109

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

HOYOS EN EL MODELO BLACK-SCHOLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

LUIS FELIPE SANTOS TORRES

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: ACT. ANTONIO ROMAN CASTILLO MENDEZ

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2002

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Hoyos en el Modelo de Black-Scholes

realizado por Santos Torres Luis Felipe

con número de cuenta 08913589-1 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Antonio Román Castillo Méndez
Propietario	Mat. Luis Briseño Aguirre
Propietario	Act. María Aurora Valdes Michell
Suplente	Act. Gloria Roa Bejar
Suplente	Act. Marina Castillo Garduño

Consejo Departamental de Matemáticas

M.en C.JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Dedicada a:

Dios y a la Virgen de Guadalupe, por guiar mis pasos en todo momento.

Especialmente y con todo mi amor a Margarita del C. Torres, quien con su ejemplo y dedicación forjó al ser que soy. Gracias por tu apoyo y las palabras de aliento dichas justo en el momento en que las necesitaba.

Oré y me fue dada la inteligencia;
Supliqué y el espíritu de la sabiduría vino a
mi. La preferí a los cetros y a los tronos,
y estimé en nada la riqueza al lado de
ella. Vi que valía más que las piedras
preciosas; el oro es sólo un poco de arena
delante de ella, y la plata, menos que
el barro. La amé más que a la salud y
a la belleza, incluso la preferí a la luz del
sol, pues su claridad nunca se oculta.
Libro de la Sabiduría (7, 7-10)

Agradecimientos:

- A mi familia por su apoyo incondicional, particularmente a mi hermano Raymundo y mi abuela Margarita.

- A Antonio Castillo y su esposa Margarita, por haber aceptado dirigir la tesis y compartir conmigo parte de sus conocimientos.

- A Luis Briseño, por su apoyo, paciencia y enseñanza, quien me ayudó a superar el duro pero fascinante paso por las aulas de la Facultad.

- A las profesoras Aurora Valdez, Gloria Roa y Marina Castillo quienes aceptaron ser mis sinodales, por sus valiosas aportaciones que hicieron posible la culminación de la presente.

- A todos aquellos amigos, compañeros y profesores que a lo largo de mi vida, han dejado una presencia imborrable.

- Andrea y Tamara, gracias por su amistad. Aunque la distancia nos separe, su recuerdo siempre me acompaña.

INDICE

INTRODUCCION

Posterior a la Segunda Guerra Mundial, tres fenómenos han acompañado el desarrollo de los mercados financieros: la desregulación; la volatilidad y; los avances tecnológicos, principalmente en el área de telecomunicaciones. Dichos cambios, aunados al hecho de que el intercambio físico de bienes ha sido sustituido por un intercambio electrónico, han conducido a un vertiginoso aumento en los volúmenes negociados.

Es precisamente en torno a estos tres fenómenos, que se desarrollan nuevos tipos de instrumentos financieros, los derivados, los cuales son en esencia instrumentos de cobertura contra movimientos adversos en los diferentes factores de riesgo.

Los contratos de derivados, entre los cuales se incluyen a las opciones, son fundamentales en el entorno actual de los mercados financieros, ya que es indispensable que tanto empresas como inversionistas sean capaces de medir y limitar el nivel de riesgo en sus portafolios, pero un prerequisito para un eficiente manejo de dichos riesgos es que dichos instrumentos sean valuados correctamente.

Antes de 1973, las opciones financieras ya se conocían y comercializaban, aunque no existía un consenso sobre algún método para valuarlas. Es precisamente en ese año, que se publicó la ahora famosa ecuación de Black-Scholes —Premio Nobel de Economía 1997[i]—, cuya aportación principal al mundo de las finanzas es que por vez primera, el precio de una opción se calculaba en base a rigurosos fundamentos matemáticos.

El modelo, dio el impulso que la industria de las opciones necesitaba, para asegurar su éxito; desarrollado originalmente para valuar opciones sobre acciones, muy pronto aparecieron extensiones del modelo para valuar opciones sobre *commodities*, tipos de cambio, tasas de interés y créditos.

Cuando se calcula el precio de una opción utilizando el modelo de Black-Scholes y se compara contra el precio de mercado de la misma, por lo regular hay diferencias. Es raro que el valor de la opción coincida con el del mercado. Dejando de lado errores tales como valuar con diferentes plazos o con precios incorrectos, hay tres posibles razones que explican éstas diferencias: que el precio de la opción se encuentre fuera de línea; que las entradas del modelo no sean las correctas; o bien que la fórmula no sea correcta.

Si el precio de la opción está fuera de línea, el precio dado por el modelo podría usarse para generar ganancias.

El problema de las entradas incorrectas al modelo, se reduce a la volatilidad. Tanto el precio del subyacente como las tasas de interés, al ser observables en el mercado pueden ser corregidas en cualquier momento, pero la volatilidad sin embargo, debe ser estimada a lo largo de toda la vida de la opción.

La tercer razón, que refiere la posibilidad de que la fórmula de Black-Scholes no sea correcta, es lo que la presente tesis pretende analizar. El mismo Fisher Black declaraba con frecuencia su sorpresa por la popularidad del modelo, ya que los supuestos en los que se basa son muy simples y fuera de la realidad, es decir, el modelo tiene hoyos.

La intención del trabajo, es poder argumentar el porque el modelo, a pesar de los hoyos, funciona con éxito en el mundo real. Analizar de una manera general los supuestos y poder definir cuales de ellos representan las fortalezas y cuales las debilidades del modelo, es de capital importancia, pues se identificarán problemas específicos con la fórmula; se conocerá como algunos de estos problemas afectan a los resultados de la misma y; se tendrán ideas generales de cómo mejorar el modelo.

La tesis se divide en cuatro capítulos. El capítulo 1 ofrece la definición de una opción y se dan los fundamentos básicos para comprender el resto del trabajo: los diferentes tipos de opciones, los elementos que determinan el precio de la opción y algunas de las operaciones que se pueden realizar con éstas. Asimismo, incluye una sección que habla sobre la situación actual de las opciones en México, para dar idea al lector, del enorme vacío, de los retos y de las grandes oportunidades que presenta el mercado mexicano.

Los capítulos 2 y 3 constituyen el cuerpo principal del trabajo, ya que contienen los fundamentos matemáticos básicos. En ellos se hace el desarrollo para llegar a la ya mencionada fórmula de Black-Scholes y se analiza al mismo tiempo donde el modelo presenta sus puntos fuertes y en donde sus hoyos. Con un buen entendimiento de los capítulos 1 a 3, se está en condiciones para valuar una opción, o bien para profundizar más en el estudio de las mismas.

El capítulo 4, estudia, en su primera parte, las principales sensibilidades —las llamadas griegas— de una opción y en la segunda parte, se presentan algunas mejoras al modelo, las cuales pretenden dar una idea de que camino seguir para resolver algunos de los problemas ya identificados en los capítulos anteriores.

---

[i] En 1997, la Real Academia Sueca de Ciencias galardonó a Myron Scholes y Robert Merton con el Premio Nobel de Economía, coautores junto a Fischer Black de la famosa fórmula Black-Scholes. Este último de haber seguido con vida, con seguridad hubiera recibido también la condecoración.

CAPITULO 1

FUNDAMENTOS BASICOS DE OPCIONES

1.1. CONCEPTOS BASICOS

Una **opción** es un contrato que confiere a su tenedor el derecho de comprar o vender un activo dado a un precio fijado por adelantado y a un plazo determinado. Este derecho se adquiere mediante el pago de una prima.

Se trata en efecto de un derecho y no de una obligación[1], ya que el tenedor de la opción puede decidir según sus intereses si ejerce o no ejerce dicho derecho, ya sea de compra o de venta.

Si la opción permite ejercer sus derechos solamente al día del vencimiento del plazo acordado, se trata de un tipo de opción llamada **opción europea**; si por el contrario el derecho inherente en el contrato puede ejercerse en cualquier instante comprendido entre la fecha de adquisición del contrato y la fecha de vencimiento del mismo, se esta ante el caso de una **opción americana**.

[1] Debe enfatizarse el hecho de que al hablar de una opción, no se esta hablando de un forward ni de un futuro, dado que estos últimos si deben ejercerse invariablemente al término del plazo pactado.

En la actualidad ambos tipos de opciones se negocian en todo el mundo, a pesar de haber surgido como su nombre lo indica en continentes diferentes. La tendencia es favorable hacia las del tipo americano, dada su mayor flexibilidad.

Aquellas opciones que confieren el derecho de compra, se conocen como **CALL**, mientras que aquellas que confieren el derecho de venta se denominan **PUT**.

La fecha en la cual el poseedor de la opción puede ejercer su derecho, se denomina simplemente **fecha de vencimiento** o ***maturity date***.

El activo al cual hace referencia el contrato (el cual puede ser una acción, una obligación, una divisa, un instrumento de deuda[2], algún índice económico, otra opción, etc.), se conoce como **bien o valor subyacente**.

El **precio de ejercicio** o ***strike***, es aquel precio al cual el tenedor de un call puede comprar o bien al cual el tenedor de un put puede vender. Durante el desarrollo del presente trabajo, se denotará a este precio con la letra E.

La prima, es el valor propiamente dicho de la opción y desempeña a la vez un doble papel. Confiere por un lado al comprador de la misma el derecho de comprar o vender (según se trate de un call o de un put respectivamente) según convenga a sus intereses y; por otro lado, la prima compensa o indemniza al vendedor de la opción, por la obligación irrevocable contraida de entregar (recibir) el bien subyacente, en caso de que el comprador decida ejercer su derecho.

En adelante se denotará a la prima como C cuando se hable de la **prima de un call** y como P si se refiere a la **prima de un put**. En general y salvo especificación contraria, se referirá a opciones del tipo europeo.

[2]Los términos "Opción de un instrumento de deuda" y "opción de tasa de interés" se utilizan de manera indistinta.

Se denotará con la letra X, al precio, o mejor dicho a la cotización del bien subyacente que impera en el mercado, de tal forma que existen tres casos:

1. Cuando $E = X$, se dice que la opción esta **"en-el-dinero"** o ***"at-the-money"*** en inglés.

2. La opción esta **"dentro-del-dinero"** o ***"in-the-money"***, cuando $X > E$ en el caso de un call, o bien $X < E$ en el caso de un put.

3. Si $X < E$ en el caso de un call o $X > E$ en el caso de un put, la opción se dice que esta **"fuera-del-dinero"** o ***"out-of-the-money"***.

El **valor de paridad** de una opción se define como $max[\,0, X - E\,]$ para el caso de un call y como $max[\,0, E - X\,]$ para un put.

En general, una opción esta dentro-del-dinero, si su valor de paridad es positivo.

Al valor absoluto del valor de paridad, se le define como **valor intrínseco**, es decir $VI = | X - E |$. Este concepto será de utilidad más adelante.

Antes de continuar con el análisis matemático de las opciones, cabe hacer mención que en la actualidad, las opciones son instrumentos financieros altamente negociados alrededor de todo el mundo. El desarrollo del mercado de opciones se vio favorecido por la estandarización de los contratos (en cuanto a montos, divisas, plazos, fechas de vencimiento, etc.), la existencia de una cámara de compensación y sobre todo por el desarrollo de un verdadero mercado secundario.

1.2. LOS MERCADOS DE OPCIONES

En 1973 inició operaciones el Chicago Board Options Exchange (CBOE), primer bolsa en el mundo en listar opciones y que es en la actualidad, el mercado de opciones más grande del mundo. Sin embargo, desde mucho tiempo antes, existía ya un mercado *over-the-counter* (OTC, también conocido como mercado extrabursátil o de mostrador), encontrándose en Holanda y Francia, registros de operaciones con opciones que datan del siglo XVII.

En 1968, el Chicago Board of Trade (CBT), mejor conocido por sus contratos de futuros, encargó un estudio para analizar la posibilidad de ofrecer contratos de futuros sobre acciones de bolsa; el estudio sin embargo, recomendó opciones sobre las acciones, en lugar de los futuros. Así en 1972, nació el CBOE, el cual comenzó sus actividades en abril del siguiente año, listando 16 opciones tipo call sobre 16 acciones que figuran en el índice del New York Stock Exchange (NYSE).

El mercado de opciones en bolsa, tuvo un éxito espectacular; en 1977 se comenzó a operar opciones tipo put y actualmente, el volumen promedio diario actual de los contratos negociados en el CBOE es cercano a los 500 mil contratos.

Clave en el desarrollo de este mercado, resultó la existencia de una Cámara de Compensación, la cual elimina el riesgo de entrega entre las partes y la estandarización de los contratos.

Ante el éxito de las opciones en el CBOE y de la volatilidad en tipos de cambio y tasas de interés que experimentaron los mercados financieros internacionales en la década de los setenta, se fueron incorporando en las diversas bolsas del mundo contratos de opciones sobre diferentes subyacentes. En octubre de 1982, el CBT comenzó a negociar opciones sobre contratos a futuro de T-Bonds (tasas de interés). Poco después aparecieron en el Philadelphia Stock Exchange las opciones sobre divisas y opciones sobre los contratos de divisas a futuro.

Por su parte, el mercado de opciones OTC, se desarrolló en la década de los ochenta, de forma paralela a los mercados de opciones bursátiles. A pesar de que en éste mercado existe riesgo crediticio entre las partes y la liquidez es mucho menor que en las operaciones en bolsa, las opciones extrabursátiles se caracterizan porque están hechas a la medida de las necesidades del cliente en cuanto a monto, precio de ejercicio, plazo, etc. En la práctica, los mercados bursátiles y extrabursátiles, en vez de competir entre sí, se han complementado, satisfaciendo las necesidades de distintos tipos de inversionistas.

1.2.1. EL MERCADO MEXICANO

En 1982, se consideraba inminente el inicio del mercado *spot* y del mercado de futuros sobre el dólar en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV), con el fin de atender la alta volatilidad del tipo de cambio y las necesidades de liquidez en el mercado de contado, sin embargo, el proyecto se vio interrumpido por el Decreto de Control de Cambios. Estos mercados comenzaron actividades hasta 1995, es decir, con 13 años de retraso.

Por su parte, la propuesta para crear un mercado de opciones en México, se presento en 1985, aunque las gestiones formales con las autoridades no se iniciaron sino hasta 1988. Estos esfuerzos también fracasaron.

A partir de 1990, en los mercados internacionales, existen operaciones con opciones sobre subyacentes de emisoras mexicanas (*warrants*), los cuales a partir de 1992 se emiten también en el país.

Los *warrants*, son los instrumentos que de cierta forma impulsaron el nacimiento en 1998 del Mercado Mexicano de Derivados (MEXDER), el cual fue creado con base en cuatro actores fundamentales: la bolsa, socios liquidadores, cámara de compensación y socios operadores.

Los contratos que actualmente se negocian en el MEXDER son futuros sobre el Indice de Precios y Cotizaciones de la BMV (IPC), el dólar, tasas de interés (Cetes y TIIE —Tasa de Interés Interbancaria de Equilibrio—) y algunas acciones individuales. Lamentablemente, por razones diversas, todavía no se operan opciones en el MEXDER, el cual dicho sea de paso, se encuentra en estos momentos en una etapa de reestructuración, tratando de incrementar el volumen de sus operaciones, para posteriormente poder ampliar la gama de instrumentos ofrecidos.

1.3. OPERACIONES ELEMENTALES

Cuando se compra una opción y se adquiere el derecho, ya sea de comprar o de vender, se dice que se asumió una posición larga. Por el contrario, se habla de una posición corta cuando se emite o se vende la opción (se ha definido de manera general a una opción como un derecho de compra o de venta, pero debe observarse que para el emisor o vendedor de la opción sí se asume una obligación con el comprador).

Como comentario, vale destacar que en inglés efectivamente se usa el verbo *buy* cuando se compra una opción, pero cuando se asume una posición corta, no se emplea el verbo *sold*, sino más bien el verbo *write* (en caso del emisor primario se dice *underwrite*).

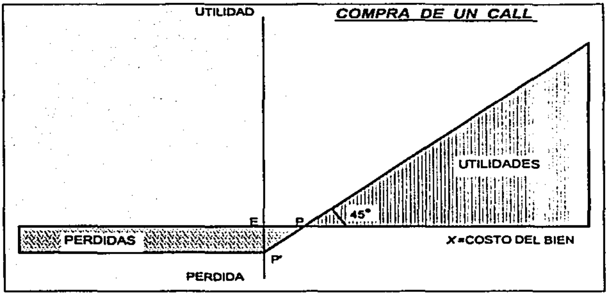
Es claro que una opción, sea de compra o de venta, puede comprarse o venderse, por lo cual existen cuatro operaciones elementales:

i. Compra de un call
ii. Compra de un put
iii. Venta de un call
iv. Venta de un put

A continuación se describirán estas cuatro posibles posiciones, con su respectiva gráfica de pérdidas y ganancias. En cada gráfica, la cotización del bien subyacente *X*, se representará sobre el eje de las abscisas; el punto *E*, será a su vez, sobre el eje de las abscisas el precio de ejercicio de la opción y sobre el eje de las ordenadas, el origen; el punto *P*, designará al punto neutral de la posición (precio de ejercicio más ó menos la prima, según se trate de un call o de un put), es decir aquel donde no existe utilidad ni pérdida y; el segmento $\overline{EP} = \overline{EP'}$, representará al costo de la prima.

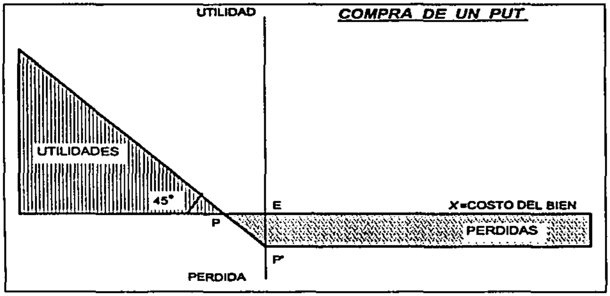
Debe notarse el hecho de que el ángulo que se forma entre la recta de utilidades y el eje de las abscisas, es de 45°.

Con las cuatro gráficas siguientes, podrá apreciarse con claridad una característica importante de las opciones: el que ofrecen obligaciones y derechos asimétricos. Cuando se asume una posición larga y se adquieren derechos, la utilidad potencial es ilimitada, mientras que la posible pérdida en caso de un evento desfavorable esta acotada por el costo de la prima; cuando la posición asumida es corta y lo que se tiene es una obligación, la situación es totalmente a la inversa, la ganancia esta limitada al costo de la prima y la pérdida puede ser infinita.



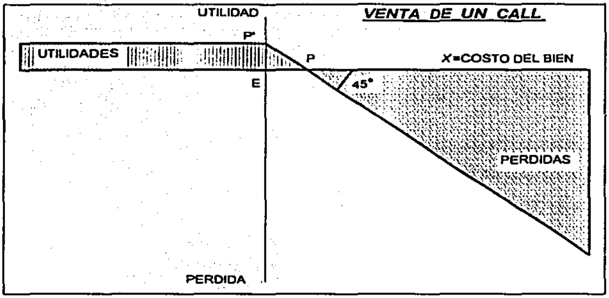
Gráfica 1

Compra de un call: Anticipa un mercado a la alza. Es una operación con posibles ganancias ilimitadas en caso de un alza en el precio del subyacente y con una pérdida limitada al costo de la prima, en caso de una baja en los precios del mercado.



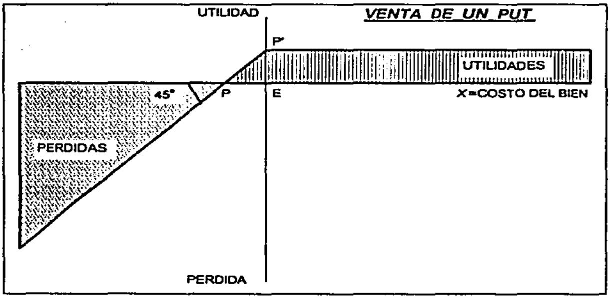
Gráfica 2

Compra de un put: Anticipa un mercado a la baja. Es una operación con rendimiento ilimitado en caso de una baja en el precio del subyacente y con la posible pérdida acotada hasta el monto de la prima, en caso de un alza.



Gráfica 3

Venta de un call: Es una operación cuya utilidad está limitada al costo de la prima en caso de una baja en el precio del subyacente, y con un riesgo ilimitado en caso de un alza del mismo. Esta estrategia es atractiva solo si se espera una no alza en el mercado del subyacente.



Gráfica 4

Venta de un put: La posible utilidad esta limitada al costo de la prima en caso de un alza en el precio del subyacente, mientras que el riesgo es ilimitado en caso contrario. Se recomienda esta estrategia, si se espera una no baja en el mercado.

1.4. DIFERENTES TIPOS DE OPCIONES

Las opciones generalmente se clasifican en dos grandes grupos:

1.- Opciones Standard: Son aquellas que se han introducido desde el comienzo del presente trabajo. En esta categoría se incluyen también a las estrategias con opciones standard, tales como las combinaciones y los *spreads*.

A) Europeas: Solo pueden ejercerse en la fecha de vencimiento del contrato.
B) Americanas: Pueden ejercerse en cualquier momento entre la fecha de contratación y la fecha de vencimiento.
C) Combinaciones: Combinan opciones de diferente tipo. Las más comunes son: la *bottom straddle*, que implica comprar un call y un put con el mismo precio de ejercicio E; la *top straddle*, que involucra la venta de un call y un put con el mismo precio de ejercicio E; la *bottom vertical combination*, que se forma con la compra de un call y un put con precios de ejercicio E_1 y E_2 respectivamente y; la *top vertical combination* que es la venta de un call y un put con diferentes precios de ejercicio E_1 y E_2 respectivamente.
D) *Spreads*: Combinan dos ó más opciones del mismo tipo. Los más conocidos son el *bullish vertical spread*, el cual se forma comprando un call con precio de ejercicio E_1 y vendiendo otro call con precio de ejercicio E_2, donde $E_2 > E_1$; el *bearish vertical spread*, que se crea vendiendo un call con precio de ejercicio E_1 y comprando un call con precio de ejercicio E_2, con $E_2 > E_1$ y; el *butterfly spread*, el cual puede verse como la combinación de los dos *spreads* anteriores, dado que se forma con la compra de dos calls con precios de ejercicio E_1 y E_2 respectivamente y la venta de dos calls con el mismo precio de ejercicio E_3, donde $E_1 < E_3 < E_2$.

2.- Opciones Exóticas: Llamadas así las opciones de segunda generación. Este tipo de opciones se diseñaron para atender problemas de inversión específicos y tienen la característica de que no pueden replicarse mediante la combinación de opciones standard. Además, su liquidación depende no solo del curso del subyacente o de la fecha de vencimiento, sino que hay otros factores implícitos en el contrato.

Las opciones exóticas se clasifican por lo general en siete grandes familias:

A) Binarias o Digitales (*Bet Options*): Si al vencimiento la opción se encuentra dentro del dinero, entonces la cantidad fijada de antemano es liquidada.
B) De Barrera: Es una de las familias más extensas y a su vez más utilizadas en el mundo real. Su característica principal es que conducen a la aparición o desaparición de una opción standard al momento de que el precio del subyacente alcanza un determinado precio fijado desde el origen de la opción.
C) Asiáticas: Son opciones ya sea sobre el precio medio de un activo o sobre el precio medio del precio de ejercicio.
D) *Lookback*: Este tipo de opción elimina de forma definitiva el problema del tiempo óptimo de ejercicio (*timing*). Están diseñadas para entregar el más alto valor intrínseco posible.
E) Opciones sobre más de un activo: En inglés se conocen como *rainbow*. Su valor a vencimiento es determinado por el comportamiento de al menos dos subyacentes distintos.
F) Opciones ligadas a una divisa: Opciones donde el subyacente es un tipo de cambio.
G) Otras

1.5. EJEMPLO DE UNA OPCION

Para finalizar el capítulo 1, se ejemplificará todo lo que se ha introducido hasta el momento con una sencilla aplicación práctica de las opciones.

Supóngase que cierto inversionista tiene una posición larga en una acción de Telmex*L, con un horizonte de inversión de seis meses y desea realizar una cobertura con los títulos opcionales de compra. Para tal efecto, el cliente decide vender su acción en $30.00 y adquirir un call con precio de ejercicio de $32.00 y vencimiento a seis meses. La prima de la opción es de $2.00 y la tasa de interés nominal anual es de 15%.

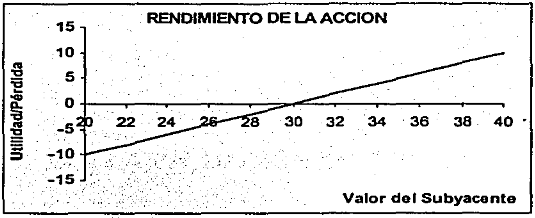
Después de efectuada la operación, el inversionista tiene \$28.00 para invertir en cetes y el resto \$2.00 lo usa para adquirir la opción (tabla 1).

Precio (\$)	Cetes (\$)	Intereses	Utilidad Opción (\$)	Valor Portafolio (\$)	Rendimiento Anual (%)
20.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
22.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
24.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
26.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
28.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
30.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
32.00	28.00	2.10	0.00	30.10	0.67%
34.00	28.00	2.10	2.00	32.10	14.00%
36.00	28.00	2.10	4.00	34.10	27.33%
38.00	28.00	2.10	6.00	36.10	40.67%
40.00	28.00	2.10	8.00	38.10	54.00%

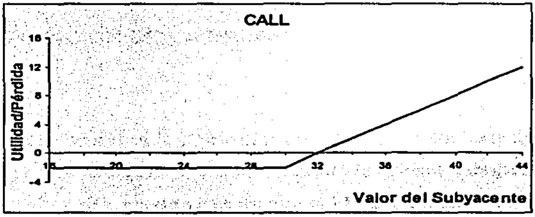
Tabla 1

La posición original del inversionista se vería como en la gráfica 5, donde se aprecia que está expuesto a un riesgo simétrico. Las gráficas 6 y 7 muestran respectivamente el call adquirido y la inversión realizada en cetes. La suma de estas dos últimas, da como resultado la gráfica 8, en la cual se ve el perfil de riesgo de la nueva estrategia de cobertura, donde el riesgo ha pasado a ser asimétrico, es decir, no hay pérdida ante las bajas en el precio de la acción y se mantiene la exposición al alza sobre dicho instrumento. Nótese que la unidad empleada en las gráficas 5 a 8 es pesos.

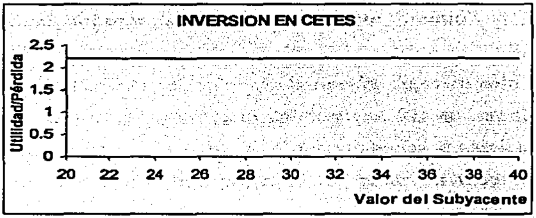
Hasta ahora, se han explicado las características básicas de las opciones. En el ejemplo previo, se asumió también que las expectativas del inversionista se mantienen a lo largo del tiempo. Sin embargo, las expectativas del mercado cambian conforme nueva información es conocida, además de la importancia del mercado secundario, lo cual hace indispensable el contar con una herramienta que permita valuar las opciones en cualquier momento del tiempo. Esto es lo que se hará con mayor detalle en los capítulos subsecuentes.



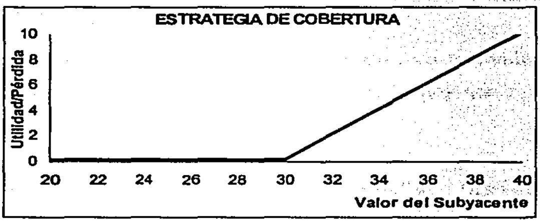
Gráfica 5



Gráfica 6



Gráfica 7



Gráfica 8

CAPITULO 2

INTRODUCCION A LA VALUACION DE OPCIONES

2.1. DESCOMPOSICION DE LA PRIMA

El valor de la opción o la llamada prima (C o P según se trate de un call o de un put), debe ser al menos igual al valor de paridad de la misma. Ahora si se toma en cuenta el hecho de que una opción puede valer más retenida que ejercida, entonces la prima debe ser mayor al valor de paridad. A la diferencia entre la prima y el valor de paridad se le conoce como "premio sobre la paridad" o simplemente "premio".

El día del vencimiento, el valor de la opción depende sólo de dos variables, a saber el valor del subyacente y el precio de ejercicio. Sin embargo, la presencia de un activo mercado secundario y la existencia de estrategias dinámicas de cobertura con opciones, plantean como problema principal, el hallar un modelo de valuación que permita conocer el precio de la opción en cualquier momento entre la fecha de contratación y la fecha de vencimiento.

La prima se divide en dos partes: el valor intrínseco y el valor tiempo. Estos dos componentes involucran de manera conjunta seis variables que influyen directamente sobre el valor de la opción, a saber:

i. El curso que sigue el precio del bien subyacente "*X*" a lo largo del tiempo.
ii. El precio de ejercicio o strike "*E*".

iii. La fecha de vencimiento del contrato o plazo a vencimiento "*t*".
iv. La volatilidad en el precio del subyacente "σ".
v. La tasa de interés "*i*".
vi. Y eventualmente los dividendos que reparte el subyacente, si es el caso.

2.1.1. VALOR INTRINSECO

El valor intrínseco representa la utilidad que sería realizada por el comprador de la opción si la ejerciera inmediatamente.

Tal y como se definió en el capítulo 1, este valor es igual al valor absoluto del valor de paridad, es decir

$$VI = | X - E |$$

donde recuérdese que X es el valor de mercado del subyacente y E, el precio de ejercicio.

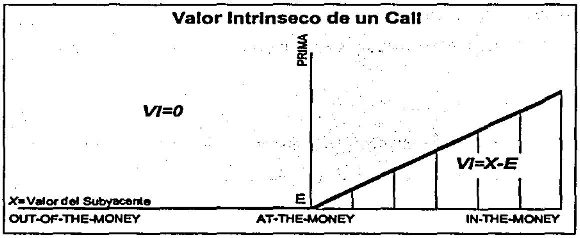
Para facilitar el análisis, se dejará por el momento a un lado al valor tiempo, del cual se hablará más adelante, reduciendo el valor de la prima únicamente al valor intrínseco de la opción, tal y como sucede al vencimiento del plazo contratado, hipótesis que se utilizará por el momento.

Supóngase que no es de interés adquirir un call o un put en-el-dinero y mucho menos si son fuera-del-dinero, por lo que en estos casos tanto el valor intrínseco como la prima serán nulos, ya que el valor de paridad en todos los casos es cero.

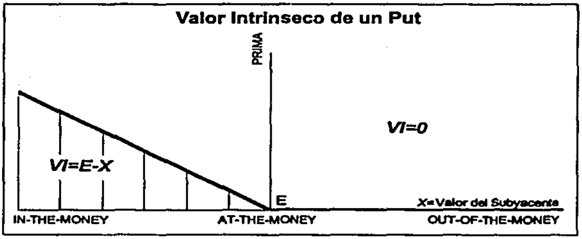
En el caso de que la opción este dentro-del-dinero, tanto la prima como el valor intrínseco serán positivos.

Bajo los supuestos anteriores, el valor intrínseco VI y la prima (de momento igual al VI, ya que se ha marginado de antemano al factor tiempo) serán iguales a la diferencia entre la cotización del bien subyacente X y el precio de ejercicio E en el caso de un call (gráfica 9), e iguales a la diferencia entre el precio de ejercicio *E* y la cotización del bien subyacente *X* para el caso de un put (gráfica 10).

Es claro que mientras una opción este más-dentro-del-dinero (*deep-in-the-money*), mayor será su valor intrínseco *VI*.



Gráfica 9



Gráfica 10

2.1.2. VALOR TIEMPO.

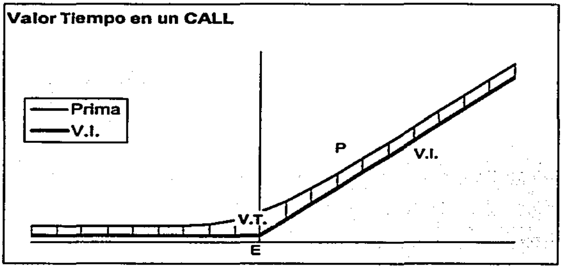
De manera general y en especial antes del vencimiento del contrato, es común que el comprador de una opción pague y que el vendedor exija algo más que el valor intrínseco. Este excedente es el valor tiempo, por lo cual la prima de la opción (a la cual de forma general se denotará por P, sin que esto quiera decir que se esta hablando de un put conforme a lo definido en el capítulo 1) es igual a la suma del valor intrínseco y del valor tiempo

$$P=VI+VT$$

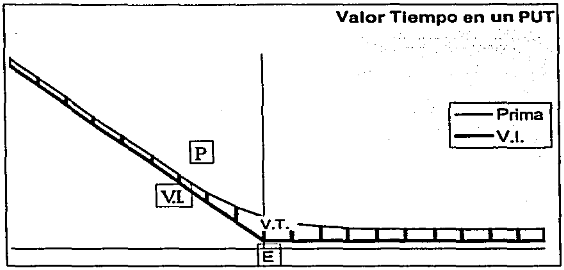
Se conoce como valor tiempo, debido a que con el tiempo, en un mercado al alza para un call y a la baja para un put, una opción llegue a ser interesante o no. Dicho de otra forma, con el tiempo, una opción fuera-del-dinero puede llegar a estar dentro-del-dinero, o bien una opción que ya este dentro-del-dinero pase a estar más-dentro-del-dinero (*deep-in-the-money*).

El valor tiempo representa así al precio suplementario que el comprador de la opción acepta pagar por la ventaja y que el vendedor exige como compensación por aceptar el riesgo.

En las gráficas 11 y 12, la zona sombreada representa al valor tiempo, el cual es la diferencia entre la prima (línea delgada) y el valor intrínseco (línea gruesa) de la opción.



Gráfica 11



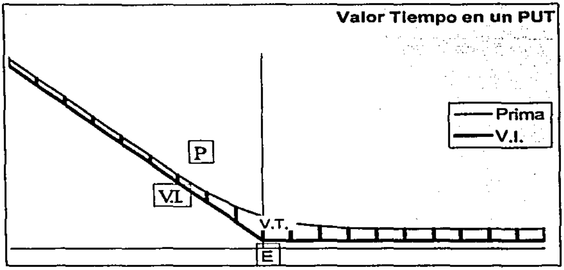
Gráfica 12

Nótese que el valor tiempo alcanza su máximo valor cuando el precio del bien subyacente *X* coincide con el precio de ejercicio *E*, y alcanza sus valores mínimos en los extremos de la curva del precio de la opción. Esto tiene sentido, porque basta un pequeño evento para que una opción en-el-dinero pase a ser dentro-del-dinero, mientras que para el caso de las opciones más-fuera-del-dinero o más-dentro-del-dinero, la posibilidad de que la cotización del bien subyacente *X*, vuelva a niveles cercanos al del precio de ejercicio *E*, es más remota que la posibilidad de que *X* se mantenga alejado de *E*.

El valor tiempo y por consiguiente la prima disminuyen conforme transcurre el tiempo, hasta llegar a ser nulas al vencimiento. Esta pérdida de valor sin embargo no es lineal; la velocidad con la que decrece el valor se acelera conforme se acerca al vencimiento.

Conforme $t \rightarrow 0$, entonces $C \rightarrow 0$, excepto cuando el call es dentro-del-dinero, ya que en dicho caso $C \rightarrow X - E$. Cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $C \rightarrow X$. En la gráfica 13 puede apreciarse esta situación con claridad para el caso del call y en la gráfica 14 para un put.

Hasta ahora, se han analizado sólo dos de las seis variables básicas (el precio de ejercicio *E* y el precio del bien subyacente *X*). Ahora se estudiará la influencia de las otras cuatro variables en el valor tiempo y por consiguiente en el valor de la opción.



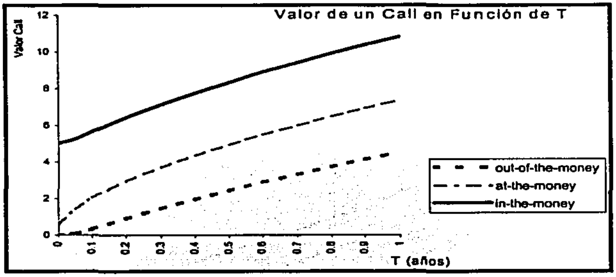
Gráfica 12

Nótese que el valor tiempo alcanza su máximo valor cuando el precio del bien subyacente *X* coincide con el precio de ejercicio *E*, y alcanza sus valores mínimos en los extremos de la curva del precio de la opción. Esto tiene sentido, porque basta un pequeño evento para que una opción en-el-dinero pase a ser dentro-del-dinero, mientras que para el caso de las opciones más-fuera-del-dinero o más-dentro-del-dinero, la posibilidad de que la cotización del bien subyacente *X*, vuelva a niveles cercanos al del precio de ejercicio *E*, es más remota que la posibilidad de que *X* se mantenga alejado de *E*.

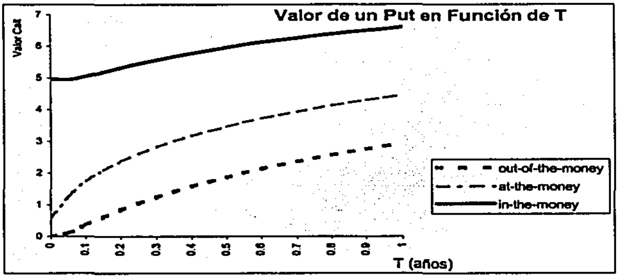
El valor tiempo y por consiguiente la prima disminuyen conforme transcurre el tiempo, hasta llegar a ser nulas al vencimiento. Esta pérdida de valor sin embargo no es lineal; la velocidad con la que decrece el valor se acelera conforme se acerca al vencimiento.

Conforme $t \rightarrow 0$, entonces $C \rightarrow 0$, excepto cuando el call es dentro-del-dinero, ya que en dicho caso $C \rightarrow X - E$. Cuando $t \rightarrow \infty$, entonces $C \rightarrow X$. En la gráfica 13 puede apreciarse esta situación con claridad para el caso del call y en la gráfica 14 para un put.

Hasta ahora, se han analizado sólo dos de las seis variables básicas (el precio de ejercicio *E* y el precio del bien subyacente *X*). Ahora se estudiará la influencia de las otras cuatro variables en el valor tiempo y por consiguiente en el valor de la opción.



Gráfica 13

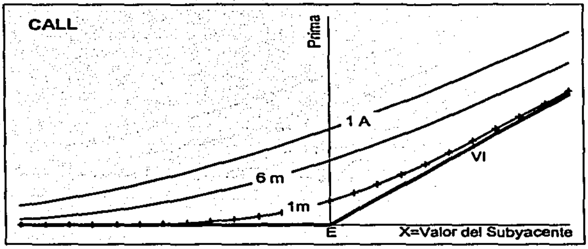


Gráfica 14

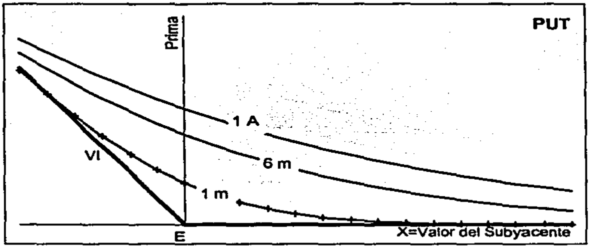
2.1.3. LA PRIMA ES FUNCION CRECIENTE EN RELACION A LA DURACION DE LA OPCION.

Mientras mayor es la duración de una opción, mayor es la prima respectiva, ya que la posibilidad de que la opción entre dentro de la clasificación dentro-del-dinero o más-dentro-del-dinero tiene más tiempo para ocurrir.

En las gráficas 15 y 16 se aprecia claramente esta afirmación, para los casos de un call y un put respectivamente. En ellas la línea obscura representa el VI, en comparación con las primas a 1, 6 y 12 meses por vencer.



Gráfica 15



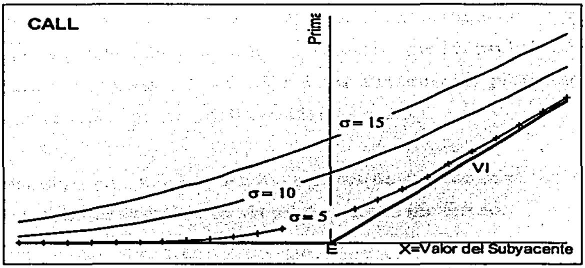
Gráfica 16

2.1.4. LA PRIMA ES FUNCION CRECIENTE DE LA VOLATILIDAD DEL BIEN SUBYACENTE.

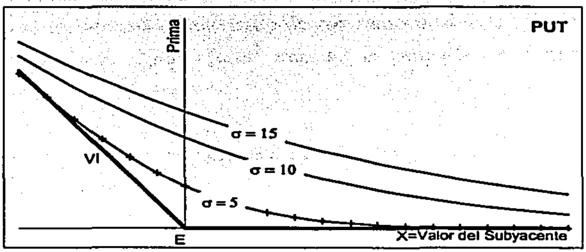
La prima será mayor mientras mayor sea la volatilidad[1] del subyacente, ya que la opción tendrá mayor oportunidad de ser dentro-del-dinero o más-dentro-del-dinero.

En las gráficas 17 y 18, se observa claramente esta relación.

[1] Para saber como calcular la volatilidad, consultar anexo 1.



Gráfica 17



Gráfica 18

La gran aportación del modelo Black-Scholes, es que para valuar la opción no se necesita saber las expectativas futuras acerca del subyacente, sino la magnitud de los movimientos de éste. Para introducir en un modelo las apreciaciones sobre los movimientos de un subyacente, se requiere un estadístico que los refleje. La desviación standard es una medida de la magnitud y dispersión de los movimientos.

El cálculo de la desviación standard, encierra dos supuestos. Primero, que las observaciones son simétricas alrededor del promedio, es decir, que movimientos de igual magnitud hacia arriba y hacia abajo son igualmente probables. Segundo, la probabilidad de ocurrencia de los movimientos decrece conforme se aleja del promedio. Estos supuestos son resultado de suponer una distribución normal.

Basados en observaciones históricas de largo plazo, ambos supuestos pueden objetarse. Primero, los registros no se distribuyen simétricamente alrededor de un promedio (se han observado más alzas que bajas, por lo que las probabilidades tampoco son muy simétricas); y segundo, los movimientos alejados del promedio se dan más frecuentemente que lo supuesto por la distribución normal.

La primera objeción, valida para los precios de las acciones, no lo es para los rendimientos de las mismas, basados en los mismos datos históricos.

La segunda objeción, también válida para el caso de los rendimientos, es un problema que se conoce como leptokurtosis (colas gordas). Los modelos, sin embargo, utilizan la desviación standard de los rendimientos como medida de dispersión y hacen, en caso de ser necesario algún ajuste[2] cuando se presenta un problema serio de leptokurtosis.

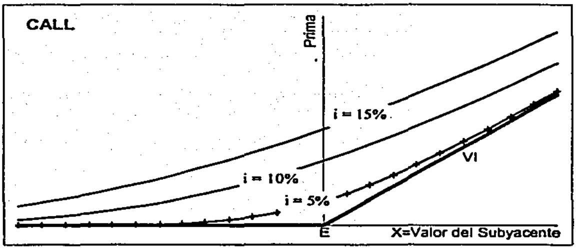
En el lenguaje de las opciones, la desviación standard de los rendimientos es la que se conoce como **volatilidad**.

2.1.5. LA PRIMA EN FUNCION DE LAS TASAS DE INTERES.

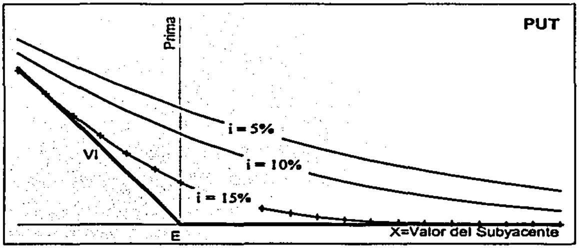
El valor de un call es una función creciente de la tasa de interés (gráfica 19), ya que esta última deprecia el valor presente del precio del bien subyacente en caso de ejercicio al vencimiento. Este efecto es equivalente a tener un precio de ejercicio menor.

Por consiguiente, el valor del put es función decreciente en relación a la tasa de interés (gráfica 20), debido a la depreciación sufrida por el subyacente en caso de asignación.

[2] Problemas relacionados con la volatilidad son presentados en el capítulo 4.



Gráfica 19



Gráfica 20

El tiempo tiene así en combinación con las tasas de interés, una segunda manera de influir en el precio de la opción: afectando al valor presente del precio de ejercicio.

2.1.6. LA INFLUENCIA DE LOS DIVIDENDOS.

Cuando el subyacente es una acción cotizada en bolsa, los dividendos al igual que las tasas de interés tienen efectos contrarios, según se trate de un call o de un put.

La prima es creciente en función de los dividendos en el caso de un put y decreciente en el caso de un call. Esto se debe a que el corte de cupón, que hace bajar el precio de la acción favorece al vendedor y no así al comprador.

En los mercados establecidos y reglamentados de opciones, el corte de un cupón no implica un ajuste en el precio de ejercicio de la opción. Si se espera un dividendo elevado, la prima de un call cae y el tenedor de la misma tiene interés en ejercer su opción antes del corte de cupón. El razonamiento es inverso para la put.

2.1.7. COMPORTAMIENTO DE LA OPCION.

En la tabla 2, se resume en lo visto hasta ahora, sobre la influencia de cada una de las seis variables estudiadas en el comportamiento del precio de una opción, ya sea un put o un call. El signo (+) significa que el precio de la respectiva opción se incrementa ante incrementos en la variable correspondiente, mientras que el signo (-), indica una disminución en el valor de la misma.

Variable	Put	Call
"X" Precio del subyacente	(-)	(+)
"E" Precio de ejercicio o strike	(+)	(-)
"t" Plazo a vencimiento	(+)	(+)
"σ" Volatilidad del subyacente	(+)	(+)
"i" Tasa de interés	(-)	(+)
"D" Dividendos	(+)	(-)

Tabla 2

2.2. ARBITRAJE

Una hipótesis básica que debe cumplirse —la cual será asumida a lo largo del presente trabajo de investigación— al estudiar fenómenos financieros y económicos es, la ausencia de oportunidades de arbitraje.

Se define al arbitraje como "la compra y venta simultánea de un bien o activo en distintos lugares, lo cual permite explotar ganancias sin tomar riesgos debido a las discrepancias de precios[3]."

Los "árbitros", no toman riesgos, simplemente se aprovechan del diferencial de precios entre dos activos relacionados en dos mercados diferentes. En el momento en que estos participantes del mercado identifican los referidos diferenciales, no sólo tienen una ganancia, sino que también eliminan dicho diferencial. Al hacer esto, impulsan la eficiencia del mercado.

Para definir arbitraje en términos matemáticos, se introducirá la siguiente notación a partir de un modelo de un periodo sencillo. Es evidente que éstos modelos (fecha inicial $t = 0$ y vencimiento $t = 1$) son representaciones irreales de modelos más complejos de tiempo variable (como los de las acciones) que se presentan de forma cotidiana en la vida real, sin embargo tienen la ventaja de ser de un manejo matemático sencillo, al tiempo que permiten apreciar de forma clara los principios asociados aún con aquellos modelos más complejos de tiempo continuo.

El espacio muestral de este modelo es $\Omega = \{ \omega_1, \ldots, \omega_k \}$ con $k < \infty$ donde cada ω_i representa un posible estado de la realidad.

[3] Catherine Mansell Carstens "Las Nuevas Finanzas en México" Ed. Milenio 1a. ed., 1992.

Se necesita una medida de probabilidad P sobre Ω, con $P(\omega) > 0 \quad \forall \omega \in \Omega$

Supóngase que en el mercado sólo existe un activo libre de riesgo (es decir, con tasa de rendimiento i fija)

$B_t \qquad t = 0,1$ donde $B_0 = 1$ y $B_1 = 1+i$

y por el contrario, existen N activos riesgosos, los cuales se denotaran por:

$S_n(t) \quad t=0,1 \quad n=1,2,\ldots,N$

Con estos N+1 activos en el mercado, puede formarse un portafolio con la estrategia de inversión $A = \{A_0, A_1, \ldots, A_n\}$, donde A_0 representa la cantidad invertida en el activo libre de riesgo y A_n $(n=1,\ldots N)$ la inversión en el n-ésimo activo riesgoso. Al valor de este portafolio se le llamará V_t y es tal que:

$$V_t = A_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} A_n S_n(t) \qquad t = 0,1$$

Sobre A_i, $i = 0,1,\ldots,N$ no existen restricciones, asumiéndose que en caso de ser negativo, equivale a una venta en corto del activo correspondiente.

Es claro que la utilidad resultante, es el resultado de la diferencia del valor del portafolio en $t = 1$ contra lo que se invirtió originalmente en $t = 0$,

$$G = V_1 - V_0$$

Desarrollando:

$$G = A_0(B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^{N} A_n [S_n(1) - S_n(0)]$$

$$\therefore G = A_0 i + \sum_{n=1}^{N} A_n \Delta S_n \qquad \text{donde } \Delta S_n = S_n(1) - S_n(0)$$

Los precios pueden ser normalizados respecto al activo libre de riesgo:

$$S_n^*(t) = {S_n(t)}/{B_t} \qquad n = 1, \ldots, N$$

El resto de las relaciones también se pueden expresar en estos términos:

$$V_t^* = {V_t}/{B_t} = A_0 + \sum_{n=1}^{N} A_n S_n^*(t)$$

$$G^* = \sum_{n=1}^{N} A_n \Delta S_n^* \qquad \text{con } \Delta S_n^* = S_n^*(1) - S_n^*(0)$$

y $\qquad G^* = V_1^* - V_0^*$

Ya con ésta notación, se dice que una estrategia de inversión A es dominante, si para cualquier otra estrategia $\widetilde{A}$, se cumple que $V_0^* = \widetilde{V}_0^*$ y $V_1^*(\omega) > \widetilde{V}_1^*(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$ Cuando existe una estrategia dominante, entonces existen oportunidades de arbitraje.

La existencia de una estrategia dominante en un mercado no puede ser real, porque si se presentara, existiría una estrategia de *trading* capaz de transformar un bien de valor inicial estrictamente negativo en un bien de valor no negativo. Además, la existencia de dicha estrategia, implica un proceso de asignación de precios ilógico.

Si no existen estrategias dominantes en el mercado, entonces la ley de un solo precio se cumple, es decir, no hay ambigüedad en el precio de cualquier bien en $t = 0$.

Formalmente se define a la estrategia A como oportunidad de **arbitraje** si:

a) $V_0^* = 0$;

b) $V_1^* \geq 0$; y

c) $E[V_1^*] > 0$

Una definición equivalente de arbitraje, también en términos de la estrategia A, es que cumpla con:

a) $G^* \geq 0$; y

b) $E[G^*] > 0$

Así mismo, se dice que una medida de probabilidad Q en Ω es neutral al riesgo si:

a) $Q(\omega) > 0 \qquad \forall \omega \in \Omega$ y

b) $\mathrm{E}_Q\left[\Delta S_n^*\right] = 0 \qquad n = 1, \ldots, N$

donde la notación $E_Q[X]$ indica la esperanza matemática de la variable aleatoria X, bajo la medida de probabilidad Q.

Hasta aquí, se ha visto que la existencia de una estrategia dominante implica la existencia de oportunidades de arbitraje, aunque lo contrario no sea cierto. Así mismo, se puede afirmar que si no hay estrategias dominantes, la ley de un solo precio se mantiene, aunque lo contrario no se cumpla.[4] Lo que el mercado requiere, para funcionar con eficiencia, es que estas oportunidades de arbitraje no existan, para lo cual se enuncia el siguiente teorema:

[4] Los ejemplos 1.5 y 1.6 del libro "Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models" de Stanley R. Pliska. Ed. Blackwell Publishers, muestran que el regreso de estas dos afirmaciones no se cumple.

2.2.1. TEOREMA DE ARBITRAJE

No existen oportunidades de arbitraje si y solo si existe una medida de probabilidad Q neutral al riesgo.

La demostración de este teorema es consecuencia del teorema de separación del hiperplano (álgebra lineal) y sale de los alcances y objetivos del presente trabajo.[5]

Ejemplo:

Supóngase que el precio de una acción en $t = 0$ es 100.
El precio de esta misma acción en $t = 1$ puede ser 50,100 ó 200.
El costo de una call sobre la misma acción con un strike de 80 en $t = 1$, es de C.
Mostrar que si $20 \leq C \leq 40$, entonces no hay oportunidades de arbitraje.

Solución:

Debe hallarse la medida de probabilidad neutral al riesgo, es decir Q.

Sea $Q=\{p, 1\text{-}p\text{-}q, q\}$ donde p y q son las probabilidades de que la acción en $t=1$ valga 50 ó 200 respectivamente. Por ende $1\text{-}p\text{-}q$, es la probabilidad de que dicho valor sea 100.

Para calcular p y q, supóngase que se decide comprar la acción y se procede a calcular el valor esperado de esta posición, igualándolo a cero, para que cumpla con ser una medida de probabilidad neutral al riesgo, es decir:

$$-50p + 0(1 - p - q) + 100q = 0$$

[5] Demostración en "Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models" de Stanley R. Pliska Ed. Blackwell Publishers.

$$\Rightarrow q = \frac{p}{2}$$

Ahora supóngase que se compra la opción y también se calcula el valor esperado de esta posición, pero utilizando el valor de q arriba encontrado:

$$-Cp + (20 - C)(1 - p - q) + (120 - C)q = 0$$
$$-Cp + (20 - C)\left(1 - \frac{3p}{2}\right) + (120 - C)\left(\frac{p}{2}\right) = 0$$
$$\therefore C = 20 + 30p$$

Pero dado que Q es una medida de probabilidad, debe cumplirse que $0 \le p + q \le 1$, es decir $0 \le 3p/2 \le 1 \;\Rightarrow\; 0 \le p \le 2/3$

Sustituyendo $p = 0$ y $p = 2/3$ en la igualdad hallada $C = 20 + 30p$, se concluye que si $C \in [20,40]$ entonces no hay oportunidades de arbitraje, pues es posible hallar Q.

2.3. RELACION DE PARIDAD PUT – CALL

Antes de continuar, se resume en la tabla 3 la simbología a utilizar durante el resto del trabajo — parte de la cual ya se ha venido utilizando — donde destaca la introducción de la variable "r = (1+i)".

Recuérdese que se esta suponiendo la ausencia de oportunidades de arbitraje, el que no existen costos de operación, impuestos ni márgenes de operación (garantías o colaterales), y que las tasas activas y pasivas son iguales.

Simbología
X: Precio de mercado del bien subyacente
X_T: Precio del subyacente en el mercado, a la fecha de vencimiento
E: Precio de ejercicio o strike
t: Plazo a vencimiento o tiempo actual
T: Fecha de vencimiento
r: Es igual a (1+i), donde i es la tasa de interés libre de riesgo
C: Valor o prima de un call
P: Valor o prima de un put
D: Dividendos (en su caso)

Tabla 3: Notación de las variables básicas

También se supondrá la ausencia de dividendos, pues el objetivo del presente trabajo, no son aquellos bienes que reparten dividendos.

Como puede deducirse, existe una alta correlación entre un call y un put. Por ende, las primas deben estar también altamente relacionadas mediante alguna expresión matemática.

Constrúyase un portafolio con un call y un put basados en el mismo subyacente, con el mismo precio de ejercicio "E" y el mismo tiempo a vencimiento, de la siguiente forma:

- Venta de un call
- Compra de un put
- Compra de una unidad del subyacente
- Se pide un préstamo por una cantidad igual a[6] $Ee^{-\delta t}$

[6] δ es la llamada fuerza de interés.

$$(1+i)=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = e^{\delta} = (1-d)^{-1} = \left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{-m}$$

donde i es tasa de interés y d es la respectiva tasa de descuento.

Como puede apreciarse en la tabla 4, el día de creación del portafolio se tiene un monto igual a

$$C\text{-}P\text{-}X+Ee^{-\delta t}$$

		Fecha de Vencimiento	
	Fecha Inicial	$X_T \leq E$	$E < X_T$
Venta de un call	C	0	$E - X_T$
Compra de un put	$-P$	$E - X_T$	0
Compra del bien	$-X$	X_T	X_T
Préstamo	$Ee^{-\delta t}$	$-E$	$-E$
Total	$C\text{-}P\text{-}X+Ee^{-\delta t}$	0	0

Tabla 4

El día del vencimiento, hay dos situaciones mutuamente excluyentes y de las cuales solo una puede ocurrir:

- *Caso* $X_T \leq E$: Se ejercerá el put, el cual tiene un valor de $E\text{-}X_T$. Por su parte el call no será ejercido.
- *Caso* $X_T > E$: En este caso por el contrario, el que se ejercerá será el call, el cual tiene un valor de $E\text{-}X_T$ y al put se le dejará vencer.

En cualquiera de los dos casos, al vencimiento se tiene que pagar E por el préstamo que se pidió, pero al mismo tiempo es vendida la unidad del subyacente a un valor X_T. Por consiguiente, el valor final del portafolio así construido es cero, en cualquiera de las dos posibles situaciones.

Análogamente, puede construirse otro portafolio, compuesto por la compra de un call, la venta de un put, la venta en corto de una unidad del subyacente y haciendo un préstamo (tabla 5). Este portafolio también tiene un valor nulo al final del plazo.

		Fecha de Vencimiento	
	Fecha Inicial	$X_T \leq E$	$E < X_T$
Compra de un call	$-C$	0	$X_T - E$
Venta de un put	P	$X_T - E$	0
Venta del bien	X	$-X_T$	$-X_T$
Préstamo	$-Ee^{-\delta t}$	E	E
Total	$-C+P+X-Ee^{-\delta t}$	0	0

Tabla 5

Dado que una de las hipótesis asumidas es la ausencia de oportunidades de arbitraje, lo que implica la ley de un solo precio, la inversión inicial es en consecuencia igual a cero, es decir:

$$C - P - X + Ee^{-\delta t} = -C + P + X - Ee^{-\delta t} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = P + X - Ee^{-\delta t} \qquad \text{Paridad Put - Call}$$

Esta última relación, es la que se conoce como **relación de paridad put-call** para opciones europeas.

Si esta relación fuera violada, implicaría que existen oportunidades de arbitraje.

Recuérdese que se esta estudiando únicamente el caso de bienes subyacentes que no reparten dividendos, pero si el estudio se ampliara a estos últimos, la relación de paridad quedaría establecida de la siguiente forma:

$$C = P + X - D - Ee^{-\delta t}$$

Obsérvese que del lado izquierdo de la relación se tiene el valor del call, mientras del lado derecho se tiene el valor del put más cinco de las variables básicas que influyen en el valor de la opción: X, D, E, i (implícita en δ) y t. Esto implica que cualquier cambio en cualquier otra variable, manteniendo estas cinco constantes, afectará de igual forma tanto al valor del call como al del put. Por ejemplo, un aumento en la volatilidad aumentaría el valor del call en el mismo monto en que incrementaría el valor del put.

2.4. INTRODUCCION A LA VALORIZACION DE LA PRIMA

Supóngase que el valor presente del subyacente es $X(0) = x_0$ y sea $X(t)$ el valor del mismo al tiempo t. Lo interesante sin embargo, es estudiar la trayectoria del precio del subyacente en el intervalo de tiempo $[0, T]$. Para lo anterior, se tiene un factor de descuento δ, de tal forma que el valor presente del subyacente es:

$$e^{-\delta t} X(t) \qquad 0 < t < T$$

Dado que ya se conoce la relación de paridad put-call, sólo se analizará el caso de un call, dado que el tratamiento para un put es similar.

Puede observarse la evolución del precio del subyacente a través del tiempo y tomarse éste como el experimento, siendo el resultado del mismo, el valor de la función $X(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Considere una primera estrategia para $u<t$, consistente en observar el experimento durante un tiempo u y entonces decidir comprar (vender) el subyacente a un precio $X(u)$, para luego venderlo (comprarlo) en el tiempo t, a un precio $X(t)$ $\quad 0 \leq u < t \leq T$.

Una segunda estrategia, consiste en comprar en $t = 0$ una de N opciones call, cada una a un costo C_i, las cuales dan el derecho de comprar el subyacente al tiempo t_i, a un precio E_i fijado de antemano $(i = 1,\ldots,N)$.

Se desea determinar el valor de C_t de forma tal que no exista alguna oportunidad de arbitraje. Recuérdese que el teorema de arbitraje establece que para que no haya oportunidades de arbitraje, necesariamente debe existir una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Para la primer estrategia, se tiene que el monto pagado por el subyacente en términos de valor presente es $e^{-\delta u}X(u)$, y a su vez el valor presente del monto recibido es $e^{-\delta t}X(t)$. Para asegurarse de la ausencia de oportunidades de arbitraje, recuérdese que el valor esperado de esta estrategia bajo la medida Q de probabilidad neutral al riesgo debe ser cero. En otras palabras:

$$\mathrm{E}_Q\left[e^{-\delta t}X(t)\middle|X(v), \quad 0 \le v \le u\right] = e^{-\delta u}X(u) \tag{1}$$

Ahora considérese la estrategia de adquirir un call, el cual otorga el derecho de comprar el subyacente al tiempo t, a un precio de ejercicio E. Acorde a lo que se vio en el capítulo anterior, el valor de paridad de un call es igual a $max[\ 0,\ X(t)-E\ ]$ o bien expresado de otra forma es igual a $[\ X(t)-E\ ]^{+}$.

Con esta estrategia también se desea la ausencia de oportunidades de arbitraje y además se sabe que el costo del call en $t = 0$ es C. Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\mathrm{E}_Q\left[e^{-\delta t}\left(X(t)-E\right)^{+}\right] = C \tag{2}$$

Ahora se presentará una medida de probabilidad Q que satisface a la ecuación (1).

Supóngase que $\{\ X(t),\ \ t \ge 0\ \}$, donde

$$X(t) = x_0 e^{Y(t)}$$

es un movimiento geométrico Browniano[7], donde $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano con coeficiente de tendencia μ y varianza σ^2.

Para un movimiento de esta naturaleza, se tiene[8] que para $u < t$,

$$E[X(t) \mid X(v),\quad 0 \leq v \leq u] = X(u)e^{(t-u)(\mu+\sigma^2/2)}$$

Ahora, siendo Q la medida de probabilidad que gobierna al proceso estocástico $\{X_0 e^{Y(t)},\quad 0 \leq t \leq T\}$, donde $\{Y(t)\}$ es un movimiento Browniano con coeficiente de tendencia μ y varianza σ^2 y escogiendo a estas dos últimas de tal forma que

$$\mu + \sigma^2/2 = \delta,$$

la ecuación (1) se satisface.

---

[7] Un proceso estocástico $\{X(t),\ t \geq 0\}$ se denomina **movimiento Browniano** ó proceso Wiener si:

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t),\ t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes, es decir:
   - para $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ se tiene $X(t_n) - X(t_{n-1}),\ X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \ldots,\ X(t_2) - X(t_1)$ independientes.
   - $\{X(t),\ t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios si la distribución de $X(t+s) - X(t)$ no depende de t.
3. Para cada $t > 0$, $X(t) \sim N(0,\ \sigma^2 t)$.

Cuando se da el caso $\sigma = 1$, se está ante un **movimiento Browniano standard.**

$\{X(t),\ t \geq 0\}$ se denomina **movimiento Browniano con coeficiente de tendencia** μ y varianza σ^2 si:

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t),\ t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes;
3. $X(t) \sim N(\mu t,\ \sigma^2 t)$

El proceso $\{X(t),\ t \geq 0\}$ definido por $X(t) = e^{Y(t)}$, donde $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano con coeficiente de tendencia μ y varianza σ^2, es llamado **movimiento geométrico Browniano.**

Para una mayor comprensión refierase al anexo 2.

[8] Ver anexo 2

De lo anterior, se puede concluir que si el costo de un call es calculado conforme a la ecuación (2) y utilizando esta medida de probabilidad Q, entonces no existen oportunidades de arbitraje.

Como $X(t) = x_0 e^{Y(t)}$, donde $Y(t) \sim N(\mu t, t\sigma^2)$, se tiene que:

$$C = E_Q\left[e^{-\delta t}\left(X(t) - E\right)^+\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t}(x_0 e^y - E)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy$$

$$\Rightarrow Ce^{\delta t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta t} e^{-\delta t}(x_0 e^y - E)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy \tag{3}$$

Ahora analícese $\left(x_0 e^y - E\right)^+$

$e^y - E/x_0 > 0 \;\Rightarrow\; e^y > E/x_0 \;\Rightarrow\; y > \ln\left(E/x_0\right)$, es decir, y está definida a partir de $ln(E/x_0)$.

Sustituyendo los límites de la integral en la ecuación (3):

$$Ce^{\delta t} = \int_{\ln(E/x_0)}^{\infty} (x_0 e^y - E) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-(y-\mu t)^2/2t\sigma^2} dy \tag{4}$$

Ahora sea $w = (y - \mu t)/\sigma\sqrt{t} \;\Rightarrow\; y = w\sigma\sqrt{t} + \mu t$ y $dw = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} dy$

Como y esta definido solo a partir de $ln(E/x_0)$, entonces w esta definida sólo a partir de $a = \frac{\ln(E/x_0) - \mu t}{\sigma\sqrt{t}}$

Sustituyendo en la ecuación (4), se tiene:

$$Ce^{\delta t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} x_0 \int_a^{\infty} e^{\sigma w\sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw - E \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-w^2/2} dw \qquad (5)$$

Ahora :

$$e^{\sigma w\sqrt{t}} e^{-w^2/2} = e^{\sigma w\sqrt{t} - w^2/2}$$

y por otro lado $\quad e^{-(w-\sigma\sqrt{t})^2/2} = e^{-w^2/2} \cdot e^{2\sigma w\sqrt{t}/2} \cdot e^{-\sigma^2 t/2}$

Es decir $\quad e^{\sigma w\sqrt{t}} e^{-w^2/2} = e^{-\left(w-\sigma\sqrt{t}\right)^2/2} \cdot e^{\sigma^2 t/2}$

Entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{\sigma w\sqrt{t}} e^{-w^2/2} dw = e^{t\sigma^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-(w-\sigma\sqrt{t})^2/2} dw$$

$$= e^{t\sigma^2/2} P\{N(\sigma\sqrt{t},1) \geq a\}$$

$$= e^{t\sigma^2/2} P\{N(0,1) \geq a - \sigma\sqrt{t}\}$$

$$= e^{t\sigma^2/2} P\{N(0,1) \leq -(a - \sigma\sqrt{t})\}$$

$$= e^{t\sigma^2/2} \phi(\sigma\sqrt{t} - a)$$

donde $\phi(x)$ indica la función de distribución de probabilidad acumulativa de una variable aleatoria normal standard (la probabilidad de que dicha variable sea menor que x).

El segundo término de la ecuación (5), se obtiene de manera análoga, de tal manera que:

$$Ce^{\delta t} = x_0 e^{\mu t + t\sigma^2/2} \phi(\sigma\sqrt{t} - a) - E\phi(-a) \qquad (6)$$

Usando el hecho de que μ y σ fueron escogidos de tal forma que:

$$\mu + \sigma^2/2 = \delta$$

y haciendo $b = (\sigma\sqrt{t} - a)$, puede reescribirse a la ecuación (6) como:

$$C = x_0\phi(b) - Ee^{-\delta t}\phi(b - \sigma\sqrt{t}) \qquad (7)$$

donde

$$b = \sigma\sqrt{t} - a = \frac{\ln(x_0 / E) + \delta t + \sigma^2 t / 2}{\sigma\sqrt{t}}$$

La fórmula obtenida arriba (ecuación 7) para calcular la prima de la opción depende del precio inicial del subyacente (x_0), del plazo (t), del precio de ejercicio o strike (E), de la tasa continua de interés (δ) y del valor σ^2. Nótese que si la prima de la opción es calculada conforme a la fórmula (7), entonces independientemente del valor de σ^2, no existen oportunidades de arbitraje. Sin embargo, es natural calcular la prima de la opción de acuerdo a la fórmula (7), usando como valor del parámetro σ^2 a la varianza estimada[9] bajo un modelo de movimiento geométrico Browniano. Cuando se realiza esto último, entonces la fórmula (7) es conocida como la **fórmula de Black-Scholes.**

[9] En el anexo 1, se da un procedimiento para calcular la volatilidad.

CAPITULO 3

CALCULO ESTOCASTICO

3.1. PROCESOS DE MARKOV

Lo que se ha hecho hasta ahora, es descubrir la ecuación de Black-Scholes, utilizando para ello un enfoque probabilístico. A continuación, se traducirán dichos resultados a una notación de cálculo estocástico, dado que la fórmula general de Black-Scholes para un producto derivado en general, es en el fondo una ecuación diferencial estocástica.

Un **proceso estocástico**, es una familia de variables aleatorias $\{Z(t,w)\ ,\ t\in T,\ w\in\Omega\}$ dado el espacio de probabilidad (Ω, A, p). Por lo general, la notación de un proceso estocástico es solamente $Z(t)$.

Los procesos estocásticos más comunes son de tal forma que para un conjunto discreto de parámetros $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$, las variables aleatorias $Z(t_1), Z(t_2), \ldots, Z(t_n)$ exhiben de alguna forma cierta dependencia. Por ejemplo, considérese el juego de arrojar al aire una moneda balanceada, en el cual se origina una ganancia de un peso cada vez que ésta cae águila y una pérdida de un peso cada vez que cae sol. Sea S_n la variable aleatoria que indica la utilidad (pérdida) transcurridos n eventos. Es claro que el valor de S, después de n volados, depende de las utilidades (pérdidas) acumuladas a lo largo de los $n-1$ resultados previos.

Claramente el análisis de los procesos se complica conforme la estructura de dependencia se vuelve más compleja. La dependencia más simple que existe, la de primer orden, es llamada dependencia de Markov y se define como sigue:

Considérese un conjunto finito (o infinito contable) de puntos $(t_0, t_1, \ldots, t_n, t)$, $t_0<t_1<\ldots<t_n<t$, con $t, t_r \in T$ $(r = 0,1,\ldots,n)$, donde T es el espacio de parámetros del proceso $\{Z(t)\}$. La dependencia exhibida por el proceso $\{Z(t), t\in T\}$ se denomina dependencia de Markov si la distribución condicional de $Z(t)$ dados los valores de $Z(t_1)$, $Z(t_2),\ldots,Z(t_n)$ depende únicamente del valor de $Z(t_n)$, que es el valor más reciente del proceso. En otras palabras,

$$P\left[Z(t) \leq z \mid Z(t_n) = z_n,\ Z(t_{n-1}) = z_{n-1},\ldots,\ Z(t_0) = z_0\right] = P\left[Z(t) \leq z \mid Z(t_n) = z_n\right]$$

Los procesos estocásticos que exhiben esta propiedad, son llamados procesos de Markov.

3.2. PROCESOS WIENER

Un proceso Wiener, también conocido como proceso de movimiento Browniano es un caso particular de los procesos de Markov, pero es muy importante, porque el comportamiento en el precio de algunos bienes con frecuencia se expresa en términos de éste proceso.

El comportamiento de una variable aleatoria Z que sigue un movimiento Browniano, puede comprenderse mejor considerando los cambios en su valor Δz que experimenta en cortos intervalos de tiempo Δt. Las dos propiedades básicas de Δz son:

i. $\Delta z = \lambda\sqrt{\Delta t}$

donde λ es una muestra aleatoria de una distribución normal standard $N(0,1)$. En este caso se tiene directamente por construcción un movimiento estandarizado.

ii. Los valores de Δz para cualesquiera dos intervalos diferentes de tiempo Δt, son independientes.

De la propiedad i, es inmediato que $\Delta z \sim N(0, \Delta t)$, mientras que la propiedad ii, implica que Z sigue un proceso de Markov.

Un proceso Wiener[1] es el límite del proceso arriba descrito cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Procediendo de manera análoga al cálculo diferencial ordinario, donde $\Delta y/\Delta x$ se convierte en dy/dx en el límite, la igualdad dada en la propiedad i, en el caso límite queda como sigue:

$$dz = \lambda\sqrt{dt} \qquad (1)$$

El proceso Wiener hasta ahora descrito, tiene un coeficiente de tendencia 0 y una varianza de 1. La definición de un proceso generalizado de Wiener para una variable Y en términos de dz, se da de la manera siguiente:

$$dy = adt + bdz \qquad (2)$$

con a y b constantes.

Para comprender la ecuación (2), considérense a los dos miembros de la derecha de la ecuación por separado. El término adt, implica que y tiene un coeficiente de tendencia "a" por unidad de tiempo, es decir, en un intervalo de tiempo de longitud T, y se incrementa en un monto aT. Si se margina por un momento al término bdz, entonces la ecuación queda simplemente como:

[1] Para una mejor comprensión, refiérase al anexo 2.

$$dy = adt \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dt} = a \;\Rightarrow\; y = y_0 + at$$

donde y_0 es el valor inicial de la variable Y.

El término *bdz* puede ser visto como si añadiera ruido o variabilidad a la trayectoria seguida por Y. La cantidad de ruido que añade este término, es b veces un proceso Wiener.

De las ecuaciones (1) y (2), se infiere que en un intervalo corto de tiempo dt, el cambio de valor en y, dy viene dado por:

$$dy = adt + b\lambda\sqrt{dt}$$

Aplicando las propiedades básicas de la esperanza matemática y la varianza[2], puede inferirse que la ecuación (2), la cual describe a un proceso Wiener generalizado tiene una distribución $N(aT, b^2T)$ en cualquier intervalo de tiempo T.

3.3. PROCESO DE ASIGNACION DE PRECIOS

Antes de continuar, nótese que lo que en realidad importa en el comportamiento del precio de algún bien subyacente, no es el cambio de valor en términos absolutos – un incremento de $1 es más significativo cuando el precio del bien es de $20 que cuando es de $200 –, sino más bien la medida de interés, es el cambio relativo en el precio del bien (tasa de rendimiento).

[2] Si X, Y v.a. con a, b constantes, entonces:

- ✓ $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$
- ✓ $Var[aX+b]=a^2Var[X]$
- ✓ Si $X\sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y\sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Supóngase que al tiempo t, el valor del activo es X. Ahora considérese un pequeño intervalo de tiempo dt, durante el cual, el valor del bien pasa a ser $X+dX$. Como se ha establecido, la magnitud que se desea medir es dX/X.

Este rendimiento se descompone en dos partes:

i. La parte predecible μdt, que corresponde a un rendimiento determinístico relacionado con el rendimiento del activo libre de riesgo, donde μ es una medida de la tasa de crecimiento del precio del bien (mejor conocida como coeficiente de tendencia)
ii. La segunda parte, corresponde al efecto que ejercen sobre el valor del bien ciertos fenómenos exógenos, que se ven reflejados como cambios aleatorios en el valor del mismo.

La parte aleatoria, es representada por un proceso Wiener σdZ, donde σ es la volatilidad en el precio del bien.

Al conjuntarse ambas partes de la ecuación, se llega a:

$$\frac{dX}{X} = \mu dt + \sigma dz \tag{3}$$

ó

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz \tag{4}$$

Esta ecuación diferencial estocástica, es la representación matemática del modelo de asignación de precios, donde μ el coeficiente de tendencia representa al rendimiento esperado y σ es la volatilidad en el precio del subyacente, como se refirió anteriormente.

Nótese que si se toma $\sigma = 0$, es decir, si se margina a la volatilidad, se llega a la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dX}{X} = \mu dt \qquad (5)$$

y resolviendo la ecuación (5), se llega a:

$$X = X_0 e^{\mu t}$$

donde X_0 es el valor del bien en $t=t_0$. Por lo tanto, si la volatilidad es cero *($\sigma = 0$)*, la ecuación (3) es determinística y se puede con certeza predecir el valor futuro del bien, ya que crece a una tasa compuesta continuamente de μ por unidad de tiempo.

En la práctica sin embargo, los precios exhiben cierta volatilidad, por lo cual la ecuación (4) es el modelo más ampliamente utilizado para representar el comportamiento del precio del subyacente. Esta ecuación describe un proceso de Itô.

Nótese que la ecuación (3) representa un movimiento geométrico Browniano.

3.4. PROCESO DE ITÔ

Hasta ahora se han visto las propiedades y características de los procesos Wiener, asumiendo que los parámetros a y b son constantes, pero esto no siempre es así. De hecho, un proceso generalizado de Wiener con la particularidad de que los parámetros a y b son funciones de dos parámetros, a saber, el tiempo t y la variable bajo estudio y, se define como un **proceso de Itô**.

$$dy = a(y, t)dt + b(y, t)dz$$

En un proceso de Itô, tanto el coeficiente de tendencia como la varianza son variables.

La integral estocástica asociada al proceso de Itô y cuya utilidad se verá dentro de poco, es:

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t aY_s ds + \int_0^t bY_s dz$$

3.4.1. LEMA DE ITÔ

En la sección 3.3, se vio que el proceso de asignación de precios del subyacente por si mismo, es un movimiento geométrico Browniano, es decir, es sólo un caso particular de los procesos de Itô.

El lema de Itô (el cual se deriva del teorema del mismo nombre y que se enuncia una sección más adelante), lo que permite, es calcular el rendimiento instantáneo de una función de un proceso Itô, es decir, relaciona la razón de cambio de una función de variable aleatoria con la razón de cambio en la propia variable aleatoria.

Como una operación de derivados es función del activo subyacente, entonces aplicando el lema de Itô a dicha función puede calcularse el rendimiento instantáneo de la operación.

Sea $f(y,t)$ una función continua y derivable.

Utilícese la expansión en serie de Taylor[3] para $f(y + dy, t + dt)$:

[3] Sea f una función tal que $f^{(1)}(a), \ldots f^{(n)}(a)$ existen todas.

Sea $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad 0 \le k \le n,$

El Polinomio de Taylor de grado n para f en a, se define por: $P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n$

$$df = \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dy^2}dy^2 + \frac{d^2 f}{dydt}dydt + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{d^2 t}dt^2 + \ldots, \qquad (6)$$

donde los términos que se han suprimido, son de orden superior.

Recuérdese que un proceso de Itô se ha definido como

$$dy = a(y, t)dt + b(y, t)dz$$

o haciendo a un lado los argumentos,

$$dy = adt + bdz \qquad (7)$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} dy^2 &= (adt + bdz)^2 \\ &= a^2 dt^2 + 2abdtdz + b^2 dz^2 \end{aligned} \qquad (8)$$

Recordando que en la sección 3.2, ecuación (1), se definió a *dz* en el caso límite cuando $t \rightarrow 0$ como:

$$dz = \lambda\sqrt{dt} \quad \Rightarrow \quad dz^2 = \lambda^2 dt \qquad (9)$$

Dada la naturaleza infinitesimal de *dt*, este término elevado a cualquier potencia de orden mayor a la unidad, desaparece rápidamente y por lo tanto carece de relevancia.

Tomando en cuenta el hecho anterior y sustituyendo las ecuaciones (7), (8) y (9) — nótese que el término *dtdz* es de orden superior a uno respecto a *dt* y por lo tanto en la igualdad (8), solo el término b^2dz^2 que es de orden 1 en *dt*, es relevante — en la ecuación (6), se llega a:

$$df = \frac{df}{dy}\left(adt + bdz\right) + \frac{df}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dy^2}b^2\lambda^2 dt \qquad (10)$$

Recuérdese que λ es una muestra aleatoria de una distribución normal standard, es decir,

$$E[\lambda] = 0$$

y

$$\mathrm{Var}(\lambda) = E[\lambda^2] - (E[\lambda])^2 = 1 \quad \Rightarrow \qquad E[\lambda^2] = 1$$

Por lo tanto, $b^2\lambda^2$ deja de ser estocástico y su valor esperado es igual a b^2.

Volviendo a la ecuación (10),

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dy}(adt + bdz) + \frac{df}{dt}dt + \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dy^2}b^2 dt \\ &= b\frac{df}{dy}dz + \left[a\frac{df}{dy} + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2 f}{dy^2}\right]dt \end{aligned}$$

LEMA DE ITÔ

Este último resultado es el lema de Itô y en resumen lo que dice es que dada Y, una variable aleatoria que sigue un proceso de Itô, cuyo coeficiente de tendencia es a y su varianza es b^2, entonces una función f de clase C^2 tanto de y como de t se comporta también como un proceso de Itô. En particular, f sigue el siguiente proceso:

$$df = b\frac{df}{dy}dz + \left[a\frac{df}{dy} + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2 f}{dy^2}\right]dt$$

donde dz es el mismo movimiento Browniano seguido por la variable aleatoria Y. Este es un proceso de Itô, pero con un coeficiente de tendencia

$$a\frac{df}{dy} + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}b^2\frac{d^2 f}{dy^2}$$

y una varianza de

$$b^2\left(\frac{df}{dy}\right)^2.$$

3.4.2. TEOREMA DE ITÔ[4]

Sea $f: R \rightarrow R$ una función de clase C^2 y sea $\{Y_t\}_{0 \le t \le T}$ un proceso de Itô

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t aY_s ds + \int_0^t bY_s dz$$

Entonces

$$f(Y_t) = f(Y_0) + \int_0^t f'(Y_s) a ds + \int_0^t f'(Y_s) b dz + \frac{1}{2}\int_0^t f''(Y_s) b^2 ds, \qquad 0 \le t \le \infty$$

Los procesos de Itô, así como el lema y el teorema de Itô, son esenciales en el estudio de los productos derivados, pues como se ha visto, el modelo más común usado para representar la trayectoria del precio de algún bien es el descrito por la ecuación (4), el cual es un proceso de Itô, con μ y σ constantes y dz un movimiento Browniano.

A continuación se demostrará que el proceso $\{X(t)\}_{0 \le t \le T}$, definido como

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z}$$

[4] La demostración de este teorema puede consultarse en "Brownian Motion and Stochastic Calculus" de I. Karatzas y Steven E. Shreve. Editorial Springer-Verlag. (pp. 149-153)

es una solución del siguiente proceso de Itô

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dz$$

donde esta última ecuación es la integral estocástica equivalente a la ecuación (4), es decir, es otra alternativa de representar al proceso de asignación de precios.

Sea el proceso estocástico $\{X(t)\}$ definido por

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dz \qquad \forall t \in [0,T]$$

y la función *f*, definida por

$$f(x)=\ln(x)$$

Claramente *f* no es una función clase C^2, dado que su primera y segunda derivadas no están definidas en $x=0$. Sin embargo, suponiendo que $X_t > 0$, puede asegurarse que la función *f* es de clase C^2, pues su dominio se restringe únicamente a $R^+ - \{0\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Aplicando el teorema de Itô:

$$\begin{aligned}
\ln(X_t) &= \ln(x_0) + \int_0^t \frac{1}{X_s}\mu X_s ds + \int_0^t \frac{1}{X_s}\sigma X_s dz + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{X_s^2}(\sigma X_s)^2 ds \\
&= \ln(x_0) + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dz - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds \\
&= \ln(x_0) + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma dz
\end{aligned}$$

$$= \ln(x_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z$$

Por lo tanto,

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma Z}$$

es una solución de

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dz$$

Esto es justamente lo que se buscaba. Se ha encontrado una función f de un movimiento Browniano, tal que los incrementos de f y df se comportan como la ecuación estocástica dada.

3.5. LA DISTRIBUCION LOGNORMAL

Una variable aleatoria X, se dice que sigue una función de distribución de probabilidad lognormal, si el logaritmo natural de la variable (lnX) se distribuye normal.

Según la ecuación (4) $dX = \mu X dt + \sigma X dz$ es un modelo matemático para representar los movimientos en el precio de un bien.

Sea f una función de X y de t, $[f(X,t)]$, a la cual después de aplicarle el lema de Itô, queda

$$df = \left[\frac{df}{dX}\mu X + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{d^2 f}{dX^2}\right]dt + \sigma X \frac{df}{dX}dz$$

Sea $f(X,t) = lnX$

Entonces:

$$\frac{df}{dX} = \frac{1}{X}, \qquad \frac{df}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2 f}{dX^2} = -\frac{1}{X^2}$$

tal que aplicando el lema de Itô, se tiene:

$$df = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz$$

Como μ y σ son constantes, entonces f sigue un proceso generalizado de Wiener con coeficiente de tendencia igual a μ-$\sigma^2/2$ y varianza σ^2.

Nótese que conforme lo visto anteriormente sobre los procesos Wiener, el cambio en f entre el momento actual t (lnX) y algún momento en el futuro T (lnX_T), se distribuye normal con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ y varianza $\sigma^2(T-t)$.

En otras palabras,

$$\ln X_T - \ln X \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \qquad (11)$$

Ahora, recurriendo a las propiedades de la distribución normal, se sigue que:

$$\ln X_T \sim N\left(\ln X + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \qquad (12)$$

Esto demuestra que X_T sigue una distribución lognormal, pudiendo tomar cualquier valor en el intervalo (0,∞).

Con las propiedades de la distribución lognormal[5], se llega a:

$$E[X_T] = Xe^{\mu(T-t)} \qquad \text{y} \qquad Var(X_T) = X^2 e^{2\mu(T-t)}\left(e^{\sigma^2(T-t)} - 1\right)$$

Es muy importante conocer la función de distribución que sigue la variable logaritmo natural, pues como se ha visto, el cambio en el precio de un bien subyacente, o lo que es equivalente, la tasa de rendimiento sobre el mismo, pueden expresarse en términos de dicha función. Conociendo precisamente a esta función, pueden hacerse predicciones y calcularse intervalos de confianza para el precio del bien en un intervalo de tiempo.

A través de este resultado, también puede demostrarse que la fuerza de interés δ, sigue una distribución normal.

---

[5] Sea *X* v.a. positiva y sea *Y=lnX*. Si *Y* se distribuye normal, entonces *X* se distribuye lognormal.
La función de densidad de esta distribución, es:

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right]$$

y su media y su varianza son respectivamente:

$$E[X] = e^{\mu + \sigma^2/2} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}$$

Por otro lado, $E[Y] = \mu$ y $Var[Y] = \sigma^2$

$X_T = Xe^{\delta(T-t)}$, donde δ es la tasa de interés compuesta continuamente, ganada por el subyacente entre el tiempo t y el tiempo T.

$$\frac{X_T}{X} = e^{\delta(T-t)} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{1}{T-t}\ln\left(\frac{X_T}{X}\right) \tag{13}$$

Pero $\ln X_T - \ln X = \ln\left(\frac{X_T}{X}\right)$

De la ecuación (11), se sigue que:

$$\ln\left(\frac{X_T}{X}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma^2(T-t)\right] \tag{14}$$

Por lo tanto,

$$\delta \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T-t}\right) \tag{15}$$

con lo que queda demostrado que la tasa de interés continua, también se comporta como una distribución normal, con parámetros media = $\mu - \sigma^2/2$ y varianza = $\sigma^2/(T-t)$

3.6. ECUACION DIFERENCIAL DE BLACK & SCHOLES

La ecuación diferencial de Black-Scholes, la cual a continuación se derivará, debe ser satisfecha por el precio f de cualquier producto derivado sobre un subyacente que no pague dividendos. Para derivar dicha ecuación, se partirá de los supuestos en los cuales se basa la mencionada ecuación y los cuales se han venido asumiendo hasta ahora:

- El precio del subyacente X, sigue el proceso descrito en la ecuación (4),

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz$$

  con μ y σ constantes.
- No existen restricciones sobre las ventas en corto del subyacente.
- No existen costos de impuestos ni de operación, además de que cualquier subyacente es completamente divisible.
- Los bienes subyacentes no reparten dividendos.
- Ausencia de oportunidades de arbitraje.
- *Trading* de los subyacentes continuo.
- La tasa de interés libre de riesgo i, es conocida y se mantiene constante durante la vigencia del derivado.

Partiendo del primer supuesto, acerca del proceso que sigue el precio X del subyacente, se tiene:

$$dX = \mu X dt + \sigma X dz \tag{16}$$

Sea f el precio de un producto derivado de X, es decir, f es función de X y de t. Al aplicar el lema de Itô sobre la función f, queda:

$$df = \left(\frac{df}{dX} \mu X + \frac{df}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dX^2} \sigma^2 X^2 \right) dt + \frac{df}{dX} \sigma X dz \tag{17}$$

Retrocediendo a la sección 3.4 donde se habla del lema de Itô, se sabe que el proceso Wiener que se encuentra presente en la función f es el mismo proceso Wiener presente en X. Ahora para continuar sin términos aleatorios, considérese el portafolio constituido de la siguiente forma:

-1: Derivado

$\frac{df}{dX}$: Bien subyacente

El tenedor de este portafolio esta corto en un instrumento derivado y largo en *df/dX* unidades del bien subyacente. Sea *V* el valor de este portafolio,

$$V = -f + \frac{df}{dX}X \tag{18}$$

La razón de cambio *dV* en el valor del portafolio, dado un pequeño cambio en el tiempo *dt*, es:

$$dV = -df + \frac{df}{dX}dX \tag{19}$$

Ahora sustituyendo (16) y (17) en (19), se llega a:

$$\begin{aligned} dV &= \left(-\frac{df}{dX}\mu X - \frac{df}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}\sigma^2 X^2\right)dt - \frac{df}{dX}\sigma X dz + \frac{df}{dX}(\mu X dt + \sigma X dz) \\ &= \left(-\frac{df}{dt} - \frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}\sigma^2 X^2\right)dt \end{aligned} \tag{20}$$

Esta ecuación ya no contiene al término aleatorio *dz* y puede afirmarse que este portafolio es libre de riesgo durante el tiempo *dt*. Dado que otro supuesto es la ausencia de oportunidades de arbitraje, entonces se cumple también que este portafolio tiene una tasa de rendimiento igual a la de cualquier otro instrumento libre de riesgo *i*, es decir:

$$dV = iVdt$$

donde *i* es la tasa de rendimiento libre de riesgo. Sustituyendo (18) y (20):

$$\left(\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}\sigma^2 X^2\right)dt = i\left(f-\frac{df}{dX}X\right)dt$$

de tal forma que

$$\boxed{\frac{df}{dt}+\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{dX^2}\sigma^2 X^2+\frac{df}{dX}Xi=if} \qquad (21)$$

Esta ecuación (21), es la **ecuación diferencial de Black-Scholes.** Las soluciones a esta ecuación, que son muchas, corresponden a todos los instrumentos derivados que pueden definirse con X como variable subyacente.

Debe notarse que el portafolio creado para llegar a la ecuación diferencial de Black-Scholes, no es permanentemente libre de riesgo. Es libre de riesgo sólo para un intervalo de tiempo infinitamente pequeño dt, ya que conforme X y t cambian, df/dX también cambia. Para conservar el portafolio libre de riesgo, es necesario cambiar de manera continua las proporciones del derivado[6] y del bien subyacente en el portafolio.

El hecho de que el modelo de Black-Scholes sea libre de riesgo, permite generalizar los resultados hacia todo tipo de inversionista, ya sea que este presente mayor o menor adversidad al riesgo. En particular, por simplificación puede asumirse que todos los inversionistas son neutrales al riesgo, lo que conlleva el hecho de que la tasa de interés implícita en cualquier instrumento es la tasa de interés libre de riesgo, pues no debe otorgarse ningún tipo de incentivo al inversionista para que entre al mercado.

Debe notarse que los supuestos de neutralidad al riesgo que sirven para obtener soluciones de la ecuación diferencial de Black-Scholes, son un mero truco que persiguen este fin precisamente. Cuando las soluciones obtenidas bajo este supuesto son llevadas a

[6] **Este es el principio en el que se basa la estrategia de cobertura conocida como "DELTA HEDGE". Vease el punto 4.1**

un mundo adverso al riesgo, estas siguen funcionado, pues bajo este nuevo contexto, se dan dos hechos que se neutralizan:

- la tasa esperada de incremento en el precio del bien subyacente crece y
- la tasa de descuento utilizada para calcular los vencimientos del derivado cambia.

3.7. VALUANDO OPCIONES CON EL MODELO DE BLACK - SCHOLES

En el capítulo anterior, lo que se obtuvo fue la ecuación de Black-Scholes para valuar opciones, pero a partir de una aproximación probabilística; ahora lo que se hará, será llegar a una ecuación para valuar opciones pero con un enfoque estocástico.

Como se ha visto hasta ahora, el proceso que sigue el precio de un subyacente es una función de una variable que sigue un proceso de movimiento Browniano, la tasa de retorno compuesta continuamente. De hecho, se vio que el propio proceso de precios es por si mismo un movimiento geométrico Browniano. Y un movimiento Browniano es un proceso de Itô, para lo cual el Lema de Itô permite conocer la tasa de rendimiento instantánea, de una función de un proceso de Itô. Como un derivado, tal como lo son las opciones, es una función del bien subyacente, entonces el lema de Itô aplicado a dicha función permite conocer la tasa de rendimiento instantánea del derivado.

3.7.1. LEMA

Si X es una variable aleatoria y $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces:

$$\mathrm{E}\left[e^{aX} \middle| X \geq k\right] = e^{\left(a\mu + a^2\sigma^2/2\right)}\phi(d)$$

donde:

ϕ indica a la función de distribución acumulativa de la normal standard,

a es una constante y

$$d \equiv \left(\frac{-k+\mu+a\sigma^2}{\sigma}\right).$$

Demostración:

$$\mathrm{E}\left[e^{aX} \middle| X \geq k\right] = \int_k^{\infty} e^{aX} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(X-\mu)^2/2\sigma^2} dX$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_k^{\infty} \exp\left[aX - \frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dX \tag{22}$$

Usando álgebra elemental, se tiene lo siguiente:

$$aX - \frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 = aX - \frac{X^2}{2\sigma^2} + \frac{X\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2},$$

pero por otro lado,

$$a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{X-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2 = a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[X^2 - 2X\left(\mu - a\sigma^2\right) + \left(\mu + a\sigma^2\right)^2\right]$$

$$= a\mu + \frac{a^2\sigma^2}{2} - \frac{1}{2\sigma^2}\left[X^2 - 2X\mu - 2aX\sigma^2 + \mu^2 + 2a\mu\sigma^2 + a^2\sigma^4\right]$$

$$= aX - \frac{X^2}{2\sigma^2} + \frac{X\mu}{\sigma^2} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2}$$

Por lo tanto,

$$aX-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2=a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{X-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2$$

Sustituyendo en la ecuación (22):

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[e^{aX}\middle|X\geq k\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_k^\infty \exp\left\{a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{X-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2\right\}dX\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)\int_k^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{X-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2\right\}dX\end{aligned}$$

Ahora sean $u=\dfrac{X-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}$ y $K=\dfrac{k-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}$, tales que

$du=\dfrac{1}{\sigma}dX$ y dado que $X\geq k \;\Rightarrow\; u=\dfrac{X-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}\geq\dfrac{k-\left(\mu+a\sigma^2\right)}{\sigma}=K$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[e^{aX}\middle|X\geq k\right]&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)\int_K^\infty e^{-u^2/2}\sigma du\\&=\exp\left(a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_K^\infty e^{-u^2/2}du\\&=\exp\left(a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)\left[1-\phi(K)\right]\\&=\exp\left(a\mu+\frac{a^2\sigma^2}{2}\right)\phi(d),\end{aligned}$$

donde $d \equiv$-K

Con esto queda demostrado el lema, el cual demostrará su utilidad en la siguiente sección.

3.7.2. EL CASO DE UN CALL EUROPEO

Lo que se hará ahora, será aplicar la ecuación diferencial de Black-Scholes al caso concreto de las opciones. Como se mencionó anteriormente, la ecuación (21) sirve para valuar cualquier tipo de derivado, lo único que debe hacerse correctamente, es definir las condiciones límite.

En el caso de las opciones europeas, para el caso del call son

$$f = max\,(X - E,\, 0) \quad t = T$$

y para el caso del put

$$f = max\,(E - X,\, 0) \quad t = T$$

Primero se verá el caso del call, del cual como se sabe, su costo C es igual al valor esperado de la opción al vencimiento, apropiadamente descontado, es decir:

$$C = e^{-rt} \mathrm{E}_Q\left[\max\left(X_T - E, 0\right)\right]$$

donde Q es medida de probabilidad neutral al riesgo, dado que como se ha argumentado, se asume un ambiente neutral al riesgo.

Se sabe que en el caso del call, este será ejercido siempre y cuando $X_T \geq E$, con $X_T = X_0 e^{Y(t)}$ con *Y(t)* un movimiento Browniano.

Esta condición equivale a:

$$X_0 e^{Y(t)} \geq E \quad \Rightarrow \quad X_0 \exp[\sigma B(t) + \mu t] \geq E$$

donde *B(t)* representa un movimiento Browniano standard.

Entonces,

$$\exp[\sigma B(t) + \mu t] \geq E / X_0$$

$$\Rightarrow \qquad B(t) \geq \frac{\left[\ln\left(E / X_0\right) - \mu t\right]}{\sigma} = k$$

Sean μ y σ escogidos de tal forma que $\mu = \delta - \sigma^2/2$.

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} C &= e^{-\delta t} \mathrm{E}_Q\left[\max\left(X_T - E, 0\right)\right] \\ &= e^{-\delta t} \mathrm{E}_Q\left\{X_0 \exp[\sigma B(t) + \mu t] - E \middle| B(t) \geq k\right\} \\ &= e^{-\delta t}\left[\mathrm{E}_Q\left\{X_0 \exp[\sigma B(t) + \mu t] \,\middle|\, B(t) \geq k\right\} - \mathrm{E}_Q\left\{E \middle| B(t) \geq k\right\}\right] \quad (23) \end{aligned}$$

Se sabe que $B(t) \sim N(0,t) \;\; \Rightarrow \sigma B(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$

Realizando por separado ambas esperanzas condicionales y utilizando el lema de la sección 3.7.1, se tiene:

$$\mathrm{E}_Q\left\{X_0 \exp[\sigma B(t)+\mu t] \;|B(t) \geq k\right\} = X_0 \mathrm{E}_Q[\exp(\mu t)\exp(\sigma B(t))|B(t) \geq k]$$

$$= X_0 \exp(\mu t)\mathrm{E}_Q[\exp(\sigma B(t))|B(t) \geq k]$$

$$= X_0 \exp(\mu t)\exp\left(\sigma^2 t/2\right)\phi(b)$$

donde:

$$b = \frac{-k+\sigma t}{\sqrt{t}} = \frac{-\ln\left(E/X_0\right)+\mu t+\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$$

Recordando que μ y σ fueron escogidos de tal forma que $\mu = \delta - \sigma^2/2$

$$b = \frac{\ln\left(X_0/E\right)+\delta t+\sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

Para la esperanza faltante, se usa el siguiente hecho,

$$B(t) \sim N(0,t) \;\Rightarrow B(t)/\sqrt{t} \sim N(0,1)$$

de tal forma que

$$E_Q[E|B(t) \geq k] = E_Q\left[E\left|\frac{B(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{k}{\sqrt{t}}\right.\right]$$

$$= E\int_{k/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$= E \cdot P\left\{N(0,1) \geq \frac{k}{\sqrt{t}}\right\}$$

$$= E\phi\left(-\frac{k}{\sqrt{t}}\right)$$

$$= E\phi\left(b - \sigma\sqrt{t}\right)$$

Volviendo a la ecuación (23)

$$C = e^{-\delta t}\left[\mathrm{E}_Q\left\{X_0 \exp[\sigma B(t) + \mu t] \,|B(t) \geq k\right\} - \mathrm{E}_Q\left\{E|B(t) \geq k\right\}\right]$$

$$= e^{-\delta t}\left[X_0 \exp(\mu t) \exp\left(\sigma^2 t/2\right)\phi(b) - E\phi(b - \sigma\sqrt{t})\right]$$

Es fácilmente comprobable, por como se escogió μ que $e^{-\delta t} e^{\mu t} e^{\sigma^2 t/2} = 1$

Por lo tanto, la fórmula de **Black-Scholes** para el caso particular de un **call tipo europeo** es la siguiente:

$$C = X_0\phi(b) - Ee^{-\delta t}\phi\left(b - \sigma\sqrt{t}\right) \tag{24}$$

donde

$$b = \frac{\ln\left(X_0/E\right) + \delta t + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \tag{25}$$

Además esta ecuación (24) cumple con las condiciones de la ecuación (21) y nótese que es la misma que fue derivada en el capítulo 2.

3.7.3. BLACK – SCHOLES EN UN CALL AMERICANO

La fórmula que se ha derivado para valuar un call europeo, es la misma fórmula que se usa para valuar un call tipo americano.

Demostración:

Un call tipo americano, posee todas y cada una de las propiedades de un call europeo, pero además tiene la propiedad de poder ejercerse en cualquier momento entre la fecha de contratación y la fecha de vencimiento, por lo tanto, la opción americana vale al menos tanto como la opción europea, es decir

$$C_a(X, E, t) \geq C_e(X, E, t) = max(X\text{-}Ee^{-\delta t}, 0)$$

donde C_a y C_e representan la prima de un call americano y uno europeo respectivamente.

Si la opción americana es ejercida antes del vencimiento, el valor de ésta no es más que su valor intrínseco, es decir

$$C_a = max\,(X\text{-}E, 0)$$

Asumiendo que $i \geq 0 \Rightarrow \qquad \delta = ln(1+i) > 0$

$$\begin{aligned} & E \geq Ee^{-\delta t} \\ \Rightarrow \quad & X - E \leq X - Ee^{-\delta t} \\ \Rightarrow \quad & C_a(X, E, t) = \max(X - E, 0) \leq \max(X - Ee^{-\delta t}, 0) = C_e(X, E, t) \end{aligned}$$

Ahora, por un lado se tiene $C_a \geq C_e$ y por el otro lado se tiene $C_e \geq C_a$, en consecuencia $C_a = C_e = C$.

Dicho en otras palabras, una opción tipo americano, vale más retenida que ejercida antes del vencimiento y por lo tanto puede afirmarse que el derecho del call americano de poder ejercerse antes del vencimiento vale cero. Una razón por la cual la opción no debe ejercerse antes del vencimiento, es por el seguro que ofrece. Una call que se tiene en lugar del subyacente respectivo, en efecto, ofrece al tenedor de la misma, un seguro contra una baja en el precio del subyacente por debajo del precio de ejercicio. Una vez ejercida la opción y que el precio de ejercicio ha sido cambiado por el subyacente mismo, dicho seguro se evapora.

Resumiendo, la fórmula hallada anteriormente para valuar un call tipo europeo es la misma que para valuar un call tipo americano.

3.7.4. EL CASO DE UN PUT

Ahora lo que falta es hallar la fórmula para valuar los puts. Puede seguirse un camino análogo a aquel seguido para derivar la fórmula del call, pero es más fácil recurrir a la ecuación de paridad que fue derivada en el capítulo 2.

$$\begin{aligned}
P &= C - X + Ee^{-\delta t} \\
&= X\phi(b) - Ee^{-\delta t}\phi(b-\sigma\sqrt{t}) - X + Ee^{-\delta t} \\
&= X[\phi(b)-1] + Ee^{-\delta t}\left[1-\phi\left(b-\sigma\sqrt{t}\right)\right] \\
&= -X[1-\phi(b)] + Ee^{-\delta t}\left[1-\phi\left(b-\sigma\sqrt{t}\right)\right] \\
\therefore \quad P &= Ee^{-\delta t}\phi\left(\sigma\sqrt{t}-b\right) - X\phi(-b)
\end{aligned}$$

con b tal y como se definió en la ecuación (25).

Desafortunadamente en el caso del put, la fórmula para valuar un put tipo europeo no es la misma que para valuar un put tipo americano; en realidad no existe una fórmula analítica exacta para estos últimos y lo que más se ha conseguido, son aproximaciones mediante métodos numéricos.

La diferencia entre los dos tipos de puts, es que a diferencia de los calls, para un put tipo americano puede ser atractivo el ejercicio de los derechos antes del vencimiento. Por ejemplo, tómese el caso extremo donde $X = 0$ al tiempo t. Bajo estas circunstancias siempre será preferible ejercer la opción put, pues más vale recibir un monto E en el tiempo t, que recibir un monto menor o igual a E en un lapso de tiempo posterior.

En general, resulta atractivo ejercer un put antes de su vencimiento conforme X decrece, i se incrementa y σ decrece.

CAPITULO 4

SENSIBILIDADES Y DEBILIDADES DEL MODELO BLACK & SCHOLES

4.1. SENSIBILIDADES DEL MODELO

La valuación de una opción, tomando en cuenta el valor presente de todos sus posibles pagos futuros, daría una explicación intuitiva pero bastante buena del comportamiento de la prima. Sin embargo, en la práctica, la definición de todos los escenarios y sus probabilidades de ocurrencia es una labor que raya en la frontera de lo imposible y posiblemente de lo inútil.

La idea básica que sirve para desarrollar el modelo de Black-Scholes para valuar opciones, es la idea de cobertura. Es decir, en el costo de una opción se asume que el emisor de la opción neutraliza su posición y busca un rendimiento similar al que otorga el subyacente libre de riesgo.

Un emisor de opciones, esta totalmente cubierto, cuando el valor total de su portafolio, el cual puede incluir no sólo opciones sino también otro tipo de instrumentos financieros tales como futuros, acciones, etc., no cambia a pesar de los vaivénes experimentados por las variables que influyen en el precio de las opciones.

Como se ha visto, el valor de la opción se ve afectado por movimientos en el precio del bien subyacente X, en las tasa de interés i, en el plazo a vencimiento t y en la volatilidad σ. Dado lo anterior, ahora lo que se debe saber, es contra cuál de dichas variables es qué se desea cubrir el valor del portafolio.

4.1.1. DELTA "Δ"

La cobertura más "obvia" o directa, es aquella contra movimientos en el precio del bien subyacente amparado por la opción.

La llamada delta "Δ" de una opción, es la que mide la variación en el costo de la prima, inducida por movimientos en el precio del subyacente. Matemáticamente, la delta no es más que la derivada parcial de la prima respecto del bien subyacente, es decir:

$$\Delta C = \frac{\partial C}{\partial X} = \phi(b) \qquad \text{para el caso de un call} \qquad (1)$$

y

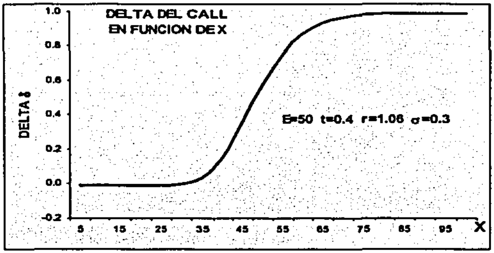
$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial X} = -\phi(-b) = -[1-\phi(b)] = \phi(b) - 1 \qquad \text{en el caso de un put.} \qquad (2)$$

Conforme a lo que se definió en la sección 2.4, $\phi(x)$ es una función de distribución de probabilidad de una variable normal standard, por lo que:

$$0 \leq \Delta C \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq \Delta P \leq 0$$

Los gráficos siguientes (21-28), cuya utilidad principal es acompañar e ilustrar el comportamiento de las sensibilidades del modelo, se basan tomando como datos los siguientes:

$$\begin{array}{c} E = 50 \\ t = 0.4 \\ r = 1.06 \\ \sigma = 0.3 \end{array}$$



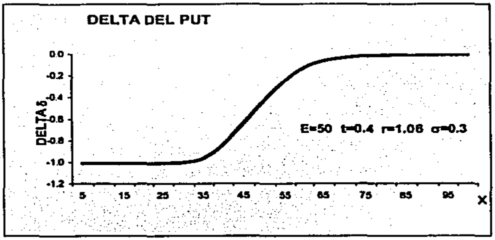
Gráfica 21

De la gráfica anterior puede verse que en el caso de un call $\Delta C \rightarrow 0$ si la opción es más-fuera-del-dinero y $\Delta C \rightarrow 1$ si el call es más-dentro-del-dinero, es decir, la prima de la opción es muy sensible a variaciones en el precio del subyacente, si la opción es más-dentro-del-dinero.

Este resultado se explica intuitivamente por el hecho de que con un call dentro-del-dinero, una variación en el precio del subyacente *X*, repercute en la prima del call por la vía del valor intrínseco.

Se observa que ΔC se halla alrededor de 0.5 para un call en-el-dinero, lo que indica que la prima en este caso es medianamente sensible a cambios en el valor de *X*.

Para el caso del put (gráfica 22), el efecto es simétrico, es decir, si la opción es más-fuera-del-dinero, entonces $\Delta P \rightarrow 0$; si la opción es más-dentro-del-dinero, entonces $\Delta P \rightarrow -1$ y la prima es bastante sensible; si el put es en-el-dinero, ΔP se mueve en la vecindad de –0.5.



Gráfica 22

La principal utilidad de la delta, es en la formación de portafolios de cobertura, bajo la estrategia conocida como *"delta hedge"*, ya que otra definición para la delta de una opción, es la cantidad de títulos del subyacente necesarios para mantener el valor de un portafolio que lo contiene constante, ante variaciones en el precio X del subyacente. Cuando se emite un call, hay que comprar Δ acciones y cuando se emite un put, hay que vender en corto Δ acciones.

El funcionamiento de un *"delta-hedge"* se ejemplificará con una posición corta en un call por 10 mil acciones que no pagan dividendos[1]. El precio actual del subyacente 'X' es de $49, el precio de ejercicio 'E' $50, la tasa de interés libre de riesgo 'i' es 5% anual, la volatilidad 'σ' en el precio del subyacente es 20% y el tiempo a vencimiento 't' es de 20 semanas.

La tabla 6, muestra el resultado de la simulación del "delta-hedge" suponiendo que el rebalanceo se realiza semanalmente. El valor del call al inicio es de 24 mil pesos, siendo la delta inicialmente calculada igual a 0.522. Esto quiere decir que al momento de vender el call (se asume la posición corta), se tienen que pedir prestados 255,780 pesos

[1] Por lo general, las instituciones financieras no emiten opciones sobre acciones individuales, sino más bien sobre algún índice o canasta de acciones. Sin embargo, para fines didácticos es un excelente ejemplo de cómo funciona la cobertura delta.

para comprar un total de 5,220 acciones, cada una a un precio de $49. El costo financiero por financiar esta cantidad al cabo de una semana es de $249.

Al finalizar la primera semana, el costo de la acción se encuentra ya en $48.125 y la delta ya se redujo a 0.458, por lo que se deben vender 640 acciones para mantener la cobertura. El efectivo que se obtiene, se utiliza para pagar parte de la deuda que se tiene. En la siguiente semana, la acción baja nuevamente a $47.375 y la delta también disminuye a 0.400, y así sucesivamente.

DELTA HEDGE								
Semana	X	Delta	C/V Acciones	Costo	Intereses	Costo Cobertura	Opción	Valor Opción
0	49.000	0.522	5,220	255,780	249	255,780	2.401	24,005
1	48.125	0.458	(640)	(30,800)	219	225,229	1.890	18,899
2	47.375	0.400	(580)	(27,478)	192	197,970	1.489	14,892
3	50.250	0.596	1,960	98,490	288	296,653	2.837	28,366
4	51.750	0.693	970	50,198	337	347,139	3.711	37,112
5	53.125	0.774	810	43,031	380	390,507	4.627	46,274
6	53.000	0.771	(30)	(1,590)	378	389,297	4.437	44,375
7	51.875	0.706	(650)	(33,719)	346	355,957	3.507	35,073
8	51.375	0.674	(320)	(16,440)	330	339,863	3.060	30,596
9	53.000	0.787	1,130	59,890	389	400,083	4.145	41,452
10	54.875	0.888	1,010	55,424	443	455,896	5.626	56,258
Call 0	24,005		Acciones 0	255,780		Cobertura 0	255,780	
Call 10	56,258		Acciones 10	487,290		Cobertura 10	455,896	
Cambio	(32,252)		Cambio	231,510		Cambio	(200,116)	
Cambio Total	(858)							

Tabla 6

Transcurridas diez semanas, el precio de la acción es de $54.875 y la delta es igual a 0.888 (el call está dentro-del-dinero), es decir, se cuenta con 8,880 acciones, las cuales valen en el mercado $487,290, o sea, la posición de acciones reporta una plusvalía de $231,510. Por su parte, el call valuado con las condiciones actuales, vale $56,258, lo que implica que ésta posición sufre de una minusvalía de $32,252. El costo acumulado de la cobertura también ha variado, habiéndose incrementado en $200,116. El efecto neto de todos los ajustes hechos, sobre el beneficio de la institución es de sólo $858.

La razón de que exista ésta variación, es que el rebalanceo se llevó a cabo de manera semanal. Conforme la recomposición del portafolio se realiza con mayor frecuencia, la variación en el costo de la cobertura es menor.

Nótese que la cobertura *"delta hedge"* es una estrategia dinámica, pues el portafolio debe rebalancearse continuamente. La delta no sólo cambia con cada movimiento en el precio del subyacente; también con el transcurso del tiempo y con movimientos en la volatilidad y en las tasas de interés. Una cobertura delta perfecta sólo es posible en teoría; en la práctica, se puede ganar o perder dinero además, porque las acciones no son divisibles y éstas se compran justo después de un alza en el precio y se venden cuando el movimiento es a la baja.

4.1.2. GAMMA "γ"

La gamma mide la sensibilidad de la delta con respecto a variaciones en el precio del subyacente *X*.

En otras palabras, la gamma es el riesgo de una posición de opciones a cambios bruscos y/o frecuentes en el precio del subyacente. Si la gamma es pequeña, la delta cambia lentamente, por lo que los ajustes al portafolio para mantenerlo "delta-neutral"[2], pueden ser de forma relativamente poco frecuente. Sin embargo, si la gamma es grande en términos absolutos, la delta es muy sensible a cambios en el precio del subyacente, por lo que dejar sin modificaciones al portafolio delta-neutral por mucho tiempo, resulta altamente riesgoso.

[2] La delta de un portafolio es igual a la suma de las deltas individuales de los activos que componen al portafolio. Cuando la delta del portafolio es igual a cero, se dice que éste es "delta-neutral".

Matemáticamente, la gamma es la segunda derivada de la prima (o la derivada de delta) con respecto al cambio en X.

Es fácil ver que:

$$\gamma_C = \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} = \gamma_P = \gamma \qquad (3)$$

Demostración:

$$\frac{\partial C}{\partial X} = \phi(b) = \int_{-\infty}^{b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

donde $$b = \frac{\ln(X/E) + \delta t + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}}$$

Para hallar la segunda derivada de C respecto a X, obsérvese que $\phi(b)$ puede verse como una composición de funciones, es decir, $\phi(b) = F(C(x))$ donde,

$$F(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

y $$C(x) = \frac{\ln\left(X/E\right) + \delta t + \sigma^2 t/2}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (4)$$

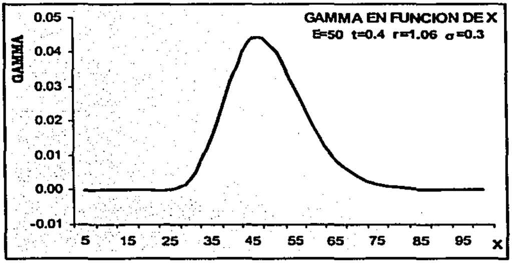
Aplicando la regla de la cadena[3] del cálculo diferencial a $F \circ C$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial X^2} = \frac{\phi'(b)}{X\sigma\sqrt{t}} \qquad \text{donde} \qquad \phi'(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-b^2}{2}}$$

[3] Si g es derivable en a, y f es derivable en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es derivable en a, y

$$(f \circ g)'(a) = f'(g)a)) \cdot g'(a)$$

Entonces: $$\gamma = \frac{\phi'(b)}{X\sigma\sqrt{t}} \tag{5}$$



Gráfica 23

En la gráfica 23, se observa claramente que cuando *X* está cerca de *E* (cuando la opción es en-el-dinero y tanto *ΔC* como *ΔP* andan cerca de 0.5), γ es grande. Justo cuando *X=E*, γ alcanza su máximo valor. Conforme la opción es "más-dentro-del-dinero" o bien "más-fuera-del-dinero", γ tiende a cero.

4.1.3. THETA "θ"

Como se vio en el capítulo 2, la prima de una opción, ya sea de un call o de un put, es una función creciente con relación al tiempo por vencer. Sin embargo, *t* es el único parámetro de los que influyen en el precio de la opción, que durante la vida de la misma, se mueve con un solo sentido: *t* no hace más que disminuir conforme transcurren los días.

Con todos los otros parámetros inalterados, la theta es la que mide cuanto baja la prima de la opción por cada día transcurrido, es decir, theta mide la sensibilidad de la prima respecto al parámetro tiempo.

De manera formal, $\theta = \frac{\partial C}{\partial t}$ para el caso de un call y $\theta = \frac{\partial P}{\partial t}$ en el caso del put.

Al desarrollar, se obtiene:

$$\theta_C = -\left[\frac{X\sigma\phi'(b)}{2\sqrt{t}} + E\delta e^{-\delta t}\phi\left(b - \sigma\sqrt{t}\right)\right] \tag{6}$$

y

$$\theta_P = -\left[\frac{X\sigma\phi'(b)}{2\sqrt{t}} - E\delta e^{-\delta t}\phi\left(\sigma\sqrt{t} - b\right)\right] \tag{7}$$

para el call y el put respectivamente.

El signo negativo que afecta a la theta, tiene su razón de ser en que conforme t, el tiempo a vencimiento decrece, ceteris paribus, la opción vale menos.

En las gráficas 24 y 25 (página siguiente), puede observarse que cuando el precio del subyacente hace que la opción sea fuera-del-dinero, $\theta \to 0$; cuando es una opción en-el-dinero theta es en valor absoluto grande y cuando se trata de una dentro-del-dinero, el valor de theta es mediano, también en términos absolutos. En realidad, $\theta \to -\delta Ee^{-\delta t}$.

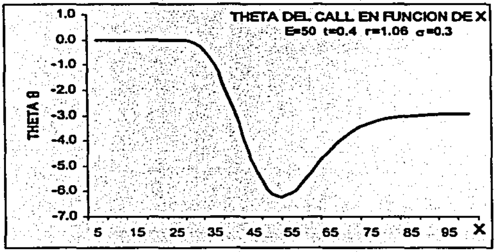
En un portafolio, la theta global es una combinación lineal de todas las thetas que componen al mismo, es decir, la suma ponderada de las thetas de cada opción que pertenece al portafolio.

Considerando que por lo general:

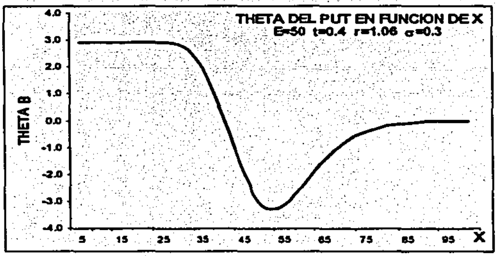
- $\theta = 0$ para una acción, ya sea en posición larga o corta,
- $\theta > 0$ para un call o un put corto,

➢ $\theta < 0$ para un call o un put largo,

la θ del portafolio puede ser positiva, negativa o nula. Si es positiva, significa que el portafolio es de naturaleza corta y que se aprecia con el paso del tiempo; por el contrario, si θ es negativa, el portafolio es de naturaleza compradora y se deprecia con el paso del tiempo y; si θ es cero, el portafolio es globalmente insensible al tiempo y por lo tanto su valor varía con base en otros factores, tales como la volatilidad como por ejemplo.



Gráfica 24



Gráfica 25

4.1.4. LAMBDA "Λ"

Esta cuarta griega de las opciones y que mide la sensibilidad de la prima respecto a la volatilidad σ en el precio del subyacente, también es llamada *vega, sigma* ó *kappa*.

La lambda presenta un problema conceptual para su estudio, pues los modelos más extendidos en la práctica, son aquellos que asumen una volatilidad σ no estocástica, cuando en realidad sí lo es. Sin embargo, estudios que han tratado de incorporar la naturaleza estocástica de la volatilidad, no han encontrado diferencias "considerables" en la valuación de las opciones y por el contrario, la complejidad de los modelos si se ve incrementada sustancialmente. Es por esto que en el mundo real se toman modelos con volatilidad σ fija y se analiza su sensibilidad para cambios en la misma.

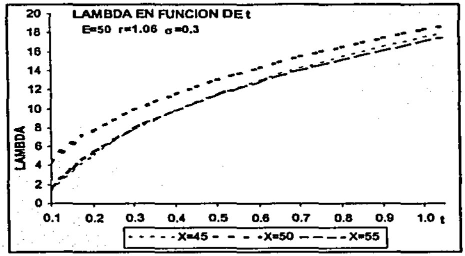
Formalmente, se define a lambda como:

$$\Lambda_C = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} = \Lambda_P = \Lambda$$

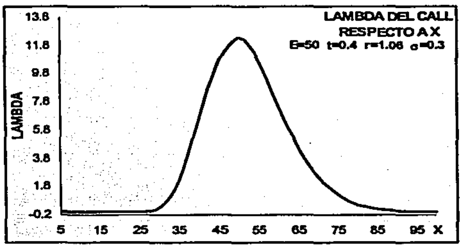
Realizando los cálculos, se obtiene:

$$\Lambda = X\sqrt{t}\phi'(b)$$

La volatilidad σ y el tiempo t a vencimiento están estrechamente ligados. A mayor plazo, mayor oportunidad de observar movimientos en el subyacente, es decir, mayor volatilidad. Los efectos de la volatilidad y el tiempo son por lo tanto similares para el precio de la opción. La lambda se incrementa para opciones de mayor plazo y disminuye rápidamente al acercarse a vencimiento. (Gráfica 26).



Gráfica 26



Gráfica 27

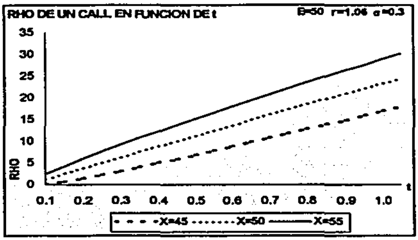
En la gráfica 27, puede observarse que la lambda es estrictamente positiva. Cuando la opción es en-el-dinero, la lambda es elevada y la opción muy sensible a la volatilidad. Si la opción está más-fuera-del-dinero o más-dentro-del-dinero, es poco sensible y la lambda tiende a cero.

4.1.5. RHO "ρ"

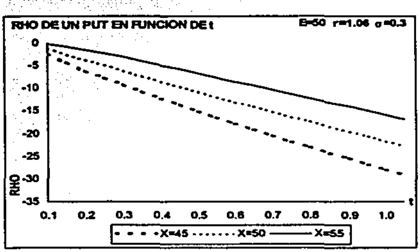
La rho es la razón de cambio en el precio de la opción para cambios en la tasa de interés *i*. Los modelos más usados para valuar opciones, presentan para la tasa de interés *i*, el mismo problema que para la volatilidad σ, es decir, asumen que la tasa de interés es constante (o al menos que la curva de tasas es una función conocida).

Al igual que en el caso de la volatilidad σ, se han estudiado modelos que incorporan los efectos reales de las tasas de interés (como por ejemplo que el movimiento de las mismas es estocástico; los movimientos de las tasas no son independientes, sino que son parte de una curva de tasas; etc.), pero todos resultan de una gran complejidad matemática y numérica. Es por eso que en el mundo real se supone una tasa de interés *i* fija y se analiza la sensibilidad.

La rho en relación al plazo de la opción, es mayor en valor absoluto conforme mayor sea el plazo. (Gráficas 28 y 29)



Gráfica 28

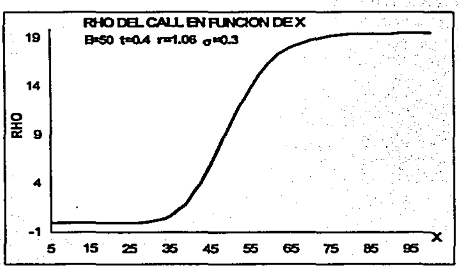


Gráfica 29

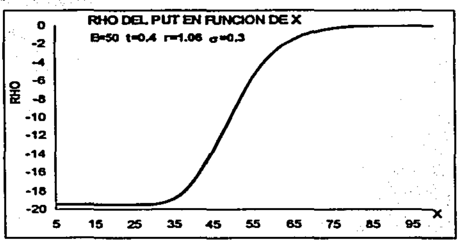
La rho aumenta en valor absoluto cuando la opción es en-el-dinero y disminuye para las opciones fuera-del-dinero, lo que se explica por el hecho de que las opciones en-el-dinero requieren mayores flujos de efectivo (derivado de la estrategia *delta-hedging*) que aquellas fuera-del-dinero. (Gráficas 30 y 31)

Matemáticamente, la rho es la derivada respecto a la tasa de interés y es tal que:

$$\rho_c = Ete^{-\delta t}\phi(b-\sigma\sqrt{t}) \qquad \text{y} \qquad \rho_P = -Ete^{-\delta t}\phi\left(\sigma\sqrt{t}-b\right)$$



Gráfica 30



Gráfica 31

4.2. HOYOS DEL MODELO

4.2.1. LA VOLATILIDAD NO ES CONSTANTE

Una de los supuestos fundamentales para derivar la ecuación de Black-Scholes es que la volatilidad del bien subyacente es constante (ver punto 3.6). En general, los modelos para valuar opciones más usados en la práctica, asumen que la volatilidad no es estocástica, cuando en realidad si lo es, tal y como se comento en el punto 4.1.4.

Si fuera cierta la hipótesis de que la volatilidad es constante, bastaría con calcular la volatilidad histórica con el mayor número posible de observaciones, a partir de una muestra, para acercarse más al rendimiento y a la varianza de la verdadera distribución del rendimiento del bien subyacente.

El hecho de que la volatilidad no sea constante, puede tener un impacto mayor en el valor de una opción. Por ejemplo, considérese el caso de un call a 6 meses, con una volatilidad estimada de 20%, tasa de interés $i = 0$ y un precio de ejercicio de 40 sobre un subyacente cuyo valor actual es 28. En este caso, el call vale $C = 0.008837$

Ahora supónganse los mismos datos del ejemplo anterior, pero duplíquese la volatilidad a 40%. En este caso $C = 0.4647$ Como puede verse, el valor del call se ve incrementado en una razón de 53:1, al duplicarse la volatilidad. Como se mencionó desde el punto 2.1.4, el valor de la prima es creciente con relación a la volatilidad.

Asumiendo que la volatilidad actual fuera del 20%, pero con las expectativas de que en el futuro pudiera llegar a 40%, en realidad se desearía cobrar por el call algo más que 0.008837.

Una posible solución a este problema, sería asignando probabilidades de ocurrencia a diferentes niveles de volatilidad y después utilizar estas probabilidades para ponderar el precio de la opción. Por ejemplo, con los datos anteriores podría suponerse que con un 50% de probabilidad la volatilidad se mantendría en 20% y que con el otro 50% de probabilidad la volatilidad subiría al 40%. En este caso el precio del call sería de $C = 0.2367685$

La volatilidad del subyacente, cambia en parte por factores desconocidos, pero también cambia en relación con los cambios que sufre el precio del bien subyacente.

Tómese por ejemplo el caso del modelo binomial[4], donde los movimientos u y d pueden representarse como $u(X,t)$ y $d(X,t)$ respectivamente; la probabilidad del movimiento u también puede representarse por $p(X,t)$.

Sean:

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad d(x,t) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{y} \qquad p(x,t) = 1/2$$

En este caso, u y d dependen sólo del precio inicial del subyacente en cada periodo, y a pesar de que es posible valuar una opción con un análisis similar al utilizado para derivar el modelo binomial, en este ejemplo en particular, el precio del bien subyacente que sigue la trayectoria $x \rightarrow xu \rightarrow xud$ no coincide con aquel cuya trayectoria fue $x \rightarrow xd \rightarrow xdu$.

Suponiendo $X_0 = 100$:

$$X_{ud} = 99.8765 \qquad \text{y} \qquad X_{du} = 99.8734$$

[4] Ver anexo 3.

Para ciertos tipos de dependencia, es posible hallar alguna expresión explícita para valuar un call de tipo europeo, que sea análoga al modelo de Black-Scholes. Por ejemplo, John Cox y Stephen Ross[5] hallaron un modelo para cuando la volatilidad σ es una función del nivel actual del precio del subyacente y del tiempo $\sigma = \sigma(X,t)$ y es de la forma:

$$\sigma(X,t)X = \hat{\sigma}X^{\rho} \qquad \text{con } \rho \leq 1$$

Cuando $\rho = 1$, se tiene el caso del modelo Black-Scholes.

Para otro caso,

$$C = X\sum_{n=1}^{\infty} g(n,z)G(n+\lambda,y) - Er^{-t}\sum_{n=1}^{\infty} g(n+\lambda,z)G(n,y)$$

donde:

$$\lambda \equiv \frac{1}{2(1-\rho)};$$

$$z \equiv \frac{2\lambda \ln r}{\hat{\sigma}^2\left(r^{t/\lambda}-1\right)}X^{1/\lambda}r^{t/\lambda};$$

$$y \equiv \frac{2\lambda \ln r}{\hat{\sigma}^2\left(r^{t/\lambda}-1\right)}E^{1/\lambda};$$

$$g(n,z) \equiv \frac{e^{-z}z^{n-1}}{(n-1)\,!}; \qquad \text{y}$$

$$G(n,w) \equiv \int_w^{\infty} g(n,z)dz$$

Este modelo es particularmente aplicable en modelos computacionales.

[5] John C. Cox & Mark Rubinstein. "Options Markets". Prentice Hall, 1985. Pag. 363

4.2.2. LAS TASAS DE INTERES CAMBIAN

Se ha visto que la volatilidad σ cambia con el tiempo; por su parte las tasas de interés i también lo hacen, sin embargo, mientras la volatilidad no puede ser observada (sólo puede estimarse), las tasas de interés si pueden observarse.

Cuando las tasas de interés están cambiando, puede simplemente sustituirse con la tasa libre de riesgo del bono (cupón cero) observada en el mercado, cuyo plazo sea igual al plazo remanente de la opción a la tasa de interés utilizada en la fórmula original de valuación de la opción. Desafortunadamente este procedimiento sólo trabaja bien cuando la volatilidad es constante, ya que hay casos en los cuales no es posible construir un portafolio de inversión compuesto por bonos (tasa libre de riesgo) y acciones (bien subyacente) que pueda replicar a una opción.

Cuando se dan los casos en los que es imposible replicar una opción mediante un portafolio compuesto solamente por bonos y acciones, es porque se da la combinación de cambios continuos y discontinuos, siendo la naturaleza de estos últimos aleatoria.

De igual forma, cuando las tasas de interés fluctúan aleatoriamente sobre el parámetro tiempo, se encuentra uno ante otro caso donde es imposible replicar a la opción mediante la construcción de un portafolio.

Para analizar los casos donde es imposible valuar a las opciones por métodos de arbitraje (construcción del portafolio replicante), se llega a un punto donde la teoría de valuación de opciones deja de ser un área separada y pasa a formar parte de una teoría general de valuación de activos, la cual no es objeto de estudio en el presente trabajo.

4.2.3. LA DISTRIBUCION DE LOS PRECIOS

Hasta ahora, siempre se ha supuesto que el comportamiento de los precios de los subyacentes se comporta lognormal, pero en la realidad esto pocas veces ocurre.

En ocasiones el precio del subyacente experimenta brincos en sus cotizaciones, es decir, sufre cambios significativos en periodos de tiempo relativamente cortos. Cox y Ross[6] fueron los primeros en estudiar este modelo, como un caso limite de su modelo binomial.

Supóngase que conforme los intervalos de tiempo (t/n) se hacen más pequeños, la magnitud del cambio en el precio del subyacente en un sentido (sea hacia la dirección u) se mantiene constante, pero su probabilidad de ocurrencia q se hace muy pequeña; al mismo tiempo, la magnitud del movimiento alterno se hace muy pequeña, pero su probabilidad de ocurrencia es casi uno. Lo que debe evitarse es que esta situación sea explosiva o que tienda a desaparecer.

Por ejemplo, sean $u = u;\ d = e^{\xi(t/n)}$ y $q = \lambda(t/n)$

Estas correspondencias para u, d y q, representan un proceso de salto puro, donde cada nuevo precio esta casi siempre muy cercano al precio anterior $(X \rightarrow Xd)$, pero en ocasiones, con una baja pero continua probabilidad, difiere significativamente $(X \rightarrow Xu)$. Obsérvese que conforme $n \rightarrow \infty$, $q \rightarrow 0$.

[6] J.C. Cox & S.A. Ross "The Pricing of Options for Jump Processes." Working Paper No. 2-75. Rodney L. White Center for Financial Research, University of Pennsylvania. April, 1975.

Bajo estas condiciones, los saltos que ocurren describen un proceso Poisson[7] con parámetro λ y el precio X del subyacente ya no se comporta como una distribución lognormal, sino como una log-Poisson.

Sea $\Psi[x;y]=\sum_{i=x}^{\infty}\frac{e^{-y}y^{i}}{i!}$ una función que representa a la distribución Poisson con argumento x y parámetro y.

La fórmula desarrollada por Cox y Ross para valuar un call europeo bajo estas especificaciones es:

$$C = X\Psi[x;y]-Er^{-t}\Psi[x;y/u]$$

donde:

$$y \equiv \frac{(\ln r-\xi)ut}{u-1}$$

y x es el menor entero no negativo mayor o igual que $\frac{\ln\left(E/X\right)-\xi t}{\ln u}$.

El caso analizado captura fenómenos de saltos discontinuos, pero constantes, cuando en realidad estos pueden ser a su vez aleatorios. Cuando se da este caso, ya no es posible valuar todas las opciones mediante métodos de arbitraje, aunque existen ciertos casos en los que puede derivarse una fórmula en concreto.

Supóngase por ejemplo que el precio del subyacente al final del periodo puede tomar los siguientes valores:

---

[7] La variable aleatoria X que toma valores en Z^{+} U {0} se dice que es una v.a. Poisson con parámetro λ, si para alguna $\lambda>0$,

$$p(i) = P\{X = i\} = e^{-\lambda}(\lambda^{i}/i!) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Valor	Probabilidad
uX	$q[1-\lambda(t/n)]$
dX	$(1-q)[1-\lambda(t/n)]$
uzX	$q\lambda(t/n)$
dzX	$(1-q)\lambda(t/n)$

donde lnz se distribuye como una normal con media $-\delta^2/2$ y varianza δ^2.

Fijando t, haciendo $n\rightarrow\infty$ y definiendo $u=e^{\hat{\sigma}\sqrt{t/n}}$ y $d=1/u$, se obtiene un proceso lognormal continuo.

Bajo estas especificaciones, la fórmula de valuación del call es:

$$C=\sum_{i=0}^{n}\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^i}{i!}C_i\left(X,E,t,\sqrt{\hat{\sigma}^2+\delta^2(i/t)},r\right)$$

donde C_i es el valor de un call valuado con Black-Scholes con tiempo a vencimiento t y precio de ejercicio E, sobre un bien cuyo precio actual es X y en donde la volatilidad es $\sigma_i=\sqrt{\hat{\sigma}^2+\delta^2(i/t)}$ y λ es el parámetro que determina la frecuencia de los saltos.

4.2.4. BLACK – SCHOLES COMO CASO LIMITE

Otra hipótesis central del modelo Black – Scholes es la estrategia dinámica de rebalanceo de portafolios, lo que envuelve un supuesto teórico de un *trading* continuo.

En el mundo real, sin embargo, el *trading* es finito. En él, el *trader* rebalanceará su portafolio N veces, no siempre con la misma frecuencia. Sean $P_0, P_1, \ldots, P_N$ (P_0 es el precio al momento en que se emite la opción y P_N el precio al tiempo en que vence la misma) los precios a los cuales el *trader* rebalancea su *hedge*.

Cuando los precios suben, el *dealer* necesita incrementar su cobertura y cuando los precios bajan, se reducen las necesidades de cobertura. Sea P_{i+1} el costo total de la compra cuando $P_{i+1} > P_i$ y el ingreso neto de la venta, en caso de que $P_{i+1} < P_i$.

Con un *trading* finito, los precios inevitablemente experimentan saltos en su cotización. Sin pérdida de generalidad, asúmase que dichos saltos son siempre menores a una cantidad d:

$$d \geq \left| \ln \frac{P_i}{P_{i-1}} \right| \quad , i = 1, \cdots, N$$

Ahora defínase a V, la varianza total de la ruta que sigue el precio, como la suma de cuadrados de los logaritmos de los rendimientos:

$$V = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \ln \left[P_i / P_{i-1} \right] \right\}^2$$

Mientras mayor sea la volatilidad del proceso de precios, mayor será la volatilidad total. Nótese que V es función de los precios de transacción y no de algún parámetro teórico. Si el precio sigue un proceso Geométrico Browniano con volatilidad σ, entonces la varianza total será un número aleatorio con media alrededor de $\sigma^2 t$. Conforme más seguido se realicé el *trading*, mayor será la cercanía a este valor.

Si puede acotarse la varianza total y suponiendo que el precio de los activos no salte demasiado, puede acotarse el precio del call.

Sean $\overline{C}(V,d)$ y $\underline{C}(V,d)$ las cotas superior e inferior del call respectivamente, las cuales dependen de la varianza total V y del salto máximo d.

Cuando $d \rightarrow 0$, tanto $\overline{C}(V,d)$ como $\underline{C}(V,d)$ tienden al precio dado por la fórmula de Black – Scholes[8], en donde $\sigma^2 t$ es reemplazado por V.

El *trader* sabe que si puede comprar más barato que $\underline{C}(V,d)$ y/o vender más caro que $\overline{C}(V,d)$, hay oportunidades de arbitraje, siempre bajo el supuesto de que sus cotas tanto en varianzas como en saltos, sean correctas.

4.2.5. CUADRO RESUMEN

La tabla 7, contiene un resumen de los supuestos analizados anteriormente y los ajustes propuestos:

Supuesto	Ajuste *Ad-hoc*	Ajuste Completo
La volatilidad es función del precio del subyacente y del tiempo.	Actuar como si la volatilidad no dependiera de X y de t, pero actualizando constantemente la estimación de σ.	Ver sección 4.2.1
La tasa de interés cambia.	Utilizar la tasa de interés libre de riesgo vigente en el mercado, a un plazo similar al de la opción.	Ver sección 4.2.2
Los precios del subyacente experimentan saltos aleatorios.	Considerar a los saltos como un evento en un corto lapso de tiempo de alta volatilidad.	Ver sección 4.2.3
El *trading* no es continuo.	Rebalancear el portafolio lo mas seguido posible .	Ver sección 4.2.4

Tabla 7

[8] El desarrollo completo puede verse en: Mark Britten – Jones & Anthony Neuberger "Arbitrage Pricing With Incomplete Markets." Applied Mathematical Finance No. 3 Pages 347-363.

ANEXO 1

A.1. VOLATILIDAD

La volatilidad, la cual se define como la raíz cuadrada de la varianza (desviación standard) de los rendimientos del subyacente, es un indicador de incertidumbre, el cual sirve para cuantificar riesgos, ya que es una medida de dispersión de los rendimientos respecto de la media de los mismos en un periodo dado.

Según el punto 2.1.4, la prima de una opción es una función creciente con respecto a la volatilidad del subyacente.

En el medio financiero, por lo general, los traders o dealers de opciones hablan de comprar y vender volatilidades, en vez de referirse a los precios. Si se espera que la volatilidad se reduzca y que por lo tanto las prima caiga, se toma una posición corta; por el contrario, si se espera un incremento en la volatilidad del bien subyacente, es el momento de tomar una posición larga.

La volatilidad reflejada en el precio de una opción nunca es exacta; más bien ésta volatilidad es la volatilidad esperada y depende casi siempre de las expectativas personales del *trader*. Así como la volatilidad esperada no es exacta, tampoco existe un consenso generalizado sobre la forma en que debe calcularse. Existen varios métodos para medir y pronosticar volatilidades, incluyendo aquellos que involucran series de tiempo, como ARCH (Modelo Autorregresivo Condicional Heterocedástico) y GARCH (generalización de los modelos ARCH), aunque los más comunes son los tres que se mencionan a continuación:

a) Volatilidad Implícita
b) Volatilidad Histórica
c) Volatilidad Dinámica

A.1.1. VOLATILIDAD IMPLICITA

El método de la volatilidad implícita supone que las primas de las opciones son eficientes (es decir, que reflejan toda la información disponible) y entonces se procede al cálculo de la volatilidad implícita en el precio de la opción.

Dicho valor puede obtenerse siempre, al menos en teoría, ya que el modelo de valuación de Black-Scholes es una función creciente respecto a la volatilidad. Lo único que se asume con este método, es que los mercados son eficientes[1] y que el modelo para valuar la opción es el correcto.

Desafortunadamente, no es posible conseguir analíticamente una fórmula que defina a σ en términos de $\{C, X, E, t, i\}$, por lo tanto se debe recurrir a métodos numéricos para hallar el valor estimado.

Debido a que una opción fuera-del-dinero, tiene diferente vega a una opción dentro-del-dinero o a una en-el-dinero, tal vez lo ideal sería calcular varias volatilidades implícitas utilizando diferentes opciones con el mismo subyacente y así obtener una

[1] Un "mercado eficiente"es aquel en el cual el precio de todo subyacente refleja toda la información disponible acerca del activo. La eficiencia de los mercados tiene tres clasificaciones: a) Débil, cuando el precio del subyacente incorpora en el precio toda la información histórica; b) Semi-fuerte, nueva información pública es incorporada de inmediato al precio; y c) Fuerte, cuando el precio también incluye información interna de la emisora. La eficiencia de los mercados financieros, es un tema tan vasto, que existen investigaciones exhaustivas al respecto.

volatilidad promedio ponderada, dando mayor peso a aquellas opciones en-el-dinero, pues son las más sensibles a la volatilidad y además aportarían información más exacta.

Una desventaja al utilizar este método, es que en países como México, no existen opciones para cada tipo de bien subyacente.

Otra crítica al modelo, radica en el hecho de que supone que la volatilidad es constante, cuando en realidad esta es estocástica.

Por ejemplo, supóngase que el valor de un call es $C = 1.875$, con $X = 21$, $E = 20$, $i = 0.1$ y $t = 0.25$.

La volatilidad implícita en este ejemplo, es aquel valor σ, que al ser sustituido en la ecuación 24 del capítulo 3, da como resultado $C = 1.875$. En este ejemplo, puede comprobarse que $\sigma = 23.50\%$ anual.

A.1.2. VOLATILIDAD HISTORICA

Para estimar la volatilidad del bien subyacente, a partir de una muestra de datos pasados, primero defínase lo siguiente:

n = número de observaciones
X_i = precio del subyacente al finalizar el i-ésimo intervalo ($i = 0, 1, \ldots, n-1$)
t = longitud del intervalo de tiempo
$u_i = ln(X_i / X_{i-1})$

Nótese que cuando $T-t=1$, se tiene que

$$\delta = u_i \sim N\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^2}{T-t}\right) \qquad i = 1,\dots,n \qquad \text{(Ecuacion 15 del capítulo 3)}$$

Dada una muestra $X_1, X_2, \dots, X_n$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una con media μ y varianza σ^2, se sabe que un estimador insesgado de la varianza muestral es

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n-1}$$

Aplicando este resultado a u_i, se tiene que la desviación standard es

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(u_i - \overline{u}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n} u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{1}^{n} u_i\right)^2} \qquad \text{(A-1)}$$

donde $\overline{u}$ representa la media de las n observaciones u_i, $i = 1,\dots,n$.

Por otro lado, en el capítulo 3 (ecuación 14), se obtuvo también la desviación standard de u_i, como $\sigma\sqrt{T-t}$. Entonces, S es a su vez un estimador de $\sigma\sqrt{T-t}$ y puede estimarse directamente por S^*, donde:

$$S^* = \frac{S}{\sqrt{T-t}}$$

Este S^* es el valor estimado para la volatilidad histórica.

Las desventajas de este modelo son:

- No existe un número ideal de observaciones a tomar, pues σ cambia con el tiempo y puede darse el caso de que datos muy viejos ya no sean relevantes para predecir correctamente el comportamiento futuro de σ.
- Todas las observaciones reciben la misma ponderación.
- Otro punto sin un consenso generalizado, es a la hora de anualizar el estimado de la volatilidad, ya que puede tomarse un año calendario (ya sean 360 ó 365 días) o bien restringirse solamente a los días hábiles que hay en el año, aunque esto último pudiera poner en entredicho el supuesto de que la volatilidad es constante.
- El cuarto punto no estandarizado a la hora de calcular la volatilidad, es la amplitud de los intervalos de tiempo, los cuales pueden ser de horas, días, meses, años, etc.

A.1.3. VOLATILIDAD DINAMICA

La metodología de la volatilidad dinámica o con suavizamiento exponencial, le confiere mayor peso a las observaciones más recientes, que a aquellas más alejadas en el tiempo. Esto representa una ventaja sobre la volatilidad histórica, pues permite hacer mejores pronósticos en épocas de alta volatilidad, porque captura rápidamente fuertes variaciones en el precio del subyacente, dada su mayor ponderación.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que la media de los rendimientos es igual a cero y en base a la ecuación (A-1), la volatilidad histórica sin anualizar, queda de la siguiente manera:

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}u_i^2} \Rightarrow S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}u_i^2$$

Ahora, si a los rendimientos del subyacente u_i se les asigna un peso específico w_i donde $w_i = \lambda^{i-1}(1-\lambda)$, $0 < \lambda < 1$, entonces se tendría la expresión alternativa:

$$S = \sqrt{(1-\lambda)\sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1} u_i}$$

A este parámetro λ se le conoce como factor de decaimiento (*decay factor*) y es el que determina el peso relativo de cada observación así como el número de datos que efectivamente se usarán para determinar la volatilidad.

Conforme λ es más pequeño, mayor peso tienen los datos más recientes; cuando $\lambda=1$, se tiene la volatilidad histórica con pesos uniformes en todas las observaciones.

Para saber cuantos datos efectivamente se usan para pronosticar la volatilidad, se elige un nivel de tolerancia *NT*, tal que $\lambda^k = NT$, donde k es el número de observaciones.

Para escoger la λ más efectiva, se utiliza el criterio RMSE (*Root Mean Squared Error*), es decir aquella λ que genere el menor error cuadrático medio, donde:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[u_{i+1}^2 - \lambda\sigma_{i+1}^2\right]^2}$$

El principal problema con este modelo, radica en que el factor de decaimiento puede variar no solo entre las series, sino también con el tiempo, perdiendo por lo tanto consistencia en diferentes periodos.

ANEXO 2

A.2.1. PROCESOS ESTOCASTICOS

Dado (Ω, A, p) espacio de probabilidad, entonces una familia $\{X(t,w),\ t\in T,\ w\in\Omega\}$ de variables aleatorias se denomina **proceso estocástico.** Por lo general, la notación de un proceso estocástico es solamente $X(t)$.

Un proceso estocástico $\{X(t),\ t\geq 0\}$ se denomina como **movimiento Browniano** ó **proceso Wiener** sí:

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t),\ t\geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes, es decir:
   - para $t_1<t_2<\ldots<t_n$ se tiene que $X(t_n) - X(t_{n-1}),\ X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}),\ldots,X(t_2) - X(t_1)$ son independientes.
   - $\{X(t),\ t\geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios, significa que la distribución de $X(t+s) - X(t)$ no depende de t.
3. Para cada $t>0$, $X(t) \sim N(0,\ \sigma^2 t)$.

Cuando se da el caso $\sigma = 1$, se está ante un **movimiento Browniano standard.** De cualquier forma, cualquier movimiento Browniano puede ser estandarizado, haciendo $B(t) = X(t) / \sigma$.

Como $X(t) \sim N(0,\ t)$, su función de densidad viene dada de la siguiente forma:

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$$

Dado que se sabe que $X(t)$ tiene incrementos estacionarios e independientes, la función de densidad conjunta de $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ es:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = f_{t_1}(x_1) f_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdots f_{t_n-t_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$$

$$= \frac{\exp\{-\frac{1}{2}[\frac{x_1^2}{t_1}+\frac{(x_2-x_1)^2}{t_2-t_1}+\cdots+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{t_n-t_{n-1}}]\}}{(2\pi)^{n/2}[t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})]^{1/2}}$$

De esta ecuación, puede en principio deducirse cualquier probabilidad, en particular la función de densidad condicional[1] de $X(s)$ dado el valor $X(t)=B$, para $s < t$.

$$f_{s|t}(x\mid B) = \frac{f_s(x) f_{t-s}(B-x)}{f_t(B)} = K_1 \exp\left\{-\frac{x^2}{2s} - \frac{(B-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

$$= K_2 \exp\left\{-x^2\left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2(t-s)}\right)+\frac{Bx}{t-s}\right\}$$

$$= K_2 \exp\left\{-\frac{t}{2s(t-s)}\left(x^2-2\frac{sB}{t}x\right)\right\}$$

$$= K_3 \exp\left\{-\frac{(x-Bs/t)^2}{2s(t-s)/t}\right\}$$

donde K_1, K_2 y K_3 no dependen de x.

De la ecuación anterior se observa claramente que la distribución de $X(s)$ dado que $X(t)=B$ es, para $s < t$, $N(sB/t,\ s(t-s)/t)$.

[1] Si X y Y tienen una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x,y)$, entonces la función de densidad de probabilidad condicional de X, dado que $Y=y$, esta definida para todos los valores de y tales que $f_Y(y)>0$, por $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Ahora ya se tienen las herramientas para poder estudiar algunas variaciones del movimiento Browniano, tales como los movimientos con coeficiente de tendencia y los movimientos geométricos.

Se dice que $\{X(t),\ t\geq 0\}$ es un **movimiento Browniano con coeficiente de tendencia** μ y varianza σ^2 si:

1. $X(0) = 0$;
2. $\{X(t),\ t\geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes;
3. $X(t) \sim N(\mu t,\ \sigma^2 t)$

Una definición alternativa es

$$X(t) = \sigma B(t) + \mu t$$

donde $B(t)$ es un movimiento Browniano standard.

El proceso $\{X(t),\ t \geq 0\}$ definido por $X(t) = e^{Y(t)}$, donde $\{Y(t),\ t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano con coeficiente de tendencia μ y varianza σ^2, es el llamado **movimiento geométrico Browniano.**

Ahora compútese para un movimiento geométrico Browniano $\{X(t)\}$, el valor esperado del proceso al tiempo t, conociéndose la historia del mismo hasta el tiempo s, es decir, considérese $\mathrm{E}[X(t)|X(u),\ 0\leq u\leq s]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[X(t)|X(u),\ 0\leq u\leq s] &= \mathrm{E}[e^{Y(t)} \mid Y(u),\ 0\leq u\leq s]\\ &= \mathrm{E}[e^{Y(s)+Y(t)-Y(s)} \mid Y(u),\ 0\leq u\leq s]\\ &= e^{Y(s)}\,\mathrm{E}[e^{Y(t)-Y(s)} \mid Y(u),\ 0\leq u\leq s]\\ &= X(s)\mathrm{E}[e^{Y(t)-Y(s)}]\end{aligned}$$

Ahora si se tiene en mente que la función generadora de momentos de una variable aleatoria normal W es

$$E[e^{aW}] = e^{aE[W]+a^2 Var(W)/2}$$

y que $Y(t) - Y(s)$ se distribuye como una normal con media $\mu(t-s)$ y varianza $(t-s)\sigma^2$, puede concluirse que haciendo $a = 1$,

$$E[e^{Y(t)-Y(s)}] = e^{\mu(t-s)+(t-s)\sigma^2/2}$$

Por consiguiente, se tiene que

$$E[X(t) \mid X(u), 0 \leq u \leq s] = X(s)e^{(t-s)(\mu+\sigma^2/2)}.$$

ANEXO 3

A.3.1. MODELO BINOMIAL

El modelo binomial (Cox, Ross & Rubinstein) para valuar opciones no es más que la versión discreta del modelo Black-Scholes.

Se asume que el activo X siguen un proceso de tipo binomial sobre periodos de tiempo discretos, es decir, el rendimiento del bien subyacente sobre cada periodo puede tener dos posibles valores:

$$X \begin{cases} \nearrow X(1+u) = X_u & \text{con probabilidad } p \\ \searrow X(1+d) = X_d & \text{con probabilidad } (1\text{-}p) \end{cases}$$

Se asume que la tasa de interés es constante, positiva y es tal que $r = 1+i$, con $u>r>d$.

Para valuar un call sobre este subyacente, primero analícese el caso donde la fecha de vencimiento es justamente al siguiente periodo. Siendo C el valor presente del call, sean C_u y C_d el valor del call al vencimiento, si es que el activo se movió a X_u ó X_d respectivamente.

$$C \begin{cases} \nearrow C_u = \max[0, X_u - E] & \text{con probabilidad } p \\ \searrow C_d = \max[0, X_d - E] & \text{con probabilidad } (1\text{-}p) \end{cases}$$

Supóngase que se forma un portafolio con Δ unidades del subyacente y un monto B en un instrumento de rendimiento fijo libre de riesgo. El costo de este portafolio es $\Delta X + B$ y el valor de mismo al cabo de un periodo es:

$$\Delta X + B \begin{cases} \nearrow \Delta X_u + rB & \text{con probabilidad } p \\ \searrow \Delta X_d + rB & \text{con probabilidad } (1\text{-}p) \end{cases}$$

Dado que no hay restricciones sobre Δ y B, escoganse de tal forma que el valor del portafolio al final sea igual al valor del call para cada posibilidad, es decir:

$$\Delta X_u + rB = C_u$$

$$\Delta X_d + rB = C_d$$

$$\Longrightarrow \quad B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)X}$$

Como no deben haber oportunidades de arbitraje, se debe cumplir:

$$\begin{aligned} C &= \Delta X + B \\ &= \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)r} \\ &= \frac{\frac{r-d}{u-d}C_u + \frac{u-r}{u-d}C_d}{r} \end{aligned} \qquad (1)$$

si este valor es mayor que $X - E$. Si no, $C = X - E$.

Haciendo $q = \frac{r-d}{u-d}$ tal que $1-q = \frac{u-r}{u-d}$, la ecuación (1) puede reexpresarse como:

$$C = \frac{qC_u + (1-q)C_d}{r} \qquad (2)$$

si este valor es mayor que $X-E$ y si no, $C = X-E$.

Si la tasa de interés es positiva, la ecuación (2) siempre es mayor que $X-E$ [1], por lo cual esta ecuación representa la fórmula exacta para valuar un call con vencimiento en un periodo.

Nótese que en esta fórmula:

1. no aparece la probabilidad p
2. el valor del call no depende de la aversión al riesgo del inversionista
3. la única variable aleatoria de la cual depende el call, es el precio del subyacente.

Finalmente obsérvese que $1 > q = \frac{r-d}{u-d} > 0$, y de hecho este es el valor de p. Para ver esto último con mayor claridad, tómese el rendimiento esperado por el subyacente $pX_u + (1-p)X_d$, el cual debe ser igual a la tasa libre de riesgo, entonces:

$$pX_u + (1-p)X_d = rX \quad \text{y} \quad p = \frac{r-d}{u-d} = q$$

[1] •Caso 1: Si $uX \leq E \Rightarrow X < E$ y $C = 0$, por lo tanto $C > X-E$
•Caso 2: Si $dX \geq E \Rightarrow C = X - E/r > X-E$
•Caso 3: Si $uX > E > dX$. En este caso, $C = p(uX-E)/r$ valor mayor a $X-E$ siempre que $(1-p)dX < (r-p)E$, lo cual ocurre siempre que $r > 1$.

Ahora complíquese el problema, con un call de dos periodos a vencimiento. Suponiendo el modelo binomial, el activo puede tomar tres posibles valores al cabo de los dos periodos.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & u^2X \\
 & uX \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
X \arrow[ur] \arrow[dr] & & duX \\
 & dX \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & d^2X
\end{tikzcd}
$$

y para el call

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & C_{uu} = max[0,\ u^2X - E] \\
 & C_u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_{du} = max[0,\ duX - E] \\
 & C_d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_{dd} = max[0,\ d^2X - E]
\end{tikzcd}
$$

Del análisis previo, puede verse que:

$$C_u = \frac{pC_{uu} + (1-p)C_{ud}}{r}$$

y

$$C_d = \frac{pC_{du} + (1-p)C_{dd}}{r} \qquad (3)$$

Sustituyendo estos valores en (2)

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{pC_u + (1-p)C_d}{r} \\
&= \frac{p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}}{r^2} \qquad (4) \\
&= \frac{\left\{p^2 \max[0, u^2X - E] + 2p(1-p)\max[0, duX - E] + (1-p)^2 \max[0, d^2X - E]\right\}}{r^2}
\end{aligned}
$$

Nuevamente es evidente que este valor es mayor a $X-E$, si $r > 1$.

La ecuación (4) cumple con las características de la ecuación (2), con la única novedad de que el número de periodos n a vencimiento —en la ecuación (4) $n = 2$—, se vuelve determinante al valorizar el call. Siguiendo un procedimiento recursivo, se llega a:

$$C = \frac{\left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \max\left[0, u^j d^{n-j} X - E\right] \right\}}{r^n} \tag{5}$$

Sea a al mínimo número de pasos en un solo sentido que el subyacente necesita dar para que al final el call este dentro-del-dinero, es decir, a es el mínimo entero no negativo tal que $u^a d^{n-a} X > E$ ó bien el menor entero no negativo mayor que $\ln\left(E/Xd^n\right) / \ln\left(u/d\right)$.

$\forall j < a, \quad max[0, u^j d^{n-j} X - E] = 0$ y
$\forall j \geq a, \quad max[0, u^j d^{n-j} X - E] = u^j d^{n-j} X - E$

Entonces

$$C = \frac{\left\{ \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left[u^j d^{n-j} X - E\right] \right\}}{r^n}$$

Evidentemente si $a > n$, el call finaliza fuera-del-dinero.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C &= X\left[\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \left(\frac{u^j d^{n-j}}{r^n} \right) \right] - Er^{-n} \left[\sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \right] \\ &= X\Phi\left[a, n, p'\right] - Er^{-n}\Phi\left[a, n, p\right] \end{aligned} \tag{6}$$

donde

$$p = \frac{r-d}{u-d} \qquad \text{y} \qquad p^{'} = \left(\frac{u}{r}\right)p$$

$a \equiv$ menor entero no negativo mayor que $\dfrac{\ln\left(E/Xd^{n}\right)}{\ln\left(u/d\right)}$

$$\Phi[a,n,q] = \sum_{k=a}^{n}\binom{n}{k}q^{k}(1-q)^{n-k}$$

Esta ecuación (6) es el modelo binomial para valuar opciones.

A continuación se verá como al hacer continuo el modelo binomial, este converge hacia la fórmula de Black-Scholes.

Comparando la ecuación (6) con la ecuación (24) del capítulo 3, y sabiendo que $r^{-n} = e^{-\delta n}$, solo falta mostrar que $\Phi[a,n,p^{'}] \to \phi(b)$ y que $\Phi[a,n,p] \to \phi(b - \sigma\sqrt{t})$.

Considérese solamente a $\Phi[a,n,p]$, ya que el razonamiento es el mismo para $\Phi[a,n,p^{'}]$.

$\Phi[a,n,p]$ es la probabilidad de que la suma de n variables aleatorias binomiales sea mayor o igual que a. Se sabe que una variable aleatoria j que sigue dicha distribución, tiene media np y varianza $np(1-p)$.

$$1 - \Phi[a,n,p] = P[j \le a-1] = P\left[\frac{j-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{a-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right]$$

Si X^* es el valor del subyacente transcurridos n periodos (supóngase que el precio siguió j veces la dirección u y n-j veces el sentido d), entonces:

$$X^* = Xu^j d^{n-j} \quad \text{y} \quad ln(X^*/X) = jln(u/d) + nlnd$$

La media y la varianza respectivas son:

$$\mu_p = p\ln(u/d) + \ln d \quad \text{y} \quad \sigma_p^2 = p(1-p)[\ln(u/d)]^2$$

Haciendo un poco de álgebra, se encuentra que:

$$\frac{j - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\ln(X^*/X) - \mu_p n}{\sigma_p \sqrt{n}}$$

Según se escogió a, se tiene que:

$$a - 1 = \frac{\ln(E/Xd^n)}{\ln(u/d)} - \varepsilon = \frac{[\ln(E/X) - n\ln d]}{\ln(u/d)} - \varepsilon \qquad \varepsilon \in [0,1]$$

También puede verse que:

$$\frac{a - 1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\ln(E/X) - \mu_p - \varepsilon\ln(u/d)}{\sigma_p\sqrt{n}}$$

Entonces

$$1 - \Phi[a, n, p] = p\left[\frac{\ln(X^*/X) - \mu_p^n}{\sigma_p\sqrt{n}} \leq \frac{\ln(E/X) - \mu_p n - \varepsilon\ln(u/d)}{\sigma_p\sqrt{n}}\right]$$

Aplicando el Teorema Central del Límite[2], se tienen los siguientes resultados:

$$\mu_p n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \left(\ln r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \qquad \sigma_p \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \sigma\sqrt{t} \qquad \text{y} \qquad \ln(u/d) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\ln(E/X) - \mu_p n - \varepsilon \ln(u/d)}{\sigma_p \sqrt{n}} \rightarrow z \equiv \frac{\ln(E/X) - \left(\ln r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$\therefore 1 - \Phi[a,n,p] \rightarrow N(z) = N\left[\frac{\ln\left(Er^{-t}/X\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right]$$

Usando la propiedad de simetría de la distribución normal standard, es decir que $1-N(z) = N(-z)$, se completa el argumento

$$\Phi[a,n,p] \rightarrow N(-z) = N\left[\frac{\ln\left(X/Er^{-t}\right) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}\right] = N(b - \sigma\sqrt{t})$$

Realizando un razonamiento similar para $\Phi[a,n,p']$ se completa la demostración de que la fórmula binomial en el caso límite tiende a la fórmula de Black-Scholes.

---

[2] Sean $X_1, X_2, \ldots$ v.a. i.i.d. con media μ y varianza σ^2
Entonces la distribución $\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ cuando $n \to \infty$.

CONCLUSIONES

Cuando se calcula el precio de una opción utilizando el modelo de Black-Scholes y se compara contra el verdadero precio de la misma, por lo regular hay diferencias. Es raro que el valor de la opción coincida con el del mercado. Dejando de lado errores tales como valuar con diferentes plazos o con precios incorrectos, hay tres posibles razones que explican éstas diferencias: puede ser que aunque se calcule el valor correcto de la opción, el precio de ésta se encuentre fuera de línea; las entradas del modelo pueden no ser las correctas; o bien que la fórmula no sea adecuada.

Normalmente estas tres razones juegan su parte para explicar la diferencia existente.

Si el precio de la opción está fuera de la línea teorica, podría usarse la fórmula para generar utilidades, a pesar de que en dicho caso tendrían que tomarse en cuenta los costos de intermediación, excluidos por el modelo.

La principal entrada para el modelo que puede ser incorrecta, es la volatilidad, ya que aunque tanto el precio del subyacente como las tasas de interés pueden estar desactualizadas, estás pueden ser corregidas en cualquier momento, ya que son observables en el mercado. La volatilidad, sin embargo, a lo largo de toda la vida de la opción debe ser estimada, siendo a veces mejor la estimación del mercado que la propia o viceversa.

La tercer razón para la diferencia entre precios, el que la fórmula de Black-Scholes no sea correcta, es lo que se analizó en el presente trabajo. Ciertamente es dificil utilizar el modelo para atacar problemas (como la volatilidad variable) que él mismo asume como inexistentes. En el caso del emisor de la opción, quien se pregunta que tan frecuente tiene que rebalancear su cobertura, la respuesta del modelo otra vez es trivial, mientras más seguido se lleve a cabo, mejor será la cobertura. Efectivamente, el modelo sugiere un incremento sin límite en el volumen negociado, conforme el portafolio es rebalanceado con mayor frecuencia. En consecuencia, la menor presencia de cualquier costo de transacción (*bid-ask spreads*, comisiones, etc.) puede hacer inviable la utilización del modelo.

Abundan ejemplos en donde el modelo de Black-Scholes ignora problemas que son importantes para aquellos interesados en utilizar el modelo. Black-Scholes asume que los rendimientos siguen una distribución lognormal, aunque practicamente para todos los activos, los rendimientos presentan el problema de colas anchas (*fat tails*). Black-Scholes también asume la continuidad en el proceso de precios, cuando estos tienden a moverse discretamente y, más importante, dar saltos. Así, pueden darse muchos más ejemplos, pero lo maravilloso radica en que a pesar de la invalidez de la mayoría de los supuestos en los que esta basado, el modelo es bastante útil en el mundo real.

El modelo de Black-Scholes funciona en el mundo real, discreto y fraccional, solo necesitando que el operador haya estimado correctamente la volatilidad y que los precios no brinquen o salten demasiado.

BIBLIOGRAFIA

- Ash, Robert & Gardner, Melvin. (1975). "Topics in Stochastic Processes". United Kingdom, Academic Press, Inc.
- Banque Nationale de Paris: BNP. (1995). "Foreign Exchange Options". USA, Internal Publication from **BNP Cooper Neff Inc.**
- Banque Nationale de Paris: BNP. (1996). "Les Options de Change". France, Internal Publication from Risques de Marchés, **BNP.**
- Bhat, U. Narayan. (1972). Elements of Applied Stochastic Processes. USA, John Wiley and Sons, Inc.
- Black, Fischer. (September 1998). "The Holes in Black-Scholes". **Risk Supplement,** United Kingdom.
- Blume, Marshall & Siegel, Jeremy. "The Theory of Security Pricing and Market Structure". **Financial Markets, Institutions & Instruments,** Volume 1, Number 3.
- Boissonnade, Jacques. (1997). Les Options Exotiques, Concepts et Applications. France, Editions ESKA.
- Britten-Jones, Mark & Neuberger, Anthony. (1996). "Arbitrage Pricing With Incomplete Markets". **Applied Mathematical Finance,** No. 3.
- Cox, John C. & Ross, S.A. (April 1975). "The Pricing of Options for Jump Processes". Working Paper No. 2-75. **Rodney L. White Center for Financial Research,** University of Pennsylvania.
- Cox, John C. & Rubinstein, Mark. (1985). Options Markets. USA, Prentice Hall.
- Guerrero Vazquez, Rosa Isela. (1998). Cálculo Estocástico y Valuación de Opciones con el Modelo de Black-Scholes. México, U.N.A.M., Tesis de la Facultad de Ciencias.
- Hull, John C. (1997). Options, Futures and other Derivatives. USA, Prentice Hall.

- Jarrow, Robert & Turnbull, Stuart. (1996). Derivative Securities. USA, South-Western.
- Jousseaume, Jean-Philippe. (Juillet-Août, 1993). "Paradoxes sur le Calcul des Options, Extension des Modèles. **Banque & Marches,** No. 8, France.
- Kamal, Michael & Derman, Emanuel. (January, 1999). "Correcting Black-Scholes". **Risk,** United Kingdom.
- Karatzas, Ioannis & Shreve, Steven E. (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus. USA, Springer-Verlag.
- Macko, Edouard. (Juillet-Août, 1992). "Mecanisme Fondamental des Options". **Banque & Marches,** No. 2, France.
- Macko, Edouard. (Juillet-Août, 1993). "Principales Sensibilités de L'option". **Banque & Marches,** No. 8, France.
- Macko, Edouard & Debeauvais, Maurice (Mars-Avril, 1993). "Modele D'evaluation des Options de Black & Scholes". **Banque & Marches,** No. 6, France.
- Mansell Carstens, Catherine. (1992). Las Nuevas Finanzas en México. México, Editorial Milenio.
- Mood, Alexander M.; Graybill, Franklin A. & Boes, Duane C.(1974). Introduction to the Theory of Statistics. USA, McGraw Hill.
- Neuberger Anthony & Brittn-Jones, Mark. (September 1998). "Welcome to the Real World". **Risk Supplement,** United Kingdom.
- Pliska, Stanley R. (1997). Introduction to Mathematical Finance, Discrete Time Models. USA, Blackwell Publishers.
- Prisman, Eliezer Z. (2000). Pricing derivative Securities. USA. – www.academicpress.com/catalog/0125649510/chp15-11.html
- Ross, Sheldon. (1989). A First Course in Probability. USA, Maxwell McMillan International Editions.
- Ross, Sheldon M. (1997). Introduction to Probability Models. USA, Academic Press Limited.
- Rutterford, Janette. (1983). Introduction to Stock Exchange Investment. USA, McMillan Press.

- Sabau, Hernán; Roa, Gloria et al. (1997). Derivados Financieros, Teoria y Práctica. México, Casa de Bolsa Operadora de Bolsa.
- Shreve, Steven. (1997). Stochastic Calculus and Finance. USA, Carnegie Mellon University.
- Watkins, Thayer. Ito's Lemma. USA, San José State University (Economics Department). –www.sjsu.edu/faculty/watkins/ito.htm
- Wilmott, Paul; Dewynne, Jeff & Howison, Sam. (1993). Option Pricing, Mathematical Models and Computation. United Kingdom, Oxford Financial Press.