4

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL TEOREMA ESPECTRAL".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

J O S E   C H A V E Z   R A M I R E Z

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIO[illegible]

DIRECTOR DE TESIS: DR. RA[illegible] DEL RIO CASTILLO

MEXICO, D. F.   FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR   2002.

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "El Teorema Espectral"

realizado por JOSE CHAVEZ RAMIREZ

con número de cuenta 08852784-2, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. RAFAEL DEL RIO CASTILLO	
Propietario	DR. RICARDO BERLANGA ZUBIAGA	
Propietario	DR. CARLOS VILLEGAS BLAS	
Suplente	DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ	
Suplente	M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Coordinador de la Carrera de Matemáticas

A mi Madre:

Francisca Ramírez Casillas
A quien debo el estar aquí

A Jesús por apoyarme siempre

A Olga, José y Cynthia por todo su apoyo

A la Memoria de mi Abuela Concepción Zendejas de quien siempre tuve apoyo

A la Memoria de mis Padres genético y de crianza:
Benito Chávez Zendejas y José Ramírez Barajas

A mi Tío José y Rogelio que siempre cuento con ellos, a pesar de no estar en México

A la Memoria de un Amigo, donde se encuentre: Capitán Lorenzo Cárdenas Barajas

A toda mi familia y amigos en:

Ex-hacienda de Quiringuicharo, Estado de Michoacán.

A g r a d e c i m i e n t o s

Quiero agradecer de manera muy especial a mi director de tesis, al Dr. Rafael del Río Castillo por todo su apoyo ilimitado, y sobre todo por toda su paciencia para que la realización de este trabajo fuera posible, también por su gran personalidad para que el trabajo se realizara en completa camaradería.

A mis sinodales por las aclaraciones y sugerencias para el mejoramiento del trabajo:

Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga

Dr. Carlos Villegas Blas

Dr. Fernando Brambila Paz

M. en C. Alejandro Bravo Mojíca

Además, de manera especial al Dr. Ricardo Berlanga, por todo el tiempo dedicado a la revisión, discusión de ésta tesis y por todas sus sugerencias.

Al Dr. Sebastián López Romero, por todo su apoyo y facilitarme su PC, permitirme usar su impresora, pero sobre todo por ser mi amigo.

A quienes debo el préstamo de libros en el IIMAS, Juanita y Rocío, gracias por todo su excelente servicio.

A Juana Coyotzi y Ana Maria, secretarias del Departamento de Métodos Matemáticos y Numéricos del IIMAS, por todas sus finas atenciones, tanto en la impresión y enseñanzas en el paquete usado para la escritura, y sobre todo por su gran calidad humana, a Roberto Pérez por toda su disposición en cualquier apoyo del trabajo en el IIM, al M. en C. Apolinar Calderón por todo su apoyo en sugerencias de cómo usar el SWP.

A mis compañeros que recuerdo por mi paso por la Facultad de Ciencias, Roberto, José Antonio, Josefina, Martín, Sara, Jacobo, Gamaliel, gracias por todo su tiempo.

Gracias a la Facultad de Ciencias de la UNAM y a todos los profesores con quien tuve la oportunidad de aprender un poquito de todos sus conocimientos.

GRACIAS A TODOS

Página

Contenido

Introducción

Muchos de los ejemplos físicos usados para ilustrar la aplicación de la matemática pertenecen a campos de la Teoría Electromagnética, Mecánica Cuántica., etc, en estos para su representación se usa herramienta matemática como: la Teoría de las Ecuaciones Diferenciales Parciales y Ordinarias, Ecuaciones Integrales y el Cálculo Variacional.
En este trabajo se revisan algunos fundamentos que sirven para el estudio de la Teoría Cuántica de Dispersión y se enuncian resultados referentes al Teorema Espectral, que es la parte medular del trabajo. El Análisis Espectral es de suma importancia en la Teoría de Dispersión, la Matemática sobre Teoría de Dispersión usa métodos de este Análisis. También, usa métodos e ideas en aplicaciones a la Teoría Cuántica y Dispersión Cuántica. La influencia de la Matemática sobre la Física es muy importante, ya que gracias a los fundamentos matemáticos se han logrado entender muchos fenómenos físicos, por ejemplo, la Teoría de Grupos es muy importante para entender fenómenos referentes a la Física de Partículas.

Desde 1926 las fronteras de la Física han sido ampliadas, particularmente con la introducción de la Mecánica Cuántica y otras áreas todavía abiertas, de la Teoría Cuántica como son: Física Atómica, Física Nuclear, Física del Estado Sólido y la Física de las Partículas Elementales. Es conveniente señalar también que otra disciplina matemática para el estudio de estas ramas de la Física es el Análisis Funcional, aunque la Teoría de Grupos y la Variable Compleja son también herramientas muy importantes para su completo entendimiento. La Física-Matemática ha sido tradicionalmente concerniente con la Matemática de la Física Clásica: Mecánica, Dinámica de Fluidos, Acústica, Teoría del Potencial y Óptica. Aquí, vemos algunos resultados que son medulares en la Teoría de Dispersión como lo es el Teorema Espectral.

Se introducen también conceptos de Algebra Lineal como : función, dependencia lineal, independencia lineal, base etc., necesarios para entender este teorema, luego se enuncia el Teorema Espectral en dimensión finita con su demostración, después se enuncia el Teorema Espectral en dimensión infinita y finalmente se prueban algunos teoremas importantes para la Teoría Espectral en dimensión infinita y se observa que este tipo de herramienta matemática es muy importante para la Física Matemática en especial para la Mecánica Cuántica, la cual necesita de todo este formalismo matemático. Además, se ve que dicho formalismo ayuda a representar fenómenos físicos que son modelados mediante ecuaciones diferenciales e integrales. Algunos modelos de este tipo son por ejemplo la ecuación de onda, la ecuación del calor y la ecuación de Schrödinger.

CAPITULO 1

1-A Grupos, Campos y Espacios Vectoriales

Un conjunto no vacío S se llama **grupo** si se satisfecen las siguientes condiciones:

1. Hay definida una operación binaria que a cada par de elementos a, $b \in S$ le asocia un tercer elemento de S,
usualmente llamado el producto de a y b y denotado por $a \cdot b$ o ab.
2. Para elementos cualesquiera $a,b,c \in S$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
3. Existe un elemento neutro (generalmente denotado por 1) $1 \in S$; con la propiedad,

$$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a \; \forall a \in S$$

4. Cada elemento $a \in S$ tiene inverso en S, i,e, existe un elemento $b \in S$ denotado por a^{-1} tal que:

$$a \cdot b = 1 = b \cdot a.$$

Observación. Las condiciones 3 y 4 pueden ser sustituidas por la siguiente condición:
5. $\forall a, b \in S$, *las ecuaciones* $ax = b$ *y* $xa = b$ tienen solución, $x \in S$
Prueba
Supongamos que 3 y 4 se satisfacen $\Rightarrow x = a^{-1}b$ es solución de $ax = b$ y $x = ba^{-1}$es solución de $xa = b$
Ahora supongamos 5 (P.D. $ax_0 = a$ y $x_0 a = a \; \forall a \in S$)
Sea $c \in S$ y sea x_0 la solución (que se sabe que existe por 5) de $x_0 c = c$ y $cx_0 = c$
Sea $a \in S$ arbitraria. Sea x la solución de $cx = a$ y de $xc = a \Rightarrow x_0 a = (x_0 c)x = cx = a$
por tanto $x_0 a = a$ y además $xc = a \Rightarrow x(cx_0) = ax_0 = a = xc = ax_0$.
$a = ax_0$ por tanto existe el neutro que denotaremos por e y por tanto 3. Por la existencia del neutro, se sigue inmediatamente de 5, que $ax = e$ tiene solución que denotamos por $x = a^{-1}$ y analogamente $xa = e$.
Un **grupo conmutativo** o abeliano es un grupo tal que $a \cdot b = b \cdot a \; \forall a, b \in S$.
Diremos que K es un **campo** si satisface las siguientes condiciones:
K es un conjunto no vacío y si existen operaciones binarias
a) $+ : K \times K \longrightarrow K$
b) $\cdot : K \times K \longrightarrow K$
tales que a cualquier pareja de elementos de K se les asocia un elemento de K de forma que: $(K,+)$ y $(K - \{0\}, \cdot)$ son grupos conmutativos y además $a \cdot (b + c) = ab + ac$, $(b + c) \cdot a = ba + ca$ y se define $a \cdot 0 = 0 \cdot a \; \forall a \in K$.

Sea un **campo K**, cuyos elementos llamaremos escalares y sea V un grupo aditivo abeliano. Si existe una operación de multiplicación entre los escalares y los elementos de V de manera que se satisface:

a) Si c es un escalar y U, V son vectores, entonces $c(U+V) = cU + cV$

b) Si a y b son escalares, luego $(a+b)v = av + bv$ $\forall v \in V$

c) Si a y b son escalares, luego $(ab)v = a(bv)$ $\forall v \in V$

d) $\forall$ elemento $u \in V$ se tiene $1 \cdot u = u$

e) Si c es un escalar, entonces $c(u+v) = cu + cv$

f) $\forall$ $u \in V$ se tiene que $1 \cdot u = u$, donde u es la unidad en K, entonces decimos que V es un **espacio vectorial** sobre el **campo K.** A los elementos de V les llamamos vectores.

1-B Subespacio Vectorial

A los elementos de un espacio vectorial se les llama vectores.

Sea V un espacio vectorial, y sea W un subconjunto de V. Decimos que W es un **subespacio vectorial** si W satisface las siguientes condiciones:

1. Si v y $w \in W$, su suma $v + w \in W$
2. Si $v \in W$ y c es un elemento del campo, entonces $cv \in W$

Notese que, C^n es un espacio vectorial sobre C, donde $C^n = \{(z_1, ..., z_n)/z_i \in C \ , i = 1, ...n\}$ y C son los números complejos. Analogamente $R^n = \{(x_1, ...x_n)/x_i \in R, i = 1, .., n\}$ y $Q^n = \{(p_1, ..p_n)/p_i \in Q, i = 1, .., n\}$ son espacios vectoriales sobre R (reales) y Q (racionales) respectivamente.

Sin embargo nótese que R^n no es espacio vectorial sobre C, ya que si $z \in Z$ $z(x_1, ..., x_n) = (zx_1, ..., zx_n) \notin R^n$. Más adelante se habla de productos cartesianos más generales. Así, al trabajar con espacios vectoriales siempre se especifíca el campo sobre el cual se considera el espacio vectorial. Cuando se escribe K^n se entiende que se le considera como un espacio vectorial sobre K. Sea V un espacio vectorial arbitrario y sean $v_1, ..., v_n$ elementos de V. Sean x_1,...,x_n elementos del campo. Una **combinación lineal** de v_1,...,v_n será una expresión del tipo:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + ... + x_n v_n$$

El conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1,...,v_n es un subespacio de V, que denotamos por W.

En este caso, el subespacio W se conoce como el subespacio generado por $v_1, ..., v_n$.

Si $W = V$, i,e, si todo elemento de V es una combinación lineal de $v_1, ..., v_n$, entonces, decimos que v_1,...,v_n genera a V.

Ejemplo 1. En R^2, si $A_1 = (1, 1), A_2 = (2, -1)$, el vector $C = (-4, 5)$ es **combinación lineal** de A_1 y A_2 pues $C = 2A_1 + (-3)A_2$.

1-C Base y Dimensión

Sea V un espacio vectorial sobre K y sean $v_1,...v_n$ elementos de V. Se dice que $v_1,...v_n$ son **linealmente dependientes** sobre K si existen elementos $a_1,...,a_n$ en K no todos iguales a 0, tales que

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$$

$v_1,...,v_n$ son linealmente independientes, si no son linealmente dependientes, i,e, se satisface la siguiente condición: Siempre que $a_1,...,a_n$ sean elementos del campo se tiene que:

$$(a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0) \Longrightarrow a_i = 0 \ \forall i = 1,...n$$

Si los elementos $v_1,...,v_n$ de V generan a V y además son linealmente independientes, entonces $\{v_1,...,v_n\}$ es una **base** de V.

Dimensión de un espacio vectorial.

En esta sección la parte principal es que cualesquiera dos bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos. Para la prueba de esta afirmación se requiere del siguiente resultado.

Ejemplo 2. Si $E_1 = (1,0)$ y $E_2 = (0,1)$, $\{E_1, E_2\}$ es una **base** de R^2 pues sabemos ya que E_1, E_2 forman un conjunto **linealmente independiente** y que **genera a** R^2.

Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K. Sea $\{v_1,..,v_m\}$ una base de V. Sean $w_1,...,w_n$ elementos de V y supóngase que $n > m$. Entonces $w_1,...w_n$ son linealmente dependientes.

Prueba. Supóngase que $w_1,...w_n$ son linealmente independientes. Puesto que $\{v_1,...,v_m\}$ es una base, existen elementos $a_1,...,a_m \in K$ tales que

$$w_1 = a_1v_1 + ... + a_mv_m$$

Por hipótesis, sabemos que $w_1 \neq 0$ y, por tanto, algún $a_i \neq 0$. Despues de renumerar $v_1,...,v_m$, si es necesario, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 \neq 0$. Entonces, se puede despejar v_1, con lo que se obtiene:

$$a_1v_1 = w_1 - a_2v_2 - ... - a_mv_m,$$

$$v_1 = a_1^{-1}w_1 - ... - a_1^{-1}a_mv_m$$

El subespacio de V generado por $w_1,v_2,...,v_m$ contiene a v_1 y, por tanto, debe contener todos los elementos de V, ya que $v_1,...,v_m$ generan a V. La idea consiste ahora en continuar el proceso paso a paso y en reemplazar sucesivamente a $v_2, v_3, \ldots$ por $w_2, w_3, \ldots$ hasta que se agoten todos los elementos $v_1, \ldots, v_m$ y así $w_1, \ldots, w_m$ genera a V. Supóngase ahora por inducción que $\exists$ un entero r con $1 \leq r < m$ que , después de una renumeración adecuada de $v_1, .., v_m$, los elementos $w_1, \ldots, w_r$, $v_{r+1}, \ldots, v_m$ generan a V. $\exists$ elementos $b_1, \ldots, b_r$, $c_{r+1}, \ldots, c_m$ en K tales que $w_{r+1} = b_1 w_1 + \ldots + b_r w_r + c_{r+1} v_{r+1} + \ldots + c_m v_m$. No puede suceder que $c_j = 0$ para $j = r+1, \ldots, m$, ya que si así fuera obtendríamos una relación de dependencia lineal entre $w_1, \ldots, w_{r+1}$, lo que estaría en contradicción con nuestra suposición. Luego de reenumerar si es necesario, $v_{r+1}, \ldots, v_m$ se puede suponer sin pérdida de generalidad que $c_{r+1} \neq 0$. Entonces se obtiene:

$$c_{r+1} v_{r+1} = w_{r+1} - b_1 w_1 - \ldots - b_r w_r - c_{r+2} v_{r+2} - \ldots - c_m v_m$$

Al dividir entre c_{r+1}, concluimos que v_{r+1} está en el subespacio generado por $w_1, \ldots, w_{r+1}, v_{r+2}, \ldots, v_m$ generan a V. Así, entonces, se ha probado por inducción que $w_1, \ldots, w_m$ generan a V. Si $n > m$, $\Rightarrow \exists\ d_1, \ldots, d_m \in K$ tales que $w_n = d_1 w_1 + \ldots + d_m w_m$, se prueba así que $w_1, \ldots, w_m$ son linealmente dependientes.

Teorema. Sea V un espacio vectorial y supóngase que una base de este espacio tiene n elementos y que otra base del mismo tiene m elementos $\Rightarrow m = n$, el teorema anterior $\Rightarrow$ que ambas alternativas $n > m$ y $m > n$ son imposibles y que , por tanto, $m = n$. Sea V un espacio vectorial que tiene una base con n elementos diremos que n es la dimensión de V. Si V consta solamente del 0, $\Rightarrow V$ no tiene base alguna y se dice que V tiene dimensión 0. La dimensión de un espacio vectorial V sobre K se denota con $dim_k V$, o simplemente con $dim V$. Se dice que cualquier espacio vectorial que tenga una base con un número finito de elementos, o el espacio vactorial nulo, es de dimensión finita.

Teorema. Sea V un espacio vectorial y sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto máximo de elementos de V linealmente independientes, $\Rightarrow \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V.

Prueba. Debemos mostrar que $v_1, \ldots, v_n$ generan a V, i,e, que todo elemento de V se puede expresar como una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$. Sea w un elemento de V. Por hipótesis, los elementos w, $v_1, \ldots, v_n$ de V deben ser linealmente dependientes y, por tanto, $\exists$ números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ no todos iguales a cero, tales que:

$$\mathrm{x}_0 \mathrm{w} + \mathrm{x}_1 \mathrm{v}_1 + \ldots + \mathrm{x}_n \mathrm{v}_n = 0$$

No se puede tener $x_0 = 0$, ya que si este fuera el caso, se obtendría una relación de dependencia lineal entre $v_1, \ldots, v_n$. Por consiguiente, se puede despejar w en función de $\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n$ a saber:

$$w = -\left(\frac{x_1}{x_0}\right) v_1 - \ldots - \left(\frac{x_n}{x_0}\right)$$

lo cual prueba que w es una combinación lineal de $v_1,\ldots,v_n$ y, por tanto, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $v_1,\ldots,v_n$ elementos linealmente independientes de V. Entonces $v_1,\ldots,v_n$, constituyen una base de V.

Prueba. Usando el primer teorema de la sección, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un conjunto máximo de elementos linealmente independientes de V. Por lo que, del teorema inmediato anterior es una base.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sean $v_1,\ldots,v_r$ linealmente independientes. Entonces $\exists$ vectores $v_{r+1},\ldots,v_n \in$V tales que $\{v_1,\ldots,v_{r+1},\ldots,v_n\}$ es una base de V.

Prueba. Si $r < n$, $\Rightarrow$ por la definición de dimensión, $v_1,\ldots,v_r$ no pueden formar una base de V y, por tanto, no pueden generar a V. Por tanto, $\exists$ un elemento v_{r+1} de V que no está en el subespacio generado por $v_1,\ldots,v_r$. Luego $v_1,\ldots,v_{r+1}$ son linealmente independientes, ya que si tenemos una relación

$$a_1v_1 + \ldots + a_rv_r + a_{r+1}v_{r+1} = 0$$

donde $a_i \in K$, $\Rightarrow a_{r+1} \neq 0$, $\Rightarrow$ podemos expresar a v_{r+1} en términos de $v_1,\ldots v_r$, a saber:

$$v_{r+1} = -a_{r+1}^{-1}(a_1v_1 + \ldots + a_rv_r)$$

lo que contradice el hecho de que v_{r+1} no está en el subespacio generado por $v_1,\ldots,v_r$. Supongamos que hemos hallado elementos $v_{r+1},\ldots,v_s$ tales que $v_1,\ldots,v_s$ son linealmente independientes. Entonces, por el teorema del inicio de la sección, $s < n$. Si consideramos que s es máximo, entonces el argumento precedente muestra que $s = n$ y, por tanto, que $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es una base de V.

1-D Sumas y Sumas Directas

Sea V un espacio vectorial sobre el campo K. Sean U y W subespacios de V. Se define la suma de U y W como el subconjunto de V que consta de todas las sumas $u + w$ con $u \in U$ y $w \in W$. Se denota esta suma por U+W. Esta es un subespacio de V. Ciertamente, si $u_1, u_2 \in U$ y $w_1, w_2 \in W$, $\Rightarrow$:

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$$

Si $c \in K$, entonces:

$$c(u_1 + w_1) = cu_1 + cw_1 \in U + W$$

Finalmente $0 + 0 \in W$. Lo cual prueba que $U + W$ es un subespacio. Se dice que V es una suma directa de U y W si $\forall\, v \in V$ $\exists$ elementos únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.

Teorema. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K, y sean U y W subespacios. Si $U+W$ $=V$ y si $U\cap W=\{0\}$, $\Rightarrow$ V es la suma directa de U y W.

Prueba. Dado $v\in V$, por la primera suposición, $\exists$ elementos $u\in U$ y $w\in W$ tales que $v=u+w$. Así, pues, V es la suma de U y W. Para probar que es suma directa se debe demostrar que estos elementos u,w están deteminados en forma única. Supóngase que $\exists$ $u' \in U$ y $w' \in W$ tales que $v=u'+w$.

Así $u+w=u'+w' \Rightarrow u-u'=w'-w$. Pero $u-u'\in U$ y $w'-w\in W$. Por la segunda hipótesis, se concluye que $u-u'=0$ y $w'-w=0$, de donde $u=u'$ y $w=w'$, lo cual prueba el teorema.

Cuando V es la suma directa de los subespacios U y W, se emplea la siguiente notación

$$V=U\oplus W.$$

Teorema. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, y si V es la suma directa de los subespacios U y W, $\Rightarrow$ $dimV=dimU+dimW$.

Prueba. Sea $\{u_1,...,u_r\}$ una base de U y $\{w_1,...,w_s\}$ una base de W. Todo elemento de U tiene una expresión única como una combinación lineal $x_1u_1+...+x_ru_r$ con $x_i\in K$, y todo elemento de W tiene una expresión única como una combinación lineal

$$y_1w_1+...+y_sw_s \; con \; y_s\in K$$

Por definición, todo elemento de V tiene una expresión única como una combinación lineal.

$$x_1u_1+...+x_ru_r+y_1w_1+...+y_sw_s,$$

con lo que se prueba que $u_1,...,u_r,w_1,...,w_s$ es una base de V y, por tanto, también se prueba el teorema.

Dados dos conjuntos U y W se define el producto cartesiano como $U\times W=\{(x,y)/x\in U, y\in W\}$.En general si tenemos n conjuntos $x_1,...,x_n$ se define el producto cartesiano como el conjunto $(x_1,..,x_n)/x_i\in X_i, i=1,...,n\}$ y se denota con $x_1\times x_2\times...\times x_n$. Sean U y W espacios vectoriales, al conjunto $U\times W$ se le puede dar una estructura de espacio vectorial definiendo la adición y el producto por escalares como sigue: Si $(u_1,w_1)\in U\times W$ y $(u_2,w_2)\in U\times W$ se define:

$$(u_1,w_1)+(u_2,w_2)=(u_1+u_2,w_1+w_2)$$

Si $c\in K$, entonces se define el producto $c(u_1,w_1)$ por $c(u_1,w_1)=(cu_1,cw_1)$.

Entonces se verifica de inmediato que $U\times W$ es un espacio vectorial llamado producto directo de U y W.

CAPITULO 2

2-A Función

Para conjuntos dados S y T, una función f con dominio S y codominio T asigna a cada elemento $s \in S$ del dominio uno y sólo un elemento $f(s) \in T$ del codominio. La imagen Imf de $f : S \rightarrow T$ es el conjunto de todos los valores $f(s)$, para $s \in S$; este es siempre un subconjunto del codominio. La función f es sobre cuando esta imagen es su codominio; i,e. $\forall\ t \in T\ \exists$ al menos una $s \in S$ con $f(s) = t$.

2-B Transformación Lineal

Una transformación lineal u operador lineal $T : V \longrightarrow W$, de un espacio vectorial V en otro W sobre el mismo campo K, es una función T de V sobre W la cual satisface $T(c\xi + d\eta) = cT(\xi) + dT(\eta)$, $\forall$ vector ξ y η en V y todo escalar c y d en K.

Ejemplo. Sea $V = C(R)$ el espacio vectorial de funciones continuas de variable real en R. Sean $a, b \in R, a < b$ y defínase $T : V \longrightarrow R$ mediante $T(f) = \int_a^b f(t)dt\ \forall f \in V$. Entonces, por las propiedades de las integrales, T es una transformación lineal.

2-C Matrices

El espacio de las matrices

Consideremos ahora una clase de objetos, las matrices. Sea K un campo y sean n y m enteros ≥ 1. Un arreglo de números en K.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se conoce como una matriz en K. Se puede abreviar la notación para esta matriz como (a_{ij}) , $i = 1, 2, 3, ..., m$ y $j = 1, 2, 3, ..., n$. Se dice que ésta es una matriz de m por n, o bien de $m \times n$. La matriz tiene m renglones y n columnas. Se dice que a_{ij} es la componente ij de la matriz. Si la matriz anterior se denota por A, entonces el renglón i se denota por A_i, y se define como:

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$$

La columna j se denota por A^j y se define como:

$$A^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Un vector $(x_1, ..., x_n)$ es una matriz de $1 \times n$. Un vector columna

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

es una matriz de $n \times 1$.
Sea (a_{ij}), $i = 1, 2, 3, ..., m$ y $j = 1, 2, 3, ..., n$. Si $m = n$, entonces se dice que es una matriz cuadrada. También tenemos una matriz nula en la que $a_{ij} = 0 \ \forall \ i$ y j y se representa con 0.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Algunas propiedades

Se define la adición de matrices sólo cuando tienen el mismo tamaño. Así, sean m y n enteros fijos ≥ 1. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ matrices de $n \times m$. Se define la matriz $A + B$ como aquella cuya componente en el renglón i y la columna j es $a_{ij} + b_{ij}$. En otras palabras, sumamos matrices del mismo tamaño, componente a componente.
Si 0 es la matriz nula, $\Rightarrow \forall$ matriz A, tenemos que $0 + A = A + 0 = A$. Sea c un número y sea $A = (a_{ij})$ una matriz. Se define cA como la matriz cuya componente ij es ca_{ij}. Escribimos $cA = (ca_{ij})$. Así entonces multiplicamos cada componente de A por c. Además, se tiene que $(-1)A = -A$.
Con la suma de matrices y el producto por escalares definido antes, el conjunto de matrices $n \times m$ es un espacio vectorial sobre K. $\forall$ matriz A, se encuentra que $A + (-1)A = 0$. Sea $A =$ (a_{ij}) una matriz de $m \times n$. La matriz $B = (b_{ij})$ de $n \times m$ tal que $b_{ji} = a_{ij}$ se conoce como la transpuesta de A y se denota por ${}^tA$.
El considerar la transpuesta de una matriz equivale a intercambiar renglones por columnas y viceversa. Si A es la matriz que aparece al inicio de la sección, entonces ${}^tA$ es la matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz A es simétrica si es igual a su transpuesta, esto es, si ${}^tA = A$. Una matriz simétrica es necesariamente una matriz cuadrada. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Se dice que $a_{11}, ..., a_{nn}$ son las componentes de su diagonal. Se dice que una matriz es una matriz diagonal si todas sus componentes son iguales a cero, excepto, quizás, las componentes de la diagonal, esto es: Si $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Toda matriz diagonal es una matriz simétrica. Una matriz diagonal tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Se define la matriz identidad de $n \times n$ como la matriz cuadrada que tiene todas sus componentes iguales a 0, excepto las componentes de la diagonal que son iguales a 1. Se denota esta matriz con In o I si no hay necesidad de especificar la n. Así entonces:

$$In = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de matrices

Si $A = (a_1, ..., a_n)$ y $B = (b_1, ..., b_n)$ están en K^n, definimos entonces

$$A \cdot B = a_1 b_1 + ... + a_n b_n$$

Observación: Esta expresión no es producto escalar si $K = C$.

Este es un elemento de K, tenemos las siguientes propiedades:

1. $\forall$ A y B en K^n,tenemos que $A \cdot B = B \cdot A$.

2. Si A, B, C están en K^n, $\Rightarrow$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

3. Si $x \in K$, entonces:

$(xA) \cdot B = x(A \cdot B)$ y $A \cdot (xB) = x(A \cdot B)$ y si $A \in K^n$, y si $A \cdot x = 0$ $\forall x \in K^n$, $\Rightarrow$ $A = 0$.

Ahora definamos el producto de matrices.

Sea $A = (a_{ij}), i = 1, 2, 3, ..., m$ y $j = 1, 2, 3, ...n$, una matriz de $m \times n$

Sea $B = (b_{jk}), j = 1, 2, 3, ..., n$ y $k = 1, 2, 3, ...s$, una matriz de $n \times s$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}$$

Se define el producto AB como la matriz de $m \times s$ cuya coordenada ik es igual a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

Si $A_1,\dots,A_m$ son los vectores renglón de la matriz A y si $B^1,\dots,B^S$ son los vectores columna de la matriz B, entonces la coordenada ik del producto AB es igual a $A_i \cdot B^k$. Así

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \cdot B^1 & \dots & A_1 \cdot B^S \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m \cdot B^1 & \dots & A_m \cdot B^S \end{pmatrix}$$

Sea A una matriz $m \times n$ y sea B una matriz de $n \times 1$, es decir, un vector columna. Entonces AB es, de nuevo, un vector columna. El producto tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

donde

$$c_i = \sum a_{ij}b_j = a_{i1}b_1 + \dots + a_{in}b_n$$

Si $X = (x_1, \dots, x_m)$ es un vector renglón, es decir, una matriz de $1 \times m$, entonces se puede formar el producto XA, cuya forma es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} x_1, & \dots & , x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1, & \dots & , y_n \end{pmatrix},$$

donde

$$y_k = x_1 a_{1k} + \dots + x_m a_{mk}$$

En este caso, XA es una matriz de $1 \times n$, es decir, un vector renglón.

Teorema. Sean A,B y C matrices. Supóngase que A y B se pueden multiplicar entre sí, que A, B y C se pueden también multiplicar entre sí. Entonces, A y $B + C$, A y BC; lo mismo AB y C se pueden multiplicar entre sí y tenemos que
1. $A(B + C) = AB + AC$. Si x es un escalar, $\Rightarrow A(xB) = x(AB)$.
2. $(AB)C = A(BC)$. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Se dice que A es invertible o no singular si $\exists$ una matriz B de $n \times n$ tal que $AB = BA = In$. Tal matriz B está determinada en forma única por A, ya que si C es tal que $AC = CA = In$, entonces

$$B = BIn = B(AC) = (BA)C = InC = C$$

Esta matriz B se conoce como la inversa de A y se denota con A^{-1}.
3. Entonces ${}^tB$, ${}^tA$ se pueden multiplicar entre sí, y

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

CAPITULO 3

En este Capítulo se enuncia y demuestra el Teorema Espectral para dimensión finita, pero antes se enuncian algunos teoremas y definiciones útiles para su prueba. Para la demostración del Teorema Espectral es necesario enunciar lo siguiente:

Proposición

Sean V y W espacios vectoriales y supóngase que V es dimensionalmente finito con una base $\{x_1, ..., x_n\}$. Si $U, T : V \longrightarrow W$ son lineales y $U(x_i) = T(x_i)$ para $i = 1, ..., n \Rightarrow U = T$.

Prueba

Sea $y \in V$, $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Uy &= U(c_1x_1 + ... + c_nx_n) = c_1Ux_1 + ... + c_nUx_n \\ &= c_1Tx_1 + ... + c_nTx_n = T(c_1x_1 + ... + c_nx_n) = Ty \end{aligned}$$

Un espacio vectorial complejo V se llama espacio con **producto interior** si $\exists$ una función valuada en C $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sobre $V \times V$ que satisface las siguientes cuatro condiciones $\forall$ $x, y, z \in V$ y $\alpha \in C$:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

La función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se llama producto interior. Notemos que 2,3, y 4 implican que:

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \overline{\beta} \langle x, z \rangle \; y \; que \; \langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$$

Definición

En dimensión finita, el adjunto de un operador lineal T puede definirse como operador lineal T^* que satisface a $(T(x), y) = (x, T^*(y)) \, \forall x, y \in V$.

Teorema 1. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior y sea T un operador lineal en V, $\Rightarrow \exists$ un operador lineal único T^* en V tal que

$(T(x), y) = (x, T^*(y)) \; \forall x, y \in V$

Prueba

Sea $y \in V$ defínase a $g : V \rightarrow F$ mediante $g(x) = (T(x), y)$ $\forall x \in V$. Para demostrar que g es lineal. Sean x_1, $x_2 \in V$ y $c \in F \Rightarrow$

$$\begin{aligned} g(cx_1 + x_2) &= (T(cx_1 + x_2), y) = (cT(x_1) + T(x_2), y) \\ &= c(T(x_1), y) + (T(x_2), y) = cg(x_1) + g(x_2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es lineal. Ahora usamos el lema de Riesz (veáse el siguiente teorema) para obtener un vector único $y' \in V \ni g(x) = (x, y')$; i,e, $(T(x), y) = (x, y')$, $\forall\ x \in V$. Definiendo a $T^* : V \longrightarrow V$ mediante $T^*(y) = y'$, tenemos que $(T(x), y) = (x, T^*(y))$. Para ver que T* es lineal, sean $y_1, y_2 \in V$ y $c \in F \Rightarrow \forall\ x \in V$ tenemos

$$\begin{aligned}(x, T^*(cy_1 + y_2)) &= (T(x), cy_1 + y_2) = \overline{c}(T(x), y_1) + (T(x), y_2) \\ &= \overline{c}(x, T^*(y_1)) + (x, T^*(y_2)) = (x, cT^*(y_1) + T^*(y_2)).\end{aligned}$$

Como x es arbitraria, tenemos que $T^*(cy_1 + y_2) = cT^*(y_1) + T^*(y_2)$.
Finalmente, sólo falta demostrar que T^* es única. Supóngase que $T' : V \rightarrow V$ es lineal y satisface a $(T(x), y) = (x, T'(y))\ \forall\ x, y \in V, \Rightarrow (x,^*(y)) = (x, T'(y)) \forall x, y \in V$ y finalmente $T^* = T'$.

Definición. T es normal $\Leftrightarrow T^*T = TT^*$

Definición. T es autoadjunto $\Leftrightarrow T^* = T$

Observe que todo operador autoadjunto es normal.

Teorema 2.(Lema de Riesz)
Sea V un espacio con producto interior de dimensió finita en K, y sea $g : V \rightarrow K$ una transformación lineal. Entonces $\exists$ un vector único $y \in V \ni g(x) = (x, y)\ \forall x \in V$.

Prueba

Sea β una base ortonormal para V, digamos $\beta = \{x_1, ..., x_n\}$, y sea

$$y = \sum_{i=1}^{n} \overline{g(x_i)} x_i$$

si definimos a $h : V \rightarrow K$ como $h(x) = (x, y)$, entonces es lineal. Ahora bien, para $1 \leq j \leq n$ tenemos

$$h(x_j) = (x_j, y) = (x_j, \sum_{i=1}^{n} \overline{g(x_i)} x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)(x_j, x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\delta_{ji} = g(x_j)$$

como g y h coinciden en β , tenemos por la proposición , que $g = h$.
Para probar que y es única, supóngase que $g(x) = (x, y')\ \forall\ x, \Rightarrow (x, y) = (x, y')\ \forall\ x \Rightarrow (x, y - y') = 0\ \forall x$. En particular si $x = y - y' \Rightarrow (y - y', y - y') = 0$ y entonces por proposición del producto escalar $y = y' = 0$. Ahora daremos caracterización de operadores normales y autoadjuntos para el caso complejo C, y real R.

Teorema 3.(C) Sea V un espacio con producto interior, complejo y dimensionalmente finito, y sea T un operador lineal en V. Entonces T es normal $\Leftrightarrow$ V tiene una base ortonormal formada por eigenvectores de T.

Teorema 4.(R) Sea V un espacio con producto interior, real y dimensionalmente finito, y sea T un operador lineal en V. Entonces T es autoadjunto $\Leftrightarrow$ V tiene una base ortonormal formada por eigenvectores de T

Prueba de 3 y 4

$\Rightarrow$)Supondremos primero que T es normal o autoadjunto y luego obtendremos la base ortonormal adecuada. La prueba se hará por inducción sobre $n = dim(V)$. Si $n = 1$, $\Rightarrow V = L(\{x\})$ para alguna $x \neq 0$. En este caso es claro que $\{(1/\|x\|)x\}$ es una base ortonormal formada por un eigenvector de T.

Ahora supóngase que el resultado es cierto para operadores normales [*autoadjuntos*] en espacios con producto interior de dimensión $n-1$.

Probaremos que el resultado es cierto para el operador T en V. Si T tiene un eigenvalor λ_1y x_1 un eigenvector asociado. Supondremos que $\|x_1\| = 1$. Sea $W = L(\{x_1\})$. Por teorema 9 , $x_1$es también un eigenvector de T^*, de manera que W es T- y T^*-invariante. Pero $W^\perp$ es también T- y T^*-invariante, por tanto, $T_{W^\perp}$ es normal [*autoadjunto*] puesto que T lo es. Del teorema 9 tenemos que $dim(W^\perp) = n-1$. Por tanto , podemos aplicar la hipótesis de inducción a $T_{W^\perp}$ para producir una base ortonormal $\{x_2, ..., x_n\}$ para $W^\perp$ formada por eigenvectores de $T_{W^\perp}$ y, por tanto de T. Se infiere que $\{x_1, ..., x_n\}$ es la base ortonormal deseada para V.

$(\Leftarrow)$ Ahora supongamos que $\{x_1, ..., x_n\}$ es una base ortonormal formada por eigenvectores de T con $T(x_i) = \lambda_i x_i$ para $1 \leq i \leq n$. Si V es un espacio complejo con producto interior, entonces por el teorema 9

$(TT^*)(x_i) = T(\overline{\lambda}_i x_i) = \overline{\lambda}_i T(x_i) = \overline{\lambda}_i \lambda_i x_i = |\lambda_i|^2 x_i$ para $1 \leq i \leq n$. Análogamente $(T^*T)(x_i) = |\lambda_i|^2 x_i$ para $1 \leq i \leq n$. Por tanto, usando proposición, T es normal. Por otra parte, si V es un espacio real con producto interior, $\Rightarrow \lambda_i$ es real para $1 \leq i \leq n$. Así, $T(x_i) = \lambda_i x_i = \overline{\lambda}_i x_i = T^*(x_i)$ para $1 \leq i \leq n$ y, por tanto, T es autoadjunto.

Teorema 5. Sea T un operador lineal en V y sean $\lambda_1, .., \lambda_k$ eigenvalores de T diferentes. Si $x_1, .., x_k$ son eigenvectores de $T \ni \lambda_j$ corresponda a x_j $(1 \leq j \leq k)$,$\Rightarrow$ $\{x_1, ..., x_k\}$ es linealmente independiente.

Prueba

Utilizaremos inducción sobre el número k. Supóngase que $k = 1$. Entonces x_1 es un eigenvector, y entonces $\{x_1\}$ es linealmente independiente. Supóngase que el teorema se cumple siempre para $k-1$ eigenvectores, donde $k-1 \geq 1$ y que tenemos k eigenvectores $x_1, ..., x_k$ correspondientes a distintos eigenvalores $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Deseamos demostrar que $\{x_1, .., x_k\}$ es linealmente independiente. Supóngase que se tienen escalares $a_1, .., a_k$ tales que:

$$a_1 x_1 + ... + a_k x_k = 0 \tag{1}$$

Aplicando T a ambos lados de la ecuación (1) obtenemos

$$a_1 T(x_1) + ... + a_k T(x_k) = a_1 \lambda_1 x_1 + ... + a_k \lambda_k x_k = 0 \tag{2}$$

Ahora multiplicando ambos lados de la ecuación (1) por λ_k obtenemos

$$a_1 \lambda_k x_1 + ... + a_k \lambda_k x_k = 0 \tag{3}$$

Luego, restando la ecuación (3) de la ecuación (2) tenemos:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + ... + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0$$

Por la hipótesis de inducción $\{x_1, ..., x_{k-1}\}$ es linealmente independiente, por tanto

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k) = ... = a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0.$$

Como $\lambda_1, ..., \lambda_k$ son distintos, se tiene que $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ para $1 \leq i \leq k-1$.
Así $a_1 = ... = a_{k-1} = 0$,de manera que la ecuación (1) se reduce a $a_k x_k = 0$. Como $x_k \neq 0$, $a_k = 0$; por tanto, $a_1 = ... = a_k = 0$ y $\Rightarrow \{x_1, ..., x_k\}$ es linealmente independiente.
Sea $E_\lambda = \{x \in V : Tx = \lambda x\}$

Definición. Sea λ un eigenvalor de un operador lineal o de una matriz cuyo polinomio característico es $f(t)$. La **multiplicidad** de λ es el mayor entero positivo k para el que $(t-\lambda)^k$ es un factor de $f(t)$.

Teorema 6. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V. Si λ es un eigenvalor de T de **multiplicidad** m, $\Rightarrow 1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m$.

Prueba

Tómese una base $\{x_1, .., x_p\}$ para E_λ y extiéndase ésta a una base $\beta = \{x_1, .., x_p, x_{p+1}, .., x_n\}$ para V. Obsérvese que $x_i (1 \leq i \leq p)$ es un eigenvector de T que corresponde a λ y sea $A = [T]_\beta$. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix},$$

donde $B_1 = \lambda I_p$ y 0 es la matriz cero. Luego el polinomio característico de T es

$$\begin{aligned} f(t) &= det(A - tI_n) = \begin{pmatrix} B_1 - tI_p & B_2 \\ 0 & B_3 - tI_{n-p} \end{pmatrix} \\ &= \det(B_1 - tI_p).\det(B_3 - tI_{n-p}) \end{aligned}$$

Sea $g(t) = det(B_3 - tI_{n-p})$ el polinomio característico de B_3. Se ve claramente que $det(B_1 - tI_p) = (\lambda - t)^p = (-1)^p(t - \lambda)$,por tanto $f(t) = (-1)^p(t - \lambda)^p g(t)$, de forma que la multiplicidad de λ es al menos p pero $dim(E_\lambda) = p \Rightarrow dim(E_\lambda) \leq m$.

Teorema 7. Sean $W_1, ..., W_k$ subespacios de un espacio vectorial dimensionalmente finito V. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $V = W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_k$.
2. $V = \sum_{i-1}^{k} W_i$ y, $\forall\ x_1, ...x_k \ni x_i \in W_i(i = 1, 2, .., k), si\ x_1 + x_2 + ... + x_k = 0, \Rightarrow x_i = 0(i = 1, 2, .., k)$.
3. $\forall\ v$ en V puede escribirse de manera única en la forma $v = x_1 + ... + x_k$, donde $x_i \in W_i(i = 1, 2, ..., k)$.
4. Si $\forall\ i = 1,2,..,k$, γ_i es una base ordenada cualquiera para W_i, $\Rightarrow \gamma_1 U ... U \gamma_k$ es una base ordenada para V.
5. $\forall\ i = 1,2,...,k$ $\exists$ una base ordenada γ_i para W_i $(i = 1,2,..,k)$ tal que $\gamma_1 U ... U \gamma_k$ es una base ordenada para V.

Prueba

$(1 \Rightarrow 2)$ Si 1 es cierto $\Rightarrow$, por definición,

$$V = \sum_{i=1}^{k} W_i$$

Supóngase que $x_1, ..., x_k$ son vectores tales que $x_i \in W_i(i = 1, 2, ..., k)$ y $x_1 + ... + x_k = 0, \Rightarrow \forall\ i$ $-x_i = \sum\limits_{j \neq i} x_j \in \sum\limits_{j \neq i} Wi$,también $-x_i \in W_i$ y así $-x_i \in W_i \bigcap (\sum\limits_{j \neq i} W_j) = \{0\}$.

Por tanto $x_i = 0$, lo que demuestra a 2. $(2 \Rightarrow 3)$ De acuerdo con 2 $V = \sum\limits_{i=1}^{k} W_i$ $\forall\ v \in V$ puede ser representado como $v = x_1 + ... + x_k$ para algunos elementos $x_i \in W_i$,debemos probar que esta representación es única. Supóngase por tanto que $v = y_1 + ... + y_k$, donde $y_i \in W_i$. Entonces $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) + ... + (x_k - y_k) = 0$.

Pero $x_i - y_i \in W_i$, se deduce de 2 que $x_i - y_i = 0$. Luego $x_i = y_i\ \forall\ i$, lo que prueba la unicidad de la representación. $(3 \Rightarrow 4)$ Sea γ_i una base para W_i, y de acuerdo con 3 $V = \sum\limits_{i=1}^{k} W_i$, es evidente que $\gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup ... \bigcup \gamma_k$ genera a V. Supóngase que $\exists$ vectores $x_{ij} \in \gamma_i$ $(j = 1,2,...,m_i$

e $i = 1,2,...,k$) y escalares $a_{ij} \ni \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} = 0$, hágase $y_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}x_{ij} \Rightarrow y_i \in L(\gamma_i) = W_i$ y $y_1 + ... + y_k = \sum_{i,j} a_{ij}x_{ij} = 0$.

Como $0 \in W_i \; \forall \; i$ y $0 + ... + 0 = y_1 + ... + y_k$, la condición 3 $\Rightarrow$ que $y_i = 0 \; \forall$ i. Luego, $0 = y_i = \sum_{j=1}^{m_i} a_j^i x_{ij} \; \forall \; i$. Pero como γ_i es linealmente independiente, se obtiene que $a_{ij} = 0$ para $j = 1,2,...,m_i$ y toda i. Por tanto $\gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup ... \bigcup \gamma_k$ es linealmente independiente y $\Rightarrow$ es una base para V. Es inmediato que 4 $\Rightarrow$5.

(5 $\Rightarrow$ 1) Finalmente, se demuestra que 5 $\Rightarrow$1. Si γ_i es una base para W_i tal que $\gamma_1 \bigcup ... \bigcup \gamma_k$ es una base para V, $\Rightarrow$

$$V = L(\gamma_1 \bigcup \gamma_2 \bigcup ... \bigcup _k) = L(\gamma_1) + ... + L(\gamma_k) = \sum_{i=1}^{k} W_i.$$

Fíjese un índice y supóngase que $0 \neq v \in W_i \bigcap (\sum_{j \neq i} Wi)$, $\Rightarrow v \in W_i = L(\gamma_i)$ y $v \in \sum_{j \neq i} W_j = L(\bigcup_{j \neq i} \gamma_i)$. Por tanto v es combinación lineal de γ_i y $\bigcup_{j \neq i} \gamma_j$, de manera que v puede expresarse como combinación lineal de $\gamma_1 \bigcup ... \bigcup \gamma_k$ en más de una forma, lo que concluye que $W_i \bigcap (\sum_{j \neq i} W_j) = \{0\}$, probando 1.

Definición. Si $A \in M_{nxn}(K)$, el polinomio $det(A - tIn)$ en la incógnita t se denomina **polinomio característico** de A.

Teorema 8. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial n-dimensional V. Supóngase que el **polinomio característico** de T se puede descomponer en un producto de factores de grado 1 y sean $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los distintos eigenvalores de T. Entonces los siguientes son equivalentes:

1. T es diagonalizable
2. $V = E_{\lambda_1} \bigoplus E_{\lambda_2} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda_k}$
3. Si $d_j = \dim(E_{\lambda_j})$ para $1 \leq j \leq k$, $\Rightarrow d_1 + d_2 + ... + d_k = n$
4. Si m_j es la multiplicidad de λ_j ($1 \leq j \leq k$), $\Rightarrow dim(E_{\lambda_j}) = m_j$ ($j = 1,2,...,k$)

Prueba

Primero probamos que 1 $\Rightarrow$ 2. Si T es diagonalizable, $\Rightarrow V$ tiene una base de eigenvectores de T, de donde se deduce que $V = \sum_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$.

Sean $x_i \in E_{\lambda_i} (i = 1, 2, ..., k)$ vectores $\ni x_1 + ... + x_k = 0$,cada x_i es o bien el vector nulo o un eigenvector de T correspondiente a λ_i, $\Rightarrow$ el conjunto de estos vectores no nulos x_i son linealmente independientes, $x_1 + ... + x_k = 0 \Rightarrow$ que $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$

Teorema 9. Sea V un espacio vectorial sobre el campo K con producto interior, y sea T un operador normal en V. Entonces:

1. $\|T(x)\| = \|T^*(x)\| \; \forall \; x \in V$

2.$T - cI$ es normal $\forall \; c \in K$

3. Si λ es eigenvalor de T, $\Rightarrow \overline{\lambda}$ eigenvalor de T^*, i,e, $T(x) = \lambda x \Rightarrow T^*(x) = \overline{\lambda}x$

4. Si λ_1 y λ_2 son distintos eigenvalores de T con eigenvectores correspondientes x_1 y x_2 son ortogonales.

Prueba

1. $\forall\, x \in V$, se tiene

$$\|T(x)\|^2 = (T(x), T(x)) = (T^*T(x), x) = (TT^*(x), x) = (T^*(x), T^*(x)) = \|T^*(x)\|^2$$

3. Sea $U = T - \lambda I$ y supónga $T(x) = \lambda x$ para alguna $x \in V, \Rightarrow U(x) = 0$, y en virtud de 1 y 2 tenemos que

$$\|U(x)\| = \|U^*(x)\| = \left\|(T^* - \overline{\lambda}I)(x)\right\| = \left\|T^*(x) - \overline{\lambda}x\right\| = 0$$

Por lo tanto $T^*(x) = \overline{\lambda}x$.

4. Sean λ_1 y λ_2 distintos eigenvalores de T con eigenvectores correspondientes x_1 y x_2, entonces utilizando 3, tenemos que $\lambda_1(x_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = (T(x_1), x_2) = (x_1, T^*(x_2)) = (x_1, \overline{\lambda}_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$.

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se concluye que $(x_1, x_2) = 0$

Corolario. Sea V un espacio con producto interior de dimensión finita y sea W un subespacio de V. Entonces $dim(W) + dim(W^\perp) = dim(V)$.

3-A Enunciado y Demostración del Teorema Espectral

Supónga que T es un operador lineal en un espacio con producto interior de dimensión finita V sobre K. Supónga T normal si $K = C$ y T es autoadjunto si $K = R$. Si $\lambda_1, .., \lambda_k$ son distintos eigenvalores de T, sea $W_i = E_{\lambda_i} = \{x \in V : T(x) = \lambda_i x\}$ el eigenespacio de T correspondiente al eigenvalor λ_i (1≤i≤k) y sea T_i la proyección ortogonal sobre W_i $(1 \leq i \leq k)$. Entonces:

1. $V = W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_k$
2. Si W_i' es suma directa de los subespacios W_j, $j \neq i$, $\Rightarrow W_i^\perp = W_i'$
3. $T_i T_j = \delta_{ij} T_i \; para \; i \leq j, j \leq k$
4. $I = T_1 + T_2 + ... + T_k$
5. $T = \lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T$

Prueba

1. Por teorema 3, T es diagonalizable, y por teorema 8, $V = W_1 \bigoplus ... \bigoplus W_k$.

Para operadores autoadjuntos no se necesita el teorema 8, pues $W_i \cap W_j = \{0\}$ debido a que $W_i \perp W_j$ de donde se tiene la suma directa de V.

2. Si $x \in W_i$ y $y \in W_j$ para algunas i, j, $\Rightarrow (x, y) = 0$ por teorema 9, se infiere de esto que $W_i' \subseteq W_i^\perp$, y de 1 que $dim(W_i') = \sum\limits_{j \neq i} dim(W_j) = dim(V) - dim(V_i)$. Por otra parte, por teorema 2, $dim(W_i^\perp) = dim(V) - dim(W_i)$. Por tanto, $W_i' = W_i^\perp$.

3. Es claro.

4.Como T_i es proyección ortogonal sobre W_i, de 2 $N(T_i) = R(T_i)^{\perp} = W_i^{\perp} = W_i'$. Por tanto, para $x \in V$ $x = x_1 + ... + x_k$, con $x_j \in W$ y $T_i(x) = x_i$, demostrando 4.

5. Para $x \in V$, escribase $x = x_1 + ... + x_k$, con $x_j \in W_j$ $(1 \leq j \leq k)$. Entonces

$$\begin{aligned} T(x) &= T(x_1) + ... + T(x_k) = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_k x_k \\ &= \lambda_1 T_1(x) + ... + \lambda_k T_k(x) = (\lambda_1 T_1 + ... + \lambda_k T_k). \end{aligned}$$

Definición. A^* es la matriz asociada al operador T^*

Definición. Una matriz A de $n \times n$ es normal si $AA^* = A^*A$

Definición. Una matriz A de $n \times n$ es autoadjunta si $A = A^*$

Teorema Si $A = [a_{ij}]$ es la matriz asociada a T respecto a la base ortonormal $x = \{\xi_i, ..., \xi_n\} \Rightarrow$, $A^* = [\overline{a}_{ij}]$, es la matriz asociada a T^* respecto a esta misma base

Prueba:

$$\begin{aligned} (\sigma^*(\xi_j), \xi_k) &= (\xi_j, \sigma(\xi_k)) = (\xi_j, \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(\xi_j, \xi_i) = a_{jk} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(\xi_i, \xi_k) = (\sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ji}\xi_i, \xi_k) \end{aligned}$$

Desde luego esta ecuación se tiene $\forall\ \xi_k$, $\sigma^*(\xi_j) = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_{ji}\xi_i$. Así σ^* es representada por la transpuesta conjugada de A, i,e, σ^* es representada por A^*. Hemos llamado a σ^* el adjunto de σ y vemos que σ^* es representado por A^*.

Así, para el caso de matrices reales, ser autoadjunta equivale a ser simétrica.

Definición. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V con base β. Definimos el polinomio característico de un operador $f(t)$ de T como el polinomio característico de $A = [T]_\beta$, i,e, $f(t) = det(A - tI)$.

Diagonalización

En esta parte se considera el problema de factorizar una matriz A de $n \times n$ en un producto de la forma SDS^{-1}, donde D es la diagonal. Se comienza demostrando que los eigenvectores que pertenecen a diferentes eigenvalores son linealmente independientes.

Teorema. Si $\lambda_1,...,\lambda_n$ son eigenvalores distintos de la matriz A de $n \times n$ con eigenvectores correspondientes $x_1,...,x_k$, $\Rightarrow$ $x_1,...,x_k$ son linealmente independientes.

Prueba

Sea r la dimensión del subespacio de R^ngenerado por $x_1,...,x_k$ y supónga que $r < k$. Podemos suponer que $x_1,...,x_r$ son linealmente independientes, como $x_1,...,x_r,x_{r+1}$ son linealmente dependientes, $\exists$ escalares $c_1,...,c_r,c_{r+1}$ no todos cero tal que (1) $c_1x_1+ ... +c_rx_r + c_{r+1}x_{r+1}= 0$. Note que c_{r+1} debe ser distinto de cero; en su defecto, $x_1,...,x_r$ sería dependiente. Así $c_{r+1}x_{r+1} \neq 0$ y, por tanto, $c_1,...,c_r$ no pueden ser todos cero. Multiplicando (1) por A, $c_1Ax_1+...+ c_rAx_r+ c_{r+1}Ax_{r+1}= 0$ o bien (2) $c_1\lambda_1x_1+...+ c_r\lambda_rx_r + c_{r+1}\lambda_{r+1}x_{r+1}= 0$, restando λ_{r+1} por (1) de (2) se tiene $c_1(\lambda_1- \lambda_{r+1})x_1+...+ c_r(\lambda_r-\lambda_{r+1})x_r = 0$, esto contradice la independencia de $x_1,...,x_r$. Por tanto, $r = k$.

Definición. Se dice que una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si $\exists$ una matriz no singular S y una matriz diagonal D tal que $S^{-1}AS = D$ decimos que S diagonaliza a A.

Teorema. Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable $\Leftrightarrow$ A tiene n eigenvectores linealmente independientes.

Prueba. Supónga que A tiene n eigenvectores linealmente independientes $x_1,...,x_n$. Sea λ_i eigenvalor de A que corresponde a x_i $\forall$ i. Sea S la matriz cuyo j-ésimo vector columna sea x_j para $j = 1,...,n$. Se deduce que $Ax_j = \lambda_jx_j$ es el j-ésimo vector columna de AS. Por tanto

$$AS = \begin{pmatrix} Ax_1, & ... & , Ax_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1x_1, & ... & , \lambda_nx_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1, & , x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = SD$$

Como S tiene n vectores columna linealmente independientes, se deduce que S es no singular y por tanto $D = S^{-1}SD = S^{-1}AS$. A la inversa, supónga que A es diagonalizable, $\Rightarrow$ $\exists$ una matriz no singular S tal que $AS = SD$. Si $x_1,...,x_k$ son los vectores columna de S, $\Rightarrow$ $Ax_j = \lambda_jx_j$ $(\lambda_j = d_{jj})$ $\forall$ j, por tanto $\forall$ j, λ_j es eigenvalor de A y x_j es eigenvector que corresponde a λ_j. Como los vectores columna de S son linealmente independientes, se deduce que A tiene n eigenvectores linealmente independientes.

3-B Familia Espectral y Operadores Lineales

Definición. Dos vectores, x y y, en un espacio vectorial con producto interior son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$.Una colección $\{x_i\}$ de vectores en V es llamada un conjunto ortonormal si $\langle x_i, x_i\rangle = 1$ $\forall i$, y $\langle x_i, y_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.

Teorema. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ un conjunto ortonormal en un espacio vectorial V con producto interior, $\Rightarrow \forall\, x \in V$,

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n\rangle|^2 + \left\| x - \sum \langle x_n, x\rangle x_n \right\|^2$$

Prueba. Escribamos a x como $x = \sum \langle x_n,x\rangle x_n + (x - \sum \langle x_n,x\rangle x_n)$ y usando las propiedades del producto interior se muestra que $\sum \langle x_n,x\rangle x_n$ y x-$\sum \langle x_n, x\rangle$ son ortogonales. Así

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \left\|\sum \langle x_n,x\rangle x_n\right\|^2 + \left\| x - \sum \langle x_n, x\rangle x_n\right\|^2\\ &= \sum |\langle x_n,x\rangle x_n|^2 + \left\| x - \sum \langle x_n,x\rangle x_n\right\|^2\end{aligned}$$

Corolario (Desigualdad de Bessel)

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ un conjunto ortonormal en un espacio vectorial V, con producto interior, $\Rightarrow \forall$ $x \in V$,

$$\|x\|^2 \geq \sum |\langle x, x_n\rangle|^2 .$$

Un espacio lineal normado es un espacio vectorial V sobre R (o C) y una función $\|\cdot\|$ de $V \longrightarrow R$ la cual satisface

1. $\|v\| \geq 0\ \forall v \in V$
2. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
3. $\|\alpha v\| = |\alpha|\, \|v\|\ \forall v \in V$ y $\alpha \in R(o\ C)$
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|\ \forall v y w \in V$

Corolario (Desigualdad de Schwarz)

Si x, y son vectores en un espacio vactorial V con producto interior, luego $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

Prueba. Para $y = 0$ es trivial, supongamos que $y \neq 0$, el vector $\frac{y}{\|y\|}$ por sí mismo forma un conjunto ortonormal, y por la desigualdad de Bessel a cada $x \in V$ tenemos $\|x\|^2 \geq \left|\frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|}\right|^2 =$ $\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$ lo cual $\Rightarrow$ que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$

Teorema. Cada espacio vectorial V con producto interior es un espacio lineal normado con norma $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Prueba. Como V es un espacio vectorial, necesitamos sólo verificar que $\|\cdot\|$ tiene las propiedades de norma. Todas las propiedades, excepto la desigualdad triangular, se siguen de las propiedades 1- 4 del producto interior. Supónga que $x, y \in V, \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) = (x,x)+2Re(x,y)+(y,y)\\ &\leq (x,x)+2\,|(x,y)|+(y,y) \leq (x,x)+2(x,x)^{\frac{1}{2}}(y,y)^{\frac{1}{2}}+(y,y)\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwarz, así $\|x+y\|^2 \leq (\|x\|+\|y\|)^2$ lo cual prueba la desigualdad del triángulo. Este teorema muestra que tenemos una métrica natural, $d(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$ en V.

Funcional lineal en $\mathcal{H}$

Cada función F definida sobre algunos subconjuntos de $\mathcal{H}$ y toma números reales ó complejos como sus valores se llama funcional en $\mathcal{H}$. Una funcional F se dice lineal y acotada si está definida sobre todo el espacio $\mathcal{H}$ y satisface:

1. $F(\lambda x + \mu y) = \lambda F(x) + \mu F(y)$; lineal.

2. $|F(x)| \leq c\,\|x\|\,\forall x \in \mathcal{H}$, con una constante fija c.

Toda funcional lineal y acotada $F(x)$ en $\mathcal{H}$, se expresa en la forma $F(x) = (x,y)$, donde y es un vector fijo en $\mathcal{H}$, éste está determinado por el funcional.

Cerradura de un operador.

Un operador A es **cerrado** si su gráfica $\mathcal{B}_A$ es cerrada en $\mathcal{H}\bigoplus\mathcal{H}$. Así que un operador sea cerrado signifíca que $x_n \in \mathcal{D}_A$, $\{x_n, Ax_n\} \rightarrow \{x,y\}$ implican la relación $\{x,y\} \in \mathcal{B}_A$,i.e, $x \in \mathcal{D}_A$ y $y = Ax$. En otras palabras, que un operador sea cerrado signifíca que $x_n \in \mathcal{D}_A$, $x_n \rightarrow x$, $Ax_n \rightarrow y$ implican que $x \in \mathcal{D}_A$, y $y = Ax$.

Operador Adjunto

Un conjunto $S \subset H$ es denso en H si su **cerradura** $\widetilde{S}$ coincide con H. Un subespacio S permanece denso en H $\Leftrightarrow$no hay un vector distinto de cero en H el cual es ortogonal a $\dot{S}$.

Prueba. La cerradura $\widetilde{S}$ es un subespacio cerrado en H. Puesto que el producto escalar es continuo, la relación $h \perp S \Rightarrow h \perp \widetilde{S}$. Si luego S es denso en H $\Rightarrow$ tenemos $h \perp \widetilde{S} = H$,en particular $h \perp h$, y $\Rightarrow h = 0$.

Inversamente, si S no es denso en $H, \Rightarrow \widetilde{S} \neq H$. Sea $x \notin \widetilde{S} \Rightarrow P_{\widetilde{S}}x \neq x$ y el vector $h = (1 - P_{\widetilde{S}})x \neq 0 \perp S$.

Ahora, considere un operador lineal arbitrario A cuyo dominio de definición D_A es denso en H. Puede pasar que para ciertos vectores y, tengamos la relación $(Ax, y) = (x, z)$ para una $z \in H$ $y \forall x \in D_A$. Denota al conjunto de vectores y por $D^* y$, y se define un operador A^* como el dominio de definición $D_{A^*} = D^*$ por: $A^*y = z \ \forall y \in D^*$, este operador es llamado el **adjunto** de A.

Operador Acotado

Un operador A definido sobre un espacio $\mathcal{H}$ es acotado si hay un número C tal que $\|Ax\| \leq C\,\|x\|$ $\forall x \in \mathcal{H}$. La C más chica se llama la norma del operador acotado y se denota por $\|A\|$. Cualquier operador acotado A es continuo. Si $x_n \longrightarrow x$, $\|Ax - Ax_n\| = \|A(x - x_n)\| \leq C\,\|x - x_n\|$,es decir, $Ax_n \longrightarrow Ax_n$.

La suma $(A + B)$ de operadores acotados A y B es el operador definido por $(A + B)x = Ax + Bx$. El producto λA del operador acotado A y λ está definido por $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$.

Con estas definiciones, los operadores acotados forman un espacio vectorial. Además, $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$ y $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. El producto AB de operadores acotados A y B se define como el operador definido por $(AB)x = A(Bx)$ $\forall x \in \mathcal{H}$. De aquí es fácil probar que $A(B+C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, y $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$. En general, $AB \neq BA$. Si $AB = BA$ A y B conmutan. El operador 1, definido por $1x = x$, se llama operador identidad; obviamente, $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$. Se sigue del lema de Riesz que $\forall$ operador acotado A, $\exists$ un operador acotado $A^* \ni (Ax, y) = (x, A^*y)$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$. De la definición para operadores adjuntos se sigue que $A^{**} = A$, $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$, $(A + B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, $\|A^*\| = \|A\|$. Un operador acotado A se llama hermitiano si $A = A^*$.

Definición. Un espacio con producto interno completo es un espacio de Hilbert.

Operador de proyección

Cada subespacio cerrado de un espacio de Hilbert es de Hilbert, si $\mathcal{M}$ es un subespacio cerrado en $\mathcal{H}$, cada x se expresa de forma única como $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in \mathcal{M}$ y $x_2 \perp \mathcal{M}$. El vector $x_1$se llama la proyección del vector x sobre $\mathcal{M}$. La idea de proyección tiene una interpretación simple particularmente en el espacio tridimensional.

Familia Espectral

Una familia de operadores P_λ con $\lambda \in R$ se llama familia espectral si tiene las siguientes propiedades:

1. Para cada λ, P_λ es una proyección
2. $\|P_\lambda x\| \leq \|P_\mu x\|$para $\lambda < \mu$ y toda $x \in \mathcal{H}$
3. $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \|P_\lambda x\| = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \|P_\lambda x - x\| = 0$
4. Para una $x \in \mathcal{H}$, la función $P_\lambda x$ es continua por la derecha,i.e.,

$\lim\limits_{\varepsilon \to +0} \|P_{\lambda+\varepsilon} x - P_\lambda x\| = 0$

De la propiedad 2 se deduce que, para un vector arbitrario $x \in \mathcal{H}$, los limites $\lim\limits_{\lambda \to \mu - 0} P_\lambda x =$

$P_{\mu-0}x$ y $\lim\limits_{\lambda\to\mu+0} P_\lambda x = P_{\mu+0}x\ \exists$, 4 significa que $P_{\mu+0} = P_\mu$; esta no es esencial y representa una normalización de la función espectral. Si una función P_λ satisface 1,2 y 3 pero no 4, necesitamos sólo reemplazar ésta por la función $P'_\lambda = P_{\lambda+0}$ para obtener una familia espectral que satisfaga las condiciones anteriores. En ciertos casos es más conveniente considerar una función espectral continua por la izquierda donde P_λ es continua por la derecha, equivale a remplazar P_λ por $P'_\lambda = P_{\lambda-0}$. En esta sección usamos la siguiente notación, sea Δ un intervalo $(\alpha,\beta), [\alpha,\beta), (\alpha,\beta], [\alpha,\beta], \Rightarrow P_\Delta$ denota a los operadores: $P_{\beta-0} - P_{\alpha+0}, P_{\beta-0} - P_{\alpha-0}, P_{\beta+0} - P_{\alpha+0}, P_{\beta+0} - P_{\alpha-0}$ respectivamente. Pero por 4, las diferencias pueden estar de la siguiente forma: $P_{\beta-0} - P_\alpha, P_{\beta-0} - P_{\alpha-0}, P_\beta - P_\alpha, P_\beta - P_{\alpha-0}$,en particular, $P_\Delta = P_\beta - P_\alpha$ para $\Delta = (\alpha,\beta), \Rightarrow$ por 2, P_Δ es una proyección. La siguiente proposición se prueba fácilmente para intervalos $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$ los cuales son disjuntos por pares, $P_{\Delta_i}P_{\Delta_j} = 0$ para $i \neq j$.

Operador Isométrico

Un operador U es isométrico si $(Ux, Uy) = (x, y)\ \forall x, y \in \mathcal{D}u$. Un operador isométrico se llama unitario si su dominio de definición y su rango de valores coincide con el espacio $\mathcal{H}$. Un operador acotado U es unitario $\Longleftrightarrow U^*U = UU^* = 1$.

Operaciones básicas para un operador arbitrario

El producto λA de un operador A con λ es el operador cuyo dominio coincide con $\mathcal{D}_A$ y $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$ para $x \in \mathcal{D}_A$. La suma $(A + B)$ de A y B es el operador definido en el dominio $\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$ por $(A + B)x = Ax + Bx$ para $x \in \mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_B$. El producto AB de A y B está definido como $\mathcal{D}_{AB}$ que consiste de vectores $x \in \mathcal{D}_B$ para $Bx \in \mathcal{D}_A, \Rightarrow (AB)x$ es el operador que satisface $(AB)x = A(Bx)$ para $x \in \mathcal{D}_{AB}$.

Operadores simétrico y autoadjunto

Un operador T definido densamente sobre $\mathcal{H}$ es simétrico si $T \subset T^*$, i.e, si $D(T) \subset D(T^*)$ y $T\varphi = T^*\varphi\ \forall\ \varphi \in D(T)$. Equivalentemente, T es simétrico $\Leftrightarrow (T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi) \forall\ \varphi, \psi \in D(T)$.

Definición. T se llama autoadjunto si $T = T^*$, i,e, $\Leftrightarrow T$ es simétrico y $D(T) = D(T^*)$.

Definición. Un operador simétrico T es esencialmente autoadjunto si su cerradura $\overline{T}$ es autoadjunta. Si T es cerrada, un subconjunto $D \subset D(T)$ es un núcleo para T si $\overline{T \restriction D} = T$.

Teorema. Sea T un operador simétrico sobre $\mathcal{H}$. Luego los tres enunciados son equivalentes: 1. T es autoadjunto, 2. T es cerrado y $\mathrm{Ker}\{T \pm i\} = \{0\}$,3. $Ran(T \pm i) = \mathcal{H}$.

Corolario. Sea T un operador simétrico sobre $\mathcal{H}$, luego los siguientes son equivalentes: a. T es esencialmente autoadjunto, b. $Ker(T^* \pm i) = \{0\}$,c. $Ran(T \pm i)$ son densos.

3-C Operadores Lineales en Espacios de Hilbert

Supónga que varios espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_n$ son dados. El conjunto de todos las $x = \{x_1, ..., x_n\}$ con $x_1 \in \mathcal{H}_1, ..., x_n \in \mathcal{H}_n$ serán denotados por $\mathcal{H}$. Definimos las operaciones de adición y multiplicación en $\mathcal{H}$ por:

$\lambda \{x_{1,\ldots,}x_n\} = \{\lambda x_{1,\ldots,}\lambda x_n\}$, y $\{x_1, \ldots, x_n\} + \{y_1, \ldots, y_n\} = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\}$ por tanto, definimos un producto escalar en $\mathcal{H}$ por:

$(\{x_1, \ldots, x_n\}, \{y_1, \ldots, y_n\}) = (x_1, y_1) + \ldots + (x_n, y_n)$. Con estas definiciones y el producto escalar, $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. El espacio $\mathcal{H}$ obtenido se llama la suma directa $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ y se denota por $\mathcal{H}_1 \bigoplus \ldots \bigoplus \mathcal{H}_n$. Puede mencionarse que algunos o pares los espacios $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ pueden ser lo mismo. Así, $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, por ejemplo, es el conjunto de todos los pares $\{x_1, x_2\}$ con $x_1 \in \mathcal{H}$ y $x_2 \in \mathcal{H}$.

La gráfica de un operador

Sea A un operador, no necesariamente lineal en $\mathcal{H}$. El conjunto de todos los pares $\{x, Ax\}$ con $x \in \mathcal{D}_A$ en la suma directa $\mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$ se llama la gráfica del operador A y se denota por $\mathcal{B}_A$.

CAPITULO 4

Hasta ahora hemos estudiado operadores lineales en espacios vectoriales de dimensión finita (álgebra lineal). En este capítulo comenzaremos el estudio de algunos operadores lineales en espacios vectoriales de dimensión infinita (análisis funcional), y por tanto generalizaremos algunos de los resultados anteriores y enunciaremos otros nuevos. Un espacio de dimensión infinita es un espacio que no es de dimensión finita. La importancia de estos espacios y los operadores lineales definidos puede apreciarse mencionando algunos ejemplos como el operador $\frac{d}{dx}$ y el operador $f \to \int_x f d\mu$.

4-A Enunciado del Teorema Espectral en Dimensión Infinita

Hay una correspondencia uno a uno entre operadores autoadjuntos A y medidas de proyección $\{P_\lambda\}$ sobre $\mathcal{H}$, la correspondencia es dada por $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda$, si $g(\cdot)$ es una función de Borel de R en R, se tiene $g(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) dP_\lambda$. Para explicar $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda$, supon que un número finito de números $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ son dados y ordenados de modo que $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n$ y definamos una función P_λ por $P_\lambda = \sum\limits_{\lambda_k \leq \lambda} Q_k$ donde la suma consiste de los sumandos de Q_k para los cuales $\lambda_k \leq \lambda$. Donde Q_k es la proyección en el espacio generado por los eigenvectores de A que corresponden a λ_k, P_λ es una familia espectral. La integral $A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dP_\lambda$ es en este caso igual a $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k Q_k$ y consecuentemente representa un operador con eigenvalores λ_k. Los espacios correspondientes de los eigenvectores son entonces subespacios sobre los cuales los operadores Q_k proyectan. En otras palabras, la fórmula de A es un método de escribir al operador A en forma diagonal. En general la integral $\int_R f(\lambda) dP_\lambda$ se define de manera análoga a la integral de Riemann, i,e, esta integral se aproxima por las sumas $\sum\limits_{i \in A} f(\lambda_i)[P_{\lambda_i} - P_{\lambda_{i-1}}]$.

Ejemplo 1

1. Para el espacio de Hilbert complejo tomemos $\mathcal{H} = L_2(0,1)$. Definimos $T:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por $(T\psi)(x) = x\psi(x), \psi \in D(T) = \mathcal{H}$, claramente T es lineal y autoadjunto. Sea $\{E_x\}$ la familia de operadores de proyección definida por $(E_x\psi)(z) = [\{^{\psi(z), z \leq x}_{0, z > x}$. Los siguientes son inmediatos:

a). $E_x E_y = E_y E_x, x \leq y, i, e, E_x \leq E_y, x \leq y$.

b). $\|E_{x+\epsilon}\psi - E_x\psi\|^2 = \int_x^{x+\epsilon} |\psi(y)|^2 dy \to 0$ cuando $\epsilon \to 0$.

Así $E_{x+\epsilon} \to E_x$ si $E \to 0$,es razonable suponer que $\psi(x)$ es cero fuera de $[0,1]$,

$\Rightarrow$ se sigue que $E_x = 0, x < 0, E_x = I, x > 1, \Rightarrow \{E_x\}$ es una familia espectral. Una descomposición espectral para T se denota por

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x d(E_x\psi, \phi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x d\left[\int_0^1 E_x\psi(y)\overline{\phi(y)}dy\right] = \int_0^1 x d\left[\int_0^x \psi(y)\overline{\phi(y)}dy\right] \\ &= \int_0^1 x\psi(x)\overline{\phi(x)}dx = (T\psi, \phi) \end{aligned}$$

El límite se sigue de la definición de E_x y de que E_x es una función constante de x fuera de $[0,1]$. Así T tiene la representación espectral $T = \int_{-\infty}^{+\infty} x dE_x$ (1), notamos además que en

$$(E_x\psi,\phi) - (E_{x-\epsilon}\psi,\phi) = \int_{x-\epsilon}^{x} \psi(y)\overline{\phi(y)}dy$$

el miembro derecho tiende a cero si $\epsilon \to 0$, por tanto $(E_x\phi,\psi)$, como funcional de x es también continua en la parte izquierda. Así, w definida por $w(x) = (E_x\psi,\phi)$ es una función continua de x.

2. Definamos $T:\mathcal{H} \to \mathcal{H} = L_2(R)$ y $(T\psi)(x) = x\psi(x), \psi \in D(T) = \mathcal{H}$.

Con una familia espectral definida como en el ejemplo anterior, esto muestra que T además tiene una descomposición espectral como en (1). Sin embargo la familia espectral tiene la propiedad de que E_x crece sobre $-\infty < x < \infty$ con $E_x \to 0$ si $x \to -\infty$ y $E_x \to I$ si $x \to +\infty$. Estos ejemplos ilustran algunas de las dificultades a las cuales uno llega cuando se trabaja en espacios de dimensión infinita.

4-B Teoremas de Stone y Wiener

Algunas de las aplicaciones en las cuales se puede ver la teoría espectral es mediante el teorema de Stone, pero necesitamos tanto para su enunciado como para su demostración de las siguientes definiciones:

Definición

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una familia $\{B(t): t \in R\}$ de operadores asociados de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ se llama **grupo de un parámetro** si $B(0) = I$ y $B(s)B(t) = B(s+t)\ \forall\ s,t \in R$. El grupo de un parámetro $\{B(t): t \in R\}$ es **fuertemente continuo** si $B(\cdot)f : R \to \mathcal{H}$, $t \mapsto B(t)f$ es continua $\forall\ f \in \mathcal{H}$.

Definición

Sea $\{B(t): t \in R\}$ un grupo de un parámetro de operadores sobre $\mathcal{H}$. El operador A definido por la fórmula:

$D(A) = \left\{ f \in \mathcal{H}\!: \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B(t)-I)f \ existe \right\}, Af = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(B(t)-I)f \ para\ f \in D(A)$ se llama **generador infinitesimal** de $\{B(t): t \in R\}$.

Teorema. Sea T un operador autoadjunto sobre un espacio complejo $\mathcal{H}$, sea $E(s)$ la familia espectral de T, y $U(t) = e^{itT} = \int e^{its} dE(s)$ para t$\in R \Rightarrow \{U(t): t \in R\}$ es un grupo unitario fuertemente continuo. El generador infinitesimal es iT. Tenemos $U(t)f \in D(T) \forall f \in D(T) y t \in R$.

Teorema de Stone

Sea $\{U(t): t \in R\}$ un grupo unitario fuertemente continuo sobre un espacio complejo $\mathcal{H}$, $\Rightarrow \exists$ un operador autoadjunto T determinado únicamente sobre $\mathcal{H}$ para $U(t) = e^{itT}\ \forall\ t \in R$. Si $\mathcal{H}$ es separable $\Rightarrow$ la continuidad fuerte puede ser remplazada por una medida suave,i.e, es suficiente para pedir que la función $\langle f, U(\cdot)g\rangle : R \to C, t \longmapsto \langle f, U(t)g\rangle$ sea medible $\forall\, f, g \in \mathcal{H}$.

Prueba

$U(t) = e^{itT} \Rightarrow$ que iT es generador infinitesimal de $\{U(t) : t \in R\}$. Esto prueba la unicidad de T , y proporciona una oportunidad de construir T. Sea A generador infinitesimal de $\{U(t) : t \in R\}$ y $T = iA$. Mostremos que T es esencialmente autoadjunto y $U(t) = e^{it\overline{T}}$. Mientras que $i\overline{\mathrm{T}}$ es generador infinitesimal de $\{U(t) : t \in R\} \Rightarrow$ que $\mathrm{T} = \overline{\mathrm{T}}$. Primero, supongamos que el grupo es fuertemente continuo, $D(A)$ es denso $\forall\, \varphi \in C_0^\infty(R)$ y cada $f \in \mathcal{H}$ la igualdad $f_\varphi = \int \varphi(s)$ $U(s)f ds$, define una $f_\varphi \in \mathcal{H}$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(U(t) - I)f_\varphi &= \frac{1}{t}\int \varphi(s)(U(s+t) - U(s))f ds \\
&= \frac{1}{t}\int [\varphi(s)U(s+t) - \varphi(s)U(s)]\, f ds \\
&= \frac{1}{t}\int [\varphi(s-t)U(s) - \varphi(s)U(s)]\, f ds \\
&= \int \frac{1}{t}\left[\varphi(s-t) - \varphi(s)\right] U(s)f ds \to -\int \varphi'(s)U(s)f ds \quad \text{si} \quad t \to 0.
\end{aligned}$$

El conjunto $D_0 = \{f_\varphi : f \in \mathcal{H}, \varphi \in C_0^\infty(R)\} \subset D(A)$, si (φ_n) es una sucesión de $C_0^\infty(R)$ $\ni \varphi_n(s) =$ 0 para $|s| \geq \frac{1}{n}, \Rightarrow \varphi_n(s) \geq 0$ $\forall$s$\in R$.

1. $\int \varphi_n(s)ds = 1 \forall n \in N, \Rightarrow f_{\varphi_n} \to f$ si n$\to \infty$,puesto que $\|f_{\varphi_n} - f\| = \|\int \varphi_n(s)(U(s) - I)f ds\| \leq$ $\sup\left\{\|(U(s) - I)f\| : \frac{-1}{n} \leq s \leq \frac{1}{n}\right\}$

$\Rightarrow$ que D_0 y $D(A)$ son densos en $\mathcal{H}$. $T = -iA$ es simétrico si $f, g \in D(T) = D(A)$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle g, Tf\rangle &= -i\,\langle g, Af\rangle = -\lim_{t\to 0} i\left\langle g, \frac{1}{t}(U(t) - I)f\right\rangle = -\lim_{t\to 0} i\left\langle \frac{1}{t}(U(-t) - I)g, f\right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0} i\left\langle \frac{1}{-t}(U(-t) - I)g, f\right\rangle = i\,\langle Ag, f\rangle = \langle Tg, f\rangle .
\end{aligned}$$

Si $R(\pm i - T)$ es denso en $\mathcal{H}$ y $g \in R\,(i - T)^\perp = N(i + T^*)$ $\forall$ $f_\varphi \in D_0$ y $\forall t \in R$

$$U(t)f_\varphi = U(t)\int \varphi(s)U(s)f ds = \int \varphi(s-t)U(s)f ds \in D_0.$$

De aquí

$$\frac{d}{dt}\langle g, U(t)f_\varphi\rangle = \langle g, AU(t)f_\varphi\rangle = \langle A^* g, U(t)f_\varphi\rangle = \langle -iT^* g, U(t)f_\varphi\rangle = -\langle g, U(t)f_\varphi\rangle .$$

$h(t) = \langle g, U(t)f_\varphi\rangle$ es solución de la ecuación diferencial $h' = h$, i.e, tenemos que $h(t) = e^{-t}h(0), \Rightarrow U(t)$ es unitaria y h acotada; esto es posible solo si $\langle g, f_\varphi\rangle = \langle g, U(0)f_\varphi\rangle = h(0) = 0$. Por tanto, el dominio es $\forall\ f_\varphi D_0$, luego $g = 0, \Rightarrow \overline{R(i-T)} = H$, se puede probar similarmente que $\overline{R(-i-T)} = H$, si T es esencialmente autoadjunto. Sean $U(t) = e^{it\overline{T}}$y $V(t) = e^{it\overline{T}}$ y $f \in D_0$, de $f \in D(\overline{T})$ tenemos que $V(t)f \in D(\overline{T})$ y $\frac{d}{dt}V(t)f = i\overline{T}\ V(t)f$. Por tanto, $U(t)f \in D_0 \subset D(T)\forall t \in R$, de aquí se sigue que

$$\frac{d}{dt}(U(t)f - V(t)f) = iTU(t)f - i\overline{T}V(t)f = i\overline{T}(U(t)f - V(t)f),$$

por ser $\overline{T}$ autoadjunto.
$\frac{d}{dt}\|U(t)f - V(t)f\|^2 = 2\operatorname{Re}\left\langle U(t)f - V(t), i\overline{T}(U(t)f - V(t)f)\right\rangle = 0 \Rightarrow U(t)f = V(t)f\forall t \in R$ y $\forall f \in D_0$ porque $U(0)f = V(0)f$, por tanto D_0 es denso, esto $\Rightarrow U(t) = V(t) = e^{it\overline{T}}$,esto prueba que medida débil $\Rightarrow$ continuidad fuerte en caso separable. Sea $f \in \mathcal{H}$, si $t \longmapsto \langle U(t)f, g\rangle$ es acotado y medible, $g \in \mathcal{H}$ y $g \longmapsto \int_0^a \langle U(t)f, g\rangle\, dt$ es lineal continua con norma $\leq a\|f\|$ $\forall$ $a > 0$. Por el teorema de representación de Riesz $\exists$ $f_a \in \mathcal{H}$ para $\langle f_a, g\rangle = \int_0^a \langle U(t)f, g\rangle\, dt$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\langle U(s)f_a, f\rangle &= \langle f_a, U(-s)g\rangle = \int_0^a \langle U(t)f, U(-s)g\rangle\, dt = \int_0^a \langle U(t+s)f, g\rangle\, dt \\ &= \int_s^{a+s} \langle U(t)f, g\rangle\, dt,\end{aligned}$$

Así,

$$|\langle U(s)f_a, g\rangle - \langle f_a, g\rangle| \leq \left|\int_0^s \langle U(t)f, g\rangle\, dt\right| + \left|\int_a^{a+s} \langle U(t)f, g\rangle\, dt\right| \leq 2\,|s|\,\|f\|\,\|g\|.$$

Por tanto,
$\langle U(s)f_a, g\rangle \rightarrow \langle f_a, g\rangle$ si $s \rightarrow 0$, i,e., $U(\cdot)f_a$ es débilmente continua en el orígen. De $\|U(s)f_a\| = \|f_a\|$, sigue la continuidad de $U(\cdot)f_a$ en el orígen que $\Rightarrow \|U(s)f_a - f_a\|^2 = \|U(s)f_a\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle U(s)f_a, f_a\rangle + \|f_a\|^2 \rightarrow 0$ si $s \rightarrow 0$.
En resumen, se muestra que f_a es denso en $\mathcal{H}$ y $U(s)$es fuertemente continua en el orígen y en todas partes. Sea h ortogonal $\forall$ f_a, y $\{e_n : n \in N\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\Rightarrow$ $\int_0^a \langle U(t)e_n, h\rangle\, dt = \langle e_n, a, h\rangle = 0\ \forall n \in N$ y $a > 0, \Rightarrow$ que $\forall$ $n \in N$ se tiene $\langle U(t)e_n, h\rangle = 0$ en $(0, \infty), \Rightarrow \exists\ t_0 > 0 \ni \langle U(t_0)e_n, h\rangle = 0\ \forall n \in N$, como $U(t_0)$ es unitario, $\{U(t_0)e_n : n \in N\}$ es una base ortonormal, por tanto, debemos tener $h = 0$..
Para el enunciado del teorema de Wiener necesitamos, el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.

Teorema. Sea (f_n) una sucesión de funciones integrables la cual converge a cualquier función f medible real-valuada. Si $\exists$ una función integrable $g \ni |f_n| \leq g\ \forall n, \Rightarrow f$ es integrable y

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

Teorema de Wiener

Sea $F_\mu(t)$ la transformada de Fourier de una medida finita μ, y supongamos que $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ son puntos discretos de μ, $\Rightarrow \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T dt\, |F_\mu(t)|^2 = \sum\limits_n \mu(\{\lambda_n\})^2$ (1)

En particular, si el límite del lado izquierdo es cero $\Rightarrow \mu_d = 0$, i,e, μ es puramente continua.

Prueba.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int\limits_0^T dt\, |F_\mu(t)|^2 &= \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt \left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} d\rho(\lambda)\right\}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda' t} d\rho(\lambda')\right\} \\ &= \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda') e^{-i(\lambda-\lambda')t}\end{aligned}$$

Entonces, para una medida finita μ, la integral triple es absolutamente convergente, no importa el orden de la integración. Integrando primero con respecto a t, obtenemos:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda') F_T(\lambda, \lambda')$, con $F_T(\lambda,\lambda') = \begin{cases} \frac{i(e^{-i(\lambda-\lambda')T}-1)}{(\lambda-\lambda')T} & para\ (\lambda\neq\lambda') \\ 1\ para\ (\lambda=\lambda') \end{cases}$

Entonces

$\lim\limits_{T\to\infty} F_T(\lambda,\lambda') = \chi(\lambda,\lambda')$, $con\ \chi(\lambda,\lambda') = \begin{cases} 1\ para\ (\lambda=\lambda'), \\ 0\ en\ otros\ casos \end{cases}$

Aplicando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue a la parte izquierda de (1), obtenemos, cuando T$\to\infty$,

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda')\chi(\lambda,\lambda')$.

Si fijamos λ' e integramos con respecto a λ, no habrá contribución a menos que λ' sea un punto discreto de la medida. Por ejemplo, si $\lambda' = \lambda_n$, la integración en λ da:

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda)\chi(\lambda,\lambda_n) = \mu(\{\lambda_n\})$.

Integrando ahora con respecto a λ', y sumando las contribuciones de cada punto discreto en la integral, se obtiene (1). Si el límite en (1) es cero, entonces puede no haber puntos discretos de la medida μ, el cual en este caso es puramente continuo.

Corolario

Sea $\{U(t) : t \in R\}$ un grupo unitario fuertemente continuo, y sea iT su generador infinitesimal, entonces el problema con valores iniciales

$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}u(t) = Tu(t), u(0) = f$

tiene solución única $\forall f \in D(T)$ y es $u(t) = U(t)f$. (Una solución es una función diferenciable continuamente definida sobre R con valores en $D(T)$ que satisface la ecuación diferencial).

Prueba

Como $U(t)f \in D(T)\ \forall f \in D(T)$ y $t \in R$, $u(t) = U(t)f$ es solución del problema con valores iniciales, si u y v son soluciones $\Rightarrow u(0)-v(0) = 0$, y $\frac{d}{dt}\|u(t) - v(t)\|^2 = 2\,\mathrm{Re}\,\langle u(t) - v(t), iT(u(t) - v(t))\rangle$ 0,i,e, $u(t) = v(t)\ \forall t \in R$.

Ejemplo 2

Tomemos el siguiente problema, con valores iniciales

$U_t(x,t) + U_x(x,t) = 0, x \in R, t \in R$ (1)

$U(x,0) = f(x)$ (2)

Por inspección, este problema tiene una solución

$U(x,t) = f(x-t), x \in R, t \in R$ (3)

La cual representa una onda viajera en el eje positivo x con velocidad unitaria. Una alternativa para una solución a (1) y (2) es usar transformadas F, F^* definidas por:

$(Ff)(k) \equiv \widehat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2k}}\int_R e^{-ikx}f(x)dx$ (4)

$f(x) = (F^*\widehat{f})(x) = \frac{1}{\sqrt{2k}}\int_R e^{-ikx}\widehat{f}(k)dk$ (5),

donde $F^* = F^{-1}$es la transformada inversa de Fourier, tomando la transformada de Fourier de (1) y (2) obtenemos

$\widehat{u}_t(k,t) + ik\widehat{u}(k,t) = 0, k \in R, t \in R$ (6)

$\widehat{u}(k,0) = \widehat{f}(k), k \in R$ (7)

La ecuación diferencial ordinaria (6) tiene una solución satisfaciendo (7) dada por

$\widehat{u}(k,t) = e^{-ikt}\widehat{f}(x)$

El teorema de inversión de Fourier (4) y (5) permite obtener

$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{ikx}\widehat{u}(k,t)dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{ik(x-t)}\widehat{f}(k)dk = f(y), y = x - t$

de aquí que se recupera (3).

Otro método para obtener una solución a (1) y (2), es como un problema en un espacio de Hilbert. Por ejemplo en $L_2(R)$ se representa a (1) en la forma siguiente

$0 = u_t(x,t) + u_x(x,t) = u_t(x,t) + i(-iu_x(x,t)) = u_t(x,t) + iL_o u(x,t)$ (8), donde $L_o \equiv -i\frac{\partial}{\partial x}$ (9)

y introduciendo A_o definido por $A_o : L_2(R) \to L_2(R) \equiv \mathcal{H}$,

$A_o u = L_o u \forall u \in \mathcal{D}(A_o), \mathcal{D}(A_o) = \{u \in \mathcal{H} : L_o u \in \mathcal{H}\}$ (10)

Entonces el problema con valores iniciales (1),(2) puede ser reformulado como el problema de encontrar $u \in \mathcal{H}\ \ni u_t + iA_0 u = 0\ u \in \mathcal{D}(A_0)$ (11), $u(0) = f \in \mathcal{H}$ (12), u se interpreta como una función valuada $L_2(R)$ de t. El problema (11), (12) tiene solución de la forma:

$u(x,t) = exp(-itA_0)f(x) \equiv U_0(t)f(x)$ (13)

y para entenderla es importante hacer una interpretación de $U_0(t) \equiv exp(-itA)$. Expandiendo el lado derecho da $exp(-itA_o) = 1 - itA_o + \frac{1}{2!}(-itA_o)^2 + \cdots$
Entonces

$$\begin{aligned}(FU_o(t)f)(k) &= F([1 - itA_o + \frac{1}{2!}(-itA_o)^2 + \cdots]f)(k) \\ &= (\widehat{f} - itk\widehat{f} + \frac{1}{2!}(-itkA_o)^2\widehat{f} + \cdot\cdot)(k) = \exp(-itk)\widehat{f}(k).(14)\end{aligned}$$

Como $\exp(-itk)\exp(-ik\tau) = \exp(-ik[t+\tau])$, de (14) $U_o(t)U_o(\tau) = U_o(t+\tau)(15)$, $\Rightarrow$ que $\{U_o(t)\}_{t\in R}$ es un grupo un-parámetro. Además, $U_o(t)U_o(-t) = U_o(-t)U_o(t) = U_o(0) = I, \Rightarrow$ $U(t)$ es invertible con $U_o(t)^{-1} = U_o(-t)$.(16). También, $\|U_o(t)f\|^2 = \|(U_o(t)f)^\wedge\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-ikt}\widehat{f}\right|^2 dk = \left\|\widehat{f}\right\|^2 = \|f\|^2$. Por tanto $U_o(t)$ es un operador unitario en $\mathcal{H}$ y $\{U_o(t)_{t\in R}\}$ es un grupo unitario de un parámetro en $\mathcal{H}$. Ahora, usando la transformada inversa de Fourier de (5), tenemos

$$(U_o(t)f)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}((U(t)f))^\wedge(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}e^{-ikt}\widehat{f}(k)dk = f(x-t).$$

Así, $U_o(t)$ induce una translación del argumento por una cantidad t. Combinando (13) y la siguiente expresión

$$\begin{aligned}F(A_of)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R e^{-ikx}\left\{-i\frac{df}{dx}\right\}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{[-if(x)e^{ikx}]_{-\infty}^{\infty} + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}e^{-ikx}f(x)dx\right\} \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}f(x)dx = k\widehat{f}(k).(17).\end{aligned}$$

Vemos que la solución del problema está dada por $u(x,t) = U_o(t)f(x) = f(x-t)$. Por tanto se recupera la solución de (3).

Ejemplo 3

Las vibraciones transversales de una cuerda que ocupa la región $\Omega = R^+$ son gobernadas típicamente por un problema con valores a la frontera iniciales de la forma

$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A)u(x,t) = 0, (x,t) \in \Omega x R^+$ (1)

$u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), u(0,t) = 0$ (2),

con $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H} = L_2(\Omega)$ definida por

$Au = -u_{xx}, u \in \mathcal{D}(A), \mathcal{D}(A) = \{u \in \mathcal{H} : u_{xx} \in \mathcal{H} \ni u(0,t) = 0\}$.

Una solución a este problema con valores iniciales puede ser escrito en la forma

$u(x,t) = (cost A^{\frac{1}{2}})u_0(x) + A^{-\frac{1}{2}}(sent A^{\frac{1}{2}})u_1(x)$ (3)

Para dar a la representación un uso práctico, debemos interpretar los términos como $(cost A^{\frac{1}{2}})u_0(x)$, esto puede ser hecho por el teorema espectral que tiene asignada una familia espectral $\{E_\lambda\}$ de A que se determina, esto se puede hacer por la fórmula de Stone y para usarla, primero computamos el resolvente $R(t \pm i\epsilon)$. A esto se considera el problema siguiente con valores a la frontera $(A-\lambda)v(x) = f(x)$,

$v(0) = 0$ (4), esta ecuación diferencial ordinaria tiene solución dada por $v(x) = (A-\lambda)^{-1}f(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy$ (5), donde la función de Green es de la forma,

$$G(x,y) = \frac{e^{i\sqrt{\lambda_x}} sen\sqrt{\lambda_y}}{\sqrt{\lambda}}, 0 \leq y \leq x, \frac{e^{i\sqrt{\lambda_y}} sen\sqrt{\lambda_x}}{\sqrt{\lambda}}, 0 \leq x \leq y.$$

Ahora definamos

$\lambda_+ \equiv t + i\epsilon = Re^{i\theta}; R = \sqrt{t^2+\epsilon^2}, \theta = tan^{-1}(\frac{\epsilon}{t}), \lambda_- \equiv t - i\epsilon = Re^{i\theta}$

eligiendo $\sqrt{\lambda_+} = R^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\theta}{2}}, \sqrt{\lambda_-} = R^{\frac{1}{2}} e^{i(\pi - \theta/2)}$, si $\epsilon \downarrow 0$, $\sqrt{\lambda_+} \longrightarrow +\sqrt{t}$, $\sqrt{\lambda_-} \longrightarrow -\sqrt{t}$, por tanto

$$R(t+i\epsilon) - R(t-i\epsilon) = (A-\lambda_+)^{-1} - (A-\lambda_-)^{-1},$$

de (5) se obtiene

$$(A-\lambda_\pm)f(x) = \frac{sen\sqrt{\lambda_{\pm x}}}{\sqrt{\lambda_\pm}} \int_x^\infty f(y)e^{i\sqrt{\lambda_{\pm y}}dy} + \frac{e^{i\sqrt{\lambda_{\pm x}}}}{\sqrt{\lambda_\pm}} \int_0^x f(y) sen(\sqrt{\lambda_{\pm y}})dy.$$

Entonces

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}[R(t+i\varepsilon) - R(t-i\varepsilon)]f(x) = \frac{2i sen\sqrt{t_x}}{\sqrt{t}} \int_0^\infty f(y) sen(\sqrt{t_y})dy.$

Por convención suponemos que $f, g \in c_0[a,b]$, $a < b < \infty$. De la fórmula de Stone se deriva

$$([E_b - E_a]f, g) = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \int_0^\infty \frac{2i sen\sqrt{t_x}}{\sqrt{t}} \int_0^\infty f(y) sen(\sqrt{t}\,)y dy \overline{g(x)} dx dt.$$

Con el cambio de variable $s = \sqrt{t}$ e introduciendo $\widetilde{f}(s) = (2/\pi)^{1/2} \int_0^\infty f(y) sen(sy)dy$ (6), entonces

$$([E_b - E_a]f, g) = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \widetilde{f}(s)\overline{\widetilde{g}(s)}ds \qquad (7),$$

y se puede mostrar que $\sigma(A) \subset (0,\infty)$, $\Rightarrow E_a \rightarrow 0$ si $a \rightarrow 0$, $\Rightarrow$ de (7) $(E_\lambda f, g) = \int_0^{\sqrt{\lambda}} \widetilde{f}(s)\overline{\widetilde{g}(s)}ds$ (8), $\Rightarrow (E_\lambda f)(x) = (\frac{2}{\pi})^{1/2} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \widetilde{f}(s) sen(sx)ds \equiv \int_0^{\sqrt{\lambda}} \widetilde{f}(s)\theta_s(x)ds$ (9), θ_s se introduce en la presentación. Para $f \in \mathcal{D}(A)$, el teorema espectral $(Af)(x) = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda f(x)$, obtiene $dE_\lambda f(x) = \frac{d}{d\lambda}(\int_0^{\sqrt{\lambda}} \widetilde{f}(s)\theta_s(x)ds)d\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\widetilde{f}(\sqrt{\lambda})\theta_{\sqrt{\lambda}}(x)d\lambda = \widetilde{f}(s)\theta_s(x)ds$, $s = \sqrt{\lambda}$ (10).

Por tanto

$$(Af)(x)=\int_0^\infty \lambda dE_\lambda f(x)=\int_0^\infty s^2\widetilde{f}(s)\theta_s(x)ds=(\frac{2}{\pi})^{1/2}\int_0^\infty s^2\widetilde{f}(s)sen(sx)ds,$$

es la transformada de Fourier del seno de f. Además (3) ahora toma la forma,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= cos(tA^{1/2})u_0(x)+A^{-1/2}sen(tA^{1/2})u_1(x)\\ &= \int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}t dE_\lambda u_0(x)+\int_0^\infty \frac{sen\sqrt{\lambda t}}{\sqrt{\lambda}}dE_\lambda u_1(x)\\ &= \int_0^\infty \cos(st)\widetilde{u}_0(s)\theta_s(x)ds+\int_0^\infty \frac{sen(st)}{s}\widetilde{u}_1(s)\theta_s(x)ds. \qquad (11)\end{aligned}$$

Una vez más las condiciones iniciales u_0 y $u_1$son dadas explicitamente, y se calcula la transformada de Fourier del seno de $\widetilde{u}_o$ y $\widetilde{u}_1$ respectivamente usando (6), y entonces se obtiene de (11) una representación completa de la solución asociada.

Una ilustración ha sido dada por Leis [11] quien consideró el caso siguiente

$u_0(x)=0, u_1=(x)=2\left\{\frac{senx}{x^2}-\frac{\cos x}{x}\right\}$ (12),

De aquí

$$\widetilde{u}_1(s)=2s(\frac{2}{\pi})^{1/2}\int_0^\infty \frac{senx\cos sx}{x}dx\equiv 2s(\frac{2}{\pi})^{1/2}g(s)$$

Para calcular $g(s)$ se toma $\phi\in C_0^\infty(R^+)$ arbitraria, y se considera que

$$\begin{aligned}(g,\phi') &= lim_{R\to\infty}\int_0^R\int_0^\infty \frac{senx\cos sx}{x}\phi'(s)dsdx\\ &= (\frac{\pi}{2})^{1/2}\int_0^\infty senx\widetilde{\phi}(x)dx=\frac{\pi}{2}\phi(1) \qquad (13).\end{aligned}$$

Este resultado es la transformada de Fourier del seno inverso, así (13) se obtiene de (6) para $s=1$. Además

$$(g,\phi')=(-1)(g',\phi)=\frac{\pi}{2}\phi(1)=\frac{\pi}{2}(\phi,\delta(s-1))\Rightarrow g'(s)=-\frac{\pi}{2}\delta(s-1) \qquad (14)$$

integrando (14) obtenemos $g(s)-g(0)=-\frac{\pi}{2}\int_0^s\delta(\xi-1)d\xi=-\frac{\pi}{2}H(s-1)$,cuando $g(0)=\frac{\pi}{2}$, podemos reescribir esta en la forma $g(s)=\frac{\pi}{2}[1-H(s-1)]=\frac{\pi}{2}H(1-s)$, y $\widetilde{u}_1(s)=2s(\frac{\pi}{2})^{1/2}H(1-s)$, y (11) se reduce a

$u(x,t)=2\int_0^1 sen(st)sen(sx)ds=\int\{\cos(t-x)s-\cos(t+x)s\}ds=\frac{sen(t-x)}{t-x}-\frac{sen(t+x)}{t+x}$, la cual exhibe las componentes de las ondas viajeras.

Para ver algunas de las aplicaciones del teorema espectral a la mecánica cuantica, es necesario enunciar algunos conceptos acerca de teoría de la medida.
Una familia X de subconjuntos de un conjunto R se llama una **σ-álgebra** (o σ-campo) en caso que
1. $\emptyset, R \in X$.
2. Si $A \in X$, $\Rightarrow$ el complemento $C(A) = R \backslash A \in X$.
3. Si (A_n) es una sucesión de conjuntos en X, $\Rightarrow$ la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in X$. Un par ordenado (R, X) que consta de un conjunto R y una σ-álgebra X de subconjuntos de R se llama espacio medible.
Un conjunto A se dice **medible** si $A \in X$.Cuando esté claro a qué σ-álgebra X nos referimos, hablaremos solamente de conjuntos medibles, sin mencionar explicitamente a la σ-álgebra X.
Una **medida** es una función μ real-valuada y extendida a $R^+ \cup \{\infty\}$, definida sobre una σ-álgebra X de subconjuntos R tal que
1.$\mu(\emptyset) = 0$,
2.$\mu(E) \geq 0 \forall E \in X$, y
3. μ es numerablemente aditiva en el sentido de que si (E_n) es cualquier sucesión disjunta (i,e, $E_n \cap E_m = \emptyset$ si $n \neq m$), de conjuntos en X , $\Rightarrow$,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Si $\mu \longrightarrow +\infty$, se remarca que la apariencia de los valores $+\infty$ en el lado derecho de la ecuación significa o que $\mu(E_n) = +\infty$ para algunos n o que la serie de términos no-negativos en el lado derecho de la ecuación es divergente. Si una medida no tiende a $+\infty$, se dice que es finita.
Más generalmente, si existe una sucesión (E_n) de conjuntos en X con $R = \bigcup E_n$ y tal que $\mu(E_n) < +\infty \ \forall n$, entonces decimos que μ es σ-finita.
Denotemos a la colección de todas las funciones X-medibles de R a R por $M(R, X)$ y la colección de todas las funciones no-negativas X-medibles de R a R por $M^+ = M^+(R, X)$.
Una función real-valuada es simple si esta tiene solamente un número finito de valores. Una función simple medible φ puede ser representada en la forma

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_{j\chi_{E_j}},$$

donde $a_j \in R$ y χ_{E_j} es la función característica de unconjunto E_j en X.(la función característica de E es la función χ_E definida por $\chi_E(x) = 1$, si $x \in E$ o $\chi_E(x) = 0$, si $x \notin E$).
Si φ es una función simple en $M^+(R, X)$ con la representación estándar de la definición anterior, definimos a la integral de φ con respecto a μ como un número real extendido de la siguiente forma

$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$

donde $M^+(R, B)$, denota el conjunto de funciones $f : (R, B) \rightarrow (R^+, B)$ Borel-medibles, es decir, $f^{-1}(B) \in B$ si $B \in B$.

Una función de R a R se dice **X-medible**, si $\forall$ real α el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathbf{X}$.

Definición. Si $f \in M^+(R, X)$,definimos la integral de f con respecto a μ como el número real extendido:

$\int f d\mu = \sup \int \varphi d\mu$,

donde el supremo es extendido sobre toda función simple φ en $M^+(R, X)$, satisfaciendo

$0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \; \forall x \in R$

Definición. La colección $L = L(R, X, \mu)$ de funciones integrables, consiste de todas las funciones medibles X reales-valuadas f, definidas sobre R , tales que las partes positivas y negativas $f^+ y\ f^-$, de f tienen integrales finitas respecto a μ. En este caso, definimos la integral de f con respecto a μ como

$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$ si $E \in X$, definimos $\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$, donde si $f : R \rightarrow R$, definimos $f^+(x) = \sup\{0, f(x)\}$ y $f^-(x) = \sup\{0, -f(x)\}$

4-C Dinámica Cuántica y Propiedades Espectrales

Sea $\mathcal{H}$ separable, $K{:}\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ un operador autoadjunto, y $\psi \in \mathcal{H}$ (con $\|\psi\| = 1$). La medida espectral μ_ψ de ψ está definida de manera única por

$$\langle \psi, f(H)\psi \rangle = \int_{\sigma(H)} f(x) d\mu_\psi(x)$$

$\forall$ función medible f, la forma de evolución del estado ψ, en la notación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica vine dado por $\psi(t) = e^{-iHt}\psi$. Varias cantidades se introducen para caracterizar esta evolución, una cantidad elemental es la probabilidad de sobrevivencia que da la probabilidad de encontrar a la partícula al tiempo t en su estado inicial ψ y es:

$|\langle \psi(0), \psi(t) \rangle|^2 = \left|\langle \psi, e^{-iHt}\psi \rangle\right|^2 = \left|\int_{\sigma(H)} e^{-ixt} d\mu_\psi(x)\right|^2 = \left|\widehat{\mu}_\psi(t)\right|^2$, esta probabilidad de sobrevivencia coincide con el cuadrado del valor absoluto de la transformada de Fourier de la medida espectral μ_ψ. Otra familia de cantidades de interés viene de varios operadores de expectación. Es decir,

$\langle A \rangle \equiv \langle A \rangle (t) \equiv \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle$,

donde A es un operador, en casos especiales de interés las A son compactas, tales como las proyecciones de dimensión finita, y ciertas A no-acotadas tales como momentos del operador de posición en

$$\ell^2(Z^d) : |X|^m \equiv \sum_{n \in Z^d} |n|^m \langle \delta_n, \cdot \rangle \delta_n,$$

donde $\delta_n(k) = \delta_{nk}$ y $m > 0$. Esta discusión envuelve cantidades de tiempo promedio cuyo comportamiento se ven relacionadas a propiedades de continuidad de medidas espectrales. Para cualquier función f de tiempo, se denota a esta como el tiempo promedio de Cesáro por:

$\langle f \rangle_T \equiv \langle f(t) \rangle_T \equiv \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt.$

Descomposición Espectral y Dinámica Cuántica.

Por teorema de descomposición de Lebesgue cualquier medida finita de Borel sobre R, puede ser descompuesta en sus partes, absolutamente continua, singular continua y puntual pura, es decir,

$d\mu = d\mu_{ac} + d\mu_{sc} + d\mu_{pp}$, aquí lo absolutamente continua, signifíca con respecto a la medida de Lebesgue, de tal forma que $d\mu_{ac}(x) = f(x)dx$ para alguna función medible f, la parte puntual pura, $d\mu_{pp}$, es una suma contable de medidas atómicas (de Dirac). La parte singular continua, $d\mu_{sc}$, se soporta sobre algún conjunto de medida cero de Lebesgue, y no da peso a cualesquier punto individual ($\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in R$. En teoría espectral clásica, se usa la descomposición de medida para establecer una descomposición correspondiente del espacio de Hilbert:

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \bigoplus \mathcal{H}_{sc} \bigoplus \mathcal{H}_{pp}$, donde

$\mathcal{H}_{ac} = \{\psi \mid d\mu_\psi \text{ es puramente absolutamente continua}\}$

$\mathcal{H}_{sc} = \{\psi \mid d\mu_\psi \text{ es puramente singular continua}\}$

$\mathcal{H}_{pp} = \{\psi \mid d\mu_\psi \text{ es puramente puntual}\}$

$\mathcal{H}_{ac}, \mathcal{H}_{sc}, y\mathcal{H}_{pp}$ son subespacios cerrados mutuamente ortogonales, los cuales son invariantes bajo $\mathcal{H}$.

Hay algunos resultados clásicos relacionados con la dinámica cuántica de la descomposición espectral, por ejemplo, el lema de Riemann-Lebesgue, que data de antes de 1903 y establece:

Teorema. (Lema de Riemann-Lebesgue). Si μ es una medida finita absolutamente continua $\Rightarrow$ su transformada de Fourier $\widehat{\mu}(t)$ obedece que $\widehat{\mu}(t) \longrightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ [13] .

Así, para cualquier $\psi \in \mathcal{H}_{ac}$ la probabilidad de sobrevivencia desaparece cuando $t \rightarrow \infty$. El teorema de Wiener, que demostramos arriba con la notación introducida se puede enunciar como:

Teorema (De Wiener). $\lim\limits_{T\to 0} \langle |\widehat{\mu}(t)|^2 \rangle_T = \sum\limits_{x\in R} |\mu(\{x\})|^2$. En particular, este implica:

Corolario $\lim\limits_{T\to\infty} \left\langle \left|\widehat{\mu}_\psi(t)\right|^2 \right\rangle_T = 0 \Longleftrightarrow P_{pp}\psi = 0$, donde P_{pp}, es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_{pp}$.

Teorema (De RAGE). $\lim\limits_{T\to\infty} \langle\langle A \rangle\rangle_T = 0\ \forall$ operador compacto $A \Longleftrightarrow \mu_\psi$ es puramente continua, este teorema tiene el siguiente corolario.

Corolario. Sea $\mathcal{H} = \ell^2(Z^d)$. Si $P_c\psi \neq 0$, donde P_c es la proyección sobre $\mathcal{H}_c$, $\Rightarrow \forall$ positivo m, $\lim\limits_{T\to\infty} \langle\langle |X|^m \rangle\rangle_T = \infty$.

Teorema. $\mathcal{H}_{ac} = \overline{\{\psi \mid \widehat{\mu}_\psi(t) \in L^2\}}$. El orden para describir algunos de estos resultados se inicia con una definición.

Definición. Sea μ una medida de Borel sobre R, $\alpha \in [0,1]$, y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue.

1. Decimos que μ es continua uniformemente $\alpha - H\ddot{o}lder$ (denotado por $U\alpha H$),si $\exists$ una $C \ni$ $\forall$ intervalo I con $|I| < 1, \mu(I) < C\,|I|^\alpha$.
2. Decimos que μ es continua y uniforme fuertemente si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que $\forall$ intervalo I con $|I| < \delta, \mu(I) < \varepsilon\,|I|^\alpha$. Strichartz, en un artículo de 1990 [13], probó el siguiente:

Teorema. Sea μ una medida finita $U\alpha H$, y $\forall\ f \in L^2(R, d\mu)$, denota:

$\widehat{f\mu} \equiv \widehat{f\mu}(t) \equiv \int e^{-ixt} f(x) d\mu(x)$, $\Rightarrow \exists\ C$ que depende solo de μ, $\ni \forall\ f \in L^2(R, d\mu)$ y $T > 0$, $\left\langle \left|\widehat{f\mu}\right|^2 \right\rangle_T < C \left\|f\right\|^2 T^{-\alpha}$, $\|f\|$ es la norma L^2 de f.

Cuando $f = 1$, este teorema deriva el siguiente

Corolario. Si μ es una medida finita $U\alpha H$, $\Rightarrow \exists\ C \ni \forall\ T > 0, \left\langle |\widehat{\mu}|^2 \right\rangle_T < CT^{-\alpha}$.

Guarneri en un artículo de 1989 usó una versión de este teorema para mostrar que $\forall$ operador autoadjunto $\mathcal{H}$ sobre $\ell^2(Z^d)$, si μ_ψ es $U\alpha H$, $\Rightarrow \left\langle\left\langle |X|^2 \right\rangle\right\rangle_T CT^{2\alpha/d}/\ln^2 T$, donde C es constante que depende solo de ψ. En 1993, Combes usó este teorema como lo probó Strichartz para mejorar ligeramente esta estimación y mostrar el siguiente:

Teorema. (Guarneri-Combes). Si $\mathcal{H}$ es autoadjunto sobre $\ell^2(Z^d)$ y μ_ψ es $U\alpha H \Rightarrow \forall\ m > 0\ \exists$ $C_{\psi,m}$, que depende solo de ψ y m $\ni \forall\ T > 0$, $\langle\langle |X|^m \rangle\rangle_T > C_{\psi,m} T^{m\alpha/d}$.

4-D Subordinación y Espectro del Operador de Schrödinger Unidimensional

La teoría de la subordinación permite una caracterización detallada y rigurosa del espectro de un operador de Schrödinger unidimensional [10] la cual necesita de las siguientes definiciones para el enunciado y prueba respectivamente, la prueba no se realiza en este trabajo.

Solución subordinada

Sea $f(r, \lambda)$ una solución no-trivial de la ecuación de Schrödinger $-f'' + fV = \lambda f$ en el intervalo $a < r < b$, para algún valor real fijo de λ. Supóngase que para cualquier solución $g(r, \lambda)$ de la ecuación de Schrödinger que no es múltiplo de $f(r, \lambda)$ tenemos:

$$\lim_{N \to b} \frac{\|f(\cdot,\lambda)\|_N}{\|g(\cdot,\lambda)\|_N} = 0$$

donde $\|\cdot\|_N$ es la norma para $\xi < N < b$ en $L^2(\xi, N)$, $\Rightarrow f(r,\lambda)$ es una solución subordinada de la ecuación de Schrödinger a una energía λ en el punto final $r = b$.

Definición de espectro

$R(L) = \{z \in C : (L - zI)^{-1}$ *es* continua $\}$, $\sigma(L) = C \setminus R(L) \subset R$.

Definición

Sea L un operador en $\mathcal{H}$, el **espectro singular continuo** de L es el espectro del operador $L\mid_{\mathcal{H}_{sc}}$denotado por $\sigma_{sc}(L)$ donde $(L\mid_{\mathcal{H}_{sc}})\varphi = L\varphi$ y $D(L\mid_{\mathcal{H}_{sc}}) = \mathcal{H}_{sc} \cap D(L)$

Definición
Sea L un operador en $\mathcal{H}$, el **espectro absolutamente continuo** de L es el espectro del operador $L\mid_{\mathcal{H}_{ac}}$denotado por $\sigma_{ac}(L)$, donde $(L\mid_{\mathcal{H}_{ac}})\varphi = L\varphi$ y $D(L\mid_{\mathcal{H}_{ac}}) = \mathcal{H}_{ac} \cap D(L)$
Definición
Sea L un operador en $\mathcal{H}$, el **espectro puramente puntual continuo** de L es el espectro del operador $L\mid_{\mathcal{H}_{pp}}$denotado por $\sigma_{pp}(L)$,de modo que $(L\mid_{\mathcal{H}_{pp}})\varphi = L\varphi$ y $D(L\mid_{\mathcal{H}_{pp}}) = \mathcal{H}_{pp} \cap D(L)$
Teorema. Sea $H = -\frac{d^2}{dr^2} + V(r)$ en $L^2(a,b)$. Supónga que $V(r)$ es acotado en $r = a$. Tome condiciones de frontera $f'(a)/f(a) = m(m = \infty$ corresponde a $f(a) = 0)$. Supónga que $r = b$ es punto límite [10].
1. Supónga que $\forall\ \lambda$ en el intervalo (λ_1, λ_2) una solución $u(r,\lambda)$ de la ecuación de Schrödinger $\exists$ y es subordinada en $r = b$, $\Rightarrow H$ tiene un espectro puramente singular en este intervalo.
2. Supónga que $\forall\ \lambda$ en el intervalo (λ_1, λ_2) no hay solución de la ecuación de Schrödinger que es subordinada secuencialmente uniforme en $r = b$, $\Rightarrow H$ tiene un espectro puramente continuo absolutamente en este intervalo.

Conclusiones

Se introdujeron conceptos del álgebra lineal tales como: vector, dependencia e independencia lineal , base, dimensión, función, transformación lineal, matriz y las propiedades del producto escalar. Se estudiaron operadores autoadjuntos y se enunció y demostró el teorema espectral en dimensión finita, esto es, el hecho de que toda matriz simétrica se pueda diagonalizar. A continuación pasamos al análisis funcional introduciendo los espacios de Hilbert y operadores tanto acotados como no acotados definidos en estos espacios, en particular los operadores autoadjuntos y normales. En seguida se enuncia el teorema espectral en dimensión infinita para lo cual se definen las familias espectrales y la integral respecto a estas. Luego se revisan algunas consecuencias que tiene este teorema, además de aplicaciones a la mecánica cuántica y a las ecuaciones diferenciales.
Se prueba el teorema de Stone y como consecuencia fundamental se da un corolario que nos permite expresar la solución de ecuaciones del tipo

$$\frac{1}{i}\frac{du}{dt} = -\Delta u + V(x)u, x \in R^d$$

$u(x,0) = f(x)$, como $u(x,t) = e^{it(-\Delta+V)}f(x)$, y usando el teorema espectral se define:

$$e^{it(-\Delta+V)} := \int_R e^{it\lambda}dE(\lambda).$$

Se muestra el uso de este teorema en ejemplos explícitos y se estudian algúnos aspectos de la dinámica de los sistemas involucrados.

Bibliografía

[1] M. A. Naimark, Linear Differential Operators, Frederick Ungar Publishing Co. Inc. New York, Part II, 1968.

[2] Joachim Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, 1980.

[3] Edgar Asplund, Lutz Bungart, A First Course in Integration, Holt, Rinehart, and Winston, Inc,.1966.

[4] Serge Lang, Algebra Lineal, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.

[5] Michael Reed, Barry Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic-Press, Vol. I, 1980.

[6] W.O. Amrein, Non-Relativistic Quantum Dynamics, D. Reidel Publishing Company, 1981.

[7] S. Friedberg, Algebra Lineal, Prentice Hall, 1987.

[8] Evar D. Nering, Linear Algebra and Matrix Theory, John Wiley and Sons, Inc.1963.

[9] Kôsaku Yosida, Functional Analysis, Springer-Verlag, 1971.

[10] D. B. Pearson, Quantum Scattering and Spectral Theory, Academic Press, 1988.

[11] G. F. Roach, An introduction to linear and nonlinear scattering theory, Longman, 1995.

[12] M. Hirsh, S. Smale, Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, 1974.

[13] Yoram Last, Journal of Functional Analysis 142, 406-445(1996).

[14] D. J. Gilbert and D. B. Pearson, Journal of Mathematical Analysis and Applications 128, 30-56 (1987).

[15] A. I. Máltsev, Fundamentos de Algebra Lineal, Mir Moscú, 1972.

[16] Garrett Birkhoff, Saunders Mac Lane, A Survey of Modern Algebra, The Macmillan Company, 1965.