce los objetivos a largo plazo, ya que:
(Z_n, P_n) = definen la dimensión técnica deseada para la empresa de seguros.
(ε_n, G_n) = es el grado de estabilidad y la distribución del beneficio también fijados como objetivos. La variable de decisión Z_t constituye el nivel de reservas de solvencia que en cada etapa es preciso construir para que el sistema evolucione hacia los objetivos previstos. Como en cada periodo, en base a la evolución real del sistema, se tendrán unas reservas S_t, en caso de que $Z_t < S_t$, la diferencia $d_t = S_t - Z_t$ podrá ser repartida como dividendo
Ahora el objetivo a largo plazo va hacer la elección del mejor proceso estocástico asociado a estos dividendos repartidos, es decir, a (dt).El criterio que va a servir de *base para la elección de la política optima será:*
$\text{máx } E\,[u(d_1, d_2, d_3, \ldots)] = \text{máx } E\,[\Sigma\, V^t u(d_t)]$
es decir, la política optima es la que maximiza la esperanza matemática de la función de utilidad asociada el proceso estocástico de los dividendos (d_t). Ecuación *funcional.- Situados en el esquema de la siguiente pagina:*

Representado por $V_t(S_t, Z_t)$ la esperanza matemática de la utilidad de los dividendos desde t hasta el momento n se tiene la ecuación funcional

$$V_t(S_t, Z_t)(1 + i) = \int_0^{\infty} V_{t+1}(S_t + Y_{t+1}, Z_t)\, dG_t$$

Las condiciones de contorno son:

a) Si $S_t \leq Z_t$ entonces $V_t(S_t, Z_t) = 0$
b) Si $S_t > Z_t$ entonces $V_t(S_t, Z_t) = S_t - Z_t + V_t(Z_t, Z_t)$.



Política óptima: A partir de los datos contenidos en:

- Los objetivos económicos (E_t, G_t)
- El criterio de decisión (V y u(Y)).

Se tiene la primera etapa:

$$V_{n-1}(S_{n-1}, Z_{n-1})(1+i) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{n+1}(s_{n-1}+y_n, z_{n-1})\, dGn = \int_{-\infty}^{\infty} u(s_{n-1}+y_n, z_{n-1})\, dGn$$

De aquí se obtiene la sub-política óptima Z^x_{n-1} (condicionada con la restricción dada por el índice de estabilidad ε_n). A partir de, $V_{n+1}(S_{n-1}+Z_{n-1})$
Se obtienen en etapas sucesivas:
$V_{n+2}(S_{n-2}+Z_{n-2})$, ..., $V_1(S_t+Z_1)$, $V_0(S_0+Z_0)$
A partir del valor inicial S_0 se calcula la primera política óptima Z^*_0. A partir de aquí se llegará a S_1 y de $V_1(S_t+Z_1)$, = máximo
Se obtiene Z^*_1 . Así sucesivamente se llega a la política óptima para toda la duración del programa: Z^x_0 Z^x_1 ... z^x_{n-1}

En este proceso de optimización matemática (programación dinámica) se observa que tanto en la obtención de la política óptima como en $V_t(S_t+Z_t)$, han intervenido los fines u objetivos a largo plazo de la empresa (programa terminal) así como las preferencias de los accionistas o mutualistas de la entidad.

5.6 El control administrativo de solvencia

El problema de la medida de los niveles de solvencia de los aseguradores puede contemplarse desde tres ángulos distintos:

a) Nivel de dirección de empresa.
b) Al nivel de órgano de control de administración.
c) A *nivel internacional* (*Directivas Comunitarias* sobre <<margen de solvencia>> en los seguros vida y no vida).

Respecto al control administrativo de la solvencia, éste encuentra una doble justificación. En primer lugar, la necesidad de defender los intereses concretos de

los asegurados, y, en segundo lugar, la conveniencia de contar con instrucciones eficaces y solventes para el mejor cumplimiento de los objetivos socioeconómicos. En estos principios nadie parece dudar salvo el preconizar una mayor iniciativa estatal o posibles nacionalizaciones, todo lo cual nos aleja del modelo de economía de mercado.
Durante muchos años se consideró como fin fundamental del control el principio de solvencia del ente asegurador. *Ha sido después de la Segunda Guerra Mundial*, coincidiendo con la corriente de desarrollo económico y social, cuando se ha ido dando entrada al principio de equidad. Es decir, que los servicios estén jurídicamente garantizados y se realicen a precios económicamente equitativos.
Dentro del contexto de un orden de competencia, el auténtico control de precios es función que incumbe fundamentalmente al mercado. Y como quiera que la solvencia está relacionada con el precio, el control administrativo debe seguir de cerca la solvencia de la entidad, pues la eficacia (precios equitativos) se traslada al mercado y la defensa de los derechos del asegurado a normas de carácter imperativo y a su interpretación por los tribunales.

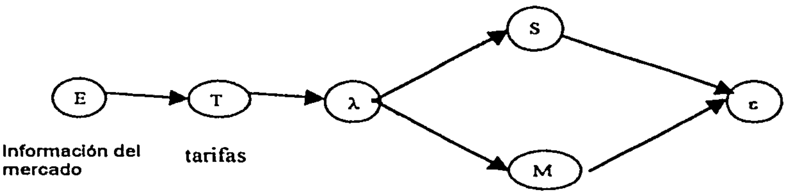
5.7 El recargo técnico

Sabemos que la prima de tarifa (P") se compone de los siguientes elementos:
-Prima pura (P)
-Recargo técnico o de seguridad (λ)
-Recargo de gestión interna y externa (g)
-Margen de beneficio o excedente (b)
Es decir,
$P''=P+\lambda P+gP''+bP''=P(1+\lambda)+gP''+bP''$

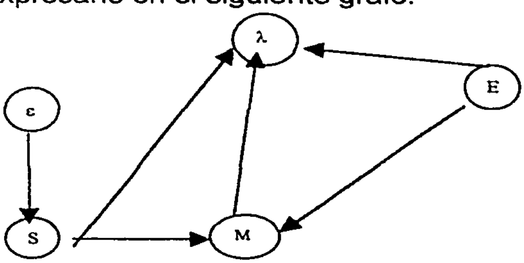
En la que, de acuerdo con el principio de equivalencia estática:
P=E(X) Esperanza matemática o valor medio de la siniestralidad correspondiente al periodo de tiempo a que se refiere la prima pura P.
Es decir, en la obtención de la prima recargada –P(1+λ)- intervienen 2 principios: *el de equivalencia que permite calcular la prima pura, y el de* ***estabilidad*** al que responde el cálculo del recargo de seguridad (λ).
Respecto a este componente de la prima, se puede distinguir:
Recargo implícito, o tarificación con bases de primer orden.
Recargo explícito, o tarificación con bases de segundo orden.

El recargo implícito surge generalmente cuando los aseguradores aplican tarifas uniformes (seguros no-vida), o en las tablas de mortalidad utilizadas (seguros de vida). El primer caso supone que las primas puras no responden a principios técnicos de acuerdo a estructuras de cada empresa, por lo que la solvencia se consigue muchas veces a un periodo elevado del servicio de seguridad . Es decir, el precio es común para todas las entidades con independencia de las restantes magnitudes de estabilidad (reaseguro, reservas de solvencia), o del tamaño y composición de la cartera, etc..., por lo que en estos supuestos , no se verifican los

principios de equivalencia ni los de estabilidad (probabilidad de ruina), sino que la prima figura como una variable exógena en el modelo y no en función de los costos técnicos del asegurador.
Por el contrario el recargo explícito supone una evolución hacia criterios de eficacia económica, en donde dentro de un marco de competencia se produce el fenómeno de que los costos técnicos (la siniestralidad esperada y la media de sus *fluctuaciones con respecto a su media) , junto con las magnitudes de estabilidad de* la propia empresa determinan los precios o primas recargadas $P(i+\lambda)$.
Por tanto, el asumir la tarificación con bases de segundo orden supone considerar un costo técnico directo, que da origen a la prima pura $P=E(X)$, y un costo técnico *indirecto que da origen al recargo de seguridad explícito* λ , *dependiente a su vez* de la dimensión técnica de la empresa de seguros.
En resumen, a partir del subsistema de estabilidad, podemos expresar a λ como *dato* (recargo implícito)o *como variable de decisión* (recargo explícito).
En efecto,. en el primer caso, supongamos, por ejemplo, que estamos en un mercado de primas uniformes calculadas con bases de primer orden, es decir, en donde el margen de seguridad aparece en forma implícita. En una empresa determinada se podría considerar el siguiente grafo:



Es decir, en base a los márgenes implícitos existentes en las tarifas uniformes de puede conseguir el grado de estabilidad deseado, incluso disponiendo de unas cifras reducidas de reservas de solvencia (S). Lógicamente, el reaseguro se ve favorecido por estos márgenes implícitos existentes en las primas y que permiten financiarlo más fácilmente . Por otra parte, la escasez de reservas de solvencia resta poder negociador a la empresa que tiene que acceder a las exigencias del mercado de reaseguro.
Sin embargo, en el segundo caso —λ como variable de decisión— podemos expresarlo en el siguiente grafo:



E = Información del mercado

5.8 Determinación de la cuantía del recargo de seguridad. criterios de estabilidad.

Para fijar la cuantía de λ podemos aplicar los siguientes criterios:
— De estabilidad o solvencia
— Económicos
— Basados en un orden de preferencia del decisor.

Criterios de estabilidad.
A su vez podemos distinguir:

Como fracción de un parámetro que mide el riesgo asumido por el asegurador.
Según el modelo estocástico de la teoría del riesgo (individual o colectivo).

La expresión general en este caso es:
$P_r = E(X) + \theta R(X)$
P_r Prima recargada
$R(X) \equiv$ Parámetro que mide el riesgo del asegurador.
$\theta \cdot R(X) \equiv$ Recargo de seguridad explícito $(\theta \in R^+)$
Los principales casos particulares son los siguientes:
$R(X) = \sigma^2(X)$ Varianza de la siniestralidad total correspondiente al periodo de *tiempo a que se refiere la prima pura o valor medio* E(X).
$R(X) = \sigma(X)$ Desviación típica de siniestralidad total.
$R(X) = \sigma^2 + (X)$ Semivarianza de la siniestralidad total.

$$\sigma^2 + (X) = \int_E^\infty (X - E)^2 dF(X) \qquad \text{donde} \quad E = E(X)$$

Lógicamente el valor de θ dependerá del parámetro utilizado en la medición del riesgo del asegurador.
El tercer parámetro tiene la ventaja que solo refleja las desviaciones en la siniestralidad superior a la media, frente a la varianza y la desviación típica que miden desviaciones tanto positivas como negativas.
Conceptualmente se puede poner: $\lambda = \lambda_s + \lambda_x$
siendo:
λ_s La fracción del recargo de seguridad destinada a financiar las reservas de solvencia de la entidad.
λ_x La fracción del recargo técnico destinada a cubrir la diferencia positiva entre la siniestralidad real y la prima pura en el ejercicio. Si la prima pura {E(X)} es superior a la siniestralidad real entonces λ_x constituye el beneficio técnico del asegurador en el periodo considerando.
Sin embargo la normativa legal española dispone que las provisiones técnicas para desviación de la siniestralidad se constituirán con el importe del recargo de seguridad incluido en las primas, es decir, λ (que deberá girar sobre la prima de riesgo) se hace coincidir con λ_s.

2.- Aplicación de la teoría del riesgo colectivo.
Consideremos los siguientes supuestos:

a) Tarificación según la cartera total.

A partir de las expresiones estudiadas en la lección 23

$$F(x,r)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(r)V^{n(*)}(x)$$

siendo:

$$P_n(r)=\begin{cases}\dfrac{e^{-r}\cdot r^n}{n!} & \text{Poisson}\\[2ex] \dbinom{-h}{n}\left(-\dfrac{r}{r+h}\right)^n\left(\dfrac{h}{r+h}\right)^h & \text{binomial negativa}\end{cases}$$

$$f.c.=\varphi_n[\varphi_x(s)] \qquad \text{y} \qquad \varphi_x(s)=\int_0^x e^{isx}dV(x)$$

con $\quad P=\int_0^x xdF(x,r)=r\cdot C_1$

podemos aplicar los siguientes *criterios*:
—*Distribución de la siniestralidad total* Se calcula el recargo de seguridad λ de forma que se verifica la ecuación
$\varepsilon=1-F[(1+\lambda)P+S_0r]$
Evidentemente se trata de un criterio válido a corto plazo pues, en general está asociado a la distribución de un solo ejercicio.
—*Función de ruina*: Partiendo de la función de ruina.

$$\psi(S_0)=\varepsilon\approx e^{-RS_0} \qquad (1)$$

Se calcula R que se sustituye en :

$$E\left[e^{-R(1+\lambda)rc_1-X_r}\right]=e^{-R(1+\lambda)rc_1}\cdot E\left[e^{R\cdot X_r}\right]=1 \qquad (2)$$

$$e^{(1+\lambda)RrC_1}=\int_0^{\infty}e^{RX}dF(x,r)=\varphi_n[\varphi_x(R)]=e^{r[\varphi_x(R)-1]} \qquad \text{(POISSON)} \quad \text{o bien:}$$

$$\left[1-\frac{r}{h}(\varphi_x(R)-1)\right]^{-h} \quad \text{(BINOMIAL NEGATIVA)} \qquad \text{es decir,}$$

$$\int_0^{\infty}e^{RX}dV(x)=\begin{Bmatrix}1-(1+\lambda)RC_1\\[1ex] 1+\dfrac{1-e^{(1+\lambda)RC_1 r/h}}{r/h}\end{Bmatrix}$$

Con objeto de obtener fórmulas aproximadas del recargo de seguridad , de (1) se obtiene (tomando la cota superior de la probabilidad de ruina),

$$R=\frac{1}{S_0}[-\log\psi(S_0)]=\frac{1}{S_0}[-\log\varepsilon]$$

A su vez resulta de la ecuación de condicón (2), resulta,

$$E\left[e^{RX}(r)\right]=e^{(1+\lambda)RP}=\varphi_n\left[\varphi_x(R)\right]$$

Con $P=rC_1$

En la que φn es la función cacarcterística de la distribución del número de siniestros y φx(R) la función característica de la distribución de la cuatía del sisniestro.

Considerando el modelo de la binomial negativa para la primera variante (nímero de siniestros), donde h es el coeficiente de heterogenidad o contagio de la cartera, resulta:

$$e^{(1+\lambda)RP}=\left[1-\frac{r}{h}(\varphi_x(R))-1\right]^{-h}$$ tomando logaritmos se puede poner:

$$\log\left[1-\frac{r}{h}(\varphi_x(R)-1)\right]=-\frac{r}{h}(\varphi_x(R)-1)-\frac{r^2}{2h^2}((\varphi_x(R)-1)^2-\dots\dots\dots$$

es decir,

$$R(1+\lambda)\frac{\tau}{h}=\frac{\tau}{h}(\varphi_x(R)-1+\frac{\tau^2}{2h^2}(\varphi_x(R)-1)^2+\frac{\tau^3}{3h^3}(\varphi_x(R)-1)^3+\dots\dots\dots\dots$$

A su vez el desarrollo en serie de potencias de la función característica del costo del siniestro es:

$$\varphi_x(R)=\int \ell^{RX}dV=1+C_1*R+C_2*\frac{R^2}{2}+C_3*\frac{R^3}{3!}+\dots\dots$$

Que sustituida en la expresión anterior, y operando en unidades de costo medio nos da como resultado:

$$R(1+\lambda)\frac{\tau}{h}=\frac{\tau}{h}\left[R+C_2*\frac{R^2}{2}+C_3*\frac{R^3}{3!}+\dots\dots\right]+\frac{\tau^2}{2h^2}\left[R+C_2*\frac{R^2}{2}+\dots\dots\right]+\dots\dots$$

La aproximación lineal de este desarrollo nos permite obtener,

$$R(1+\lambda)\approx R+C_2*\frac{R^2}{2}+\frac{\tau}{2h}R^2\;;\;\;(1+\lambda)\approx 1+\frac{R}{2}\left(C_2+\frac{\tau}{2h}\right)\;;\;\;\lambda\approx\frac{R}{2}\left(C_2+\frac{\tau}{h}\right)$$

Y, teniendo en cuenta (1), resulta:

$$\lambda\approx\frac{R}{2\cdot S_0}\left(1+\sigma^2+\frac{\tau}{h}\right)(-\log\varepsilon) \qquad (3)$$

fórmula en la que σ^2 es la varianza de la cuantía del sisniestro expresada en unidades de costo medio. La ecuacion (3) en unidades monetarias es:

$$\lambda\approx\frac{R}{2\cdot S_0}\left(C_1+\frac{\sigma^2_{(x)}}{C_1}\frac{P}{h}\right)(-\log\varepsilon)$$

en la que $\sigma^2_{(X)}$ es la varianza de la distribución del costo del siniestro. En conclusión, la aproximación linal a partir de la función de ruina en la hipótesis del modelo de la binomial negativa, nos permitenexpresar el recargo técnico λ como resultante de agregar tres elementos:

$$\lambda\approx\rho_1(S_0;C_1:\varepsilon)+\rho_2(S_0;C_1:\sigma^2_{(x)})+\rho_3(S_0;h:\varepsilon)\cdot P$$

Se observa que este recargo, llamado también técnico para distinguirlo de los

recargos económicos — o de gestión — está inlfu´do por un componente que es función de $\sigma^2(x)$ (el cual mide la dispersión de la cuantía de los siniestros),y por otro componente que es función de h (parámetro que mide la dispersión , en sentido
inverso, del número de siniestros), de forma que p_2 es creciente con $\sigma^2(x)$ y p3 decreciente con h. En cuanto al primer sumando, p1 , significa el nivel mínimo del recargo de seguridad.
Apartir de la ecuación (3) se puede obtener una expresión aproximada de la probabilidad de ruina en un intervalo temporal infinito. En efecto, de (3), operando en unidades monetarias, resulta: $\log \varepsilon \approx -\dfrac{2\lambda S_0}{C_1 + \dfrac{\sigma^2(x)}{C_1} + \dfrac{P}{h}}$

$$\varepsilon \approx e^{-\frac{2\lambda C_1}{C_1^2+\sigma^2(x)+\frac{r}{h}C_1^2}\cdot S_0} = e^{-\frac{2\lambda C_1}{C_2+\frac{r}{h}C_1^2}\cdot S_0}$$

Si h→0 (distribución de Poisson del número de siniestros), la función de ruina es:

$$\varepsilon \approx e^{-\frac{2\lambda C_1}{C_2}\cdot S_0}$$

Es decir, ε *disminuye al aumentar* λ y S_0 .
Los resultados anteriores tienen validéz para el total de una cartera, o bien para una cartera parcial limitada a un ramo.
Pero teniendo en cuenta que en la práctica se suele disponer de información de las carteras parciales se presenta el problema de fijar la distribución de la totalidad a partir de las correspondientes distribuciones de las carteras parciales.
Si asumimos la hipótesis de que la información proviene de *carteras parciales estocásticamente independientes* podemos poner:

Cartera parcial	Distribuciones.
C_1	$F_1(xr_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-r_1} r_1^n}{n!} V_1^{n(*)}(x)$
C_2	$F_2(xr_2) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-r_2} r_2^n}{n!} V_2^{n(*)}(x)$
C_3	$F_3(xr_3) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-r_3} r_3^n}{n!} V_3^{n(*)}(x)$
C_k	$F_k(xr_k) = \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-r_k} r_k^n}{n!} V_k^{n(*)}(x)$

este caso la función de distribución de la siniestralidad correspondiente a la cartera total $F(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-r} r^n}{n!} V^{n(*)}(x)$ Siendo: $r = r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_k$

$$V(x) = \frac{r_1 V_1(x) + r_2 V_2(x) + \ldots. + r_k V_k(x)}{r_1 + r_2 + \ldots + r_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{r_i V_i(x)}{r} C_1$$

B) Tarificación según carteras parciales.

Por dos razones prácticas y de competencia se suele imponer una tarificación de acuerdo con las parciales.
Para ello, consideremos las siguientes carteras parciales estócasticamente independientes.

Cartera	S	r	V(x)	λ	F.ganancia.
C_1	S_1	r_1	$V_1(x)$	λ_1	$Y_1 = (1+\lambda)r_1 C_1 - X_1$
C_2	S_2	r_2	$V_2(x)$	λ_2	$Y_2 = (1+\lambda)r_2 C_2 - X_2$
C_3	S_3	r_3	$V_3(x)$	λ_3	$Y_3 = (1+\lambda)r_3 C_3 - X_3$
C_k	S_k	r_k	$V_k(x)$	λ_k	$Y_k = (1+\lambda)r_k C_k - X_3$

A partir de los siguientesm datos:
— Probabilidad de ruina. (ε).
—Reservas de solvencia.

$$S_0 = \sum_{j=1}^{k} S_j$$

— Ganancia total del asegurador para el conjunto de carteras parciales.

$$Y = \sum_{j=1}^{k} Y_j$$

Siendo la función característica de la variante (Y)

$$\varphi_y(R) = \prod_{j=1}^{k} \varphi_j(R) = \prod_{j=1}^{k} E\left\{e^{R[(1+\lambda_j)r_j C_j - x]}\right\}$$

De acuerdo al teorema de Finetti

$$\varepsilon \le e^{-RS_0}$$

donde el coeficiente R satisface la expresión

$$\prod_{j=1}^{k} E[\left[e^{-Rr_j}\right] = \prod_{j=1}^{k} E\left\{e^{-R[(1+\lambda_j)r_j\breve{C}_j - x]}\right\} = \prod_{j=1}^{k} E\left\{e^{-R[(1+\lambda_j)r_j\breve{C}_j]}\right\} E[\left[e^{-Rr_j}\right] = 1$$

$$\prod_{j=1}^{k} e^{R[(1+\lambda_j)r_j C_j - x]} \varphi_{n(j)}\left[\varphi_{x(j)}(R)\right] = 1 \qquad ; \qquad \tau_j \overline{C}_j = P_j$$

donde P_j es la prima pura ; $\varphi_{n(j)}$ es la función característica de la distribución del numero de siniestros y $\varphi_{x(j)}(R)$ la función característica del costo del siniestro de la cartera j.
∀ $j=1,2,3.....k$
con lo cual los valores $\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3 ......\lambda_k$ se calculan a partir de la ecuación

$$\prod_{j=1}^{k} e^{R(1+\lambda_j)P_j} = \prod_{j=1}^{k} \varphi_{n(j)}\left[\varphi_{x(j)}(R)\right] \qquad [4]$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{(1+\lambda_1)P_1} e^{-RY}\, dF_1(x\tau_1) * \int_{-\infty}^{(1+\lambda_2)P_2} e^{-RY}\, dF_2(x\tau_2) * \ldots\ldots\ldots\ldots * \int_{-\infty}^{(1+\lambda_k)P_k} e^{-RY}\, dF_k(x\tau_k) = 1$$

tarificación natural : estamos ante la misma cuando los recargos de seguridad se calculan separadamente para cada cartera parcial es decir :

$$e^{R[(1+\lambda_j)r_j C_j - X]} \varphi_{n(J)}\left[\varphi_{X(J)}(R)\right] = 1$$

con

$$R = -\frac{1}{S_j}\log(\varepsilon)$$

este sistema de obtención del recargo técnico se caracteriza por:
en la tarificación de cada cartera parcial no desempeña ningún papel el resto de las carteras
se consigue la estabilidad deseada con la máxima equidad en la prima
sin embargo el conjunto de soluciones factibles que satisfacen la ecuación [4] el, asegurador puede obtener la solución optima aplicando otros criterios adicionales a la estabilidad

5.9 Criterios económicos y basados en un orden de preferencia

La indeterminación técnica recogida en la ecuación 4 se puede resolver con criterio económico teniendo en cuenta la información de mercado donde la empresa desarrolla su actividad
en efecto si se conoce que la función de demanda de cada modalidad de seguro depende del recargo técnico es decir se puede hacer la elección del vector $[\lambda_1, \lambda_2 \lambda_3 \ldots\ldots \lambda_k]$de forma que:

$$máx Z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j D(\lambda_j)$$

sometida a [4]
considerando los siguientes datos
p_r = prima cobrada para el grupo G_r
q_r= prima necesaria según el costo de la compañía
L_r (p)= proporción del tamaño del mercado que demanda seguros al precio p
$F(p_r)$= función de demanda
las primas que recauda la compañía serán:

$$P = \sum_{r=1}^{k} L_r F(p_r) p_r$$

que la compañía debe hacer máxima con la condición:

$$P \geq A = \sum_{r=1}^{k} L_r F(p_r) q_r$$

si estimamos que $p_r - q_r = \lambda_r$ y consideramos que $L_r\, F(p_r)=D(\lambda_r)$tenemos el modelo de boa que es un caso particular de nuestro planteamiento en donde damos entrada a la estabilidad de la empresa como ecuación de condición. en esta solución además aparece la expansión de la empresa en función de su dimensión técnica.

5.10 Criterios basados en un orden de preferencia del decisor

a corto plazo se trata de elegir la mejor distribución del beneficio dando entrando a la función del utilidad del asegurador .el problema se puede plantear en los siguientes términos :
Partiendo de que el numero de operaciones demandadas depende de los recargos de seguridad (λ) se tiene la definición del beneficio:
$Y_N=N(\lambda)(1+\lambda)P-X_N$.

Siendo
P= precio por unidad de operación
X_N= siniestralidad asociada a **N** operaciones
$F^{(N)}(x)$= distribución de probabilidad de la distribución asociada a las **N** operaciones
la solución optima viene dada por el valor de que hace máxima

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(S_0+Y_N)d^{(N)}(x) \equiv máx$$

al dar entrada a las carteras parciales se plantea el siguiente problema de optimización matemática

$$máxZ=\int_{-\infty}^{\infty} u\left[S_0+\sum_{j=1}^{k} N_j(\lambda_j)(1+\lambda_j)P_j-x\right]dF^{(k)}(x)$$

con la condición

$$\prod_{j=1}^{k} e^{-R(1+\lambda_j)P_j}\varphi_{n(j)}\left[\varphi_{X(j)}(R)\right]=1$$

siendo $F^{(N)}(x)$ la función de distribución de la siniestralidad para toda la cartera.

CAPÍTULO SEIS

EL BENEFICIO EN LAS EMPRESAS DE SEGUROS

En las entidades de seguros se puede distinguir el *beneficio* (o pérdida) *económico* cuantificado por el saldo acreedor (o deudor) de la cuenta de resultados bien global o bien referente a un determinado ramo o modalidad de seguros, y el *beneficio* (o pérdida) *técnico* que, en su expresión mas reducida surge por la diferencia entre las primas puras imputables a un determinado período de tiempo, incrementadas por el recargo técnico o de seguridad y como sustraendo la siniestralidad y la variación en las provisiones técnicas de desviación de siniestralidad o estabilización correspondientes al mismo período de tiempo.

Es decir, $B = P(1+\lambda) - X - \Delta P_d$

Donde:

$B \equiv$ Beneficio técnico.
$P \equiv$ Primas puras.
$X \equiv$ Siniestralidad
$\Delta P_d \equiv$ Variación de las provisiones de desviación de siniestralidad

En un sentido amplio del término podemos incluir en el minuendo las primas de tarifa en lugar de las primas puras, y en el sustraendo los gastos reales de gestión interna y externa del ramo o modalidad de seguro de que se trate, por lo que si los recargos de administración y adquisición son iguales a los gastos efectivamente soportados por estos conceptos, el beneficio técnico en sentido estricto coincidirá con el definido en sentido amplio.

En lo que sigue haremos un planteamiento a corto plazo, en general, un año. Para estudiar la problemática derivada de un planteamiento a largo plazo, vinculado a la política de dividendos de la entidad y dentro del marco actuarial de la teoría del riesgo colectivo.

Volviendo a la definición del beneficio técnico, en la determinación de las primas se debe efectuar la correspondiente periodificación económica o contable (principio de la devengacion) dando entrada a las provisiones técnicas de riesgos en curso, es decir, operando con las *primas adquiridas* en el ejercicio. Respecto a la siniestralidad hay que tener en cuenta tanto los pagos como las provisiones técnicas para siniestros pendientes de declaración, liquidación y pago.
En caso de existir reaseguro cedido, se consideran las distintas magnitudes netas de reaseguro.

6.1 Coeficiente de ganancia

Definimos el coeficiente de ganancia del asegurador como el parámetro g que verifica la relación $B = g(1+\lambda)P - X = gP_1 - X \quad ; \quad g \in [0,1]$ siendo P_1 la prima recargada.

El coeficiente de ganancia expresa la fracción a porcentaje de las primas recargadas que se toman como ingreso para la definición del beneficio técnico imputable al ejercicio.

Se pueden presentar al respecto los siguientes casos:

Caso 1) $X \leq gP(1+\lambda)$

En cuya situación resulta

$$B = gP_1 - X > 0$$

$$\Delta P_d = (1-g)P_1 > 0$$

teniendo en cuenta que P=E(X) podemos poner $\int_0^{\infty} (P - X)\, dF(X) = 0$

F(X) $\equiv$ Función de distribución de la siniestralidad total en el ejercicio.

Es decir,

$$\int_0^{\infty} (P - X)\, dF(X) = \int_0^{\infty} [gP_1 - X]\, dF(X) - \int_0^{\infty} gP_1\, dF(X) + P =$$

$$= \int_0^{gP_1} [gP_1 - X]\, dF(X) - \int_{gP_1}^{\infty} (X - gP_1)\, dF(X) - gP_1 + P =$$

$$= \lambda P - (1-g)P_1 - gP_1 + P = 0$$

siendo

$$\int_0^{gP_1} [gP_1 - X] \equiv E(B) \quad \text{Beneficio medio}$$

$$\int_{gP_1}^{\infty} (X - gP_1)\, dF(X) \equiv E(X_{(e)}) \quad \text{Pérdida media} \; ; \; X_{(e)} \equiv \begin{cases} 0 & ; X < gP_1 \\ X - gP_1 & ; X \geq gP_1 \end{cases}$$

Una fracción del beneficio B se puede devolver en concepto de extornos a los asegurados, extornos que en ocasiones se materializan en una reducción en la prima de la siguiente anualidad.

Es decir, $P(1+\lambda) - X = B_N + E + \Delta P_d$

y $\quad E = \alpha(gP_1 - X) \; ; \; 0 < \alpha < 1; \qquad B_N = (1-\alpha)(gP_1 - X)$

donde

$E \equiv$ Extornos a los asegurados.

$B_N \equiv$ Beneficio técnico del asegurador neto de extorno.

Caso 2) $gP_1 < X < P_1$

Ahora resulta B=0

$$\Delta P_d = P_1 - X > 0$$

En este caso la periodificación técnica necesaria para la solvencia del asegurador anula el beneficio técnico del ejercicio.

Caso 3) $P_1 \langle X$

De donde B=0 $\Delta P_d = P_1 - X \langle 0$

Las provisiones técnicas de estabilización a fin de ejercicio serían

$$P_{0d} + \Delta P_d \geq, \leq 0$$

(P_{0d}= Provisiones al comienzo del ejercicio).

Si P_{0d} + $\Delta P_d \langle 0$, entonces se ha producido una *pérdida técnica* para el asegurador en el ramo o modalidad de seguro de que se trate por un montante igual a

$$\{X - (P_1 + P_{0d})\}$$

Lo que ocurre es que cuando en un ejercicio determinado los gastos técnicos (siniestralidad) superan a los ingresos técnicos (primas recargadas) será preciso cubrir la diferencia primeramente con las provisiones técnicas de desviación de siniestralidad, y solamente cuando estas no sean suficientes, se producirá la pérdida técnica que habrá necesidad de financiar con los recursos patrimoniales de la entidad.

Finalmente la determinación del coeficiente de ganancia g, su valor numérico debe de estar relacionado con las fluctuaciones negativas en la siniestralidad previstas, es decir, con la posible siniestralidad extraordinaria ($X_{(e)}$) de la cartera.

Dicha siniestralidad viene definida por:

$$X_{(e)} = X - gP_1 > 0$$

Por tanto, el método natural consiste en aplicar la ecuación de equivalencia estática vista anteriormente.

$$E(X_{(e)}) = \int_{gP_1}^{\infty} (X - gP_1)\, d\, F(X) = (1-g)P_1$$

En la que $(1-g)P_1$ expresa los ingresos del asegurador para daños extraordinarios o bien

$$E(B) = \int_0^{gP_1} (gP_1 - X)\, d\, F(X) = \lambda P$$

Que permita despejar g.

También se puede despejar un método de cálculo más prudente tomando, además de la media la desviación típica de la siniestralidad extraordinaria con lo que resulta:

$$E(X_{(e)}) + y * \sigma(X_{(e)}) = (1-g)P_1$$

Lógicamente a mayor seguridad de (y) menor (g), es decir, menores ingresos técnicos imputables al ejercicio.

En el caso particular en que E(B)= $E(X_{(e)})$, entonces $\lambda P = (1-g)P_1$ de donde el coeficiente de ganancia es:

$$g = \frac{1}{1+\lambda}$$

Lo que supone que los ingresos para los daños extraordinarios coinciden con el recargo técnico o de seguridad que lleva las primas.

6.2 Tasa de resultado técnico; Estimación de sus principales parámetros

En síntesis, el resultado de explotación de un ramo de seguros se puede desglosar en tres componentes:

Resultado técnico de liquidación en el ejercicio (L) de siniestros ocurridos en ejercicios anteriores. Una subestimación de las provisiones de siniestros pendientes de declaración, liquidación y/o pago origina una pérdida técnica por este concepto, mientras que una sobrestimación de las provisiones de siniestros pendientes origina un beneficio técnico a la empresa de seguros.
En la determinación de este componente hay que tener en cuenta los gastos de administración imputados a estos siniestros.
Resultado financiero (F), o producto de los fondos invertidos, afectos al ramo de que *se trate.* $F=F'+F''$, *donde* F' *son los rendimientos netos correspondientes a las* provisiones técnicas y F'' los rendimientos netos de los fondos invertidos en concepto de recursos propios.
Resultado técnico del ejercicio en cuestión (RT), es decir, la diferencia entre las primas adquiridas en el ejercicio netas de anulaciones y los siniestros ocurridos en el ejercicio (pago más reservas), comisiones y demás gastos de gestión imputables al ramo en el ejercicio.

El resultado de explotación del ramo (suma de las tres componentes) depende de 3 factores o riesgos a los que debe hacer frente el asegurador.

Riesgo técnico.
Riesgo de gestión.
Riesgo de mercado.

La entidad aseguradora debe hacer frente a estos riesgos a fin de garantizar un índice de estabilidad adecuado, y para ello tiene que disponer de unos recursos *–reservas de solvencia-* que en el marco legal del seguro han dado origen al denominado "margen de solvencia".

Tomando en consideración, en primer término, sólo el riesgo técnico, vamos a definir la llamada *tasa de rendimiento técnico.*

En efecto, a partir de la variable aleatoria RT tal que $RT = Q - X$, donde:

$Q \equiv$ representa las primas adquiridas netas de anulaciones (P'') menos los gastos de gestión interna y externa reales imputables al ramo en el ejercicio.

$X \equiv$ representa la variable aleatoria siniestralidad correspondiente al ejercicio (siniestros pagados del ejercicio más provisiones de siniestros pendientes).

La tasa de resultado técnico del asegurador (r) la podemos definir como

$$r=\frac{RT}{P''}=\frac{Q}{P''}-\frac{X}{P''}$$

r es una variable aleatoria cuyos principales parámetros son

$$E(r)=E\left(\frac{Q}{P''}\right)-E\left(\frac{X}{P''}\right)=\frac{Q}{P''}-\frac{E(X)}{P''} \qquad \sigma^2(r)=\sigma^2\left(\frac{X}{P''}\right)=\frac{\sigma^2(X)}{(P'')^2}$$

Estimación de la media y de la varianza de r

Media. El estimador de E (r), evidentemente es

$$\hat{E}(r)=\frac{Q}{P''}-\frac{\hat{E}(X)}{P''}=\frac{Q}{P''}-\frac{X_0}{P''}=\frac{Q-X_0}{P''}=\alpha$$

Siendo X_0 la siniestralidad total correspondiente a los siniestros observados del ejercicio (o la siniestralidad media anual sí existe más de un ejercicio de observación).
Varianza. El estimador de σ^2 (r) es

$$\hat{\sigma}^2(r)=\frac{\hat{\sigma}^2(x)}{(P'')^2}$$

Para obtener $\hat{\sigma}^2$ (x) es necesario conocer el montante de los siniestros ocurridos uno a uno, agrupados por clases de riesgos homogéneos y determinar los modelos de probabilidad correspondientes al número y cuantía de los siniestros en cada clase. *Como los X_i de las clases homogéneas son, en principio, variables aleatorias* estocásticas independientes, podemos poner

$$\sigma^2(X)=\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\dots\dots\dots+\sigma^2(X_H)$$

Donde $\sigma^2(X_i)$ representa la varianza de la variable aleatoria asociada a la siniestralidad total del ejercicio correspondiente a la clase de riesgo i (i=1,2,......,H). Vamos a distinguir a este respecto las operaciones de vida y no-vida.

6.3 Seguro de vida (seguro de fallecimiento)

Sea una póliza de capital asegurado C en caso de muerte, cuya probabilidad anual de ocurrencia es q. En consecuencia la media y la varianza de X (siniestralidad anual) son:

$$E(X)=Cq$$

$$\sigma^2(X)=C^2q(1-q)$$

Si se considera ahora una cartera de vida constituida por N_1 pólizas del capital asegurado C_1; N_2 pólizas del capital C_2;.......... N_H pólizas del capital C_H, todas ellas con la misma probabilidad de fallecimiento (q), la varianza de X será :

$$\sigma^2(X) = q(1-q)\sum_{i=1}^{H} N_i C_i^2$$

Denominado

$$\frac{\sum_{i=1}^{H} N_i C_i^2}{\sum_{i=1}^{H} N_i} = M_2(C)$$

al momento de segundo orden de la distribución de la variante C, capital asegurado, y

$$N = \sum_{i=1}^{H} N_i$$

al número total de pólizas que integran la cartera de vida del asegurado, resulta

$$\sigma^2(X) = q(1-q)N * M_2(C)$$

Fórmula que se puede generalizar sin dificultad al caso de distintas probabilidades de fallecimiento de cada asegurado según la edad $q_1, q_2, ...q_H$.

Observados *n* siniestros en un determinado ejercicio, cuya suma $X_0 = X_1 + X_2 + ... + X_n$ es una muestra de X se tiene que

$$\sigma^2(X) = n * m_2$$

con

$$m_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n}$$

Donde $X_1, X_2, ..., X_n$ constituyen una muestra de tamaño n de la población C, capital asegurado. Este estimador es insesgado ya que

$$E(n * m) = E(n) * E(m_2) \qquad y \qquad E(n) = q * N$$

$$E(m_2) = E\left(\frac{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}{n}\right) = M_1^2(C) + \sigma^2(C) = M_2(C)$$

donde: $M_1(C) \equiv$ Media de la v.a. C.

$\sigma^2(C) \equiv$ Varianza de la v.a. C.

n≈n −1(Muestra suficientemente grande)

es decir: $\hat{\sigma}^2(X) = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + ... + X_n^2$

y, por tanto

$$\hat{\sigma}^2(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{(P'')^2}$$

Así pues, el estimado de la varianza de la variante "tasa de resultado técnico" en el ramo de vida (seguro de fallecimiento) es igual al cociente entre la suma de los cuadrados de los siniestros del ejercicio y el cuadrado de las primas.

6.4 Seguros daños

Siguiendo la misma metodología que en el ramo de vida, a partir de la consideración inicial de una póliza, la distribución de su siniestralidad anual tiene como principales momentos :

$$E(X)=\tilde{n}^* C_1 = \tilde{n} * \bar{C} \qquad (\tilde{n}= \text{número medio de siniestros})$$

$$\sigma^2(X) = \tilde{n} * \sigma^2(C) + \sigma^2(n) * C_1^2 \qquad (\bar{C} \equiv \text{coste medio del siniestro} \equiv C_1)$$

Si la distribución del número de siniestros es de Poisson, la variable aleatoria **X** tiene (ley de Poisson compuesta) por varianza,

$$\sigma^2(X) = \tilde{n} * C_2$$

En el caso general de que existan **N** riesgos independientes, la varianza de la distribución de la siniestralidad total anual será:

$$\sigma^2(X) = N * \tilde{n} * C_2$$

Observados en un ejercicio *n* siniestros de cuantías $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$, esta observación constituye una muestra de tamaño *n* de la variable aleatoria "cuantía de un siniestro" cuyos dos primeros momentos son: $\bar{C}$ y C_2.

Como

$$E[\text{Número de siniestros}]=N^*\tilde{n}$$

y

$$E\left[\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + \ldots\ldots + X_n^2}{n}\right] = C_2$$

un estimador insesgado de $\sigma^2(X)$ será

$$\hat{\sigma}^2(X) = \frac{n(X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots\ldots + X_n^2)}{n} = X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots\ldots + X_n^2$$

lo que nos permite afirmar que en los ramos no vida y con las hipótesis asumidas también se verifica que el estimador de la varianza de la tasa de resultado técnico es igual a la suma de los cuadrados de los importes de cada uno de los siniestros del ejercicio dividida por el cuadrado de las primas.

En el cuadro siguiente figuran los valores durante cuatro años consecutivos de las primas, en millones de francos y desviaciones típicas (expresadas en porcentaje de las primas) correspondientes a una importante entidad aseguradora francesa, de acuerdo con los datos obtenidos por Wetzel (1).

	1		2		3		4	
Ramo	P''	σ (%)	P''	σ (%)	P''	σ (%)	P''	σ (%)
Avería de maquinaria	4.1	9.2	5.0	20.6	5.8	19.4	7.0	18.3
R. civil general	40.7	2.7	51.5	2.7	59.8	4.0	73.0	2.6
Incendio. (Riesgos. Indust.)	12.3	13.6	17.2	8.0	21.4	8.9	25.7	8.0
Incendio.(Riesgos sencillos.)	31.1	6.3	38.6	4.3	44.0	2.6	51.4	3.9
Robo	5.9	5.6	8.0	4.4	9.8	4.1	12.4	3.0
Accidentes	22.7	1.4	27.3	1.8	33.2	2.0	41.9	1.5
Automóviles	235.4	1.4	274.0	1.4	307.8	1.2	335.5	1.0
Total	354.2	1.3	421.7	1.2	481.8	1.1	546.9	1.0

Destaca el hecho de que el ramo de automóviles presente, con notable diferencia, la desviación típica más baja (en porcentaje sobre primas) de todos los ramos de seguro considerados.

6.5 Influencia del número de riesgos y de la inflación

Supongamos que la cartera (o una clase homogénea) de pólizas pasa a detener N expuestos al riesgo a tener N', siendo

$$K = \frac{N'}{N}$$

Sabemos que:

$$\sigma^2(r) = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{(P'')^2}$$

luego la nueva varianza tendrá por expresión:

$$\sigma'^2(r) = \frac{K\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{K^2(P'')^2} = \frac{K * \sigma^2(r)}{K^2} = \frac{\sigma^2(r)}{K}$$

o bien,

$$\sigma'(r) = \frac{\sigma(r)}{\sqrt{K}}$$

Si la cartera de pólizas crece, por ejemplo, en un 5% anual, al cabo de tres años tendremos (a igualdad de condiciones),

$$\sigma'(r) = \frac{\sigma(r)}{\sqrt{(1.076)^2}} = 0.93 * \sigma(r)$$

Evidentemente, el aumento del número de pólizas expuestas a riesgo reduce las fluctuaciones de la tasa de resultado técnico, a igualdad de condiciones.
Respecto a los efectos de la inflación, supongamos que al cabo de un año los importes de los siniestros ocurridos son $X_i' = K * X_i$ siendo K= 1+ δ (δ =Tasa unitaria anual de inflación).

Si las primas están indexadas resulta $P_K'' = K * P''$, de donde se deduce que,

$$\sigma'^2(r) = \frac{K\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{K^2(P'')^2} = \sigma^2(r)$$

Lógicamente la varianza no varía siempre que las primas y los siniestros se modifiquen en la misma proporción, también a igualdad de condiciones.

Por el contrario si las primas crecen en menor proporción que los importes de los siniestros (como ocurre, en general en el seguro del automóvil), entonces,

$$\sigma'^2(r) \rangle \sigma^2(r)$$

es decir, la inflación en este caso acentúa la dispersión de la variante tasa del resultado técnico, es decir, incrementa el riesgo asumido para el asegurador, lo cual implica una mayor dotación de recursos al ramo y/o una aumento en las cesiones al reaseguro, en resumen, un mayor coste para el asegurador directo.

6.6 Beneficio y solvencia del asegurador

Si las reservas de solvencia a nivel global, o bien afectas a un determinado ramo o modalidad de seguros, en un determinado ejercicio son (S) – básicamente recursos propios más provisiones técnicas de desviación de siniestralidad - , la probabilidad de ruina (ε), es:

$$P[S+L+F+RT<0] = \varepsilon$$

donde, como hemos visto anteriormente (RT) es una variable aleatoria de parámetros

$$E[RT] = \alpha * P'' \qquad (\alpha = E(r))$$

$$\sigma^2[RT] = (P'')^2 * \sigma^2(r)$$

$$\sigma[RT] = (P'') * \sigma(r)$$

La variable tipificada de (RT) es

$$Z = \frac{RT - \alpha P''}{\sigma(r) P''}$$

Si el asegurador desea que la probabilidad de ruina sea inferior a ε_0, sustituyendo resulta

$$P[S+L+F+\sigma(r)P'' * Z + \alpha P'' \langle 0] = \varepsilon_0$$

o bien,

$$P\left[Z \langle -\frac{S+L+F+\alpha P''}{\sigma(r)P''}\right] \langle \varepsilon_0$$

si

$$\frac{(S+L+F)+\alpha P''}{\sigma(r) * P''}$$

es suficientemente grande se verificará la anterior desigualdad; por esta razón a esta fracción se la denomina *coeficiente de seguridad* (Cs).

El coeficiente de seguridad Cs es pues, igual a las reservas de solvencia, más el resultado técnico de liquidación de siniestros y el resultado financiero, más el resultado técnico medio imputable al ramo, dividida la suma por la desviación típica de siniestralidad total en el ejercicio.

Llamando

$$S+L+F=S' \qquad y \qquad \frac{S'}{P''}=\mu$$

μ expresa las reservas de solvencia más los resultados de liquidación y financieros expresados en porcentaje sobre primas, resulta,

$$Cs=\frac{\mu+\alpha}{\sigma(r)}$$

Si admitimos la hipótesis de normalidad para Z basta (si fijamos ε_0 = 1 %), que Cs alcance el valor 2.4 para que

$$P[Z < - Cs] < 1\%$$

En caso de desconocimiento total de la ley de probabilidad de Z, la desigualdad de Tchebycheff nos da como valor del coeficiente de seguridad de Dubordieu Cs = 10, ya que (para ε_0 = 1 %)

$$P[|Z| > 10] < \frac{1}{(10)^2} = 1\%$$

Como regla práctica algunos autores aconsejan dotar unas reservas de solvencia (S) tales que el coeficiente de seguridad Cs sea superior a 4, es decir, se ha de cumplir la desigualdad.

$$\frac{\mu+\alpha}{\sigma(r)} > 4$$

Donde μ , α y σ (r) son los valores observados en el último ejercicio cerrado.

En caso contrario, el asegurador debe optar por:

Incrementar el valor de μ

Reducir el valor de σ(r), como puede ser acudiendo al reaseguro. Evidentemente el reaseguro influye también en α (resultado técnico), que disminuye, pero el efecto contrapuesto de los fenómenos es favorable a Cs.

6.7 Introducción de los riesgos de gestión y mercado

Una vez que el asegurador ha hecho frente al riesgo técnico o derivado de las fluctuaciones aleatorias de la siniestralidad, mediante la adopción de un reaseguro

adecuado y la dotación de las necesarias reservas de solvencia, dotando en primer lugar las oportunas provisiones técnicas de desviación de siniestralidad y acudiendo en segundo término a los recursos propios), debe verificar ahora su situación frente a los restantes riesgos (gestión y mercado) a los que la entidad debe atender.

Denominado $\sigma_g(r)$, la desviación típica global asociada a la dispersión de la tasa de resultado técnico teniendo en cuenta las tres clases de riesgos y tomando un determinado coeficiente de seguridad Cs (por ejemplo, Cs = 4), se debe de verificar la desigualdad,

$$S+L+F+\alpha\ P'' > 4\sigma_g(r)P''$$

es decir,

$$\frac{S}{P''} > 4\,\sigma_g(r) - \alpha - \frac{L+F}{P''}$$

El segundo miembro de la anterior desigualdad expresa el patrimonio mínimo que debe tener la entidad afecto al ramo.

En la práctica, como sabemos, el denominado " margen de solvencia" se calcula de forma mucho más simple, en porcentaje sobre el volumen de primas (o de provisiones matemáticas en el ramo de vida), corregido, en su caso, por un porcentaje de los siniestros, a fin de compensar la subtarificación.

La principal dificultad operativa del modelo que acabamos de ver radica en la estimación de $\sigma_g(r)$, ya que, en principio, el proceso estocástico asociado a la evolución temporal de la tasa de resultado técnico no lo podemos considerar estacionario, pues si verificara esta propiedad, nos bastaría considerar una serie histórica suficientemente grande como información muestral.

Por ejemplo, si en los diez últimos ejercicios los valores muéstrales de α de una compañía aseguradora son (en porcentaje de P''):

Año:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α:	10%	14%	16%	7%	13%	14%	5%	4%	3%	3%

sus parámetros son:

Media =8.9%

Desviación típica = 4.8%

cifra que podríamos tomar como valor estimado de $\sigma_g(r)$, si el proceso fuese estacionario.

Finalmente, se puede extender este modelo actuarial incluyendo, tanto en el resultado técnico de liquidación (L) como en el resultado del ejercicio (RT), los rendimientos netos derivados de la inversión de las provisiones técnicas (F′): entonces F quedaría sustituido por F″. La suma de los componentes (L+RT+F′) se denomina usualmente resultado técnico-financiero en el ejercicio del ramo o modalidad de que se trate.

6.8 Solvencia y beneficio. Modelo global de Pentikaïnen-Rantala

El modelo actuarial elaborado por los actuarios Pentikaïnen y Rantala (1982) trata de integrar las principales actividades de la empresa aseguradora y ha servido de base para establecer la normativa de solvencia en Finlandia.

En síntesis, se parte del siguiente esquema:

Ingresos	Reserva de solvencia	Egresos
- Primas { - Primas puras; - Recargos de seguridad o técnicos; - Recargos económicos } →	S	→ { -Siniestralidad; -Gastos de explotación; -Gastos de reaseguro y varios; -Dividendos }
Rendimientos netos de las inversiones } →	↑ S	

Denominando: primas (P″), rendimientos (F), siniestralidad (X), gastos de explotación y reaseguro (G), y dividendos (D), la ecuación de transición es:

$$\Delta S = P'' + F - X - G - D \qquad [1]$$

Como ya sabemos, los rendimientos (F) son la suma de los rendimientos netos de las provisiones técnicas (F′) y los rendimientos netos de los fondos invertidos en conceptos de recursos propios (F″).

Es decir, en nuestro caso

$$F = i(PT_{-1} + S_{-1})$$

donde i es el tipo de interés medio de las inversiones del asegurador, PT son provisiones técnicas y el subíndice (-1) indica el período anterior.

Como $\Delta S = S - S_{-1}$, la ecuación [1] resulta

$$S = (1+i)S_{-1} + P'' + iPT_{-1} - G - X - D \qquad [2]$$

Se denomina *ratio de solvencia* al cociente

$$\zeta = \frac{S}{P''}$$

es decir, el porcentaje de las primas comerciales que representan las reservas de solvencia.

Llamando C=G+D y haciendo operaciones [2] podemos poner

$$\frac{S}{P''}=(1+i)\frac{S_{-1}}{P''}+1+i\frac{PT_{-1}}{P''}-\frac{C}{P''}-\frac{X}{P''}$$

o bien,

$$\zeta=(1+i)\frac{P''_{-1}}{P''}\zeta_{-1}+1+i\frac{P''_{-1}}{P''}\omega_{-1}-c-x \qquad [3]$$

donde

$$c=\frac{C}{P''}\ ;\ \omega=\frac{PT}{P''}\ ;\ x=\frac{X}{P''}$$

Descomponiendo el crecimiento nominal de las primas comerciales en crecimiento real – a una tasa (i_R) – y crecimiento atribuido a la depreciación monetaria – con una tasa i_d – queda:

$$\frac{P''}{P''_{-1}}=(1+i_R)(1+i_d)=(1+i_N)=r_N$$

siendo i_N la tasa periódica de crecimiento nominal de las primas del asegurador y r_N el correspondiente factor.

A su vez si consideramos las relaciones

$$i_{N0}=i\frac{P''_{-1}}{P''} \quad y \quad r_{N0}=r\frac{P''_{-1}}{P''} \quad ; \quad (r=(1+i))$$

entonces la tasa y el factor ampliados, que recogen el interés nominal de las inversiones, el crecimiento de las primas y la inflación, serán, en este caso,

$$i_{N0}=\frac{i}{r_N} \quad y \quad r_{N0}=\frac{r}{r_N}$$

sustituyendo en la ecuación [3]

$$\zeta=r_{N0}\zeta_{-1}+1-c-x+i_{N0}\omega_{-1} \qquad [4]$$

Considerando las primas puras P= P''(1 - λ - c) *y llamando*

$$\bar{x}=\frac{E(x)}{P''}$$

tenemos

$$P= E(x)= P''(1 - \lambda - c)$$
$$\bar{x} = (1 - \lambda - c) \quad y \quad \bar{x} + \lambda = 1 - c$$

por lo que la [4] se puede escribir

$$\zeta=r_{N0}\zeta_{-1} + \bar{x} - x + \lambda + i_{N0}\omega_{-1}$$

Finalmente, si definimos el recargo de seguridad "agregado"

$$\lambda_A=\lambda + i_{N0}\omega_{-1}$$

se deduce de inmediato la expresión del ratio de solvencia

$$\zeta=r_{N0}\zeta_{-1} + \bar{x} - x + \lambda_A$$

Ecuación que nos recoge la transición de (ζ) en dos períodos (años) consecutivos.

GLOSARIO

Acción Correctiva (Corrective Action): Las acciones tomadas por la gerencia basadas en la Retroalimentación de los resultados de una Auditoría.
Aceptación de Riesgo (Risk Acceptance): Una decisión informada de aceptar las Consecuencias probables de Eventos.
Aceptación de Riesgo (Accepting Risk): Una técnica de Administración de Riesgos que permite que la administración compare el costo de administrar el riesgo contra el beneficio de reducir el riesgo. La aceptación del riesgo es la responsabilidad del Equipo de Gobernancia de la alta dirección y de la Junta de Cosejo La cantidad de *riesgo aceptable debe ser determinado de antemano. Vea Análisis de Costo y* Beneficio.
Activos Blandos (Soft Assets): Recursos humanos (gente, habilidades, y conocimientos) y activos intangibles (información, marcas, y reputación). Es difícil *valuar los activos blandos, y generalmente no están reflejados en los libros de* contabilidad. Tampoco están sujetos a inventarios periódicos. Vea también Activos Duraderos.
Activos Duraderos (Hard Assets): Activos físicos (tierras, edificios, equipo) y activos financieros (efectivo, crédito, instrumentos financieros). Activos duraderos generalmente se encuentran en los registros de contabilidad de la organización y bajo salvaguardas custodiales y de inventario. Vea también Activos Débiles.
Administración de Riesgos (Risk Management): Una rama de administración que aborda las Consecuencias de riesgo.
Administración Integrada de Riesgos (Integrated Risk Management): La consideración de los Riesgos a todos los niveles de la organización, desde lo estratégico hasta el cotidiano trabajo del empleado frente al cliente. Integración de la administración de riesgos a la auditoría interna significa la adopción de Auditoría Basada en Riesgos y el uso de las herramientas de administración de riesgos para planificación de auditorías internas.
Amenaza (Threat): Una combinación del Riesgo, la Consecuencia del riesgo, y la Posibilidad de que el Evento negativo vaya a suceder. Frecuentemente usado en *análisis en el lugar del Riesgo.*
Análisis de Costo-Beneficio (Cost/Benefit Analysis): Una herramienta de Administración de Riesgos usada para tomar decisiones sobre Aceptación de Riesgos o usando alguna otra técnica para la administración de los riesgos.
Análisis del Entorno (Environmental Analysis): Igual a Escanear el Ambiente. Vea también Evaluación del Ambiente.
Analisis de la Misión (Mission Analysis): Una técnica que aborda el desarrollo del Programa de Auditoría por medio del examen de un proceso de distintos enfoques que puede satisfacer la misión de la función: classificando de resultados, geografía, cuestiones de cumplimiento, etc.
Análisis de Riesgos (Risk Analysis): La evaluación, administración y comunicación de riesgos.

Análisis de la Sensibilidad (Sensitivity Analysis): El análisis de cambios en resultados de Modelo cuando las Variables o las Suposiciones cambian.
Análisis de la Vulnerabilidad (Vulnerability Analysis): Presentado por William Perry, incluye la Pérdida Esperada o Enfoque de Valor Esperado con la dimensión de Horizontes de Tiempo.
Árboles de Decisión (Decision Trees): Un conjunto de decisiones condicionales con "ramas" que representan alternativas con distintas Compensaciones. Puede consistir de estratos múltiples.
Árboles de Defectos (Fault Trees): Un método de Identifación de Riesgos y elaboración de Escenarios de Riesgo donde el resultado final de un evento se investiga teniendo en cuenta el pasado para identificar todas las causas posibles.
Árboles de Eventos (Event Trees): Un método de Identificación de Riesgos y evaluación de Consecuencias donde todos los posibles eventos posteriores se evalúan por sus Riesgos. Usado en Escenarios de Riesgo.
Argumentos (Plots): Vea Argumentos de Escenarios.
Argumentos de Escenario (Scenario Plots): Varias formas estándares de organizar el proceso de Elaboración de Escenarios. Hay argumentos típicos como: Ganadores y Perdedores (uno u otro), El Llanero Solitario (nosotros contra ellos), Desafío y Respuesta (ambos/y), Buenas Noticias/Malas Noticias (lo peor), Cambio Tectónico (cambio estructural), etc.
Aseguramiento (Assurance): Un sistema de Gobierno Corporativo que provee retroalimentación acerca de la eficacia de las operaciones, acatamiento con las leyes y las regulaciones, y la precisión y seguridad de la información financiera. La auditoría interna igual que la Administración de Riesgos son parte del proceso de seguridad.
Asignación Directa (Direct Assignment): La asignación de ponderaciones preferenciales a factores de riesgo por estimación. Vea también Selección Comparativa de Opuestas Alternativas.
Auditor Interno Principal (Chief Internal Auditor): El administrador o ejecutivo quién reporta a la alta gerencia y al Comité de Auditoría los planes y los resultados de la auditoría.
Auditoría (Audit): Una estudio o una revisión que compara lo actual a lo deseado y provee Retroalimentación para realizar una Medida Correctiva.
Auditoría Basada en Controles (Controls-Based Auditing): Auditorías que usan el Sistema de Control Interno como su Objectivo de la Auditoría. Vea para contraste Auditoría Basada en Riesgos.
Auditoría Basada en Riesgos (Risk-Based Auditing): Auditorías que enfocan en el riesgo y Administración de Riesgos como el Objetivo de la Auditoría. Para contraste vea Auditoría Basada en Controles.
Auditoría Co-Activa (CoActive Auditing): Un enfoque de la auditoría que depende de Técnicas Colaborativas, como la inclusión del cliente de la auditoría en el proceso de la auditoría.
Auto-Evaluación de Controles (Control Self-Assessment): CSA abreviada. Una clase de métodos usada en una auditoría o en lugar de una auditoría para evaluar la fuerza y la debilidad de los riesgos y los controles versus una Estructura de Control.

La "auto" evaluación se refiere a la participación de la gerencia y el personal en el proceso de la evaluación, muchas veces ayudados por los auditores internos. Los métodos CSA incluyen talleres, seminarios, grupos de enfoque, entrevistas estructuradas, y cuestionarios de encuesta.

Auto-Evaluación de Controles y Riesgos (Control and Risk Self-Assessment): CRSA abreviada. Vea Auto-evaluación de Controles.

Box-Jenkins: *Un tipo de modelos de Pronosticación usando la media ponderada* móvil para estimar el flujo de efectivo.

Trampas (Tripwires): El mismo significado que Provocaciones o Generadores..

Cadbury: Un sistema de controles internos o una Estructura de Control definida por la *Comisión Cadbury (UK). También es el nombre popular del reportaje de la Comisión* Cadbury.

Cambio De Paradigma (Paradigm Shift): Un cambio significativo de una opinión fundamental a otra. Generalmente incluye Discontinuidad.

Catástrofe (Catastrophe): Un Evento de proporciones inmensas que tiene Consecuencias severas, frecuentemente con la pérdida de vida y de una gran proporción de los activos de la organización.

CBOK: Vea Fuente Común de Conocimiento.

CFIA: Vea Estructura de Competencia Para Auditorías Internas; "Competency Framework for Internal Auditors."

Clasificación (Ranking): El proceso de establecer el orden o la prioridad.

Clasificación Comparativa de Riesgos (Comparative Risk Rankings): Usando la Selección Comparativa de Opuestas Alternativas (vea también Proceso Analítico Jerárquico) para diferenciar cuales son los riesgos altos y bajos.

Clasificación de Riesgos (Risk Classification): La categorización de riesgos, típicamente en Alto, Medio, Bajo y valores intermedios.

Clasificación de Riesgos en Prioridades (Risk Prioritization): La relación de niveles aceptables de riesgos entre las alternativas. Vea también Clasificación de Riesgos.

Clasificación de Riesgos (Risk Ranking): El orden de prioritización ordinal o cardinal de los riesgos en varias alternativas, proyectos o unidades.

Comodines (Wild Cards): *En Planificación Estratégica, son grandes sorpresas que* tienen alto impacto y que vienen cuando menos se esperan.

Compartiendo Riesgos (Sharing Risk): Una técnica de Administración de Riesgos usada para distribuir las posibles Consecuencias de riesgos dentro de varios grupos. Los seguros y otros contratos son métodos usados para compartir o Transferir Riesgos.

Compensaciones (Pay-offs): En la teoría de decisiones, los beneficios netos recibidos de decisiones alternativas.

Consecuencias (Consequences): El resultado positivo o negativo de decisiones, eventos o procesos. Eventos de Riesgo crean las consecuencias.

Consenso (Consensus): El principio, un acuerdo general entre las partes . No significa acuerdo total ni aprobación unánime.

Contextos (Contexts): Otra palabra que significa Ambiente.

Control Interno (Internal Control): Todos los medios, tangibles e intangibles, que se emplean or se usan para asegurar que los objetivos establecidos se alcanzan.
Control: La parte funcional de un sistema que provee una reacción sobre cómo cumple el sistema sus intenciones y objetivos. Vea Control Interno.
Corto Plazo (Short Term): La planificación o el Horizonte de Tiempo que trata con eventos del ciclo o período de contabilidad actual (típicamente un año, de vez en cuando dos años).
Criterio (Criteria): Los requerimientos.
CRSA: Vea Evaluación de Riesgos y Control.
CSA: Vea Auto-Evaluación de Controles.
Curvas de Utilidad (Utility Curves): Expresiones matemáticas de Equilibrios de Utilidad sobre una variedad de alternativas.
Desarrollo de la Estructura (Framing): En el desarrollo de un Modelo, durante la fase de desarrollo de la estructura, el equipo de proyecto trata de desarrollar y compartir con el consejo de decisiones una colección de diversas estrategias alternativas que lo obligan a probar muchos elementos tácticos y contemplar en muchas Incertidumbres.
Diagramas de Flujo de Datos (Data Flow Diagrams): Una representación gráfica de los flujos mayores de datos y como estos flujos se enlazan. Usado en lugar de Organigramas. Es muy útil para Identificación de Riesgos y Escenarios de Riesgos para determinar los puntos de más Exposición.
Diagramas de Influencia (Influence Diagrams): Modelos pictoriales que describen las relaciones entre partes del modelo. Estas relaciones pueden ser muy complejas. Vea también Diagramas de Influencia Condicional.
Diagramas de Influencia Condicional (Conditional Influence Diagrams): Un modelo pictórico de relaciones matemáticas entre las partes del modelo. Frecuentemente identificado como una forma más sencilla de Árboles de Decisión. *Vea también Diagramas de Influencia.*
Dinámicas del Sistema (Systems Dynamics): Una rama del estudio de sistemas que usa la Retroalimentación para demostrar que la estructura determina la conducta de sistemas. A veces se usa como una herramienta de Pronosticación, y otras veces como una herramienta de Modelos de Simulación.
Discontinuidad (Discontinuity): En Administración de Riesgos, un Evento o una Consecuencia que no se puede predecir o se extrapola de acciones o eventos pasados. Nuevo de manera imprevisible.
Dispersión de Confianza (Confidence Dispersion): La medida de Incertidumbre sobre un cálculo. En la auditoría, se usa como una medida de incertidumbre acerca del control de riesgos debido al paso del tiempo entre las auditorías. Cuanto más tiempo haya pasado, los riesgos son mayores (o mayor la dispersión de confianza en la efectividad de los controles).
Diversificación de Riesgos (Diversify Risk): Una técnica de Administración de Riesgos que intenta extender el riesgo de una sola tarea o activo a múltiples tareas o activos para evitar la pérdida de todo de súbito.

Elaboración de Escenarios (Scenario Building): El ejercicio de crear Escenarios.
Elementos Predeterminados (Predetermined Elements): Relaciones causales sobre las cuales podemos contar (si esto sucede, entonces...); p .ej. cuando nieva fuerte en las Sierras significa que los ríos de California se desbordan. Hay que actuar con precaución cuando se verifica que varios eventos que parecen relacionados en realidad son "predeterminados". Usado en Elaboración de Escenarios. Vea también el opuesto, Incertidumbres Críticas.
Eliminación de Riesgos (Eliminating Risk): Un ideal poco realista parecido al Control perfecto. Vea Evitando Riesgos.
Enfoque de Exposición (Exposure Approach): El enfoque de Evaluación de Riesgos desde la perspectiva de las cuatro clases de activos (físicos, financieros, humanos, intangibles) y su tamaño, tipo, probabilidad, y ubicación.
Enfoque del Sistema (Systems Thinking): Una vista del mundo desde tres niveles: Eventos, pátrones de conducta y estructura. Es una disciplina muchas veces encontrada en Planificación Estratégica. Vea también "Metáfora de Iceberg."
Enfoque Ambiental (Environmental Approach): El enfoque de Evaluación de Riesgos desde la perspectiva del Entorno externo o de Contextos.
Enfoque Matríz (Matrix Approach): En Evaluación de Riesgos, un enfoque que combina los componentes del sistema con los riesgos, amenazas o controles con el objeto de medir y examinar las combinaciones de los dos ejes.
Enfoque Multidimensional (Multidimensional Approach): Un enfoque de Evaluación de Riesgos que aborda el Riesgo y la Oportunidad por medio de varios Horizontes de Tiempo o dimensiones como manifestaciones de la misma incertidumbre. Este enfoque se aproxima más a la Planificación Estratégica de la alta gerencia.
Entorno (Environment): Las fuerzas, condiciones y circunstancias externas que forman la fuente de los riesgos. Algunos entornos incluyen la tecnología, los clientes, mercados, proveedores, la política, lo físico, etc.
Entorno Turbulento (Turbulent Environment): Un dinámico, discontinuo, y complejo entorno caracterizado por cambios súbitos. Un término encontrado de vez en cuando en Planificación Estratégica.
Entrevista Estructurada (Structured Interview): Una técnica de encuesta que usa un cuestionario estándar administrado a cada persona en la reserva de candidatos. El uso de las mismas preguntas permite la tabulación cruzada de las respuestas. Vea también Grupo de Enfoque y Auto-Evaluación de Controles.
Equipo de Gobernancia (Governance Team): El cuadro de alta gerencia y la Junta Directiva quienes ejercen Gobierno Corporativo sobre la organización.
Escanear el Entorno (Environmental Scanning): En Planificación Estratégica, el acto de buscar en el Entorno las señales de cambio. Vea también Provocaciones.
Escenarios (Scenarios): Descripciones narrativas de conjeturas, riesgos y factores ambientales y cómo pueden afectar las operaciones. Los escenarios tratan de explorar el efecto de cambiar varios variables a la vez con análisis objetivo e interpretaciones subjetivas. Vea también Escenarios de Riesgo y Escenarios de Amenaza.

Escenarios de Amenaza (Threat Scenarios): Similar a Escenarios de Riesgo, pero el enfoque está en las Consecuencias negativas de eventos inciertos.
Escenarios de Riesgo (Risk Scenarios): Un método para identificar y clasificar los riesgos a través de la aplicación creativa de eventos probables y sus Consecuencias. Típicamente se usa una sesión de Lluvia de Ideas u otra técnica creativa para estimular "lo que pueda suceder." Vea también Escenarios de Amenaza.
Escenarios Dinámicos (Dynamic Scenarios): Elaboración de Escenarios en un Ambiente complejo y dinámico. Se piensa que el ambiente dinámico no es lineal y discontinuo.
Estimación Directa (Direct Estimation): Término cortés que significa conjetura o *estimación por experiencia.*
Estructura de Competencia Para Auditorías Internas (Competency Framework for Internal Auditing): Un estudio mundial hecho en 1998 sobre las competencias que se necesitan para tener éxito en la profesión de Auditor Interno. Este estudio reemplaza el estudio previo Fuente Comun de Conocimiento del IIA.
Estructura de Control (Control Framework): Un Modelo o categorías conocidas de sistemas de control que cubren todos los esperados controles internos de una organización. Estructuras de Control incluyen COSO, CoCo, Cadbury, etc. Vea también, Estructura de Riesgo.
Estructura de Riesgos (Risk Framework): Un Modelo de los riesgos en la organización. Típicamente las estructuras de riesgos enumeran las varias clases de riesgo y el nivel esperado de Administración de Riesgos.
Evaluación del Entorno (Environmental Assessment): Igual a Escanear el Entorno. Vea también Análisis del Entorno.
Evaluación de Riesgos (Risk Assessment / Evaluation): La identificación de riesgos, la medida de riesgos, y el proceso de clasificar los riesgos en orden de prioridad. Vea Medición de Riesgos.
Evaluación del Riesgo por Conductas (Behavioral Risk Assessment): La evaluación de los Riesgos existentes en una organización identificados a través de la examinación de la cultura, la estructura, la actitud de los empleados, y los mecanismos para aliviar el estrés.
Evaluación de Riesgos Macro (Macro Risk Assessment): La *categorización* y evaluación de Unidades de Auditoría en un plan completo de auditoría para la organización (Plan de Auditoría).
Evaluación de Riesgos Micro (Micro Risk Assessment): La categorización y evaluación de las funciones, tareas, posiciones, procesos, subsistemas, y sub-unidades de una Unidad de Auditoría para planificar la auditoría de la unidad (Programa de Auditoría)
Evento (Event): Un incidente o una situación que ocurre en un sitio concreto durante un intervalo determinado de tiempo.
Eventos de Consecuencia Alta/Probabilidad Baja (High Consequence/Low Probability Events): Eventos con consecuencias catastróficas.
Evitando Riesgos (Avoiding Risk): Una técnica de la Administración de Riesgos que trata de rehacer el diseño del plan para cambiar o reducir la colección de riesgos. No debe ser confundido con la Eliminación de Riesgos.

Exposición (Exposure): Vulnerabilidad a pérdidas, la percepción de Riesgo, o una Amenaza a un activo o un proceso que produce activos, generalmente cuantificado en dólares. Una exposición es la suma de dólares en riesgo sin considerar la probabilidad de un evento negativo. También es una medida de importancia.
Extrapolación (Extrapolation): Una medida de proceso para localizar las incógnitas midiendo datos pasados y extendiendo la linea de Tendencia. Vea también Extrapolación de Tendencia.
Extrapolación de Tendencia (Trend Extrapolation): Una técnica de Pronosticación que asume que es posible predecir el mañana si se conoce el ayer y hoy día. No está bien aceptado en Planificación Estratégica. Vea también Extrapolación.
Facilitadores (Enablers): *Fuerzas y capacidades que nos ayudan positivamente a* llegar a nuestros objetivos.
Factores de Riesgo (Risk Factors): Manifestaciones o características medibles u observables de un proceso que indican la presencia de Riesgo o tienden a aumentar la Exposición.
Filtros Cognitivos (Cognitive Filters): Creencias comunes y el Prejuicios que con la Incertidumbre, puede cambiar la percepción de la incertidumbre para generar un sentimiento de más certidumbre que en realidad existe.
Financiamiento de Riesgos (Risk Financing): Métodos aplicados para financiar las Consecuencias de Administración de Riesgos y Riesgo Residual. Ejemplos incluyen pólizas de seguro, autoseguros, fondos de amortización, etc.
Frecuencia (Frequency): Una medida de incidencia, expresada en el número de incidentes de un Evento en un plazo determinado. Vea también Probabilidad y Posibilidad.
"Frenar y Avanzar" ("Stop-and-Go"): Una técnica de muestreo estadístico usada para pruebas de auditoría más flexibles por las que se toma primero un pequeño muestreo y solo se aumenta el muestreo si es necesario basado en los resultados iniciales.
Fuente Comun de Conocimiento (Common Body of Knowledge): Una profesión como la Auditoría Interna necesita una fuente de información sobre la cual un dominio pronostica éxito en el campo. La información esencial del campo.
Futurista (Futurist): *El que dedica sus estudios a la anticipación del futuro, ya sea a* través de la Predicción o a través de Modelos y herramientas conceptuales.
Futuro Hacia Adelante (Future Forward): Una técnica inductiva de Elaboración de Escenarios donde se imagina el futuro por la examinación de pistas del presente y luego se calculan los caminos lógicos que puedan tomar. Futuro Hacia Atrás, Modelos de Simulación y Diagramas de Influencia son subconjuntos de esta técnica.
Futuro Hacia Atrás (Future Backward): Una técnica deductiva de Elaboración de Escenarios donde se imagina el futuro y el camino lógico a ese futuro. Es trabajado en dirección contraria hacia el presente. Vea también Retrocediendo de lo Perfecto y Futuro Hacia Adelante.
GARP: Los Principios de Riesgo Generalmente Aceptados para instituciones de servicios financieros llamados Coopers & Lybrand.
Generadores (Triggers): En planificación, estas son decisiones o eventos externos que crean la necesidad (o la percepción) que hay que planificar un proyecto.

Gerente Principal de Riesgos (Chief Risk Manager): El administrador o ejecutivo quién reporta a la alta gerencia la exposición de riesgos de la organización y las acciones alternativas de la gerencia necesitadas para aliviarlos.
Gobierno Corporativo (Corporate Governance): La reacción estratégica de la organización a los riesgos. Generalmente incluye varias actividades y funciones, como Dirección, Seguridad, Administración, Estructura, etc. Ejercicio del poder es efectuado por medio del Equipo de Gobernancia constituido por la alta gerencia y la Junta Directiva.
Gráfica de Flujo (Flow Chart): Una representación gráfica de las principales tareas y actividades de una función y cómo están enlazados. En la Identificación de Riesgos y *Escenarios de Riesgo es útil para determinar los puntos de máxima Exposición.*
Grupo de Enfoque (Focus Group): Una encuesta usada como herramienta investigativa utilizando un grupo pequeño de gente quien está guiado por el proceso de la Entrevìsta Estructurada con propósito de aprender sus opiniones individuales y de grupo. Se usa en Evaluación de Riesgos y proyectos de Auto-Evaluación de Controles para identificar las opiniones sobre cuestiones de Administración de Riesgos.
Heurística (Heuristic): Regla general, un buen estimador, el valor aceptado generalmente.
Horizontes de Tiempo (Time Horizons): Horizontes de planificación usados en Escenarios de Riesgo y Planificación Estratégica para representar distintos periodos de tiempo: Corto Plazo, Mediano Plazo y Largo Plazo.
Identificación de Riesgos (Risk Identification): El método de identificar y clasificar el riesgo. Vea Clasificación de Riesgos.
Impulsores (Driving Forces): En Planificación Estratégica y Elaboración de Escenarios, éstos son presiones externas clave que formarán el futuro de la organización.
***Incertidumbre (Uncertainty):** Una condición donde el resultado sólo puede ser* estimado.
Incertidumbres Críticas (Critical Uncertainties): En Elaboración de Escenarios, lo desconocido imprescindible del argumento. El opuesto de predeterminados.
***Incertidumbres Estructurales (Structural Uncertainties):** La posibilidad de que* occurra un evento único que impida proporcionarnos un indicador de Posibilidad. La posibilidad se presenta por medio de razonamiento causa y efecto, pero no tenemos el medio para estimar su probabilidad.
Indicadores (Triggers): En planificación, estas son decisiones o eventos externos que crean la necesidad (o la percepción) que hay que planificar un proyecto.
Inteligencia Artificial (Artificial Intelligence): Software que imita la capacidad de aprender de un ser humano. Para aplicaciones de riesgo, vea Redes Neurales.
Intuitivo (Intuitive): Desarrollando un patrón o un todo de las partes.
Juego de Suma Cero (Zero-Sum Game): En Modelos o Escenarios, un juego de "suma cero" describe una situación en la cuál para ganar uno u otro tiene que perder.
Largo Plazo (Long-Term): La planificación o Horizonte de Tiempo que trata con eventos más allá del Corto Plazo y Mediano Plazo, típicamente entre dos y veinte años, aunque con más frecuencia entre dos a cinco o siete años.

Limitante Administrativa (Management Framing): Un problema disfuncional en Escenarios en el cual los gerentes ven las cuestiones desde una perspectiva estrecha.
LRAM: La Metodología de Análisis de Riesgos Livermore creada por Charles Cresson Wood usando tanto el fracaso de controles como el Análisis de Vulnerabilidad para generar los Escenarios de Riesgo.
Lluvia de Ideas (Brainstorming): Un proceso de Planificación Estratégica y una herramienta de Evaluación de Riesgos que intenta abrir la imaginación de un grupo por un proceso estructurado que estimula una producción de ideas.
Mapa del Futuro (Future Mapping): Usando el proceso de Visión del Estado Final y evidencia actual para desarrollar un mapa lógico (una secuencia de pasos, decisiones y Eventos) desde la evidencia hasta el estado final.
Matriz de Amenaza (Threat Matrix): Una matriz de Amenazas y generalmente componentes o elementos del Sistema (tareas, funciones, hardware, procesos, software, gente, etc.) que se usa para medir y estimar las influencias o los Controles Internos de varias combinaciones. Vea también Matriz de Riesgo.
Matriz de Riesgos (Risk Matrix): Una combinación de Medición de Riesgos y Prioritización de Riesgos que consiste en el uso de riesgos en el eje horizontal y componentes de sistema o pasos de auditoría en el eje izquierdo. Ambos ejes se ponen en grupos en la esquina izquierda (Alto), creando una matriz con cuadrantes de grupos Alto, Medio y Bajo de componentes y riesgos.
Matriz de Riesgos y Controles (Risk and Control Matrix): Una herramienta usada para dar orden a los Controles que sean probados por su Clasificación de Riesgo. Vea el método alternativo, Matriz de Riesgos.
Medición de Riesgos (Risk Measurement): La evaluación de la gravedad de riesgos.
Mediano Plazo (Mid Term): La planificación o el Horizonte de Tiempo que trata de los eventos entre Corto Plazo y Largo Plazo, típicamente más allá que el año actual por uno o dos años más.
"Metáfora de Iceberg" ("Iceberg Metaphor"): Ve el mundo en tres partes: una manifestación visible de Eventos, un segundo nivel de Tendencias y patrones, y un tercer nivel de Impulsores, lógica y estructura. Del libro **La Quinta Disciplina** de Peter Senge.
Metas (Goals): Objetivos de planes. La diferencia entre meta y Objetivo es que las metas se trazan a Largo Plazo.
Mitigación de Riesgos (Risk Mitigation): Vea Administración de Riesgos.
Modelo (Model): Un método para expresar relaciones cuando resulta impráctico medir el mundo actual .
Modelo de Riesgo (Risk Model): Una descripción matemática, gráfica, o descripción verbal de riesgo para un entorno específico y una colección de actividades dentro del entorno. Es útil en Evaluación de Riesgos por la consistencia, capacitación y documentación sobre la evaluación.
Modelo de Riesgo de Fallas en el Processo (Process Failure Risk Model): Un Modelo de Riesgo especializado que usa múltiples Escenarios de Riesgo y evaluaciones de Exposición y circuitos de retroalimentación para actualizar continuamente los escenarios y exposiciones a cambios en el proceso.

Modelo Descriptivo (Descriptive Model): Un modelo de cómo funcionan las cosas, pero no es necesariamente una regla ni un estándar. En contraste, vea Modelo Normativo.
Modelo Normativo (Normative Model): Un modelo de cómo deben funcionar las cosas. Una norma de desempeño.
Modelos de Simulación (Simulation Models): Una forma de Elaboración de Escenarios que trata de simular interacciones y estímulo a través de ecuaciones matemáticas como medio para pronosticar cómo será el futuro. Vea Futuro Hacia Adelante.
Norma (Standard): Una serie de Criterios o requisitos que son aceptados generalmente.
Objetivo de la Auditoría (Audit Objective): El propósito de la auditoría, o lo que se piensa lograr con la auditoría.
Objetivos (Objectives): Los objetos de un plan a Corto Plazo. Vea Metas.
Obstáculos (Obstacles): Factores negativos que nos impidan alcanzar nuestros objetivos.
Oportunidad (Opportunity): Un evento incierto con una Consecuencia positiva probable. Relacionado a Riesgo.
Organización Que Aprende (Learning Organization): Una organización que en forma activa intenta observar el cambio del entorno para adaptarlo y aprender del cambio. Tales organizaciones frecuentemente incorporan Elaboración de Escenarios en sus actividades de planificación.
Paradigma (Paradigm): Una opinión de cómo funcionan las cosas en el mundo. En Escenarios de Riesgo o Escenarios de Amenaza, los paradigmas son usados para establecer las reglas básicas de cómo funciona el mundo de manera que las soluciones se establezcan dentro de los límites.
Peligros (Hazards): Actividades, tareas, operaciones, herramientas o agentes que consisten en fuentes significativas de riesgo personal físico y posibles Consecuencias negativas. Ejemplos: Manejar un vehículo de tracción en terreno escabroso, motosierras, manipular venenos, deshacerse de solventes.
Peligros (Perils): Eventos catastróficos inesperados que tienen Consecuencias significativas.
Pérdida Esperada o Enfoque de Valor Esperado (Expected Loss or Expected Value Approach): La evaluación de Riesgos basada en la variación del dólar que resulta como Consecuencia de Eventos riesgosos.
Plan Anual de Auditoría (Annual Audit Plan): El plan de todas las auditorías que se deben de llevar a cabo en el año fiscal. Vea Plan de Auditoría.
Plan Anual de Auditoría (Audit Schedule): El plan anual de las auditorías.
Plan de Auditoría (Audit Plan): Usado de manera intercambiable con el Plan Anual de Auditoría (plan anual) o el Programa de Auditoría (plan de auditoría individual). Hay que buscar las pistas contextuales para diferenciarlos.
Planificación de Escenarios (Scenario Planning): El uso de Escenarios en Planificación Estratégica.

Planificación Estratégica (Strategic Planning): Planes a largo plazo basados en los objetivos totales de la empresa. Los planes estratégicos típicamente son para varios años y pueden extenderse hasta 5 o 10 años usando Escenarios u otros métodos de planificación que identifican conjeturas, Riesgos, y factores de Ambiente.
Planificación Para Contingencias (Contingency Planning): Examina las Incertidumbres individualmente y crea respuestas para cada incertidumbre. También puede consistir en la suma total de todos los planes que tratan con distintas incertidumbres. Si se define como el meta-plan, ciertos Eventos puedan provocar la ejecución de una parte de la ramificación o de un subconjunto del plan de contingencias.
Posibilidad (Likelihood): La *Probabilidad o chance que ocurra el Evento.*
Prejuicios (Bias): En Modelos, la tendencia de favorecer a un grupo de resultados sin hacer caso de la variabilidad de la información que está siendo recibida. Una distorsión (intencional o no intencional) debido a un punto de vista, una creencia, o Filtros Cognitivos.
Probabilidad (Probability): Una medida (expresada en un porcentaje o una razón) para estimar la posibilidad de que ocurra un incidente. Vea Posibilidad.
Probabilidad Aleatoria (Aleatoric Probability): Relacionado al resultado incierto de un evento (por ejemplo el tiro de un dado) en una distribución generalmente previsible; también llamado posibilidad.
Probabilidad Epistémica (Epistemic Probability): Relacionado a la creencia en una proposición o eventos inciertos (como terremotos) o a un problema que necesita una decisión.
Proceso Analítico Jerárquico [PAJ] (Analytic Hierarchy Process [AHP]): Un proceso matemático involucrando matrices que producen un orden a través de la Selección Comparativa de Opuestas Alternativas y distintos Criterios.
Programa de Auditoría (Audit Program): El plan de auditoría de un particular tema, sujeto, proyecto, departamento, proceso o función. Vea Unidad de Auditoría.
Programas de Auditoría "Enlatados" ("Canned" Audit Programs): Programas de Auditoría que han sidos estandarizados para usarlos varias veces. Son distintos a programas de auditoría que están hechos de encargo para usarlos una sola vez.
Pronóstico (Forecasting): *Predecir eventos o resultados futuros, frecuentemente* usando herramientas matemáticas complejas tales como modelos Box-Jenkins. No confundir con Elaboración de Escenarios.
Provocaciones de Temprana Advertencia (Early Warning Triggers): Usado en estrategias contingentes para señalar cuál de las ramas de los planes contingentes se debe adoptar. Vea también Cable Trampas y Provocaciones.
Puntos Medios (Trade-offs): Se refiere a las alternativas de una decisión y sus costos y beneficios relevantes.
Reacción a Riesgos (Risk Response): Las decisiones y acciones de la gerencia cuando se revelan los riesgos. Vea también Administración de Riesgos.
Redes Neurales (Neural Networks): Modelos de simulación por computador con aspectos de Inteligencia Artificial. Actualmente se están efectuando experimentos para determinar si tales modelos podrían mejorar o reemplazar evaluadores de riesgo humano.

Re-desempeño (Reperformance): La forma más antigua de Auditoría Interna, por la cual se recuenta la observación de las operaciones --- en otras palabras se rehace la tarea.
Reducción de Riesgos (Risk Reduction): La applicación de los principios de Administración de Riesgos para reducir la Posibilidad o las Consecuencias de un Evento, o ambas.
Reglas de Interacción (Rules of Interaction): En Elaboración de Escenarios, éstas son las reglas implícitas que manejan las inferencias claves y cómo van a interactuar.
Retención de Riesgos (Risk Retention): La retención intencional (o no intencional) de la responsibilidad por pérdida o Financiamiento de Riesgos dentro de la *organización.*
Retroalimentación (Feedback): En sistemas y modelos, el flujo de información sobre la condición actual de variables desde su origen o hasta la fuente con el propósito de observar los objetivos establecidos.
Retrocediendo de lo Perfecto (Backward from Perfect): Una técnica de Elaboración de Escenarios en la cual primero se imagina un futuro perfecto y luego se identifica cómo llegaron a este futuro. Vea también Futuro Hacia Atrás y Futuro Hacia Adelante.
Riesgo (Risk): Una medida de Incertidumbre. En el proceso comercial, la incertidumbre trata de lograr objetivos organizacionales. Puede consistir en Consecuencias positivas o negativas, aunque la mayoría de los riesgos positivos se llaman Oportunidades y los riesgos negativos se llaman riesgos.
Riesgo Absoluto (Absolute Risk): El máximo riesgo sin los efectos mitigantes de Controles Internos. Vea Riesgo Administrado.
Riesgo de Cartera (Portfolio Risk): En Análisis de Riesgos, es el riesgo de que una combinación de proyectos, activos, unidades o lo que exista en la cartera no alcanzará para lograr los objetivos totales de la cartera debido a una mala balanza de riesgos dentro de la cartera.
Riesgo de Detección (Detection Risk): Un concepto de contabilidad pública. Vea AICPA SAS No. 47 (1983). La probabilidad que se sacará una conclusión incorrecta de auditoría de los resultados de un examen.
Riesgo de Funciones (Functional Risk): *Bajo el viejo/actual Paradigma de Riesgos*, la mayor parte de los auditores internos enfocan sus auditorías en funciones en vez de procesos del negicio. Vea también Riesgo de Proceso.
Riesgo de Planificación (Planning Risk): El riesgo de que el proceso de planificación es defectuoso. En Evaluación de Riesgos, es el riesgo de que el proceso de evaluación es inadecuado o incorrectamente implementado.
Riesgo de Proceso (Process Risk): El riesgo en un proceso comercial (a diferencia de Riesgo de Funciones). La nueva paradigma de riesgo para auditores enfoca más en procesos comerciales y riesgos de proceso.
Riesgo Específico (Specific Risk): El tipo de riesgo que se encuentra en actividades específicas. El nivel de riesgo varía de actividad en actividad, aunque todas las actividades puedan tenerlo.

Riesgo Estratégico/ Curva de Oportunidad (Strategic Risk/Opportunity Curve): Un modelo desarrollado por David McNamee para expresar la naturaleza cambiante de las Consecuencias de Riesgo negativo y la Oportunidad positiva a través de múltiples Horizontes de Tiempo.
Riesgo Omnipresente (Pervasive Risk): El tipo de riesgo que se encuentra en todo el entorno. El enfoque es el entorno de las actividades del negocio en vez de la actividad en sí. Está relacionado a la "Cultura de la Empresa".
Riesgo Residual (Residual Risk): El Riesgo que queda cuando las técnicas de Administración de Riesgos han sidos aplicados.
Riesgos Administrados (Managed Risk): Los riesgos y consecuencias después de *la aplicación de Control Interno (vea también Riesgo Absoluto).*
Riesgos de Control (Control Risk): La tendencia del Sistema de Control Interno de perder eficacia con el paso del tiempo y exponer a, o no impedir la exposición de, los activos bajo control.
Riesgos Globales (Global Risks): Riesgos externos o del Entorno que están afuera de las líneas divisoras de riesgo de la política inmediata o del gobierno regulador.
Riesgos Inherentes (Inherent Risk): Los riesgos que se encuentran en el ambiente y en las actividades humanas que son parte de la existencia.
Robusto (Robust): Relacionado a Modelos de Riesgo, la robustez es una medida de la fuerza de un modelo en el manejo de datos y errores de datos sin una falla del modelo.
Selección Comparativa de Opuestas Alternativas (Pair-Wise Comparison): La asignación de valores prefenciales a Factores de Riesgo y / o componentes de sistema usando una técnica de voto que compara todos los pares posibles. Vea también Asignación Directa y Proceso Analítico Jerárquico (PAJ).
SIAS No. 9: "Evaluación de Riesgos." Una referencia de macroevaluación de Riesgos para guiar el trabajo de la profesión de auditoría interna.
SISAS No. 5: *"Evaluación de Riesgos." Una referencia para la profesión de auditoría* interna de sistemas de información sobre la Evaluación de Riesgos y guía el trabajo.
Sistema (System): Dos o más elementos interrelacionados de cualquier clase que tienen un propósito común.
Sistema de Control Interno (System of Internal Control): *Vea Control Interno.*
Sistemas de Enjambre (Swarm Systems): Una colección de muchos miembros autónomos quienes están muy conectados a si mismos pero no al centro. Una colmena de abejas es un ejemplo.
Suposición (Assumption): Una creencia o una construcción lógica en la cual se base un plan o una decisión. Muchas veces las suposiciones son implícitas (no dichas). Escenarios estratégicos tratan de hacer explícitas (reveladas) todas las suposiciones.
SWAG: Una conjetura extravagante, pero generalmente acertada.
SWAT: Técnica de Análisis de Fuerzas/Debilidades. Usado en Auto-Evaluación de Controles y Escenarios de Riesgo relacionados a las fuerzas y debilidades de Controles Internos.
SWOT: Fuerzas/Debilidades/Oportunidades/Amenazas. Usado en Planificación Estratégica y Escenarios de Riesgo. Vea también SWAT.

Tablas Bipolares (Bipolar Tables): Un formato de Tablas Normativas que utiliza descripciones de los dos extremos (Alto y Bajo) omitiendo la descripción de 'Medio'. Esta tabla da al proceso de medida de riesgo una escala de valores (1 a 5, 1 a 9, etc.) sin difinir el centro. Es más simple crear una tabla bipolar y ahorra el tiempo.
Tablas de Decisión (Decision Tables): Una matriz de Compensaciones de varias alternativas.
Tablas de Evaluación de Controles (Controls Evaluation Tables): Una técnica de Análisis de Riesgos que se concentra en los puntos fuertes de Controles Internos para mitigar los riesgos. El análysis se efectua usando una tabla de representación de los riesgos versus los controles y una medida de las fuerzas de control.
Tablas Normativas (Normative Tables): *Una técnica de Medición de Riesgos que* describe cómo ciertas características se ven en distintos niveles de riesgo (Alto, Medio, Bajo). Vea también Tablas Bipolares.
Técnica Delfos (Delphi Technique): Una Técnica Colaborativa para llegar a un consenso que consiste de un análisis independiente y el voto de expertos a quienes se les han dado una Retroalimentación perfecta sobre cómo su opinión compara con los demás del grupo. Usado en ambos Elaboración de Escenarios y Evaluación de Riesgos.
Técnicas Colaborativas (Collaborative Techniques): En la evaluación de riesgos, una variedad de métodos usados para incorporar evaluaciones múltiples, estimaciones y opiniones sobre los riesgos en un consenso único. Vea Auditoría Co-Activa y Técnica Delfos.
Tendencia (Trend): La dirección y el camino de una serie de puntos de información, generalmente considerado como una tendencia positiva o una tendencia negativa, aunque las tendencias no tienen que ser lineales. Vea también Extrapolación.
Teoría de Caos (Chaos Theory): Una teoría de sistemas que incluye un número de partes específicas, por ejemplo "el atractivo raro" (un patrón ordenado bajo condiciones que parecen desordenadas), "la dependencia en condiciones iniciales" (el así llamado efecto mariposa --- que dice que el clima de Utah puede ser afectado por el batir de las alas de una mariposa en Brazil), fractales, el algoritmo genético, y la entropía.
Teoría de Complejidad (Complexity Theory): *Una teoría de Sistemas sin equilibrio* relacionado a la Teoría del Caos.
Teoría de Opciones (Option Theory): La valuación de carteras de valores usando los precios de opciones de las inversiones como una medida de riesgo. Vea también Valores a Riesgo.
Transferencia de Riesgos (Transfer Risk): Una técnica de Administración de Riesgos usada para eliminar el riesgo de un lugar a otro o de un grupo a otro. Los seguros transfieren el riesgo de pérdida financiera del asegurado al asegurador. Las transferencias parciales son conocidas como Compartiendo Riesgos. **(Risk Transfer):** Dando la responsabilidad o la carga de Financiamiento de Riesgos a otro grupo.
Tratamiento de Riesgos (Risk Treatment): Otro término por Administración de Riesgos.
Unidad de Auditoría (Auditable Unit): Cualquier tema, sujeto, proyecto, departamento, proceso o función que necesita una auditoría.

Universo de Auditoría (Audit Universe): La suma de todas las Unidades de Auditoría para una organización.
Utilidad (Utility): Una medida de utilidad. Usada en teoría de decisiones cuando la compensación monetaria es insuficiente para explicar el resultado de la elección.
Valor en Riesgo (Value-At-Risk [VAR]): Frecuentemente abreviada VAR, es una clase de Modelos usada por instituciones financieras para medir los riesgos en posiciones de carteras derivadas y complejas.
VAR: Vea Valor en Riesgo.
Variable: Una cantidad o atributo de un Modelo que puede asumir valores distintos en momentos diferentes.
Variación (Variation): *La cantidad de cambio o la diferencia de los resultados* esperados.
Verosímil (Plausibile): Creible, basado en alguna extensión lógica de datos conocidos.
Visión del Estado Final (End State Vision): Una herramienta colaborativa de planificación que nos enseña el estado final y dónde estamos a través de Lluvia de Ideas, tratando de identificar los Obstáculos y las facilitadores del sistema e identificando cómo podríamos reducir los obstáculos y aumentar la fuerza de las facilitadores para llegar a la visión.
Volatilidad (Volatility): Cambio rápido e inesperado

BIBLIOGRAFÍA

- Beard, R.E., Pentikäinen, T. y Personen, E. (1982).
  Risk Theory (3ª ed.).
  Chapman and Hall.

- Bowers,N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C. y otros(1990).
  Actuarial Mathematics.
  Society of Actuaries. Itaca. Illinois.

- *Bühlmann, H. (1996).*
  Mathematical Methods in Risk Theory (2ª ed.).
  Springer-Verlag.

- Gerber, H. U. (1979).
  An Introduction to Mathematical Risk Theory.
  S.S. Huebner Foundation for Insurance Education. University of Pennsylvania.

- Hasset, M.J. y Stewart, D.G. (1999).
  Probability for Risk Management.
  Actex Publications.

- Hossack, I. B., Pollard, J.H. y Zehnwirth, B. (1983).
  Introductory statistics with applications in general insurance.
  Cambridge University Press.

- Klugman, S.A., Panjer, H.H. Willmot, G.E. (1998).
  Loss Models, from data to decisions.
  Wiley.

- *Latorre Llorens, L. (1992).*
  Teoría del Riesgo y sus Aplicaciones a la Empresa Aseguradora.
  Madrid: Mapfre.

- Mateos-Aparicio Morales, G. (1995).
  Métodos Estadísticos para Actuarios.
  Madrid: Editorial Complutense.

- Ross S. (1988).
  A First Course in Probability.
  MacMillan.

- Ross S. (1996).
  Stochastic Processes.
  Wiley.

- Life Insurance Theory: Actuarial Perspectives.
  Kluwer Academic Publishers.

- Elandt-Johnson, R. C. Y Johnson, N. L. (1999).
  Survival Models and Data Analysis.
  Wiley.

- Estadística para Actuarios.
  Madrid: Mapfre.
  Vegas Pérez, A. (1981).

- *Daykin*, C. D. et al.
  Practical risk theory for actuaries.
  Great Britain, Chapman and Hall, 1993.

- Beard, R. E.
  Risk Theory. The stochastic basis of insurance
  . Great Britain, Chapman and Hall, 3rd edition, 1984..

- INSURANCE RISK MODELS
  Panjer H.H., Willmot G.E.
  The Society of Actuaries