



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

03063  
71

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE LA COMPUTACIÓN

**DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD  
EN LAS ETAPAS INICIALES DE  
CRECIMIENTO DEL MODELO  
AGREGACIÓN LIMITADA POR  
DIFUSIÓN BICOLOR.**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS *de la*  
*Computación*

P R E S E N T A:

OSCAR IBÁÑEZ OROZCO

DIRECTORA DE LA TESIS: DRA. SUEMI RODRÍGUEZ ROMO

MÉXICO, D.F.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

2002.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## AGRADECIMIENTOS

- ❖ A la UNAM por darme la oportunidad de estudiar un posgrado.
  
- ❖ Un agradecimiento muy especial a la Dra. Suemi Rodriguez Romo por apoyarme y guiarme en la realización de este trabajo.
  
- ❖ Otro agradecimiento muy grande al Dr. Vladimir Tchijov por su apoyo y excelentes clases.
  
- ❖ A todos mis amigos y compañeros del Centro de Computo.
  
- ❖ A mis padres por darme toda la confianza y apoyo para realizar todas mis metas.
  
- ❖ En especial a la mujer que Dios puso en mi vida para ayudarme a vivirla.
  
- ❖ Y por sobre todas las cosas a Dios gracias.

# I N D I C E

INTRODUCCIÓN 1

## CAPITULO I

- 1. GEOMETRÍA Y DIMENSIÓN FRACTAL. 3
  - 1.1 FRACTALES AUTO - SEMEJANTES. 3
    - 1.1.1 CONJUNTO CANTOR. 3
    - 1.1.2 EL TRIANGULO DE SIERPINSKI. 7

## CAPITULO II

- 2. MODELOS "AGREGACIÓN LIMITADA POR DIFUSIÓN" (DLA). 9
  - 2.1 MODELO DE WITTEN Y SANDER. 10
  - 2.2 MODELO DLA, BICOLOR (BDLA). 12

## CAPITULO III

- 3. GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS. 15
  - 3.1 GENERADORES DE CONGRUENCIA LINEAL (LCG). 15
  - 3.2 GENERADORES DE CICLO COMPLETO. 16
  - 3.3 SECUENCIAS DE NÚMEROS ALEATORIOS. 16
  - 3.4 PRUEBAS DE ALEATORIEDAD. 18

## CAPITULO IV

- 4. ALGORITMO DE TABLAS HASH. 20
  - 4.1 HASHING NUMÉRICO. 22
  - 4.2 HASHING DE CADENA DE CARACTERES. 22
  - 4.3 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE COLISIONES. 23
  - 4.4 ENCADENAMIENTO POR SEPARADO. 23
  - 4.5 DIRECCIONAMIENTO ABIERTO. 24
  - 4.6 REHASHING. 25
  - 4.7 FUNCIÓN HASH UTILIZADA 25

## CAPITULO V

- 5. ESTUDIO DEL MODELO COMPUTACIONAL "DLA BICOLOR" . 26
  - 5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA. 28
    - 5.1.1 ENTRADAS. 28
    - 5.1.2 RESULTADOS OBTENIDOS AL FINAL DE LA EJECUCIÓN. 34
  - 5.2 PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS. 36

## CAPITULO VI

- 6. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS MEDIANTE LA EJECUCIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL DE NOMBRE "AGREGACION LIMITADA POR DIFUSIÓN BICOLOR (BDLA)" . 39
  - 6.1 VARIABLES INICIALES EN EL MODELO COMPUTACIONAL "BDLA" . 39
  - 6.2 PROCESO DE OBTENCIÓN DE DATOS. 41
    - 6.2.1 PRIMER ETAPA EN EL PROCESO DE OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. 42
      - 6.2.1.1 COORDENADAS PARA EL SISTEMA DLA BICOLOR A UNA DISTANCIA  $D = 2$ . 43
        - 6.2.1.1.1 COORDENADAS COMPARTIDAS PARA EL SISTEMA DLA BICOLOR CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  $d = 2$ . 47
        - 6.2.1.2 COORDENADAS PARA EL SISTEMA DLA BICOLOR A UNA DISTANCIA  $d = 4$ . 48
          - 6.2.1.2.1 COORDENADAS COMPARTIDAS PARA EL SISTEMA DLA BICOLOR A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  $d = 4$ . 52
          - 6.2.1.3 COORDENADAS PARA EL SISTEMA DLA BICOLOR A UNA DISTANCIA  $d = 6$ . 53
            - 6.2.1.3.1 COORDENADAS CUASI COMPARTIDAS PARA UN SISTEMA DLA BICOLOR A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  $d = 6$ . 57
        - 6.2.2 SEGUNDA ETAPA EN EL PROCESO DE OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. 58

6.2.2.1	RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE EL PROGRAMA "CONTABILIZACIÓN Y ANÁLISIS PARA DLA BICOLOR".	59
6.2.3	TERCER ETAPA EN EL PROCESO DE OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS.	68
6.2.4	PROBABILIDAD DIRECCIONAL.	89

CONCLUSIONES 118

BIBLIOGRAFÍA.

## INTRODUCCIÓN

### ANTECEDENTES.

En la naturaleza existen fenómenos que presentan una amplia variedad de patrones que pueden ser estudiados usando modelos euclidianos o bien modelos más complejos. Este es el caso de la contaminación atmosférica y la formación de cerros de arena en el desierto por el flujo del viento, solo por mencionar algunos de ellos. Este tipo de comportamiento es característico de la mayoría de los fenómenos naturales.

Hay algunos fenómenos que tienen patrones de formación completamente desordenados y no pueden ser descritos en términos de la geometría Euclidiana y presentan gran dificultad para caracterizarse en términos cuantitativos. Hasta hace algunas décadas su descripción era considerada casi imposible, pero hoy en día gracias al gran desarrollo de los sistemas computacionales se ha logrado obtener un gran avance en el entendimiento de este tipo de modelos complejos. Es el desarrollo de software para procesos complejos de crecimiento aleatorio, cuya ejecución realiza una gran cantidad de cálculos en tiempos relativamente pequeños, quien ha permitido estos avances.

Un claro ejemplo de los estudios sobre este tipo de fenómenos es el comportamiento en procesos de formación de agregados con crecimiento aleatorio.

### FORMACION DE AGREGADOS CON CRECIMIENTO ALEATORIO.

El proceso de formación de agregados con crecimiento aleatorio no es otra cosa mas que la acumulación de pequeñas partículas en movimiento que se van a integrar en alguna posición de un espacio delimitado logrando formar grandes estructuras.

Dicho proceso va a jugar un papel muy importante en el entendimiento del crecimiento y la apreciación de la geometría fractal.

Algunos ejemplos reales de este tipo de procesos es la contaminación atmosférica, la formación de coloides, coagulación de aerosoles, los procesos industriales de polímeros para generar hule espuma, entre muchos otros. Witten y Sander[1] estudiaron intensivamente estos casos.

*OBJETIVOS.*

En el presente trabajo de tesis se busca obtener información de naturaleza probabilística sobre el crecimiento de fractales en el modelo "agregación limitada por difusión bicolor" (BDLA), en las primeras etapas de formación de los agregados. Básicamente se busca;

- a) Mostrar que solamente ciertas coordenadas del agregado, a las que llamamos coordenadas compartidas y cuasi-compartidas, determinan el crecimiento de la estructura fractal. Para lograr lo anterior usamos como herramienta el estudio de una distribución de probabilidad a la que llamamos direccional, en el cúmulo. Los conceptos de coordenadas compartidas, cuasi-compartidas y distribución de probabilidad direccional serán definidos en el capítulo 6.
  
- b) Mostrar que la distribución de probabilidad direccional es lineal como función de la probabilidad  $p$  de crear partículas de un color específico y la distancia  $d$  entre semillas, ver capítulo 2. Lo anterior en todas las coordenadas de agregación al cúmulo en el modelo de agregación limitada por difusión bicolor a semejanza del modelo simple de difusión limitada por agregación (DLA). No así en las coordenadas compartidas y cuasi compartidas donde se dan todas las fluctuaciones de la mencionada distribución de probabilidad.

El interés de estudiar las primeras etapas de formación de los agregados proviene de que sostenemos la hipótesis de que éstas, a partir de un número indeterminado  $x$  de partículas agregadas, determinan por completo la estructura final del mismo en el modelo BDLA. De hecho, deseamos también explicar ciertas asimetrías ya reportadas en la literatura cuando el número de partículas en el agregado es muy grande.

## CAPITULO I

## 1. GEOMETRÍA Y DIMENSIÓN FRACTAL

Los estudios relacionados sobre geometría fractal y escalamiento han sido de gran ayuda para el entendimiento y descripción de una gran cantidad de estructuras desordenadas y sus orígenes. Existe una gran cantidad de tipos de fractales que se pueden describir cualitativamente y cuantitativamente de muchas maneras. A continuación se mencionan algunos ejemplos.

## 1.1 FRACTALES AUTO - SEMEJANTES.

## 1.1.1 CONJUNTO CANTOR.

Uno de los primeros fractales estudiados desde el punto de vista matemático es el conjunto *Cantor*. El conjunto Cantor[2] se construye de la siguiente manera: partiendo de un segmento de línea se remueve la tercera parte central de ésta que cubre un intervalo de 0 a 1. En la siguiente etapa del proceso de formación, son removidas las terceras partes de los dos segmentos de línea que resultaron de la primer división. En cada etapa siguiente del proceso de construcción del conjunto Cantor se repite el mismo procedimiento en los segmentos restantes de tal forma que después de  $n$  etapas, el número de segmentos de líneas generado es igual a  $2^n$  y su longitud inicial se ha reducido en  $(2/3)^n$ . En donde  $n \rightarrow \infty$ , un conjunto fractal se genera siguiendo estos pasos. Este "objeto" que se ha generado con medida cero y un número infinito de piezas, se consideró una paradoja, sin relevancia en el mundo real. Sin embargo el conjunto Cantor posee propiedades que son comunes a muchos otros fractales. Contiene huecos en todas sus escalas de longitud y llena una fracción despreciable del espacio que ocupa.

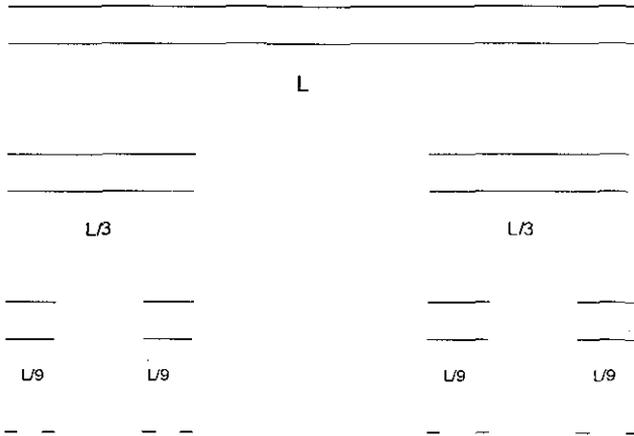


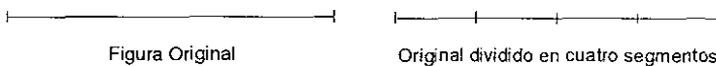
Figura 1.1.1 Tres etapas en la construcción del conjunto Cantor. Se muestra el segmento de la línea original y los prefractales después de las primeras tres etapas en la construcción del proceso.

Si el conjunto Cantor es dilatado por un factor  $3^n$ , puede ser cubierto por un mínimo de  $2^n$  réplicas de sí mismo. En general, si  $M^n$  es el número mínimo de réplicas del patrón original que son requeridas para cubrirse a sí mismo después de la dilatación (cambio de escala de longitud) mediante un factor de  $N^n$ , sus propiedades de escalamiento geométrico puede ser caracterizado por un fractal con dimensionalidad  $D$  dado por

$$D = \log(M)/\log(N)$$

Para poder comprender el concepto de dimensión fractal, consideremos los siguientes casos:

Utilizamos un segmento de línea y lo seccionamos en cuatro segmentos idénticos, como se muestra a continuación:



Cada uno de los segmentos es  $1/4$  del tamaño original. Esto quiere decir que cada segmento sería igual al original con solo multiplicarlo por un factor de escala. Para este caso, el factor de escala es igual a cuatro.

Con lo cual podemos escribir:

$$No\_segmentos = (factor\_escala)^D$$

Donde,

$$No\_segmentos = M$$

$$factor\_escala = N$$

$$Dimensión = D$$

Por lo que

$$M = N^D$$

$$\log(N^D) = \log(M)$$

$$D \cdot \log(N) = \log(M)$$

$$D = \log(M) / \log(N)$$

Para el caso de la línea segmentada en cuatro secciones:  $4=4^1$

Otro caso es el siguiente:

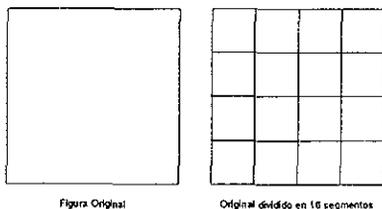


Figura 1.1.1.2 Plano dividido en 16 segmentos con factor de escala igual a 4.

Para el caso de la figura 1.1.1.2, el número de segmentos es de 16 y el factor de escala es de 4, pues al multiplicar cada lado de un segmento, se obtiene el cuadrado original, aplicando la relación anterior, se tiene que  $16=4^2$ , por tanto la dimensión fractal de esta figura es igual a 2.

Consideremos la siguiente figura:

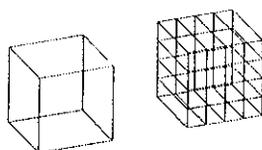


Figura 1.1.1.3 Cubo dividido en 64 segmentos con factor de escala igual a 4.

Para el caso de la figura 1.1.1.3, el número de segmentos en los que fue dividido el cubo es igual a 64. El factor de escala es igual a 4, pues al multiplicar cada lado del segmento por 4, se obtiene el cubo original. Aplicando la misma relación, se tiene que  $64=4^3$ . La dimensión fractal es igual a 3.

En los tres casos anteriores calcular la relación  $M=N^D$ , ha sido sencillo, sin embargo a medida que la complejidad de la figura se incrementa, el cálculo es más laborioso.

Para objetos Euclidianos, tales como líneas continuas, planos rectangulares o cubos, la anterior ecuación nos va a proporcionar una dimensionalidad Euclidiana de 1, 2 y 3 respectivamente. Para el conjunto Cantor la dimensionalidad fractal es  $\log(2)/\log(3) = 0.6309$ . Este resultado ( $0 < D < 1$ ) es razonable. El conjunto Cantor es más que un punto dimensional 0 (contiene un número infinito de ellos) pero menos que una línea dimensional 1 (la longitud total ocupada es cero). En este caso, la dimensionalidad fractal puede ser considerada como una medida de cuanto efectivamente el conjunto Cantor llena el espacio dimensional en el cual reside.

## 1.1.2 EL TRIANGULO DE SIERPINSKI.

Otro ejemplo simple de un fractal auto similar es el triángulo de Sierpinski[2] que se muestra en la figura, el cual se construye acoplando tres triángulos equiláteros idénticos, con lados de longitud  $\varepsilon$ , con el fin de formar un nuevo triángulo con lados de longitud  $2\varepsilon$  con un hueco triangular en la parte intermedia. En la siguiente etapa del proceso de construcción, tres de los triángulos con lados de longitud  $2\varepsilon$ , con huecos triangulares en sus partes intermedias, son colocados juntos para formar un triángulo con lados de longitud  $4\varepsilon$ , con un hueco triangular de tamaño  $2\varepsilon$  y tres huecos triangulares de tamaño  $\varepsilon$ . Después de  $n$  generaciones, un patrón triangular con lados de longitud  $2^n\varepsilon$  conteniendo  $3^n$  triángulos sólidos, cada uno con lados de longitud  $\varepsilon$ , son formados.

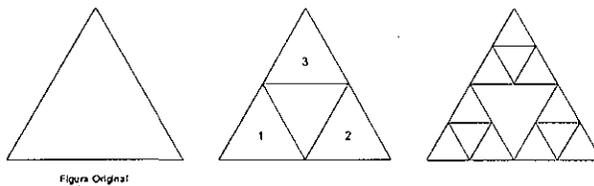


Figura 1.1.2.1 Primeros dos estados en la construcción del triángulo de Sierpinski.

Este proceso puede ir creciendo hasta encontrarnos con estructuras de un alto grado de complejidad como se muestra en la siguiente figura.

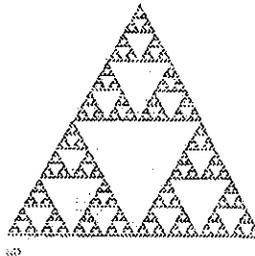


Figura 1.1.2.2 Triángulo de Sierpinski en su octava generación.

Cada vez que la escala de la longitud se incrementa mediante un factor igual a 2, el área o medición se incrementa por un factor de 3 y la dimensión fractal estará dada por  $D = \log(3)/\log(2)$ .

El proceso de construcción del prefractal en el triángulo de Sierpinski con pequeños prefractales es un proceso de agregación sistemático; por lo que ésta aproximación es útil para explicar los conceptos de geometría fractal en el contexto de fenómenos tales como agregación.

El estudio de modelos como los descritos anteriormente han servido como base para comprender patrones de crecimiento desordenados empleando aproximaciones teóricas y experimentales, como es el modelo *Eden*, que se encuentra totalmente entendido desde el punto de vista teórico.

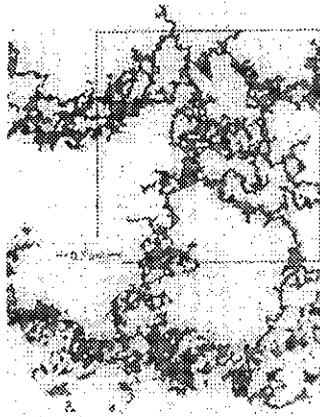
Sin embargo existen modelos de crecimiento que se encuentran muy lejos de ser completamente entendidos. Tal es el caso del modelo *Agregación Limitada por Difusión*, el cual representa todo un reto de estudio para lograr el entendimiento de formación de estructuras fractales con crecimiento alejado del equilibrio. Ésta es una de las razones por las que éste modelo y todos aquellos relacionados con él, entre otros el BDLA, constituyen un objeto importante de estudio en la actualidad.

## C A P I T U L O   I I

2. *MODELOS AGREGACIÓN LIMITADA POR DIFUSIÓN "DLA"*

El estudio de formación de agregados con crecimiento aleatorio habla de la acumulación de pequeñas partículas en movimiento que se van a integrar en alguna posición de un espacio delimitado logrando formar grandes estructuras.

Como es el caso de los agregados estudiados por Witten y Forrest[1], los cuales se formaron cuando un vapor de metal, producido por calentamiento de un filamento plateado, se condensó. Entonces partículas de metal con un radio aproximado de 40 Amstrongs se formaron cerca del filamento. Las partículas acumuladas en una delgada capa esférica, "bola de vapor", de aproximadamente un centímetro de radio, se desplazaron a un porta objetos de un microscopio electrónico obteniendo la micrografía mostrada en la figura 2.1, observando en esta que los agregados encontrados eran del orden de  $10^5$  partículas de metal en una masa de baja densidad. Las partículas que aparecieron, formaron agregados y este proceso resultó ser irreversible.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.1 Micrografía de un agregado de una partícula de hierro



El *radio de giro* ( $R_g$ ) de un número  $N$  de partículas en el agregado se encuentra definido por la siguiente expresión [4, 5]

$$R_g^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (R_i - R_c(N))^2$$

En donde:

$R_i$  es el radio vector de la  $i$ -ésima partícula.

$R_c(N)$  es el radio vector del centro de la masa del fractal, considerando que cada partícula tiene una masa igual a 1.

En una función de recurrencia,  $R_g$  se calcula como:

$$R_c(N)^2 = \frac{N-1}{N} R_g^2(N-1) + \frac{N-1}{N^2} (R_c(N-1) - R_n)^2.$$

Donde:

$$R_c(N) = \frac{N-1}{N} R_c(N-1) + \frac{1}{N} R_n.$$

El *radio de giro* ( $R_g$ ) de la estructura es una función del número, de partículas  $N_i$  que forman dicha estructura. Dicha función está dada por:

$$R_g = N^\beta.$$

Para un número de partículas  $N$  grande:

$$\beta \approx 6/5d.$$

Siendo  $d$  la dimensión euclidiana del enrejado.

## 2.2 MODELO DLA, BICOLOR (BDLA).

En base al modelo original de Witten y Sander[3] se han propuesto modificaciones y nuevos modelos del mismo para explicar diversos fenómenos en ciertas áreas del conocimiento.

Gran variedad de fenómenos naturales se pueden considerar como fenómenos cuyo crecimiento se ajusta a lo que conocemos como DLA; la coagulación de aerosoles, algunos crecimientos de cristales, flujo de fluidos en medios porosos, movimientos intermedios entre líquidos[6], etc.

Varios investigadores han propuesto modelos en donde su objetivo es estudiar el comportamiento del agregado con o sin enrejado del agregado, la dimensión fractal, y también la simetría de las estructuras obtenidas experimentalmente[7, 8, 9]. La conclusión es que el estudio del DLA no es sencillo y estamos muy lejos de poder formular un modelo analítico. Es mucho más sencillo formular un modelo computacional que permita obtener información importante del fenómeno.

Recientemente Tchijov, Nechaev y Rodríguez-Romo[8,9], propusieron el modelo BDLA basados en el modelo original de Witten y Sander.

Este modelo propone iniciar con dos partículas (semillas) de diferente color situadas a una distancia  $d$  una de otra. Una partícula se genera a una gran distancia de las partículas utilizadas como semillas. Esta partícula tiene la probabilidad  $p$  de ser del color de una de las partículas originales (semillas) y una probabilidad  $1-p$  de ser del color de la otra semilla. La partícula empieza a caminar aleatoriamente, lleva a cabo un movimiento browniano, hasta que una de las siguientes cosas ocurre:

1. Toca los límites predeterminados del enrejado, es eliminada y una nueva partícula se genera en algún lugar aleatorio. Los límites del enrejado son arbitrarios y dependen de los recursos de la computadora en donde se lleva a cabo la simulación.
2. En su caminata aleatoria ocupa un lugar adyacente a la semilla del color diferente al que le corresponde a ella, es eliminada y una nueva se genera para repetir la secuencia.

3. En su camino aleatorio, ocupa un lugar adyacente a la semilla de su mismo color, entonces se agrega a la estructura correspondiente a esa semilla y se genera una nueva partícula para continuar el proceso.

Estos casos se repiten hasta que alguno de los dos agregados alcanza un tamaño previamente determinado.

En este modelo, las variables que se consideran son:

1. La distancia entre las semillas.
2. La probabilidad de la partícula de tener el color de alguna semilla.

Obsérvese la siguiente figura, en la cual se pueden identificar estas variables. También se puede apreciar la flexibilidad que presenta el modelo pues es posible incluir más variables, dependiendo del fenómeno que se pretenda estudiar:

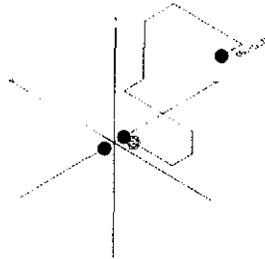


Figura 2.2.1 Representación grafica del modelo BDLA.

En la figura 2.2.1, se observa que los centros de las semillas se encuentran a la misma distancia del origen cartesiano, en este caso sobre el eje x. Ambas semillas se encuentran separadas a una distancia d.

A una gran distancia de las semillas, en un punto aleatorio sobre una esfera S de radio  $r_d$ , se introduce una partícula con probabilidad  $1-p$  de ser roja, y una probabilidad  $p$  de ser azul. El radio  $r_d$  es mucho más grande que la distancia que separa las semillas.

Es importante recalcar que para efectuar la simulación computacional del modelo BDLA nos vamos a encontrar con varios problemas entre los que destacan los siguientes:

- En base a las técnicas de modelación computacional de este tipo de fenómenos es necesario el utilizar un generador de números aleatorios que tenga un amplio rango de repetición; todo ello con la finalidad de simular las caminatas aleatorias, la posición inicial de la partícula caminante dentro del enrejado y el color de la misma.
- Implementar un algoritmo que nos permita calcular las posiciones de cada partícula que se generan aleatoriamente de forma rápida en un momento dado.

Por los motivos anteriores, en los siguientes capítulos, proponemos la forma de resolver los problemas arriba mencionados.

## C A P I T U L O   I I I

### 3. GENERADOR DE NÚMEROS ALEATORIOS

Un generador de números aleatorios debe cumplir con las siguientes características para que pueda ser considerado apto para su utilización en este tipo de modelos de crecimiento aleatorio:

- a) Tener un amplio periodo de generación, es decir, que el periodo para repetir la misma secuencia debe de ser bastante grande.
- b) Debe estar libre de correlaciones. Lo que quiere decir que las secuencias generadas deben de ser independientes, sin ninguna relación de recurrencia.

Si utilizamos generadores que no cumplan con estos requisitos se corre el riesgo que al efectuar la simulación computacional del modelo BDLA los resultados obtenidos en las ejecuciones no sean confiables, ya que existiría una repetición de la forma de las figuras obtenidas cada determinado tiempo como resultado del generador de números aleatorios usado y no del proceso estocástico. Por lo que es necesario el considerar algunos conceptos importantes en relación a los generadores de números aleatorios.

#### 3.1 GENERADORES DE CONGRUENCIA LINEAL (LCG)

Estos generadores pueden utilizarse para formar permutaciones y forman la base de los métodos más populares para la generación de secuencias de números aleatorios.

Un generador de congruencia lineal, produce una secuencia de enteros, cada uno entre 0 y  $m-1$ , esto es.

$$x_n = (ax_{n-1} + c) \bmod m \quad 0 \leq x_0 \leq m$$

Donde  $a$  es conocida como el multiplicador,  $c$  el incremento y  $m$  el módulo.

### 3.2 GENERADORES DE CICLO COMPLETO

A consecuencia del módulo aritmético que se empleó en el LCG, la secuencia de números obtenidos es cíclica. La longitud del ciclo se conoce como período. El período máximo posible para un LCG con un módulo  $m$ , es  $m$  por sí mismo. Un LCG con un período máximo posible, se conoce como un LCG de ciclo completo. Se puede obtener un generador de ciclo completo para cualquier  $m$  dada, escogiendo los valores apropiados para  $a$ ,  $c$  y  $x_0$ . Existen algunas reglas que se aplican cuando  $c$  es igual a 0, para garantizar un ciclo completo.

### 3.3 SECUENCIAS DE NÚMEROS ALEATORIOS

Si se usa un dispositivo tal como un LCG para generar secuencias, los números están lejos de ser independientes, debido a que siguen la relación de recurrencia del LCG. Sin embargo, para quienes no conocen esta relación fundamental, los números aparentan ser aleatorios.

Las secuencias de números aleatorios pueden ser generadas usando un LCG y escogiendo muy cuidadosamente los valores de  $m$ ,  $a$  y  $c$ .

La forma de obtener un período largo, es usando un valor grande para el módulo y seguir las reglas de la generación de un ciclo completo.

Usar un período amplio no garantiza una secuencia aleatoria. Tomemos ejemplo  $m=2^{31}-1$ , siguiendo las reglas para un ciclo completo,  $a=1$ ,  $c=2$  y  $x_0=1$ . Sin embargo se obtiene la siguiente secuencia:

1, 3, 5, 7, 9, 11, .....

La secuencia anterior es difícilmente aleatoria. De hecho para cualquier incremento  $c$  que se usa, la secuencia producida tendrá a  $c$  como diferencia entre dos números consecutivos.

Para atacar este problema, se puede:

1. No utilizar el LCG y utilizar otro tipo de generador aunque con periodos más pequeños.
2. Elegir un número  $m$  lo más alto posible que no sea primo o producto primo y tal vez se llegue a una secuencia más aceptable.
3. Usar un generador multiplicativo puro, con  $c=0$ . Entonces la relación de recurrencia se reduce a:

$$x_n = ax_{n-1} \bmod m$$

Un generador multiplicativo puro involucra un cálculo menos (la adición), debido al valor 0 del incremento, por esto son comúnmente usados en generadores de números aleatorios. Existe el problema de que nadie puede garantizar la aleatoriedad. Lo que se debe hacer, es intentar con varios valores de  $a$  y  $m$ , y probar las secuencias resultantes.

Para un generador multiplicativo puro, es necesario un diferente grupo de reglas con matemáticas más complejas para asegurar un ciclo completo.

Dos aspectos importantes de estas reglas son:

1. El modulo  $m$  debe ser primo.
2. No es posible obtener un ciclo completo con un generador multiplicativo puro, sin embargo se puede obtener uno menos que un ciclo completo, lo que es muy bueno. El único número que no puede ser usado es el número 0.

Los generadores multiplicativos puros han sido analizados exhaustivamente para su implementación como generadores de números aleatorios y a diferencia de los LCG es necesario un modulo primo. Para el módulo 2,147,483,647 hay arriba de 500 millones de valores para  $a$  que garantizan un ciclo completo, sin embargo, muchos de estos no generan buenos números aleatorios.

Un grupo de parámetros que ha tenido un amplio uso es  $m=2,147,483,647$ , y  $a=16,807$ . Un generador con este particular grupo de parámetros se llama "Generador de Estándar Mínimo" y se considera bueno para producir secuencias aleatorias.

### 3.4 PRUEBAS DE ALEATORIEDAD

Existen algunas pruebas estadísticas[10,11] , como son:

- Prueba Kolmogorov.
- Entropía de espectral.
- Prueba de corridas.
- Prueba de frecuencias.
- Prueba de producto rezagado.
- Prueba de Póker.
- Prueba de distancias.
- Prueba de máximos.
- Prueba de series.

Ninguna prueba dice si una secuencia de números es aleatoria, más bien, la mayoría de las pruebas dicen si una secuencia de números no es aleatoria.

Por ejemplo el Generador Estándar Mínimo falla en su prueba espectral. *La prueba espectral* busca las correlaciones entre los números producidos en un espacio de  $k$  dimensiones. Muchos generadores de números aleatorios tenderán a formar grupos de hiperplanos.

*La prueba de Kolmogorov*[12] es la prueba más eficiente que existe, Se basa en la relación que hay entre cada número de la secuencia y el resto de los números que forman parte de ésta. La entropía de Kolmogorov puede tener los siguientes valores.

<i>K</i>	<i>COMPORTAMIENTO</i>
0	Representa un sistema periódico
Un número positivo	Se dice que el sistema es caótico
$\infty$	Se dice que la secuencia es aleatoria

Para calcular la entropía de Kolmogorov deben hacerse una gran cantidad de cálculos en una secuencia de más de 60,000 números.

En base a lo expuesto anteriormente se han propuesto diversos generadores de números aleatorios pero la gran mayoría de ellos tienen grandes limitaciones al ser utilizados en este tipo de simulaciones. Solo algunos de ellos logran pasar satisfactoriamente las pruebas de aleatoriedad como es el caso del generador Ran3[13] el cual genera números aleatorios con distribución uniforme en el rango  $[0.0, 0.1]$  y ha sido utilizado con éxito en la simulación de caminatas autorepelentes; por lo que es el que se emplea en este modelo (BDLA) logrando obtener resultados satisfactorios.

## C A P I T U L O   I V

### 4. ALGORITMO DE TABLAS HASH

Como se mencionó el otro problema al que hay que enfrentarse para la simulación del modelo "BDLA" es el de implementar un algoritmo que nos permita calcular las posiciones de cada partícula que se generan aleatoriamente de forma rápida en un momento dado y determinar si están o no unidas a la estructura o que tan cerca se encuentra de ésta, para lo cual es necesario la implementación de un algoritmo que así lo determine.

El método de Tablas Hash[14] sirve como una verificación rápida para saber si una partícula viajera se acerca a la estructura ya existente o todavía está lejos de ella.

La estructura de datos tabla Hash es un arreglo con un tamaño fijo que contiene claves (cadenas de caracteres o números con un valor asociado). En donde por lo general una clave es una cadena de caracteres o números con un valor asociado.

Cada elemento del arreglo se le llama bucket o celdas, y al proceso de implementación se le conoce como Hashing. El Hashing es una técnica utilizada para la construcción de tablas para búsquedas, inserciones y borrado altamente eficiente. En buen diseño de una tabla Hash, se encuentra que una entrada puede tomar solo una o más comparaciones, sin importar el número de entradas presentes.

Cuando dos elementos señalan la misma celda o bucket, sucede lo que llamamos colisión y hay que resolver este problema mediante diversas técnicas que se tratarán mas adelante. Los métodos para el manejo de colisiones se conocen como estrategias de resolución de colisiones[15].

Las funciones para el mapeo en la tabla se llaman funciones Hash. Una función Hash debe tomar una clave, que proviene de un gran rango de valores, e introducirlo dentro del menor rango de buckets. Cuando se mapea de muchos a pocos, existen muchas colisiones, para minimizar las colisiones se mezclan las claves en una forma que la salida de la función Hash sea esencialmente aleatoria.

Funciones con estas propiedades son conocidas como funciones Hash uniformes. Idealmente, se quiere que cada bucket tenga  $1/m$  oportunidad de ser seleccionada, dando un grupo aleatorio de claves, como en el caso de las coordenadas de las posiciones de las partículas adheridas, y donde  $m$  es el número de partículas en la tabla.

Puede suceder que tengamos funciones Hash malas, como es el caso en donde todas las claves señalan al mismo bucket.

Hashing esta relacionado a un muestreo aleatorio, recordando que en un muestreo aleatorio, los  $k$  objetos se eligen de manera aleatoria de un grupo de  $r$  elementos. Supongamos que asignamos un número único en el rango de  $0$  a  $m-1$  a cada muestra en un grupo de  $m$  muestras aleatorias únicas. Estos números son equivalentes a índices de buckets y los objetos en cada muestra son las entradas cuyas claves mapean al mismo bucket.

Con Hashing se tienen muchas muestras, escogidas a priori, y debemos determinar de entre el grupo de muestras a cual muestra pertenece una clave dada.

Una función Hash debe satisfacer dos requerimientos, que por lo general son difíciles de conjuntar. Primeramente es deseable que la función Hash sea rápida, tomando solo un poco de cálculos. Segundo, la función debe ser bastante hábil para minimizar colisiones por que de lo contrario resultaría poco eficiente la implementación de dicho algoritmo dentro del modelo computacional debido al gran número de partículas que se manejan dentro del mismo y el tiempo de ejecución se vería seriamente afectado.

En condiciones ideales, la función Hash debe producir un índice único para cada clave. Las funciones Hash que están libres de colisiones se llaman funciones Hash perfectas.

El encontrar funciones Hash perfectas requiere de un conocimiento previo de todas las claves que se esperan, pero esto impide el uso de Hashing para situaciones más dinámicas, donde las claves no son conocidas por adelantado. Por lo tanto el esfuerzo se debe concentrar en encontrar funciones Hash que minimicen colisiones y que sean rápidas de calcular.

#### 4.1 HASHING NUMÉRICO.

La técnica adecuada para Hashing de claves numéricas es simplemente tomar el módulo  $m$  de la clave, donde  $m$  es el número de buckets en la tabla.

$$h(k) = k \bmod m$$

La ecuación se conoce como el método de la división de Hashing. Una razón por la que el método de la división es popular es porque toma a la clave el módulo  $m$ , automáticamente transforma la clave en el rango deseado de los índices de los buckets, de  $0$  a  $m-1$ .

Es crucial que se escoja un buen valor de  $m$  o los resultados no serán buenos. Si se hace  $m$  un número par, entonces las claves pares se introducirán en buckets pares y las claves impares en buckets impares. De esa manera si todas nuestras claves fueran impares, la mitad de los buckets no se utilizarán y se esperarían más colisiones.

Si las claves son verdaderamente aleatorias, la selección de  $m$  no es crítica. De hecho, para claves verdaderamente aleatorias, se pueden tomar meramente unos pocos bits de cada clave como el valor de Hash. Pero en el mundo real, las claves difícilmente son aleatorias.

El método de la división de Hashing se vuelve más eficiente si hacemos a  $m$  un número primo, reduciendo así el número de colisiones ya que se corrige el problema del valor par o impar  $m$ . Por ejemplo, si se determinan que se desean alrededor de 100 buckets, entonces tablas con tamaños de 103, 107, 109 ó 133 buckets serían convenientes.

#### 4.2 HASHING DE CADENA DE CARACTERES.

Es común que las claves sean cadenas de caracteres, como pueden ser nombres, domicilios, o identificadores. En este tipo de casos se tiene una posibilidad; sumar los valores enteros de cada carácter dentro de la cadena y usar el resultado como el índice del bucket.

Como es posible que el índice resultante sea más grande que el número de buckets, es común tomarle al resultado el módulo  $m$ .

Una vez que una cadena de caracteres es convertida a una forma numérica, se usa el método de la división tanto para aplicar más tarde Hash al resultado para mantener el valor en el rango. Como en el caso anterior, es mejor si  $m$  es un número primo.

#### 4.3 ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN DE COLISIONES

Básicamente existen tres estrategias para manejar colisiones[16].

- Direccionamiento abierto (*Open addressing*). Cuando una colisión ocurre, se examina la tabla buscando un bucket vacío para colocar la nueva entrada.
- Encadenamiento por separado (*Separate chaining*). Cada bucket encabeza una lista. Cuando una clave señala a un bucket, la entrada simplemente se agrega a la lista del bucket
- Encadenamiento unido (*Coalesced chaining*). Este es un híbrido de las dos primeras técnicas. El arreglo del bucket mantiene las entradas, las cuales son enlazadas en listas múltiples cuando ocurren colisiones. A diferencia del encadenamiento por separado, a las listas se les permite unirse. Cada lista puede contener entradas con claves que tienen diferentes valores Hash.

#### 4.4 ENCADENAMIENTO POR SEPARADO.

La manera más simple de resolver colisiones es mantener las entradas en una lista, una para cada bucket.

De los métodos de resolución de colisiones, el encadenamiento por separado es el método más intuitivo y el más fácil de implementar. En este método a diferencia de los otros, no hay un límite fijo en el número de entradas que se pueden agregar a la tabla. Las listas de los buckets pueden crecer a longitudes arbitrarias. Mientras las listas sean más largas, la búsqueda será más lenta. Idealmente se requiere que las listas contengan solo unos cuatro nodos debido a que el porcentaje de la longitud de las listas de los buckets será de  $n/m$ . El encadenamiento por separado reduce esencialmente la búsqueda, pues será más rápida mientras el valor asignado a  $m$  sea mayor[17].

#### 4.5 DIRECCIONAMIENTO ABIERTO.

Si se sabe con anticipación cuantas entradas se esperan, entonces la técnica llamada direccionamiento abierto (open addressing), puede darnos la tabla más compacta.

Cuando hay una colisión, el resto de los buckets en la tabla se analizan en una secuencia predeterminada. Hasta que se encuentra un bucket para insertar la entrada en él. Si no se encuentra un bucket vacío, significa que la tabla está llena.

Los problemas en el direccionamiento abierto son: determinar cuando un bucket esta vacío y determinar la secuencia del análisis. La secuencia del análisis debe examinar todos los buckets de la tabla si es necesario, además de que los análisis deben ser lo más dispersos posibles para minimizar el numero de colisiones que ocurren.

El primer requerimiento implica que la secuencia  $P_0, P_1, \dots, P_{m-1}$  es realmente una permutación de los números 0 a  $m-1$ , en donde  $P_0$  es el bucket dado por la función Hash. Existen cuatro tipos de secuencias de análisis[18]:

- Análisis lineal (*Linear Probing*).
- Análisis cuadrático (*Quadratic Probing*).
- Análisis uniforme (*Uniform Probing*).
- Análisis por doble Hashing (*Double Hash Probing*).
- Análisis aleatorio (*random Hashing*).

#### 4.6 REHASHING

Con las técnicas antes mencionadas, existe el problema de agregar más entradas de las esperadas, especialmente en las tablas de tamaño fijo. Incluso con el encadenamiento por separado. Las tablas son diseñadas de acuerdo a las entradas que se esperan, o de lo contrario debe prever el crecimiento de la misma.

Una técnica que se usa cuando una tabla se llena, es crear otra de mayor tamaño e insertar las entradas desde la primera tabla. A esto se le conoce como *Rehashing*[19], y debido a que el número de buckets es diferente a cada clave se le debe aplicar la función Hash.

Otra técnica es la Hashing extendible la cual arma una estructura de directorio jerárquico basado en patrones de bits de las claves hashed[20]. Y aunque existen otras técnicas para hacer crecer la tabla su uso es muy limitado ya que son muy complejas en su implementación.

#### 4.7 FUNCIÓN HASH UTILIZADA

La función Hash utilizada en el modelo DLA Bicolor es determinada mediante el algoritmo de tablas Hash, el cual consiste en obtener un índice para cada partícula que se encuentra integrada a la estructura y también para la partícula caminante. Este índice se obtiene a partir de la expresión:  $(Ax + By + Cz)$ , donde  $x, y, z$  son las coordenadas de los puntos que ya están formando la estructura y de las partículas caminantes, siendo el criterio para obtener las constantes enteras  $A, B$  y  $C$ , el siguiente:

$$A = M^{1/D}$$

$$B = M^{2/D}$$

$$C = M^{3/D}$$

En donde  $D$  es la magnitud de trabajo + 1 y  $M$  es el número máximo de partículas. Aunque los valores obtenidos para las constantes son reales el algoritmo indica que se aproxime al número primo más cercano, con el fin de minimizar colisiones.

Por lo que dependiendo de dimensión en la que estemos trabajando la función Hash para un caso de tres dimensiones queda de la siguiente forma:  $(Ax + By + Cz) \bmod M$ .

## C A P I T U L O V

### *5. ESTUDIO DEL MODELO COMPUTACIONAL "DLA BICOLOR"*

Los programas creados para generar estructuras fractales en esta tesis para el modelo de agregación limitada por difusión bicolor, utilizan la tecnología orientada a objetos.

En ésta sección se efectúa una breve descripción del programa que simula el modelo "BDLA" de donde se obtienen los datos necesarios para realizar el estudio probabilístico que nos permite observar el comportamiento de las estructuras fractales en sus etapas iniciales de formación.

El proyecto creado para simular al modelo "BDLA" fue diseñado en lenguaje C++ en base al estándar ANSI/ISO de C++ y fue compilado y ejecutado en plataforma Windows, utilizando el compilador Borland C++.

Comenzando la descripción del programa mostrando un diagrama de la estructura general del mismo.



Diagrama 3.2.1 Estructura general del programa "BDLA"

## 5.1 DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROGRAMA.

A continuación se da un panorama general de las funciones principales que tiene el proyecto del modelo computacional "BDLA", siguiendo la secuencia que estas tienen dentro del proyecto.

### 5.1.1 ENTRADAS.

Las variables que se requieren especificar al inicio de la ejecución del programa son:

3. Distancia entre semillas  $d_s$  ; 1, 2 y 3 .
4. Probabilidad de que la partícula caminante tenga el color de alguna de las dos semillas  $p$  ; entre 0 y 0.5 .
5. Numero de experimentos a realizar. En este caso 5000 experimentos por cada ejecución .
6. La cantidad máxima de partículas que se deben integrar a alguna de las dos estructuras fractales. En este caso 3 partículas.

Al introducir el valor que determina la distancia entre las semillas, éste va corresponder a la distancia que hay entre las semillas y el origen, en base al valor proporcionado por el usuario al programa se efectúa la asignación de coordenadas iniciales para ambas semillas. Por ejemplo; si el valor asignado a la variable  $d$  es de "uno" pasa lo siguiente:

Valor asignado a variable " $d$ "	Coordenadas de la semilla 1	Coordenadas de la semilla 2	Distancia entre semillas
1	(-1, 0)	(1, 0)	2

Las siguientes líneas de código son las encargadas de realizar las asignaciones antes mencionadas y de calcular tanto las coordenadas iniciales de ambas semillas como la distancia entre estas.

```
x0_1=-X_Init;
y0_1=0;

x0_2=X_Init;
y0_2=0;

int MaxNumberOfExper, NumParticles;

cout << "Experimentos a realizar (1 a 5000 max)? ";
cin >> MaxNumberOfExper;

cout << "Máx. de partículas por fractal (2 a 10 max)? ";
cin >> NumParticles;

Dfile<<setw(63)<< "Prob. Color 1 = " <<setw(12)<< Probab <<endl;
Dfile<<setw(63)<<"Num. de Exp. = " <<setw(12)<<MaxNumberOfExper<<endl;
Dfile<<setw(63)<<"Dist. Semillas = " <<setw(12)<< 2*X_Init <<endl<<endl;
Dfile<<setw(5)<<"Exp. " <<setw(14)<<"Pt. Est. " <<setw(8)<<"X" <<setw(8)<<"Y" <<endl;
```

Tomemos como partículas iniciales a las semillas mismas, para cada estructura fractal. Para la semilla de color  $i$  con coordenada  $(-1, 0)$  se realizan los siguientes cálculos con la finalidad de obtener los radios máximos y los radios de muerte:

Primeramente se calcula la distancia  $R^2$ , en donde:

$$R^2 = x^2 + y^2 \text{ por lo que para este caso } R^2 = 1.$$

Para calcular el radio máximo se emplea la siguiente fórmula:

$$\text{MaxRadius} = 2 + \sqrt{\text{CurrentDist\_2}} .$$

En donde  $\text{CurrentDist\_2}$  es una variable de tipo double que es inicializada al comienzo del programa con un valor de cero para después ser tratada mediante la siguiente sentencia condicional.

```
if( $R^2 > \text{CurrentDist\_2}$ )  $\text{CurrentDist\_2} = R^2$ 
```

La variable  $R^2$  tiene un valor que siempre es mayor que cero por lo que la condición se cumple y el valor finalmente asignado a la variable  $CurrentDist\_2 = 1$ .

Se emplea la formula arriba mencionada para calcular el radio máximo.

$$MaxRadius = 2 + \sqrt{CurrentDist\_2} ; \text{ obteniendo que } MaxRadius \text{ es igual a } 3 \text{ y}$$
$$MaxRadius\_2 = MaxRadius^2 = 9$$

Para finalmente obtener los radios de giro y de muerte.

$$Radius = MaxRadius + 5 = 3$$
$$Radius\_Kill = MaxRadius + 15 = 18$$

Realizando el mismo procedimiento para la semilla de color 2 con coordenadas (1,0), y obteniendo los mismos resultados.

Ya que fueron determinados los radios de giro y de muerte se da inicio a la creación de la partícula caminante la cual se genera dentro del enrejado con un radio que va a estar delimitado por el valor de la variable  $Radius$  previamente calculada. El valor de las coordenadas iniciales de la partícula recién generada van a ser determinadas a partir de las siguientes sentencias:

$$X0 = (int)ceil(Radius*cT);$$

$$Y0 = (int)ceil(Radius*sT);$$

Básicamente se trata del entero obtenido a partir del valor techo del producto de las variables  $Radius$  y  $cT$ , para  $X0$ , y  $Radius$  y  $sT$  para obtener el valor de  $Y0$ ; en donde el valor de la variable  $Radius$  es previamente calculado y para las variables  $cT$  y  $sT$ , se trata del seno y coseno de Theta cuyo valor fue determinado mediante el generador de números aleatorios  $Ran3$ .

Suponiendo que la sentencia anterior arrojó una coordenada de (7,3) lo primero que el programa determina para la partícula generada es el color de la misma, mediante la comparación del valor que el usuario introduce para que esta sea de color 1 con otro valor obtenido a partir del generador `Ran3[13]` y si este valor generado es menor que el valor que el usuario maneja, la partícula es de color 1, En caso contrario será de color 2.

Una vez que fue determinado el color de la partícula se crea un objeto que maneja la posición de la partícula y el color de la misma para poder iniciar su caminata aleatoria. Para el caso de dos dimensiones hay cuatro posibles alternativas de dirección, como lo muestra la siguiente tabla.

<i>Alternativa de movimiento</i>	<i>Posición Inicial</i>	<i>Posición después del movimiento</i>
1. Izquierda	(7, 3)	(6, 3)
2. Derecha	(7, 3)	(8, 3)
3. Arriba	(7, 3)	(7, 4)
4. Abajo	(7, 3)	(7, 2)

En esta sección las alternativas de movimiento fueron determinadas mediante la sentencia de selección múltiple `switch` mostrada en las siguientes líneas de código.

```
switch (RandInt3(IntSeed,4))
{
    case 0 : o.MoveXP();
            cout<<"Derecha /t"; break;
    case 1 : o.MoveXM();
            cout<<"Izquierda /t"; break;
    case 2 : o.MoveYP();
            cout<<"Arriba /t"; break;
    case 3 : o.MoveYM();
            cout<<"Abajo /t"; break;
}
```

La instrucción *switch* maneja varias opciones a elegir mediante el uso de las secuencias *case*, siendo de gran utilidad cuando se requiere elegir de entre varias alternativas disponibles como es en este caso en donde se comienza con la declaración de la sentencia, seguida de la estructura de control *RandInt3(IntSeed,4)* la cual es una función de nombre *RandInt3* que tiene como argumentos a *(IntSeed,4)* obteniéndose al ejecutar dicha función un número entero aleatorio que está en el intervalo de 0 a 3, comparando dicho valor en cada uno de los *case* manejados y si coincide en alguno de ellos se realiza el movimiento a la opción indicada y como tenemos al final de cada opción *case* una sentencia de bifurcación *break* termina la sentencia *switch* ignorando los casos siguientes.

Una vez que se efectuó el movimiento en cualquier dirección se debe de calcular a que distancia se encuentra la partícula del centro del enrejado y en base al valor obtenido, determinar el número de pasos a realizar por la partícula caminante; es decir entre mas alejada se encuentre del centro del enrejado mayor será el número de pasos a realizar. Todo esto con la finalidad de hacer mas eficiente al programa y obligar a la partícula caminante a acercarse a las semillas o salir del enrejado según sea el caso. Obteniendo lo anterior de la siguiente forma:

Primeramente se determina a que distancia se encuentra la partícula del centro del enrejado obteniendo el valor de la variable *w*, para después compararla con el radio máximo y así determinar el número de pasos que ésta debe realizar mediante el siguiente algoritmo que emplea una secuencia de selección *if-else-if*.

```
void Cub_Step::ChooseStep()
{
    double w=sqrt(sqr((double)Pos.x)+sqr((double)Pos.y));
    if (w < MaxRadius+10) Step=1;
    else
        if (w < MaxRadius+20) Step=2;
        else
            if (w < MaxRadius+40) Step=4;
            else
                if (w < MaxRadius+80) Step=8;
                else Step=16;
}
```

En donde la primera línea de código se refiere a la ejecución de la función miembro que pertenece a la clase `Cub_Step` y que determina el valor de  $w$  mediante la siguiente fórmula:

$$w = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Una vez obtenido dicho valor se pasa a la secuencia `if-else-if` para hacer las comparaciones de la condicional que hay dentro de cada uno de ellos hasta llegar a la que se cumple y de esta manera obtener el número de pasos a dar por la partícula caminante.

Paralelamente a los cálculos anteriores se determina, cuando una partícula caminante se aleja lo suficiente como para rebasar el radio de muerte mediante la siguiente condición.

$$\text{if } x^2 + y^2 > \text{Radius\_Kill}^2$$

Si se cumple la anterior desigualdad, la partícula caminante es tomada por muerta y se genera otra en algún lugar del enrejado y comienza de nuevo el ciclo mencionado hasta el momento.

En caso de que la partícula no muera, después de dar el número de pasos indicado se determina que tan cerca se encuentra ésta de alguna de las estructuras fractales y en caso de que se encuentre cerca de una de ellas se realiza un proceso muy cuidadoso para probar si la partícula en sus movimientos subsecuentes se adhiere o no a alguna estructura fractal.

Si la siguiente desigualdad de cercanía se cumple se considera que la partícula caminante se encuentra cerca de alguna estructura fractal:

$$\text{if } x^2 + y^2 < \text{MaxRadius}_2$$

Básicamente cuando una partícula caminante se acerca a alguna estructura fractal, se efectúan comparaciones de las coordenadas adyacentes a la partícula, con las coordenadas que integran cada estructura fractal.

Esto se realiza mediante comparaciones de índices entre partículas que integran cada estructura fractal y la partícula caminante mediante la utilización de algoritmos de hashing numérico que tienen la peculiaridad de realizar cálculos muy rápidos en tiempos constantes para arreglos de cualquier dimensión. Para realizar esto ya se debe conocer el color de la partícula caminante, por que el futuro de la misma esta en base al color que esta tiene, teniendo dos posibles opciones para nuestra partícula caminante:

1. La partícula muere por tratar de integrarse a una estructura de diferente color a la propia e iniciando un nuevo ciclo de generación de otra partícula en algún lugar del enrejado.
2. La partícula se integra a la estructura del mismo color que le corresponde incrementando el tamaño de esta, en donde en este caso el programa realiza una comparación del número de partículas que forman la estructura fractal con el número de partículas que se desea lo integren (3 en este caso), y si el numero de partículas integradas es menor al numero de partículas que deseamos formen la estructura, se verifica si la estructura fractal del otro color alcanzó el numero de partículas deseadas donde de ser así el experimento finaliza. En caso contrario se repite nuevamente otro ciclo de generación hasta alcanzar el número de partículas deseadas en cualquiera de las dos estructuras fractales.

### 5.1.2 RESULTADOS OBTENIDOS AL FINAL DE LA EJECUCIÓN

Al término de los experimentos indicados, finaliza nuestro programa el cual nos genera dos archivos en código ASCII. Uno de ellos nos proporciona información general de la prueba y los resultados específicos de cada uno de los experimentos como son: posición de las semillas de color 1 y 2 respectivamente, así como la cantidad y posición de cada una de las partículas que se integran a cada estructura fractal, y el segundo archivo nos muestra datos y resultados globales de cada uno de los experimentos.

A continuación se muestran secciones de los archivos generados por el programa.

PRIMER ARCHIVO (\*.dat) GENERADO AL FIN DE LA EJECUCIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL "BDLA"

Exp.	Part. Est.	X	Y	
				Prob. Color 1 = 0.1
				Num. de Exp. = 5000
				Dist. Semillas = 2
1	1	-1	0	Semilla Color 1
1	1	1	0	Semilla Color 2
1	2	1	-1	Fractal Color 2
2	2	2	0	Fractal Color 2
3	2	-2	0	Fractal Color 1
4	2	2	0	Fractal Color 2
5	2	2	0	Fractal Color 2
6	2	-1	-1	Fractal Color 1
7	2	1	1	Fractal Color 2
8	2	1	-1	Fractal Color 2
9	2	-2	0	Fractal Color 1
10	2	1	1	Fractal Color 2

SEGUNDO ARCHIVO (\*.dat) GENERADO AL FIN DE LA EJECUCIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL "BDLA"

Prob.	Exp.	Dist. Sem.	P. Total	P. F1	P. F2	log(Nmax/Nmin) (base 10)
0.25	1	2	2	1	2	0.30103
0.25	2	2	1	1	2	0.30103
0.25	3	2	27	1	2	0.30103
0.25	4	2	5	2	1	0.30103
0.25	5	2	1	1	2	0.30103
0.25	6	2	17	1	2	0.30103
0.25	7	2	2	1	2	0.30103
0.25	8	2	6	1	2	0.30103
0.25	9	2	2	1	2	0.30103
0.25	10	2	3	1	2	0.30103

Estos archivos que contienen los resultados de los experimentos realizados serán estudiados en el siguiente capítulo mediante herramientas estadísticas para poder cumplir con los objetivos que se plantearon al inicio de este trabajo de tesis y de esta manera observar el comportamiento de las estructuras fractales en sus etapas iniciales de formación.

## 5.2 PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

La programación orientada a objetos (POO), está basada en la idea natural de la existencia de un mundo lleno de objetos, de modo que la resolución del problema se realiza en términos de objetos. El objeto es la extensión natural del tipo abstracto de datos, y la programación orientada a objetos, aquella que se basa en el objeto como componente fundamental.

La ecuación básica en la POO es:

$$\text{CÓDIGO} + \text{DATOS} = \text{OBJETO}$$

La programación orientada a objetos se encuentra fundamentada en:

- Clases.
- Objetos.
- Instancia de variables.
- Métodos.

Los problemas en modelos de agregación limitada por difusión se adaptan para aplicar la programación orientada a objetos debido a que cada partícula puede ser tratada como un objeto.

Básicamente los objetos son una extensión del concepto de registro. Los objetos nos permiten combinar datos y código dentro de paquetes. Un objeto es un lenguaje constructor que enlaza datos con funciones y estas funciones realizan alguna acción sobre el dato.

Los objetos pueden ser extendidos para incorporar nuevos elementos de datos y funciones, usando adecuadamente la propiedad de herencia.

Una clase contiene dos tipos de componentes: variables de clase y métodos. Una variable de clase sirve como un elemento de datos, y un método es una función. En un sentido, las variables de clases definen el estado interno del dato de un objeto. Los métodos definen al comportamiento del objeto, esto es, las acciones que un objeto puede realizar. Una clase es un modelo usado para definir un objeto.

La POO se encuentra fundamentada en las siguientes propiedades:

1. Encapsulamiento (encubrimiento de información).
2. Herencia (compartir propiedades).
3. Polimorfismo (paso de mensajes).

A continuación procedemos a proporcionar información acerca de cada una de estas propiedades.

1. El encapsulamiento es un mecanismo que agrupa código y los datos los mantiene protegidos contra alguna interferencia o mal uso. El encapsulamiento proporciona dos características importantes:

- a) Pone datos y funciones sobre el mismo techo.
- b) Proporciona capacidades para ocultar datos.

El encapsulamiento protege los datos de objetos, pues usualmente se accede a los datos a través de funciones que están definidas en el objeto. Hace más fácil usar los datos de objetos y se puede utilizar para ocultar los detalles relativos a la manera como los datos son almacenados o implementados.

2. La herencia es el proceso mediante el cual un objeto puede adquirir las propiedades de otro, es una forma de reutilización de software en la que se crean nuevas clases a partir de clases ya existentes por medio de la absorción de sus atributos y comportamientos, sobreponiéndolos o mejorándolos con capacidades que las nuevas clases requieran.

Otra importante característica de la herencia es la habilidad para modificar una clase de un objeto ya existente, con el objetivo de hacer una nueva clase que tiene personalidad ligeramente diferente. De esta forma, se puede usar la herencia para crear múltiples objetos que desarrollen nuevas acciones, aunque los objetos sean derivados del mismo bloque.

3. El polimorfismo es la cualidad que permite que un nombre se utilice para dos o más propósitos relacionados, pero técnicamente diferentes. Es la habilidad de los objetos de diferentes clases que están relacionados mediante la herencia para responder en forma diferente al mismo mensaje (es decir, a la llamada de la función miembro). El mismo mensaje que se envía a muchos tipos de objetos diferentes toma "muchas formas".

Un aspecto importante del polimorfismo, es que cada objeto en la familia puede tener métodos con los mismos nombres, pero el código para cada método del objeto puede ser enteramente diferente.

Otra importante característica de la herencia es la habilidad para modificar una clase de un objeto ya existente, con el objetivo de hacer una nueva clase que tiene personalidad ligeramente diferente. De esta forma, se puede usar la herencia para crear múltiples objetos que desarrollen nuevas acciones, aunque los objetos sean derivados del mismo bloque.

3. El polimorfismo es la cualidad que permite que un nombre se utilice para dos o más propósitos relacionados, pero técnicamente diferentes. Es la habilidad de los objetos de diferentes clases que están relacionados mediante la herencia para responder en forma diferente al mismo mensaje (es decir, a la llamada de la función miembro). El mismo mensaje que se envía a muchos tipos de objetos diferentes toma "muchas formas".

Un aspecto importante del polimorfismo, es que cada objeto en la familia puede tener métodos con los mismos nombres, pero el código para cada método del objeto puede ser enteramente diferente.

## C A P I T U L O VI

*6. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS MEDIANTE LA EJECUCIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL DE NOMBRE "AGREGACION LIMITADA POR DIFUSIÓN BICOLOR (BDLA)"*

A continuación se presenta una descripción del procedimiento efectuado para llevar a cabo el análisis de los datos que se obtuvieron mediante la ejecución del modelo computacional "Agregación Limitada por Difusión Bicolor (BDLA)". Este capítulo representa la mayor contribución de esta tesis.

**6.1 VARIABLES INICIALES EN EL MODELO COMPUTACIONAL "BDLA".**

Como se describió en el capítulo 2, en el modelo BDLA se colocan dos partículas (semillas) de diferente color (color 1 y color 2) separadas por una distancia  $d$  una de la otra, dentro de un enrejado. Posteriormente una partícula es generada a una gran distancia de las partículas utilizadas como semillas. Esta partícula tiene la probabilidad  $p$  de ser del color de una de las partículas originales (semillas) y una probabilidad  $1-p$  de ser del color de la otra semilla.

Una vez creada esta partícula empieza a caminar en forma aleatoria, es decir, lleva a cabo un movimiento browniano, hasta que alguno de los siguientes casos ocurre:

- a) En su caminata aleatoria toca los límites predeterminados del enrejado, siendo ésta eliminada y una nueva partícula se genera en algún lugar aleatorio dentro del enrejado.
- b) En su caminata aleatoria ocupa un lugar adyacente a la semilla del color diferente al que le corresponde a ella misma y es eliminada generándose una nueva partícula dentro del enrejado para repetir la secuencia.
- c) En su caminata aleatoria, ocupa un lugar adyacente a la semilla de su mismo color, entonces se agrega a la estructura correspondiente a esa semilla y se genera una nueva partícula para continuar el proceso.

## C A P I T U L O VI

*6. ANÁLISIS DE LOS DATOS OBTENIDOS MEDIANTE LA EJECUCIÓN DEL MODELO COMPUTACIONAL DE NOMBRE "AGREGACION LIMITADA POR DIFUSIÓN BICOLOR (BDLA)"*

A continuación se presenta una descripción del procedimiento efectuado para llevar a cabo el análisis de los datos que se obtuvieron mediante la ejecución del modelo computacional "Agregación Limitada por Difusión Bicolor (BDLA)". Este capítulo representa la mayor contribución de esta tesis.

**6.1 VARIABLES INICIALES EN EL MODELO COMPUTACIONAL "BDLA" .**

Como se describió en el capítulo 2, en el modelo BDLA se colocan dos partículas (semillas) de diferente color (color 1 y color 2) separadas por una distancia  $d$  una de la otra, dentro de un enrejado. Posteriormente una partícula es generada a una gran distancia de las partículas utilizadas como semillas. Esta partícula tiene la probabilidad  $p$  de ser del color de una de las partículas originales (semillas) y una probabilidad  $1-p$  de ser del color de la otra semilla.

Una vez creada esta partícula empieza a caminar en forma aleatoria, es decir, lleva a cabo un movimiento browniano, hasta que alguno de los siguientes casos ocurre:

- a) En su caminata aleatoria toca los límites predeterminados del enrejado, siendo ésta eliminada y una nueva partícula se genera en algún lugar aleatorio dentro del enrejado.
- b) En su caminata aleatoria ocupa un lugar adyacente a la semilla del color diferente al que le corresponde a ella misma y es eliminada generándose una nueva partícula dentro del enrejado para repetir la secuencia.
- c) En su caminata aleatoria, ocupa un lugar adyacente a la semilla de su mismo color, entonces se agrega a la estructura correspondiente a esa semilla y se genera una nueva partícula para continuar el proceso.

Repitiéndose este ciclo hasta que alguna de las dos estructuras fractales alcanza el número de agregados indicado por el usuario, tratando que este tamaño sea lo suficientemente grande para poder efectuar un análisis de los resultados.

En este modelo, las variables que se deberán especificar en el programa son:

1. La distancia entre las semillas  $d$ ; 2, 4 y 6.
2. La probabilidad de que la partícula caminante tenga el color de alguna de las dos semillas  $p$ ; entre 0 y 0.5.
3. El número de experimentos a realizar por ejecución; 5000.
4. La cantidad máxima de partículas que se deben integrar a alguna de las dos estructuras fractales. En este caso 3 partículas.

Los criterios empleados para la asignación de valores a las variables  $d$  y  $p$  son decididas en función de los resultados obtenidos con anterioridad ya reportados estadísticamente en la literatura. El número de experimentos a realizar por cada ejecución es de 5000, número considerado adecuado para poder tener una muestra aceptable estadísticamente obteniendo de esta manera resultados confiables.

Para el valor asignado al número máximo de partículas que se deben de integrar a las estructuras, se determinó que fueran tres ya que existen ciertas condiciones que se dan durante el crecimiento de las estructuras fractales, que solo se presentan cuando el número de partículas agregadas es mayor a 2.

## 6.2 PROCESO DE OBTENCIÓN DE DATOS.

La obtención de datos del Modelo BDLA se efectuó mediante la ejecución del programa computacional del mismo nombre, en donde se realizaron 51 ejecuciones del mismo el cual nos proporciona en cada una de ellas el resultado de 5000 experimentos.

Cada una de las ejecuciones del programa se realizó a diferentes distancias entre semillas (2, 4 y 6) y a diferentes probabilidades de que la partícula generada fuera de color 1.

En la tabla 6.2.1 se muestra la relación entre las diferentes probabilidades y las variaciones en la distancia, donde se da nombre a cada ejecución del programa principal.

Pcolor1	2	4	6
0.1000	exp_00	exp_17	exp_34
0.1500	exp_01	exp_18	exp_35
0.2000	exp_02	exp_19	exp_36
0.2500	exp_03	exp_20	exp_37
0.3000	exp_04	exp_21	exp_38
0.3500	exp_05	exp_22	exp_39
0.4000	exp_06	exp_23	exp_40
0.4100	exp_07	exp_24	exp_41
0.4200	exp_08	exp_25	exp_42
0.4300	exp_09	exp_26	exp_43
0.4400	exp_10	exp_27	exp_44
0.4500	exp_11	exp_28	exp_45
0.4600	exp_12	exp_29	exp_46
0.4700	exp_13	exp_30	exp_47
0.4800	exp_14	exp_31	exp_48
0.4900	exp_15	exp_32	exp_49
0.5000	exp_16	exp_33	exp_50

Tabla 6.2.1

El proceso de obtención y análisis de datos del programa computacional de nombre BDLA se realizó en 3 etapas las cuales se describen a continuación en el orden como fueron realizadas.

#### 6.2.1 PRIMER ETAPA EN EL PROCESO DE OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS.

Como primer etapa se procedió a determinar todas las coordenadas en donde es posible se adhiera la partícula caminante, para cualquiera de las dos semillas, hasta completar tres agregados incluyendo a la semilla misma, para las distancias que se manejan (2, 4 y 6) y las posibles opciones de crecimiento para cada semilla. Esto se realizó mediante la implementación de un algoritmo que realiza lo siguiente: tomando como base la coordenada de cada semilla, se determinan las posibilidades de crecimiento que ésta tiene (3 y 4, dependiendo de la separación entre las semillas), posteriormente se determinan las segundas opciones de crecimiento (4 para todos los casos). Como se manejan tres partículas agregadas por estructura, no se determinan más opciones de crecimiento. En el paso siguiente, se efectúa una comparación de las coordenadas obtenidas y si existen dos coordenadas iguales, se elimina solo una de ellas, para finalmente listar las coordenadas restantes, dando como resultado el total de coordenadas en donde es posible se adhiera la partícula caminante.

6. 2. 1. 1 COORDENADAS PARA EL MODELO BDLA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  
 $d = 2$ .

SEMILLAS O PARTÍCULAS INICIALES A UNA DISTANCIA  $d = 2$

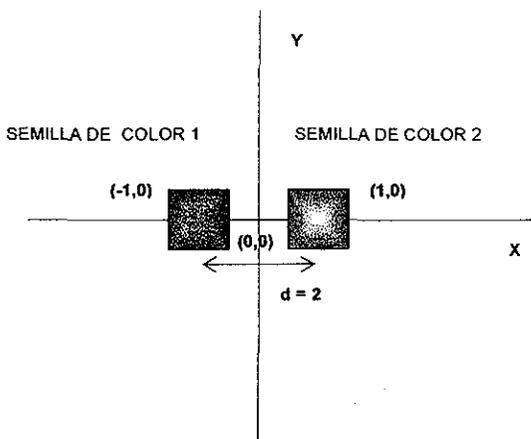


Figura 6. 2. 1. 1. 1 Coordenadas para las semillas del modelo BDLA separadas por una distancia  $d = 2$ .

Para la semilla de color 1 localizada en la coordenada  $(-1, 0)$  existen tres posiciones en las cuales se puede agregar la segunda partícula lo cual se ilustra en la figura 6. 2. 1. 1. 2.

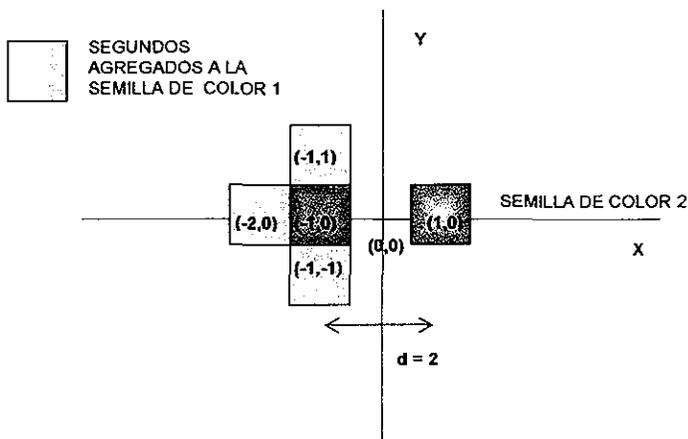


Figura 6. 2. 1. 1. 2 Segundos posibles agregados a la semilla de color 1.

Para la semilla de color 2 localizada en la coordenada  $(1, 0)$  existen también tres posiciones en las cuales se puede agregar la segunda partícula lo cual se observa en la figura 6.2.1.1.3.

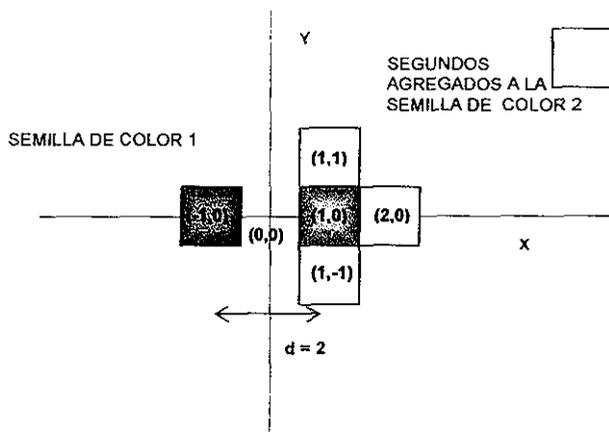


Figura 6.2.1.1.3 Segundos posibles agregados a la semilla de color 2.

Recordando que el proceso no termina hasta que en cualquiera de las dos estructuras se encuentren tres partículas adheridas, se muestran las coordenadas en donde se puede adherir la tercer partícula en la estructura fractal de color 1 a una distancia entre semillas  $d = 2$ .

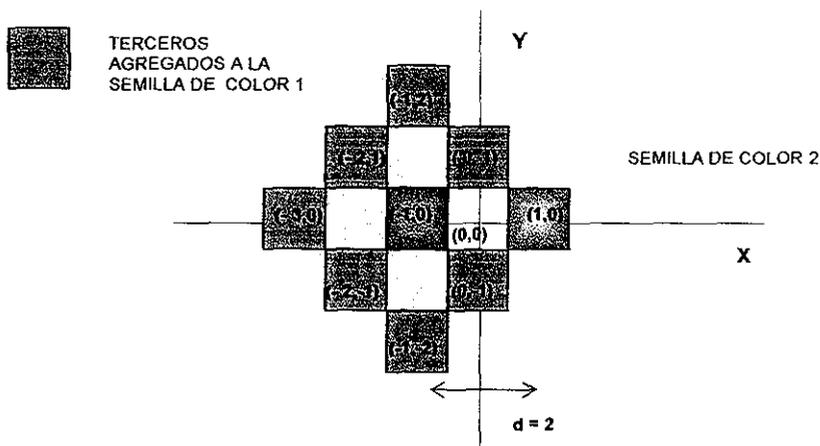


Figura 6.2.1.1.4 Terceros posibles agregados a la semilla de color 1.

Las coordenadas en donde se puede adherir la tercer partícula en la estructura fractal de color 2 a una distancia entre semillas  $d = 2$  se observan en el siguiente diagrama.

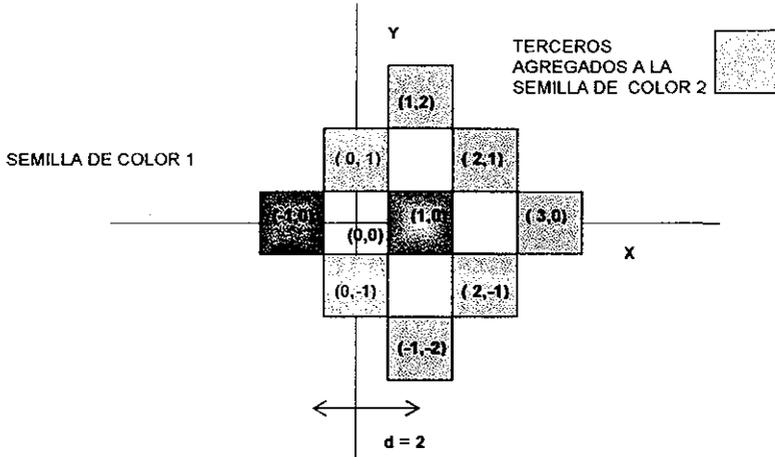


Figura 6.2.1.1.5 Terceros posibles agregados a la semilla de color 2.

Se obtienen 20 coordenadas en donde es posible agregar una partícula al sistema DLA Bicolor con una distancia  $d = 2$ , con tres agregados como máximo.

COORDENADAS DONDE ES POSIBLE SE AGREGUE UNA PARTÍCULA A CUALQUIERA DE LAS DOS SEMILLAS QUE SE ENCUENTRAN SEPARADAS POR UNA DISTANCIA  $d = 2$ .

COORDENADAS PARA SEMILLA DE COLOR 1	(-1, 1)
	(-2, 0)
	(-1, -1)
	(0, 1)
	(-1, 2)
	(-2, 1)
	(-3, 0)
	(-2, -1)
	(-1, -2)
	(0, -1)
COORDENADAS PARA SEMILLA DE COLOR 2	(1, 1)
	(2, 0)
	(1, -1)
	(0, 1)
	(1, 2)
	(2, 1)
	(3, 0)
	(2, -1)
	(1, -2)
	(0, -1)

Tabla 6.2.1.1 Coordenadas resultantes para el modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 2$ .

Es posible observar en la tabla 6.2.1.1, que existen dos pares de coordenadas que son las mismas para cualquiera de los dos sistemas fractales (color 1 y color 2), a las que les vamos a dar el nombre de: *Coordenadas compartidas*.

Dichas coordenadas solo aparecen cuando el numero de partículas agregadas es mayor o igual a tres ya que cuando solo son dos partículas las agregadas el tamaño de la estructura fractal no alcanza a llegar hasta este punto de la malla en donde coinciden estos, para las estructuras de color 1 y color 2.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**DEFINICIÓN.** Una coordenada compartida es aquella posición en la cual se puede agregar una partícula caminante a cualquiera de las dos estructuras fractales en el mismo punto dependiendo del historial de crecimiento que hayan tenido dichas estructuras.

6.2.1.1.1 COORDENADAS COMPARTIDAS PARA EL MODELO BDLA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  $d = 2$ .

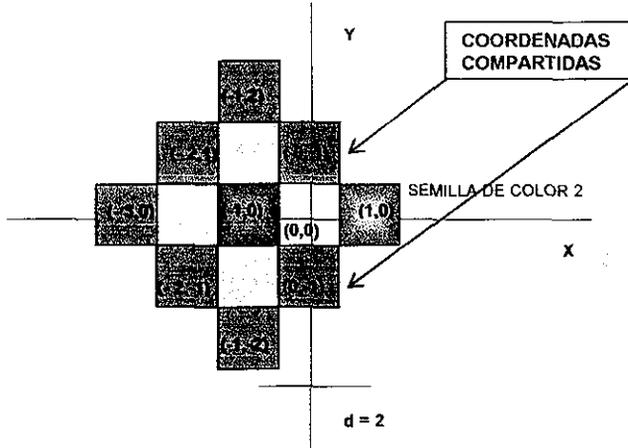


Figura 6.2.1.1.6 Coordenadas compartidas para el modelo BDLA con  $d=2$ , en el fractal de color 1.

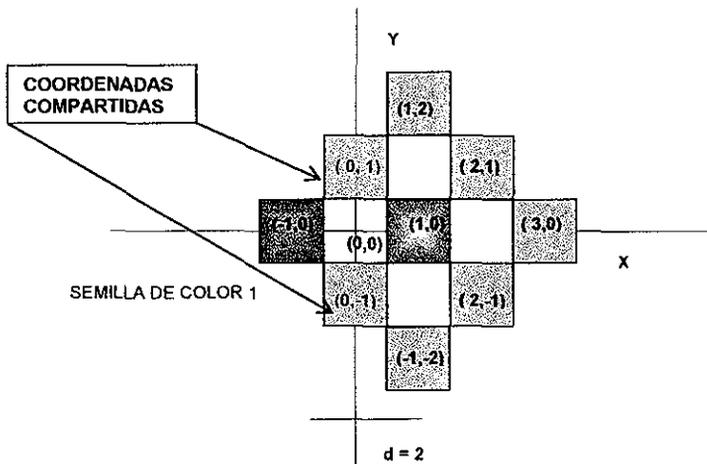


Figura 6.2.1.1.7 Coordenadas compartidas para el modelo BDLA con  $d=2$ , en el fractal de color 2.

6. 2. 1. 2 COORDENADAS PARA EL MODELO BDLA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  
 $d = 4$

SEMILLAS O PARTÍCULAS INICIALES A UNA DISTANCIA  $d = 4$

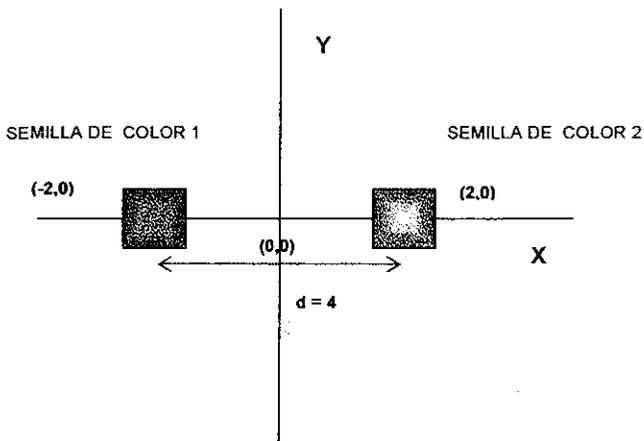


Figura 6. 2. 1. 2. 1 Coordenadas para las semillas del modelo BDLA separadas por una distancia  $d = 4$ .

Para la semilla de color 1 localizada en la coordenada  $(-2, 0)$  existen cuatro posiciones posibles en las cuales se puede agregar la segunda partícula como se ilustra en la figura 6.2.1.2.2.

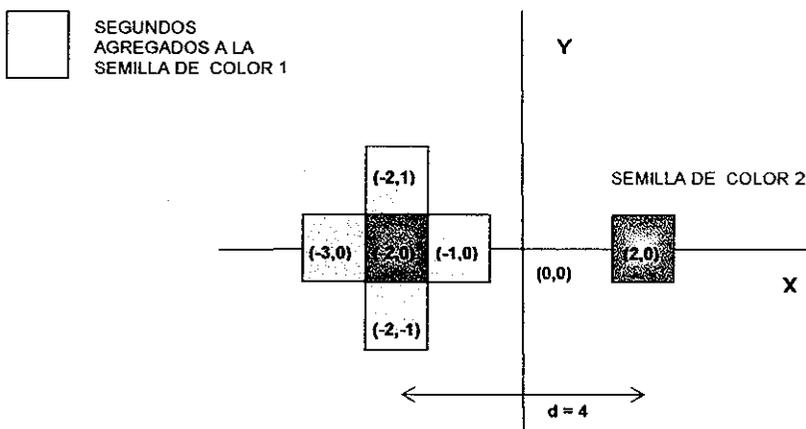


Figura 6. 2. 1. 2. 2 Segundos posibles agregados a la semilla de color 1.

De igual modo para la semilla de color 2 localizada en la coordenada  $(2, 0)$  existen cuatro posiciones posibles en las cuales se puede agregar la segunda partícula como se ilustra en el diagrama.

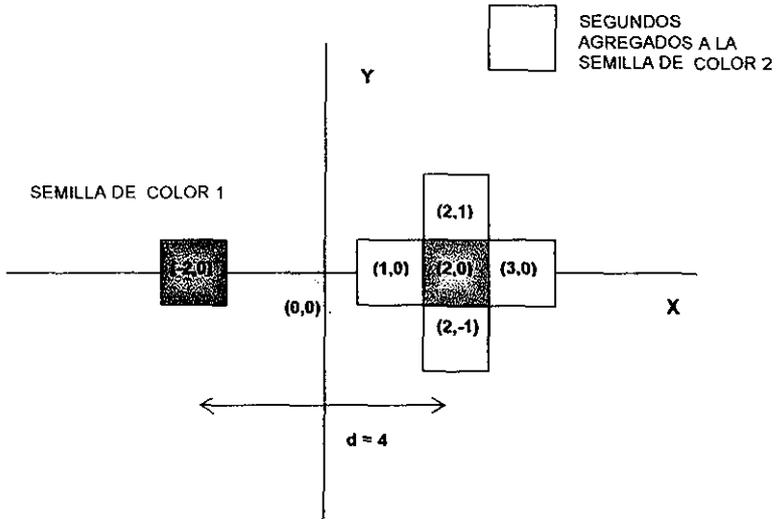


Figura 6.2.1.2.3 Segundos posibles agregados a la semilla de color 2.

Recordando una vez más que el proceso no termina hasta que en cualquiera de las dos estructuras se encuentren tres partículas adheridas, se muestran las coordenadas en donde es posible adherir la tercer partícula en la estructura fractal de color 1 a una distancia entre semillas,  $d=4$

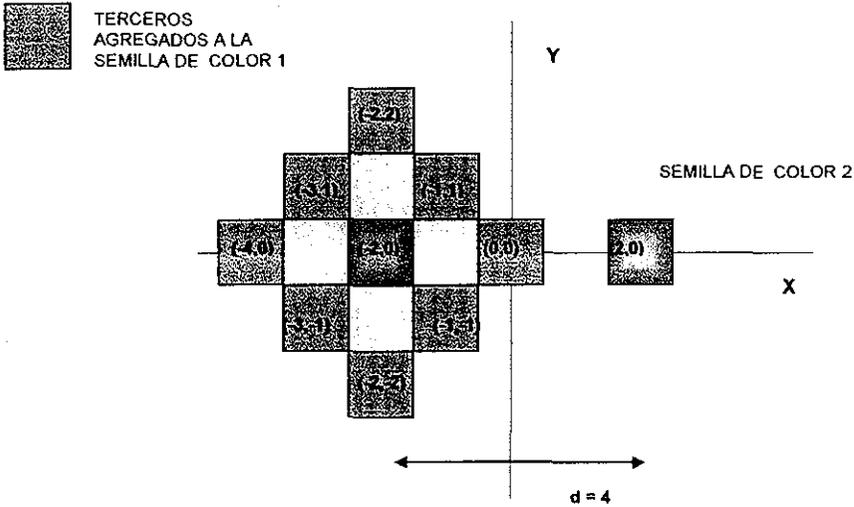


Figura 6.2.1.2.4 Terceros posibles agregados a la semilla de color 1.

Ahora analizamos las coordenadas en donde se puede adherir la tercer partícula en la estructura fractal de color 2 a una distancia entre semillas,  $d = 4$ , lo cual se observa en el diagrama siguiente.

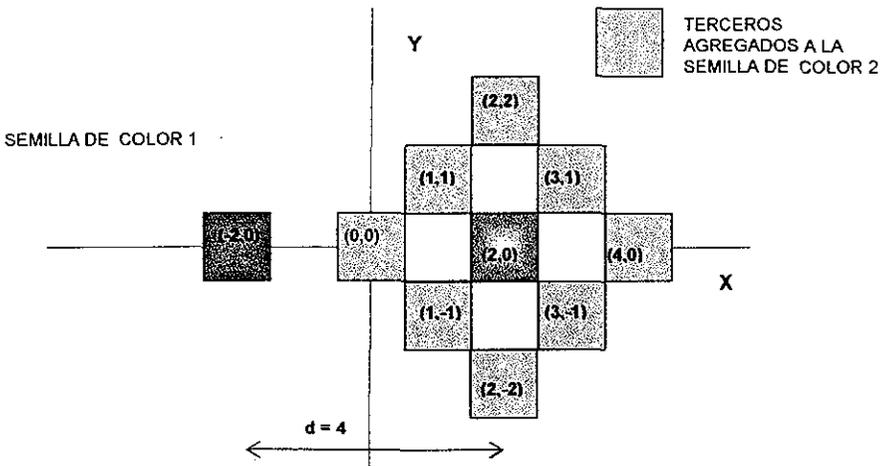


Figura 6.2.1.2.5 Terceros posibles agregados a la semilla de color 2.

Obteniéndose las 24 coordenadas en donde es posible agregar una partícula al sistema DLA Bicolor con una distancia entre semillas  $d=4$  para un máximo de 3 partículas agregadas en algún cúmulo.

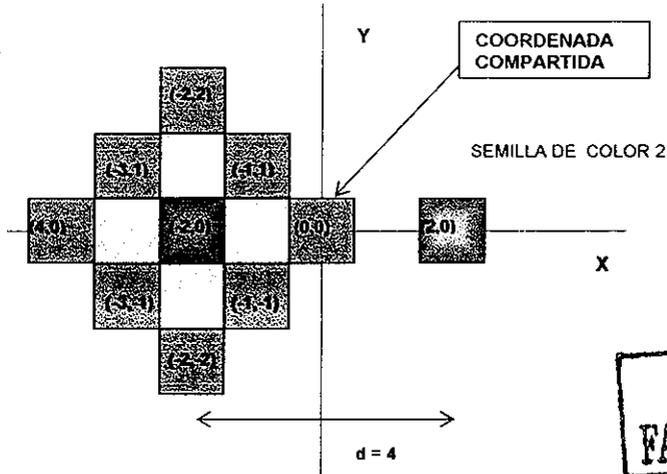
*COORDENADAS DONDE ES POSIBLE SE AGREGUE UNA PARTÍCULA A CUALQUIERA DE LAS DOS SEMILLAS QUE SE ENCUENTRAN SEPARADAS POR UNA DISTANCIA  $d = 4$ .*

COORDENADAS PARA SEMILLA DE COLOR 1	(-2, 1)
	(-3, 0)
	(-2, -1)
	(-1, 0)
	(-2, 2)
	(-4, 0)
	(-2, -2)
	(0, 0)
	(-1, 1)
	(-3, 1)
	(-3, -1)
	(-1, -1)
COORDENADAS PARA SEMILLA DE COLOR 2	(2, 1)
	(3, 0)
	(2, -1)
	(1, 0)
	(2, 2)
	(4, 0)
	(2, -2)
	(0, 0)
	(1, 1)
	(3, 1)
	(3, -1)
	(1, -1)

Tabla 6.2.1.2 Coordenadas resultantes para el modelo BDLA a una distancia  $d = 4$ .

Se observa en la tabla 6.2.2.1, que existe un par de coordenadas a las que llamamos coordenadas compartidas que son las mismas para cualquiera de los dos sistemas fractales (color1 y color 2), las cuales se visualizan en los diagramas que se muestran a continuación.

6.2.1.2.1 COORDENADAS COMPARTIDAS PARA EL MODELO BDLA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  $d=4$ .



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 6.2.1.2.6 Coordenada compartida para el modelo BDLA con  $d=4$ , en el fractal de color 1.

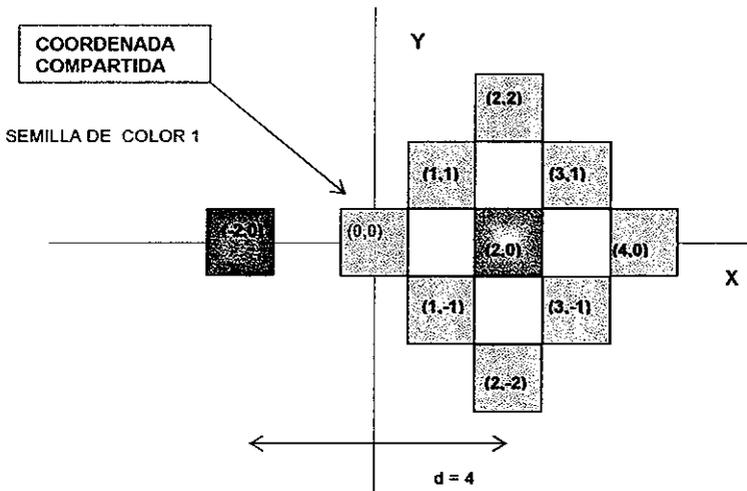


Figura 6.2.1.2.7 Coordenadas compartidas para el modelo BDLA con  $d=4$ , en el fractal de color 2.

6. 2. 1. 3 COORDENADAS PARA EL MODELO BDLA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS;  
 $d = 6$ .

*SEMILLAS O PARTÍCULAS INICIALES A UNA DISTANCIA  $d = 6$*

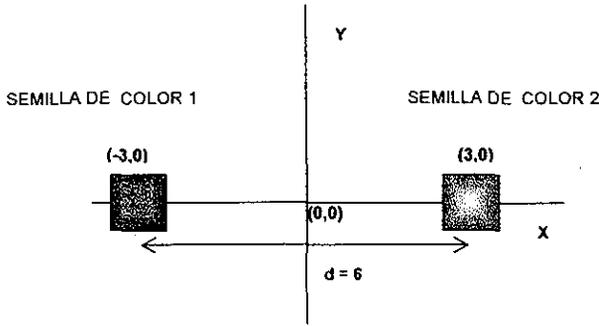


Figura 6. 2. 1. 3. 1 Coordenadas para las semillas del modelo BDLA separadas por una distancia  $d = 6$ .

Para la semilla de color 1 localizada en la coordenada  $(-3, 0)$  existen cuatro posiciones posibles en las cuales se puede agregar la segunda partícula como se ilustra en el siguiente diagrama.

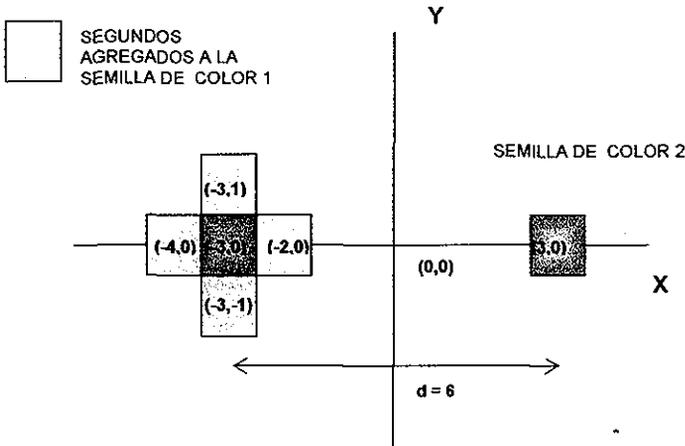


Figura 6. 2. 1. 3. 2 Segundos posibles agregados a la semilla de color 1.

De igual modo para la semilla de color 2 localizada en la coordenada  $(3,0)$  existen cuatro posiciones posibles en las cuales se puede agregar la segunda partícula como se ilustra en el siguiente diagrama.

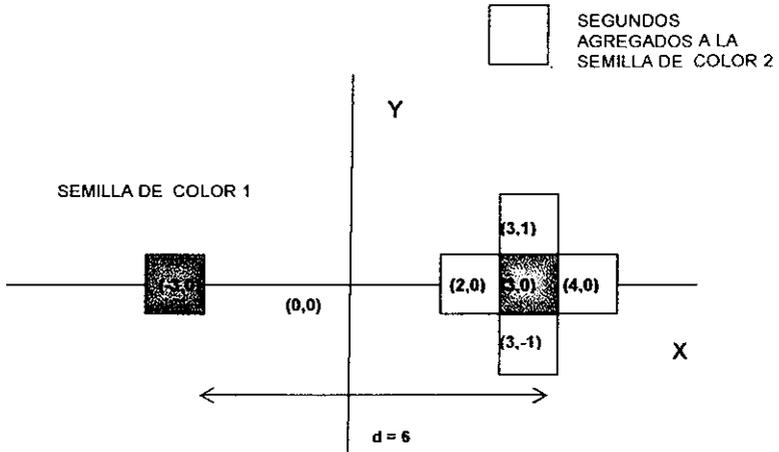


Figura 6.2.1.3.3 Segundos posibles agregados a la semilla de color 2.

El proceso no termina hasta que en cualquiera de las dos estructuras se encuentren tres partículas adheridas, por lo que se muestran las coordenadas en donde es posible se puede adherir la tercer partícula en la estructura fractal de color 1 a una distancia entre semillas  $d = 6$ .

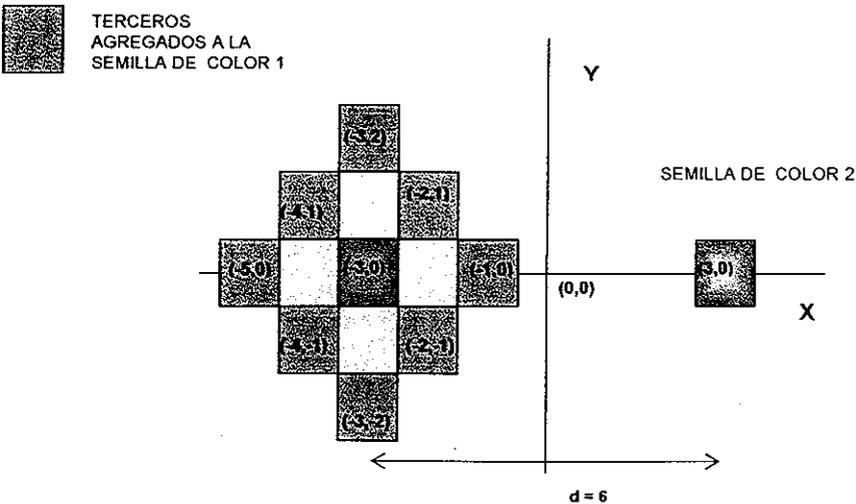


Figura 6.2.1.3.4 Terceros posibles agregados a la semilla de color 1.

Ahora analizamos las coordenadas en donde se puede adherir la tercer partícula en la estructura fractal de color 2 a una distancia entre semillas  $d = 6$  lo cual se observa en el diagrama siguiente.

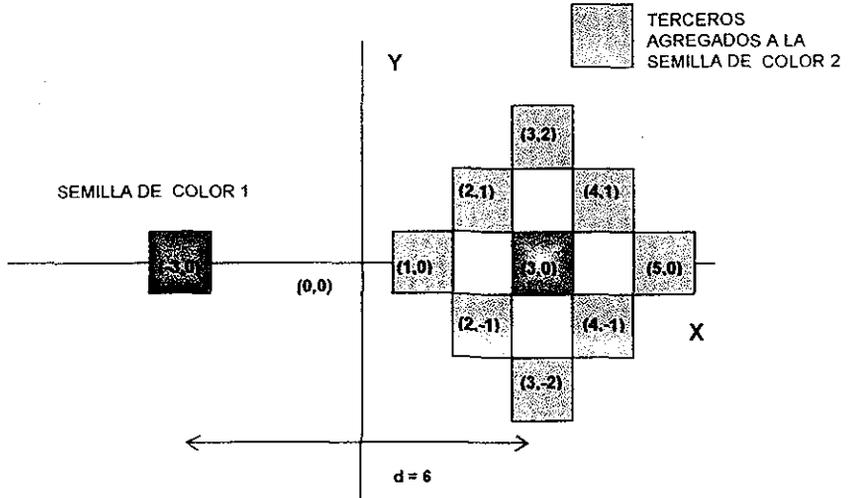


Figura 6.2.1.3.5 Terceros posibles agregados a la semilla de color 2.

Obteniendo las 24 coordenadas en donde es posible agregar una partícula al sistema DLA Bicolor con una distancia entre semillas  $d = 6$  para un máximo de 3 agregados.

COORDENADAS DONDE ES POSIBLE SE AGREGUE UNA PARTÍCULA A CUALQUIERA DE LAS DOS SEMILLAS QUE SE ENCUENTRAN SEPARADAS POR UNA DISTANCIA  $d = 6$ .

COORDENADAS PARA SEMILLA DE COLOR 1	(-3, 1)
	(-4, 0)
	(-3,-1)
	(-2, 0)
	(-1, 0)
	(-2, 1)
	(-2,-1)
	(-3, 2)
	(-3,-2)
	(-4, 1)
	(-4,-1)
	(-5, 0)
COORDENADAS PARA SEMILLA DE COLOR 2	(3, 1)
	(4, 0)
	(3,-1)
	(2, 0)
	(1, 0)
	(2, 1)
	(2,-1)
	(3, 2)
	(3,-2)
	(4, 1)
	(4,-1)
	(5, 0)

Tabla 6. 2. 1. 3 Coordenadas resultantes para el modelo BDLA a una distancia  $d = 6$ .

Observando las figuras 6.2.1.3.5 y 6.2.1.3.6 nos damos cuenta que en este sistema no existen coordenadas compartidas pero hay un par de coordenadas que se encuentran en una condición geométrica dentro del enrejado muy similar a la de las coordenadas compartidas motivo por el cual les vamos a dar el nombre de coordenadas cuasi compartidas.

**DEFINICIÓN.** Una coordenada cuasi-compartida; es aquella posición dentro del enrejado más próxima a una coordenada compartida.

6. 2. 1. 3. 1 COORDENADAS CUASI COMPARTIDAS PARA EL MODELO BDLA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS:  $d=6$

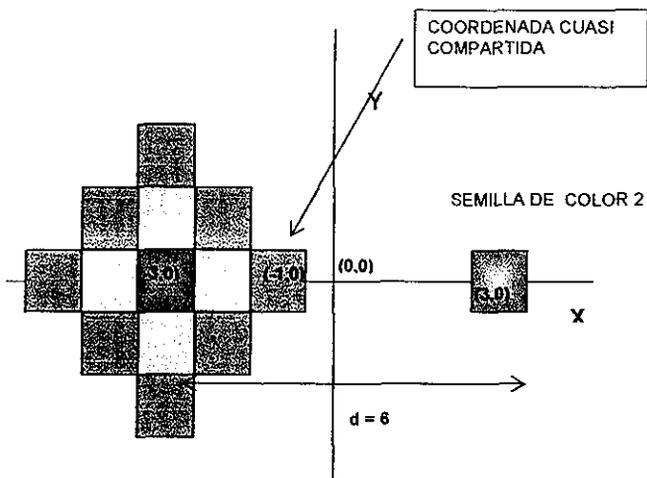


Figura 6. 2. 1. 3. 6 Coordenada cuasi compartida para el modelo BDLA con  $d=6$ , en el fractal de color I.

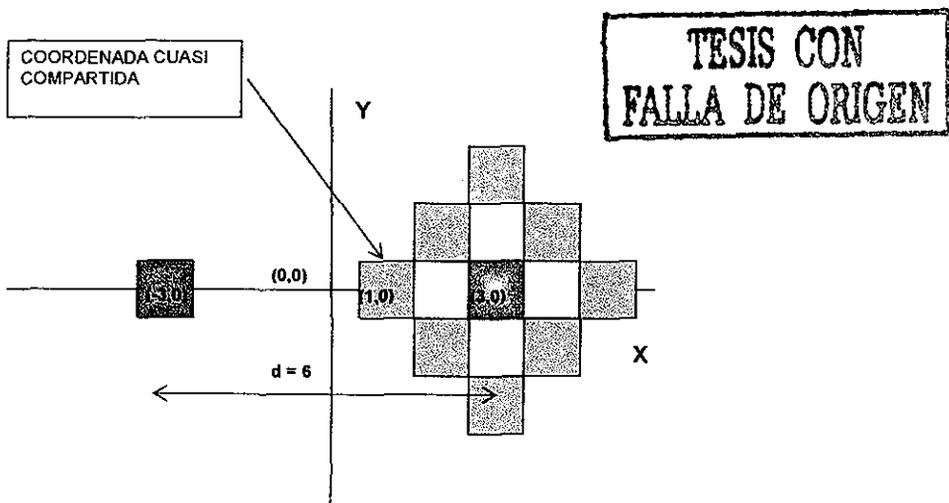


Figura 6. 2. 1. 3. 7 Coordenada cuasi compartida para el modelo BDLA con  $d=6$ , en el fractal de color 2.

### 6. 2. 2 SEGUNDA ETAPA EN EL PROCESO DE OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS.

Como segunda etapa de análisis se procedió a enumerar los datos obtenidos del programa principal ( *DLA BICOLOR*), mediante otro programa de nombre " *Enumeración y Análisis para DLA Bicolor* " .

Obteniendo de este programa los siguientes juegos de resultados para las 51 ejecuciones del programa principal ( *DLA BICOLOR*), recordando que cada ejecución consta de 5000 experimentos.

- a) Número de partículas agregadas en el fractal de color 1.
- b) Número de partículas agregadas en el fractal de color 2.
- c) Número de segundas partículas agregadas al fractal de color 1.
- d) Número de segundas partículas agregadas al fractal de color 2.
- e) Número de partículas agregadas por cada coordenada.
- f) Porcentaje correspondiente del total de partículas generadas para cada coordenada.

En la siguiente sección se tomaron de manera aleatoria algunos ejemplos que muestran los resultados obtenidos, mediante el proceso de enumeración de datos, generados por el programa " *Contabilización y Análisis para DLA Bicolor* " .

6. 2. 2. 1 RESULTADOS OBTENIDOS MEDIANTE EL PROGRAMA "CONTABILIZACIÓN Y ANÁLISIS PARA DLA BICOLOR "

A. MUESTRA DEL RESULTADO OBTENIDO MEDIANTE LA EJECUCIÓN DEL PROGRAMA "CONTABILIZACIÓN Y ANÁLISIS PARA DLA BICOLOR " , PARA LOS SIGUIENTES PARÁMETROS:

DISTANCIA ENTRE SEMILLAS:  $d = 2$ .

PROBABILIDAD DE QUE LA PARTÍCULA CAMINANTE SEA DE COLOR 1:

$p = 0.5$ .

NUMERO MÁXIMO DE PARTÍCULAS AGREGADAS: 3.

NUMERO DE EXPERIMENTOS: 5000.

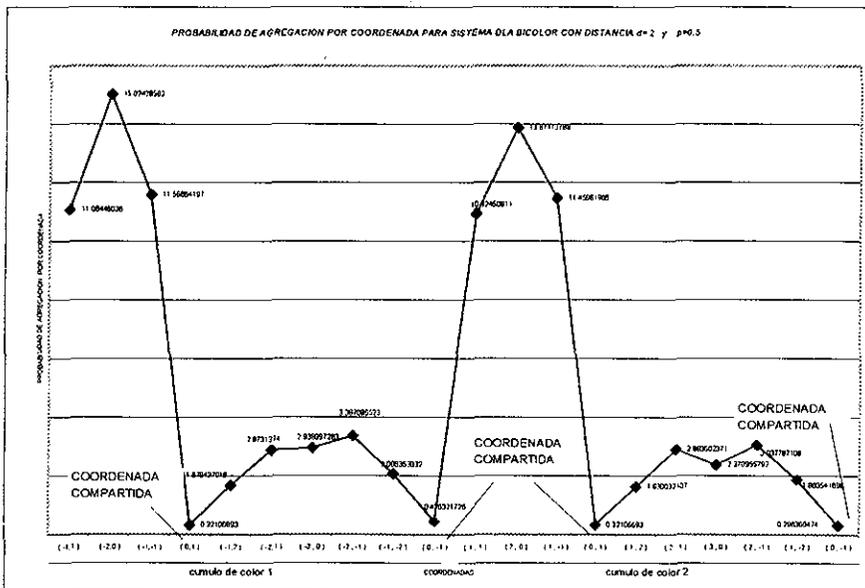
Datos		Posición	Agregados	%	
Probabilidad	0.5	(-1,1)	1344	11.06446036	FRAGMENTO DE COLOR 1
Num. de Experimentos	5000	(-2,0)	1825	15.02428583	
Dist. Entre Semillas	2	(-1,-1)	1405	11.56664197	
Partículas en fractal 1	6236	(0,1)	39	0.32106693	
Partículas en fractal 2	5911	(-1,2)	204	1.679427019	
2AS PART.AGR.FC-1	4574	(-2,1)	349	2.8731374	
2AS PART.AGR.FC-2	4404	(-3,0)	357	2.938997283	
		(-2,-1)	409	3.367086523	
		(-1,-2)	251	2.066353832	
		(0,-1)	53	0.436321726	
		(1,1)	1327	10.92450811	FRAGMENTO DE COLOR 2
		(2,0)	1685	13.87173788	
		(1,-1)	1392	11.45961966	
		(0,1)	39	0.32106693	
		(1,2)	198	1.630032107	
		(2,1)	351	2.889602371	
		(3,0)	288	2.370955792	
		(2,-1)	369	3.037787108	
		(1,-2)	226	1.860541698	
		(0,-1)	36	0.295899474	
TOTAL DE AGREGADOS			12147	100	

Tabla 6. 2. 2. 1. 1

La tabla 6.2.2.1.1 nos muestra los valores de las variables que corresponden al experimento analizado como son: probabilidad de que la partícula generada sea de color\_1, distancia entre las semillas y el número de experimentos a realizar, también nos muestra todas las coordenadas o posiciones en donde se agregan partículas donde se encuentran sombreadas las coordenadas compartidas; calculándose el número de partículas y porcentaje correspondiente del total de las generadas por los 5000 experimentos.

Se muestra como complemento el gráfico 6.2.2.1.1, obtenido a partir de la tabla anteriormente expuesta; en el cual podemos observar el comportamiento de la probabilidad de agregación por coordenada, donde se puede apreciar que las coordenadas marcadas como coordenadas compartidas tiene la menor probabilidad de agregación y existe una simetría casi perfecta en la geometría de cada cúmulo.

Esta simetría casi perfecta puede adjudicarse al valor asignado a  $p$  que es de 0.5. Como veremos más adelante esta simetría se ve seriamente comprometida para valores diferentes de  $p$ .



B. MUESTRA DEL RESULTADO OBTENIDO MEDIANTE LA EJECUCIÓN DEL PROGRAMA "CONTABILIZACIÓN Y ANÁLISIS PARA DLA BICOLOR", PARA LOS SIGUIENTES PARÁMETROS:

DISTANCIA ENTRE SEMILLAS:  $d = 4$ .  
 PROBABILIDAD DE QUE LA PARTÍCULA CAMINANTE SEA DE COLOR 1:  
 $p = 0.1$ .  
 NUMERO MÁXIMO DE PARTÍCULAS AGREGADAS: 3.  
 NUMERO DE EXPERIMENTOS: 5000.

Datos		Posición	Agregados	%	
Probabilidad	0.1	(-2,1)	266	2.449580993	FRACTAL DE COLOR 1
Num. de Experimentos	5000	(-3,0)	342	3.149461276	
Dist. Entre Semillas	4	(-2,-1)	244	2.246984069	
Partículas en Fractal 1	1054	(-1,0)	121	1.114283083	
Partículas en Fractal 2	9805	(-2,2)	9	0.08288056	
2AS PART.AGR.FC-1	973	(-4,0)	13	0.119716364	
2AS PART.AGR.FC-2	7170	(-2,-2)	9	0.08288056	
		(0,0)	1	0.009208951	
		(-1,1)	5	0.046044756	FRACTAL DE COLOR 2
		(-3,1)	23	0.211805875	
		(-3,-1)	15	0.138134267	
		(-1,-1)	6	0.055253707	
		(2,1)	1869	17.21152961	
		(3,0)	2343	21.57657243	
		(2,-1)	1984	18.27055898	
		(1,0)	974	8.969518372	
		(2,2)	296	2.725849526	
		(4,0)	471	4.337415968	
		(2,-2)	347	3.195506032	
		(0,0)	46	0.423611751	
		(1,1)	158	1.455014274	
		(3,1)	534	4.917579888	
		(3,-1)	580	5.341191638	
		(1,-1)	203	1.869417073	
TOTAL DE AGREGADOS			10859	100	

COORDENADAS  
COMPARTIDAS

Tabla 6. 2. 2. 1. 2

Al igual que el experimento anterior la tabla 6.2.2.1.2 nos muestra los valores asignados a las variables que corresponden al experimento analizado como son: probabilidad de que la partícula generada sea de color\_1, distancia entre las semillas y el número de experimentos a realizar, también nos muestra todas las coordenadas o posiciones en donde se agregan partículas donde se encuentra sombreada la única coordenada compartida, para cuando estamos trabajando a una distancia  $d = 4$ ; calculándose también el número de partículas y porcentaje correspondiente del total de las generadas por los 5000 experimentos.

Mostrándose como complemento el gráfico 6.2.2.1.2, obtenido a partir de la tabla anteriormente expuesta en donde podemos observar el comportamiento de la probabilidad de agregación por coordenada, donde también se puede apreciar que en el único par de coordenadas compartidas, se tiene la menor probabilidad de agregación, observándose también que en las coordenadas que corresponden a la estructura fractal de color1 se tienen muy pocos agregados.

Nuevamente el valor de  $p$  elegido explica plenamente la figura. Cabe subrayar que la posición de mayor probabilidad de agregación en el cúmulo 2 es la opuesta en línea directa a la semilla de color 1.

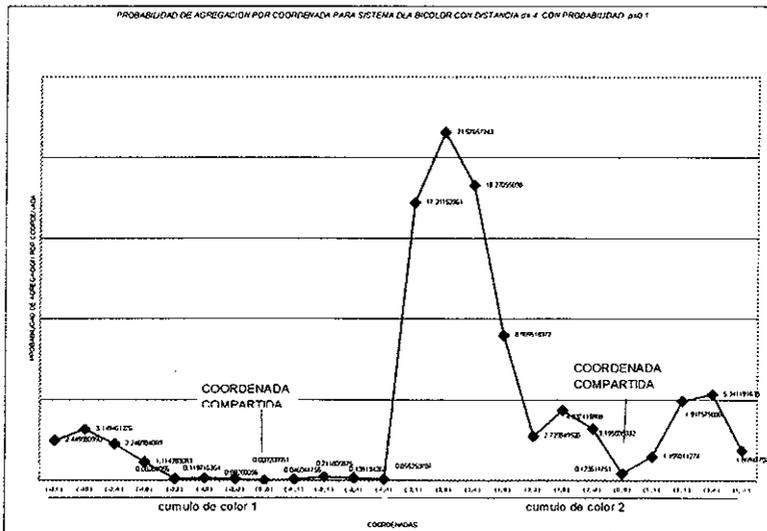


Gráfico 6.2.2.1.2 Probabilidad de agregación por coordenada para el modelo BDLA, multiplicada por 100, con  $d=4$  y  $p = 0.1$ .

C. MUESTRA DEL RESULTADO OBTENIDO MEDIANTE LA EJECUCIÓN DEL PROGRAMA "CONTABILIZACIÓN Y ANÁLISIS PARA DLA BICOLOR" , PARA LOS SIGUIENTES PARÁMETROS:

DISTANCIA ENTRE SEMILLAS:  $d = 6$ .

PROBABILIDAD DE QUE LA PARTÍCULA CAMINANTE SEA DE COLOR 1:

$p = 0.2$ .

NUMERO MÁXIMO DE PARTÍCULAS AGREGADAS: 3.

NUMERO DE EXPERIMENTOS: 5000.

Datos		Posición	Agregados	%	
Probabilidad	0.2	( - 3 , 1 )	475	4.118973292	FRACTAL DE COLOR 1
Num. de Experimentos	5000	( - 4 , 0 )	628	5.445716268	
Dist. Entre Semillas	6	( - 3 , - 1 )	551	4.778009018	
Partículas en fractal 1	2247	( - 2 , 0 )	322	2.792230316	
Partículas en fractal 2	9285	( - 1 , 0 )	9	0.078643704	
2AS PART.AGR.FC-1	1976	( - 2 , 1 )	30	0.260145682	
2AS PART.AGR.FC-2	6944	( - 2 , - 1 )	19	0.164758932	
		( - 3 , 2 )	20	0.173430454	
		( - 3 , - 2 )	41	0.355532431	
		( - 4 , 1 )	43	0.372875477	
		( - 4 , - 1 )	56	0.485605272	FRACTAL DE COLOR 2
		( - 5 , 0 )	53	0.459590704	
		( 3 , 1 )	1718	14.89767603	
		( 4 , 0 )	2132	18.48768644	
		( 3 , - 1 )	1863	16.15504683	
		( 2 , 0 )	1231	10.67464447	
		( 1 , 0 )	90	0.786437045	
		( 2 , 1 )	205	1.777662157	
		( 2 , - 1 )	230	1.994450225	
		( 3 , 2 )	260	2.254595907	
		( 3 , - 2 )	286	2.480055498	
		( 4 , 1 )	423	3.66805411	
		( 4 , - 1 )	470	4.075615678	
		( 5 , 0 )	377	3.269164065	
TOTAL DE AGREGADOS			11532	100	

COORDENADAS  
CUASI COMPARTIDAS

Tabla 4. 2. 2. 1. 3

Una vez mas, al igual que el experimento anterior la tabla 6.2.2.1.3 nos muestra los valores asignados a las variables que corresponden al experimento analizado como son: probabilidad de que la partícula generada sea de color\_1, distancia entre las semillas y el numero de experimentos a realizar, también nos muestra todas las coordenadas o posiciones en donde se agregan partículas donde se encuentra sombreada la llamada coordenada cuasi-compartida, la cual aparece cuando estamos trabajando a una distancia  $d = 6$ ; calculándose también el número de partículas y porcentaje correspondiente del total de las generadas por los 5000 experimentos.

Mostrándose como complemento el grafico 6.2.2.1.3, obtenido a partir de la tabla anteriormente expuesta; en donde podemos observar el comportamiento de la probabilidad de agregación por coordenada, donde también se puede apreciar que en la coordenada identificada como cuasi-compartida, corresponde a las que tienen la menor probabilidad de agregación, observándose que en las coordenadas de la estructura fractal de color 1 se tienen muy pocos agregados.

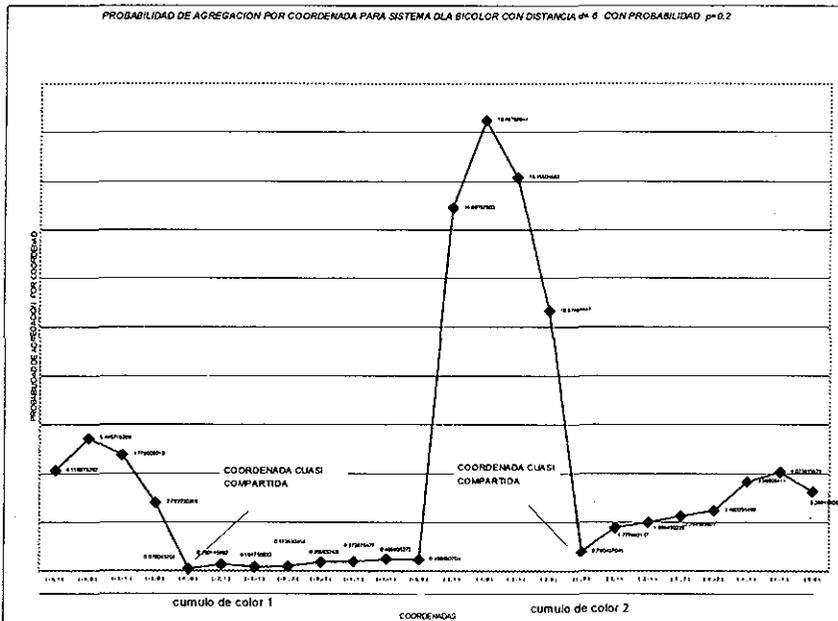


Gráfico 6.2.2.1.3 Probabilidad de agregación por coordenada para el modelo BDLA, multiplicada por 100, con  $d=6$  y  $p = 0.2$ .

Comparando los gráficos 6.2.2.1.2 y 6.2.2.1.3 podemos observar que para el valor de  $p$  y  $d$  en el primero se detecta un comportamiento más irregular en las coordenadas del cúmulo 2.

Resumiendo en los gráficos anteriormente mostrados se puede apreciar un comportamiento que depende directamente del valor asignado, a la variable que corresponde a la probabilidad de que la partícula caminante sea de algún color. En el caso del gráfico 6.2.2.1.1 en donde el valor de dicha variable es de 0.5 y se observa en el gráfico una simetría en la probabilidad de agregación para las coordenadas de las estructuras de color 1 y color 2 y en los otros dos gráficos en donde el valor de dicha variable es muy bajo (0.1 y 0.2) se observa el contraste entre la probabilidad de agregación por coordenada para las estructuras de ambos colores.

En base a las observaciones anteriores se crearon los siguientes gráficos en donde se puede constatar este hecho.

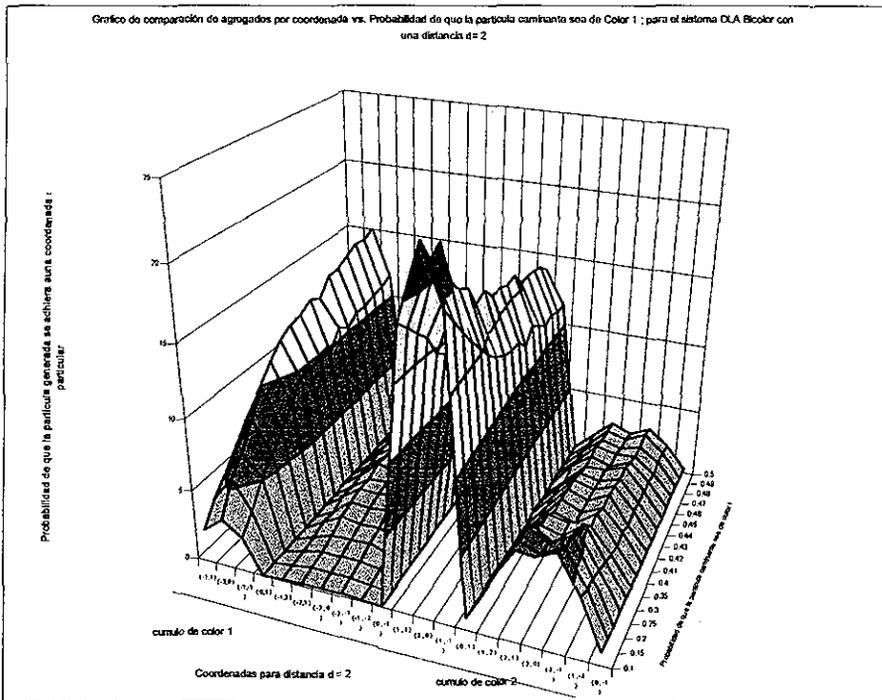


Grafico 6.2.2.1.4 Probabilidad de agregación para cada coordenada en el modelo BDLA, multiplicada por 100, con  $d=2$ .

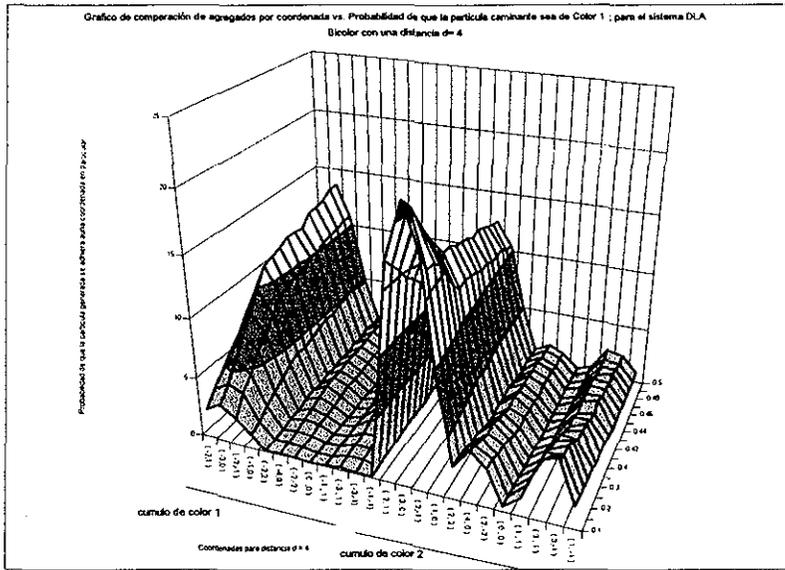


Grafico 6.2.2.1.5 Probabilidad de agregación para cada coordenada en el modelo BDLA, multiplicada por 100, con  $d=4$ .

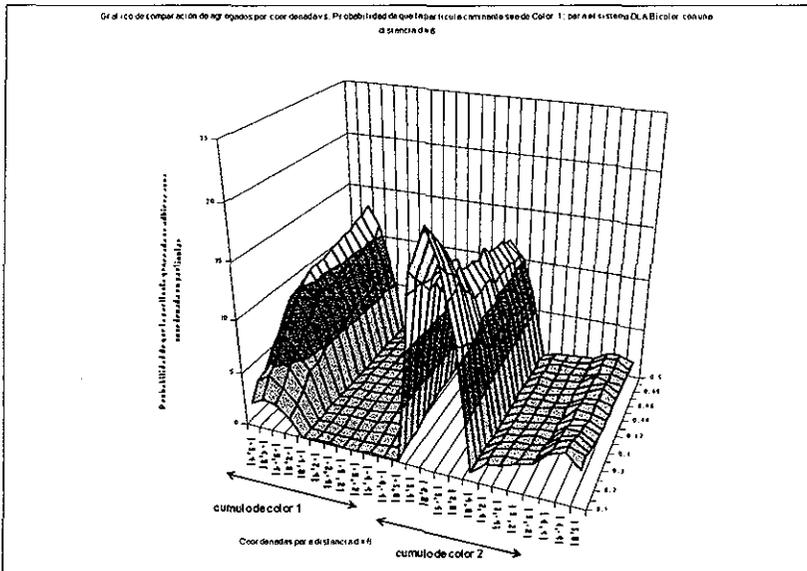


Grafico 6.2.2.1.6 Probabilidad de agregación para cada coordenada en el modelo BDLA, multiplicada por 100, con  $d=6$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Comparando los gráficos 6.2.2.1.4, 5 y 6 se puede observar que en las coordenadas correspondientes al fractal de color 1 en las tres distancias las graficas se van volviendo mas planas y anchas aun cuando estas comienzan casi planas, más sin embargo para las coordenadas que corresponden al fractal de color 2 se tiene un comportamiento similar pero estas no comienzan de una forma plana, esto debido a que se tienen una mayor probabilidad de agregación por coordenada para las correspondientes al fractal de color 2 las cuales se van equilibrando con los agregados que se adhieren a las coordenadas del fractal de color 1.

6. 2. 3 TERCER ETAPA EN EL PROCESO DE OBTENCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS.

Como tercera etapa se recopiló el porcentaje correspondiente de partículas agregadas a cada coordenada del total de partículas generadas; esto define la *probabilidad de que la partícula generada se adhiera en una coordenada en particular como función de la distancia entre semillas  $d$  y la probabilidad  $p$  de generar partículas de determinado color. A lo que vamos a definir como "probabilidad direccional".*

Teniendo un total de: 20 coordenadas para distancia 2  
 24 coordenadas para distancia 4  
 24 coordenadas para distancia 6

COORDENADAS PARA DISTANCIA $d = 2$	COORDENADAS PARA DISTANCIA $d = 4$	COORDENADAS PARA DISTANCIA $d = 6$
(-1, 1)	(-2, 1)	(-3, 1)
(-2, 0)	(-3, 0)	(-4, 0)
(-1, -1)	(-2, -1)	(-3, -1)
(0, 1)	(-1, 0)	(-2, 0)
(-1, 2)	(-2, 2)	(-1, 0)
(-2, 1)	(-4, 0)	(-2, 1)
(-3, 0)	(-2, -2)	(-2, -1)
(-2, -1)	(0, 0)	(-3, 2)
(-1, -2)	(-1, 1)	(-3, -2)
(0, -1)	(-3, 1)	(-4, 1)
(1, 1)	(-3, -1)	(-4, -1)
(2, 0)	(-1, -1)	(-5, 0)
(1, -1)	(2, 1)	(3, 1)
(0, 1)	(3, 0)	(4, 0)
(1, 2)	(2, -1)	(3, -1)
(2, 1)	(1, 0)	(2, 0)
(3, 0)	(2, 2)	(1, 0)
(2, -1)	(4, 0)	(2, 1)
(1, -2)	(2, -2)	(2, -1)
(0, -1)	(0, 0)	(3, 2)
	(1, 1)	(3, -2)
	(3, 1)	(4, 1)
	(3, -1)	(4, -1)
	(1, -1)	(5, 0)

Tabla 6. 2. 3. 1

Para cada coordenada se recopilaron las 17 opciones de probabilidad de que la partícula sea de color 1.

Prob. color1
0.1000
0.1500
0.2000
0.2500
0.3000
0.3500
0.4000
0.4100
0.4200
0.4300
0.4400
0.4500
0.4600
0.4700
0.4800
0.4900
0.5000

Tabla 6.2.3.2

Dando un total de 68 tablas de análisis similares a la tabla 6.2.3.3 que se muestra en el siguiente ejemplo el cual, fue elegido al azar del total de pruebas realizadas.

**EJEMPLO:** TABLA DE RECOPIACIÓN DE PROBABILIDADES DE QUE UNA PARTICULA SE ADHIERA A UNA COORDENADA EN PARTICULAR.

En este caso coordenada ( -1, 1 ) perteneciente al sistema *DLA Bicolor* a una distancia  $d = 2$ .

PROBABILIDAD QUE SEA DE COLOR 1	% DEL TOTAL DE AGREGADOS
0.1	2.3145
0.15	3.8161
0.2	4.8038
0.25	5.9892
0.3	7.2198
0.35	7.5584
0.4	8.8846
0.41	8.8881
0.42	9.4166
0.43	9.3115
0.44	10.2195
0.45	9.69847
0.46	10.48473
0.47	10.74346
0.48	10.49991
0.49	10.80924
0.5	11.06446

Tabla 6.2.3.3

Dentro de esta misma etapa se analizaron el comportamiento de dichos datos realizando el ajuste de los mismos empleando el método de mínimos cuadrados, encontrándonos con un comportamiento muy especial. Para la mayoría de las coordenadas que se estudian, se pudo realizar el ajuste a una recta, y solamente para las coordenadas que identificamos como compartidas y cuasi-compartidas, ésto fue imposible ya que éstas tienen un comportamiento muy distinto a las demás como se observa en el gráfico 6.2.3.2, perteneciente a una coordenada compartida.

## EJEMPLO:

ANÁLISIS DE DATOS PARA LA COORDENADA  $(-1, 1)$  CON DISTANCIA  $d = 2$  EMPLEANDO EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS.

PROB.FC-1	% DEL TOTAL DE AGR.		
		<i>Est.Lineal</i>	
0.1	2.3145	$m =$	21.13677769
0.15	3.8161	$b =$	0.5
0.2	4.8038	$r^2 =$	0.99021
0.25	5.9892		
0.3	7.2198		
0.35	7.5584		
0.4	8.8846		
0.41	8.8881		
0.42	9.4166		
0.43	9.3115		
0.44	10.2195		
0.45	9.69847		
0.46	10.48473		
0.47	10.74346		
0.48	10.49991		
0.49	10.80924		
0.5	11.06446		

Tabla 6. 2. 3. 4

Obteniendo de esta manera los siguientes parámetros:

$m$  = Pendiente de la recta

$b$  = Valor de la ordenada al origen

$r^2$  = Coeficiente de correlación

Realizándose dicho ajuste a una recta como lo demuestra el gráfico 6.2.3.1, mostrado a continuación:

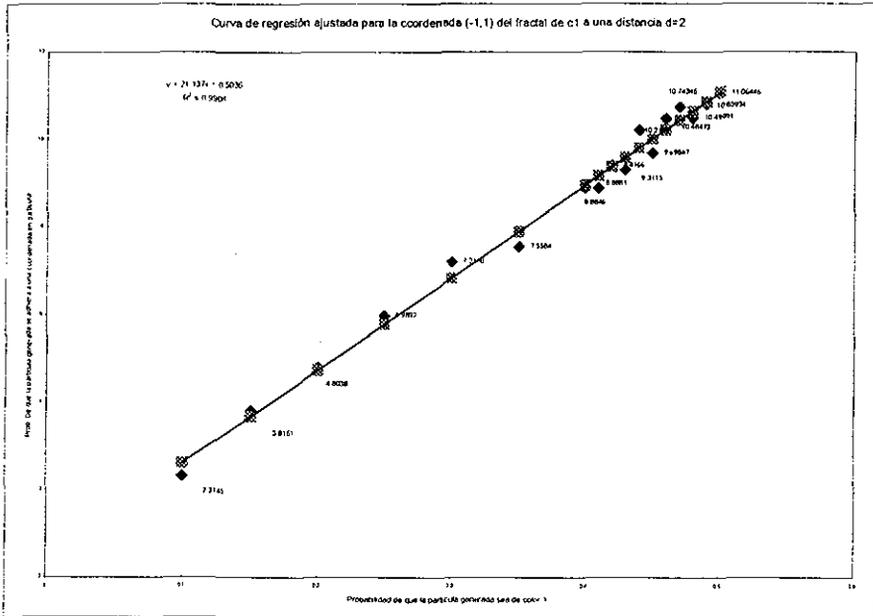


Gráfico 6.2.3.1 Ajuste realizado a los datos obtenidos para la coordenada (-1,1) con distancia  $d = 2$ .

El procedimiento antes mencionado, fue aplicado para cada una de las 68 coordenadas, 20 para distancia 2, 24 para distancia 4 y 24 para distancia 6; obteniendo además los parámetros antes mencionados ( $m =$  Pendiente de la recta,  $b =$  Valor de la ordenada al origen y  $r^2 =$  Coeficiente de correlación), recopilándose el valor obtenido en todos estos parámetros, para que de esta manera se pueda efectuar un análisis de cómo se comportan las estructuras fractales, en sus etapas iniciales de crecimiento y que factores determinar su forma final.

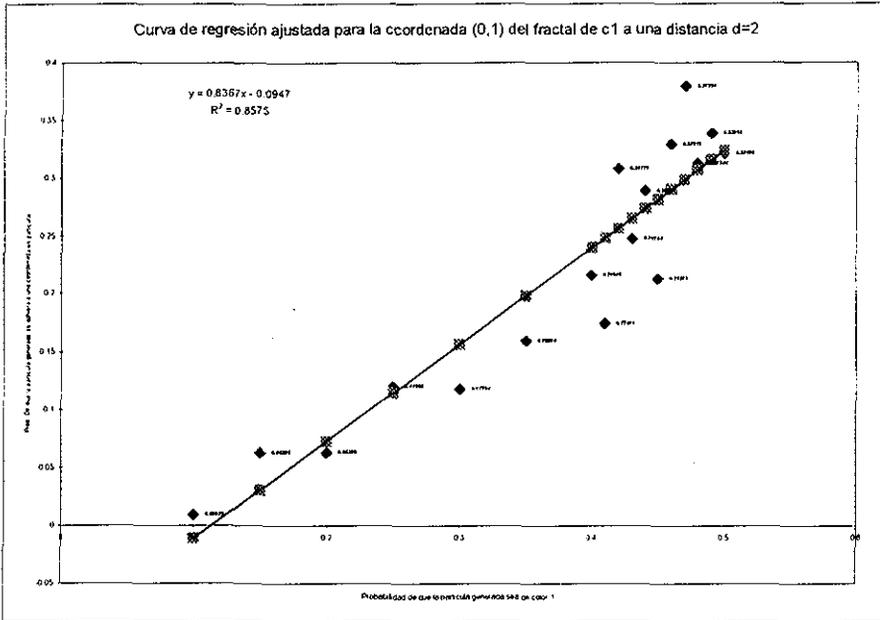


Gráfico 6.2.3.2 Gráfico que muestran el resultado del ajuste realizado a la coordenada compartida (0,1), que en este caso pertenece a la estructura fractal de color 1, que tiene una distancia de separación entre semillas  $d = 2$ .

PARÁMETROS  $m$ ,  $b$ ,  $r^2$ , OBTENIDOS A PARTIR DEL AJUSTE DE LAS COORDENADAS PERTENECIENTES A LAS ESTRUCTURAS QUE TIENEN UNA DISTANCIA DE SEPARACIÓN ENTRE SEMILLAS  $d = 2$ .

COORDENADAS A DISTANCIA D= 2	m	b	$r^2$
(-1, 1)	21.136	0.503	0.9908
(-2, 0)	28.211	1.01	0.9927
(-1,-1)	22.504	0.3579	0.9929
(0, 1)	0.8367	-0.094	0.8575
(-1, 2)	4.0383	-0.3705	0.976
(-2, 1)	7.1479	-0.6126	0.98
(-3, 0)	6.8274	-0.6127	0.9781
(-2,-1)	7.8769	-0.7719	0.9854
(-1,-2)	4.6723	-0.456	0.9619
(0,-1)	0.96	-0.099	0.8897
(1, 1)	-20.04	20.86	0.99
(2, 0)	-23.4	26.093	0.9743
(1,-1)	-21.38	21.875	0.99
(0, 1)	-1.2	0.916	0.8108
(1, 2)	-5.275	4.259	0.9487
(2, 1)	-8.906	7.365	0.9687
(3, 0)	-8.726	6.86	0.9717
(2,-1)	-9.74	7.9	0.973
(1,-2)	-5.739	4.71	0.9758
(0,-1)	-1.43	0.048	0.89

Tabla 6. 2. 3. 5

De la tabla 6.2.3.5, se generan los siguientes gráficos obtenidos a partir de los datos que en esta se muestran, en donde se sombrea, las coordenadas compartidas.

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $r^2$  (COEF. DE CORRELACION ) POR COORDENADA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS,  $d = 2$ .

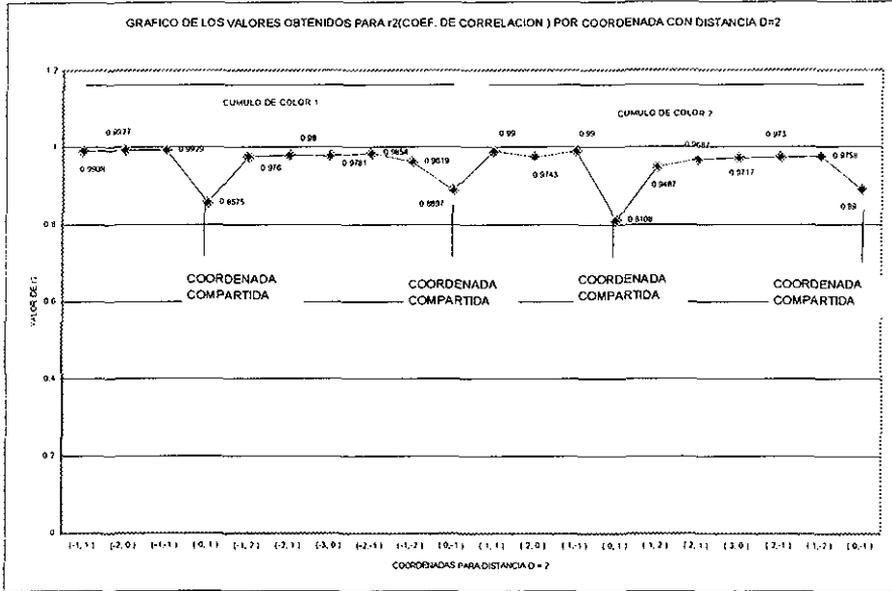


Gráfico 6.2.3.5.1 Coeficientes de correlación obtenidos para todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 2$ .

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $m$  (PENDIENTE) POR COORDENADA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS  $d = 2$ .

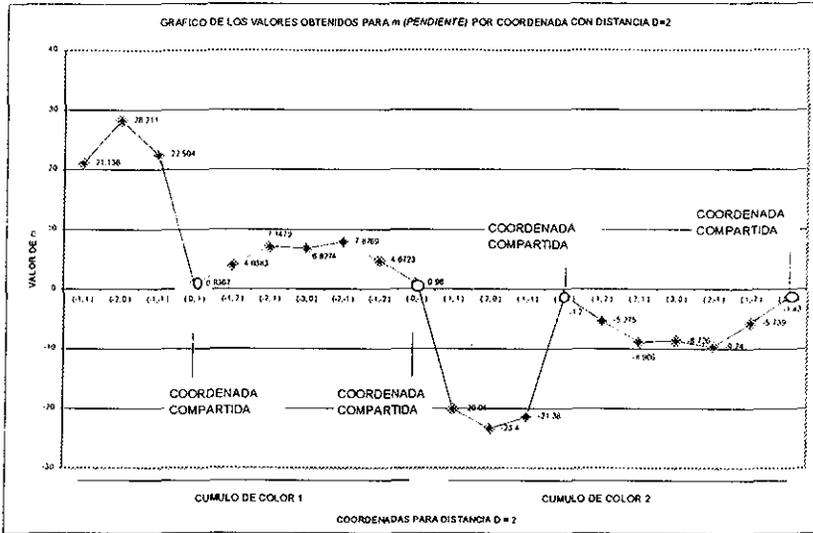


Gráfico 6.2.3.5.2 Valores obtenidos para el parámetro  $m$ (pendiente), en todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 2$ .

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $b$  (ORD. AL ORIG.) POR COORDENADA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS  $d = 2$ .

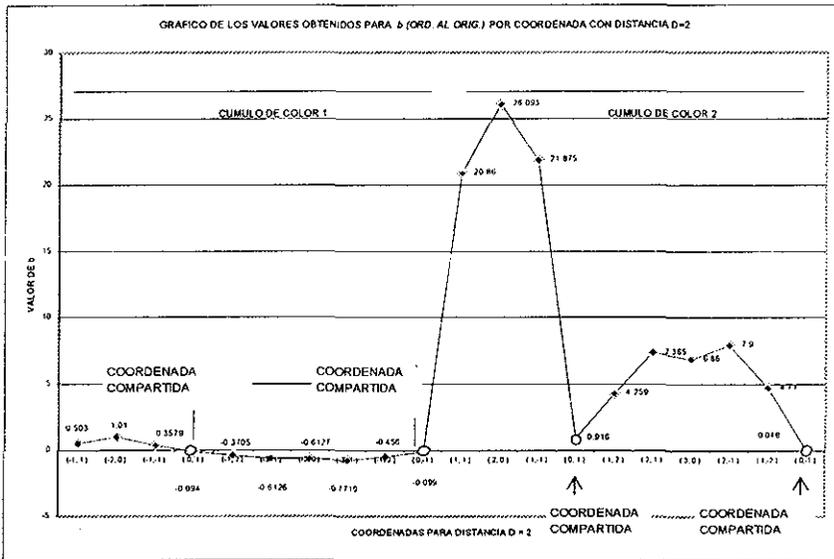


Gráfico 6.2.3.5.3 Valores obtenidos para el parámetro  $b$ , en todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 2$ .

Concluimos que para una distancia entre semillas  $d = 2$ , la probabilidad direccional es una función lineal de la probabilidad de generar una partícula de algún color específico (por simetría) con excepción exclusiva de las correspondientes a las coordenadas compartidas.

Es interesante observar que el valor de  $m$ , que indica la proporcionalidad directa de la probabilidad direccional con la probabilidad de generar partículas de determinado color hubiese correspondido a cero para las coordenadas compartidas. Lo anterior nos induce a pensar en proponer una función más compleja o bien a renunciar a la hipótesis de que exista alguna función específica entre ambas probabilidades.

El grafico 6.2.3.5.2 se explica, exceptuando por lo anterior, de manera directa. Existe una simetría casi perfecta entre ambos cúmulos mediada por un signo, lo cual representa el efecto normal dado por la probabilidad  $p$  de generar partículas de color 1, complementado por la probabilidad  $1 - p$  de generar partículas de color 2.

PARÁMETROS  $m$ ,  $b$ ,  $r^2$ , OBTENIDOS A PARTIR DEL AJUSTE DE LAS COORDENADAS PERTENECIENTES A LAS ESTRUCTURAS QUE TIENEN UNA DISTANCIA DE SEPARACIÓN ENTRE SEMILLAS  $d = 4$ .

COORDENADAS A DISTANCIA D= 4	m	b	$r^2$
(-2, 1)	19.335	0.5847	0.998
(-3, 0)	26.68	0.43	0.9968
(-2,-1)	21.289	0.4288	0.9938
(-1, 0)	9.703	0.1998	0.9824
(-2, 2)	3.0581	-0.2761	0.9378
(-4, 0)	5.5132	-0.5778	0.9887
(-2,-2)	3.27924	-0.2761	0.9825
(0, 0)	0.38913	-0.04223	0.7495
(-1, 1)	1.7819	-0.2054	0.9151
(-3, 1)	5.5843	-0.4907	0.9573
(-3,-1)	6.2162	-0.617	0.9724
(-1,-1)	1.7037	-0.1237	0.9398
(2, 1)	-17.6361	18.97	0.9904
(3, 0)	-22.787	23.982	0.9971
(2,-1)	-18.86	19.998	0.987
(1, 0)	-10.274	9.927	0.9774
(2, 2)	-4.073	3.26	0.94
(4, 0)	-5.669	4.8832	0.97
(2,-2)	-4.5235	3.698	0.951
(0, 0)	-0.5834	0.4385	0.7464
(1, 1)	-2.5022	1.9153	0.8688
(3, 1)	-6.8472	5.59	0.9683
(3,-1)	-7.8277	6.1431	0.9729
(1,-1)	-2.7303	2.1443	0.9405

Tabla 6.2.3.6

De la tabla 6.2.3.6, se generan los siguientes gráficos obtenidos a partir de los datos que en esta se muestran, en donde se somborean las coordenadas compartidas.

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $r^2$ (COEF. DE CORRELACION ) POR COORDENADA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS,  $d = 4$ .

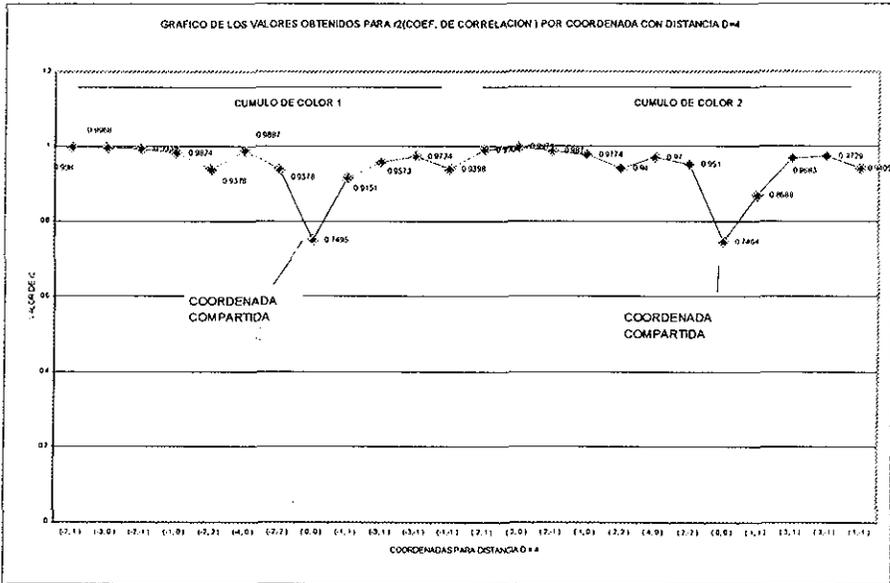


Gráfico 6.2.3.6.1 Coeficientes de correlación obtenidos para todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 4$ .

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $m$  (PENDIENTE) POR COORDENADA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS  $d = 4$ .

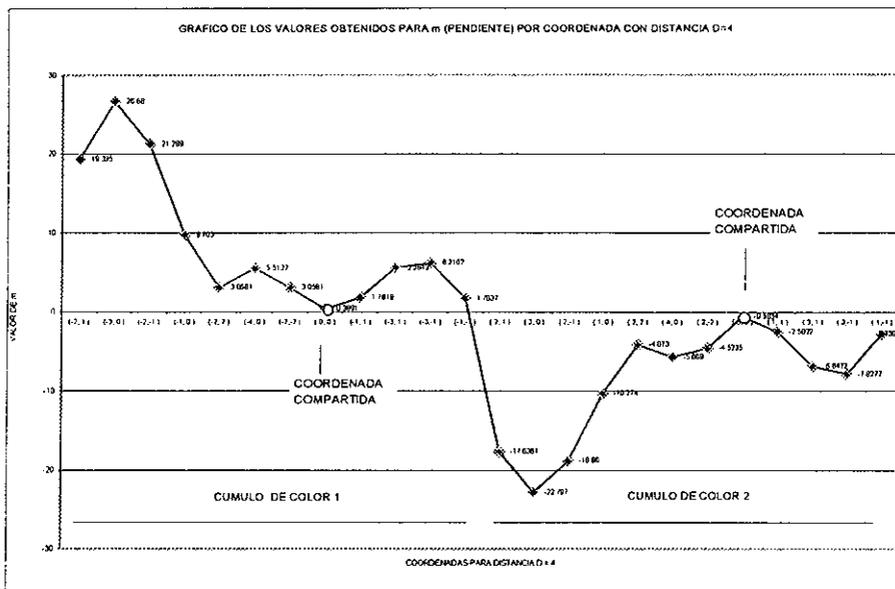


Gráfico 6.2.3.6.2 Valores obtenidos para el parámetro  $m$ (pendiente), en todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 4$ .

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $b$  (ORD. AL ORIG.) POR COORDENADA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS  $d = 4$ .

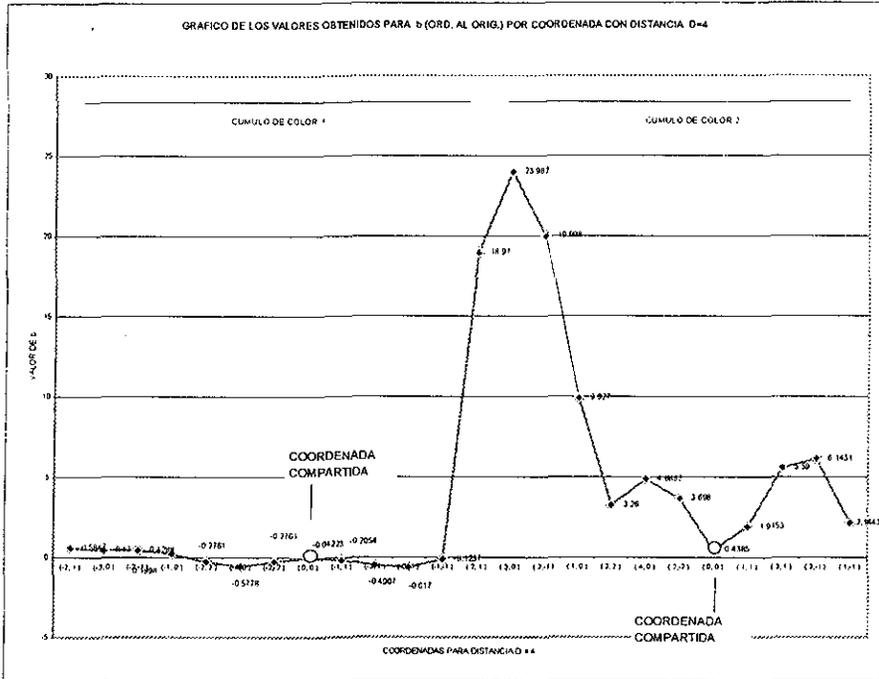


Gráfico 6.2.3.6.3 Valores obtenidos para el parámetro  $b$ , en todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 4$ .

Se observa que para una distancia entre semillas  $d = 4$  se dan exactamente las mismas condiciones que para una distancia entre semillas  $d = 2$ , es decir la probabilidad direccional es una función lineal de la probabilidad de generar una partícula de algún color específico (por simetría) con excepción exclusiva de las correspondientes a las coordenadas compartidas que en este caso son solo dos de ellas.

Es interesante observar que el valor de  $m$ , que indica la proporcionalidad directa de la probabilidad direccional con la probabilidad de generar partículas de determinado color hubiese correspondido a cero para las coordenadas compartidas.



Lo anterior nos induce a pensar en proponer de igual manera que para distancia  $d=2$ , una función mas compleja o bien a renunciar a la hipótesis de que exista alguna función específica entre ambas probabilidades.

El grafico 6.2.3.6.2 se explica, exceptuando por lo anterior, de manera directa. También existe una simetría casi perfecta entre ambos cúmulos mediada por un signo como fue el caso para distancia  $d=2$ , lo cual representa el efecto normal dado por la probabilidad  $p$  de generar partículas de color 1, complementado por la probabilidad  $1 - p$  de generar partículas de color 2.

PARÁMETROS  $m$ ,  $b$ ,  $r^2$ , OBTENIDOS A PARTIR DEL AJUSTE DE LAS COORDENADAS PERTENECIENTES A LAS ESTRUCTURAS QUE TIENEN UNA DISTANCIA DE SEPARACIÓN ENTRE SEMILLAS  $d = 6$ .

COORDENADAS A DISTANCIA D = 6	m	b	$r^2$
(-3, 1)	19.4113	0.4828	0.9883
(-4, 0)	24.368	0.6037	0.997
(-3,-1)	19.904	0.6452	0.9921
(-2, 0)	12.8442	0.346	0.989
(-1, 0)	0.9201	-0.087	0.899
(-2, 1)	2.048	-0.154	0.955
(-2,-1)	2.261	-0.1848	0.9623
(-3, 2)	3.0306	-0.3525	0.9646
(-3,-2)	1.7819	-0.20542	0.9151
(-4, 1)	5.1438	-0.5218	0.9709
(-4,-1)	5.3172	-0.4962	0.96
(-5, 0)	4.5384	-0.4199	0.9649
(3, 1)	-16.84	18.41	0.9833
(4, 0)	-21.751	22.846	0.99
(3,-1)	-18.6	19.6	0.9892
(2, 0)	-12.894	13.02	0.9823
(1, 0)	-1.2978	1.0345	0.8216
(2, 1)	-2.5747	2.1946	0.9586
(2,-1)	-3.3879	2.6116	0.953
(3, 2)	-3.8053	2.9668	0.947
(3,-2)	-4.034	3.2647	0.959
(4, 1)	-5.576	4.735	0.968
(4,-1)	-6.779	5.4185	0.9796
(5, 0)	-5.2567	4.2693	0.9477

Tabla 6. 2. 3. 7

De la tabla 6.2.3.7, se generan los siguientes gráficos obtenidos a partir de los datos que en esta se muestran, en donde se somborean las coordenadas cuasi-compartidas.

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $r^2$  (COEF. DE CORRELACION) POR COORDENADA CON UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS,  $d = 6$ .

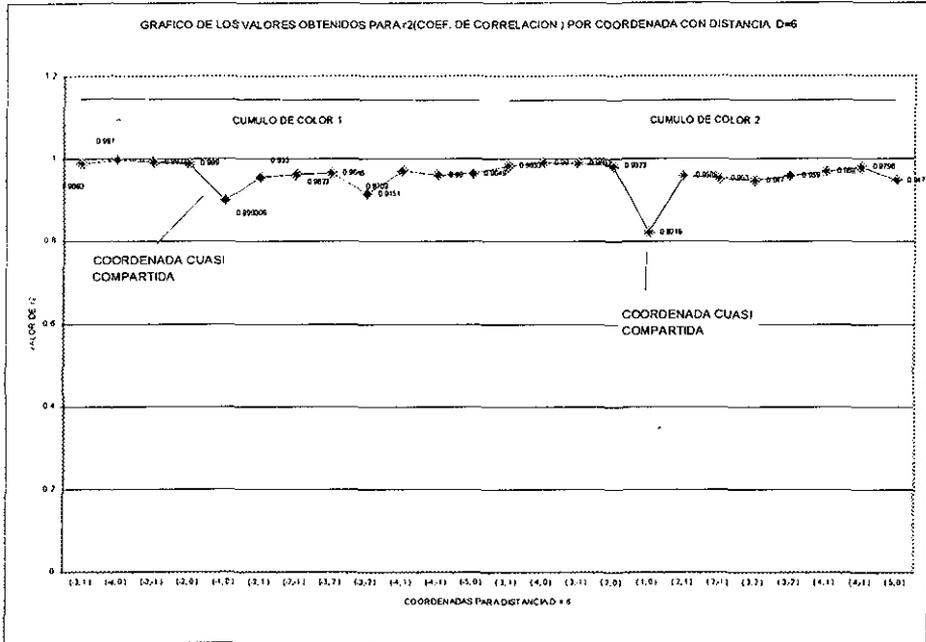


Grafico 6.2.3.7.1 Coeficientes de correlación obtenidos para todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 6$ .

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $m$  (PENDIENTE) POR COORDENADA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS  $d = 6$ .

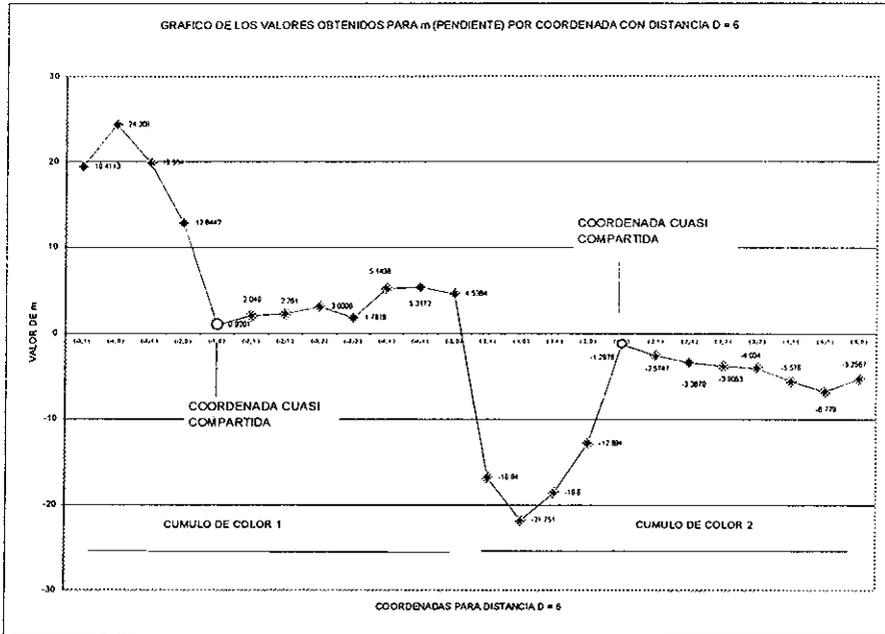


Grafico 6.2.3.7.2 Valores obtenidos para el parámetro  $m$ (pendiente), en todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 6$ .

GRAFICO DE LOS VALORES OBTENIDOS PARA  $b$  (ORD. AL ORIG.) POR COORDENADA A UNA DISTANCIA ENTRE SEMILLAS  $d = 6$ .

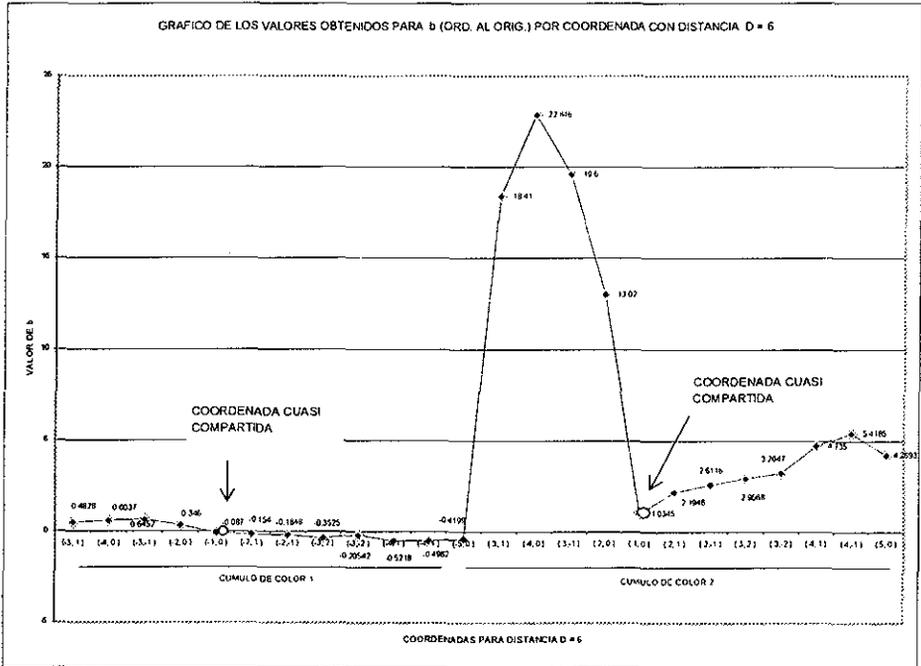


Gráfico 6.2.3.7.3 Valores obtenidos para el parámetro  $b$ , en todas las coordenadas del modelo BDLA con una distancia entre semillas  $d = 6$ .

De igual forma que en los dos casos anteriores ( $d=2$  y  $d=4$ ), para una distancia entre semillas  $d = 6$ , la probabilidad direccional es una función lineal de la probabilidad de generar una partícula de algún color específico (por simetría) con excepción exclusiva de las correspondientes a las coordenadas que en este caso no son compartidas sino cuasi compartidas.

Observando que el valor de  $m$ , que indica la proporcionalidad directa de la probabilidad direccional con la probabilidad de generar partículas de determinado color hubiese correspondido a cero para las coordenadas compartidas.

Lo anterior nos induce a pensar en proponer una función mas compleja o bien a renunciar a la hipótesis de que exista alguna función específica entre ambas probabilidades.

En el grafico 6.2.3.7.2 se explica, exceptuando por lo anterior, de manera directa. Existe una simetría casi perfecta entre ambos cúmulos mediada por un signo, lo cual representa el efecto normal dado por la probabilidad  $p$  de generar partículas de color 1, complementado por la probabilidad  $1 - p$  de generar partículas de color 2. Como sucedió en los dos casos anteriores.

6.2.4 PROBABILIDAD DIRECCIONAL.

Con la finalidad de analizar mas detalladamente el comportamiento de los datos obtenidos a continuación se presentan diversas graficas que representan la función que hemos definido como probabilidad direccional  $P(d, p)$ , la cual depende de dos variables una de ellas la distancia entre semillas  $d$  y la probabilidad de que las partículas generadas sean de color 1  $p$ .

Tomando como parámetro para realizar dichas graficas la posición por donde fue agregada la partícula caminante a cualquiera de las semillas a la distancia de separación entre ellas que hemos estado manejando. Si se analiza cuando la partícula caminante se agregó por la parte superior hay que determinar las coordenadas correspondientes para cuando se agrega por esta dirección a cada una de las distancias manejadas, es decir para la semilla de color 1 corresponden las siguientes coordenadas:  $(-1, 1)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(-3, 1)$ . Evaluando la probabilidad de agregación  $P(d, p)$  en cada una de estas coordenadas como función de la probabilidad de que la partícula generada sea de color 1 y de la distancia  $d$ , se obtiene el siguiente resultado.

Es necesario mencionar que la escala manejada para la función  $P(d, p)$  en los gráficos siguientes se interpreta multiplicando por un factor de  $1/100$ .

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 1 se dá por la parte superior.*

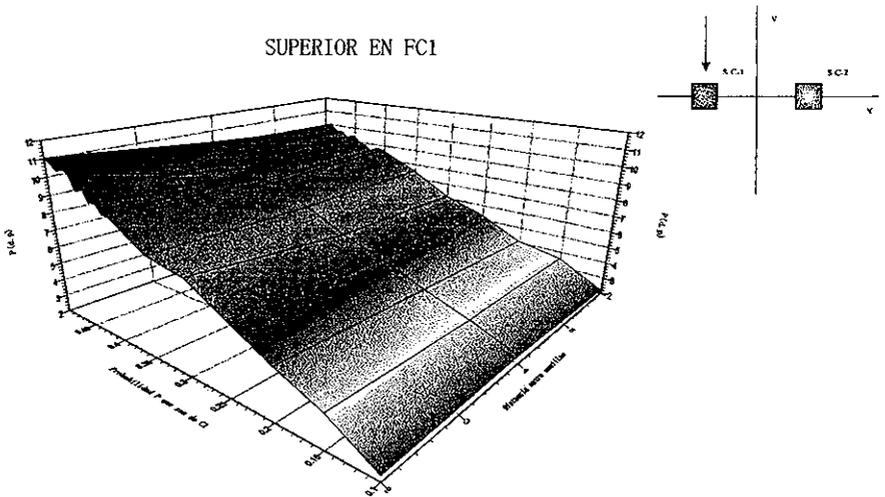


Gráfico 6.2.4.1 Primer agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la parte superior.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 1 se dá por la parte inferior.*

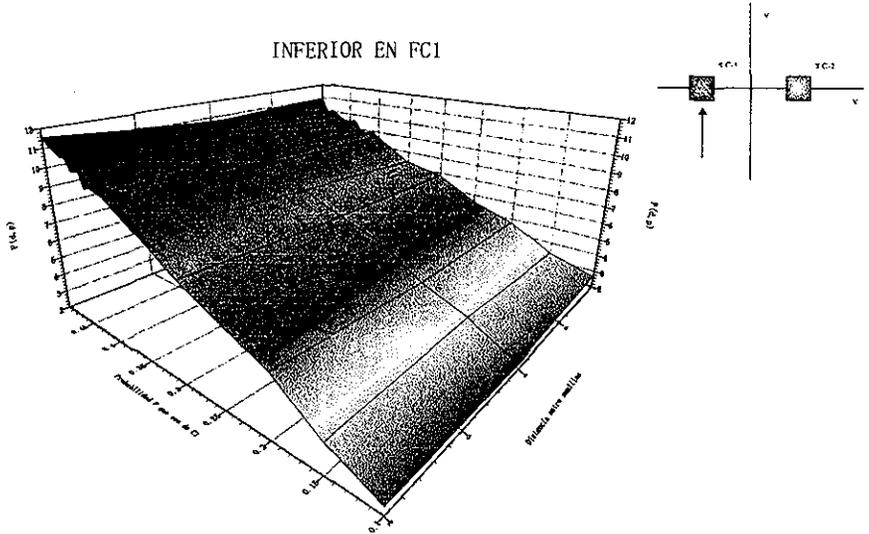


Gráfico 6.2.4.2 Primer agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por abajo.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 1 se dá por la derecha.*

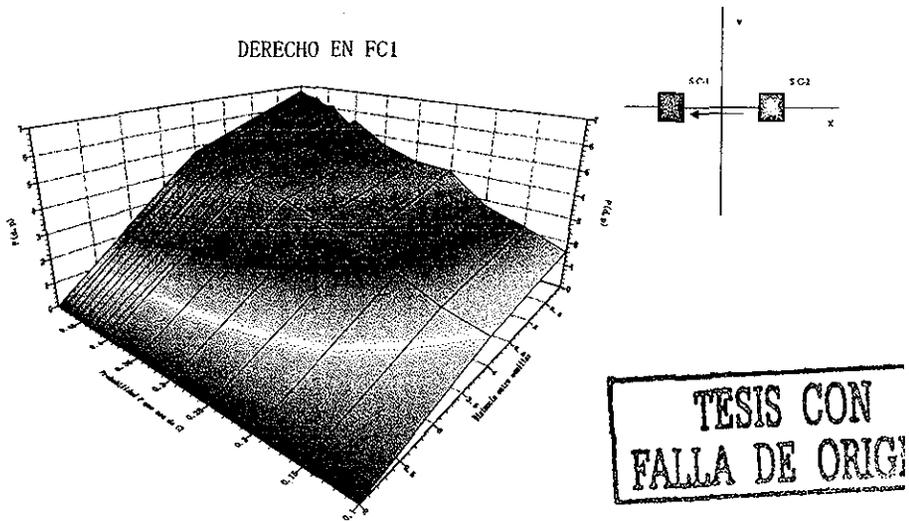


Gráfico 6.2.4.3 Primer agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la derecha.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 1 se dá por la izquierda.*

IZQUIERDO EN FC1

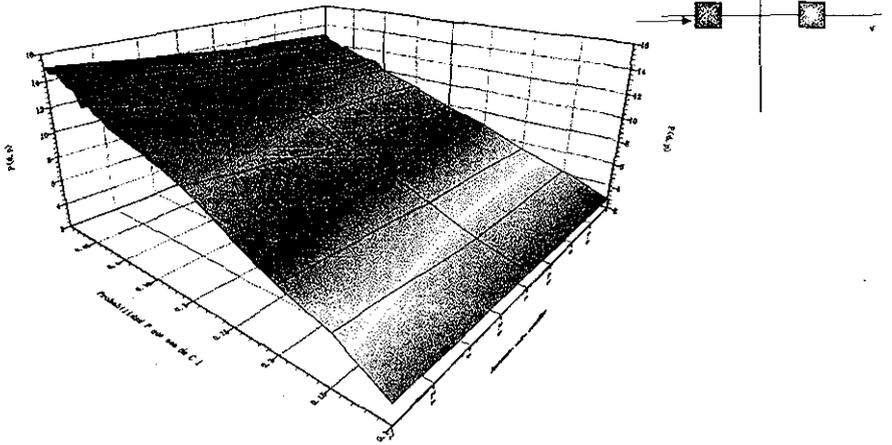


Gráfico 6.2.4.4 Primer agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la izquierda.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 2 se da por arriba.*

SUPERIOR EN FC2

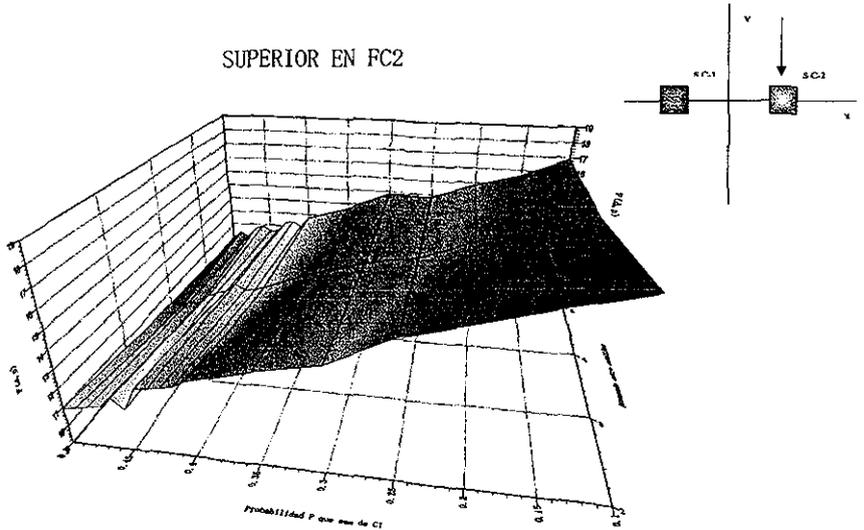


Gráfico 6.2.4.5 Primer agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por arriba.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 2 se da por abajo.*

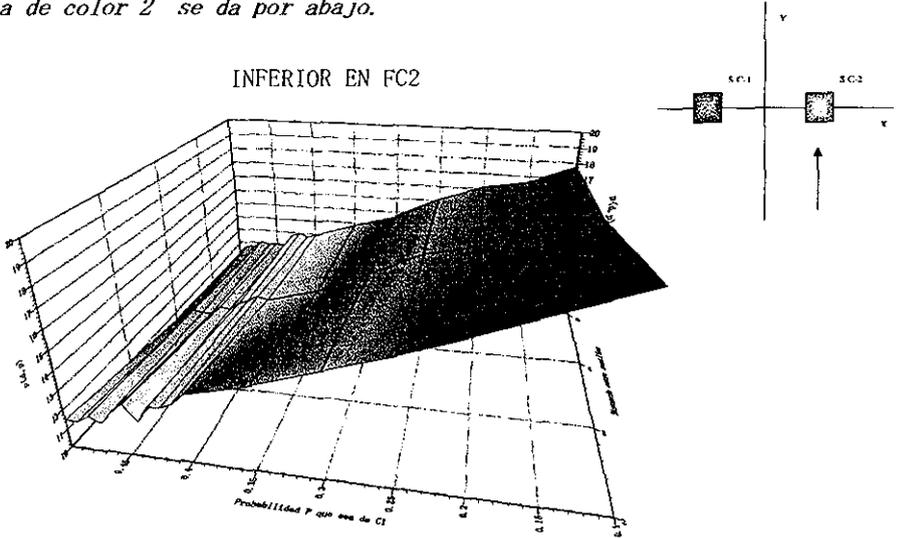


Gráfico 6.2.4.6 Primer agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por abajo.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 2 se dá por la derecha.*

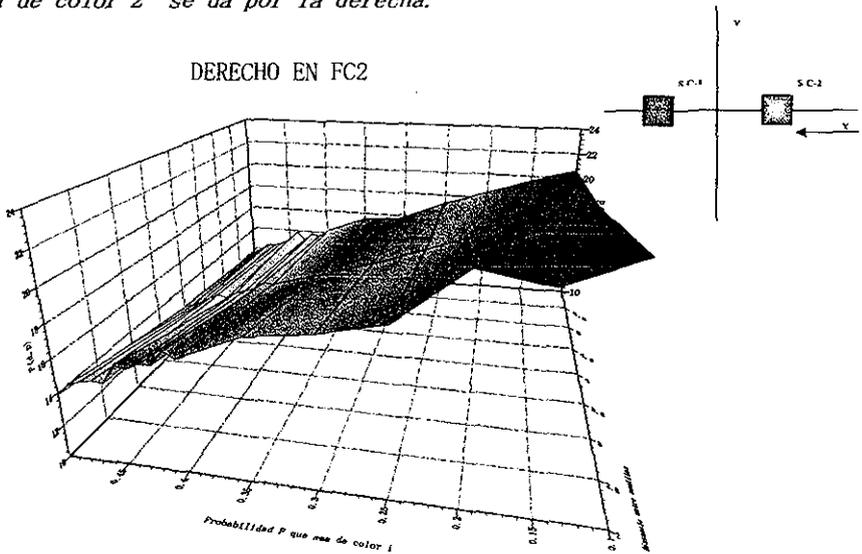


Gráfico 6.2.4.7 Primer agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la derecha.

Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el primer agregado a la semilla de color 2 se dá por la izquierda.

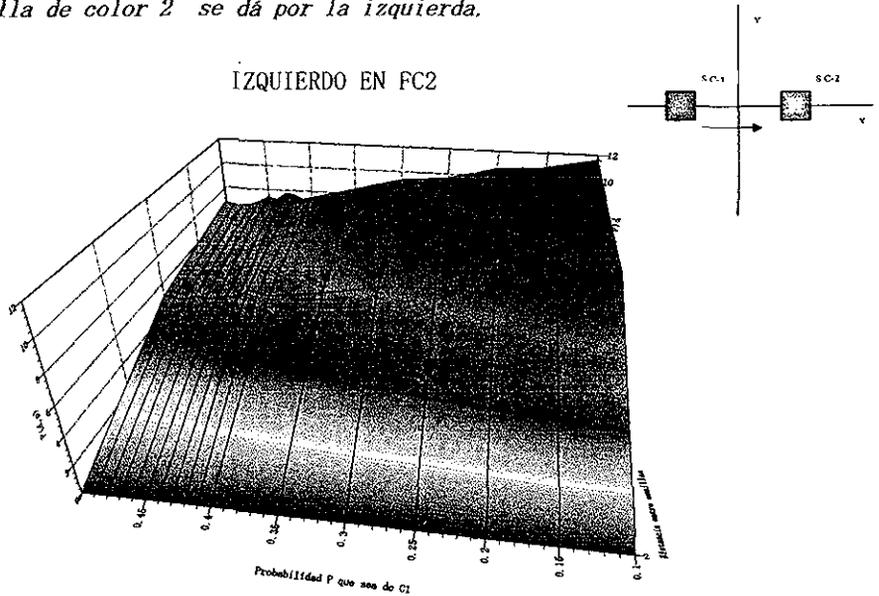


Gráfico 6.2.4.8 Primer agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la izquierda.

Los gráficos muestran únicamente los primeros agregados a las semillas pero hay que recordar que el experimento no termina hasta que se tengan 3 partículas agregadas en total por lo que nos falta analizar a los segundos posibles agregados.

Comparando los gráficos anteriores con los obtenidos en los experimentos para cuando se tienen solo 2 partículas agregadas como máximo se observa que tienen un comportamiento similar con las obtenidas para cuando se tienen 3 partículas agregadas solo que en menor magnitud debido a el numero total de coordenadas que se manejan para ambos casos ya que para 3 partículas agregadas es significativamente mayor el numero de estas.

REPRESENTACIONES GRAFICAS DE LA FUNCIÓN  $P(d,p)$ , PARA LOS SEGUNDOS AGREGADOS EN SUS DISTINTAS DIRECCIONES DE AGREGACIÓN.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por arriba al primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR ARRIBA DE PRIMEROS AGREGADOS IZQUIERDOS EN FC1

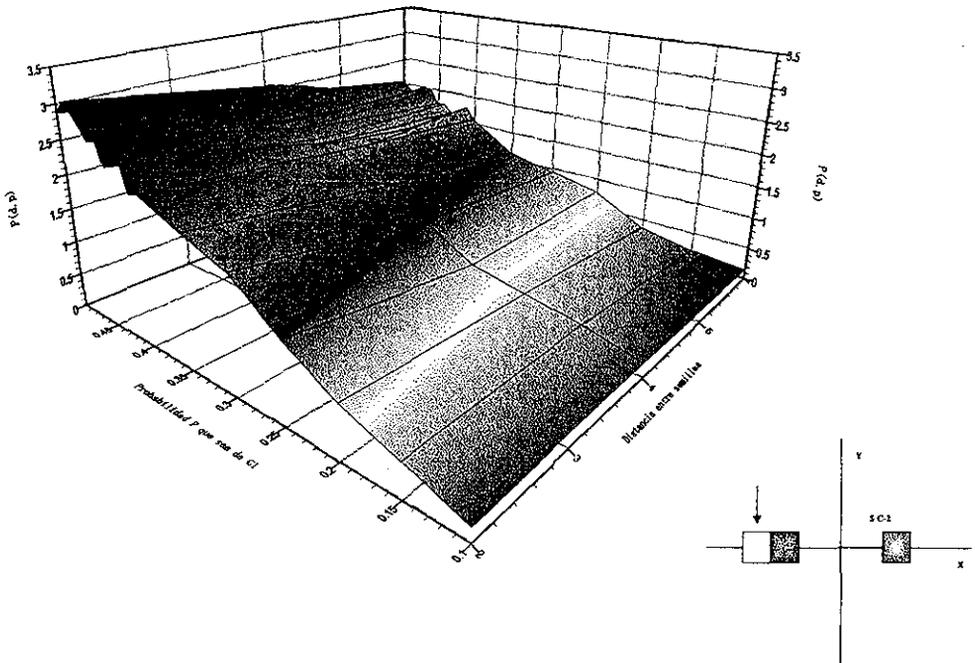


Gráfico 6.2.4.9 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por arriba del primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se dá por la izquierda al primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA IZQUIERDA DE PRIMEROS AGREGADOS IZQUIERDOS EN FC1

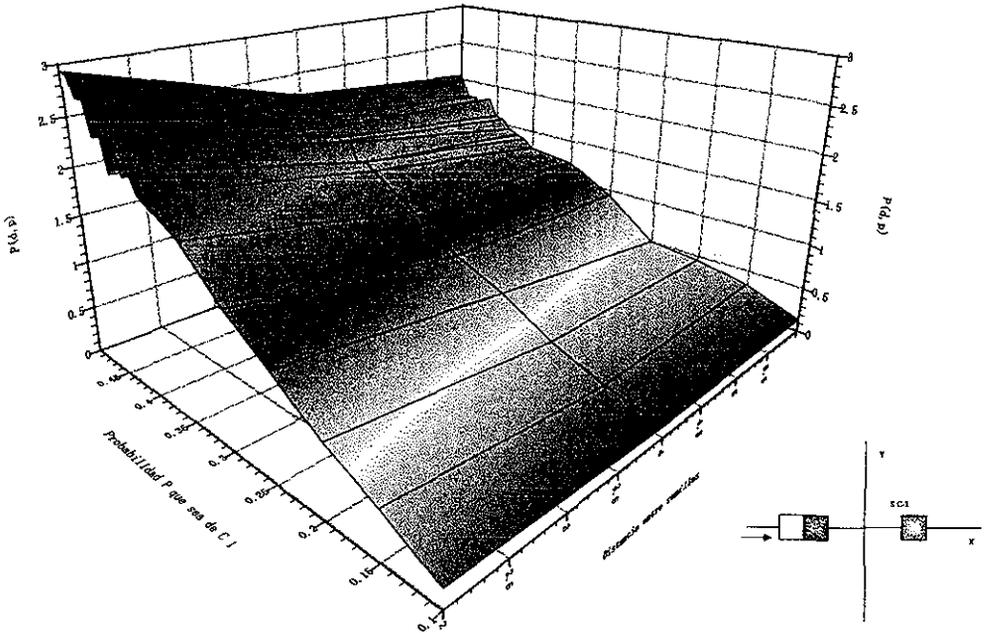


Gráfico 6.2.4.10 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la izquierda del primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por abajo al primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS INFERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS IZQUIERDOS EN FC1

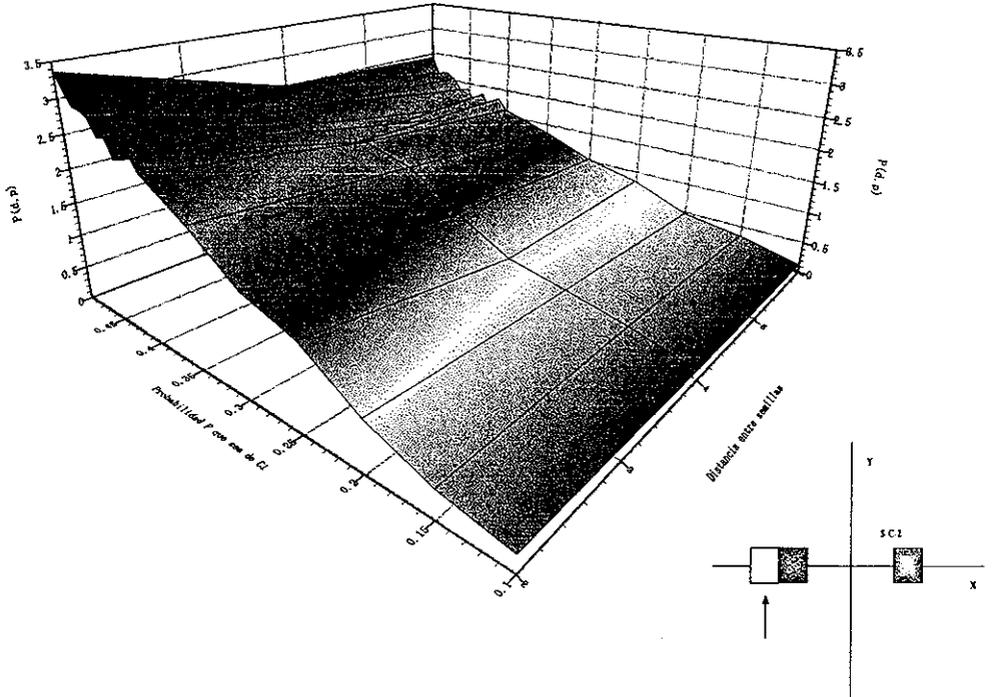


Gráfico 6.2.4.11 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por abajo del primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se da por arriba del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.

SEGUNDOS AGREGADOS POR ARRIBA DE PRIMEROS AGREGADOS DERECHOS EN FC2

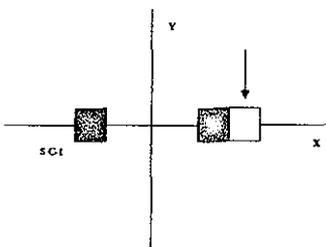
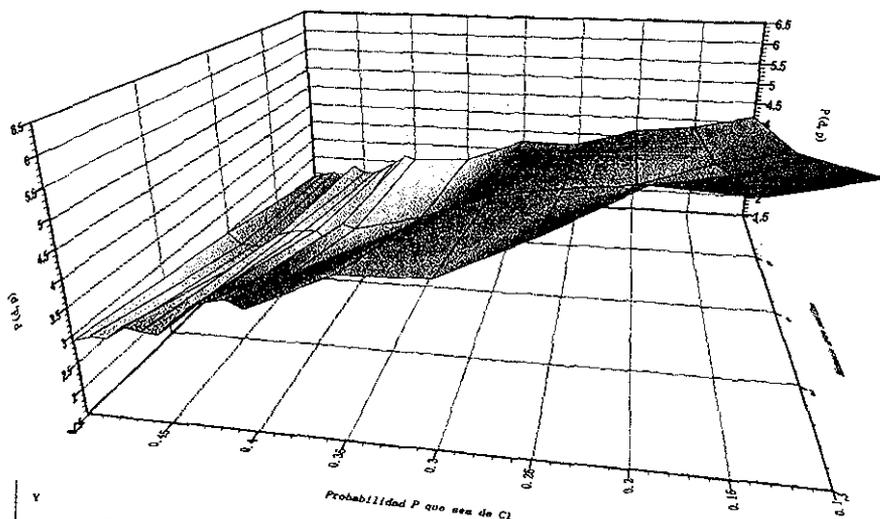


Gráfico 6.2.4.12 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por arriba del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se dá por la derecha del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA DERECHA DE PRIMEROS AGREGADOS DERECHOS EN FC2

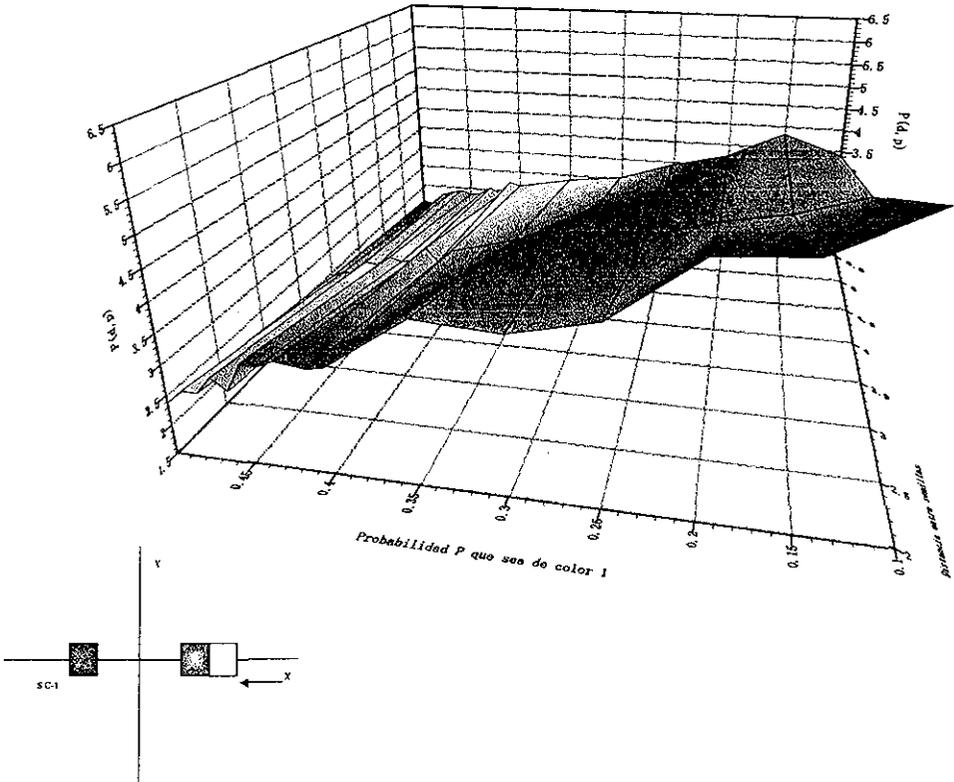


Gráfico 6.2.4.13 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la derecha del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se da por abajo del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR ABAJO DE PRIMEROS AGREGADOS DERECHOS EN FC2

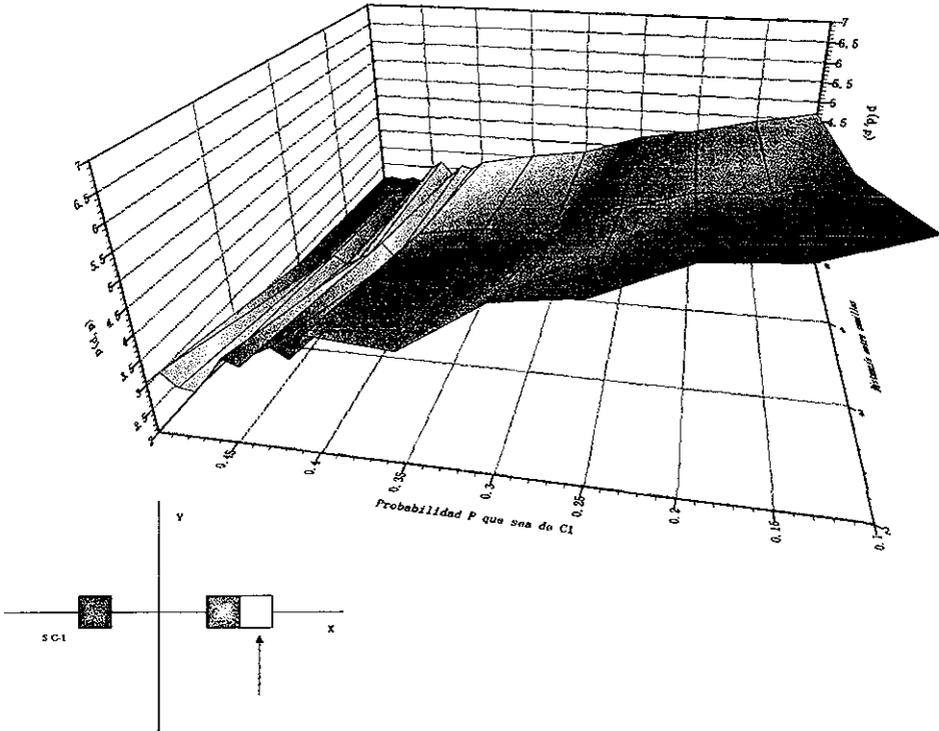


Gráfico 6.2.4.14 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por abajo del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por arriba del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR ARRIBA DE PRIMEROS AGREGADOS SUPERIORES EN FC1

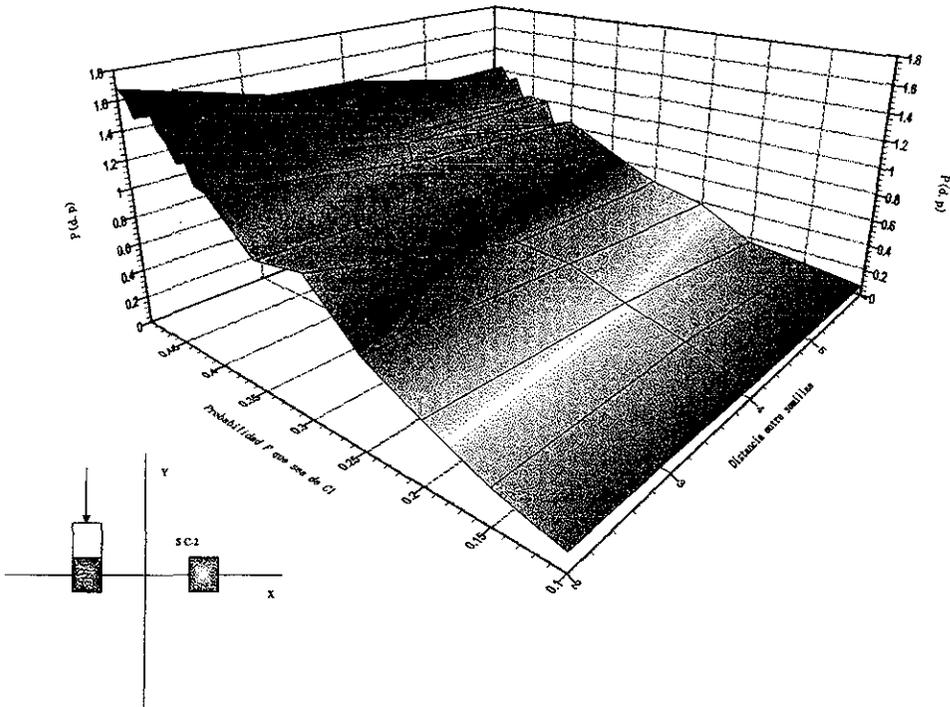


Gráfico 6.2.4.15 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por arriba del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se dá por la izquierda del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA IZQUIERDA DE PRIMEROS AGREGADOS SUPERIORES EN FC1

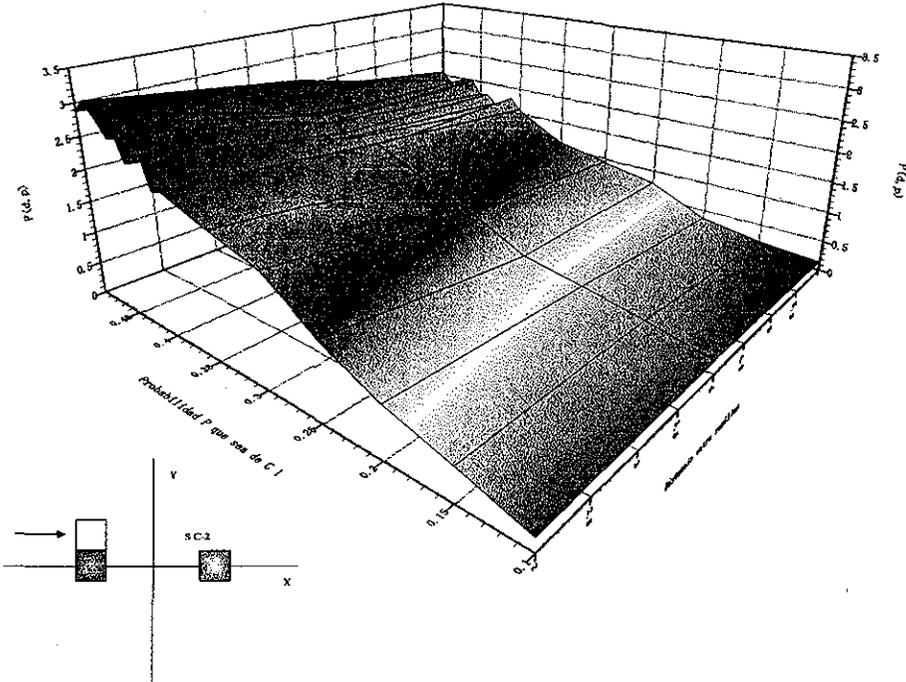


Gráfico 6.2.4.16 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la derecha del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se dá por la derecha del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA DERECHA DE PRIMEROS AGREGADOS SUPERIORES EN FCI

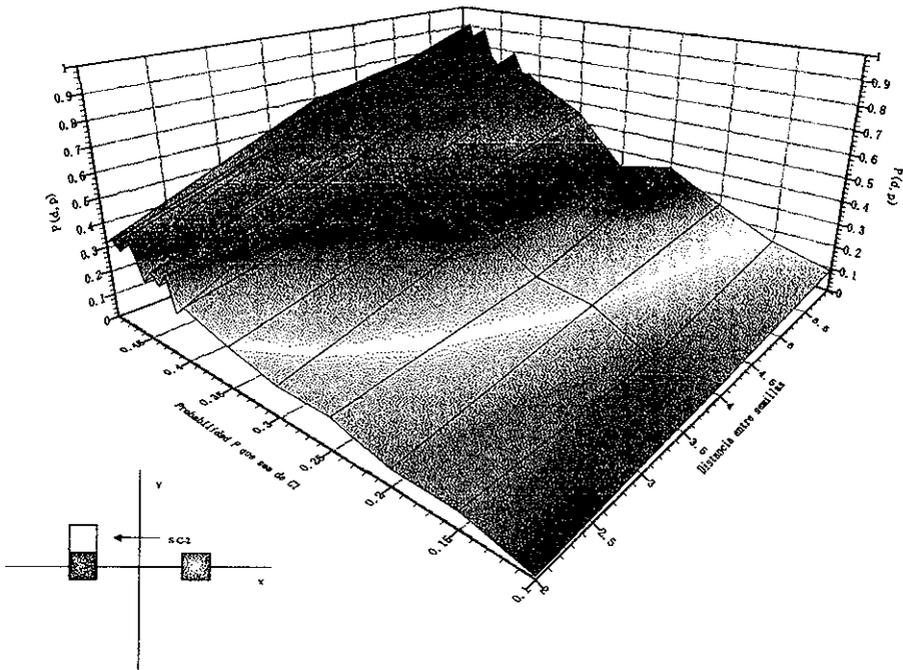


Gráfico 6.2.4.17 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la izquierda del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se da por arriba del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR ARRIBA DE LOS PRIMEROS AGREGADOS SUPERIORES EN FC2

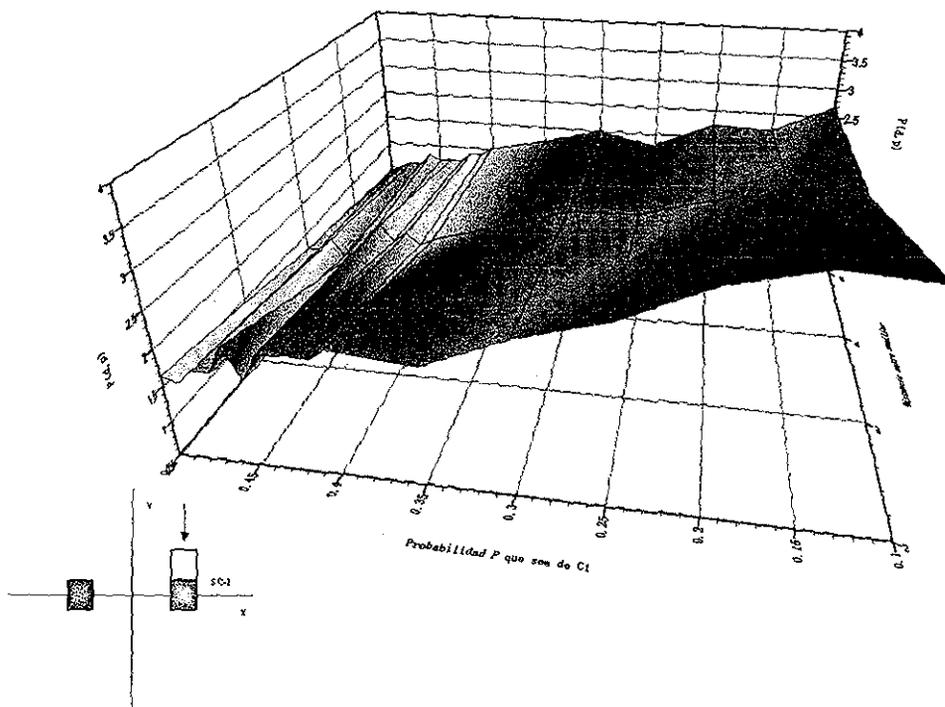


Gráfico 6.2.4.18 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por arriba del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se dá por la izquierda del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA IZQUIERDA DE LOS PRIMEROS AGREGADOS SUPERIORES EN FC2

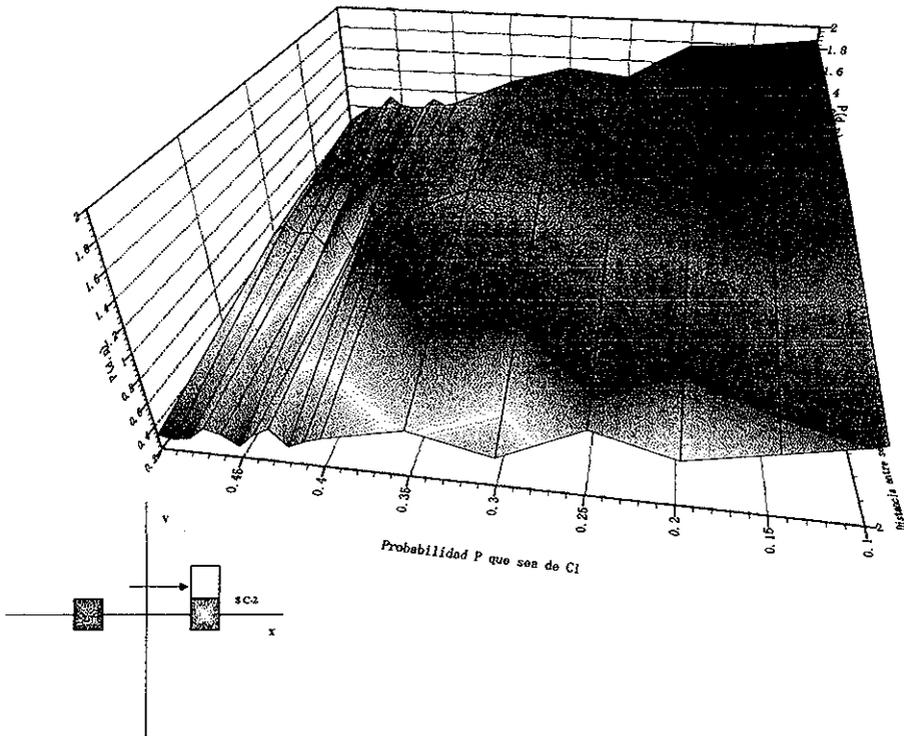


Gráfico 6.2.4.19 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la izquierda del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se dá por la derecha del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA DERECHA DE LOS PRIMEROS AGREGADOS SUPERIORES EN FC2

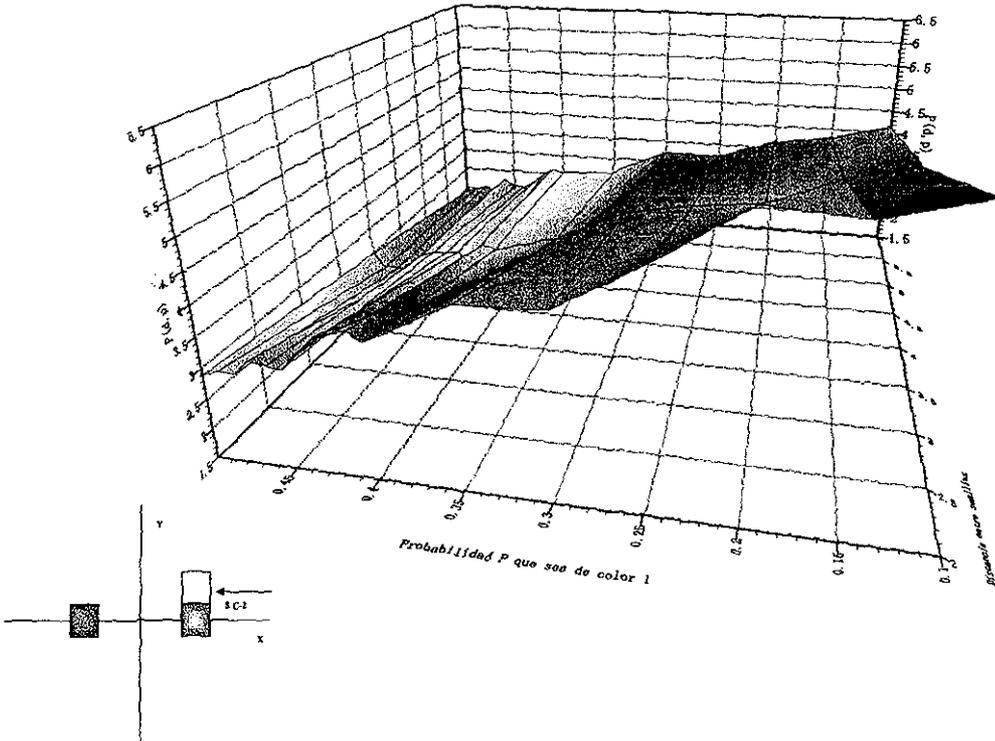


Gráfico 6.2.4.20 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la derecha del primer agregado que se encuentra arriba de la semilla.

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por la izquierda del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA IZQUIERDA DE PRIMER AGREGADO POR LA PARTE INFERIOR EN FC1

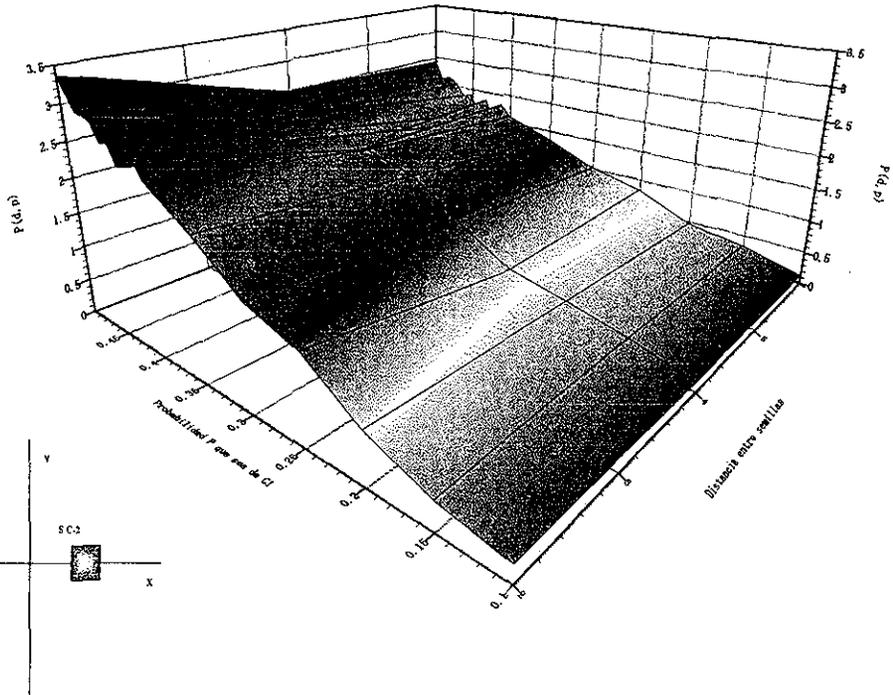


Gráfico 6.2.4.21 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la izquierda del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se dá por la derecha del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA DERECHA DE PRIMER AGREGADO POR LA PARTE INFERIOR EN FC1

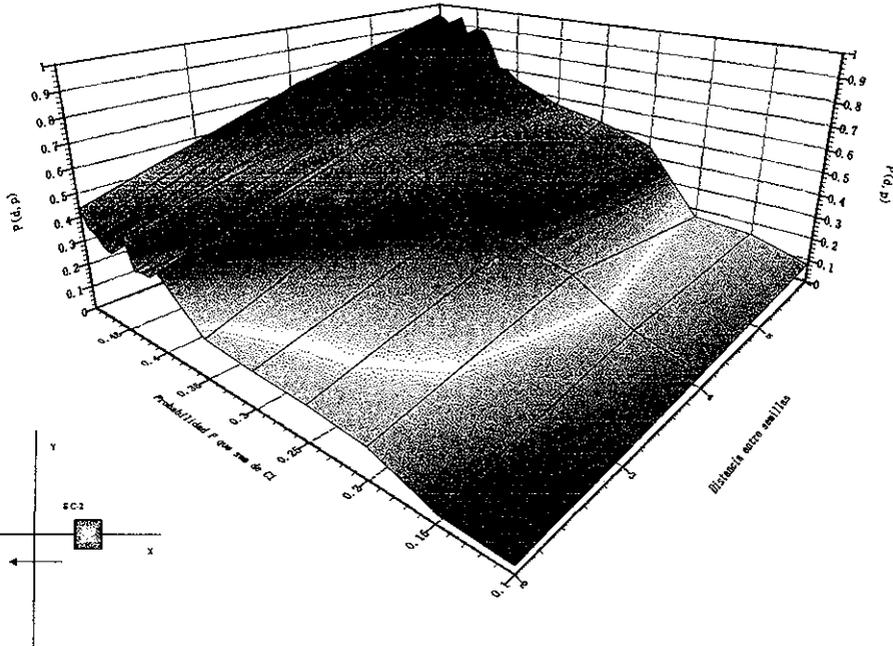


Gráfico 6.2.4.22 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la derecha del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por abajo del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR ABAJO DE PRIMER AGREGADO POR LA PARTE INFERIOR EN FC1

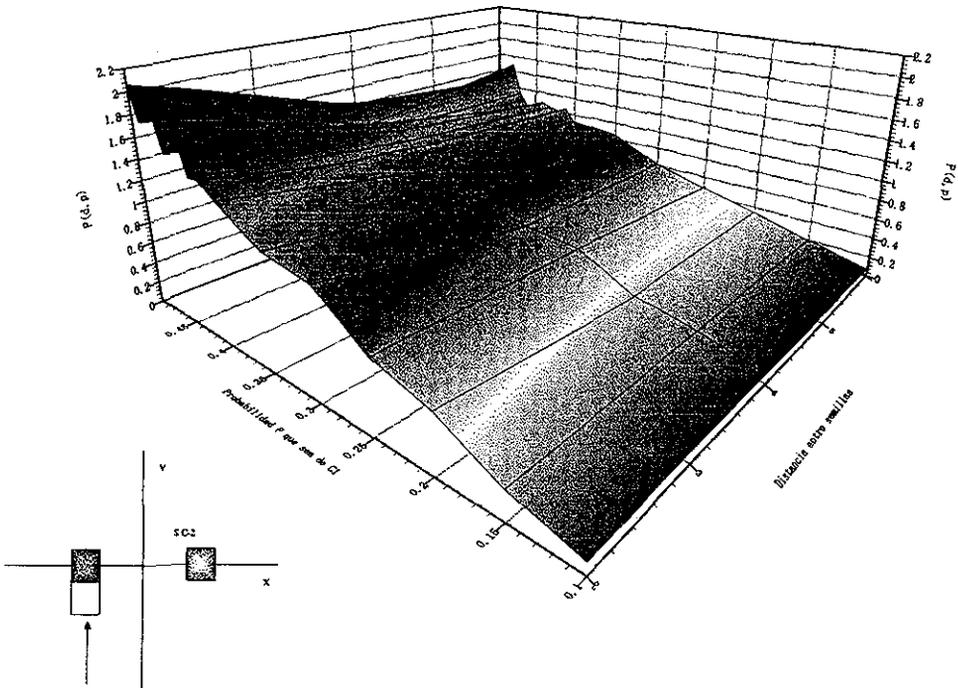


Gráfico 6.2.4.23 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por abajo del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se dá por la izquierda del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA IZQUIERDA DE PRIMER AGREGADO POR LA PARTE INFERIOR EN FC2

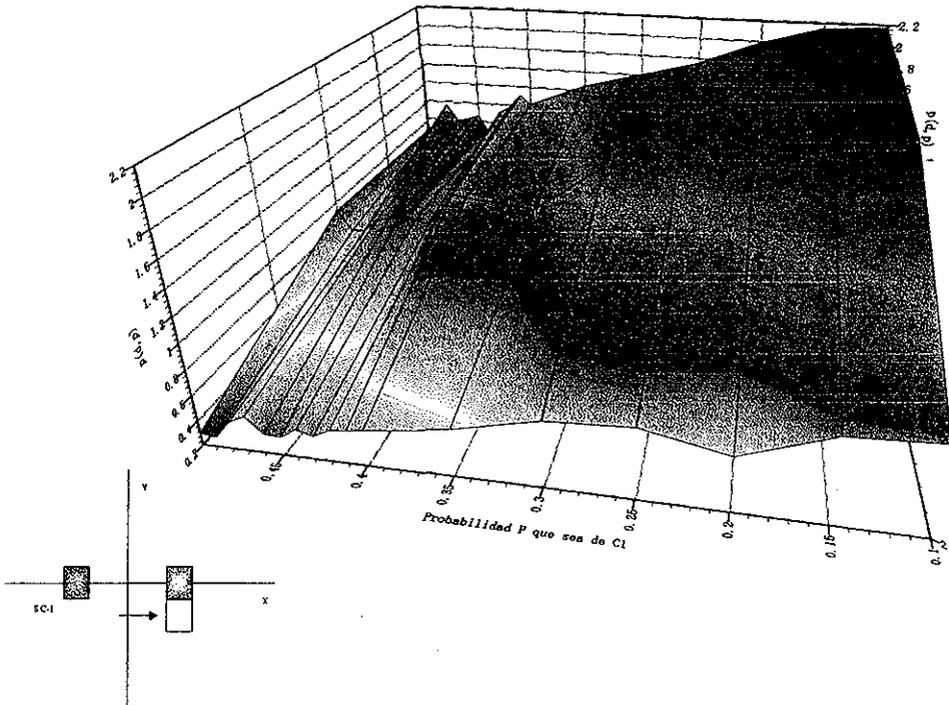


Gráfico 6.2.4.24 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la izquierda del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se dá por la derecha del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR LA DERECHA DE PRIMER AGREGADO POR LA PARTE INFERIOR EN FC2

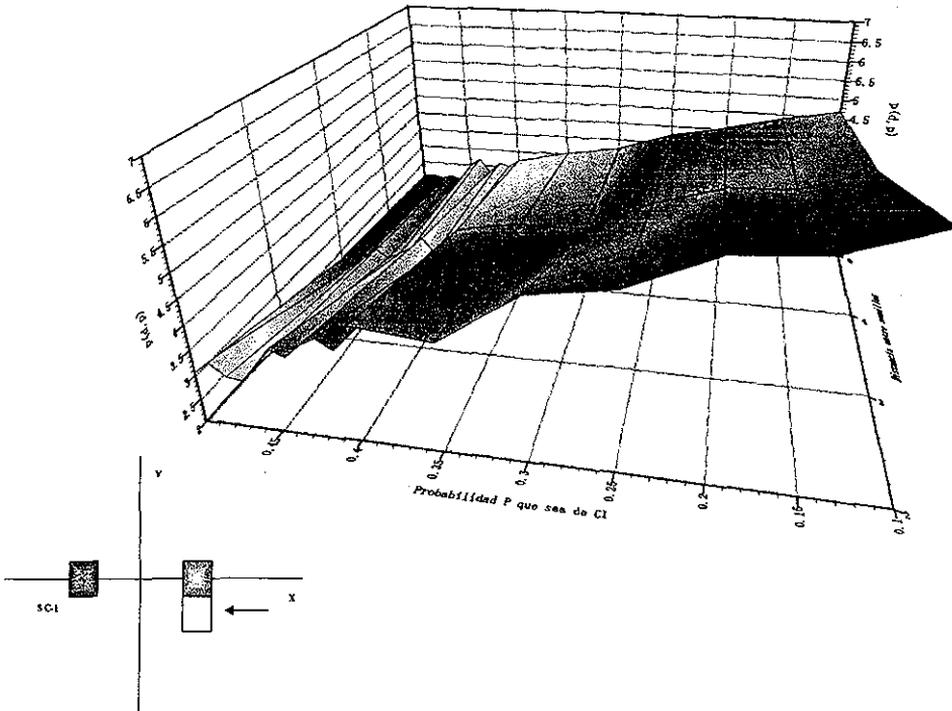


Gráfico 6.2.4.25 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la derecha del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se da por abajo del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS POR ABAJO DE PRIMER AGREGADO POR LA PARTE INFERIOR EN FC2

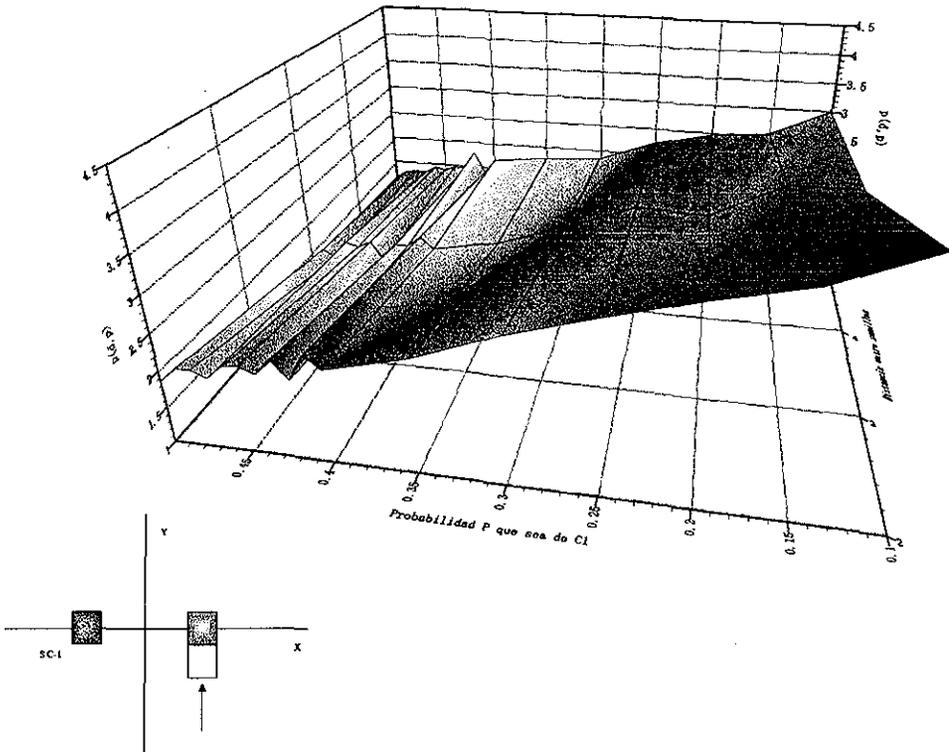


Gráfico 6.2.4.26 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por abajo del primer agregado que se encuentra abajo de la semilla.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por abajo del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS INFERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS INTERNOS EN FC1

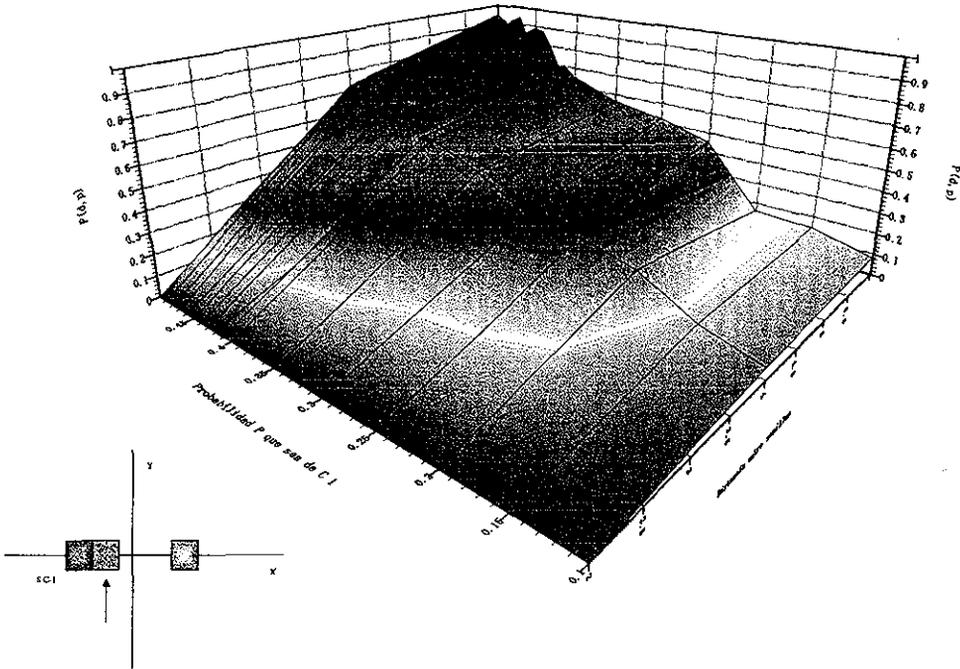


Gráfico 6.2.4.27 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por abajo del primer agregado que se encuentra a lado derecho de la semilla.

Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se da por arriba del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.

SEGUNDOS AGREGADOS SUPERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS INTERNOS EN FC1

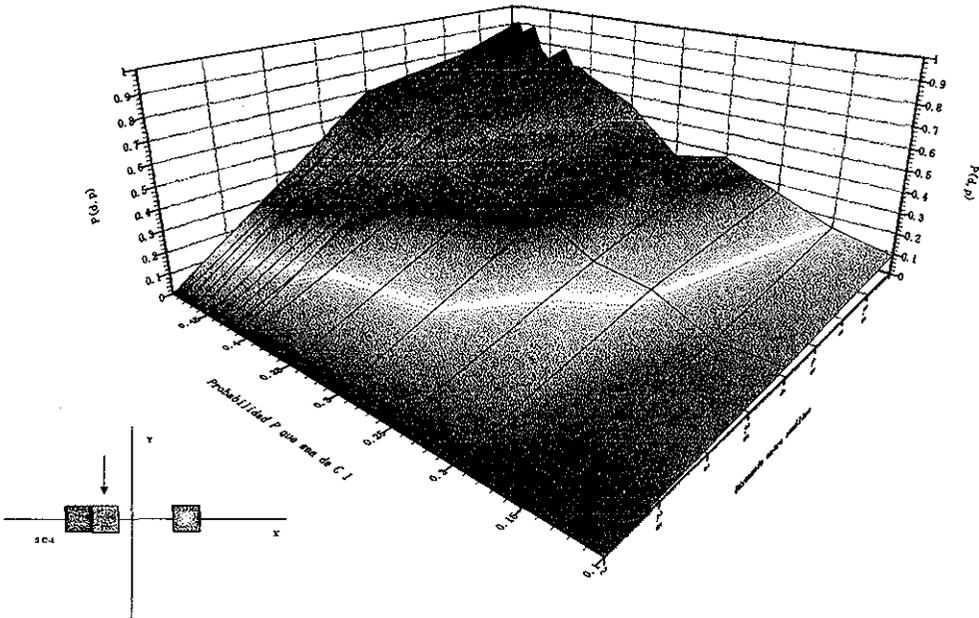


Gráfico 6.2.4.28 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por arriba del primer agregado que se encuentra a lado derecho de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 1 se dá por la derecha del primer agregado que se encuentra a la derecha de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS INTERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS INTERNOS EN FC1

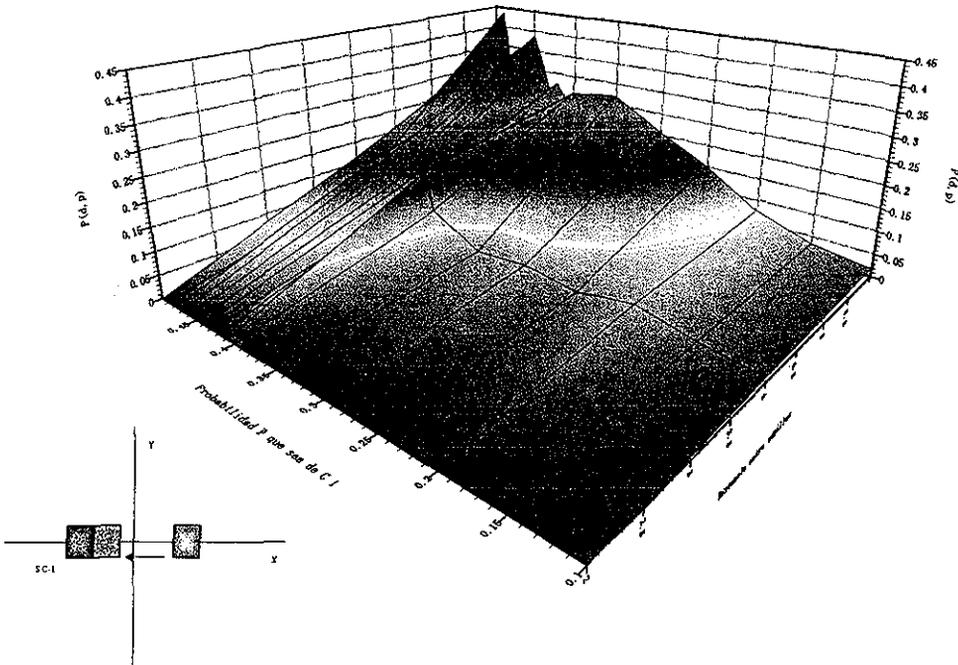


Gráfico 6.2.4.29 Segundo agregado en el fractal de color 1 cuando este se agrega por la derecha del primer agregado que se encuentra a lado derecho de la semilla.

*Función  $P(d, p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se da por abajo del primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS INFERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS INTERNOS EN FC2

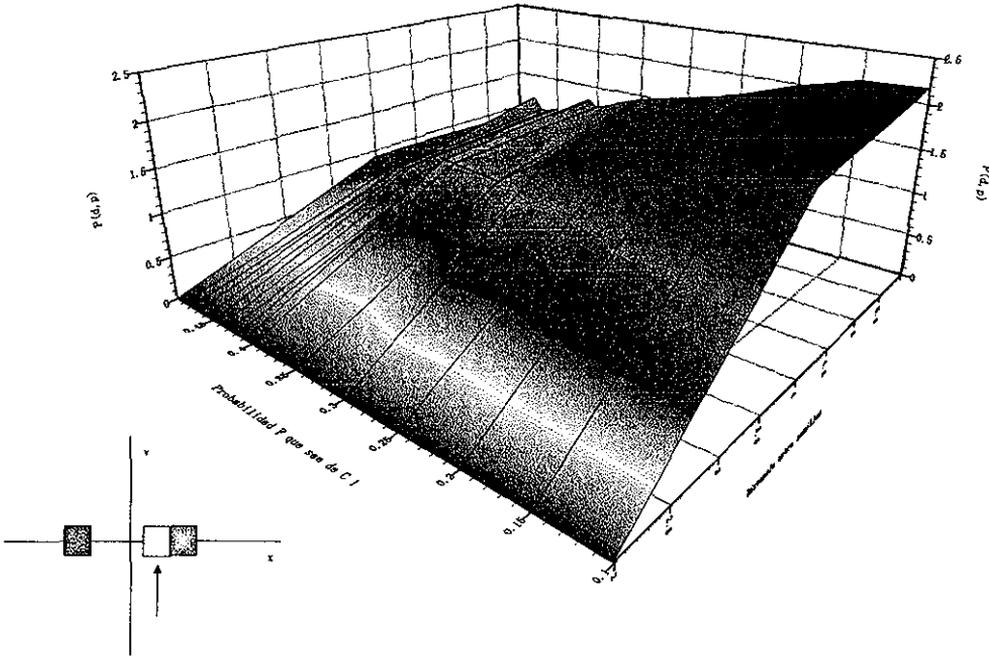


Gráfico 6.2.4.30 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por abajo del primer agregado que se encuentra a lado izquierdo de la semilla.

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se da por arriba del primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.*

SEGUNDOS AGREGADOS SUPERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS INTERNOS EN FC2

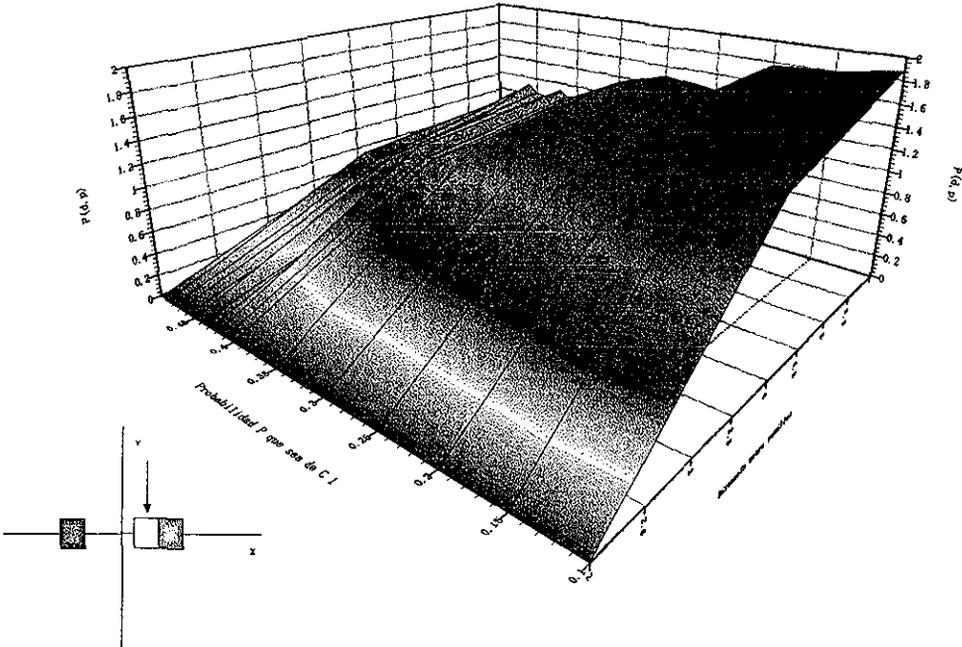


Gráfico 6.2.4.31 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por arriba del primer agregado que se encuentra a lado izquierdo de la semilla.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

*Función  $P(d,p)$ , representada gráficamente para cuando el segundo agregado a la semilla de color 2 se dá por la izquierda del primer agregado que se encuentra a la izquierda de la semilla.*

## SEGUNDOS AGREGADOS INTERIORES DE PRIMEROS AGREGADOS INTERNOS EN FC2

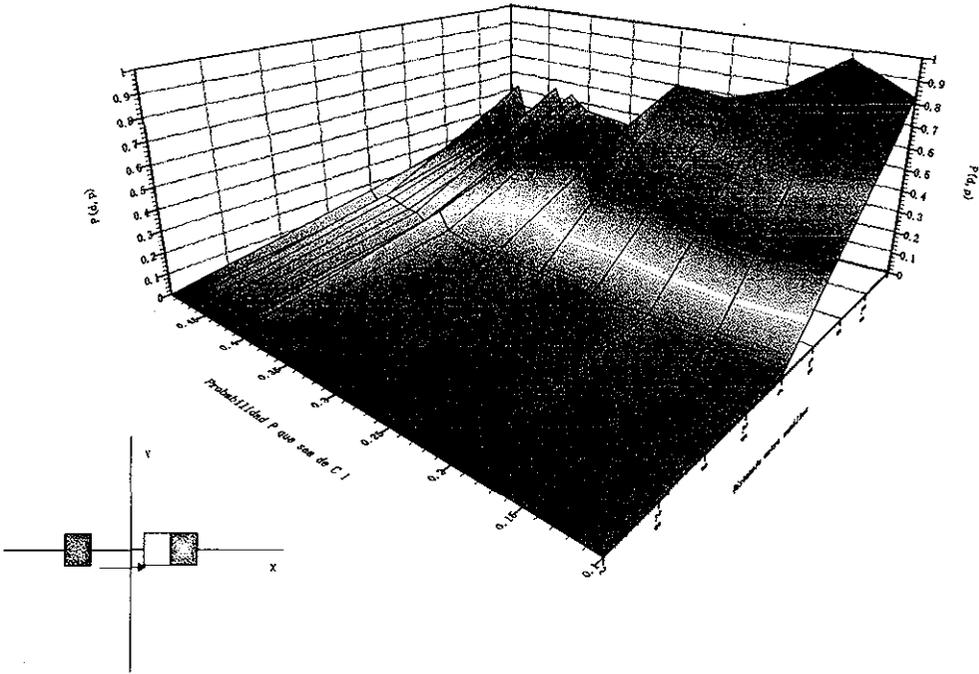


Gráfico 6.2.4.32 Segundo agregado en el fractal de color 2 cuando este se agrega por la izquierda del primer agregado que se encuentra a lado izquierdo de la semilla.

En base a las observaciones realizadas a los gráficos anteriormente mostrados se puede concluir que aunque se esperaba una simetría en el cúmulo agregado en algunas posiciones que son simétricas en el eje horizontal o vertical tanto en el fractal de color 1 como en el fractal de color 2 (ver las figuras 6.2.4.11 y 6.2.4.14), no existe dicha simetría en el comportamiento experimental de los agregados para ninguno de los casos analizados con lo cual se determina que el patrón de agregación para el fractal de color 1 es totalmente diferente al del fractal de color 2.

## CONCLUSIONES

El objetivo de este trabajo de tesis fue el de obtener información de naturaleza probabilística sobre el crecimiento de fractales en el modelo "agregación limitada por difusión bicolor" (BDLA), en las primeras etapas de formación que nos permitiera determinar el porque de ciertas deformaciones en la forma final de la estructura.

Logramos obtener el comportamiento, vía enumeración exacta de  $P(d, p)$  en las primeras etapas de crecimiento para  $d = 2, 4, 6$ . Encontramos mediante el empleo de diversos modelos computacionales y herramientas estadísticas, ciertas coordenadas en donde es posible se agregue una partícula a la estructura fractal a las que se les dio el nombre de coordenadas compartidas y cuasi compartidas las cuales solo aparecen cuando el número de agregados es mayor o igual a tres. Observamos durante la etapa de análisis de los datos obtenidos, que en estas coordenadas  $P(d, p)$  no tiene un comportamiento lineal como es el caso de todas las demás coordenadas (y que correspondería a DLA simple), llegando a la conjetura de que estas coordenadas compartidas y cuasi compartidas determinan la forma final de la estructura fractal. Tenemos como problema a resolver en el futuro caracterizar plenamente el comportamiento de  $P(d, p)$  en estas coordenadas.

Los resultados obtenidos determinan las bases para entender y describir las geometrías fractales de diversos procesos que se apegan al modelo "BDLA" como es el caso de agregación en espacios no conectados con aplicaciones en electroquímica de dos especies, el crecimiento de colonias bacterianas y crecimientos cancerígenos de varios tipos.

Para dar continuidad a este trabajo se propone el realizar los experimentos con un número mayor de agregados analizando el comportamiento detallado de ellos para posteriormente comenzar a experimentar en una dimensión de trabajo igual a tres.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## BIBLIOGRAFÍA

1. T. A. Witten, L. A. Sander, *Physical Review Letter* 41 (1981) 1400.
2. Benoit B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*. W.H Freeman, New York, 1983.
3. T. A. Witten and L. M. Sander, *Physical Review Letters*, 47:1400-1403, 1981.
4. P. Meakin, *Physical Review Letter* A27(1983)1400.
5. P. Meakin, *Physical Review Letter* 51(1983)1119.
6. L. Pietronero, E. Tosatti(Eds) *Fractal in Physics*, Elsevier, Amsterdam, 1986.
7. T. Vicsek, *Fractal growth phenoma* 2<sup>nd</sup> edition, World Scientific. Singapore, 1987.
8. V. Tchijov, A. Keller, S. Rodriguez Romo, *Revista Mexicana de Fisica*, Enero 1997.
9. V. Tchijov, S. Nachaev, S. Rodriguez Romo, *JETP Letter*. 64(1996)498
10. Hull, T. E., and Dobell, A. R. *Random Numbers Generators* , SIAM Rev. IV No. , 230, 255, 3 July 1982.
11. J. Jhonson, *Econometric Methods*, N.Y. Mc. Graw Hills Co, 1973.
12. P. Grassberger, R. Procaccia, *American Physical Rev.* v. 28 No. 4 October 1983.
13. W. H. Press B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipies in C*, Cambridge University Press, USA 1980.
14. A. V. Hopcroft, J. E. Hullman, *Data structures and Algorithms*. Addison Wesley, 1988
15. B. Flaming, *Practical Algorithms in C++*, Jhon Wiley & Sons, Inc. USA, 1995
16. D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 3 sorting and searching. Addison Wesley. 1979.
17. M. H. Bracket *Developing Data Structured Database*, Prentice Hall Englewood, N. J. 1987.
18. M. H. Overmars, *The Desing of Dynamic Data Structures*. Springer - Velag, N. Y, 1983.
19. J. L. Bentley and J. B. Saxe, *Descomposable searching problems*, *Journal of Algorithms* 1980.
20. P. Flajolet, J. Francon, J. Vuillemin. *Sequence of operations analysis for dynamic data structures*, *Journal of Algorithms*, 1(2), 111-141.
21. Paul Meakin *Fractals, scaling and growth far from equilibrium*, *The Diffusion-Limited Aggregation Model*, pp 189, Cambridge University Press 1998.

22. Sergio Ramirez Garcia, Tesis de maestría con nombre: Desarrollo de un programa de enumeración exacta aplicado al modelo BDLA, México 2001.
23. Paul Meakin, Formation of fractals clusters and networks by irreversible diffusion-limited aggregation. *Physical Review Letters*, 47:1400-1403, 1981.
24. William Mendenhall, Terry Sincich, *Statistic for the engineering and the computer science*, Ed. Prentice Hall.
25. Sheldon M. Ross, *Simulation*, Ed. Prentice Hall.
26. B. Ostle *Estadística Aplicada: técnicas de estadística moderna, cuando y donde aplicarlas*. Ed. Limusa. México 1965.
27. R. Syski, *Random Processes: a first look*. M. Dekker. New Cork 1989.
28. Luis Joyanes Aguilar, Ignacio Zahonero Martínez, *Estructura de datos, Algoritmos, abstracción y objetos*. Ed. Mc Graw Hill. México 1998.
29. Josef Pieprzyk, Babak Sadeghiyan, *Design of Hashing Algorithms*, Lecture notes in computer science.
30. Herbert Schildt, *C++ para Programadores*, Mc Graw Hill. México 1996.
31. H.M. Deitel, P.J. Deitel, *C++ Como Programar, Biblioteca estándar de plantillas ANSI/ISO de C++*. Ed. Pearson - Prentice Hall México, 1999.