

45



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**CAOS, SINCRONIZACIÓN Y TRANSPORTE
EN POTENCIALES PERIÓDICOS**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
FÍSICO**

**PRESENTA:
ÁNGEL BERNARDO PAZ GARCÍA**



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ LUIS MATEOS TRIGOS**

2002



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
 SISTEMA II
 ASESOR

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
 Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
 Facultad de Ciencias
 Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
 "Caos, Sincronización y Transporte en Potenciales Periódicos"

realizado por PAZ GARCIA ANGEL BERNARDO

con número de cuenta 8609145-2 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. JOSE LUIS MATEOS TRIGOS

Propietario

DR. CHRISTOPHER STEPHENS STEVENS

Propietario

DR. CHUMIN WANG CHEN

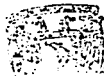
Suplente

DR. VICTOR MANUEL ROMERO ROCHIN

Suplente

DR. PABLO PADILLA LONGORIA

Consejo Departamental de Física



Patricia Goldstein Menache
 DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE
 Coordinadora de Licenciatura

FACULTAD DE CIENCIAS
 DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A Dios,
a la virgen María,
a mis padres,
a Fray Arturo Bustamante
y al beato Josemaría Escrivá de Balaguer

Particular agradecimiento al Dr. José Luis Mateos,
quien fue el que seleccionó el tema,
y del que obtuve todo el apoyo
y paciencia para realizar esta tesis.

Índice

<u>Introducción</u>	4
<u>Capítulo 1 Osciladores paramétricos Lineales</u>	
1.1 Osciladores lineales sin fricción.....	8
1.2 Osciladores lineales con fricción.....	14
1.3 Osciladores paramétricos lineales	16
1.3.1 Algunos ejemplos en física.....	17
1.3.2 La ecuación de Mathieu sin fricción.....	18
1.3.3 La ecuación de Mathieu con fricción.....	21
<u>Capítulo 2 Osciladores No lineales</u>	
2.1 El péndulo como un oscilador no lineal sin fricción.....	25
2.2 El péndulo como un oscilador no lineal con fricción.....	27
2.3 El péndulo paramétrico no lineal con fricción.....	29
<u>Capítulo 3 Dinámica no lineal</u>	
3.1 Estabilidad.....	32
3.2 Bifurcaciones.....	35
3.3 Enganche de Fases o "phase locking".....	43
3.4 Exponente de Lyapunov.....	44
<u>Capítulo 4 Potenciales Oscilantes</u>	
4.1 El oscilador no lineal forzado y con fricción.....	46
4.2 El "Rocking Ratchet" de Mateos.....	50
4.2 Otros Potenciales.....	55
<u>Capítulo 5 Potenciales Intermitentes (Flashing Ratchets)</u>	
5.1 Precisiones generales.....	62
5.2 Desarrollo de la velocidad promedio.....	64
5.3 Experimentos numéricos.....	68
<u>Conclusiones</u>	90
<u>Referencias</u>	92

Introducción

Introducción

Este trabajo está basado en estudios anteriores sobre motores Brownianos motivados por las ideas de Feynman [1], Hänggi [2], Bier [3], y del transporte caótico de José Luis Mateos [5,6].

En el trabajo de Feynman, en sus célebres libros de Física *The Feynman Lectures on Physics*, particularmente en el Volumen 1, Capítulo § 46, titulado "Ratchet and pawl", escritos en 1963, Feynman analiza el movimiento browniano con un ingenioso sistema mecánico tendiente, al menos a primera vista, a violar la segunda ley de la termodinámica. (Fig. I.1). El dispositivo tiene una rueda dentada -que en inglés llaman "ratchet"- aislada a una temperatura T_2 , pero unida a unas aspas a través de un eje en otro recipiente a una temperatura T_1 . La rueda dentada tiene un trinquete que evita que la rueda gire en uno de los sentidos, pero permite el movimiento en el otro sentido.

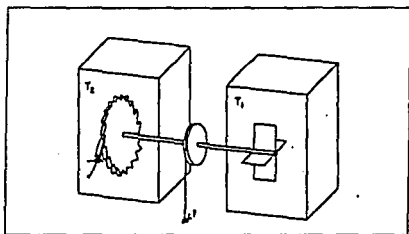


Fig. I.1. Sistema mecánico de Feynman. Tomado de [1].

El argumento de Feynman es que las pequeñas fluctuaciones en la temperatura podrían hacer que las aspas se muevan, y lograr así hacer que la rueda dentada gire en el sentido que el trinquete le permite. Feynman analiza el dispositivo colocándole un peso ligero atado al eje para ver si éste puede ser levantado por el movimiento resultante de las fluctuaciones térmicas, y obtener así trabajo de esas fluctuaciones térmicas.

La conclusión a la que llega Feynman es que el dispositivo no puede por sí sólo generar trabajo cuando $T_1 = T_2$. La razón es que cuando cierta energía infinitesimal suficientemente grande como para levantar el trinquete se le cede al trinquete, entonces la rueda dentada se libera del trinquete y logra girar en sentido contrario, perdiendo así todo el avance ganado por las aspas de hacer girar la rueda. En síntesis: el trabajo promedio es cero, y por lo tanto no se puede obtener trabajo de las fluctuaciones térmicas.

Pero cuando $T_1 \neq T_2$, ya sea que $T_1 > T_2$ o que $T_2 > T_1$, el sistema sí puede generar trabajo. La razón que encuentra Feynman es que la energía infinitesimal que cede el sistema en cualquiera de las cajas ya sea a las aspas o al trinquete, será siempre mayor que la energía que se cede en la otra caja; haciendo así que el trabajo neto será diferente de cero.

Estudios posteriores se fueron desarrollando a principios de los años noventa para explicar el movimiento de las proteínas motoras [9,10]; otros trabajos más se hicieron tomando en cuenta el ruido (fluctuaciones térmicas) considerando la ecuación de Langevin de la forma:

$$\dot{x} = V'(x) + \xi(t) + F(t)$$

para generar trabajo [4] y [40], donde x es la posición de la partícula, $\xi(t)$ son las fluctuaciones térmicas, $F(t)$ es una fuerza externa y $V(x)$ es un potencial periódico.

Pero en 1996 Jung, Kissner y Hänggi [11], y Mateos [5,6] en el 2000 estudian ratchets caóticos sin ruido.

También en 1996, Hänggi y Bartussek [2] clasifican a los potenciales de los que podrían obtener una corriente, para una partícula que se encuentre en la presencia de ese potencial, en dos clases:

Una primera clase son los "Flashing Ratchets" o potenciales intermitentes, podríamos ponerle en español. Estos consisten en un potencial forzado en su amplitud, de manera que la amplitud aumenta y disminuye de forma periódica.

De esta primera clase hago, a lo largo de esta tesis, un estudio.

Otra clase son los potenciales asimétricos en donde las partículas están sujetas solamente a fuerzas espacialmente de promedio cero. A esta clase pertenecen los potenciales oscilantes, en los cuales las partículas experimentan la acción de fuerzas determinísticas en el espacio y dependientes del tiempo.

De esta segunda clase, Mateos ha realizado un trabajo [5-8], en cuyos resultados se apoya la presente tesis. De hecho otros investigadores han encontrado explicaciones a fenómenos en Biología, usando los "Ratchets" como Martin Bier [3], y se están descubriendo también aplicaciones interesantes a la Mecánica Cuántica como lo han hecho notar Linke *et al.* [20] y Reimann, Grifoni y Hänggi [18].

La base esencial de este tipo de sistemas para producir una corriente, (esto es: el desplazamiento de una partícula en una dirección preferencial) radica en la búsqueda de las resonancias y las bifurcaciones entre órbitas periódicas y caóticas del sistema. Esto es, descubrir aquellos valores de los parámetros que afectan al sistema y que pueden hacer que la partícula pase de un régimen caótico a uno no caótico.

En la presente tesis, trabajo con los llamados potenciales intermitentes, y realizo primero el análisis de las condiciones que pueden dar lugar a resonancias y caos y, en segundo lugar, analizo el comportamiento del sistema dinámico para condiciones iniciales y valores de los parámetros muy específicos.

En el Capítulo 1 hablaré de los osciladores paramétricos lineales, los casos lineales con y sin fricción, y el caso paramétrico. En el Capítulo 2 analizaré los osciladores paramétricos no lineales. En el Capítulo 3 haré un breve resumen de las herramientas que se emplean en la dinámica caótica, como son el diagrama de bifurcaciones y el espacio fase. En el Capítulo 4 un resumen de los potenciales oscilantes es hecho, y en el Capítulo 5 desarrollaré la parte medular de esta tesis; un breve estudio con potenciales intermitentes, usando las herramientas de la dinámica caótica.

Finalmente en las conclusiones daré una explicación a lo observado.

En todos los casos utilicé métodos numéricos para obtener las trayectorias, diagramas de bifurcaciones, espacios fase, etc. con el método de Runge-Kutta de 4º orden, y con la ayuda de computadoras y estaciones de trabajo, y las del laboratorio de cómputo del departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física de la UNAM.

Capitulo I

Capítulo I

Osciladores lineales

En este capítulo hablaré de dos tipos de osciladores:

- Los osciladores lineales y
- Los osciladores paramétricos lineales

Para ambos casos analizo las situaciones con y sin fricción. El estudio de ellos lo realizo debido a sus similitudes con los potenciales intermitentes en su forma analítica, lo cual llevará a un mejor entendimiento de ellos.

1.1 Osciladores lineales sin fricción. (El oscilador armónico)

Comenzaré este capítulo analizando, como lo hacen la mayoría de los libros de texto, el péndulo simple sin fricción. Desarrollaré después algunas de las ideas que están detrás de la teoría de los sistemas dinámicos, ilustrándolas con algunos ejemplos que involucran el péndulo. Uso estos modelos físicos simples no para estudiarlos en detalle, sino para ver si puedo aprender algo de ellos que me pueda ayudar a interpretar los problemas más complicados que se exponen en esta tesis.

Consideremos el péndulo simple sin fricción de la figura 1.1, que consiste en un alambre delgado, pero rígido de longitud l con una masa m , suspendida del punto O y bajo la acción de la aceleración de la gravedad g .

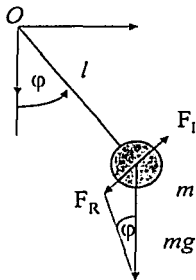


Fig. 1.1 Péndulo simple sin fricción.

De acuerdo a la ley de Newton, la fuerza inercial F_I (i.e. m veces la aceleración) debe ser igual a la fuerza aplicada. En nuestro caso, la fuerza aplicada es la fuerza de restitución F_R producida por la aceleración de la gravedad. De la geometría del problema es claro que

$$F_R = -mg \operatorname{sen}\varphi \quad (1.1)$$

Nótese que el signo negativo es debido por el hecho de que la fuerza de restitución F_R obliga al péndulo a traerlo de vuelta al punto de equilibrio.

Ahora, expreso la fuerza inercial F_I en términos de el ángulo φ . Suponiendo un péndulo rígido (i.e.: su longitud l es fija), la masa puede moverse solamente en un círculo de radio $l\varphi$. La posición (i.e., la coordenada espacial) a lo largo del círculo está dada por $l\varphi$. Nótese que el ángulo φ está medido en radianes (i.e.: 180° corresponde a π). La aceleración está dada por $l d^2\varphi/dt^2$. Luego, de la ley de Newton, tenemos:

$$ml \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}(\varphi) \quad (1.2)$$

Dividiendo por ml toda la ecuación, y pasando todo del lado izquierdo de la ecuación, llego a la ecuación del péndulo sin fricción y sin forzamiento:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \operatorname{sen}\varphi = 0, \quad (1.3)$$

donde

$$\omega_0 = \left(\frac{g}{l}\right)^{1/2} \quad (1.4)$$

La ecuación de movimiento (1.3) es una ecuación diferencial de segundo orden. Para poder obtener una única solución, se necesitan los valores de el ángulo y la velocidad angular a un tiempo específico. Ambas variables definen de manera única el estado del péndulo sin forzamiento. La ecuación es no lineal debido al segundo término que depende no linealmente del ángulo φ .

Es posible obtener soluciones explícitas en términos de integrales elípticas. Sin embargo, esas no son inmediatas, por lo que, para progresar en el estudio del péndulo, lo que usualmente se hace es linearizar la ecuación.

Tomando de la serie de Taylor para el $\operatorname{sen}\varphi$ el primer término, lo cual es válido para ángulos muy pequeños, $\operatorname{sen}\varphi = \varphi + O(\varphi^3)$, la ecuación (1.3) se convierte en

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (1.5)$$

Esta ecuación del péndulo sin fricción y sin forzamiento suele ser llamada oscilador armónico. Muchos de los osciladores y de las oscilaciones en física son modeladas con esta ecuación, al menos en primera aproximación, debido a que puede ser resuelta analíticamente. Es una ecuación lineal con coeficientes constantes. Tal ecuación puede ser resuelta fácilmente suponiendo $\varphi = \exp(\lambda t)$, donde λ es una constante que debe ser calculada. Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$, son $\lambda = \pm i\omega_0$. Tenemos por lo tanto dos soluciones. Debido a que la ecuación es lineal, se obtienen nuevas soluciones multiplicando una solución conocida por un factor arbitrario o sumando una solución a la otra. Este principio de superposición de las ecuaciones diferenciales lineales es muy importante. Dice que cualquier solución puede ser construida con sólo unos cuantos tipos de soluciones fundamentales. Las soluciones $\exp(-i\omega_0 t)$ y $\exp(+i\omega_0 t)$ son un conjunto de dos soluciones fundamentales independientes del oscilador armónico. Aquí si vale el principio de superposición de las soluciones, por lo que la solución general de (1.5) es:

$$\varphi(t) = C \exp(i\omega_0 t) + C^* \exp(-i\omega_0 t) \quad (1.6)$$

donde C es un número complejo y C^* es el complejo conjugado de ese mismo número. Debido al principio de superposición, el conjunto de soluciones fundamentales puede ser arbitrario, excepto porque una solución fundamental tiene que ser independiente de las otras. Esto es, cada solución fundamental no puede ser escrita como suma proporcional de las otras soluciones fundamentales. En lugar de las funciones exponenciales complejas, se suele escoger $\sin(\omega_0 t) = (\exp(i\omega_0 t) - \exp(-i\omega_0 t))/2i$ y $\cos(\omega_0 t) = (\exp(i\omega_0 t) + \exp(-i\omega_0 t))/2$ como otro conjunto de soluciones fundamentales. Así,

$$\varphi(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (1.7)$$

es también una solución general. Las constantes A y B pueden ser expresadas en términos de C y viceversa.

Usando las propiedades de las funciones trigonométricas, la solución general puede también ser expresada en una forma física más relevante como:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \sin(\omega_0 t - \psi) \quad (1.8)$$

donde φ_{\max} y ψ son la amplitud y la fase de oscilación, respectivamente. Ellas pueden ser expresadas otra vez en términos de las constantes de integración de 1.6 o 1.7. Nótese que esas constantes de integración están determinadas por las condiciones iniciales $\varphi(0)$ y $d\varphi/dt|_0$. El periodo de oscilación es $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Estas tres cantidades son independientes unas de otras.

Para obtener la representación en el espacio fase del péndulo simple sin fricción, modelado con la ecuación (1.5), se puede proceder como sigue:

La ecuación (1.5) determina la orientación de la tangente a la trayectoria en el espacio fase. Así que, en principio, por extrapolaciones sucesivas puedo construir las trayectorias del espacio fase. Dadas una velocidad y posición iniciales ($\varphi(t_0)$, $\dot{\varphi}(t_0)$) en el tiempo $t = t_0$,

desearía encontrar un punto nuevo $(\varphi(t_0+dt), \dot{\varphi}(t_0+dt))$ a un tiempo dt posterior. Para la ecuación lineal del péndulo (1.5), la construcción puede ser llevada a cabo explícitamente si sustituimos $x = \varphi$ y $y = \dot{\varphi}$ en (1.5), y de paso tenemos la relación $\dot{x} = y$. De (1.5) obtengo:

$$\dot{y} = -\omega^2 x \quad (1.9)$$

La posición de equilibrio es entonces $(x, y) = (0, 0)$. Como el tiempo no aparece explícitamente en el espacio fase, lo elimino y las curvas que resultan son las soluciones de

$$\frac{\dot{y}}{x} = \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y} \quad (1.10)$$

la cual es separable y puede ser resuelta directamente para dar:

$$y^2 + \omega^2 x^2 = C \quad (1.11)$$

donde C es la constante de integración. Esta es la ecuación de una elipse, por lo tanto, la representación en el espacio fase consistirá de una serie de elipses centradas en el origen, como se muestra en la figura:

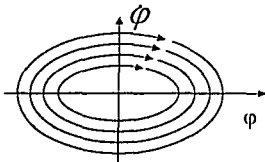


Fig. 1.2 Espacio fase para el péndulo linealizado con ángulos muy pequeños y sin fricción.

El origen es un punto de equilibrio estable o solución de punto fijo, en el que las trayectorias con condiciones iniciales en su vecindad permanecerán cercanas a él todo el tiempo. Cada una de las elipses corresponden a una órbita con una amplitud diferente, pero con la misma frecuencia, y las flechas indican la dirección de evolución en el tiempo.

El potencial que produciría a un oscilador armónico, puede verse que es parabólico, usando el hecho de que $F = -\nabla U$ obtenemos,

$$U(l\varphi) = - \int F l d\varphi = - \int (-mg\varphi) l d\varphi = \frac{mgl}{2} \varphi^2 \quad (1.12)$$

donde la constante de integración se ha tomado cero como origen del marco de referencia del potencial, y se ha supuesto que la longitud y la masa no dependen de φ .

Este potencial es claramente parabólico, y describe a una partícula en un mínimo, del que no puede escapar.

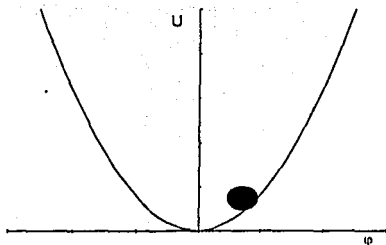


Fig. 1.3 Potencial para el péndulo linealizado con ángulos muy pequeños y sin fricción.

Esta forma de obtener el espacio fase puede ahora aplicarla a la ecuación no linealizada (1.3). Ahora la ecuación se vuelve

$$\frac{1}{2}y^2 - \omega^2 \cos x = C \quad (1.13)$$

La representación en el espacio fase la esbozo en la figura 1.4 y otra vez consiste de curvas simples cerradas; la naturaleza cualitativa del movimiento es inmediatamente visible.

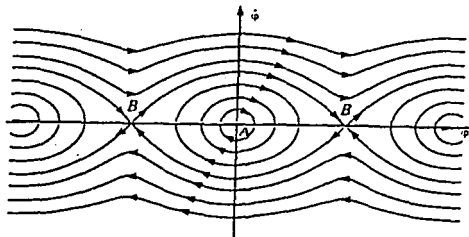


Fig. 1.4 Espacio fase para el péndulo no linealizado sin fricción.

En la región central alrededor del punto A, el cual corresponde al movimiento de lado a lado del péndulo, las trayectorias son elipses. Adicionalmente, las trayectorias fuera de las elipses corresponden al péndulo girando en movimiento rotacional en una dirección en la parte superior del diagrama, y en la otra dirección en la parte inferior. La frontera entre esos dos diferentes tipos de movimientos se le llama separatriz. Hay dos puntos A y B marcados en la figura. A es el origen y es localmente estable. Esto significa que si al sistema se le da un pequeño empujón fuera de este punto de equilibrio, continuará oscilando cerca de este punto. Sin embargo, si el péndulo se suelta desde el punto B, y se le perturba ligeramente, entonces se comportará de manera diferente, es decir, se pondrá a oscilar en movimiento rotacional, o se pondrá a oscilar de lado a lado con amplitudes muy largas. Por lo tanto, B es llamado un punto inestable de equilibrio, y corresponde al péndulo exactamente invertido. En esta situación, la energía disponible en el sistema es exactamente la que se

requiere para poder tener al péndulo invertido. Entonces, el péndulo tardará un tiempo infinito en alcanzar éste punto, y llegará por lo tanto, asintóticamente. A las trayectorias que pasan por tales puntos se llaman ciclos heteroclinicos.

Finalmente diremos que este espacio fase es producido por un potencial cosenoidal como se puede ver haciendo

$$U(l\varphi) = - \int F l d\varphi = - \int (-mg \operatorname{sen}\varphi) l d\varphi = -mgl \cos\varphi + C \quad (1.14)$$

donde la constante C se puede elegir como +1 para que el potencial quede arriba del eje de las φ . La figura siguiente muestra dicho potencial:

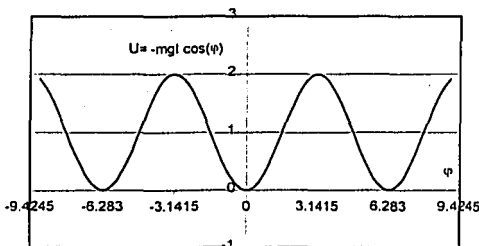


Fig. 1.5 Potencial para el péndulo no linealizado. Se ha tomado la constante de integración como +1 para que el potencial quede sobre el eje de las φ

1.2 Osciladores lineales con fricción.

Hasta ahora sólo he hecho una aproximación al péndulo físico real al no considerar la fricción. Sin embargo, en cualquier experimento físico, inevitablemente siempre aparecerá algo de fricción en el sistema. Modelaré ésta añadiendo un término, el cual es proporcional a la velocidad. No obstante, seguiré ignorando la fricción que pueda suscitarse por la presencia del aire. Con todo, se encuentra en la práctica que ésta es una buena aproximación. Comenzaré una vez más, considerando el caso para ángulos pequeños. Por lo tanto, la ecuación (1.5), se convierte en:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (1.15)$$

Una vez más, hago la suposición $\varphi = \exp(\lambda t)$. Uno obtiene un polinomio característico: $\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$, el cual tiene las soluciones

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2\right)^{1/2} \quad (1.16)$$

Se obtienen entonces tres casos, dependiendo de si $\gamma^2/4$ es menor, igual, o mayor que ω_0^2 :

El caso **subamortiguado** cuando $\gamma/2 < \omega_0$

Los valores propios $\lambda_{1,2}$ son ambas complejas y una es el conjugado de la otra. La parte imaginaria $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$ es entonces la frecuencia de una oscilación amortiguada. La parte real determina la tasa de decaimiento. La solución general es entonces:

$$\varphi(t) = \varphi_{\max} \exp(-\gamma t/2) \operatorname{sen}(\omega t + \psi) \quad (1.17)$$

La amplitud del decaimiento exponencial es también llamada la envolvente.

El caso **críticamente amortiguado** cuando $\gamma/2 = \omega_0$

Ambos valores propios son iguales. En este caso degenerado, la suposición $\varphi = \exp(\lambda t)$ no es suficiente porque nos lleva a una solución y se necesitan dos soluciones porque el sistema es fundamental. Para obtener otra solución usamos ahora $\varphi = t \exp(\lambda t)$. Así, la solución se ve entonces:

$$\varphi(t) = (At + B) \exp(-\gamma t/2) \quad (1.18)$$

El caso **sobreamortiguado** cuando $\gamma/2 > \omega_0$

Ambos valores propios son negativos y reales. La solución general se lee entonces:

$$\varphi(t) = A_1 \exp(\lambda_1 t) + A_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (1.19)$$

Cualquier condición inicial para este caso, nos lleva a un decaimiento exponencial.

Podemos calcular las trayectorias en el espacio fase, en la forma como se hizo anteriormente para el oscilador lineal sin fricción, con lo que obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\gamma - \omega^2 \frac{x}{y} \quad (1.20)$$

Cuando γ es cero, se regresa a las órbitas elípticas. Para valores positivos de γ obtenemos espirales que decaen al origen (excepto para el caso en el que el péndulo está exactamente invertido, en cuyo caso, no hay decaimiento), la velocidad con la que decaen depende otra vez de si el caso es subamortiguado, amortiguado o sobreamortiguado, pero en general se pueden esbozar como en la siguiente figura:

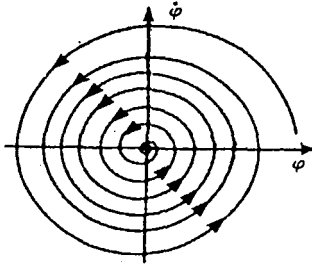


Fig. 1.5 Espacio fase para el péndulo subamortiguado. El único punto fijo es el origen.

1.3 Osciladores paramétricos lineales

Consideremos ahora el caso para el que la frecuencia ω deja de ser constante y ahora es una función del tiempo. La resonancia paramétrica se refiere a la inestabilidad de un sistema en respuesta a la modulación periódica en el tiempo de alguno de sus parámetros. El ejemplo más simple y más estudiado es el del oscilador armónico paramétrico sin fricción:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2(t)\varphi = 0 \quad (1.21)$$

donde la frecuencia propia $\omega(t)$ cambia en forma periódica con el tiempo:

$$\omega^2(t) = \omega_0^2[1 + f(t)] \quad (1.22)$$

y $f(t)$ es una función periódica del tiempo, $f(t) = f(t + T)$, con $\omega_p = 2\pi/T$ la frecuencia de la perturbación. La ecuación (1.21) también es conocida como la *ecuación de Hill* y no hay ninguna solución explícita conocida.

Para el ejemplo del péndulo, sería como afectar la longitud del péndulo o afectar la gravedad (recordemos que $\omega = g/l$), o bien, forzar la amplitud desde el punto de giro O como se muestra en la siguiente figura:

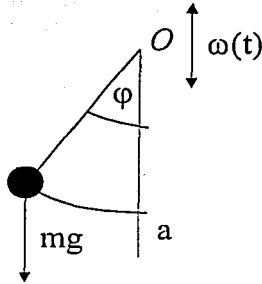


Fig. 1.6 Diagrama esquemático del péndulo paramétrico.

1.31 Algunos ejemplos en Física

El ejemplo más viejo de resonancia paramétrica, es el del péndulo paramétrico, el cual data antes del nacimiento de la mecánica Newtoniana [17]. La llamada inestabilidad de Faraday es otro ejemplo de inestabilidad paramétrica. Un ejemplo de la aplicación de la resonancia paramétrica se utiliza en la llamada "trampa de Paul" fig. 1.7 para atrapar partículas cargadas. Para una diferencia de potencial dada entre dos electrodos, la fuerza actuando en una carga en el centro de la trampa y a lo largo del eje de simetría es muy cercana a la fuerza armónica. Modulando el potencial induce por lo tanto resonancia paramétrica, descrita por la ecuación (1.21)

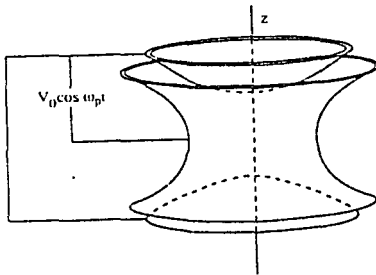


Fig. 1.6 Trampa de Paul. Un ion puede ser atrapado. El ion se aísla en un punto de equilibrio de un campo cuadrupolar estático. Este punto de equilibrio es inestable, como cualquier punto de equilibrio de campo eléctrico estático. Pero un campo eléctrico oscilando rápidamente (típicamente de 1Mhz) es capaz de volver ese punto un punto de equilibrio estable. (Tomada de [19])

Quizá el ejemplo más dramático para ilustrar la resonancia paramétrica, es con el efecto Casimir. El efecto Casimir fue predicho en 1948 [38]. Casimir mostró que dos platos perfectamente conductores en el vacío están sujetos a una fuerza de atracción dada por:

$$F = \frac{\pi^2 \hbar c S}{240 d^4} \quad (1.23)$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida, c es la velocidad de la luz. S la superficie de los platos y d la distancia entre ellos. El origen de la fuerza se debe a las fluctuaciones del campo electromagnético en el vacío. Debido al Principio de incertidumbre de Heisenberg, el campo electromagnético no puede estar completamente quieto, aún en su estado base. Estas excitaciones de estado base, llamémoslas fotones virtuales, no pueden existir sin embargo en todas las posibles longitudes de onda entre los platos, ya que la función de onda debe ser exactamente cero en los platos. La frecuencia más baja posible para estos fotones virtuales, es por tanto, $\omega_0 = 2\pi c/\lambda = \pi c/d$. Ya que los fotones virtuales ejercen una presión sobre los platos, y como todas las longitudes de onda están excitadas fuera y no entre los platos, se obtiene una fuerza neta. Otra forma de llegar a este resultado es observando que la densidad de energía es más baja entre los platos que fuera de ellos. El trabajo hecho por la fuerza de Casimir para separar los platos, corresponde exactamente al déficit de energía entre el interior y exterior de los platos. Para otros modelos donde se presenta el efecto Casimir, puede consultarse [19]

Hay una lista grande de sistemas en los que aparece la resonancia paramétrica. Algunos ejemplos adicionales son [19]: circuitos RCL, ondas espirales en medios activos, ferrofluidos y gases de electrones bidimensionales, guías de microondas, e incluso la teoría del universo primigenio. Para ver una lista más extensa, consúltese [39].

1.32 La ecuación de Mathieu sin fricción

Cuando la variación de la frecuencia es de la forma $\omega(t) = A \cos \omega_p t$, la ecuación (1.21) se ve como:

$$\phi + \omega_0^2 [1 + A \cos \omega_p t] \phi = 0 \quad (1.24)$$

y se le llama ecuación (sin fricción) de Mathieu. Soluciones explícitas se dan en términos de funciones de Mathieu, las cuales son, desafortunadamente, muy complicadas. En lugar de eso me enfocaré al caso de funciones constantes por pedazos de la forma:

$$f(t) = \begin{cases} +A & 0 < t < T/2, \text{ módulo } T \\ -A & T/2 < t < T, \text{ módulo } T \end{cases} \quad (1.25)$$

para los que tanto la física como la matemática se vuelven muy simples y reveladoras.

Me enfocaré primero al mecanismo físico. Durante las fases en las que f es constante, ecuación (1.22) es otra vez la ecuación de evolución del oscilador armónico, con energía total conservada:

$$\frac{\phi^2}{2} + \frac{\omega^2 \phi^2}{2} = cte. \quad (1.26)$$

Por lo tanto, el movimiento en el espacio fase son elipses. Obsérvese que si ω es igual a 1 las elipses degeneran en círculos. Si ω es menor que 1, el semieje mayor es horizontal, y para ω mayores que 1, el semieje mayor es vertical Fig. 1.7

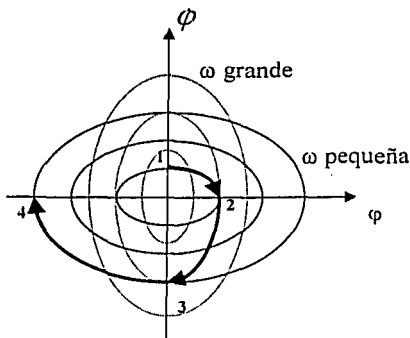


Fig. 1.7 Representación esquemática del espacio fase de un oscilador paramétrico.

Supongamos que empezamos en una frecuencia de fase baja ($f = -A$) en $\phi = 0$ y con ϕ algún valor inicial arbitrario (estado 1 en fig. 1.7). La dinámica sigue la elipse horizontal hasta alcanzar $\phi = 0$ con una extensión ϕ máxima diferente de cero. En ese punto, (estado 2), cambiamos a la frecuencia alta ($f = +A$). Al hacer eso, tenemos que reemplazar nuestra elipse horizontal, por una vertical que tenga semieje menor igual que el semieje mayor de la primera elipse: necesitamos cambiar a una energía igual a la correspondiente ganancia de energía potencial. Ahora nos quedamos sobre ésta elipse vertical de línea punteada, y la dinámica se desplaza hasta alcanzar el punto $\phi = 0$ con ϕ no nula. En este punto (estado 3) regresamos a las elipses horizontales, hasta alcanzar $\phi = 0$, sin ningún costo de energía. Concluimos que, si trabajamos de esta forma, tenemos un ciclo completo en la perturbación por la mitad de un ciclo del mismo oscilador, es decir, estamos ganando energía.

Vayamos ahora a una solución explícita analítica. Definiendo $\omega_{\pm}^2 = \omega_0^2(1 \pm A)$. Escribo la solución para la posición y velocidad después de un periodo T de la perturbación en términos de los valores originales:

$$\begin{bmatrix} \varphi_r \\ \dot{\varphi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega_- T}{2} & \frac{1}{\omega_-} \text{sen} \frac{\omega_- T}{2} \\ -\omega_- \text{sen} \frac{\omega_- T}{2} & \cos \frac{\omega_- T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\omega_+ T}{2} & \frac{1}{\omega_-} \text{sen} \frac{\omega_+ T}{2} \\ -\omega_+ \text{sen} \frac{\omega_+ T}{2} & \cos \frac{\omega_+ T}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \dot{\varphi}_0 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

Las dos matrices que aparecen en el lado derecho de la ecuación corresponden a la propagación del oscilador armónico, operando en frecuencias ω_+ y ω_- . El producto de esas dos matrices da la transformación después del periodo completo. Este operador, llamado operador de Floquet es independiente de las condiciones iniciales y da, al aplicarse repetidamente, el comportamiento a largo plazo del sistema. Sus valores propios λ_1, λ_2 determinan cuándo o no la amplitud será excesivamente grande. En este caso, uno primero encuentra que $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. En otras palabras, el jacobiano de la transformación desde $(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$ a $(\varphi_r, \dot{\varphi}_r)$ es igual a 1, implicando conservación de volumen en el espacio fase. Esto claro, no es sino el Teorema de Liouville. Ahora pueden aparecer dos casos: o λ_1 y λ_2 son complejos conjugados, y por tanto caen en el círculo unitario, o son reales y uno es el inverso del otro. En el último caso, uno de los eigenvalores será más grande que 1 en módulo y el correspondiente eigenvector tendrá una amplitud divergente. Los únicos eigenvalores en los que el par de complejos conjugados puede tener valores reales son $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$. Por lo tanto, la condición crítica que delimita a las oscilaciones de explotar está dada por la traza del operador de Floquet igual a ± 2 . Un cálculo simple nos conduce al siguiente resultado:

$$\cos \frac{\omega_+ T}{2} \cos \frac{\omega_- T}{2} - \frac{\omega_+^2 + \omega_-^2}{2\omega_+ \omega_-} \text{sen} \frac{\omega_+ T}{2} \text{sen} \frac{\omega_- T}{2} = \pm 1 \quad (1.28)$$

Para pequeñas amplitudes A de la perturbación, esas condiciones se simplifican a:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{\omega_p} &= n \left(1 \pm \frac{A^2}{4} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \\ \frac{\omega_0}{\omega_p} &= n + \frac{1}{2} \pm \frac{A}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

Las fronteras exactas para la ecuación (1.28) están representadas en la figura 1.8. El oscilador tendrá una amplitud divergente para cualquier par de valores de los parámetros A y ω_0/ω_p dentro de las curvas. Nótese que la más pronunciada y amplia región de inestabilidad, especialmente en amplitudes pequeñas, está delimitada por $\omega_0/\omega_p = 1/2 \pm A/2\pi$, en concordancia con los primeras suposiciones.

Debo resaltar, que aún cuando existe una dependencia temporal en el oscilador de Mathieu, éste es *integrable*, y por lo tanto es *no caótico* [14]. La integrabilidad puede ser probada directamente construyendo una integral de movimiento, llamada invariante de Lewis [30]

$$I(t) = \frac{1}{2} \left[(r(t)\dot{\varphi} - r(t)\dot{\varphi})^2 + \left(\frac{\varphi}{r(t)} \right)^2 \right] \quad (1.30)$$

donde la función $r(t)$ es una solución arbitraria de una ecuación auxiliar

$$\ddot{r}(t) + \omega^2(t)r(t) = \frac{1}{r^3(t)} \quad (1.31)$$

también llamada Ecuación de Milne. El valor numérico de I es constante a lo largo de la trayectoria, lo cual se puede verificar diferenciando: $dI/dt = 0$.

Dependiendo de la función $\omega_0^2(1 + a \cos(\omega t))$, las soluciones pueden ser estables o inestables. Las órbitas que se obtienen para valores reales de $r(t)$, son estables y se representan como elipses en el espacio fase, mientras que las inestables resultan de valores imaginarios de $r(t)$ y su representación son hipérbolas.

Un experimento interesante para la ecuación de Mathieu lo realizan Curzon, Loke et al [24]. Ellos utilizan una onda cuadrada como función de modulación, lo cual les permite entre otras cosas, hacer algo de trabajo analítico para la ecuación de Mathieu.

1.33 La ecuación de Mathieu con fricción

Añadiremos ahora un término de fricción a la ecuación de Mathieu:

$$\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2(1 + A \cos \omega t)\varphi = 0 \quad (1.32)$$

Aún cuando esta ecuación es una ecuación diferencial lineal, sigue sin poderse resolver analíticamente en términos de funciones estándar. La razón como antes, sigue siendo la dependencia temporal de uno de los coeficientes. Afortunadamente el coeficiente es periódico en el tiempo, y esto nos permite aplicar el Teorema de Floquet, el cual dice que en una ecuación diferencial lineal o en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales, existe un conjunto de soluciones fundamentales (de los que se pueden construir todas las demás soluciones) donde todas las soluciones pueden ser escritas en la forma $\varphi(t) = c(t)\exp(\lambda t)$, donde $c(t+1/\omega) = c(t)$. Al exponente λ se le llama exponente de Floquet. No está definido de manera única, ya que cualquier factor $\exp(2\pi s t)$ con s cualquier número, puede ser absorbido en $c(t)$ o en $\exp(\lambda t)$. La solución es estable si la parte real de todos los exponentes de Floquet es negativa. En Estado Sólido de hecho, se conoce al teorema de Floquet como el teorema de Bloch. Más aún, la ecuación de Mathieu es justamente la

ecuación de Schrödinger de un electrón en un potencial periódico espacialmente donde la variable temporal es interpretada como una variable espacial. Para un valor fijo de A (esto es, la profundidad del potencial), el intervalo estable de ω_0^2 corresponde a las bandas en el espectro de energías.

En la siguiente figura, el área sombreada es el área de inestabilidad. A estas regiones también se le llaman lenguas de Arnold. Fue calculada numéricamente para ciertos valores de la constante de fricción.

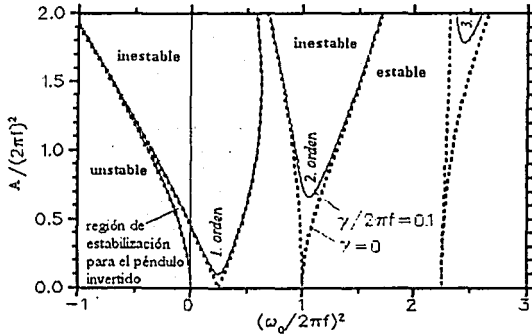


Fig. 1.8 Regiones de estabilidad e inestabilidad para la ecuación de Mathieu. (Tomada de [36])

Nótese que existe una pequeña área de estabilidad para valores negativos de ω_0^2 . En la gráfica $f = \omega_p/2\pi$. Cuando la ω_0^2 es negativa, estamos en el caso de un péndulo completamente vertical. Esa área entonces, denota la posibilidad de estabilizar un péndulo invertido. Para análisis interesantes sobre el péndulo invertido y con modelación experimental en computadora, véase [15] así mismo, para resultados experimentales en laboratorio, véase [19] por ejemplo.

En el caso sin fricción, las áreas de estabilidad forman lenguas (líneas punteadas) que caen a cero. Esto es, una amplitud infinitesimal A , desestabiliza el péndulo sostenido invertidamente, si la condición de resonancia paramétrica

$$f_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{f}{2} n \tag{1.33}$$

es satisfecha, donde n es un entero que define el orden de la resonancia paramétrica. En el caso con fricción, una amplitud de forzamiento σ que exceda un valor crítico $a_c \approx \gamma^{1/n}$ es necesaria para desestabilizarlo.

El conjunto de resonancias paramétricas de primer orden, puede ser aproximado analíticamente por :

$$\varphi = c_+ \exp(i\pi f t) + c_- \exp(-i\pi f t) \quad (1.34)$$

Esta ecuación es una serie de Fourier truncada de la función periódica $c(t)$ del teorema de Floquet. Ella ni decae ni crece, entonces la amplitud a de forzamiento tiene que ser justo el valor crítico a_c . Sustituyendo esta ecuación en la ecuación de Mathieu con fricción (1.30), despreciando los términos $\exp(\pm 3i\pi f t)$ y simplificando todos los términos que tengan el factor $\exp(\pm i\pi f t)$ se obtendrá:

$$\left[\omega_0^2 - (\pi f)^2 \pm i\gamma\pi f \right] c_{\pm} + \frac{a_c}{2} c_{\mp} = 0 \quad (1.35)$$

Estas dos ecuaciones tienen soluciones no triviales para c_+ y c_- sólo si

$$a_c = 2\sqrt{\left[\omega_0^2 - (\pi f)^2 \right]^2 + (\gamma\pi f)^2} \quad (1.36)$$

Esta inestabilidad tiene un mínimo justo en la condición de resonancia paramétrica $f = \omega_0/\pi$ (más una corrección de segundo tipo en γ). El mínimo entonces se lee:

$$a_c = 2\pi f \gamma \quad (1.37)$$

En la resonancia paramétrica la amplitud de la solución inestable crece exponencialmente hasta infinito. La fricción no ayuda a detener este crecimiento, al contrario de la resonancia normal causada por una fuerza aditiva. Entonces, las no linealidades en el péndulo paramétricamente manejado, son necesarias para evitar el crecimiento. Esto es causado por el hecho de que las oscilaciones no lineales tienen en general una frecuencia propia dependiente del tiempo. El crecimiento de la oscilación paraméricamente excitada, sacará a la frecuencia propia de resonancia, entonces, una buena aproximación de la amplitud φ_{\max} de la resonancia paramétrica de primer orden, podría ser la ec.(1.34), donde ω_0 sería reemplazada por $\omega_{\text{res}}(\varphi_{\max})$. J. Elmer [36] realizó experimentos numéricos para valores fijos de la fricción, longitud del péndulo, gravedad y amplitud de la fuerza de oscilación, y encontró que esta aproximación era muy buena, fig. 1.9

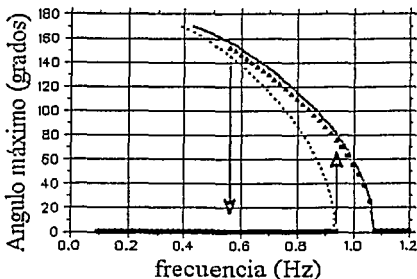


Fig. 1.9 Experimento numérico de J. Elmer [36]. La aproximación (línea sólida) es comparada con las soluciones numéricas (símbolos). (Tomada de [36])

Capítulo II

Capítulo II

Osciladores no lineales

El estudio de los osciladores no lineales en general, abarca una infinidad de funciones que podrían dar lugar a la no linealidad.

Así, en este capítulo se hablará de dos tipos de osciladores no lineales:

- El péndulo como un oscilador no lineal con y sin fricción
- El péndulo paramétrico no lineal con fricción

Los potenciales que se analizan en ambos casos y que dan lugar a la no linealidad, no son generales, sino se siguen modelando en términos de la función seno del péndulo simple. Esta analogía sin embargo, es útil para los fines de esta tesis, porque el potencial de Mateso y los potenciales intermitentes que se analizan en los capítulos 4 y 5 respectivamente, se formaron en términos de funciones seno y coseno.

2.1 El péndulo como un oscilador no lineal sin fricción.

El oscilador lineal que expuse en el capítulo pasado, posee la enorme desventaja de ser una representación física para ángulos muy pequeños del péndulo. Conforme el ángulo φ se va haciendo cada vez más grande, las órbitas dejan de ser elípticas y se deforman, como se muestra en la siguiente figura.

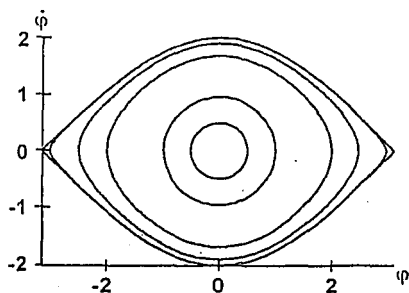


Fig. 2.1. Espacio fase para el péndulo físico sin fricción. Para ángulos grandes las órbitas dejan de ser elípticas. Tomado de [30] pág. 256.

Es claro que el modelo aproximado deja de ser útil, y hay que incluir los términos no lineales para representar mejor al sistema.

Aún cuando la ecuación de movimiento del péndulo sin fricción y sin forzamiento es no lineal, uno puede calcular su frecuencia como una función de la amplitud φ_{\max} . Para poder resolver la ecuación diferencial no lineal (1.3), nótese que la energía total

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \cos \varphi \quad (2.1)$$

Es una constante de movimiento durante todo el movimiento del péndulo. En la apertura máxima del ángulo φ_{\max} , la energía cinética es cero. Entonces

$$E = -\omega_0^2 \cos \varphi_{\max} \quad (2.2)$$

Despejando de (2.1) a $d\varphi/dt$ queda

$$d\varphi/dt = \pm [2(E + \omega_0^2 \cos \varphi)]^{1/2} \quad (2.3)$$

Esta ecuación es fácilmente separable e integrable, dando

$$\frac{d\varphi}{[2(E + \omega_0^2 \cos \varphi)]^{1/2}} = dt \quad (2.4)$$

Para obtener el periodo de oscilación, se integramos sobre medio ciclo

$$\int_{-\varphi_{\max}}^{+\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(E + \omega_0^2 \cos \varphi)}} = \int_0^{T/2} dt \quad (2.5)$$

Ya que el integrando en el lado izquierdo de la ecuación es una función par en φ , y reemplazando la energía E por (2.1) se obtiene

$$T = \frac{2\sqrt{2}}{\omega_0} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_{\max}}} \quad (2.6)$$

Esta integral no puede ser expresada en términos de funciones elementales como polinomios o funciones trigonométricas. Esto es posible solamente en el límite de $\varphi_{\max} \rightarrow 0$, donde la función coseno puede ser aproximada por series de Taylor. De hecho, si se toman sólo los primeros dos términos de la serie de Taylor, se llega a una integral inmediata que lleva al bien conocido resultado para el periodo $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Para un valor arbitrario de φ_{\max} , la integral de (2.6) define una integral elíptica completa. La sustitución $x =$

$\text{sen}(\varphi/2)/\text{sen}(\varphi_{\text{max}}/2)$ convierte a (2.6) en la forma canónica de la integral elíptica de primer tipo K

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{1-\text{sen}^2(\frac{\varphi_{\text{max}}}{2})x^2}} = \frac{4}{\omega_0} K\left(\frac{\varphi_{\text{max}}}{2}\right) \quad (2.7)$$

La gráfica siguiente muestra la razón T/T_0 vs. el ángulo máximo φ_{max} en grados. En el límite cuando $\varphi_{\text{max}} \rightarrow 0$, T se aproxima a $T_0 = 2\pi/\omega_0$ como era de esperarse para el oscilador armónico.

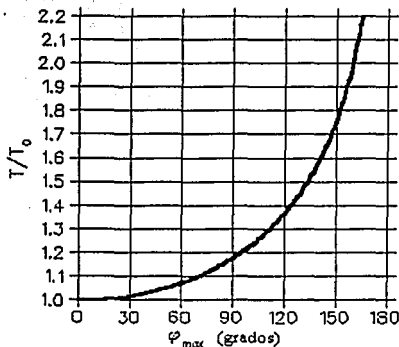


Fig. 2.3 Gráfico de T/T_0 vs. φ_{max} para la integral elíptica de primer tipo dada por 2.7

El espacio fase para el péndulo no linealizado se había obtenido ya en el capítulo anterior, y se puede apreciar en la figura 1.4.

2.2 El péndulo como un oscilador no lineal con fricción.

Añadámos ahora un término de fricción proporcional a la velocidad, el cuál puede ser justificado para el caso del péndulo como fricción viscosa por rozamiento con el aire

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \text{sen}\varphi = 0 \quad (2.8)$$

donde γ es la constante de la fuerza de fricción. Esta fuerza se presenta por ejemplo, cuando una esfera es movida a través de un medio viscoso (un fluido o un gas). Para un flujo laminar la fuerza de fricción está dada por la ley de Stoke's $F_{\text{fricción}} = -6\pi\eta Rv$, donde η es la viscosidad del medio, R es el radio de la esfera, y v su velocidad relativa al medio. En general, diferentes mecanismos de fricción de diferentes magnitudes son posibles, pero para nuestro caso, supondremos que siguen la ley de Stokes mencionada arriba.

Este caso con fricción es similar en su dinámica alrededor del origen al del oscilador armónico linealizado con fricción visto en el capítulo I. Las únicas diferencias que la no linealidad hace sobre el sistema son que el péndulo vaya más rápido al origen, pues ahora hay un término disipativo que amortigua el movimiento del péndulo alrededor del origen.

Alrededor de 180° sin embargo, el punto que antes era inestable, ahora puede ser localmente estable, esto puede ser visto expresando la ecuación (2.8) en un sistema de ecuaciones e igualando a cero:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= v = 0 \\ \frac{dv}{dt} &= -\gamma v - \omega_0^2 \operatorname{sen}\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

de aquí puede observarse que los únicos puntos críticos se dan cuando la velocidad angular v es cero y $\varphi = \pm n\pi$, o cuando γ es muy grande y v es cero.

Si γ no es muy grande, la representación que se obtiene en el espacio fase es como se muestra en la figura 2.4, con puntos focales cuando n es par, y puntos silla cuando n es impar.

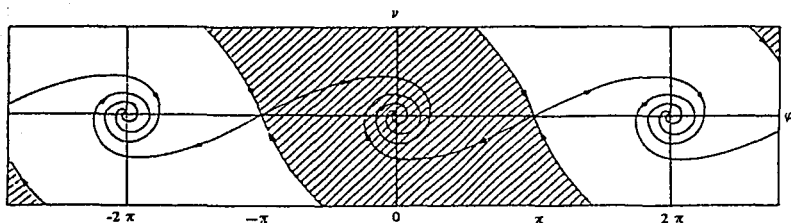


Fig. 2.4 Espacio fase para el péndulo con fricción baja. Los puntos focales corresponden a n par, y los puntos silla a n impar.

Las regiones sombreadas indican las regiones de atracción de los puntos críticos.

Cuando γ es relativamente considerable, los puntos críticos en el espacio fase comienzan a exhibir deformaciones en sus vecindades. Los puntos focales comienzan a arribar más rápido a sus puntos de atracción, y a veces sin siquiera llegar a ellos, y los puntos silla comienzan a generar puntos localmente estables en sus vecindades fig 2.5

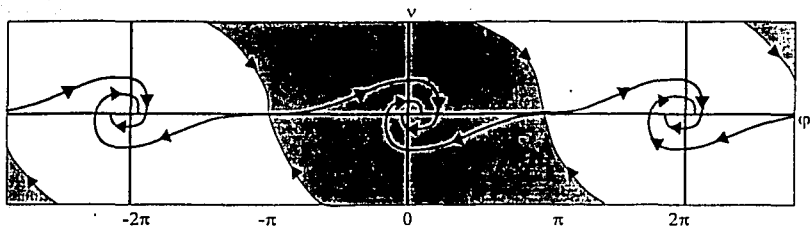


Fig. 2.5 Espacio fase para el péndulo con fricción alta. En las vicinidades de los puntos silla, n impar, se crean puntos cuasiestables, y los puntos focales, n par, en los puntos silla.

Esto se puede entender porque cuando la fuerza de fricción es grande, es suficiente para compensar a la fuerza gravitacional y lograr así un equilibrio local, aún cuando no haya llegado al punto crítico.

2.3 El péndulo paramétrico no lineal con fricción.

Los diversos péndulos que hemos estudiado hasta este momento, pueden ser todos representados en el espacio fase bidimensional. Debemos recordar que las trayectorias no pueden cortarse en esos sistemas determinísticos. Si las trayectorias se cortaran, entonces estaría uno diciendo que el sistema tiene una probabilidad de ir sobre una ruta en lugar de ir sobre otra, por lo que no sería un sistema determinista sino probabilístico. Por lo tanto, como se discutió en las secciones pasadas y el capítulo I, sólo vamos a encontrar puntos de equilibrio y movimiento periódico en el caso del oscilador sin fricción, y puntos fijos cuando hay fricción.

La resonancia paramétrica es un fenómeno que ha impregnado muchos campos de la ciencia. Ocurre cuando la modulación del parámetro de un sistema vuelve al sistema inestable. La literatura de la resonancia paramétrica es enorme, así que lo mejor que uno puede hacer es citar un rango de diferentes materias donde juega algún papel. Los ejemplos incluyen sistemas mecánicos que es donde fueron identificados por primera vez, partículas elementales, puntos cuánticos, astrofísica, mecánica de fluidos, Física de plasmas, redes electrónicas, superconductores y láseres, biomecánica e incluso medicina. Para ver las referencias exactas de cada uno de los temas anteriores, puede consultarse [3-4].

El ejemplo más simple y quizá el más común de resonancia paramétrica es el del oscilador armónico cuya frecuencia varíe periódicamente con el tiempo. Vamos a agregar ahora una fuerza que actúe sobre el punto de giro del péndulo, la cual podría ser de izquierda a derecha o de arriba abajo, nosotros la tomaremos de arriba abajo, esto hace que la frecuencia varíe con el tiempo. Este caso es el llamado "resonancia paramétrica", el cuál es útil para los fines de ésta tesis

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + (\omega_0^2 + a \cos 2\pi ft) \sin\varphi = 0 \quad (2.10)$$

Una de las sorpresas de esta ecuación, es que predice la estabilización de un péndulo invertido en su punto inestable (180°). Esto puede entenderse aplicando el método de Kapiza (1894-1984). Es sólo una aproximación pero funciona muy bien en los casos en que las escalas de tiempo son de diferentes órdenes de magnitud. El método comienza con el ansatz:

$$\varphi(t) = \varphi_{lenta}(t) + \varphi_{rápida}(t) \quad (2.11)$$

Donde φ_{lenta} es la parte que varía lentamente y $\varphi_{rápida}$ la que varía rápidamente. En un promedio sobre la escala de tiempo rápida eso nos daría $\langle \varphi(t) \rangle = \varphi_{lenta}(t)$. Sustituyendo este ansatz en la ecuación de movimiento (2.10), nos dan dos ecuaciones, una para la escala de tiempo lenta:

$$\frac{d^2\varphi_{lenta}}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi_{lenta}}{dt} + \omega_0^2 \sin\varphi_{lenta} + a \cos\varphi_{lenta} \langle \cos(2\pi ft) \varphi_{rápida} \rangle \approx 0 \quad (2.12)$$

y otra para la escala de tiempo rápida:

$$\frac{d^2\varphi_{rápida}}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi_{rápida}}{dt} + \omega_0^2 \varphi_{rápida} \cos\varphi_{lenta} + a \sin\varphi_{lenta} \cos(2\pi ft) \approx 0 \quad (2.13)$$

Aquí se hicieron dos aproximaciones: La primera es que todo fue linealizado en $\varphi_{rápida}$, suponiendo que las oscilaciones rápidas son pequeñas. Aquí se supuso que $\sin\varphi \approx \sin\varphi_{lenta} + \varphi_{rápida} \cos\varphi_{lenta}$. En la última ecuación, $a \cos\varphi_{lenta} \langle \cos(2\pi ft) \varphi_{rápida} \rangle \approx \cos(2\pi ft) \varphi_{rápida}$ fue despreciado. Esto está justificado siempre que las dos escalas de tiempo estén bien separadas. La dependencia temporal de φ_{lenta} puede ser despreciada en la ecuación de movimiento para $\varphi_{rápida}$ (2.13). Por lo tanto, φ_{lenta} puede ser tratada ahí como una constante. La ecuación 2.13 se puede entonces resolver [36] quedando:

$$\varphi_{rápida}(t) \approx \frac{a \sin\varphi_{lenta} / 2}{(2\pi f)^2 - \omega_0^2 \cos\varphi_{lenta} - 2\pi i \gamma f} \exp(2\pi i f t) + c.c. \quad (2.14)$$

Multiplicando esto por $\cos 2\pi ft$ y promediando sobre la escala rápida de tiempo, se obtendrá una ecuación de movimiento para φ_{lenta} únicamente:

$$\frac{d\varphi_{lenta}}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi_{lenta}}{dt} + \omega_0^2 \sin\varphi_{lenta} + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{(2\pi f)^2 - \omega_0^2 \cos\varphi_{lenta}}{[(2\pi f)^2 - \omega_0^2 \cos\varphi_{lenta}]^2 + (2\pi \gamma f)^2} \sin 2\varphi_{lenta} = 0 \quad (2.15)$$

Esta es una ecuación de movimiento para la parte lenta del movimiento. El producto promediado de las oscilaciones rápidas de la fuerza de forzamiento, y las oscilaciones rápidas del sistema llevan a una fuerza efectiva en el péndulo. En la posición completamente invertida, resulta en una fuerza de restitución. Cuando

$$a > \sqrt{2\omega_0^2 \frac{[(2\pi f)^2 + \omega_0^2]^2 + (2\pi\gamma f)^2}{(2\pi f)^2 + \omega_0^2}} \quad (2.16)$$

la fuerza de restitución es mayor que la de repulsión, y el péndulo en la posición completamente invertida se estabiliza. Esto es, en el contexto del método de Kapiza la solución $\varphi_{\text{estab}} = 180^\circ$ es una solución estable de (2.15) y de (2.10).

Este análisis se hizo para un coeficiente de fricción γ arbitrario. Obsérvese que si éste es muy pequeño $\gamma \approx 0$, igual se puede encontrar una condición para a tal que la fuerza de restitución sea mayor que la fuerza de repulsión, y el péndulo en la posición completamente invertida este estabilizado

$$a > \sqrt{2\omega_0^2 \frac{[(2\pi f)^2 + \omega_0^2]^2}{(2\pi f)^2 + \omega_0^2}} \quad (2.17)$$

El estudio de éste tipo ecuaciones diferenciales no lineales se puede hacer de forma más precisa a través de herramientas como los métodos numéricos y la dinámica no lineal. De hecho, la estabilización del péndulo a 180° está acompañada de lo que se llama bifurcación subcrítica de Pitchfork de la ecuación (2.15) la cuál se presenta al hacer el diagrama de bifurcaciones dentro del contexto de las herraminetas de la dinámica no lineal.

En el capítulo siguiente se hará un breve resumen de dinámica no lineal, a fin de tener mejores herramientas para el entendimiento de potenciales periódicos oscilantes, tema de ésta tesis.

Capítulo III

Capítulo III

Dinámica no lineal

La dinámica no lineal es un lenguaje para hablar de los sistemas dinámicos. En la dinámica lineal, se buscan las soluciones fundamentales de las que uno pueda construir las demás soluciones, haciendo uso del principio de superposición. En la dinámica no lineal, la pregunta principal es ¿Cuál es el comportamiento cualitativo del sistema?. ¿Cuántos puntos fijos, ciclos límites u órbitas periódicas o cuasi periódicas hay? ¿Cuáles son estables? ¿Cómo cambian el conjunto de soluciones al variar algún parámetro del sistema (también llamado **parámetro de control**)? Todas estas preguntas son claves para entender la dinámica del sistema, y poder así tener una mejor apreciación del mismo. En este capítulo me enfocaré a dar una descripción de algunas de las herramientas que utiliza el lenguaje de la dinámica no lineal.

3.1 Estabilidad

Un conjunto solución del sistema puede ser estable o inestable. Los estables se dividen a su vez en débiles y fuertes: La solución estable es llamada también **estabilidad de Lyapunov**, la cual consiste en que cualquier órbita que comience en la vecindad del conjunto solución, permanecerá en esa vecindad. Mientras que la estabilidad débil es llamada también **estabilidad asintótica**, la cual dice que cualquier órbita comenzando en una vecindad del conjunto solución, se aproximará a la solución asintóticamente.

En vista de lo anterior, un conjunto solución es o asintóticamente estable, marginalmente estable (estabilidad de Lyapunov), o inestable. Los conjuntos solución asintóticamente estables son también llamados **atractores**. La base de atracción, es el conjunto de todos los estados iniciales que se aproximan al atractor en el largo plazo de tiempo.

Para calcular la estabilidad de un conjunto solución, se necesita usar un esquema llamado **análisis de estabilidad lineal**. Este análisis lo que hace es tomar el punto que se desea saber si es estable o no $u_0(t)$, y sustituir el **ansatz** $u = u_0 + du$, introduciéndolo en la ecuación de la dinámica (es decir: $du/dt = f(u)$ si el sistema es continuo en el tiempo; o bien $u_{n+1} = F(u_n)$ si el sistema es discreto en el tiempo). Si se desprecian los términos cuadráticos y de orden superior en du , se obtiene:

$$\frac{d\delta u}{dt} = DF(u_0)\delta u$$

(3.1)

y

$$\delta u_{n+1} = DF(u_0)\delta u_n$$

para el caso continuo y discreto respectivamente. Estas ecuaciones son válidas siempre que la órbita no se vaya muy lejos de u_0 .

Para puntos fijos, las soluciones fundamentales son de la forma $\exp(\lambda_s t)\delta u_s$ y $(\lambda_s)^n \delta u_s$ respectivamente, donde λ_s y δu_s ($s = 1, 2, \dots$, las dimensiones del espacio fase) son los eigenvalores y los eigenvectores respectivamente del Jacobiano $DF(u_0)$. Los valores propios λ_s son las raíces de la ecuación característica $\det(DF(u_0) - I) = 0$. El punto u_0 es asintóticamente estable si todos los eigenvalores λ_s están del área de estabilidad de el plano complejo. En el caso continuo, esta área de estabilidad es el semiplano izquierdo del eje imaginario, donde en el caso discreto, es el círculo unitario alrededor del origen. Si al menos un eigenvalor está fuera de la región de estabilidad, la solución fundamental correspondiente crecerá exponencialmente. Por lo tanto, el punto fijo será inestable. Si un eigenvalor está justo en el borde de estabilidad, no se puede decir por análisis lineal de estabilidad cuando el punto fijo es inestable, asintóticamente inestable o marginalmente estable.

Calcular las raíces de un polinomio analíticamente, es imposible si el orden del polinomio es mayor a 5, y es tedioso si el orden es mayor a 2. Para sistemas continuos, la pregunta de la estabilidad puede ser contestada sin calcular explícitamente los eigenvalores, gracias al teorema de Routh y Hurwitz. Este teorema dice que las partes reales de todas las raíces de un polinomio son negativas si y sólo si ciertas condiciones son satisfechas las cuales pueden ser calculadas. Este teorema es útil aún en el caso de espacios fase bidimensionales donde el polinomio característico es cuadrático: Ambos eigenvalores tienen una parte real negativa si y sólo el determinante $DF(u_0)$ es positivo y la traza de $DF(u_0)$ es negativa. La figura siguiente muestra un esquema de clasificación de los puntos fijos de espacios fases bidimensionales.

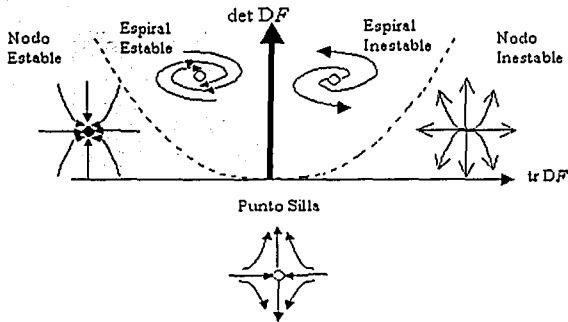


Fig. 3.1 Esquema de clasificación de los puntos fijos en espacios fase bidimensionales.

Los términos “espiral” y “nodo” están inspirados en el flujo cerca del punto fijo. Un par de eigenvalores complejos conjugados darán lugar a espirales, mientras que un nodo es causado por dos eigenvalores del mismo signo. Eigenvalores reales de signos contrarios darán lugar a puntos silla. En general, un punto silla es un punto fijo donde por lo menos uno de los eigenvalores tiene una parte real positiva, pero también por lo menos uno tiene una parte real negativa. Cerca de un punto silla, una órbita es atraída al principio, pero repelida después. Hay puntos en el espacio fase que se aproximan a un punto fijo dado para $t \rightarrow \infty$, ellos forman una “forma estable”. Los eigenvalores con parte real negativa son tangenciales a las formas estables. Las “formas inestables” se construyen con todos los puntos que se aproximan al punto fijo para $t \rightarrow -\infty$. Puntos silla y sus formas estables e inestables, son usualmente las fronteras de la base de atracción.

3.2 Bifurcaciones

El número de atractores en un sistema dinámico no-lineal puede cambiar cuando el parámetro de un sistema es modificado. Este cambio se llama *bifurcación*. Está acompañado por un cambio en la estabilidad de un atractor. En un punto de bifurcación, por lo menos un eigenvalor del Jacobiano tiene una parte real cero. Hay tres tipos genéricos de las llamadas bifurcaciones de codimensión-1 (el término *codimensión* cuenta el número de parámetros de control para el que un ajuste fino es necesario para obtener tal bifurcación):

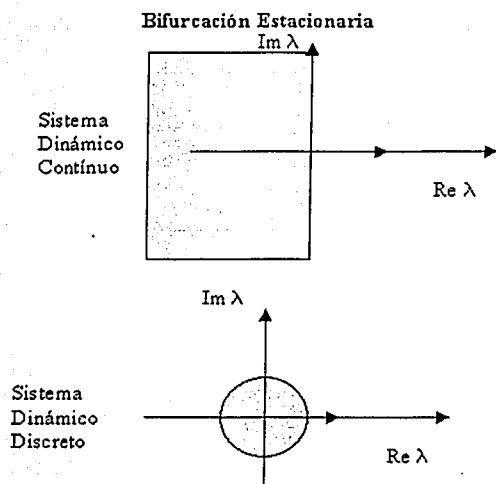


Fig.3.2 En una bifurcación estacionaria, un valor propio cualquiera, cruza la frontera de estabilidad.

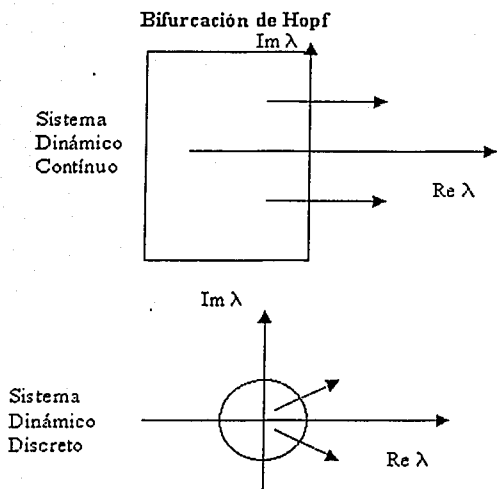


Fig. 3.3 La bifurcación de Hopf ocurre cuando un par de complejos conjugados cruza la frontera de estabilidad. Tiene una frecuencia angular la cual está dada por la parte imaginaria del par que cruza. En el caso discreto, la órbita bifurcante es cuasi periódica, excepto porque el argumento de la parte que cruza, multiplicado por un entero da exactamente 2π .

Bifurcación de doble periodo

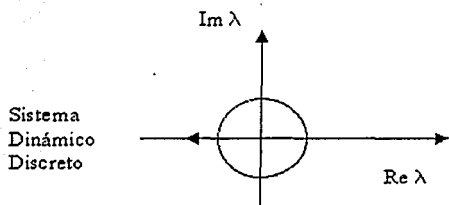


Fig. 3.4 En los sistemas dinámicos discretos, una cierta clase de bifurcaciones es posible, la cuál no se da en los sistemas continuos: La bifurcación de doble periodo. Aquí, un valor real cruza la frontera de estabilidad en -1 . En un punto de doble bifurcación, una órbita de periodo 2 se bifurca.

El hecho de cruzar la frontera de estabilidad sólo indica un punto de bifurcación y el tipo de las soluciones en las bifurcaciones. Pero no dice cómo ni cuántas nuevas soluciones se bifurcan o desaparecen en un punto de bifurcación. Para responder ésta pregunta, uno tiene que tomar en cuenta los términos no lineales. El análisis se puede simplificar con la ayuda del Teorema de la multiplicidad de centros, el cuál ayuda a reducir la dimensionalidad del espacio fase a la dimensionalidad de el llamado centro múltiple. El teorema del centro

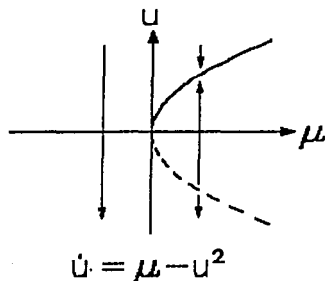


Fig. 3.5 Bifurcación de punto silla. Se muestran las formas normales principales (para sistemas dinámicos continuos) de bifurcaciones estacionarias de codimensión uno. La variable de espacio fase es u . El parámetro de control es μ . El punto de bifurcación se da en $\mu=0$. La dirección de movimiento en el espacio fase unidimensional se muestra con las flechas.

múltiple dice que la dinámica puede ser proyectada al centro múltiple sin pérdida de ningún aspecto significativo de la dinámica en sí. La dinámica proyectada al centro múltiple, puede ser transformada a las llamadas formas-normales, por una transformación lineal de las variables del espacio fase.

El caso genérico de bifurcación de co-dimensión uno es una bifurcación de punto silla. Es genérico porque los puntos fijos caen en una suave forma unidimensional en el espacio combinado de espacio fase y parámetros de control. El mínimo y máximo de μ como una función de la longitud de curva, denota bifurcaciones de punto silla, donde un punto fijo

estable (un nodo) se aniquila con un punto inestable (un punto silla en mas de dos dimensiones). Una combinación de un mínimo y un máximo lleva al fenómeno de biestabilidad, donde en un cierto intervalo de los parámetros de control, dos atractores estables coexisten con uno inestable. La biestabilidad es la responsable de la histeresis en muchos sistemas físicos y técnicos, como por ejemplo, el botón del mouse de una computadora. Este fenómeno ocurre, si uno mueve los parámetros de control lentamente cerca del intervalo de biestabilidad. Cuando el intervalo de biestabilidad está a la izquierda, el atractor desaparece en una bifurcación de punto silla, y el sistema repentinamente brinca a otro atractor. Para el ejemplo del botón del mouse, esto significa que el botón hace click aún si se presiona el botón extremadamente lento. Ahora, cambiando el parámetro de control, en la otra dirección no tiene efecto cuando el intervalo de biestabilidad reingresa. Esto significa que el botón del mouse, en el ejemplo anterior, permanece presionado aún cuando la presión ha disminuido por debajo de la presión necesaria para hacerle click. Llevando la biestabilidad a su otro extremo, el sistema tiene que saltar hasta el otro atractor.

La bifurcación transcritical ocurre cuando en el espacio combinado de espacio fase y el espacio de parámetros de control dos diferentes formas o puntos fijos se cruzan uno al otro. En el punto de cruce, los puntos fijos intercambian propiedades de estabilidad. Esto es, el punto fijo estable se vuelve inestable y viceversa. Nótese que más allá del punto de bifurcación el número de puntos fijos no ha cambiado, al revés de la bifurcación de punto silla, donde los dos puntos fijos aparecen o desaparecen.

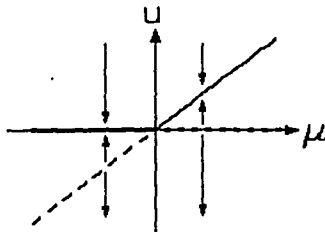


Fig. 3.6 Bifurcación transcritical. La variable de espacio fase es u . El parámetro de control es μ . El punto de bifurcación se da en $\mu=0$. La dirección de movimiento en el espacio fase unidimensional se muestra con las flechas.

$$\dot{u} = (\mu - u)u$$

La figura siguiente muestra la bifurcación transcritical.

Las bifurcaciones de Pitchfork son posibles en sistemas dinámicos con una inversión de reflexión de simetría. Esto es, una ecuación de movimiento que permanece inalterada si uno cambia el signo de todas las variables del espacio fase (o por lo menos una). Un ejemplo es el péndulo sin forzamiento. Usualmente, tales sistemas tienen un punto fijo de simetría (o ciclo límite). Las bifurcaciones de Pitchfork son las bifurcaciones genéricas cuando un sistema de esos cambia su estabilidad. La solución de la bifurcación no tiene la completa simetría de la ecuación de movimiento. Este fenómeno es llamado simetría rota. Una solución con una simetría rota no ocurre aisladamente, porque la simetría rota aplicada a tal solución genera una nueva solución donde se rompió la simetría. Todas esas soluciones

forman una familia. Por eso, siempre dos puntos fijos con una simetría rota se bifurcan a su vez en una bifurcación de Pitchfork. Ambos son o estables (bifurcaciones de pitchfork supercríticas) o inestables (bifurcaciones de pitchfork subcríticas). La figura siguiente muestra las bifurcaciones de Pitchfork.

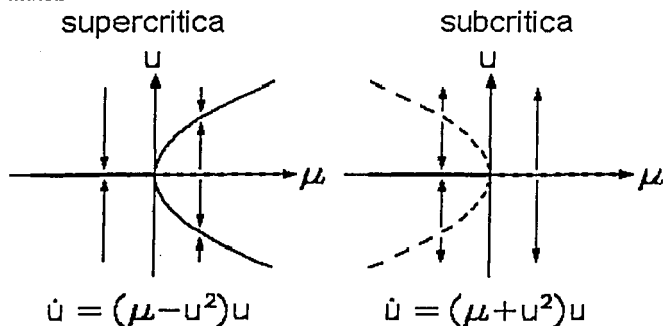


Fig. 3.7 Bifurcaciones de Pitchfork. La variable de espacio fase es u . El parámetro de control es μ . El punto de bifurcación se da en $\mu=0$. La dirección de movimiento en el espacio fase unidimensional se muestra con las flechas.

Otra herramienta importante en la dinámica no lineal es el mapeo de Poincaré. Este se obtiene de elegir cuidadosamente un plano que sea cruzado por todas (o casi todas las órbitas) en el espacio fase de más de dos dimensiones. Es una herramienta desarrollada por Henri Poincaré (1854-1912) para una visualización del flujo en espacio fase de más de dos dimensiones. Las secciones de Poincaré tienen una dimensión menos que el espacio fase. El mapeo de Poincaré, mapea los puntos de las secciones de Poincaré a sí mismo. Este relaciona a dos puntos de intersección. Un mapeo de Poincaré convierte la visualización de un sistema dinámico continuo a la visualización en un o discreto. Si la sección de Poincaré es cuidadosamente elegida, no debe perderse información concerniente al comportamiento cualitativo de la dinámica.

Un efecto prominente de la dinámica no lineal, es el llamado "Caos determinístico". Una de las características de él, es su sensibilidad a las condiciones iniciales. La figura siguiente muestra un ejemplo de un péndulo horizontal forzado en los primeros 15 segundos, tomado a diferentes condiciones iniciales muy cercanas.

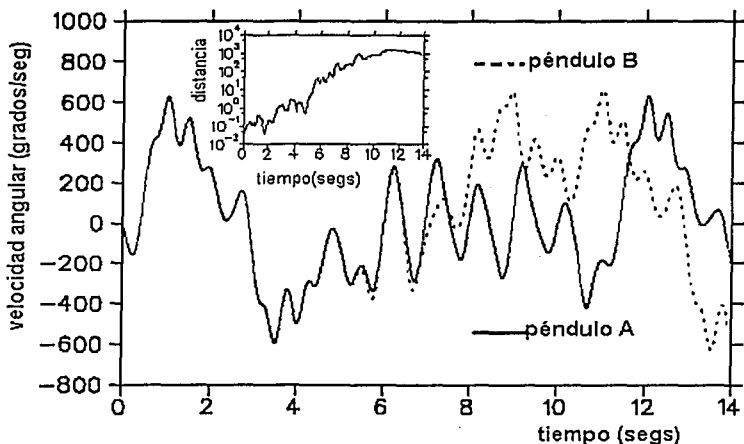


Fig. 3.8 Comparación de las velocidades angulares de dos péndulos forzados con condiciones iniciales parecidas. Recuadro: distancia entre las dos trayectorias de los dos péndulos. (Tomada de [36])

Las condiciones iniciales que se usaron fueron:

$$\text{Péndulo A: } \varphi = -140^\circ, \quad d\varphi/dt = 0$$

$$\text{Péndulo B: } \varphi = -140^\circ 1', \quad d\varphi/dt = 0$$

(3.2)

Ambas condiciones iniciales difieren en un segundo de arco solamente. Sin embargo, 10 segundos después se comportan completamente diferente. Al principio, la distancia entre las trayectorias se incrementa en promedio exponencialmente (obsérvese el recuadro en la figura). La tasa de la divergencia fue medida en función del exponente de Lyapunov.

Los sistemas determinísticos son predecibles en el corto tiempo, pero en grandes escalas de tiempo, los sistemas caóticos se vuelven impredecibles. Ellos se comportan irregular pero parecidamente. Es por esta razón que algunos sistemas son llamados caóticos. La capacidad de predecir se pierde en el llamado horizonte de predicción, la cual depende solamente de forma logarítmica de las condiciones iniciales. Es decir, que a mayor certidumbre en las condiciones iniciales, más lejos se tiene el horizonte de predicción. Hay un último horizonte de predicción, que no se puede sobrepasar, debido a que las condiciones iniciales no pueden ser menores que el ruido térmico. En la gráfica de la figura 3.8, es alrededor de 8 segundos. Para el clima es de 10 días y para el sistema solar es de unos cuantos millones de años [36].

La sensibilidad a las condiciones iniciales lleva al caos sólo si las trayectorias son cerradas. Esto es, el sistema no puede irse al infinito. En la dinámica lineal, uno puede tener o

sensibilidad a las condiciones iniciales o trayectorias cerradas, pero no ambas. En la dinámica no lineal por el contrario, se pueden tener ambas. El ejemplo típico para entender esto se muestra en la figura 3.9, es como la de la masa para hacer un pastel que primero se aplasta y luego se dobla. Supongamos que al principio, se colocan dos marcas muy cerca una de la otra. Cada vez que la masa se aplasta, la distancia entre las dos marcas se incrementa,

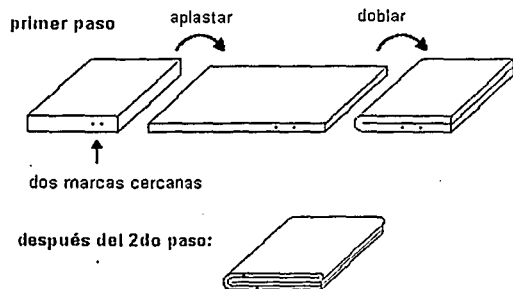


Fig. 3.9 Proceso de "Aplastar y doblar" (Stretching and folding en Inglés). Las dos marcas inicialmente juntas se van separando paulatinamente.

Tarde o temprano, la distancia entre los dos puntos será máxima al llegar a los extremos de la masa de pan. A partir de ese momento, la distancia cambia de manera impredecible. El fenómeno de "aplastar y doblar" es el responsable del caos determinístico [36].

La siguiente secuencia de imágenes, muestra para un péndulo horizontal con 1600 condiciones iniciales, como se "aplasta" y "estira" la dinámica del espacio fase para un ciclo de forzamiento. Durante el tránsito de una imagen a otra, el rectángulo inicial se va colapsando a algo que no es un punto, ni una línea, sino un "atractor extraño". Un objeto que no tiene volumen en el espacio fase, y que es llamado, "fractal".

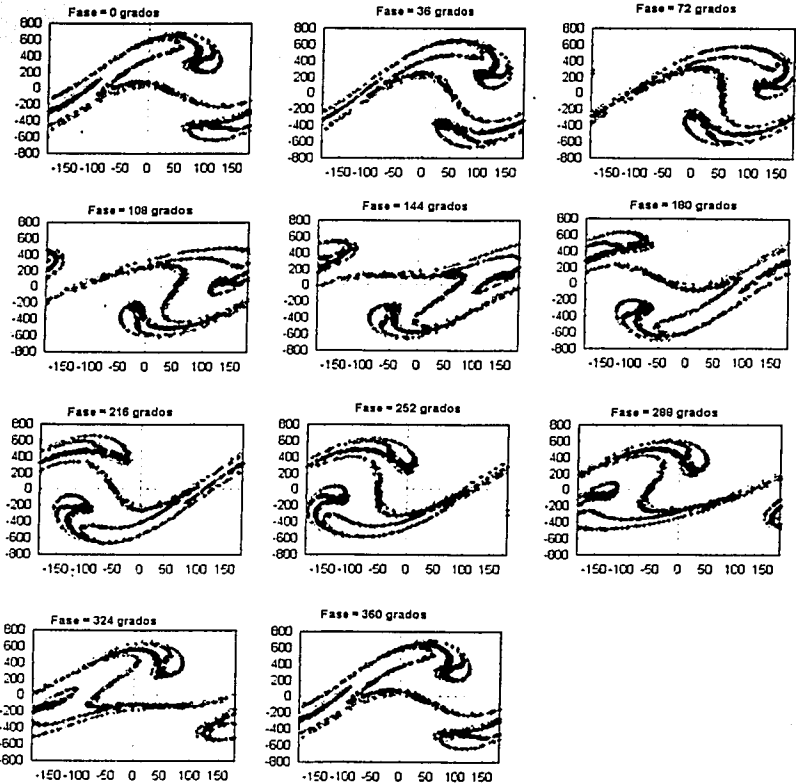


Fig. 3.10 Evolución del “aplastamiento” y “estiramiento” del espacio fase de un péndulo horizontal forzado. Tomado de [36].

Por último, mencionaré dos herramientas más que me van a ser útiles en éste estudio: El enganchamiento de fase (o phase locking en inglés) y el exponente de Lyapunov.

3.3 El Enganche de fases o "Phase Locking"

El enganche de fases se dice que ocurre cuando la razón de la frecuencia del pendulo con la de la fuerza se engancha en una razón p/q de dos enteros, sobre algún dominio finito de parámetros. Esta razón p/q nos dice también el número de ciclos que tiene que hacer el sistema para producir un desplazamiento. El enganchamiento de fase me será muy útil en el capítulo 5 para entender el sistema motivo de esta tesis.

3.4 El exponente de Lyapunov

La idea básica detrás del exponente de Lyapunov es la de medir las distancias de separación entre las trayectorias de dos puntos que inicialmente se encontraban muy cercanos para tiempos muy grandes. La distancia en principio se puede aproximar como proporcional a la distancia original multiplicada por una exponencial. El exponente de esa exponencial es el exponente de Lyapunov, el cual, determina según si es positivo o negativo, si el sistema diverge o converge, respectivamente (Véase Fig. 3.11).

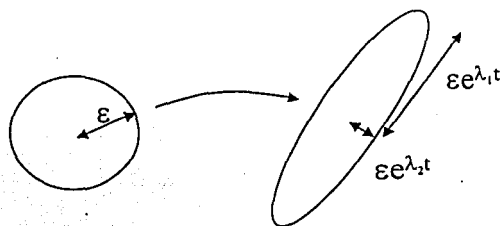


Fig. 3.11 Ejemplo bidimensional para el cálculo del exponente de Lyapunov. La evolución de una esfera de puntos cercanos en un elipsoide. La separación es proporcional al exponente de Lyapunov.

En ésta figura se puede apreciar que la distancia está definida a través de un círculo que se deforma en elipsoide. La definición analítica del exponente de Lyapunov es como sigue:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{t} \right) \log \left[\frac{L_i(t)}{L_i(0)} \right] \right\} \quad (3.3)$$

donde L_i es el radio de el elipsoide a lo largo del i ésimo eje al tiempo t . El exponente de Lyapunov para muchos sistemas es muy complicado de calcular a través de la definición (3.3), por lo cual, se emplean algoritmos en computadora que facilitan esa labor.

Una de las características importantes del exponente de Lyapunov, es la relación que tiene con las regiones estables e inestables en un diagrama de bifurcaciones. Las regiones estables se presentan cuando el exponente es negativo, las bifurcaciones se dan cuando el exponente es cero, y las regiones inestables se dan cuando el exponente es positivo.

La siguiente es una gráfica comparativa del diagrama de bifurcaciones para el mapeo logístico, comparado con el exponente de Lyapunov.

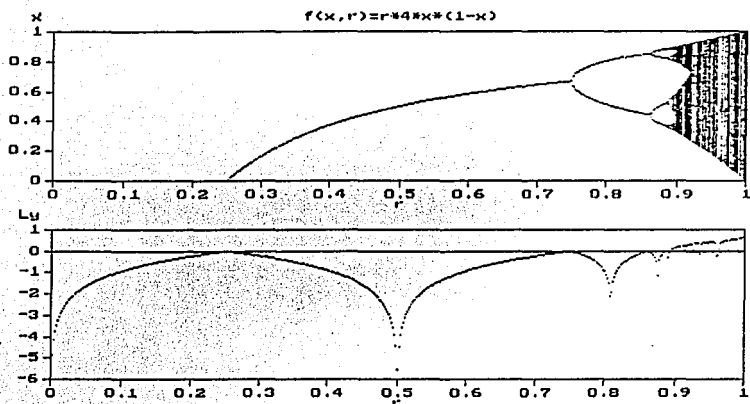


Fig. 3.12 Diagrama de bifurcaciones (arriba) comparado con el exponente de Lyapunov (abajo) para el mapeo logístico $f(x) = 4rx(1-x)$

Con estas herramientas, es posible explorar sistemas dinámicos más complicados que los vistos en los capítulos I y II. El análisis lo enfocará a los sistemas no lineales, con fricción y forzados por una fuerza externa, los cuáles son importantes para los fines de esta tesis.

Capítulo IV

Capítulo IV

Potenciales Oscilantes

En la primera parte de éste capítulo me enfocaré a un tipo de oscilador no lineal: El oscilador no lineal forzado con fricción. Trataré un forzamiento simple, porque no es materia de esta tesis ese tema.

En la segunda parte de éste capítulo hablaré del trabajo de Mateos [5],[6],[7] y [8] cuya ecuación que usa, se puede ver como la ecuación de un oscilador no lineal, forzado, con fricción y sujeto a un potencial, sistema también llamado "Potencial Oscilante" o "Rocking Ratchet" en inglés.

Este trabajo es importante porque la ecuación que estudio en esta tesis, es similar a la ecuación de Mateos. De hecho, los resultados a los que él llega en sus artículos [5] y [6] se corroboran en esta tesis y en artículos que también se han desarrollado en base a su trabajo.

En la última parte del capítulo, hablaré de otros osciladores y trabajos que se han hecho alrededor del trabajo de Mateos.

4.1 Oscilador No lineal Forzado y con fricción

Hay muchas formas de forzar un oscilador. La forma más simple es la de añadir una fuerza periódica. Basándome en la ecuación del péndulo (2.8), voy a añadir una fuerza periódica simple:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \gamma \frac{d\varphi}{dt} + \omega_0^2 \text{sen } \varphi = \left(\frac{A}{l} \right) \omega_0^2 \cos 2\pi ft \quad (4.1)$$

donde A y f son la amplitud y la frecuencia de forzamiento respectivamente, y l es la longitud del péndulo, γ es la fricción, y ω_0 la frecuencia de oscilación.

Antes de comenzar a estudiar éste sistema, haré notar que en una ecuación pueden haber muchos parámetros de control. En este caso puedo considerar a la fricción, la amplitud de oscilación, la longitud del péndulo, y la frecuencia del forzamiento. Comenzaremos entonces a analizar el diagrama de bifurcaciones para éste sistema, usando como parámetro de control la amplitud A del forzamiento, para después analizar la frecuencia del forzamiento. Fijaré los valores de los parámetros como sigue: $\gamma=0.1$, $\omega_0=1$, $l=1$ y $f=1$ con el fin de simplificar la ecuación, y poder usar métodos numéricos para su resolución.

Escribiendo la ecuación (4.1) como un sistema de ecuaciones, me queda:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= v \\ \dot{v} &= -\gamma v - \text{sen } \varphi + A \cos 2\pi t\end{aligned}\tag{4.2}$$

Usé el método numérico de Rungge-Kutta de 4º orden para resolver éste sistema, y poder así hacer el diagrama de bifurcaciones de nuestro a continuación:

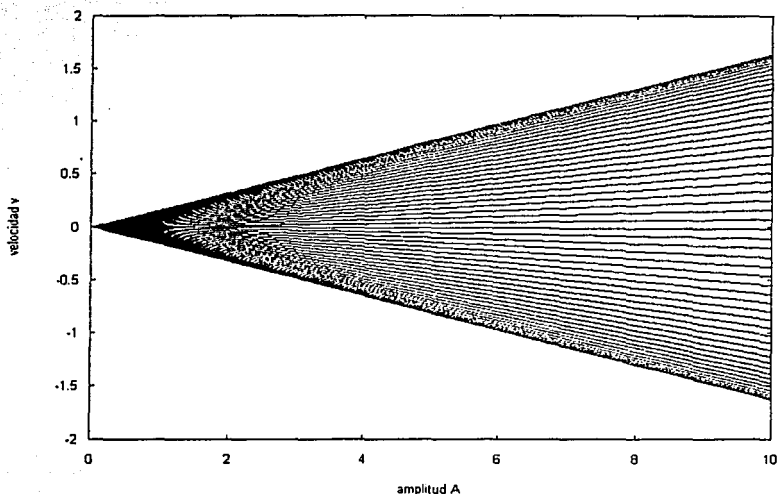


Fig. 4.1 Diagrama de bifurcaciones para el péndulo no lineal, forzado y con fricción, manteniendo fija la frecuencia de oscilación.

En ésta gráfica puede apreciarse cómo la dependencia de la velocidad con la amplitud es un conjunto de líneas rectas que convergen en el origen, y cuya velocidad está acotada. La gráfica del espacio fase para éste sistema (tomando $A=8$) nos permite ver con más detalle lo que sucede en la dinámica:

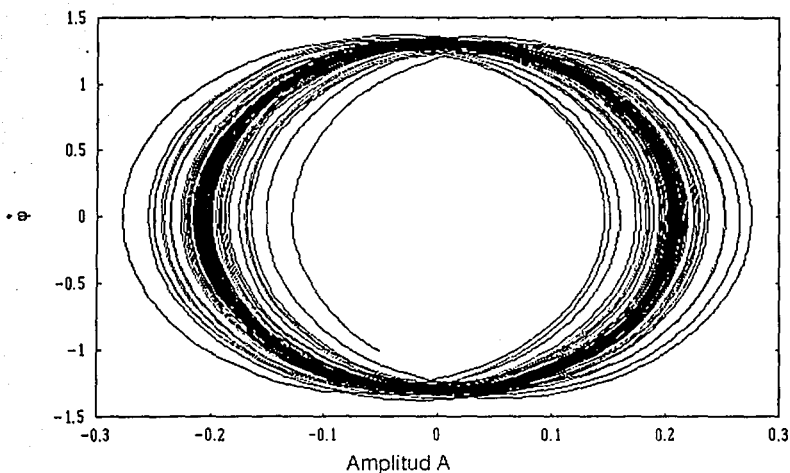


Fig. 4.2 Espacio fase para el péndulo no lineal, forzado y con fricción. La franja oscura representa el ciclo límite al cual cae el sistema para tiempos muy grandes.

Se puede apreciar en la figura cómo el sistema va evolucionando y pasa por distintas velocidades hasta que finalmente cae en un ciclo límite, que es justamente las cotas del diagrama de bifurcaciones.

Voy a variar ahora la frecuencia de oscilación f , dejando fija la amplitud en $A=1$, para obtener el siguiente diagrama de bifurcaciones:

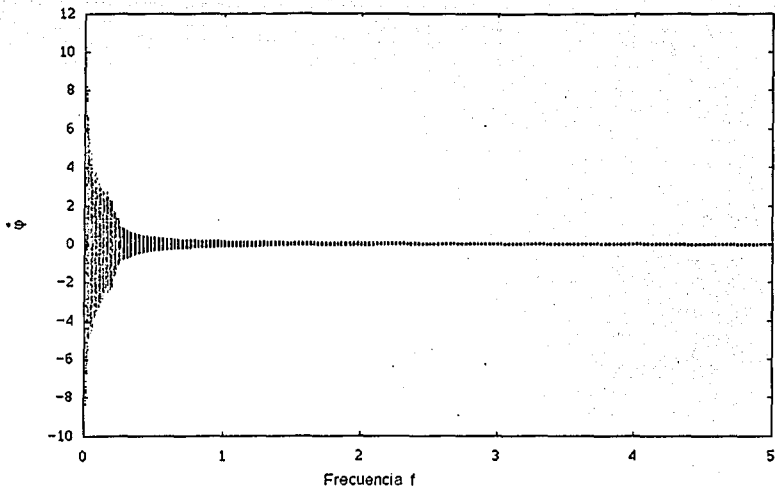


Fig. 4.3 Diagrama de bifurcaciones para el péndulo no lineal, forzado y con fricción, manteniendo fija la amplitud A de oscilación.

Puede apreciarse inmediatamente la dependencia de la velocidad con la frecuencia, teniendo un decaimiento de tipo exponencial y llegando a ser cero en el límite de frecuencias muy grandes.

Estas dos gráficas juntas me indican que la velocidad varía directamente proporcional a la amplitud, e inversamente proporcional a la frecuencia. Así, sin haber resuelto analíticamente el sistema, se pueden encontrar relaciones que nos ayudan a entender mejor el sistema.

Esto es muy importante porque en el caso de sistemas caóticos, no hay forma de encontrar expresiones analíticas, pero sí se pueden entender mucho de la dinámica del sistema, en base a las herramientas que proporciona la dinámica caótica.

El siguiente paso será entonces mostrar, cómo se han resuelto sistemas más complicados usando éstas herramientas.

4.1 El "Rocking Ratchet" de Mateos

En el presente capítulo esbozaremos el trabajo de Mateos [5], [6], [7] y [8] sobre Ratchets deterministas, por la relevancia que posee para esta tesis.

Mateos considera el problema unidimensional de una partícula que experimenta una fuerza externa dependiente del tiempo, sujeta a un potencial periódico pero asimétrico espacialmente (Fig. 4.4), y frenada por la fricción:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{dV(x)}{dx} = F_0 \cos(\omega_D t) \quad (4.3)$$

donde m es la masa de la partícula, γ es el coeficiente de fricción, $V(x)$ es el potencial periódico y asimétrico, F_0 es la amplitud de la fuerza externa, y ω_D es la frecuencia de la fuerza externa.

El potencial asimétrico que usó, fue:

$$V(x) = V_1 - V_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi(x-x_0)}{L} - \frac{V_0}{4} \operatorname{sen} \frac{4\pi(x-x_0)}{L} \quad (4.4)$$

donde L es la periodicidad del potencial, V_0 es la amplitud, y V_1 es una constante arbitraria. Adicionalmente el potencial está desplazado x_0 unidades, de tal forma que los mínimos del potencial coincidan con los enteros en la posición (Fig. 4.4).

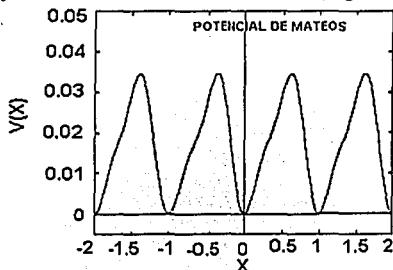


Fig. 4.4 Potencial estudiado por Mateos (tomado de [5]), donde tomó valores para los parámetros de éste potencial, tales que los mínimos coincidieran con los valores enteros en la posición. Obsérvese la asimetría del potencial.

La ecuación de Mateos es la equivalente a la de un péndulo forzado con fricción, como las vistas en el capítulo 2, pero además, sujeto a un potencial asimétrico. Una representación más adecuada de este sistema, sería el de una partícula que se encuentra en un potencial asimétrico, dado por la ecuación (4.4), y que este potencial está oscilando de manera periódica en el tiempo, dado por la expresión del lado derecho de la ecuación (4.3).

La figura siguiente muestra una diagrama de dicha representación.

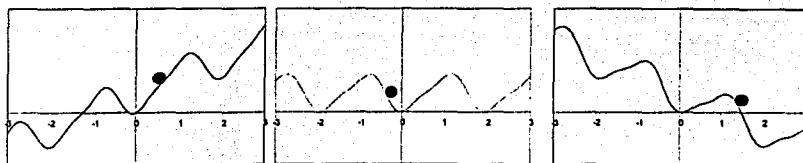


Fig. 4.5 Una representación del oscilador de Mateos dada por la ecuación (4.4). Una partícula en dicho oscilador experimentará un desplazamiento caótico producido por la fuerza externa, el potencial y la fricción.

La gráfica de la fuerza que da origen a este potencial asimétrico puede apreciarse como sigue:

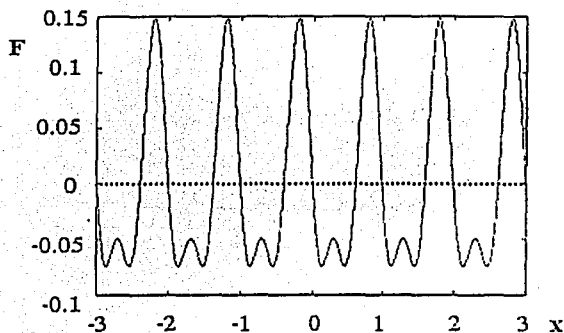


Fig. 4.6 Fuerza que produce el potencial de Mateos. En los valores enteros de la posición la fuerza se anula.

Una vez más obsérvese que la fuerza se anula en los enteros, y en aquellos valores para los cuales el potencial (4.4) presenta máximos. Entre cada entero, se pueden observar dos mínimos y un máximo, lo cual tiene consecuencias importantes en la dinámica.

La meta en los artículos de Mateos [5 -8] es revelar el origen de una inversión de corriente que se presenta cuando el sistema transita del caos al orden; su análisis lo enfoca a estudiar la corriente promedio para distintas condiciones iniciales, y sus resultados apuntan a una interesante interrelación en algunos casos entre la inversión de corriente y las transiciones del sistema del caos al orden. La figura 4.4 muestra sus resultados:

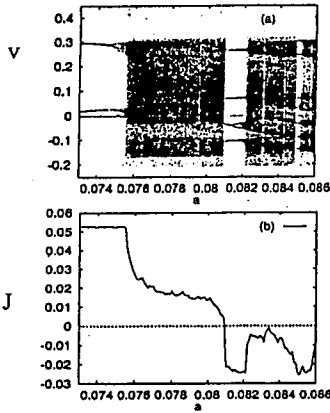


Fig. 4.7 Diagrama de bifurcaciones (a) para el potencial (4.2) estudiado por Mateos, y comparado con la gráfica de corriente promedio (b) producido por ese mismo potencial, al cambiar los valores del parámetro a. (Tomado de [5].)

En sus trabajos [5-8] se realiza un promedio de la velocidad sobre q periodos T de la fuerza externa, donde q es un número entero, y $T = 2\pi/\omega$. Esto es:

$$v = \frac{1}{qT} \int_0^{+qT} v(t') dt' \quad (4.5)$$

Como $v = \dot{x}$, obtiene $v = [x(t+qT) - x(t)]/qT$. Si la partícula se mueve una distancia p en un tiempo qT , donde p es otro número entero, entonces se tiene la condición $x(t+qT) - x(t) = p$. Así, se llega a que la corriente está dada por

$$Tv = \frac{p}{q} \quad (4.6)$$

Esto significa que se tiene un *enganche de frecuencias* donde la corriente es T veces un número racional p/q . Este enganche tiene lugar en un amplio rango de valores del parámetro a de la ecuación sin dimensiones que surge de (4.3):

$$x + bx + \frac{dV(x)}{dx} = a \cos(\omega t) \quad (4.7)$$

donde el potencial adimensional queda como:

$$V(x) = C - \frac{1}{4\pi^2\delta} \left(\sin 2\pi(x - x_0) + \frac{1}{4} \sin 4\pi(x - x_0) \right) \quad (4.8)$$

Más aún, en un trabajo reciente [8], Mateos descubre que las inversiones de corriente pueden depender también de las condiciones iniciales en el caso en que exista más de un atractor en el espacio fase. Analiza el espacio fase de condiciones iniciales para las que se presentan las inversiones de corriente (Fig. 4.8), encontrando dos interesantes atractores coexistiendo simultáneamente y compitiendo por la dinámica del sistema Fig. 4.8

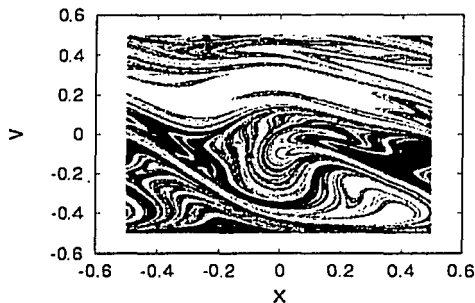


Fig. 4.8 Espacio fase de las condiciones iniciales estudiado por Mateos al estudiar la ecuación (4.3). Tomado de [7]

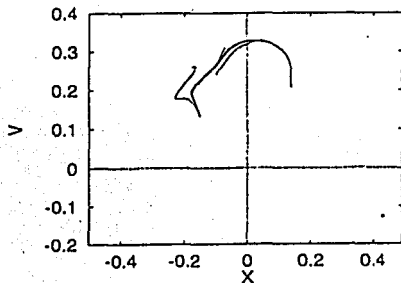


Fig. 4.9 Dos atractores puntuales coexistiendo por la dinámica, encontrados por Mateos al estudiar la ecuación (4.3). Tomado de [7]

En un trabajo también reciente, Carapella y otros [33] encuentran experimentalmente la inversión de corriente que había predicho Mateos en [5] y [6], pero en un sistema físico muy diferente. De hecho, ellos utilizan la ecuación:

$$\frac{4}{\pi} (1 - \xi^2)^{-1/2} \xi + \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \eta + F(\xi) \quad (4.9)$$

que describe el movimiento de una partícula relativista sujeta a una fuerza in homogénea $F(\xi)$ con un potencial de diente de sierra $U(\xi)$ (véase figura 4.10), y una fuerza homogénea η . En la sección siguiente hablaré con un poco más de detenimiento de este artículo.

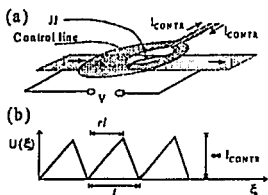


Fig. 4.10 Experimento de [35] (a) donde crean experimentalmente un potencial de diente de sierra (b) y observan el comportamiento de la corriente eléctrica. Tomado de [35]

Por otro lado, H.A. Larrondo, F. Family y C.M. Arizmendi [37] analizan un potencial oscilante determinista con fricción, para un sistema de la forma:

$$\varepsilon \ddot{x} + \gamma \dot{x} = \cos(x) + \mu \cos(2x) + \Gamma \sin(\omega t) \quad (4.10)$$

donde ε es la masa de la partícula, γ es el coeficiente de fricción, Γ y ω son respectivamente la amplitud y la frecuencia de una fuerza oscilatoria externa. Utilizan también un potencial asimétrico como Mateos, pero ellos con una estructura matemática más simple, aunque menos práctica:

$$U(x) = -\sin(x) - \frac{\mu}{2} \sin(2x) \quad (4.11)$$

En sus resultados encuentra también inversiones de corriente, como las que encontró Mateos. Figura (4.11)

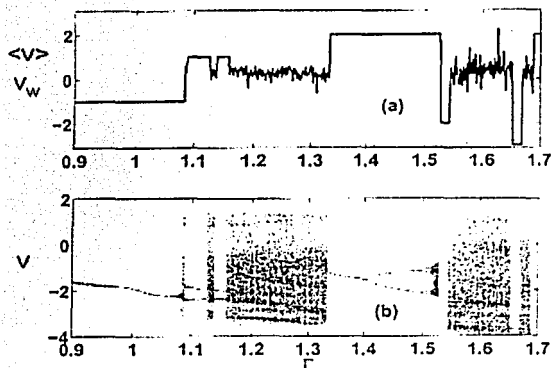


Fig. 4.11 Comparación de la corriente y el diagrama de bifurcaciones obtenidas por [37]. Obsérvese las inversiones de corriente en las regiones de transición del caos al orden.

Adicionalmente, Mateos encuentra en otro trabajo reciente [7], que las inversiones de corriente pueden darse sin necesidad de cambiar condiciones iniciales, o cambiar el parámetro Ω de el potencial, esto lo logra trabajando con partículas extendidas (dímeros). Sus resultados apuntan a que la longitud del dímero influye también en la inversión de corriente.

En el siguiente apartado analizaremos un poco algunos trabajos sobre potenciales oscilantes de otros grupos de trabajo.

4.2 Otros Potenciales

El trabajo de Mateos [5] ha despertado mucho interés en la literatura, y actualmente varios autores han explorado diversas avenidas de la dinámica caótica en potenciales oscilantes deterministas. En este apartado vamos a mencionar algunos de ellos, empezando por los que tienen que ver con el potencial oscilante de Mateos, siguiendo con los potenciales cuánticos y terminando con los potenciales paramétricos oscilantes, que es materia del siguiente capítulo.

Empezaremos por describir el trabajo de H. A. Larrondo y F. Family [37]. El sistema que analizan está dado por la ecuación (4.10) y el potencial por la (4.11)

Hacen uso de un método de resolución numérica para resolver la ecuación. (4.10) y fijan los valores de los parámetros con los mismos valores numéricos que usó Mateos en su trabajo [5] original.

Hacen un promedio sobre condiciones iniciales como lo hizo Mateos [5] y [6] y encuentran también que hay inversiones de corriente al pasar del caos al orden como lo muestra figura 4.11.

Adicionalmente, en las regiones donde se presenta corriente, encuentran al igual que Mateos [5] y [6] que a la corriente promedio se le puede describir con una recta, Fig. 4.12.

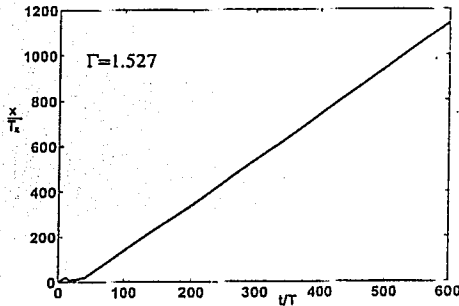


Fig. 4.12 Corriente encontrada por [35] para el sistema descrito por las ecuaciones (4.10) y (4.11). La corriente promedio puede describirse en un amplio rango con la ecuación de una recta.

Este fenómeno sorprendentemente se registra también en el potencial intermitente que se estudia en el capítulo 5.

La inversión de corriente al pasar del caos al orden queda demostrada físicamente con el experimento de Carapella, Costabile, Latempa y Martucciello [35]. Este experimento abre la posibilidad de que la inversiones de corriente sean una peculiaridad de muchos sistemas físicos no lineales.

El experimento de Carapella, y su equipo [35] consistió en observar la corriente que producía un flujo cuántico relativista atrapado en una junta Josephson, inmersa en un campo magnético. Este tipo de experimentos de estado sólido no son nuevos. Ellos mismos reconocen en su artículo que el efecto de potencial oscilante se ha registrado ya en el régimen sobre amortiguado, en otros experimentos. Por esa razón, ellos experimentan en el régimen sub amortiguado.

Un campo magnético in homogéneo puede generar un potencial para un flujo cuántico atrapado en una junta Josephson anular larga (Fig. 4.11 a). Con una elección adecuada de el ancho $W(x)$ de una línea de control en el borde de la junta, (Fig. 4.11 b), se puede crear un campo magnético de forma de diente de sierra. Adicionalmente al sistema se le inducen

microondas las cuales crean voltajes escalonados. Esos voltajes escalonados son bombeados con una frecuencia ν_{RF} .

En el caso de éste sistema, la corriente corresponde al voltaje neto. Al medir la corriente eléctrica como función del voltaje, ellos encuentran que para algunos valores de la frecuencia de microondas inducidas en el sistema (i.e.: $\nu_{RF} = 2.0$ GHz y $\nu_{RF} = 5.8$ GHz) hay inversiones de corriente (Fig. 4.13)

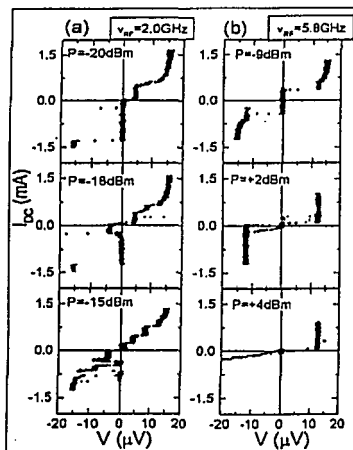


Fig. 4.13. Inversiones de corriente encontradas por Carapella et al experimentalmente en juntas Josephson. Tomado de [35].

En un trabajo teórico, Flach, Yevtushenko y Zolotaryuk [17], indican que el fenómeno de corriente dirigida se debe al rompimiento de las simetrías espaciales o temporales del sistema. Su análisis lo hacen tanto para sistemas con y sin fricción, y para ambos encuentran que la corriente dirigida puede darse, porque el conjunto de atractores conserva el rompimiento de simetría en las bases de atracción.

El trabajo de Riemann, Grifoni y Hänggi [16] sobre potenciales oscilantes cuánticos es también muy interesantes. Este trabajo es anterior al de Mateos [5]. Ellos consideran el movimiento Browniano cuántico de una partícula sujeta a un potencial similar al que posteriormente usara Mateos:

$$V(x) = V_0[\text{sen}(2\pi x / L) - 0.22\text{sen}(4\pi x / L)] \quad (4.12)$$

El objetivo de su trabajo es estudiar un rectificador cuántico operando en un régimen donde el tunelaje y otros efectos de fluctuación cuántica se vuelven importantes para las propiedades de transporte. Sus resultados muestran que arriba de una temperatura crítica T_c no se encuentran diferencias con las predicciones que hace la teoría clásica sobre corriente.

Sin embargo, debajo de esa temperatura crítica, el transporte cuántico se incrementa notablemente, discordando con los resultados adiabáticos clásicos, llegando incluso a invertirse la dirección del transporte.

Otro trabajo interesante también en cuántica, es el realizado por Linke, Sheng, Löfgren, et al. [20].

Lo que ellos hacen es investigar teórica y experimentalmente el comportamiento de la corriente eléctrica en un potencial triangular cuántico puntual oscilante (Fig. 4.14).

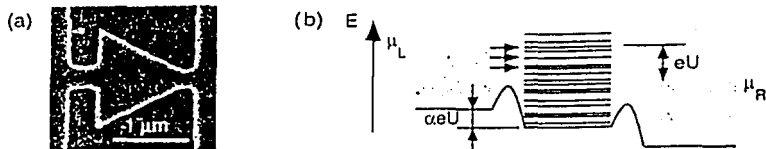


Fig. 4.14 Potencial triangular cuántico oscilante estudiado por [20]. Tomado de [20].

Ellos encuentran que el transporte coherente de electrones a través de ese dispositivo, depende del signo del voltaje, y que la dirección de la corriente depende de la amplitud a la que se hace oscilar el potencial. En este sentido, es posible obtener una corriente neta aún cuando el voltaje AC sea cero en promedio. El experimento lo hacen para distintas resistencias, y lo comparan con los valores teóricos. (Fig. 4.15)

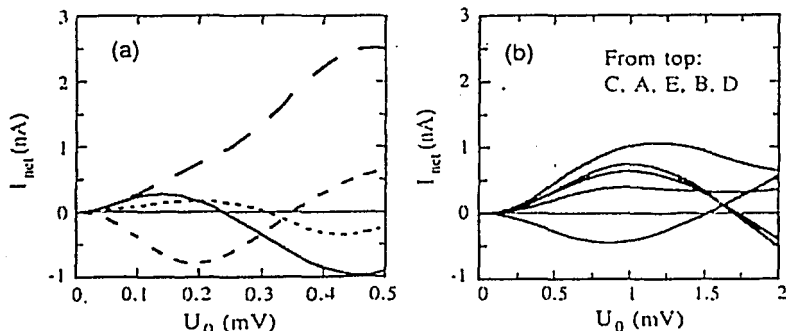


Fig. 4.15 Corriente encontrada por [20] para el potencial triangular cuántico de la figura 4.11, para varias resistencias (Véase artículo [20] para más detalles. Tomada de [20].

Mencionaré por último dentro de los trabajos en cuántica, el de Schanz, Otto, Ketzmerick y Dittrich [32]. Ellos explican en su artículo los mecanismos que llevan al transporte caótico dirigido en sistemas Hamiltonianos con periodicidad espacial y temporal. Lo que hacen es obtener una regla de suma para el transporte para los casos clásico y cuántico, y llegan a la conclusiones de que (i) el transporte dirigido es una propiedad asociada con conjuntos invariantes individuales de la dinámica, de hecho, para obtener una corriente diferente de cero, se debe tener un espacio fase mezclado con regiones regulares y caóticas coexistiendo simultáneamente. (Este hecho recuerda a lo encontrado anteriormente por Mateos [7]) (ii) el transporte en regiones caóticas puede ser descrito cuantitativamente usando propiedades topológicas y de otro tipo de únicamente las regiones regulares. Y (iii) el transporte cuántico persiste para todo tiempo y se aproxima al transporte clásico cuando \hbar es pequeña comparada con los conjuntos invariantes del espacio fase clásico.

Pasamos ahora a mencionar algunos de los trabajos hechos en potenciales paramétricos. Comenzando con el de Chacón [16] en el que estudia teóricamente una ecuación para el péndulo paramétrico con fricción, del tipo

$$\ddot{x} = -[1 + \xi \cos(\Omega t + \theta)] \text{sen} x - \delta \dot{x} + \gamma \cos(\omega t) \quad (4.13)$$

donde x es la coordenada angular, y Ω , ξ y θ son la frecuencia normalizada, la amplitud, y la fase inicial respectivamente, de la modulación paramétrica. Chacón encuentra que pueden deducirse algunos lemas interesantes los que le sirven para formular un "Teorema de Supresión", el cual le permite identificar las condiciones que dan lugar a la supresión del caos en la ecuación (4.13). El concluye que algunos de los resultados analíticos a los que llega tienen su origen en las simetrías naturales del sistema, y que el estudio de dichas simetrías podría proveer información importante sobre la supresión del caos en sistemas más complejos.

Pasemos finalmente a mencionar el trabajo sobre dímeros paramétricos hecho por Copelli y Lindenberg [34]. Ellos, en su trabajo, estudian dos osciladores paramétricos lineales acoplados de la forma

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\omega_0^2 [1 + \phi_1(t)] x_1 - k(x_1 - x_2) - \gamma \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_0^2 [1 + \phi_2(t)] x_2 - k(x_2 - x_1) - \gamma \dot{x}_2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde ω_0 es la frecuencia natural de cada oscilador (desacoplado), k es la constante de acoplamiento entre ellos, y γ es el coeficiente de fricción. Las modulaciones paramétricas $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ son periódicas con periodo $T \equiv 2\pi/\omega_p$ y son idénticas excepto por una diferencia de fase θ , que es $\phi_2(t) = \phi_1(t + \theta/\omega_p)$. En la presencia de modulaciones paramétricas, la energía es periódicamente bombeada al sistema, el cual puede o no llevar a resonancia paramétrica, es decir, a un crecimiento infinito de la amplitud de las oscilaciones. Su objetivo es determinar las fronteras entre esos dos comportamientos, los cuales pueden ser

referidos como “estables” e “inestables”. La figura siguiente muestra las fronteras que ellos encontraron para su sistema:

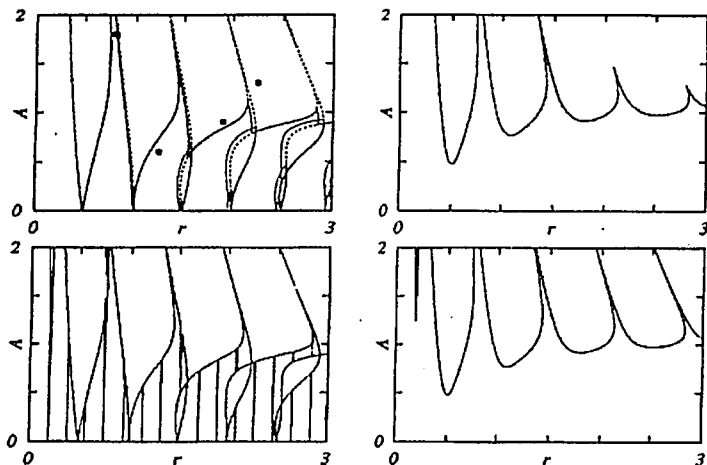


Fig. 4.16 Fronteras de inestabilidad encontradas por [34] para el sistema (4.14). Las gráficas muestran la amplitud graficada contra la frecuencia, definida como $r=\omega_0/\omega_p$, $\gamma=0$ en la primera columna, mientras que $\gamma=0.3\omega_0$ en la segunda columna. Así mismo, $k=0.02\omega_0^2$ en las gráficas del primer renglón, y $k=3\omega_0^2$ en las gráficas del segundo renglón. Las líneas punteadas en la primera de las gráficas (superior izquierda) corresponde a $k=0$, (un oscilador desacoplado).

Se han escrito muchos otros trabajos sobre potenciales oscilantes, clásicos, cuánticos y con o sin ruido. En mi caso he mencionado sólo algunos que se considero como los más importantes para esta tesis. En el siguiente capítulo me concretaré en un tipo de oscilador paramétrico que no se ha estudiado en detalle aún.

Capítulo V

Capítulo V

Potenciales Intermitentes

Con las herramientas presentadas en los capítulos 1, 2 y 3; y los antecedentes expuestos en el capítulo 4, se tienen las condiciones suficientes para desarrollar un estudio de los potenciales intermitentes.

Partiré de la ecuación

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \frac{dV(x)}{dx}(1 + a \cos(\omega_D t)) = 0 \quad (5.1)$$

donde m es la masa de la partícula, γ es la fricción, $V(x)$ es el potencial, a es la amplitud del forzamiento, y ω_D es la frecuencia de oscilación del forzamiento. Esta ecuación describe un potencial asimétrico del tipo usado por Mateos, pero con la amplitud siendo forzada por un término dependiente del tiempo, similar al de un péndulo paramétrico con fricción. A este tipo de potenciales se les suele llamar "Flashing Ratchets" o potenciales intermitentes, donde la frecuencia de la intermitencia está dada por ω_D .

La ecuación sin unidades es la que se utilizará para el análisis físico, para poder así concentrarnos más en la dinámica del sistema. Así mismo, utilizaré el mismo potencial $V(x)$ empleado por Mateos [5], [6],[7] y [8] para su potencial oscilante, quedando la ecuación (5.1) como sigue:

$$x + bx + \frac{dV(x)}{dx}(1 + a \cos(\omega t)) = 0 \quad (5.2)$$

con $V(x) = (\text{fac})[\cos(2\pi(x-x_v)) + 0.5\cos(4\pi(x-x_v))]$

donde $\text{fac} = 1/(2\pi\delta)$

con $\delta = 1.6118559$

y $x_v = -0.190359$

Este último valor x_v es el corrimiento del potencial para hacer que el mínimo del potencial coincida con el origen de coordenadas.

5.1 Precisiones generales

En ésta tesis me concretaré al análisis del "Potencial intermitente" para valores específicos de los parámetros b y ω ; sujetos a las condiciones iniciales de $x_0=0$ con $v_0=0$ al tiempo

inicial $t_0=0$. El parámetro a no se fijará en éste momento, porque nos interesa el estudio del potencial intermitente para distintas amplitudes.

Los valores que fijé para b y ω fueron: $b=0.1$ que corresponde a una fricción chica pero no despreciable, y $\omega=1$ con el único fin de simplificar el análisis físico. Más adelante a lo largo de éste capítulo, vario la fricción y la frecuencia del forzamiento, en la búsqueda de una explicación a lo observado.

Existen varios métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales como la (5.2), como son el método de Euler, el método corrector-predicor, el método de Runge-Kutta de 4° orden, el de Runge-Kutta de 6° orden, etc. En ésta tesis utilicé el método de Runge-Kutta de 4° orden para resolver la ecuación diferencial con estos valores y condiciones iniciales, y usando un formato de doble precisión para cada uno de los valores de los parámetros y condiciones iniciales; la razón se debe a la precisión que tiene, que es superior a los métodos de Euler, y el predictor-corrector, pero inferior al de Runge-Kutta de 6° orden. Este último método no lo usé por el tiempo que requiere para procesar los resultados. El método de Runge Kutta de 4° orden es en principio suficientemente preciso para los fines de ésta tesis. Con todo lo anterior, obtuve los siguientes resultados:

Como primer paso se procedió a obtener un diagrama de bifurcaciones amplio del sistema en estudio para la velocidad como función de la amplitud.

La gráfica siguiente muestra los resultados obtenidos en el rango comprendido de 0 a 10 en la escala sin unidades de la amplitud a :

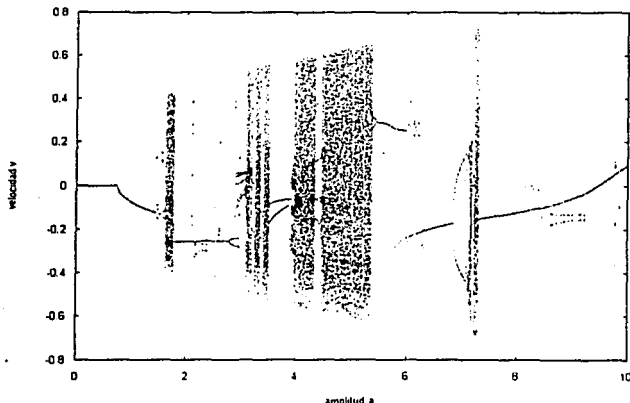


Fig. 5.1 Velocidad vs. Amplitud. Diagrama de bifurcaciones para la ecuación (5.2) del Flashing Ratchet, con $b=0.1$ y $w=1$.

En esta primera gráfica pueden observarse los valores de la amplitud a , para los cuales el sistema bifurca sus velocidades. La intención es detectar los valores para los cuales el sistema sale fuera del punto de equilibrio y comienza a desplazarse hacia una determinada dirección.

Observamos en primer lugar que la primera bifurcación que se da, es antes de la amplitud de valor 1, es una bifurcación de punto silla, donde el punto estable está graficado (rama inferior de la bifurcación) y el punto inestable no está graficado (rama superior de la bifurcación), pero se presentará como un fenómeno de histéresis al disminuir la amplitud.

El diagrama de bifurcaciones 5.1 indica para qué valores de la amplitud podemos esperar valores caóticos de la velocidad. También nos indica en dónde hay atractores y el número de periodos que tienen esos atractores. Así por ejemplo, para amplitud $a=2$ hay un atractor de periodo 1 con velocidad negativa, para $a=3.7$ hay un atractor de periodo 2 con ambos periodos con velocidades negativas, y así sucesivamente. El hecho, sin embargo, de que en algunas regiones del diagrama de bifurcaciones existan velocidades diferentes de cero, no indica que la partícula se esté moviendo en una cierta dirección.

Para ello será entonces necesario analizar la corriente que se obtiene con este mismo sistema para tiempos grandes, y compararlo con el diagrama de bifurcaciones. La meta es entender cuál es el origen de la aparición de corriente visto desde la dinámica caótica.

Para ello definiremos la velocidad promedio como sigue:

5.2 Desarrollo del promedio temporal de la velocidad

Partimos de la definición de velocidad promedio:

$$\bar{v} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \quad (5.3)$$

Para el Flashing Ratchet hemos hecho el periodo $T = n\tau$ con $\tau = 2\pi/\omega$. Es decir que

$$\bar{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} v(t) dt \quad (5.4)$$

pero para fines de cálculo numérico en computadora, n no puede tender a infinito, sino sólo a un número muy grande. Así que eliminamos el límite bajo la aclaración de que debe ser $n \gg 1$.

$$\bar{v} = \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} v(t) dt \quad (5.5)$$

para el Flashing Ratchet hicimos

$$v(t) = \dot{x}(t) \quad (5.6)$$

entonces la integral queda como:

$$\bar{v} = \frac{1}{n\tau} \int_0^{n\tau} v(t) dt = \frac{1}{n\tau} [x(n\tau) - x(0)] \quad (5.7)$$

Multiplicamos ahora por τ , para hacer así que la velocidad promedio coincida con el enganche de frecuencias (frequency locking):

$$\tau \bar{v} = \tau \left[\frac{x(n\tau) - x(0)}{n\tau} \right] \quad (5.8)$$

$$\frac{\bar{v}}{w/2\pi} = \frac{x(n\tau) - x(0)}{n}$$

y ésta última es la expresión que se usó en los programas para calcular numéricamente la velocidad promedio (que aquí se hizo coincidir con el enganche de frecuencias), con n del orden de 10^6

En base a esto, calculamos la velocidad promedio para distintas amplitudes, y obtenemos la siguiente gráfica:

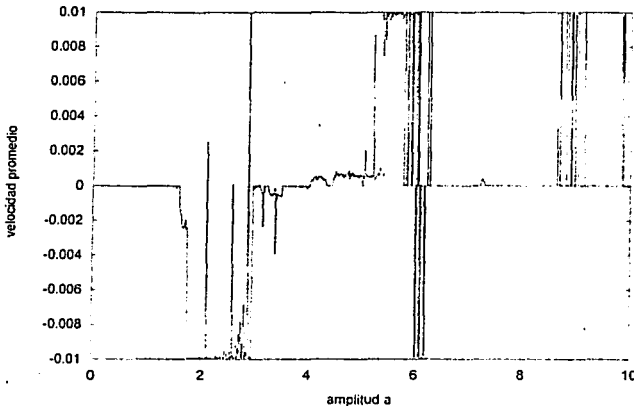


Fig. 5.2 Velocidad promedio vs. la amplitud a para el péndulo paramétrico. La velocidad promedio representa también en ésta gráfica el coeficiente de enganchamiento.

Los puntos fueron unidos con líneas para obtener una mejor ubicación visual de ellos. La gráfica de corriente indica que hay valores de la amplitud a para los cuales la velocidad promedio ya no es cero, y para los cuáles puede haber una corriente neta diferente de cero.

Los valores que toma la velocidad promedio indican el número de oscilaciones que debe efectuar el potencial para que la partícula adimensional se desplace al siguiente mínimo del potencial. Así por ejemplo, para una amplitud de alrededor de 2 unidades¹ se puede apreciar una corriente promedio de 0.01 unidades.

Este valor indica más que simplemente la velocidad promedio: por como se ha calculado la corriente promedio, indica además el coeficiente de enganchamiento, siendo éste de -0.01. Esto indica, según el capítulo 3 de ésta tesis, que el número de oscilaciones que debe efectuar el potencial para que la partícula adimensional se desplace en promedio un potencial hacia la izquierda (representado por el signo "menos"), es de 100, para una amplitud a de oscilación de 2 unidades.

Algo similar se observa para valores de la amplitud un poco menores a 6 unidades: El número de oscilaciones que el potencial debe efectuar para que la partícula se desplace un potencial hacia la derecha es de 100 oscilaciones.

La parte importante es ahora, correlacionar ésta gráfica de velocidad promedio con la gráfica de la velocidad del diagrama de bifurcaciones, tal como lo hizo Mateos [5-8], para ello, superpondré ambas gráficas para encontrar los valores en los que ambos coinciden – página siguiente-:

La superposición muestra claramente la correspondencia entre las regiones estables y las inestables.

¹ 2 en la escala sin unidades.

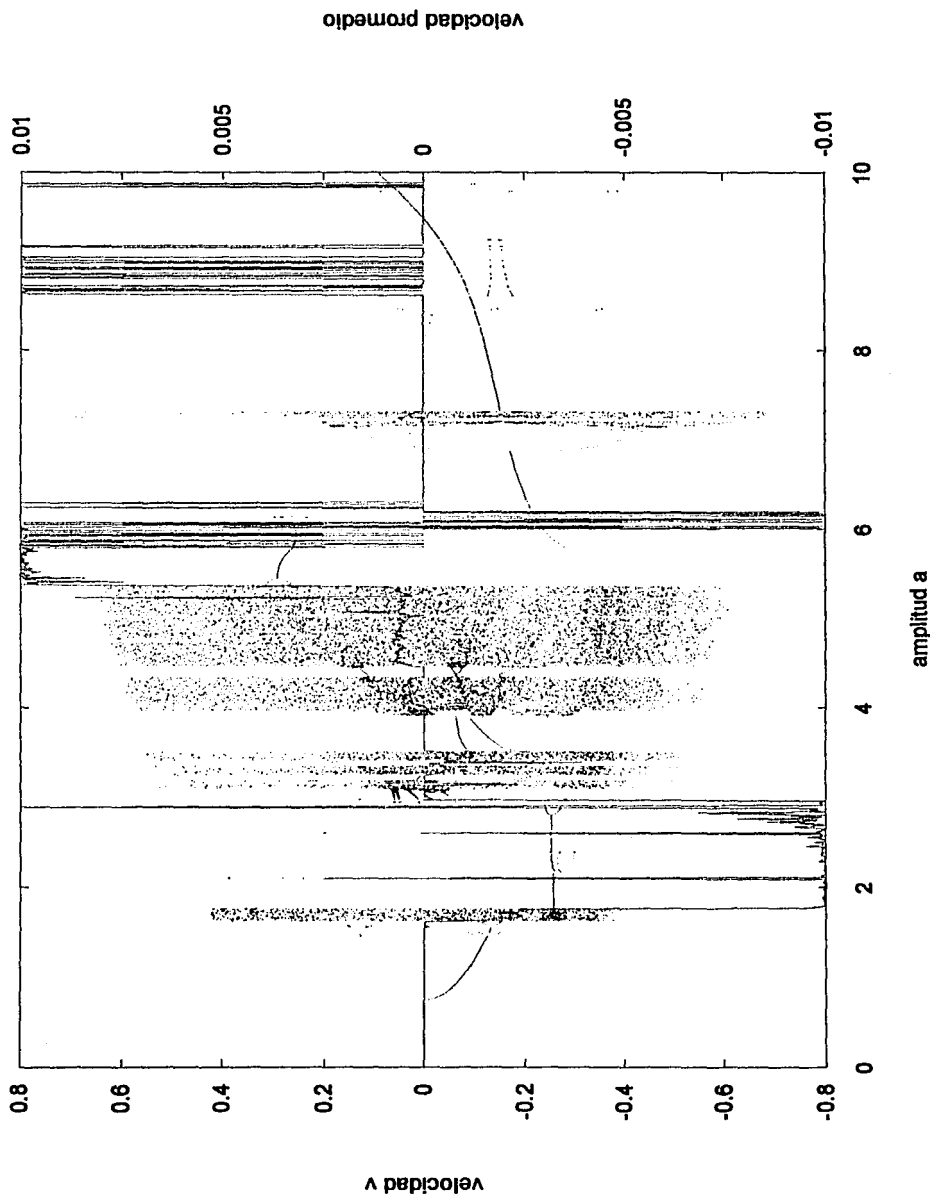


Fig 5.3 Diagrama de bifurcaciones superpuesto con la corriente para $b=0.1$ y $\omega=1$. La línea roja corresponde a la corriente y los puntos negros al diagrama de bifurcaciones para la velocidad.

Se observa entre otras cosas, que los valores de la amplitud para los que se presenta una corriente promedio neta diferente de cero, corresponden en algunos casos a los valores para los que el sistema transita del caos al orden, pero creando órbitas de periodo 1. Incluso para valores cercanos a la amplitud a de 1 unidades, que es donde comienza la primera bifurcación, se presenta también una corriente, solo que en una escala del orden de 1×10^{-9} , como se puede apreciar en la siguiente gráfica:

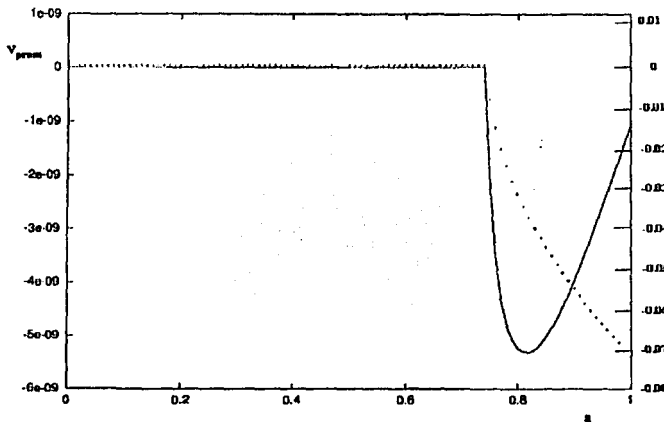


Fig. 5.4
Amplificación de la corriente en el intervalo 0 a 1 para el Flashing Ratchet. Se observa una velocidad promedio hacia la izquierda del orden de 5×10^{-9} unidades de longitud por unidad de tiempo, cerca de la amplitud $a=0.8$, justo donde comienza la primera bifurcación.

5.2 Experimentos Numéricos

Voy ahora a sacar para algunas amplitudes a , los espacios fases y los gráficos de velocidad y posición vs. tiempo, a fin de tener una representación más clara de la dinámica en esas zonas. Para todos los casos utilicé las mismas condiciones iniciales: $x(0)=0$ y $v(0)=0$. Así como también, conservé los valores de los parámetros $b=0.1$ y $w=1$. En todas las gráficas siguientes se hizo un cambio de variables para que los valores enteros de la posición coincidieran con los mínimos del potencial de Mateos. Así también, hice un cambio de escala en la variable temporal, para que las unidades de tiempo coincidieran con el número de oscilaciones del potencial.

Comenzaré con el caso de $a=1.2$, el cual indica la figura 5.3, no se debe apreciar una corriente aunque si un atractor con órbitas de periodo 1. Su diagrama de posición vs. tiempo se muestra a continuación:

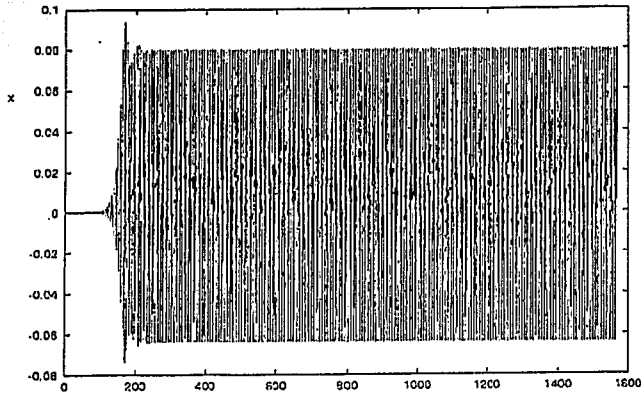


Fig. 5.5 posición vs tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=1.2$.

y su gráfica de velocidad vs. Tiempo se esboza como sigue:

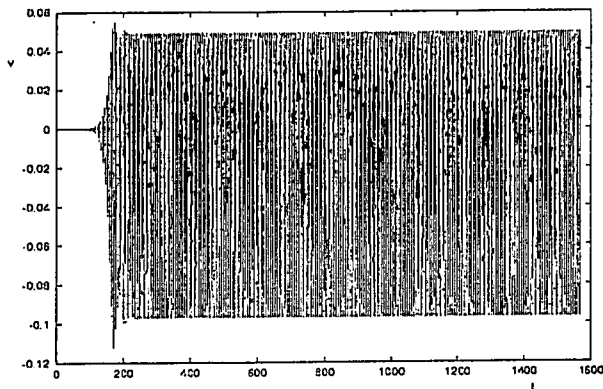


Fig. 5.6 velocidad vs tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=1.2$.

tanto la posición como la velocidad oscilan alrededor de valores fijos, y no se presenta corriente alguna.

En el espacio fase para ésta amplitud se puede lograr una mejor apreciación:

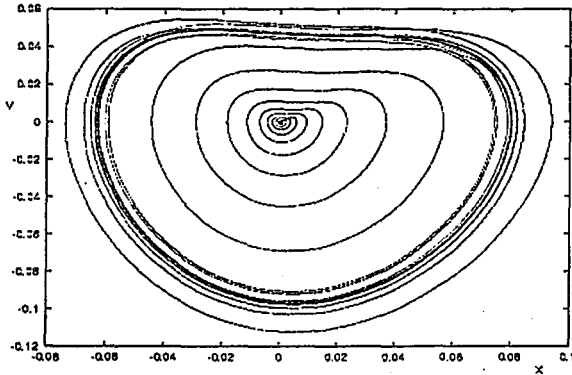


Fig. 5.7 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=1.2$.

Algo muy interesante que se presenta en éste sistema es que se parte de condiciones iniciales nulas ($x_0 = 0$ y $v_0 = 0$) y sin embargo se presenta movimiento.

Analicemos ahora el caso para la amplitud $a=2$, comenzando con su gráfica de posición vs. Tiempo, según la gráfica 5.3 aquí si debemos esperar una corriente y además negativa:

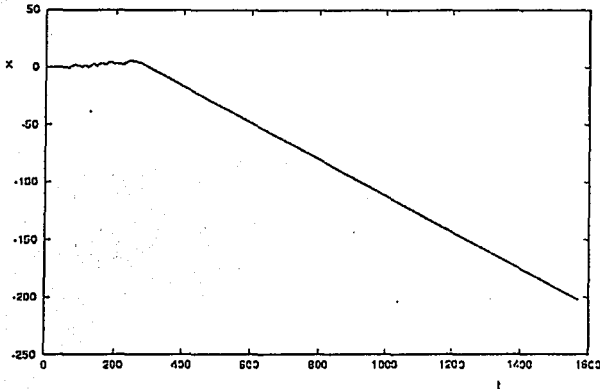


Fig. 5.8 Posición vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=2$.

La gráfica anterior corrobora lo predicho. La gráfica de velocidad vs. Tiempo se muestra a continuación:

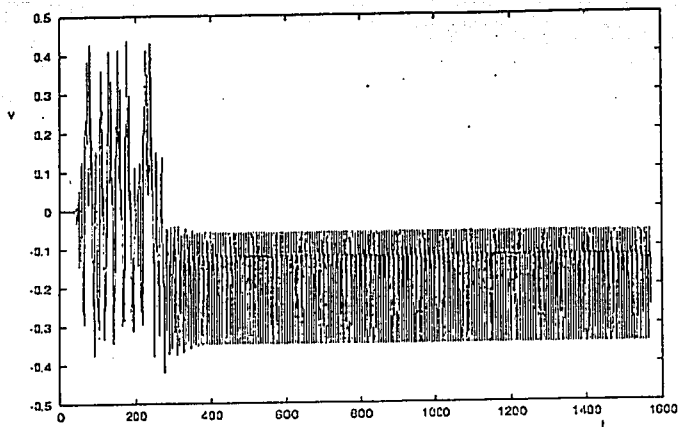


Fig. 5.9 Velocidad vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=2$.

Se observa a partir de $t=300$, una velocidad promedio de $v_{prom} = -0.2$. Si bien al principio en las primeras 100 unidades de tiempo hay una velocidad promedio cero, después de 300 unidades de tiempo comienza a haber una velocidad negativa cuyo promedio ya no es cero.

El espacio fase se muestra a continuación para la amplitud $a=2$

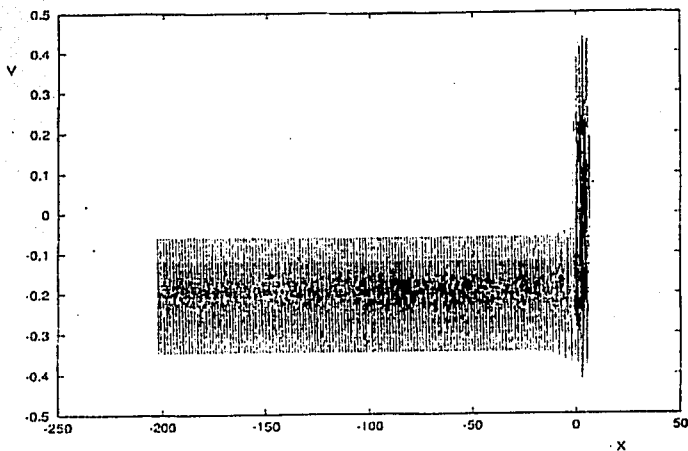


Fig. 5.10 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=2$.

Para el caso de la amplitud $a=3.7$, según la gráfica 5.3, debemos encontrar un atractor con órbitas de periodo 2, y no debe haber corriente:

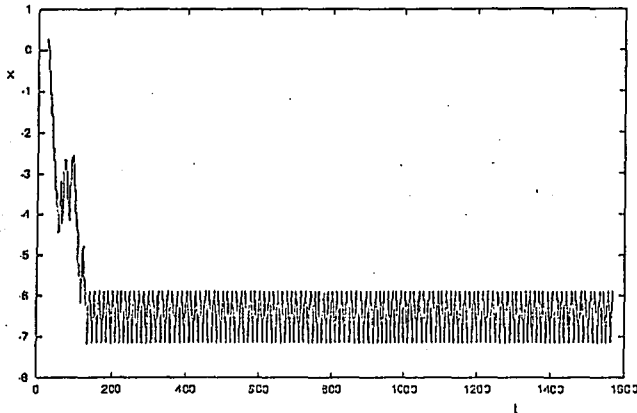


Fig. 5.11 Posición vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=3.7$.

la gráfica anterior muestra sólo un desplazamiento hasta el 6° y 7° mínimo del potencial, después de los cuáles la partícula ya no puede seguir desplazándose.

La gráfica de la velocidad vs. Tiempo para ésta amplitud, se muestra a continuación:

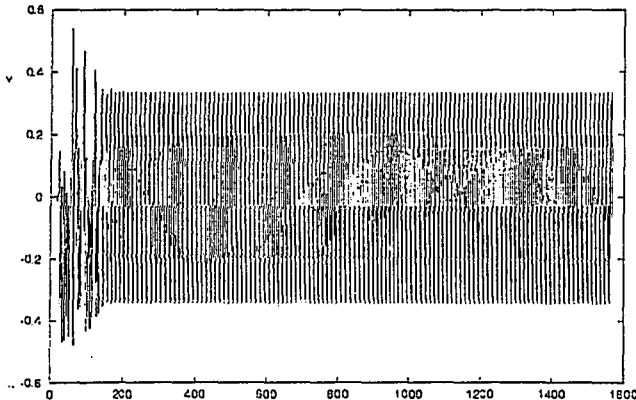


Fig. 5.12 Velocidad vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=3.7$.

Aunque la velocidad oscila alrededor del origen, su promedio temporal es nulo.

El espacio fase para ésta amplitud de 3.7 unidades, resume las gráficas anteriores:

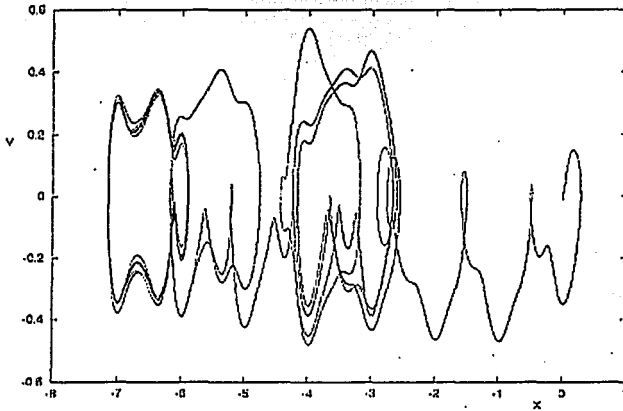


Fig. 5.13 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=3.7$.

El ciclo límite se observa a la izquierda de la gráfica.

Analicemos ahora el caso $a=4.3$, según la gráfica 5.3 no debe haber corriente, aunque si un ciclo límite de periodo 2. Comenzamos una vez más con la gráfica de posición vs. Tiempo:

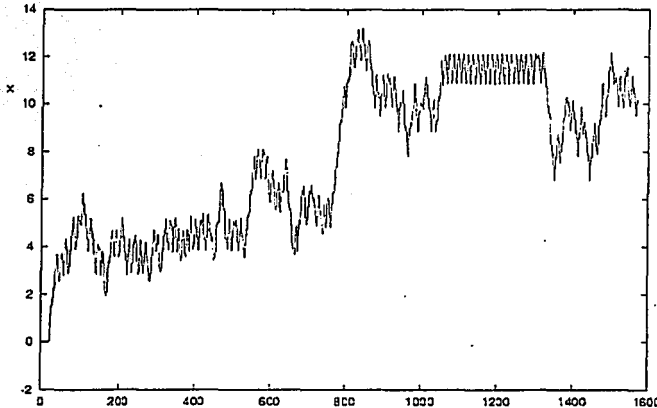


Fig. 5.14 Posición vs tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=4.3$

En ésta gráfica se aprecia un desplazamiento hacia el sentido positivo, pero no se aprecia una corriente definida.

La gráfica de la velocidad vs. Tiempo se muestra a continuación:

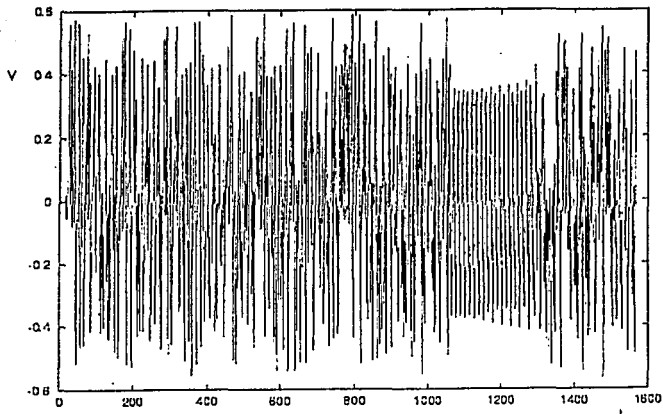


Fig. 5.15 Velocidad vs tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=4.3$

La gráfica anterior manifiesta tener una velocidad promedio temporal cero, tal y como lo predijo la figura 5.3.

El espacio fase para ésta amplitud se esboza como sigue:

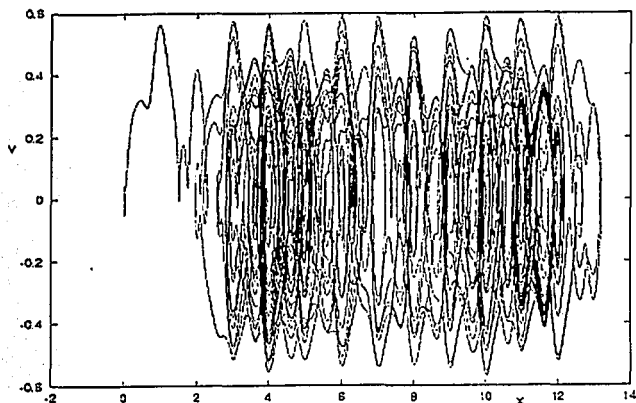


Fig. 5.16 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=4.3$

El ciclo límite tarda en alcanzarse, pero se logra ubicar entre los mínimos 10 y 12 del potencial de Mateos.

Analicemos ahora otro valor de la amplitud que se espere, según la figura 5.3, presente corriente. Aquí he elegido el valor $a = 5.7$, el cual predice la gráfica 5.3 debe presentar corriente positiva. La gráfica de posición vs. Tiempo se muestra a continuación:

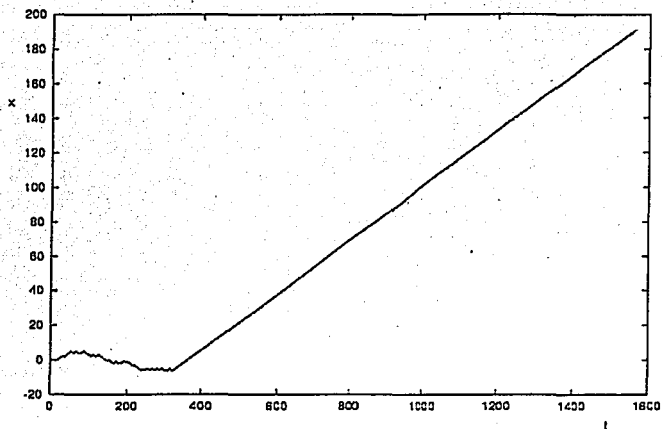


Fig. 5.17 Posición vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=5.7$

Se logra apreciar en ésta gráfica que el número de oscilaciones que el potencial debe hacer para que la partícula comience a presentar corriente, debe ser del orden de 300 oscilaciones. Así mismo, se observa una velocidad promedio, dada por la pendiente promedio, de $v_{prom} = 0.2$

La gráfica de velocidad vs. Tiempo para ésta amplitud $a=5.7$ se muestra a continuación:

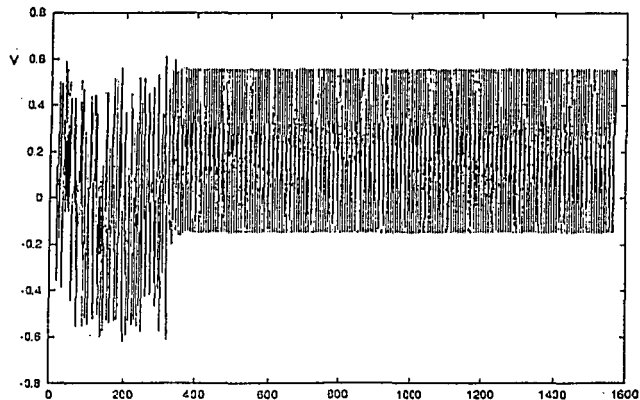


Fig. 5.18 Posición vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=5.7$

Obsérvese que hay una velocidad promedio temporal diferente de cero, después de las 300 oscilaciones del sistema. El espacio fase se muestra a continuación:

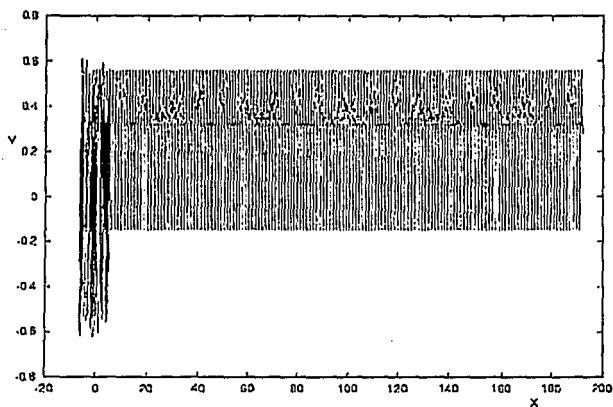


Fig. 5.19 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=5.7$

una ampliación hasta el mínimo 20 de la gráfica anterior, revela mayor estructura en el ciclo límite:

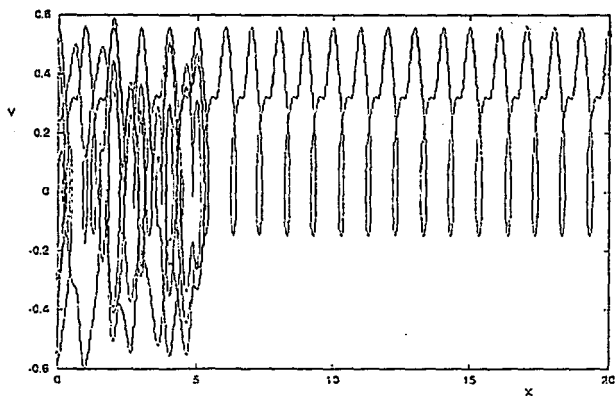


Fig. 5.20 Amplificación del espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=5.7$

Se puede observar la órbita de periodo 1 predicha por el diagrama de bifurcaciones (Fig. 5.3), pero desplazándose espacialmente para dar lugar a la corriente predicha por la gráfica 5.2

Analicemos ahora el caso $a=6.5$, valor para el cual se espera, según las gráficas 5.2 y 5.3, corriente neta cero y órbitas de periodo 1:

El gráfico de posición vs. Tiempo se muestra a continuación:

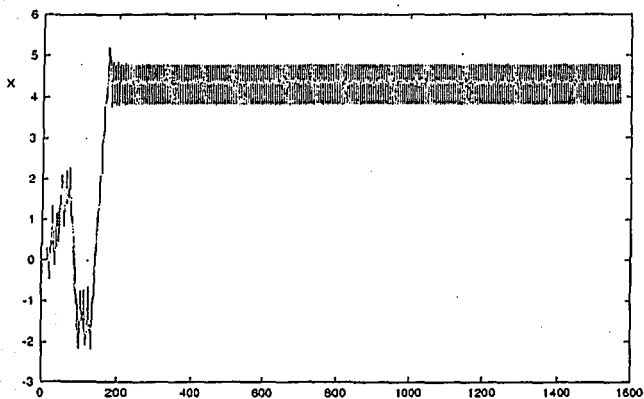


Fig. 5.21 Posición vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=6.5$

Se puede observar en la gráfica anterior, que la partícula sufre un desplazamiento hasta quedarse atrapada entre los mínimos 4 y 5 después de los cuales ya no puede salir. La evolución de la velocidad se muestra a continuación.

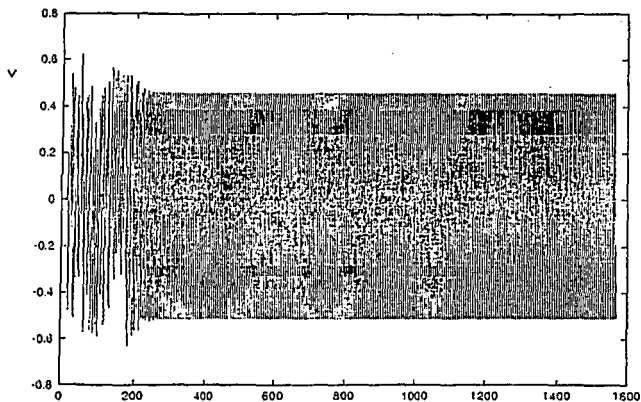


Fig. 5.22 Velocidad vs. tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=6.5$

Se puede apreciar que la velocidad llega un momento en el cual su promedio temporal es cero.

El espacio fase siguiente resume éstas dos gráficas:

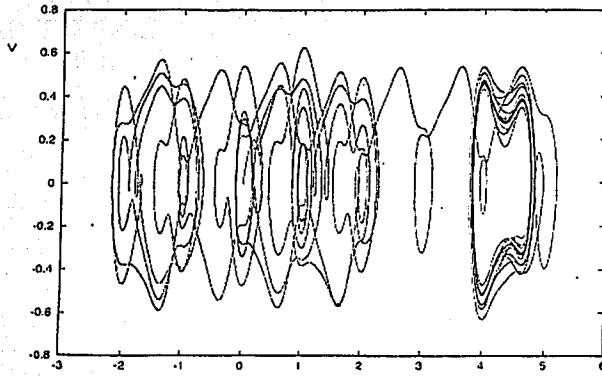


Fig. 5.23 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=6.5$

Obsérvese que antes de alcanzar su ciclo límite, la partícula sufre un desplazamiento hacia la izquierda, y luego regresa hacia la derecha pasando sin detenerse en el mínimo 3.

Finalmente, haré las gráficas para la amplitud $a=9$, cuya dinámica predicen las gráficas 5.2 y 5.3, deberá ser de corriente con un ciclo límite desplazándose.

El gráfico de posición vs. Tiempo se muestra como sigue:

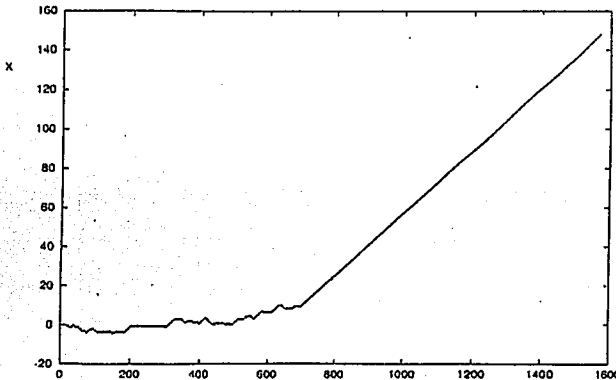


Fig. 5.24 Posición vs tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=9$

Obsérvese que ahora el potencial requirió de mayor número de ciclos para producir la corriente. La velocidad promedio ahora es de $v_{prom}=0.1$

El gráfico de velocidad vs. Tiempo se muestra a continuación:

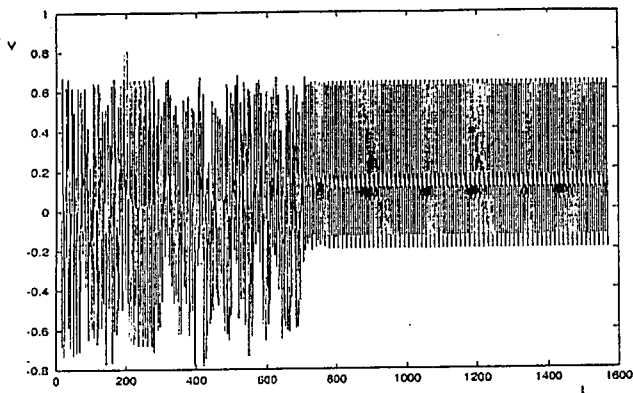


Fig. 5.25 Velocidad vs tiempo para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=9$

Se observa que la velocidad tarda en romper su promedio temporal nulo, en el mismo número de ciclos en que se produce la corriente.

El espacio fase para ésta amplitud, se muestra como sigue:

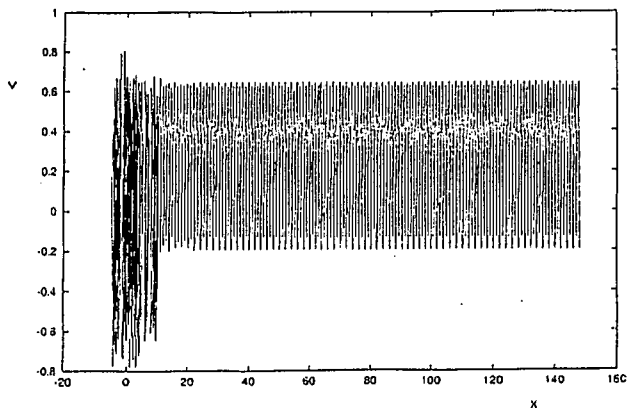


Fig. 5.26 Espacio fase para $\omega=1$, $b=0.1$ y amplitud $a=9$

Una vez más, la corriente se da antes del mínimo 20.

Un hecho interesante es que seleccioné condiciones iniciales nulas en posición y velocidad, pero eso no evitó que se presentara corriente para éste sistema. Esto sin embargo, puede entenderse porque el mínimo del potencial no está exactamente en el origen de coordenadas del sistema, sino ligeramente desfasado, de tal suerte, que al seleccionar condiciones $x_0=0$ y

$v_0=0$ la partícula no se encuentra en el mínimo, y esto hace que tenga posibilidades de desplazarse.

Ahora bien, el siguiente paso es determinar qué tanto influyen los dos parámetros que dejé fijos (b y ω) y que son también los que producen la corriente. Para ello empezaré variando la fricción b , tomando primero un valor de 0.5, y luego de 0.2, a fin de observar el comportamiento de la corriente, y conservando fija la frecuencia de forzamiento ω .

$b= 0.05$

La superposición del diagrama de bifurcaciones con el de la corriente puede apreciarse en la siguiente gráfica:

Fig 5.27 Diagrama de bifurcaciones superpuesto con la corriente para $b=0.05$ y $\omega=1$. La línea roja corresponde a la corriente y los puntos negros al diagrama de bifurcaciones para la velocidad.

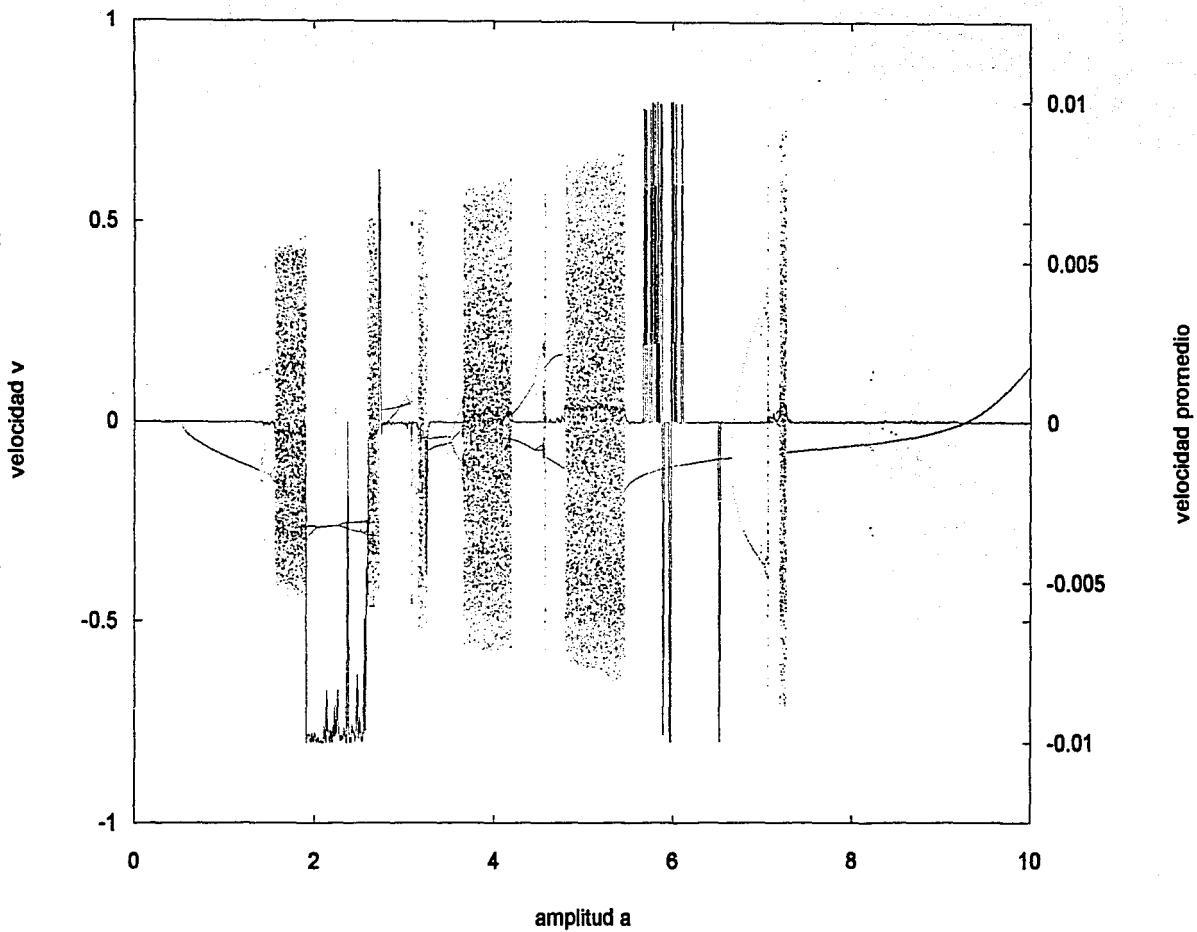
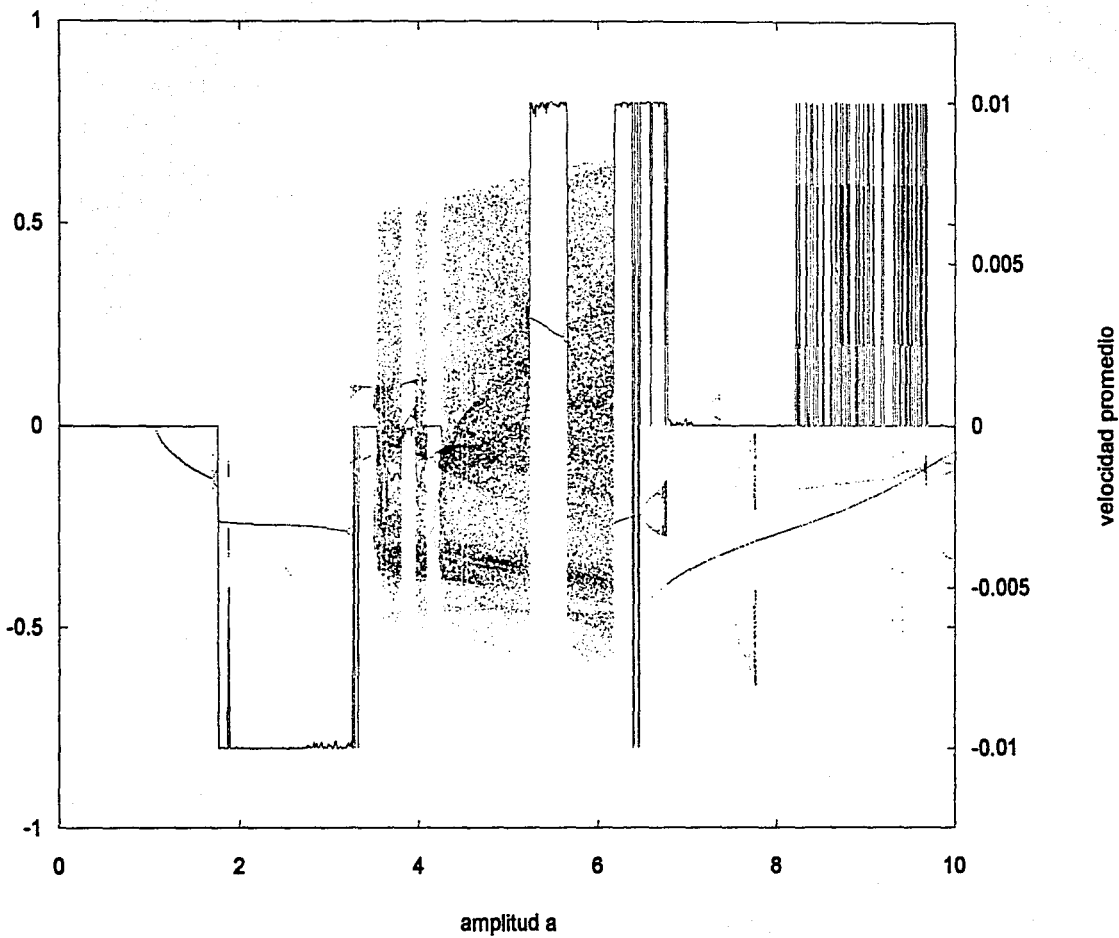


Fig 5.28 Diagrama de bifurcaciones superpuesto con la corriente para $b=0.2$ y $\omega=1$. La línea roja corresponde a la corriente y los puntos negros al diagrama de bifurcaciones para la velocidad.



Obsérvese que en la grafica para $b=0.05$, comparada con la de $b=0.1$, muestra una disminución en las regiones donde se presenta corriente, pero no hay disminución en la magnitud de la corriente.

No así sin embargo para $b=0.2$ donde claramente hay un aumento en el tamaño del intervalo donde se presenta la corriente. Esto nos lleva a suponer, que al aumentar la fricción los intervalos donde se puede presentar corriente son mas largos.

En ambos casos tambien se presenta corriente al pasar de las regiones inestables a las estables.

Exploremos ahora los casos para los cuales la frecuencia de oscilación ω cambia, manteniendo fija la fricción en $b=0.1$

Analizaré el caso en que $\omega=0.5$, y $\omega=2$ que son, respectivamente, la mitad y el doble de la frecuencia que había tomado originalmente.

La siguiente gráfica muestra los resultados obtenidos para $\omega=0.5$

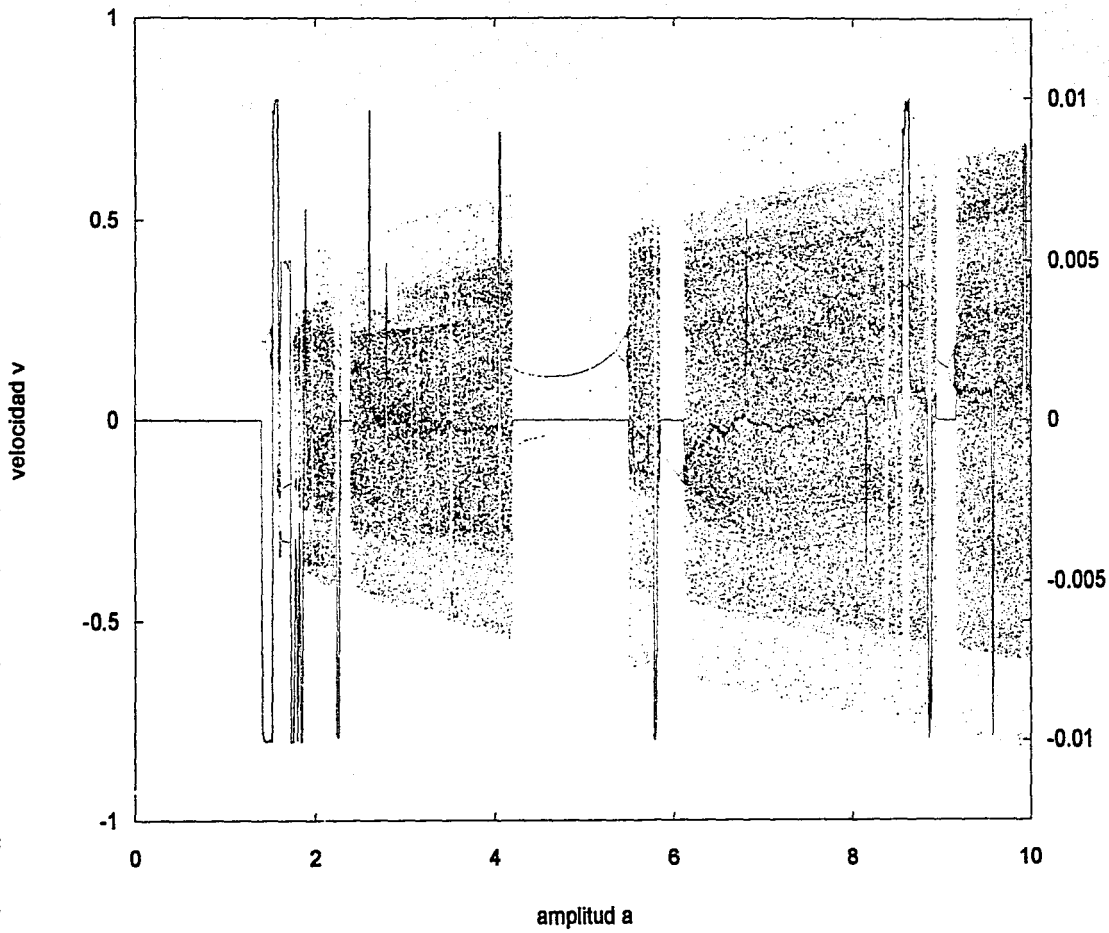
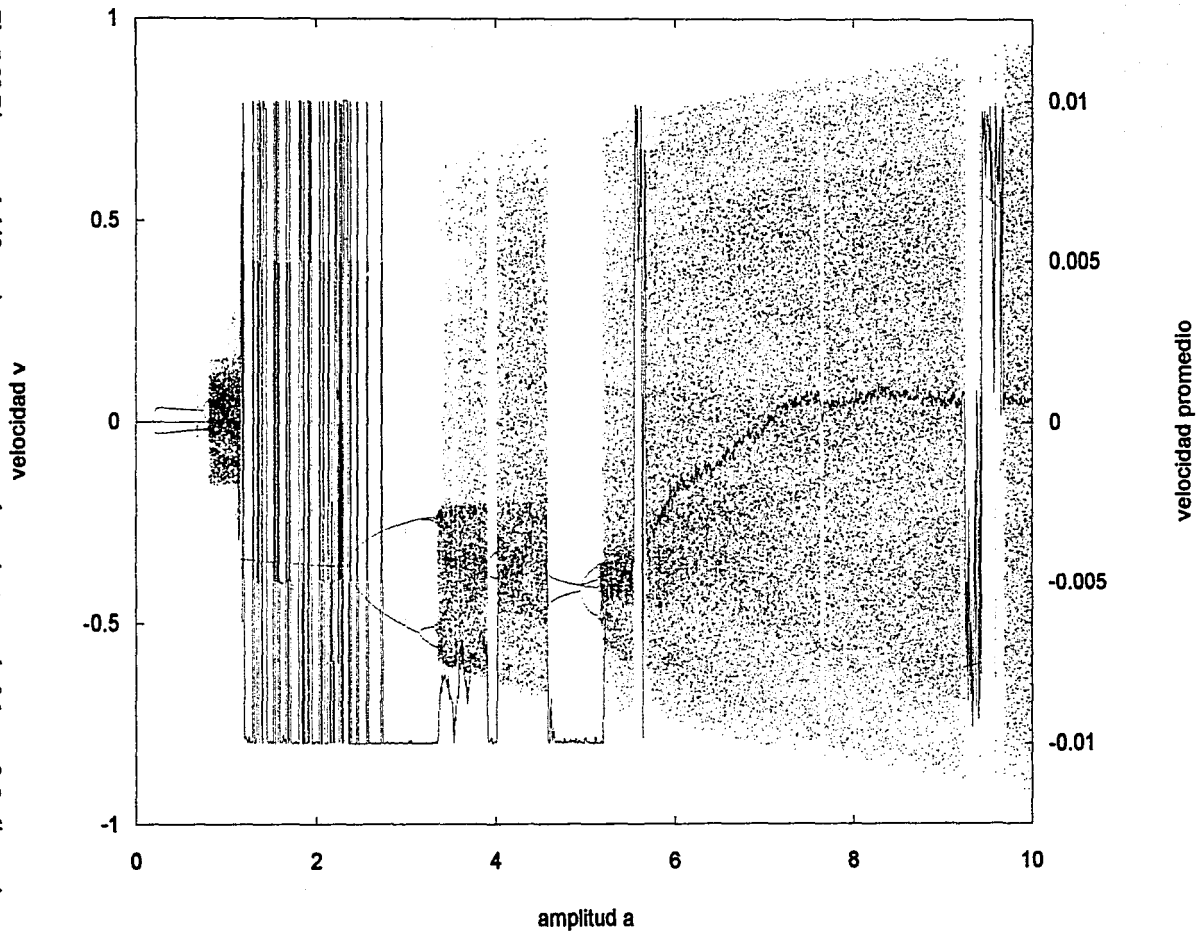


Fig 5.29 Diagrama de bifurcaciones superpuesto con la corriente para $b=0.1$ y $\omega=0.5$. La línea roja corresponde a la corriente y los puntos negros al diagrama de bifurcaciones para la velocidad.

Fig 5.30 Diagrama de bifurcaciones superpuesto con la corriente para $b=0.1$ y $\omega=2$. La línea roja corresponde a la corriente y los puntos negros al diagrama de bifurcaciones para la velocidad.



En la gráfica para $\omega=0.5$ se puede apreciar que el intervalo donde se manifestaba la corriente se redujo, mientras que en la gráfica para $\omega=2$ el intervalo se amplió.

Con estas gráficas se puede hacer una tercera gráfica que amplifique la región de corriente, tomando $b=0.2$ y $\omega=2$ (página siguiente):

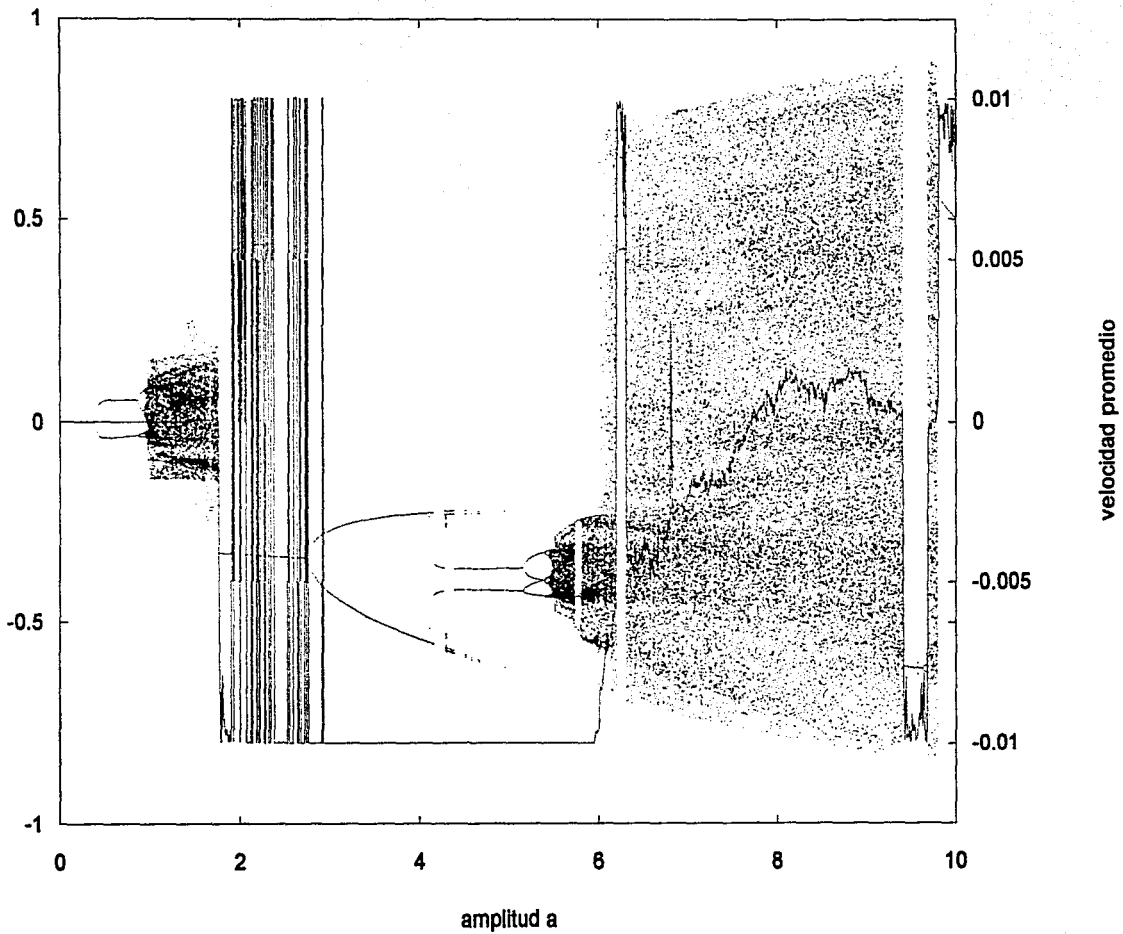


Fig 5.31 Diagrama de bifurcaciones superpuesto con la corriente para $b=0.2$ y $\omega=2$. La línea roja corresponde a la corriente y los puntos negros al diagrama de bifurcaciones para la velocidad.

Obviamente, se puede encontrar una combinación de valores para la ω y la b que maximizen el intervalo donde se presente corriente. Para esto será necesario hacer una gráfica de la corriente vs cada uno de los dos parámetros, b y ω , y observar para qué valores de ω y b se presenta la corriente máxima, sin embargo eso ya será tema de otra tesis, pues los objetivos de ésta fueron verificar que al pasar de las regiones inestables a las estables se presentaba corriente, resultado que fue verificado aún cambiando los parámetros b y ω , y segundo, comprobar gráficamente que había un desplazamiento dirigido para las distintas amplitudes, predichas por el diagrama de bifurcaciones y la gráfica de corriente, que en algunos casos incluso se manifestó en promedio como una recta.

Análisis de resultados

Lo primero que se debe hacer notar, es que en las regiones donde se presenta corriente, el comportamiento en promedio del desplazamiento de la partícula es el de una recta (Figs. 5.8, 5.17 y 5.24). Realmente, al hacer un aumento a la estructura de esta recta, encontré lo mismo que ya había observado Mateos [5], [6], [7] y [8] para su potencial oscilante: un comportamiento de avance sostenido pero con retrocesos, es decir, un comportamiento en el que la partícula avanza dos potenciales, pero retrocede uno, dando como resultado neto que la partícula sienta un desplazamiento, Fig 5.32.

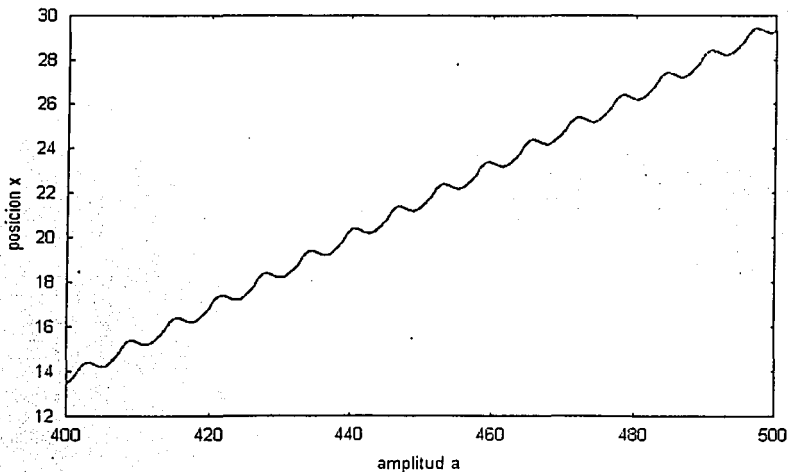


Fig. 5.32 Amplificación del intervalo 400 a 500 de la amplitud para $\omega=1$, $b=0.1$ y $\gamma=5.7$

Otra observación importante es que al aumentar la amplitud, el tiempo que le tarda al potencial generar corriente se va incrementado, pero no la evita (compárense figs. 5.8, 5.17 y 5.24).

Adicionalmente, la ecuación que se usó es una ecuación adimensionada que incluía a la masa en cada uno de los parámetros. Esto es importante porque la razón de la amplitud física entre la masa A/m (que es lo que manejamos aquí como amplitud) es diferente para masas distintas. Y esto hace que en un sistema donde hay partículas con masas diferentes, presenten, en los potenciales intermitentes, direcciones de corriente diferentes bajo la misma frecuencia de oscilación, fricción y amplitud de oscilación.

Como última observación haré notar que independientemente de los valores elegidos para los parámetros b , ω y a , el número de oscilaciones que tiene que dar el potencial para generar corriente, se mantuvo en el orden de $1/100$, y no aumentó al cambiar los valores de los parámetros. Esto podría indicar que ésta es una característica propia del sistema para generar corriente, y que no depende de los valores de los parámetros elegidos, sino del potencial mismo.

Faltan muchos análisis para este tema, entre los que se pueden citar, el exponente de Lyapunov, las secciones de Poincaré, las lenguas de Arnold, etc, así como llevarlo al laboratorio para su experimentación. Por lo pronto los resultados que aquí expuse son suficientes para los fines de esta tesis.

Conclusiones

Conclusiones

Dentro de las conclusiones que se pueden citar aquí, a partir de los capítulos 4 y 5 de ésta tesis, podría citar las siguientes cinco como las principales:

- 1° Se observa como lo había hecho notar Mateos [5-8] que en las transiciones del caos al orden hay cambios netos en la corriente, al menos para éste tipo de potenciales.
- 2° Para la primera bifurcación en éste sistema se pudo encontrar una aparición de corriente en el mismo valor de la amplitud que el que produce la primera bifurcación.
- 3° Se han observado en éste estudio ciclos límites y corriente coexistiendo, sin embargo, no siempre que hubo ciclos límites se encontró corriente.
- 4° Se pudo observar empíricamente que, al incrementar la amplitud, el número de oscilaciones que el potencial debió hacer para producir corriente también se incrementó.
- 5° La comprobación experimental por parte del grupo de Carapella [33] de la inversión de corriente, verifica en el campo de la física los resultados obtenidos por Mateos.

El estudio de los Ratchets es importante para muchas ramas de la física, algunos investigadores los están aplicando ya en la cuántica, y seguramente tendrán repercusiones en dinámica de fluidos y electromagnetismo, y en la física de plasmas. En ésta última sin embargo, el problema se complica un poco, porque las partículas cargadas del plasma, deforman el potencial al que están sujetas.

Las aplicaciones de los Ratchets pueden abarcar más campos, como ya se está haciendo en la biología, explicando las propiedades motoras de las bioproteínas, y seguramente habrá nuevas aplicaciones en la ingeniería física, la biofísica y la fisico-química.

Una aplicación interesante podría darse en la astronomía, donde campos gravitacionales intensos podrían dar lugar al movimiento de objetos celestes en direcciones opuestas al productor del campo gravitacional, pudiéndose tal vez observar un efecto aparente de antigravitación. Otra aplicación podría darse en la electrónica, donde ondas sonoras de alta frecuencia podrían dar lugar al movimiento de electrones dentro de un material.

Las perspectivas de los Ratchets abre nuevas y amplias fronteras a la tecnología. Sus aplicaciones en gran escala aún están por verse.

Referencias

Referencias

1. R.P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands. *Lectures on Physics*, Vol. 1, p. 46-1. Addison Wesley Publishing Co., U.S.A. (1963).
2. P. Hänggi, R. Bartussek. *Brownian Rectifiers: How to convert Brownian Motion into Direct Transport*. In "Nonlinear Physics of Complex Systems", Edited by J. Parisi, S.C. Müller, W. Zimmermann. Lecture Notes in Physics, Vol. 476, Springer-Verlag, Berlin. p. 294 (1996).
3. M. Bier. *Contemporary Physics* 38, 371 (1997).
4. P. Reimann. *Physics Reports*, en prensa.
5. J. L. Mateos. *Physical Review Letters* 84, 258 (2000).
6. J. L. Mateos. *Acta Physica Polonica B* 32, 429 (2001).
7. J.L. Mateos. *Physica D* (2002) en prensa.
8. J.L. Mateos. *Phys. Rev. E* (2002) enviado.
9. R.D. Astumian, I. Derényi, *Eur. Biophys. J.* 27, 474 (1998).
10. N. Thomas, R.A. Thornhill, *J. Physica D* 31, 253 (1998).
11. P. Jung, J.G. Kissner, P. Hänggi, *Physical Review Letters* 76, 3436 (1996).
12. J.M.T. Thompson, H.B. Stewart. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley and Sons, Chichester. pp 376 (1986).
13. T. Mullin. *Chaos and its application physical systems*. In "The Nature of Chaos". Edited by T. Mullin. Claredon Press, Oxford, (1993).
14. G.L. Baker, J.P. Gollub. *Chaotic Dynamics, an Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, (1990).
15. D.J. Acheson, Tom Mullin. Upside-down pendulums. *Nature*, (London) 366, 215 (1993).
16. R. Chacón. *Physical Review E* 52, 2330 (1995).
17. S. Flach, O. Yevtushenko, Y. Zolotaryuk. *Physical Review Letters* 84, 2538 (2000).

18. P. Reimann, M. Grifoni, P. Hänggi. *Physical Review Letters* 79, 10 (1997).
19. C. Van den Broeck, I. Bena. Parametric Resonance Revisited. In "Stochastic Processes in Physics, Chemistry and Biology", edited by J.H. Freund and T. Pörschel. Lecture Notes in Physics, 557, p.257 (2000). Springer-Verlag, Berlin.
20. H. Linke, *et al.* *Europhysics Letters* 44 , 341 (1998).
21. C.M. Arizmendi, F. Family, A.L. Salas-Brito. *Physical Review E* 63, 061104 (2001).
22. R.W. Leven, B. Pompe, C. Wilke, B.P. Koch. *Physica D* 16, 371 (1984).
23. A.C. Skeldon, T. Mullin. *Physics Letters A* 166, 224 (1992).
24. F.L. Curzon, *et al.* *American Journal of Physics* 63, 132 (1995).
25. M. Barbi, M. Salerno. *Physical Review E* 62, (2000).
26. M. Barbi, M. Salerno. *Physical Review E* 63, 066212 (2000).
27. L. Landau, E. Lifshitz. *Curso abreviado de Física Teórica* Vol. 1, MIR, Moscú. (1974).
28. W. Hauser. *Introduction to the principles of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., U.S.A. (1966).
29. R. L. Devaney. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Co., U.S.A. (1989).
30. H.J. Korsch , H.J. Jodl. *Chaos, A program Collection for the PC*. Springer-Verlag, Berlin (1994).
31. M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, U.S.A. (1972).
32. H. Schanz, M.-F. Otto, R. Ketzmerick, T. Dittrich. *Physical Review Letters* 87, 070601 (2001).
33. A. H. Nayfeh, D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley, New York (1979).
34. M. Copelli, K. Lindenberg. *Physical Review E* 63, 036605 (2001).
35. G. Carapella, G. Costabile, R. Latempa, N. Martucciello. *Physica C* v1 27 Dec 2001.
36. Véase <http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/>.

37. H.A. Larrondo, F. Family, C.M. Arizmendi. *Physica C* v1 11 Sep 2001.
38. H. Casimir Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B51, 793 (1948).
39. E. I. Butikov. *Computing in Science & Engineering*, May-June, 76; A.P. Muñunzuri, M.G. Gesteira, V.P. Muñunzuri, V.I. Krinski, and V.P. Villar (1994) *Phys. Rev.* E50, 4258; J.M. Galpin, Y. Fautrelle, and A.D. Sneyd (1992) *J. Fluid Mech.* 239, 409; M. Calvo (1997) *Phys. Rev.* B55, 10571; N.V. Fomin, O.L. Shalaev, and D.V. Shantsev (1997) *J. Appl. Phys.* 81, 8091; I. Zlatev, G. Huey, and P. Steinhardt (1998) *Phys. Rev.* E57, 2152.
40. L. Ibarra-Bracamontes. V. Romero-Rochin. *Physical Review E* 56, 4048 (1997)