

01190
9

DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO
Facultad de Ingeniería

D-estabilidad Robusta de Conjuntos de
Polinomios con Coeficientes Afines

Alfonso Martínez Cortés

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE
POSGRADO DE LA

FACULTAD DE INGENIERIA

DE LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

COMO REQUISITO PARA OBTENER

EL GRADO DE

**DOCTOR EN INGENIERIA
ELÉCTRICA**

CIUDAD UNIVERSITARIA

2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Alfonso Alejandro y Elsa con amor

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice General

Índice de Figuras	v
Índice de Tablas	vi
1 Introducción	1
2 Resultados Generales	8
2.1 Introducción	8
2.2 Algunas propiedades de las familias de polinomios con coeficientes continuos	10
2.3 Detección de intervalos de raíces reales	20
2.4 Raíces reales de una familia de polinomios con coeficientes continuos .	27
3 \mathcal{D}-estabilidad Robusta de Conjuntos de Polinomios con Coeficientes Afines	29
3.1 Introducción	29
3.2 Estabilidad Hurwitz de familias de polinomios con un parámetro variable	30
3.3 Definiciones y observaciones	37
3.4 \mathcal{D} -estabilidad de conjuntos de polinomios con coeficientes afines . . .	44
4 Generalización del Teorema de Cruce de Frontera	52
4.1 Introducción	52
4.2 Generalización del teorema de cruce de frontera	53
5 Conclusiones	62
Bibliografía	65
A Regiones \mathcal{D} Admisibles	71



Índice de Figuras

3.1	Polinomios frontera	41
3.2	Núcleo y polinomios esquina	42
A.1	Fase de una raíz compleja	73

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice de Tablas

3.1 Raíces de polinomios componentes	49
--	----

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos

Generalmente los resultados obtenidos en una investigación dependen del autor, pero también en gran medida del grupo de personas que lo estimulan y apoyan. Quiero aprovechar la oportunidad para agradecer a todos ellos la ayuda recibida.

En primer lugar deseo mencionar a mi familia, en particular a Elsa, mi esposa, y a Alfonso Alejandro, mi hijo, por el apoyo, comprensión y el tiempo de convivencia sacrificado.

Dentro del ámbito laboral he contado no sólo con la supervisión de mi actividad profesional sino también con el apoyo irrestricto para realizar mis estudios de posgrado de un grupo de destacados profesionistas (por orden alfabético):

Ing. David Cabrera Vázquez,
Ing. Sergio Carranza Ramírez,
Ing. Ángel Contreras Mendoza,
Ing. Andrés Chávez Sañudo,
Ing. Alberto Esquivel Reyes,
Ing. Jaime F. Galindo Salgado,
Ing. Carlos García Romero,
Ing. Pedro Gómez García,
Ing. Jorge Hernández García,
Ing. Fernando Lecuona Guerrero,
Ing. Sergio Mata Jiménez,
Ing. Juan José Quezada Ramírez,
Ing. Dionisio Rivera Castañeda,
Ing. José Salazar Carballido
Ing. Mardoqueo Staropolsky Nowalsky,
Ing. José Zepeda López

El Comité Doctoral merece una mención especial por sus valiosos comentarios que hicieron a este trabajo:

Dr. Luis Agustín Álvarez Icaza Longoria,
Dra. María Cristina Verde Rodarte,
Dr. Vladimir L. Kharitonov,
Dr. Jaime Moreno Pérez,
Dr. Yu Tang Xu,
Dr. Joaquín Collado Moctezuma,
Dr. Gerardo Espinosa Pérez



La intervención del Profesor Vladimir L. Kharitonov pionero del tema y enfoque desarrollado en este trabajo fue determinante en su elaboración. Afortunadamente pude entrevistarme con él en varias ocasiones; su amabilidad y permanente buena disposición para compartir su conocimientos sobre un tema tan elusivo, fue un aliento significativo para acotar y alcanzar los objetivos planteados.

La profesora Cristina Verde Rodante, quien dirigió esta tesis desde su remoto origen, jugó un papel fundamental en su elaboración. Su atinada asesoría permitió que la investigación se realizaré con plena libertad en cuanto al enfoque propuesto. También participó de manera importante cuando fue necesario analizar, validar, seleccionar y ordenar los resultados obtenidos.

El profesor Joaquín Collado Moctezuma participó desde el inicio de esta investigación señalando buena parte de la bibliografía relevante sobre el tema y, en la última etapa, mediante una revisión minuciosa del manuscrito. Sus acertados comentarios permitieron mejorar el contenido y la forma del trabajo. Por supuesto cualquier error que permanezca es exclusivamente mi responsabilidad.

El Profesor Jaime Moreno Pérez intervino en la revisión de la penúltima y última versión de este trabajo. Los detallados comentarios que vertió, en los enunciados y ordenamiento lógico de algunos resultados, permitió mejorar la calidad del trabajo final.

Los Profesores Luis Alvarez - Icaza Longoria y Fernando Espinosa Pérez aportaron valiosos comentarios al trabajo final y me alentaron en los momentos críticos del desarrollo de la investigación.

Por otra parte, la transcripción de la versión preliminar a la presentada aquí, con sus múltiples correcciones, fue realizada por el M en C. Enrique Cruz Martínez. La última versión estuvo a cargo de la L.A.E. Alma Leticia Reyes Sosa, cuyo trabajo intenso me obligó a redoblar esfuerzos al sentir que la transcripción iba a la par que la elaboración del manuscrito.

A todas las personas mencionadas y a aquellas que omití involuntariamente, muchas gracias por su valiosa ayuda.

Deseo también manifestar mi agradecimiento a tres instituciones (por orden alfabético), con los que he estado asociado a lo largo de mi trayectoria académica y profesional:

El Instituto Politécnico Nacional, por haberme impartido las primeras nociones de ingeniería y despertado el interés por la investigación.

Luz y Fuerza del Centro, por el apoyo y el tiempo generosamente cedido para realizar estudios de posgrado y ser el medio por el cual pude conocer, en la vida real, los sistemas dinámicos robustos y aquellos que no lo son tanto.

La Universidad Nacional Autónoma de México, por los conocimientos recibidos a nivel de posgrado y las múltiples facilidades otorgadas, para realizar la investigación.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Resumen

***D* - estabilidad Robusta de Conjuntos de Polinomios con Coeficientes Afines**

Un problema fundamental en Ingeniería de Control es el de determinar si todas las raíces de un conjunto de polinomios P , con coeficientes definidos por funciones continuas que mapean de un conjunto compacto convexo de dimensión finita a los reales, están dentro de una región compleja D .

En este trabajo se dan condiciones suficientes para la solución de este problema bajo dos suposiciones. La primera es que los coeficientes de P sean simplemente funciones continuas. La segunda es que los coeficientes sean funciones afines. En ambos casos se asume que el dominio de las funciones es un conjunto compacto convexo de dimensión finita. La solución del problema cuando los coeficientes son sólo funciones continuas se da mediante el análisis de los intervalos de raíces de P , cuando se evalúa en la frontera de D . Para conjuntos P con coeficientes afines, el método consiste en partir el dominio de P en un número finito de subintervalos Δu_j . Posteriormente se comprueba la exclusión de raíces de P en cada una de los Δu_j . La comprobación se hace primero mediante el análisis de sólo cuatro polinomios. Si alguno de éstos no es estable, se requiere un análisis más detallado de los elementos de P evaluados en Δu_j .

La clase de regiones D donde el método propuesto es aplicable incluye el semiplano complejo izquierdo y el círculo unitario.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

Introducción

El propósito principal de este trabajo es presentar un método de análisis que permita determinar si todas las raíces, de los elementos de una familia de polinomios P , están contenidas dentro de una región \mathcal{D} del plano complejo. Se acepta que P tenga elementos de distinto grado.

El conjunto P es generado por la variación de los coeficientes de un polinomio. Se asume que cada coeficiente de cada elemento de P pertenece al rango de una función continua definida sobre un dominio común K , compacto, convexo y de dimensión finita.

La solución al problema mencionado ha despertado el interés de un gran número de investigadores en el área de Teoría de Control. Esto se debe a que muchos sistemas dinámicos lineales, sujetos a incertidumbre paramétrica, se pueden modelar mediante conjuntos de polinomios con las mismas características de P . En este caso, cada componente del dominio K representa un parámetro del sistema, el cual toma valores en un intervalo cerrado y acotado. Por lo que, bajo estas condiciones, el dominio, compacto y convexo, representa al conjunto de parámetros del sistema.

El problema en cuestión ha recibido especial atención, en particular, cuando la región \mathcal{D} es algún subconjunto del semiplano complejo izquierdo abierto (C_-) o el círculo unitario (O^0). Esto se debe a que la estabilidad de los sistemas lineales

retroalimentados, continuos y discretos, está determinada por la ubicación de las raíces de sus polinomios característicos, dentro de las dos regiones mencionadas, respectivamente. Se dice que P tiene \mathcal{D} *estabilidad robusta* si todas sus raíces son puntos interiores de \mathcal{D} .

Por otra parte, los coeficientes de los conjuntos P están definidos a través de funciones de diferentes tipos. Dada la dificultad para resolver el problema mencionado, la investigación que se ha hecho hasta ahora se ha restringido, generalmente, al análisis de funciones simples. Dentro de los tipos de funciones más estudiados se encuentran aquellas cuyo dominio es independiente entre ellas. Los otros tres tipos más comunes son los formados por las funciones afines, multiafines y polinómicas.

La solución al problema planteado, cuando no hay dependencia entre coeficientes y la región \mathcal{D} es el C_- , fue dada por V.L. Kharitonov en 1978 [30]. El teorema de Kharitonov es un resultado elegante y poderoso que establece que un conjunto P , cuyos coeficientes son independientes, tiene todas sus raíces en C_- si y sólo si todas las raíces de cuatro elementos, bien definidos de P están en C_- . Si el grado de P es menor o igual a cinco, se requiere analizar menos de cuatro polinomios, ver Anderson, et al [3].

Desafortunadamente, su aplicación al análisis de \mathcal{D} -estabilidad robusta de sistemas dinámicos lineales se ve limitada por dos hechos:

1. Los elementos de un conjunto de polinomios típico, proveniente de un sistema lineal con perturbaciones paramétricas, tienen coeficientes dependientes.
2. La contención de todas las raíces de los cuatro polinomios específicos en O^0 no garantiza la contención de todas las raíces de P en O^0 , ver Bose y Zeheb [15], Cieslik [17] y Hollot y Bartlett [28].

En el siguiente nivel de complicación estudiado, se considera que todos los coeficientes de P están definidos por funciones afines. La solución al problema de estabilidad de este tipo de conjuntos P fue dada por A.C. Bartlett, C.V. Hollot y H:

Lin en 1988 [10] La limitación de este método estriba en que, la solución requiere una gran cantidad de cálculos cuando la dimensión del conjunto K , m , es grande. Para determinar si P es estable o no, se necesita verificar la estabilidad de $2^{2m-1} - 2^{m-1}$ combinaciones convexas de elementos de P . Para resolver esta dificultad, B.Barmish [6] propuso construir una función de prueba de estabilidad $H(\cdot)$. La función $H(\cdot)$ se utiliza para probar si P tiene algún elemento con raíces en la frontera de \mathcal{D} . El método requiere hacer un barrido sobre la frontera \mathcal{D} . El conjunto P es estable si y sólo si $H(\delta)$ es positivo para todo δ que pertenezca a un subconjunto acotado específico de la frontera \mathcal{D} . Este método necesita generar funciones auxiliares de barrido que dependen específicamente de la región \mathcal{D} considerada. Adicionalmente, tiene la desventaja que presentan todos los métodos de barrido, el análisis de un número finito de puntos ω que pertenecen a un intervalo I , del dominio, definen el comportamiento de P para todo ω en I . Es posible construir, aún para la estructura mas simple que puedan tener los coeficientes, conjuntos P con raíces en puntos aislados de la frontera de una región \mathcal{D} ver Ackermann [1] y Ackermann et al[2]. Este tipo de raíces son, en general, difíciles de detectar utilizando técnicas de barrido.

Las siguientes funciones estudiadas son las denominadas multiafinas. Desde nuestro punto de vista, este tipo de funciones son las mas simples que se requieren para el análisis de estabilidad robusta de sistemas lineales retroalimentados. El conjunto P de polinomios característicos de este tipo de sistemas tiene coeficientes definidos por funciones multilineales cuando se considera que tanto los coeficientes del numerador como del denominador de una planta y su controlador toman valores, cada uno de ellos, en un intervalo cerrado y acotado.

El análisis de estabilidad de P cuando sus coeficientes son multilineales se basa en el Teorema del Mapeo de L. Zadeh y C. Desoer [45]. Este teorema establece que un conjunto P evaluado en un punto del eje imaginario no contiene al cero si la envolvente convexa de P tampoco contiene al cero cuando se evalúa en el mismo punto. Este resultado es limitado ya que no muestra como determinar si el cero

pertenece a P cuando éste pertenece a su envolvente convexa. Además, requiere implementación de técnicas de barrido y revisión cuidadosa de la exclusión del cero, dado que la imagen puede no ser conexa simple, ver Anderson et al [4]. Basado en el Teorema del Mapeo, ha habido intentos por parte de M. Saeki en 1986 [39], R. de Gaston y M. Safonov en 1986 [25], A. Sideris y R. Peña en 1988 [41] entre otros por reducir el conservadurismo del resultado. Los intentos han sido exitosos y en el caso de [25] y [41] los autores han desarrollado algoritmos eficientes para resolver el problema. Sin embargo, no se conoce a la fecha una solución analítica del problema; es decir una solución, que sea prácticamente realizable, mediante el análisis de un número finito de elementos de P . Se menciona el hecho de que sea realizable porque aparte del Teorema de las Aristas, E. Zeheb presentó en 1988 [47] un método para resolver el problema planteado con la única condición de que los coeficientes de P fueran funciones continuas. Desafortunadamente, la cantidad de polinomios que se requiere probar crece de una manera impresionante con la dimensión de K .

Dado que la ubicación de las raíces de un conjunto P es un problema fundamental, que no ha sido resuelto satisfactoriamente cuando la dimensión de K es grande, se plantea en este trabajo su solución bajo la siguiente suposición.

Las regiones \mathcal{D} admisibles son conjuntos convexos, simétricos con respecto al eje real, que incluyen al C_- y el O^0 .

La solución propuesta tiene dos puntos de vista. El primero se desarrolla en el capítulo dos para encontrar condiciones suficientes cuando los coeficientes de P son continuos. El segundo se presenta en el capítulo tres para analizar el caso en el que los coeficientes de P son afines.

En el capítulo dos se analiza el comportamiento de las familias P en el eje imaginario. El análisis se basa en una propiedad fundamental que poseen las familias P cuyos coeficientes son funciones continuas sobre un dominio compacto; la evaluación de P en cada real es un *intervalo cerrado y acotado*. Debido a esto, la evaluación de P desde $-\infty$ hasta ∞ genera una banda. El cruce de la banda con el eje real,

forma un intervalo de raíces de P que se le denomina *maximal*. Por lo que la evaluación de P en el eje imaginario genera dos bandas, una de la parte real y otra de la parte imaginaria. Las raíces de P en eje imaginario, si existen, están contenidas en la intersección de los maximales de la parte real y de la parte imaginaria. Por lo cual la intersección vacía de estos maximales es suficiente para garantizar la estabilidad de P . Finalmente se muestra en el ejemplo 3 una familia P cuyos puntos frontera, de sus intervalos de raíces no pueden ser encontrados mediante los procedimientos mostrados en este capítulo. Esta familia en particular tiene una cantidad infinita numerable de intervalos degenerados de raíces positivas.

En el capítulo tres se analiza la estabilidad de conjuntos P con coeficientes afines. Para tal efecto se muestra que una familia P se puede escribir como el producto de un vector cuyos componentes son polinomios en una variable, multiplicados por un “vector” cuyos componentes son los mismos que los de K , mas un polinomio en una variable. Se muestra a continuación que, la evaluación de P en un punto $s = (x + iy)$ que pertenece a la frontera $\partial\mathcal{D}$, produce un rectángulo similar al llamado rectángulo de Kharitonov, ver Yeung y Wang [42], Dasgupta [21] y Minichelli et al [35]. En cada arista de este rectángulo, existen de uno a dos vértices de lo que se conoce como conjunto de valores, ver Barmish [5] y Barmish [7] (El conjunto de valores no es mas que la imagen bajo K de P para un punto fijo s). A la envolvente convexa de los vértices que están en el perímetro del rectángulo se le denomina *núcleo* (del conjunto de valores).

Mediante el análisis de cada rectángulo distinto que contiene al conjunto de valores y, en algunos caso de aristas críticas que se encuentran fuera del núcleo, se revisa la exclusión del cero del conjunto de valores. Si el cero está fuera, se concluye la estabilidad de P a partir de la estabilidad y la conexidad por trayectoria de un polinomio \mathcal{D} estable con algún elemento de P .

El capítulo cuatro muestra una generalización del llamado Teorema de Cruce de Frontera. Este teorema se utiliza para analizar la \mathcal{D} estabilidad de conjuntos P con

coeficientes continuos.

En la actualidad, este teorema se utiliza para familias P cuyos elementos son del mismo grado, ver Chapellat [19] y Mansour [33]. La generalización presentada aquí permite analizar familias P con elementos de distinto grado.

Relacionado con este problema se localizó un artículo publicado por M. Zedek en 1965 [46]. En este artículo el autor prueba que dados dos polinomios de distinto grado $l < n$, es posible agrupar los coeficientes de las potencias comunes de tal manera que cuando el módulo de la diferencia entre cada par de ellos sea menor que un δ y que el módulo de cada uno de sus coeficientes de las restantes $(n - l)$ potencias sean también menores que δ , entonces las raíces de uno y otro polinomio pueden ser ordenadas de tal manera que el módulo de la diferencia de l raíces de uno y otro polinomio sean menores que un ε y que el módulo de cada una de las $(n - l)$ raíces restantes del polinomio de mayor grado, k sean mayores que ε^{-1} . Con este resultado como base es posible definir una topología para el espacio S^2 que se obtiene al compactificar el plano complejo mediante la unión de R^2 e ∞ y que se conoce como esfera de Riemann, ver W. Rudin [38]. Con esta topología se puede mostrar que las raíces son funciones continuas de sus coeficientes aún si no todos los elementos de P son del mismo grado. El resultado es ampliamente conocido cuando todos los elementos de P son del mismo grado, ver M. Marden [34]. La contribución en este punto consiste en extender el resultado para el caso en que P tenga elementos de distinto grado. Basado en la continuidad de los coeficientes de P y la conexidad de K se prueba que las raíces de cualquier conjunto P forman conjuntos conexos. Por lo que se concluye que todas las raíces de un conjunto P están contenidas en un máximo de n conjuntos conexos, donde n es el grado máximo de cualquiera de sus elementos. Este resultado permite generalizar el teorema conocido como de Cruce de Frontera, ver H. Chapellat et al [33], para el caso en que P tenga elementos de distinto grado. El Teorema de Cruce de Frontera establece que un conjunto P tiene todas sus raíces en un conjunto \mathcal{D} abierto si un elemento de él contiene todas sus raíces en \mathcal{D} y ningún elemento de él

tiene raíces en la frontera de \mathcal{D} , $\partial\mathcal{D}$. Cabe aclarar que cuando se utilice este teorema para conjuntos P con elementos de distinto grado, el elemento seleccionado debe ser del mayor grado posible. De esta manera se garantiza que se están considerando todos los conjuntos conexos de raíces que puede tener P .

Con respecto a las regiones \mathcal{D} donde el método propuesto en el capítulo es aplicable, en el apéndice A se muestran las condiciones que deben cumplir. Las regiones \mathcal{D} admisibles incluyen el semiplano complejo izquierdo y el círculo unitario.

Finalmente se mencionan las principales contribuciones del trabajo:

- Se muestran algunas propiedades generales de conjuntos de polinomios, bajo la suposición débil de que sus coeficientes pertenecen al rango de funciones continuas, sobre dominio compacto y convexo de dimensión finita.
- Se presenta un método simple para probar la estabilidad de combinaciones convexas de polinomios estables.
- Se da una solución mediante el análisis de un número reducido de polinomios, al problema de análisis de estabilidad de familias con coeficientes afines. Las regiones \mathcal{D} admisibles incluyen el semiplano complejo izquierdo y el círculo unitario.
- Se generaliza el Teorema de Cruce de Frontera de regiones \mathcal{D} del plano complejo, para el caso en que no todos los elementos del conjunto de polinomios son del mismo grado. El resultado es válido para cualquier conjunto de polinomios cuyos coeficientes sean funciones continuas con dominio compacto de dimensión finita.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 2

Resultados Generales

2.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar algunos resultados generales que permitan determinar, bajo algunas condiciones, si todos los elementos de una familia de polinomios P tiene todas sus raíces dentro de una región \mathcal{D} del plano complejo.

El conjunto P tiene la característica particular que, cada coeficiente de cada uno de sus elementos, es una función *continua* A_j definida sobre un dominio común, K .

El dominio K es un subconjunto de \mathbb{R}^m cuyas m componentes son intervalos cerrados y acotados. A este tipo de conjuntos se les conoce comúnmente como cajas multidimensionales.

El lema 1 establece que K es un subconjunto compacto y convexo. El conjunto $P(\cdot, A(K))$ de grado n , evaluado en cualquier número real c es un intervalo cerrado y acotado, como lo muestra el lema 2. Es decir, para cada real c , $P(c, A(K))$ está acotado por dos polinomios que pertenecen a él.

Partiendo de lo mostrado en el lema 2, el lema 3 da condiciones necesarias y suficientes para que un número real c sea raíz de algún polinomio p de P . El punto c es parte de un intervalo cerrado en el cual cada elemento de él es raíz de algún polinomio p que pertenece a P . Al intervalo mas grande de este tipo, que contienen

al punto c , se denomina en este trabajo *intervalo maximal*. El lema 3 muestra las condiciones que debe cumplir un intervalo de raíces para ser maximal. Una propiedad muy importante que tienen los intervalos maximales es que, dentro de ellos, si un elemento de P tiene un número impar de raíces, entonces cada uno de los elementos de P tiene un número impar de raíces, contando sus multiplicidades en el mismo maximal, esto se demuestra en el lema 7.

Existe también la posibilidad de que los intervalos maximales de P sean no acotados; es decir, que sean del tipo $(-\infty, u]$, $[t, \infty)$ y $(-\infty, \infty)$. Las condiciones para que P tenga este tipo de intervalos de raíces se da en los lemas 10 y 11.

El siguiente problema que se trata en este capítulo es el de la detección de intervalos maximales, este es el tema de la sección 2.3. La detección de intervalos maximales que contienen un número impar de raíces de cada elemento de P es muy sencilla ya que cada elemento de P tiene (al menos) una raíz en cada uno de estos intervalos. El intervalo maximal se obtiene "cubriendo" el intervalo hasta que la evaluación de todos los elementos de P tengan el mismo signo (ver el lema 4). Sin embargo, la detección del otro tipo de intervalo maximal posible, aquel en el cual los elementos de P , no necesariamente todos tienen un número par de raíces es, en general, más difícil. Esto se debe a que el elemento seleccionado podría no tener raíces reales en el intervalo en cuestión. Este problema puede ser resuelto con la ayuda del lema 13 el cual muestra que si un elemento $p(s, A(\mathbb{k}))$ de un conjunto de polinomios $P(s, A(K))$ tiene un número par de raíces, contando sus multiplicidades en un maximal $[t, u]$, entonces la derivada parcial de cada elemento de $P(s, A(K))$ con respecto a s tiene un número impar de raíces en algún intervalo maximal $[t_0, u_0]$ cuya intersección con $[t, u]$ no es vacía.

Como la derivada parcial de P con respecto a s es en si misma una familia compacta convexa de polinomios y como tal mantiene las propiedades que tienen los conjuntos P . Para conocer si P tiene alguna raíz en un intervalo maximal que contenga a $[t_0, u_0]$, basta evaluar a $P(\cdot, A(K))$ en ese intervalo.

Una vez conocido como obtener los intervalos maximales de un conjunto $P(s, A(K))$ cuando s es real, el siguiente paso, es aplicar los resultados obtenidos para encontrar los maximales de P en el eje imaginario. La evaluación de un conjunto $P(\cdot, A(K))$ en el eje imaginario genera dos familias $\text{Re } P(iw, A(K))$ e $\text{Im } P(iw, A(K))$. Cada una de estas dos familias tienen asociadas un conjunto de maximales. En el lema 19, se muestra que, la intersección vacía de estos dos conjuntos de maximales mas la estabilidad de un elemento es suficiente para garantizar la estabilidad de P .

2.2 Algunas propiedades de las familias de polinomios con coeficientes continuos

A continuación se define el conjunto K , el cual se conoce normalmente como *caja*. Cada componente de este conjunto representa a un parámetro que toma valores, dentro de un intervalo cerrado y acotado.

Definición 1 K es un conjunto de vectores de dimensión m ; cada componente de él toma valores en un intervalo cerrado y acotado. Es decir, K es de la forma $K = K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_m$ donde cada K_j es un intervalo cerrado y acotado de \mathcal{R} .

El conjunto K , tiene dos propiedades importantes: compacidad y convexidad. No se proporciona una demostración de estas propiedades por obtenerse a través de una aplicación simple de la definición de convexidad y los Teoremas de Heine-Borel y Tychonoff, ver Rudin [37].

Lema 1 *El conjunto K es compacto, convexo y conexo.*

Los sistemas dinámicos lineales, tienen asociado un polinomio llamado comúnmente *polinomio característico*. La estabilidad de esta clase de sistemas, en el sentido de entrada acotada salida acotada, depende de la ubicación de las raíces del polinomio

característico. El sistema es estable en el sentido mencionado, si y sólo si todas las raíces del polinomio característico tiene parte real negativa (ver el teorema 8.4 de Chen [16]). A los polinomios que tienen todas sus raíces con parte real negativa se les conoce comúnmente como *polinomios estables*.

El polinomio característico se convierte en una familia de polinomios cuando, en lugar de un vector de parámetros, se tiene un conjunto K de vectores como el descrito anteriormente. Esta situación se presenta con frecuencia, ya sea porque no se conoce con precisión el modelo matemático que describe al sistema, porque los valores de los parámetros varían al envejecer éste o bien porque varían las condiciones de operación que representa el modelo.

Convenciones: Cada elemento de una familia de polinomios P de grado n que genera el conjunto K tiene la forma $p(s, A(K)) = \sum_{j=0}^n A_j(\mathbb{k}) s^{n-j}$ donde cada A_j es una función de K al conjunto de los números reales, \mathfrak{R} , y A representa a la función de K en \mathfrak{R}^{n+1} cuyas funciones coordenadas son A_j .

En este trabajo se considera únicamente el caso en el que todas las funciones A_j son continuas. Se permite que el conjunto P tengan elementos de distinto grado. Se observa que, como la continuidad conserva la conexidad y la compacidad, la imagen de K bajo A_j , $A_j(K)$ es un subconjunto compacto y conexo de \mathfrak{R} (ver el teorema 4.15 de Rudin [38]). Una familia P como la descrita se denominará en este trabajo simplemente como familia o conjunto de polinomios P .

Lema 2 Sean P una familia de polinomios y c un número real. Entonces el conjunto $P(c, A(K)) \subseteq \mathfrak{R}$ es un intervalo cerrado y acotado. (es decir, el conjunto formado por los valores que toman todos los polinomios de la familia en el punto c es un intervalo cerrado y acotado).

Demostración. Considere la función $\phi : K \rightarrow \mathfrak{R}$ dada por:

$$\phi(\mathbb{k}) = \sum_{j=0}^n A_j(\mathbb{k}) c^{n-j}$$

Como c es un número fijo y cada $A_j(\cdot)$ es una función continua de \mathbb{k} , se tiene que $\phi(\cdot)$ es una suma de funciones continuas. De manera que $\phi(\cdot)$ misma es una función continua. Observe que $P(c, A(K)) = \phi(K)$ (la imagen de K bajo la función $\phi(\cdot)$). De manera que $P(c, A(K))$ es una imagen continua de un conjunto compacto y convexo. Como la continuidad preserva estas dos condiciones, $P(c, A(K))$ es un conjunto compacto y convexo de \mathfrak{R} . Por lo tanto, $P(c, A(K))$ es un intervalo cerrado y acotado. ■

El siguiente lema muestra que los elementos de P , evaluados en c toman valores no-positivos así como no-negativos, cuando c es una raíz de algún elemento de él.

Lema 3 Sean $P(\cdot, A(K))$ una familia de polinomios y c un número real. Entonces c es raíz de algún elemento de la familia $P(\cdot, A(K))$ si y sólo si existen dos vectores \mathbb{k}^- y \mathbb{k}^+ en K tales que $p(c, A(\mathbb{k}^-)) \leq 0$ y $p(c, A(\mathbb{k}^+)) \geq 0$.

Demostración. Necesidad: Si c es una raíz de algún elemento de $P(\cdot, A(K))$, entonces existe $\mathbb{k} \in K$ tal que $p(c, A(\mathbb{k})) = 0$. Por lo tanto, considerando $\mathbb{k}^- = \mathbb{k} = \mathbb{k}^+$ resulta que $p(c, A(\mathbb{k}^-)) \leq 0$ y $p(c, A(\mathbb{k}^+)) \geq 0$.

Suficiencia: Suponga que existen \mathbb{k}^- y \mathbb{k}^+ en K tales $p(c, A(\mathbb{k}^-)) \leq 0$ y $p(c, A(\mathbb{k}^+)) \geq 0$. Entonces $P(c, A(K))$ es un intervalo cerrado y acotado en \mathfrak{R} que tiene tanto números no-positivos como no-negativos. Por lo tanto, este intervalo contiene el cero. Esto implica que existe $\mathbb{k} \in K$ tal que $p(c, A(\mathbb{k})) = 0$. ■

A continuación se dan dos definiciones que se utilizarán a lo largo de este trabajo:

Definición 2 Un intervalo de raíces es aquel en el cual cada elemento de él es raíz de algún elemento de P .

Definición 3 Un intervalo maximal es aquel intervalo de raíces en el cual ningún elemento de P tiene ceros inmediatamente a la izquierda y a la derecha de sus puntos frontera izquierdo y derecho, respectivamente.

En este trabajo, se asume que todos los intervalos maximales de cualquier familia compacta convexa P están bien definidos; esto quiere decir que ningún punto frontera de ningún intervalo maximal de cualquier P es un punto límite de una sucesión de intervalos maximales de la misma familia. En otras palabras, entre cada dos intervalos maximales de una familia P , existe un intervalo abierto y conexo de números reales, donde P no tiene raíces. Los puntos frontera de intervalos maximales de familia P con estas características deben ser determinadas en forma particular. Este tipo de maximales son generados por familias P cuyos coeficientes están definidos por funciones de tipo oscilatorio que aumenta su frecuencia al acercarse a algún punto específico del dominio. En la sección 2.4 se da un ejemplo de este tipo. Afortunadamente, para los casos de funciones que se utilizan comúnmente en la teoría de control, funciones lineales, afines y polinomiales, no se presenta este problema. Los resultados que se desarrollan en este capítulo son válidos para estas últimas clases de funciones.

Lema 4 *Un intervalo $[t, u]$ de una familia de polinomios P es maximal si y sólo si $[t, u]$ es un intervalo de raíces de P , existen cuatro elementos \mathbb{k}^- , \mathbb{k}^+ , \hbar^- y \hbar^+ de K y un número positivo ε tal que:*

$$p(r, A(\mathbb{k}^-)) \leq p(r, A(\mathbb{k})) \leq p(r, A(\mathbb{k}^+)) \quad (2.1)$$

para toda $r \in [t - \varepsilon, t)$,

$$p(r, A(\hbar^-)) \leq p(r, A(\hbar)) \leq p(r, A(\hbar^+)) \quad (2.2)$$

Además, ninguno de los polinomios $p(r, A(\mathbb{k}^-))$, $p(r, A(\mathbb{k}^+))$, $p(r, A(\hbar^-))$ y $p(r, A(\hbar^+))$ tienen raíces en los intervalos $[t - \varepsilon, t)$ y $(u, u + \varepsilon]$ y

$$p(r, A(\mathbb{k}^-)) p(r, A(\mathbb{k}^+)) > 0 \text{ para toda } r \in [t - \varepsilon, t) \quad (2.3)$$

$$p(r, A(\hbar^-)) p(r, A(\hbar^+)) > 0 \text{ para toda } r \in (u, u + \varepsilon] \quad (2.4)$$

Demostración. Necesidad: Suponga que $[t, u]$ es un intervalo maximal de raíces de P , entonces por continuidad de los elementos de P existen cuatro elementos $\mathbb{k}^-, \mathbb{k}^+, \mathbb{h}^-$ y \mathbb{h}^+ de K y un número positivo ε tal que las desigualdades (2.1) y (2.2) se cumplen. Además, para un ε suficientemente pequeño los intervalos $[t - \varepsilon, t]$ y $(u, u + \varepsilon]$ no pertenecen a ningún maximal por lo que el cero no pertenece a ninguna de las desigualdades (2.1) y (2.2) por lo tanto ninguno de los polinomios $p(r, A(\mathbb{k}^-))$, $p(r, A(\mathbb{k}^+))$, $p(r, A(\mathbb{h}^-))$ y $p(r, A(\mathbb{h}^+))$ tienen raíces en los intervalos $[t - \varepsilon, t]$ y $(u, u + \varepsilon]$ y se cumplen las desigualdades (2.3) y (2.4).

Suficiencia: Si existe algún $r \in (u, u + \varepsilon]$ que es raíz de algún elemento de P entonces $p(r, A(\mathbb{k}^-)) p(r, A(\mathbb{k}^+)) \leq 0$, ya que por hipótesis $p(r, A(\mathbb{k}^-)) \leq p(r, A(\mathbb{k})) \leq p(r, A(\mathbb{k}^+))$. Esto es una contradicción. Análogamente, ningún elemento de $(u, u + \varepsilon)$ es raíz de algún elemento P . por lo tanto $[t, u]$ es un intervalo maximal de raíces de P . ■

Una característica importante de un intervalo de raíces, cerrado y acotado, es que no puede contener un número par de raíces de un elemento de P y un número impar de raíces de otro elemento del mismo conjunto. Para mostrar este hecho se requiere de dos lemas que a continuación se enuncian.

Lema 5 *Sea p un polinomio real que tiene m raíces reales $r_1 < r_2 < \dots < r_m$ en un intervalo (t, u) y sea ε un número positivo tal que:*

$$\varepsilon < \min \{ |r_1 - t|, |r_m - u|, |r_j - r_{j+1}| : 1 \leq j \leq m - 1 \}$$

Entonces los números $p(r_1 - \varepsilon)$ y $p(r_m + \varepsilon)$ tienen diferente signo si y sólo si, el número de raíces de p en (t, u) , contando sus multiplicidades, es impar.

Demostración. ¹Como cada r_j es raíz de p se tiene que el polinomio p se puede factorizar en la forma $p(x) = (x - r_1)^{k_1} (x - r_2)^{k_2} \dots (x - r_m)^{k_m} q(x)$ donde k_j es la multiplicidad de la raíz r_j . Ya que p no tiene más raíces en el intervalo (t, u) ,

¹Esta demostración fue proporcionada al autor por el Dr. Alejandro Illanes Mejía del Instituto de Matemáticas de la UNAM.



el polinomio q carece de raíces en dicho intervalo. En otras palabras, q no se anula en (t, u) . Por tanto, por la continuidad de q , el polinomio q es siempre positivo, o siempre negativo en $[t, u]$.

Ahora bien, se nota que

$$p(r_m + \varepsilon) = (r_m + \varepsilon - r_1)^{k_1} (r_m + \varepsilon - r_2)^{k_2} \cdots (r_m + \varepsilon - r_m)^{k_m} q(r_m + \varepsilon) \quad (2.5)$$

y que todo $r_m + \varepsilon$ es mayor que cada r_j . Por tanto, cada término que aparece entre paréntesis en la ecuación (2.5) es positivo. De manera que el signo $p(r_m + \varepsilon)$ es igual al signo de $q(r_m + \varepsilon)$.

Se nota ahora que

$$p(r_1 - \varepsilon) = (r_1 - \varepsilon - r_1)^{k_1} (r_1 - \varepsilon - r_2)^{k_2} \cdots (r_1 - \varepsilon - r_m)^{k_m} q(r_1 - \varepsilon) \quad (2.6)$$

y que $r_1 - \varepsilon$ es menor que cada r_j . así que todos los términos que aparecen entre paréntesis, en el lado derecho de la ecuación (2.6), son negativos. Por lo tanto el lado derecho de (2.6) es positivo si $S = k_1 + k_2 + \cdots + k_m$ es par, y negativo cuando S es impar.

De este modo se tiene que $p(r_1 - \varepsilon)$ tiene el mismo signo que $q(r_1 - \varepsilon)$ cuando S es par, y diferente signo cuando S es impar. Recuerde que S es igual al número de raíces de $p(\cdot)$ en (t, u) , contando sus multiplicidades. Por lo tanto, $p(r_1 - \varepsilon)$ tiene diferente signo que $p(r_m + \varepsilon)$ si y sólo si S es impar. ■

Lema 6 *Sea P un conjunto de polinomios con un maximal $[t, u]$. La familia de P no puede tener dos elementos tales que uno tenga un número par de raíces y el otro un número impar de raíces, contando multiplicidades, en $[t, u]$.*

Demostración. Como $[t, u]$ es un intervalo maximal de P , dados dos elementos de la familia, generados por dos vectores \mathbb{k}^- y \mathbb{k}^+ de K se tiene por el lema 4, que

$$p(s, A(\mathbb{k}^-)) p(s, A(\mathbb{k}^+)) > 0, \quad (2.7)$$

para toda $s \in [t - \varepsilon, t) \cup (u, u + \varepsilon]$ siendo ε un número positivo suficientemente pequeño. Suponga que $p(s, A(\mathbb{k}^-))$ tiene, contando sus multiplicidades, un número par de raíces en el intervalo $[t, u]$ y que en el mismo intervalo, $p(s, A(\mathbb{k}^+))$ tiene un número impar de raíces (también contando sus multiplicidades). Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $p(s, A(\mathbb{k}^-)) > 0$ para toda $s \in [t - \varepsilon, t)$. entonces, en el mismo intervalo, $p(s, A(\mathbb{k}^+)) > 0$. Por tanto, por el lema 5 $p(s, A(\mathbb{k}^-)) > 0$ y $p(s, A(\mathbb{k}^+)) < 0$ para cada $s \in (u, u + \varepsilon]$. Esto contradice la ecuación (2.7). ■

Lema 7 *Sea $p(s, A(\mathbb{k}))$ un elemento de un conjunto de polinomios $P(s, A(K))$ que tiene un número impar de raíces, contando multiplicidades en $[t, u]$; entonces, cada elemento de $P(s, A(K))$ tiene un número impar de raíces, contando multiplicidades en $[t, u]$.*

Demostración. Suponga que existe un elemento $p(s, A(h))$ de $P(s, A(K))$ que no tiene raíces en $[t, u]$. Dado que $[t, u]$ es maximal de P , por el lema 3, para un ε positivo suficientemente pequeño

$$p(s, A(\mathbb{k}))p(s, A(h)) > 0 \text{ para todo } s \in [t - \varepsilon, t) \cup (u, u + \varepsilon] \quad (2.8)$$

Se asume sin pérdida de generalidades que $p(s, A(\mathbb{k})) < 0$ para todo $s \in [t - \varepsilon, t)$, entonces, por el lema 4, $p(s, A(h)) > 0$ en el mismo intervalo y, como no tiene raíces en $[t, u]$, también en $(u, u + \varepsilon]$.

Por el lema 5, $p(s, A(\mathbb{k})) < 0$ para todo $s \in (u, u + \varepsilon]$, Entonces $p(s, A(\mathbb{k}))p(s, A(h)) < 0$ para todo $s \in (u, u + \varepsilon]$, esto contradice la igualdad (2.8). Por lo tanto $p(s, A(h))$ tiene raíces en $[t, u]$ y, por el lema 6, tiene un número impar de ellas, contando multiplicidades, en el mismo intervalo. ■

Cuando una familia P de polinomios, es acotada (la evaluación de cada elemento de P en un punto es menor o mayor según sea el caso que la evaluación de un elemento específico de P evaluado en el mismo punto) por un mismo par de polinomios en todos los puntos de un intervalo no degenerado y acotado de raíces $[t, u]$, todas las raíces

que tengan ese par de polinomios en (t, u) son de multiplicidad par, como se enuncia en el siguiente lema.

Lema 8 *Suponga que r es una raíz real de cualesquiera dos polinomios que acotan a P en todo intervalo de raíces $[t, u]$ con $t < u$. Si $r \in (t, u)$, entonces r es de multiplicidad par.*

Demostración. Sean $p(s, A(\mathbb{k}^-))$ y $p(s, A(\mathbb{k}^+))$ dos elementos que acotan a $P(s, A(K))$ para $s \in [t, u]$. Entonces, en el intervalo $[t, u]$, $p(s, A(\mathbb{k}^-)) \leq 0$ y $p(s, A(\mathbb{k}^+)) \geq 0$. Puesto que r es raíz de $p(s, A(\mathbb{k}^-))$ o $p(s, A(\mathbb{k}^+))$ se tiene que $p(r, A(\mathbb{k}^-)) = 0$ ó $p(r, A(\mathbb{k}^+)) = 0$.

Si se analiza el caso $p(r, A(\mathbb{k}^-)) = 0$, se observa que como en el intervalo (t, u) , $p(s, A(\mathbb{k}^-))$ no es positivo, existe un número positivo ε , suficientemente pequeño, tal que $p(v, A(\mathbb{k}^-)) < 0$ siempre que v cumpla la desigualdad $0 < |r - v| < \varepsilon$. Entonces, por el lema 5, r es de multiplicidad par.

Para el caso $p(s, A(\mathbb{k}^+)) = 0$, se puede dar un argumento similar al anterior, pues ahora se cumple que $p(v, A(\mathbb{k}^+)) > 0$. ■

Hasta ahora se ha considerado que los intervalos de raíces son cerrados y acotados; sin embargo, éstos pueden también ser cerrados y no acotados. Los lemas 10 y 11 dan condiciones necesarias y suficientes para que una familia P , que puede tener elementos de distinto grado, posea intervalos de raíces no acotados.

La demostración de los lemas mencionados está basada en el lema 2 y un resultado conocido del álgebra superior, el cual establece que dado un polinomio en la variable s , para un módulo de s suficientemente grande, se cumple que el módulo del término de mayor grado, es mayor que el módulo de la suma de los demás términos (ver, la página 152 de Kurosch [32]).

El lema 9 es un resultado preliminar requerido en la prueba de los lemas 10 y 11. Se omite la demostración por ser fácilmente deducible a partir de lo mencionado en el párrafo anterior.

Lema 9 Sea $p_1(\cdot)$ y $p_2(\cdot)$ dos polinomios de grado n y ℓ , respectivamente (con $\ell \leq n$), definidos por

$$p_1(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^{n-j} \quad (2.9)$$

y

$$p_2(s) = \sum_{j=n-\ell}^n b_j s^{n-j} \quad (2.10)$$

en donde a_0 y $b_{n-\ell}$ son diferentes de cero. Entonces, las evaluaciones de $p_1(\cdot)$ y $p_2(\cdot)$ a partir de un real s con valor absoluto suficientemente grande, tienen signos opuestos, si y sólo si, $a_0 s^n$ y $b_{n-\ell} s^\ell$ tiene signos opuestos.

Lema 10 Un conjunto de polinomios P , tiene un intervalo de raíz $[t, \infty)$ si y sólo si, P , contiene dos polinomios, uno de grado n y el otro de grado $\ell \leq n$, definidos por

$$p(s, A(\mathbb{k}_1)) = \sum_{j=0}^n A_j(\mathbb{k}_1) s^{n-j}, \quad (2.11)$$

y

$$p(s, A(\mathbb{k}_2)) = \sum_{j=n-\ell}^n A_j(\mathbb{k}_2) s^{n-j}, \quad (2.12)$$

tales que $A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$.

Demostración. Necesidad: Si P tiene un intervalo de raíces $[t, \infty)$ entonces, por el lema 3, para cada $s \in [t, \infty)$ existen un par de polinomios $p(s, A(\mathbb{k}^-)) \leq 0$ y $p(s, A(\mathbb{k}^+)) \geq 0$. Como el intervalo de raíces no está acotado por la derecha, P debe contener un par de polinomios $p(s, A(\mathbb{k}_1))$ y $p(s, A(\mathbb{k}_2))$ (definidos respectivamente por las ecuaciones (2.11) y (2.12)) tales que las evaluaciones, desde un real s hasta infinito, tienen signos opuestos, uno con respecto al otro. Por el lema 9, $A_0(\mathbb{k}_1) s^n A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) s^\ell$ es negativo para un real s suficientemente grande, en este caso, a partir de algún punto positivo del intervalo $[t, \infty)$. Por lo tanto $A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$.

Suficiencia: Suponga que P contiene dos polinomios definidos por las ecuaciones (2.11) y (2.12) tales que $A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$. Por el lema 9, para $s > b$ (b es un

real que depende de ambos polinomios) se tiene que $p(s, A(\mathbb{k}_1))$ y $p(s, A(\mathbb{k}_2))$ tienen signos opuestos. Por el lema 3, P tiene elementos con raíces en cada punto del intervalo (b, ∞) . Por continuidad de los polinomios sobre los reales, $p(b, A(\mathbb{k}_1)) \leq 0$ o viceversa. El intervalo (b, ∞) se extiende hasta un punto $t \leq b$ que es el punto frontera izquierdo del intervalo de raíces de P que lo contiene. ■

El lema 10 tiene su contraparte (ver el lema 11), es decir, existen condiciones necesarias y suficientes para que P tenga raíces en un intervalo $(-\infty, u]$.

Lema 11 *Un conjunto de polinomios P tiene un intervalo de raíces $(-\infty, u]$ si y sólo si, P contiene dos polinomios, uno de grado n y el otro de grado $\ell \leq n$, definido por*

$$p(s, A(\mathbb{k}_1)) = \sum_{j=0}^n A_j(\mathbb{k}_1) s^{n-j}, \quad (2.13)$$

y

$$p(s, A(\mathbb{k}_2)) = \sum_{j=n-\ell}^n A_j(\mathbb{k}_2) s^{n-j}, \quad (2.14)$$

tales que $(-1)^{n+\ell} A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$.

La demostración es similar a la efectuada en el lema 10 por lo que se omite. La condición $A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$ del lema 10, cambia en el lema 11 por $(-1)^{n+\ell} A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$. De acuerdo con el lema 9, en ambos casos, la condición debe ser $A_0(\mathbb{k}_1) s^n A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) s^\ell < 0$. Sin embargo, esta expresión fue simplificada por que para todo real positivo s , la condición $A_0(\mathbb{k}_1) s^n A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) s^\ell$ es equivalente a la condición $A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$ y, para todo real negativo s , a la condición $(-1)^{n+\ell} A_0(\mathbb{k}_1) A_{n-\ell}(\mathbb{k}_2) < 0$.

En los dos lemas anteriores, puede suceder que el punto u sea ∞ o que t sea $-\infty$, en ambos casos, $P(\cdot)$ tiene raíces en todos los números reales.

2.3 Detección de intervalos de raíces reales

Hasta ahora se han dado condiciones necesarias y suficientes para que los conjuntos P tengan intervalos cerrados de raíces reales. Esta clase de intervalos de raíces son los únicos (de raíces reales) que una familia compacta y convexa de polinomios puede tener. La razón de esto es que, para cada número real s , $P(s, A(K))$ es acotada por dos polinomios que pertenecen a él (ver el lema 2); en particular, cuando s es un punto frontera de un intervalo maximal, existe un vector de parámetros \mathbb{k}^* tal que $p(s, A(\mathbb{k}^*))$ es un elemento de $P(s, A(K))$. En otras palabras, los puntos frontera de cualquier intervalo maximal de P , son raíces de algún elemento de ella. Por lo tanto, todos los intervalos maximales que puede tener un conjunto P son cerrados.

Una vez que se conocen las raíces reales de algún elemento de la familia P , la obtención de los intervalos maximales que las contienen se consigue generando una “cubierta” partiendo de las raíces conocidas para dichos intervalos.

Por ejemplo, para encontrar el intervalo maximal $[t, u]$ que contiene una raíz real c de un elemento de P , se deben encontrar dos polinomios $p_{1c}(\cdot)$ y $p_{2c}(\cdot)$ que evaluados en c tengan signos opuestos o al menos tomen el valor cero. Para ello basta recordar que el lema 3 garantiza la existencia de dos elementos P que al evaluarlos en c uno resulta no-positivo y el otro no-negativo.

Con base en lo anterior se deben calcular las raíces reales de $p_{1c}(\cdot)$ y $p_{2c}(\cdot)$ y seleccionar, primero la que esté más cerca a la izquierda del punto c , denotado d ; nuevamente, se deben encontrar los polinomios $p_{1d}(\cdot)$ y $p_{2d}(\cdot)$ con las mismas características de $p_{1c}(\cdot)$ y $p_{2c}(\cdot)$. El procedimiento se repite hasta encontrar el punto frontera t descrito en el lema 4. Para encontrar el punto frontera u , se repite el mismo procedimiento, partiendo de la evaluación de P en la raíz real de $p_{1c}(\cdot)$ y $p_{2c}(\cdot)$ que se encuentre mas cerca del punto c por la derecha.

Como la detección de un intervalo maximal es posible si se conoce un elemento del mismo, para determinar todos los intervalos maximales de un conjunto P , es necesario

conocer (al menos) un elemento de cada uno de dichos intervalos.

El siguiente problema a resolver es la detección de todos los intervalos maximales que tiene el conjunto P , mediante el cálculo de las raíces de un número mínimo de elementos de él. La detección de raíces en intervalos no acotados se hace muy fácilmente por inspección, con la ayuda de los lemas 10 y 11. Sin embargo, para el caso de intervalos acotados el problema es mas complicado.

El lema 6 permite afirmar que en cada intervalo maximal acotado, no existen dos elementos de P tales que uno tenga un número par y el otro un número impar de raíces, contando la multiplicidad de ellas. Si el número de ellas es impar, entonces se tiene que cada polinomio de P tiene una raíz en ese intervalo. Por lo tanto, basta tomar cualquier polinomio de P para asegurar que una de las raíces de él es un punto de dicho intervalo.

Cuando un intervalo maximal $[t, u]$ contiene un número par de raíces, contando sus multiplicidades, de un elemento de P , la selección aleatoria de un elemento de P no garantiza que dicho polinomio tenga raíces en ese intervalo.

Por ejemplo, dada la familia $P(s, A(K)) = s^2 + Ks - K + 35$ con $K = [0, 10]$, las raíces de cualquier elemento de ella, $p(s, A(k)) = s^2 + ks - k + 35$ con $k \in [0, 10]$, son complejas. Sin embargo, para $k = 10$, $p(s, A(10)) = s^2 + 10s + 25$ tiene dos raíces reales en -5 .

Por lo tanto la selección aleatoria de un elemento de P no garantiza la detección de intervalos que contengan un número par de raíces de ella. En el ejemplo que se acaba de presentar se ve que sólo un elemento, $p(s, A(10))$, permite detectar el único intervalo de raíces reales (con un número par de ellas) que posee P .

A continuación se presenta un método para resolver el problema de detección de intervalos maximales de un conjunto P , el cual está basado en el análisis de un elemento cualquiera de él y la información proporcionada por la derivada parcial de P con respecto a s .

Como primer paso, para resolver el problema en cuestión, se presenta el lema 12,



el cual es un resultado auxiliar requerido en la prueba del teorema.

Lema 12 *Sea p un polinomio que tiene raíces en $-a$ y $-b$. El polinomio p tiene un número par de raíces, contando sus multiplicidades, en un intervalo $[-a, -b]$ si y sólo si, su derivada tiene un número impar de raíces, contando sus multiplicidades, en el mismo intervalo.*

Demostración. Sea $-a < -b$, como p tiene raíces reales en $-a$ y $-b$, p es de la forma

$$p(s) = (s + a)^\alpha (s + b)^\beta q(s) \quad (2.15)$$

en donde α y β son números naturales, $q(s)$ no tiene factores de la forma $s + a$ y $s + b$ y, sin perder generalidad, $-a < -b$. Si se deriva la ecuación (2.15) con respecto a s , se obtiene que

$$\frac{d}{ds}p(s) = (s + a)^{\alpha-1} (s + b)^{\beta-1} r(s), \quad (2.16)$$

en donde

$$r(s) = \{\alpha(s + b) + \beta(s + a)\} q(s) + (s + a)(s + b) \frac{d}{ds}q(s). \quad (2.17)$$

Los factores $s + a$ y $s + b$ que aparecen en la ecuación (2.16) no dividen a $r(s)$ puesto que no dividen ni a $\alpha(s + b) + \beta(s + a)$ ni a $q(s)$. Esto significa que $\frac{d}{ds}p(s)$ tiene raíces de multiplicidad $\alpha - 1$ y $\beta - 1$ en $-a$ y $-b$ respectivamente.

(\Rightarrow) Suponga que $p(\cdot)$ tiene un número par de raíces en el intervalo $[-a, -b]$. Si $\alpha + \beta$ es un número impar, entonces de la ecuación (2.15) se deduce que $q(s)$ tiene un número impar de raíces en el intervalo $[-a, -b]$. Entonces, por el lema 5, $q(-a)q(-b) < 0$. Por otra parte, de la ecuación (2.17) resulta que

$$r(-a) = \alpha(b - a)q(-a), \quad (2.18)$$

y

$$r(-b) = \beta(a - b)q(-b). \quad (2.19)$$

De aquí que $r(-a)r(-b) > 0$. Esto significa, por el lema 6, que $r(\cdot)$ tiene un número par de raíces en el intervalo $[-a, -b]$.

Por otra parte, de acuerdo con la ecuación (2.16), el número de raíces de $\frac{d}{ds}p(s)$ en el intervalo $[-a, -b]$ se obtiene sumando $\alpha + \beta - 2$ al número de raíces de $r(\cdot)$ en el intervalo $[-a, -b]$ (que se vio es un número par). Como se asume que $\alpha + \beta$ es un número impar, se tiene como consecuencia de lo anterior que $\frac{d}{ds}p(s)$ tiene un número impar de raíces en el intervalo $[-a, -b]$.

Sea ahora $\alpha + \beta$ un número par. Entonces, por la ecuación (2.15), $q(\cdot)$ tiene un número par de raíces en el intervalo $[-a, -b]$ y aplicando el lema 5, se tiene que $q(-a)q(-b) > 0$. Utilizando este resultado y las ecuaciones (2.18) y (2.19), se concluye que $r(-a)r(-b) < 0$. Por lo tanto, aplicando de nuevo el lema 5, $r(\cdot)$ tiene un número impar de raíces en el intervalo $[-a, -b]$.

(\Leftarrow) Asuma que $p(\cdot)$ tiene un número impar de raíces en $[-a, -b]$. Si $\alpha + \beta$ es impar, entonces $q(-a)q(-b) > 0$ y por tanto $r(-a)r(-b) < 0$. Por lo tanto $\frac{d}{ds}p(s)$ tiene un número par de raíces en el intervalo $[-a, -b]$.

Si $a = b$, entonces de las ecuaciones (2.15) y (2.16) se deduce que

$$p(s) = (s + a)^{\alpha + \beta} q(s), \quad (2.20)$$

y

$$\frac{d}{ds}p(s) = (s + a)^{\alpha + \beta - 1} \left\{ (\alpha + \beta) q(s) + (s + a) \frac{d}{ds}q(s) \right\}. \quad (2.21)$$

Esto significa que $p(\cdot)$ tiene una raíz de multiplicidad par en $-a$ si y sólo si, su derivada tiene una raíz de multiplicidad impar en el mismo punto. ■

Lema 13 *Sea $p(s, A(\mathbb{k}))$ un elemento de un conjunto de polinomios $P(s, A(K))$ con un número par de raíces, contando sus multiplicidades en un maximal $[t, u]$, entonces la derivada parcial de cada elemento de $P(s, A(K))$ tiene un número impar de raíces en algún intervalo maximal $[t_0, u_0]$ cuya intersección con $[t, u]$ no es vacía.*

Demostración. Como $p(s, A(\mathbb{k}))$ tiene un número impar de raíces en $[t, u]$, por el lema 12, $\frac{\partial p(s, A(\mathbb{k}))}{\partial s}$ tiene un número impar de raíces en $[t, u]$. Por el lema 6, no todas

las raíces de $\frac{\partial p(s, A(k))}{\partial s}$ pueden pertenecer a maximales pares, ya que en cada maximal par sólo puede tener un número par de ellas y el total en $[t, u]$ es impar.

Entonces $\frac{\partial p(s, A(k))}{\partial s}$ tiene una raíz en $[t, u]$ que pertenece también a un maximal impar $[t_0, u_0]$ de $\frac{\partial p(s, A(k))}{\partial s}$.

Por lo tanto, la intersección de $[t, u]$ y $[t_0, u_0]$ no es vacía. ■

El lema 13 permite detectar intervalos de raíces en los cuales al menos un elemento de P tiene un número par de raíces, contando sus multiplicidades. La detección se hace derivando al conjunto P parcialmente con respecto a s , P' , y revisando si en los intervalos maximales de P' , que tienen un número impar de raíces, existen maximales de P con un número par de raíces.

En resumen, para obtener todos los intervalos maximales de una familia de polinomios P , se requiere hacer lo siguiente:

1. Seleccionar un polinomio p de P y calcular sus raíces reales.
2. Determinar todos los intervalos maximales que contienen a las raíces de P , denotado por MP .
3. Si p tiene raíces complejas, obtener todos los intervalos de maximales de la derivada parcial de P con respecto a s que tienen un número impar de raíces, denotado por MP' .
4. Si la diferencia de los intervalos maximales $MP' \setminus MP$ es no vacía, evaluar a P en dicha diferencia.
5. Si existe algún r contenido en $MP' \setminus MP$ que es raíz de algún elemento de P obtener el intervalo maximal correspondiente.

Por otra parte como al evaluar al conjunto $P(s, A(K))$ en el eje imaginario se obtiene:

$$P(iw, A(K)) = \operatorname{Re} P(iw, A(K)) + i \operatorname{Im} P(iw, A(K))$$

donde $\text{Re } P(iw, A(K))$ e $\text{Im } P(iw, A(K))$ son también familias de polinomios, se pueden aplicar los resultados obtenidos para encontrar el conjunto de maximales de $\text{Re } P(iw, A(K))$, Ψ_{Re} y de $\text{Im } P(iw, A(K))$, Ψ_{Im} . Por lo tanto ambas familias tienen maximales. Basados en esta observación, se presenta a continuación un lema que da condiciones suficientes para la estabilidad Hurwitz de un conjunto P .

Dado que no existe ninguna restricción en cuanto al tipo de función que puede ser $A(\cdot)$ (aparte de ser continua), es una alternativa para el teorema del Mapeo de L. Zadeh y C. Desoer [45], cuando las funciones $A_j(\cdot)$ son multiafines.

Lema 14 *Sea P un conjunto de polinomios, de grado n , que tiene un elemento estable. El conjunto P es estable si la intersección de Ψ_{Re} y Ψ_{Im} es vacía.*

Demostración. Como $p(\cdot)$ es estable todas sus raíces se encuentran en el semiplano complejo izquierdo abierto; es decir en $\mathcal{D} = \{(a + ib) \in C : a < 0\}$.

Por otra parte, si $\Psi_{\text{Re}} \cap \Psi_{\text{Im}} = \phi$, para toda w real y todo $k \in K$, no existe ningún $p(\cdot) \in P$ tal que $p(iw, A(K)) = \text{Re } p(iw, A(K)) + i \text{Im } p(iw, A(K)) = 0$. Esto significa que P no tiene raíces imaginarias.

Por el teorema de Cruce de Frontera, ver Chapellat et al [19], con $\partial\mathcal{D} = \{iw : w \in \mathfrak{R}\}$, P tiene todas sus raíces en \mathcal{D} . Por lo tanto P es estable. ■

A continuación se dan dos ejemplos de aplicación de los resultados presentados en este capítulo.

Ejemplo 1 *Determinar si la familia $P(s, A(K)) = s^2 + (K_1K_2 + 2)s + K_1 - K_1K_2 + 31$, con $K_1 = [0, 2]$ y $K_2 = [0, 4]$ es Hurwitz estable.*

Solución 1 *La evaluación en el eje imaginario está definida por $P(iw, A(K)) = \text{Re } P(iw, A(K)) + i \text{Im } P(iw, A(K))$ con*

$$\text{Re } P(iw, A(K)) = -w^2 + K_1 - K_1K_2 + 31 \quad (2.22)$$

e

$$\operatorname{Im} P(iw, A(K)) = (K_1 K_2 + 2)w \quad (2.23)$$

Para determinar Ψ_{Re} se selecciona al azar un elemento de $\operatorname{Re} P(iw, A(K))$, por ejemplo con $\mathbb{k}_1 = (k_1^+, k_2^+) = (2, 4)$;

$$\operatorname{Rep}(iw, A(\mathbb{k}_1)) = -w^2 + 25 \quad (2.24)$$

con raíces $\{\pm 5\}$.

El siguiente paso consiste en evaluar a $\operatorname{Re} P(iw, A(K))$ para $w = 5$, con el fin de determinar el maximal que contiene a este punto

$$\operatorname{Re} P(i5, A(K)) = K_1 - K_1 K_2 + 6 \quad (2.25)$$

De (2.25) se observa que el elemento de (2.22) cuya evaluación (en $w = 5$) produce el real mas pequeño es precisamente el definido en (2.24); a su vez, el máximo es generado por el vector $\mathbb{k}_2 = (k_1^+, k_2^-) = (2, 0)$ con

$$\operatorname{Rep}(iw, A(\mathbb{k}_2)) = -w^2 + 33 \quad (2.26)$$

con raíces $\{\pm\sqrt{33}\}$.

Evaluando a $\operatorname{Re} P(iw, A(K))$ en $w = \sqrt{33}$,

$$\operatorname{Re} P(i\sqrt{33}, A(K)) = K_1 - K_1 K_2 - 2 \quad (2.27)$$

Por lo que, al igual que para $w = 5$, se observa que:

$$\operatorname{Rep}(iw, A(\mathbb{k}_1)) \leq \operatorname{Rep}(iw, A(\mathbb{k})) \leq \operatorname{Rep}(iw, A(\mathbb{k}_{21})) \quad \forall \mathbb{k} \in K$$

Por el lema 4, $[5, \sqrt{33}]$ es un maximal buscado y por simetría $[-\sqrt{33}, -5]$ también lo es.

Por lo tanto $\Psi_{\operatorname{Re}} = [-\sqrt{33}, -5] \cup [5, \sqrt{33}]$.

Por otra parte, como $K_1 K_2 + 2 = [2, 8] > 0$, de (2.23) se observa que $0 \in \operatorname{Im} P(iw, A(K))$ sólo si $w = 0$; esto significa que el único maximal de $\operatorname{Im} P(iw, A(K))$ es $\Psi_{\operatorname{Im}} = [0]$; entonces $\Psi_{\operatorname{Re}} \cap \Psi_{\operatorname{Im}} = \phi$.

Además, $p(s, A(\mathbb{k}_1)) = s^2 + 10s + 25$ es Hurwitz estable.

Por el lema 14, $P(s, A(K))$ es Hurwitz estable.

Ejemplo 2 Determinar si la familia $P(s, A(K)) = s^2 + K_1K_2s + K_1 - K_1K_2 + 31$, con $K_1 = [0, 2]$ y $K_2 = [0, 4]$ es Hurwitz estable.

Solución 2 Como $\text{Re } P(iw, A(K))$ es igual al del ejemplo anterior, $\Psi_{\text{Re}} = [-\sqrt{33}, -5] \cup [5, \sqrt{33}]$.

Por otra parte, $\text{Im } P(iw, A(K)) = K_1K_2w$ contiene al cero sólo si $w = 0$ o bien para todo $w \in \mathfrak{R}$, si se selecciona al vector $\mathbb{k}_3 = (k_1^-, k_2^-) = (0, 0)$; en este caso $\text{Im } p(iw, A(\mathbb{k}_3)) = 0$ para todo $w \in \mathfrak{R}$. Entonces $\Psi_{\text{Im}} = \mathfrak{R}$ y $\Psi_{\text{Im}} \cap \Psi_{\text{Re}} = \Psi_{\text{Re}} \neq \phi$.

Para esta clase de problemas el lema 14 no da información sobre la estabilidad de $P(s, A(K))$; sin embargo se puede comprobar que $p(iw, A(\mathbb{k}_3))$ es inestable.

La dificultad para concluir la estabilidad o no de una familia $P(s, A(K))$ motiva el análisis para el caso en que la intersección de maximales no es vacía. Este es el tema desarrollado en el siguiente capítulo, aunque el análisis se restringe a familias de polinomios con coeficientes afines.

2.4 Raíces reales de una familia de polinomios con coeficientes continuos

Para finalizar este capítulo cabe mencionar que existen casos de conjuntos P cuyos coeficientes no son funciones del tipo multiafin o polinómica, en que la detección de maximales requiere un análisis particular. En el ejemplo siguiente se analiza el caso en que P contiene una sucesión de maximales que tienden a un punto frontera de otro maximal.

Ejemplo 3 Encontrar todos los intervalos de raíces reales de la familia de polinomios P , generada por:

$$p(s, A(t)) = s^3 + (1 + 2 \operatorname{sen} t^{-1}) ts^2 + (1 + 2 \operatorname{sen} t^{-1}) t^2 s + t^3$$

cuando t toma todos los valores del intervalo $[0, 10^{10}]$. Se considera que $t^{-1} \operatorname{sen} t^{-1} = 0$ si $t = 0$

Solución 3 El polinomio $p(s, A(t))$ puede ser factorizado como

$$p(s, A(t)) = (s + t) (s^2 - 2t \operatorname{sen} t^{-1} s + t^2).$$

De donde las tres raíces s_1, s_2 y s_3 de este polinomio son:

$$s_1 = -t, \quad s_2 = t (\operatorname{sen} t^{-1} + i \cos t^{-1}) \quad \text{y} \quad s_3 = t (\operatorname{sen} t^{-1} - i \cos t^{-1}).$$

La raíz s_1 siempre es no-positiva porque t toma valores únicamente en el intervalo $[0, 10^{10}]$. Por otra parte las raíces s_2 y s_3 son reales sólo cuando $\cos t^{-1} = 0$; es decir, cuando $t^{-1} = \frac{(2n-1)\pi}{2}$ ó equivalentemente cuando $t = \frac{2}{(2n-1)\pi}$, donde n es cualquier número natural.

Si n es impar, las raíces s_2 y s_3 son positivas e iguales a t . Mientras que, si n es par, las raíces s_2 y s_3 son negativas e iguales a $-t$. Por lo que se puede decir que $p(s, A(t))$ tiene raíces positivas únicamente en los puntos en los cuales $t^{-1} = \frac{(4n+1)\pi}{2}$, donde n es cualquier número natural.

Es decir las únicas raíces positivas de P son todos los puntos $t = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ con $n = 1, 2, \dots$.

Capítulo 3

\mathcal{D} -estabilidad Robusta de Conjuntos de Polinomios con Coeficientes Afines

3.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar un método para resolver el problema que consiste en determinar si las raíces de todos los elementos de un conjunto de polinomios P con coeficientes afines están dentro de una cierta región \mathcal{D} . La clase de regiones \mathcal{D} donde el método es aplicable incluye el semiplano complejo izquierdo y el círculo unitario.

En la sección 3.2 se presenta un método basado en el álgebra superior, que permite resolver el problema arriba descrito, cuando los coeficientes de la familia P dependen de un solo parámetro real común. El resultado sirve en general para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos indeterminadas (Kuroschi [32]) y se utiliza en el problema de estabilidad para encontrar si un polinomio, que depende de una variable y un parámetro que toma valores en un compacto, tiene raíces en la frontera $\partial\mathcal{D}$, de una región \mathcal{D} admisible.

Otro problema importante, que puede ser resuelto usando el método descrito en la sección 3.2 y que fue planteado por Bialas y Garloff [12] y Bialas [11], es el de determinar si, dados dos polinomios complejos estables, en general de distinto grado, la combinación convexa de ellos es estable. La solución dada por los autores mencionados requiere encontrar los valores característicos del producto de la matriz Hurwitz, ver def. 4.7.3 de Barmish [5], de uno de los polinomios estables y la inversa de la matriz Hurwitz del otro. Si se utiliza el resultado de Kuroschi [32], la obtención de la solución se reduce a encontrar las raíces reales de orden dos y a evaluar a dos ecuaciones en esas raíces, ver el ejemplo 4.

La sección 3.3 está dedicada a establecer algunas definiciones y observaciones que se requieren para obtener los resultados de \mathcal{D} -estabilidad de conjuntos P con coeficientes afines cuando existe más de un parámetro que toma valores en un intervalo cerrado y acotado.

Finalmente, en la sección 3.4, parte medular de este trabajo, se presenta un método para resolver el problema planteado cuando la dimensión de K es mayor que uno. La ventaja con respecto al definido por la aplicación del Teorema de las Aristas es que no requiere revisar la estabilidad de todas las combinaciones convexas de todos los polinomios extremos de P .

3.2 Estabilidad Hurwitz de familias de polinomios con un parámetro variable

Las raíces de una familia de polinomios, $P((iw, A(K))) = \text{Re } P((iw, A(K))) + i \text{Im } P((iw, A(K)))$, cuyos coeficientes son funciones polinómicas. y K es de dimensión uno, se puede obtener mediante la solución del sistema

$$\text{Re } p((iw, A(k))) = 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Im } p((iw, A(k))) = 0 \quad (3.2)$$



con $w \in \mathfrak{R}$ y $k \in K$.

El caso particular en el que los polinomios de los coeficientes son de grado menor o igual a uno, puede ser resuelto con las técnicas descritas en las referencias Bialas y Garloff [12] y Bialas [11]. También se puede aplicar el método del lugar de las raíces, ver sección 4.3 de Barmish [7]. Sin embargo, cuando los coeficientes polinomiales son de grado mayor que uno, el problema es más complicado. En general, para coeficientes polinómicos, el sistema de ecuaciones (3.6) y (3.7) puede resolverse con el resultado presentado en la sección cincuenta y cuatro de Kuroschi [32]. (Eliminación de una indeterminada en un sistema de dos ecuaciones con dos indeterminadas).

A continuación se presenta un resumen de la información que se encuentra en las páginas 345, 348, 349 y 350 de Kuroschi [32] utilizando la notación del autor.

”De este modo, la solución del sistema (3.3) y (3.4) ha sido reducido al cálculo de las raíces de un polinomio en una indeterminada y , o sea, se ha eliminado la indeterminada x en el sistema de polinomios (3.3) y (3.4).

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + \dots + a_{n-1}(y)x + a_n(y). \quad (3.3)$$

$$g(x, y) = b_0(y)x^s + b_1(y)x^{s-1} + \dots + b_{s-1}(y)x + b_s(y). \quad (3.4)$$

Para ilustrar el procedimiento se presenta a continuación un ejemplo que contiene un coeficiente definido por un polinomio de grado dos.

Ejemplo 4 Dada una familia de polinomios

$$P(s, A(K)) = s^5 + 11s^4 + 39s^3 + (90 + K^2)s^2 + (116 + 2K)s + (184 + 4K) \quad (3.5)$$

determinar para que elementos \mathbb{k} de K , considerando a $K = \mathfrak{R}$, $p(s, A(\mathbb{k}))$ es Hurwitz estable.

Solución 4 Para resolver el problema se buscan primero los valores de \mathbb{k} para los cuales $p(iw, A(\mathbb{k})) = 0$. Para la familia (3.5), la pregunta es si existe un par de números reales w y \mathbb{k}^* tales que $p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = 0$, donde p es algún elemento de P . En otras palabras se busca un par de números reales w y \mathbb{k}^* tales que $p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = 0$, donde

$$p(iw, A((\mathbb{k}^*)^2)) = \operatorname{Re} p(iw, A(\mathbb{k}^*)) + \operatorname{Im} p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = 0 + 0i,$$

Lo cual se traduce en:

$$p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = 11w^4 - (90 + \mathbb{k}^{*2})w^2 + (184 + 4\mathbb{k}^*) + i\{w^5 - 39w^3 + (116 + 2\mathbb{k}^*)w\} = 0;$$

es decir

$$\operatorname{Re} p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = 11w^4 - (90 + \mathbb{k}^{*2})w^2 + (184 + 4\mathbb{k}^*) = 0 \quad (3.6)$$

e

$$\operatorname{Im} p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = w^5 - 39w^3 + (116 + 2\mathbb{k}^*)w = 0 \quad (3.7)$$

Aplicando el método de Kuroschi a la solución del sistema (3.6) y (3.7) éste se puede reescribir como

$$\operatorname{Re} p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = -w^2\mathbb{k}^{*2} + 4\mathbb{k}^* + 11w^4 - 90w^2 + 184 = 0 \quad (3.8)$$

e

$$\operatorname{Im} p(iw, A(\mathbb{k}^*)) = 2w\mathbb{k}^* + w^5 - 39w^3 + 116w = 0 \quad (3.9)$$

y la resultante es: $F(w) = R_w(\operatorname{Re} p, \operatorname{Im} p)$, donde

$$F(w) = \begin{vmatrix} -w^2 & 4 & 11w^4 - 9w^2 + 184 \\ 2w & w^5 - 39w^3 + 116w & 0 \\ 0 & 2w & w^5 - 39w^3 + 116w \end{vmatrix}$$

es decir, $F(w) = -w^{12} + 78w^{10} - 1753w^8 + 9084w^6 - 13504w^4 - 192w^2$

Las doce raíces de $F(w)$ son $\{0, 0, \pm 1.7808, \pm 1.8354, \pm 5.8869, \pm 6.0678, \pm i 0.1187\}$

Existen nueve parejas (w, \mathbb{k}^*) que satisfacen simultáneamente a las ecuaciones (3.8) y (3.9) estas son :

$$(0, -46), (-1.7808, -1.1864), (1.7808, 1.1864), (-1.8354, 2.0177), (1.8354, 2.0177), \\ (-5.8869, 17.2776), (5.8869, 17.2776), (-6.0678, -17.8342) \text{ y } (6.0678, -17.8342).$$

Esto significa que la familia de polinomios (3.5) tiene nueve parejas de raíces, cuando \mathbb{k} y w toman valores desde menos infinito hasta infinito.

Y se puede concluir que cada elemento $p(s, A(\mathbb{k}))$ tiene todas sus raíces fuera del eje imaginario para toda \mathbb{k} que pertenece al intervalo

$$(-\infty, -46) \cup (-46, -17.8342) \cup (-17.8342, -1.1864) \\ \cup (-1.1864, 2.0177) \cup (2.0177, 17.2776) \cup (17.2776, \infty)$$

Tomando un punto arbitrario de cada uno de estos intervalos abiertos, se puede comprobar que $p(s, A(\mathbb{k}))$ es estable si esa \mathbb{k} arbitraria está en los intervalos $(-17.8342, -1.1864)$ ó $(2.0177, 17.2776)$. Por el contrario es inestable si pertenece a cualquiera de los otros cuatro intervalos abiertos.

Por lo tanto, $p(s, A(\mathbb{k}))$ es estable para todo \mathbb{k} que pertenece al intervalo abierto $(-17.8342, -1.1864) \cup (2.0177, 17.2776)$ e inestable para el complemento de éste en los números reales.

Del ejemplo 4 se concluye lo siguiente:

- i) El probar valores extremos de los parámetros no es, en general, suficiente para verificar estabilidad. Por ejemplo, suponga que en lugar de que K sea el conjunto

de los número reales, se defina como el intervalo cerrado $[-15, 15]$, $p(s, A(\mathbb{k}))$ es estable para $\mathbb{k} = -15$ y para $\mathbb{k} = 15$; sin embargo, es inestable para toda \mathbb{k} que esté en el intervalo $[-1.1864, 2.0177]$. Esta conclusión ha sido reportada en [29] para el caso de familias de polinomios con coeficientes afines.

- ii) Es posible determinar si un conjunto de polinomios, cuyos coeficientes dependen continuamente de un parámetro \mathbb{k} , es estable utilizando un método analítico, que resuelve sistemas de dos ecuaciones con dos indeterminadas.

Asimismo, la estabilidad de combinaciones convexas de polinomios estables puede determinarse con el método presentado anteriormente. Este problema consiste en lo siguiente:

Dados dos polinomios complejos estables:

$$f_0(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (3.10)$$

$$f_1(x) = c_0x^n + c_1x^{n-1} + \dots + c_n, \quad (3.11)$$

con a_0 y c_0 distintos de cero y un número λ que toma valores en todo el intervalo $[0, 1]$, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que la familia de polinomios

$$f(x, \lambda) = (1 - \lambda)f_0(x) + \lambda f_1(x) = f_0(x) + (f_1(x) - f_0(x))\lambda \quad (3.12)$$

sea estable.

Este problema fue resuelto con condiciones suficientes por Bialas y Garloff [12] y con condiciones necesarias y suficientes por Bialas [11]. Se propone resolver, de una manera sencilla, con condiciones necesarias y suficientes, considerando que $f_0(\cdot)$ y $f_1(\cdot)$ pueden ser de grados distintos, utilizando el teorema 10 de Kurosch.

Como primer paso se reescribe la ecuación (3.12), utilizando (3.10) y (3.11) como:

$$f(x, A(\lambda)) = \sum_{k=0}^n (a_k + \lambda(c_k - a_k))x^{n-k}, \lambda \in [0, 1] \quad (3.13)$$

Como $F(x, A(\Lambda)) = \sum_{k=0}^n A_k(\Lambda) x^{n-k}$, $\Lambda = [0, 1]$, el conjunto que contiene todos los elementos definidos en (3.13) es compacto, y contiene un polinomio estable, por lo cual esta familia es estable si ningún elemento de el tiene raíces imaginarias.

Evaluando a la ecuación (3.13) en $x = iw$ se obtiene un polinomio de la forma

$$f(iw, A(\lambda)) = \operatorname{Re} f(iw, A(\lambda)) + \operatorname{Im} f(iw, A(\lambda)). \quad (3.14)$$

Las raíces de la ecuación (3.14) pueden ser encontradas con el método de Kurosch [32], considerando a su parte real e imaginaria como un sistema de dos ecuaciones en dos indeterminadas con w real y λ restringida al intervalo $[0, 1]$.

Lema 15 *Dados dos polinomios complejos estables*

$$f_0(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$f_1(x) = c_0 x^m + c_1 x^{m-1} + \dots + c_m,$$

con a_0 y c_0 distintos de 0 y una combinación convexa de ellos

$$f(x, \lambda) = (1 - \lambda) f_0(x) + \lambda f_1(x), \lambda \in [0, 1] \quad (3.15)$$

El polinomio $f(x, \lambda)$ es Hurwitz estable si y sólo si la resultante $F_w = R_w(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} g)$ no tiene raíces reales o bien para cada una de sus raíces reales w^* se cumple que:

$$\operatorname{Re} f(iw^*, \lambda) \neq 0 \text{ ó } \operatorname{Im} f(iw^*, \lambda) \neq 0 \text{ para cada } \lambda \in [0, 1]$$

Demostración. Necesidad: Sea $f(x, \lambda)$ Hurwitz estable, entonces

$$\operatorname{Re} f(iw, \lambda) \neq 0 \text{ ó } \operatorname{Im} f(iw, \lambda) \neq 0 \text{ para cada } w \in \Re \text{ y cada } \lambda \in [0, 1] \quad (3.16)$$

entonces las expresiones (3.16) son ciertas para $F(w) = 0$ ó $F(w) \neq 0$

Suficiencia: Si $F(w) \neq 0 \forall w \in \Re$ o bien, para cada $w^* \in \Re$ que satisface $F(w^*) = 0$ se cumple (3.16), $f(x, \lambda)$ no tiene raíces en el eje imaginario. Además, $f(x, \lambda)$ es conexo por trayectorias con un elemento $f(x, 0)$ que es estable.

Por lo tanto $f(x, \lambda)$ es Hurwitz estable. ■

Ejemplo 5 [12] *Dados dos polinomios estables $f_0(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$; $f_1(x) = x^3 + 0.001x + 10^{-8}$, determine si la combinación convexa de ellos es estable.*

Solución 5

$$f(x, A(\lambda)) = x^3 + (1 - 0.999\lambda)x^2 + (2 - 1.999\lambda)x + 1 - (1 - 10^{-8})\lambda \quad (3.17)$$

$$\operatorname{Re} f(iw, A(\lambda)) = [0.999w^2 - (1 - 10^{-8})]\lambda - w^2 + 1 \quad (3.18)$$

$$\operatorname{Im} f(iw, A(\lambda)) = (-1.999w)\lambda - w^3 + 2w \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} F(w) &= \begin{vmatrix} 0.999w^2 & 1(1 - 10^{-8}) & -w^2 & +1 \\ -1.999w & & -w^3 & +2w \end{vmatrix} \\ &= -w(0.999w^4 - 0.99899999w^2 + 0.001000002) \end{aligned}$$

$F(w)$ tiene tres soluciones no negativas $w_1 = 0$, $w_2 = 0.50076$ y $w_3 = 0.99999$ pero únicamente w_2 y w_3 son soluciones de las ecuaciones (3.18) y (3.19) con λ restringido al intervalo $[0, 1]$.

Se puede comprobar que el polinomio de la ecuación (3.17) es inestable para todo λ en el intervalo $[0.50076, 0.99999]$ y estable en el complemento a $[0, 1]$ de este intervalo.

3.3 Definiciones y observaciones

El conjunto de polinomios $P(s, A(K)) = \sum_{j=0}^n A_j(K) s^{n-j}$, donde cada $A_j(\cdot)$ es una función afín y K es una caja, es conocido como paralelotopo de polinomios, ver la definición 10.2.1 de Barmish [7].

Esta es la clase de conjuntos $P(s, A(K))$ que serán analizados de aquí en adelante.

Por otra parte, cada conjunto $A_j(K)$ puede ser escrito como:

$A_j(K) = \sum_{\ell=1}^m a_{j,\ell} K_\ell + a_{j,m+1}$, para $j = 0, 1, \dots, n$. Cada término $a_{j,\ell}$, para $\ell = 1, 2, \dots, m + 1$, es un número real y cada componente $K_\ell = [k_\ell^-, k_\ell^+]$, para $\ell = 1, 2, \dots, m$, es un intervalo cerrado y acotado de números reales.

Entonces, el conjunto $P(s, A(K))$ puede ser expresado como:

$$P(s, A(K)) = [p_1(s) \ p_2(s) \ \dots \ p_m(s) \ p_{m+1}(s)] [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_m \ 1]^T = \quad (3.20)$$

$$\sum_{\ell=1}^m p_\ell(s) K_\ell + p_{m+1}(s)$$

donde $p_\ell(s) = \sum_{j=0}^m a_{j,\ell} s^{n-j}$, para $\ell = 1, 2, \dots, m + 1$

En este punto, es necesario hacer algunas definiciones relacionadas con la expresión (3.20) que serán requeridas para los resultados que se presentan a continuación.

Definición 4 Los polinomios $p_\ell(\cdot)$, para $\ell = 1, 2, \dots, m$, son llamados *polinomios componentes*. El conjunto de todos ellos es representado por $P_c(\cdot)$.

Se conviene que las regiones \mathcal{D} admisibles, sean todas aquellas regiones complejas para las cuales se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Dado cualquier polinomio $p : C \rightarrow C$, definido por

$$p(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^{n-j}, \text{ con } a_j \in \mathfrak{R} \text{ para } j = 0, 1, \dots, n \quad (3.21)$$

La evaluación de $p(\cdot)$ en cada punto $s = x + iy$ de la frontera $\partial\mathcal{D}$ puede ser escrita como:

$$p(s) = \sum_{j=0}^n [\alpha_{n-j}(u) + iy\beta_{n-j}(u)] = g(u) + iyh(u) \quad (3.22)$$

donde $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ son polinomios y $u = x$ ó $u = y$.

La parametrización del polinomio $p(s)$, de la expresión (3.22) se efectúa con el fin de que sus raíces en el plano complejo se obtengan de una manera mas sencilla, mediante la determinación de las raíces de dos polinomios en una variable real, $g(u)$ y $h(u)$.

2. La región \mathcal{D} debe ser convexa y simétrica con respecto al eje real.

La condición de simetría con respecto al eje real permite que el análisis de sólo el semiplano superior complejo sea suficiente para determinar si todas las raíces de un conjunto P están en \mathcal{D} . Se recuerda que en este trabajo se asume que los coeficientes de todos los elementos de P son reales, por lo que si un número complejo es raíz de algún $p \in P$, su conjugado también lo es. La convexidad de \mathcal{D} garantiza que, cuando todas las raíces de P son puntos interiores de \mathcal{D} , la fase de cada elemento $p \in P$ es continua y monótonica cuando P se evalúa en $\partial\mathcal{D}$.

Cuando \mathcal{D} es semiplano complejo izquierdo, la propiedad de monotonía de la fase se conoce como criterio de Mijailov, ver el lema 5.7.6 de Barmish [7]. Para el caso en que \mathcal{D} sea una región convexa cerrada, la continuidad y monotonía de la fase se preserva, ver el lema 21 del apéndice. A su vez la continuidad y monotonía de la fase se utiliza en el lema 14, resultado preliminar para dar en el teorema 4 condiciones suficientes (también necesarias) para la \mathcal{D} estabilidad de P .

En el apéndice se muestra que la igualdad (3.22) se obtiene entre otras, de la evaluación de $p_\ell(\cdot)$ en la frontera del círculo unitario, con $u = x$; mientras que, (3.22) se obtiene con $u = y$ cuando $\partial\mathcal{D}$ es el eje imaginario.

De aquí en adelante se utilizará a la expresión (3.22) para representar a cualquier polinomio, evaluado en cualquier punto $s = x + iy$ de la frontera $\partial\mathcal{D}$ de una región \mathcal{D} admisible. Se hace esto para tratar a todas las regiones \mathcal{D} admisibles de manera unificada.

Entonces, para cualquier punto $s = x + iy$ en la frontera $\partial\mathcal{D}$, el conjunto $P(s, A(K))$, puede ser escrito (aplicando (3.22) a (3.20)) como:

$$P(s, A(K)) = \sum_{\ell=1}^m g_\ell(u) K_\ell + g_{m+1}(u) + i y \left(\sum_{\ell=1}^m h_\ell(u) K_\ell + h_{m+1}(u) \right) \quad (3.23)$$

$$\triangleq \text{Re } P(s, A(K)) + i \text{Im } P(s, A(K))$$

Se puede observar que, para un punto específico $s_0 = (x_0 + iy_0) \in \partial\mathcal{D}$ y $u = u_0$, con

$u_0 = x_0$ o $u_0 = y_0$, es posible encontrar a los polinomios que acotan por arriba y por abajo a cada elemento de $\operatorname{Re} P(s, A(K))$ y también a los que hacen lo mismo para $\operatorname{Im} P(s, A(K))$.

Por ejemplo, sean \mathbb{k}_1 y \mathbb{k}_2 dos elementos de K con: $\mathbb{k}_1 = (k_{11}, k_{21}, \dots, k_{m1})^T$ y $\mathbb{k}_2 = (k_{12}, k_{22}, \dots, k_{m2})^T$

y suponga que, para $\ell = 1, 2, \dots, m$

$$k_{\ell 1} = \begin{cases} k_{\ell}^+ & \text{si } g_{\ell}(u_0) \leq 0 \\ k_{\ell}^- & \text{si } g_{\ell}(u_0) \geq 0 \end{cases}$$

y

$$k_{\ell 2} = \begin{cases} k_{\ell}^- & \text{si } g_{\ell}(u_0) \leq 0 \\ k_{\ell}^+ & \text{si } g_{\ell}(u_0) \geq 0 \end{cases}$$

entonces, $g_{\ell}(u_0)k_{\ell 1} \leq g_{\ell}(u_0)k_{\ell} \leq g_{\ell}(u_0)k_{\ell 2}$, para todo $k_{\ell}^- \leq k_{\ell} \leq k_{\ell}^+$.

Sumando todos los términos desde $\ell = 1$ hasta $\ell = m + 1$,

$$\sum_{\ell=1}^m g_{\ell}(u_0) k_{\ell 1} + g_{m+1}(u_0) \leq \sum_{\ell=1}^m g_{\ell}(u_0) k_{\ell} + g_{m+1}(u_0) \leq \sum_{\ell=1}^m g_{\ell}(u_0) k_{\ell 2} + g_{m+1}(u_0)$$

esto es, $\operatorname{Re} p(s_0, A(\mathbb{k}_1)) \leq \operatorname{Re} p(s_0, A(\mathbb{k})) \leq \operatorname{Re} p(s_0, A(\mathbb{k}_2))$

donde $\mathbb{k} = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ es cualquier elemento de K .

En otras palabras, el conjunto $\operatorname{Re} P(s_0, A(K))$ es acotado por dos polinomios evaluados en s_0 , $\operatorname{Re} p(s_0, A(\mathbb{k}_1))$ y $\operatorname{Re} p(s_0, A(\mathbb{k}_2))$.

Similarmente, el conjunto $\operatorname{Im} P(s_0, A(K))$ es acotado por dos polinomios, denominados $p(\cdot, A(\mathbb{k}_5))$ y $p(\cdot, A(\mathbb{k}_6))$, de tal forma que

$$\operatorname{Im} p(s_0, A(\mathbb{k}_5)) \leq \operatorname{Im} p(s_0, A(\mathbb{k})) \leq \operatorname{Im} p(s_0, A(\mathbb{k}_6)), \text{ para todo } \mathbb{k} \in K$$

Los polinomios $\operatorname{Re} p(\cdot, A(\mathbb{k}_1))$ y $\operatorname{Re} p(\cdot, A(\mathbb{k}_2))$ pueden no ser únicos. La razón para esto es que uno o mas polinomios componentes puede ser cero para $u = u_0$ o inclusive para todo $u \in \partial \mathcal{D}$, si hubiera mas de dos parejas de polinomios que acotan a cada elemento de $\operatorname{Re} P(u_0, A(K))$ por abajo, se escoge de entre ellas al polinomio que tiene la parte imaginaria mas pequeña y al polinomio que tiene la parte imaginaria mas grande y se denotan por $p(\cdot, A(\mathbb{k}_1))$ y $p(\cdot, A(\mathbb{k}_3))$ respectivamente. De los polinomios que acotan a todos los elementos de $\operatorname{Re} P(s, A(K))$ por arriba, se define a $p(\cdot, A(\mathbb{k}_2))$

como el que tiene la parte imaginaria mas pequeña mientras que, $p(\cdot, A(\mathbb{k}_4))$ es el que tiene la parte imaginaria mas grande.

Los polinomios que acotan a $\text{Im } P(s, A(K))$ son definidos con el mismo criterio. De aquí que el conjunto $P(s_0, A(K)) = \text{Re } P(s_0, A(K)) + i \text{Im } P(s_0, A(K))$, el cual se conoce como *conjunto de valores*, para $u_0 = w$, está acotado por ocho polinomios. En el dibujo siguiente se muestra su ubicación:

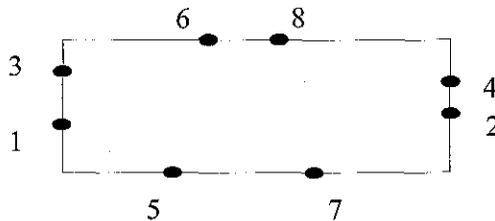


Figura 3.1: Polinomios frontera

$$j \equiv p(\cdot, A(\mathbb{k}_j)), \quad j = 1, 2, \dots, 8$$

Se observa que este rectángulo está contenido en el rectángulo de Kharitonov, ver Barmish [7], Minichelli et al [35], Dasgupta [20] y su antecedente Yeung y Wang [42]. Esto es debido a que en este trabajo se toma en cuenta la dependencia entre coeficientes de la parte real y también la dependencia entre coeficientes de la parte imaginaria.

Por otra parte, de la proposición 8.7.1 de Barmish [7], el conjunto de valores $P(s_0, A(K))$, es igual a la envolvente convexa generada por el conjunto de todos sus *polinomios extremos* (los polinomios generados por un vector \mathbf{k} cuyas componentes k_ℓ son iguales a k_ℓ^- o k_ℓ^+). Por lo tanto la envolvente convexa generada únicamente por los polinomios extremos que acotan tanto a $\text{Re } P(s_0, A(K))$ como a $\text{Im } P(s_0, A(K))$ es un subconjunto (no necesariamente propio) del conjunto de valores. Este subconjunto importante será nombrado con frecuencia por lo cual requiere un nombre en particular.

Definición 5 *El núcleo de un conjunto de valores es la envolvente convexa de una fa-*

milia cuyos vértices son los polinomios extremos que acotan a los conjuntos $\text{Re } P(s_0, A(K))$ e $\text{Im } P(s_0, A(K))$

El núcleo de un conjunto de valores puede tener cuando mucho ocho aristas y está contenido en un mismo rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes real e imaginario. Los vértices de este rectángulo son una clase particular de polinomios que son muy útiles para probar la estabilidad de la familia P . Estos polinomios se definen a continuación.

Definición 6 Los polinomios esquina de un conjunto de valores son los cuatro poli-

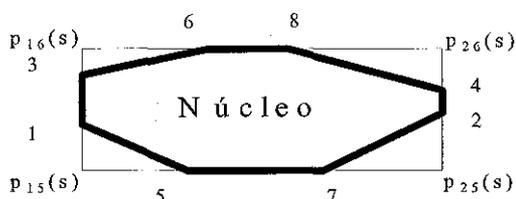


Figura 3.2: Núcleo y polinomios esquina

nomios cuyos coeficientes de sus potencias pares son los de las potencias pares de los polinomios $p(\cdot, A(k_i))$ y cuyos coeficientes de sus potencias impares son los coeficientes de las potencias impares de los polinomios $p(\cdot, A(k_j))$, donde $i = 1, 2$ y $j = 5, 6$.

Definición 7 El rectángulo $R(u)$ es la envolvente convexa del conjunto cuyos vértices son los polinomios esquina evaluados en (u)

El rectángulo $R(u)$ es “continuo” en (u) y contiene el conjunto de valores $P(u, A(K))$.

Definición 8 Los polinomios frontera (de $P(u_0, A(K))$) es el conjunto de vértices de su núcleo.

Una característica fundamental de un núcleo es que sus polinomios frontera y esquina no cambian en una vecindad V de u_0 en la cual la evaluación de ningún elemento de $P_c(\cdot)$ cambie signo en V . Por lo cual se requiere una definición precisa de las vecindades V y sus puntos frontera.

Definición 9 *El conjunto de raíces de conmutación, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_z\}$, es un conjunto cuyos elementos son todas las raíces de multiplicidad impar tanto de la parte real, como de la parte imaginaria de todos los polinomios componentes $p_c(\cdot)$.*

Las raíces reales del conjunto $P_c(\cdot)$ están contenidas en un intervalo llamado W que se define a continuación.

Definición 10 *W es un intervalo que contiene todas las raíces de $P_c(\cdot)$, si \mathcal{D} es una región cerrada ($u = x$) $W = [a, b]$, donde a y b son la raíz más pequeña y la raíz más grande de $\text{Re } P_c(s)$, respectivamente. Si \mathcal{D} es una región abierta ($u = y$) $W = [0, \infty)$*

Definición 11 *Una partición regular de un intervalo $W = [a, b]$ (ó $[0, \infty)$) es una división de $[a, b]$ en subintervalos cerrados y acotados (para $[0, \infty)$ el último intervalo es abierto a la derecha) de tal forma que $a = u_1 < u_2 < \dots < u_{z-1} < u_z \leq b$ ó ∞ y cada elemento de U es un punto frontera de dos subintervalos adyacentes, excepto u_1 y u_z cuando $u_z = b$. Cada subintervalo es representado por $\Delta u_j = [u_j, u_{j+1}]$ para $j = 1, 2, \dots, z$.*

Dado que el signo de la evaluación de cualquier polinomio no cambia entre cualesquiera de las raíces adyacentes de multiplicidad impar, la evaluación de cada polinomio componente no cambia signo en cada subintervalo (u_j, u_{j+1}) . Además, (al menos) un polinomio frontera conmuta en cada punto frontera de cada subintervalo $[u_j, u_{j+1}]$. Esto implica lo siguiente:

1. El conjunto de polinomios frontera no cambia en cada elemento Δu_j de su partición regular, excepto en los puntos frontera u_j y u_{j+1} , donde (al menos) un polinomio frontera conmuta.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2. Como consecuencia de 1., el núcleo del conjunto de valores no cambia en cada elemento Δu_j de su partición regular y conmuta sólo en sus puntos frontera u_j, u_{j+1} .

Con toda la información reunida hasta este momento, es posible establecer el primer resultado para comprobar la exclusión del cero de un segmento cuyos extremos son polinomios \mathcal{D} estables. La demostración del lema siguiente está basada en la dada por Minichelli et al en [35].

3.4 \mathcal{D} -estabilidad de conjuntos de polinomios con coeficientes afines

Lema 16 Sean $p_1(\cdot)$ y $p_2(\cdot)$ dos polinomios cuya evaluación en cada punto $s = x + iy$ de la frontera $\partial\mathcal{D}$ de una región $\mathcal{D} = X + iY$ admisible esta definida por:

$$p_1(s) = g_1(u) + iyh_1(u)$$

$$p_2(s) = g_2(u) + iyh_2(u),$$

$$\text{con } u = x \text{ ó } u = y$$

Asuma también que $g_1(u) = g_2(u)$ ó $h_1(u) = h_2(u)$, para todo $u \in X$ ó $u \in Y$.

La evaluación del polinomio $p(s) = \lambda p_1(s) + (1 - \lambda) p_2(s)$ es distinta de cero para toda $s \in \partial\mathcal{D}$ y toda $\lambda \in [0, 1]$ sí $p_1(s)$ y $p_2(s)$ son \mathcal{D} estables.

Demostración. Sean $p_1(s)$ y $p_2(s)$ de \mathcal{D} estable.

Para $u = y$.

Sí $g_1(u) = g_2(u)$ para toda $u \in Y$

$$p(s) = g_1(u) + iy[\lambda h_1(u) + (1 - \lambda) h_2(u)] \text{ para cada } \lambda \in [0, 1]$$

Suponga que existe $s_0 = (x_0 + iy_0) \in \partial\mathcal{D}$ y $\lambda \in [0, 1]$, tal que $p(s_0) = 0$.

Dado que $p_1(s)$ y $p_2(s)$ son \mathcal{D} estables, $h_1(u_0) \neq 0$ y $h_2(u_0) \neq 0$

Asuma sin pérdida de generalidad que $h_1(u_0) < 0$ y $h_2(u_0) > 0$

Por el criterio de Mijailov, ver Barmish [7] las fases de $p_1(s)$ y $p_2(s)$, son continuas y crecientes estrictamente. Entonces, para una $\delta > 0$, suficientemente pequeña, $g_2(u_0 + \delta) < 0$ y $g_1(u_0 + \delta) > 0$

Esto contradice el hecho que $g_1(u) = g_2(u)$ para todo $u \in X$.

Entonces $p(s) \neq 0$ para todo $s \in \partial\mathcal{D}$

Sí $h_1(u) = h_2(u)$ para todo $u \in Y$. Por el mismo razonamiento $h_2(u_0 + \delta)h_1(u_0 + \delta) < 0$ Esto es una contradicción, por lo tanto $p(s) \neq 0$ para todo $s \in \partial\mathcal{D}$

Sí $u = X$

Por el lema 21, las fases de $p_1(s)$ y $p_2(s)$ son continuas y decrecientes estrictamente.

El argumento dado para $u = y$ es también válido para $u = x$, cambiando δ de positivo a negativo.

Por lo tanto $p(s) \neq 0$ para todo $s \in \partial\mathcal{D}$. ■

Dado que cualquier par de polinomios esquina comparten la misma parte real o la misma parte imaginaria, el lema 16 puede ser aplicado para verificar la exclusión del cero de las aristas del rectángulo, que contiene el conjunto de valores en cada elemento de una partición regular.

Lema 17 *Las aristas de un rectángulo $R(u)$ no contienen el cero si sus vértices son \mathcal{D} -estables.*

Demostración. Sean los polinomios esquina $p_{j\ell}(s) = g(u, A(\mathbb{k}_j)) + iyh(u, A(\mathbb{k}_\ell))$ para $j = 1, 2$ y $\ell = 5, 6$ \mathcal{D} estables.

Las cuatro aristas de $R(u)$ son:

$$p_{12\ell}(s) = \lambda p_{1\ell}(s) + (1 - \lambda) p_{2\ell}(s) = \lambda g(u, A(\mathbb{k}_1)) \\ + (1 - \lambda) g(u, A(\mathbb{k}_2)) + iyh(u, A(\mathbb{k}_\ell))$$

para $\ell = 5, 6$ y $0 \leq \lambda \leq 1$

$$p_{j56}(s) = g(u, A(\mathbb{k}_j)) + iy [\lambda h(u, A(\mathbb{k}_5)) + (1 - \lambda) h(u, A(\mathbb{k}_6))]$$

para $j = 1, 2$ y $0 \leq \lambda \leq 1$

Dado que los polinomios esquina son \mathcal{D} estables, por el lema 16, las aristas $p_{125}(s)$, $p_{126}(s)$, $p_{156}(s)$ y $p_{256}(s)$ no contienen el cero. ■

Si al menos un polinomio esquina de $P(s, A(K))$ en cualquier elemento de su partición regular Δu_j no es \mathcal{D} estable, se debe hacer un análisis más profundo de las aristas expuestas del conjunto de valores.

El objetivo del análisis es verificar la exclusión del cero en las aristas de un polígono particular. Cada vértice de este polígono es un polinomio esquina \mathcal{D} estable o un vértice del conjunto de valores en Δu_j .

La siguiente definición relaciona a la pareja de polinomios frontera con las aristas expuestas del conjunto de valores que pueden no ser \mathcal{D} estables.

Definición 12 *Un conjunto de aristas críticas (en Δu_j) es la familia de todas las aristas expuestas del conjunto de valores contenidos en cualquiera de los cuatro triángulos cuyos vértices son:*

$$(p(s, A(\mathbb{k}_j)), p(s, A(\mathbb{k}_\ell)), p_{j\ell}(s))$$

con $j = 1, 2$, $\ell = 5, 6$

Definición 13 *Un polígono $L(s)$ (en Δu_j) es la parte del rectángulo $R(s)$ (cuyos vértices son los polinomios esquina en Δu_j) que queda después de cortar cada uno de los triángulos mencionados en la definición 12, donde sus polinomios esquina no son \mathcal{D} estable y agregando como aristas expuestas las correspondientes al conjunto de aristas críticas.*

El polígono $L(s)$ es "continuo" en s y contiene al conjunto de valores de $P(s, A(K))$ en s .

Nota 1 *Se asume que $L(s) = R(s)$ para todo $s = x + iy$, con $u = x$ ó $u = y$ y $u \in \Delta u_j$, donde los polinomios esquina correspondientes son \mathcal{D} estable o bien para*

cada $u \in W$ tal que ya sea la parte real o la parte imaginaria del conjunto de valores evaluada en u sea cero.

Lema 18 Ninguna arista $L(s)$; para $s = x + iy$, con $u = x$ ó $u = y$ y $u \in \Delta u_j$, contiene al cero si su conjunto de aristas críticas es \mathcal{D} estable.

Demostración. Todas las aristas de $L(s)$ paralelos a los ejes real e imaginario tienen como vértices un polinomio esquina \mathcal{D} estable o un polinomio frontera que pertenece a un conjunto de aristas críticas. Dado que por hipótesis, sus aristas críticas son \mathcal{D} estables, estos polinomios frontera son \mathcal{D} estables. Entonces, por el lema 16, ninguna de sus aristas contiene al cero.

Las aristas de $L(s)$ no paralelas a los ejes son conjuntos de aristas críticas \mathcal{D} estables por lo cual no contienen al cero.

Por lo tanto, ninguna arista de $L(s)$, para $u \in \Delta u_j$, contiene al cero. ■

Una vez que se ha analizado, en cada elemento de la partición regular al rectángulo $R(s)$ ó al polígono $L(s)$ con $s = x + iy$, con $u = x$ ó $u = y$ y $u \in \Delta u_j$, que contiene al conjunto de valores en cada $u \in W$, se está en posición de dar condiciones suficientes para \mathcal{D} estabilidad del conjunto completo $P(s, A(K))$. La comprobación se basa en el hecho de que todos los polinomios dentro de un rectángulo $R(s)$ son conexos por trayectorias. La demostración también puede ser efectuada utilizando el llamado Teorema de Cruce de Frontera, ver Chapellat et al [19]. Este teorema asevera que un conjunto de polinomios $P(s, A(K))$ (con todos sus elementos del mismo grado) con coeficientes continuos es \mathcal{D} estable si y sólo si un elemento del conjunto $P(s, A(K))$ tiene todas sus raíces dentro de \mathcal{D} y ningún elemento de $P(s, A(K))$ tiene raíces en su frontera $\partial\mathcal{D}$.

Teorema 2 Sea $P(s, A(K)) = \sum_{j=0}^n A_j(K) s^{n-j}$ un conjunto de polinomios, donde K es una caja y cuyos coeficientes son funciones afines.

El conjunto $P(s, A(K))$ es \mathcal{D} estable sí:

- a) Para la partición regular del conjunto $W = [a, b]$ ó $[a, \infty)$, asociado a $P(s, A(K))$, el elemento $0 \notin \text{Re } P(a, A(K))$
- b) En cada elemento Δu_j de la partición regular:
- b.1) Todos los polinomios esquina son \mathcal{D} estables.
- o
- b.2) Para cada polinomio esquina que no es \mathcal{D} estable su correspondiente conjunto de aristas críticas es \mathcal{D} estable.

Demostración. Suponga que se cumplen las condiciones a) y b).

El conjunto de valores en $s = a$ es igual a $\text{Re } P(a, A(K))$ entonces también es igual a su rectángulo o polígono correspondiente evaluado en a . Esto es,

$$\text{Re } P(a, A(K)) = L(a) = R(a)$$

Entonces, $0 \notin L(a) = R(a)$. Además, para cada $s = x + iy$, con $u = x$ ó $u = y$ y $u \in \Delta u_j \subset W$, si se cumple b.1) por 17, el cero es excluido de todas las aristas de $R(s)$ para todo $u \in \Delta u_j$; si se cumple b.2), por el lema 18, el cero es excluido de todas las aristas de $L(s)$ para todo $u \in \Delta u_j$. Por lo tanto, $0 \notin L(s) \subset R(s)$, para cada $u \in W$.

Por otra parte, el conjunto de valores $P(s, A(K)) \subset L(s) \subset R(s)$ para todo $s = (x + iy) \in \partial \mathcal{D}$ y todo $u \in W$. Por lo tanto, $0 \notin P(s, A(K))$ para todo $s = (x + iy) \in \partial \mathcal{D}$ y todo $u \in W$.

Dado que $P(s, A(K))$ es conexo por trayectorias con polinomios esquina o frontera (en el conjunto de aristas críticas) \mathcal{D} estables, y no tiene raíces en $\partial \mathcal{D}$, todas las raíces de $P(s, A(K))$ están dentro de \mathcal{D} .

Por lo tanto, $P(s, A(K))$ es \mathcal{D} estable. ■

A continuación se da un ejemplo de aplicación de los resultados presentados en este capítulo.

Ejemplo 6 Determine si el conjunto de polinomios:

$$P(s, A(K)) = (K_1 + K_2 + K_3) s^3 + (1.5016 K_1 + 1.5 K_2 + 1.5 K_3 + 0.4984) s^2 \\ + (0.55 K_1 + 1.5 K_2 + 1.5 K_3 + 0.45) s + 0.1008 K_1 + 0.5 K_2 + 0.5 K_3 + 1.8984$$

con $K_1 = [k_1^-, k_1^+] = [0, 1]$, $K_2 = [k_2^-, k_2^+] = [0, 0.2]$ y $K_3 = [k_3^-, k_3^+] = [0, 0.2]$, es Hurwitz estable.

Solución 6 Los polinomios componentes de $P(s, A(K))$ son:

$$p_1(s) = s^3 + 1.5016 s^2 + 0.555 s + 0.1008$$

$$p_2(s) = s^3 + 1.5 s^2 + 1.55 s + 0.5$$

$$p_3(s) = p_2(s)$$

Las raíces de los dos polinomios componentes distintos cuando se evalúan en el eje imaginario ∂D ,

son :

$$\text{Para } \Delta u_1 = [0, 0.2591], \mathbb{k}_1 = (k_1^-, k_2^-, k_3^-),$$

$$\mathbb{k}_2 = (k_1^+, k_2^+, k_3^+), \mathbb{k}_5 = \mathbb{k}_1 \text{ y } \mathbb{k}_6 = \mathbb{k}_2$$

$$\text{Re } p(s, A(\mathbb{k}_1)) = -0.4984u^2 + 1.8984 \quad (3.24)$$

con raíces ± 1.9517

$$\text{Re } p(s, A(\mathbb{k}_2)) = -2.6u^2 + 2.1992 \quad (3.25)$$

con raíces ± 0.9197

$$\text{Im } p(s, A(\mathbb{k}_1)) = 0.45w \quad (3.26)$$

Polinomio	Raíces de $\text{Re } p(s)$	Raíces de $\text{Im } p(s)$
$p_1(s)$	± 0.2591	$0, \pm 0.7416$
$p_2(s)$	± 0.5774	$0, \pm 1.2247$

Tabla 3.1: Raíces de polinomios componentes

con raíz 0

$$\operatorname{Im} p(s, A(\mathbb{k}_5)) = -1.4u^3 + 1.6u \quad (3.27)$$

con raíces $0, \pm 1.069$

Por el teorema de Hermite - Biehler, ver Gantmacher [26] $p_{15}(s)$, $p_{25}(s)$ y $p_{23}(s)$ son estables y $p_{16}(s)$ es inestable.

Para $\Delta u_2 = [0.2591, .5774]$, $\mathbb{k}_1 = (k_1^+, k_2^-, k_3^-)$, $\mathbb{k}_2 = (k_1^-, k_2^+, k_3^+)$, \mathbb{k}_5 y \mathbb{k}_6 son los mismos que para Δu_1

$$\operatorname{Re} p(s, A(\mathbb{k}_1)) = -2u^2 + 1.9992 \quad (3.28)$$

con raíces ± 0.9998

$$\operatorname{Re} p(s, A(\mathbb{k}_2)) = -1.0984u^2 + 2.0984 \quad (3.29)$$

con raíces ± 1.3822

Aplicando el teorema de Hermite - Biehler a los polinomios (3.26), (3.27), (3.28) y (3.29), se encuentra que: $p_{15}(s)$, $p_{16}(s)$ y $p_{25}(s)$ son estables y $p_{26}(s)$ es inestable.

Para $\Delta u_3 = [0.5774, 0.7416]$ y $\Delta u_5 = [1.2247, \infty)$, los cuatro polinomios frontera de $P(s, A(K))$ son iguales a los que se tienen para Δu_1 ; aunque el polinomio esquina inestable es ahora $p_{26}(u)$.

Para $\Delta u_4 = [0.7416, 1.2247]$, \mathbb{k}_1 es igual a \mathbb{k}_2 y \mathbb{k}_2 es igual a \mathbb{k}_1 , en Δu_1 ,
 $\mathbb{k}_5 = (k_1^+, k_2^-, k_3^-)$
 y $\mathbb{k}_6 = (k_1^-, k_2^+, k_3^+)$

$$\operatorname{Im} p(s, A(\mathbb{k}_5)) = -u^3 + u \quad (3.30)$$

con raíces $0, \pm 1$ e

$$\operatorname{Im} p(s, A(\mathbb{k}_6)) = -0.4u^3 + 1.05u \quad (3.31)$$

con raíces $0, \pm 1.6202$

De los polinomios (3.24), (3.25), (3.30), (3.31) y aplicando el teorema Hermite - Biehler, se tiene que: $p_{15}(s)$ y $p_{16}(s)$ son estables y, $p_{25}(s)$ y $p_{26}(s)$ son inestables.



Dado que hay dos polinomios esquina inestables en Δu_4 y sólo uno en cada uno de los intervalos $\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3$ y Δu_5 , es razonable comenzar el análisis de estabilidad con las aristas críticas en Δu_4 .

Para Δu_4 , $\mathbb{k}_2 = (k_1^-, k_2^-, k_3^-)$, $\mathbb{k}_5 = (k_1^+, k_2^-, k_3^-)$ y $\mathbb{k}_6 = (k_1^-, k_2^+, k_3^+)$.

Usando un método para comprobar la estabilidad de combinaciones convexas de polinomios, ver Bialas [11] o Fu y Barmish [24], se encuentra que la arista

$$\lambda p(s, A(\mathbb{k}_2)) + (1 - \lambda) p(s, A(\mathbb{k}_5))$$

es inestable para: $\lambda = .0016$ ($\mathbb{k} = (0.9984, 0, 0)$)

$$p(s, A(\mathbb{k})) = 0.9984s^3 + 1.9976s^2 + .9991s + 1.999 \text{ con raíces } -2.0008, \pm i 1.0004.$$

La misma arista es también inestable para:

$$\lambda = 0.6902 \text{ (} \mathbb{k} = (0.3098, 0, 0) \text{)}.$$

$$p(s, A(\mathbb{k})) = 0.3098s^3 + 0.9636s^2 + 0.6204s + 1.9296 \text{ con raíces } -3.1103, \pm i 1.4151.$$

Por lo tanto $P(s, A(K))$ no es Hurwitz estable.

Nota 2 Si las aristas $p(s, A(\mathbb{k}_2)) - p(s, A(\mathbb{k}_5))$ y $p(s, A(\mathbb{k}_2)) - p(s, A(\mathbb{k}_6))$ fueran estables, sería necesario revisar las aristas expuestas (como es el caso). Si no fuera este el caso sería necesario buscar las aristas expuestas que se encuentran en los triángulos cuyos vértices son

$$p(s, A(\mathbb{k}_2)), p(s, A(\mathbb{k}_5)) \text{ y } p_{25}(u), \text{ y } p(u, A(\mathbb{k}_2)), p(u, A(\mathbb{k}_6)) \text{ y } p_{26}(u).$$

El mismo procedimiento debe ser repetido, si es necesario, para los otros elementos de la partición regular..

Capítulo 4

Generalización del Teorema de Cruce de Frontera

4.1 Introducción

Hasta ahora, el análisis de los conjuntos P se ha hecho considerando que todos sus elementos son del mismo grado n . Sin embargo, puede suceder que P no tenga esta característica.

En la actualidad el análisis de estabilidad Hurwitz mediante el Teorema de Cruce de Frontera, se restringe al caso en que el grado de todos los elementos de P es n ; ver Chapellat et al [19] y Mansour [33]. En la sección 4.2 se muestra que esta restricción es innecesaria. Para lograr esto, se parte de un teorema esencial en este capítulo, debido a Mishael Zedek [46]. el teorema asevera, en palabras de M. Zedek, que “Si los coeficientes de un polinomio, cuyos coeficientes de algunas de las potencias de mayor grado son cero, varían de manera continua, los ceros existentes del polinomio varían de manera continua mientras que cualquier cero nuevo emerge de una vecindad del infinito”.

Con este resultado como base se muestra en el teorema 4 que las n funciones Γ_j que mapean del conjunto de coeficientes de $P, A(K)$ a sus raíces, son continuas.

Como $A(K)$ es por definición conexo y Γ_j es continuo, en el lema 19 se prueba que $\Gamma_j(A(K))$ es conexo. Es decir, toda raíz de cada elemento de P pertenece a un conexo. El resultado es conocido para el caso en que todos los elementos de P son del mismo grado, ver Chapellat et al [19], Mansour [33], Marden [34].

Por lo que, si un elemento de P de grado n tiene todas sus raíces dentro del semiplano complejo izquierdo abierto C_- y ningún elemento de P tiene raíces en su frontera, todas las raíces de P están en C_- o en infinito, ver el teorema 5. Se asume que ningún coeficiente de la familia P contiene el cero como punto interior. Esta condición en los coeficientes de P no es de ninguna manera restrictiva, ya que es bien sabido que, si un polinomio p no tiene todos sus coeficientes del mismo signo, p no es Hurwitz estable.

4.2 Generalización del teorema de cruce de frontera

Cabe aclarar que en el teorema 3, que se presenta a continuación, se ha alterado la notación del autor para hacerla congruente con la utilizada en este trabajo.

Con el fin de no restar generalidad al teorema de M. Zedek, se modifica ligeramente la convención establecida en la sección 2.2 al permitir que las funciones coordenadas $A_j(\cdot)$, que define a los coeficientes de cada elemento de la familia P , sean complejas. Los vectores \mathbb{k} considerados siguen siendo elementos de un compacto K de dimensión m .

El teorema mencionado, cuando los elementos de P son del mismo grado, se reporta como el teorema 1.4 en Marden [34], y cuando los elementos de P son de diferente grado, el resultado se muestra en el teorema 1 de Zedek [46] (presentado aquí como el teorema 3). Este resultado muestra que si los coeficientes de dos polinomios p_1 y p , no necesariamente del mismo grado están suficientemente "cerca" uno del otro, entonces las raíces de p_1 y p se pueden agrupar de tal forma que el módulo de

la diferencia entre una raíz de p_1 y una de p sea menor que un $\varepsilon > 0$.

Si p_1 , es de grado n y p de grado ℓ , con $n \geq \ell$, el módulo de $(n - \ell)$ raíces de p_1 es mayor que ε^{-1} .

Teorema 3 (*M. Zedek*) *dados dos enteros n y ℓ tales que $n \geq \ell$, un polinomio $p(s, A(\mathbb{k}_1)) = \sum_{j=n-\ell}^n A_j(\mathbb{k}_1) s^{n-j}$, $A_{n-\ell}(\mathbb{k}_1) \neq 0$ y un número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si los $n + 1$ número complejo $A_j(\mathbb{k}_1)$, $0 \leq j \leq n$, satisfacen las desigualdades*

$$|A_j(\mathbb{k}) - A_j(\mathbb{k}_1)| < \delta \quad \text{para} \quad n - \ell \leq j \leq n, \quad (4.1)$$

y si $n > \ell$ entonces

$$|A_j(\mathbb{k})| < \delta \quad \text{para} \quad 0 \leq j \leq n - \ell - 1. \quad (4.2)$$

Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que los ceros $\Gamma_j(A(\mathbb{k}))$, $1 \leq j \leq n$, del polinomio

$$p(s, A(\mathbb{k})) = \sum_{j=0}^n A_j(\mathbb{k}) s^{n-j},$$

con $A_0(\mathbb{k}) \neq 0$, pueden ser agrupados de manera que satisfagan las desigualdades:

$$|\Gamma_j(A(\mathbb{k})) - \Gamma_j(A(\mathbb{k}_1))| < \varepsilon \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq \ell, \quad (4.3)$$

en donde $\Gamma_j(A(\mathbb{k}))$ denota al j -ésimo cero del polinomio $p(s, A(\mathbb{k}))$, $1 \leq j \leq n$.

Más aún, si $n > \ell$ entonces cada $\Gamma_j(A(\mathbb{k}))$ satisface la desigualdad:

$$|\Gamma_j(A(\mathbb{k}))| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{para} \quad \ell \leq j \leq n, \quad (4.4)$$

Demostración. Ver el Teorema 1 de [46]. ■

De la demostración proporcionada por el autor del teorema 3 se observa que el número ε requerido para que se cumplan las desigualdades (4.3) y (4.4) no es arbitrario, ε debe ser lo suficientemente pequeño para que los discos $\mathbf{D}(\Gamma_j(A(\mathbb{k})); \varepsilon)$ (ver ec. (4.13)), $1 \leq j \leq n$, sean idénticos o disjuntos en pares y que $\mathbf{D}(0, \varepsilon^{-1})$ contenga todos los discos anteriores.

A continuación se da un ejemplo de aplicación del teorema 3. En el se pide encontrar la máxima variación permitida de los coeficientes de las raíces generadas, a partir del elemento de grado uno, de una familia P que contiene elementos de grado uno y dos.

Ejemplo 7 [5] dado el conjunto $P(s, A(K)) = Ks^2 - s - 1$, con $K = [0, 1]$, determinar las raíces de un elemento $p(s, A(\mathbb{k}))$ en función del parámetro $\mathbb{k} \in K$ y mostrar un par (δ, ε) que haga que se cumplan las desigualdades (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4), cuando el subconjunto de P contenga elementos de distinto grado.

Solución 7 Como K es unidimensional, $\mathbb{k} = k$; $A_1(\mathbb{k}) = -1$ y $A_2(\mathbb{k}) = -1$. Más aún:

$$\Gamma_1(A(\mathbb{k})) = 1 - \sqrt{1 + 4k}/2k \quad \text{para} \quad \mathbb{k} \in (0, 1], \quad (4.5)$$

y

$$\Gamma_2(A(\mathbb{k})) = 1 - \sqrt{1 + 4k}/2k \quad \text{para} \quad \mathbb{k} \in (0, 1]. \quad (4.6)$$

Por otra parte todos los elementos de $P(\cdot)$ son de grado dos a excepción del polinomio $p(s, A(0)) = -s - 1$. De acuerdo con el teorema 3, $n = 2, \ell = 1, k_1 = 0$.

La única raíz de elemento de P de grado uno, $p(s, A(\mathbb{k})) = -s - 1$, es -1 , por lo tanto se debe buscar que raíz, $\Gamma_1(\cdot)$ o $\Gamma_2(\cdot)$, está más cerca de -1 cuando $k \rightarrow 0$.

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_1(A(\mathbb{k})) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + 4k}}{2k} = 1 \quad (4.7)$$

y

$$\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_2(A(\mathbb{k})) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2k} = \infty \quad (4.8)$$

Por lo tanto, la raíz de $p(s, A(\mathbb{k}_1))$ es $\Gamma_1(A(\mathbb{k}_1)) = 1$ y se cumple que

$$|\Gamma_1(A(\mathbb{k})) - \Gamma_1(A(\mathbb{k}_1))| = \left| \frac{1 - \sqrt{1 + 4k}}{2k} + 1 \right| < \varepsilon \quad (4.9)$$

y

$$|\Gamma_2(A(\mathbb{k}))| = \left| \frac{1 + \sqrt{1 + 4k}}{2k} \right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad (4.10)$$

siempre que

$$|A_1(\mathbb{k}) - A_1(\mathbb{k}_1)| = |-1 + 1| < \delta; |A_2(\mathbb{k}) - A_2(\mathbb{k}_1)| = |-1 + 1| < \delta \quad (4.11)$$

y

$$|A_0(\mathbb{k})| = |\mathbb{k}| = k < \delta \quad (4.12)$$

Adicionalmente, se puede ver en la demostración de teorema 3, que el disco de radio ε con centro en -1 debe estar contenido en un disco centrado en cero de radio ε^{-1} , esto es $-\varepsilon^{-1} < -\varepsilon - 1$ o equivalentemente $\varepsilon(\varepsilon + 1) < 1$. De donde $0 < \varepsilon < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, por simplicidad se escoge $\varepsilon = 0.6$. La desigualdad $\left| \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2k} + 1 \right| < 0.6$ es válida para todo $k \in (0, 1]$; mientras que $\left| \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2k} \right| > \frac{1}{0.6}$ lo es para $k \in (0, 0.96)$, por lo que de la desigualdad (4.12) se puede tomar $\delta = 0.96$.

Por lo tanto, la pareja (δ, ε) buscada es $(0.96, 0.6)$. Adicionalmente se puede decir, con la información obtenida, que todas las raíces de las subfamilias $P'(s, A(K)) = Ks^2 - s - 1$, con $K = [0, 0.96)$, se encuentran en el intervalo $[-1, -0.625) \cup (1.666, \infty)$.

El teorema 3 y su aplicación en el ejemplo 7 permiten deducir que, dada una familia P es posible "cubrir" todos sus elementos mediante un número finito de vecindades V centradas en igual número de elementos de P . A su vez, las raíces correspondientes a los elementos de P en cada V , pertenecen a ciertas vecindades \mathbf{D} . Por lo que, basado en esta observación, en el teorema 4 se muestra que existe una función continua que mapea de los coeficientes de P a sus raíces.

Para poder demostrar que todas las funciones raíz $\Gamma_j : A(\mathbb{k}) \rightarrow C, 1 \leq j \leq n$, de grado n que tienen los elementos de un conjunto P son continuas, independientemente de que no todos sus elementos sean del mismo grado, se requiere definir una topología en la cual las desigualdades (4.10) y (4.11) pertenezca a conjuntos abiertos.

El espacio topológico \mathbf{S}^2 es el que se obtiene al compactificar el plano complejo mediante la unión de \mathbb{R}^2 e ∞ y se conoce como esfera de Riemann. Los conjuntos abiertos que son elementos de la topología son los siguientes:

$$\mathbf{D}(\Gamma_j(A(\mathbb{k}_1)); \varepsilon) = \{\Gamma_j(A(\mathbb{k})) : |\Gamma_1(A(\mathbb{k})) - \Gamma_j(A(\mathbb{k}_1))| < \varepsilon\} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{D}'(\infty, \varepsilon^{-1}) = \{\Gamma_j(A(\mathbb{k})) : |\Gamma_j(A(\mathbb{k}))| > \varepsilon^{-1}\} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{D}(\infty, \varepsilon^{-1}) = \mathbf{D}'(\infty, \varepsilon^{-1}) \cup \{\infty\} \quad (4.15)$$

Los conjuntos abiertos de $A(K)$ son aquellos generados por la vecindad V de un punto $A(\mathbb{k}_1)$ de radio δ .

$$V(A(\mathbb{k}_1), \delta) = \{\|A(\mathbb{k}) - A(\mathbb{k}_1)\|_\infty < \delta\} \quad (4.16)$$

donde $\|A(\mathbb{k})\|_\infty = \max\{|A_0(\mathbb{k})|, |A_1(\mathbb{k})|, \dots, |A_n(\mathbb{k})|\}$, si $P(s, A(K))$ es de grado $\ell < n$, asumimos que $|A_j(\mathbb{k}_1)| = 0$ para $0 \leq j \leq n - \ell + 1$.

Las definiciones de los conjuntos (4.13), (4.14) y (4.15) fueron tomadas de la ecuación 13.1 de Rudin [38], y con el fin de no complicar la notación, están representados en teorema 4 por \mathbf{D} , \mathbf{D}' y \mathbf{V} respectivamente.

Teorema 4 *Cada función raíz $\Gamma_j : A(K) \rightarrow C$, $1 \leq j \leq n$, de una familia de polinomios P , con dominio compacto $A(K)$, que puede tener elementos de distinto grado, es continua.*

Demostración. Los conjuntos abiertos en $A(K)$ son los discos \mathbf{V} , mientras que los abiertos en $\Gamma_j : A(K)$, para $1 \leq j \leq n$, son los discos \mathbf{D} y \mathbf{D}' . Como $A(K)$ es compacto, se puede seleccionar un número finito z de puntos de $A(K)$, que sean el centro de vecindades \mathbf{V}_q . El radio δ de cada una de estas vecindades debe cumplir con las condiciones del teorema 3, es decir, cada vecindad \mathbf{V}_q es la imagen inversa bajo Γ_j de algún disco \mathbf{D} o \mathbf{D}' . Además, para cada función raíz $\Gamma(\cdot)$, la unión de vecindades \mathbf{V}_q debe cubrir a $A(K)$, esto es, $A(K) \subset \cup_{q=1}^z \mathbf{V}_q = \cup_{q=1}^z \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$, donde cada \mathbf{B}_q representa a un disco \mathbf{D}_q o \mathbf{D}'_q .

Cada punto $A(\mathbb{k}_0)$ de $A(K)$ pertenece a la intersección de un número finito u , $1 \leq u \leq z$, de imágenes inversas de conjunto \mathbf{B}_q ; es decir, $A(\mathbb{k}_0) \in \cap_{q=1}^u \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$.



Por otra parte, la imagen inversa de cada conjunto abierto $(\mathbf{B}_q)_{,q=1}^u \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$, es un abierto, por lo que $\cap_{q=1}^u \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$ es en si mismo un conjunto abierto. Por lo tanto existe una vecindad \mathbf{W} de $A(\mathbb{k}_0)$ contenida en $\cap_{q=1}^u \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$.

Como \mathbf{W}_u está contenido en cada conjunto abierto $\Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$ para $q = 1, \dots, u$, $\mathbf{W} \subset \cup_{q=1}^z \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$ y $\Gamma_j(\mathbf{W}) \subset \cup_{q=1}^u (\mathbf{B}_q)$. Esto implica que $\Gamma_j(\cdot)$ es continua en cada punto $A(\mathbb{k}_0)$ de $A(K)$.

Además como cada punto $A(\mathbb{k}_0)$ de $A(K)$ pertenece a un conjunto abierto $\mathbf{W} \subset \cup_{q=1}^z \Gamma_j^{-1}(\mathbf{B}_q)$, entonces la imagen inversa de la unión abierta $\mathbf{B}_q, \Gamma_j^{-1}(\cup \mathbf{B}_q)$, es la unión de conjuntos abiertos \mathbf{W} , esto implica que $\Gamma_j^{-1}(\cup \mathbf{B}_q)$ es un abierto.

Por lo tanto, cada $\Gamma_j(\cdot)$ es una función continua. ■

Lema 19 *El rango de cada función raíz $\Gamma_j(\cdot)$, $\Gamma_j(A(K))$, de cualquier conjunto $P(\cdot)$ de polinomios, es un conjunto conexo.*

Demostración. El conjunto K es conexo. Además, como la continuidad preserva la conexidad y $A:K \rightarrow \mathfrak{R}^{n+1}$ es continua, $A(K)$ es conexo. Por el teorema 4, cada función $\Gamma_j: A(K) \rightarrow C$ es continua; por lo tanto, $\Gamma_j(A(K))$ es conexo. ■

Como los rangos de las funciones $\Gamma_j(\cdot)$ son conjuntos conexos, para probar si todas las raíces de todos los elementos de P están confinadas en una región \mathcal{D} del plano complejo, basta hacer lo siguiente:

1. Definir la frontera de la región \mathcal{D} , denotada por $\partial\mathcal{D}$.
2. Seleccionar un elemento $p \in P$ de rango n , el mayor grado de cualquier elemento de $P(\cdot)$.
3. Si todas las raíces P están en \mathcal{D} , verificar que ninguna raíz de ningún elemento de P pertenezca a $\partial\mathcal{D}$.

Si se cumple 3 se puede garantizar que todas las raíces de P están en \mathcal{D} . Este procedimiento es ampliamente conocido, ver por ejemplo [19], [33] y [34]. Sin embargo,

cada uno de estos artículos, trata el caso en que todos los elementos de P son del mismo grado. Se garantiza que el resultado sigue siendo válido sin esta restricción.

En el siguiente lema, la cerradura de un conjunto X se denota por \bar{X} .

Lema 20 *Sea C el conjunto de los números complejos. Supongamos que \mathcal{D} y \mathcal{E} son dos subconjuntos de los números complejos C tales que*

$$C = \bar{\mathcal{D}} \cup \mathcal{E}, \bar{\mathcal{D}} \cap \mathcal{E} = \mathcal{D} \cap \bar{\mathcal{E}} = \phi \text{ y } \partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{E} \quad (4.17)$$

Sea $\Gamma_j(A(K))$ un conjunto conexo que tiene un elemento en \mathcal{D} , entonces el conjunto $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento en $\bar{\mathcal{E}}$ si y sólo si $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento en $\partial\mathcal{D}$.

Demostración. (\Leftarrow) Si $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento en $\partial\mathcal{D}$, también lo tiene en $\bar{\mathcal{E}}$ ya que $\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{E}$.

(\Rightarrow) Suponga que $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento en $\bar{\mathcal{E}}$ y no tiene elemento en $\partial\mathcal{D}$. Entonces $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento en \mathcal{E} y como $\partial\mathcal{D} = \partial\mathcal{E}$, $\Gamma_j(A(K))$ tiene elementos sólo en $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}$. Ahora bien, como $\bar{\mathcal{D}} \cap \mathcal{E} = \phi = \mathcal{D} \cap \bar{\mathcal{E}}$, el conjunto $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ no es conexo. Esto contradice la suposición de que $\Gamma_j(A(K))$ es conexo. Por lo tanto, si $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento en $\bar{\mathcal{E}}$ también tiene un elemento en $\partial\mathcal{D}$. ■

Nota 3 *La generalización del Teorema de Cruce de Frontera sólo es aplicable para regiones \mathcal{D} abiertas, ya que cuando el coeficiente de mayor grado de un polinomio tiende a cero una de sus raíces tiende a infinito. Como además, cuando no todos los coeficientes de un polinomio tienen el mismo signo, al menos una de sus raíces se encuentra en el semiplano complejo derecho cerrado. Por lo que, si se desea analizar la estabilidad Hurwitz de familias P , los intervalos cerrados y acotados que definen a los coeficientes de P pueden contener al cero sólo como puntos frontera. Como consecuencia de esto las raíces de esta clase de conjuntos P , no cruzan de un semiplano a otro a través del infinito. Bajo estas condiciones, para determinar si una familia*

P tiene raíces en el semiplano complejo derecho cerrado, se considera que el infinito forma parte de la región \mathcal{D} .

Finalmente, basado en los lemas 19 y 20 se presenta en el siguiente teorema la generalización del Teorema de Cruce de Frontera.

Teorema 5 Sea P un conjunto de polinomios, que contiene un polinomio p de grado máximo. Suponga que \mathcal{D} y \mathcal{E} son subconjuntos de C y que satisfacen las condiciones dadas en (4.17). Entonces, el conjunto P tiene todas sus raíces en la región \mathcal{D} si y sólo si p tiene todas sus raíces en \mathcal{D} y ningún elemento de P tiene raíces en $\partial\mathcal{D}$.

Demostración. (\Rightarrow) Si P tiene todas sus raíces en la región \mathcal{D} , entonces en particular p tiene todas sus raíces en \mathcal{D} porque \mathcal{D} y $\partial\mathcal{D}$ son disjuntos y ningún elemento de P tiene raíces en $\partial\mathcal{D}$.

(\Leftarrow) Suponga ahora que p tiene todas sus n raíces en \mathcal{D} y ningún elemento de $P(\cdot)$ tiene raíces en $\partial\mathcal{D}$. Como $\Gamma_j(A(K))$ es un conjunto conexo, por el lema 19, y cada raíz $\Gamma_j(A(K))$ de $p(\cdot)$ pertenece a $\Gamma_j(A(K))$, para $1 \leq j \leq n$, $\Gamma_j(A(K))$ tiene un elemento \mathcal{D} .

Además, $\Gamma_j(A(K))$ no tiene elementos en $\partial\mathcal{D}$ porque P no tiene raíces en $\partial\mathcal{D}$.

Entonces, por el lema 20, $\Gamma_j(A(K))$ está contenido en \mathcal{D} , para $1 \leq j \leq n$. En otras palabras, todas las raíces de P están en \mathcal{D} . ■

La partición del plano complejo dada en la ecuación (4.17), así como el teorema 5, para el caso en que todos los elementos de P , son del mismo grado, corresponde a la propuesta en Chapellat et al [19].

Ejemplo 8 Determinar si $P(s, A(K)) = Ks^3 + (K+1)s^2 + 2s + 1$ es Hurwitz estable cuando $K = [0, 1]$

Solución 8 Se selecciona un elemento arbitrario de grado 3 y se prueba su estabilidad.

Sea $k = 1$, entonces $p(s, A(k_1)) = s^3 + 2s^2 + 2s + 1$, con raíces $\left\{-1, -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; por lo tanto este elemento es Hurwitz estable.

Ahora se prueba que ningún elemento de $P(s, A(K))$ tenga raíces en el eje imaginario. Esto es si existe $k \in [0, 1]$ y $w \in \mathfrak{R}$ tal que:

$$\operatorname{Re} p(iw, A(k)) = -(k+1)w^2 + 1 = 0 \quad (4.18)$$

e

$$\operatorname{Im} p(iw, A(k)) = -kw^3 + 2w = 0 \quad (4.19)$$

Utilizando el método de la sección 3.2

$$F(w) = \begin{vmatrix} -w^2 & -w^2 + 1 \\ -w^3 & 2w \end{vmatrix}$$

$$F(w) = -w^5 - w^3 = -w^3(w^2 + 1)$$

La única raíz real de $F(w)$, es $w = 0$, por lo que: $\operatorname{Re} p(0, A(k)) = 1$ e $\operatorname{Im}(0, A(k)) = 0 \forall k \in \mathfrak{R}$.

Por lo tanto $P(s, A(K))$ no tiene raíces en el eje imaginario y, por el teorema 5, es estable.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se han establecido condiciones suficientes, para determinar la estabilidad Hurwitz de familias de polinomios P , cuyos coeficientes son funciones continuas con dominio compacto.

Derivado de la necesidad de analizar familias P con elementos de distinto grado, se ha realizado una generalización del teorema conocido como de cruce de frontera para el caso en que no todos los elementos de P son del mismo grado. La generalización se da en el caso en que los coeficientes de P estén definidos a través de funciones continuas cuyo dominio es un conjunto compacto convexo K . La base para la generalización es un teorema debido a M. Zedek a partir del cual se muestra que las raíces de la familia P forman conjuntos conexos de números complejos, aún si no todos sus elementos son del mismo grado.

Con respecto a los conjuntos P con coeficientes afines, se han dado condiciones suficientes para determinar su estabilidad dentro de cualquier región \mathcal{D} admisible. De hecho se puede mostrar que, las condiciones dadas son también necesarias. Por otra parte, se observa al aplicar el procedimiento propuesto que, a diferencia del teorema de las aristas, no es necesario trabajar con todos los polinomios extremos de P . Se requiere el análisis de sólo cuatro polinomios esquina por cada intervalo Δu_j de la partición regular. Si alguno de los polinomios esquina no es \mathcal{D} estable, se requiere

revisar a un grupo de las aristas expuestas en Δu_j . Sin embargo, como acertadamente menciona A. Hollohan y M. Safonov [27] para el caso de funciones multilineales, *no existe un resultado, para el caso de funciones [afines] similar al de V. Kharitonov; no se puede conocer a priori el número mínimo de polinomios que se requieren para probar la estabilidad de P . Además los polinomios requeridos dependen fuertemente de los parámetros del sistema y de la interdependencia entre los coeficientes de P .*

Con relación a la aplicabilidad del método propuesto, se considera que es viable, sobretodo cuando el número de parámetros que sufren perturbaciones es grande, ya que sólo requiere probar \mathcal{D} estabilidad de un número reducido de polinomios. Sin embargo requiere un método eficiente para encontrar las aristas críticas de P . Esta es la siguiente etapa del trabajo que debe ser desarrollada.

Se considera que el problema de encontrar las aristas críticas de un conjunto de valores, a partir de una arista del núcleo, está relacionado con otro problema, el denominado "*direcciones convexas locales*", ver Kharitonov y Hinrichsen [31], Zeheb [48], Bülent [13], Bülent y Saadaoui [14] y sus antecesores Rantzer [36] y Fu [23]; por lo cual se requiere profundizar la investigación reportada aquí en esa dirección.

La extensión de los resultados para el caso afín, a familias P con estructura multi-afín o polinómica merece ser estudiada. Es claro que, debido a la compacidad de K y la continuidad de los coeficientes de P , tanto la parte real como la parte imaginaria del conjunto de valores de P es acotada. Por lo cual se puede determinar los polinomios frontera y esquina, para cada punto de la frontera de la región \mathcal{D} considerada.

El problema concreto a resolver ahora es como encontrar cuales son los puntos de conmutación de los polinomios frontera. Si se obtienen dichos puntos, se puede definir una especie de partición regular; que permita hacer el análisis de exclusión del cero en $\partial\mathcal{D}$ por intervalos.

Se debe tener cuidado al hacer este análisis, ya que las propiedades de conexidad simple y compacidad en C , que tienen los conjuntos P con coeficientes afines, se pierde para estructuras mas complejas. En el artículo de Anderson et al [4] se muestra un

ejemplo de un conjunto P , coeficientes multiafines, cuyo conjunto de valores no es conexo simple.

Como consecuencia de esto, se concluye que en general este tipo de conjunto de valores tampoco es compacto en los números complejos.

Bibliografía

- [1] J. Ackermann, J. E., "Parameter space design of robust control systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. Ac-25, pp. 1058-1072, 1980.
- [2] J. Ackermann, H. Z. Hu, y D. Kaesbauer, "Robustness Analysis: A Case Study", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 3, pp. 352-356, March 1990.
- [3] B. D. O. Anderson, E. I. Jury y M. Mansour, "On robust Hurwitz polynomials", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. Aco-32, pp. 909-913, 1987.
- [4] B. D. O. Anderson, F. Krauss, M. Mansour y S. Dasgupta, "Easily testable sufficient conditions for the robust stability of systems with multilinear parameter dependence", *Automatic*, vol. 31, pp.25-40, 1995.
- [5] B. R. Barmish, "New Tools for Robustness Analysis", *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Autin, Tex., 1988.
- [6] B. R. Barmish, "A Generalization of Kharitonov's Four-Polynomial Concept for Robust Stability Problems with Linearly Dependent Coefficient Perturbations", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 2, pp. 157-165, February, 1989.
- [7] B. R. Barmish, *New Tools For Robustness of Linear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1994.
- [8] B. R. Barmish, C. Hollot, F. J. Kraus y R. Tempo, "Extreme point results

- for robust stabilization of interval plants with first order compensators", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-37, pp. 704-714, 1992.
- [9] B. R. Barmish, "Invariance of the Strict Hurwitz Property for polynomials with Pertubed Coefficients", *IEEE Transaction on Automatic Control* vol. 29, No. 10, pp. 935-936, 1984.
- [10] A. C. Bartlett, C. V. Hollot y L. H. Lin, "Root locations of an entire polytope of polynomials. It suffices to check the edges", *Mathematics of Control, Signals and Systems*, Vol. 1, pp. 61-71, 1988.
- [11] S. Bialas, "A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices", *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences*, vol. 33, pp 473-480, 1985.
- [12] S. Bialas y J. Garloff, "Convex combinations of stable polynomials", *Journal of the Franklin Institute*, vol. 319, pp. 373-377, 1985.
- [13] A Bülent Özgüüler, "Constructing convex directions for stable polynomials", *IEEE Transaction on Automatic Control* vol. 45, No. 8, pp. 1565-1569, 2000.
- [14] A Bülent Özgüüler, y K. Saadaoui, "Local convex directions for Hurwitz stable polynomials", *IEEE Transaction on Automatic Control* vol. 47, No. 3, pp. 532-537, 2002.
- [15] N. K. Bose y E. Zeheb, "Kharitonov's theorem and stability test of multidimensional digital filters", *IEE Proceedings, Part G*, Vol. 133, pp. 187-190, 1986.
- [16] C. T. Chen, "Linear system theory and design, Holt, Rienhart and Winston, "
- [17] J. Cieslik, "On Possibilities of the Extension of Kharitonov's Stability Test for Interval Polynomials to the Discrete - Time Case", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-32, No. 3, pp. 237-239, March 1987.

- [18] H. Chapellat y S. P. Bhattacharyya, "A Generalization of Kharitonov's Theorem: Robust Stability of Interval Plants" IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-34, No. 3, pp. 306-311, March, 1989.
- [19] H. Chapellat, M Mansour y S. P. Bhattacharyya, "Elementary Proof of Some Classical Stability Criteria", IEEE Trans. Education, Vol. 33, No. 3, pp. 232-239, August, 1990.
- [20] S. Dasgupta, "Kharitonov's theorem revisited", Systems & Control Letters, Vol. 11, pp 381-384, 1988.
- [21] S. Dasgupta, P. J. Parker, B.D.O. Anderson, F.J. Kraus y M. Mansour, "Frequency domain conditions for robust stability verification of linear and nonlinear dynamical systems", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-38, pp. 389-397, 1991..
- [22] R. A. Frazer y W. J. Duncan, "On the Criteria for the Stability of Small Motions", Proc. Royal Soc. A. Vol. 124, pp. 642-654, 1929.
- [23] M. Fu, "Test of convex directions for robust stability", Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, Sn Antonio, Tex., pp. 502-507, 1993.
- [24] M. Fu. y B. R. Barmish, "Maximal unidirectional perturbation bounds for stability of polynomial and matrices", Systems & Control Letters, Vol. 11, pp 173-179, 1988.
- [25] R.R.E. de, Gaston y M. G. Safonov, "Exact calculations of the multiloop stability margin", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-33, pp. 156-171, 1988.
- [26] F. R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.

- [27] A. M. Hollohan, y M. G. Safonov, "Some counterexamples in robust stability theory", *Systems and Control Letters*, vol. 21, pp. 95-102, 1993.
- [28] C. V. Hollot y A. C. Bartlett, "Some discrete-time counterparts to Kharitonov's stability criterion for uncertain systems", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-31, pp. 355-356, 1986.
- [29] C. V. Hollot, y F. Yang, "Robust Stabilization of interval plants using lead or lag compensation", *Systems and Control Letters*, vol. 14, pp. 9-12, 1990.
- [30] V. L. Kharitonov, "Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations.", *Differential'nye Uraveniya*, Vol. 14, No. 11, pp. 1483-1485, 1978.
- [31] V. L. Kharitonov y D. Hinrichsen "On convex directions for stable polynomials", *Automation and remote control*, Vol. 58, No. 3, pp. 394-402, 1997.
- [32] A. G. Kurosch, *Curso de álgebra superior*, Editorial Mir, 1981.
- [33] M. Mansour, "Robust stability in system described by rational functions", *Control and dynamic systems* vol. 51, Academic Press, 1992.
- [34] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1966.
- [35] R.J. Minichelli, J.J. Anagnost y C.A. Desoer, "An Elementary Proof of Kharitonov's Stability Theorem with Extensions", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. AC-34, No. 9, pp. 995-998, September, 1989.
- [36] A. Rantzer, "Stability conditions for polytopes of polynomials", *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 37, No. 1, pp. 79-89, January, 1992.
- [37] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1976.



- [38] W. Rudin, Real and complex analysis, 3rd edition, McGraw Hill, New York, 1988.
- [39] M. Saeki, "Method of robust stability analysis with highly structured uncertainties," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-31, pp. 935-940, 1986.
- [40] A. Sideris y B. R. Barmish, "An edge theorem for polytopes of polynomial which can drop in degree", Systems and Control Letters, vol. 13, pp. 233-238, 1989.
- [41] A. Sideris y B. S. Peña, "Fast computation of the multivariable stability margin for real interrelated uncertain parameters", Proceedings of American Control Conference. 1988.
- [42] K.S. Yeung y S.S. Wang, "A Simple Proof of Kharitonov's Theorem", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. AC-32, No. 9, pp. 822-823, September, 1987.
- [43] D. C. Youla, J. J. Bongiorno, Jr. y C. N. Lu, "Single-loop feedback-stabilization of linear multivariable dynamical plants," Automatica, vol. 10, pp. 159-173, 1974.
- [44] D. C. Youla, J. J. Bongiorno, Jr. y H. A. Jabr, "Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers, part I: The single input case", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. AC-21, pp. 3-14, 1976.
- [45] L. A. Zadeh, y C. A. Desoer, Linear System Theory-A State Space Approach, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [46] M. Zedek, "Continuity and location of zeros of linear combination of polynomials", Proc. American Mathematical Society, vol. 16, pp. 78-84, 1965.
- [47] E. Zeheb, "Necessary and sufficient conditions for robust stability of a continuous system- The continuous dependency case illustrated via multilinear dependency", IEEE Transaction and Circuits Systems, vol. 37, pp. 47-53, 1990.

- [48] E. Zeheb, "On the Characterization and formation of local convex directions for Hurwitz stability", In *Stability Theory, Hurwitz Centenary Conference*, R. Jeltsch and M. Mansour, eds., Boston MA., Birkhauser, pp. 173-180, 1995.

Apéndice A

Regiones \mathcal{D} Admisibles

Las regiones \mathcal{D} admisibles, donde el método propuesto en el capítulo 3 es aplicable, son todas las regiones complejas para las cuales se cumplen las siguientes dos condiciones:

1. Dado cualquier polinomio $p : C \rightarrow C$, definido por

$$p(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^{n-j}, \text{ con } a_j \in \mathfrak{R} \text{ para } j = 0, 1, \dots, n \quad (\text{A.1})$$

La evaluación de $p(\cdot)$ en cada punto $s = x + iy$ de la frontera ∂D de D puede ser escrita como:

$$p(s) = \sum_{j=0}^n [\alpha_{n-j}(u) + iy\beta_{n-j}(u)] = g(u) + iyh(u) \quad (\text{A.2})$$

donde $g(\cdot)$ y $h(\cdot)$ son polinomios y $u = x$ ó $u = y$.

2. La región \mathcal{D} debe ser convexa y simétrica con respecto al eje real.

Hay varias regiones \mathcal{D} importantes, desde el punto de vista de teoría del control, donde las dos condiciones arriba mencionadas, se cumplen. Por ejemplo:

- a). El semiplano complejo izquierdo, la igualdad (A.2) se cumple para

$$s = iy, \quad u = y.$$

b). El círculo unitario. La admisibilidad de esta región se puede deducir comenzando del hecho de que, por el binomio de Newton, un punto $s = x + iy$ elevado a la potencia ℓ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$(x + i y)^\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \binom{\ell}{j} x^{\ell-j} (i y)^j = \sum_{j=0}^t \binom{\ell}{2j} x^{\ell-2j} (-y^2)^j + i y \sum_{j=0}^v \binom{\ell}{2j+1} x^{\ell-2j-1} (-y^2)^j$$

con

$$t = \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{si } \ell \text{ es par} \\ \frac{\ell-1}{2} & \text{si } \ell \text{ es impar} \end{cases} \quad \text{y} \quad v = \begin{cases} \frac{\ell-2}{2} & \text{si } \ell \text{ es par} \\ \frac{\ell-1}{2} & \text{si } \ell \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto, si y^2 puede escribirse como un polinomio en x , $p_\partial(x) = y^2$ cualquier término $a_j s^{n-j}$ puede ser expresado como:

$$\alpha_j (x + i y)^{n-j} = \alpha_{n-j}(x) + i y \beta_{n-j}(x) \quad (\text{A.3})$$

donde $\alpha_{n-j}(\cdot)$ y $\beta_{n-j}(\cdot)$ son polinomios reales y $a_j \in \mathfrak{R}$.

La condición extra $y^2 = p_\partial(x)$ aplicable para cada $s = (x + iy) \in \partial D$ se cumple para cualquier elipse centrada en el origen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En particular, se cumple para el círculo unitario, $a = b = 1$, $y^2 = 1 - x^2$.

Hay dos características importantes de cada polinomio definido por (A.1) cuyas raíces son puntos interiores de una región D admisible. Estas características son la continuidad y estricta monotonicidad de su fase.

Esto será probado a continuación para regiones \mathcal{D} admisibles cerradas. El resultado cuando \mathcal{D} es el semiplano complejo izquierdo es conocido como criterio de Mijailov, ver sección 5.7.5 de [7]. La demostración presentada enseguida sigue muy de cerca a la dada por B Barmish en el lema 5.7.6 de [7] cuando la frontera $\partial \mathcal{D}$ es el eje imaginario.

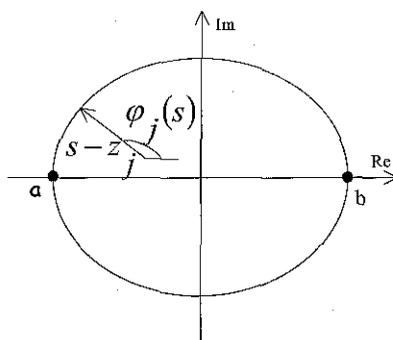


Figura A.1: Fase de una raíz compleja

Lema 21 Sea $\mathcal{D} = X + iY$ una región convexa cerrada con $X = [a, b]$ y $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio definido por $p(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^{n-j}$ y $a_j \in \mathbb{R}$ para $j = 0, 1, \dots, n$.

Si $p(s)$ tiene todas sus raíces dentro de \mathcal{D} , su fase $\phi(p(s))$, es continua y estrictamente decreciente cuando $x \in X$ se mueve de a a b a través de la frontera $\partial\mathcal{D}$ en el semiplano complejo superior.

Demostración. Sea $p(s)$ definido como:

$$p(s) = \alpha \prod_{j=1}^n (s - z_j) \quad \text{donde } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } z_j \in \mathbb{C}, \text{ para } j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.4})$$

El vector $s - z_j$ puede ser escrito en forma polar como $s - z_j = r_j(s) e^{i\varphi_j(s)}$; de aquí $p(s) = r(s) e^{i\varphi(s)}$ donde $r(s) = \alpha \prod_{j=1}^n r_j(s)$ y la fase de $p(s)$, $\phi(p(s)) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(s)$

Suponga que todas las raíces de $p(s)$ están dentro de \mathcal{D} ; entonces $p(s)$ no tiene raíces en $\partial\mathcal{D}$; es decir $p(s) \neq 0 \quad \forall s \in \partial\mathcal{D}$. Además, la fase ϕ_j de cada vector $(s - z_j)$ es continuo y estrictamente decreciente cuando el vector se mueve de a a b , a través de $\partial\mathcal{D}$ en el semiplano complejo superior.

Dado que $\phi(s)$ es la suma de todas las $\varphi_j(s)$, es continua y estrictamente decreciente. ■

Hay otras regiones \mathcal{D} convexas abiertas, aparte del semiplano complejo izquierdo, donde la evaluación de cada polinomio $p(s)$, en cada punto $s = x + iy \in \mathcal{D}$ depende

solo de una variable y cuya fase es estrictamente creciente. Esta clase de regiones son todas aquellas regiones convexas cuyas fronteras están definidas por líneas rectas. Por ejemplo, un cono con vértice en el origen y simétrico con respecto al eje real negativo. Su frontera esta definida en forma polar por $s = re^{i\theta}$ con θ una constante y $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $r \in [0, \infty)$.

La evaluación de un polinomio $p(s) = \sum_{j=0}^n a_j s^{n-j}$ en su frontera $s = re^{i\theta}$ está definida por:

$$p(re^{i\theta}) = \sum_{j=0}^n a_j (re^{i\theta})^{n-j} = \sum_{j=0}^n a_j [\cos(n-j)\theta r^{n-j} + ir \sin(n-j)\theta r^{n-j-1}]$$

Por lo tanto todos los resultados válidos para $u = y$ son también válidos para $u = r$.

Se puede comprobar que la fase de cada polinomio $p(s)$ cuyas raíces están dentro de la región \mathcal{D} convexa, es estrictamente creciente de $r \in [0, \infty)$.

Como la intersección de conjuntos convexas es un conjunto convexo, la intersección de regiones \mathcal{D} admisibles es también una región \mathcal{D} admisible.

**“... of the making of many [thesis] there is no end, and
much study is a weariness of the flesh”**

Adapted from the book LINEAR SYSTEMS by THOMAS KAILATH