25

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# LA ESTADISTICA EN LA INVESTIGACION EXPERIMENTAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

ADRIANA GRACIELA DAVILA ZAMORA

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. HORTENSIA MORENO MACIAS

2002

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**
**Facultad de Ciencias**
**Presente**

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

LA ESTADÍSTICA EN LA INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

realizado por ADRIANA GRACIELA DÁVILA ZAMORA

con número de cuenta 8955161-5 , quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | |
|---|---|
| Director de Tesis<br>Propietario | M. en C. Hortensia Moreno Macías |
| Propietario | Dr. Ignacio Méndez Ramírez |
| Propietario | M. en C. José Antonio Flores Díaz |
| Suplente | Act. Jaime Vázquez Alamilla |
| Suplente | Act. María del Rosario Espinosa Tufiño |

**Consejo Departamental de Matemáticas**

M. en C. José Antonio Flores Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A César por su amor, apoyo y ejemplo.

A mis padres Graciela y Marcos por forjarme el hábito del estudio y brindarme su apoyo y cariño.

A mis hermanos Sergio y Alejandra y a mi cuñada Pilar por su ayuda y solidaridad.

A Ofir y Angélica por permitirme usar su información y por su amistad.

A todos mis amigos y familiares por permitirme ser parte de su vida y enriquecer la mía.

Agradezco a la M. en C. Hortensia Moreno Macías por asesorarme y compartir conmigo sus conocimientos.

Al Dr. Ignacio Méndez, M. en C. José Antonio Flores, Act. María del Rosario Espinosa y al Act. Jaime Vázquez por sus valiosas observaciones.

A Dios por ser eje en mi vida y permitirme concluir esta etapa.

# LA ESTADÍSTICA EN LA INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

# ÍNDICE

**Introducción** 10

**Capítulo 1. Investigación experimental** 12

1.1 La informática en la investigación 15
1.2 La estadística en la investigación 16
1.3 Protocolo de Investigación 17
1.3.1 Título 19
1.3.2 Antecedentes 19
1.3.3 Objetivos 20
1.3.4 Hipótesis 21
1.3.5 Definición de la población 22
1.3.6 Diseño estadístico 24
1.3.6.1 Factor 24
1.3.6.2 Tratamiento 25
1.3.6.3 Respuesta 25
1.3.7 Recursos 26
1.3.8 Logística 27
1.3.9 Ética del estudio y procedimientos 28
1.3.10 Referencias bibliográficas 29

**Capítulo 2. Análisis de datos** 31

2.1 Recolección, captura y almacenamiento de datos 32
2.2 Métodos Gráficos (Métodos exploratorios) 36
2.2.1 Gráfica de dispersión 37
2.2.2 Histogramas 40

2.2.3 Gráfica de Cajas (Boxplots) 43

2.2.4 Gráfica de Tallo y Hoja (Stem-and-leaf) 45

2.3. Análisis cuantitativo 47

2.3.1 Principales medidas de tendencia central 47

2.3.2 Principales medidas de dispersión 48

2.3.3 Prueba para una muestra 48

2.3.4 Pruebas para dos muestras (comparación de medias) 49

2.3.5 Análisis de varianza 50

2.4. Modelo Lineal 58

2.5 Comprobación de supuestos 62

2.5.1 Independencia de los datos 63

2.5.2 Pruebas de Normalidad 63

2.5.2.1 Gráfica de normalidad 63

2.5.2.2. Prueba de Normalidad de Shapiro and Wilk 65

2.5.2.3 Prueba de normalidad de D'Agostino 66

2.5.3 Homoscedasticidad 67

2.6 Transformaciones 69

2.7 Observaciones del capítulo 75

**Capítulo 3. Pruebas para datos no paramétricos 77**

3.1. Prueba U de Mann-Whitney 78

3.2. Análisis de la varianza de dos clasificaciones por rangos de Friedman. 85

3.3. Análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis 86

**Capítulo 4. Comparaciones Múltiples 91**

4.1 Comparaciones múltiples para datos paramétricos 91

4.1.1 Definición de los grupos por método 93

4.1.2 Estimación de los intervalos de confianza por método de comparaciones múltiples 94

4.1.3 Pruebas simultáneas por método
de comparaciones múltiples 96
4.2 Comparaciones múltiples para datos no paramétricos. 98
4.2.1.Prueba de Kruskal-Wallis 98
4.2.2 Prueba de Friedman 98
4.3 Observaciones sobre los resultados de comparaciones múltiples 99

**Conclusiones** **100**

**Anexo A** **102**
Factores de confusión 102
Causalidad 103
Tamaños de muestra 104

**Anexo B** **106**
Modelo lineal general 106
Cálculo de la suma de cuadrados para distintos modelos lineales 112
Obtención de estimadores 116
Pruebas de Normalidad 117
Prueba de Homoscedasticidad 122
Tablas de t 128

**Anexo C** **130**
Tablas de U de Mann-Whitney 130
Tablas de H de Kruskal-Wallis 137

**Anexo D** **139**
Combinación lineal y contraste 139

**Bibliografía** **140**

# INTRODUCCIÓN

La estadística tiene muchas aplicaciones motivo por el cual es utilizada por profesionistas de distintas áreas del conocimiento, en ocasiones la falta de formación estadística conduce a que las técnicas sean utilizadas sin cumplir los requerimientos mínimos para obtener resultados confiables.

El desarrollo de un país está íntimamente ligado con el trabajo que éste realiza en materia de investigación en ciencia y tecnología. En el contexto de la labor científica, la estadística es una herramienta de la que no se puede prescindir. Es por ello que resulta crítico fortalecer el vínculo que existe entre el científico y esta disciplina con objeto de que ésta sea correctamente aplicada en todo el proceso de investigación.

Lo anterior da origen a esta tesis, la cual tiene como objetivo principal servir de guía en trabajos experimentales, buscando dar apoyo a nuevos investigadores desde el planteamiento de su trabajo, durante y hasta la interpretación de los resultados, proporcionándoles las herramientas básicas.

El trabajo está integrado por cuatro capítulos, a continuación se hace una breve descripción de cada uno de ellos.

En el capítulo uno, denominado "Investigación experimental", el objetivo es introducir al investigador en el protocolo de la investigación científica identificando, dentro del mismo, la participación de la estadística, también se resalta la importancia de la informática, ya que con ella se agilizan los procesos haciéndolos más sencillos, así mismo se detallan las características que deben de tener las unidades experimentales.

En el capítulo dos se desarrolla el proceso de recopilación de información y la exploración de datos, también se presenta el análisis de varianza y el modelo lineal, se concluye con pruebas que ayudan a determinar las características que tiene la información, mismas que apoyan para el diagnóstico de la prueba correcta.

El capítulo tres tiene como objetivo mostrar al investigador algunas alternativas de análisis cuando no se cumplen los supuestos de las pruebas paramétricas, desarrollando pruebas no paramétricas.

El capítulo cuatro tiene como finalidad, afinar un poco más los resultados obtenidos en la prueba paramétrica, de forma que pueda identificar la importancia que tiene cada una de las variables que implementa en su experimento.

En el transcurso del trabajo se presenta un ejemplo real y el análisis del mismo siguiendo los pasos recomendados para cualquier trabajo que se desea llevar a cabo.

# CAPÍTULO 1

## Investigación experimental

El hombre desde que nace observa el medio que lo rodea siempre en busca de las causas y efectos, muchos de los conocimientos son adquiridos de forma empírica o transmitida, pero la necesidad de controlar y entender el medio en el que vive, así como el asegurar su futuro lo lleva a investigar, de esta manera da impulso al desarrollo de la ciencia.

El avance en el área científica ha permitido lograr importantes descubrimientos en medicina, biotecnología, cibernética, física y química, entre otros campos del conocimiento. Con lo cual se ha logrado, por ejemplo, elevar la esperanza de vida, reducir costos en la producción y optimizar materias primas.

La investigación es un proceso en el cual se busca recabar información y analizarla acercarse al conocimiento de un fenómeno. Esta puede realizarse de diferentes maneras, y con distintas características que permiten ubicarla dentro de una determinada categoría, ya sea como investigación documental o experimental.

En la investigación documental el periodo de captación de la información es determinado por etapas determinadas del fenómeno o acontecimiento que se analiza, puede ser de acontecimientos pasados o presentes, puede auxiliarse de fuentes primarias o secundarias de información.

Por otra parte, en la investigación experimental su estudio es prospectivo, longitudinal, comparativo y experimental.

En el presente trabajo se desarrolla la investigación experimental, que según Tamayo (2001)[1] "se presenta mediante la manipulación de una variable no comprobada, en condiciones rigurosamente controladas, con el fin de describir de que modo o por que causa se produce una situación o acontecimiento particular [2]".

La investigación experimental es realizada principalmente por personas que trabajan en áreas de investigación científica como química, medicina, biología, agronomía, ingeniería interesadas en el avance y mejora de la ciencia, de esta manera se logra mayor dominio del mundo que nos rodea.

Este tipo de investigación cuenta con una serie de características propias, las cuales se mencionan a continuación.

- El investigador va a tener dominio sobre algunas variables del estudio.
- La información se irá recabando a lo largo de un periodo determinado, o bien, en determinados momentos.
- Se va a hacer uso de una o más poblaciones para comparación con respecto a la hipótesis central.

---

[1] Tamayo y Tamayo, Mario. El proceso de la investigación científica, cuarta edición, Edit. Limusa 2001.

[2] Si se desea información sobre otros tipos de investigación revisar: Méndez Ramírez, Ignacio, Namihira Guerrero, Delia. Protocolo de la investigación. Lineamientos para su elaboración y análisis. Edit. Trillas 1990.

La investigación experimental se lleva a cabo mediante una serie de pasos, dentro de los cuales, la estadística y la informática toman una importancia relevante, debido a que dan un fuerte apoyo en el manejo, procesamiento e interpretación de la información.

El avance del conocimiento es vertiginoso, este crece a pasos agigantados en las distintas áreas de estudio, lo anterior ha conducido a que el hombre se especialice en temas específicos, esto no lo ha apartado de requerir herramientas de otras áreas, motivo por el cual surge la necesidad de trabajar en forma conjunta, integrándose grupos multidisciplinarios.

La estadística y la informática son apoyo a muchas áreas de la investigación, no solamente al área científica, sino también en la investigación social o del comportamiento humano. El trabajo conjunto ha permitido el avance de teorías y metodologías en los diferentes campos de estudio, podemos citar cómo la estadística ha implementado nuevos modelos para el estudio de distintos experimentos.

## 1.1 La informática en la investigación

La informática es una herramienta para almacenar y procesar información de forma electrónica; en el mundo actual el desarrollo de la informática avanza a tal velocidad que en breves periodos de tiempo está generando herramientas que facilitan el trabajo cotidiano, dando un fuerte apoyo a la investigación.

Muchos modelos matemáticos actualmente son procesados de manera rápida y eficiente por equipos poco sofisticados, los programas de recolección de datos, graficación y estadísticos (SAS, SPSS, Minitab, S-plus, JMP)[3], generan resultados en cuestión de segundos, estos hasta hace pocos años eran obtenidos invirtiendo mucho tiempo.

El desarrollo en el campo de la informática ha sido de gran apoyo a los investigadores, resaltando que los programas y equipos actuales son de fácil manipulación permitiendo que estos no requieran de mucha asesoría para su uso.

La informática ha llegado a ser una herramienta indispensable en la investigación. En algunas áreas se han generado simuladores de algún fenómeno permitiendo analizarlo, sin tener que utilizar elementos reales y sin tener que invertir mucho tiempo, claro, todo a través de equipos muy sofisticados.

---

[3] SAS.- Es un paquete estadístico enfocado para la industria, incluyendo servicios financieros, telecomunicaciones, sector público, sector farmacéutico, etc. Es principalmente para toma de decisiones, y cuenta con manejadores de datos, análisis de datos, control y apoyo a la toma de decisiones.

SPSS.- (Statistical Package for Social Science) es un paquete estadístico de análisis de datos con aplicaciones en la investigación de las ciencias sociales y económicas.

Minitab.-Es un paquete estadístico enfocado al área educativa y de investigación.

S-Plus.- Es un paquete estadístico enfocado en el análisis exploratorio de datos y para modelación estadística.

JMP.- Es un paquete estadístico diseñado para descubrir relaciones y outliers en los datos, proporciona herramientas estadísticas para el diseño de experimentos y control de calidad.

El desarrollo de un sistema de cómputo lleva detrás un equipo de hombres trabajando e investigando, personas dedicadas a distintos campos del conocimiento, expertos que hacen que esos sistemas tengan sustentos sólidos, que dan confianza a ser utilizados en trabajos de investigación y usar los resultados que se obtienen.

Es por lo anterior que el uso de la informática está incluida en los procesos de la investigación.

### 1.2 La estadística en la investigación

No existe una sola definición de estadística por lo que en el presente trabajo se cita la siguiente "La estadística es un grupo de técnicas o metodologías que se desarrollan para la recopilación, presentación y análisis de los datos y para el uso de los mismos."[4]

A la par que la ciencia y la investigación se desarrollan, la estadística como área de apoyo, avanza y aporta nuevos y eficientes métodos de análisis de los datos.

La necesidad de las distintas áreas de estudio de contar con técnicas gráficas y numéricas que le ayuden a interpretar la información con que cuentan, así como el trabajo conjunto, ha hecho que surjan una cantidad de ramas en la estadística (diseño de experimentos, regresión, análisis multivariado, series de tiempo), así mismo, dentro de cada rama han surgido teorías y métodos para asegurar un análisis más adecuado. Dependiendo del objetivo y diseño con que se trabaja, se determina el tipo de análisis que se ha de aplicar.

Actualmente considerar aspectos estadísticos es imprescindible en el desarrollo de la investigación experimental, desde el planteamiento del trabajo, hasta la obtención de las conclusiones.

---

[4] Neter –Waserman, www.ing.unp.edu.ar/estadisitio/autors.htm

El planteamiento teórico y de diseño da apoyo a las variables a incluir, proporcionando elementos, para que el investigador seleccione el conjunto de estudio idóneo, y de esta forma disminuir y controlar la variabilidad al experimentar

Una vez que el experimento se ha realizado y los datos han sido recabados, el análisis requiere de técnicas estadísticas, desde apoyo de gráficos que han surgido de la necesidad de conocer el comportamiento de los datos, como de técnicas numéricas para poder dar apoyo a la conclusión de la investigación[5].

El desconocer las técnicas de análisis estadísticas, así como de condiciones que las mismas establecen, podría conducir al investigador a realizar trabajos con serios problemas de calidad y control de la información.

Toda investigación experimental debe tener evaluaciones estadísticas y no puede prescindir de ellas.

### 1.3 Protocolo de Investigación

La investigación experimental sigue una serie de pasos recomendados (no infalibles), los cuales conducen al conocimiento de un fenómeno. Ese conjunto de pasos es conocido como "Protocolo de la investigación". Se debe considerar que no existe un protocolo universal.

El seguir el procedimiento establecido por un protocolo de investigación hace a ésta más objetiva y confiable, buscando minimizar influencias particulares que pudiera tener el investigador.

El investigador busca seguir una serie de etapas propias del protocolo, dichos pasos o etapas de la investigación, interactúan con técnicas estadísticas e informáticas, mientras otras son propias del dominio del área sobre la que se está experimentando.

[5] Las técnicas se detallan más adelante en este capítulo

El protocolo es utilizado por investigadores de todo el mundo y su función primordial es servir de guía para la investigación. Los pasos a seguir según Méndez (1990) son:

- **Título**
- **Antecedentes**
- **Objetivos**
- **Hipótesis**
- **Definición de la población.**
- **Diseño estadístico**
- **Recursos**
- **Logística**
- **Etica del estudio**
- **Referencias bibliográficas**

En el presente trabajo se va a ir mostrando el desarrollo de un experimento que fue realizado en el año 2000[6]. Los resultados y la discusión ya fueron presentados, pero en este caso, el objetivo es el seguimiento paso a paso y ahondar en las técnicas estadísticas y su interpretación, aprovechando que se cuenta con el planteamiento del experimento y los datos originales obtenidos en el laboratorio.

Después de una breve explicación de cada paso, éste se ejemplifica y, con la intensión de no confundir al lector, todo lo relativo al ejemplo se encuentra en letras cursivas.

---

[6]Pellicer Francisco, Picazo Ofir, León-Olea Martha, *Behavioural Brain Research 119 (2001) 179-183*

### *1.3.1 Título*

El título es un enunciado en el que se precisa el objeto del estudio; en el título se pretende enunciar lo que se desea probar, no se limita al investigador en el número de palabras a utilizar, pero se recomienda no sea demasiado grande.

Es una forma de informar al lector de que se trata el experimento y de esta manera introducirlo rápidamente al tipo de investigación.

*En el ejemplo:*

*"Effect of red peppers (Capsicum frutescens) intake during gestation on thermonociceptive respose of rat offspring"*

### *1.3.2 Antecedentes*

Aquí se presenta el marco de referencia, ubicando al estudio en el área del conocimiento.

Esta sección es importante para el investigador, debido a que proporciona antecedentes, en caso de existir investigaciones previas, de cómo puede ser la variabilidad de los elementos que participan en la investigación para determinar el tamaño de muestra razonable que proporcione información confiable.

En este punto cualquier tipo de información con que se cuente a nivel mundial es de importancia para el dominio de la investigación que se desea llevar a cabo.

*En el ejemplo:*

*En el presente estudio se cita a la Capsaicina que es el principio activo del Chile, la cual se sabe produce una sensación de piquete en las membranas mucosas. Se señala que el consumo de dicha sustancia por mamíferos produce efectos severos en la dinámica de unas células identificadas como P-ergic, los efectos* *producidos son clasificados en muy fuertes, intermedios y de largo término o neurotóxico.*

*En el primero de los efectos se manifiesta directamente en el sistema neurotrasmisor, donde la conducción es lenta y las fibras se vuelven altamente resistentes.*

*En el segundo caso se observa en la actividad eléctrica sensorial de las neuronas, donde la velocidad y la extensión de la capsaicina están ligados a la dosis y al tiempo en que estuvo expuesto, así como el intervalo de repetición, y su respuesta al dolor.*

*En el tercer caso de los efectos neurotóxicos son los que se producen en la administración perinatal.*

*Como el presente estudio esta enfocado en los efectos neurotóxicos, se señalan previos estudios como antecedentes, donde se encontró que bajas dosis del principio activo a ratas gestantes, incrementa el tiempo de la respuesta de escape del ratón recién nacido. Lo cual sugiere que ingerir chile durante periodos de gestación de la rata da al ratón cualidades de resistencia al nacer.*

### 1.3.3 Objetivos

El investigador debe de ser capaz de detallar lo que se desea demostrar en su investigación experimental, en esta parte es donde él señala el fin al que desea llegar.

Con el objetivo el lector podrá darse una idea amplia de lo que el investigador observó y desea demostrar por métodos formales.

*En el ejemplo:*

*Se desea medir si la resistencia al calor de un ratón recién nacido se ve afectada por la dieta (adicionando chile como elemento a probar) a la que se somete a la rata madre durante la gestación.*

### *1.3.4 Hipótesis*

La hipótesis no es más que una suposición o conjetura que plantea lo que se desea probar, esta es temporal, ya a través de lo que se observa en la muestra, ésta será o no será rechazada

*En el ejemplo:*

*Las hipótesis que los investigadores plantean en este experimento son:*

En términos estadísticos, la hipótesis es:

*$H_o$: las medias de medición de resistencia al calor son iguales (tratamientos y control)*

*$H_a$: al menos una de las medias de medición de resistencia al calor es diferente al resto (tratamientos y control)*

Con simbología estadística:

$H_o : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

$H_a : \mu_i \neq \mu_j$ para algún par $i \neq j \quad i, j = 1,2,3$

### *1.3.5 Definición de la población*

LA POBLACIÓN ES EL CONJUNTO DE ELEMENTOS CON CARACTERÍSTICAS COMUNES QUE SE DESEA ESTUDIAR, muchas ocasiones el número total de elementos que forman las poblaciones no es conocido con exactitud, ejemplo de una población podría ser todas las mujeres del mundo entre 25-30 años que tienen estudios universitarios y trabajan en empresas de investigación de mercados, este tipo de datos con frecuencia es incierto pero esto no impide el estudio de la población.

En los experimentos en laboratorio, así como en la mayoría de los estudios experimentales, no se conoce con exactitud, ni se cuenta con el número exacto de los elementos de las poblaciones que se desea estudiar, éstas se conceptualizan como infinita. Entonces se trabaja con muestras disponibles[7] con la seguridad de que son totalmente representativas de la población, se define con ese propósito. La muestra es el conjunto de elementos sobre los que se va a experimentar, y a los cuales se les van a aplicar los tratamientos para medir su respuesta. Por lo regular se busca que las poblaciones cuenten con características específicas o comunes que disminuyan la variabilidad en los resultados, es aquí donde el investigador debe tener control sobre características de las mismas, lo anterior nos conduce a que el investigador debe de tener conocimiento de lo que implica una "aleatorización", "homogeneización" y "trabajar bloques" al definir su muestra para control de factores de confusión[8].

Conocer la población sobre la que se va a experimentar y se desea saber algo, ubica al lector en un grupo determinado, y lo limita a no generalizar en los resultados a otros tipos de poblaciones.

---

[7] Anexo A "Tamaños de Muestra"
[8] Anexo A "Factores de confusión, aleatorización, homogeneización y bloques"

*En el ejemplo:*

*Se seleccionaron ratas Wistar con peso de 275-325 gramos, que estuvieran en periodo receptivo, dichas ratas estuvieron viviendo en condiciones normales bajo ciclos normales de luz y obscuridad, cada tres ratas se les ponía con un ratón macho sexualmente experimentado.*

*Un día después de habérseles puesto con el macho, se consideraba como primer día de gestación.*

*En este experimento se puede observar que el investigador homogeneizó su población, dentro de un grupo de ratas de una especie, con un peso específico, aunándole que éstas debían de estar en periodo de recepción para asegurar que quedaran preñadas en el tiempo que el investigador iniciaba su experimento.*

*La aleatorización la aplicó en el momento en que formó los cuatro grupos, seleccionando de forma aleatoria el tratamiento.*

*Una vez aplicado cada uno de los tratamientos a las ratas y transcurrido el tiempo de gestación (22 a 24 días), se mantuvieron las crías con las hembras (9 en promedio de 8 a 12 crías por parto) un determinado tiempo, hasta que los ratones machos crías tuvieran un peso de 80 grs. Se seleccionaron las crías que cumplieron con la característica señalada y se obtuvieron el siguiente número de crías, por grupo de tratamiento.*

| | |
|---|---|
| ***Grupo Control.......*** | *27 ratones* |
| ***Grupo 10%...........*** | *28 ratones* |
| ***Grupo 25%...........*** | *23 ratones* |
| ***Grupo 50%...........*** | *19 ratones* |

### *1.3.6 Diseño estadístico*

Una vez que el investigador definió su población y tamaño de muestra, debe determinar el número de factores que va a utilizar, el número de tratamientos a aplicar y en caso de haber especificado bloques identificarlos, así como la forma de recolección de sus datos. Es recomendable que una vez identificadas sus variables, el investigador se allegue de información que le permita identificar el modelo que va a plantear, de esta manera facilitará su trabajo de análisis, además estará consciente de los supuestos que el modelo le exige y una vez concluido el experimento, en caso de no cumplirlos, podría producir resultados y conclusiones erróneas.

#### *1.3.6.1 Factor*

Es una variable independiente controlable, esta variable la va a especificar el investigador, un factor puede ser la temperatura a que se somete un determinado proceso, o tipo de material, el experimento puede constar de uno o varios factores, el número de factores es el que determina si el estudio es considerado de factor simple o multifactorial, los estudios multifactoriales van a permitir estudiar de manera simultánea el efecto de varios factores, en particular las posibles interacciones.

Los factores son **cuantitativos o cualitativos**, esto depende del tipo de atributo que tenga el nivel del factor, ejemplo de un cuantitativo son los niveles numéricos (temperaturas, años) y de un cualitativo (tipos de anuncios publicitarios).

#### *1.3.6.2 Tratamiento*

Está relacionado con los factores y el número de los mismos, en el experimento con un factor el tratamiento corresponde a cada nivel del factor, es decir, si tiene 5 niveles ese experimento cuenta con 5 tratamientos, en el caso de los multifactoriales, un tratamiento corresponde a una sola combinación de los factores.

#### *1.3.6.3 Respuesta*

La respuesta es la variable dependiente, esta va a depender de los factores o tratamientos que se apliquen en la investigación[9]. Es importante que el investigador considere que en su planteamiento puede haber ocasiones en que no se reciba respuesta, ocasionando datos incompletos y lo que se conoce como modelos desbalanceados.

*En el ejemplo:*

*El experimento cuenta con un solo factor que es el tipo de alimentación, y tiene 4 niveles del factor (% de chile en la alimentación), lo cual nos lleva a 4 tratamientos distintos, y estos son:*

| | |
|---|---|
| ***Tratamiento 1*** | *Ratas cuyas madres gestantes fueron alimentadas con 0% de chile (control)* |
| ***Tratamiento 2*** | *Ratas cuyas madres gestantes fueron alimentadas con 10% de chile* |
| ***Tratamiento 3*** | *Ratas cuyas madres gestantes fueron alimentadas con 25% de chile* |
| ***Tratamiento 4*** | *Ratas cuyas madres gestantes fueron alimentadas con 50% de chile* |

[9] Anexo A "Causalidad"

*Los tratamientos, como se menciona, fueron suministrados en los alimentos de las ratas gestantes. La dieta consistía en su dieta para roedores adicionándole chile seco y pulverizado, cada porcentaje era mezclado con el alimento y rehidratado, la concentración promedio de chile ingerido diariamente por una rata del grupo de 10% era aproximado de 1.5 mg, el del grupo de 25% 3.75 mg y el de 50% era aproximado de 7.5 mg.*

*En el experimento se recolectó como respuesta por ratón el tiempo "escape[10]", las respuestas son las variables dependientes, durante el experimento, algunos ratones no presentaron todos los comportamientos que se estaban midiendo.*

*Para recolectar los resultados cada ratón fue puesto en un plato caliente a una temperatura de 53°C ± 0.5°C, cercado por un cilindro de vidrio de 20 cms de diámetro y 25 cms. de alto, el ratón era colocado en dicho plato no más de 35 segundos para evitar dañarlo, aunque existiera respuesta o no, se tomaba el tiempo en que la respuesta a observar se presentaba.*

### *1.3.7 Recursos*

El contar con los recursos materiales y económicos necesarios son los que aseguran el éxito o mejor desarrollo del experimento, no contar con éstos limitaría la investigación y en muchos casos el avance científico.

[10] Cuando el animal salta tratando de escapar

*En el ejemplo*:

*En este caso no contamos con la información de costos pero podemos contabilizar los requerimientos mínimos para llevar a cabo dicho experimento.*

*12 ratas hembras mínimo*
*3 ratas machos*
*cilindro de cristal*
*Plancha*
*Gas*
*Alimentación de las ratas y sustancia a probar*

*Contenedores de las ratas y ratones*

### *1.3.8 Logística*

Todo experimento requiere un detalle de los pasos a seguir, de manera que se logre una planeación y coordinación del mismo, así como determinar la duración de cada una de sus etapas, y tiempos estimados para cumplir con los objetivos.

Con la logística no solamente va a encargarse de coordinar tiempos, sino también de administrar los recursos.

*En el ejemplo:*

*A continuación se da información aproximada, para poder ilustrar un diagrama de logística, estos datos no fueron proporcionados por el investigador, sino se consideraron de información recabada por otros medios*[11].

*Periodo para que las ratas sean fértiles: 90 días*

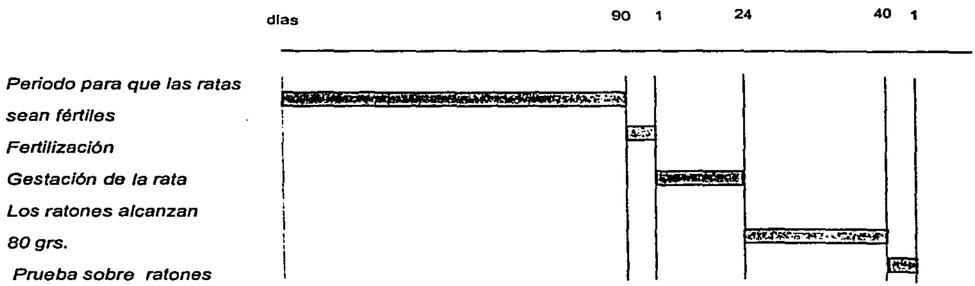
*Días de gestación: 24 máximo*

[11] Portal de Consulta Veterinaria http://www.portalveterinaria.com/

*Días necesarios para alcanzar el peso de 80 grs deseados aproximados: 40 días*

*Días de prueba: 1 a todos los ratones*

*Suponiendo que el día 1 es cuando nacen y se seleccionan las ratas que se van a criar para que cumplan con las condiciones necesarias para incluirlas en el experimento, el diagrama de logística sería el siguiente:*




*Este es un ejemplo sencillo e ilustrativo, en la actualidad existen paquetes como "project manager" que permiten realizar estos esquemas, de forma detallada y automática, estableciendo tiempos, tareas y fechas.*

### *1.3.9 Ética del estudio y procedimientos*

En el caso de estudios con seres vivos existen reglas éticas establecidas que protegen la integridad del ser a cualquier tipo de experimentación, y es un punto que cualquier investigador que desee utilizar seres vivos y principalmente humanos debe de tomar en cuenta.

Este punto no debe pasarse por alto, la ciencia en su afán por la búsqueda del conocimiento no puede ir contra la integridad y vida de cualquier ser.

Sería recomendable que estos códigos de ética fueran revisados y actualizados en periodos cortos de tiempo, ya que el avance vertiginoso de la ciencia, hace necesario una cantidad de experimentos, que podrían ir contra el mismo ser humano, en la actualidad nos encontramos como ejemplo con el caso de la clonación y el genoma humano.

Seguramente es un punto en que la humanidad no se pueda poner de acuerdo, pero en lo que debemos coincidir es asegurar un presente y un futuro, donde prevalezca el respeto a la naturaleza y al ser humano.

> *En el ejemplo:*
>
> *En este experimento los investigadores señalan que el desempeño del estudio estuvo de acuerdo con "Ethics Committee of the International Association for the Study of Pain"[12] y aprobado por la Comisión del proyecto del Instituto Nacional de Psiquiatría.*

### *1.3.10 Referencias bibliográficas*

En las referencias el investigador citará antecedentes de la misma investigación, resultados obtenidos o bibliografías que puedan dar detalle de la investigación que se está llevando a cabo.

Muchas de las ocasiones tiene como objeto señalar al lector en caso de querer conocer más sobre el tema y antecedentes, donde y que investigaciones puede consultar.

---

[12] Zimmerman *M. Ethical guidelines for investigations of experimental pain un conscious animals.* Pain 1983;13:109-10

*En el ejemplo:*


1. *Jancso G, Kiraly E, Jancso-Gabor A. Pharmacologically induced selective degeneration of chemosensitive primary sensory neurones. Nature 1977;270:741-3.*
2. *Nagy JI. Capsaicin's action on the nervous system, In:David Boosfield, editor, Neurotransmitters in Action. Trends in Neurosciences, New York: Elsevier, 1985, p-180-7.*
3. *Nagy JI,Vicent SR, Staines WA, Fibiger HC, Reisine TD, Yamamura HI. Neurotoxic action of capsaicin on spinal substanse P neuronesBrain Res 1980; 186:435-44*
4. *Pellicer F, Picazo O, Gómez-Tagle B, Roldán- de La O I. Capsaicin or feeding with red peppers during gestation changes the thermonociceptive response of rat offspring. Physiol Behavior 1996; 60:435-8.*

# CAPÍTULO 2

## Análisis de datos

Este capítulo tiene como objetivo que el investigador se familiarice con los datos obtenidos, identificando la existencia de patrones de comportamiento.

Al concluir este capítulo, el investigador podrá determinar el tipo de prueba estadística que debe emplear, la cual le ayudará a interpretar los resultados y, de esta forma evaluará la hipótesis planteada.

Para cumplir el objetivo establecido, el proceso a seguir se divide en los siguientes pasos:

- Recolección, captura y almacenamiento de los datos
- Métodos gráficos (métodos de exploración)
- Análisis de varianza
- Modelo lineal
- Comprobación de supuestos para el modelo aplicado
  - Independencia
  - Normalidad
  - Homoscedasticidad
- Conclusiones del análisis de los datos

Las etapas señaladas son recomendadas para llevar el análisis en orden, y de esta forma asegurar que sean aplicadas todas las pruebas requeridas para seleccionar la prueba a utilizar.

## 2.1 Recolección, captura y almacenamiento de datos

La recolección es la medición en las unidades experimentales, son recabadas por el investigador durante el proceso de experimentación. Para esta etapa los datos deben estar claramente diferenciados por factores, tratamientos, bloques y sujetos participantes. La captura de los datos en ocasiones es llevada a cabo en hojas de cálculo, donde una vez concluidos son exportados a paquetes estadísticos y de esta forma facilitar el análisis de los mismos. Además, de que éstos cuentan con aplicaciones avanzadas, no existe una regla exclusiva para la captura de los datos, el investigador tiene la libertad de decidir la forma que mejor le parezca para el manejo de su información.

Es importante considerar que los paquetes estadísticos en general tienen un orden de lectura de los datos, muchos paquetes pueden importar datos de las hojas de cálculo (principalmente de excel), facilitando la tarea al investigador, pero es necesario que se respete la estructura de lectura para no obtener resultados erróneos.

En los paquetes estadísticos por lo general cada columna representa una variable, ya sea un factor, tratamiento, bloque[13], es indispensable contar siempre con al menos una columna con la respuesta (valor numérico), la tabla 1 es un ejemplo del orden que deben tener dentro de la hoja para realizar análisis en paquetes estadísticos, se puede observar columna por variable; es recomendable que las variables más generales vayan a la derecha de las que son menos, aunque esta especificación no es indispensable ya que no se produce error en los resultados, ni en la función de los paquetes.

[13] Los factores, tratamientos y bloques son identificados como variables nominales, estas pueden ser números o símbolos siendo su principal propósito la clasificación.

La Tabla 1 es un ejemplo de un arreglo para un experimento con dos factores y una variable de bloqueo. Cada factor (A y B) tienen dos niveles, el primer factor tiene dos niveles ($A_1$ y $A_2$), el factor 2 se divide en dos niveles ($B_1$ y $B_2$). De esta manera se tienen 2x2=4 tratamientos. Si además se tienen 2 bloques y 5 repeticiones en cada bloque, la base consta de 4x2x5=40 registros.

***Tabla 1.***

| Factor A | Factor B | Bloques | Sujeto | Observación |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | $B_1$ | 1 | 1 | r1 |
| $A_1$ | $B_1$ | 1 | 2 | r2 |
| $A_1$ | $B_1$ | 1 | 3 | r3 |
| $A_1$ | $B_1$ | 1 | 4 | r4 |
| $A_1$ | $B_1$ | 1 | 5 | r5 |
| $A_1$ | $B_1$ | 2 | 1 | r1 |
| $A_1$ | $B_1$ | 2 | 2 | r2 |
| $A_1$ | $B_1$ | 2 | 3 | r3 |
| $A_1$ | $B_1$ | 2 | 4 | r4 |
| $A_1$ | $B_1$ | 2 | 5 | r5 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 1 | r1 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 2 | r2 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 3 | r3 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 4 | r4 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 5 | r5 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 1 | r1 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 2 | r2 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 3 | r3 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 4 | r4 |
| $A_1$ | $B_2$ | 1 | 5 | r5 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 1 | r1 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 2 | r2 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 3 | r3 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 4 | r4 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 5 | r5 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 1 | r1 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 2 | r2 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 3 | r3 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 4 | r4 |
| $A_2$ | $B_1$ | 2 | 5 | r5 |
| $A_2$ | $B_2$ | 1 | 1 | r1 |
| $A_2$ | $B_2$ | 1 | 2 | r2 |
| $A_2$ | $B_2$ | 1 | 3 | r3 |
| $A_2$ | $B_2$ | 1 | 4 | r4 |
| $A_2$ | $B_2$ | 1 | 5 | r5 |
| $A_2$ | $B_2$ | 2 | 1 | r1 |
| $A_2$ | $B_2$ | 2 | 2 | r2 |
| $A_2$ | $B_2$ | 2 | 3 | r3 |
| $A_2$ | $B_2$ | 2 | 4 | r4 |
| $A_2$ | $B_2$ | 2 | 5 | r5 |

En la tabla 2 se presentan los datos obtenidos en el experimento (de los ratones que se describió en el capítulo uno) mismos que se seguirán trabajando en el resto de esta tesis.

Los datos se presentan en una hoja de cálculo de excel, identificando perfectamente los tratamientos aplicados, y el número de individuos a los que se aplicó, se consideró un solo factor (% de chile en la alimentación), cada tratamiento es aplicado a un grupo diferente de ratones, si se tiene alguna duda sobre la información se recomienda revisar el capítulo uno con detalle.

***Tabla 2.***

| Tratamiento 0% | | Tratamiento 10% | | Tratamiento 25% | | Tratamiento 50% | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ratón | Y | Ratón | Y | Ratón | Y | Ratón | Y |
| 1 | 10 | 1 | 15 | 1 | 16 | 1 | 17 |
| 2 | 13 | 2 | 27 | 2 | 35 | 2 | 28 |
| 3 | 13 | 3 | 35 | 3 | 12 | 3 | 9 |
| 4 | 10 | 4 | 21 | 4 | 23 | 4 | 25 |
| 5 | 9 | 5 | 18 | 5 | 13 | 5 | 35 |
| 6 | 16 | 6 | 35 | 6 | 15 | 6 | 6 |
| 7 | 10 | 7 | 35 | 7 | 11 | 7 | 35 |
| 8 | 9 | 8 | 14 | 8 | 12 | 8 | 32 |
| 9 | 10 | 9 | 15 | 9 | 11 | 9 | 35 |
| 10 | 10 | 10 | 9 | 10 | 9 | 10 | 35 |
| 11 | 13 | 11 | 28 | 11 | 12 | 11 | 12 |
| 12 | 15 | 12 | 8 | 12 | 12 | 12 | 17 |
| 13 | 11 | 13 | 35 | 13 | 19 | 13 | 21 |
| 14 | 12 | 14 | 35 | 14 | 13 | 14 | 7 |
| 15 | 11 | 15 | 6 | 15 | 13 | 15 | 11 |
| 16 | 20 | 16 | 16 | 16 | 35 | 16 | 18 |
| 17 | 21 | 17 | 35 | 17 | 13 | 17 | 10 |
| 18 | 11 | 18 | 8 | 18 | 17 | 18 | 13 |
| 19 | 9 | 19 | 29 | 19 | 13 | 19 | 14 |
| 20 | 9 | 20 | 11 | 20 | 35 | | |
| 21 | 9 | 21 | 10 | 21 | 9 | | |
| 22 | 8 | 22 | 11 | 22 | 7 | | |
| 23 | 13 | 23 | 11 | 23 | 11 | | |
| 24 | 22 | 24 | 23 | | | | |
| 25 | 12 | 25 | 19 | | | | |
| 26 | 12 | 26 | 24 | | | | |
| 27 | 24 | 27 | 15 | | | | |
| | | 28 | 10 | | | | |

** Y= tiempo de respuesta.*

En la tabla 3 se presenta los datos ordenados para trabajar en paquete estadístico ( Minitab , JMP ó SPSS).

***Tabla 3.***

| Ratón | Tratamiento | Y* |
|---|---|---|
| 1 | A | 10 |
| 2 | A | 13 |
| 3 | A | 13 |
| 4 | A | 10 |
| 5 | A | 9 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 25 | A | 12 |
| 26 | A | 12 |
| 27 | A | 24 |
| 1 | B | 15 |
| 2 | B | 27 |
| 3 | B | 35 |
| 4 | B | 21 |
| 5 | B | 18 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 26 | B | 24 |
| 27 | B | 15 |
| 28 | B | 10 |
| 1 | C | 16 |
| 2 | C | 35 |
| 3 | C | 12 |
| 4 | C | 23 |
| 5 | C | 13 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 21 | C | 9 |
| 22 | C | 7 |
| 23 | C | 11 |
| 1 | D | 17 |
| 2 | D | 28 |
| 3 | D | 9 |
| 4 | D | 25 |
| 5 | D | 35 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 17 | D | 10 |
| 18 | D | 13 |
| 19 | D | 14 |

*Y=tiempo de respuesta*

Cada registro de la tabla 3 corresponde a la respuesta de un ratón en un tratamiento determinado y cada columna son las variables implicadas en este ejercicio.

## 2.2 Métodos Gráficos (Métodos exploratorios)

El uso de métodos gráficos se podría considerar como el inicio del análisis, son necesarios para observar el comportamiento de los datos, de modo que se pueda tener un entendimiento claro de los mismos, estos métodos son de apoyo para descubrir detalles importantes de la información, ejemplo de ellos son:

- Identificación de pérdida de información
- Identificación de anomalías en los datos
- Identificación de puntos alejados
- Identificación de alguna distribución marcada en los datos recolectados (periodicidades, estacionalidades, dependencias).

La importancia que han tomado estas técnicas en los últimos años ha generado que surjan nuevas formas de graficar, las cuales proporcionan información detallada de los datos que se están trabajando, dando impulso al análisis exploratorio[14] de datos.

Depende del tipo de estudio que se este llevando a cabo, para determinar las gráficas que van a ser de utilidad para el mismo, el número de observaciones es también un elemento que nos limita a usar gráficas específicas.

[14] Como información general, dicho análisis fue introducido por Tukey en 1970 y cuenta con una serie de ventajas entre las que podemos mencionar:

- Encontrar una función que nos ayude a la descripción de los datos
- Nos ayuda a un mejor entendimiento
- Y ayuda a ajustar a un patrón de comportamiento

Además este es considerado el mayor avance en el tratamiento de datos.

A continuación se presentan algunas de las gráficas de más utilidad para el análisis de datos experimentales, en esta descripción se trabaja con datos observados de forma de identificar datos atípicos, la corrección de los mismos por errores de captura será necesaria, pero en otros casos será el investigador el que decida si considera conveniente eliminarlos para continuar con el proceso, no es obligatorio la eliminación de esa información y en ocasiones es importante conservarla.

### *2.2.1 Gráfica de dispersión*

Esta es una gráfica que se presenta en los ejes cartesianos, cada eje representa un factor, un tratamiento, un bloque o un elemento observado, por lo regular el eje vertical contiene los valores recabados (variable respuesta).

En estas gráficas se pueden identificar tres características de relación entre los datos, estas pueden ser:

Negativas.- en este caso el valor máximo se encuentra en la esquina superior izquierda, el mínimo en la esquina inferior derecha.

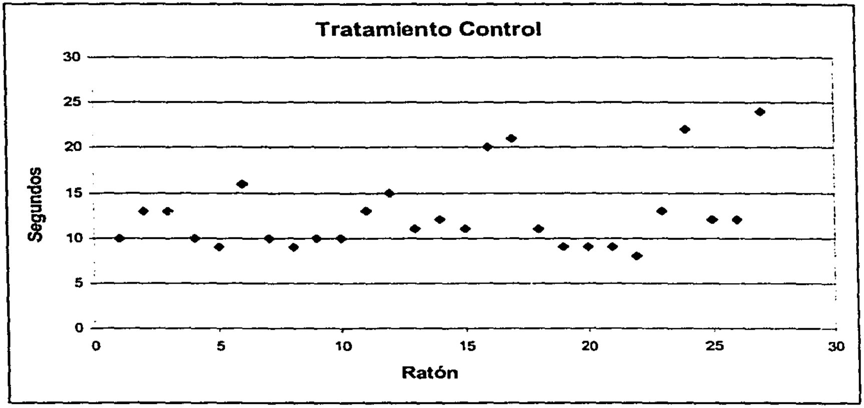
Positivas.- en este caso el valor máximo se encuentra en la esquina inferior izquierda, el mínimo en la esquina superior derecha.

No existe relación.- donde no se observa ni un comportamiento dependiente una variable de otra, indicándonos que no existe relación entre los datos.

Para elaborar una gráfica de dispersión no se necesita de un número elevado de observaciones, con ella se puede identificar si algún dato sale del patrón de comportamiento del resto de las observaciones, alertando al investigador para revisar la información (otras gráficas que se verán posteriormente ayudan también a identificar valores extremos), también se puede observar que los datos no tengan ningún patrón de dependencia, con la tercera característica señalada, donde no existe una relación entre los datos[15].

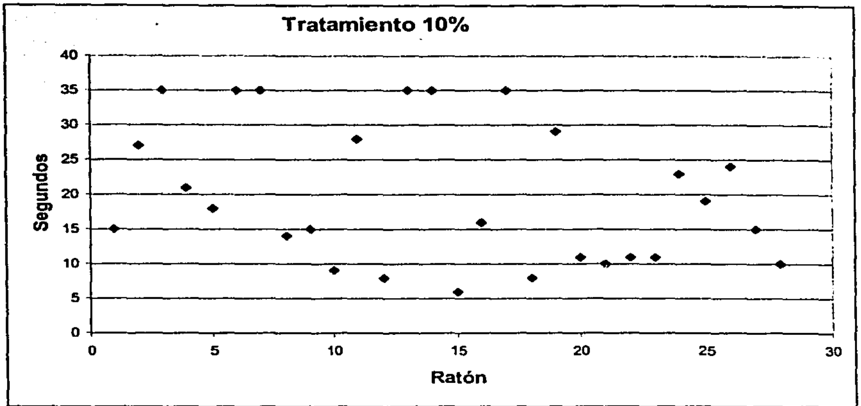
A continuación se presentan las gráficas de dispersión del experimento que se está analizando, estas se elaboraron en dos ejes el "X" y el "Y", y se presenta una gráfica por tratamiento aplicado, considerando que los elementos experimentales son distintos. En el eje "X" se identifica el ratón al que se le cronometra la reacción que sé esta midiendo, y el eje "Y" es el valor obtenido, lo mismo es considerado para todas las gráficas. Con este tipo de gráfica se puede detectar una posible dependencia.

***Gráficas de Dispersión***

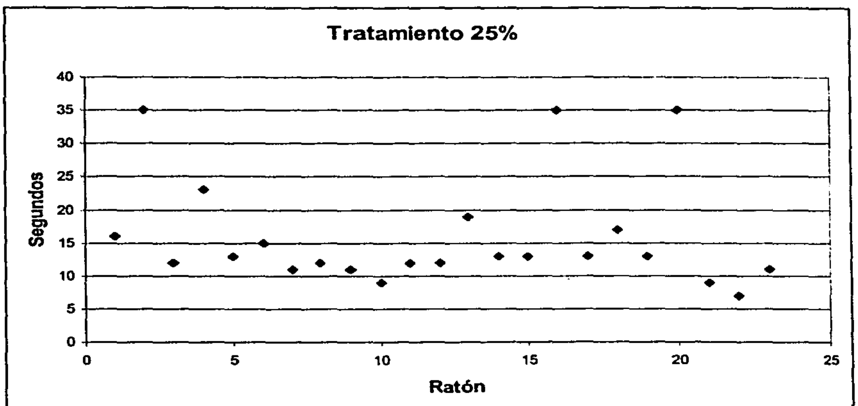



***Gráfica 1. Diagrama de dispersión para el grupo control (trat. A)***

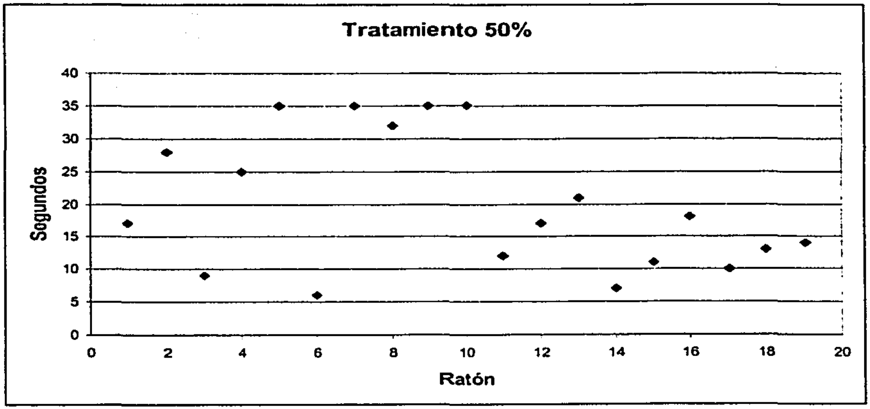
[15] Comprobando independencia y aleatoriedad de los datos, visto en el capitulo uno




*Gráfica 2. Diagrama de dispersión para el grupo con el 10% de chile ( trat. B)*




*Gráfica 3. Diagrama de dispersión para el grupo con el 25% de chile ( trat. C)*




*Gráfica 4. Diagrama de dispersión para el grupo con el 50% de chile ( trat. D)*

Como una primera impresión la información en la gráfica 3 se observan tres puntos que sobresalen del tiempo cronometrado en el tratamiento del resto de los ratones, estos datos se encuentran dentro del tiempo limite aceptado de la prueba y se seguirán considerando para las siguientes pruebas.

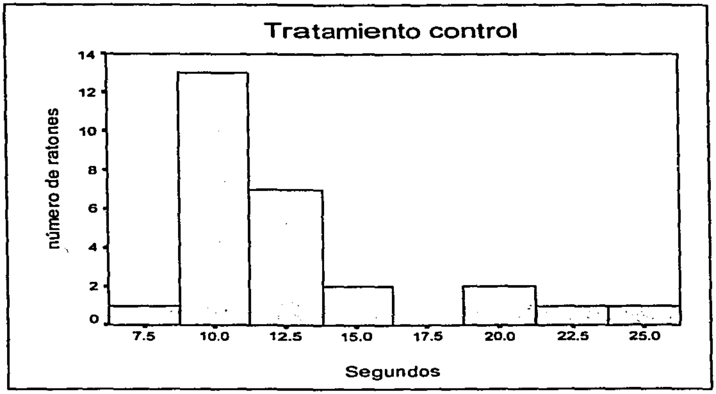
### *2.2.2 Histogramas*

Esta gráfica acumula las observaciones para cada uno de los valores que toma la variable que se está observando (variable respuesta).

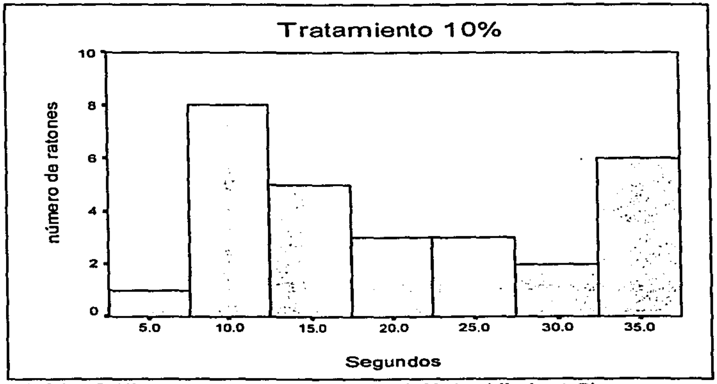
El histograma es una gráfica en dos ejes, el eje de "Y" contiene la frecuencia de los datos y el eje "X" contiene la variable que se está midiendo en un punto o un rango,

En este tipo de gráficas se puede apreciar la distribución de los datos y si existe alguna tendencia, es recomendado cuando el número de observaciones recolectadas en el experimento no son escasas y ayuda a identificar los puntos o rangos donde se acumula el mayor número de observaciones y si las observaciones presentan alguna simetría.

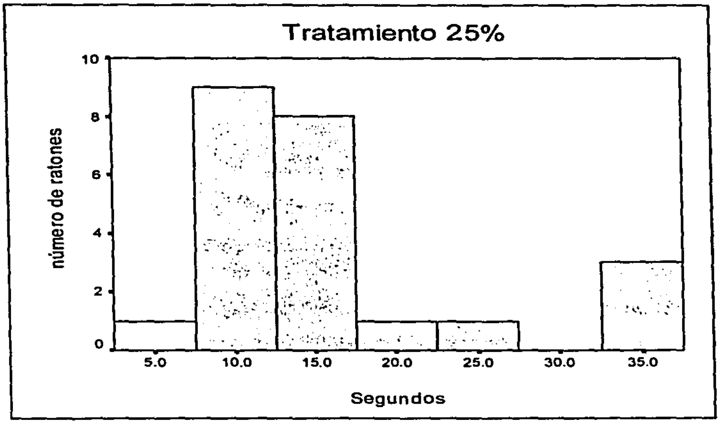
A continuación se presentan los histogramas de cada uno de los tratamientos.



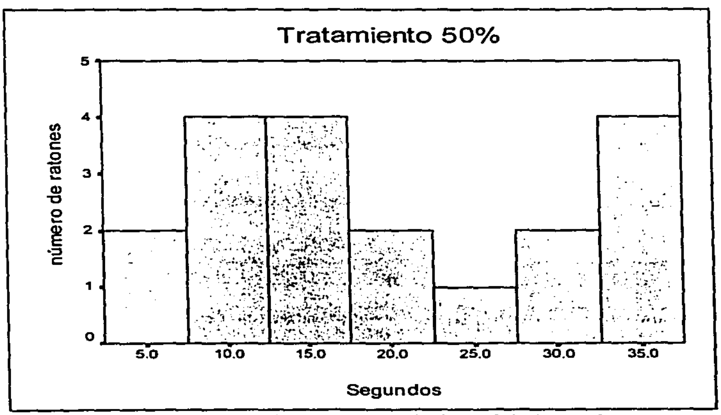

*Gráfica 5. Histograma para el grupo control (tratamiento A)*




*Gráfica 6. Histograma para el grupo con 10% de chile (trat. B)*




***Gráfica 7. Histograma para el grupo con 20% de chile (trat. C)***




***Gráfica 8. Histograma con el grupo con el 50% de chile (trat. D)***

De la observación de las gráficas anteriores se obtiene que los segundos 10 a 20 es donde la mayoría de los ratones tiene respuesta, dominando el 10, aunque el segundo 35 presenta en el caso de las gráficas 6, 7 y 8 (grupos con tratamiento) aumenta sus observaciones considerablemente, mientras la gráfica 1 (grupo control) no presenta ninguna observación en ese tiempo.

### *2.2.3 Gráfica de Cajas (Boxplots)*

La gráfica de cajas proporciona una impresión visual de varios aspectos importantes de la distribución del conjunto de datos, como es la dispersión de los datos, la extensión de los datos, es decir del valor mínimo al máximo, los aberrantes, y es especialmente poderosa para comparación entre grupos.

Para construir este tipo de gráficas es necesario identificar 5 puntos, estos son los dos valores extremos (mínimo y máximo), la mediana, y los cuartos estos son el valor medio entre el mínimo a la mediana y el valor medio entre la mediana y el máximo.

En las gráficas de cajas los puntos que se alejan de los cuartos se comienzan a considerar como aberrantes o extremos, pero se define como aberrantes límite a los que toman los valores obtenidos del cálculo de $F_L$-3/2$d_F$ y $F_U$-3/2$d_F$ donde $F_L$ y $F_U$ son los cuartos y $d_F = F_U - F_L$

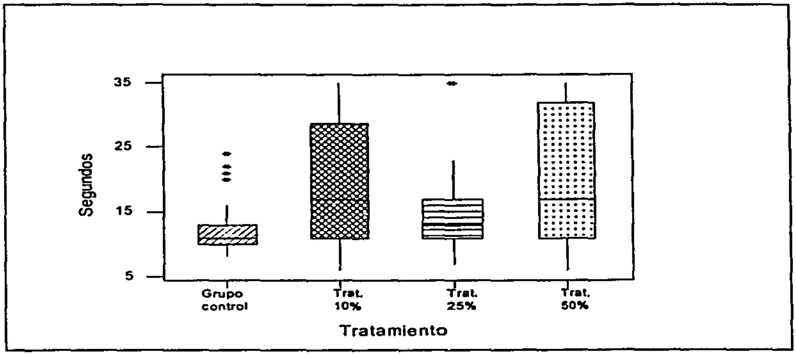
La información se representa en forma de rectángulos, que es lo que da nombre a dicha gráfica.

Ésta da al investigador de forma rápida, la comparación entre las medianas ya sea de los factores, tratamientos y/o bloques.

La longitud de las cajas nos da idea de la dispersión de los datos, además los datos aberrantes alertan que se salen del comportamiento del grupo en general y si las cajas se traslapan, se puede intuir que no se va a encontrar diferencia entre los tratamientos aplicados.

Las gráficas de cajas tienen la cualidad de que las medidas con las que se genera (la mediana y los cuartos) son resistentes al impacto de los datos aberrantes.

A continuación se presenta la gráfica de cajas (gráfica 9) tiempos de respuesta de los ratones para cada tratamiento, se puede observar que la mediana obtenida en cada uno de los tratamientos difieren, lo que nos hace suponer que existe diferencia entre tratamientos, el tratamiento del 10% y el tratamiento de 50% tienen dispersiones mayores en los datos recolectados, es decir, el tiempo de respuesta es muy variable, en cambio en el grupo control y el tratamiento del 25% el tiempo de respuesta del total de los ratones es muy semejante, aunque esos dos grupos tienen datos extremos, que se habían identificado en la gráfica de dispersión y no fueron eliminados.




***Gráfica 9. Diagrama de cajas de los cuatro tratamientos***

### *2.2.4 Gráfica de Tallo y Hoja (Stem-and-leaf)*

Este tipo de gráfica es semejante al histograma pues, presenta la distribución de los datos, la técnica que utiliza dicho tipo de gráfica es también de agrupación, es utilizado para experimentos con gran cantidad de datos.

Esta gráfica se construye al dividir el valor observado en dos partes una principal la cual se identifica como (Stem o tallo), y su complemento la cual se identifica como hoja (Leaf), una vez decidido como se van a dividir los valores observados, se deben de ordenar los datos de forma ascendente y delante de los dígitos principales (Stem) se colocan los valores en los cuales el dígito principal es el mismo.

La forma en que se selecciona el dígito principal es muchas de las veces indicado por el investigador, debido a que existen variantes de elaboración de esta gráfica.

Un ejemplo de esto es si tenemos valores como el 25.8 y se decide que este valor el 25 parte entera sea el tallo y el 8 que es el decimal sea la hoja, todos los demás valores van a tener esa construcción, la parte entera va a fungir como el tallo y los decimales como hojas.

Suponga que tenemos como valores 25.1, 25.2, 25.1,25.5, 26.4,26.8,26.9 los enteros 25 y 26 es repetitivo, bastara ponerlo a ellos como tallo y los decimales como hojas, quedando la construcción de la siguiente forma.

| | |
|---|---|
| 25 | 1125 |
| 26 | 489 |

Las gráficas de tallo y hoja es muy auxiliado para los que se dedican al análisis exploratorio de datos.

A continuación se presenta la gráfica de tallo y hoja de los datos del experimento analizado (gráfica 10), en ella se resalta que no existe simetría y se tienen observaciones extremas, muy alejadas del comportamiento general obtenido, es hasta el segundo 25 donde se acumula el 88.44% de todas las observaciones, el 11.56% restante es del segundo 26 al 35, es en el segundo 35 donde se acumula el mayor porcentaje el 11.56% señalado (8.34%).

```
Stem-and-leaf of Segundos  N  = 97
Leaf Unit = 1.0

        Tallo  Hoja
   4     0     6677
  16     0     888999999999
  34     1     000000001111111111
 (18)    1     222222223333333333
  45     1     4455555
  38     1     666777
  32     1     8899
  28     2     0111
  24     2     233
  21     2     445
  18     2     7
  17     2     889
  14     3
  14     3     2
  13     3     5555555555555
```

***Gráfica 10. Gráfica de tallo y hoja de los cuatro tratamientos***

## 2.3. Análisis cuantitativo

Los métodos gráficos no son contundentes. Sería peligroso tomar decisiones a partir sólo de gráficas. Lo ideal es hacer una combinación de métodos gráficos y numéricos.

Como primer punto se describirá las medidas de tendencia central y la de dispersión.

### *2.3.1 Principales medidas de tendencia central*

Estas son la media, mediana y moda, y muestran la disposición de los datos para agruparse alrededor del centro o de algún valor numérico.

*Media muestral*

Esta medida representa el comportamiento promedio de un conjunto de valores obtenidos, se calcula de la siguiente manera.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \longrightarrow \text{Suma del total de observaciones}$$

*Mediana*

Este dato es el obtenido de ordenar de manera creciente un conjunto de datos y tomar el que se encuentra a la mitad, si el número de datos es par, la mediana es el promedio de las dos observaciones que se encuentran a la mitad.

*Moda*

Es el valor de la observación que ocurre con mayor frecuencia en un conjunto de datos.

### *2.3.2 Principales medidas de dispersión*

Estas son varianza, desviación estándar y rango, y miden la variabilidad que presenta el conjunto de datos.

***Varianza muestral***

Este valor refleja la desviación de los datos obtenidos con respecto a la media, es claro que mientras mayor es dicho valor, los datos tienen un comportamiento más disperso. Este valor es obtenido de la siguiente manera.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}$$

Suma de la diferencia de cada valor observado menos su media al cuadrado

Total de observaciones

***Desviación estándar***

Esta mide la variabilidad de los datos y no es más que la raíz cuadrada de la varianza, esta se expresa en las mismas unidades físicas de las observaciones.

***Rango o recorrido***

Esta es la diferencia entre el valor más grande y el más pequeño del conjunto, esta medida es un indicador rápido de la variabilidad existente, pero no es recomendable para conjunto de datos muy grandes.

### *2.3.3 Prueba para una muestra*

Cuando una muestra se distribuye normal con media y varianza desconocidas y se desea inferir con respecto a la media se aplica la distribución t, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}}$$

con n-1 grados de libertad.

La hipótesis a probar es la siguiente:

$H_0 : \mu = 0$ ó $H_0 : \mu = cte$

A partir de la fórmula de T se puede construir el intervalo el cual contenga el valor de la $\mu$ con una probabilidad de 1-α.

El intervalo se obtiene con la siguiente expresión.

$\overline{X} \pm t_{1-\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$ [16]

### *2.3.4 Pruebas para dos muestras (comparación de medias)*

En el caso de dos muestras la hipótesis a comprobar es:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Una de las estadísticas recomendadas para comparación de medias de dos tratamientos es la siguiente:

$$t_0 = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_2}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

La hipótesis se rechaza si:

$$|t_0| > t_{\alpha/2, n_1 + n_2 - 2}$$

En esta prueba el supuesto que se requiere cumplir es que las poblaciones se distribuyan normal e independientes, aunque si existen desviaciones moderadas no afecta los resultados.

[16] Tablas de t en el anexo B

### *2.3.5 Análisis de varianza*

Esta metodología fue desarrollada por Sir Ronald A. Fisher (1918,1925,1935), es una técnica en la cual los diferentes factores pueden ser estimados, el procedimiento consiste en descomponer la variación total observada de forma que se pueda determinar el factor que influye en el experimento.
Es decir si se tienen Q factores, el método de análisis de varianza descompone la variación total (suma de cuadrados SC que se verá más adelante) en la suma de las variaciones de cada uno de los factores.

$$SCT=SS_A+SS_B+\ldots+SS_Q$$

El análisis de varianza tiene como función principal identificar la variaciones sobre medias cuando se tienen más de dos muestras, esta técnica permite al investigador realizar un análisis simultáneo en caso de existir varios tratamientos. La importancia radica en determinar si las variaciones son o no significativas.

El análisis de varianza usualmente se presenta a través de una tabla que consta de la siguiente información.

- Fuente de variación
- Grados de libertad
- Suma de cuadrados
- Media de cuadrados
- Valor de la prueba F

#### *Fuente de variación*

Las fuentes de variación son los elementos de los que se desea conocer su impacto, estas varían dependiendo del modelo que se esté analizando, en el caso más sencillo lo que se desea conocer es si existe variación entre los tratamientos, o dentro de los mismos (error), en modelos más complejos se analizaran fuentes de variación como bloques, o más de dos factores.

Lo anterior conduce a considerar tantas fuentes de variación como se deriven del modelo que se esté analizando.

### *Grados de libertad*

Son el número de desviaciones linealmente independientes existentes en las distintas fuentes de variación.

El investigador puede auxiliarse de la siguiente recomendación para calcular el número de grados de libertad de sus distintas fuentes de variación.

Considere que la suma de las desviaciones con respecto a la media es cero, la expresión matemática es:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right) = 0$$

Es suficiente que el investigador conozca n-1 observaciones para conocer el valor de la n-esima observación, por lo que de esta forma se tienen n-1 valores independientes y son los que se consideran como los grados de libertad.

### *Suma de cuadrados*

La suma de cuadrados es definida como la variabilidad en los datos, en la fórmula del cálculo de la varianza la suma de los cuadrados la podemos identificar como el numerador. En el caso del análisis de varianza este numerador va descomponerse en varias sumas de cuadrados, y estas son tantas como fuentes de variación se estén considerando.

Un tratamiento cuenta con una cantidad determinada de réplicas, las cuales son determinadas por el investigador y recolectadas durante la experimentación, motivo por el cual se desea medir la variabilidad existente en cada uno de los tratamientos.

Primero se procederá al cálculo de la media de cada uno de los tratamientos, de esta forma se podrá medir la variabilidad que tienen con cada una de las observaciones que se recolectaron. Para obtener el cálculo de la media del i-ésimo tratamiento (que cuenta con n observaciones) es suficiente con aplicar la siguiente sumatoria.

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{n} = \frac{y_{i\bullet}}{n} = \overline{y_{i\bullet}}$$

El valor de la "n" puede ser la misma en todos los tratamientos o variar dependiendo del número de observaciones que se recolectaron o especificaron en cada tratamiento, en caso de que este valor no sea el mismo en todos los tratamientos será necesario utilizar la siguiente sumatoria (para el i-ésimo tratamientos con $n_i$ observaciones), reemplazando la anterior.

$$\frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} = \frac{y_{i\bullet}}{n_i} = \overline{y_{i\bullet}} \longrightarrow \text{La } n_i \text{ varía por tratamiento}$$

Con lo anterior obtenemos la media de cada tratamiento, en caso tener 5 tratamientos, se obtendrían 5 medias.

Para conocer la variación total dentro de cada tratamiento es necesario sumar la variación resultante de cada una de las observaciones con respecto la media del tratamiento, la varianza dentro del tratamiento se obtiene aplicando la siguiente fórmula.

$$SCE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y_{i\bullet}}\right)^2$$

a =número de tratamientos

En caso de ser diferente el número de observaciones en cada tratamiento es suficiente con reemplazar "n" por "$n_i$".

Para conocer la variabilidad existente entre los tratamientos, esta se obtiene midiendo la variación de las medias obtenidas en cada uno de los tratamientos, con respecto a la media general.

La media general se obtiene sumando todas las observaciones recolectadas en todos los tratamientos, entre el número total de observaciones en todos los tratamientos.

$$\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}}{an} = \frac{Y_{\bullet\bullet}}{an} = \overline{Y_{\bullet\bullet}} \longrightarrow \text{Media general del experimento}$$

Para conocer la variabilidad existente entre las medias de tratamiento se obtiene de la siguiente forma.

$$SCTR = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{Y_{\bullet\bullet}}\right)^2 = n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{Y_{\bullet\bullet}}\right)^2$$

La variación total del experimento es la suma de cuadrados de la variación entre tratamientos y la suma de cuadrados dentro de los mismos, por lo que la suma de cuadrados total es la suma de ambas.

SCT=SCTR+SCE

$$SCT = \left(y_{ij} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)$$

### *Media de cuadrados*

Las sumas de cuadrados se vuelven comparables dividiendo cada una por sus grados de libertad asociados, el valor obtenido es la media de cuadrados

La tabla de análisis de varianza para un modelo de un solo factor(unifactorial) queda de la siguiente forma:

| **Fuentes de variación** | **Grados de libertad** | **Sumas de cuadrados** | **Media de cuadrados** |
|---|---|---|---|
| Dentro tratamientos (error) | **a(n-1)** | **SCE=** $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{yi_{\bullet}}\right)^2$ | **SCE/a(n-1)** |
| Entre tratamientos | **a-1** | **SCTR=** $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{i\bullet}}-\overline{Y_{\bullet\bullet}}\right)^2=n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y_{i\bullet}}-\overline{Y_{\bullet\bullet}}\right)^2$ | **SCTR/a-1** |
| Total | **an-1** | **SCT**=Dentro de tratamientos+entre tratamientos | **SCT/an-1** |

### *Prueba F.*

Esta prueba es utilizada para formular inferencias con respecto a las varianzas de poblaciones normales.

Para obtener el valor de la F de la tabla de análisis de varianza se realiza el siguiente cociente.

$$F=\frac{SCTR/a-1}{SCE/a(n-1)}=\frac{MCTR}{MCE}$$

Con lo anterior se puede decir que si el denominador es muy grande implica que la diferencia entre las medias de los tratamientos no son iguales.

Para que la hipótesis nula no se rechace se debe cumplir la siguiente relación:

$$F_o \rangle F_{\alpha,a-1,N-1}$$

Con los anteriores 5 puntos el investigador obtiene la tabla de análisis de varianza de su experimento, por lo regular estos puntos son los que despliega cualquier paquete estadístico en su salida final. La mayoría de los detalles estadísticos de las medias de cuadrados y de la prueba F se dejaron en el anexo, debido a que se deja al investigador la opción de profundizar en estos temas. En caso de optar no estudiarlos, no impide el obtener sus resultados y entender que representa cada uno de los puntos y lo que indica cada una de las columnas obtenida en su análisis de varianza.

A continuación se presenta el desarrollo de análisis de varianza correspondiente a los datos del ejemplo de los ratones aplicando las fórmulas descritas, en una hoja de cálculo de excel, el proceso es manual (tabla 4), posterior a esta se presenta el resultado obtenido en un paquete estadístico (tabla 5), el tiempo de ejecución difiere mucho, y se llega a los mismos resultados, pero el objetivo es entender el proceso.

| Ratón | Tratamiento | Resultado | $\overline{Y_{\bullet\bullet}}$ | $\overline{y_{i\bullet}}$ | $\left(y_{ij}-\overline{y_{i\bullet}}\right)^2$ | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{i\bullet}}\right)^2$ | $n\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y_{i\bullet}}-\overline{Y_{\bullet\bullet}}\right)^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10 | | | 7.1 | | |
| 2 | A | 13 | | | 0.1 | | |
| 3 | A | 13 | | | 0.1 | | |
| 4 | A | 10 | | | 7.1 | | |
| 5 | A | 9 | | | 13.4 | | |
| 6 | A | 16 | | | 11.1 | | |
| 7 | A | 10 | | | 7.1 | | |
| 8 | A | 9 | | | 0.0 | | |
| 9 | A | 10 | | | 7.1 | | |
| 10 | A | 10 | | | 7.1 | | |
| 11 | A | 13 | | | 0.1 | | |
| 12 | A | 15 | | | 5.4 | | |
| 13 | A | 11 | | | 2.8 | | |
| 14 | A | 12 | | | 0.4 | | |
| 15 | A | 11 | | | 2.8 | | |
| 16 | A | 20 | | | 53.8 | | |
| 17 | A | 21 | | | 69.4 | | |
| 18 | A | 11 | | | 2.8 | | |
| 19 | A | 9 | | | 13.4 | | |
| 20 | A | 9 | | | 13.4 | | |
| 21 | A | 9 | | | 13.4 | | |
| 22 | A | 8 | | | 21.8 | | |
| 23 | A | 13 | | | 0.1 | | |
| 24 | A | 22 | | | 87.1 | | |
| 25 | A | 12 | | | 0.4 | | |
| 26 | A | 12 | | | 0.4 | | |
| 27 | A | 24 | | 12.667 | 128.4 | 490.0 | 499.79 |
| 1 | B | 15 | | | 24.3 | | |
| 2 | B | 27 | | | 50.0 | | |
| 3 | B | 35 | | | 227.1 | | |
| 4 | B | 21 | | | 1.1 | | |
| 5 | B | 18 | | | 3.7 | | |
| 6 | B | 35 | | | 227.1 | | |
| 7 | B | 35 | | | 227.1 | | |
| 8 | B | 14 | | | 35.1 | | |
| 9 | B | 15 | | | 24.3 | | |
| 10 | B | 9 | | | 119.4 | | |
| 11 | B | 28 | | | 65.1 | | |
| 12 | B | 8 | | | 142.3 | | |
| 13 | B | 35 | | | 227.1 | | |
| 14 | B | 35 | | | 227.1 | | |
| 15 | B | 6 | | | 194.0 | | |
| 16 | B | 16 | | | 15.4 | | |
| 17 | B | 35 | | | 227.1 | | |
| 18 | B | 8 | | | 142.3 | | |
| 19 | B | 29 | | | 82.3 | | |
| 20 | B | 11 | | | 79.7 | | |
| 21 | B | 10 | | | 98.6 | | |
| 22 | B | 11 | | | 79.7 | | |
| 23 | B | 11 | | | 79.7 | | |
| 24 | B | 23 | | | 9.4 | | |
| 25 | B | 19 | | | 0.9 | | |
| 26 | B | 24 | | | 16.6 | | |
| 27 | B | 15 | | | 24.3 | | |
| 28 | B | 10 | | 19.929 | 98.6 | 2749.9 | 245.242 |

## Continuación tabla 4.

| Ratón | Tratamiento | Resultado | $\overline{Y_{..}}$ | $\overline{y_{i.}}$ | $(y_{ij} - \overline{y_{i.}})^2$ | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \overline{y_{i.}})^2$ | $n\sum_{i}^{a}(\overline{y_{i.}} - \overline{Y_{..}})^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | C | 16 | | | 0.0 | | |
| 2 | C | 35 | | | 364.3 | | |
| 3 | C | 12 | | | 15.3 | | |
| 4 | C | 23 | | | 50.2 | | |
| 5 | C | 13 | | | 8.5 | | |
| 6 | C | 15 | | | 0.8 | | |
| 7 | C | 11 | | | 24.1 | | |
| 8 | C | 12 | | | 15.3 | | |
| 9 | C | 11 | | | 24.1 | | |
| 10 | C | 9 | | | 47.8 | | |
| 11 | C | 12 | | | 15.3 | | |
| 12 | C | 12 | | | 15.3 | | |
| 13 | C | 19 | | | 9.5 | | |
| 14 | C | 13 | | | 8.5 | | |
| 15 | C | 13 | | | 8.5 | | |
| 16 | C | 35 | | | 364.3 | | |
| 17 | C | 13 | | | 8.5 | | |
| 18 | C | 17 | | | 1.2 | | |
| 19 | C | 13 | | | 8.5 | | |
| 20 | C | 35 | | | 364.3 | | |
| 21 | C | 9 | | | 47.8 | | |
| 22 | C | 7 | | | 79.4 | | |
| 23 | C | 11 | | 15.91 | 24.1 | 1505.8 | 25.65 |
| 1 | D | 17 | | | 9.0 | | |
| 2 | D | 28 | | | 64.0 | | |
| 3 | D | 9 | | | 121.0 | | |
| 4 | D | 25 | | | 25.0 | | |
| 5 | D | 35 | | | 225.0 | | |
| 6 | D | 6 | | | 196.0 | | |
| 7 | D | 35 | | | 225.0 | | |
| 8 | D | 32 | | | 144.0 | | |
| 9 | D | 35 | | | 225.0 | | |
| 10 | D | 35 | | | 225.0 | | |
| 11 | D | 12 | | | 64.0 | | |
| 12 | D | 17 | | | 9.0 | | |
| 13 | D | 21 | | | 2750.9 | | |
| 14 | D | 7 | | | 169.0 | | |
| 15 | D | 11 | | | 81.0 | | |
| 16 | D | 18 | | | 4.0 | | |
| 17 | D | 10 | | | 100.0 | | |
| 18 | D | 13 | | | 49.0 | | |
| 19 | D | 14 | | 20.0 | 36.0 | 4721.9 | 174.54 |
| | | | 16.969 | | | 9467.5 | 945.2 |

**Tabla 5. Resultado obtenido con Minitab del análisis de varianza**

**One-way ANOVA: Resp versus Trat**

Analysis of Variance for Resp

| Source | DF | SS | MS | F | P |
|---|---|---|---|---|---|
| Trat | 3 | 945.2 | 315.1 | 4.36 | 0.006 |
| Error | 93 | 6717.7 | 72.2 | | |
| Total | 96 | 7662.9 | | | |

El valor de F(0.05,3,93)=2.804 entonces 4.36>2.804 implica que existe diferencia entre las medias y hay diferencia significativa entre los tratamientos.

## 2.4. Modelo Lineal[17]

Una vez que el investigador hizo una exploración gráfica, tiene idea del comportamiento de los datos con los que está trabajando, conoce las características que tiene su información, es decir, si la distribución de los datos es simétrica o no (histograma o tallo y hojas), si sus varianzas son grandes o pequeñas (Cajas), si los tratamientos presentan diferencias importantes o no según su comparación de medianas (Cajas), o si sus datos son independientes (gráfica de dispersión), todo eso logró conocerlo mediante gráficos, pero debe tener un sustento numérico.

Para cumplir con ese requisito, el investigador debe decidir el tipo de prueba que va a aplicar a sus datos: puede escoger entre aplicar una prueba paramétrica donde los residuos sean independientes y sigan una distribución $N(0,\sigma^2)$ o una no paramétrica.

Las pruebas "paramétricas" son consideradas más eficientes que las "no paramétricas" siempre y cuando la asociación de la distribución sea adecuada.

En esta sección sólo se considera el caso paramétrico y en el capítulo tres se desarrollan las pruebas no paramétricas.

[17] Anexo B "Modelo Lineal General"

Es importante señalar que el análisis de varianza lleva asociado un modelo el cual es una combinación lineal de los efectos, y es conocido como modelo lineal, y es una prueba paramétrica.

El diseño del experimento de los ratones conlleva un modelo lineal de la forma:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

donde:

$\mu$ media general del experimento

$\tau_i$ efecto por el tratamiento(producido por el % de chile que se recibió en la alimentación) y $\sum_{i}^{n} \tau_i = 0$

$\varepsilon_{ij}$ error $\approx N(0,\sigma^2)$

$\varepsilon_{ij}$ v.a.i.i.d

i=1,...,4 (número de tratamientos, control, 10%, 25% y 50%)

j=1,....,$n_i$ (número de observaciones por cada tratamiento)

dado el supuesto de normalidad del error, se tiene que el modelo (1) es paramétrico.

Para obtener el valor de los residuos sobre los que se debe de comprobar los supuestos señalados, es necesario obtener el valor de los estimadores[18].

[18] El procedimiento de estimación de los parámetros y obtención de los residuos es mediante mínimos cuadrados, el cual se detalla en el anexo B "Obtención de los estimadores".

Parámetros y su valor estimado

$$\hat{\mu} = 17.12707$$

$$\hat{\tau}_1 \approx A = -4.46040$$

$$\hat{\tau}_2 \approx B = 2.80150$$

$$\hat{\tau}_3 \approx C = -1.21402$$

$$\hat{\tau}_4 \approx D = 2.87293$$

Una vez que se obtienen los valores de los estimadores se calculan los residuos, los cuales son la diferencia entre los valores estimados por el modelo y los valores reales obtenidos en el experimento, es por esto que se obtienen tantos residuos como observaciones se tienen.

Fórmula para obtención de los residuos.

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij}$$

## *Tabla 6. Valor de los residuos*

| Ratón | Tratamiento | Residuo | Ratón | Tratamiento | Residuo |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | A | -2.67 | 1 | C | 0.09 |
| 2 | A | 0.33 | 2 | C | 19.09 |
| 3 | A | 0.33 | 3 | C | -3.91 |
| 4 | A | -2.67 | 4 | C | 7.09 |
| 5 | A | -3.67 | 5 | C | -2.91 |
| 6 | A | 3.33 | 6 | C | -0.91 |
| 7 | A | -2.67 | 7 | C | -4.91 |
| 8 | A | -3.67 | 8 | C | -3.91 |
| 9 | A | -2.67 | 9 | C | -4.91 |
| 10 | A | -2.67 | 10 | C | -6.91 |
| 11 | A | 0.33 | 11 | C | -3.91 |
| 12 | A | 2.33 | 12 | C | -3.91 |
| 13 | A | -1.67 | 13 | C | 3.09 |
| 14 | A | -0.67 | 14 | C | -2.91 |
| 15 | A | -1.67 | 15 | C | -2.91 |
| 16 | A | 7.33 | 16 | C | 19.09 |
| 17 | A | 8.33 | 17 | C | -2.91 |
| 18 | A | -1.67 | 18 | C | 1.09 |
| 19 | A | -3.67 | 19 | C | -2.91 |
| 20 | A | -3.67 | 20 | C | 19.09 |
| 21 | A | -3.67 | 21 | C | -6.91 |
| 22 | A | -4.67 | 22 | C | -8.91 |
| 23 | A | 0.33 | 23 | C | -4.91 |
| 24 | A | 9.33 | 1 | D | -3.00 |
| 25 | A | -0.67 | 2 | D | 8.00 |
| 26 | A | -0.67 | 3 | D | -11.00 |
| 27 | A | 11.33 | 4 | D | 5.00 |
| 1 | B | -4.93 | 5 | D | 15.00 |
| 2 | B | 7.07 | 6 | D | -14.00 |
| 3 | B | 15.07 | 7 | D | 15.00 |
| 4 | B | 1.07 | 8 | D | 12.00 |
| 5 | B | -1.93 | 9 | D | 15.00 |
| 6 | B | 15.07 | 10 | D | 15.00 |
| 7 | B | 15.07 | 11 | D | -8.00 |
| 8 | B | -5.93 | 12 | D | -3.00 |
| 9 | B | -4.93 | 13 | D | 1.00 |
| 10 | B | -10.93 | 14 | D | -13.00 |
| 11 | B | 8.07 | 15 | D | -9.00 |
| 12 | B | -11.93 | 16 | D | -2.00 |
| 13 | B | 15.07 | 17 | D | -10.00 |
| 14 | B | 15.07 | 18 | D | -7.00 |
| 15 | B | -13.93 | 19 | D | -6.00 |
| 16 | B | -3.93 | | | |
| 17 | B | 15.07 | | | |
| 18 | B | -11.93 | | | |
| 19 | B | 9.07 | | | |
| 20 | B | -8.93 | | | |
| 21 | B | -9.93 | | | |
| 22 | B | -8.93 | | | |
| 23 | B | -8.93 | | | |
| 24 | B | 3.07 | | | |
| 25 | B | -0.93 | | | |
| 26 | B | 4.07 | | | |
| 27 | B | -4.93 | | | |
| 28 | B | -9.93 | | | |

## 2.5 Comprobación de supuestos

Dado que los errores ($\varepsilon_{ij}$) no son observables, es através de los residuos que se verifica el cumplimiento de los supuestos del modelo.

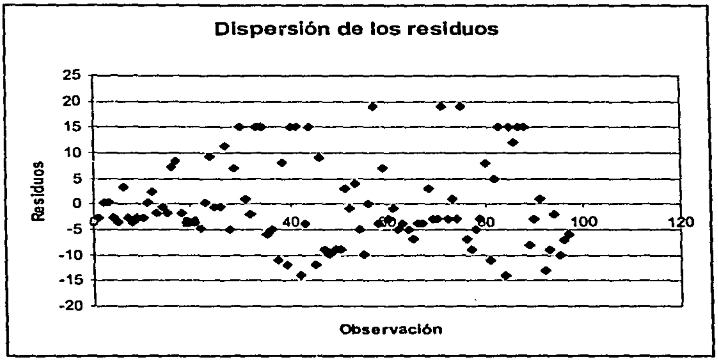
Los supuestos a comprobar en los residuos son:

- Independencia
- Normalidad
- Homoscedasticidad

Una vez concluidas estas pruebas, el investigador podrá decidir si el modelo propuesto es el adecuado o si debe tomar otro camino como la transformación o las pruebas no paramétricas.

### *2.5.1 Independencia de los datos*

La independencia de los datos se puede analizar con apoyo de las gráficas de dispersión, en la gráfica 11 se observa como los residuos obtenidos no presentan ninguna estructura o comportamiento, ni se aprecia alguna relación existente lo que hace suponer independencia de los mismos.




*Gráfica 11. Gráfica de dispersión*

### *2.5.2 Pruebas de Normalidad*

Para probar la normalidad de los errores se proponen tres pruebas[19] desarrolladas por distintos investigadores y que ya han sido implementadas en distintos paquetes estadísticos, en esta ocasión las técnicas que se seleccionaron son una técnica gráfica y dos numéricas, conocidas estas como:

- Gráfica de Normalidad
- Prueba de Normalidad de Shapiro and Wilk
- Prueba de Normalidad de D'Agostino

En todas las pruebas de normalidad la hipótesis a probar es que la información se distribuya normal.

$H_0$: El conjunto de datos sigue una distribución normal

Es decir,

$$H_0: e_{ij} \approx N(\mu, \sigma^3)$$

#### *2.5.2.1 Gráfica de normalidad*

Como su nombre lo indica es una prueba gráfica en dos dimensiones. Aquí cada residuo es graficado contra su valor esperado bajo normalidad.

Para normalizar la escala de las magnitudes de los residuos se utilizan los residuos estandarizados, estos son obtenidos de la siguiente forma:

$$\textit{Residuos estandarizados} = {e_{ij}}/{\sqrt{CME}}$$

$$e_{ij} = residuo$$

[19] Existen otras pruebas no se pretende que el investigador se sujete a estas, se recomienda se allegue de bibliografía que le ayude a conocer otras técnicas

*donde:*

CME=cuadrado medio del error= $SCE/(N-k)$

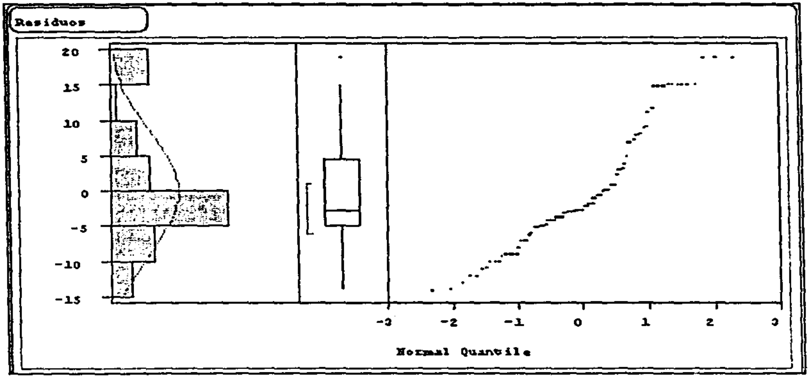
SCE = suma de cuadrado de los errores y mide la variación entre las observaciones debida a un error aleatorio, este es un valor pequeño cuando el modelo que ajusta es bueno, y se obtiene con la siguiente fórmula.

SCE= $\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ij}-\overline{y_{\bullet j}}\right)^2$ **Este cálculo es para obtener los SCE con el modelo que se aplicó**

Con lo anterior los valores obtenidos estarán en un rango de $\pm 3$.

Para no rechazar gráficamente la hipótesis de normalidad de los errores, la gráfica que se obtiene debe de aproximarse a una línea recta, lo cual implica que los datos son normales.

En la gráfica 12, se observan tres tipos de gráficas que son parte del análisis de residuos, en el histograma no se aprecia una simetría de la información, en la gráfica de cajas se observa que existe un punto aberrante y que la mayoría de los datos se distribuyen de la mediana al máximo y en la gráfica de normalidad en los extremos se observan desviaciones y los valores no se aproxima a una línea recta lo que hace suponer que los residuos no son normales.



*Gráfica 12 . Histograma, gráfica de cajas y gráfica de normalidad de los residuos*

### *2.5.2.2. Prueba de Normalidad de Shapiro and Wilk*

Esta es prueba de normalidad numérica, es utilizada para muestras pequeñas y grandes, se considera una de las más poderosas.

Se basa en la siguiente estadística

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

El valor W[20] obtenido es comparado con el valor de $W(n,\alpha)$ en tablas, donde n es el número de observaciones y $\alpha$ es el nivel de significancia con el que se desea probar normalidad.

[20] En el anexo B se describe con detalle la forma de obtener el valor W que es comparado con los valores en tablas que se encuentran en el mismo anexo.

En caso de obtener la siguiente desigualdad, se rechaza la hipótesis nula que establece la normalidad de los datos, esto es, se considera que la muestra no proporciona evidencia suficiente para pensar que los datos provienen de una distribución normal.

$$W<W(n,\alpha) \longleftarrow \text{valor en tablas}$$

Con los residuos del ejercicio de ejemplo obtenemos el siguiente resultado de la prueba de normalidad de Shapiro-Wilk, el cual es obtenido en el paquete JMP.

```
Test for Normality
Shapiro-Wilk W Test
                    W        Prob<W
        0.907391             0.0000
```

El valor de W en tablas con $\alpha$=.05 es 0.947 y como **0.907<0.947** lo que conduce a rechazar normalidad de los datos.

### *2.5.2.3 Prueba de normalidad de D'Agostino*

Esta prueba a diferencia de la de Shapiro-Wilk no se puede aplicar a muestras pequeñas, su estadística es una modificación de la de Shapiro-Wilk y es expresada de la siguiente forma.

$$D=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{1-\frac{1}{2}(n+1)\right\}y(i)}{n\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$$

El valor D[21] obtenido es comparado con el valor de D(n,$\alpha$) de tablas, donde n es el número de observaciones y $\alpha$ es el nivel de significancia, el valor encontrado va a ser un intervalo.

[21] Ver el desarrollo del cálculo del valor D de la prueba de normalidad D'Agostino en el anexo B, lo mismo que sus tablas.

Si el valor de D se encuentra contenido en el intervalo, la hipótesis de normalidad no se rechaza.

Es importante resaltar que esta prueba no ha sido desarrollada en los paquetes estadísticos más comerciales, pero su cálculo es sencillo.

En el caso del ejemplo, el valor obtenido es

**D=0.01030204**

El valor en tablas de **D(97,.05)=(0.2745,0.2860)**

Se observa que el valor D no está contenido en el intervalo, lo que indica que se rechaza la hipótesis de normalidad.

### *2.5.3 Homoscedasticidad*

La homoscedasticidad es igualdad de varianza, existen pruebas formales que permiten conocer si existe, y alertan en caso de que la información obtenida presente desviaciones importantes en comparación con el resto de los datos.

Una de estas pruebas es la de Bartlett[22], la cual proporciona un criterio para evaluar la hipótesis de igualdad de varianzas:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \ldots\ldots\ldots = \sigma_n^2$$

$H_1$ : al menos una no es igual

[22] Cálculo del valor B de la prueba de homoscedasticidad de Bartlett en el anexo B.

El resultado de esta prueba se obtiene por medio de paquetes estadísticos y se rechaza la hipótesis nula, si el valor obtenido B es mayor que el valor dado en tablas de Chi-cuadrada.

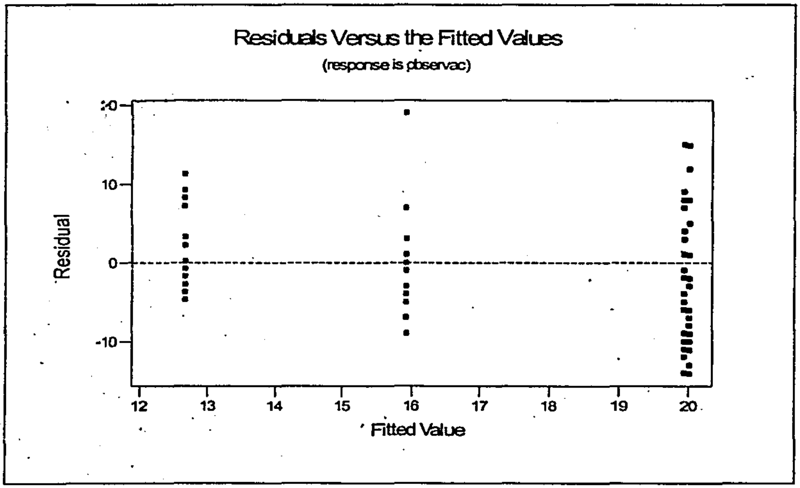
$$B > \chi^2_{[a-1,1-\alpha]}$$

**Prueba de igualda de varianza**

| Level | Count | Std Dev | |
|---|---|---|---|
| A | 27 | 4.34122 | |
| B | 28 | 10.09191 | |
| C | 23 | 8.27325 | |
| D | 19 | 10.46688 | |
| | | | p-value |
| **Bartlett** | | **18.994** | 0.000 |

El valor de la Chi-cuadrada de tablas con $\alpha=0.05$ es 7.38, entonces 18.994>7.38 la hipótesis nula se rechaza.

En la gráfica 13 se observan los residuos contra el valor estimado el efecto de ensanchamiento en forma de embudo nos indica que se viola la suposición de igualdad de varianza.




**Gráfica 13. Gráfica de los residuos estandarizados contra los y's estimados.**

Con las dos pruebas anteriores tanto la númerica (Bartlett) y la gráfica conduce al rechazo de varianzas iguales, lo cual apoya la aplicación de una transformación de los datos.

## 2.6 Transformaciones

Una vez que el investigador verificó la falta de sustento a los supuestos de normalidad u homoscedasticidad, tiene un camino alternativo de análisis, y este es por medio de una transformación de los datos para buscar igualar las varianzas, elevando los datos originales a una potencia $\lambda$. Para seleccionar el valor mas conveniente, existe un método desarrollado por Box y Cox que consiste en obtener varios valores de $\lambda$, en donde la suma de cuadrados del error sea menor, es el valor idóneo para la transformación.

Para obtener los valores de $y^{(\lambda)}$ se aplican las siguientes transformaciones:

$$
\begin{cases} \dfrac{y^{\lambda} - 1}{\lambda \dot{y}^{\lambda - 1}} & \text{para } \lambda \text{ distinta de cero} \\[2ex] \dot{y} \ln y & \text{para } \lambda = 0 \end{cases}
$$

donde $\dot{y}$ es la media geométrica y es igual a:

$$\dot{y} = \ln^{-1}\left[(1/n)^{*} \sum \ln y\right]$$

Siguiendo el procedimiento señalado, se obtienen la suma de cuadrado de los errores por cada una de las transformaciones realizadas.

*Tabla 7. Suma de cuadrado de los errores*

| λ | Suma de cuadrados de los errores |
|---|---|
| -1.00 | 4860.2 |
| -0.75 | 4585.7 |
| -0.50 | 4452.5 |
| -0.25 | 4450.1 |
| 0.00 | 4577.8 |
| 0.25 | 4843.7 |
| 0.50 | 5266.5 |
| 0.75 | 5876.3 |
| 1.0 | 6717.7 |
| 2.0 | 7854.4 |
| 1.50 | 9375.0 |

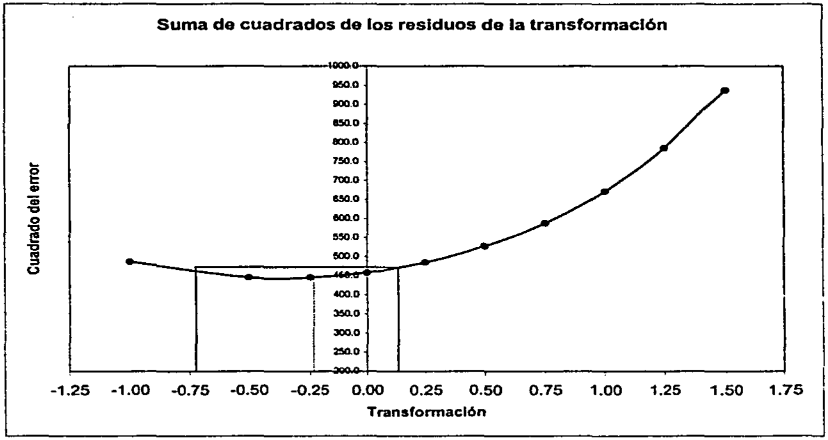
Una vez que se obtiene el valor mínimo se calcula el intervalo de confianza, para comprobar que no incluya el valor 1, en caso de incluirlo, no es necesario realizar la transformación, este intervalo se obtiene de la siguiente forma, donde v son los grados de libertad.

$$SS^{*} = SS_{E}(\lambda)(1+\frac{t^{2}_{\alpha/2,\nu}}{\nu})$$

El valor del intervalo del ejercicio con $\alpha$=.05 y v=93 es:

$$4450.1\left(1+\frac{3.9601}{93}\right)=4639.59$$

Ubicando el valor obtenido en la gráfica 14, se observa que no contiene el valor 1 en el eje x, por lo tanto se aplica la transformación de λ=−0.25.




***Gráfica 14. Gráfica de sumas de cuadrados de la transformación***

Una vez que que se transforman los datos originales se realiza el mismo procedimiento para comprobar los supuestos del modelo siguiente:

$$y^{-.025} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

i=1,2,3,4

Valor estimado de los parámetros.

$$\hat{\mu} = -9.91e-17$$

$$\hat{\tau}_i \approx A = -8.8e-17$$

$$\hat{\tau}_2 \approx B = 1.11e-16$$

$$\hat{\tau}_3 \approx C = -1.68e-17$$

$$\hat{\tau}_4 \approx D = -6.12e-18$$

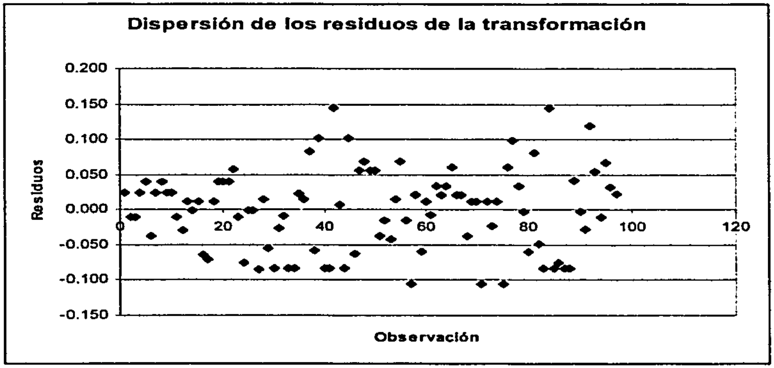
Posteriormente se obtienen los residuos, estos se presentan a continuación.

***Tabla 8.***

| Tratamiento | Residuo | Ratón | Tratamiento | Residuo | Ratón | Tratamiento | Residuo | Ratón | Tratamiento | Residuo |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0.024 | 1 | B | 0.014 | 1 | C | -0.016 | 1 | D | -0.003 |
| A | -0.011 | 2 | B | -0.055 | 2 | C | -0.105 | 2 | D | -0.060 |
| A | -0.011 | 3 | B | -0.083 | 3 | C | 0.021 | 3 | D | 0.082 |
| A | 0.024 | 4 | B | -0.027 | 4 | C | -0.059 | 4 | D | -0.048 |
| A | 0.039 | 5 | B | -0.009 | 5 | C | 0.011 | 5 | D | -0.084 |
| A | -0.038 | 6 | B | -0.083 | 6 | C | -0.008 | 6 | D | 0.144 |
| A | 0.024 | 7 | B | -0.083 | 7 | C | 0.033 | 7 | D | -0.084 |
| A | 0.039 | 8 | B | 0.023 | 8 | C | 0.021 | 8 | D | -0.075 |
| A | 0.024 | 9 | B | 0.014 | 9 | C | 0.033 | 9 | D | -0.084 |
| A | 0.024 | 10 | B | 0.083 | 10 | C | 0.061 | 10 | D | -0.084 |
| A | -0.011 | 11 | B | -0.059 | 11 | C | 0.021 | 11 | D | 0.042 |
| A | -0.030 | 12 | B | 0.101 | 12 | C | 0.021 | 12 | D | -0.003 |
| A | 0.011 | 13 | B | -0.083 | 13 | C | -0.037 | 13 | D | -0.028 |
| A | -0.001 | 14 | B | -0.083 | 14 | C | 0.011 | 14 | D | 0.120 |
| A | 0.011 | 15 | B | 0.145 | 15 | C | 0.011 | 15 | D | 0.054 |
| A | -0.065 | 16 | B | 0.006 | 16 | C | -0.105 | 16 | D | -0.010 |
| A | -0.071 | 17 | B | -0.083 | 17 | C | 0.011 | 17 | D | 0.067 |
| A | 0.011 | 18 | B | 0.101 | 18 | C | -0.024 | 18 | D | 0.032 |
| A | 0.039 | 19 | B | -0.063 | 19 | C | 0.011 | 19 | D | 0.022 |
| A | 0.039 | 20 | B | 0.055 | 20 | C | -0.105 | | | |
| A | 0.039 | 21 | B | 0.068 | 21 | C | 0.061 | | | |
| A | 0.057 | 22 | B | 0.055 | 22 | C | 0.099 | | | |
| A | -0.011 | 23 | B | 0.055 | 23 | C | 0.033 | | | |
| A | -0.076 | 24 | B | -0.037 | | | | | | |
| A | -0.001 | 25 | B | -0.015 | | | | | | |
| A | -0.001 | 26 | B | -0.042 | | | | | | |
| A | -0.086 | 27 | B | 0.014 | | | | | | |
| | | 28 | B | 0.068 | | | | | | |

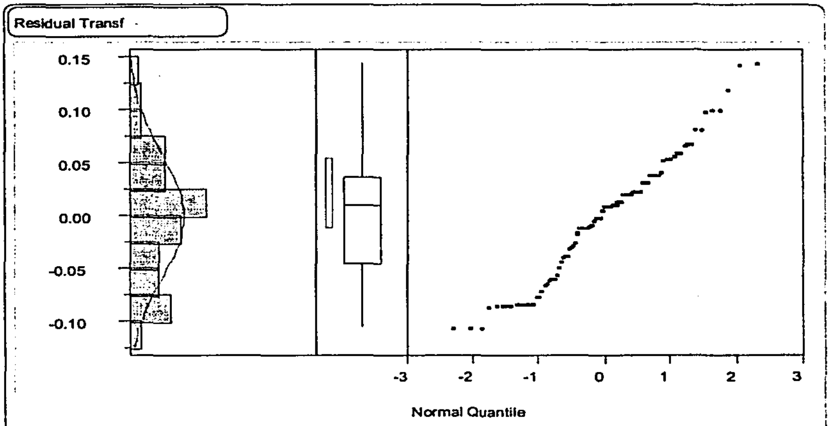
Y se inicia el mismo proceso de verificar independencia, normalidad y homoscedasticidad.

La gráfica 15 de dispersión no muestra ningún comportamiento periódico, o de estacionalidad, es importante señalar que no se observa un patrón donde se exista dependencia de los datos.




*Gráfica 15. Gráfica de dispersión de los residuos*

A continuación se presentan dos de las pruebas de normalidad desarrolladas: la gráfica de normalidad y la prueba de Shapiro and Wilk. En la gráfica 16 se observa en la gráfica de normalida los extremos aun lejos de la línea recta y el histograma aún no presenta una simetría, en lo que respecta a la prueba númerica de normalidad esta la rechaza, por lo que no cumple con los supuestos necesarios para trabajar la información con pruebas paramétricas.




Test for Normality

Shapiro-Wilk W Test

| W | Prob<W |
|---|---|
| 0.956778 | 0.0132 |

***Gráfica 16. Histograma, gráfica de cajas y gráfica de normalidad de los residuos de la transformación.***

## 2.7 Observaciones del capítulo

Una vez concluidas todas las pruebas para conocer como se comportan los datos y los supuestos que cumplen, el investigador está en condiciones de decidir la técnica que puede aplicar a la información, en caso de no haber cubierto las condiciones para una prueba paramétrica, deberá de elegir continuar y seleccionar una no paramétrica.

Hasta este momento el investigador cuenta con todos los elementos para justificar la decisión tomada y porque del tipo de análisis que decidió aplicar.

En el caso de los datos que se han estado analizando, no se cumplieron con los supuestos para aplicar una prueba paramétrica. En el siguiente capítulo se desarrollan pruebas no paramétricas entre las que podrá decidir el investigador la que se ajuste más a la estructura de su investigación.

# CAPÍTULO
# 3
## Pruebas para datos no paramétricos

En el capítulo anterior, con el apoyo de técnicas gráficas y numéricas el investigador pudo conocer el comportamiento de sus datos, así como determinar si los datos cumplían con los supuestos para aplicar pruebas paramétricas, en caso de que no cumplan con ellos, se desarrollan a continuación pruebas no paramétricas.

Una prueba no paramétrica es muy general, esto se debe a que no requiere que los datos o residuos tengan un comportamiento determinado o requieran de supuestos a cumplir, además no cuentan con ningún modelo asociado, este tipo de prueba es aplicada en:

- Estudios con tamaños de muestra muy pequeñas
- Donde los supuestos señalados para las pruebas paramétrica no sean cumplidos
- Para estudios con datos nominales ( estudios sociales), donde las técnicas paramétricas no pueden ser aplicadas.

Lo anterior descrito hace a las pruebas no paramétricas, fáciles de aplicar, permitiendo al investigador optar por pruebas menos laboriosas y complicadas para obtener el resultado de su investigación, pero siempre consciente de que su resultado cuenta con menos precisión.

A continuación se presentan tres pruebas no paramétricas, estas son:

- La prueba de U de Mann-Whitney
- Análisis de varianza de dos clasificaciones por rangos de Friedman
- Análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis

Cada una de las pruebas mencionadas cuenta con características propias a un tipo de análisis , no existe una sola prueba para casos no paramétricos como es el caso de las paramétricas.

### *3.1. Prueba U de Mann-Whitney*

Esta prueba se aplica a dos muestras aleatorias, pueden ser de distintos tamaños (muestra uno de tamaño n y muestra dos de tamaño m) e indepedientes entre ellas.

Las hipótesis planteadas para esta prueba son:

$$H_0 : \text{Dos poblaciones A y B tiene la misma distribución}$$

El procedimiento para el cálculo es ordenar las observaciones (de ambas muestras intercaladas) de forma ascendente, siempre identificando a que grupo pertenece cada una de las observaciones, una vez realizado este proceso, a cada uno de los datos se les asigna un número ordinal, finalizado es paso se vuelven a reagrupar y se suman los números ordinales asignados a los datos de cada grupo, el valor obtenido es identificado como el rango ($R_1$ o $R_2$), la suma de los rangos asignados a la muestra de la población 1 puede ser usada como la estadística de prueba.

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n} R(X_i)$$

Una vez obtenidos los rangos se calcula el valor de U de la siguiente forma.

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$$

*o*

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_2$$

La prueba solo requiere del valor de una U, y se selecciona el que menor valor tenga, de todas formas al mayor se le deberá aplicar la siguiente transformación para asegurar que no es el dato que nos interesa (que sea el que menor valor tenga).

$$U = n_1 n_2 - U'$$

Una vez obtenido el valor de U se procede a buscar en tablas[23], este procedimiento es solo para cuando los grupos no exceden veinte observaciones, si el valor de U obtenido tiene una probabilidad asociada menor o igual a $\alpha$, se rechaza la hipótesis nula.

Para muestras "grandes"[24] la U se aproxima a la distribución normal, con los siguientes valores de media y desviación estándar.

$$\mu_U = \frac{n_1 n_2}{2}$$

$$\sigma_U = \sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}}$$

[23] Tablas U de Mann-Whitney en anexo C
[24] El criterio de diferentes autores oscila entre 10 y 20

Si es significativo o no lo es se determina de la siguiente forma:

$$z = \frac{U - \mu_U}{\sigma_U} = \frac{U - \frac{n_1 \times n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1 \times n_2 \times (n_1 + n_2 + 1)}{12}}} \qquad z \approx N(0,1)$$

Los resultados no son controlados por el investigador por lo que en ocasiones se puede repetir el mismo resultado en varios elementos que están en la muestra, esto puede ocasionar un conflicto al momento de asignar el número ordinal que le corresponde, esto es solucionado de las siguientes formas:

En caso de que sean pocas las observaciones, el ordinal que corresponde se asigna fraccionado en tantas observaciones iguales hay, por ejemplo, si dos observaciones tienen un mismo valor y le corresponde el cinco ordinal a cada una de ellas se les asigna el 2.5.

En caso de que las observaciones se repitan varias ocasiones en distintas observaciones, se conocen como observaciones ligadas, y se corrige modificando la desviación estándar original, de la siguiente forma.

$$\sigma_U = \sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}\right)\left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum T\right)}$$

donde:

$$N = n_1 + n_2$$

$$T = \frac{t^3 - t}{12}$$

t es el número de observaciones ligadas (repetidas por valor)para un rango dado

Con la corrección la z se obtiene con la siguiente fórmula:

$$z = \frac{U - \frac{n_1 n_2}{2}}{\sqrt{\left(\frac{n_1 n_2}{N(N-1)}\right)\left(\frac{N^3 - N}{12} - \sum T\right)}}$$

**Potencia-eficiencia**[25]

La prueba de Mann-Whitney tiene una potencia-eficiencia del 95.5 por ciento para muestras grandes, para muestras moderadas es del 95 por ciento, por lo que se le considera una prueba excelente, sin tener que cumplir con los supuestos de la prueba t (considerada como la prueba paramétrica más poderosa para este tipo de pruebas).

---

[25] El concepto de potencia-eficiencia se refiere al incremento en el tamaño de una muestra para hacer una prueba tan poderosa como otra, esto considerando que al cumplir menos suposiciones de un modelo determinado son más generales los resultados (paramétricas contra no paramétricas)

Potencia-eficiencia=(100) $\frac{N_a}{N_b}$ por ciento

Mann-Whitney

| Ratón | Tratamiento | Resultado | Ordinal | Ordinal ligado |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10 | 11 | 14.0 |
| 2 | A | 13 | 27 | 28.5 |
| 3 | A | 13 | 28 | 28.5 |
| 4 | A | 10 | 12 | 14.0 |
| 5 | A | 9 | 5 | 7.5 |
| 6 | A | 16 | 36 | 36.5 |
| 7 | A | 10 | 13 | 14.0 |
| 8 | A | 9 | 6 | 7.5 |
| 9 | A | 10 | 14 | 14.0 |
| 10 | A | 10 | 15 | 14.0 |
| 11 | A | 13 | 29 | 28.5 |
| 12 | A | 15 | 32 | 33.5 |
| 13 | A | 11 | 18 | 20.5 |
| 14 | A | 12 | 24 | 25.0 |
| 15 | A | 11 | 19 | 20.5 |
| 16 | A | 20 | 40 | 40.0 |
| 17 | A | 21 | 41 | 41.5 |
| 18 | A | 11 | 20 | 20.5 |
| 19 | A | 9 | 7 | 7.5 |
| 20 | A | 9 | 8 | 7.5 |
| 21 | A | 9 | 9 | 7.5 |
| 22 | A | 8 | 2 | 3.0 |
| 23 | A | 13 | 30 | 28.5 |
| 24 | A | 22 | 43 | 43.0 |
| 25 | A | 12 | 25 | 25.0 |
| 26 | A | 12 | 26 | 25.0 |
| 27 | A | 24 | 45 | 45.5 |
| 1 | B | 15 | 33 | 33.5 |
| 2 | B | 27 | 47 | 47.0 |
| 3 | B | 35 | 50 | 52.5 |
| 4 | B | 21 | 42 | 41.5 |
| 5 | B | 18 | 38 | 38.0 |
| 6 | B | 35 | 51 | 52.5 |
| 7 | B | 35 | 52 | 52.5 |
| 8 | B | 14 | 31 | 31.0 |
| 9 | B | 15 | 34 | 33.5 |
| 10 | B | 9 | 10 | 7.5 |
| 11 | B | 28 | 48 | 48.0 |
| 12 | B | 8 | 3 | 3.0 |
| 13 | B | 35 | 53 | 52.5 |
| 14 | B | 35 | 54 | 52.5 |
| 15 | B | 6 | 1 | 1.0 |
| 16 | B | 16 | 37 | 36.5 |
| 17 | B | 35 | 55 | 52.5 |
| 18 | B | 8 | 4 | 3.0 |
| 19 | B | 29 | 49 | 49.0 |
| 20 | B | 11 | 21 | 20.5 |
| 21 | B | 10 | 16 | 14.0 |
| 22 | B | 11 | 22 | 20.5 |
| 23 | B | 11 | 23 | 20.5 |
| 24 | B | 23 | 44 | 44.0 |
| 25 | B | 19 | 39 | 39.0 |
| 26 | B | 24 | 46 | 45.5 |
| 27 | B | 15 | 35 | 33.5 |
| 28 | B | 10 | 17 | 14.0 |

| | |
|---|---|
| R1= | 601.0 |
| R2= | 939.0 |
| U1= | 533.0 |
| U2= | 223.0 |
| n1= | 27 |
| n2= | 28 |
| n1*n2= | 756 |
| N= | 55 |

| Ligas | |
|---|---|
| t | (t^3-t)/12 |
| 3 | 2.0 |
| 6 | 17.5 |
| 7 | 28.0 |
| 6 | 17.5 |
| 3 | 2.0 |
| 4 | 5.0 |
| 4 | 5.0 |
| 2 | 0.5 |
| 2 | 0.5 |
| 6 | 17.5 |
| ΣT | 95.5 |

| | |
|---|---|
| numerador | -155.000 |
| denominador | 59.192 |
| z= | -2.619 |
| p= | 0.009 |

Se observa que la probabilidad asociada es menor a $\alpha$=.05 por se rechaza la hipótesis nula

## Mann-Whitney

| Ratón | Tratamiento | Resultado | Ordinal | Ordinal ligado |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10 | 10 | 12 |
| 2 | A | 13 | 28 | 32 |
| 3 | A | 13 | 29 | 32 |
| 4 | A | 10 | 11 | 12 |
| 5 | A | 9 | 3 | 6 |
| 6 | A | 16 | 39 | 39.5 |
| 7 | A | 10 | 12 | 12 |
| 8 | A | 9 | 4 | 6 |
| 9 | A | 10 | 13 | 12 |
| 10 | A | 10 | 14 | 12 |
| 11 | A | 13 | 30 | 32 |
| 12 | A | 15 | 37 | 37.5 |
| 13 | A | 11 | 15 | 17.5 |
| 14 | A | 12 | 21 | 24 |
| 15 | A | 11 | 16 | 17.5 |
| 16 | A | 20 | 43 | 43 |
| 17 | A | 21 | 44 | 44 |
| 18 | A | 11 | 17 | 17.5 |
| 19 | A | 9 | 5 | 6 |
| 20 | A | 9 | 6 | 6 |
| 21 | A | 9 | 7 | 6 |
| 22 | A | 8 | 2 | 2 |
| 23 | A | 13 | 31 | 32 |
| 24 | A | 22 | 45 | 45 |
| 25 | A | 12 | 22 | 24 |
| 26 | A | 12 | 23 | 24 |
| 27 | A | 24 | 47 | 47 |
| 1 | C | 16 | 40 | 39.5 |
| 2 | C | 35 | 48 | 49 |
| 3 | C | 12 | 24 | 24 |
| 4 | C | 23 | 46 | 46 |
| 5 | C | 13 | 32 | 32 |
| 6 | C | 15 | 38 | 37.5 |
| 7 | C | 11 | 18 | 17.5 |
| 8 | C | 12 | 25 | 24 |
| 9 | C | 11 | 19 | 17.5 |
| 10 | C | 9 | 8 | 6 |
| 11 | C | 12 | 26 | 24 |
| 12 | C | 12 | 27 | 24 |
| 13 | C | 19 | 42 | 42 |
| 14 | C | 13 | 33 | 32 |
| 15 | C | 13 | 34 | 32 |
| 16 | C | 35 | 49 | 49 |
| 17 | C | 13 | 35 | 32 |
| 18 | C | 17 | 41 | 41 |
| 19 | C | 13 | 36 | 32 |
| 20 | C | 35 | 50 | 49 |
| 21 | C | 9 | 9 | 6 |
| 22 | C | 7 | 1 | 1 |
| 23 | C | 11 | 20 | 17.5 |

| | |
|---|---|
| R1= | 600.5 |
| R2= | 674.5 |
| U1= | 398.5 |
| U2= | 222.5 |
| n1= | 27 |
| n2= | 23 |
| N= | 50 |
| n1*n2= | 621 |

| Ligas | |
|---|---|
| t | (t^3-t)/12 |
| 7 | 28.0 |
| 5 | 10.0 |
| 6 | 17.5 |
| 7 | 28.0 |
| 9 | 60.0 |
| 2 | 0.5 |
| 2 | 0.5 |
| 3 | 2.0 |
| ΣT | 146.5 |

| | |
|---|---|
| numerador | -88.00 |
| denominador | 51.01 |
| z= | -1.72512 |
| p= | 0.0854 |

Se observa que la probabilidad asociada es mayor a $\alpha$=.05 no se rechaza la hipótesis nula.

## Resultado obtenido en Minitab

**Mann-Whitney Test and CI: Resp1, Resp2**

```
Resp1    N =  27    Median =     11.000
Resp2    N =  28    Median =     17.000

Point estimate for ETA1-ETA2 is      -5.000
95.0 Percent CI for ETA1-ETA2 is (-10.998,-1.000)
W = 601.0
Test of ETA1 = ETA2  vs  ETA1 not = ETA2 is significant at 0.0093
The test is significant at 0.0090 (adjusted for ties)
```

**Mann-Whitney Test and CI: Resp1, Resp3**

```
Resp1    N =  27    Median =     11.000
Resp3    N =  23    Median =     13.000

Point estimate for ETA1-ETA2 is      -2.000
95.1 Percent CI for ETA1-ETA2 is (-4.002,-0.002)
W = 600.5
Test of ETA1 = ETA2  vs  ETA1 not = ETA2 is significant at 0.0885
The test is significant at 0.0863 (adjusted for ties)

Cannot reject at alpha = 0.05
```

**Mann-Whitney Test and CI: Resp1, Resp4**

```
Resp1    N =  27    Median =     11.000
Resp4    N =  19    Median =     17.000

Point estimate for ETA1-ETA2 is      -5.000
95.0 Percent CI for ETA1-ETA2 is (-12.000,-0.999)
W = 528.5
Test of ETA1 = ETA2  vs  ETA1 not = ETA2 is significant at 0.0186
The test is significant at 0.0182 (adjusted for ties)
```

En el ejercicio se toma la primera muestra (grupo control) y se compara con el resto de los tratamientos, al comparar con los tratamientos del 10% y 50% se rechaza la hipótesis de nula, en el caso de la comparación con el tratamiento del 25% se acepta.

### *3.2. Análisis de la varianza de dos clasificaciones por rangos de Friedman.*

Esta prueba se aplica a conjuntos de datos en distintas condiciones (tratamientos), es para k-muestras, y deben de tener el mismo número de elementos. En esta prueba los datos se presentan en una tabla de dos clasificaciones, con N columnas, que representan los distintos grupos formados, y k columnas que representan el número de tratamientos aplicados.

Hipótesis

$H_0$ :Los tratamientos tienen efectos idénticos

$H_1$ :Al menos uni de los tratamientos es diferente

Al igual que en la prueba de Mann-Whitney se hace uso de números ordinales, estos son aplicados por fila, y al valor más bajo se le da el valor uno y al más alto el valor k, con los valores asignados se obtiene el rango por columna, el cual identificamos como $R_j$.

El valor de la estadística de Friedman se obtiene de la siguiente forma.

$$\chi_r^2 = \frac{12}{N_k(k+1)}\sum_{j=1}^{k}(R_j)^2 - 3N(k+1)$$

donde

N = número de hileras (grupos)
k = número de columnas (tratamientos)
$R_j$ = suma de rangos en la columna j
$\sum_{j=1}^{k}$ =indica la suma de los cuadrados de las sumas de los rangos de todas las k condiciones.

Cuando la cantidad de datos es grande(N>9) se distribuye aproximadamente como una Chi-cuadrada con k-1 grados de libertad.

Si el valor obtenido es igual o menor que $\alpha$, se rechaza la $H_0$.

En esta prueba no se tiene problemas con observaciones ligadas, en caso de existir el valor del ordinal se divide entre el número de observaciones.

### *3.3. Análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis*

Esta prueba se aplica cuando se tienen k-muestras, las cuales pueden variar en número de observaciones, esta prueba ayuda a identificar si se trata de poblaciones diferentes.

Hipótesis

$H_{0:}$ La distribución de las k muestras es idéntica

$H_1$ : La distribución de las k muestras es idéntica

De igual forma que las dos anteriores pruebas se vuelve a usar la numeración ordinal, a todas las observaciones se les asigna un número ordinal, siendo el número uno asignado a la observación con valor menor y N a la observación con el valor mas grande, las observaciones conservan su grupo original, del cual se calcula la suma de los ordinales asignados, siendo este valor el rango $R_k$, la estadística aplicada para esta prueba se presenta a continuación.

$$H = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{J=1}^{k}\frac{R_J^2}{n_J} - 3(N+1)$$

donde

k= número de muestras

$n_j$ = número de casos en la muestra de orden j

N = $\sum n_j$, el número de casos de todas las muestras combinadas

$R_j$ = suma de rangos en la muestra de orden j

$\sum_{j=1}^{k}$ = indica sumar las k muestras

Al igual que la prueba de Friedman, esta también se distribuye como chi – cuadrada con k-1 grados de libertad, pero para valores grandes de $n_j$.

En este método al igual que en Mann-Whitney el valor de la H se corrige en caso de existir ligas, y esto se hace dividiendo la H entre

$$1-\frac{\sum T}{N^3-N}$$

Lo anterior ocasiona un incremento en el valor que se obtiene de la H, indicándonos que las ligas tienen un efecto significativo en los valores.

En esta prueba la hipótesis nula se rechazará si la probabilidad asociada con la H obtenida es igual o menor que el nivel de significancia establecido.

**Potencia-eficiencia**

La prueba considerada como más poderosa es la F, comparada con esta la prueba de Kruskal-Wallis tiene una potencia eficiencia del 95.5 por cientos.

Kruskal-Wallis

| Ratón | Tratamiento | Resultado | Ordinales | Ordinal ligado |
|---|---|---|---|---|
| 1 | A | 10 | 17 | 20.5 |
| 2 | A | 13 | 43 | 47.5 |
| 3 | A | 13 | 44 | 47.5 |
| 4 | A | 10 | 18 | 20.5 |
| 5 | A | 9 | 8 | 12.0 |
| 6 | A | 16 | 60 | 61.0 |
| 7 | A | 10 | 19 | 20.5 |
| 8 | A | 9 | 9 | 12.0 |
| 9 | A | 10 | 20 | 20.5 |
| 10 | A | 10 | 21 | 20.5 |
| 11 | A | 13 | 45 | 47.5 |
| 12 | A | 15 | 55 | 57.0 |
| 13 | A | 11 | 25 | 29.5 |
| 14 | A | 12 | 35 | 38.5 |
| 15 | A | 11 | 26 | 29.5 |
| 16 | A | 20 | 70 | 70.0 |
| 17 | A | 21 | 71 | 72.0 |
| 18 | A | 11 | 27 | 29.5 |
| 19 | A | 9 | 10 | 12.0 |
| 20 | A | 9 | 11 | 12.0 |
| 21 | A | 9 | 12 | 12.0 |
| 22 | A | 8 | 5 | 6.0 |
| 23 | A | 13 | 46 | 47.5 |
| 24 | A | 22 | 74 | 74.0 |
| 25 | A | 12 | 36 | 38.5 |
| 26 | A | 12 | 37 | 38.5 |
| 27 | A | 24 | 77 | 77.5 |
| 1 | B | 15 | 56 | 57.0 |
| 2 | B | 27 | 80 | 80.0 |
| 3 | B | 35 | 85 | 91.0 |
| 4 | B | 21 | 72 | 72.0 |
| 5 | B | 18 | 66 | 66.5 |
| 6 | B | 35 | 86 | 91.0 |
| 7 | B | 35 | 87 | 91.0 |
| 8 | B | 14 | 53 | 53.5 |
| 9 | B | 15 | 57 | 57.0 |
| 10 | B | 9 | 13 | 12.0 |
| 11 | B | 28 | 81 | 81.5 |
| 12 | B | 8 | 6 | 6.0 |
| 13 | B | 35 | 88 | 91.0 |
| 14 | B | 35 | 89 | 91.0 |
| 15 | B | 6 | 1 | 1.5 |
| 16 | B | 16 | 61 | 61.0 |
| 17 | B | 35 | 90 | 91.0 |
| 18 | B | 8 | 7 | 6.0 |
| 19 | B | 29 | 83 | 83.0 |
| 20 | B | 11 | 28 | 29.5 |
| 21 | B | 10 | 22 | 20.5 |
| 22 | B | 11 | 29 | 29.5 |
| 23 | B | 11 | 30 | 29.5 |
| 24 | B | 23 | 75 | 75.5 |
| 25 | B | 19 | 68 | 68.5 |
| 26 | B | 24 | 78 | 77.5 |
| 27 | B | 15 | 58 | 57.0 |
| 28 | B | 10 | 23 | 20.5 |

| Ratón | Tratamiento | Resultado | Ordinales | Ordinal ligado |
|---|---|---|---|---|
| 1 | C | 16 | 62 | 61.0 |
| 2 | C | 35 | 91 | 91.0 |
| 3 | C | 12 | 38 | 38.5 |
| 4 | C | 23 | 76 | 75.5 |
| 5 | C | 13 | 47 | 47.5 |
| 6 | C | 15 | 59 | 57.0 |
| 7 | C | 11 | 31 | 29.5 |
| 8 | C | 12 | 39 | 38.5 |
| 9 | C | 11 | 32 | 29.5 |
| 10 | C | 9 | 14 | 12.0 |
| 11 | C | 12 | 40 | 38.5 |
| 12 | C | 12 | 41 | 38.5 |
| 13 | C | 19 | 69 | 68.5 |
| 14 | C | 13 | 48 | 47.5 |
| 15 | C | 13 | 49 | 47.5 |
| 16 | C | 35 | 92 | 91.0 |
| 17 | C | 13 | 50 | 47.5 |
| 18 | C | 17 | 63 | 64.0 |
| 19 | C | 13 | 51 | 47.5 |
| 20 | C | 35 | 93 | 91.0 |
| 21 | C | 9 | 15 | 12.0 |
| 22 | C | 7 | 3 | 3.5 |
| 23 | C | 11 | 33 | 29.5 |
| 1 | D | 17 | 64 | 64.0 |
| 2 | D | 28 | 82 | 81.5 |
| 3 | D | 9 | 16 | 12.0 |
| 4 | D | 25 | 79 | 79.0 |
| 5 | D | 35 | 94 | 91.0 |
| 6 | D | 6 | 2 | 1.5 |
| 7 | D | 35 | 95 | 91.0 |
| 8 | D | 32 | 84 | 84.0 |
| 9 | D | 35 | 96 | 91.0 |
| 10 | D | 35 | 97 | 91.0 |
| 11 | D | 12 | 42 | 38.5 |
| 12 | D | 17 | 65 | 64.0 |
| 13 | D | 21 | 73 | 72.0 |
| 14 | D | 7 | 4 | 3.5 |
| 15 | D | 11 | 34 | 29.5 |
| 16 | D | 18 | 67 | 66.5 |
| 17 | D | 10 | 24 | 20.5 |
| 18 | D | 13 | 52 | 47.5 |
| 19 | D | 14 | 54 | 53.5 |

| | | |
|---|---|---|
| R1= | 974 | |
| R2= | 1591 | |
| R3= | 1106.5 | |
| R4= | 1081.5 | |
| | | |
| k= | 4 | |
| | | $R_k$^2/$n_k$ |
| n1= | 27 | 35,136.15 |
| n2= | 28 | 90,402.89 |
| n3= | 23 | 53,232.27 |
| n4= | 19 | 61,560.12 |
| N= | 97 | 240,331.43 |
| | | |
| numerador | | 9.38 |
| denominador | | 0.993 |
| H= | | 9.449 |

| ligas | |
|---|---|
| t | t^3-t |
| 2 | 6 |
| 2 | 6 |
| 3 | 24 |
| 9 | 720 |
| 8 | 504 |
| 10 | 990 |
| 8 | 504 |
| 10 | 990 |
| 2 | 6 |
| 5 | 120 |
| 3 | 24 |
| 3 | 24 |
| 2 | 6 |
| 2 | 6 |
| 3 | 24 |
| 2 | 6 |
| 2 | 6 |
| 2 | 6 |
| 13 | 2184 |
| ΣT | 6156 |

## Resultados obtenidos en Minitab

**Kruskal-Wallis Test: Resp versus Trat**

Kruskal-Wallis Test on Resp

| Trat | N | Median | Ave Rank | Z |
|---|---|---|---|---|
| A | 27 | 11.00 | 36.1 | -2.81 |
| B | 28 | 17.00 | 56.8 | 1.74 |
| C | 23 | 13.00 | 48.1 | -0.17 |
| D | 19 | 17.00 | 56.9 | 1.37 |
| Overall | 97 | | 49.0 | |

H = 9.38 DF = 3 P = 0.025
H = 9.45 DF = 3 P = 0.024 (adjusted for ties)

En el anterior ejercicio se observa que la probabilidad asociada a H[26] es de 0.024 para $\alpha$=0.05 por lo tanto se rechaza la hipótesis nula, que los tratamientos no son iguales, y existe una diferencia significativa.

[26] Tablas de H de Kruskal-Wallis en anexo C.

# CAPÍTULO

# 4

# Comparaciones múltiples

Las comparaciones múltiples son técnicas numéricas para analizar los datos obtenidos en un experimento.

Estas técnicas son utilizadas una vez que se detectó una diferencia significativa en el análisis de varianza de los datos paramétricos o en el caso de la prueba de Kruskal-Wallis o de Friedman en datos no paramétricos.

Los métodos de comparaciones múltiples van a ayudar al investigador identificar cual es el tratamiento que produce variaciones importantes en los resultados.

## 4.1 Comparaciones múltiples para datos paramétricos

Se han desarrollado varios métodos de comparaciones múltiples, basados en el estudio de las medias de los tratamientos y las diferencias entre ellas, pero la diferencia entre métodos, es la manera en que cada uno de ellos define su grupo de estudio o familia.

Identificar como define sus grupos de estudio cada uno de los métodos es el primer paso que el investigador debe tener en cuenta, para de esta forma seleccionar el método que más le convenga, y el cual desee aplicar, los procedimientos de cálculo también difieren y serán desarrollados de forma detallada en este capítulo.

La mayoría de los métodos de comparaciones múltiples ya son realizados por programas estadísticos, y el investigador, queda exento de realizar largos y detallados cálculos, pero de igual manera, se insiste en el conocimiento del procedimiento matemático, así como en el dominio para la interpretación de los datos.

En el presente documento vamos a detallar solamente cuatro métodos de comparaciones múltiples los cuales son:

- Método de Tukey
- Método de Scheffé
- Método de Bonferroni
- Método de Dunnett

Primero se desarrolla la definición de los grupos o las familias, se continuara con la estimación de intervalos de cada uno de los métodos, y finalmente con la estadística de prueba, para definir si los elementos que forman las familias son significativos o no lo son.

### *4.1.1 Definición de los grupos por método*

| Método | Grupo o Familia | Hipótesis |
|---|---|---|
| **Tukey** | Comparación de pares de medias<br>$D=\mu_i-\mu_{i'}$ | $H_0:\mu_i-\mu_{i'}=0$<br>$H_1:\mu_i-\mu_{i'}\neq 0$ |
| **Scheffé** | Conjunto de todos los posibles contrastes[27] entre las medias de los tratamientos | $H_0: L=0$<br>$H_1: L\neq 0$ |
| **Bonferroni** | En este método el investigador queda en libertad de hacer uso de comparaciones pares, contrastes o combinaciones lineales. | $H_0: L=0$<br>$H_1: L\neq 0$ |

[27] Definición de contraste en el anexo D

| Método | Grupo o Familia | Hipótesis |
|---|---|---|
| **Dunnett** | Este método evalúa las j-1 comparaciones de las medias de los grupos exp., para este método es necesario contar con el grupo control, debido a que las comparaciones las realiza con respecto a él. | |

### *4.1.2 Estimación de los intervalos de confianza por método de comparaciones múltiples*

| Método | Obtención del Intervalo |
|---|---|
| **Tukey** | $\hat{D} \pm Ts\left\{\hat{D}\right\}$<br>Detalle de los componentes<br>$\hat{D} = \overline{Y_{i\bullet}} - \overline{Y_{i'\bullet}}$<br>$s^2\left\{\hat{D}\right\} = s^2\left\{\overline{Y_{i\bullet}}\right\} + s^2\left\{\overline{Y_{i'\bullet}}\right\} = MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)$<br>$T = 1/\sqrt{2} * q(1-\alpha; r, n_T - r)$ |

| Método | Obtención del Intervalo |
|---|---|
| **Scheffé** | $\hat{L} \pm Ss\left\{\hat{L}\right\}$<br>$\hat{L} = \sum C_i \overline{Y_{i\bullet}}$<br>$s^2\left\{\hat{L}\right\} = MSE\sum \frac{c_i^2}{n_i}$<br>$S^2 = (r-1)F(1-\alpha; r-1, n_t - r)$ |
| **Bonferroni** | $\hat{L} \pm Bs\left\{\hat{L}\right\}$<br>$B = t(1-\alpha/2g; n_T - r)$ |
| **Dunnet** | $\left\lvert\overline{Y}_{cont} - \overline{Y_j}\right\rvert \pm DMS_{Dunnet}$<br>$DMS = {}_p t_{j,gle} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_{control}} + \frac{1}{n_j}\right)}$<br>"j" =número de medias incluidas la del grupo control.<br>"gle"= grados de libertad |

### *4.1.3 Pruebas simultáneas por método de comparaciones múltiples*

| Método | Prueba Simultánea |
|---|---|
| **Tukey** | Se acepta $H_0$ si $\lvert q^{*}\rvert \le q(1-\alpha; r; n_T - r)$<br>En otro caso se acepta $H_a$<br>$$q^{*} = \frac{\sqrt{2}\,\hat{D}}{S\left(\hat{D}\right)}$$ |
| **Scheffé** | Se acepta $H_0$ si $F^{*} \le F(1-\alpha; r-1, n_T - r)$<br>En otro caso se acepta $H_a$<br>$$F^{*} = \frac{\hat{L}^{2}}{(r-1)S^{2}\left\{\hat{L}\right\}}$$ |
| **Bonferroni** | Se acepta $H_0$ si $\lvert t^{*}\rvert \le t(1-\alpha/2g; n_T - r)$<br>En otro caso se acepta $H_a$<br>$$t^{*} = \frac{\sum C_i \overline{Y}_{i\bullet} - C}{\sqrt{MSE \sum \frac{C_i^2}{n_i}}}$$ |
| **Dunnett** | Se acepta $H_0$ si $\lvert \overline{Y}_{i\bullet} - \overline{Y}_{a\bullet}\rvert \le d_\alpha(a-1, f)\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_a}\right)}$<br>En otro caso se acepta $H_a$ |

A continuación se presentan los resultados de las comparaciones múltiples de los datos del ejemplo que se ha estado analizando en el transcurso del trabajo, la conclusión a la que se había llegado era que existían diferencias significativas en los tratamientos, con estas pruebas se van a identificar el (los) tratamientos que tienen diferencias importantes.

## Resultados obtenidos en SPSS

**Multiple Comparisons**

Dependent Variable: RESP

| | (I) TRATAMIE | (J) TRATAMIE | Mean Difference (I-J) | Std. Error | Sig. | 95% Confidence Interval | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | Lower Bound | Upper Bound |
| Tukey HSD | 1 | 2 | -7.2619* | 2.292 | .011 | -13.2591 | -1.2647 |
| | | 3 | -3.2464 | 2.412 | .536 | -9.5555 | 3.0627 |
| | | 4 | -7.3333* | 2.545 | .025 | -13.9914 | -.6753 |
| | 2 | 1 | 7.2619* | 2.292 | .011 | 1.2647 | 13.2591 |
| | | 3 | 4.0155 | 2.392 | .341 | -2.2415 | 10.2726 |
| | | 4 | -7.143E-02 | 2.526 | 1.000 | -6.6802 | 6.5373 |
| | 3 | 1 | 3.2464 | 2.412 | .536 | -3.0627 | 9.5555 |
| | | 2 | -4.0155 | 2.392 | .341 | -10.2726 | 2.2415 |
| | | 4 | -4.0870 | 2.635 | .412 | -10.9800 | 2.8061 |
| | 4 | 1 | 7.3333* | 2.545 | .025 | .6753 | 13.9914 |
| | | 2 | 7.143E-02 | 2.526 | 1.000 | -6.5373 | 6.6802 |
| | | 3 | 4.0870 | 2.635 | .412 | -2.8061 | 10.9800 |
| Scheffe | 1 | 2 | -7.2619* | 2.292 | .022 | -13.7892 | -.7346 |
| | | 3 | -3.2464 | 2.412 | .614 | -10.1131 | 3.6204 |
| | | 4 | -7.3333* | 2.545 | .046 | -14.5799 | -8.676E-02 |
| | 2 | 1 | 7.2619* | 2.292 | .022 | .7346 | 13.7892 |
| | | 3 | 4.0155 | 2.392 | .425 | -2.7946 | 10.8256 |
| | | 4 | -7.143E-02 | 2.526 | 1.000 | -7.2644 | 7.1215 |
| | 3 | 1 | 3.2464 | 2.412 | .614 | -3.6204 | 10.1131 |
| | | 2 | -4.0155 | 2.392 | .425 | -10.8256 | 2.7946 |
| | | 4 | -4.0870 | 2.635 | .496 | -11.5893 | 3.4154 |
| | 4 | 1 | 7.3333* | 2.545 | .046 | 8.676E-02 | 14.5799 |
| | | 2 | 7.143E-02 | 2.526 | 1.000 | -7.1215 | 7.2644 |
| | | 3 | 4.0870 | 2.635 | .496 | -3.4154 | 11.5893 |
| Bonferroni | 1 | 2 | -7.2619* | 2.292 | .012 | -13.4419 | -1.0819 |
| | | 3 | -3.2464 | 2.412 | 1.000 | -9.7478 | 3.2550 |
| | | 4 | -7.3333* | 2.545 | .029 | -14.1943 | -.4723 |
| | 2 | 1 | 7.2619* | 2.292 | .012 | 1.0819 | 13.4419 |
| | | 3 | 4.0155 | 2.392 | .579 | -2.4322 | 10.4633 |
| | | 4 | -7.143E-02 | 2.526 | 1.000 | -6.8816 | 6.7388 |
| | 3 | 1 | 3.2464 | 2.412 | 1.000 | -3.2550 | 9.7478 |
| | | 2 | -4.0155 | 2.392 | .579 | -10.4633 | 2.4322 |
| | | 4 | -4.0870 | 2.635 | .746 | -11.1901 | 3.0162 |
| | 4 | 1 | 7.3333* | 2.545 | .029 | .4723 | 14.1943 |
| | | 2 | 7.143E-02 | 2.526 | 1.000 | -6.7388 | 6.8816 |
| | | 3 | 4.0870 | 2.635 | .746 | -3.0162 | 11.1901 |
| Dunnett t (2-sided)[a] | 2 | 1 | 7.2619* | 2.292 | .006 | 1.7710 | 12.7528 |
| | 3 | 1 | 3.2464 | 2.412 | .405 | -2.5300 | 9.0228 |
| | 4 | 1 | 7.3333* | 2.545 | .014 | 1.2374 | 13.4293 |

*. The mean difference is significant at the .05 level.

## 4.2 Comparaciones múltiples para datos no paramétricos.

### *4.2.1.Prueba de Kruskal-Wallis*

Esta prueba es aplicada solamente en caso de que se rechace la hipótesis nula, se usa para determinar cual par es diferente, y esto se puede determinar si se cumple la siguiente desigualdad.

$$\left|\frac{R_i}{n_i}-\frac{R_j}{n_j}\right| > t_{1-(\alpha/2)}\left(S^2\frac{N-1-H}{N-k}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)^{1/2}$$

donde $R_i$ y $R_j$ son la suma de los rango de las dos muestras el cálculo del valor de H es el obtenido en la prueba de Kruskal-Wallis del capítulo 3, el valor de $S^2$ se obtiene con la siguiente fórmula.

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum R(X_{ij})^2 - N\frac{(N+1)^2}{4}\right)$$

el valor de t es obtenido de tablas. El procedimiento se debe repetir para todos los pares y el mismo nivel de $\alpha$ es usado como en la prueba de Kruskal-Wallis.

### *4.2.2 Prueba de Friedman*

De igual forma solo se aplica en caso de ser rechazada la hipótesis nula, y los tratamientos son considerados diferentes si cumplen con la siguiente desigualdad.

$$|R_j - R_i| > t_{1-\alpha/2}\left[\frac{(A_1-C_1)2N}{(N-1)(k-1)}\left(1-\frac{\chi_r^2}{N(k-1)}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

donde:

$$(A_1 - C_1) = Nk(k+1)(K-1)/12$$

N=Número de hileras(grupos)

K=número de columnas (tratamientos)

$\chi_r^2$ es el valor de la estadística de Friedman, desarrollado en el capítulo tres página 74

## 4.3 Observaciones sobre los resultados de comparaciones múltiples

De los resultados obtenidos en la tabla con los resultados de las pruebas paramétricas se concluye que el tratamiento control con el tratamiento del 10% y 50% presentan diferencias en sus resultados y se ven influenciados por el tratamiento que se les aplica, mientras el tratamiento del 25% no tiene diferencia en la respuesta con respecto a ninguno de los otros tratamientos. Hay que tener presente que en el caso de nuestro ejemplo la prueba idónea para comparaciones múltiples paramétricas es la de Dunnet, porque se compara con respecto al grupo control.

Es importante señalar que no en todos los paquetes estadísticos (SPSS, Minitab y JMP) las pruebas de comparaciones múltiples para pruebas no paramétricas no están incluidas, por lo cual es proceso tiene que ser realizado con ayuda de hojas de cálculo, la prueba de Mann-Whitney hace comparaciones de dos muestras y esta se desarrolla en el capítulo tres en el cual se concluye lo mismo que en las pruebas paramétricas.

# CONCLUSIONES

Debido a que existe una gran cantidad de materiales sobre diseño de experimentos orientados a dar apoyo a investigadores experimentados y que es difícil encontrar uno para principiantes, surge esta tesis, en la cual se compila el proceso de investigación desde la especificación del problema hasta la interpretación de los resultados del análisis estadístico.

La mayor dificultad en el desarrollo de este trabajo se presentó al seleccionar las técnicas a utilizar en las diferentes pruebas, debido a que en el proceso de documentación me encontré con una gran cantidad de éstas, que son útiles para obtener el resultado que se deseaba probar; pero considerando que nunca se pretendió hacer de este trabajo un catálogo exhaustivo de técnicas se optó por presentar el análisis para las pruebas paramétricas y tres de las no paramétricas.

En este trabajo se pone énfasis en la utilidad de la aplicación de herramientas gráficas como etapa previa a la aplicación de las técnicas numéricas, debido a que enriquecen la interpretación de la información y ayudan a detectar observaciones extremas que pudieran distorsionar los resultados arrojados por el análisis numérico.

Una vez que se determinó si la información obtenida en el proceso de investigación cumple con los supuestos para aplicar una prueba paramétrica o no paramétrica, el investigador podrá seleccionar la técnica más adecuada para la interpretación de sus datos.

A lo largo de este trabajo también se resalta la importancia de la informática en el diseño de experimentos. Es importante mencionar que no todas las técnicas han sido implementadas en todos los paquetes estadísticos. Esto refuerza la idea de que sería recomendable que el investigador no solamente pueda interpretar los resultados, sino que también comprenda el desarrollo matemático, de forma que sea capaz de realizar el análisis sin la ayuda de paquetería. Por esta razón en el documento se incorporan procedimientos para el cálculo manual de las pruebas.

# ANEXO A

**Factores de confusión**

En toda investigación experimental el investigador tiene dominio sobre algunas variables, pero sobre las que no se tiene dicho control se tratan a continuación.

Al realizar cualquier tipo de investigación, ya sea sobre seres vivos, plantas, etc., existen por lo regular condiciones naturales que interactúan, pero nada tienen que ver con los tratamientos a aplicar, estos factores pueden ser la temperatura, luz , raza, sexo, etc., como podrá observarse estos pueden ser variados, y son conocidos como **"Fuente de variación o de error"**.

Los factores de variación tienen impacto en los resultados y producen lo que se conoce como **"errores experimentales"**, estos no son más que variaciones naturales, y es la diferencia obtenida con respecto a la media general, se puede ver de la siguiente manera, en el caso de repetir un experimento n veces bajo las mismas condiciones y existir una diferencia en los resultados obtenidos, esta diferencia se identifica como el error experimental.

Los factores que no se pueden controlar y forman parte del fenómeno, son los factores de confusión.

El efecto de los factores de variación se puede minimizar usando los siguientes especificaciones.

*Aleatorización*

Esta se realiza seleccionando aleatoriamente de la muestra total de elementos un subconjunto para que se le aplique cada tratamiento.

La asignación del tratamiento también debe ser aleatoria,

*Homogeneizar*

Este procedimiento consiste en buscar que los elementos a los que se les esté aplicando un tratamiento determinado cuenten con las mismas características en los valores de los posibles factores de confusión, se entiende que no existen elementos iguales, pero se busca que cuenten con características similares para disminuir los errores causados por sus diferencias.

*Estratificación en bloques*

Este procedimiento tiene la misma finalidad que homogeneizar, aunque la idea principal es buscar grupos con características comunes en posibles factores de confusión.

Los bloques son para homogeneizar otros factores como son la luz, tempreratura, humedad, etc.

**Causalidad**

Este concepto es de importancia en la investigación ya que es el que lleva a determinar si la aplicación de un tratamiento o condición siempre conduce a un efecto determinado, el encontrar esta relación de causalidad en cualquier experimento.

Pero para afirmar que esa causalidad es cierta debe de cumplir con una serie de puntos.

- El efecto siempre es posterior a la causa

- Que no importen las poblaciones, condiciones u otros factores, que siempre se dé la asociación causa-efecto
- Que estén proporcionalmente relacionados causa –efecto, a mayor frecuencia o intensidad de la causa exista la misma relación con el efecto.
- Que no se dé el efecto cuando no se presente la causa.

El control de lo factores de confusión durante la experimentación va a permitir al investigador observar con mayor claridad la causalidad, y el efecto que tiene el(los) tratamiento(s) causas sobre la o las variables dependientes o efectos.

**Tamaños de muestra**

Es el número de elementos con los que se va a experimentar, este debe de procurar que la muestra sea representativa de la población y va a permitir inferir a la misma.

La existencia de investigaciones, conduce a tener una idea de la variación esperada, esta es de ayuda y útil para la nueva investigación, en caso de existir un total desconocimiento de dicho valor, y en caso de contar con recursos suficientes, lo más recomendable es realizar un estudio piloto, con un tamaño de muestra no muy elevado, del cual se puedan obtener resultados de su variabilidad esperada y de esta manera recalcular el tamaño de muestra ideal, considerando el error y precisión deseadas.

Un investigador que cuente con pocos recursos y no pueda realizar una prueba piloto tendrá que fijar sus valores el mismo, a continuación se describe un método para el cálculo del tamaño de muestra.

El método está relacionado con la probabilidad $\beta$ del error tipo dos[28], en donde las medias no son iguales y la diferencia entre ellas se define como $\delta$, la gráfica de $\beta$ contra $\delta$ es lo que se conoce como gráfica característica de operación, esta gráfica es una serie de curvas.

---

[28] Ver capítulo dos página 51 prueba estadística

El valor del eje horizontal es $d = \dfrac{|\delta|}{2\sigma}$ en este caso es el nivel de significancia , la varianza es desconocida, pero es aquí donde se hace uso de la experiencia del investigador y se pone la varianza que él espera, obteniendo el valor de la delta se busca en la gráfica de curvas características y se toma el valor de la n*. La muestra obtenida es la misma para las dos poblaciones que se estan comparando, y un supuesto para este método es de varianzas iguales.

El tamaño de la muestra requerida es igual a: $n = \dfrac{n^* + 1}{2}$

A partir de aquí el investigador podrá determinar muestras mayores, considerando que el error disminuye a medida que el tamaño de muestra aumenta.

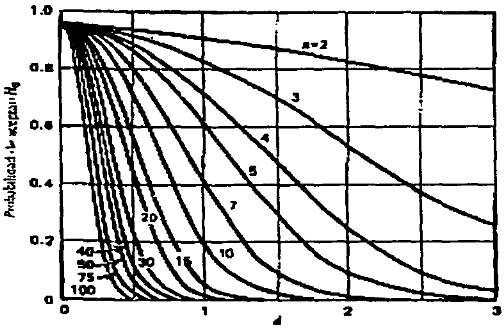



Figura 2-9. Curvas características de operación para pruebas t bilaterales con α = 0.05. (Reproducida con permiso de "Operating characteristics for the common tests of significance". C.L. Ferris, F.E. Grubs y C.L. Weaver, Annals of Mathematical Statistics, junio 1946)

# ANEXO B

**Modelo Lineal General**

El Modelo lineal general se expresa de la siguiente manera:

$$Y_{ijk\ldots z} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varphi_k + \ldots\ldots + \varepsilon_{ijk\ldots z}$$

Este modelo está formado por variables independientes, y una dependiente.

Las variables independientes son $\alpha_i, \beta_j, \varphi_k, \cdots$ estas variables son las que se identifican al momento de la experimentación como los tratamientos o bloques, en la mayoría de las ocasiones son representados con letras del alfabeto griego y pueden tomar cualquier orden, esto es importante tenerlo claro, ya que no debe ser causa de confusión; los subíndices pueden tomar tantos valores como niveles de tratamiento o números de bloques determine el investigador.

La variable dependiente en este modelo se identifica como $Y_{ijk\ldots z}$ esta variable es obtenida en la experimentación, la obtenemos como resultados, esta va a depender de los tratamientos.

La $\mu$ es identificada como la media general común a todas las observaciones.

La $\varepsilon_{ijk\ldots z}$ representa los errores.

Los modelos paramétricos son expresados con base en el modelo general.

**Modelos unifactoriales**

Los modelos unifactoriales cuentan con un solo factor es su estudio, estos pueden tener tantos niveles del factor(tratamientos) como se deseen, además de contar con un solo factor pueden contar también con elementos de homogeneización, los cuales ayudan al control de variables que pueden influir en los resultados.

**Modelo de un factor de clasificación de efectos fijos**

El modelo con un factor de clasificación es el básico, en el se identifica un factor con "n" tratamientos cuantos el investigador desee incluir.

El modelo de un factor de clasificación se expresa de la siguiente manera:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

Los elementos que forman dicho modelo son :

$Y_{ij}$ Es el valor de la variable respuesta en la j-ésima prueba para el i-ésimo nivel del factor o tratamiento.

$\mu$ Media del i-ésimo tratamiento donde $\mu$ es la media general .

$\tau_i$ es el incremento o decremento de la media general generada por el i-ésimo tratamiento.

$\varepsilon_{ij}$ Error experimental(este se identifica como la variación dentro de tratamientos).

i=1,..,a (a indica el número de tratamientos)
j=1,..,n (n indica el número de casos o pruebas para el i-ésimo tratamiento)
$\varepsilon_{ij}$ Independientes y se distribuye con $N(0,\sigma^2)$

**Modelo unifactorial con bloques aleatorios**

En este modelo el investigador determina en su experimento un factor (varios niveles o tratamientos) y varios bloques, el investigador va medir el efecto obtenido en un determinado experimento al aplicar los niveles de un factor llamémosle al factor "A" con los niveles "$A_1$, $A_2$, ...,$A_a$" dentro de los distintos bloques seleccionado, a los bloques identificarlos como "B" , con nivel de "$B_1$, $B_2$ ,...,$B_b$ " a los distintos bloques; imaginemos un experimento donde el investigador aplica tres niveles de temperatura como primer factor y dos bloques distintos de parcelas, en estos modelos el investigador va a desear medir los distintos resultados al poner el primer nivel de temperatura con las distintas parcelas ($A_1B_1$ y $A_1B_2$), el segundo nivel de temperatura con los mismos dos bloques ($A_2B_1$ y $A_2B_2$)y el tercer nivel de temperatura con los mismos dos bloques ($A_3B_1$ y $A_3B_2$), por lo cual se puede observar que el investigador en este caso va a obtener un total de 6 observaciones o mediciones distintas.

El modelo es presentado de la forma siguiente :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

Los elementos que forman dicho modelo son :

$Y_{ij}$ Es el valor de la variable respuesta en la j-ésima prueba para el i-ésimo nivel del factor o tratamiento.

$\mu$ Media de media general

$\alpha_i$ Incremento o decremento sobre la media debido al nivel i del factor A

$\beta_j$ Incremento o decremento sobre la media debido al nivel j de los bloques

$\varepsilon_{ij}$ Error experimental

i=1,..,a (a indica el número de tratamientos en el primer factor)
j=1,..,b (b indica el número bloques)

$\varepsilon_{ij}$ Independientes y se distribuye con $N(0,\sigma^2)$

**Modelos multifactoriales**

El investigador en su afán por conocer más sobre un determinado fenómeno y tener un conocimiento preciso de lo que produce cambios sobre el mismo, tiende a realizar experimentos con un mayor grado de dificultad, incluyendo en los mismos un mayor número de factores, los cuales puedan impactar en los resultados, este tipo de experimentos son conocidos como modelos multifactoriales, el querer explicar cada factor con modelos unifactoriales implicaría aumentar el número de unidades a experimentar, como gastos y tiempo en procesos de cálculo, sin conocer de manera exacta como actúan los factores entre si en el resultado, motivo por el cual se desarrollaron dichos modelos que eliminar muchos de los inconvenientes que se podrían generar.

**Un modelo es multifactorial desde el momento en que se incluye más de un factor en el experimento.**

A continuación se desarrolla un solo modelo multifactorial, aunque el investigador tiene que tener en cuenta que de estos existe otros los cuales se pueden adaptar a la investigación que se este realizando, una vez determinado el número de factores, las agrupaciones de bloques o condiciones que se especifiquen es suficiente para que el investigador con el conocimiento del modelo general y lo que a continuación se presenta de interacción desarrolle su modelo y proceda a su análisis.

**Modelo con dos factores con interacción**

Este modelo cuenta con dos factores que producen desviaciones tanto individual como en conjunto (interación) sobre la media general del experimento, la representación de este modelo es la siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

Los elementos que lo forman son :

$Y_{ij}$ Es el valor de la variable respuesta en la j-ésima prueba para el i-ésimo nivel del factor o tratamiento.

$\mu$ Media de media general

$\alpha_i$ Incremento o decremento sobre la media debido al nivel i del primer factor o factor A

$\beta_j$ Incremento o decremento sobre la media debido al segundo factor o factor

$(\alpha\beta)_{ijk}$ Incremento o decremento sobre la media debido a la interacción de niveles i y i de factores A y B

$\varepsilon_{ijk}$ Error experimental

i=1,..,a (a indica el número de tratamientos en el primer factor)

j=1,..,b (b indica el número de tratamientos en el segundo factor)

k=1,...,n(k indica el número de observaciones en el cruce de factores)

$\varepsilon_{ij}$ Independientes y se distribuye con $N(0,\sigma^2)$

Este modelo a diferencia de los anteriormente descritos debe contar con más de una observación o réplica en cada una de sus celdas, definiendo celda al cruce de los factores.

La variabilidad o desviación que presentan cada uno de los factores es medida de forma similar que el de un factor con bloques aleatorizados, la diferencia principal es la del nuevo elemento del Modelo que es la interacción.

**Cálculo de la suma de cuadrados para distintos modelos lineales**

A continuación se desarrollan los cálculos de las sumas de cuadrados para las fuentes de variación de dos modelos lineales.

***Modelo unifactorial con bloques aleatorios***

Modelo

$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$

- Fuente de variación debida al primer factor o factor A
- Fuente de variación debida los bloques B
- Error
- Fuente de variación total

Una vez identificadas las Fuentes de variación obtengamos la medias de los factores y total.

Con la siguiente sumatoria se obtiene la media de cada uno de los factores de A, es decir la media de las observaciones para cada $A_i$, sin importar a que nivel del factor B pertenecen.

$$\overline{y_{i\bullet}} = \frac{\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{b}$$

Con la siguiente sumatoria se dá la media de cada uno de los bloques, es decir, la media de las observaciones para cada B, sin importar a que nivel del factor A pertenecen.

$$\overline{y_{\bullet j}} = \frac{\sum_{i=1}^{a} y_{ij}}{a}$$

Con la siguiente sumatoria se obtiene la media de todas las observaciones obtenidas en el experimento.

$$\overline{y_{\bullet\bullet}} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} y_{ij}}{ab}$$

En este modelo se observa que lo que se desea medir es la variabilidad o desviación de los diferentes niveles del factor con respecto a la media general, esto lo podemos obtener con la siguiente diferencia.

$$\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)$$

La suma de cuadrados para los el factor A es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2 = b\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$$

La variabilidad o desviación producida por los bloques sobre la media general se obtiene aplicando la siguiente diferencia.

$$\left(\overline{y_{\bullet j}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)$$

Lo anterior nos lleva a obtener la suma de cuadrado de los bloques de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{\bullet j}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2 = a\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y_{\bullet j}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$$

El modelo contempla residuos los cuales son considerados como tales, ya que son los valores obtenidos después de que a la media general se le elimina el efecto o variabilidad de los bloque y de los factores, estos son obtenidos con la siguiente diferencia.

$$\left(y_{ij} - \overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet j}} + \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)$$

La suma de cuadrados obtenida para esta diferencia es:

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet j}} + \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$$

La tabla resumen del modelo unifactorial con bloques aleatorizados .

| Fuente de variación | Sumas de cuadrados |
|---|---|
| Efecto entre tratamientos | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet j}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Efecto entre bloques | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2 = b\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Residuos | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(y_{ij} - \overline{y_{i\bullet}} - \overline{y_{\bullet j}} + \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Total | Entre tratamientos+entre bloques+residuos |

*Modelos multifactoriales*

**Modelo con dos factores con interacción**

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ijk} + \varepsilon_{ijk}$$

La variabilidad o desviación que presentan cada uno de los factores es medida de forma similar que el de un factor con bloques aleatorizados, la diferencia principal es el nuevo elemento del modelo (la interacción), motivo por el cual no se describirá cada una de las sumas de cuadrados, se presenta la tabla con las sumas de cuadrados de las distintas fuentes de variación.

| Fuente de variación | Sumas de cuadrados |
|---|---|
| Efecto entre tratamientos del primer factor | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{y_{i\bullet\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2 = bn\sum_{i=1}^{a}\left(\overline{y_{i\bullet\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Efecto entre trat. del segundo factor | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n}\left(\overline{y_{\bullet j}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2 = a\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y_{\bullet j}} - \overline{y_{\bullet\bullet}}\right)^2$ <br> $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{y_{\bullet j\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2 = an\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y_{\bullet j\bullet}} - \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Efecto de la interacción entre factores | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{y_{ij\bullet}} - \overline{y_{i\bullet\bullet}} - \overline{y_{\bullet j\bullet}} + \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2 =$ <br> $n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\overline{y_{ij\bullet}} - \overline{y_{i\bullet\bullet}} - \overline{y_{\bullet j\bullet}} + \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Residuo | $\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{ijk} - \overline{y_{\bullet\bullet\bullet}}\right)^2$ |
| Total | Entre Trat. Factor 1+Entre Trat. Factor 2+Interacción+Residuo |

## Obtención de los estimadores

El modelo lineal puede ser representado de forma matricial y esta es la siguiente:

$$y = Xb + e$$

$y$ es el vector de resultados

$X$ es una matriz de 0's y 1's, también se le conoce como matriz de incidencia

$b$ es el vector de parámetros

$e$ es el vector de errores

El valor de $e$ se obtiene de la siguiente manera:

$$e = y - E(y)$$

Es sobre los residuos que se realizan las pruebas necesarias para determinar la prueba a aplicar, es necesario que obtener esos valores.

$$E(y) = E(Xb) + E(e)$$

La $e \approx N(0, \sigma^2 I)$, entonces se tiene que:

$$E(e) = 0$$
$$V(e) = E[e - E(e)][e - E(e)]' = E(ee') = \sigma^2 I_N$$

$$e'e = (y - Xb)'(y - Xb) = y'y - 2b'X'y + b'X'Xb$$

Se desea encontrar el vector de estimadores que minimice la varianza, obteniendo lo siguiente:

$$\frac{\partial(e'e)}{\partial b} = 0$$

$X'X\hat{b} = X'y$

De la siguiente forma se obtiene el valor de los estimadores

$$\dot{b} \approx \hat{b} = (X'X)^{-1}(X'y)$$

pero en el caso de diseño de experimentos se presenta un problema, la matriz no es de rango completo, motivo por el cual la no se puede obtener la inversa y nos lleva a que se puede tener más de un resultado, para dar solución se debe de calcular primero la inversa generalizada[29] G de $X'X$, esta matriz satisface la siguiente ecuación

$X'XGX'X = X'X$

Reemplazando obtenemos

$\dot{b} = G(X'y)$

y dando solución a esta matriz se obtienen los estimadores deseados.

### Pruebas de Normalidad

En el capítulo 2 se mencionaron las pruebas que a continuación se van a desarrollar, pero no se detallo el cálculo de los mismos, solo la interpretación de los resultados que se obtienen.

### Prueba de Shapiro-Wilk's

El valor para la prueba se obtiene mediante el desarrollo del siguiente estadística, donde

[29] Revisar Searle, S R 1966

$$W = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_{(i)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i + \overline{y}\right)^2}$$

Las $y_{(1)} \leq y_{(2)} \leq .... \leq y_{(n)}$ representa la estadística de orden, es decir los valores obtenidos son ordenados del menor al mayor.

Los coeficientes $a_i{}'s$ son los pesos óptimos para un estimador de mínimos cuadrados de una desviación estándar para una población normal, estos valores son obtenidos de valores en tablas, y las podemos definir también como $a_{n-i+1} = -a_i$

La expresión muestra otra expresión para calcular el numerador de W, siempre y cuando la *n* es par, o sea $k = n/2$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_{(i)} = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1} \left(y_{(n-i+1)} - y_{(i)}\right)$$

## Table XVIII. Coefficients of Order Statistics for the Shapiro-Wilk's $W$ Test for Normality

The table gives coefficients $\{a_{n-i+1}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ of the order statistics for determining the Shapiro-Wilk's $W$ statistic. The coefficients are given for $n = 2$ (1) 30. Shapiro and Wilk (1965) used approximations for $n > 20$. The values given here are exact upto $n = 30$.

| $i$ \ $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.7071 | 0.7071 | 0.6872 | 0.6646 | 0.6431 | 0.6233 | 0.6052 | 0.5888 | 0.5739 |
| 2 | – | 0.0000 | 0.1668 | 0.2413 | 0.2806 | 0.3031 | 0.3164 | 0.3244 | 0.3290 |
| 3 | – | – | – | 0.0000 | 0.0875 | 0.1401 | 0.1743 | 0.1976 | 0.2141 |
| 4 | – | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0561 | 0.0947 | 0.1224 |
| 5 | – | – | – | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0399 |

| $i$ \ $n$ | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5601 | 0.5475 | 0.5359 | 0.5251 | 0.5150 | 0.5056 | 0.4968 | 0.4886 | 0.4808 | 0.4734 |
| 2 | 0.3315 | 0.3325 | 0.3325 | 0.3318 | 0.3306 | 0.3290 | 0.3273 | 0.3253 | 0.3232 | 0.3211 |
| 3 | 0.2260 | 0.2347 | 0.2412 | 0.2460 | 0.2495 | 0.2521 | 0.2540 | 0.2552 | 0.2561 | 0.2565 |
| 4 | 0.1429 | 0.1586 | 0.1707 | 0.1803 | 0.1878 | 0.1939 | 0.1988 | 0.2027 | 0.2059 | 0.2085 |
| 5 | 0.0695 | 0.0922 | 0.1100 | 0.1240 | 0.1354 | 0.1447 | 0.1523 | 0.1587 | 0.1641 | 0.1686 |
| 6 | 0.0000 | 0.0303 | 0.0538 | 0.0727 | 0.0880 | 0.1005 | 0.1109 | 0.1197 | 0.1271 | 0.1334 |
| 7 | – | – | 0.0000 | 0.0240 | 0.0434 | 0.0593 | 0.0725 | 0.0837 | 0.0932 | 0.1013 |
| 8 | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0196 | 0.0359 | 0.0496 | 0.0612 | 0.0712 |
| 9 | – | – | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0164 | 0.0303 | 0.0422 |
| 10 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0140 |

| $i$ \ $n$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.4664 | 0.4598 | 0.4536 | 0.4476 | 0.4419 | 0.4364 | 0.4312 | 0.4262 | 0.4214 | 0.4168 |
| 2 | 0.3189 | 0.3167 | 0.3144 | 0.3122 | 0.3100 | 0.3078 | 0.3056 | 0.3035 | 0.3014 | 0.2993 |
| 3 | 0.2567 | 0.2566 | 0.2564 | 0.2560 | 0.2554 | 0.2548 | 0.2541 | 0.2533 | 0.2525 | 0.2516 |
| 4 | 0.2106 | 0.2122 | 0.2136 | 0.2146 | 0.2154 | 0.2160 | 0.2164 | 0.2167 | 0.2168 | 0.2169 |
| 5 | 0.1724 | 0.1756 | 0.1783 | 0.1806 | 0.1826 | 0.1842 | 0.1856 | 0.1868 | 0.1878 | 0.1886 |
| 6 | 0.1388 | 0.1435 | 0.1475 | 0.1510 | 0.1540 | 0.1567 | 0.1590 | 0.1610 | 0.1628 | 0.1643 |
| 7 | 0.1083 | 0.1144 | 0.1197 | 0.1243 | 0.1284 | 0.1320 | 0.1351 | 0.1380 | 0.1404 | 0.1427 |
| 8 | 0.0798 | 0.0873 | 0.0938 | 0.0997 | 0.1047 | 0.1092 | 0.1132 | 0.1167 | 0.1200 | 0.1228 |
| 9 | 0.0525 | 0.0615 | 0.0693 | 0.0759 | 0.0823 | 0.0878 | 0.0926 | 0.0969 | 0.1008 | 0.1044 |
| 10 | 0.0261 | 0.0366 | 0.0457 | 0.0540 | 0.0610 | 0.0673 | 0.0730 | 0.0781 | 0.0827 | 0.0869 |
| 11 | 0.0000 | 0.0121 | 0.0227 | 0.0321 | 0.0403 | 0.0476 | 0.0542 | 0.0601 | 0.0654 | 0.0702 |
| 12 | – | – | 0.0000 | 0.0107 | 0.0201 | 0.0284 | 0.0359 | 0.0426 | 0.0486 | 0.0541 |
| 13 | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0094 | 0.0179 | 0.0254 | 0.0322 | 0.0383 |
| 14 | – | – | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0084 | 0.0160 | 0.0229 |
| 15 | – | – | – | – | – | – | – | – | 0.0000 | 0.0076 |

## Table XIX. Critical Values of the Shapiro-Wilk's $W$ Test for Normality

This table gives critical values of the Shapiro-Wilk's $W$ test for normality. The critical values are given for $\alpha = 0.01, 0.02, 0.05, 0.10, 0.50$, and $n = 3\,(1)\,50$.

| $n$ | Critical Value ($\alpha$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.50 |
| 3 | 0.753 | 0.756 | 0.767 | 0.789 | 0.959 |
| 4 | 0.687 | 0.707 | 0.748 | 0.792 | 0.935 |
| 5 | 0.686 | 0.715 | 0.762 | 0.806 | 0.927 |
| 6 | 0.713 | 0.743 | 0.788 | 0.826 | 0.927 |
| 7 | 0.730 | 0.760 | 0.803 | 0.838 | 0.928 |
| 8 | 0.749 | 0.778 | 0.818 | 0.851 | 0.932 |
| 9 | 0.764 | 0.791 | 0.829 | 0.859 | 0.935 |
| 10 | 0.781 | 0.806 | 0.842 | 0.869 | 0.938 |
| 11 | 0.792 | 0.817 | 0.850 | 0.876 | 0.940 |
| 12 | 0.805 | 0.828 | 0.859 | 0.883 | 0.943 |
| 13 | 0.814 | 0.837 | 0.866 | 0.889 | 0.945 |
| 14 | 0.825 | 0.846 | 0.874 | 0.895 | 0.947 |
| 15 | 0.835 | 0.855 | 0.881 | 0.901 | 0.950 |
| 16 | 0.844 | 0.863 | 0.887 | 0.906 | 0.952 |
| 17 | 0.851 | 0.869 | 0.892 | 0.910 | 0.954 |
| 18 | 0.858 | 0.874 | 0.897 | 0.914 | 0.956 |
| 19 | 0.863 | 0.879 | 0.901 | 0.917 | 0.957 |
| 20 | 0.868 | 0.884 | 0.905 | 0.920 | 0.959 |
| 21 | 0.873 | 0.888 | 0.908 | 0.923 | 0.960 |
| 22 | 0.878 | 0.892 | 0.911 | 0.926 | 0.961 |
| 23 | 0.881 | 0.895 | 0.914 | 0.928 | 0.962 |
| 24 | 0.884 | 0.898 | 0.916 | 0.930 | 0.963 |
| 25 | 0.888 | 0.901 | 0.918 | 0.931 | 0.964 |
| 26 | 0.891 | 0.904 | 0.920 | 0.933 | 0.965 |
| 27 | 0.894 | 0.906 | 0.923 | 0.935 | 0.965 |
| 28 | 0.896 | 0.908 | 0.924 | 0.936 | 0.966 |
| 29 | 0.898 | 0.910 | 0.926 | 0.937 | 0.966 |
| 30 | 0.900 | 0.912 | 0.927 | 0.939 | 0.967 |
| 31 | 0.902 | 0.914 | 0.929 | 0.940 | 0.967 |
| 32 | 0.904 | 0.915 | 0.930 | 0.941 | 0.968 |
| 33 | 0.906 | 0.917 | 0.931 | 0.942 | 0.968 |
| 34 | 0.908 | 0.919 | 0.933 | 0.943 | 0.969 |
| 35 | 0.910 | 0.920 | 0.934 | 0.944 | 0.969 |
| 36 | 0.912 | 0.922 | 0.935 | 0.945 | 0.970 |
| 37 | 0.914 | 0.924 | 0.936 | 0.946 | 0.970 |
| 38 | 0.916 | 0.925 | 0.938 | 0.947 | 0.971 |
| 39 | 0.917 | 0.927 | 0.939 | 0.948 | 0.971 |
| 40 | 0.919 | 0.928 | 0.940 | 0.949 | 0.972 |
| 41 | 0.920 | 0.929 | 0.941 | 0.950 | 0.972 |
| 42 | 0.922 | 0.930 | 0.942 | 0.951 | 0.972 |
| 43 | 0.923 | 0.932 | 0.943 | 0.951 | 0.973 |
| 44 | 0.924 | 0.933 | 0.944 | 0.952 | 0.973 |
| 45 | 0.926 | 0.934 | 0.945 | 0.953 | 0.973 |
| 46 | 0.927 | 0.935 | 0.945 | 0.953 | 0.974 |
| 47 | 0.928 | 0.928 | 0.946 | 0.954 | 0.974 |
| 48 | 0.929 | 0.937 | 0.947 | 0.954 | 0.974 |
| 49 | 0.929 | 0.937 | 0.947 | 0.955 | 0.974 |
| 50 | 0.930 | 0.938 | 0.947 | 0.955 | 0.974 |

From S. S. Shapiro and M. B. Wilk, "An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples)," *Biometrika*, 52 (1965), 591–611. Reprinted by permission.

## Prueba de Normalidad D'Agostino

El valor para la prueba se obtiene mediante el desarrollo del la siguiente estad´sitica, donde

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left\{i - \frac{1}{2}(n+1)\right\}}{n\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}}$$

**Table XX. Critical Values of the D'Agostino's $D$ Test for Normality**

This table gives critical values of the D'Agostino's $D$ test for normality. The critical values are given for $\alpha$ = 0.20, 0.10, 0.05, 0.02, 0.01; and $n$ = 10 (2) 50 (10) 100 (20) 200 (50) 1000 (250) 2000.

| $n$ | Critical Value ($\alpha$) | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 |
| 10 | 0.2632, 0.2835 | 0.2573, 0.2843 | 0.2513, 0.2849 | 0.2436, 0.2855 | 0.2379, 0.2857 |
| 12 | 0.2653, 0.2841 | 0.2598, 0.2849 | 0.2544, 0.2854 | 0.2473, 0.2859 | 0.2420, 0.2862 |
| 14 | 0.2669, 0.2846 | 0.2618, 0.2853 | 0.2568, 0.2858 | 0.2503, 0.2862 | 0.2455, 0.2865 |
| 16 | 0.2681, 0.2848 | 0.2634, 0.2855 | 0.2587, 0.2860 | 0.2527, 0.2865 | 0.2482, 0.2867 |
| 18 | 0.2690, 0.2850 | 0.2646, 0.2855 | 0.2603, 0.2862 | 0.2547, 0.2866 | 0.2505, 0.2868 |
| 20 | 0.2699, 0.2852 | 0.2657, 0.2857 | 0.2617, 0.2863 | 0.2564, 0.2867 | 0.2525, 0.2869 |
| 22 | 0.2705, 0.2853 | 0.2670, 0.2859 | 0.2629, 0.2864 | 0.2579, 0.2869 | 0.2542, 0.2870 |
| 24 | 0.2711, 0.2853 | 0.2675, 0.2860 | 0.2638, 0.2865 | 0.2591, 0.2870 | 0.2557, 0.2871 |
| 26 | 0.2717, 0.2854 | 0.2682, 0.2861 | 0.2647, 0.2866 | 0.2603, 0.2870 | 0.2570, 0.2872 |
| 28 | 0.2721, 0.2854 | 0.2688, 0.2861 | 0.2655, 0.2866 | 0.2612, 0.2870 | 0.2581, 0.2873 |
| 30 | 0.2725, 0.2854 | 0.2693, 0.2861 | 0.2662, 0.2866 | 0.2622, 0.2871 | 0.2592, 0.2872 |
| 32 | 0.2729, 0.2854 | 0.2698, 0.2862 | 0.2668, 0.2867 | 0.2630, 0.2871 | 0.2600, 0.2873 |
| 34 | 0.2732, 0.2854 | 0.2703, 0.2862 | 0.2674, 0.2867 | 0.2636, 0.2871 | 0.2609, 0.2873 |
| 36 | 0.2735, 0.2854 | 0.2707, 0.2862 | 0.2679, 0.2867 | 0.2643, 0.2871 | 0.2617, 0.2873 |
| 38 | 0.2738, 0.2854 | 0.2710, 0.2862 | 0.2683, 0.2867 | 0.2649, 0.2871 | 0.2623, 0.2873 |
| 40 | 0.2740, 0.2854 | 0.2714, 0.2862 | 0.2688, 0.2867 | 0.2655, 0.2871 | 0.2630, 0.2874 |
| 42 | 0.2743, 0.2854 | 0.2717, 0.2861 | 0.2691, 0.2867 | 0.2659, 0.2871 | 0.2636, 0.2874 |
| 44 | 0.2745, 0.2854 | 0.2720, 0.2861 | 0.2695, 0.2867 | 0.2664, 0.2871 | 0.2641, 0.2874 |
| 46 | 0.2747, 0.2854 | 0.2722, 0.2861 | 0.2698, 0.2866 | 0.2668, 0.2871 | 0.2646, 0.2874 |
| 48 | 0.2749, 0.2854 | 0.2725, 0.2861 | 0.2702, 0.2866 | 0.2672, 0.2871 | 0.2651, 0.2874 |
| 50 | 0.2751, 0.2853 | 0.2727, 0.2861 | 0.2705, 0.2866 | 0.2676, 0.2871 | 0.2655, 0.2874 |
| 60 | 0.2757, 0.2852 | 0.2737, 0.2860 | 0.2717, 0.2865 | 0.2692, 0.2870 | 0.2673, 0.2873 |
| 70 | 0.2763, 0.2851 | 0.2744, 0.2859 | 0.2726, 0.2864 | 0.2708, 0.2869 | 0.2687, 0.2872 |
| 80 | 0.2768, 0.2850 | 0.2750, 0.2857 | 0.2734, 0.2863 | 0.2713, 0.2868 | 0.2698, 0.2871 |
| 90 | 0.2771, 0.2849 | 0.2755, 0.2856 | 0.2740, 0.2862 | 0.2721, 0.2866 | 0.2707, 0.2870 |
| 100 | 0.2774, 0.2849 | 0.2759, 0.2855 | 0.2745, 0.2860 | 0.2727, 0.2865 | 0.2714, 0.2869 |
| 120 | 0.2779, 0.2847 | 0.2765, 0.2853 | 0.2752, 0.2858 | 0.2737, 0.2863 | 0.2725, 0.2866 |
| 140 | 0.2782, 0.2846 | 0.2770, 0.2852 | 0.2758, 0.2856 | 0.2744, 0.2862 | 0.2734, 0.2865 |
| 160 | 0.2785, 0.2845 | 0.2774, 0.2851 | 0.2763, 0.2855 | 0.2750, 0.2860 | 0.2741, 0.2863 |
| 180 | 0.2787, 0.2844 | 0.2777, 0.2850 | 0.2767, 0.2854 | 0.2755, 0.2859 | 0.2746, 0.2862 |
| 200 | 0.2789, 0.2843 | 0.2779, 0.2848 | 0.2770, 0.2853 | 0.2759, 0.2857 | 0.2751, 0.2860 |
| 250 | 0.2793, 0.2841 | 0.2784, 0.2846 | 0.2776, 0.2850 | 0.2767, 0.2855 | 0.2760, 0.2858 |
| 300 | 0.2796, 0.2840 | 0.2788, 0.2844 | 0.2781, 0.2848 | 0.2772, 0.2853 | 0.2766, 0.2855 |
| 350 | 0.2798, 0.2839 | 0.2791, 0.2843 | 0.2784, 0.2847 | 0.2776, 0.2851 | 0.2771, 0.2853 |
| 400 | 0.2799, 0.2838 | 0.2793, 0.2842 | 0.2787, 0.2845 | 0.2780, 0.2849 | 0.2775, 0.2852 |
| 450 | 0.2801, 0.2837 | 0.2795, 0.2841 | 0.2789, 0.2844 | 0.2782, 0.2848 | 0.2778, 0.2851 |
| 500 | 0.2802, 0.2836 | 0.2796, 0.2840 | 0.2791, 0.2843 | 0.2785, 0.2847 | 0.2780, 0.2849 |
| 600 | 0.2804, 0.2835 | 0.2799, 0.2839 | 0.2794, 0.2842 | 0.2788, 0.2845 | 0.2784, 0.2847 |
| 700 | 0.2805, 0.2834 | 0.2800, 0.2838 | 0.2796, 0.2840 | 0.2791, 0.2844 | 0.2787, 0.2846 |
| 800 | 0.2806, 0.2833 | 0.2802, 0.2837 | 0.2798, 0.2839 | 0.2793, 0.2842 | 0.2790, 0.2844 |
| 900 | 0.2807, 0.2833 | 0.2803, 0.2836 | 0.2799, 0.2838 | 0.2795, 0.2841 | 0.2792, 0.2843 |
| 1000 | 0.2808, 0.2832 | 0.2804, 0.2835 | 0.2800, 0.2838 | 0.2796, 0.2840 | 0.2793, 0.2842 |
| 1250 | 0.2809, 0.2831 | 0.2806, 0.2834 | 0.2803, 0.2836 | 0.2799, 0.2839 | 0.2797, 0.2840 |
| 1500 | 0.2810, 0.2830 | 0.2807, 0.2833 | 0.2805, 0.2835 | 0.2801, 0.2837 | 0.2799, 0.2839 |
| 1750 | 0.2811, 0.2830 | 0.2808, 0.2832 | 0.2806, 0.2834 | 0.2803, 0.2836 | 0.2801, 0.2838 |
| 2000 | 0.2812, 0.2829 | 0.2809, 0.2831 | 0.2807, 0.2833 | 0.2804, 0.2835 | 0.2802, 0.2837 |

From R. B. D'Agostino and M. A. Stephens. *Goodness-of-Fit Techniques*. © 1986 by Marcel Dekker, Inc., New York. Reprinted by permission.

**Prueba de Homoscedasticidad de Bartlett**

El valor B para la prueba se obtiene mediante el desarrollo del siguiente procedimiento, donde

$$B = \frac{K}{1+L}$$

$$T_A = \frac{1}{\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)} \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)S_i^2$$

$$T_G = \left\{\prod_{i=1}^{a}\left(S_i^2\right)^{n_i - 1}\right\}^{1 \Big/ \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)}$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_i}\left(y_{ij} - \overline{y_i}\right)^2}{n_i - 1}$$

$$R = T_A \big/ T_G$$

$$K = \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)\log_e(T_A) - \sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)\log_e\left(S_i^2\right)$$

$$L = \frac{1}{3(a-1)}\left[\sum_{i=1}^{a}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{a}(n_i - 1)}\right]$$

El anterior desarrollo es para cuando se tienen más de cinco observaciones, ya que de esta forma la distribución de Barttlet se aproxima más a una distribución Chi-cuadrada, en caso de ser menor a cinco observaciones se aproxima a la distribución F y las fórmulas a utilizar son:

$$B^{'} = \frac{v_2 K}{v_1(M - K)}$$

donde

$$v_1 = a - 1$$
$$v_2 = (a+1)/L^2$$
$$M = v_2 / \left\{ 1 - L + \frac{2}{v_2} \right\}$$

## Table XXI. Critical Values of the Bartlett's Test for Homogeneity of Variances

This table gives critical values of the Bartlett's test for homogeneity of variances having equal sample sizes in each group. Bartlett's test statistic is the ratio of the weighted geometric mean of the sample variances to their weighted arithmetic mean (the weights are relative degrees of freedom). The critical values are given for $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$; the number of groups $p = 2\ (1)\ 10$; and the sample size in each group $n = 3\ (1)\ 30\ (10)\ 60\ (20)\ 100$. We reject the hypothesis of homogeneity of variances at the $\alpha$-level of significance if $B < B_p(n, \alpha)$, where $B$ is the calculated value of the Bartlett's statistic and $B_p(n, \alpha)$ is the critical value having an area of size $\alpha$ in the left-tail of the Bartlett's distribution. The critical values for equal sample sizes given in this table can also be used to obtain a highly accurate approximation of the critical values in the unequal sample size case by employing the following relation:

$$B_p(n_1, n_2, \ldots, n_p; \alpha) \cong (n_1/N)B_p(n_1, \alpha) + (n_2/N)B_p(n_2, \alpha) + \cdots + (n_p/N)B_p(n_p, \alpha),$$

where $N = \sum_{i=1}^{p} n_i$. $B_p(n_1, n_2, \ldots, n_p; \alpha)$ denotes the $\alpha$-level critical value of the Bartlett's test statistic with $p$ groups having $n_1, n_2, \ldots, n_p$ observations, respectively, and $B_p(n_i, \alpha), i = 1, 2, \ldots, p$, denotes the $\alpha$-level critical value in the equal sample size case with $n_i$ observations in all $p$ groups. For a given $p$, where $p = 2\ (1)\ 10$, and for any combination of sample sizes from 5 (1) 100, the absolute error of this approximation is less than 0.005 (the percentage relative error is less than one-half of one percent) when $\alpha = 0.05, 0.10$, or 0.25. When $\alpha = 0.01$, the absolute error is approximately 0.015 in the extreme case and less than 0.005 when min $(n_1, n_2, \ldots, n_p) \geq 10$. The approximation can be improved with the help of correction factors given in Dyer and Keating (1980, Table 2) and the absolute error of the corrected approximation is as small as for any other $\alpha$ values. To illustrate, suppose $p = 4$ and $n_1 = 5$, $n_2 = 6$, $n_3 = 10$, $n_4 = 50$. Using the relation given previoulsy, $B_4(5, 6, 10, 50; 0.01) \cong (5/71)\ (0.4607) + (6/71)\ (0.5430) + (10/71)\ (0.7195) + (50/71)\ (0.9433) = 0.8440$. Using the correction factors given in Dyer and Keating (1980, Table 2) it can be shown that $B_4(5, 6, 10, 50; 0.01) \cong 0.8364$. The exact value is $B_4(5, 6, 10, 50; 0.01) = 0.8359$.

| n | Number of Groups (p) 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | α = 0.01 | | | | |
| 3 | 1411 | 1672 | – | – | – | – | – | – | – |
| 4 | 2843 | 3165 | .3475 | .3729 | 3937 | .4110 | – | – | – |
| 5 | .3984 | .4304 | .4607 | .4850 | .5046 | .5207 | .5343 | 5458 | .5558 |
| 6 | .4850 | .5149 | .5430 | .5653 | .5832 | .5978 | .6100 | .6204 | .6293 |
| 7 | 5512 | 5787 | .6045 | .6248 | .6410 | .6542 | .6652 | 6744 | .6824 |
| 8 | 6031 | .6282 | .6518 | .6704 | .6851 | .6970 | .7069 | 7153 | .7225 |
| 9 | .6445 | .6676 | .6892 | .7062 | .7197 | .7305 | .7395 | .7471 | .7536 |
| 10 | 6783 | .6996 | .7195 | .7352 | .7475 | .7575 | .7657 | 7726 | .7786 |
| 11 | .7063 | .7260 | .7445 | .7590 | .7703 | .7795 | .7871 | 7935 | 7990 |
| 12 | 7299 | .7483 | .7654 | .7789 | .7894 | .7980 | .8050 | .8109 | .8160 |
| 13 | .7501 | .7672 | .7832 | .7958 | .8056 | .8135 | .8201 | .8256 | .8303 |
| 14 | .7674 | .7835 | .7985 | .8103 | .8195 | .8269 | .8330 | .8382 | .8426 |
| 15 | .7825 | .7977 | .8118 | .8229 | .8315 | .8385 | .8443 | .8491 | 8532 |
| 16 | .7958 | .8101 | .8235 | .8339 | .8421 | .8486 | .8541 | .8586 | .8625 |
| 17 | .8076 | .8211 | .8338 | .8436 | .8514 | .8576 | .8627 | .8670 | .8707 |
| 18 | 8181 | .8309 | .8429 | .8523 | .8596 | .8655 | .8704 | .8745 | .8780 |
| 19 | .8275 | .8397 | .8512 | .8601 | .8670 | .8727 | .8773 | .8811 | .8845 |
| 20 | .8360 | .8476 | .8586 | .8671 | .8737 | .8791 | .8835 | .8871 | .8903 |
| 21 | .8437 | .8548 | .8653 | .8734 | .8797 | .8848 | .8890 | .8926 | .8956 |
| 22 | .8507 | .8614 | .8714 | .8791 | .8852 | .8901 | .8941 | .8975 | .9004 |
| 23 | .8571 | .8673 | .8769 | .8844 | .8902 | .8949 | .8988 | .9020 | .9047 |
| 24 | .8630 | .8728 | .8820 | .8892 | .8948 | .8993 | .9030 | .9061 | .9087 |
| 25 | .8684 | .8779 | .8867 | .8936 | .8990 | .9034 | .9069 | .9099 | .9124 |
| 26 | 8734 | .8825 | .8911 | .8977 | .9029 | .9071 | .9105 | .9134 | .9158 |
| 27 | .8781 | .8869 | .8951 | .9015 | .9065 | .9105 | .9138 | .9166 | .9190 |
| 28 | .8824 | .8909 | .8988 | .9050 | .9099 | .9138 | .9169 | .9196 | .9219 |
| 29 | .8864 | 8946 | .9023 | .9083 | .9130 | .9167 | .9198 | .9224 | .9246 |
| 30 | .8902 | .8981 | .9056 | .9114 | .9159 | .9195 | .9225 | .9250 | .9271 |
| 40 | 9175 | .9235 | .9291 | .9335 | .9370 | .9397 | .9420 | .9439 | .9455 |
| 50 | .9339 | .9387 | .9433 | .9468 | .9496 | .9518 | .9536 | .9551 | .9564 |
| 60 | .9449 | .9489 | .9527 | .9557 | .9580 | .9599 | .9614 | .9626 | .9637 |
| 80 | .9586 | .9617 | .9646 | .9668 | .9685 | .9699 | .9711 | .9720 | .9728 |
| 100 | .9669 | .9693 | .9716 | .9734 | .9748 | .9759 | .9769 | .9776 | .9783 |

## Table XXI (*continued*)

| | Number of Groups ($p$) | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | | | | | $\alpha = 0.10$ | | | | |
| 3 | .4359 | .3991 | .3966 | .4006 | .4061 | .4116 | ... | ... | ... |
| 4 | .5928 | .5583 | .5551 | .5582 | .5626 | .5673 | .5717 | .5759 | .5797 |
| 5 | .6842 | .6539 | .6507 | .6530 | .6566 | .6605 | .6642 | .6676 | .6708 |
| 6 | .7429 | .7163 | .7133 | .7151 | .7182 | .7214 | .7245 | .7274 | .7301 |
| 7 | .7834 | .7600 | .7572 | .7587 | .7612 | .7640 | .7667 | .7692 | .7716 |
| 8 | .8130 | .7921 | .7895 | .7908 | .7930 | .7955 | .7978 | .8000 | .8021 |
| 9 | .8356 | .8168 | .8143 | .8154 | .8174 | .8196 | .8217 | .8236 | .8254 |
| 10 | .8533 | .8362 | .8339 | .8349 | .8367 | .8386 | .8405 | .8423 | .8439 |
| 11 | .8676 | .8519 | .8498 | .8507 | .8523 | .8540 | .8557 | .8574 | .8589 |
| 12 | .8794 | .8649 | .8629 | .8637 | .8652 | .8668 | .8683 | .8698 | .8712 |
| 13 | .8892 | .8758 | .8740 | .8746 | .8760 | .8775 | .8789 | .8803 | .8816 |
| 14 | .8976 | .8851 | .8833 | .8840 | .8852 | .8866 | .8879 | .8892 | .8904 |
| 15 | .9048 | .8931 | .8914 | .8920 | .8932 | .8944 | .8957 | .8969 | .8980 |
| 16 | .9110 | .9000 | .8985 | .8990 | .9001 | .9013 | .9025 | .9036 | .9046 |
| 17 | .9165 | .9061 | .9046 | .9051 | .9062 | .9073 | .9084 | .9094 | .9104 |
| 18 | .9214 | .9115 | .9101 | .9106 | .9115 | .9126 | .9137 | .9146 | .9156 |
| 19 | .9257 | .9163 | .9150 | .9154 | .9163 | .9174 | .9183 | .9193 | .9201 |
| 20 | .9295 | .9206 | .9194 | .9198 | .9207 | .9216 | .9226 | .9234 | .9243 |
| 21 | .9330 | .9245 | .9233 | .9237 | .9245 | .9255 | .9263 | .9272 | .9280 |
| 22 | .9362 | .9281 | .9269 | .9273 | .9281 | .9289 | .9298 | .9306 | .9313 |
| 23 | .9390 | .9313 | .9302 | .9305 | .9313 | .9321 | .9329 | .9337 | .9344 |
| 24 | .9417 | .9342 | .9332 | .9335 | .9342 | .9350 | .9358 | .9365 | .9372 |
| 25 | .9441 | .9369 | .9359 | .9362 | .9369 | .9377 | .9384 | .9391 | .9398 |
| 26 | .9463 | .9394 | .9384 | .9387 | .9394 | .9401 | .9408 | .9415 | .9421 |
| 27 | .9484 | .9417 | .9408 | .9410 | .9417 | .9424 | .9431 | .9437 | .9443 |
| 28 | .9503 | .9439 | .9429 | .9432 | .9438 | .9445 | .9452 | .9458 | .9464 |
| 29 | .9520 | .9458 | .9449 | .9452 | .9458 | .9464 | .9471 | .9477 | .9483 |
| 30 | .9537 | .9477 | .9468 | .9471 | .9476 | .9483 | .9489 | .9495 | .9500 |
| 40 | .9655 | .9610 | .9603 | .9605 | .9609 | .9614 | .9619 | .9623 | .9627 |
| 50 | .9725 | .9689 | .9683 | .9685 | .9688 | .9692 | .9696 | .9699 | .9703 |
| 60 | .9771 | .9741 | .9737 | .9738 | .9741 | .9744 | .9747 | .9750 | .9753 |
| 80 | .9829 | .9806 | .9803 | .9804 | .9806 | .9808 | .9811 | .9813 | .9815 |
| 100 | .9864 | .9845 | .9843 | .9843 | .9845 | .9847 | .9849 | .9851 | .9852 |

From D. D. Dyer and J. P. Keating, "On the Determination of Critical Values for Bartlett's Test." *Journal of the American Statistical Association*, 75 (1980), 313-319. Abridged and reprinted by permission.

## Table XXI (*continued*)

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha = 0.05$ | | | | |
| 3 | .3123 | .3058 | .3173 | .3299 | – | – | – | – | – |
| 4 | .4780 | .4699 | .4803 | .4921 | .5028 | .5122 | 5204 | .5277 | .5341 |
| 5 | .5845 | .5762 | .5850 | .5952 | .6045 | .6126 | 6197 | 6260 | 6315 |
| 6 | .6563 | .6483 | 6559 | .6646 | .6727 | .6798 | .6860 | 6914 | .6961 |
| 7 | .7075 | .7000 | .7065 | .7142 | .7213 | .7275 | .7329 | .7376 | 7418 |
| 8 | .7456 | .7387 | .7444 | .7512 | .7574 | .7629 | .7677 | .7719 | .7757 |
| 9 | .7751 | 7686 | .7737 | .7798 | .7854 | .7903 | 7946 | .7984 | 8017 |
| 10 | .7984 | .7924 | .7970 | .8025 | .8076 | .8121 | .8160 | .8194 | .8224 |
| 11 | 8175 | .8118 | .8160 | .8210 | .8257 | .8298 | .8333 | .8365 | .8392 |
| 12 | .8332 | .8280 | .8317 | .8364 | .8407 | .8444 | 8477 | .8506 | .8531 |
| 13 | .8465 | .8415 | .8450 | .8493 | .8533 | .8568 | 8598 | .8625 | .8648 |
| 14 | .8578 | .8532 | .8564 | .8604 | .8641 | 8673 | .8701 | .8726 | .8748 |
| 15 | 8676 | .8632 | .8662 | .8699 | .8734 | .8764 | .8790 | .8814 | 8834 |
| 16 | .8761 | .8719 | .8747 | .8782 | .8815 | .8843 | .8868 | .8890 | .8909 |
| 17 | .8836 | .8796 | .8823 | .8856 | .8886 | .8913 | .8936 | .8957 | .8975 |
| 18 | .8902 | .8865 | .8890 | .8921 | .8949 | .8975 | .8997 | .9016 | .9033 |
| 19 | .8961 | .8926 | .8949 | .8979 | .9006 | .9030 | 9051 | .9069 | .9086 |
| 20 | .9015 | .8980 | .9003 | .9031 | .9057 | .9080 | .9100 | .9117 | .9132 |
| 21 | .9063 | .9030 | .9051 | .9078 | .9103 | .9124 | .9143 | .9160 | .9175 |
| 22 | .9106 | .9075 | .9095 | .9120 | .9144 | .9165 | .9183 | .9199 | 9213 |
| 23 | .9146 | .9116 | .9135 | .9159 | .9182 | .9202 | .9219 | .9235 | .9248 |
| 24 | .9182 | 9153 | .9172 | .9195 | .9217 | .9236 | .9253 | .9267 | 9280 |
| 25 | 9216 | .9187 | .9205 | .9228 | .9249 | .9267 | .9283 | .9297 | 9309 |
| 26 | .9246 | .9219 | .9236 | .9258 | .9278 | .9296 | .9311 | .9325 | .9336 |
| 27 | .9275 | .9249 | .9265 | .9286 | .9305 | .9322 | .9337 | .9350 | .9361 |
| 28 | .9301 | .9276 | .9292 | .9312 | .9330 | .9347 | .9361 | .9374 | .9385 |
| 29 | .9326 | .9301 | .9316 | .9336 | .9354 | .9370 | .9383 | .9396 | 9406 |
| 30 | .9348 | .9325 | .9340 | .9358 | .9376 | .9391 | .9404 | .9416 | .9426 |
| 40 | .9513 | .9495 | .9506 | .9520 | .9533 | .9545 | .9555 | .9564 | .9572 |
| 50 | .9612 | .9597 | .9606 | .9617 | .9628 | .9637 | .9645 | .9652 | .9658 |
| 60 | .9677 | .9665 | .9672 | .9681 | .9690 | .9698 | .9705 | .9710 | .9716 |
| 80 | .9758 | .9749 | .9754 | .9761 | .9768 | .9774 | .9779 | .9783 | .9787 |
| 100 | .9807 | .9799 | .9804 | .9809 | .9815 | .9819 | .9823 | .9827 | .9830 |

Number of Groups ($p$)

II. Puntos porcentuales* de la distribución $t$

| $\nu$ \ $\alpha$ | .40 | .25 | .10 | .05 | .025 | .01 | .005 | .0025 | .001 | .0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 127.32 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | .289 | .816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.089 | 23.326 | 31.598 |
| 3 | .277 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.213 | 12.924 |
| 4 | .271 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | .267 | .727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | .265 | .718 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | .263 | .711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.029 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | .262 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | .261 | .703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | .260 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | .260 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | .259 | .695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | .259 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | .258 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | .258 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | .258 | .690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | .257 | .689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | .257 | .688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | .257 | .688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | .257 | .687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | .257 | .686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | .256 | .686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | .256 | .685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 | 3.485 | 3.767 |
| 24 | .256 | .685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.091 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | .256 | .684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | .256 | .684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | .256 | .684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | .256 | .683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | .256 | .683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | .256 | .683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | .255 | .681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | .254 | .679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 2.915 | 3.232 | 3.460 |
| 120 | .254 | .677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 2.860 | 3.160 | 3.373 |
| $\infty$ | .253 | .674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 2.807 | 3.090 | 3.291 |

* [illegible]

Adaptado con permiso de Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1, 3a. ed., por E. S. Pearson y H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

II. Puntos porcentuales de la distribución $t$

| $\nu$ \ $\alpha$ | .40 | .25 | .10 | .05 | .025 | .01 | .005 | .0025 | .001 | .0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | .325 | 1.000 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 127.32 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | .289 | .816 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 14.089 | 23.326 | 31.598 |
| 3 | .277 | .765 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 7.453 | 10.213 | 12.924 |
| 4 | .271 | .741 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 5.598 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | .267 | .727 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 4.773 | 5.893 | 6.869 |
| 6 | .265 | .727 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 4.317 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | .263 | .711 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.019 | 4.785 | 5.408 |
| 8 | .262 | .706 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 3.833 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | .261 | .703 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 3.690 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | .260 | .700 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 3.581 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | .260 | .697 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 3.497 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | .259 | .695 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.428 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | .259 | .694 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.372 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | .258 | .692 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.326 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | .258 | .691 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.286 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | .258 | .690 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 3.252 | 3.686 | 4.015 |
| 17 | .257 | .689 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.222 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | .257 | .688 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.197 | 3.610 | 3.922 |
| 19 | .257 | .688 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.174 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | .257 | .687 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.153 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | .257 | .686 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.135 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | .256 | .686 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.119 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | .256 | .685 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.104 | 3.485 | 3.767 |
| 24 | .256 | .685 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.091 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | .256 | .684 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.078 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | .256 | .684 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.067 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | .256 | .684 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.057 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | .256 | .683 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.047 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | .256 | .683 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.038 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | .256 | .683 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.030 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | .255 | .681 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 2.971 | 3.307 | 3.551 |
| 60 | .254 | .679 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 2.915 | 3.232 | 3.460 |
| 120 | .254 | .677 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 2.860 | 3.160 | 3.373 |
| $\infty$ | .253 | .674 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 2.807 | 3.090 | 3.291 |

[illegible]

Esta tabla se reproduce con permiso de Biometrika Tables for Statisticians, Vol. 1, [illegible] por E. S. Pearson y H. O. Hartley, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

# ANEXO C

**TABLA J. Tabla de probabilidades asociadas con valores tan pequeños como los valores observados de $U$ en la prueba de Mann-Whitney***

$n_2 = 3$

| $U$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | .250 | .100 | .050 |
| 1 | .500 | .200 | .100 |
| 2 | .750 | .400 | .200 |
| 3 | | .600 | .350 |
| 4 | | | .500 |
| 5 | | | .650 |

$n_2 = 4$

| $U$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | .200 | .067 | .028 | .014 |
| 1 | .400 | .133 | .057 | .029 |
| 2 | .600 | .267 | .114 | .057 |
| 3 | | .400 | .200 | .100 |
| 4 | | .600 | .314 | .171 |
| 5 | | | .429 | .243 |
| 6 | | | .571 | .343 |
| 7 | | | | .443 |
| 8 | | | | .557 |

$n_2 = 5$

| $U$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .167 | .047 | .018 | .008 | .004 |
| 1 | .333 | .095 | .036 | .016 | .008 |
| 2 | .500 | .190 | .071 | .032 | .016 |
| 3 | .667 | .286 | .125 | .056 | .028 |
| 4 | | .429 | .196 | .095 | .048 |
| 5 | | .571 | .286 | .143 | .075 |
| 6 | | | .393 | .206 | .111 |
| 7 | | | .500 | .278 | .155 |
| 8 | | | .607 | .365 | .210 |
| 9 | | | | .452 | .274 |
| 10 | | | | .548 | .345 |
| 11 | | | | | .421 |
| 12 | | | | | .500 |
| 13 | | | | | .579 |

$n_2 = 6$

| $U$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .143 | .036 | .012 | .005 | .002 | .001 |
| 1 | .286 | .071 | .024 | .010 | .004 | .002 |
| 2 | .428 | .143 | .048 | .019 | .009 | .004 |
| 3 | .571 | .214 | .083 | .033 | .015 | .008 |
| 4 | | .321 | .131 | .057 | .026 | .013 |
| 5 | | .429 | .190 | .086 | .041 | .021 |
| 6 | | .571 | .274 | .129 | .063 | .032 |
| 7 | | | .357 | .176 | .089 | .047 |
| 8 | | | .452 | .238 | .123 | .066 |
| 9 | | | .548 | .305 | .165 | .090 |
| 10 | | | | .381 | .214 | .120 |
| 11 | | | | .457 | .268 | .155 |
| 12 | | | | .545 | .331 | .197 |
| 13 | | | | | .396 | [illegible] |
| 14 | | | | | .465 | [illegible] |
| 15 | | | | | .535 | [illegible] |
| 16 | | | | | | [illegible] |
| 17 | | | | | | [illegible] |
| 18 | | | | | | [illegible] |

* Reproducida de Mann, H. B., y Whitney, D. R. 1947. En [illegible] una o dos variables aleatorias es estocásticamente mayor que la otra. [illegible] *Statist.*, 18, 52-54, con el amable permiso de los autores y el editor.

TABLA J. Tabla de probabilidades asociadas con valores tan pequeños como los valores observados de $U$ en la prueba de Mann-Whitney*

(*Continuación*)

$n_2 = 7$

| $U$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .125 | .028 | .008 | .003 | .001 | .001 | .000 |
| 1 | .250 | .056 | .017 | .006 | .003 | .001 | .001 |
| 2 | .375 | .111 | .033 | .012 | .005 | .002 | .001 |
| 3 | .500 | .167 | .058 | .021 | .009 | .004 | .002 |
| 4 | .625 | .250 | .092 | .036 | .015 | .007 | [illegible] |
| 5 | | .333 | .133 | .055 | .024 | .011 | [illegible] |
| 6 | | .444 | .192 | .082 | .037 | .017 | [illegible] |
| 7 | | .556 | .258 | .115 | .053 | .026 | [illegible] |
| 8 | | | .333 | .158 | .074 | .037 | [illegible] |
| 9 | | | .417 | .206 | .101 | .051 | [illegible] |
| 10 | | | .500 | .264 | .134 | .069 | [illegible] |
| 11 | | | .583 | .324 | .172 | .090 | [illegible] |
| 12 | | | | .394 | .216 | .117 | .064 |
| 13 | | | | .464 | .265 | .147 | .082 |
| 14 | | | | .538 | .319 | .183 | .104 |
| 15 | | | | | .378 | .223 | .130 |
| 16 | | | | | .438 | .267 | .159 |
| 17 | | | | | .500 | .314 | .191 |
| 18 | | | | | .562 | .365 | [illegible] |
| 19 | | | | | | .418 | [illegible] |
| 20 | | | | | | .473 | [illegible] |
| 21 | | | | | | .527 | .355 |
| 22 | | | | | | | [illegible] |
| 23 | | | | | | | [illegible] |
| 24 | | | | | | | [illegible] |
| 25 | | | | | | | [illegible] |

* Reproducida de Mann, H. B., y Whitney, D. R. 1947. En una prueba de si una o dos variables aleatorias es estocásticamente mayor que la otra. *Ann. Math. Statist.*, 18, 52-54, con el amable permiso de los autores y el editor.

**TABLA J. Tabla de probabilidades asociadas con valores tan pequeños como los valores observados de $U$ en la prueba de Mann-Whitney***

**(*Continuación*)**

$n_2 = 8$

| $U$ \ $n_1$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $z$ | Normal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | .111 | .022 | .006 | .002 | .001 | .000 | .000 | .000 | 3.[illegible] | [illegible] |
| 1 | .222 | .044 | .012 | .004 | .002 | .001 | .000 | .000 | 3.[illegible] | [illegible] |
| 2 | .333 | .089 | .024 | .008 | .003 | .001 | .001 | .000 | 3.098 | [illegible] |
| 3 | .444 | .133 | .042 | .014 | .005 | .002 | .001 | .001 | 2.993 | [illegible] |
| 4 | .556 | .200 | .067 | .024 | .009 | .004 | .002 | .001 | 2.888 | [illegible] |
| 5 | | .267 | .097 | .036 | .015 | .006 | .003 | .001 | 2.783 | [illegible] |
| 6 | | .356 | .139 | .055 | .023 | .010 | .005 | .002 | 2.678 | .004 |
| 7 | | .444 | .188 | .077 | .033 | .015 | .007 | .003 | 2.573 | .005 |
| 8 | | .556 | .248 | .107 | .047 | .021 | .010 | .005 | 2.468 | [illegible] |
| 9 | | | .315 | .141 | .064 | .030 | .014 | .007 | 2.363 | .009 |
| 10 | | | .387 | .184 | .085 | .041 | .020 | .010 | 2.258 | .012 |
| 11 | | | .461 | .230 | .111 | .054 | .027 | .014 | 2.153 | .016 |
| 12 | | | .539 | .285 | .142 | .071 | .036 | .019 | 2.048 | .020 |
| 13 | | | | .341 | .177 | .091 | .047 | .025 | 1.943 | .026 |
| 14 | | | | .404 | .217 | .114 | .060 | .032 | 1.838 | .033 |
| *15* | | | | *.467* | *.262* | *.141* | *.076* | *.041* | *1.733* | *.041* |
| 16 | | | | .533 | .311 | .172 | .095 | .052 | 1.628 | .052 |
| 17 | | | | | .362 | .207 | .116 | .065 | 1.523 | .064 |
| 18 | | | | | .416 | .245 | .140 | .080 | 1.418 | .078 |
| 19 | | | | | .472 | .286 | .168 | .097 | 1.313 | .094 |
| 20 | | | | | .528 | .331 | .198 | .117 | 1.208 | .113 |
| 21 | | | | | | .377 | .232 | .139 | 1.102 | .135 |
| 22 | | | | | | .426 | .268 | .164 | .998 | .159 |
| 23 | | | | | | .475 | .306 | .191 | .893 | .185 |
| 24 | | | | | | .525 | .347 | .221 | .788 | .215 |
| 25 | | | | | | | .389 | .253 | .683 | .247 |
| 26 | | | | | | | .433 | .287 | .578 | .282 |
| 27 | | | | | | | .478 | .323 | .473 | .318 |
| 28 | | | | | | | .522 | .360 | .368 | .356 |
| 29 | | | | | | | | .399 | .263 | .396 |
| 30 | | | | | | | | .439 | .158 | .437 |
| 31 | | | | | | | | .480 | .052 | .481 |
| 32 | | | | | | | | .520 | | |

* Reproducida de Mann, H. B., y Whitney, D. R. 1947. En una prueba de si una o dos variables aleatorias es estocásticamente mayor que la otra. *Ann. Math. Statist.*, 18, 52-54, con el amable permiso de los autores y el editor.

**TABLA K. Tabla de los valores críticos de $U$ en la prueba de Mann-Whitney***

**TABLA K$_{I}$. Valores críticos de $U$ para una prueba de una cola en $\alpha = 0.001$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.002$**

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 6 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 7 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 8 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 | 15 | 17 | 18 | 20 | 21 |
| 9 | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 |
| 10 | 8 | 10 | 12 | 14 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 32 |
| 11 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 | 27 | 29 | 32 | 34 | 37 |
| 12 | 12 | 14 | 17 | 20 | 23 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 40 | 42 |
| 13 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 42 | 45 | 48 |
| 14 | 15 | 19 | 22 | 25 | 29 | 32 | 36 | 39 | 43 | 46 | 50 | 54 |
| 15 | 17 | 21 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 |
| 16 | 19 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 48 | 52 | 56 | 60 | 65 |
| 17 | 21 | 25 | 29 | 34 | 38 | 43 | 47 | 52 | 57 | 61 | 66 | 70 |
| 18 | 23 | 27 | 32 | 37 | 42 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 |
| 19 | 25 | 29 | 34 | 40 | 45 | 50 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | 82 |
| 20 | 26 | 32 | 37 | 42 | 48 | 54 | 59 | 65 | 70 | 76 | 82 | 88 |

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

**TABLA K. Tabla de los valores críticos de $U$ en la prueba de Mann-Whitney* (*Continuación*)**

**TABLA K$_{II}$. Valores críticos de $U$ para una prueba de una cola en $\alpha = 0.01$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.02$**

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 4 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 |
| 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 24 | 26 | 28 |
| 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 9 | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 38 | 40 |
| 10 | 16 | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 38 | 41 | 44 | 47 |
| 11 | 18 | 22 | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 47 | 50 | 53 |
| 12 | 21 | 24 | 28 | 31 | 35 | 38 | 42 | 46 | 49 | 53 | 56 | 60 |
| 13 | 23 | 27 | 31 | 35 | 39 | 43 | 47 | 51 | 55 | 59 | 63 | 67 |
| 14 | 26 | 30 | 34 | 38 | 43 | 47 | 51 | 56 | 60 | 65 | 69 | 73 |
| 15 | 28 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 66 | 70 | 75 | 80 |
| 16 | 31 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 76 | 82 | 87 |
| 17 | 33 | 38 | 44 | 49 | 55 | 60 | 66 | 71 | 77 | 82 | 88 | 93 |
| 18 | 36 | 41 | 47 | 53 | 59 | 65 | 70 | 76 | 82 | 88 | 94 | 100 |
| 19 | 38 | 44 | 50 | 56 | 63 | 69 | 75 | 82 | 88 | 94 | 101 | 107 |
| 20 | 40 | 47 | 53 | 60 | 67 | 73 | 80 | 87 | 93 | 100 | 107 | 114 |

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University,* **1**, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

TABLA K. **Tabla de los valores críticos de $U$ en la prueba de Mann-Whitney*** **(*Continuación*)**

TABLA $K_{III}$. **Valores críticos de $U$ para una prueba de una cola en $\alpha = 0.025$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.05$**

| $n_1$ \ $n_2$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 |
| 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 6 | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 |
| 7 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 |
| 8 | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 38 | 41 |
| 9 | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 45 | 48 |
| 10 | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 52 | 55 |
| 11 | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 12 | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 |
| 13 | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 59 | 63 | 67 | 72 | 76 |
| 14 | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 | 64 | 67 | 74 | 78 | 83 |
| 15 | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 |
| 16 | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 92 | 98 |
| 17 | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 | 81 | 87 | 93 | 99 | 105 |
| 18 | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 |
| 19 | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 | 92 | 99 | 106 | 113 | 119 |
| 20 | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 119 | 127 |

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University*, 1, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

**TABLA K. Tabla de los valores críticos de $U$ en la prueba de Mann-Whitney***
***(Continuación)***

**TABLA $K_{IV}$. Valores críticos de $U$ para una prueba de una cola en $\alpha = 0.05$ o para una prueba de dos colas en $\alpha = 0.10$**

| $n_2$ \ $n_1$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | 0 | [illegible] |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | [illegible] |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 9 | 10 | [illegible] |
| 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | [illegible] |
| 5 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 | 19 | 20 | 22 | 23 | 25 |
| 6 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 26 | 28 | 30 | 32 |
| 7 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 39 |
| 8 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 | 36 | 39 | 41 | 44 | [illegible] |
| 9 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 51 | 54 |
| 10 | 24 | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 | 48 | 51 | 55 | 58 | 62 |
| 11 | 27 | 31 | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 | 54 | 57 | 61 | 65 | [illegible] |
| 12 | 30 | 34 | 38 | 42 | 47 | 51 | 55 | 60 | 64 | 68 | 72 | 77 |
| 13 | 33 | 37 | 42 | 47 | 51 | 56 | 61 | 65 | 70 | 75 | 80 | 84 |
| 14 | 36 | 41 | 46 | 51 | 56 | 61 | 66 | 71 | 77 | 82 | 87 | 92 |
| 15 | 39 | 44 | 50 | 55 | 61 | 66 | 72 | 77 | 83 | 88 | 94 | 100 |
| 16 | 42 | 48 | 54 | 60 | 65 | 71 | 77 | 83 | 89 | 95 | 101 | 107 |
| 17 | 45 | 51 | 57 | 64 | 70 | 77 | 83 | 89 | 96 | 102 | 109 | 115 |
| 18 | 48 | 55 | 61 | 68 | 75 | 82 | 88 | 95 | 102 | 109 | 116 | 123 |
| 19 | 51 | 58 | 65 | 72 | 80 | 87 | 94 | 101 | 109 | 116 | 123 | 130 |
| 20 | 54 | 62 | 69 | 77 | 84 | 92 | 100 | 107 | 115 | 123 | 130 | 138 |

* Tomada abreviadamente de las tablas 1, 3, 5 y 7 de Auble, D. 1953. Tablas extendidas para la estadística de Mann-Whitney. *Bulletin of the Institute of Educational Research at Indiana University,* 1, núm. 2, con el amable permiso del autor y el editor.

TABLA O. Tabla de probabilidades asociadas con valores tan grandes como valores observados de $H$ en el análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis*

| Tamaño de muestras $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1 | 2.7000 | .500 |
| 2 | 2 | 1 | 3.6000 | .200 |
| 2 | 2 | 2 | 4.5714 | .067 |
| | | | 3.7143 | .200 |
| 3 | 1 | 1 | 3.2000 | .300 |
| 3 | 2 | 1 | 4.2857 | .100 |
| | | | 3.8571 | .133 |
| 3 | 2 | 2 | 5.3572 | .029 |
| | | | 4.7143 | .048 |
| | | | 4.5000 | .067 |
| | | | 4.4643 | .105 |
| 3 | 3 | 1 | 5.1429 | .043 |
| | | | 4.5714 | .100 |
| | | | 4.0000 | .129 |
| 3 | 3 | 2 | 6.2500 | .011 |
| | | | 5.3611 | .032 |
| | | | 5.1389 | .061 |
| | | | 4.5556 | .100 |
| | | | 4.2500 | .121 |
| 3 | 3 | 3 | 7.2000 | .004 |
| | | | 6.4889 | .011 |
| | | | 5.6889 | .029 |
| | | | 5.6000 | .050 |
| | | | 5.0667 | .086 |
| | | | 4.6222 | .100 |
| 4 | 1 | 1 | 3.5714 | .200 |
| 4 | 2 | 1 | 4.8214 | .057 |
| | | | 4.5000 | .076 |
| | | | 4.0179 | .114 |
| 4 | 2 | 2 | 6.0000 | .014 |
| | | | 5.3333 | .033 |
| | | | 5.1250 | .052 |
| | | | 4.4583 | .100 |
| | | | 4.1667 | .105 |
| 4 | 3 | 1 | 5.8333 | .021 |
| | | | 5.2083 | .050 |
| | | | 5.0000 | .057 |
| | | | 4.0556 | .093 |
| | | | 3.8889 | .129 |
| 4 | 3 | 2 | 6.4444 | .008 |
| | | | 6.3000 | .011 |
| | | | 5.4444 | .046 |
| | | | 5.4000 | .051 |
| | | | 4.5111 | .098 |
| | | | 4.4444 | .102 |
| 4 | 3 | 3 | 6.7455 | .010 |
| | | | 6.7091 | .013 |
| | | | 5.7909 | .046 |
| | | | 5.7273 | .050 |
| | | | 4.7091 | .092 |
| | | | 4.7000 | .101 |
| 4 | 4 | 1 | 6.6667 | .010 |
| | | | 6.1667 | .022 |
| | | | 4.9667 | .048 |
| | | | 4.8667 | .054 |
| | | | 4.1667 | .082 |
| | | | 4.0667 | .102 |
| 4 | 4 | 2 | 7.0364 | .006 |
| | | | 6.8727 | .011 |
| | | | 5.4545 | .046 |
| | | | 5.2364 | .052 |
| | | | 4.5545 | .098 |
| | | | 4.4455 | .103 |
| 4 | 4 | 3 | 7.1439 | .010 |
| | | | 7.1364 | .011 |
| | | | 5.5985 | .049 |
| | | | 5.5758 | .051 |
| | | | 4.5455 | .099 |
| | | | 4.4773 | .102 |
| 4 | 4 | 4 | 7.6538 | .008 |
| | | | 7.5385 | .011 |
| | | | 5.6923 | .049 |
| | | | 5.6538 | .054 |
| | | | 4.6539 | .097 |
| | | | 4.5001 | .104 |
| 5 | 1 | 1 | 3.8571 | .143 |
| 5 | 2 | 1 | 5.2500 | .036 |
| | | | 5.0000 | .048 |
| | | | 4.4500 | .071 |
| | | | 4.2000 | .095 |
| | | | 4.0500 | .119 |

**TABLA O. Tabla de probabilidades asociadas con valores tan grandes como los valores observados de *H* en el análisis de varianza de una clasificación por rangos de Kruskal-Wallis***
**(*Continuación*)**

| Tamaño de muestras | | | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | | |
| 5 | 2 | 2 | 6.5333 | .008 |
| | | | 6.1333 | .013 |
| | | | 5.1600 | .034 |
| | | | 5.0400 | .056 |
| | | | 4.3733 | .090 |
| | | | 4.2933 | .122 |
| 5 | 3 | 1 | 6.4000 | .012 |
| | | | 4.9600 | .048 |
| | | | 4.8711 | .052 |
| | | | 4.0178 | .095 |
| | | | 3.8400 | .123 |
| 5 | 3 | 2 | 6.9091 | .009 |
| | | | 6.8218 | .010 |
| | | | 5.2509 | .049 |
| | | | 5.1055 | .052 |
| | | | 4.6509 | .091 |
| | | | 4.4945 | .101 |
| 5 | 3 | 3 | 7.0788 | .009 |
| | | | 6.9818 | .011 |
| | | | 5.6485 | .049 |
| | | | 5.5152 | .051 |
| | | | 4.5333 | .097 |
| | | | 4.4121 | .109 |
| 5 | 4 | 1 | 6.9545 | .008 |
| | | | 6.8400 | .011 |
| | | | 4.9855 | .044 |
| | | | 4.8600 | .056 |
| | | | 3.9873 | .098 |
| | | | 3.9600 | .102 |
| 5 | 4 | 2 | 7.2045 | .009 |
| | | | 7.1182 | .010 |
| | | | 5.2727 | .049 |
| | | | 5.2682 | .050 |
| | | | 4.5409 | .098 |
| | | | 4.5182 | .101 |
| 5 | 4 | 3 | 7.4449 | .010 |
| | | | 7.3949 | .011 |
| | | | 5.6564 | .049 |

| Tamaño de muestras | | | $H$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | | |
| | | | 5.6308 | [illegible] |
| | | | 4.5487 | [illegible] |
| | | | 4.5231 | [illegible] |
| 5 | 4 | 4 | 7.7604 | [illegible] |
| | | | 7.7440 | [illegible] |
| | | | 5.6571 | [illegible] |
| | | | 5.6176 | [illegible] |
| | | | 4.6187 | [illegible] |
| | | | 4.5527 | [illegible] |
| 5 | 5 | 1 | 7.3091 | [illegible] |
| | | | 6.8364 | .011 |
| | | | 5.1273 | .046 |
| | | | 4.9091 | .053 |
| | | | 4.1091 | .086 |
| | | | 4.0364 | .105 |
| 5 | 5 | 2 | 7.3385 | .010 |
| | | | 7.2692 | .010 |
| | | | 5.3385 | .047 |
| | | | 5.2462 | .051 |
| | | | 4.6231 | .097 |
| | | | 4.5077 | .100 |
| 5 | 5 | 3 | 7.5780 | .010 |
| | | | 7.5429 | .010 |
| | | | 5.7055 | .046 |
| | | | 5.6264 | .051 |
| | | | 4.5451 | .100 |
| | | | 4.5363 | .102 |
| 5 | 5 | 4 | 7.8229 | .010 |
| | | | 7.7914 | .010 |
| | | | 5.6657 | .049 |
| | | | 5.6429 | .050 |
| | | | 4.5229 | .099 |
| | | | 4.5200 | .101 |
| 5 | 5 | 5 | 8.0000 | [illegible] |
| | | | 7.9800 | [illegible] |
| | | | 5.7800 | [illegible] |
| | | | 5.6600 | [illegible] |
| | | | 4.5600 | [illegible] |
| | | | 4.5000 | [illegible] |

* Versión abreviada de Kruskal, W. H., y Wallis, W. A. [illegible] rangos en el análisis de varianza de un criterio. *J. Amer. Statist.* [illegible] Con el amable permiso de los autores y editores. (Las [illegible] dadas por los autores en Errata, *J. Amer. Statist. Ass.*, 48, [illegible]

# ANEXO D

**Combinación lineal y contraste**

Una combinación lineal de medias se expresa de la siguiente forma:

$$L = l_1\mu_l + l_2\mu_2 + .... + l_a\mu_a$$

El valor de las $l_i$ son constantes arbitrarias, si $\sum_{i=1}^{a} l_i = 0$ la combinación lineal se conoce como contraste de las medias.

Podemos expresarlo de la siguiente forma vectorial.

$$L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \ldots & l_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_a \end{bmatrix}$$

Si se cumple $l_1 l_1' + l_2 l_2' + .... + l_a l_a' = 0$ los contrastes son ortogonales.

# BIBLIOGRAFÍA

DeGroot, Morris H. "Probabilidad y estadísitica"
Addison-Wesley Iberoamericana
1988

Conover, W. J.
"Practical nonparametric statistic"
Segunga edición
New York : J. Wiley, 1980

Méndez Ramírez, Ignacio. "Modelos estadísticos lineales"
Foccavi/conacyt
Primera edición
México, D.F. 1976

Méndez Ramírez, Ignacio, Nahira Guerrero, Delia. "Protocolo de la investigación: Lineamientos para su elaboración y análisis"
Editorial Trillas
México, D.F. 1990

Méndez Ramírez, Ignacio. "Valoración estadística en la investigación"
Monografía, IIMAS, UNAM
México, D.F. 1994

Méndez Ramírez, Ignacio. "Metodología de investigación en contaminación"
Monografía, IIMAS,

Montgomery, Douglas C. "Diseño y análisis de experimentos"
Grupo editorial Iberoamérica
1991

Neter ,John. "Applied linear statistical models:Regression, analysis of variance and experimental designs"
Jomewood, Illinois
R.D. Irwin, c 1990

Pardo, Antonio/ San Martín, Rafael. "Análisis de datos en Psicología II"
Madrid: Pirámide, 1994

Sahai, Hardeo. "The analysis of variance, fixed, random and mixed models"
2000 Birkhauser Boston.

Siegel,Sidney. "Estadística no paramétrica"
Editorial Trillas 1985

Searle, Shayle R. "Matrix algebra forthe biological sciencies"
New York, 1966

Searle, Shayle R. "Linear models"
New York, 1971

John D. Emerson, Middlebury College, Hoagli, David C., Harvad University and A bt Associates Inc. "Understanding robust and exploratory data analysis"
New York, John Wiley & Sons, 1985.
*Chapter 1, Steam-and-Leaf Displays, page 7-32*

John D. Emerson, Middlebury College, Strenio, Judith, Westat Inc "Understanding robust and exploratory data analysis" .
New York, John Wiley & Sons, 1985.
*.Chapter 3, Boxplot and Batch Comparison, page 58-63*