

00365  
7



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

---

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS  
FACULTAD DE CIENCIAS

METODOS DE RETROPROYECCION PARA  
LA RECONSTRUCCION DE IMAGENES

T E S I S

Que para obtener el grado académico de  
MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

presenta

EDUARDO } TOBIAS GUZMAN

DIRECTOR DE TESIS: DR. JESUS LOPEZ ESTRADA

México, D. F.

Octubre de 2002

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# INDICE

Prólogo .....	I
Indice .....	V
Capítulo 1	
<i>Introducción a los métodos de retroproyección     para la tomografía computarizada de rayos x</i>	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Objetivos	2
1.3. Descripción del problema de reconstrucción de Imágenes por tomografía computarizada	3
1.4. La transformada de Radón y su dual	4
1.5. Los dominios de $f$ y $\mathfrak{R}f$	5
1.6. El operador dual $\mathfrak{R}^{\#}$	7
Capítulo 2	
<i>Métodos de transformadas</i>	8
2.1. Fórmula de inversión de Radón	9
2.2. El método de retroproyección	12
Capítulo 3	
<i>Métodos de retroproyección para haz en paralelo</i>	15
3.1. Convolución y la transformada de Hilbert	15
3.2. Derivación del método de convolución-retroproyección	17
3.3. Implementación del método de convolución-retroproyección	19
3.4. La transformada de Fourier	22
3.5. Elección de la función convolucionante	23
3.6. Experimentos	28
3.7. Comentarios de los experimentos	29

<b>Capítulo 4</b>	
<b><i>El método de la retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos y haz en abanico</i></b>	<b>30</b>
4.1. Antecedentes	30
4.2. Condición de muestreo de Nyquist	32
4.3. Resolución	37
4.4. Geometrías de escaneo	39
4.5. El algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos	40
4.6. Experimentos	45
4.7. El algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico	45
4.8. Experimentos	48
4.9. Comentarios de los Experimentos	48
<b>Capítulo 5</b>	
<b><i>Conclusiones y trabajo a futuro</i></b>	<b>49</b>
<b>Apéndice</b>	<b>52</b>
<b>REFERENCIAS</b>	<b>68</b>

## Prólogo

En el ámbito internacional la **tomografía**, cuyo significado derivado del Griego se puede expresar como el estudio de un objeto mediante el análisis de sus secciones o cortes finos transversales, ha tenido un gran desarrollo en los últimos 20 años. Durante los cuáles, se han desarrollado y construido tomógrafos bastante sofisticados para la realización de tomogramas, destacando los que se utilizan en Medicina para efectuar estudios con el fin de detectar y localizar problemas, tumores o cánceres en algún órgano vital o parte del cuerpo de un individuo. La relevancia de esta técnica cuya maravillosa virtud radica en el hecho que mediante su aplicación es posible averiguar el 'interior' de un objeto sin tener que destruirlo, se puso de manifiesto con el otorgamiento del premio Nobel en Medicina 1979 a G. Hounsfield y A. Cormack por sus trabajos pioneros en la tomografía computacional de rayos X aplicada a este campo. Y es a partir de este hecho que se observa un gran interés por parte de la comunidad internacional en la aplicación de la tomografía para la reconstrucción de imágenes de otros objetos materiales, así como por las nuevas aplicaciones (en radioastronomía, apertura sintética de radares, interferometría óptica, microscopía de electrones, etc.) que pueden tener la tomografía de rayos X y otras en desarrollo como la de resonancia magnética nuclear (NMR, en Inglés) y la de emisión, particularmente la de rayos gamma en la tomografía de procesos o industrial.

Una de las aplicaciones industriales de la tomografía de rayos gamma es la de caracterizar contenedores de desechos radioactivos, cabe resaltar que toda esta tecnología está aún en desarrollo. Los desechos radioactivos son generados en un sinnúmero de instalaciones, como son laboratorios, reactores, hospitales, etc. En todos estos sitios los desechos son separados, categorizados y empacados en contenedores —frecuentemente bidones de 208 litros— para su envío a los sitios de confinamiento. Pero antes de ser enviados a su destino final de confinamiento, los contenedores deben de ser etiquetados, analizados, caracterizados y certificados; el análisis deberá proporcionar valoración del nivel del contaminante que permita determinar el destino final del contenedor. El Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ) tiene especial interés en la tomografía computarizada por emisión de rayos gamma aplicada a la valoración certificada del nivel contaminante de residuos radioactivos dentro de sus contenedores.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Un método preciso de análisis de los rayos gamma provenientes del contenedor, permitiría identificar todos los radioisótopos presentes en el contenedor, y proporcionar una medida cuantitativa de su actividad, con estos datos, los desechos serían propiamente caracterizados y posteriormente descargados de la manera más segura y económica sin necesidad de abrir el contenedor.

El método más comúnmente utilizado para analizar los contenedores de desechos radiactivos, es el de la espectrometría gamma segmentada, esta técnica fue desarrollada para detectar grandes cantidades de cierto material nuclear radioactivo, más específicamente para medir sólo la cantidad de  $^{235}\text{U}$  o  $^{239}\text{Pu}$  presentes en un contenedor. Este método integra espacialmente los valores de la intensidad de los rayos gamma detectados hasta para quince secciones (ó segmentos) a lo largo de la altura del contenedor, estos valores de intensidades son corregidos mediante mediciones similares de valores de atenuación, determinados por integración espacial promedio, a partir de mediciones de actividad para una sola energía.

El análisis de los contenedores de desechos radiactivos mediante tomografía gamma computarizada consiste en mapear el contenido completo del contenedor construyendo una serie de imágenes bidimensionales a diferentes alturas a lo largo de su eje.

La tomografía computarizada consiste, en este caso, en la adquisición de varias proyecciones unidimensionales de una función bidimensional, sobre  $180^\circ$  o  $360^\circ$ , y a partir de estas proyecciones reconstruir la función original. Para ello, se utiliza la espectrometría de rayos- $\gamma$  para adquirir de manera simultánea las proyecciones para varias regiones de energías de interés (EOI). Con el equipo de espectrometría gamma cada radioisótopo en el contenedor puede ser identificado mediante su pico de energía característico, su posición y actividad pueden ser determinadas a partir de la reconstrucción de imágenes PCT (Tomografía Pasiva Computarizada) corregidas por atenuación mediante la interpretación de todas las EOI's así adquiridas. Mediante varias EOI's, el análisis ACT (Tomografía Activa Computarizada) permite generar un coeficiente de atenuación adecuado para cada EOI pasivo, utilizando interpolación lineal entre las imágenes obtenidas por ACT. Finalmente, a partir de lo anterior es posible reconstruir la imagen del interior del contenedor de desechos radiactivos.

El objetivo de este trabajo es el desarrollo de software numérico que implementa a los algoritmos básicos de reconstrucción de imágenes por retroproyección, convolución-retroproyección, y retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos, y retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico. Esto como una primera etapa hacia el objetivo final de reconstruir la imagen del interior de un contenedor como se ha expuesto anteriormente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Con este objetivo en mente, se ha hecho más hincapié en la parte numérica que en sus aspectos teóricos con el propósito de tener una guía de fácil acceso al software desarrollado. Por otro lado, es muy difícil superar la exposición de los aspectos teóricos contenida en los libros clásicos de Deans S. R. [4], Herman G. T. [7], y Natterer F. [13]. Por esto y por razones de espacio, la mayoría de las demostraciones han sido omitidas. No obstante, los resultados centrales para nuestros propósitos son técnicamente y escrupulosamente presentados.

El trabajo se compone de 5 capítulos y un apéndice de demostraciones, un breve resumen de los capítulos se presenta a continuación.

En el capítulo 1, se presentan los conceptos básicos que intervienen en la reconstrucción de una imagen y se introduce el problema de la reconstrucción mediante un ejemplo, haciendo ver que este problema se puede resolver por medio de la transformada inversa de Radón. Luego se introduce la definición de la transformada de Radón y su dual, y se describen los manejos de los dominios de la función que se desea reconstruir y de la transformada de Radón de la función a reconstruir.

En el capítulo 2 se presentan el procedimiento para aproximar la transformada inversa de Radón por medio de operadores y el método de retroproyección. Esto último, como una primera aproximación a la inversa de la transformada de Radón.

En el capítulo 3, se presenta una mejor aproximación a la transformada inversa de Radón usando el procedimiento completo que consiste en un paso de convolución seguido por una retroproyección. Se presenta también el análisis de Fourier para la mejor elección del filtro, y se reportan los resultados experimentales obtenidos con este método.

En el capítulo 4, se presenta un estudio del método de retroproyección filtrada para reconstruir imágenes en un disco unitario para el caso de rayos paralelos, así como para rayos de haz en abanico. Se presentan también los resultados experimentales para ambos casos.

En el capítulo 5, se presentan las conclusiones y el trabajo a futuro por realizar.

Manifiesto el mayor agradecimiento al M.en C. Javier C. Palacios Hernández (Gerencia de Ciencias Aplicadas del ININ), quien propuso el tema y el programa de trabajo desarrollado aquí. También, por la asesoría institucional y las facilidades otorgadas para la realización del mismo. De la misma manera, manifiesto el mayor agradecimiento al Dr. Jesús López Estrada (Departamento de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM), por su minuciosa revisión y valiosas sugerencias que mejoraron sustancialmente tanto el contenido como la presentación de este trabajo.

Expreso también mi agradecimiento a los directivos de la Dirección de Investigación Científica del ININ, así como a la Lic. Laura Bosch Garfias (Depto. de Capacitación del ININ), por su interés en que este trabajo culminara exitosamente. También le estoy muy agradecido al M.en C. José López Estrada (Depto. De Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM), por el valioso apoyo que me brindó durante las primeras versiones de este trabajo.

Por otro lado agradezco al Dr. Fernando Brambila Paz (Depto. de Matemáticas de la Fac. de Ciencias, UNAM), al Dr. Humberto Madrid de la Vega (CIMA, U. de Coah.), al Dr. Pedro González Casanova (IMAT, Cuernavaca Mor.), así como a la M. en C. Ma. de Loudes Velasco Arregui y al M. en C. Agustín Ontiveros Pineda (Depto. de Matemáticas de la Fac. de Ciencias, UNAM) quienes amablemente leyeron este trabajo e hicieron valiosas sugerencias que fueron incorporadas en la versión final que aquí presentamos.

Finalmente agradezco el valioso apoyo moral de mis padres, Eduardo y Cristina Guzmán. De mis Hermanos, Laura, Conrado, Álvaro y Francisco Javier. De mi esposa, Ma. Guadalupe. De mis hijos Lilian y Carlos Tobías.

E. Tobías

Octubre de 2002



## CAPÍTULO 1

### **Introducción a los métodos de retroproyección para la tomografía computarizada de rayos X.**

En este capítulo, se presentan los conceptos básicos que intervienen en la reconstrucción de una imagen y se introduce el problema de la reconstrucción mediante un ejemplo, haciendo ver que este problema se puede resolver echando mano de la transformada inversa de Radón. Luego se introduce la definición de la transformada de Radón y su dual, y se describen los manejos de los dominios de la función que se desea reconstruir y de la transformada de Radón de la función a reconstruir.

#### **1.1 Antecedentes**

Por tomografía computarizada (TC) se entiende la reconstrucción de una función desde sus integrales de línea (sobre rectas) o superficie (sobre planos) usando algoritmos matemáticos, independientemente del campo donde esta técnica sea aplicada.

La reconstrucción de imágenes de haz de rayos X surgió hace aproximadamente 45 años en varios campos científicos, médicos y técnicos. Fue en la década de los años setenta cuando esta técnica alcanza un punto culminante con un explosivo desarrollo de trabajos en diversos campos, pero su aplicación más conocida la encontramos en el campo de la medicina con el desarrollo de los primeros tomógrafos computarizados cuyas imágenes de alguna sección del cuerpo humano son de mejor calidad que los obtenidos mediante la tomografía convencional o mejor conocida como tomografía no computarizada. Este hecho vino a revolucionar el diagnóstico radiológico sobre la pasada década. El rango de aplicación es asombroso, en un extremo, datos de microscopios de electrones son usados para reconstruir la estructura molecular de bacterias voraces, y por el otro, datos colectados por naves espaciales son usados para reconstruir la estructura de los restos de supernovas. Todas estas aplicaciones aparentemente diferentes tienen el mismo fundamento matemático y computacional. Por lo anterior, se piensa que esta técnica ha sido uno de los desarrollos

interdisciplinarios más explosivos y excitantes en la historia de la ciencia moderna. En la reconstrucción de imágenes se conjugan cuatro áreas principalmente, la probabilidad y la estadística que trata con la variable aleatoria "el número de fotones emitidos por una fuente de rayos X en la dirección de un detector durante un periodo de tiempo unitario", la física que tiene que ver con los efectos de absorción y dispersión del haz de rayos X al interaccionar con la sección del objeto que se quiere reconstruir, dando como resultado una atenuación exponencial del haz. La matemática que tiene que ver con los modelos matemáticos subyacentes en los métodos de reconstrucción y la computacional que tiene que ver con la implementación de los métodos matemáticos en una computadora mejor conocidos como algoritmos. En este trabajo nos abocaremos principalmente a los dos últimos puntos, la parte matemática y la computacional.

En este trabajo presentamos un estudio e implementación de los métodos de retroproyección, convolución-retroproyección sobre una región cuadrada y el método de retroproyección filtrada sobre un disco unitario, para la reconstrucción de imágenes por haz de rayos paralelos, así como por haz de rayos en abanico, también presentamos las pruebas numéricas realizadas con estos métodos en la reconstrucción de superficies conocidas con el fin de analizar su eficiencia.

## 1.2 Objetivos

El objetivo de este estudio esta encaminado a lograr implantaciones de métodos rápidos y precisos para la reconstrucción de imágenes por haz de rayos paralelos y de haz en abanico con fines de aplicación industrial, y que sean capaces de correr en una PC. Para la consecución de esta meta hemos seguido principalmente el trabajo de Herman G. T. [7], para el caso de los métodos de retroproyección y convolución-retroproyección sobre una región cuadrada, y el trabajo de Natterer F. [13] para el caso de retroproyección filtrada en un disco unitario. Con este fin establecemos las siguientes consideraciones:

Una imagen es descrita por su función de densidad y como las imágenes son usualmente de extensión finita, las funciones de densidad con las que tenemos que tratar tienen soporte compacto, es decir, pertenecen a la clase de funciones  $C^\infty$  con soporte compacto.

En nuestro caso es suficiente restringirnos a  $R^2$ , ya que la imagen de una sección transversal de un objeto es plana.

Definimos también las componentes de una imagen: la región de la imagen, como un cuadrado cuyo centro está en el origen del sistema de

coordenadas. Y la función imagen de dos variables cuyo valor es cero fuera de la región de la imagen.

Al valor de la imagen en el punto  $(x,y)$  se le denomina la densidad en el punto  $(x,y)$ .

Se subdivide la región de la imagen mediante una malla de  $n \times n$  cuadrados. Un elemento de malla es llamado pixel.

Una imagen digitalizada  $n \times n$ , es aquella cuyo valor en el interior de cualquier pixel es constante.

La digitalización  $n \times n$  de una imagen es una imagen tal que la integral de la imagen original sobre cualquier pixel es igual a la integral de la digitalización sobre el mismo pixel.

En tomografía computarizada (TC) la región de la imagen es la región de reconstrucción y la densidad de la imagen en el punto  $(x,y)$  es la atenuación lineal relativa para alguna energía fija del objeto en el punto  $(x,y)$ .

Un rayo será representado por una línea recta, y una exploración del objeto (un muestreo) por rayos paralelos (rectas paralelas) de alguna sección transversal de algún objeto simula un corte infinitamente delgado de esa sección plana del objeto.

### 1.3 Descripción del problema de reconstrucción de imágenes por tomografía computarizada

A continuación describimos mediante un ejemplo típico el problema que se quiere resolver para la reconstrucción de imágenes por TC.

**Ejemplo clásico (Diagnóstico radiológico):** En el campo médico una sección transversal del cuerpo humano es explorada por un haz fino de rayos X cuya pérdida de intensidad es registrada por un detector y procesada por una computadora para producir una imagen en dos dimensiones desplegada sobre un video.

Un modelo físico simplificado se presenta a continuación: Sea  $f(x)$  el coeficiente de atenuación del rayo X en el punto  $x$  del tejido, es decir, el rayo X al atravesar una pequeña distancia  $\Delta x$  sufre en  $x$  la pérdida de intensidad relativa

$$\frac{\Delta I}{I} = f(x)\Delta x. \quad (1.1)$$

Si  $I_0$  es la intensidad inicial del haz  $L$  el cual es pensado como una línea recta, y  $I_1$  su intensidad después de haber atravesado el cuerpo, se sigue de (1.1) que

$$\frac{I_1}{I_0} = \exp\left\{-\int_L f(x)dx\right\}. \quad (1.2)$$

Es decir, el proceso de exploración nos proporciona las integrales de línea de la función  $f$  a lo largo de cada una de las líneas  $L$ . Desde todas esas integrales tenemos que reconstruir  $f$ .  $\square$

La transformada que mapea una función definida sobre  $R^2$  en el conjunto de sus integrales de línea es la transformada de Radón ([4, 7, 13]). En consecuencia, el problema de la reconstrucción de imágenes se reduce a encontrar la inversa de la transformada de Radón.

Antes de definir la transformada de Radón hacemos notar que en este trabajo usaremos coordenadas polares  $(r, \phi)$  para describir los métodos de retroproyección, convolución-retroproyección sobre una región cuadrada y coordenadas rectangulares para describir el método de retroproyección filtrada sobre un disco unitario.

#### 1.4 La transformada de Radón y su dual

Si  $f$  es una función definida sobre el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(R^2)$  (véase apéndice), ó del espacio de funciones de soporte compacto  $C_0^\infty(R^2)$  con dominio  $D \subset R^2$ , y  $\ell$  es la línea recta  $p = r \cos(\theta - \phi)$  en coordenadas polares, entonces la transformada de Radón se define como,

$$\mathfrak{R}[f](p, \theta) = \int_{\ell} f(r, \phi) ds, \quad (1.3)$$

donde  $ds$  es la medida de longitud a lo largo de la recta  $\ell$ .

Lo anterior nos dice que la transformada de Radón es un operador que mapea a una función de dos variables en el conjunto de sus integrales de línea.

Para precisar más el concepto de integración a lo largo de líneas rectas  $\ell$  véase la Fig. I.1, en la que se describe una región cuadrada cuyo origen de coordenadas es el centro del cuadrado.

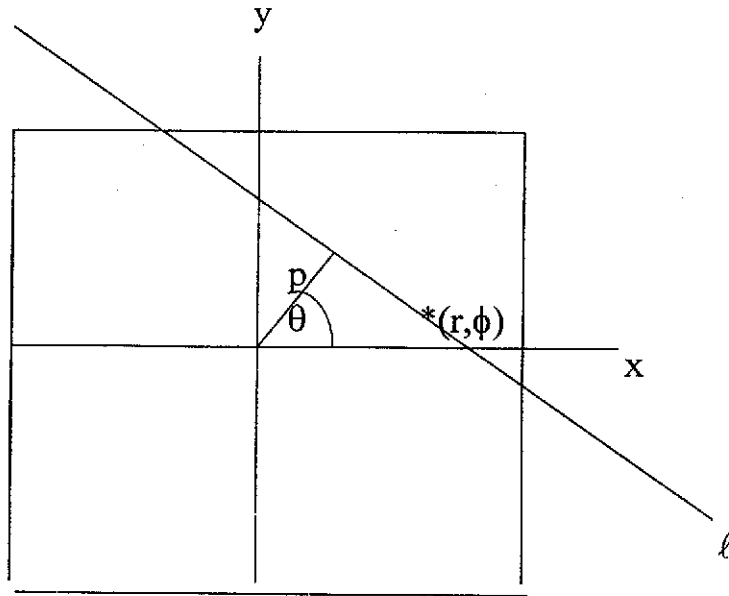


Fig. I.1 Región cuadrada que describe la línea  
 $l = \{(r, \phi) | p = r \cos(\theta - \phi)\}$ .

Si  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  es conocida para toda  $p$  y toda  $\theta$ , entonces  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  es la transformada de Radón de  $f(r, \phi)$ . Por otro lado, si  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  es conocido únicamente para ciertos valores de  $p$  y  $\theta$ , decimos que tenemos una muestra de la transformada de Radón. Este es el caso que se presenta en la práctica (caso discreto).

Al mapeo de la función  $f(r, \phi)$  sobre un conjunto de sus integrales de línea definido por una  $\theta$  fija y  $p$  variable se le conoce como una *proyección*. Este conjunto específico de sus integrales de línea corresponde a valores de  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  para  $\theta$  fijo y  $p$  variable. En este caso  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  se puede pensar como una función de una variable, la variable  $p$ . En este hecho tiene su origen la frase, "reconstrucción desde proyecciones", de uso común en la literatura.

Otro operador de gran importancia en la reconstrucción de imágenes es el operador dual de  $\mathfrak{R}$  denotado por  $\mathfrak{R}^{\#}$  y conocido como el operador de *retroproyección*. Se dice que  $\mathfrak{R}$  y  $\mathfrak{R}^{\#}$  forman un par dual en el sentido de la geometría integral, ya que mientras  $\mathfrak{R}$  integra sobre todos los puntos de una recta,  $\mathfrak{R}^{\#}$  integra sobre todas las rectas a través de un punto. Mas adelante definiremos formalmente este importante operador.

### 1.5 Los dominios de $f$ y $\mathfrak{R}f$

Como usualmente las imágenes son de extensión finita, sólo se tratará con funciones (de densidad) definidas sobre el plano euclideo y de soporte compacto (ó prácticamente de soporte compacto).

Con el propósito de ser precisos, recuérdese que la circunferencia unitaria  $s^1$  se define como  $R/\sim$ , donde  $\phi \sim \gamma$  ssi  $\phi = \gamma + 2n\pi$ , para algún  $n \in Z$ .

Así pues, se tratará con funciones de la forma

$$f = \chi_D \cdot g$$

donde  $g \in \mathcal{S}(s^1 \times R)$  es tal que

$$g(r, \phi) = g(-r, \phi + \pi),$$

y  $\chi_D$  es la función característica de un subconjunto propio  $D \subset E \times E$ ; Siendo  $E \times E$  el cuadrado de lado  $E$  con centro en el origen del plano cartesiano (pensado en coordenadas polares), el cual nos referimos como la *región de reconstrucción* (véase Fig. I.2)

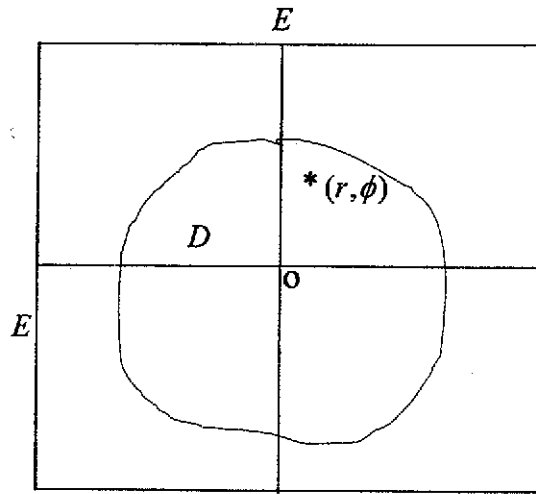


Fig. I.2 Región de reconstrucción de la imagen un cuadrado  $E \times E$  con centro en el origen del sistema de coordenadas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado, de la definición de la transformada de Radón se tiene que  $\mathfrak{R}$  asocia a una función  $f$  con argumentos  $(r, \phi)$  otra función  $\mathfrak{R}f$  con argumentos  $(p, \theta)$ . Luego, identificando al punto  $(p, \theta)$  con la línea recta  $\ell$  cuya distancia al origen es  $p$  y cuya normal forma un ángulo  $\theta$  con el eje positivo  $x$  en el plano  $(r, \phi)$ , entonces  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  representa la integral de  $f$  a lo largo de  $\ell$ .

Para visualizar mejor la interrelación entre las coordenadas  $(r, \phi)$  y  $(p, \theta)$ ; esto es, entre puntos y líneas rectas, es conveniente representar las coordenadas  $(p, \theta)$  en el sistema de coordenadas cartesianas  $p$  vs  $\theta$ . Así, el conjunto de todas las líneas rectas paralelas a un ángulo  $\theta$  con respecto al eje polar, esta representado por una línea recta paralela al eje de las abcisas en el sistema  $p$  vs  $\theta$ . Así mismo, el conjunto de todas las rectas  $\ell \leftrightarrow (p, \theta)$  que pasan por el punto  $(r_0, \theta_0)$  viene representado por la curva cosenoidal  $p = r_0 \cos(\theta - \theta_0)$  como se ilustra en la Fig I.3

Esto último es muy importante ya que si definimos una función  $h$  cuyo dominio son los puntos sobre la curva  $\ell = r \cos(\theta - \phi)$  entonces su integral sobre esta curva es ni más ni menos que el operador dual  $\mathfrak{R}^{\#}$  de  $\mathfrak{R}$  como se verá mas adelante.

En la Fig I.4, mostramos el mismo espacio correspondiente al caso discreto.

En la Fig. I.4, se presentan conjuntos finitos de rectas paralelas (puntos en  $(p, \theta)$ ) correspondientes a diferentes valores del ángulo  $\theta$ . Cada punto  $(p, \theta)$  corresponde a la localidad donde se ha tomado una muestra mediante el modo paralelo de colección de datos. La distancia  $d$  entre los rayos paralelos se traduce en distancia entre puntos  $(p, \theta)$  (el parámetro  $d$  es conocido como el intervalo de muestreo). Por cada proyección se toman  $2N + 1$  mediciones y cada proyección están separadas un ángulo  $\Delta$  de tal manera que si tenemos  $M$  proyecciones entonces  $M\Delta = \pi$ .

En términos formales  $\mathfrak{R}[f](p, \theta)$  es conocido únicamente para ciertos valores de  $p$  y  $\theta$ , es decir,  $(\mathfrak{R}f)_k = \mathfrak{R}[f](p_k, \theta_k)$  es conocido para valores desde  $i = -N, \dots, N$  de la proyección  $\theta_k$ , con  $k = 0, \dots, M - 1$ . En este caso  $\mathfrak{R}_{i,j} f = \mathfrak{R}[f](p_i, \theta_j)$  es un buen ejemplo de funcional lineal la cual al actuar sobre una función produce un número real. En términos de estas funcionales una proyección quedaría representada para,  $\theta = \theta_c$  como  $\mathfrak{R}_j f = \mathfrak{R}[f](p_j, \theta_c)$ , donde,  $j = -N, \dots, N$ .



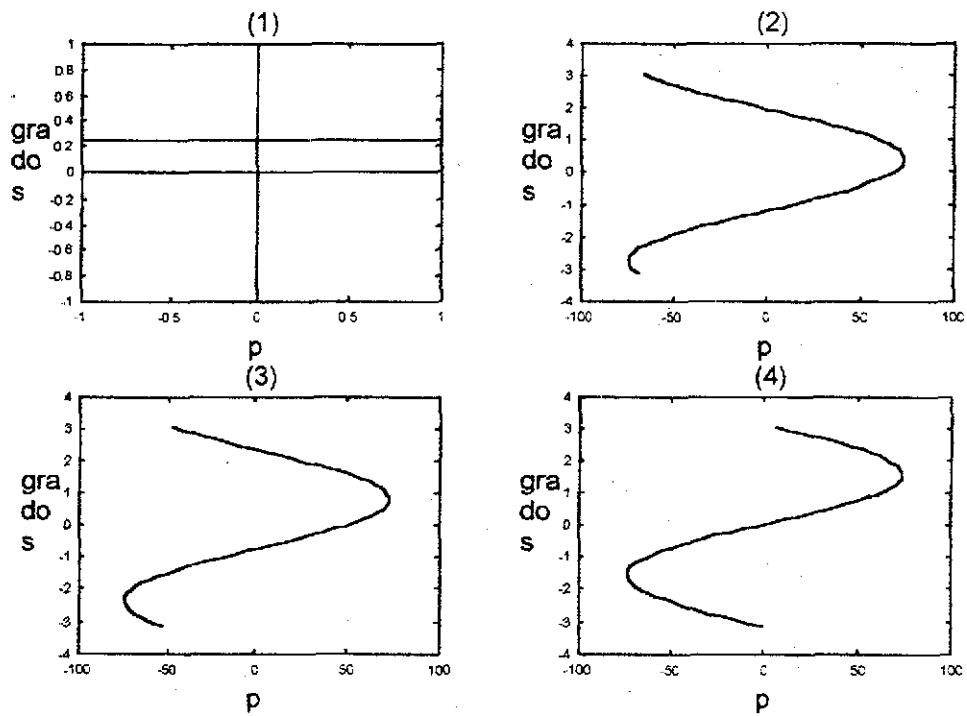


Fig 1.3 Gráficas de dos conjuntos de líneas. Gráfica (1), líneas paralelas, Gráficas (2) a (4), líneas que pasan por el punto  $(r, \phi)$  con diferentes valores para  $r$  y  $\phi$ . Gráfica (2)  $r=78, \phi=\pi/4$  Gráfica (3)  $r=78, \phi=\pi/2$ , Gráfica (4)  $r=78, \phi=\pi$ .

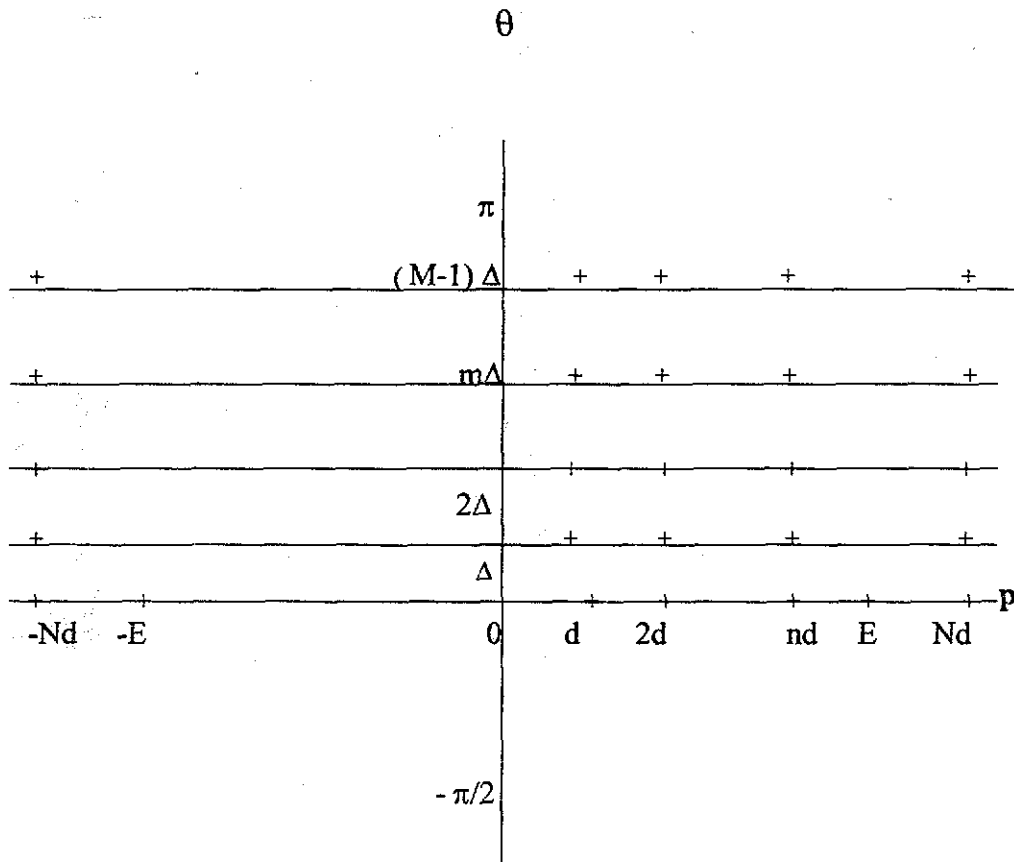


Fig. I.4 El espacio discreto  $(l, \theta)$  donde las marcas (+) corresponden a líneas cuyas medidas han sido colectados a una distancia  $d$  sobre cada una de las proyecciones en el modo paralelo de colección de datos. Cada proyección está separada por un ángulo  $\Delta$  (ángulo de giro del escáner). Un total de  $2N+1$  datos son colectados en cada proyección. El intervalo  $[-E, E]$  delimita la región de interés con  $Nd > E$ .

En este contexto el problema de la reconstrucción de imágenes se plantearía así,

“dadas  $M$  proyecciones de datos  $y_i$ , estimar la figura  $f$ ”.

### 1.6 El operador dual $\mathfrak{R}^\#$

Como se menciono antes, otro operador de gran importancia en la reconstrucción de imágenes es el operador dual de  $\mathfrak{R}$  denotado por  $\mathfrak{R}^\#$  y conocido como el operador de retroproyección. Se dice que  $\mathfrak{R}$  y  $\mathfrak{R}^\#$  forman un par dual en el sentido de la geometría integral ya que mientras  $\mathfrak{R}$  integra sobre todos los puntos de rectas del plano,  $\mathfrak{R}^\#$  integra sobre todas las rectas a través de un punto. En  $R^2$ ,  $\mathfrak{R}^\#$  integra sobre todas las líneas rectas que pasan a través de un punto como se verá a continuación.

Formalmente el operador de retroproyección  $\mathfrak{R}^\#$  se define para una función  $h(p, \theta)$  como,

$$\mathfrak{R}^\#[h](r, \phi) = \int_0^\pi h(r \cos(\theta - \phi), \theta) d\theta. \quad (1.4)$$

Como se explicó anteriormente el operador de la retroproyección  $\mathfrak{R}^\#$  integra sobre todas las rectas que pasan por el punto de coordenadas,  $(r, \phi)$ , estas rectas se generan manteniendo fijo el punto  $(r, \phi)$  y variando el ángulo  $\theta$  de tal manera que para cada variación de  $\theta$  la relación  $p = r \cos(\theta - \phi)$  genera una nueva recta que pasa por el punto fijo  $(r, \phi)$ . Note que el valor de la integral de la función  $h$  sobre la curva no es conocido pero nosotros conocemos los valores de la muestra de la transformada de Radón de donde podemos aproximar los valores de  $h$  por interpolación.

Debemos de hacer notar que el lugar geométrico de todos los puntos que son pie de su distancia al origen del haz de rectas que pasan por un punto fijo dado  $p = (r, \phi)$ , es una circunferencia cuyo diámetro es el segmento de recta comprendido por el origen y dicho punto. La Fig. I.5, muestra tres casos.

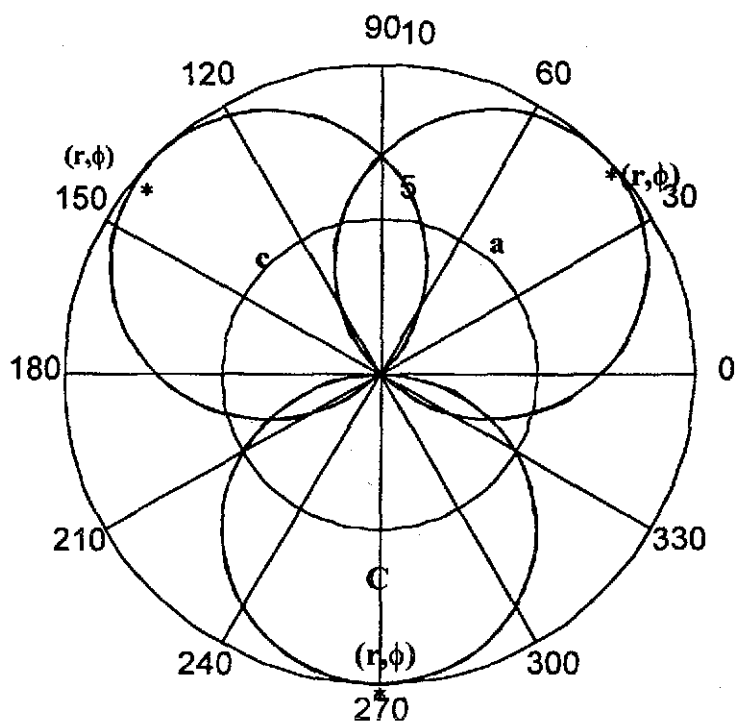


Fig. I.5 Tres círculos que muestran el lugar geométrico de los puntos donde se intersectan las rectas que pasan por el punto  $(r, \phi)$  con las rectas perpendiculares a cada una de ellas que parten del origen, donde, a)  $r = 10, \phi = 45^\circ$ , b)  $r = 10, \phi = 135^\circ$ , c)  $r = 10, \phi = 270^\circ$ .

## CAPÍTULO 2

### Métodos de transformadas

El problema en la reconstrucción de imágenes se reduce a encontrar la inversa de la transformada de Radón en  $R^2$ , para ello se requiere encontrar un operador  $\mathfrak{R}^{-1}$  tal que  $\mathfrak{R}^{-1}\mathfrak{R}f = f$ . En principio este problema fue resuelto por Johan Radón [7] quien proporcionó una fórmula de inversión que reproducimos a continuación, usando coordenadas polares,

$$f(r, \phi) = -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \int_0^{2\pi} \partial_p \mathfrak{R}[f](r \cos(\theta - \phi) + q, \theta) d\theta dq \quad (2.1)$$

esta fórmula de inversión implica lo siguiente: la distribución de atenuación lineal relativa en un corte infinitamente delgado esta determinado únicamente por el conjunto de todas sus integrales de línea [7].

Nótese que esta fórmula de inversión (2.1) dada por Radón requiere de todas las integrales de línea para poder reconstruir la imagen del objeto, y que en la práctica, sólo disponemos de un número finito de valores estimados. Más aún, para conjuntos diferentes de estimaciones de la transformada de Radón de un objeto, en general, se obtienen diferentes reconstrucciones. Es decir, en la práctica no se tiene unicidad en la reconstrucción. Esto ha conducido a obtener aproximaciones a la inversa de Radón que puedan trabajar con un número finito de estimaciones de los valores de la transformada de Radón, que se pueden implementar en una computadora. A estos métodos se les conoce como *métodos de transformadas*, que se verán después de hacer algunos comentarios sobre la fórmula de inversión de la transformada de Radón (2.1).

## 2.1 Fórmula de inversión de Radón

En la derivación de esta fórmula de inversión (2.1) se supone que  $f$  es continua y acotada y que  $\partial_p \mathfrak{R}f$  existe y es continua, supuestos que son satisfechos ya que inicialmente se ha pedido que  $f \in \mathfrak{S}(R^2)$ . Además,  $f$  está restringida a una región llamada región de reconstrucción, es decir,  $f(r, \phi) = 0$ , si  $r \geq E$  ( $f$  es cero fuera de la región de reconstrucción).

Para cualquier punto  $(r, \phi)$  en la región de reconstrucción (en particular,  $|r| < E$ ) definimos la función promedio  $F_{(r, \phi)}$  con centro en  $(r, \phi)$  dada por,

$$F_{(r, \phi)}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{R}\{f\}(r \cos(\theta - \phi) + q, \theta) d\theta, \quad (2.2)$$

sobre todas los puntos del círculo de radio  $q$  definido por  $(r \cos(\theta - \phi) + q, \theta)$  con centro en  $(r, \phi)$ .

Como  $\mathfrak{R}\{f\}(p, \theta) = 0$ , si  $|p| \geq E$ , resulta claro que, para  $|r| < E$ ,

$$F_{(r, \phi)}(q) = 0, \text{ si } q \geq 2E. \quad (2.3)$$

Radón [7] probó que,

$$f(r, \phi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{\varepsilon} F_{(r, \phi)}(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\infty} (1/q^2) F_{(r, \phi)}(q) dq \right]. \quad (2.4)$$

Para deducir la fórmula (2.2) se desarrolla la integral,

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{q^2} F_{(r, \phi)}(q) dq,$$

sustituyendo a  $F_{(r, \phi)}(q)$  por su expresión (2.2) y usando cálculo básico se llega a,

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{q^2} F_{(r, \phi)}(q) dq = \frac{1}{\varepsilon} F_{(r, \phi)}(\varepsilon) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{q} [\partial_p \mathfrak{R}f](r \cos(\theta - \phi) + q, \theta) dq d\theta. \quad (2.5)$$

Cambiando el orden de integración y sustituyendo en (2.4) obtenemos la inversa de la transformada debida a Radón,

$$f(r, \phi) = -\frac{1}{2\pi^2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{2E} \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} \partial_p \mathfrak{R}[f](r \cos(\theta - \phi) + q, \theta) d\theta dq. \quad (2.6)$$

Esta fórmula cerrada que expresa una función en términos de su transformada es el hecho singular más importante para la reconstrucción de imágenes por métodos de transformadas. Además haciendo uso de la igualdad:

$$\partial_p \mathfrak{R}[f](s, \theta) = -\partial_p \mathfrak{R}[f](-s, \theta - \pi),$$

se puede obtener la siguiente relación:

$$f(r, \phi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-E}^E \int_0^\pi \frac{\partial_p \mathfrak{R}[f](s, \theta)}{r \cos(\theta - \phi) - s} ds d\theta. \quad (2.7)$$

Nótese que con esta fórmula de inversión truncada (2.7) nos restringimos a integrar sobre una región finita del plano que tiene como fronteras laterales  $s = -E$ ,  $s = E$ , y como fronteras inferior y superior  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ .

El problema práctico que se presenta es encontrar una forma eficiente de evaluar esta expresión, y se ha encontrado que una manera es a través de los operadores siguientes:

a). El operador lineal de *diferenciación parcial*  $\partial_p$  aplicado a funciones  $g(p, \theta)$ .

b). La *transformada de Hilbert*  $H_p$  con respecto a la primera variable de una función  $v(s, \theta)$  definida por

$$\mathcal{H}[v](\sigma, \theta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(s, \theta)}{\sigma - s} ds. \quad (2.8)$$

Nótese que esta integral es impropia, ya que el integrando es singular en  $\sigma = s$ . Por lo cuál, esta integral se debe entender evaluada en el sentido del valor principal de Cauchy; es decir,

$$[\mathcal{H}_p v](\sigma, \theta) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\sigma-\epsilon} \frac{v(s, \theta)}{\sigma-s} ds + \int_{\sigma+\epsilon}^{\infty} \frac{v(s, \theta)}{\sigma-s} ds \right\}. \quad (2.9)$$

c). El operador de retroproyección  $\mathfrak{R}^\#$  denominado el dual de  $\mathfrak{R}$  que ya se ha introducido anteriormente

$$\mathfrak{R}^\# [h](r, \phi) = \int_0^\pi h(r \cos(\theta - \phi), \theta) d\theta. \quad (2.10)$$

En términos de estos operadores se obtiene la siguiente representación simplificada de la transformada inversa de Radón

$$\mathfrak{R}^\# \mathcal{H} \partial_p [g](r, \phi) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-E}^E \frac{\partial_p g(s, \theta)}{r \cos(\theta - \phi) - s} ds d\theta. \quad (2.11)$$

Esta identidad es igual a la inversa de Radón (2.6) excepto por la constante  $-\frac{1}{2\pi}$ . Así pues, la transformada inversa de Radón, denotada por  $\mathfrak{R}^{-1}$ , se puede expresar concisamente en términos de los tres operadores antes introducidos

$$\mathfrak{R}^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \mathfrak{R}^\# \mathcal{H} \partial_p \quad (2.12)$$

Esta relación dice que la transformada inversa de Radón de una función  $g$  de dos variables puede ser obtenida por la siguiente sucesión de operaciones

- a) derivada parcial de  $g(s, \theta)$  con respecto a la primera variable para obtener una función  $v(p, \theta)$ ,
- b) transformada de Hilbert de  $v(p, \theta)$  para obtener una función  $h(\sigma, \theta)$ ,
- c) retroproyección aplicada a  $h(\sigma, \theta)$

Tal proceso presupone que el valor exacto de  $g(p, \theta)$  es conocido para toda  $p$  y  $\theta$ ; y que las operaciones requeridas pueden ser realizadas con toda precisión, lo cual es imposible de realizar en la práctica.



En consecuencia lo que se requiere hacer es encontrar procedimientos numéricos que evalúen eficientemente la transformada inversa de Radón (2.12) o alguna expresión alternativa.

Concretamente, se requiere reemplazar los operadores continuos por operadores discretos que operen sobre funciones restringidas a un conjunto finito de puntos de su dominio. Esto se hará más adelante.

## 2.2 El método de retroproyección

Considerando la expresión  $\mathfrak{R}^{-1} = -\frac{1}{2\pi} \mathfrak{R}^* \mathcal{H} \partial_p$ , la cuál da origen a los métodos de transformadas para el cálculo de la transformada inversa de Radon, en donde el último operador que se aplica es precisamente el operador de retroproyección  $\mathfrak{R}^*$  (dual de  $\mathfrak{R}$ ). Y como nuestro interés radica en encontrar un procedimiento numérico para evaluar tal expresión, resulta natural que empecemos por estudiar *el método de la retroproyección*, el cuál consiste en reemplazar a  $\mathfrak{R}^{-1}$  por  $\frac{1}{2\pi} \mathfrak{R}^*$ .

Este método, en general, no produce buenas reconstrucciones por razones físicas como puede verse en Herman [7], pero su importancia radica en que forma parte de los métodos de transformadas. Es conveniente decir que este método es conocido también como método de la suma.

Como se acaba de ver, dada una función  $h(p, \theta)$ , el operador de retroproyección  $\mathfrak{R}^*$  produce otra función de dos variables, dada por

$$\mathfrak{R}^*[h](r, \phi) = \int_0^{\pi} h(r \cos(\theta - \phi), \theta) d\theta. \quad (2.13)$$

Aún cuando está claro que este operador, por si sólo, está lejos de ser una buena aproximación para la transformada inversa de Radón, y que en la práctica es fácil de corroborar, al obtener con su aplicación reconstrucciones borrosas de los objetos. Resulta ser muy útil por la experiencia que se gana con su aplicación, además de que su implementación es básica en las diferentes variantes de implementación de la transformada inversa de Radón.

Antes de pasar a describir el algoritmo, es primero conveniente precisar algunos detalles necesarios para su implementación. Para el cálculo aproximado de la integral en (2.13), se toma una malla uniforme del intervalo  $[0, \pi]$ , con un incremento de  $\Delta = \pi/M$ . Así que, en cada

paso,  $\theta$  tomará el valor de  $m\Delta$ ,  $0 \leq m \leq M-1$ , a  $M$  se le conoce como el número de proyecciones o número de vistas de la imagen. Por otro lado, la evaluación de la función  $h(r \cos(\theta - \phi), \theta)$  sobre la malla es aproximada de dos maneras:

(1). Por medio de interpolación lineal, tomando como base los datos  $p(nd, m\Delta)$ ,  $-N \leq n \leq N$  y  $0 \leq m \leq M-1$ , obtenidos mediante la exploración o muestreo de la función a reconstruir (esto es, obtenidas de cada proyección constituida de  $2N+1$  integrales de línea). Esto es, se aproxima el valor  $p(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$ , haciendo primero una búsqueda binaria para determinar  $n$  tal que

$$nd \leq r \cos((m\Delta - \phi), m\Delta) \leq (n+1)d,$$

y tomando

$$p(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta) = [(n+1)d - r \cos(m\Delta - \phi) / d] p(nd, m\Delta) + [(r \cos(m\Delta - \phi) - nd) / d] p((n+1), m\Delta). \quad (2.14)$$

(2). Por medio de interpolación de vecinos más cercanos, esto es, aproximando el valor de  $p(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$ , por el valor de  $p(nd, m\Delta)$ , donde  $n$  es elegido de manera que  $|nd - r \cos(m\Delta - \phi)|$  sea lo más pequeña posible.

Así, la implementación del método de retroproyección consiste, para cada centro de la malla  $(r, \phi)$ , en aproximar el valor de la integral en (2.13) mediante la suma de Riemann

$$\Delta \sum_{m=0}^{M-1} p(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta),$$

en donde, los valores de  $p(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$ , son aproximados por alguno de los métodos de interpolación antes descritos, con base en los datos almacenados en el arreglo  $p(nd, m\Delta)$ ,  $-N \leq n \leq N$ ,  $0 \leq m \leq M-1$ .

Luego, al aplicar este proceso a cada uno de los centros de los pixeles de una malla, se obtiene una estimación en cada pixel de la función original. Es decir, se obtiene la reconstrucción de la imagen del objeto.

En la Fig. II.1, se muestra la reconstrucción de un simple punto situado en el origen. Por ello, en cada proyección el valor de la integral de línea que pasa por él es 1, y cero en cualquier otro caso. Este caso es conocido en la literatura como la función del punto de respuesta.

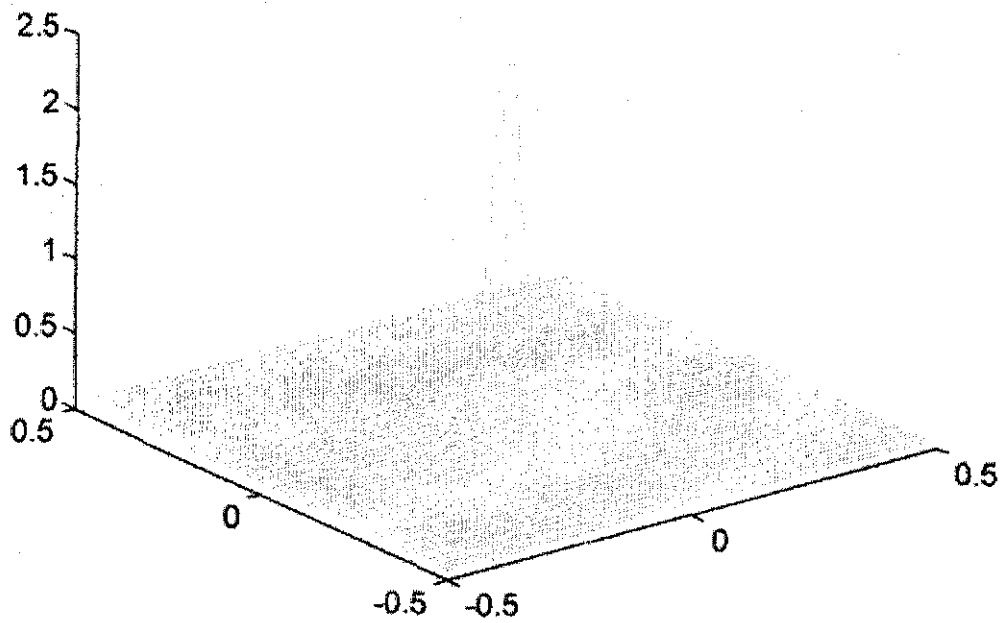


Fig. II.1 Reconstrucción de la función del punto de respuesta por el método de retroproyección usando interpolación lineal en una malla de 65x65 píxeles.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

B-A

En la Fig. II.2, se muestra otro ejemplo, la reconstrucción de una superficie con la implementación del método de retroproyección antes descrita en diferentes mallas. La superficie es la gráfica de la función

$$f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$$

cuya transformada de Radón es la función,

$$\mathfrak{R}(\exp(-x^2 - y^2)) = \sqrt{\pi} \exp(-p^2).$$

Los datos usados para la reconstrucción se obtuvieron a través del muestreo de esta función.

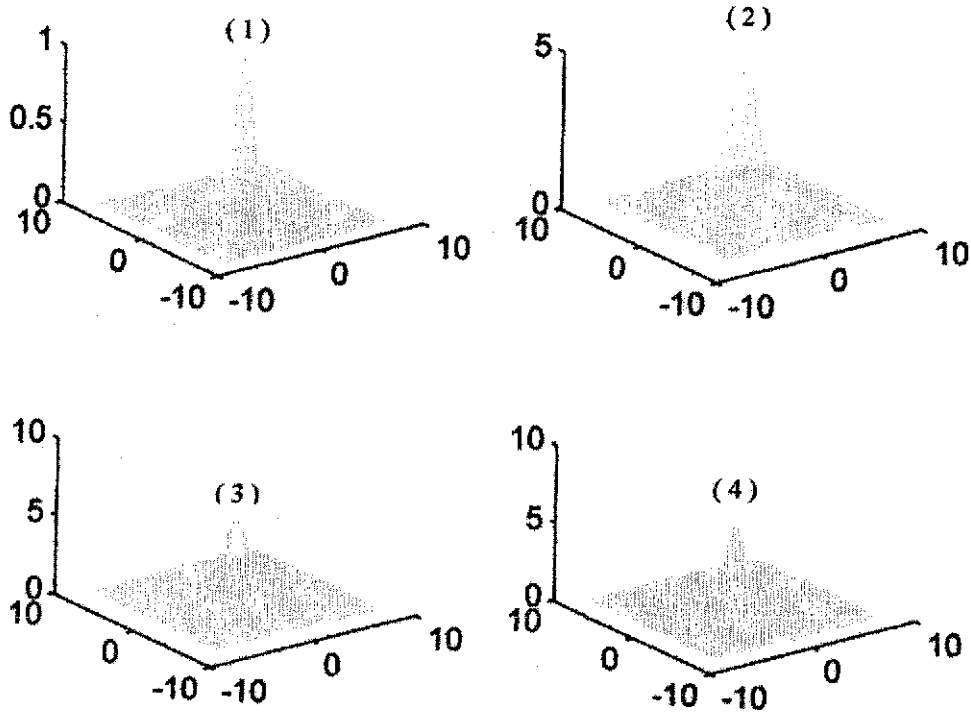


Fig. II.2 Tres reconstrucciones de la superficie (1): (2) reconstrucción de (1) en una malla de  $32 \times 32$  pixeles, (3) reconstrucción de (1) en una malla de  $64 \times 64$  pixeles, (4) reconstrucción de (1) en una malla de  $128 \times 128$  pixeles.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## CAPITULO 3

### Método de retroproyección filtrada para haz en paralelo

A los procedimientos numéricos para evaluar la transformada inversa de Radón de una función  $g = \mathfrak{R}f$ ,  $\mathfrak{R}^{-1}g = -(1/2\pi)\mathfrak{R}^{\#}\mathcal{H}\partial_{\rho}g$ , se le conoce como el método de convolución-retroproyección ó retroproyección filtrada. Se reporta en la literatura [7], que este método para proyecciones de datos por haz en paralelo fué ampliamente usado en TC por su facilidad de implementación y su buena precisión. Nosotros hemos podido comprobar esto al realizar reconstrucciones sencillas de superficies conocidas. Estos métodos son métodos de transformadas, ya que evalúan la transformada inversa de Radón aproximando  $\mathcal{H}\partial_{\rho}g$  por medio de una simple convolución seguida de una retroproyección, esto explica el nombre de *retroproyección filtrada*.

Antes que nada vamos a definir una convolución y posteriormente veremos como se pueden reemplazar los operadores continuos por unos discretos para finalizar con la derivación del método y su implementación.

#### 3.1 Convolución y la transformada de Hilbert

Dadas dos funciones reales  $\phi$  y  $\psi$ , en el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$ , (véase apéndice) su convolución  $\phi*\psi$ , es otra función real (en  $\mathcal{S}$ ), definida por

$$(\phi*\psi)(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u)\psi(v-u)du \quad (3.1)$$

Es fácil ver que la convolución es una operación conmutativa. Y además, si  $D$  denota el operador derivada

$$D(\phi*\psi) = D\phi*\psi = \phi*D\psi, \quad (3.2)$$

como puede verse en el apéndice.

En este trabajo, se realizarán reconstrucciones sólo para funciones en el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$ .

Como estamos interesados en aproximar la transformada de Hilbert de la función  $\partial_p g$ , veamos antes que si se define una función  $\rho(u)$  dada por

$$\rho(u) = -\frac{1}{\pi u} \quad (3.3)$$

entonces

$$(\rho * \phi)(v) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)}{v-u} du \quad (3.4)$$

ó sea que

$$\mathcal{H}\phi = \rho * \phi. \quad (3.5)$$

De esta relación surge la idea de calcular la transformada de Hilbert  $\mathcal{H}\phi$  de una función  $\phi$  (con soporte contenido en el cuadrado de reconstrucción  $E \times E$ ), por medio de la convolución  $\rho * \phi$ .

Esta idea de calcular la transformada de Hilbert por medio de una convolución, sugiere su cálculo aproximado mediante la aplicación de técnicas de regularización a la función núcleo  $\rho$  de la transformada de Hilbert. Esto es, mediante la introducción de una familia, llamada de *regularización*, de funciones reales  $\{\rho_A \mid A > 0\}$  del espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$ , tal que si  $\phi$  está en  $\mathcal{S}$  entonces

$$\lim_{A \rightarrow \infty} (\rho_A * \phi)(v) = \mathcal{H}\phi(v) \quad (3.6)$$

para toda  $v$  número real dado. Lo cuál evita trabajar con integrales impropias, además de simplificar enormemente el trabajo computacional.

La garantía de la existencia de una gran variedad de familias de regularización la da el siguiente teorema (véase apéndice).

**Teorema (de regularización).** Si  $F_A : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A > 0$ , es una familia de funciones reales integrables tales que, para  $U \geq 0$ :

- i)  $0 \leq F_A(U) \leq 1$ ,  $F_A(U) = 0$ , si  $U \geq A/2$ ,
- ii)  $F_A(U)$  es una función monótona no creciente de  $U$ ,

$$\text{iii) } \lim_{A \rightarrow \infty} F_A(U) = 1.$$

Entonces  $\{\rho_A: A > 0\}$ , donde

$$\rho_A(u) = -2 \int_0^{A/2} F_A(U) \text{sen}(2\pi Uu) dU. \quad (3.7)$$

es una familia regularizante.

Nótese, que la función (3.7) es una función antisimétrica. La relación (3.7) es clave en la derivación del método de convolución y su origen tiene que ver con la transformada de Fourier como se verá mas adelante.

En la literatura a la función  $F_A$  se le conoce como una *función ventana* (con ancho de banda  $A$ ). Algunos ejemplos típicos de funciones ventana se reproducen a continuación

VENTANA	$F_A(U)$
Banda limitada	1
Coseno	$\cos(\pi U / A)$
Sinc	$\text{sen}(\pi U / A) / (\pi U / A)$
Generalizada de Hamming con parámetro $\alpha$ ( $0.5 \leq \alpha \leq 1$ )	$\alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi U / A)$

El caso  $\alpha = 0.5$  se le conoce como la ventana de Hanning. Nótese que para  $\alpha = 1$ , en la ventana Generalizada de Hamming (o *filtro* de Hamming), se obtiene la ventana de banda limitada.

En este trabajo las ventanas sinc y generalizada de Hamming serán las más usadas. En la Fig. III.1, se muestran las gráficas de la ventana generalizada de Hamming y en la Fig. III.2, se muestran las funciones  $\rho_A$  usando la ventana generalizada de Hamming para diferentes valores de  $\alpha$ .

### 3.2 Derivación del método de convolución-retroproyección

En esta sección se verá como concretar la aproximación a

$$\mathfrak{R}^{-1}g = -(1/2\pi)\mathfrak{R}^{\#}\mathcal{H}\partial_p g,$$

considerando que



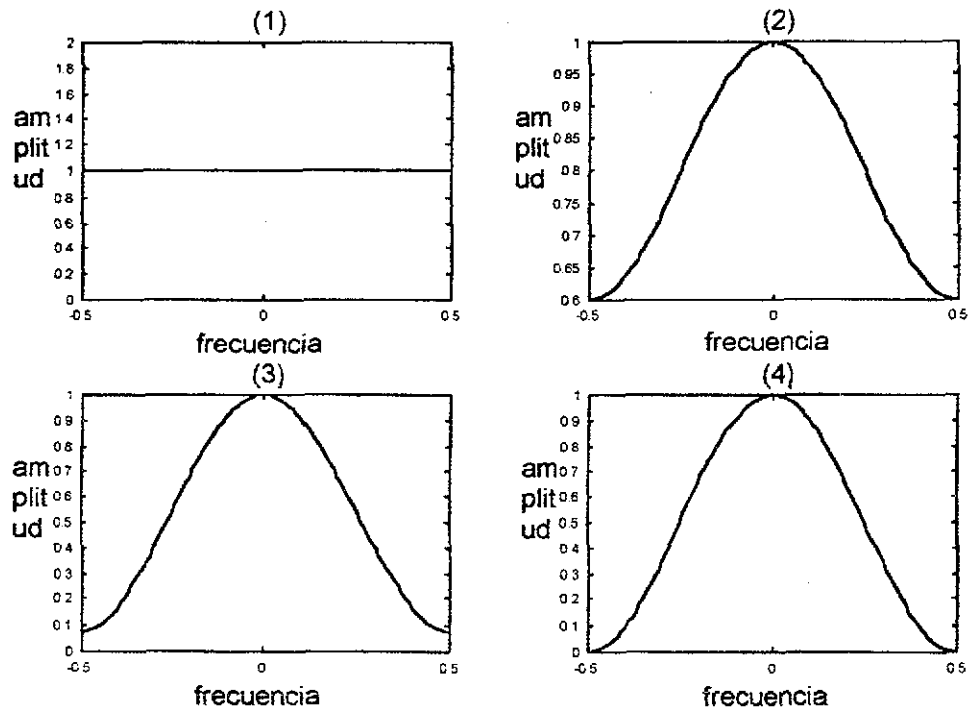


Fig. III.1 Gráficas de la ventana o filtro de Hamming  $F_A(U) = \alpha + (1 - \alpha)\cos(2\pi U / A)$  para diferentes valores de  $\alpha$ . Gráfica (1)  $\alpha=1$ , Gráfica (2)  $\alpha=0.8$ , Gráfica (3)  $\alpha=0.54$ , Gráfica (4)  $\alpha=0.5$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

12-A

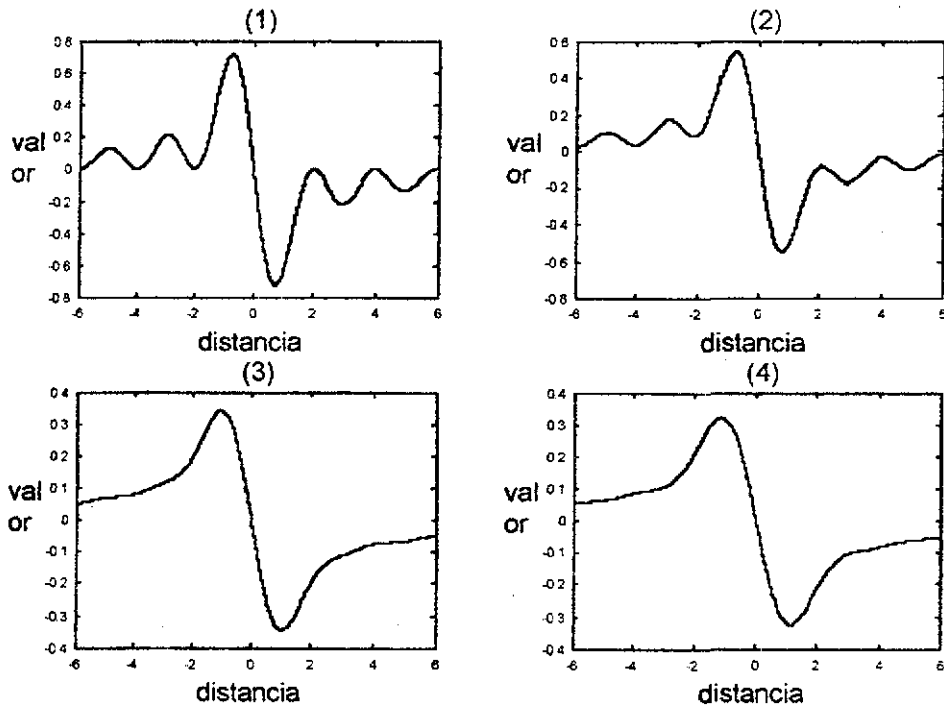


Fig III.2 Gráficas de la función antisimétrica  $\rho_1(u)$  usando la ventana generalizada de Hamming con valores correspondientes a  $\alpha$ , en gráfica (1)  $\alpha = 1$ , gráfica (2)  $\alpha = 0.8$ , gráfica (3)  $\alpha = 0.54$  y, gráfica (4)  $\alpha = 0.5$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\mathcal{H}\phi(v) = \lim_{A \rightarrow \infty} (\rho_A * \phi)(v).$$

Para ello, primeramente, se calcula la función  $g(p, \theta) = [\mathfrak{R}f](p, \theta)$  a partir de la cuál deseamos reconstruir a la función original  $f(r, \phi)$ .

Ahora, haciendo uso de las proyecciones  $g_\theta(p) \equiv g(p, \theta)$ , con  $\theta$  constante, se tiene que

$$(\mathcal{H}\partial_p g)(p, \theta) \equiv (\mathcal{H}g'_\theta)(p), \quad (3.8)$$

donde  $g'_\theta$  denota la derivada de  $g_\theta$ . Y considerando que  $\mathcal{H}g'_\theta$  se puede aproximar mediante la convolución

$$[\rho_A * g'_\theta](p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g'_\theta(s) \rho_A(p-s) ds. \quad (3.9)$$

en principio, de conocer  $g'_\theta(p)$ , esta parte del problema estaría resuelta, pero este no es el caso. Sin embargo, debido a (3.2) y a que es relativamente fácil calcular  $\rho'_A$ , podemos aproximar  $\mathcal{H}g'_\theta$  mediante la convolución

$$(\rho'_A * g_\theta)(p) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\theta(s) \rho'_A(p-s) ds \quad (3.10)$$

donde

$$\rho'_A(u) = -4\pi \int_0^{A/2} U F_A(U) \cos(2\pi U u) dU \quad (3.11)$$

expresión que se obtiene de derivar bajo el signo de la integral en (3.7).

Así, si denotamos por  $P_A(p, \theta) = (\rho'_A * g_\theta)(p)$ , entonces la aproximación a  $f^*$ , la inversa de Radón queda expresada como

$$f^* = -(1/2\pi) \mathfrak{R}^\# P_A. \quad (3.12)$$

Ahora, si se toma

$$q(p) = -(1/2\pi) \rho'_A(p). \quad (3.13)$$

y se reconsidera que

$$(q * g)(p, \theta) \equiv (q * g_\theta)(p), \text{ con } \theta \text{ fija.} \quad (3.14)$$

entonces se tiene, de (3.12), que la aproximación  $f^*$  producida por el método de convolución se puede expresar como

$$f^* = \mathfrak{R}^\#(g * q). \quad (3.15)$$

Finalmente, de (3.11) y (3.13) se sigue que

$$q(p) = 2 \int_0^{A/2} s F_A(s) \cos(2\pi s p) ds \quad (3.16)$$

En la Fig. III.3, se muestran las gráficas de la *función convolucionante*  $q(p)$  correspondientes a diferentes funciones ventana.

Así, la aproximación  $f^* = \mathfrak{R}^\#(q * g)$  a la transformada inversa de Radón

$$\mathfrak{R}^{-1}g = -(1/2\pi)\mathfrak{R}^\# \mathcal{H} \partial_p g,$$

queda completamente determinada.

En resumen, el método de convolución o retroproyección filtrada para aproximar a la transformada inversa de Radón consta de dos pasos:

- 1) una convolución con respecto a la primera variable,
- 2) una retroproyección.

El paso 1) puede considerarse como un filtrado de datos modulado por la ventana  $F_A$ , en uso. Más adelante, se verán algunos criterios para la elección de la función ventana  $F_A$ .

### 3.3 Implementación del método de convolución-retroproyección

De la definición de convolución (3.1) tenemos que,

$$(q * g)(p, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} q(p-s) g(s, \theta) ds. \quad (3.17)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del método de retroproyección los valores de  $g(\ell, \theta)$  son conocidos en los puntos  $(nd, m\Delta)$ ,  $-N \leq n \leq N$ , y  $0 \leq m \leq M-1$ . Entonces (3.17) se convierte en

$$(q * g)(nd, m\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} q(nd - s) g(s, m\Delta) ds. \quad (3.18)$$

Aproximando la integral en esta expresión, por una suma de Riemann tenemos,

$$P_c(nd, m\Delta) = d \sum_{k=-N}^{k=N} q((n-k)d) g(kd, m\Delta). \quad (3.19)$$

Esta suma es conocida como una *convolución discreta*.

Ya se puede pasar a describir la implementación numérica del método de convolución-retroproyección,  $f^* = \mathfrak{R}^\#(q * g)$  para aproximar a la transformada inversa de Radón  $\mathfrak{R}^{-1}g = -(1/2\pi)\mathfrak{R}^\#H\partial_p g$ , partiendo del conocimiento de  $g(nd, m\Delta)$  para  $-N \leq n \leq N$ ,  $0 \leq m \leq M-1$ , y observando que  $q(nd)$  se puede calcular de (3.16) para  $-N \leq n \leq N$ .

La implementación natural es la siguiente:

1) *Se calcula (para  $n, m$  dadas):*

$$P_c(nd, m\Delta) = d \sum_{k=-N}^{k=N} q((n-k)d) g(kd, m\Delta),$$

2) *Se calcula (para cada centro  $(r, \phi)$  de pixel):*

$$f^*(r, \phi) = \Delta \sum_{m=0}^{m=M-1} P_c(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta).$$

Es importante notar que la retroproyección numérica, paso 2), requiere de  $M$  interpolaciones para aproximar los valores  $P_c(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$  recurriendo al paso 1), para el cálculo de los valores  $P_c(nd, m\Delta)$  -convoluciones- requeridas para tal efecto. En cuanto a la evaluación de  $q$ , se puede lograr algún ahorro en el número de cálculos cuando  $q(-u) = q(u)$ , es decir, cuando  $q$  es una función simétrica.

Esta versión numérica del método de convolución-retroproyección tiene el inconveniente de que para cada centro  $(r, \phi)$  de un pixel, se aproxima de un solo golpe a la imagen  $f^*(r, \phi)$ , repitiendo el proceso para cada uno de los pixeles de la malla, con la consecuente inversión de grandes cantidades de tiempo para aproximar la imagen completa.

Una alternativa a este procedimiento es un proceso de aproximaciones sucesivas a la imagen, el cuál consiste, dada una primera aproximación a la imagen  $f_0^*$  sobre toda la malla, en el cálculo de la  $m$ -ésima aproximación a la imagen  $f_m^*$  sobre toda la malla, a partir de su  $(m-1)$ -ésima aproximación sobre toda la malla, como se describe a continuación:

1) Para  $m$  dada, se calcula  $P_c(nd, m\Delta)$  para  $-N \leq n \leq N$ , usando (3.12) y los valores calculados de  $q((n-k)d)$ ,

2) Para  $1 \leq j \leq J$ , evaluar:  $f_{m+1}^*(r_j, \phi_j) = f_m^*(r_j, \phi_j) + \Delta P_c(r_j \cos(m\Delta - \phi_j), m\Delta)$ .

donde  $J$  es el número de pixeles usados para la reconstrucción de la imagen. Y así sucesivamente hasta obtener la aproximación a la imagen  $f_{M-1}^*$ , que es la aproximación a la reconstrucción buscada  $f^*$ .

Es importante hacer notar que en este proceso, en cada etapa, se requieren únicamente de los datos de la proyección correspondiente a dicha etapa. Nuevamente, en el paso 2), se hecha mano de la interpolación para evaluación del término de corrección. Nótese también, que una vez calculado  $f_{m+1}^*(r_j, \phi_j)$ , ya no se necesita a  $f_m^*(r_j, \phi_j)$ , así que se puede usar la misma localidad de memoria de  $f_m^*(r_j, \phi_j)$ , para almacenar a  $f_{m+1}^*(r_j, \phi_j)$ , para cada centro de pixel  $(r_j, \phi_j)$ .

Obsérvese que en esta última implementación del método de retroproyección filtrada, la convolución es calculada  $(2N+1)M$  veces únicamente, mientras que en la primera se calcula  $M$  veces para reconstruir la imagen en cada pixel, si se considera que el número de pixeles es  $J = (2N+1)^2$ , entonces el total asciende a  $(2N+1)^2 M$  veces, si se usa interpolación del vecino más cercano. De donde resulta que la segunda implementación es mucho más eficiente.

El punto que aún queda por precisar en el método de retroproyección -convolución, es la elección de la función convolucionante  $q(u)$  (Fig. III.3). Para ello, es conveniente hechar mano de algunos elementos de la transformada de Fourier y muestreo.

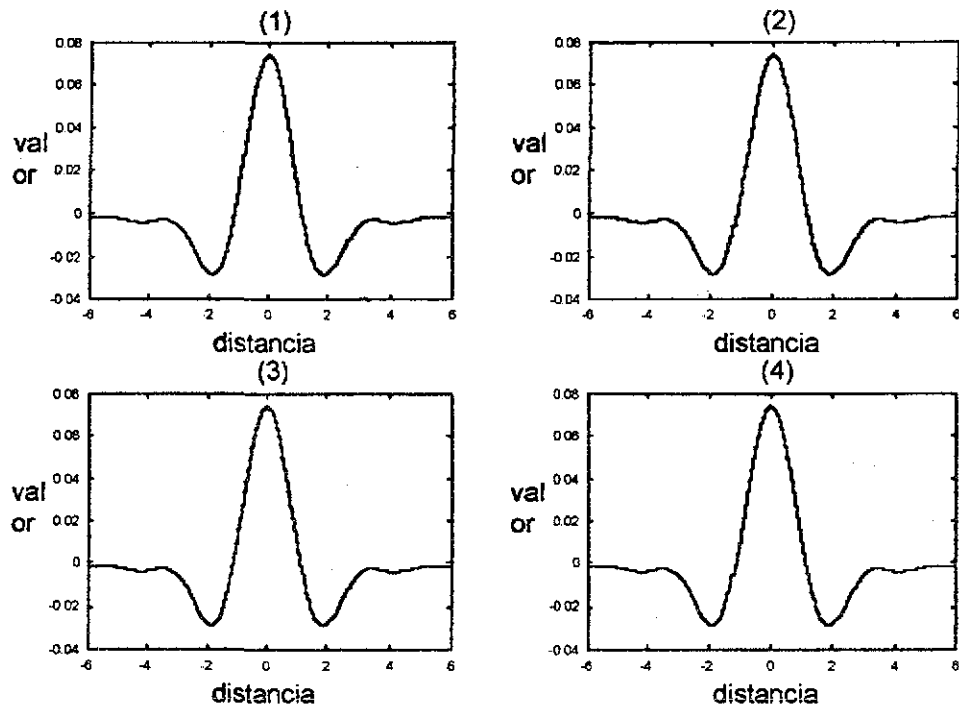


Fig. III.3 Gráficas de la función simétrica  $q(u)$  con el filtro de Hamming para diferentes valores  $\alpha$ , gráfica (1)  $\alpha = 1$ , gráfica (2)  $\alpha = 0.8$ , gráfica (3)  $\alpha = 0.54$ , gráfica (4)  $\alpha = 0.5$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.4 La transformada de Fourier

Con el propósito de precisar lo que se entenderá por el ancho de banda de una función convolucionante, es necesario introducir algunos elementos de la transformada de Fourier. Para mayor información sobre el tema véase el apéndice y las referencias [2],[9].

La transformada de Fourier  $\mathfrak{F}\phi$  de una función  $\phi: R \rightarrow C$ ,  $\phi \in L_1(R)$ , está definida por

$$\mathfrak{F}[\phi](U) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \exp(-2\pi i U u) du. \quad (3.20)$$

Es directo verificar que la función  $\mathfrak{F}\phi$ , es acotada y continua, y que  $\mathfrak{F}: L_1(R) \rightarrow C(R)$  es una transformación lineal.

Ahora, si  $\phi \in \mathcal{S} \subset L_1(R)$  entonces  $\mathfrak{F}\phi \in \mathcal{S}$ . Más aún, se puede probar que  $\mathfrak{F}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es inyectiva Y dado que,  $\mathcal{S} \subset L_2(R)$ , y  $\mathfrak{F}: L_2(R) \rightarrow L_2(R)$  es una isometría; i.e.,  $\|\phi\|_2 = \|\mathfrak{F}\phi\|_2$ , se sigue que la transformada de Fourier sobre el espacio de Schwartz es una transformación biyectiva.

La transformada inversa de Fourier  $\mathfrak{F}^{-1}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , manda a una función  $\phi: R \rightarrow C$ , en la función  $\mathfrak{F}^{-1}\phi$ , definida por

$$\mathfrak{F}^{-1}[\phi](u) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(U) \exp(2\pi i U u) dU. \quad (3.21)$$

Regresando a la función convolucionante  $q(p)$ , veamos que si se define a la función  $\Phi(U) = |U| F_A(|U|)$ , entonces  $\Phi(U) = 0$ , si  $|U| \geq \frac{A}{2}$ ,  $\Phi(U) = \Phi(-U)$ , y



$$\begin{aligned}
q(p) &= 2 \int_0^{A/2} s F_A(s) \cos(2\pi sp) ds \\
&= \int_{-A/2}^{A/2} \Phi(s) \cos(2\pi sp) ds + i \int_{-A/2}^{A/2} \Phi(s) \operatorname{sen}(2\pi sp) ds \\
&= \int_{-A/2}^{A/2} \Phi(s) \exp(2\pi isp) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s) \exp(2\pi isp) ds \\
&= \mathfrak{F}^{-1}[\Phi](p)
\end{aligned}$$

Esto es,  $q(p)$  no es otra cosa que la transformada inversa de Fourier de la función  $\Phi(U) = |U| F_A(|U|)$ , o bien que

$$\Phi = \mathfrak{F}q \quad (3.22)$$

Ahora, se dice que una función  $\psi \in \mathcal{S}$  es de *banda limitada con ancho de banda A*, si  $\mathfrak{F}[\psi](u) = 0$ , para  $|u| \geq \frac{A}{2}$ . Luego, de la ecuación (3.16) se sigue que la función *convolucionante*  $q(p)$  es una función de *banda limitada con ancho de banda A*, siempre que esté definida en términos de una función ventana de ancho de banda A.

### 3.5 Elección de la función convolucionante

El siguiente punto es ver como elegir la función convolucionante  $q(p)$ , es decir, como elegir la función ventana  $F_A$ . Para ello, es conveniente recordar que la convolución  $q * g_\theta$  es aproximada por los valores de la convolución discreta almacenados en el arreglo  $P_c(nd, m\Delta)$ , paso 1) (del método de convolución-retroproyección). Y que en su paso 2), los valores de  $P_c(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$ , son calculados mediante interpolación, usando los valores conocidos de  $P_c(nd, m\Delta)$ . En resumen, se tiene que

$P_c(r \cos(m\Delta - \phi), m\Delta)$ , son calculados mediante interpolación, usando los valores conocidos de  $P_c(nd, m\Delta)$ . En resumen, se tiene que

- $q * g_\theta$ , es la operación de filtrado del método,
- $P_c(nd, m\Delta)$ , es la aproximación discreta para  $q * g_\theta$ ,
- $p = r \cos(m\Delta - \phi)$ , es la distancia al origen de las rectas que pasan por el punto  $(r, \phi)$  en la región de reconstrucción, y
- $P_c(p, m\Delta)$ , es calculado por interpolación usando los valores  $P_c(nd, m\Delta)$ .

Suponiendo que  $g_\theta(p)$  es una función de una variable para alguna  $\theta$  fija, con la restricción de que  $g_\theta(p) = 0$ , para  $|p| \geq E$  ( $E$  es el lado del cuadrado de reconstrucción), y recordando que  $d$  es un número real positivo (llamado el intervalo de muestreo o la separación entre los rayos paralelos), tal que  $Nd > E$ , se construye la función  $\zeta(p)$  a partir de sus valores  $\zeta(nd)$  dados por

$$\zeta(nd) = d \sum_{k=-N}^{k=N} g_\theta(kd) q((n-k)d), \quad (3.23)$$

mediante interpolación. El punto aquí, es conocer los efectos de la elección de la función convolucionante  $q$  y del método de interpolación, en relación con las funciones  $g_\theta$  y  $\zeta$ , ésta última generada por convolución discreta e interpolación.

Por otro lado, es sabido [7] que cualquier función real  $\phi$  puede ser determinada a partir de sus valores discretos por medio de interpolación, esto es

$$[\mathcal{I}_d^\psi \phi](u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(nd) \psi(u - nd), \quad (3.24)$$

donde  $\psi$  es la función interpolante, la cuál se anula fuera de un intervalo (usualmente) pequeño, y  $d$  es el intervalo de muestreo. Aplicando este resultado a nuestra función  $\zeta$ , se tiene que

$$[\varphi_d^\psi \zeta](u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \zeta(nd) \psi(u - nd). \quad (3.25)$$

Obsérvese, que sustituyendo la expresión (3.23) en (3.25), y considerando que por construcción  $\zeta = \varphi_d^\psi \zeta$ , se tiene que

$$\zeta(u) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [d \sum_{k=-N}^N g_\theta(kd) q((n-k)d)] \psi(u - nd). \quad (3.26)$$

Ahora, tomando

$$F_1(U) = \sum_{k=-N}^N \mathfrak{F}[g_\theta](U + k/d), \quad (3.27)$$

$$F_2(U) = \sum_{k=-N}^N \mathfrak{F}[q](U + k/d), \quad (3.28)$$

$$F_3(U) = \mathfrak{F}[\psi](U/d) \quad (3.29)$$

entonces, por el teorema de convolución, se sigue que

$$\mathfrak{F}[\zeta](U) = F_1(U) \cdot F_2(U) \cdot F_3(U) \quad (3.30)$$

A partir de esta última expresión, es posible establecer criterios para las elecciones de la función convolucionante  $q$  y de la función interpolante  $\psi$ , mediante el análisis de cada uno de los términos en esta relación dada en el dominio de la frecuencia. Para ello, nótese que  $F_1(U)$  y  $F_2(U)$  son periódicas de periodo  $1/d$ , donde  $d$  es precisamente el intervalo de muestreo de la función  $g_\theta$ . Ahora, si la función  $g_\theta$  es muestreada con un intervalo de muestreo  $d$ , entonces las frecuencias  $U$  que pueden ser determinadas por los datos son tales que  $|U| < 1/2d$  (condición de Nyquist [4]).

Suponiendo que la función  $g_\theta$  es suficientemente suave con respecto al intervalo de muestreo  $d$ , entonces el cero resulta ser una aproximación razonable para  $\mathfrak{F}[g_\theta](U)$ , si  $|U| \geq 1/2d$ . Ya que, es sabido que a mayor suavidad de la función, más despreciables se vuelven las componentes espectrales de altas frecuencias. Así pues, si  $g_\theta$  es suficientemente suave entonces  $\mathfrak{F}[g_\theta](U)$  es una buena aproximación de  $F_1(U)$ , para  $|U| < 1/2d$ .

Por el contrario, si los valores de  $\mathfrak{A}[g_\theta](U)$  no son insignificantes para  $|U| < 1/2d$ , entonces se tiene un serio problema. Pues no se tiene idea clara de cómo aproximar  $\mathfrak{A}[g_\theta](U)$  para valores grandes de  $|U|$ ; peor aún, para  $|U| < 1/2d$ ,  $\mathfrak{A}[g_\theta](U)$  deja de ser una buena aproximación para  $F_1(U)$ , debido a que los valores  $\mathfrak{A}[g_\theta](U + k/d)$  no se pueden ignorar para  $k \neq 0$ . Lo cual dice que las amplitudes de las componentes de alta frecuencia de  $g_\theta$  influyen en la evaluación de  $F_1(U)$ , para  $|U|$  pequeñas. Este fenómeno es conocido como 'aliasing', término acuñado por el estadístico John W. Tukey [8]. A continuación, se presenta un ejemplo concreto para ilustrar este importante fenómeno.

Considérese la función senoidal  $\text{sen}(\pi x/4)$ , en la Fig. III.4 se describe la recuperación de esta función por interpolación usando diferentes conjuntos de datos. Nótese, que la frecuencia de Nyquist  $1/2d = 1/2$ , correspondiente al muestreo de la función original con  $d=1$  (Fig. III.4.1), dice que la mayor frecuencia que puede ser determinada por los datos es  $1/2$ . La frecuencia de Nyquist correspondiente al muestreo de la función original con  $d=3$  (Fig. III.4.2), es  $1/6$ . La frecuencia de Nyquist correspondiente al muestreo de la función original con  $d=6$  (Fig. III.4.3), es  $1/12$ . Y la frecuencia de Nyquist correspondiente al muestreo de la función original con  $d=9$  (Fig. III.4.4), es  $1/18$ .

De lo anterior se puede ver que si el intervalo de muestreo aumenta - y en consecuencia, el número de datos disminuye- entonces la aproximación a la función empeora (Fig. III.4.3, y Fig III.4.4).

Por otro lado, conviene observar que la frecuencia asociada a la función  $\text{sen}(\pi x/4)$  es  $1/8$ , y que esta frecuencia es menor que las frecuencias de Nyquist ( $1/2, 1/6$ ) para los dos primeros muestreos con distancias  $d=1, d=3$ . Y que para los dos últimos casos ( $1/12, 1/18$ ) con distancias de muestreo  $d=6$ , y  $d=9$ , los datos de alta frecuencia están 'aliased' (fusionados) con una frecuencia más baja.

Es importante hacer notar que la condición de Nyquist para el muestreo juega un papel muy importante, cuando queremos recuperar (reconstruir) una función a partir de un conjunto finito de sus datos, ya que esta condición nos dice que el intervalo de frecuencias ( $|U| < 1/2d$ ) aumenta como el intervalo de muestreo  $d$  disminuye. Luego, si el intervalo de muestreo  $d$  es grande, se corre el riesgo de perder información relevante correspondiente a las altas frecuencias, lo que conduce a obtener aproximaciones (reconstrucciones) de la función original de mala calidad.

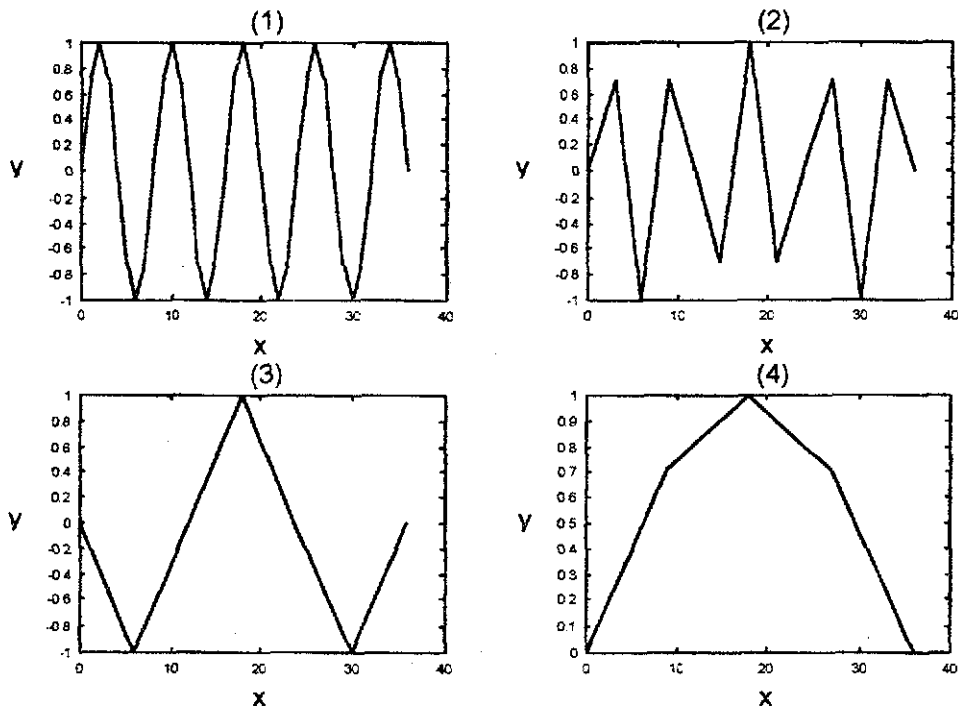


Fig. III 4 Esta gráfica muestra cuatro aproximaciones a la función  $\sin(\pi x/4)$  utilizando interpolación lineal con muestras tomadas a diferentes intervalos de muestreo. Gráfica (1), aproximación con 36 datos muestreados a una distancia  $d=1$ . Gráfica (2), aproximación con 12 datos muestreados a una distancia  $d=3$ . Gráfica (3), aproximación con 6 datos muestreados a una distancia  $d=6$ . Gráfica (4), aproximación con 4 datos muestreados a una distancia  $d=9$ .

Por lo anterior, es conveniente resaltar que la proyección  $g_\theta$  sea una función de banda limitada con ancho de banda  $1/d$ , para poder garantizar que  $\mathfrak{I}[g_\theta](U)$ ,  $|U| < 1/2d$ , resulte ser una buena aproximación para  $F_1(U)$ . En la Fig. III.5, se muestra la función  $|F_1(U)|$  para diferentes valores de  $\theta$ .

Otro aspecto muy importante que debe ser tomado en cuenta con relación a  $F_1(U)$ , es que  $g_\theta$  es solo una aproximación a los valores de la transformada de Radón. Es decir,

$$g_\theta = \mathfrak{R}_\theta f + n_\theta. \quad (3.31)$$

donde  $n_\theta$  es un término debido a los errores por medición. Aplicando la transformada de Fourier a esta relación se tiene que

$$\mathfrak{I}[g_\theta](U) = \mathfrak{I}[\mathfrak{R}_\theta f](U) + \mathfrak{I}[n_\theta](U). \quad (3.32)$$

Como  $n_\theta$  representa el ruido en los datos, su amplitud  $|\mathfrak{I}[n_\theta](U)|$  puede ser considerada como una muestra de una variable aleatoria. El valor esperado para esta variable aleatoria es casi el mismo para toda  $U$ , y como es de esperar, ésta se hace más notoria en las altas frecuencias (i.e., para valores de  $U$  cercanos a  $1/2d$ ), siempre que  $\mathfrak{R}_\theta f$  sea muy suave, suave en el sentido que los valores de  $\mathfrak{I}[\mathfrak{R}_\theta f](U)$  varían poco con respecto al intervalo de muestreo  $d$ .

Por otro lado, un análisis similar para el término  $F_2(U)$  tomando en cuenta que  $q$  es de banda limitada (propiedad heredada de la función ventana), y eligiendo el ancho de banda no mayor que  $1/d$ , se tiene

$$F_2(U) = \mathfrak{I}[q](U). \quad (3.33)$$

para frecuencias  $|U| < 1/2d$ .

Nótese que el ancho de banda  $A$  debe elegirse lo más grande posible, para que la regularización resulte ser una buena aproximación a la transformada de Hilbert de (3.6). Por otro lado, no debe ser mayor que  $1/d$ . Así, si  $d$  es suficientemente pequeño,  $A=1/d$  resulta ser aceptablemente grande, para fines prácticos.

Por ejemplo, del teorema de regularización se sigue que el valor límite de la función  $\Phi(U) = |U|F_A(|U|)$ , es  $\Phi(U) = |U|$ , donde el ancho de banda se toma como el radio del intervalo de frecuencias  $|U| < 1/2d$ , esto es igual a  $A/2$ .

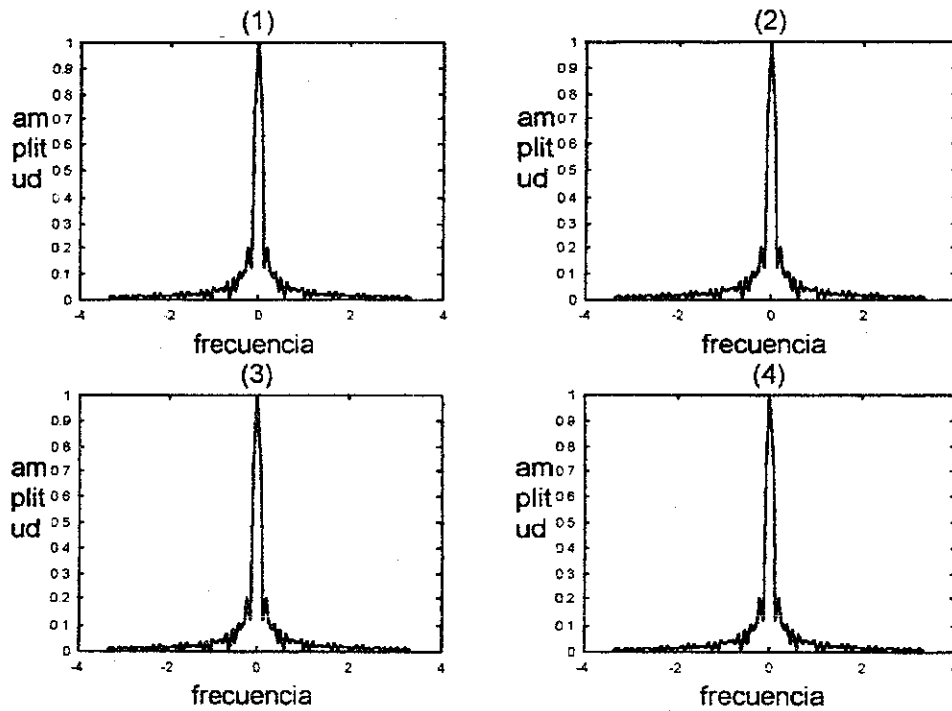


Fig. III.5 Gráficas de la función  $|F_1(U)|$  en el intervalo de frecuencias  $|U| < 1/2d$ , con  $d=0.1504$  para diferentes proyecciones de datos: Gráfica (1),  $\theta=0.0262$ , Gráfica (2),  $\theta=1.0480$ , Gráfica (3),  $\theta=2.0960$ , Gráfica (4),  $\theta=3.1415$ , con valores en radianes. La gráfica de la función  $|F_1(U)|$  fuera de este intervalo son repeticiones periódicas de la misma.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

En concreto se puede decir que: Si la colección de datos  $g_\theta$  es muy confiable y  $\mathfrak{I}g_\theta$  es casi de banda limitada con ancho de banda  $1/d$ , entonces resulta apropiado elegir a  $q$ , tal que  $\mathfrak{I}[q](U) = F_2(U) = U$ . Más aún, si el ruido en los datos  $g_\theta$  es considerable, ó bien tiene lugar el fenómeno *aliasing* (*fusión de frecuencias*) cerca de  $1/2d$ , entonces una elección de  $F_A(U)$  que sea pequeña para  $U$  cerca de  $1/2d$ , puede dar buenos resultados. Sin embargo, la elección exacta del filtro debe depender del método de colección de datos y el tipo de objeto que se desea reconstruir.

### 3.6 Experimentos.

A continuación se presentan los experimentos realizados con el algoritmo de convolución-retroproyección, cuya implementación se realizó en lenguaje Fortran 77, y se ejecutaron en una PC Pentium usando el compilador Fortan Power Station de Microsoft.

Como intervalo de muestreo se tomo el intervalo  $[-Nd, Nd]$ , donde  $Nd \geq E$ . La reconstrucción se calculó sobre una malla de  $(2N + 1) \times (2N + 1)$  pixeles para el muestreo de  $\mathfrak{R}_{\theta, f}$ .

El algoritmo trata de recuperar las siguientes funciones de prueba:

1.  $f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$
2.  $f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^4 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$

usando las funciones ventanas de Hanning y Hamming generalizada para diferentes valores del parámetro de suavización  $\alpha$ .

Estas funciones de prueba representan superficies de dos y cuatro picos bien definidos como se muestra en las Figs. III.a y III.b que se presentan a continuación.



### 3.7 Comentarios de los experimentos

Los filtros denominados de paso bajo atenúan o eliminan las componentes de alta frecuencia, a la vez que dejan inalteradas las bajas frecuencias. Esto conduce a obtener imágenes con diferentes grados de suavidad según el filtro en uso. Por ejemplo, se puede apreciar que en las reconstrucciones realizadas con el algoritmo de convolución-retroproyección, usando la ventana de Hanning ( $\alpha = 0.5$ ) y la ventana de Hamming generalizada con parámetro  $\alpha = 0.54$ , las imágenes son muy suaves (Figs. III.6-III.9 y III.14-III.16). Por otro lado, con el parámetro  $\alpha = 0.8$ , las imágenes obtenidas son mucho menos suaves y se puede apreciar que los valles y los picos tienen una mayor definición (Figs. III.10, III.11, III.17 y III.18). Finalmente, cuando  $\alpha = 1$ , las imágenes obtenidas alcanzan su máxima definición (Figs. III.12, III.13, III.19 y III.20). En este caso la ventana generalizada de Hamming no ejerce ninguna atenuación.

Debe notarse también que la mayor suavidad en las reconstrucciones es alcanzada cuando el parámetro  $\alpha$  toma el valor más pequeño, lo que corresponde a la ventana de Hanning ( $\alpha = 0.5$ ).

De lo anterior se concluye que nuestra versión del algoritmo de convolución-retroproyección con rayos paralelos, es capaz de recuperar eficientemente las funciones de prueba con diferentes grados de aproximación, dependiendo del parámetro  $\alpha$ .

Con respecto al método de interpolación se puede apreciar que el uso de interpolación lineal parece producir mejores resultados que la interpolación vecinos más cercanos.

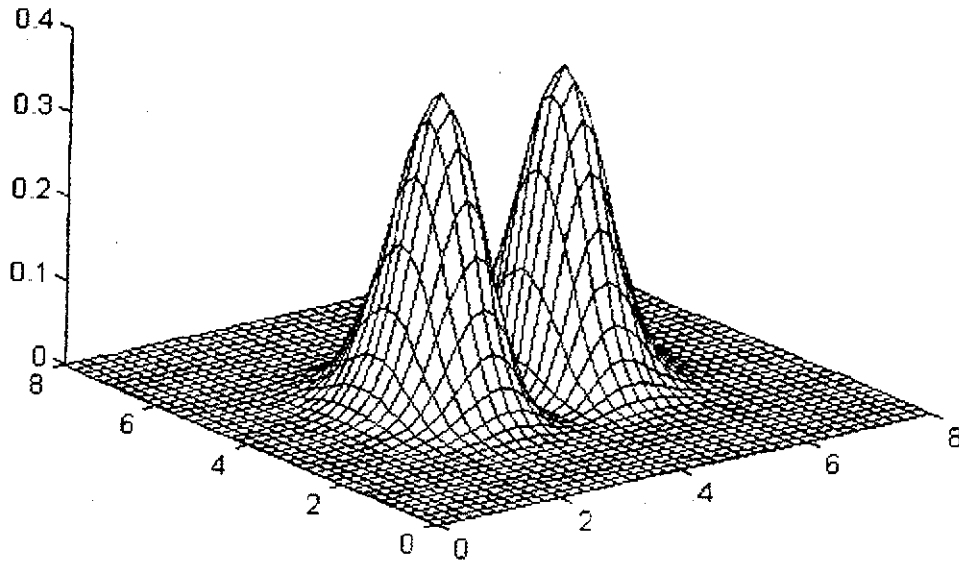


Fig. III.a Gráfica de la superficie.  $f(x,y) = (x-4)^2 \exp(-(x-4)^2 - (y-4)^2)$   
Que se reconstruye utilizando el método de convolución-retroproyección para rayos de haz en paralelo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

29-A

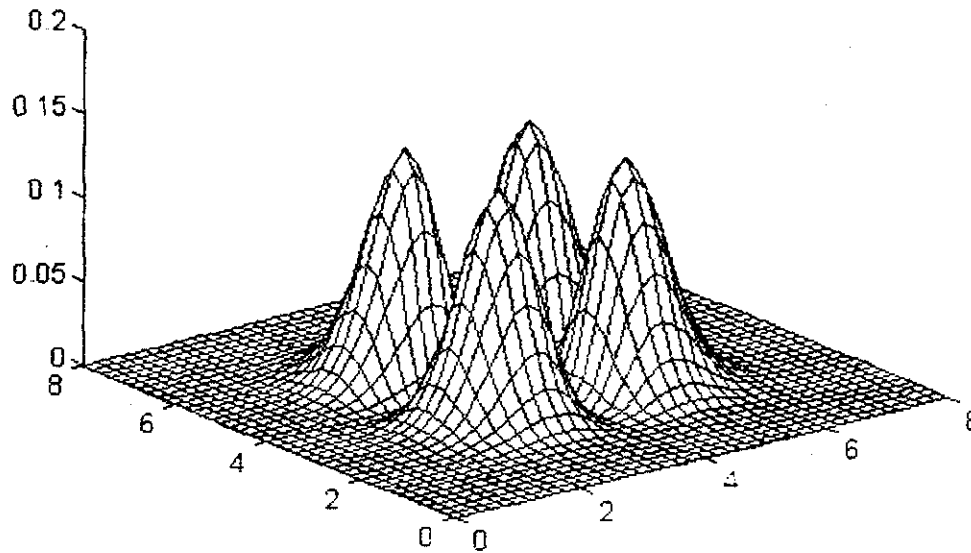


Fig. III.b Gráfica de la Superficie:  $f(x, y) = (x-4)^2(y-4)^2 \exp(-(x-4)^2 - (y-4)^2)$   
Que se reconstruye utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos en paralelo

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

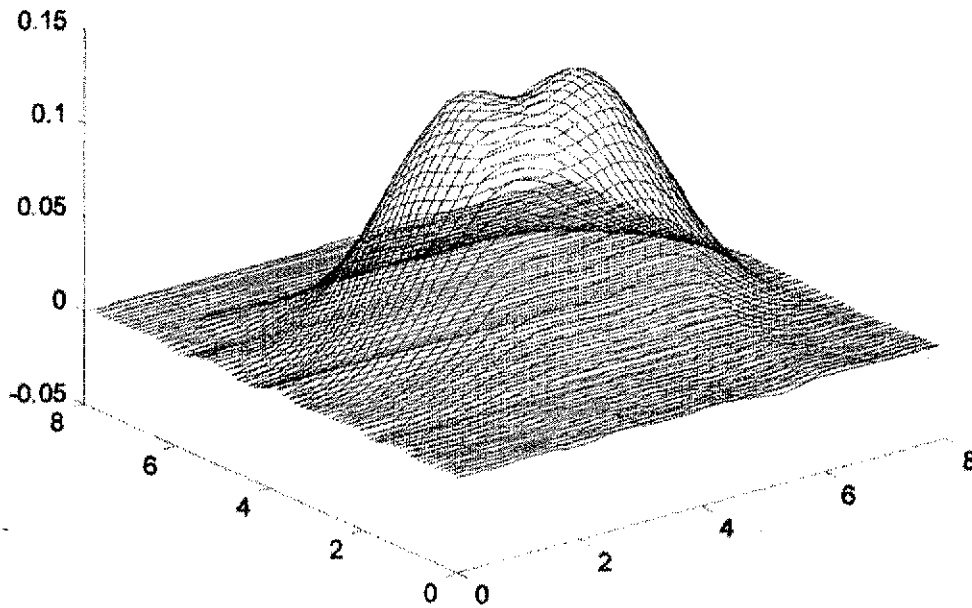


Fig. III.6 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x,y) = (x-4)^2 \exp(-(x-4)^2 - (y-4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e *interpolación lineal*.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de Hanning ( $\alpha = 0.5$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 1.0$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

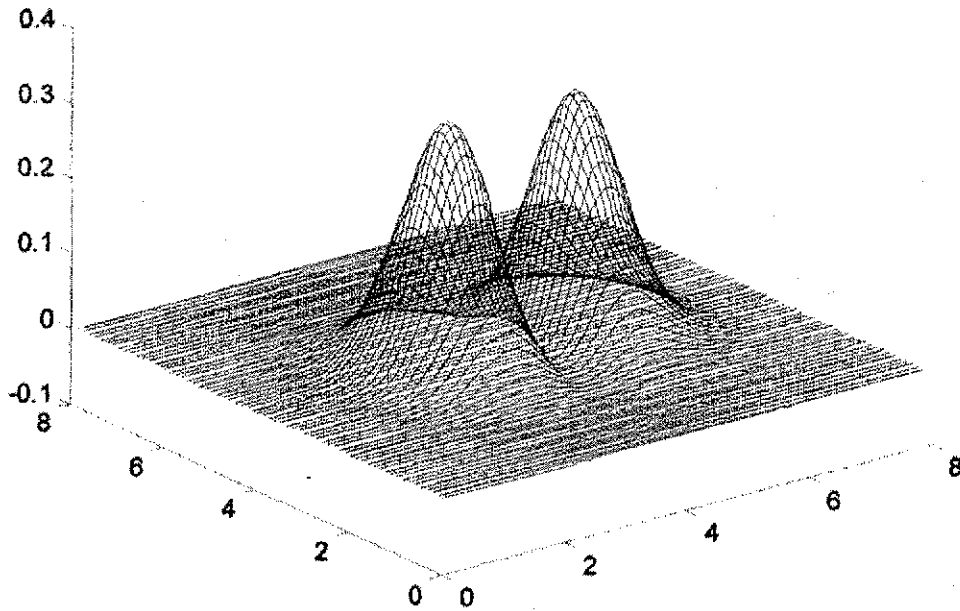


Fig. III.7 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de Hanning ( $\alpha = 0.5$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

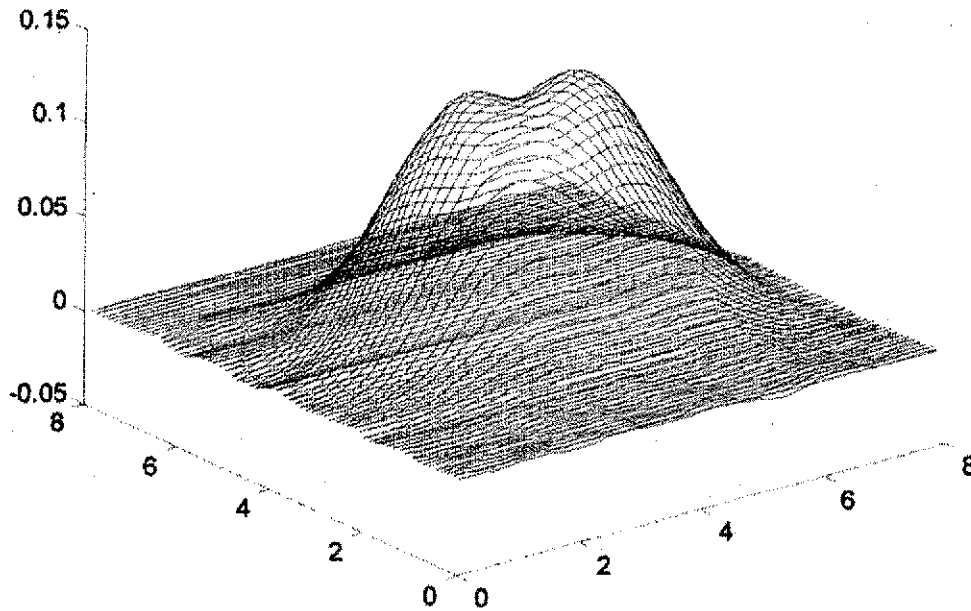


Fig. III.8 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.54$
- Intervalo de muestreo  $d = 1.0$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

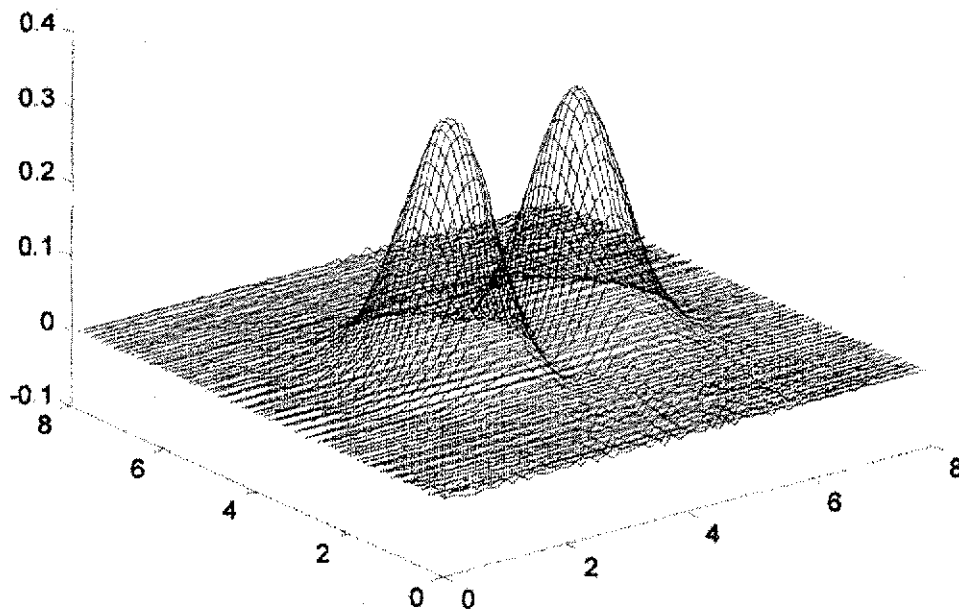


Fig. III.9 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación vecinos mas cercanos.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.54$
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

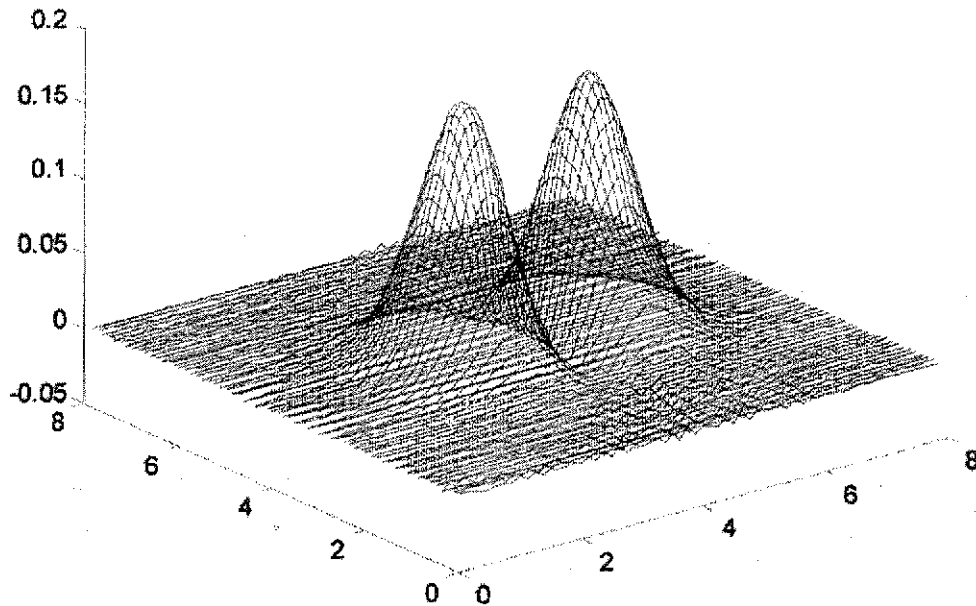


Fig. III.10 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e *interpolación lineal*.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.8$
- Intervalo de muestreo  $d = 0.5$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN



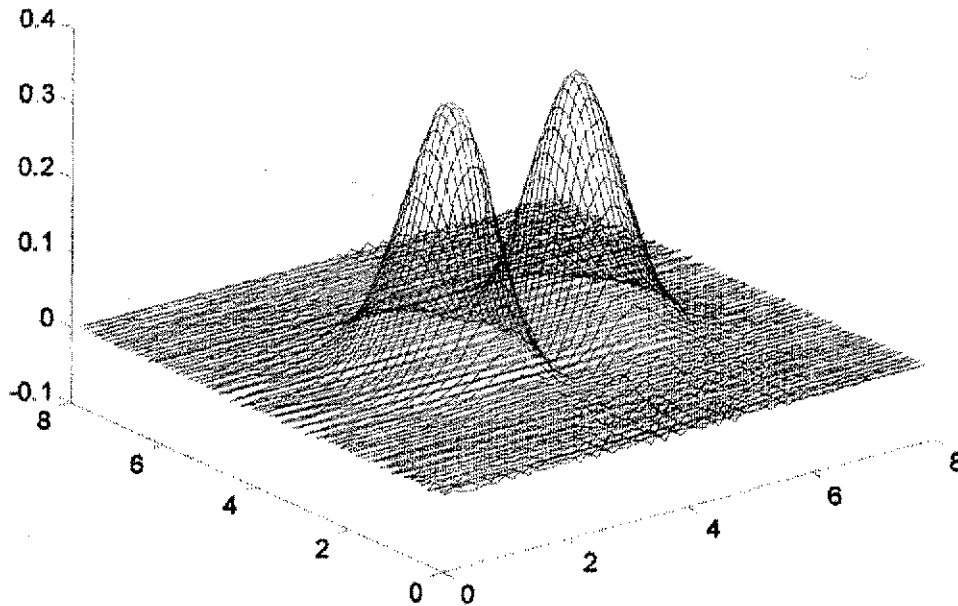


Fig. III.11 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación vecinos mas cercanos.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.8$
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

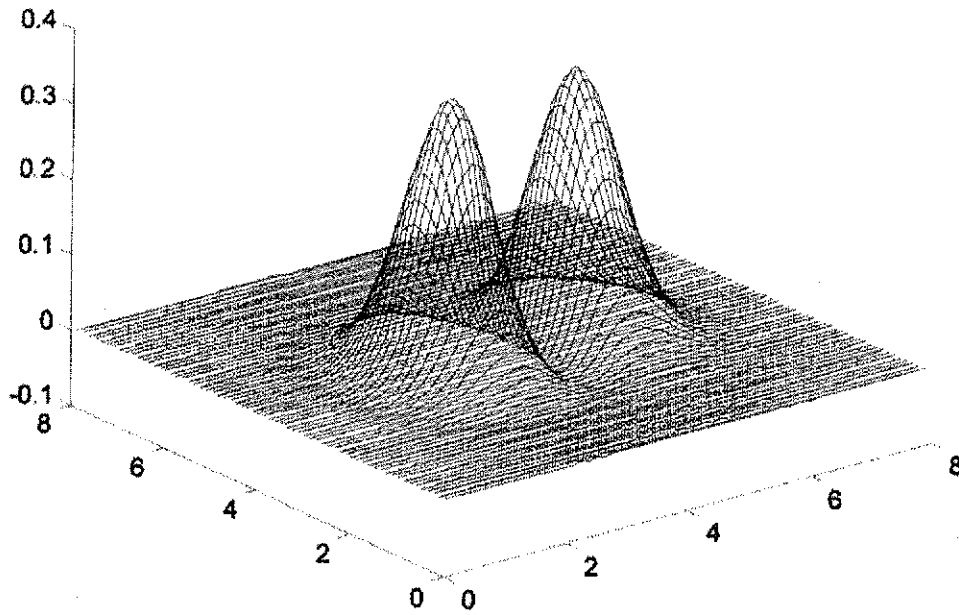


Fig. III.12 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 1$ .
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

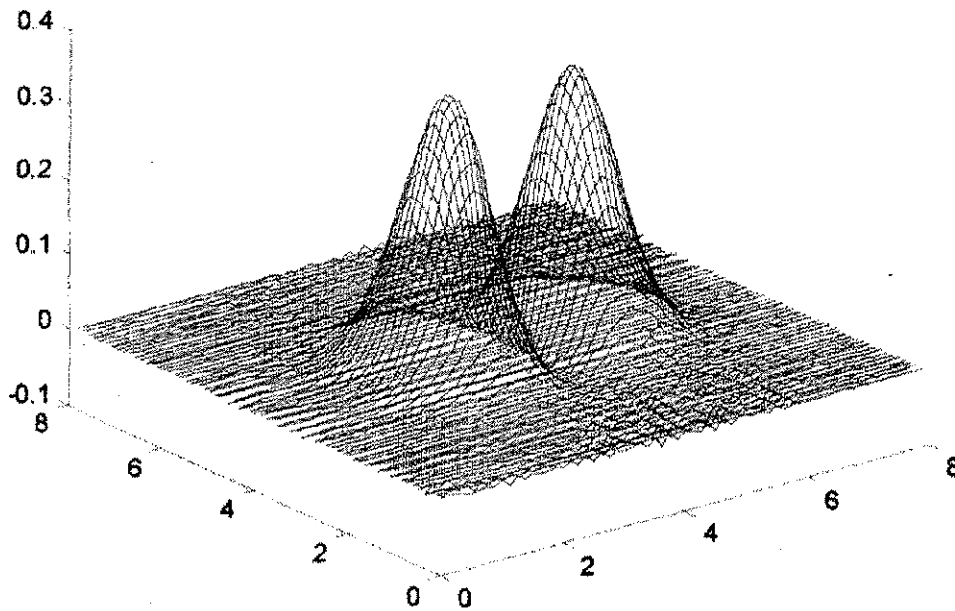


Fig. III.13 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x-4)^2 \exp(-(x-4)^2 - (y-4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación vecinos mas cercanos.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de generalizada de Hamming con  $\alpha = 1$ .
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

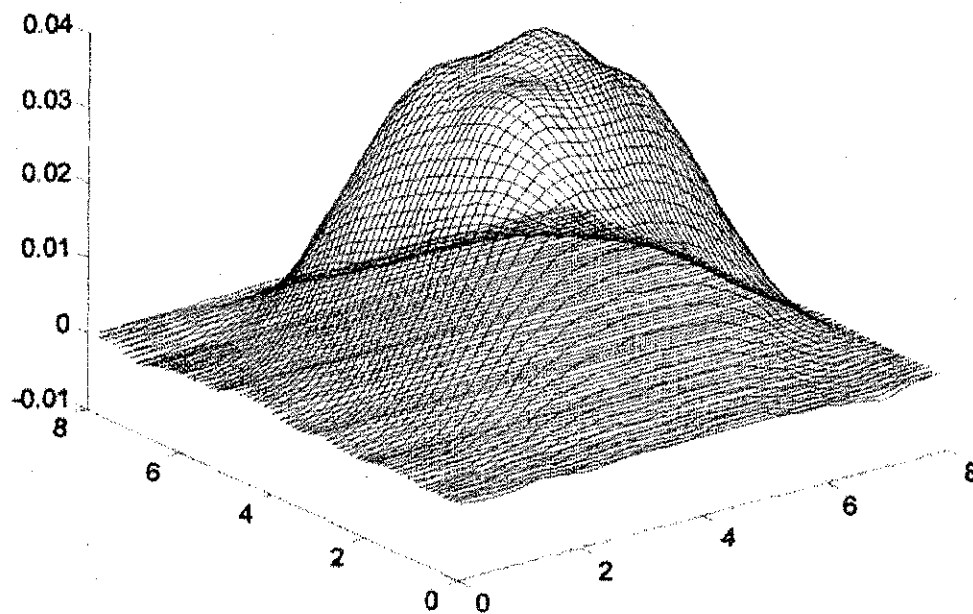


Fig. III.14 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de Hanning ( $\alpha \approx 0.5$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 1$ .
- Malla de  $128 \times 128$  puntos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

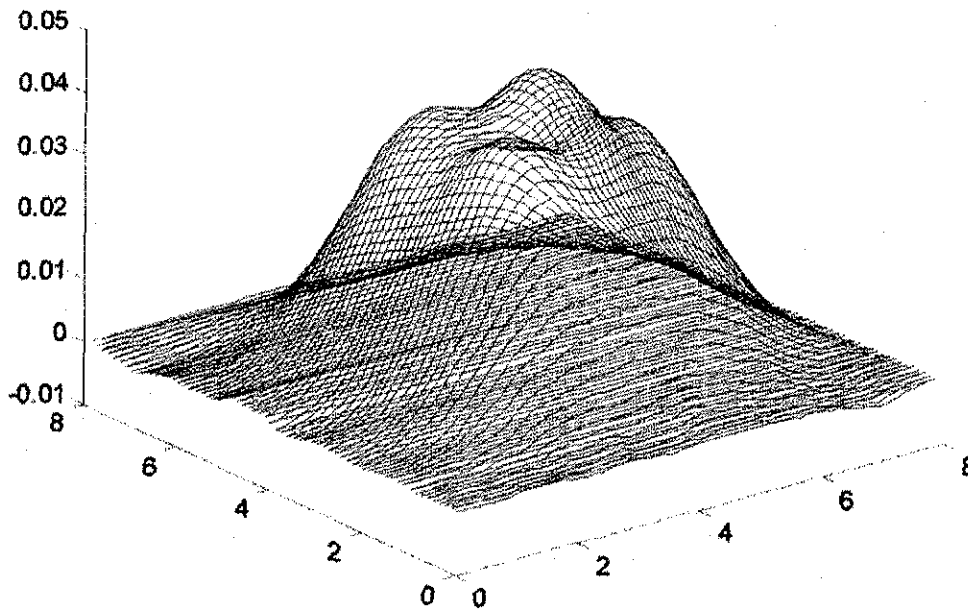


Fig. III.15 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.54$
- Intervalo de muestreo  $d = 1.0$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

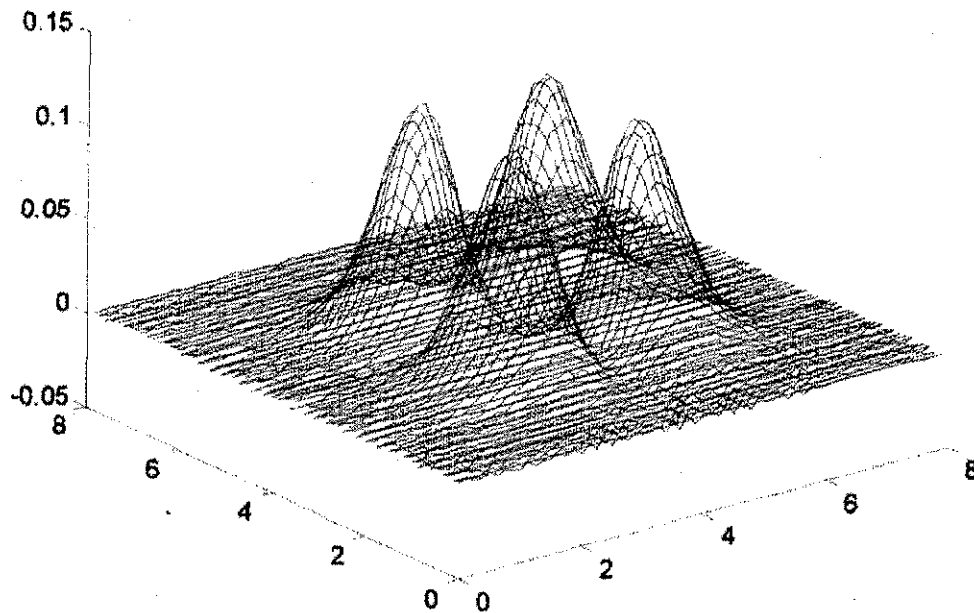


Fig. III.16 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación *vecinos mas cercanos*.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.54$
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

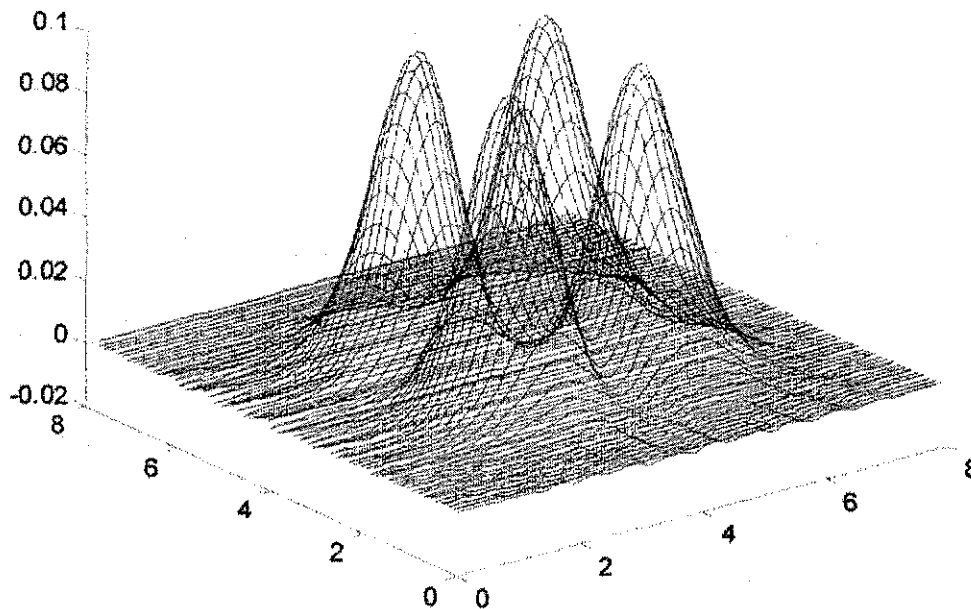


Fig. III.17 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.8$
- Intervalo de muestreo  $d = 0.5$
- Malla de  $128 \times 128$  píxeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

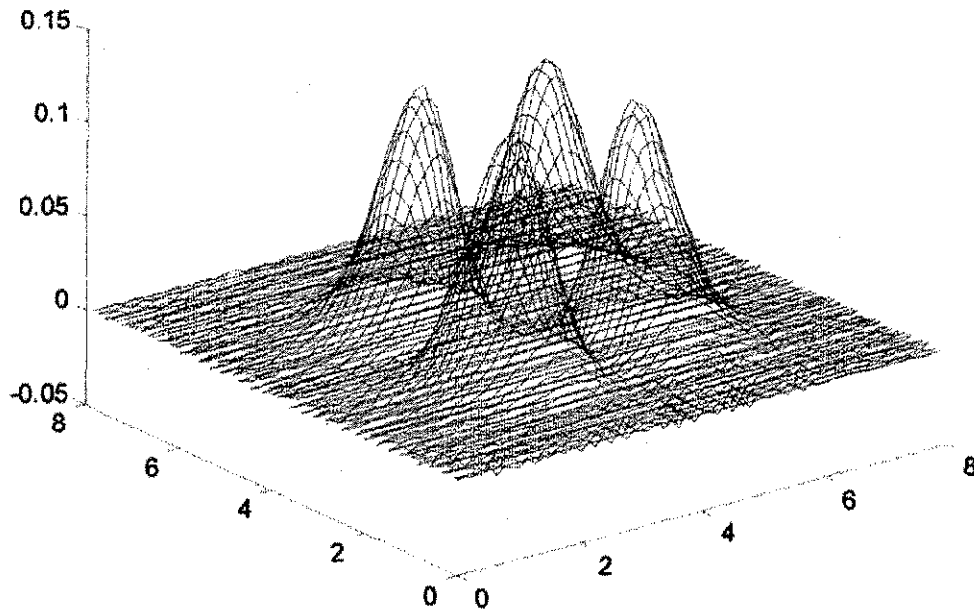


Fig. III.18 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2(y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación vecinos más cercanos.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 0.8$
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



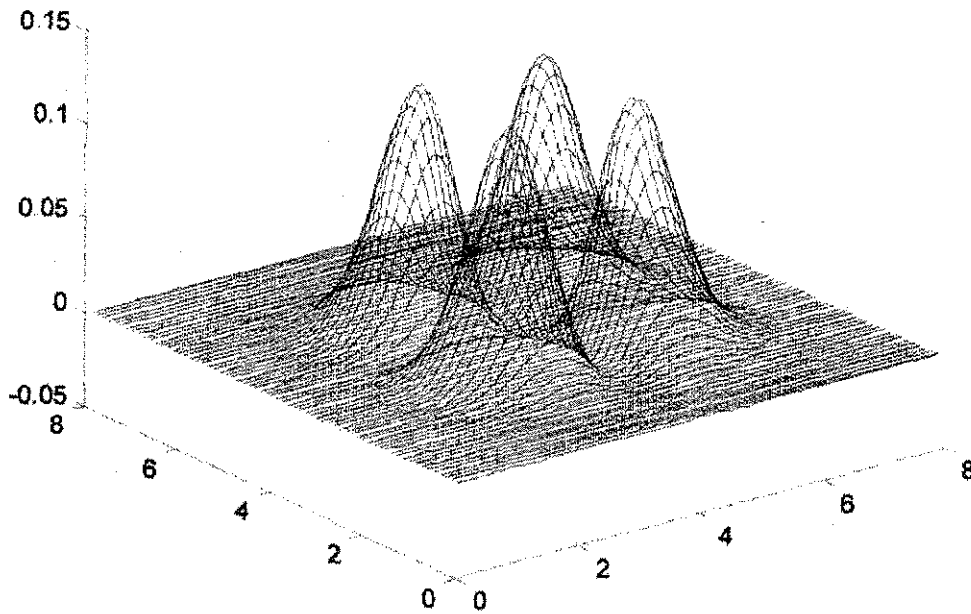


Fig. III.19 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación lineal.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 1$ .
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

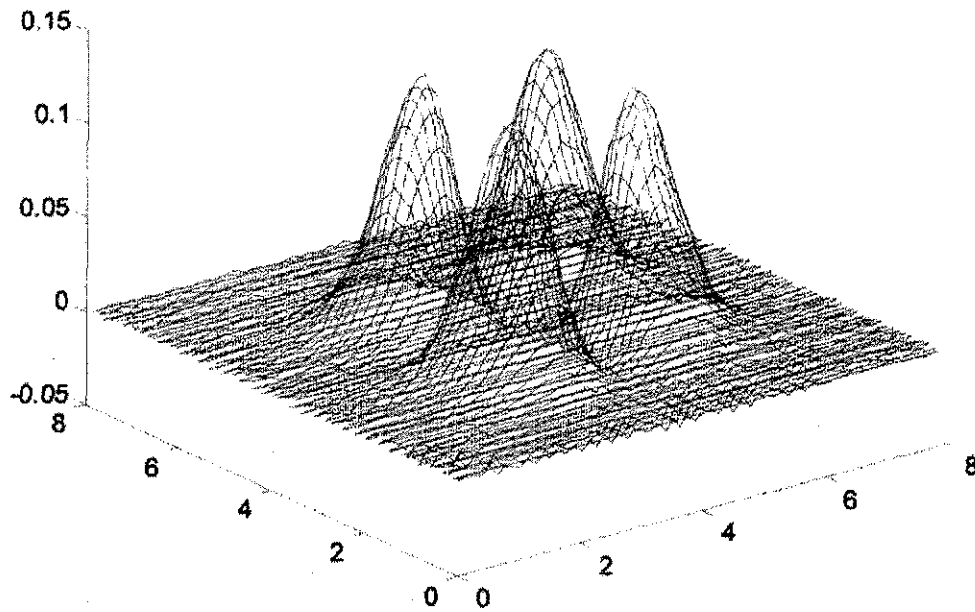


Fig. III.20 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = (x - 4)^2 (y - 4)^2 \exp(-(x - 4)^2 - (y - 4)^2)$$

utilizando el método de convolución-retroproyección para haz de rayos paralelos e interpolación *vecinos mas cercanos*.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana generalizada de Hamming con  $\alpha = 1$ .
- Intervalo de muestreo  $d = 0.25$
- Malla de  $128 \times 128$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## CAPÍTULO 4

### El método de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos y en abanico

De la experiencia obtenida con el método de retroproyección filtrada en una región cuadrada vista en el capítulo anterior, estamos en condiciones de iniciar el estudio de una nueva versión del método de retroproyección filtrada. Como se verá más adelante, esta versión tiene la ventaja de satisfacer la condición de muestreo de Nyquist, lo que garantiza una reconstrucción confiable de la función que se desea reconstruir siempre que la función pertenezca al espacio  $C_0^\infty$  y además sea *esencialmente de banda limitada*. Es importante resaltar que este algoritmo es considerado actualmente como uno de los algoritmos más importantes al menos en el campo médico.

#### 4.1. Antecedentes.

Recordando la ecuación de la recta  $\ell$ , con vector normal unitario  $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$  y distancia al origen  $p$ , está dada por

$$p = x \cos \theta + y \sin \theta ,$$

o bien, en forma sucinta, por

$$u_\theta \cdot \mathbf{x} = p, \tag{4.1}$$

donde  $\mathbf{x} = (x, y)$ , la transformada de Radón de una función  $f \in \mathcal{S}(R^2)$ , se puede representar como

$$\mathfrak{R}[f](\theta, p) = \int_{u_\theta \cdot \mathbf{x} = p} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{4.2}$$

donde por razones de sencillez, se denota a  $f(x, y)$  por  $f(\mathbf{x})$  y a  $dx dy$  por  $dx$ . Es importante resaltar que  $\mathfrak{R}f$  ( $\in \mathfrak{S}(S^1 \times R)$ ) es una función par; Esto es,

$$\mathfrak{R}[f](\theta, p) = \mathfrak{R}[f](-\theta, -p).$$

Por otro lado, para  $g \in \mathfrak{S}(S^1 \times R)$ , el operador de retroproyección  $\mathfrak{R}^\#$ , en ésta nueva notación, se puede describir como:

$$\mathfrak{R}^\#[g](\mathbf{x}) = \int_{S^1} g(u_\theta, u_\theta \cdot \mathbf{x}) d\theta. \quad (4.3)$$

El resultado siguiente es muy importante para la base teórica de la nueva versión (que se verá después) del algoritmo de la retroproyección

**Teorema.** Si  $f \in \mathfrak{S}(R^2)$  y  $g \in \mathfrak{S}(S^1 \times R)$  con  $g(\theta, p) = g(-\theta, -p)$ , entonces

$$(\mathfrak{R}^\# g) * f = \mathfrak{R}^\#(g * \mathfrak{R}f). \quad (4.4)$$

La prueba de este resultado se sigue de aplicar la definición de convolución combinada con la definición del operador de retroproyección, y restringiendo la función  $f$  a una recta. Es decir,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{R}^\# g * f)(\mathbf{x}) &= \int_{R^2} \mathfrak{R}^\#[g](\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{R^2} \int_{S^1} g(\theta, u_\theta \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) d\theta f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{S^1} \int_{R^2} g(\theta, u_\theta \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\theta \end{aligned}$$

expresando a  $\mathbf{y} = su_\theta + \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} \in u_\theta^\perp$ , se tiene que

$$\begin{aligned} &= \int_{S^1} \int_{R^1} \int_{u_\theta^\perp} g(\theta, u_\theta \cdot (\mathbf{x} - (su_\theta + \mathbf{z}))) f(su_\theta + \mathbf{z}) dz ds d\theta \\ &= \int_{S^1} \int_{R^1} \int_{u_\theta^\perp} g(\theta, u_\theta \cdot \mathbf{x} - s) f(su_\theta + \mathbf{z}) dz ds d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{R}^1} \int_{\mathcal{R}^1} g(\theta, u_\theta \cdot \mathbf{x} - s) \mathfrak{R}[f](s, \theta) ds d\theta \\
&= \int_{\mathcal{R}^1} (g * \mathfrak{R}f)(\theta, u_\theta \cdot \mathbf{x}) d\theta \\
&= \mathfrak{R}^*(g * \mathfrak{R}f)(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

La importancia de esta relación se debe al hecho que su lado derecho, no es mas que la transformada inversa de Radón mediante su lado izquierdo como se verá mas adelante (Véase sección 3.2). Así pues, si elige a  $g$  tal que  $\mathfrak{R}^*g$  sea una aproximación a la función  $\delta$  de Dirac (es decir,  $\mathfrak{R}^*g$  sea un filtro de paso bajo con frecuencia de corte  $b$ ), entonces se puede utilizar el lado izquierdo de la expresión (4.4) para aproximar a la transformada inversa de Radón. A este punto se volverá más adelante.

## 4.2 Condición de muestreo de Nyquist

Como se señaló anteriormente, el muestreo de la sección del objeto tiene una gran importancia en la calidad de la imagen por reconstruir. Y es natural esperar que entre más fina sea tomada la muestra, la reconstrucción sea de mejor calidad. Sin embargo, debido a que la muestra es siempre finita, se ha encontrado que la función  $f$  a reconstruir confiablemente debe de ser una *función de banda esencialmente limitada*. Otro aspecto muy importante está relacionado con la resolución que se puede alcanzar a partir de un número finito de muestras de la transformada de Radón. Para poder abordar estos aspectos, es conveniente recordar antes lo que es una *función de banda esencialmente limitada*.

Como se vió en el capítulo anterior, una función  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  es llamada de *banda limitada con ancho de banda  $b > 0$* , si su transformada de Fourier es localmente integrable y se anula fuera de la bola de radio  $b$ .

Como ejemplo, considérese la función  $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  definida por  $g(s) = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi}$ , si  $s \in [-1, 1]$ , y  $g(s) = 0$ , en otro caso. Su transformada inversa de Fourier está dada por

$$\mathfrak{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\xi x} d\xi$$

$$= \text{sinc}(x). \quad \square$$

La función  $f(x) = \text{sinc } x$  es una función de banda limitada con ancho de banda  $b = 1$ , ya que es la transformada inversa de Fourier de una función que se anula fuera del intervalo con centro en 0 y radio 1. La función  $\text{sinc}_b(x) = \text{sinc}(bx)$ ,  $b > 0$ , es otro ejemplo de función de banda limitada. Nótese que la función  $\text{sinc}_b$  es una función (analítica) oscilante que decae rápidamente y que no se anula fuera del intervalo con centro en 0 y de radio  $b$ .

En la figura IV.1 se puede apreciar la gráfica de la función  $\text{sinc}_b$ . Nótese que para valores  $|x| < \pi/b$ , la función es positiva y decae rápidamente en forma oscilante fuera de ese intervalo. En la jugera del procesamiento digital de imágenes  $\text{sinc}_b$  representa un detalle de tamaño  $2\pi/b$ . En general, una función de banda limitada con ancho de banda  $b$  no tiene detalles más pequeños que  $2\pi/b$ , y por ello para representar detalles de tamaño  $2\pi/b$  de una cierta función se necesita que dicha función sea de banda limitada con ancho de banda al menos  $b$ .

Ahora bien, como usualmente las imágenes son funciones (de densidad) con soporte compacto, y dado que la transformada de Fourier de una función de soporte compacto, no necesariamente es de soporte compacto. Se hace necesario considerar a las funciones de *banda esencialmente limitada*.

Por una función de *banda esencialmente limitada* (con ancho de banda  $b$ ) se entenderá una función  $f: R \rightarrow R$  cuya transformada de Fourier  $\mathfrak{F}[f](\xi)$  es "despreciable" para valores  $|\xi| > b$ .

Como se ha venido observando a lo largo de este trabajo, el muestreo de la función que se desea reconstruir requiere satisfacer la condición de muestreo de Nyquist, este hecho tiene su base en el bien conocido teorema de muestreo de Shannon, que en su forma más simple, se puede formular como sigue

**Teorema.** Si  $f: R \rightarrow R$  es de banda limitada  $b$ , y  $0 < h \leq \pi/b$ . Entonces,  $f$  está únicamente determinada por sus valores  $f(hk)$ ,  $k \in Z$ . Esto es, con respecto a  $L^2(R)$ :

$$f(x) = \sum_k f(hk) \text{sinc}(\pi/h)(x - hk). \quad (4.5)$$

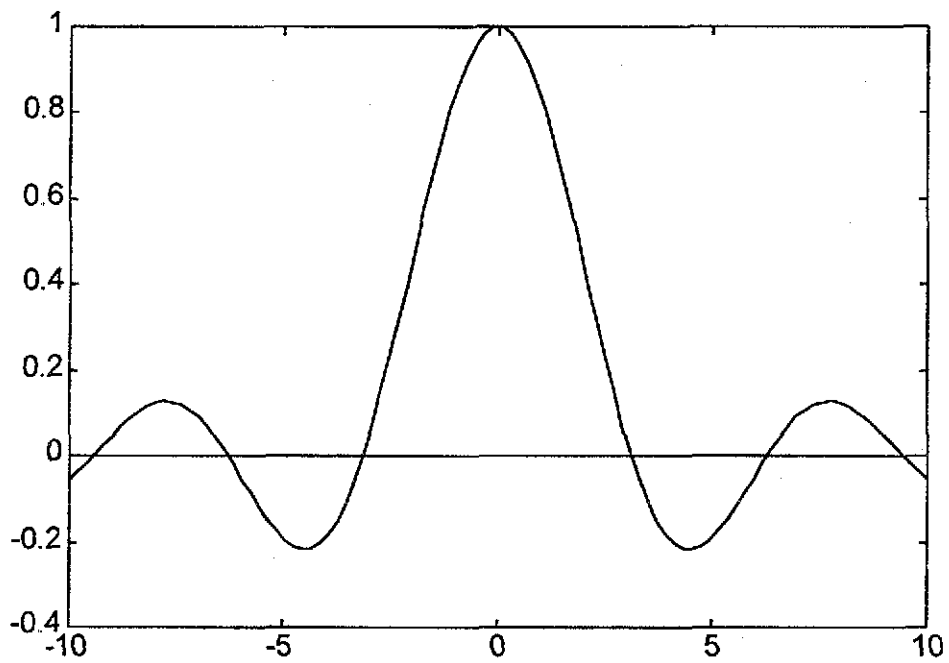


Fig. IV.1 Gráfica de la función  $\text{sinc}_b$

Además, con respecto a  $L_2([-(\pi/h), \pi/h])$ :

$$\mathfrak{F}[f](\xi) = (2\pi)^{-1/2} h \sum_k f(kh) e^{-ikh\xi} \quad (4.6)$$

Si  $g$  es otra función de banda limitada con ancho de banda  $b$ , se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \bar{g}(x) dx = h \sum_k f(kh) \bar{g}(kh). \quad (4.7)$$

A la condición  $h \leq \pi/b$  se le conoce como la condición de muestreo de Nyquist, la cuál dice que las muestras deben de ser tomadas a una distancia a lo más la mitad del detalle más pequeño presente en  $f$ .

Por este resultado, si  $f$  es de banda limitada (con ancho de banda  $b$ ) y se satisface la condición de muestreo de Nyquist, entonces  $f$  se puede recuperar confiablemente a partir de sus muestras por la serie *sinc* (4.5). Más aún, este proceso de reconstrucción es *estable*, en el sentido que

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R})} = (h \sum_k |f(kh)|^2)^{1/2}.$$

De (4.6) y (4.7) se puede ver que bajo la condición de muestreo de Nyquist, la transformada de Fourier y productos internos pueden ser calculados *exactamente por la regla trapezoidal*.

Como se puede ver de los comentarios anteriores, la importancia de la función *sinc* en la recuperación de una función de banda limitada, es evidente.

Ahora bien, el error  $S_h f(x) - f(x)$ , que se comete al aproximar una función  $f$  de banda *esencialmente* limitada (con ancho de banda  $b$ ), por su serie *sinc* ( $S_h f$ ):

$$S_h f(x) = \sum_k f(kh) \text{sinc}(\pi/h)(x - kh).$$

se puede dar en base al siguiente resultado:

**Teorema.** Si  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , entonces existe una función  $\eta_x \in L_\infty(\mathbb{R})$ ,  $|\eta_x| \leq 1$ , tal que

$$(S_h f(x) - f(x)) = 2(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R} - \{-(\pi/h), \pi/h\}} \eta(\xi) \mathfrak{F}[f](\xi) d\xi. \quad (4.8)$$



Combinando este resultado con el hecho que  $f$  es de banda esencialmente limitada, esto es

$$\int_{|\xi| > b} |\mathfrak{F}[f](\xi)| d\xi \leq \varepsilon$$

se sigue que

$$|S_h f - f| \leq 2(2\pi)^{-1/2} \varepsilon.$$

Por otro lado, la composición espectral del error  $S_h f - f$  está dado por

$$\mathfrak{F}(S_h f) - \mathfrak{F}f = (\chi_{\pi/h} - 1)\mathfrak{F}f + \chi_{\pi/h}\mathfrak{F}a \quad (4.9)$$

donde  $\chi_{\pi/h}$  es la función característica del intervalo  $[-\pi/h, \pi/h]$  y  $a(x)$  es tal que

$$\mathfrak{F}[a](\xi) = \sum \mathfrak{F}[f](\xi - \frac{2\pi}{h}l).$$

De acuerdo con (4.9), el primer término de la composición espectral del error  $(\chi_{\pi/h} - 1)\mathfrak{F}f$  se anula dentro del intervalo  $[-(\pi/h), \pi/h]$ . Luego, esta función describe únicamente detalles de tamaño menor que  $2h$ . Esto es, detalles de tamaño menor que  $2\pi/b$ . Así, para un muestreo adecuado para tales detalles, se requiere muestrear a la función a una distancia menor que  $h$ . Por otro lado, el segundo término,  $\chi_{\pi/h}\mathfrak{F}a$  se anula fuera del intervalo, luego esta función describe detalles de tamaño igual o mayor a  $2h$  (i.e., detalles de tamaño igual o mayor a  $2\pi/b$ ).

De lo anterior se puede concluir que un mal muestreo de la función no únicamente produce detalles espurios dos veces tan grandes o más pequeños que la distancia de muestreo, sino que también perturbaciones globales superfluas de la imagen (solapamiento de frecuencias).

Con el objeto de prevenir el solapamiento de frecuencias, es conveniente filtrar previamente a la función  $f$  que se desea muestrear. Una manera de realizar esta operación, consiste en tomar, en vez de la función  $f$ , a la función dada por

$$f_b = \psi_b * f.$$

de donde  $\psi_b$  es una función de banda limitada (con ancho de banda)  $b$ . Claramente, por el teorema de la transformada de Fourier de la convolución,  $f_b$  es también de banda limitada  $b$ . Esto es, con esta operación de filtrado, se pasó de una función  $f$  esencialmente de banda limitada  $b$ , a una función  $f_b$  de banda limitada  $b$ . La cuál, se puede muestrear apropiadamente con tamaño de paso  $h \leq \pi/b$ .

A la función  $\psi_b$  se le conoce como un filtro de paso bajo con frecuencia de corte  $b$ , y como ya se mencionó en el capítulo anterior, esta clase de filtros tiene la propiedad de atenuar la presencia de las más altas frecuencias, con la consecuente suavización de las partes abruptas de la imagen.

Hasta aquí pareciera que, usando la serie *sinc* se está en condiciones de reconstruir funciones esencialmente de banda limitada  $b$ , si éstas son muestreadas apropiadamente (i.e., si el muestreo satisface la condición de Nyquist). Sin embargo, se ha encontrado que este no es precisamente el camino más adecuado a seguir. Una alternativa que se ha preferido, por su eficiencia en la evaluación, es la interpolación B-spline.

Si  $\chi$  es la función característica del intervalo  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , entonces

$$B = \chi * \dots * \chi \quad (k \text{ factores}).$$

es una función B-spline de orden  $k$ . Obviamente,  $B$  es  $(k-2)$  veces continuamente diferenciable, anulándose fuera del intervalo  $[-(k/2), k/2]$ , y reduciéndose a un polinomio de grado  $k-1$  en cada uno de los sub-intervalos  $[l, l+1]$  para  $k$  par, ó bien en cada uno de los sub-intervalos  $[l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}]$  para  $k$  impar, siendo  $l$  un entero.

Sea  $B_{1/h}(s) = B(s/h)$ , donde  $B(s)$  es una función B-spline de orden  $k$ . Si  $g \in \mathfrak{S}(R)$  y  $h > 0$ , entonces se define a la interpolación spline de  $g$ , a la función

$$I_h g(s) = \sum_l g(hl) B_{1/h}(s - hl) \quad (4.10)$$

Para  $k=1$ ,  $I_h g(s)$  es una función constante a pedazos. Para  $k=2$ ,  $I_h g(s)$  es una función lineal a pedazos.

### 4.3 Resolución

A continuación, se considerará a la transformada de Radón  $\mathfrak{R}f$  de una función  $f$  con soporte contenido en la bola unitaria con centro en el origen  $B_1 \subset R^2$  y esencialmente de banda limitada, en el sentido que será precisado más adelante. Ahora, dado que el número de muestras proporcionadas para la transformada de Radón es finito, surge la pregunta ¿Para qué direcciones  $\theta \in S^1$  la función  $\mathfrak{R}_\theta f$  debe ser dada para poder recuperar confiablemente a  $f$ ? (i.e., si detalles de tamaño  $2\pi/b$  “deberían” de ser “resueltos”). Con objeto de responder esta pregunta se necesario repasar antes algunos resultados sobre armónicos esféricos.

Sea  $H'_m$  el conjunto de armónicos esférico de grado  $\leq m$ ; esto es, el conjunto de los polinomios homogéneos en dos variables restringidos a  $S^1$ , de grado  $\leq m$ . Los cuáles son pares para  $m$  par e impares para  $m$  impar. Se demuestra por inducción que:

$$\dim H'_m = m + 1.$$

Para la discusión que sigue, la definición siguiente juega un papel central: Un conjunto de  $n$  direcciones  $A = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\} \subset S^1$  es llamado  $m$ -resolvente, si no existe  $p \in H'_m$  (no trivial) que se anule sobre  $A$ .

Una respuesta a la pregunta sobre la resolución antes planteada, puede ser dada en base a los siguientes resultados [13], enunciados en sentido práctico:

- Una función definida sobre la bola unitaria  $B_1$  cuya transformada de Radón se anula sobre un conjunto  $m$ -resolvente no contiene detalles de tamaño  $2\pi/m$  o más grandes.
- Una función sobre  $B_1$  la cual no contiene detalles de tamaño  $2\pi/b$  o más pequeños, puede ser recuperada confiablemente a partir de los valores de su transformada de Radón sobre un conjunto  $A \subset S^1$   $m$ -resolvente, a condición de que  $m > b$ .
- Un conjunto  $A \subset S^1$  es  $m$ -resolvente *si y sólo si* contiene al menos  $m+1$  direcciones.

Así, de los últimos dos resultados se sigue que es posible reconstruir funciones de banda esencialmente limitada (con ancho de banda  $b$ ) a partir de  $n$  direcciones angulares diferentes en  $[0, \pi)$ , si

Nótese que ningún supuesto sobre la distribución de estas direcciones es necesario.

Hasta aquí se ha trabajado bajo el supuesto que  $f \in C_0^\infty(B_1)$  es de banda esencialmente limitada y que  $\mathfrak{R}_\theta f(s)$  es conocida para  $\theta \in A$ ,  $s \in R$ . Sin embargo, en la práctica solo se conoce un número finito de valores de  $\mathfrak{R}_\theta f$ . Luego, para aplicar la condición de muestreo de Nyquist a  $\mathfrak{R}_\theta f$ , se requiere que  $\mathfrak{R}_\theta f$  sea una función esencialmente de banda limitada. Este requerimiento es satisfecho debido a que  $f$  es una función banda esencialmente limitada. En efecto, del hecho que

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{R}_\theta f](\sigma) = (2\pi)^{1/2} \mathfrak{I}[f](\sigma\theta), \quad \sigma \in R,$$

para  $f \in \mathfrak{S}(R^2)$ , se tiene que

$$\int_{|\sigma\theta| > b} |\mathfrak{I}[f](\sigma\theta)| d\sigma < \varepsilon$$

implica que

$$\int_{|\sigma| > b} |\mathfrak{I}[\mathfrak{R}_\theta f](\sigma)| d\sigma < \varepsilon$$

Por lo tanto, si la función  $f$  es de banda esencialmente limitada entonces  $\mathfrak{R}_\theta f$  también lo es.

Donde el muestreo será correcto si satisface la condición de Nyquist. Es decir, si  $\mathfrak{R}_\theta[f](s)$  es conocida para:

$$s_l = l/q, \quad l = -q, \dots, q, \quad q \geq b/\pi.$$

Como sabemos que el número  $n$  menor de direcciones necesarias para recuperar una función  $f$  de banda esencialmente limitada (con ancho de banda  $b$ ) es fundamentalmente  $n \geq b$ . Se tiene que los números minimales  $n$ ,  $q$  son aproximadamente:

$$n = \pi q$$

Esta relación es conocida como la *relación óptimal*.

#### 4.4 Geometrías de escaneo

Después de haber discutido las condiciones de un buen muestreo para la función  $\mathfrak{R}_\theta f$  para poder reconstruir confiablemente a la función original  $f$ , se está en posición de pasar a describir brevemente dos esquemas de muestreo o geometría de escaneo en el plano, las cuáles son usadas para coleccionar las muestras de la transformada de Radón.

Para tal propósito, se supondrá que  $f \in C_0^\infty(B_1)$ , esto es,  $f$  es una función de clase  $C^\infty$  con soporte compacto contenido en el disco unitario  $B_1 \subset \mathbb{R}^2$  y de banda esencialmente limitada.

Un primer esquema de muestreo corresponde a la geometría de escaneo en paralelo se tiene que para cada una de las direcciones  $\theta_j = \pi(j-1)/n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , uniformemente distribuidas sobre la mitad del círculo unitario,  $\mathfrak{R}_{\theta_j} f$  es muestreada en  $2q+1$  puntos igualmente espaciados,  $s_\ell = h\ell$ ,  $\ell = -q, \dots, q$ ,  $h = 1/q$ . Aquí,  $n$  y  $q$  satisfaciendo las condiciones de muestreo de Nyquist:  $n \geq b$  y  $q \geq b/\pi$ .

Un segundo esquema de muestreo conocido como geometría de muestreo de haz de abanico, el cuál se describe a continuación.

Pero antes es conveniente recordar que el objetivo de este capítulo es presentar el método de retroproyección filtrada sobre el disco unitario con el fin de reconstruir objetos usando las geometría de escaneo por rayos paralelos y haz en abanico. Para este último caso, sea  $r > 1$ , el radio de un círculo con centro en el origen sobre el cuál se posiciona a una fuente, digamos en  $a = r(\cos \beta, \sin \beta)^T$ ,  $0 \leq \beta < 2\pi$  y sea  $L(\beta, \alpha)$  la línea recta que pasa a través de  $a$  y que forma un ángulo  $\alpha$  con respecto a la línea recta que une al punto  $a$  con el origen. La línea recta  $L(\beta, \alpha)$  la cual se muestra en la Fig. IV.2 está dada por  $u_\theta \cdot x = p$ ,  $u_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ , donde

$$p = r \sin \alpha, \quad \theta = \beta + \alpha - \pi/2. \quad (4.12)$$

La primera relación es clara, pues  $p u_\theta$  es la proyección ortogonal de  $a$  sobre  $u_\theta$ . Para la segunda es suficiente observar que el ángulo  $\beta - \theta$  entre  $a$  y

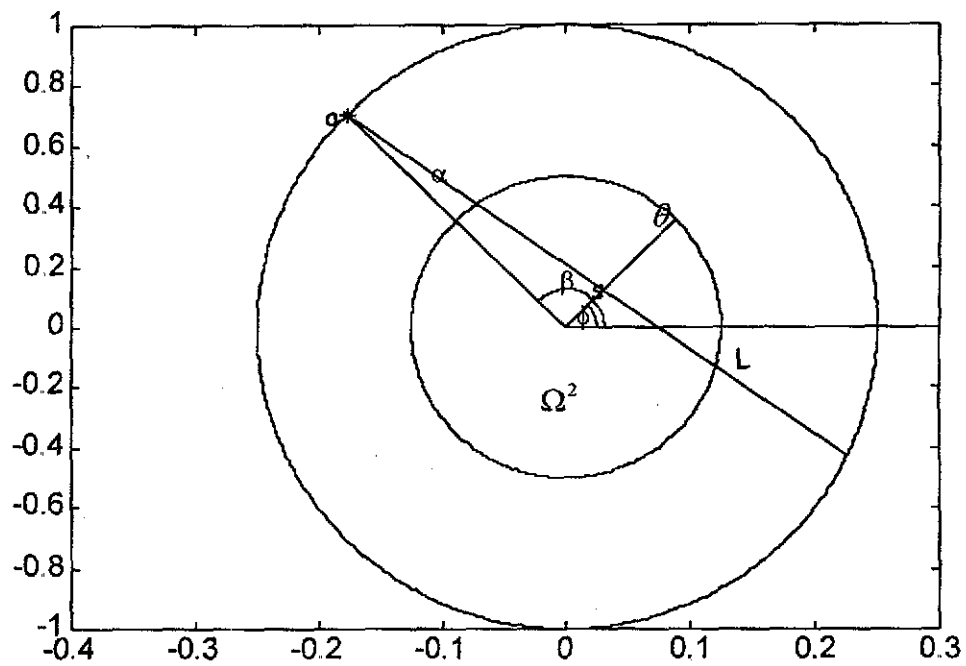


Fig. IV.2 Gráfica de la geometría de escaneo por haz de rayos en abanico donde se muestra la región de reconstrucción,  $\Omega^2$ . Una de las fuentes ( $a$ ) sobre el círculo de radio  $r > 1$  y la recta  $L(\beta, \alpha)$ , cuya distancia al origen se denota por  $s$ .

$u_\theta$  es  $\pi/2 - \alpha$ . Nótese que para cada línea recta  $L(\beta, \alpha)$  que intersecta al disco unitario  $B_1$  existen precisamente dos representaciones en términos de las coordenadas  $\alpha, \beta$  también como en las coordenadas  $s, \theta$ . No obstante, las relaciones (4.12) entre estos sistemas de coordenadas es localmente uno a uno.

Ahora estamos en condiciones de introducir *transformada de haz divergente* conocida también como *transformada de haz en abanico*, la cuál está definida, para  $f \in \mathcal{S}(R^2)$ , como

$$A[f](a, \theta) = \int f(a + tu_\theta) dt. \quad (4.13)$$

Aquí, la integral de  $f$  es a lo largo de la semi-recta  $a + tu_\theta$  con punto inicial  $a \in R^2$  y dirección  $\theta \in S^1$ . Se acostumbra también a denotar  $A_\theta[f](a) = A[f](a, \theta)$ . Algunas propiedades básicas de esta transformada se pueden ver en [13].

En el escaneo,  $A_\theta[f]$  es muestreado en  $2q+1$  direcciones igualmente espaciadas para  $n$  fuentes  $a_1, \dots, a_n$  uniformemente distribuidas sobre la circunferencia de radio  $r > 1$  y centro en el origen. Esto significa muestrear la función  $g$  en los puntos:

$$g(\beta_j, \alpha_\ell), \quad \beta_j = 2\pi(j-1)/n \quad \alpha_\ell = \pi\ell/(2q), \quad j=1, \dots, n, \quad \ell = -q, \dots, q,$$

en donde  $g(\beta, \alpha) \equiv \Re f(\theta, p)$ , donde  $p = r \sin \alpha$  y  $\theta = \beta + \alpha - \pi/2$ .

Por supuesto que únicamente se tiene que evaluar la transformada  $A[f](a, \theta)$  sobre las rectas  $L(\beta, \alpha)$  que cortan al disco unitario  $B_1$ , es decir, sobre aquellas para las cuales  $|\alpha_\ell| \leq \alpha(r) = \arcsen(1/r)$ . Así, el número de datos es prácticamente:

$$4 \frac{\alpha(r)}{\pi} Jq.$$

#### 4.5 El algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos

Como se mencionó anteriormente el algoritmo de retroproyección filtrada está basado en la expresión:

$$(\mathfrak{R}^{\#}g) * f = \mathfrak{R}^{\#}(g * \mathfrak{R}f).$$

donde  $f \in \mathfrak{S}(R^2)$  y  $g \in \mathfrak{S}(S^1 \times R)$ .

Sustituyendo a  $g$  por  $w_b$ , una función de banda limitada (con ancho de banda  $b$ ) y tomando  $\mathfrak{R}^{\#}w_b = F_b$  en la expresión de arriba, se tiene que:

$$F_b * f = \mathfrak{R}^{\#}(w_b * \mathfrak{R}f) \quad (4.14)$$

ó bien que

$$(F_b * f)(\mathbf{x}) = \int_{s^1} \int_{-1}^1 w_b(u_{\theta} \cdot \mathbf{x} - p) \mathfrak{R}f(\theta, p) dp d\theta \quad (4.15)$$

donde, al ser  $w_b$  una función de banda limitada,  $F_b$  es un filtro paso bajo.

Para el caso de la geometría de escaneo de rayos paralelos, el procedimiento para evaluar la doble integral en (4.15) se conoce como el algoritmo de la retroproyección filtrada. El cuál, dada:

$$g = \mathfrak{R}f, \text{ para } (\theta_j, s_l), \theta_j = \pi(j-1)/n, s_l = hl, j = 1, \dots, n, l = -q, \dots, q;$$

consiste de los siguientes dos pasos:

1) Para  $j = 1, \dots, n$ , se calcula

$$v_{j,k} = h \sum_{l=-q}^q w_b(s_k - s_l) g(\theta_j, s_l), \quad k = -q, \dots, q. \quad (4.16)$$

2) Para cada punto  $\mathbf{x}$  de reconstrucción se calcula la retroproyección discreta

$$f_{FBI}(\mathbf{x}) = (2\pi/b) \sum_{j=1}^n ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1})$$

donde para cada  $\mathbf{x}$ ,  $p = u_{\theta_j} \cdot \mathbf{x}$ ,  $k \leq s/h < k+1$ ,  $u = s/h - k$ .



Aquí, como en el caso del algoritmo de la convolución-retroproyección vista en el capítulo anterior, se usa una suma de Riemann para aproximar las convoluciones y la regla del trapecio con  $n$  nodos para evaluar la retroproyección.

Regresando a la expresión (4.14), la cuál puede ser vista como una variante computacional de la fórmula explícita de inversión de la transformada de Radón

$$f = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{R}^* H \mathfrak{R}[f].$$

La idea detrás de (4.14), consiste en elegir a  $w_b$  de tal manera que  $F_b$  sea un filtro de paso bajo con frecuencia de corte  $b$ . Esto es, se quiere que

$$\hat{F}_b(\xi) = \frac{1}{2\pi} \Phi\left(\frac{|\xi|}{b}\right) \quad (4.17)$$

donde  $0 \leq \Phi \leq 1$  y  $\Phi(\zeta) = 0$  para  $\zeta \geq 1$ . Un ejemplo ideal de filtro de paso bajo está dado por

$$F_b(x) = \frac{b^2 J_1(b|x|)}{2\pi b|x|}$$

donde  $J_1(z)$  es la función de Bessel de orden uno, el cuál se obtiene al tomar  $\Phi(\zeta) = 1$ , para  $0 \leq \zeta \leq 1$  y  $\Phi(\zeta) = 0$  para  $\zeta > 1$ .

Ahora, del hecho que

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{R}^*[g])(\xi) = \sqrt{2\pi} |\xi|^{-1} \left( g\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + g\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \right)$$

para  $g \in \mathfrak{S}(S^1 \times \mathbb{R})$  (véase [42]) y de que  $\mathfrak{R}^* w_b = F_b$  se tiene que

$$\hat{F}_b(\xi) = \mathfrak{I}(\mathfrak{R}^*[w_b])(\xi) = \sqrt{2\pi} |\xi|^{-1} \left( \hat{w}_b\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \hat{w}_b\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \right).$$

Por ser  $f_b$  una función radial, el primer argumento de  $w_b$  se puede suprimir. Luego, de (4.17) se sigue que

$$w_b(\zeta) = \frac{1}{2} (2\pi)^{-3/2} |\zeta| \Phi\left(\frac{|\zeta|}{b}\right) \quad (4.18)$$

En los experimentos que se reportan en este trabajo, se usaron los filtros siguientes:

(i). El filtro dado por

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} 1 - \varepsilon\zeta, & \zeta \leq 1, \\ 0, & \zeta > 1. \end{cases}$$

Con el que se obtiene, echando mano de (4.18), la función de banda limitada

$$w_b(s) = \frac{b^2}{4\pi^2} \{u(bs) - \varepsilon v(bs)\},$$

$$u(s) = \begin{cases} \frac{\cos s - 1}{s^2} + \frac{\operatorname{sen} s}{s}, & s \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & s = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

$$v(s) = \begin{cases} \frac{2 \cos s}{s^2} + \left(1 - \frac{2}{s^2}\right) \frac{\operatorname{sen} s}{s}, & s \neq 0, \\ \frac{1}{3}, & s = 0. \end{cases}$$

Si  $b$  está ligado a  $h$  (i.e.,  $b = \pi/h$ ), lo cuál es el valor maximal para  $b$  (Teorema de muestreo de Shannon-Nyquist en la sección 4.2). Y si  $w_b$  es evaluada solo en  $s = s_t$ , entonces se tiene una simplificación considerable, obteniendo que

$$w_b(s_l) = \frac{b^2}{2\pi^2} \begin{cases} 1/4 - \varepsilon/6, & l=0, \\ -\varepsilon(\pi^2 l^2), & l \neq 0 \text{ par}, \\ -(1-\varepsilon)/(\pi^2 l^2), & l \text{ impar.} \end{cases}$$

Esta es precisamente la expresión que se usa en (4.16). En el caso que  $\varepsilon = 0$ , se obtiene el filtro sugerido por Ramachandran y Lakshminarayanan, [13].

(ii). El filtro sinc, el cuál está dado por

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} \text{sinc}(\pi\zeta/2), & \zeta \leq 1, \\ 0, & \zeta > 1. \end{cases}$$

En este caso, la función  $w_b$  de banda limitada es:

$$w_b(s) = \frac{b^2}{2\pi^3} \frac{\pi/2 - s \text{ sen } s}{\pi^2/4 - s^2} \quad (4.20).$$

De nuevo, si  $b = \pi/h$  y  $s = s_l$  entonces,  $w_b$ , al simplificarse, toma la forma

$$w_b(s_l) = \frac{b^2}{\pi^4} \frac{1}{1-4l^2},$$

que es la expresión que para el filtro sinc se usa en (4.16).

El número de operaciones del algoritmo de retroproyección filtrada es como sigue. Para las convoluciones se requieren  $O(nq^2)$  operaciones las cuales pueden ser reducidas a  $O(nq \log q)$ , si se usa la FFT. La retroproyección requiere  $O(n)$  operaciones para cada,  $\mathbf{x}$ , totalizando un  $O(nq^2)$  operaciones si la reconstrucción es calculada sobre una malla de  $(2q+1) \times (2q+1)$  la cual corresponde al muestreo de  $\mathfrak{R}_\theta f$ . Para la relación óptima  $n = \pi q$  se llega hasta  $O(q^3)$  operaciones sin importar si nosotros usamos FFT o no.

En los experimentos que se presentan más adelante se ha usado la relación óptima  $n = \pi q$ .

## 4.6 Experimentos

En las Figs. IV.4 – IV.11 se presentan los experimentos realizados con el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos, cuya implantación se realizó en lenguaje Fortran 77, y se ejecutaron en una PC Pentium usando el compilador Digital Visual Fortran Version 6.

Como intervalo de muestreo se tomó el intervalo  $[-1,1]$ . La reconstrucción se calculó sobre una malla de  $(2q+1) \times (2q+1)$  pixeles para el muestreo de  $\mathfrak{R}_\theta f$ .

El algoritmo trata de recuperar las funciones de prueba cuyas gráficas se presentan en las Figs. IV.a y IV.b, usando el parámetro de suavización  $\varepsilon \in [0,1]$ .

## 4.7 El algoritmo de retroproyección filtrada para datos de haz en abanico

El camino más sencillo para tratar con datos de haz en abanico es obtener los datos para haz en paralelo a partir de los datos para haz en abanico mediante adecuadas interpolaciones. Este procedimiento, debido a Herman, [7] es conocido como 'rebanando' los datos.

Otra forma de proceder consiste en adaptar la expresión

$$(F_b * f)(\mathbf{x}) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_b(u_\theta \cdot \mathbf{x} - p) \mathfrak{R}f(\theta, p) dp d\theta,$$

para datos paralelos a datos en abanico. Para tal propósito, es conveniente recordar que las coordenadas para datos en paralelo  $(\theta, p)$  están relacionadas con las coordenadas para datos en abanico  $(\beta, \alpha)$ , mediante las relaciones

$$p = r \sin \alpha, \quad \theta = \beta + \alpha - \pi/2,$$

y que

$$g(\beta, \alpha) \equiv \mathfrak{R}f(\theta, p).$$

Ahora, considerando al integrando  $w_b(u_\theta \cdot \mathbf{x} - p)$ , se hace necesario expresar a la distancia del punto  $\mathbf{x}$  a la recta  $L(\alpha, \beta): u_\theta \cdot \mathbf{x} = p$ ; esto es a  $|u_\theta \cdot \mathbf{x} - p|$  en términos de  $\alpha, \beta$ . Para ello, sea  $\gamma$  el ángulo entre los vectores

$\mathbf{x} - a$  y  $-a$ , el cuál depende únicamente de  $\mathbf{x}$  y  $\beta$  (véase Fig. IV.3). Luego se tiene que:

$$\cos(\pm\gamma) = \frac{(a - \mathbf{x}, a)}{\|a - \mathbf{x}\| \|a\|}, \quad + \text{ para } a^\perp \cdot \mathbf{x} \leq 0, \quad - \text{ para } a^\perp \cdot \mathbf{x} \geq 0.$$

Así, se sigue:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |u_\theta \cdot \mathbf{x} - p| = \|\mathbf{x} - a\| |\sin(\gamma - \alpha)| \quad (4.20')$$

donde  $y$  es la proyección de  $\mathbf{x} - a$  sobre la recta  $L(\alpha, \beta)$ .

Luego, usando (4.20'), la expresión integral de la convolución  $F_b * f$  en las coordenadas  $\alpha, \beta$ , toma la forma:

$$(F_b * f)(\mathbf{x}) = r \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_b(\|\mathbf{x} - a\| |\sin(\gamma - \alpha)|) g(\beta, \alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, d\beta. \quad (4.21)$$

dado que el jacobiano de este cambio de coordenadas viene dado por

$$\frac{\partial(s, \varphi)}{\partial(\alpha, \beta)} = r \cos \alpha.$$

Y debido a que

$$w_b(\rho s) = \rho^{-2} w_{\rho b}(s),$$

haciendo  $\rho = \|\mathbf{x} - a\|$ , se sigue que:

$$(F_b * f)(\mathbf{x}) = r \int_0^{2\pi} \|\mathbf{x} - a\|^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_{\|\mathbf{x}-a\|b}(\sin(\gamma - \alpha)) g(\beta, \alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, d\beta. \quad (4.22)$$

Finalmente, observando que la integral más interna depende sólo ligeramente del valor  $\|\mathbf{x} - a\|b$  de la nueva frecuencia de corte, es posible remplazar  $\|\mathbf{x} - a\|b$

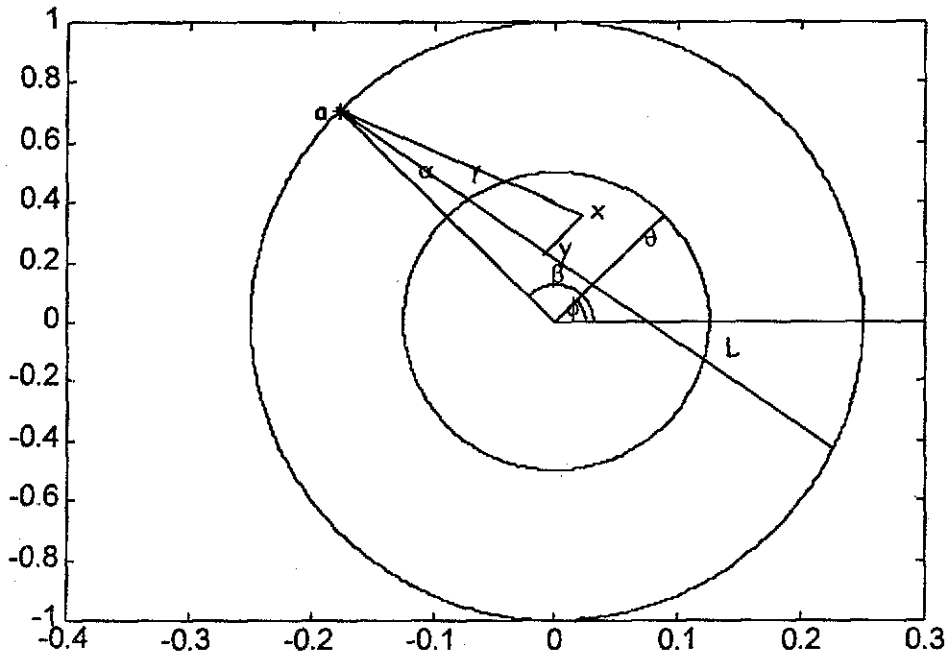


Fig. IV.3 Gráfica de la geometría de escaneo por haz de abanico donde se muestra la proyección ( $y$ ) de la recta  $x$  sobre la recta  $L(\beta, \alpha)$  desde donde se realiza la transformación de coordenadas  $(s, \theta)$  para haz de rayos paralelos a coordenadas  $(\beta, \alpha)$  para haz de rayos en abanico.

por una frecuencia de corte  $c$  (que no dependa de  $\mathbf{x}$ ,  $\beta$ ) suficientemente grande. Así pues:

$$(F_b * f)(\mathbf{x}) = r \int_0^{2\pi} |\mathbf{x} - \mathbf{a}|^{-2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} w_c(\sin(\gamma - \alpha)) g(\beta, \alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, d\beta. \quad (4.23)$$

El algoritmo que implementa (4.23) es ahora el algoritmo de retroproyección filtrada para rayos en paralelo *modificado*, el cuál consiste en

Dados  $g(\beta_j, \alpha_\ell)$ , con  $\beta_j = 2\pi(j-1)/n$   $j = 1, \dots, n$  y  $\alpha_\ell = h\ell$ ,  $\ell = -q, \dots, q$ ,  $h = \pi/2q$ .

1) Para  $j = 1, \dots, n$  se calculan las convoluciones

$$v_{jk} = h \sum_{\ell=-q}^q w_c(\sin(\alpha_k - \alpha_\ell)) g(\beta_j, \alpha_k) \cos \alpha_\ell, \quad k = -q, \dots, q.$$

2) Para cada punto de reconstrucción  $\mathbf{x}$ , se calcula la retroproyección discreta

$$f_R(\mathbf{x}) = \frac{2r\pi}{n} \sum_{j=1}^n |\mathbf{x} - \mathbf{a}_j|^{-2} ((1-u)v_{j,k} + uv_{j,k+1})$$

donde para cada  $\mathbf{x}$ :  $k$  y  $u$  se determinan mediante la expresión

$$\gamma = \pm ar \cos \frac{(\mathbf{a}_j^\perp - \mathbf{x}, \mathbf{a}_j)}{|\mathbf{a}_j - \mathbf{x}| |\mathbf{a}_j|}, \quad k \leq \gamma/h < k+1, \quad u = \gamma/h - k.$$

El signo es '+', si  $\mathbf{a}_j^\perp \cdot \mathbf{x} \leq 0$  y '-' en otro caso. Aquí,  $\mathbf{a}_j^\perp$  es el vector ortogonal del vector  $\mathbf{a}_j$ .

Para la evaluación de la función ventana  $w_c$  véase las expresiones (4.19) y (4.20).

## 4.8 Experimentos

En las Figs. IV.12 – IV.18 se presentan los experimentos realizados con el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico, cuya implantación se realizó en lenguaje Fortran 77, y se ejecutaron en una PC Pentium usando el compilador Digital Visual Fortran Version 6.

Como intervalo de muestreo se tomó el intervalo  $[-\pi/2, \pi/2]$ . La reconstrucción se calculó sobre una malla de  $(2q+1) \times (2q+1)$  pixeles para el muestreo de  $\mathfrak{R}_\theta, f$ .

El algoritmo trata de recuperar las funciones de prueba cuyas gráficas se presentaron ya en las Figs. IV.a y IV.b, haciendo uso del parámetro de suavización  $\varepsilon \in [0,1]$ .

## 4.9 Comentarios de los experimentos

Se puede apreciar que en las reconstrucciones realizadas con el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos y haz de rayos en abanico, usando la ventana de F. Natterer [13] con parámetro  $\varepsilon = 1$ , se obtienen reconstrucciones muy suaves (Figs. IV.4, IV.8, IV.12, y IV.15). Mientras que para  $\varepsilon = 0$ , las imágenes alcanzan su mayor definición (Figs. IV.7, IV.11, IV.14, y IV.18). Para valores intermedios las imágenes mantienen su grado de suavidad como es de esperarse (Figs. IV.5, IV.7, IV.8, IV.10, IV.13, IV.14, IV.16, y IV.17).

Es de notarse también que en la reconstrucción mostrada en Fig. IV.18 lograda con el uso de la ventana de Natterer con filtro sinc se obtiene una mejor definición de la imagen. Por otro lado para valores intermedios de  $\varepsilon$  las imágenes mantienen su grado de suavidad como es de esperarse (Figs. IV.13, IV.14 y IV.16, IV.17).



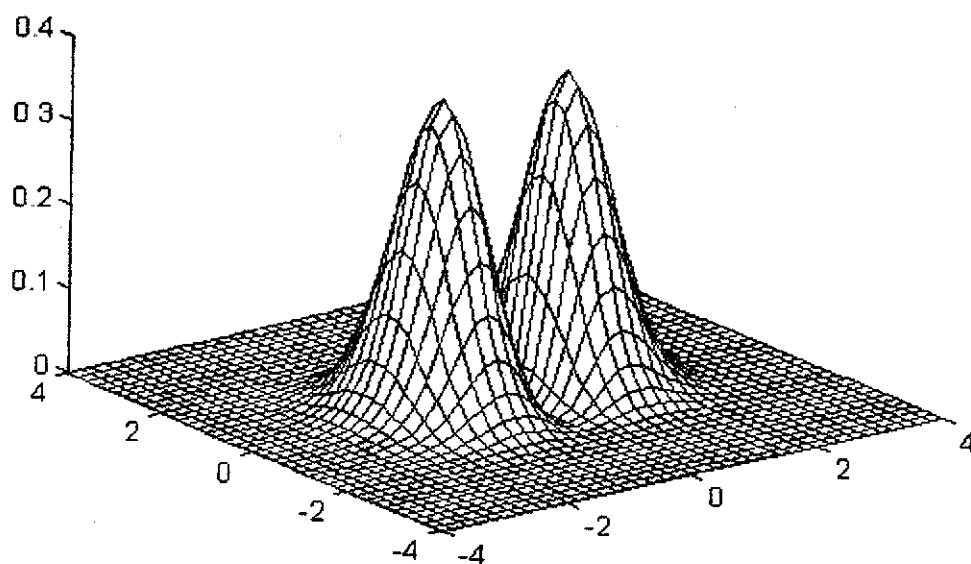


Fig. IV.a Gráfica de la superficie:  $f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$  que se reconstruye utilizando los algoritmos de retroproyección filtrada para haz de rayos en paralelo y haz de rayos en abanico.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

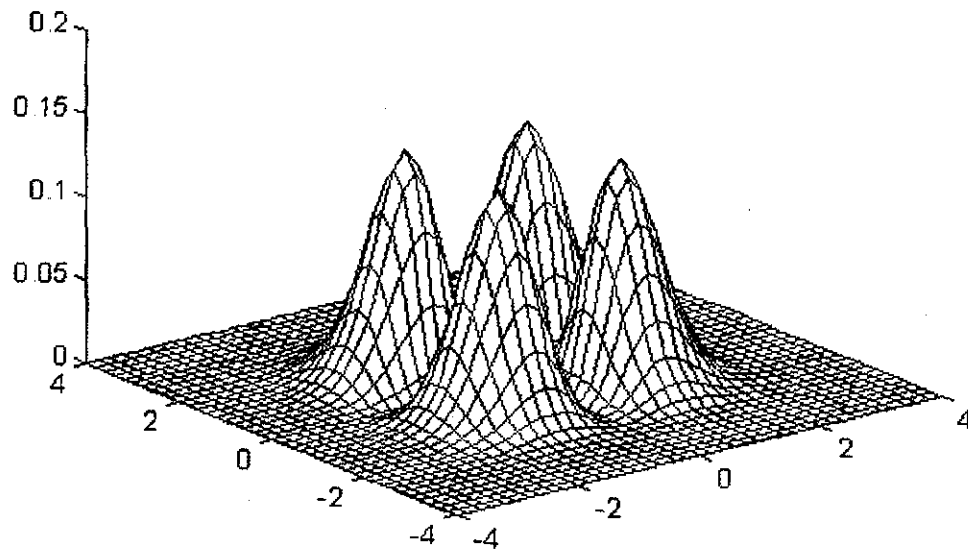


Fig IV b Gráfica de la superficie:  $f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$  que se reconstruye utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos y haz de rayos en abanico.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

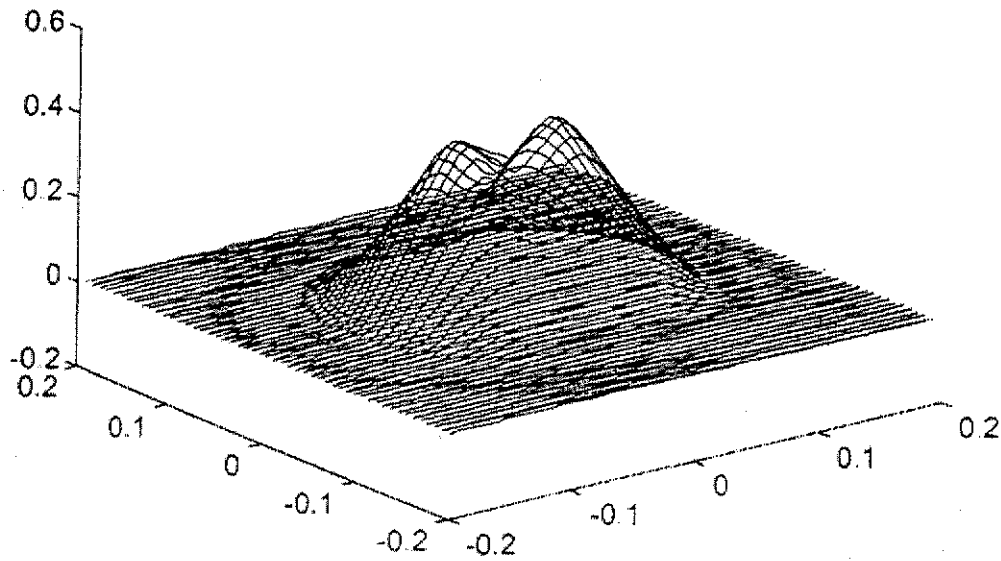


Fig. IV.4 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 1$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

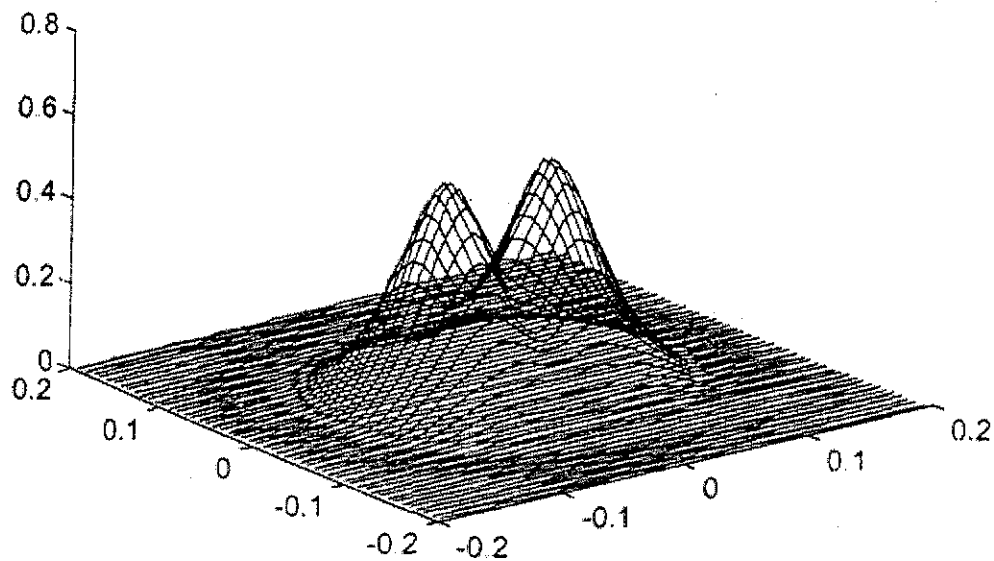


Fig. IV.5 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0.8$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

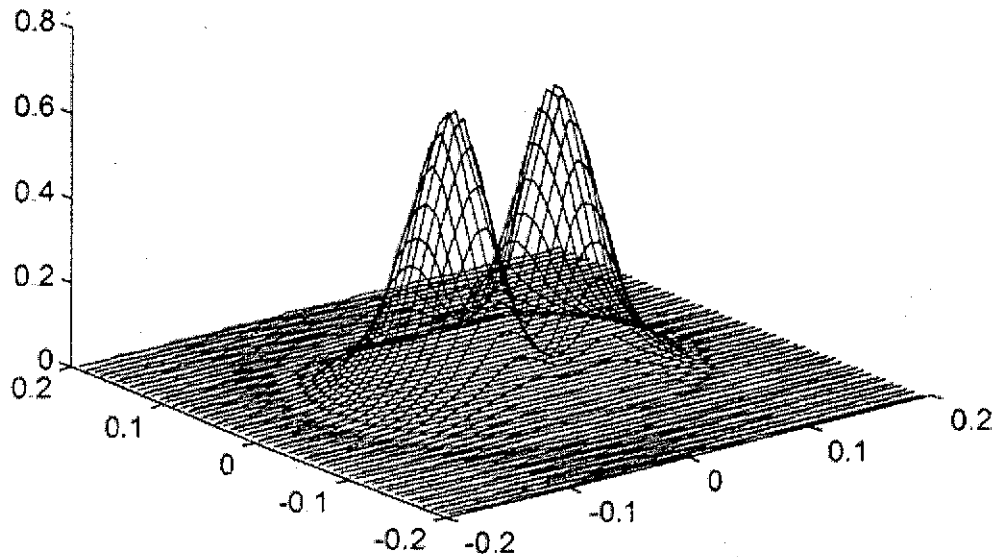


Fig. IV.6 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0.5$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

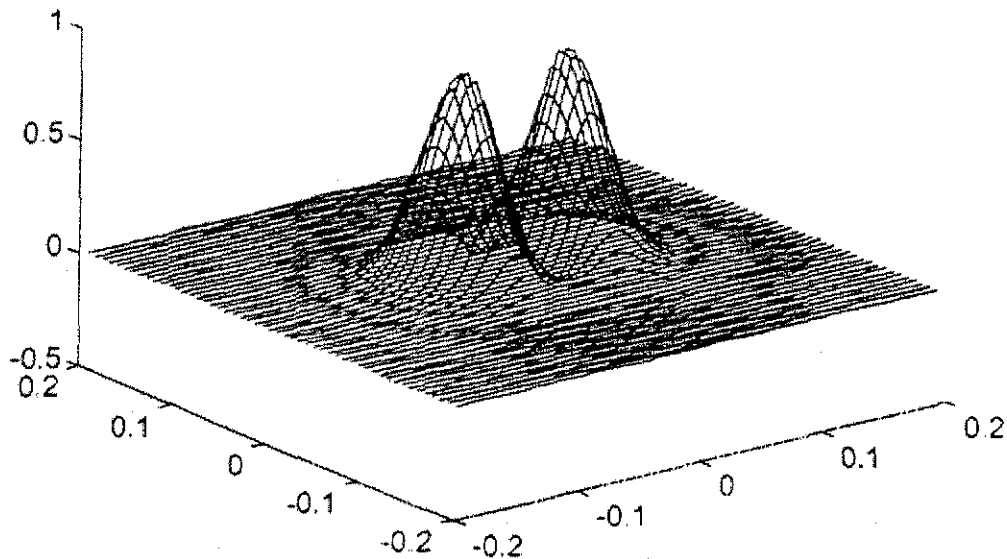


Fig. IV.7 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0$ ), también sugerida por Ramachandran Y Laksminarayanan
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

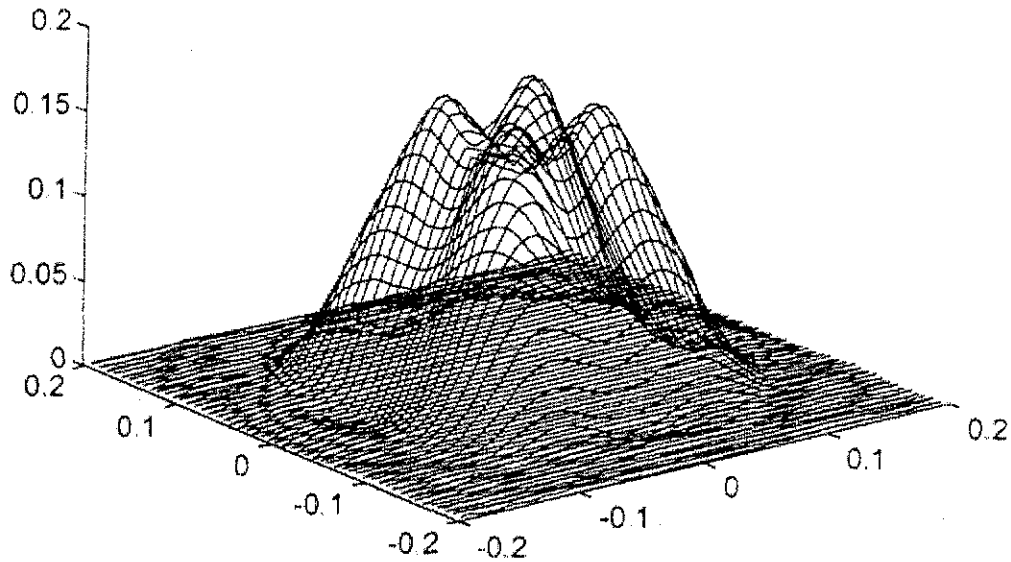


Fig. IV.8 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 1$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

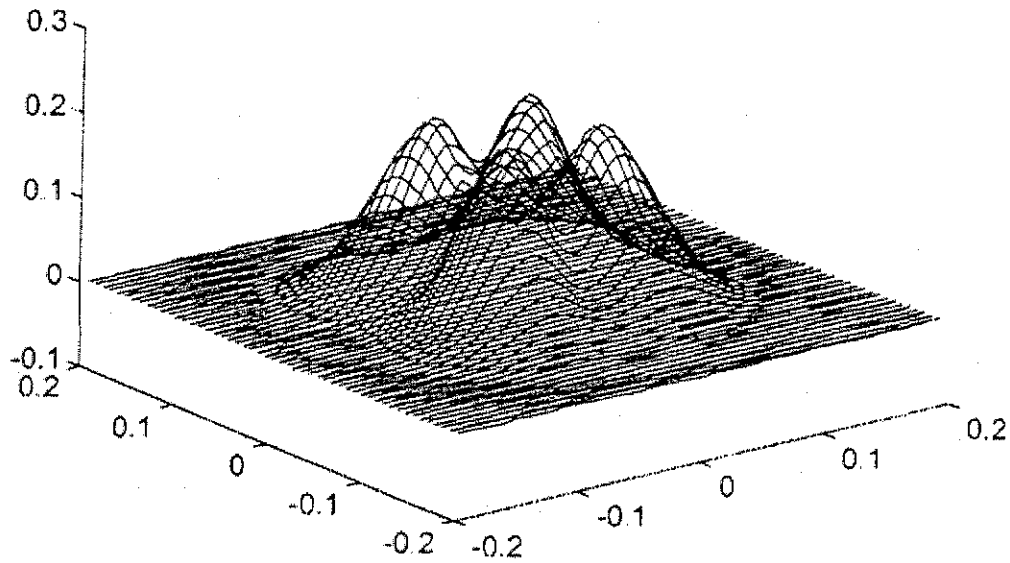


Fig. IV.9 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0.8$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  píxeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN



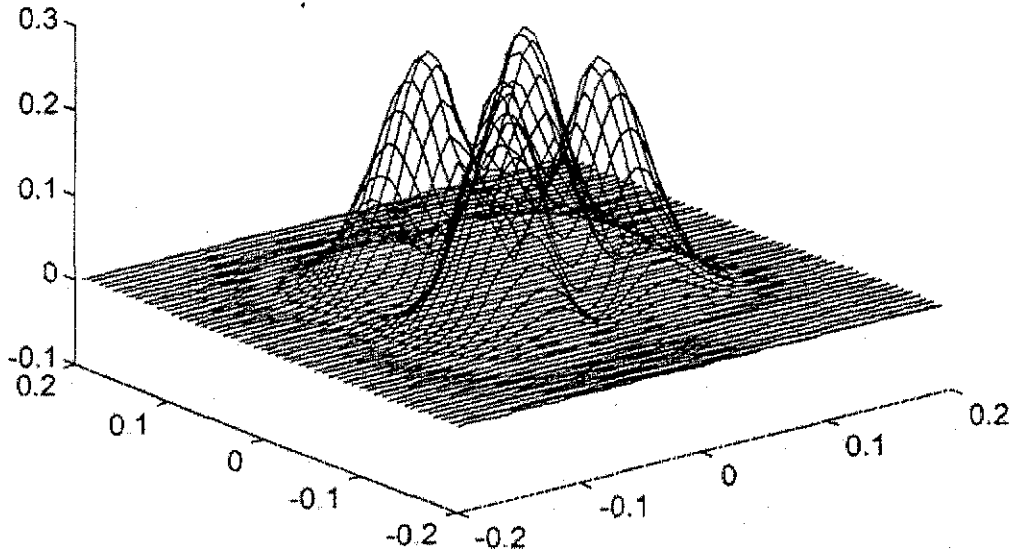


Fig. IV.10 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0.5$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

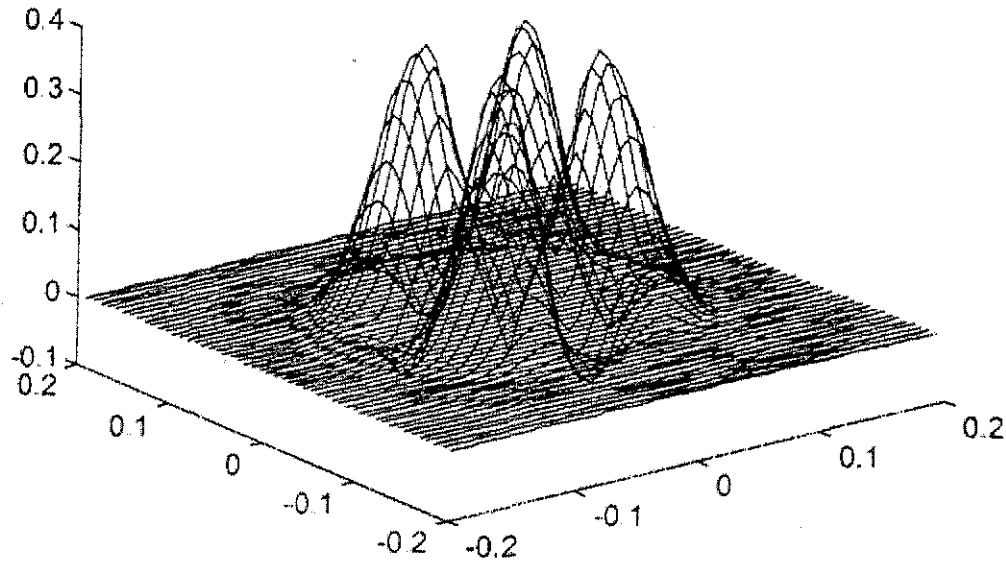


Fig. IV.11 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos paralelos.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0$ ), también sugerida por Ramachandran y Laksminarayanan
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

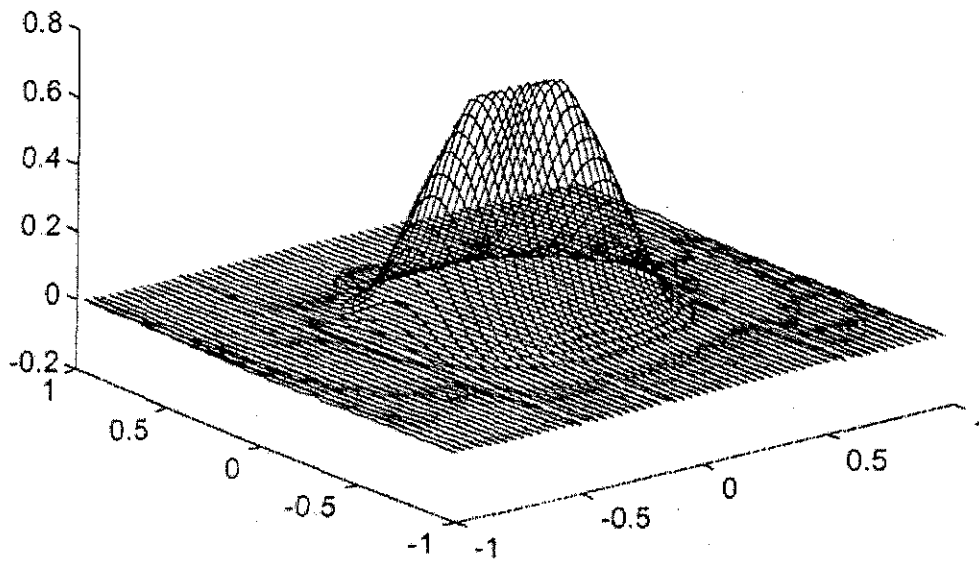


Fig. IV.12 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

#### Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 1$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

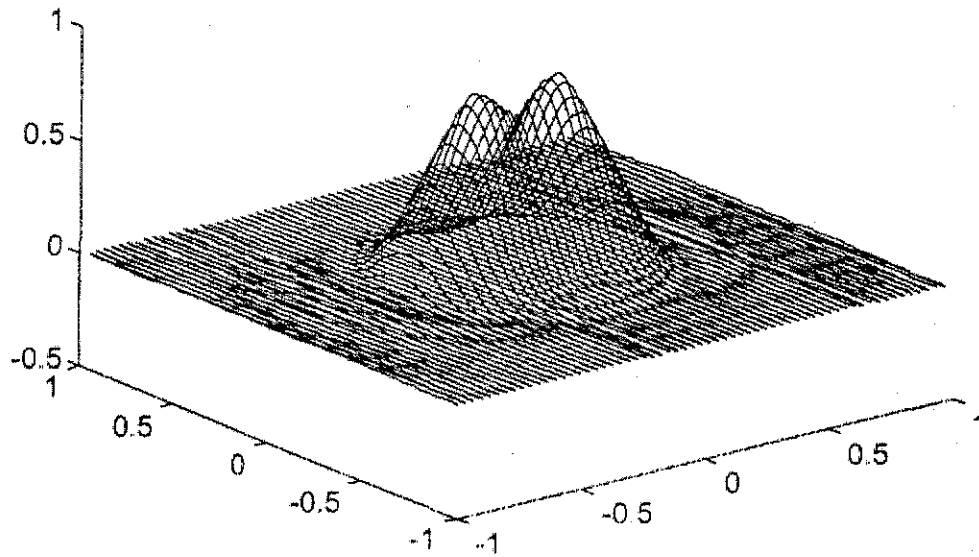


Fig. IV.13 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\varepsilon = 0.8$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

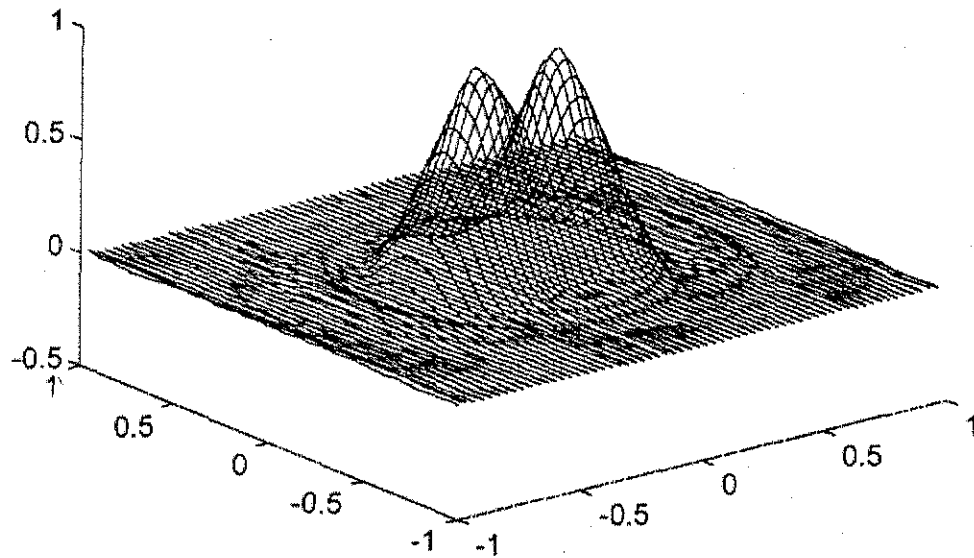


Fig. IV. 14 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer ( $\epsilon = 0.65$ )
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $51 \times 51$  pixeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

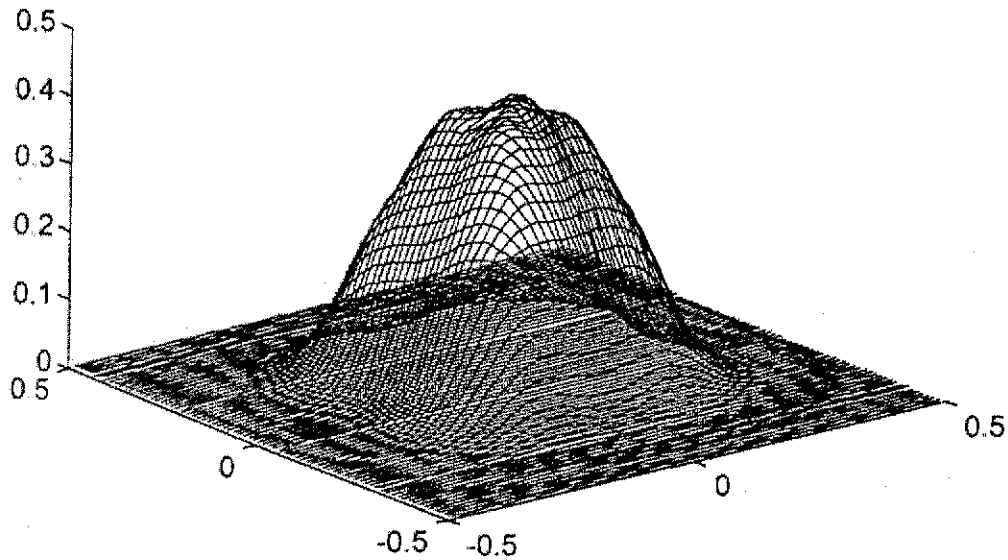


Fig. IV.15 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana 1 (Natterer) con  $\varepsilon = 1$ .
- Intervalo de muestreo 0.03
- Malla de  $65 \times 65$  píxeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

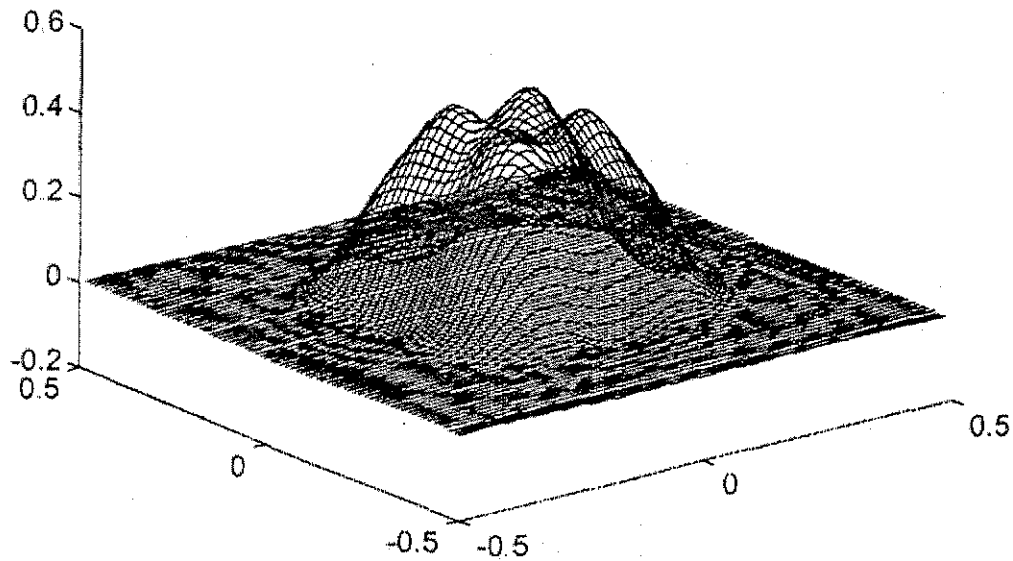


Fig. IV.16 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana 1 (Natterer) con  $\varepsilon = 0.8$
- Intervalo de muestreo 0.03
- Malla de  $65 \times 65$  pixeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

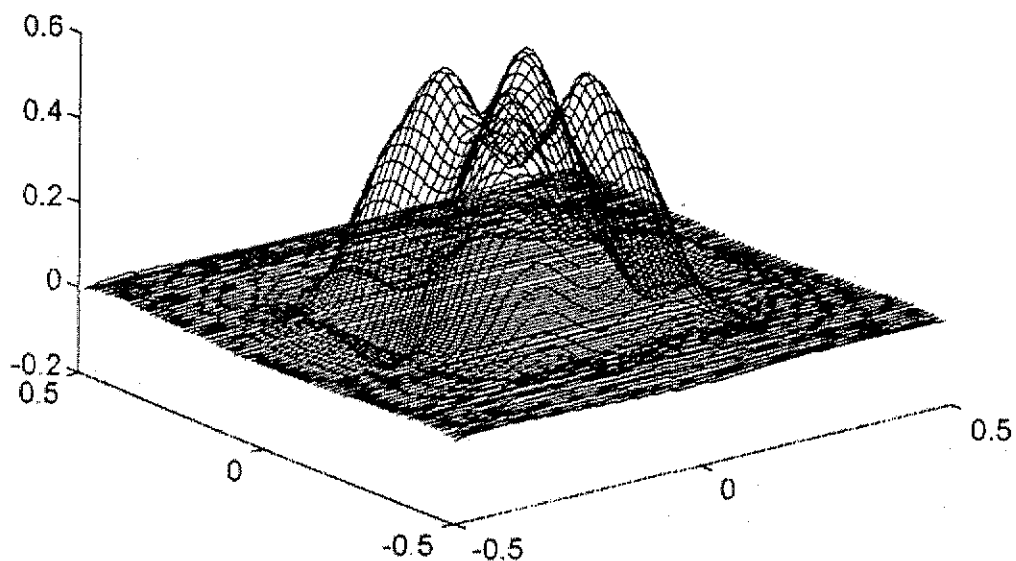


Fig. IV.17 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer con  $\varepsilon = 0.5$
- Intervalo de muestreo 0.03
- Malla de  $65 \times 65$  píxeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



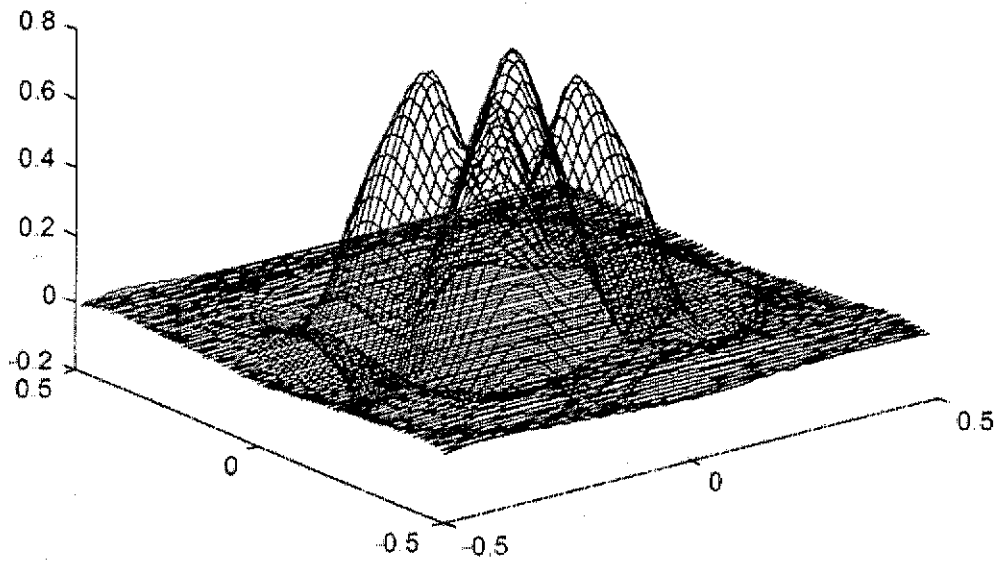


Fig. IV.18 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico.

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer con  $\varepsilon = 0$ .
- Intervalo de muestreo  $d = 0.03$
- Malla de  $65 \times 65$  píxeles

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

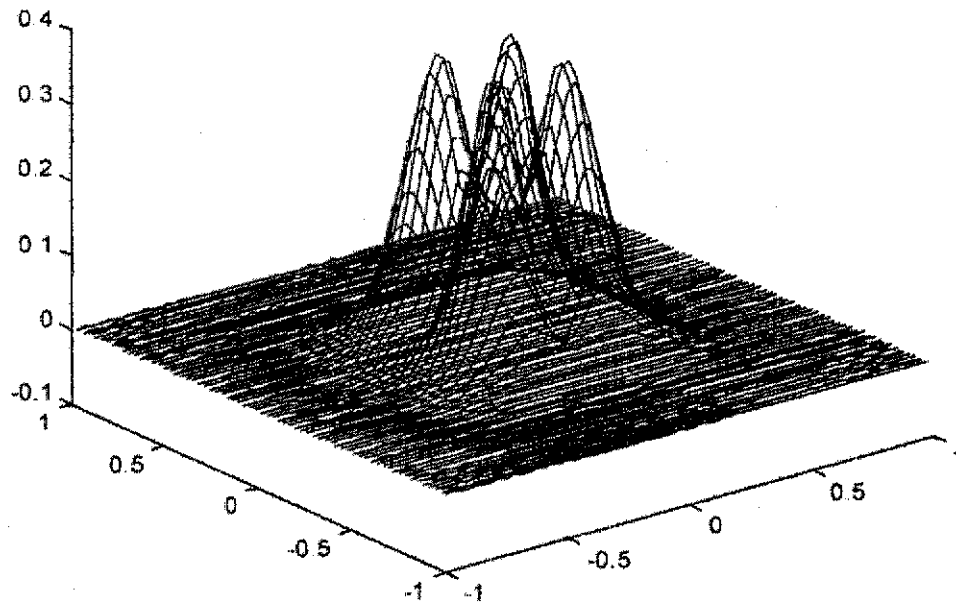


Fig. IV.19 Gráfica de la reconstrucción de la superficie:

$$f(x, y) = x^2 y^2 \exp(-x^2 - y^2)$$

utilizando el algoritmo de retroproyección filtrada para haz de rayos en abanico

Parámetros de la reconstrucción

- Ventana de F. Natterer con  $\varepsilon = 1$ .
- Intervalo de muestreo 0.03
- Malla de  $65 \times 65$  píxeles

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## CAPÍTULO 5

### Conclusiones y trabajo a futuro

El problema de la reconstrucción de imágenes es comúnmente encontrado en muchos campos científicos y técnicos como ha sido señalado reiteradamente en este trabajo. De aquí que muchos métodos de reconstrucción hayan sido desarrollados para resolver este problema. Básicamente existen dos clases de algoritmos para resolver este problema. La primera clase trata de resolver el problema vía la transformada de Radón. La segunda clase intenta resolver el problema vía métodos de expansión en serie.

Los experimentos presentados en este trabajo pertenecen a la primera clase de algoritmos que han sido desarrollados para reconstruir una imagen mediante proyecciones. Básicamente existen también dos tipos de geometrías de escaneo para la adquisición de proyecciones, la geometría de rayos paralelos y la de haz en abanico. En este trabajo se han presentado los resultados obtenidos por los algoritmos que trabajan con proyecciones obtenidas por medio de la geometría de escaneo por rayos paralelos, (convolución-retroproyección y retroproyección filtrada). Así como por la geometría de haz en abanico (retroproyección filtrada). Los datos para generar las proyecciones han sido obtenidos por la evaluación de la transformada de Radón de las funciones de prueba libres de cualquier perturbación, así que se puede considerar que las proyecciones de datos son perfectas. De los experimentos realizados con los algoritmos alimentados por proyecciones generadas con la geometría en paralelo podemos concluir (a reserva de efectuar más experimentos) que las reconstrucciones producidas son buenas, pero la geometría de escaneo tiene el inconveniente de que consume mucho tiempo para producir las proyecciones debido al giro que tiene que realizar el escáner en cada proyección. Por otro lado la geometría de escaneo por haz de rayos en abanico tiene la ventaja de ser muy rápida en la adquisición de las proyecciones y es la que actualmente está de uso en la práctica. Se reporta en la literatura que el tiempo de colección de datos para estos escaners oscila entre 1 y 20 segundos. En este tiempo más de 1000 proyecciones pueden ser

colectadas. Es importante señalar que esta clase de escaners usa un haz de abanico con ángulo oscilando entre  $20^\circ$  y  $30^\circ$ . Es importante señalar que los algoritmos de retroproyección filtrada que se han probado es este trabajo satisfacen la condición de Nyquist lo que los hace muy superiores en cuanto a precisión.

Otro aspecto muy importante que se debe destacar es el relacionado con la ventana óptima usada por los algoritmos de reconstrucción. Como se recordará los algoritmos de reconstrucción requieren de una ventana para el filtrado de los datos y una gran variedad de ventanas han sido propuestas para tal fin. En los experimentos que se realizaron las ventanas de Hanning, Hamming generalizada y de Natterer han sido usadas. Pero ¿cómo elegir la ventana óptima para obtener reconstrucciones de buena calidad?. Lo más recomendable para este caso es el uso de ventanas de paso bajo ya que estas ventanas tienen la propiedad de mitigar los posibles errores introducidos por discretización al generar las proyecciones de datos, por el número finito de proyecciones, y por varias clases de ruido.

Por lo anteriormente expuesto se puede concluir que el trabajo realizado en la implementación y prueba de los algoritmos de reconstrucción satisfacen las metas que se propusieron en este trabajo.

El mérito que nos acreditamos al trabajar con ellos, es el de haber comprobado que efectivamente las implementaciones que se realizaron de estos algoritmos tanto para el caso de reconstrucciones por proyecciones con la geometría de haz en paralelo, así como por haz en abanico trabajan razonablemente bien, aun cuando en los experimentos el número de píxeles en la malla haya sido relativamente bajo ( $128 \times 128$ ) máximo, comparado con el número de píxeles usados comúnmente en la práctica ( $512 \times 512$ ), por lo menos y el número de proyecciones empleadas en la reconstrucción que fueron 120 como máximo. Otro aspecto importante que debemos destacar es la experiencia ganada en el aspecto teórico que nos brinda la posibilidad de abordar problemas de mayor complejidad en el campo de la tomografía computarizada como es el caso de reconstrucción de imágenes por tomografía de rayos gamma que es el objetivo final que se persigue y del que a continuación daremos una breve introducción.

Después del éxito obtenido por la tomografía de rayos x en el área de la medicina principalmente, despertó gran interés en la comunidad internacional por extender su aplicación a otras áreas. Un ejemplo es la tomografía por emisión de rayos gamma con objeto de reconstruir la imagen del interior de un contenedor de desechos radiactivos. Una seria dificultad surge con este tipo de tomografía y esta es causada por la atenuación que sufren los fotones durante su viaje desde el núclido emisor hacia el detector. La extensión de esta

atenuación depende de dos factores, la energía del fotón y la naturaleza del material del objeto. Para efectos de cálculo numérico este fenómeno significa que un nuevo parámetro debe de ser considerado al evaluar las proyecciones de datos para reconstruir la función (objeto). Si  $\mu$  denota la atenuación del material del objeto y esta no es despreciable como suele suceder en la práctica, esto significa que la función se tiene que reconstruir a partir de integrales de línea pesadas, donde la función de peso esta determinada por la atenuación  $\mu$ . En este caso la transformada de Radón relevante es ahora una generalización de la transformada de Radón conocida como transformada de Radón atenuada cuya expresión es la siguiente:

$$\mathfrak{R}_\mu f(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} e^{-D\mu(x, \theta^{\perp})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

En esta expresión  $\mu$  es una función real sobre  $R^2$  la cual juega el papel de un parámetro.  $\mathfrak{R}_\mu$  es la transformada integral en tomografía por emisión.

De lo expuesto anteriormente se concluye que el trabajo a desarrollar a futuro para reconstruir la imagen del interior de un contenedor con desechos radiactivos es desarrollar algoritmos que alimentados mediante la adquisición de proyecciones atenuadas reconstruyan la imagen deseada.

## APÉNDICE

### Algo sobre las matemáticas de la tomografía computarizada

En este apéndice se presentan las demostraciones de algunos de los teoremas relevantes utilizados en la exposición de este trabajo y se hace ver de una manera natural la ventaja de trabajar con funciones en un espacio de Schwartz, ya que en estos espacios se garantiza la existencia de la transformada de Fourier, así como la transformada de Radón y sus inversas. Finalizamos este apéndice citando el teorema de la proyección para tomografía que establece una relación entre la transformada de Fourier y la transformada de Radón desde la cual se puede obtener la inversa de la transformada de Radón en términos de la transformada inversa de Fourier dando como resultado un algoritmo que compite en eficiencia con el algoritmo de retroproyección filtrada, este algoritmo es conocido como el *algoritmo de reconstrucción de Fourier*.

#### A. Teorema de regularización de la transformada de Hilbert

Para que el enunciado del teorema de regularización sea claro se requiere antes introducir la siguiente definición:

**Definición A.1** Una función  $\phi$  se dice que es razonable en el punto  $v$  si las siguientes condiciones se satisfacen:

$$i) \phi(u) = 0 \quad \text{si} \quad |u| \geq E \quad (A1)$$

$$ii) \int_{-E}^E \phi(u) du \quad \text{existe} \quad (A2)$$

$$iii) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(v-t) - \phi(v+t)}{t} dt \quad \text{existe} \quad (A3)$$

**Nota** Las integrales que intervienen en esta demostración pueden ser interpretadas como integrales de Riemann.

**Teorema A.1 (de regularización) [7].** Si  $F_A : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A > 0$ , es una familia de funciones reales integrables tales que, para  $U \geq 0$ :

- i)  $0 \leq F_A(U) \leq 1$ ,  $F_A(U) = 0$  si  $U \geq A/2$ ,
- ii)  $F_A(U)$  es una función monótona no creciente de  $U$ ,
- iii)  $\lim_{A \rightarrow \infty} F_A(U) = 1$ .

entonces,  $\{\rho_A : A > 0\}$ , con  $\rho_A(u)$  dada por

$$\rho_A(u) = -2 \int_0^{A/2} F_A(U) \operatorname{sen}(2\pi Uu) dU$$

es una familia regularizante para la transformada de Hilbert, i.e.,

$$\mathcal{H}\phi(v) = \lim_{A \rightarrow \infty} (\rho_A * \phi),$$

para toda  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  dada, razonable en  $v$ .

Para ello se hace necesario ver antes algunos resultados previos

**Lema A.1** Si  $\phi$  es razonable en el punto  $v$ , entonces la transformada de Hilbert en el punto  $v$  ( $\mathcal{H}[\phi](v)$ ) existe y está dada por la siguiente relación:

$$\mathcal{H}[\phi](v) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(v-t) - \phi(v+t)}{t} dt. \quad (\text{A4})$$

La verificación de (A4) se obtiene de la definición de la transformada de Hilbert pensada en valor principal de Cauchy y haciendo el cambio de variable  $u = v - t$  en la primera integral y  $u = v + t$  en la segunda.

El siguiente resultado es consecuencia del lema Riemann-Lebesgue para funciones absolutamente integrables.

**Lema A.2** si  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  y la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt \quad (\text{A5})$$

es absolutamente convergente, entonces

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{1 - \cos at}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt. \quad (\text{A6})$$

**Demostración** Para cada  $a$  fijo, la integral del primer miembro de (A6) converge absolutamente. Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \frac{1 - \cos at}{t} dt &= \int_0^{\infty} \phi(t) \frac{1 - \cos at}{t} dt + \int_{-\infty}^0 \phi(t) \frac{1 - \cos at}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} (\phi(t) - \phi(-t)) \frac{1 - \cos at}{t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{\phi(t) - \phi(-t)}{t} \cos at dt. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

Luego, por el lema Riemann-Lebesgue [1], la última integral de (A7) tiende a cero cuando  $a \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Lema A.3** *Bajo las hipótesis del lema A.2, se tiene*

$$\lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v-t) \frac{1 - \cos 2\pi Bt}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\phi(v-t) - \phi(v+t)}{t} dt. \quad (\text{A8})$$

Nótese que este lema combinado con (A4) nos da una expresión alternativa para  $(\mathcal{H}\phi(v))$ . Este hecho será usado mas adelante.

**Lema A.4** *Si  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$  y es razonable en  $v$  entonces,*

$$\int_0^B G_v(U) dU = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v-t) \frac{1 - \cos 2\pi Bt}{t} dt \quad (\text{A9})$$

donde  $G_v(U)$  esta dada por

$$G_v(U) = -2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \sin(2\pi(v-u)U) du \quad (\text{A10})$$



**Demostración** Por las propiedades (A1) y (A2) para  $\phi$ , y para  $B > 0$ , se tiene:

$$\begin{aligned}
 \int_0^B G_v(U) dU &= -2 \int_0^B \left( \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \sin(2\pi(v-u)U) du \right) dU \\
 &= -2 \int_{-E}^E \phi(u) \left( \int_0^B \sin(2\pi(v-u)U) dU \right) du \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \frac{1 - \cos 2\pi B(v-u)}{(v-u)} du \\
 &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v-t) \frac{1 - \cos 2\pi Bt}{t} dt.
 \end{aligned}$$

o sea que

$$\int_0^B G_v(U) dU = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v-t) \frac{1 - \cos 2\pi Bt}{t} dt.$$

Lo que prueba el Lema A.4.  $\square$

Ahora, tomando el límite en (A.9) cuando  $B \rightarrow \infty$ , se tiene,

$$\int_0^{\infty} G_v(U) dU = -\frac{1}{\pi} \lim_{B \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(v-t) \frac{1 - \cos 2\pi Bt}{t} dt \quad (\text{A11})$$

Así que, por la expresión (A8) el límite del lado derecho de (A11) existe, y por (A4) se obtiene:

$$\mathcal{H}[\phi](v) = \int_0^{\infty} G_v(U) dU. \quad (\text{A12})$$

Por otra parte, del capítulo 3 página 19, el lado derecho de (A12) también se expresa como:

$$\mathcal{H}[\phi](v) = \lim_{A \rightarrow \infty} (\rho_A * \phi)(v) \quad (\text{A13})$$

Así que, la demostración del teorema de regularización se reduce a probar que

$$\int_0^{\infty} G_v(U) dU = \lim_{A \rightarrow \infty} (\rho_A * \phi)(v).$$

Con este objetivo en mente, desarrollemos el lado derecho de (A13)

$$\begin{aligned} (\rho_A * \phi)(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_A(v-u) \phi(u) du \\ &= \int_{-E}^E \left[ -2 \int_0^{A/2} F_A(U) \operatorname{sen}(2\pi U(v-u)) dU \right] \phi(u) du \\ &= \int_0^{A/2} F_A(U) \left[ -2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(u) \operatorname{sen}(2\pi U(v-u)) du \right] dU \end{aligned}$$

o sea que

$$(\rho_A * \phi)(v) = \int_0^{A/2} F_A(U) G_v(U) dU. \quad (\text{A14})$$

Esto dice que se tiene que probar que el lado derecho de (A14) tiende al lado derecho de (A12) cuando  $A \rightarrow \infty$ . Denotemos por  $\eta_A(v)$  la diferencia de relaciones:

$$\begin{aligned} \eta_A(v) &= \int_0^{\infty} G_v(U) dU - \int_0^{A/2} F_A(U) G_v(U) dU \\ &= \int_0^{A/2} [1 - F_A(U)] G_v(U) dU + \int_{A/2}^{\infty} G_v(U) dU. \end{aligned} \quad (\text{A15})$$

De la definición de  $G_v(U)$  y por lemas A.3 y A.4, dada  $\varepsilon > 0$  existe  $M(\varepsilon)$  tal que para cualquier  $C \geq M(\varepsilon)$  se cumple:

$$\int_C^{\infty} G_v(U) dU \leq \varepsilon. \quad (\text{A16})$$

Por otro lado, para  $A > 2M(\varepsilon)$ , se tiene que

$$\eta_A(v) = \int_0^{M(\varepsilon)} [1 - F_A(U)] G_v(U) dU + \int_{M(\varepsilon)}^{A/2} [1 - F_A(U)] G_v(U) dU + \int_{A/2}^{\infty} G_v(U) dU. \quad (\text{A17})$$

De las hipótesis del teorema de regularización se tiene  $0 \leq F_A(U) \leq 1$  y que  $F_A(U)$  es monótona no creciente de donde se sigue que  $0 \leq 1 - F_A(U) \leq 1$  y  $1 - F_A(U)$  es monótona no decreciente. Además  $G_v(U)$  es continua. Así, aplicando el segundo teorema del valor medio para integrales de Riemann, (véase Apóstol [1] página 209) al primero y segundo sumandos se tiene que

$$\int_0^{M(\varepsilon)} [1 - F_A(U)] G_v(U) dU = [1 - F_A(M(\varepsilon))] \int_0^{M(\varepsilon)} G_v(U) dU, \quad (\text{A18})$$

para algún  $a$ ,  $0 \leq a < M(\varepsilon)$ , y que

$$\int_{M(\varepsilon)}^{A/2} [1 - F_A(U)] G_v(U) dU = [1 - F_A(A/2)] \int_b^{A/2} G_v(U) dU, \quad (\text{A19})$$

para algún  $b$ ,  $M(\varepsilon) \leq b \leq A/2$ .

Finalmente de las relaciones (A16), (A17), (A18), y (A19) se tiene:

$$\begin{aligned} |\eta_A(v)| &\leq [1 - F_A(M(\varepsilon))] \left| \int_a^{M(\varepsilon)} G_v(U) dU \right| \\ &+ [1 - F_A(A/2)] \left| \int_b^{A/2} G_v(U) dU \right| + \left| \int_{A/2}^{\infty} G_v(U) dU \right| \end{aligned} \quad (\text{A20})$$

Como  $M(\varepsilon)$  no depende de  $A$ , la integral  $\int_a^{M(\varepsilon)} G_v(U) dU$  no depende de  $A$ . Así que de acuerdo a la hipótesis (iii) sobre  $F_A$ ,  $\lim_{A \rightarrow \infty} F_A(M(\varepsilon)) = 1$ . De donde se sigue que el primer término del lado derecho de (A20) tiende a cero cuando  $A \rightarrow \infty$ ; mientras que el segundo término es menor que  $\varepsilon$  debido a (A16) y ya que el tercer término es también menor que  $\varepsilon$  por (A16) se concluye la demostración del teorema de regularización.  $\square$

## B. Transformada de Fourier sobre espacios de Schwartz

La transformada de Fourier ha jugado un papel relevante junto con la transformada de Radón en la reconstrucción de imágenes por tomografía computarizada y por este motivo se presenta un pequeño resumen de resultados de la transformada de Fourier para funciones en el espacio  $L^1(\mathbb{R})$  y el espacio de Schwartz denotado por  $\mathcal{S}$ .

Antes que nada se introduce el concepto de función rápidamente decreciente en el infinito.

**Definición B.1** Sea  $f$  una función definida sobre  $\mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es una función rápidamente decreciente en el infinito si para cualquier entero  $m > 0$  la función  $|x|^m f(x)$  es acotada.

Es inmediato ver que si la función  $|x|^{m+1} f(x)$  es acotada entonces se sigue que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^m f(x) \rightarrow 0.$$

**Definición B.2** Al conjunto de todas las funciones  $f$  infinitamente diferenciables con la propiedad de que tanto  $f$  como cada una de sus derivadas decrecen rápidamente al infinito se le conoce como el espacio de Schwartz y se denota por  $\mathcal{S}$ .

El ejemplo típico de función de Schwartz es  $e^{-x^2}$ .

Es claro de lo anterior que cualquier función  $f \in \mathcal{S}$  es acotada y que si  $f \in \mathcal{S}$ , su derivada  $Df \in \mathcal{S}$ , así como su derivada de orden  $p$ ,  $D^p f \in \mathcal{S}$ , para toda  $p$  natural. Es también directo verificar que si  $f, g \in \mathcal{S}$ , entonces (i)  $af \in \mathcal{S}$ , para toda  $a \in \mathbb{R}$ , (ii)  $f + g \in \mathcal{S}$ , (iii)  $fg \in \mathcal{S}$ . Esto es,  $\mathcal{S}$  con las operaciones algebraicas básicas de funciones es un álgebra conmutativa sin unidad (pues es claro que  $1 \notin \mathcal{S}$ ).

Antes de estudiar la transformada de Fourier para funciones del espacio  $\mathcal{S}$ , recuérdese que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  entonces  $f$  tiene transformada de Fourier, la cual esta dada por,

$$\mathfrak{F}[f](U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixU} dx \quad (\text{B1})$$

Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , esta integral existe para toda  $U \in \mathbb{R}$ . Sin embargo en general  $\mathfrak{F}f$  no pertenece al espacio  $L^1(\mathbb{R})$  como lo ilustra el siguiente

**Ejemplo** Sea  $\chi = \chi_{[-a,a]}$  la función característica del intervalo  $[-a,a]$ . Su transformada de Fourier esta dada por,

$$\mathfrak{F}[\chi](x) = (2/\pi)^{1/2} x^{-1} \text{sen}(ax).$$

Esta función no pertenece al espacio  $L^1(\mathbb{R})$ , pues no es absolutamente integrable. En efecto, si se toma  $ax_n = n\pi$ , (i.e.,  $x_n = \frac{n\pi}{a}$ ) entonces se tiene que:

$$\int_0^{\frac{n\pi}{a}} \frac{|\text{sen}(x)|}{x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{a}}^{\frac{(k+1)\pi}{a}} \frac{|\text{sen}(ax)|}{x} dx$$

Nótese que, para toda  $x \in [\frac{k\pi}{a}, \frac{(k+1)\pi}{a}]$ , se cumple que  $\frac{1}{x} \geq \frac{a}{(k+1)\pi}$ .

Por otro lado, para todo entero  $K \geq 0$ :

$$\int_{\frac{k\pi}{a}}^{\frac{(k+1)\pi}{a}} |\text{sen}(ax)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \text{sen}(ax) dx = 2/a.$$

Así que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k\pi}{a}}^{\frac{(k+1)\pi}{a}} \frac{|\text{sen}(ax)|}{x} dx &\geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{a} \frac{a}{(k+1)\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

De donde se concluye que la función del ejemplo anterior  $\mathfrak{F}\chi \notin L^1$ .  $\square$

Ahora si se escribe  $\hat{f}(U) = \mathfrak{F}[f](U)$  entonces la transformada inversa de Fourier está definida por:

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(U) e^{ixU} dU. \quad (\text{B2})$$

Del ejemplo anterior se tiene que si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (y por ello, tiene transformada de Fourier  $\mathfrak{F}f$ ) entonces no siempre es posible recuperar la función  $f$  utilizando la expresión (B2) de la transformada inversa de Fourier. Se verá después que si  $f \in \mathfrak{S}$  entonces  $\hat{f} \in \mathfrak{S}$ , además,  $f$  se puede recuperar de  $\hat{f}$  como en (B2).

A continuación se mencionan algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier.

La transformada de Fourier  $\mathfrak{F}f$  de una función  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , satisface las siguientes propiedades:

**Teorema B.1** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , entonces  $\mathfrak{F}f$  está acotada

**Teorema B.2** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  entonces  $\mathfrak{F}f \in C(\mathbb{R})$

**Teorema B.3** El operador  $\mathfrak{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R})$  es lineal

Las demostraciones se han omitido por ser (relativamente) directas

**Teorema B.4** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  entonces  $f$  es continua y,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(U) e^{ixU} dU.$$

Como se puede ver, el teorema (B.4) establece las condiciones bajo las cuales la función  $f$  puede ser recuperada a partir de su transformada de Fourier, mediante la expresión (B.2). Para la demostración véase [2].

**Teorema B.5** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  entonces

- a)  $f * g \in L^1$
- b)  $\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}f \cdot \mathfrak{F}g$

Nos interesa revisar la transformada de Fourier sobre el espacio de Schwartz por tres razones: (i)  $\mathfrak{F}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  es inyectiva; (ii) si  $f \in \mathfrak{S}$ , entonces  $f$  es infinitamente diferenciable, y por (i),  $\hat{f}$  también lo es; y (iii) porque la

transformada inversa de Radón involucra la diferenciación de la transformada de Radón (véase cap. 2). Más aún, como es bien sabido que si  $f \in \mathfrak{S}$ ,  $f$  se puede reconstruir a partir de  $g = \mathfrak{R}[f]$ .

Así que para funciones  $f \in \mathfrak{S} \subset L^1(\mathbb{R})$  se tiene,

**Teorema B.6** Si  $f \in \mathfrak{S}$ , entonces  $\mathfrak{F}f \in \mathfrak{S}$ .

**Demostración** si  $f \in \mathfrak{S}$ , entonces  $\mathfrak{F}f$  es continua (B.2) y acotada (B.1).

Queda por demostrar que las derivadas de  $\mathfrak{F}f$  están acotadas; para ello, nótese que

$$\frac{\partial}{\partial U}(f(x)e^{-ixU}) = -ixf(x)e^{-ixU},$$

y que

$$\left| \frac{\partial}{\partial U}(f(x)e^{-ixU}) \right| \leq |x| |f(x)|,$$

con  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , pues  $f \in \mathfrak{S}$ . Por ello, la Transformada de Fourier se puede derivar, derivando la transformada de Fourier bajo el signo de la integral, lo que conduce a:

$$D\mathfrak{F}[f](U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -ixf(x)e^{-ixU} dx.$$

Esta función es claramente continua y acotada (pues se tiene que  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$ , dado que  $f \in \mathfrak{S}(\mathbb{R})$ ).

Por inducción se llega a que

$$|D^p \mathfrak{F}[f](U)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p |f(x)| dx.$$

De lo anterior se concluye que  $\mathfrak{F}f \in \mathfrak{S}$ , ya que  $D^p \mathfrak{F}[f]$  esta acotada.  $\square$

A continuación se mencionan otros resultados más para funciones en el espacio de Schwartz.

**Teorema B.7** Si  $f, g \in \mathfrak{S}$ , entonces:

i)  $f * g \in \mathfrak{S}$ ,

ii)  $f * g = g * f$ ,

iii)  $D^p(f * g) = D^p f * g = f * D^p g$ , para todo  $p \in \mathbb{N}$ .

iv)  $\mathfrak{F}(f * g) = \mathfrak{F}f \cdot \mathfrak{F}g$ .

De los dos primeros incisos se tiene que  $\mathfrak{S}$  es un álgebra conmutativa bajo la operación convolución.

La demostración de (ii) es inmediata de la definición de convolución haciendo el siguiente cambio de variable,  $u = x - t$ ,  $du = -dt$ , e integrando en un intervalo finito  $[-a, a]$  y al final evaluar el resultado cuando  $a \rightarrow \infty$ . Para el caso (iii) el resultado es directo del hecho que  $Dg \in \mathfrak{S}$ , que

$$|f(t)Dg(x-t)| \leq C|f(t)|,$$

para alguna constante  $C$ , y que  $f \in L^1(\mathbb{R})$  (pues  $f \in \mathfrak{S}$ ) lo que hace posible derivar bajo el signo de la integral y encontrar que  $D(f * g) = f * Dg$ . Iterando por inducción se encuentra que  $D^p(f * g) = f * D^p g$ .

Para demostrar (i) se fija un entero positivo  $n$ . Para cualquier  $x, t$  se tiene que

$$|x|^n \leq (|x-t| + |t|)^n = \sum_{r+s=n} C_{rs} |x-t|^r |t|^s$$

$$C_{r,s} = \binom{r+s}{r}$$

luego entonces

$$|x|^n |(f * g)(x)| \leq \sum_{r+s=n} C_{rs} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^s |f(t)| |x-t|^r |g(x-t)| dt$$

y como  $|t|^s |f(t)|$  es acotada (pues  $f \in \mathfrak{S}$ ) y  $|u|^r |g(u)| \in L^1(\mathbb{R})$ ; se sigue que  $|x|^n |(f * g)(x)|$  está acotada. Y por tanto,  $f * g \in \mathfrak{S}$ .



La demostración del inciso (iv) se sigue de aplicar la definición de convolución e intercambiar el orden de integración ya que  $f * g \in \mathfrak{S}$  es absolutamente integrable.  $\square$

**Teorema B.8** Sea  $f(x) = e^{-x^2/2}$ . Entonces  $f = \mathfrak{F}f$ .

La demostración es directa evaluando la transformada de Fourier de la función  $f(x) = e^{-x^2/2}$ . Esto es,

$$\mathfrak{F}[f](U) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixU} dx.$$

Nótese que el integrando representa una función analítica que no tiene singularidades en ninguna parte finita del plano complejo. Por lo que en virtud del teorema de Cauchy, la integral no cambiará de valor si en lugar de tomarla respecto al eje real, se toma respecto a cualquier recta  $z = x + iy$  ( $y$  constante) paralela a este eje. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f](U) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)^2/2} \cdot e^{-i(x+iy)U} dx \\ &= e^{\frac{y^2}{2} + Uy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2} - ixy - iUx} dx \\ &= e^{\frac{y^2}{2} + Uy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2} - ix(y+U)} dx. \end{aligned}$$

Elijiendo la “constante”  $y$  de manera que se anule la parte imaginaria en el exponente del integrando, esto es, tomando  $y = -U$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[f](U) &= e^{\frac{U^2}{2} - U^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{U^2}{2}}. \quad \square \end{aligned}$$

El siguiente teorema es la generalización del teorema anterior, en el sentido que se da a continuación. Pero antes se requiere introducir la siguiente notación. Si

$f$  es una función dada, se denota por  $f^-$  la función tal que  $f^-(x) = f(-x)$ . Así que  $(f^-)^- = f$ . Entonces el siguiente teorema tiene lugar.

**Teorema B.9** Para cualquier función  $f \in \mathcal{S}$  se tiene que  $f^{\wedge\wedge} = f^-$ .

**Demostración** Sea  $g \in \mathcal{S}$ . Después de intercambiar integrales se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-iUx} g(x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} e^{-iUx} g(x) dt dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{g}(t+U) dt. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Sea  $h \in \mathcal{S}$  y sea  $g(u) = h(au)$ ,  $a > 0$ . Entonces

$$\hat{g}(u) = \frac{1}{a} \hat{h}(u/a),$$

y luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{-iUx} h(ax) dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{a} \hat{h}\left(\frac{t+U}{a}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(au-U) \hat{h}(u) du \end{aligned}$$

Ambas integrales dependen de un parámetro  $a$ , y son continuas con respecto a  $a$ . Haciendo  $a \rightarrow 0$ , se llega a

$$h(0) f^{\wedge\wedge}(U) = f(-U) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(u) e^{iu0} du = f(-U) h^{\wedge\wedge}(0).$$

Si  $h$  es la función del teorema anterior (B.8), entonces  $h^{\wedge\wedge}(0) = \hat{h}(0) = h(0)$ . Por lo tanto,  $f^{\wedge\wedge}(U) = f(-U)$ .  $\square$

Nótese que del teorema B.8 se sigue que  $f^{\wedge\wedge\wedge} = f$  para  $f(x) = e^{-x^2/2}$ . Ahora, por el teorema B.9 se tiene que  $f^{\wedge\wedge\wedge} = (f^{\wedge\wedge})^{\wedge} = (f^-)^{\wedge} = f^- = f$ , para toda  $f \in \mathcal{S}$ . En este sentido, como ya se dijo antes, este teorema es una generalización del teorema B.8.

Enseguida se introduce el producto hermitiano

$$\langle f, g \rangle = \int_R f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Nótese que del primer paso de la demostración del Teorema B.9 se deduce el siguiente resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx \quad (\text{B4})$$

al hacer  $U = 0$  en ambos lados de (B3).

Finalmente, se introduce un teorema que establece la razón para la existencia del operador transformada inversa de Fourier, pero antes véase que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-u)(-du) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(-u)(-du)$$

ó sea que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(-x) dx \quad (\text{B5})$$

**Teorema B.10** Para  $f, g \in \mathcal{S}$  se tiene:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (\text{B6})$$

En particular,

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2. \quad (\text{B7})$$

**Demostración** Considérese primero que:

$$(\bar{g})^\wedge = (\hat{g})^- \quad (\text{B8})$$

y a continuación véase que:

$$\int_R f \bar{g} = \int_R \hat{f}^- (\hat{g})^\wedge, \quad \text{por (B4)}$$

$$= \int_R \widehat{f}(\overline{(\hat{g})}), \quad \text{por (B8)}$$

$$= \int_R \widehat{f}(\hat{g}), \quad \text{por (B5)}. \quad \square$$

El resultado anterior es muy importante ya que dice que el operador (lineal) transformada de Fourier  $\mathfrak{F}: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}$  preserva la estructura del espacio  $L^2(R)$ . Más aún, por (B7),  $\mathfrak{F}$  es una isometría sobre  $\mathfrak{S}$  con respecto a  $L^2(R)$ ; que se puede extender a todo  $L^2(R)$ , pues  $\mathfrak{S}$  es un subconjunto denso de  $L^2(R)$  con respecto a la topología de  $L^2(R)$ .

### C. Formula de inversión de Radón

Un resultado importante en la reconstrucción de imágenes que establece la relación que existe entre la transformada de Radón y la transformada de Fourier es conocido como el teorema de la proyección. Este teorema proporciona un camino para obtener la transformada inversa de Radón por medio de la transformada inversa de Fourier dando lugar a un algoritmo de reconstrucción de imágenes (para datos obtenidos mediante la geometría en paralelo) conocido como reconstrucción de Fourier.

**Teorema C.1** Para  $f \in \mathfrak{S}(R^2)$  se tiene:

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{R}_\theta](U) = (2\pi)^{1/2} \mathfrak{F}[f](U\theta), \quad U \in R$$

#### Demostración

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}[\mathfrak{R}_\theta](U) &= (2\pi)^{-1/2} \int_R \mathfrak{R}_\theta f(s) e^{-iUs} ds \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_R e^{-iUs} \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy ds. \end{aligned}$$

Haciendo  $x = s\theta + y$  la nueva variable de integración, se tiene que  $s = \theta \cdot x$ ,  $dx = dy ds$ , entonces,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}[\mathfrak{R}_\theta f](U) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) e^{-i(U\theta) \cdot x} dx \\ &= (2\pi)^{1/2} \mathfrak{F}[f](U\theta). \quad \square\end{aligned}$$

La formulación del algoritmo de reconstrucción de Fourier es inmediata del teorema (C.1) ya que si se escribe:

$$\mathfrak{F}[f](U\theta) = (2\pi)^{-1/2} \mathfrak{F}[\mathfrak{R}_\theta f](U)$$

y se recupera la función  $f$  utilizando la fórmula de inversión para la transformada de Fourier:

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathfrak{F}[f](\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi.$$

Este algoritmo usa la transformada rápida de Fourier para calcular

$$\mathfrak{F}[\mathfrak{R}_\theta f](U) = \sqrt{2\pi} \mathfrak{F}[f](U\theta_j), \quad U \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, p.$$

En 2D esto da valores de  $\mathfrak{F}[f]$  sobre una malla polar. Esos valores son interpolados sobre una malla rectangular y una FFT inversa en 2D es usada para obtener  $f$ . Este algoritmo es mucho más rápido que retroproyección filtrada, pero la interpolación en la reconstrucción de la imagen se vuelve cosa muy delicada, requiriendo un tratamiento fino y sutil. Y como tal no compete con otras técnicas de reconstrucción, en cuanto a precisión. Este defecto se corrige mediante una elección adecuada de los puntos  $\xi_k$ . Para los detalles véase Natterer [13].

## Referencias

- [1] Apostol T. M. (1960), **Análisis matemático**, Editorial Reverté
- [2] Baggett & Flux (1979), **Fourier Analysis**, api anjou press, inc.
- [3] Cormack A. M. (1981), *Early tomography and related topics*, en: Herman G. T. & Natterer F., **Mathematical aspects of computerized tomography** Springer L. N. in Medical informatics 8
- [4] Deans R. S. (1983), **The Radón transform and some of its applicattions**, John Wiley & Sons
- [5] Faridani A. (1991), *Reconstructing from efficiently sampled data in Parallel beam computed tomography*, in Roach G. F., Inverse problems And imaging, Pitman Res., N. in Math. Serv. 245
- [6] Faridani A. (2002), *Introduccion to the Mathematics of Computed Tomography*, Dept. of Mathematics, Oregon State University, Corvallis OR 97331
- [7] Herman G. T. (1980), **Image reconstruccion from projections**, Academic press
- [8] Kahaner D., Moler C., Nash S. (1988), **Numerical methods and software**, Prentice Hall
- [9] Lang S., (1969), **Introducción al análisis matemático**, Addison-Wesley Iberoamericana
- [10] Lewitt R. M. (1983), *Reconstruction algorithms: Transform methods*, proc. IEEE, Vol. 71, No. 3
- [11] Louis A. K., Natterer F. (1983), *Mathematical problems of computerized tomography*, Proc. IEEE, Vol. 71, No. 3
- [12] Macovsky A. (1983), *Physical problems of computerized tomography*, proc. IEEE, Vol. 71, No. 3

- [13] Natterer. F. (1989), **The mathematics of computarized tomography**, John Wiley & Sons
- [14] Nakamura S. (1996), **Análisis Numérico y Visualización Gráfica**, Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
- [15] Wang Y., Friedrich M. W. (1997), *Vector- Entropy optimization-Based Neural-network approach to image reconstruction from proyections*, IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 8, No. 5, September, 1997.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA