UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Facultad de Ciencias

"GEOMETRIA DE CONCURSO PARA PREPARAR ALUMNOS DE SECUNDARIA"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

ACTUARIA

PRESENTA

DIANA GARCIA GODINEZ

CIENCIAS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

Director de Tesis

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

2002

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: GEOMETRIA DE CONCURSO PARA PREPARAR ALUMNOS DE SECUNDARIA.

realizado por GARCIA GODINEZ DIANA

con número de cuenta 08152814-7 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA	ABM
Propietario	M. en C. EMMA LAM OSNAYA	Emma Lam O.
Propietario	DR. FERNANDO BRAMBILA PAZ	F-ML
Suplente	M. en C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA	E. de Oteyza
Suplente	M. en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ
MATEMATICAS

A la U.N.A.M
Que sembró en mi el deseo
Del conocimiento y la sed
De superación

Al m. en c. Alejandro Bravo Mojica
Por su acertada asesoría

A Sergio
Con quien espero seguir
Por el camino de la vida

A Paulina y Sergio Iván
Que nunca duden, que la educación
Es la mejor herencia que pueden tener

A mi madre
Porque me dio la vida
Y me apoyó para que realizara
Mis sueños

A Elizabeth, Victor Manuel,
Daniel y Ana Lilia
Mis hermanos, creyerón en mí
Y creo que no los defraude

INDICE

INTRODUCCION

Me encontraba iniciando el segundo año de experiencia curricular como maestra de matemáticas a nivel Secundaria, cuando me solicitaron que organizara un curso para los alumnos más destacados en matemáticas que se encontraban en primero, segundo y tercero de secundaria. El curso consistía en preparar a los alumnos para que participaran en el 6° concurso de primavera de Matemáticas. Me entregaron unos exámenes de concursos anteriores, cuándo revisé algunos de ellos me pregunté –Y esto ¿ como lo voy a resolver ?, no sabia por donde empezar y sobre todo los de Geometría no atinaba a resolverlos. Empece a investigar sobre exámenes de concursos en internet y encontré varias páginas acerca del tema y algunos exámenes estaban resueltos, fui observando que para resolver los de Geometría tenia que manejar muy bien diversos teoremas y definiciones relacionados con el tema y aprender a ser observadora; ver las figuras geométricas de diferentes posiciones y ángulos además de poder seguir instrucciones para realizar construcciones geométricas.

Ustedes me preguntaran porqué me interese en Geometría y no en Teoría de números, Análisis combinatorio, desigualdades etc.. Que son los temas generales que se utilizan en éste tipo de concursos. Bueno me gustó Geometría porque sentí que podía en base a la observación y el análisis, poder utilizar el razonamiento inductivo y deductivo para solucionar diferentes problemas. Recordé que una vez leyendo un libro de Geometría[1] en el Prólogo decía lo siguiente: "Existe un déficit en la enseñanza de la Geometría en los colegios, enseñanza que en muchos casos ha sido disminuida al mínimo y en otros, simplemente se ha reducido a cero". " Pero, estimamos que desarrollar un adecuada imaginación geométrica es una cualidad indispensable y útil para diversos especialistas como: Ingenieros y Arquitectos etc.". Estoy de acuerdo con estas premisas y además de que yo las aumentaría diciendo que a los niños desde niveles básicos se les debe de ir enseñando la Geometría pero razonando. Muchos alumnos llegan a la secundaria sin dominar lo que es el perímetro de una figura geométrica, cuándo se les solicita calcular el perímetro de una "figura compuesta", esta puede ser la unión de triángulos, cuadrados, rectángulos, trapecios etc., simplemente dudan y muchos no lo pueden realizar. Por lo que me decidí a ponerme a estudiar para realizar el siguiente trabajo de investigación y apoyo para alumnos o docentes que deseen dominar el tema.

En el primer capítulo explicó las nomenclaturas que utilizo en todo el libro, en el capítulo II presento 100 problemas que puede resolver un alumno o maestro y los cuales estoy clasificando en cinco grandes grupos:

a) Nociones geométricas básicas
b) Congruencia y desigualdades en el triángulo
c) Áreas de figuras

[1] Ejercicios de Geometría Elemental. Autor: Gonzalo Masjuán T. y Fernando Arenas D.

d) La circunferencia
e) Proporcionalidad y semejanza

En el capitulo III se encuentran las soluciones a los 100 problemas propuestos en el capitulo anterior, recomiendo no ver los resultados, antes de intentar resolverlos. En el IV proporciono un listado de las principales definiciones y teoremas usados en la solución de los problemas, la persona interesada deberá de aprenderlos o al menos estudiarlos. En el V presento una lista o guía de lugares en Internet que pueden ser visitados, los cuales se pueden enviar a imprimir para su estudio. Al final se presentan las conclusiones de éste trabajo.

Esta investigación fue inspirada para proporcionar las herramientas mínimas necesarias para cualquier maestro o alumno interesado en prepararse para impartir un curso o para participar en un concurso de matemáticas ya sea el de primavera o el concurso que se organiza a nivel estatal y posteriormente a nivel nacional, sobre todo para alumnos de nivel secundaria, ya que creo que desde ese nivel deben de empezar los jóvenes a prepararse para poder realizar una buena competencia a nivel internacional, una vez que se encuentren en bachillerato o preparatoria que es el nivel mínimo necesario que se solicita para estos concursos.

Por último quiero presentar un temario de Geometría, que yo considero que deberá de considerar un alumno para poder prepararse en una competencia a nivel nacional o internacional de matemáticas.

- Construcciones elementales con regla y compás
- Puntos notables en el triángulo
- Relaciones métricas en el triángulo
- Ángulos en la circunferencia.
- Relaciones métricas en la circunferencia
- Homotecia y semejanza
- Los movimientos en el plano
- Inversión en el plano
- Lugares geométricos

I Nomenclaturas

I NOMENCLATURAS

A continuación presento una lista de nomenclaturas usadas en el trabajo

<	**Ángulo**
¶	**Pi**
Área(triángulo)	**Área de un triángulo**
~	**Semejante**
2:1	**Dos a uno**
Perímetro(triángulo)	**Perímetro de un triángulo**

II Problemas

II PROBLEMAS

a) Nociones geométricas básicas

1.- Sean cuatro ángulos consecutivos adyacentes: <AOB, < BOC = 2< AOB, <COD = 3< AOB y < DOA = 4 <AOB. Calcular los ángulos

2.- Sean dos ángulos adyacentes consecutivos, el < AOB = a y el < BOC. El < AOC = b y D la bisectriz del < BOC. Demostrar que la bisectriz del < BOC forma un ángulo igual a ½ (a + b) con OA

3.- Si tenemos que el < AOC es un ángulo recto y el <AOB agudo, el < BOD recto. Sea OX la bisectriz del ángulo AOB y OY la bisectriz del < COD. Demostrar que las bisectrices son perpendiculares

4.- El lado de un triángulo equilátero es 3/7 del lado de un cuadrado. ¿ Cuál es la razón de sus perímetros ?

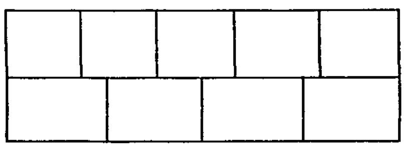
5.- En un trapecio rectangular de 240 cm ^{2} de área y 12 cm de altura, la diferencia entre la base mayor y la base menor es de 9 cm. ¿Cuál es el perímetro del trapecio?

6.- La suma de un cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo es 16.2 m, dado el cateto = AC = 1.8 m, calcular cuánto mide el cateto (AB) y la hipotenusa (BC)

7.- En el triángulo ABC se trazan las bisectrices de los ángulos A y B que se cortan en P. Por P se traza una paralela a AB que corta al lado AC en D y al lado BC en E. Se sabe que AD = 5.3 y BE = 7.8. Calcular la longitud de la paralela DE

8.- Encontrar el perímetro de un cuadrado ABCD, sea *l* la medida de cada lado. Sabiendo que la recta determinada por el vértice C y el punto medio E del lado opuesto mide 7m.

9.- Nueve rectángulos congruentes forman un rectángulo más grande (como en la figura), de área igual a 720 u^2 . ¿Cuál es el perímetro ?

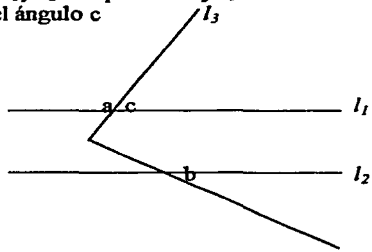


10.- Sea ABC un triángulo tal que el ángulo BAC + el ángulo ABC = 5 el ángulo ACB. Si O es el punto de intersección de las bisectrices de el ángulo ACB, el ángulo ABC y el ángulo BAC, calcular la medida del ángulo AOB

11.- Sea ABC un triángulo tal que el ángulo BAC = 56° y el ángulo ABC = 65°. Se traza por cada vértice la bisectriz exterior y queda determinado un nuevo triángulo PQR. Hallar el ángulo QPR, < PQR y el < PRQ

12.- En el cuadrilátero ABCD, el ángulo BAD mide 42°. Se traza la diagonal BD y resulta que el ángulo ABD es el doble del ángulo exterior a ABC y el ángulo ADB es el doble del ángulo exterior a ADC. ¿Cuánto mide el ángulo BCD ?

13.- En la figura de abajo, l_1 y l_2 son paralelas y l_3 es la secante que las corta. El < a + < b = 160°. Calcula el valor del ángulo c

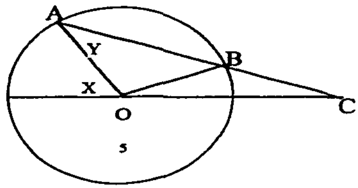


14.- En un paralelogramo ABCD, la bisectriz del ángulo ABC intersecta a CD en un punto P, el ángulo CPB = 35°. La bisectriz del ángulo BCD intersecta a AB en un punto Q, el ángulo AQC = 150°. Sea R el punto de intersección de ambas bisectrices. Calcula el ángulo PRQ

15.- En un triángulo ABC cualquiera, el ángulo BAC = 50° y el < ABC = 30°. ¿ cuánto medirá el ángulo DCE que forman la altura CD y la bisectriz CE trazadas desde el vértice C?

16.- En la figura de abajo el punto O es el centro del círculo y OA = BC. ¿Cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

a) 2X = 3Y b) X = 2Y c) X + Y = 90° d)X+2Y=180°



17.- Dado un triángulo ABC cualquiera, se traza desde el vértice C hasta el lado AB, dos rectas CD y CE tales que el < ABC = < ACD y el < ECB = < BAC. El < ACB mayor a 90°. Demuestra que el triángulo CDE es isósceles

18.- En un triángulo cualquiera ABC, el < ABC = 2(< CAB). Se traza la altura CH y se toma sobre la prolongación de CB una longitud BD = BH. Luego se traza la recta DH la cual intersecta a AC en E. Demostrar que los triángulos AEH y CEH son isósceles

19.- Calcular los lados oblicuos de un trapecio isósceles ABCD, si la base mayor AB mide 20cm, el ángulo BAD igual a 60°, la diagonal es bisectriz del ángulo ABC y DE la altura del trapecio isósceles

20.- Demostrar que las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera forman un cuadrilátero inscriptible

21.- En un triángulo cualquiera ABC se traza la bisectriz CD. Por D se traza una paralela a AC, la cual intersecta a BC en E, y por E una paralela a AB, la cual intersecta a AC en F. Demostrar que CE = AF

22.- Sea ABCD un trapecio con vértices AB en la base mayor y CD en la base menor. Se trazan paralelas a BC y AD hasta intersectar en E y F, a la prolongación de CD. Demostrar que el <AEC = < ABC y < DFB = DAB

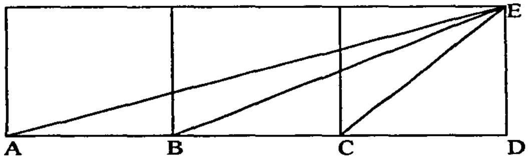
23.- En un paralelogramo ABCD se prolonga AB en BE = BC, y se prolonga AD en DF = DC. Demostrar que los puntos F, C y E son colineales

24.- Sea ABCD un cuadrilátero convexo y p el punto donde se intersectan las bisectrices que parten de los vértices A y B. Demostrar que el ángulo que forman las consecutivas bisectrices es igual a la semisuma de los otros dos ángulos (< BCD + < CDA)/2)

25.- Dado un trapecio ABCD tal que la base menor CD sea igual a la suma de los lados no paralelos AD y BC, Demostrar que las bisectrices de los ángulos DAB y ABC se intersectan sobre CD

26.- Dado un cuadrado ABCD, se construye los triángulos equiláteros ABE y BCF, el primero en el interior y el segundo en el exterior del cuadrado. Demostrar que los puntos D,E y F son colineales

27.- Sean tres cuadrados consecutivos de longitud igual a una unidad y del mismo tamaño. Sean A,B,C,D y E los vértice de cada uno de los lados de los cuadrados empezando del vértice izquierdo inferior. Desde el vértice A sale un segmento que lo une a E, desde B a E otro segmento, y desde C a E otro segmento. Demostrar que el ángulo DAE + < DBE = < DCE



b) Congruencia y desigualdades en el triángulo

28.- ¿Cuántos triángulos distintos hay de perímetro 17 y lados enteros ?

29.- Determinar los valores enteros de X tales que el triángulo 5,8 y X es obtusángulo

30.- Sea un triángulo escaleno. La longitud de los lados desde el más pequeño al más grande es: 6, X y 16. ¿ Cuáles son los valores enteros posibles para X ?

31.- Sea ABC un triángulo rectángulo y AD la bisectriz del ángulo recto del triángulo que divide a la hipotenusa en dos segmentos CD = 6m y BD = 8 m. Hallar el valor de los catetos

32.- El perímetro de un triángulo cualquiera ABC es 42m; la bisectriz CD que parte del vértice C divide a la base AB en dos segmentos BD = 6m y AD = 8 m respectivamente. Encontrar la medida de los lados del triángulo

33.- El ángulo desigual ACB en el vértice de un triángulo ABC isósceles es 40º.¿Cuánto mide el ángulo A'C'B' en el triángulo isósceles A'B'C', que tiene por vértices los pies de las alturas del triángulo original?

34.- Sea un triángulo ABC cualquiera, y P un punto (exterior o interior) del triángulo y AP, BP y CP las líneas que unen cada uno de los vértices del triángulo, con el punto P. Demostrar que la suma de las longitudes AP,BP y CP es mayor que el semiperímetro del triángulo

35.- Dado el triángulo equilátero ABC se toman sobre los lados, a partir de cada vértice y en el mismo sentido, longitudes AA´, BB´ y CC' , todos iguales a un tercio de cada lado del triángulo. Demostrar que el triángulo A'B'C' es equilátero

36.- Igual que el anterior. Sea D, E y F los puntos medios de A'B, B'C y A'C. Demostrar que cada una de las rectas A'B', B'C' y C'A' son perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo

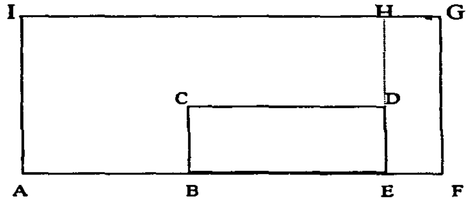
37.- Sea el cuadrilátero convexo ABCD, AC y BD sus diagonales y O el punto donde se intersectan las diagonales. Demostrar que la suma de las diagonales es mayor que la suma de los lados opuestos

38.- Sea ABCD un paralelogramo y E el punto medio de BC. Sea F la intersección de AE con BD. Probar que DF = 2FB

39.- En un pentágono regular ABCDE, trazamos las diagonales AC y BE, que se cortan en el punto P. Recortamos el triángulo APB y obtenemos así el hexágono APBCDE. Muestra que se puede teselar el plano con estas piezas

c) Áreas de figuras

40.- El rectángulo AFGI tiene 60 cm de perímetro y el rectángulo BCDE tiene 24 cm de perímetro. La longitud de BE es 8 cm y la de DH es de 10 cm. Encontrar el área de la figura ABCDEFGI

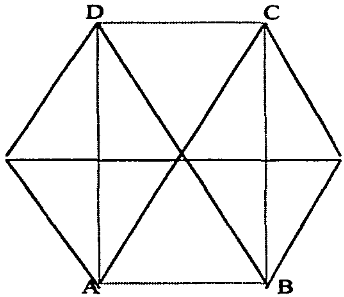


41.- El rectángulo ABCD tiene 3 m de largo por 2 m de ancho. Se corta la diagonal AC con los puntos E y F en tres segmentos iguales. ¿Cuál es el área del triángulo BEF?

42.- Un triángulo equilátero y un hexágono regular tienen el mismo perímetro. ¿ Cuál es la razón de sus áreas ?

43.- En un triángulo equilátero ABC, sea l la longitud de cada lado y 3m la longitud de la recta CN que une al vértice C con la tercera parte de la base. Sea M el punto medio de AB y CM la recta que los une. Calcular el área del triángulo equilátero

44.- Al colocar cuatro triángulos equiláteros de lado l, como se muestra en la figura de abajo, los puntos A,B,C y D forman un rectángulo. Calcula el área del rectángulo ABCD



45.- Calcular el área del rombo en el que la diagonal mayor vale 1.9 m y sea *l* la medida de cada lado del rombo e igual a la diagonal menor

46.- Un paralelogramo tiene un lado menor igual a "b", y el lado mayor es el doble del menor. Se trazan las bisectrices interiores de sus ángulos, las cuales se intersecan en el punto M sobre el lado DC, y en N sobre el lado AB. Sea P la intersección de las bisectrices AM y DN y Q la intersección de las bisectrices CN y BM. Sea el $< DAB = 60°$. Calcula en términos del lado menor del paralelogramo el área del rectángulo PNQM

47.- ABCD es un rectángulo, MNPQ son los puntos medios de sus lados, sea T el punto donde se intersectan QN con MC. Si el área, del triángulo OTC es igual a uno, ¿cuál es el área del rectángulo ABCD?

48.- Demostrar que de todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado

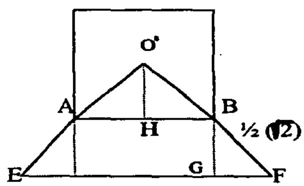
49.- Sea un cuadrado ABCD: a) E y F los puntos medios de los lados AB y CD del cuadrado, si unimos los vértices A y B con F, F con E. Calcular: la razón del área del triángulo BCF y el área del cuadrado ABCD. b) E,F,G y H los puntos medios de los lados del cuadrado, si unimos cada vértice con su punto medio opuesto, se forma en el centro un nuevo cuadrado IJKL. Calcular: la razón del área del cuadrado IJKL y el área del cuadrado ABCD

50.- Calcular las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, si la hipotenusa mide una unidad más que un cateto y 8 unidades más que el otro cateto. Calcular su área

51.- En un cuadrado ABCD de lado k, se ubican los puntos P y Q sobre los lados BC y AB respectivamente, de tal manera que PB = 3PC y AQ = 2QB. Si se llama M al punto de intersección de AP y DQ, determinar el área del triángulo AMQ en función de k

52.- Sea ABC un triángulo equilátero. N es un punto del lado AC tal que AC = 7AN, M es un punto del lado AB tal que MN es paralelo a BC y P es un punto del lado BC tal que MP es paralelo a AC. Encuentre la fracción $\frac{\text{área(MNP)}}{\text{área(ABC)}}$

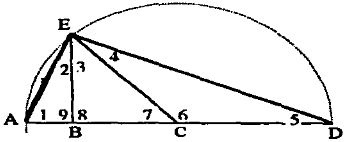
53.- La siguiente figura esta formada por un cuadrado y un triángulo sobrepuestos, donde el punto O_1 es el punto en que se cortan las diagonales del cuadrado. La longitud de cada lado del cuadrado es 1 y BF = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$



54.- En un rectángulo WXYZ, sea T un punto sobre YZ, WT la línea que une el vértice W con T. V el punto que está verticalmente debajo de T y U que divide a XY en razón 2 a 1. Si el área del cuadrilátero TUVW es 12. ¿Cuánto vale el área del rectángulo WXYZ?

d) La circunferencia

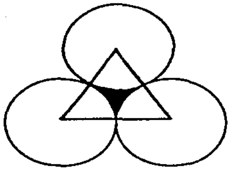
55.-Calcula el valor de todos los ángulos, sabiendo que el ángulo uno mide 70°



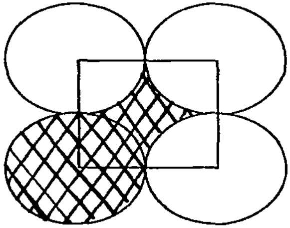
56.- Los tres vértices de un triángulo están en un círculo cuya área es ¶. Dos de los vértices están en un diámetro. ¿Cuál es el máximo valor que puede tener el área del triángulo ?

57.- Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia con centro en O y diámetro igual a AB, sea CO la mediana del ángulo recto, BP la bisectriz del ángulo ABC y el ángulo BAC = 58° 30'. Calcular el ángulo BPO

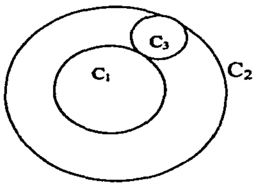
58.- Sean tres circunferencias tangentes entre si dos a dos, de un cm de diámetro cada una. Calcular el área que se encuentra entre las tres circunferencias y los puntos de tangencia



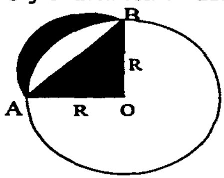
59.- Si los centros de cuatro circunferencias tangentes entre si dos a dos, forman un cuadrado de lado 2 cm. Calcular el área que se encuentra sombreada en la figura de abajo



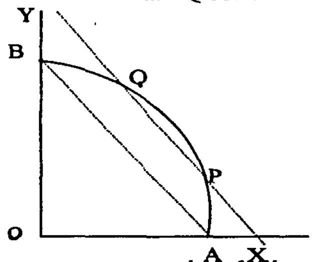
60.- Sean C_1 y C_2 dos circunferencias concéntricas y C_3 una circunferencia exterior a C_1, interior a C_2 y tangente a ambas. Si el radio de C2 vale 1, ¿cuánto debe valer el radio de C_1 para que la superficie de C_1 sea el doble que la de C_3 ?



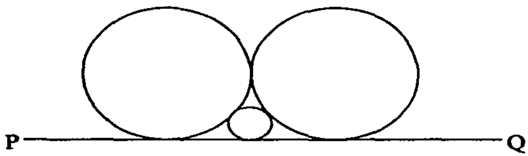
61.- Sea una circunferencia con radio R y centro en O como se muestra en la figura de abajo. El área del triángulo ABO y el área sombreada AB, ¿ serán iguales ?



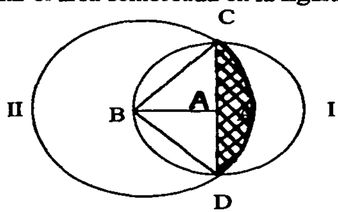
62.- La figura representa la cuarta parte de un círculo de radio 1. En el arco AB, se consideran los puntos P y Q de forma tal que la recta PQ sea paralela a la recta AB. Sean X e Y los puntos de intersección de la recta PQ con las rectas OA y OB respectivamente. Calcular $(PX)^2 + (PY)^2$



63.- Tres circunferencias son tangentes entre si y a la línea PQ, como lo muestra la figura. Los circunferencias grandes tienen el mismo radio. ¿ Cuál es la razón entre el radio de la circunferencia pequeña y una de las grandes ?



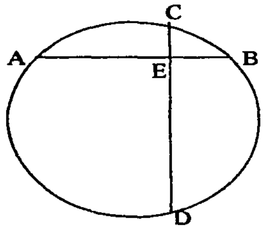
64.- En la figura de abajo A es el centro de la circunferencia I. B es centro de la circunferencia II y es un punto de la circunferencia I. El diámetro de la circunferencia I mide 4 unidades. Calcular el área sombreada en la figura



65.- Si dos de los lados de un triángulo ABC miden 12.8 y 6.9 m respectivamente, ¿ cuál será el valor del tercer lado, sabiendo que la superficie del triángulo es 49 m^2 y sea O el centro y r el radio de la circunferencia inscrita en dicho triángulo, el cual mide 3.5 m ?

66.- En un triángulo ABC, rectángulo en A, la hipotenusa CB = 10, el cateto AB = 8 y el cateto AC = 6. Encontrar el valor de la mediana AM

67.- En una circunferencia, dos cuerdas perpendiculares AB y CD se cortan en un punto E. AE = 3, EB = 2, CE = 1 y ED = 6, como en la figura de abajo. Hallar la longitud de la circunferencia



68.- Calcular el radio r de una circunferencia con centro en O circunscrita, en el triángulo ABC, cuyos lados miden: AB= 4, AC=3.2 y BC=2.4 m

69.- Calcular el radio r de una circunferencia con centro en O inscrita, en el triángulo ABC, cuyos lados miden: AB= 4, AC=3.2 y BC=2.4 m

70.- ABCD es un cuadrado de 4 cm de lado, E y F los puntos medios de DC y DA, los cuales se unen al vértice B. BE es un arco de circunferencia de radio de igual longitud que BE. Cuál es el área de la figura BEF

71.- Demuestra que los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios

72.- Dos triángulos isósceles que tienen igual área y cuyos lados miden x , x , a y x , x , b; donde a es desigual a b. Encontrar el valor de x

73.- En un triángulo cualquiera ABC, se traza su altura CH, se toma la altura CH como diámetro de una circunferencia, que intersecta a los lados del triángulo BC y AC respectivamente en M y N. Demostrar que MN < CH

74.- Demostrar que todo trapecio inscrito en una circunferencia es un trapecio isósceles

75.- Se consideran en una circunferencia dos arcos AB y BC de diferente tamaño, los cuales son unidos por cuerdas AB y BC. Sean los puntos medios de estos arcos M y N, los cuales son unidos por una cuerda MN. La recta MN intersecta a las cuerdas AB y BC en los puntos P y Q. Demostrar que BP = BQ

76.- Se divide a una circunferencia de radio r en seis partes iguales. Con cada uno de los puntos de división como centro y radio r, se describe un arco en el interior de la circunferencia. Calcular el perímetro de la rosa así formada

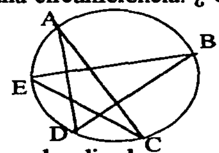
77.- Sobre un segmento OA , se toma éste como diámetro de una circunferencia, si designamos OA como radio de una segunda circunferencia y tomamos un segundo radio OC de la segunda, el cual intersecta a la primera en el punto B. Sea MB el segmento que une al centro de la primer circunferencia con el punto de intersección B. Demostrar que los arcos AB y AC son iguales

78.- Dado un triángulo equilátero ABC de 8m de lado, y sea una circunferencia circunscrita al triángulo con centro en O. OH la altura del triángulo BOC y CD la altura del triángulo equilátero. Hallar el área del menor segmento circular determinado por la circunferencia circunscrita y el lado del triángulo BC

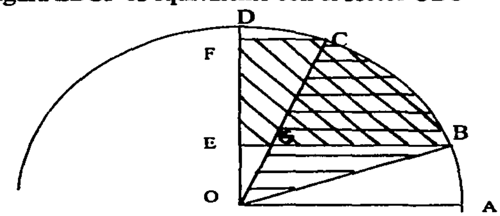
79.- Determinar las longitudes de dos de los lados de un cuadrilátero ABCD de 22 m^2 de superficie, circunscrito a un círculo de 2 m de radio, siendo rectos dos de sus ángulos opuestos

80.- Dos circunferencia de centro O' y O son tangentes exteriormente en el punto A. Se trazan las cuerdas AM y AM' perpendiculares entre si. Sea AB el diámetro de la circunferencia que tiene como centro O. Demostrar que OM es paralela a O'M'

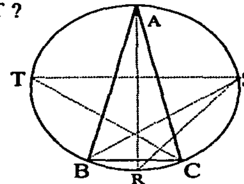
81.- Los puntos A,B,C,D y E son puntos de una circunferencia. ¿ Cuál es la suma de los ángulos interiores <A, <B, <C, <D y <E ?



82.- El segmento OA de la figura de abajo, es el radio de un cuarto de circunferencia. Sobre el arco AD se toman dos puntos B y C tales que los arcos AB y CD sean iguales. Sobre el radio OD se trazan las perpendiculares EB y FC, y G el punto de intersección de OC y EB. Demostrar que la figura EBCF es equivalente con el sector OBC

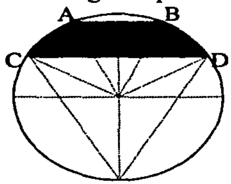


83.- Sea el triángulo isósceles ABC tal que AB = AC, sean R, S y T las intersecciones de las alturas de los vértices A, B y C, respectivamente, con el circuncírculo como se muestra es la figura. ¿ Cuál es el valor del < RST ?

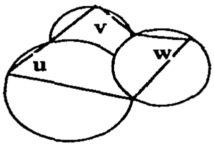


84.- Dos circunferencias con centro en O y O', son tales que OO' = 10 r y r' = 4r. Se trazan las tangentes comunes interiores a ambas, sean E y A, B y D los puntos de tangencia de las circunferencias. O'E , O'A, OB y OD los radios de ambas. Calcular en términos de r, el perímetro de la figura ABCDEFA no convexa así formada

85.- Determinar el área de la porción de círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas, una igual al lado del exágono regular y la otra del triángulo equilátero inscrito

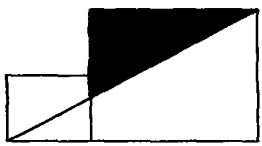


86.- ¿ Cuánto vale la suma del < u + < v + < w, en la siguiente figura ?



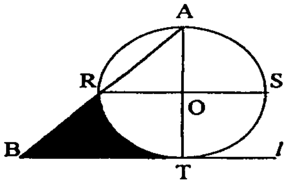
e) Proporcionalidad y semejanza

87.- En la figura, cada lado del cuadrado más pequeño mide 3 y cada lado del cuadrado más grande mide 6, ¿ cuál es el área del triángulo sombreado ?

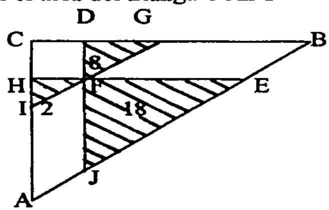


88.- ABCD es un cuadrado. AP y DP sus diagonales y P el punto donde se intersectan. E,F,G y H son los puntos medios de AP, DP, CP y BP, si unimos estos puntos formamos un nuevo cuadrado EFGH. ¿ Cuál es la razón de las áreas del cuadrado EFGH y el cuadrado ABCD ?

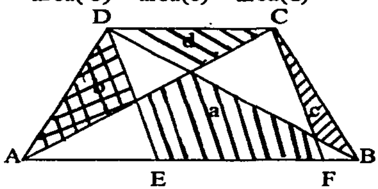
89.- El círculo de la figura tiene centro O y su diámetro mide 3. Los segmentos AT y RS son diámetros perpendiculares del círculo. La recta l es tangente al círculo en el punto T; B es la intersección de la recta l con la recta AR. Calcular el área de la región sombreada (delimitada por los segmentos BR y BT y el arco del círculo de RT)



90.- En la figura de abajo en el triángulo rectángulo ABC, se trazan segmentos paralelos a los lados del triángulo. Si las áreas de los tres triángulos que se forman, como se indica en la figura, son 2, 8, y 18, hallar el área del triángulo ABC

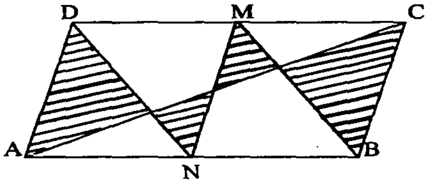


91.- En el trapecio ABCD de la figura de abajo, se han trazado las diagonales AC y BD y dos rectas paralelas entre si, una por DE y la otra por CF, como se muestra en la figura. Demostrar que el área(a) = área(b) + área(c) + área(d)



92.- Sea ABC un triángulo y P,Q y R los puntos medios de sus lados. Demuestra que el perímetro del triángulo formado por P,Q y R es la mitad del perímetro de ABC

93.- Si el paralelogramo ABCD tiene área $1m^2$, M y N son los puntos medios de los lados CD y AB respectivamente. ¿ Qué área tiene la región sombreada ?



94.- Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero, considerado como diámetro, se traza hacia el interior del triángulo una semicircunferencia. Estas tres semicircunferencias forman una rosa trilabeada. Calcular el perímetro de la rosa en términos de la longitud del lado del triángulo

95.- Dado un triángulo ABC isósceles de base AB, se traza por el vértice C una recta que intersecta a la base en el punto D y a la circunferencia circunscrita en el punto E. Demostrar que $(CB)^2 = (CD)(CE)$

96.- Sea AB un diámetro de una circunferencia dada. Se traza la tangente en el punto B y por el punto A una secante cualquiera que intersecta a la circunferencia en el punto M y a la tangente en el punto N. Demostrar que el producto de AM por AN es igual a cuatro veces el cuadrado del radio de la circunferencia

97.- El perímetro del rectángulo ABCD que tiene por vértices los puntos medios de los lados de un rombo EFGH es de 92cm, y la diagonal menor de éste mide 32cm. ¿Cuál es la longitud del lado del rombo ?

98.- En un cuadrilátero se toma sobre los lados longitudes AM y AN, CP y CQ respectivamente iguales a un tercio de AB, AD, CB y CD. Demostrar que las rectas que unen dos puntos vecinos son paralelas a las diagonales del cuadrilátero

99.- Se trazan las bisectrices de los ángulos en A y D de un paralelogramo ABCD, las cuales intersectan a las diagonales BD y AC en los puntos M y N respectivamente. Demostrar que MN es paralela con AD

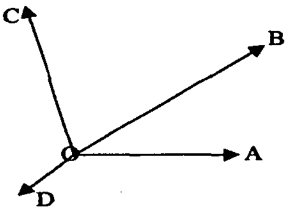
100.- En un rectángulo ABCD, AC es una diagonal. Una recta r se mueve paralelamente a AB, formando dos triángulos opuestos por el vértice, interiores al rectángulo. Prueba que la suma de las áreas de dichos triángulos es mínima, cuando r pasa por el punto medio del segmento AD

III Soluciones

III SOLUCIONES

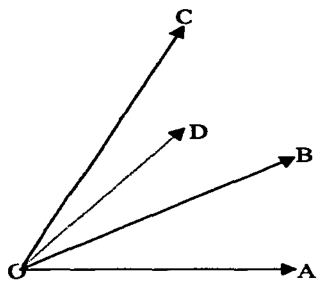
a) Nociones geométricas básicas

1.-



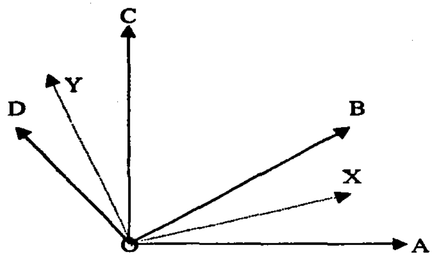
En la figura podemos observar lo siguiente: $< AOB + < BOC + < COD + < DOA = 360°$
El $< BOC = 2 < AOB$ por hipótesis
El $< COD = 3 < AOB$ por hipótesis
El $< DOA = 4 < AOB$ por hipótesis, sustituyendo valores tenemos que:
$360° = < AOB + < BOC + < COD + < DOA = < AOB + 2< AOB + 3< AOB + 4< AOB$
$360° = 10 < AOB$ despejando
El $< AOB = 1/10\ (360°) = 36°$
El $< BOC = 2 < AOB = 36°(2) = 72°$
El $< COD = 3 < AOB = 36°(3) = 108°$
El $< DOA = 4 < AOB = 36°(4) = 144°$

2.-



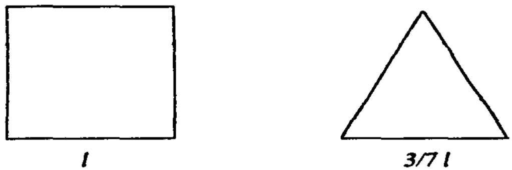
OD es la bisectriz del ángulo BOC
El ángulo $BOC = < AOC - < AOB$, pero como $<AOC = b$ y el $< AOB = a$ entonces
El ángulo $BOC = b - a$
El ángulo $AOD = < AOB + < BOD$, pero como OD es bisectriz del ángulo BOC entonces
El ángulo $AOD = a + ½ (b – a)$, simplificando tenemos que:
El ángulo $AOD = ½(2a + b – a) = ½(a + b)$

3.-



Si observamos la figura, el ángulo AOB y el < COD son agudos tales que OA es perpendidular a OC y OB es perpendidular a OD.
OX y OY son bisectrices de los ángulos AOB y el < COD además de que son iguales por tener sus lados respectivamente perpendiculares
Entonces < AOX = < XOB = < COY = < YOD
Luego < XOY = < XOB + < BOY = < YOD + < BOY = < BOD = 90°
Por lo que OX y OY son perpendiculares

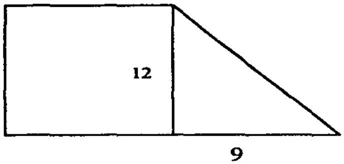
4.-



Sea *l* el lado del cuadrado y por hipótesis 3/7 *l* = cada lado del triángulo equilátero entonces:
El perímetro del cuadrado = (4)(*l*), el perímetro del triángulo equilátero = (3)(la medida de cada lado del triángulo equilátero) = (3)(3/7 *l*) = 9/7 *l*
Por lo tanto la razón de sus perímetros es:

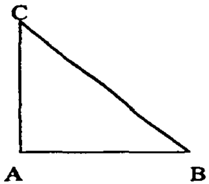
$$\frac{\text{Perímetro del triángulo}}{\text{Perímetro del cuadrado}} = \frac{9/7\, l}{4l} = \frac{9}{28}$$

5.-



Observando la figura y con los datos que nos proporcionaron tenemos lo siguiente:
Área del trapecio = $\frac{(\text{Base mayor}+\text{base menor})\text{altura}}{2} = \frac{(\text{Base mayor}+\text{base menor})12}{2} = 240.$
Despejando obtenemos: (Base mayor + base menor) = 40. Sea B = base mayor, b = base menor y h = altura:
El perímetro del trapecio = B + b +h + c, donde c es el lado oblicuo. Despejando y sustituyendo valores:
El perímetro del trapecio = 40 + 12+ c, utilizando el teorema de Pitágoras para calcular c:
$c = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$
Una vez obtenido todos los elementos:
El perímetro del trapecio = 40 + 12 + 15 = 67 cm

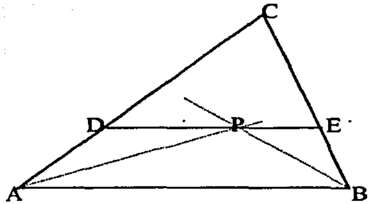
6.-



Sea AC = 1.8 m y AB + BC = 16.2 por hipótesis, entonces como se trata de un triángulo rectángulo, por el Teorema de Pitágoras tenemos que:
$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = (AB)^2 + (1.8)^2$ ya que AC = 1.8
despejando $(BC)^2 - (AB)^2 = (1.8)^2$, factorizando $[(BC)+(AB)]\,[(BC)-(AB)] = (1.8)^2$
pero como AB + BC = 16.2, sustituyendo resulta $(16.2)[(BC)-(AB)] = (1.8)^2 = 3.24$
despejando $[(BC) - (AB)] = 1/16.2\ (3.24) = .2$, para encontrar el valor de BC y AB; planteamos un sistema de ecuaciones:

(1) $(BC) - (AB) = .2$
(2) $\underline{(BC) + (AB) = 16.2}$, lo resolvemos por suma y resta
$2(BC) = 16.4$
$BC = \frac{1}{2}(16.4) = 8.2$, sustituyendo en (2) $8.2 + AB = 16.2$, despejando
$AB = 16.2 - 8.2 = 8$

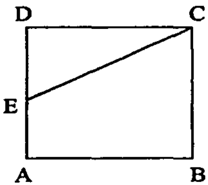
7.-



Observando la figura, el triángulo ADP es isósceles porque los ángulos DPA y PAB son alternos internos y además los ángulos DAP y PAB son iguales porque están formados por la bisectriz del ángulo BAC. Por lo tanto DP = AD = 5.3.

Análogamente el triángulo EPB es isósceles y BE = PE = 7.8, por lo tanto DE = DP + PE = 5.3 + 7.8 = 13.1

8.-

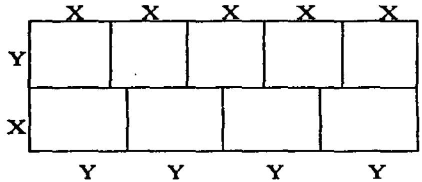


Sea AB = BC = CD = AD = l y CE = 7m, por hipótesis
DE = AE = ½ l , ya que E es el punto medio de AD, si observamos la figura y el triángulo rectángulo CDE, por el teorema de Pitágoras: $(CE)^2 = (CD)^2 + (DE)^2$, sustituyendo valores:

$(7)^2 = (l)^2 + (\frac{1}{2} l)^2 = \frac{5}{4} (l)^2$, despejando $l = \sqrt{1/5\,[(49)(4)]} = \sqrt{39.2} = 6.26$ m

El perímetro = 4(l) = 4(6.26) = 25.04m

9.-

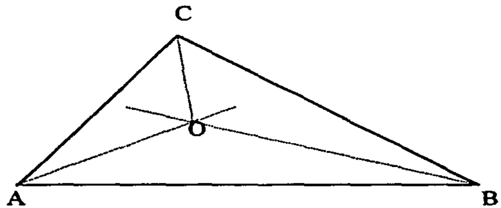


En la figura, sea X = el ancho de cada rectángulo pequeño e Y = el largo de cada rectángulo pequeño. El área total del rectángulo grande = $720u^2$, como son 9 rectángulos pequeños entonces área de cada rectángulo pequeño = $720 / 9 = 80\ u^2$, es decir $XY = 80\ u^2$ (*1*). El área del rectángulo grande = (ancho)(largo) = $(X + Y)(4Y) = 720\ u^2$, simplificando obtenemos que:

$4XY + 4Y^2 = 720$(*2*), por (*1*) y sustituyendo en (*2*) obtenemos lo siguiente:

$4(80) + 4Y^2 = 720$, despejando $Y = \sqrt{\frac{1}{4}(720 - 320)} = \sqrt{100} = 10$ y ahora encontraremos el valor de X: despejando X de (*1*) entonces $X = 80 / 10 = 8$, por lo tanto el perímetro del rectángulo grande = 2(ancho) + 2(largo) = $2(X + Y) + 2(4Y) = 2(8 + 10) + 2[4(10)] = 36 + 80 = 116$ u

10.-



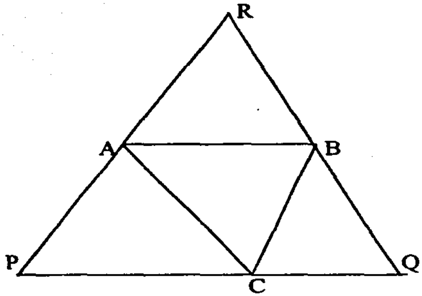
Por hipótesis tenemos que $5(\angle ACB) = \angle BAC + \angle ABC$ (*1*) y, como " La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180° " , entonces:

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$ (*2*).

Por (*1*) tenemos que si sumamos a cada lado de la igualdad el $\angle ACB$, obtenemos:

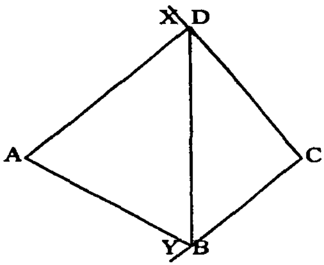
$6(\angle ACB) = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$, despejando el $\angle ACB = 180°/6 = 30°$. Entonces de (*2*) y sustituyendo valores $\angle BAC + \angle ABC = 150°$(*3*). Si nos fijamos en la figura podemos observar que en el triángulo AOB, tenemos que el $\angle AOB + \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle BAC) = 180°$, pero por (*3*) tenemos que $\angle AOB + 75° = 180°$, despejando obtenemos : $\angle AOB = 180° - 75° = 105°$

11.-



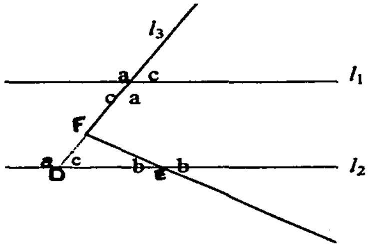
Por hipótesis tenemos que el < BAC = 56°, y el < ABC = 65°, entonces el < ACB = 180° - (56° + 65°) = 59°. El < PAB = ½ (180° - < BAC) = ½ (180° - 56°) = 62° , el < PBA = ½ (180° - <ABC) = ½ (180° - 65°) = 57°30' y el < QPR = ½ (< BAC + < ABC) = ½ (56° + 65°) = 60° 30', por ser bisectrices exteriores de los vértices A y B. Análogamente el ángulo PQR = ½ (< ABC + < ACB) = ½ (65° + 59°) = 62° y el < PRQ = ½ (180° - < PQR + < QPR) = 180° - (62° + 60°30') = 180° - 122°30' = 57°30'

12.-



El < BAD = 42°, el < ABD = 2(< exterior de ABC) = 2Y y < ADB = 2(< exterior de ADC) = 2X. Al observar la figura, en el triángulo CDB tenemos que el ángulo BDC = 180° - (< ADB + < exterior X) = 180° - (2X + X) = 180° - 3X, por ser suplementarios.
El <CBD = 180° - (< ABD + < exterior Y) = 180° - (2Y + Y) = 180° - 3Y, por ser suplementarios. El ángulo BCD = 180° - (< BDC + < CBD) = 180°- (180° - 3X + 180° - 3Y) = 3X -180° + 3Y = 3(X + Y) - 180° (*1*).
En el triángulo ABD, el < BAD + < ADB + < ABD = 42° + 2X + 2Y = 42° + 2(X + Y) = 180°, despejando X + Y = 69°, sustituyendo en (*1*) tenemos lo siguiente:
< BCD = 3(69°) - 180° = 207° - 180° = 27°

13.-



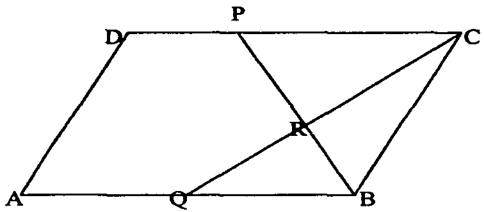
Si prolongamos la secante l_3, hasta intersectar la línea l_2 se forma un triángulo DEF, en donde el < EDF = < c por ser alternos internos y el < DEF = < b por ser opuestos por el vértice. Como < a + < b = 160° por hipótesis entonces al observar la figura podemos concluir que: < a + < c = 180° por ser suplementarios y además de que < b + < c = 90°.
De aquí podemos concluir de que tenemos un sistema de ecuaciones 3 X 3:

(1) < a + < b = 160°
(2) < a + < c = 180°
(3) < b + < c = 90°

vamos a resolver el sistema por suma y resta. Multiplicamos por –1 la tercer ecuación y la sumamos con la ecuación (1):

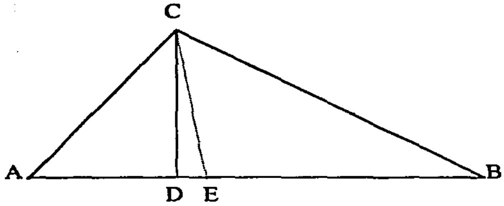
(1) < a + < b = 160°
(3) -< b - < c = - 90°
< a - < c = 70°, sumamos esta ecuación con la (2)
(2) < a + < c = 180°
2(< a) = 70° + 180° = 250°, despejamos < a = 250°/2 = 125°, sustituimos en (2)
< a + < c = 125° + < c =180°, despejando < c = 180° - 125° = 55°

14.-



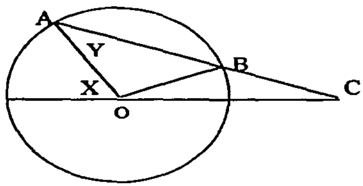
En la figura, los ángulos AQC + < BQC = 180°, por ser suplementarios entonces el < BQC = 180° - < AQC = 180° - 150° = 30°. Ahora como el < CPB = < QBP por ser ángulos alternos internos, entonces el < QBP = 35°. Si observamos el triángulo BQR, el ángulo BRQ = 180° - (< BQC + < QBP) = 180° - (30° + 35°) = 180° - 65° = 115°, el ángulo BRQ + < PRQ = 180° por ser suplementarios, despejando el < PRQ = 180°- < BRQ = 180° - 115° = 65°

15.-



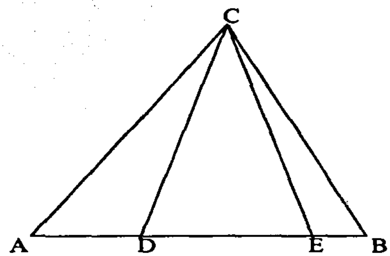
Sean CD la altura y CE la bisectriz trazadas desde el vértice C. Si observamos el triángulo rectángulo ACD, el ángulo ACD = 90° - < CAD = 90° - 50° = 40°, por ser el ángulo ADC recto y el < CAD = < BAC. El < ACE = ½ (< ACB) = ½ [180° - (< BAC + < ABC)] = ½ [180° - (50° + 30°)] = ½ [100°] = 50°, porque CE es bisectriz de ACB. El < DCE = < ACE - < ACD = 50° - 40° = 10°

16.-



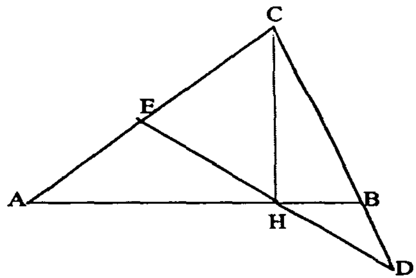
**OA = OB por ser radios del círculo, como OA = BC por hipótesis entonces OB = BC.
Tenemos entonces dos triángulos isósceles: el AOB y el triángulo OBC.
Como el triángulo AOB es isósceles entonces el < Y = < OBA
Como el triángulo OBC es isósceles entonces el < BOC = < BCO
El ángulo OBC = 180°- < Y . En el triángulo OBC, el < BOC + < BCO + < OBC = 180°
Sustituyendo tenemos que el < BOC + < BCO + 180° - < Y = 180°, < BOC + < BCO - < Y = 180° - 180° = 0. Despejando tenemos que el < BOC + < BCO = < Y, pero como < BOC = < BCO. De la igualdad anterior tenemos que ½ Y + ½ Y = Y entonces < BCO = ½ Y.
Si nos fijamos en el triángulo AOC, el ángulo X es exterior al triángulo entonces por el teorema "Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes" por lo tanto < X = < Y + < BCO = < Y + ½ Y, sumando las fracciones < X = < 3/2 Y, despejando tenemos que 2X = 3Y, por lo tanto la solución es a)**

17.-



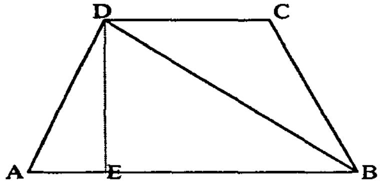
**Sea el < ACD = < ABC = a, el < ECB = < BAC = b y el < ACB > 90 ° por hipótesis.
Como el < CDE es exterior al triángulo ACD, por el teorema " Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes", entonces
El < CDE = < ACD + < BAC = a + b
Como el < CED es exterior al triángulo BCE, por el mismo teorema tenemos que:
El < CED = < ECB + < EBC = b + a, ya que el < ABC = < EBC
De las dos igualdades podemos concluir que:
El < CDE = < CED entonces CD = CE y por lo tanto el triángulo CDE es isósceles**

18.-



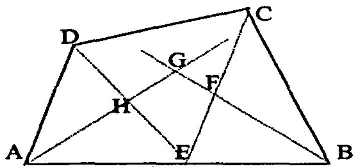
**En la figura, sea < CAB = a entonces el < ABC = 2(a). Ahora bien, como BD = BH, el triángulo BDH es isósceles, de modo que los ángulos BHD y BDH son iguales y como el ángulo ABC es exterior, entonces < BHD = < BDH = a. Así, como < EHA = < BHD (opuestos por el vértice), entonces: < EHA = a = < EAH, de tal manera que el triángulo AEH es isósceles.
Por otra parte, como CH es perpendicular con AB, < CHE = 90° - < EHA = 90° - a y observando el triángulo ACH tenemos lo siguiente:
< ECH = 180° - (< CAH + < AHC) = 180° - a – 90° = 90° - a, por lo tanto < CHE = < ECH y EC = EH y el triángulo ECH es isósceles**

19.-



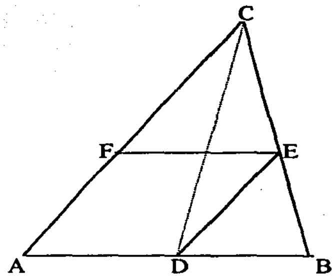
Por hipótesis AB = 20 cm, el < BAD = 60°, y la diagonal es bisectriz del ángulo ABC. Al ser isósceles el trapecio el < BAD = < ABC = 60°. Como BD es diagonal y bisectriz resultan las siguientes igualdades: el < ABD = ½ (< ABC) = ½ (60°) = 30°, y el ángulo BDC = < ABD = 30° por ser alternos internos entonces el < BCD = 180° - (<BDC + < CBD) = 180° - (30° + 30°) = 120°. Observando la figura tenemos que el triángulo rectángulo ADE el < ADE = 180° - (< AED + < DAE) = 180° - (90°+ 60°) = 180° - 150° = 30°. Si nos fijamos en el triángulo rectángulo BDE, el < EDB = 180° - (< BED + < EBD) = 180° – (90°+ 30°) = 60°, entonces el < ADC = < BCD = 120°. El triángulo BCD es isósceles ya que el < CBD = < BDC = 30° entonces CD = CB. Analizando el triángulo rectángulo ADE tenemos que AE = ½ (AB – CD) = ½ (AB) – ½ (CD) = ½ (20) – ½ (CD) = 10 – ½ (CD)(*1*). Al observar el triángulo rectángulo AED tenemos que el coseno(60°) = cateto adyacente/ hipotenusa = AE/ AD, como el cos(60°) = ½ , despejando y sustituyendo tenemos que AE = ½ (AD)(*2*), de donde reuniendo (*1*) con (*2*) tenemos que 10 – ½ (CD) = ½ (AD), despejando 10 = ½ (AD + CD) = ½ (AD + AD) = ½ [2 (AD)] = AD, por ser AD = CD = CB y como se trata de un trapecio isósceles entonces AD = BC = 10cm

20.-



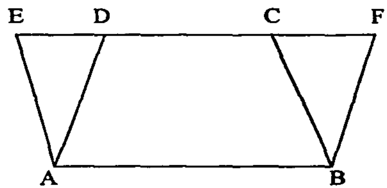
En la figura, se han trazado las bisectrices de los ángulos del cuadrilátero ABCD, formando ellas a su vez el cuadrilátero EFGH. El ángulo GHE es igual al ángulo AHD ya que son opuestos por el vértice. Entonces el ángulo GHE = 180° - (< HAD + < HDA) = 180° - ½ (< BAD + < CDA) = < AHD. Análogamente, se tiene que < GFE = 180° - ½ (< ABC + < BCD) ya que el < GFE = < BFC por ser opuestos por el vértice. Por lo que < GHE + < GFE = 180° - ½ (< BAD + < CDA) + 180° - ½ (< ABC + < BCD). Factorizando ½:< GHE + < GFE = 360° - ½ (< BAD + < CDA + < ABC + < BCD) = 360° - ½ (360°) a que “Los ángulos de un cuadrilátero suman 360°”, se tiene que:< GHE + < GFE = 360° - 180° = 180°, el ángulo FGH + < FEH = 360° - (< GHE + < GFE) = 360° - 180° = 180°. Por lo que el cuadrilátero EFGH formado por las bisectrices es inscriptible

21.-



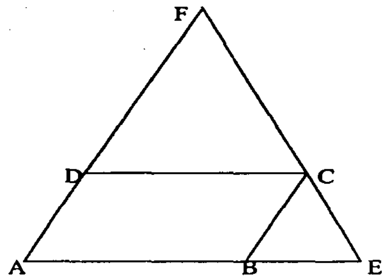
Al observar la figura, ADEF es un paralelogramo entonces AF = DE ya que " Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales". Nos fijamos en el triángulo CDE, y debemos demostrar que DE = CE y además que es un triángulo isósceles:
El < ACD = < DCE ya que CD es bisectriz
El < ACD = < CDE ya que son alternos internos entre las paralelas AC y DE, entonces el ángulo DCE = < CDE por lo tanto es un triángulo isósceles CDE y como AF = DE = CE entonces AF = CE

22.-



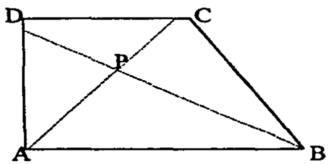
En la figura, ABCE es un paralelogramo entonces por una propiedad de ellos: "Ángulos opuestos son iguales", el < AEC = < ABC. Si observamos nuevamente la figura, ABFD es otro paralelogramo y por la propiedad anterior el < DFB = < DAB

23.-



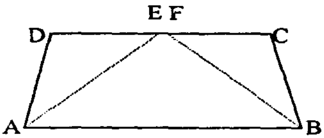
Observando la figura resultante y como DC = DF entonces el triángulo CDF es isósceles y por lo tanto el ángulo AFE = < DCF
Como BE = BC entonces el triángulo BCE es isósceles y por lo tanto el ángulo AEF = < BCE. Por ser ABCD un paralelogramo por la propiedad "Ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales", entonces el < EAF = < BCD. Como "la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°", entonces los ángulos interiores del triángulo AEF es igual a: < AFE + < EAF + < AEF = 180° (*1*). Por coincidir los ángulos: < DFE = < DCF, < BCE = < BEC y el < EAF = < BCD entonces por (*1*) y sustituyendo, el ángulo DCF + < BCD + < BCE = 180° y por lo tanto los puntos F, C y E son colineales

24.-



Observando la figura, AP es bisectriz del < DAB y BP es bisectriz del < ABC. El < APB = 180° - ½ (< DAB + < ABC)(*1*), ya que "la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°" y "la bisectriz divide a un ángulo en dos iguales". Por otra parte en el cuadrilátero ABCD se tiene que: "La suma de los ángulos interiores de cualquier cuadrilátero convexo es igual a 360°" entonces el < DAB + < ABC + < BCD + < CDA = 360°, despejando tenemos < DAB + < ABC = 360° - (< BCD + < CDA), multiplicando por ½ cada miembro de la igualdad:
½ (< DAB + < ABC) = ½ [360° - (< BCD + < CDA)] = 180° - ½ (< BCD + < CDA)
de la fórmula (*1*), sustituimos valores y obtenemos:
que el < APB = 180° - [180° - ½ (< BCD + < CDA)] = ½ (< BCD + < CDA)

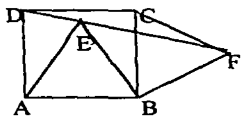
25.-



Por hipótesis AD + BC = CD, supongamos que las bisectríces AE y BF no se intersectan sobre CD. Observemos que esto significa que E y F son puntos distintos. Ahora bien, el < AED = < EAB (*1*), porque son alternos internos y el < DAE = < EAB ya que "la bisectriz de un ángulo lo divide en dos iguales" entonces el < DAE = < AED por (*1*) y por lo tanto el triángulo AED es isósceles y AD = DE.

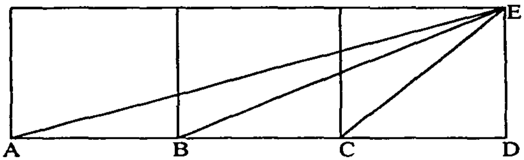
El < CFB = < ABF (*2*) por ser alternos internos, el < ABF = < CBF ya que "la bisectriz de un ángulo lo divide en dos iguales" entonces < CFB = < CBF por (*2*) entonces el triángulo CBF es isósceles y CF = CB
Por hipótesis tenemos que CD = AD + BC = DE + CF + EF, pero EF tiene que ser cero para que sea verdadera la igualdad entonces E y F tienen que ser el mismo punto donde se intersecan las bisectrices que se cortan sobre CD

26.-



Para demostrar que los puntos D,E y F son colineales se tiene que demostrar que el ángulo DEF = 180°.
El < DEF = <AED + < AEB + < BEF, el ángulo AEB = 60° ya que es un ángulo interior de un triángulo equilátero.
El triángulo ADE es isósceles ya que AD = AE, entonces <AED = <ADE.
El < DAE = 90° - < BAE = 90° - 60° = 30°
El < ADE = < AED = ½ (180° - 30°) = 75°
El triángulo BEF es isósceles ya que BE = BF entonces < BFE = < BEF
El ángulo EBF = < EBC + < CBF = 30° + 60° = 90°
El < BEF = < BFE = ½ (180° - 90°) = ½ (90°) = 45°
Entonces < DEF = < AED + < AEB + < BEF = 75° + 60° + 45° = 180°
Por lo tanto los puntos D,E y F son colineales

27.-



Al observar la figura tenemos que tan A = cateto opuesto/ cateto adyacente = DE / AD = 1/3; ya que AB = BC = CD = DE = 1.

La tan B = DE / BD = 1/2 y la tan C = DE / CD = 1/1=1, luego la tan(A + B) = tan A + tan B / 1 – tan A tan B, sustituyendo valores tenemos que:

tan(A + B) = 1/3 + ½ / 1 – (1/3)(½) = 5/6 / 1 – 1/6 = 1= tan C
por lo tanto el < DAE + < DBE = < DCE

b) CONGRUENCIA Y DESIGUALDADES EN EL TRIÁNGULO

28.- Llamemos a, b y c a los lados del triángulo. Entonces a + b + c = 17. Se deben de cumplir además las desigualdades del triángulo siguientes: a + b >= c; a + c >= b y b + c >= a. Construiremos los posibles valores de a,b y c usando una tabla y cuidando que se vayan cumpliendo las desigualdades anteriores:

a	b	c	Comentario	
1	8	8	Otros valores de b y c no cumplen las desigualdades	1
2	8	7	El triángulo 2,8 y 7 es el mismo que 2,7 y 8	2
3	7	7	El valor de a indica que la diferencia entre los otros dos lados	3
3	8	6	Debe ser menor que él	4
4	7	6		5
4	8	5		6
5	6	6	Conforme aumentamos el valor de a aparecen más	7
5	7	5	Posibilidades para los otros lados	8
5	8	4	Repetido	
6	6	5	Repetido	
6	7	4	Repetido	
6	8	3	Repetido	
7	6	4	Repetido	
7	5	5	Repetido. Todos los demás serán repetidos	

Son en total 8 triángulos con los lados enteros y perímetro 17

29.-

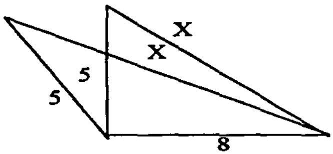


fig. 1

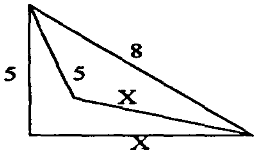


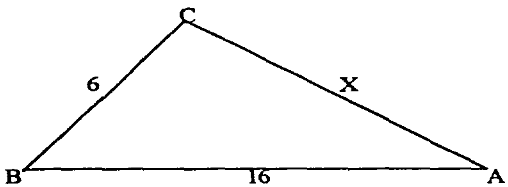
fig. 2

El triángulo que sirve como límite del obtusángulo es el rectángulo. Para que el triángulo de lados 5,8 y x sea rectángulo se debe de cumplir lo siguiente (Teorema de Pitágoras): Tenemos dos casos:

a) $x = \sqrt{5^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}$. En la fig. 1, para que el triángulo sea obtusángulo, x debe ser mayor que la raíz cuadrada de 89. Como x es entero, x es mayor que 9. El valor máximo que puede tomar x es 12, ya que para valores mayores no se forma un triángulo. Tenemos entonces 3 posibles valores para x: 10, 11 y 12

b) $8^2 = 5^2 + x^2$, despejando $x = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39}$. En la fig. 2, para que el triángulo sea obtusángulo x debe ser menor que la raíz cuadrada de 39. Como x es entero $x < 7$. Los posibles valores de x son 6,5 y 4. Por lo tanto contando los del primero y segundo caso son en total 6 triángulos.

30.-



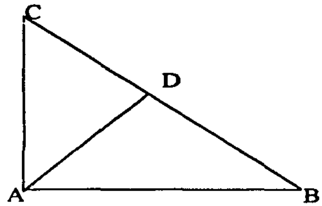
Llamemos a, b y c a los lados del triángulo. Entonces 6, x y 16 la longitud de los lados desde el más pequeño al más grande. Se deben de cumplir además las desigualdades del triángulo siguientes:

$a + b > c$; $a + c > b$ y $b + c > a$

tenemos que: $a = 6$, $b = x$ y $c = 16$, por consiguiente:

a) $6 + x > 16$, b) $6 + 16 > x$ y c) $x + 16 > 6$. De la primera desigualdad tenemos que $x>10$, de la segunda que $22 > x$ y por último que $x > -10$. Uniendo las tres desigualdades en una: $10 < x < 22$. De aquí podemos decir que x puede tomar los valores de: 11, 12, 13, 14 y 15 ya que la longitud del lado más grande del triángulo es 16

31.-



La hipotenusa (BC) = CD + BD = 6 + 8 = 14m, por hipótesis.
Recordemos la propiedad de la bisectriz de "dividir al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados", entonces:

$\frac{AB}{8} = \frac{AC}{6}$, elevamos al cuadrado $\frac{(AB)^2}{64} = \frac{(AC)^2}{36}$, como son fracciones equivalentes se pueden sumar

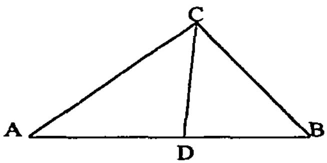
$\frac{(AB)^2 + (AC)^2}{64 + 36} = \frac{(AB)^2 + (AC)^2}{100} = \frac{(BC)^2}{100}$, ya que BC es la hipotenusa y utilizando el teorema de Pitágoras

$\frac{(BC)^2}{100} = \frac{(BC)^2}{(10)^2} = \frac{(14)^2}{(10)^2}$, como $\frac{AB}{8} = \frac{AC}{6} = \frac{14}{10}$, Para calcular AB o AC utilizamos la proporción siguiente

$\frac{AC}{6} = \frac{14}{10}$, despejamos AC = 1/10 [(6)(14)] = 8.4. Realizamos el mismo procedimiento para obtener AB

$\frac{AB}{8} = \frac{14}{10}$, despejamos AB = 1/10 [(8)(14)] = 11.2m

32.-



Sea AB + BC + AC = 42m, DB = 6m y AD = 8m; por hipótesis
Recordemos la propiedad de la bisectriz de "dividir al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados", entonces:

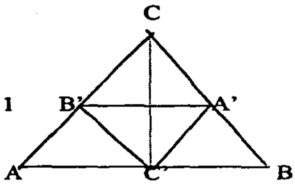
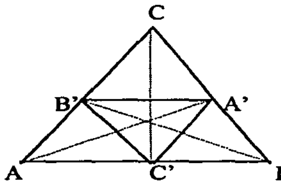
(*1*) $\frac{BC}{6} = \frac{AC}{8}$, como son fracciones equivalentes se pueden sumar $\frac{BC + AC}{14}$ (*2*)

El perímetro = AB + BC + AC = 14 + BC + AC = 42 , ya que AB = 14 = AD + DB
Entonces BC + AC = 42 – 14 = 28, pero por (*1*) tenemos lo siguiente:

$\frac{BC + AC}{14} = \frac{28}{14} = 2$. De (*1*) tenemos que $\frac{BC}{6} = 2$, despejando BC = 12, y por el mismo procedimiento

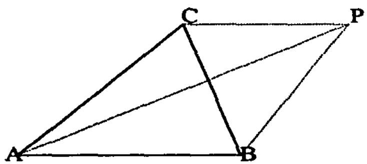
$\frac{AC}{8} = 2$, despejando AC = (2)(8) = 16

33.-

fig. 1   fig. 2

En la fig. 1, como el triángulo ABC es isósceles (AC = CB) y el < CAB = < CBA y el < ACB = 40°. A su vez A', B' y C' son los pies de las alturas. En la fig. 2, si trazamos una línea de AA' y de BB', los triángulos ABA' y ABB' son rectángulos de hipotenusa AB y C' es el punto medio de ésta, entonces A'C' = B'C' = ½ (AB), de tal manera que el triángulo A'B'C' es isósceles de vértice C'. Los triángulos B'AC' y A'BC' son isósceles de vértice C', ya que AC' = B'C' y A'C' = C'B y los ángulos B'AC' = < AB'C'= 70° y BA'C' = < A'BC'=70° ya que el < CAB = < CBA = B'AC' = A'BC' = ½ (180° - 40) = ½ (140°) = 70° y el ángulo AC'B' = 180°- 2(70°) = 180° - 140° = 40°. Por lo tanto el ángulo A'C'B'= 180°- (<AC'B' + < A'C'B) = 180° - (2(40°)) = 100°, por ser el ángulo AC'B suplementario

34.-

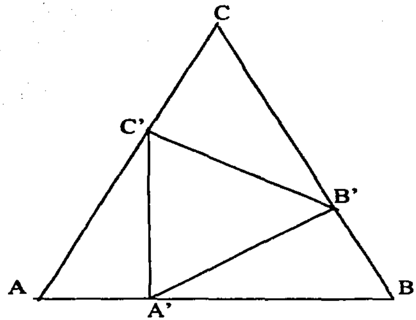


Sea P un punto exterior al triángulo ABC. Aplicando la desigualdad triangular en los triángulos PBC, PCA y PAB. Tenemos lo siguiente:

BP + CP > BC Para el triángulo PBC
CP + AP > AC Para el triángulo PCA
BP + AP > AB Para el triángulo PAB
Sumamos las tres desigualdades

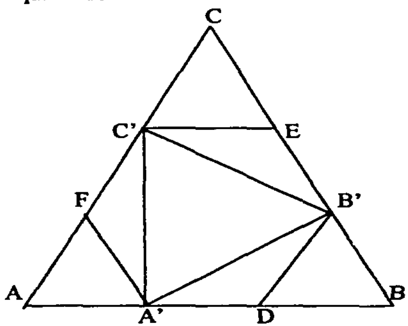
BP + CP + CP + AP + BP + AP > BC + AC + AB , acomodando tenemos que
BP + BP + CP + CP + AP + AP > BC + AC + AB,
2(BP + CP + AP) > BC + AC + AB despejando
BP + CP + AP > ½ (BC + AC + AB) = semiperímetro. Si tomamos a P como punto interior del triángulo ABC, la demostración es similar y se concluye lo mismo

35.-



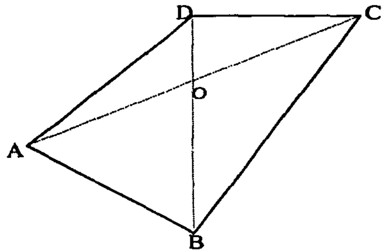
Sea a la longitud de cada lado del triángulo ABC, es decir AB = BC = CA = a.
Los triángulos AA'C, A'BB' y B'CC' son congruentes, ya que AA'=BB' = CC' = 1/3 (a) AC' = A'B = B'C = 2/3(a). Como "Dos lados de cada triángulo rectángulo son iguales entonces el tercer lado también es igual", por lo tanto A'B' = B'C' = C'A' entonces el triángulo A'B'C' es equilátero

36.-



Como D es el punto medio de A'B entonces DB = ½ (A'B) = ½ (2/3 (a)) = 1/3(a) = BB' ya que AB = a. El ángulo DBC = 60° por ser el triángulo ABC equilátero, el triángulo DBB', por el criterio *lal* es semejante al triángulo ABC, y por lo tanto es equilátero también. Entonces los ángulos BB'D = 60° y BDB' = 60°. Como A'D = DB' entonces el triángulo A'DB' es isósceles y como el < BDB' = 60° el < A'DB' = 180° - 60° = 120° por ser suplementarios, entonces el < DB'A' = 30° y el < A'B'B = < A'B'D + < DB'B = 30° + 60° = 90°, entonces A'B' es perpendicular a BC. Como E es el punto medio de B'C entonces CE = 1/3 (a) = C'C, para concluir la demostración se realiza lo mismo, pero ahora para los puntos E y F.

37.-



Por la desigualdad triangular AO + OB > AB para el triángulo AOB

OC + DO > CD para el triángulo COD. Ya no considero el triángulo AOD porque estaría repitiendo dos veces AO y DO y lo mismo sucede para el triángulo BOC.
Sumo las desigualdades AO + OB + OC + DO > AB + CD
Como AO + OC = AC y DO + OB = BD entonces AC + BD > AB + CD
Por los tanto la suma de las diagonales es mayor que la suma de los lados opuestos AB y CD

38.-

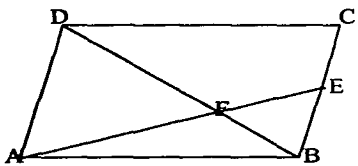


fig. 1

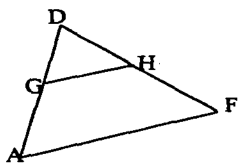


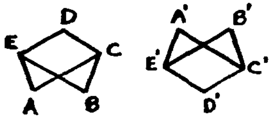
fig. 2

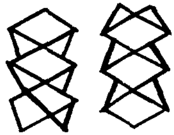
En la figura 1, el < ADF = < FBE por ser alternos internos entre dos paralelas AD y BC.

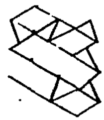
Si se coloca el triángulo BFE sobre el triángulo ADF, de modo que el < ADF coincida con el < FBE, se forma el triángulo DGH en la figura 2, el cual es igual al triángulo BFE. Como en la figura 2, DG = BE = ½ (AD) y como GH es la mediana de un triángulo, por "la mediana es paralela al lado respectivo e igual a su mitad" entonces GH = ½ (AF).

DH = FB = ½ DF entonces DF = DH + HF = FB + FB = 2FB, por lo tanto DF = 2 FB

39.-



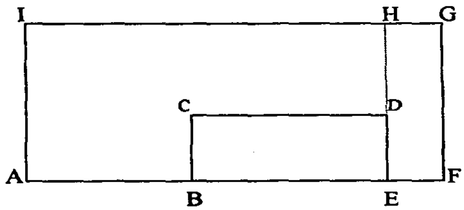




Las piezas que tenemos son como las que se muestran en la fig.1 de arriba. Los ángulos interiores del pentágono regular miden 108°. Los triángulos ABC y BAE son congruentes e isósceles y los ángulos EAB y ABC son iguales. Puesto que el ángulo EAB = 108° y el triángulo EAB es isósceles entonces el ángulo EBA = 36 °. Como el triángulo APB es isósceles entonces el ángulo APB = 108°. Esto significa que podemos colocar piezas de las que tenemos formando un arreglo vertical como el que se muestra en la fig.2 sin que haya ningún espacio entre las piezas. Utilizaremos las piezas colocadas de cabeza, esto es, la reflexión del hexágono APBCDE como se muestra en la fig.2. Es claro que también podemos formar arreglos verticales con estas figuras. Podemos ahora juntar ambos arreglos verticales y extendernos horizontalmente tanto como queramos y así cubrir cualquier extensión en el plano.

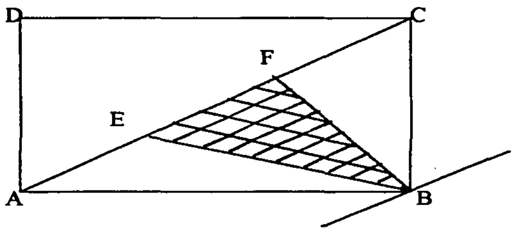
c) Áreas de figuras

40.-



Observando el dibujo el perímetro (rectángulo BCDE) = 2(BC) + 2 (BE) = 2(BC) + 2(8) = 2(BC) + 16 = 24, despejando BC = ½ (24 - 16) = 4(*1*).
Como DH = 10 entonces AI = FG = ED + DH = 4 + 10 = 14(*2*), por lo tanto el perímetro (rectángulo AFGI) = 2(AI) + 2 (AF) = 2(14) + 2 (AF) = 60,despejando AF = ½ (60-28) = 16 (*3*). El área(rectángulo BCDE) = (base)(altura) = (BE)(BC) = (8)(4) = 32 cm^2 por (*1*). Por lo que el área(rectángulo AFGI) = (base)(altura) = (AF)(AI) = (16)(14) = 224 cm^2 por (*2*) y (*3*). Por lo que el área(ABCDEFGI) = área(rectángulo AFGI) - área(rectángulo BCDE) = 224 - 32 = 192 cm^2

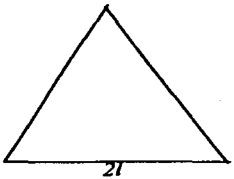
41.-

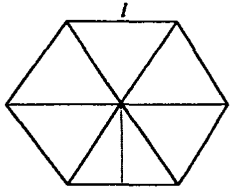


Al observar la figura anterior si trazamos, una línea recta paralela a AC que pase por el vértice B, podemos realizar el siguiente análisis:

Como los tres triángulos ABE, BEF y BFC concurren en el mismo vértice y además están entre paralelas y sus bases miden lo mismo por lo tanto los tres triángulos son congruentes.
El área(triángulo ABC) = ½ (base)(altura) = ½ (AB)(BC) = ½ (3)(2) = 3 m^2 . Por lo tanto el área(triángulo BEF) = 1/3 (área(triángulo ABC)) = 1/3 (3) = 1m^2

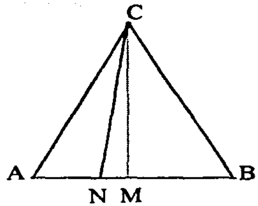
42.-





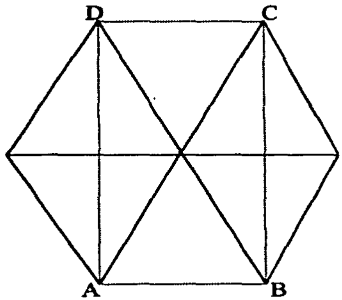
Un hexágono está formado por seis triángulos equiláteros. Para que un triángulo equilátero tenga el mismo perímetro que un hexágono, su lado debe de ser el doble del de éste. "El área de éste triángulo será cuatro veces el área de los triángulos que forman el hexágono". Vamos a probar lo anterior:
Si un hexágono mide por lado 2cm entonces su perímetro = 2(6) = 12cm
Si un triángulo equilátero mide 4cm por lado, es decir el doble de lo que mide cada lado del hexágono entonces su perímetro = 3(4) = 12 cm, ambos tienen el mismo perímetro.
Ahora calcularemos sus áreas:
Por el Teorema de Pitágoras, la (altura del triángulo equilátero) $=\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, entonces el área del triángulo equilátero = ½ (base)(altura) = ½ (4)($2\sqrt{3}$) = $4\sqrt{3}$.
Por el Teorema de Pitágoras, el (apotema del hexágono) $=\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$, entonces el área del hexágono = ½ (perímetro)(apotema) = ½ (12)($\sqrt{3}$) = $6\sqrt{3}$.
Por tanto la razón entre las áreas = $4\sqrt{3}/ 6\sqrt{3}$ = 4/6 = 2/3 simplificando.

43.-



Sea AB = BC = CA = l, y CN = 3m. Tenemos que AN = 1/3 (AB) = 1/3(l) y AM = MB = ½ (l). Observando el triángulo rectángulo BCM tenemos por el Teorema de Pitágoras que CM $= \sqrt{CB^2 - MB^2} = \sqrt{(l)^2 - [\frac{1}{2}(l)]^2} = \sqrt{3/4\,(l)^2} = \frac{1}{2}(l)\sqrt{3}$.
El (área triángulo ABC) = ½ (base)(altura) = ½(AB) (CM) = $\frac{1}{2}(l)[\frac{1}{2}(l)\sqrt{3}] = \frac{1}{4} l^2\sqrt{3}$ (*1*). Ahora vamos a calcular el valor de l, para poder encontrar exactamente el valor del área del triángulo equilátero. Si observamos la figura tenemos el triángulo rectángulo CNM, aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras:
$(CN)^2 = 3^2 = 9 = (MN)^2 + (CM)^2 = [1/6\,(l)]^2 + [\frac{1}{2}(l)\sqrt{3}]^2 = 1/36\, l^2 + 3/4\, l^2 = 28/36(l^2)$, ya que MN = AM – AN = $\frac{1}{2}l - 1/3 l = 1/6\, l$. Despejando tenemos que $l = \sqrt{11.57} = 3.4$m. sustituyendo en (*1*) tenemos que el (área triángulo ABC) = $\frac{1}{4}(11.57\sqrt{3}) = 5.01\text{m}^2$

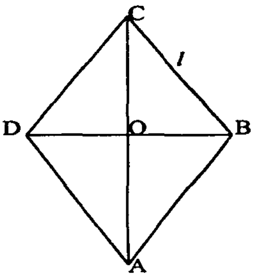
44.-



Al observar la figura tenemos que calcular primero la altura de cualquiera de los triángulos equilátero. Por el teorema de Pitágoras, la altura $= \sqrt{l^2 - (\frac{1}{2} l)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{1}{4} l^2} = \sqrt{3/4\, l^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{3})\, l$. Sea largo del rectángulo = AD = BC = 2(altura del triángulo) = $2[\frac{1}{2}(\sqrt{3})\, l] = (\sqrt{3})\, l$. El ancho del rectángulo = AB = DC = $2(\frac{1}{2} l) = l$.

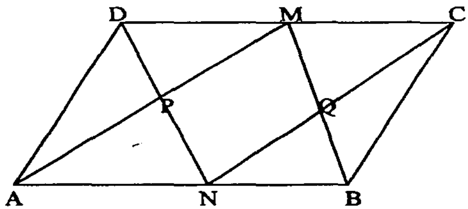
Por lo tanto el área del rectángulo ABCD = (ancho)(largo) = $(l)\,[(\sqrt{3})\, l] = \sqrt{3}\, l^2$

45.-



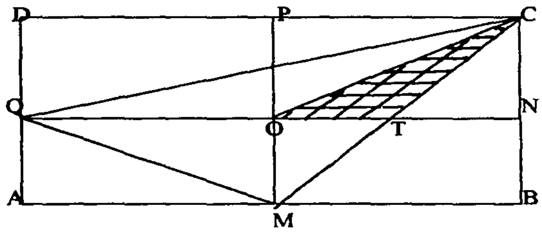
Por hipótesis tenemos que l = longitud de cada lado del rombo, OB = $\frac{1}{2}l$ y CO = $\frac{1}{2}$ (1.9). Si observamos el dibujo tenemos que el triángulo rectángulo BOC, podemos aplicar el Teorema de Pitágoras:
(hipotenusa)^2 = (OB)^2 + (CO)^2, $l^2 = [\,(\frac{1}{2})\, l\,]^2 + [\,\frac{1}{2}\,(1.9)]^2 = \frac{1}{4}\, l^2 + \frac{1}{4}\,(3.61) = \frac{1}{4}\, l^2 + 0.9025$, despejando $l^2 - \frac{1}{4}\, l^2 = 0.9025$ entonces $l = \sqrt{(0.9025)(4/3)} = 1.097$m.
Calculemos ahora la superficie del rombo = $\frac{1}{2}$ [(D)(d)] = $\frac{1}{2}$ [(1.9)(1.097)] = 1.04m^2

46.-



En la figura se tiene que AD = BC = b y AB = DC = 2b y el < DAB = 60°. Supongamos que la bisectriz del ángulo en A intersecta al lado DC en M. Entonces, como el < DAM = 30° por se bisectriz AM y el < CDA = 120° ya que " Los ángulos colaterales internos de un paralelogramo son suplementarios ", < DAB + < CDA = 180°. El < DMA = < MAN = 30° por ser alternos internos, de tal manera que el triángulo ADM es isósceles. Así AD = DM = b y M es el punto medio de DC, también el triángulo BCM es isósceles siguiendo el mismo análisis anterior.
El triángulo AND es equilátero por ser AD = AN ya que N es el punto medio de AB entonces el < ADN = 60° = < AND = < DAB. P es el punto medio de DN, luego PN = $\frac{1}{2}$ (DN) = $\frac{1}{2}$ (b). Observando el triángulo rectángulo DMP, se tiene:
$PM = \sqrt{(DM)^2 - (DP)^2} = \sqrt{b^2 - [\,\frac{1}{2}\,(b)\,]^2} = \frac{1}{2}\,(b)\sqrt{3}$. Así es que el área (rectángulo PNQM) = (largo)(ancho) = (PM)(PN) = $[\frac{1}{2}\,(b)\sqrt{3}][\,\frac{1}{2}\,(b)] = \frac{1}{4}\,(b)^2\sqrt{3}$

47.-



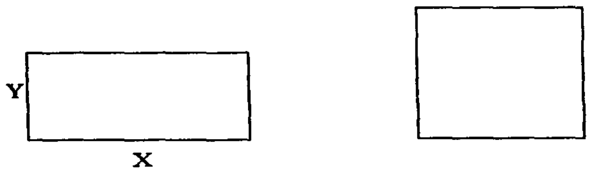
Sea T el punto donde se interseca MC con QN. Observando la figura los triángulos OTC y TNC son congruentes ya que OT = TN. Es decir, tienen la misma base y la misma altura y por lo tanto los triángulos OTC y TNC tienen la misma área, ya que " Triángulos que tienen la misma base y que están entre paralelas tienen la misma área ".

Entonces el área del triángulo ONC = 2(área del triángulo OTC) = 2(1) = 2.

El área del rectángulo ONPC = 2(área del triángulo ONC) = (2)(2) = 4.

Entonces el área del rectángulo ABCD = 4(área del rectángulo ONPC) = (4)(4) = 16

48.-



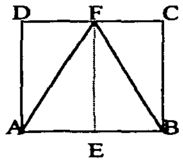
Sean X e Y las medidas de los lados del rectángulo, sea 2P su perímetro dado y A su área variable. Así: sea $X + Y = P$ (*1*) y $(X)(Y) = A$ (*2*), despejando $Y = A/X$, sustituyendo en (*1*) tenemos que $X + A/X = P$ y luego $X^2 - PX + A = 0$. Resolviendo la ecuación de segundo grado por fórmula general tenemos que:

$X = \frac{1}{2}\left(P \pm \sqrt{P^2 - 4A} \right)$, como X debe ser un número real positivo ya que se trata de una longitud, debe tenerse que $P^2 - 4A >= 0$, $-4A >= -P^2$ de donde $A <= \frac{1}{4}(P^2)$.

Así el área máxima que puede alcanzar el rectángulo es igual a $\frac{1}{4}(P^2)$.Con ello: $X = \frac{1}{2}(P) = Y$, es decir, el rectángulo de mayor área es el cuadrado

49.-

fig. 1



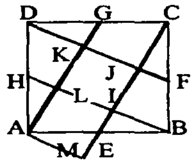


fig. 2

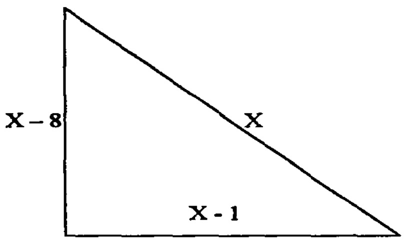
a) Si observamos la fig. 1, tenemos que al rectángulo BCGE y la diagonal lo divide en dos triángulos congruentes: el triángulo BGC y el triángulo EBG son congruentes ya que GC = EB ya que son lados paralelos de un rectángulo, EG = BC ya que son lados paralelos de un rectángulo y BG = BG ya que un segmento es igual a si mismo. Por el criterio *l l l* los triángulos BGC y EBG son congruentes. Lo mismo pasaria con el rectángulo ADGE, el cual también está dividido en dos triángulos congruentes por lo que el cuadrado se puede dividir en cuatro triángulos congruentes entonces la razón

$$\frac{\text{Área(triángulo BGC)}}{\text{Área(cuadrado ABCD)}} = \frac{1}{4}$$

b) En la fig. 2, trazamos AM paralelo a HB y prolongamos CE hasta el punto M. Los triángulos AEM y BEI son congruentes ya que AE = EB, los ángulos AEM = IEB, ya que son opuestos por el vértice. Al aumentar el triángulo AME (el cual sustituye al triángulo BEI) al cuadrilátero AEIL se forma el cuadrado ALIM. Si repetimos éste procedimiento con los otros tres triángulos CFJ, DGK y ALH, habremos transformado el cuadrado ABCD en 5 cuadrados congruentes al cuadrado ALIM. El cuadrado central IJKL más los cuatro cuadrados que formamos trasladando los triángulos:

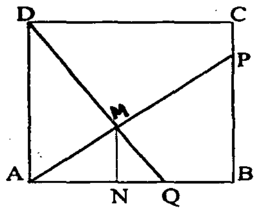
La razón del $\frac{\text{Área(cuadrado IJKL)}}{\text{Área(cuadrado ABCD)}} = \frac{1}{5}$

50.-



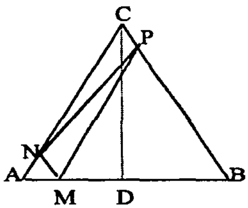
Si X es la medida de la hipotenusa, entonces los catetos miden $(X - 1)$ y $(X - 8)$. Luego, por Pitágoras se tiene que $X^2 = (X - 1)^2 + (X - 8)^2 = X^2 - 2X + 1 + X^2 - 16X + 64 = 2X^2 - 18X + 65$, igualando a cero $X^2 - 18X + 65 = 0$, factorizando $(X.- 13)(X - 5) = 0$, la solución es $X_1 = 13$ y $X_2 = 5$. Como por hipótesis X debe ser mayor que 8, entonces sólo nos sirve la raíz $X_1 = 13$. Así la medida de la hipotenusa es 13, y la medida de un cateto $= (X - 1) = 13 - 1 = 12$ y el otro $= X - 8 = 5$. Por lo tanto el área $= \frac{1}{2}(12)(5) = 30$

51.-



Sean BP = 3PC y AQ = 2QB; En la figura como k = AQ+QB = 2QB+QB = 3QB despejando QB = $\frac{1}{3}$(k) y como AQ = 2QB entonces AQ = 2($\frac{1}{3}$(k)) = $\frac{2}{3}$ k.
Observando la figura las rectas se intersectan en los 2/3 de k por lo que la altura del triángulo AMQ = MN = $\frac{1}{3}$ (k).
Entonces el área del triángulo AMQ = ½ (base)(altura) = ½ (AQ)(MN) = ½ ($\frac{2}{3}$ k)($\frac{1}{3}$ k) = $2k^2/18 = k^2/9$

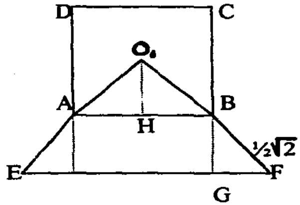
52.-



Como AC = 7AN entonces AC/7 = AN y CN= $\frac{6}{7}$(AC). Observando la figura BC = 7CP, BC/7 = CP, ya que MP tiene que ser paralelo a AC. Como necesitamos calcular el área del triángulo MNP, podemos calcular el área del paralelogramo CNMP y dividirlo entre dos: Área(paralelogramoCNMP) = (CP)(CN) = $\frac{1}{7}$ (BC)$\frac{6}{7}$(AC), pero como BC = AC por ser ABC un triángulo equilátero entonces el área del triángulo MNP es: área(triángulo MNP) = ½ [$\frac{1}{7}$ (AC)$\frac{6}{7}$(AC)], simplificando: área(triángulo MNP) = ½ ($\frac{6}{49}$$(AC)^2$] = ½ [$\frac{6}{98}$$(AC)^2$] = $\frac{3}{49}$$(AC)^2$. Ahora vamos a calcular el área del triángulo ABC = ½ [(base)(altura)]. La base = AB = AC , la altura = CD por el teorema de Pitágoras $(AC)^2 = (CD)^2 + (AD)^2$, como AD = ½ (AC) tenemos al sustituir $(AC)^2 = (CD)^2 + (\frac{1}{2}(AC))^2 = (CD)^2 + \frac{1}{4}(AC)^2$, despejando CD se obtiene CD = $\sqrt{(AC)^2 - \frac{1}{4}(AC)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\,3(AC)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ AC. Como base = AC y la altura = $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ AC, entonces
Área(triánguloABC) = (AC $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ AC)/2 = $\frac{1}{4}(AC)^2\sqrt{3}$
Como nos están pidiendo calcular la fracción:

$$\frac{\text{área(triángulo MNP)}}{\text{área(triángulo ABC)}} = \frac{3(AC)^2/49}{\frac{1}{4}(AC)^2\sqrt{3}} = \frac{12(AC)^2}{49\sqrt{3}\,(AC)^2} = \frac{12}{49\sqrt{3}}$$

53.-



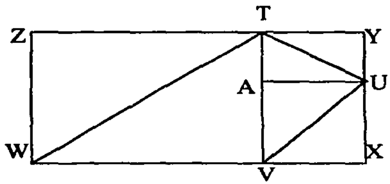
Revisando la figura, el área total es igual al área del cuadrado ABCD más el área del trapecio isósceles ABFE.

Área(trapecio ABFE) = ½ (base mayor + base menor) altura

Observando el triángulo rectángulo EO'F, utilizando el teorema de pitágoras, para encontrar la base mayor y observando el triángulo rectángulo O'HB entonces $O'B = \sqrt{(HB)^2 + (HO')^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2/4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Entonces la base mayor $= \sqrt{(O'F)^2 + (O'E)^2} = \sqrt{(O'B + BF)^2 + (O'A+AE)^2} = \sqrt{[2(\frac{1}{2}\ 2)]^2 + [2(\frac{1}{2}\ 2)]^2} = \sqrt{2 + 2} = \sqrt{4} = 2$. Para calcular la altura del trapecio, nos fijamos en el triángulo rectángulo BGF entonces altura $= \sqrt{(BF)^2 - (GF)^2} = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{2/4 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, ya que $GF = \frac{1}{2}$ (base mayor – AB) $= \frac{1}{2}(2 - 1) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto el Área(trapecio ABFE) $= \frac{1}{2}[(2 + 1)\frac{1}{2}] = \frac{1}{2}[(3)\frac{1}{2}] = \frac{3}{4}$. Entonces el área total = área(cuadrado ABCD) + (área trapecio ABFE) $= 1^2 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$

54.-

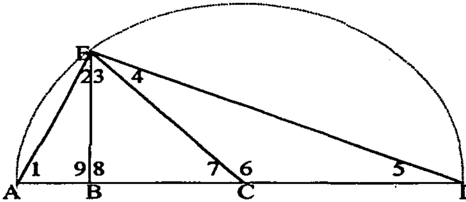


Trazamos TV y UA tal como se muestra en la figura. En el rectángulo TAUY, TU es su diagonal, por lo que divide el área en dos partes iguales.

Similarmente en los cuadriláteros AVXU y ZWVT, la diagonales VU y WT, los dividen en partes iguales. Por lo tanto, el área (rectángulo WXYZ) = área (rectángulo ZWVT) + área (rectángulo AVXU) + área (rectángulo TAUY) = 2 (cuadrilátero TUVW) = 2(12) = 24

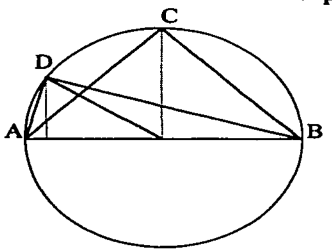
c) La circunferencia

55.-



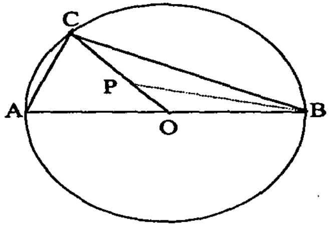
El < 9 = < 8 = 90°, ya que la altura del triángulo ACE es perpendicular a la base AC. El < 2 = 180° - (< 1 + < 9) = 180° - (70° + 90°) = 180° - 160° = 20°. Si observamos la figura el < 2 + < 3 + < 4 = 90 ° (*1*), ya que el ángulo total abarca el diámetro de la semicircunferencia, entonces como el <2 = 20° tenemos que:<3+ <4 = 70°. Como C es el centro del semicírculo entonces CD = AC = EC por ser radios del semicírculo, el triángulo CDE es isósceles entonces el < 4 = < 5. De la misma manera AC = CE por ser radios, el triángulo ACE es isósceles por lo tanto el < 1 = < 2 + < 3 = 70°, como el < 2 = 20° entonces el < 3 = 50°, y por (*1*) concluimos que el < 4 = 20°.como el < 4 = < 5 entonces el < 5 = 20°. El < 6 = 180° - (< 4 + < 5) = 180° - (20° + 20°) = 180° - 40° = 140°. Por último el < 7 = 180° - < 6 = 180° - 140° = 40° por ser suplementarios.

56.-



Sea O el centro, r el radio de la circunferencia y DE la altura del triángulo ABD, como el área del círculo es ¶ entonces r = 1. Si tomamos la base del triángulo como AB entonces AB = 2 = diámetro del círculo = 2r = 2(1). La mayor altura que puede tener un triángulo cuyos vértices son A y B es la correspondiente al triángulo ABC cuya altura es OC = 1= radio, por lo que el área(triángulo ABC) = ½ (base)(altura) = ½ (2)(1) = 1. ¿ Cómo podemos argumentar que el triángulo ABC es el que tiene mayor altura ?. Tomemos otro triángulo con vértices ABD. En el dibujo se ve claramente que OC es mayor que DE pero éste no es un argumento válido (a veces nuestros sentidos nos engañan). OC y OD son iguales, por ser radios y DE < OD porque OD es la hipotenusa del triángulo rectángulo DEO en el que DE es un cateto, por lo tanto DE < OC entonces el área (triángulo ABD) < área(triángulo ABC) = 1, es el máximo valor que puede tener el área del triángulo.

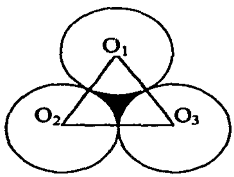
57.-



Al ser CO la mediana del ángulo recto, los triángulos AOC, en donde AO = CO = radios y el triángulo BOC con CO = BO = radios entonces ambos triángulos son isósceles.

En el triángulo BPC, el < BPO = < BCP + < CBP (*1*), ya que "Un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes". Ahora el < BCP = 89° 60' - < ACO = 89°60' – 58°30' = 31°30'. Como el triángulo BOC es isósceles el < BCP = < CBO entonces el < CBP = ½ (CBO) = ½ (31°30') = 15°45'. Por lo tanto por (*1*) el < BPO = 31°30' + 15°45' = 47°15'

58.-



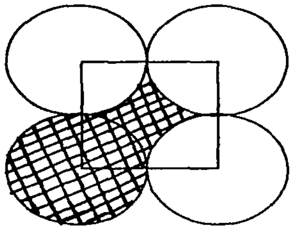
En la figura si unimos los centros de las circunferencias (O_1,O_2 y O_3), obtenemos un triángulo equilátero de 60° cada ángulo y cuya altura sería:

Utilizando el Teorema de Pitágoras, tenemos que:

La altura(triángulo O_1,O_2 y O_3 $)^2$ = $(O_1O_3)^2$ - $[1/2(O_2\,O_3)]^2 = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$, la altura $= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ya que el radio de cada circunferencia es ½ .

El área sombreada = área del triángulo - tres sectores del círculo de 60° cada uno = ½ (base)(altura) – un semicírculo = $\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{2}\sqrt{3}) - \frac{1}{2}[¶(\frac{1}{2})^2] = \frac{1}{4}\sqrt{3} - 1/8\,(¶)$

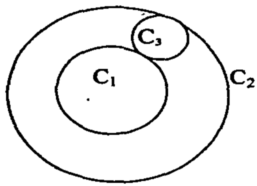
59.-



Al observar la figura cada círculo tiene de radio 1cm ya que cada lado del cuadrado mide 2 cm.

El área de la figura sombreada = área del cuadrado – tres sectores cada uno de 90° + las ¾ partes del área de un círculo = $(l)^2 - 3[\,¼¶(r)^2\,] + ¾\,¶(r)^2 = (2)^2 - 3[\,¼¶(1)^2\,] + ¾\,¶(1)^2 = 4 - ¾¶ + ¾¶ = 4\ cm^2$

60.-

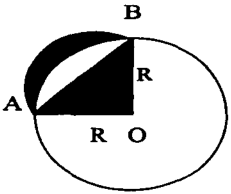


Sean r_1 y r_3 los radios de C_1 y C_3 respectivamente. Puesto que el radio de $C_2 = 1$, tenemos que $r_1 + 2\,r_3 = 1 = r_2$, despejando $r_1 = 1 - 2r_3$ (*1*).

Para que el área de C_1 sea el doble del área de C_3 tenemos que: $(¶)(r_1)^2 = 2(¶)(r_3)^2$, sustituyendo (*1*), resulta $¶(1 - 2r_3)^2 = ¶[1 - 4r_3 + 4(r_3)^2] = 2(¶)(r_3)^2$, despejando tenemos que: $1 - 4r_3 + 4(r_3)^2 = 2(r_3)^2$.

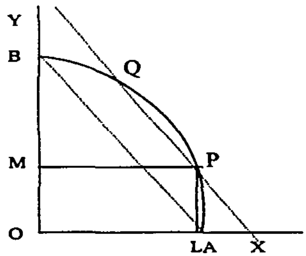
Igualando a cero, simplificando términos semejantes y acomodando, obtenemos una ecuación de segundo grado: $2(r_3)^2 - 4r_3 + 1 = 0$, multiplicando por ½ , $(r_3)^2 - 2r_3 + ½ = 0$, resolviendo mediante fórmula general: en donde $a = 1$, $b = -2$ y $c = ½$
$r_3 = ½\,(2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(½)}) = 1 - ½\,(\sqrt{2})$, debemos tomar el signo menos de la raíz ya que r_3 es menor que 1. Entonces sustituyendo en (*1*) tenemos que $r_1 = 1 - 2r_3 = 1 - 2 + 2\,½\,(2) = -1 + 2$

61.-



Para comprobarlo basta con calcular ambas áreas y compararlas. Observando el dibujo, tenemos que: el área(triángulo ABO) = ½ (base)(altura) = ½ (R)(R) = ½ (R)^2. En la figura tenemos que: el semicírculo AB tiene de radio la mitad de la hipotenusa del triángulo rectángulo AOB, por el Teorema de Pitágoras: radio del semicírculo = ½ (AB) = ½$\sqrt{[(AO)^2 + (BO)^2]}$ = ½$\sqrt{[R^2 + R^2]}$= ½$\sqrt{[2 R^2]}$ = ½$\sqrt{2}$ R; el área(semicírculo AB) = ½ (¶)(r)^2 = ½ (¶)(½$\sqrt{2}$ R)^2 = ¼ (¶)(R^2); el área(blanca sector AB) = área(sector AOB) - área(triángulo ABO)= ¼ (¶)(R^2)-½(R)^2; entonces tenemos que: el área(figura lunar sombreada AB) = área(semicírculo AB) – área(blanca sector AB) = ¼ (¶)(R^2) – [¼ (¶)(R^2) - ½ (R)^2] = ½ (R)^2. Con lo que queda comprobado que el área del triángulo ABO = área(figura lunar sombreada AB)

62.-



Sea PM la recta que trazamos por P paralela a la recta determinada por los puntos O y A. Sea PL la recta que trazamos por P perpendicular a la recta determinada por los puntos O y A. Si observamos la figura, vemos lo siguiente:

a) El triángulo OAB es isósceles ya que OA = OB = 1 = radio
b) El triángulo OXY es isósceles ya que el <OXY = 45° = < OYX y OX = OY
d) El triángulo LXP es isósceles ya que el <OXY = 45° = < OYX y LX = LP
e) El triángulo MPY es isósceles ya que el <MPY = 45° = < MYP y MP = MY

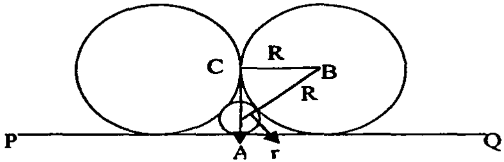
De lo anterior podemos concluir por el Teorema de Pitágoras que:

(PY)^2 = (MP)^2 +(MY)^2 = 2(MP)^2, ya que MP = MY porque el triángulo MPY es isósceles

(PX)^2 = (LX)^2 +(LP)^2 = 2(LP)^2, ya que LP = LX porque el triángulo LXP es isósceles.

Entonces (PX)^2 +(PY)^2 = 2(MP)^2 + 2(LP)^2 = 2((MP)^2 + (LP)^2) = 2(ML)^2

63.-



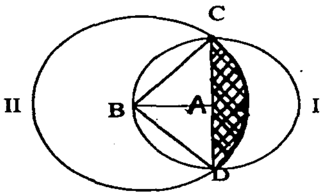
Sea R = radio de la circunferencia grande y r = radio de la circunferencia pequeña. Entonces tenemos que: Observando el triángulo rectángulo que se formó al unir los centros y el punto de tangencia de las circunferencias grandes. Sean A,B y C los vértices del triángulo: por el teorema de pitágoras la $(\text{hipotenusa})^2 = (AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$(*1*). Sea BC = R; AC = R – r y AB = R + r entonces por (*1*), $(R+r)^2 = (R)^2 + (R - r)^2$. Elevando al cuadrado cada uno de los binomios tenemos que:

$R^2 + 2(Rr) + r^2 = R^2 + R^2 - 2(Rr) + r^2$, simplificando

$$R^2 = 4(Rr)$$
$$R^2 / R = 4\,r$$
$$R = 4\,r$$

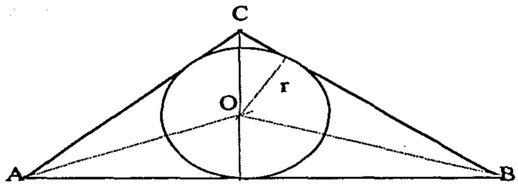
Por lo tanto el radio de la circunferencia grande es cuatro veces mayor que el radio de la circunferencia pequeña y la razón es: R/r = 1/4

64.-



Al observar la figura el área(figura sombreada) = área(sector circular BCD) – área(triángulo BDC) (*1*). En el triángulo BDC, AB (radio de la circunferencia I = 2) es perpendicular a CD (diámetro de la circunferencia I = 4) y el área(triángulo BDC) = ½ (base)(altura) = ½ (CD)(AB) = ½(4)(2) = 4. El radio de la circunferencia II lo obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ABC, entonces radio = BC $=\sqrt{(AC)^2 + (AB)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. El < DBC = 90° ya que DC es diámetro de la circunferencia I, y por lo tanto éste sector circular es la cuarta parte del círculo II, es decir, el área(sector circular BCD) = ¼ [¶ $(2\sqrt{2})^2$] = 2(¶). Luego, sustituyendo valores en (*1*) área(figura sombreada) = 2(¶) - 4

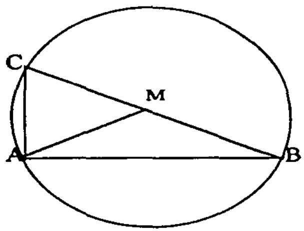
65.-



Sea el triángulo ABC, en él que trazamos las bisectrices, ya que el punto de intersección de las bisectrices, es el incentro, o centro de la circunferencia inscrita. Se forman tres triángulos: AOB, AOC y BOC, cuyas bases son, respectivamente los lados del triángulo, y en los tres la altura es r, radio de la circunferencia inscrita. El área(triángulo ABC) = área(triángulo AOB) + área(triángulo AOC) + área(triángulo BOC) = ½ (AB)(r) + ½ (AC)(r) + ½ (BC)(r) = ½ (r) [AB + BC + AC] = ½ (r) [p], donde p es el perímetro. Entonces área(triángulo ABC) = 49 = ½ (3.5) (p), despejando p = 2(49 / 3.5) = 28.

Por lo tanto para calcular el tercer lado del triángulo tenemos que p = 28 = 12.8 + 6.9 + tercer lado, despejando el tercer lado = 28 – 19.7 = 8.3 m

66.-



Hay que recordar y observando la figura, que " Todo triángulo rectángulo puede inscribirse siempre en un círculo cuyo diámetro (CB) es la hipotenusa ".

Al fijarse en la figura y trazar la mediana, la cual coincide con el radio de la circunferencia, por lo que como el diámetro = 10 = CB, por lo tanto AM = mediana = radio = 5

67.-

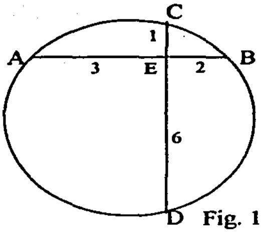


Fig. 1

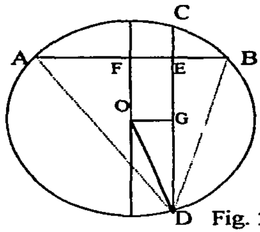
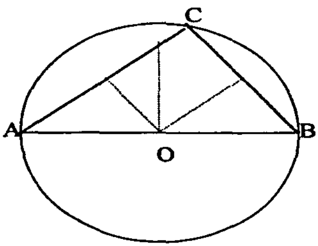


Fig. 2

Si unimos en la fig.2, A con D y B con D se forma un triángulo, se trazan sus mediatrices y el punto donde se intersectan es el circuncentro, el cual es el centro de la circunferencia. Sea O el centro de la circunferencia, entonces si trazamos el diámetro el cual corta a la cuerda AB en el punto F, el cual es el punto medio de AB, como AB = AF + FE + EB, sustituyendo valores 5 = 2.5 + FE + 2, despejando FE = 5 – 4.5 = ½ Ahora localizamos el punto G a la mitad de CD, como CD = CE + ED = 1 + 6 = 7, entonces GD = ½ (7). Si unimos O con D y O con G, al observar el triángulo rectángulo DGO y por el Teorema de Pitágoras: OD = el radio de la circunferencia $=\sqrt{OG^2 + GD^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (7/2)^2} = \sqrt{50/4} = \frac{1}{2}$ $(5\sqrt{2})$.

Por último tenemos que el perímetro(circunferencia) = (¶)(2r) = (¶) 2[½ $(5\sqrt{2})$] = 5(¶)$\sqrt{2}$

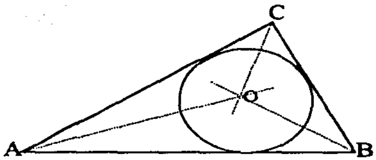
68.-



Como AB = 4m, AC = 3.2m y BC = 2.4 m. El triángulo ABC es escaléno, se trazan las mediatríces para cada uno de los lados y se encuentra el punto de intersección (circuncentro).

Al trazar la circunferencia circunscrita, si observamos la figura:
AB = diámetro = 4m, entonces el radio de la circunferencia es AB = ½ (4) = 2 m, por lo tanto r = 2m

69.-



Se trazan las bisectrices de cada vértice para obtener el incentro que es el punto donde se intersectan y es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. AB = 4m , AC = 3.2 m, BC = 2.4m , r = ?. Si observamos la figura el triángulo ABC queda dividido en tres triángulo: el AOB, el triángulo BOC y el AOC. Tienen los tres una altura igual al radio de la circunferencia inscrita y de base uno de los lados del triángulo ABC. Calcularemos ahora el área de cada triángulo:

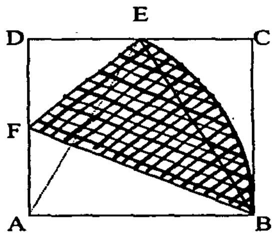
Área(triángulo AOC) = ½ (AC)(r) = ½ (3.2)(r),
Área(triángulo BOC) = ½(BC)(r) = ½ (2.4)(r),
Área(triángulo AOB) = ½ (AB)(r) = ½ (4)(r); r es la altura de cada triángulo.

Para calcular el área del triángulo ABC, sumamos el área de los tres triángulos anteriores Área(triángulo ABC) = Área(triángulo AOC) + Área(triángulo BOC) + Área(triángulo AOB) = ½ 3.2 r + ½ 2.4 r + ½ 4 r = ½ 9.6 r = 4.8 r. Entonces el Área(triángulo ABC) = 4.8r despejando r, tenemos lo siguiente: r = (1/ 4.8) Área(triángulo ABC).

Para calcular el área de un triángulo, cuándo sólo tenemos la medida de sus lados utilizamos la fórmula de Herón : Área $=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ donde p es el semiperímetro y AB = a, BC = b y AC = c. p = ½ (3.2 + 2.4 + 4) = ½ (9.6) = 4.8.
Utilizando la fórmula de Herón para calcular el Área:

Área(triángulo ABC) = $\sqrt{4.8\,(4.8-4)\,(4.8-2.4)\,(4.8-3.2)} = \sqrt{14.7456} = 3.84\ m^2$
Como r = (1/ 4.8). el área(triángulo ABC) = (1/ 4.8) (3.84) = 0.8m

70.-



Observando la figura, el área sombreada = área(triángulo BEF) + área(sector circular BEC) (*1*).

El área(triángulo BEF) = área(cuadrado ABCD) - área(triángulo AFB) - área(triángulo DEF) - área(triángulo BCE) = $4^2 - \frac{1}{2}[(4)(2) + (2)(2) + (4)(2)] = 16 - 4 - 2 - 4 = 6$.

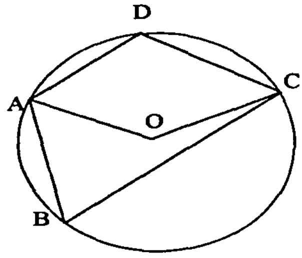
Observando el triángulo AFB donde FB = hipotenusa $= \sqrt{(AF)^2 + (AB)^2} = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, como el triángulo BEF es isósceles entonces FB = BE = $2\sqrt{5}$.

Si unimos A con E se forma otro triángulo ABE isósceles en donde AE = BE = $2\sqrt{5}$, el < BAE = < ABE = 65°, como 360°/65 = 5.53° = 6°; por lo tanto el área(sector circular ABE) = 1/6 (¶) r^2 = 1/6 (¶)($2\sqrt{5})^2$ = 1/6 (¶)(4)(5) = (20)1/6 (¶)= (10) 1/3 (¶), ya que r = BE = $2\sqrt{5}$.

El área(triángulo ABE) = ½ (base)(altura) = ½ (4)(4) = 8; la altura se obtiene mediante el teorema de Pitágoras, La altura(triángulo ABE) $= \sqrt{(BE)^2 - (\frac{1}{2}(AB))^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2)^2} = \sqrt{20 - 4} = \sqrt{16} = 4$. Por otra parte obtenemos:

El área(sector circular BE) = área(sector circular ABE) – área(triángulo ABE) = 10/3(¶)-8. Por (*1*) el área(figura sombreada) = 6 + 10/3(¶) – 8 = 10/3(¶) – 2

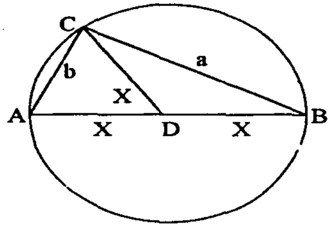
71.-



Observando la figura, el ángulo central AOC = 2(< ABC) y el < COA = 2 (< ADC) ya que " Un ángulo inscrito es la mitad que el ángulo central correspondiente al arco determinado por los lados del ángulo inscrito".

El < AOC + < COA = 360° entonces el < ABC + < ADC = 180° y por lo tanto los ángulos opuestos de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia son suplementarios

72.-

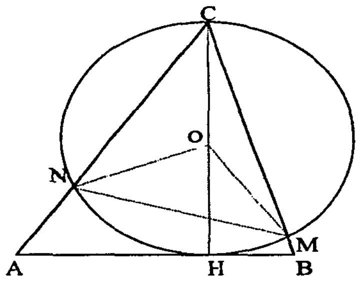


Trazamos una circunferencia y el triángulo ABC con diámetro AB y centro D. Una forma de construir los triángulos es que tengan la misma base x y compartan un mismo vértice, como en la figura, los triángulos ACD y BCD son isósceles por lo que tienen dos ángulos iguales < CAD = < ACD. En el triángulo ABC tenemos que:

Como AB = diámetro y los dos vértices del triángulo se encuentran en el diámetro entonces el < ACB = 90°. Utilizando el Teorema de Pitágoras tenemos que:

Hipotenusa^2 = $(2x)^2 = a^2 + b^2$, despejando $x = \sqrt{¼ (a^2 + b^2)} = ½\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

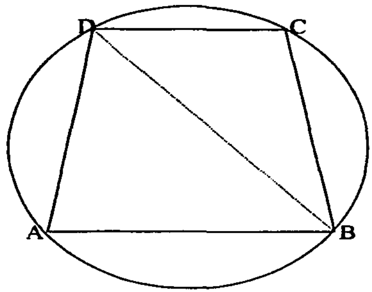
73.-



Al observar el triángulo OMN y utilizando la desigualdad triangular MN < OM + ON (*1*) .

Como OM y ON son radios de la circunferencia, su suma es igual al diámetro (CH) de la circunferencia. CH = OM + ON por lo tanto por (*1*) MN < CH

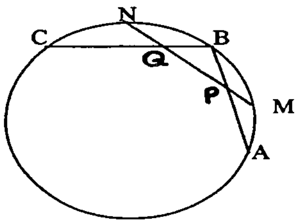
74.-



El trapecio ABCD con AB paralelo a CD está inscrito en la circunferencia de arriba.
Uniendo B con D, los ángulos ABD y el < BDC son iguales ya que son ángulos alternos internos entre paralelas.
Como son iguales los ángulos sus cuerdas correspondientes son iguales también.

La cuerda BC = cuerda AD; por lo tanto se trata de un trapecio isósceles ya que BC = AD

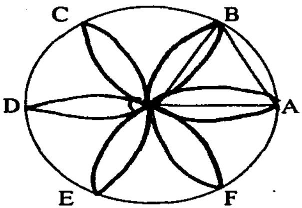
75.-



Si observamos la figura, tenemos que demostrar que el triángulo BPQ es isósceles.
El < BPQ = ½ (arco AM + arco BN) , ya que " Un ángulo formado por dos cuerdas que se intersecan en el interior de un círculo tiene una medida igual a la semisuma de los arcos interceptados ". Por el mismo teorema el < BQP = ½ (arco BM + arco NC), como el arco AM = arco BM y el arco BN = arco NC entonces < BPQ = ½ (arco AM + arco BN) = ½ (arco BM + arco NC) = < BQP.

De esto podemos concluir que los ángulos son iguales y por lo tanto el triángulo BPQ es isósceles y los lados BP = BQ

76.-

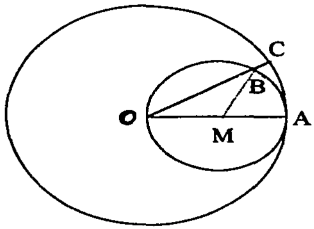


Observando la figura, siendo O el centro de la circunferencia, se tiene el triángulo AOB equilátero con lado igual a r. El ángulo OBA mide 60º, por lo que la longitud del arco: OA = 1/6[(¶)(2r)] = 1/3[(¶)(r)].

El perímetro de la rosa es doce veces dicho valor.

Por lo tanto, el perímetro de la rosa = 12 [1/3(¶)(r)] = 4 [(¶)(r)], o sea dos veces la longitud de la circunferencia

77.-

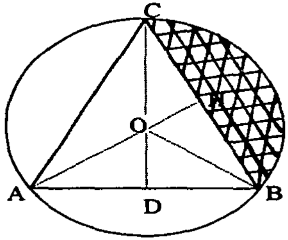


El arco AB = r < AMB y el < AMB = 2 < AOB = 2 < AOC, ya que " Todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo central que subtiende el mismo arco ".

En la segunda circunferencia al arco AC = 2r < AOC = r (2 < AOC) = r (< AMB) = arco AB.

Por lo tanto el arco AB = arco AC

78.-



Por ser ABC triángulo equilátero entonces AB = BC = AC = 8m. Sea O el circuncentro, que es el punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo y es el centro de la circunferencia circunscrita. Tenemos que encontrar el área de la figura sombreada, por lo que la altura del triángulo ABC es igual a CD.

Por el teorema de Pitágoras observamos el triángulo rectángulo BCD entonces:

$8^2 = (CD)^2 + (AB/2)^2; 64 = (CD)^2 + 4^2$, despejando CD obtenemos lo siguiente :

$CD = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = \sqrt{(4)(4)(3)} = \sqrt{4\ 4\ 3} = (2)(2)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ m

Como se trata de un triángulo equilátero el circuncentro es el mismo que el baricentro. Por el teorema " El Baricentro se encuentra a 1/3 de la base y a 2/3 de cada vértice".

Entonces $OB = \frac{2CD}{3} = \frac{2(4\sqrt{3})}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ m, ya que $CD = 4\sqrt{3}$ m

Observando la figura el triángulo BOC, necesito calcular la altura del triángulo porque ya conozco su base.

Como $OB = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ y el triángulo BOH, es rectángulo por el teorema de Pitágoras

$(OB)^2 = (OH)^2 + (BC/2)^2 = (OH)^2 + 4^2 = (OH)^2 + 16$ despejando OH tenemos

$OH^2 = (OB)^2 - 16 = (1/3\,(8\sqrt{3}))^2 - 16 = \frac{64.3}{9} - 16 = \frac{64}{3} - 16 = \frac{64 - 48}{3} = \frac{16}{3}$

$OH = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ m

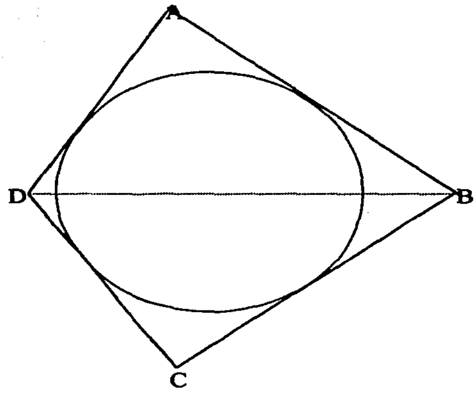
El área(triángulo BOC) $= \frac{\text{base x altura}}{2} = \frac{8\sqrt{3}\,\frac{4}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{32}{2\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$ m^2

Como el sector BOC es la tercera parte de una circunferencia, entonces

El área(Sector BOC) $= \frac{\pi(\text{radio})^2}{3} = \frac{\pi(OB)^2}{3} = \frac{\pi\left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2}{3} = \frac{\pi\,\frac{(64)(3)}{9}}{3} = \frac{\pi\,\frac{64}{3}}{3} = \frac{64\pi}{9}$

área(figura sombreada) = área(Sector BOC) - área(triángulo BOC) $= \frac{64\pi}{9} - \frac{16}{\sqrt{3}}$

79.-



La fórmula para calcular el área de una circunferencia es:

Área =¶r^2 = semiperímetro r (*1*) ; ya que el perímetro de una circunferencia =¶(2r) , despejando:

Pi(r) = ½ perímetro = semiperímetro
Despejando de la fórmula (*1*), el semiperímetro = $\dfrac{\text{Área de la circunferencia}}{r} = \dfrac{22m^2}{2m}$ = 11 m

En la figura, Al trazar la diagonal BD se forman dos triángulos rectángulos congruentes: el triángulo ABD y el triángulo BCD
Podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones, para encontrar el valor de los lados AD y AB:

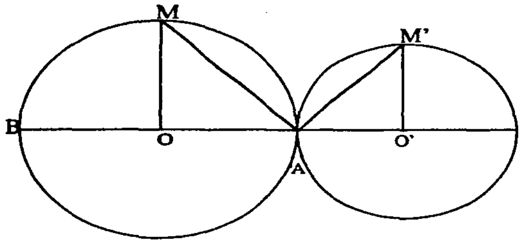
(1)	**AD + AB = 11**	**ya que el semiperímetro = 11 m**
(2)	**(AD)(AB) = 22**	**es el doble del área del triángulo ABD**

despejando de (1) AB tenemos $\quad AB = 11 - AD$
sustituyendo en (2) $\quad (AD)(11 - AD) = 22$
quitando paréntesis y acomodando $\quad (AD)^2 - 11AD + 22 = 0$
aplicando fórmula general :

$AD = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ **sea b = -11, a = 1 y c = 22** $AD = \dfrac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(1)(22)}}{2(1)}$

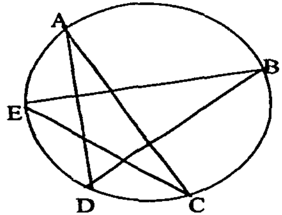
$AD = \frac{1}{2}(11 \pm \sqrt{33})$; **por lo tanto** $AD = \frac{1}{2}(11 + \sqrt{33})$, **y** $AB = 11 - \frac{1}{2}(11 + \sqrt{33}) = 11 - \frac{1}{2}(11 - \sqrt{33}) = \frac{1}{2}(22 - 11 - \sqrt{33}) = \frac{1}{2}(11 - \sqrt{33})$

80.-



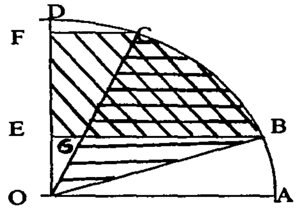
Para demostrar que OM es paralela a O'M', basta con demostrar que el < BOM = < M'O'B. Si observamos la figura el triángulo AMO es isósceles ya que MO = AO, por ser radios y por lo tanto el < MAO = < AMO. De igual manera el triángulo AM'O' es isósceles ya que M'O' = AO', por ser radios y por lo tanto el < M'AO' = < AM'O'. Como el < BOM es exterior entonces el < BOM = < MAO + < AMO = 2(< MAO) ya que el < MAO = < AMO, despejando < MAO = ½ (<BOM).
El < M'O'A = 180° - 2 (< M'AO') ya que el < M'AO' = < AM'O'. Observando el triángulo AM'O' tenemos que el < M'AO' + < AM'O' + < M'O'A = 180°, 2(<M'AO') + < M'O'A = 180°, despejando < M'AO' = ½ [180° - < M'O'A]. Como los ángulos MAO y M'AO' son complementarios por ser las cuerdas AM y AM' perpendiculares entonces 90° = < MAO + < M'AO' = ½ (< BOM) + ½ (180° - < M'O'A) = 90° + ½ [< BOM - < M'O'A], 0 = < BOM - < M'O'A, por lo tanto concluimos que < BOM = < M'O'A y como estos ángulos son correspondientes, las rectas OM y O'M' son paralelas

81.-



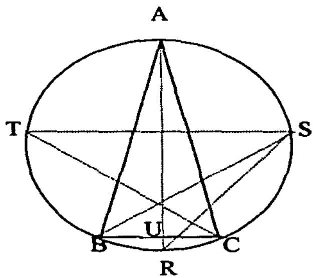
Para poder resolver éste problema podemos utilizar el teorema que dice: " La medida del ángulo inscrito es la mitad del arco que abre ". Por lo que < inscrito(A) = ½ arco(CD), < inscrito (B) = ½ arco(DE), < inscrito(C) = ½ arco(EA), < inscrito(D) = ½ arco(AB) y el < inscrito (E) = ½ arco(BC); si sumamos todos los ángulos inscritos tenemos que:
< inscrito(A) + < inscrito (B) + < inscrito(C) + < inscrito(D) + < inscrito (E) = ½ [arco(CD) + arco(DE) + arco(EA) + arco(AB) + arco(BC)] = ½ (2¶) = ¶; ya que la suma de todos los arcos es la circunferencia completa

82.-



Al observar las figuras que se quiere demostrar su equivalencia, podemos notar que ambas contienen a la figura BCG, entonces lo que debemos de demostrar es que el triángulo BGO es equivalente al trapecio CFEG, si aumentamos el triángulo EGO al triángulo BGO y al trapecio CFEG, por lo tanto tenemos que demostrar que los triángulos BEO y COF son equivalentes. El lado OB = OC por ser radios del círculo. Como OA es perpendicular a OD y además los arcos AB y CD son iguales por hipótesis entonces FC = EO. EB = FO por ser el cateto OE = cateto FC y la hipotenusa OC = hipotenusa OB. Por el criterio de congruencia *lll*, los dos triángulos BEO y COF son congruentes y concluyendo finalmente el triángulo BOG y el trapecio CFEG son equivalentes y como conclusión final la figura EBCF es equivalente al sector OBC

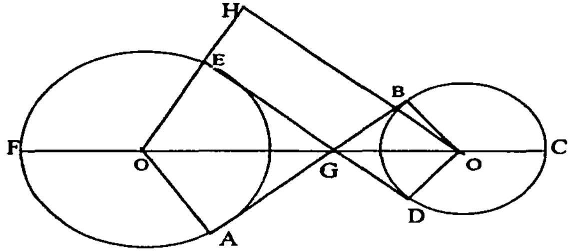
83.-



Como AB = AC y R, S y T las intersecciones de las alturas de los vértices A, B y C y U la intersección de la altura del vértice A con la base BC. Entonces tenemos lo siguiente al observar la figura:

$< RST = < RSB + < BST$ (*1*), pero el $< RSB = < RAB$ ya que abren el mismo arco, además el $< RAB = 90° - < ABC$, por ser el triángulo ABU rectángulo. Análogamente, el $< BST = < BCT = 90° - < ABC$. Por (*1*) $< RST = 90° - < ABC + 90° - < ABC = 180° - 2(< ABC) = < BAC$

84.-



En la figura las tangentes son AB y DE. O'A y OB son perpendiculares a AB. O'E y OD son perpendiculares a DE. Al completar el rectángulo EDOH se observa que EH = DO = r. Por lo tanto O'H = O'E + EH = 4r + r = 5r, por hipótesis el radio del círculo grande es cuatro veces más grande que el chico.

Al observar el triángulo rectángulo O'HO, el cateto O'H = 5r y la hipotenusa (O'O) = 10r. Como el cateto O'H mide la mitad que la hipotenusa entonces el ángulo < HO'O = 60°, y por lo tanto el < AO'E = 2 < HO'O = 2 (60°) = 120°. Como el < AO'E = 120° entonces el ángulo EFA = 360° - < AO'E = 360° - 120° = 240°.

Para calcular la longitud del arco EFA, utilizamos la fórmula para calcular el perímetro de la circunferencia grande = 2(¶)(r'), como el ángulo del arco EFA es 240°, que representa las 2/3 partes de una circunferencia. El perímetro del arco EFA = 2(¶)(4r)(2/3) = 16/3 (¶)(r)

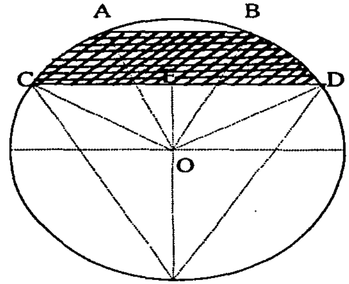
El < HOO' = 180° - (< OHO'+ < HO'O) = 180° - (90° + 60°) = 30°; El < DOB = 120° y el < DCB = 240°, por lo que el arco DCB es las 2/3 partes de la circunferencia pequeña. Entonces la longitud del arco DCB = 2(¶)(r)(2/3) = 4/3(¶)(r).

Si observamos la figura AB = ED = OH, calcularemos ahora la longitud de OH.

Por el teorema de Pitágoras, $(O'O)^2 = (O'H)^2 + (OH)^2 = (5r)^2 + (OH)^2$, despejando obtenemos lo siguiente $OH^2 = (10r)^2 - (5r)^2 = 75r^2$, entonces OH = 5 3 r. Por lo tanto AB + ED = 2(5 3 r) = 10 3 r.

El perímetro total de la figura ABCDEFA es 16/3(¶)(r) + 4/3(¶)(r) + 10 3 r

85.-



Se pide calcular el área de la superficie rayada. Suponemos, como aparece en la figura, que las dos cuerdas caen del mismo lado, AB = lado del exágono regular CD = lado del triángulo equilátero inscrito y O el centro del círculo y sea E = ½ (CD).

El lado del exágono = R = radio de la circunferencia, ya que el círculo está constituido de 6 triángulos equiláteros que conforman un exágono y cada lado del triángulo equilátero es igual a R. El lado del triángulo equilátero inscrito = $R\sqrt{3}$, si analizamos el triángulo rectángulo EDO donde OD = hipotenusa = R, el < EDO = 30° y DE = cateto adyacente entonces CD = 2[coseno 30° = cateto adyacente/ hipotenusa] = 2(.866) R, como 2(.866) $=\sqrt{3}$ entonces CD = $R\sqrt{3}$.

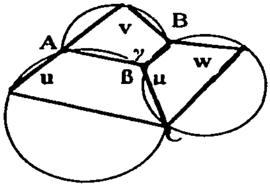
El área solicitada = Área sector COD - Área(triángulo CDO) – [Área sector AOB
Área(triángulo AOB)]

Área sector AOB = 1/6 (¶ R^2), ya que el < AOB = 60° por ser AOB un triángulo equilátero, concluimos que el sector AOB es la sexta parte del círculo.
El Área(triángulo AOB) = ½ (base)(altura) = ½ (R)[½ ($R\sqrt{3}$)] = ¼ $R^2\sqrt{3}$.
La Altura(tríangulo AOB) $=\sqrt{(OB)^2 - (\frac{1}{2} AB)^2} = \sqrt{R^2 - (\frac{1}{2} R)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} R^2} = \frac{1}{2} R\sqrt{3}$.
Área sector COD = 1/3 (¶ R^2), ya que el ángulo COD = 120°, como el < DCO = 30° y < CDO = 30° entonces < COD = 180° - (< DCO + < CDO) = 180° - (30° + 30°) = 120°., concluimos que el sector COD es la tercera parte del círculo.

El Área(triángulo CDO) = ½ (base)(altura) = ½($R\sqrt{3}$)(½ 3R) = (¼$\sqrt{3}R^2$).
La Altura(triángulo CDO) $=\sqrt{(OD)^2 - (\frac{1}{2} CD)^2} = 3R^2 - [\frac{1}{2} (R\ 3)]^2 = 3/2\ R$
La base(triángulo CDO) = $R\sqrt{3}$ = lado del triángulo equilátero.

Por lo tanto:
El área solicitada = 1/3 (¶ R^2)– ¼ ($R^2\sqrt{3}$) – [1/6 (¶ R^2)– ¼ ($R^2\sqrt{3}$)] = 1/3 (¶) R^2

86.-



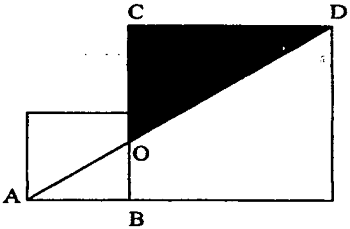
Sean A,B y C los puntos donde se intersectan dos de las circunferencias. Si unimos los puntos A,B y C con el punto donde se intersectan los tres círculos y sean ß, γ y μ los ángulos de intersección de dos circunferencias. Se obtienen tres cuadriláteros cíclicos. De donde:

El $< u + < \beta = 180°$, $< v + < \gamma = 180°$ y $< w + < \mu = 180°$, ya que " Los ángulos opuestos de un cuadrilátero cíclico suman 180° ".

Por lo tanto, $< u + < \beta + < v + < \gamma + < w + < \mu = 3(180°)$. Luego, despejando:
$< u + < v + < w = 3(180°) - (< \beta + < \gamma + < \mu) = 3(180°) - 360° = 540° - 360° = 180°$

e) Proporcionalidad y semejanza

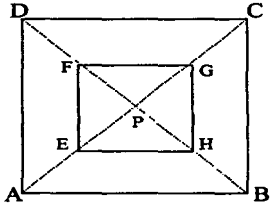
87.-



Sean A,B,C y D los vértices del cuadrado grande y pequeño, O la intersección de AD con BC, CD = 6 y AB = 3.
Observemos que el triángulo ABO es semejante al triángulo CDO en razón 2:1, ya que < AOB = < COD por ser opuestos por el vértice y < ABO = < DCO = 90° por el criterio *aa* de triángulos semejantes, también CD = 2(AB). Entonces CO = 2(BO), pero como CO + BO = 6(*1*), sustituyendo CO + BO = 2(BO) + BO = 3(BO) = 6, despejando BO = 6/3 = 2, sustituyendo en (*1*) CO + 2 = 6, despejando CO = 6 – 2 = 4.

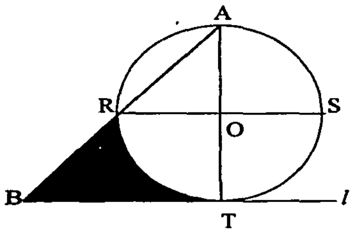
Por lo tanto, el área(triángulo COD) = ½ (base)(altura) = ½ (CO)(CD) = ½ (4)(6) = 12

88.-



Puesto que E, F, G y H son puntos medios de los lados de AP, DP, CP y BP, los cuatro triángulos pequeños que se forman con vértice en P son semejantes a los grandes también con vértice en P, por lo tanto sus lados están en la misma razón, por lo tanto, como FP es la mitad de DP, entonces FG también es la mitad de CD. Cada lado del cuadrado EFGH mide la mitad de cada lado del cuadrado ABCD, por lo tanto el área del cuadrado EFGH es la cuarta parte del cuadrado ABCD

89.-



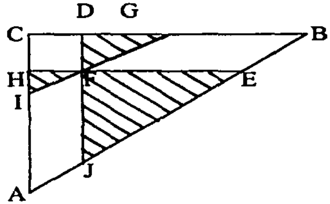
Los triángulos ABT y ARO son semejantes en 2:1, pues O es el punto medio de AT, y RO es paralela a BT; así, como en el triángulo ARO los lados AO y RO son iguales por ser radios de la circunferencia, también lo son sus correspondientes en el triángulo ABT, es decir, BT = AT = 3; por tanto BT = 3.

El área buscada = área(triángulo ABT) – [área(triángulo ARO) + área(cuarto del círculo)] (*1*).

El área(triángulo ABT) = ½ (base)(altura) = ½ (BT)(AT) = ½ (3)(3)= 9/2
El área(triángulo ARO) = ½ (base)(altura) = ½ (RO)(AO) = ½ (3/2)(3/2) = 9/8
El área(cuarto del círculo) = ¼[¶ (radio)^2] = ¼ [¶ (RO)^2] = ¼ [¶ (3/2)^2] = ¼ [¶ (9/4)] = 9/16¶.

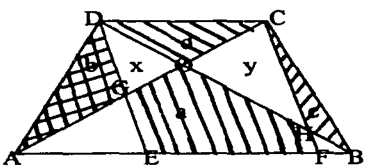
Por (*1*), el área buscada = 9/2 – (9/8 + 9/16 ¶) = 27/8 – 9/16¶

90.-



En la figura los triángulos EFJ y DGF son semejantes, el ángulo GDF = < EFJ = 90° y los ángulos DFG y el < FJE son iguales. Por el criterio aa los triángulos son semejantes. Lo mismo pasa con los triángulos DFG y FHI son semejantes ya que el ángulo GDF = < FHI = 90° y los ángulos DFG y el < FIH también son iguales. Por el criterio *aa* los triángulos son semejantes. entonces, los triángulos FHI ~ DFG ~ EFJ. Como son semejantes sus lados y sus áreas son proporcionales. Comparemos el paralelogramo BEFG con el triángulo EFJ que tiene área igual a 18: tienen la misma base y la altura del paralelogramo es igual a la del triángulo de área 8, la del triángulo menor. Entonces la razón entre las dos áreas de los triángulos es 8/18 = 4/9, calculando la raíz cuadrada de 4/9 obtenemos 2/3 que es la razón entre las dos áreas. Por lo tanto el área(paralelogramo GBEF) = (2)(2/3)(18) = 24. De manera análoga obtenemos el área del paralelogramo AJFI: tiene la misma base que la del triángulo FJE y su altura es 1/3 de la de éste por lo que área(paralelogramo AJFI) = (2/3)(18) = 12. El rectángulo CDFH tiene la misma altura que el paralelogramo GBEF, pero su base es 1/3 de la de éste por lo que el área(paralelogramo CDFH) = (1/3)(24) = 8. Por lo tanto el área(triángulo ABC) = área(triángulo FJE) + área(paralelogramo GBEF) + área(triángulo DFG) + área(paralelogramo AJFI) + área(triángulo FHI) + área(paralelogramo CDFH) = 18 + 24 + 8 + 12 + 2 + 8 = 72

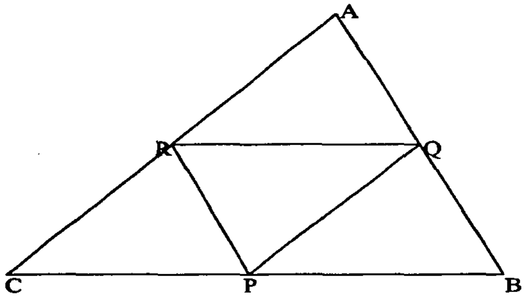
91.-



Sea O, G y H los puntos donde se intersectan DB y AC, AC con DE y CF con DB. Sea x = área(triángulo DGO) e y = área(triángulo COH). En la figura, el área(triángulo ADC) = área(triángulo BDC), tienen la misma base que es DC y los vértices A y B están en una recta paralela a DC, al sumar ambas áreas es la misma que la del paralelogramo DCEF, ya que "Triángulos (paralelogramos) que tienen la misma base y que están entre paralelas tienen la misma área". Por lo tanto área(paralelogramo DCEF) = a + x + y + d =

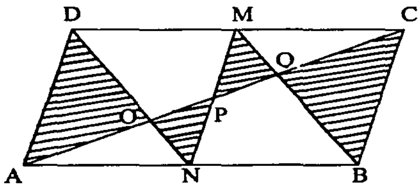
área(triángulo ADC) + área(triángulo BDC) = b + x + d + d + y + c. Entonces a + x + y + d = b + x + 2d + y + c, despejando a = b + d + c

92.-



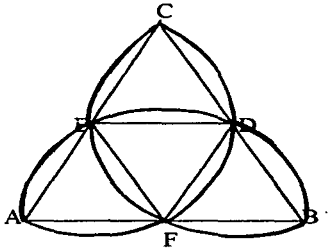
Los triángulos ARQ y ACB son semejantes puesto que comparten el ángulo RAQ y la razón entre los lados AR y AC es ½ al igual que la razón entre los lados AQ y AB. Por lo tanto RQ es la mitad de CB. Análogamente se demuestra que PQ es la mitad de CA y PR la mitad de AB, por lo tanto el perímetro de PQR es la mitad del perímetro de ABC

93.-



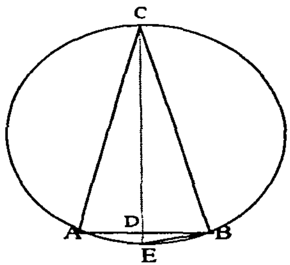
Sean O, P y Q las intersecciones de las rectas AC con DN, AC con MN y AC con BM. El triángulo ADO es semejante al triángulo NOP en razón 1:2, así AO = 2(OP). Como los triángulos AON y ONP comparten la altura trazada desde el vértice N, entonces el área(triángulo AON) = 2 área(triángulo ONP). Como DO = 2(ON), el área(triángulo ADO) = 2 área(triángulo AON). Luego el área(triángulo ADO) + área(triángulo ONP) = 5/6 [área(triángulo ADN)] = 5/6 (¼) = 5/24, ya que el área(triángulo ADN) = ¼ área(paralelogramo ABCD) = ¼ (1) = ¼ . Análogamente el área de la región sombreada en el triángulo BCM también es 5/24, y el total del área sombreada es 2(5/24) = 10/24 = 5/12

94.-



En la figura la semicircunferencia de diámetro AB, tiene su centro en el punto medio F de AB y su radio es la mitad del lado del triángulo, o sea, es igual a la longitud de la mediana que parte del punto F y pasa por los otros dos puntos medios E y D.
El triángulo AFE es semejante al triángulo ABC, por lo que EF = ½ (AB) = AE = AF y además el ángulo AFE = 60°, ya que es un triángulo equilátero.
Entonces la longitud del arco EA = 1/6 (¶2r) = 1/6 (¶AB) ; ya que el <AFE = 60° y es la sexta parte de una circunferencia. AB = 2r por lo que el perímetro de la rosa es:
Perímetro = 6 [1/6 (¶AB)] = (¶)(AB) ;ya que son seis arcos exteriores del triángulo ABC

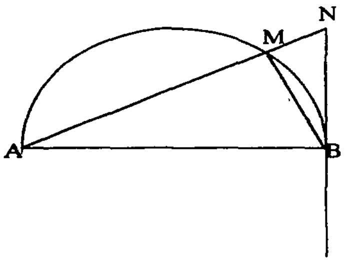
95.-



Observando la figura, se tiene que por ser ABC un triángulo isósceles, los ángulos CAB y CBA son iguales. A su vez los ángulos inscritos CAB y CEB son iguales ya que "Dos ángulos inscritos que sustentan el mismo arco son iguales". En consecuencia, los ángulos CBA y CEB son iguales.

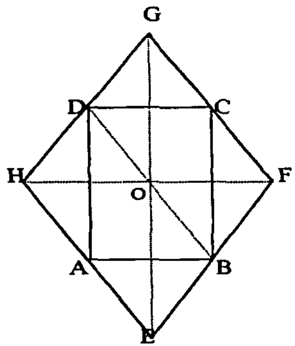
Los triángulos ECB y CDB tienen el ángulo BCE en común, son entonces semejantes por el criterio *aa* y por lo tanto: $\frac{CE}{CB} = \frac{CB}{CD}$. Despejando CB de la proporción tenemos que $(CB)^2 = (CD)(CE)$.

96.-



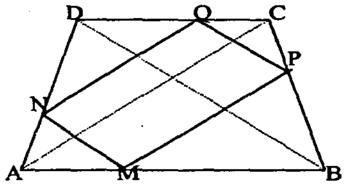
Sea r el radio de la circunferencia. Si unimos el punto M con B, observando la figura, vemos que los triángulos AMB y ANB, son rectángulos y tienen un ángulo común en el vértice A, por lo que por el criterio *aa*, los triángulos son semejantes y tenemos la siguiente proporción: AM/AB = AB/ AN. En consecuencia:
$(AM)(AN) = (AB)^2$, y como AB = diámetro = 2r entonces $(AM)(AN) = (2r)^2 = 4r^2$

97.-



El perímetro de rectángulo ABCD = 92cm, y la diagonal menor = FH = 32 cm. Al observar el dibujo, podemos escribir lo siguiente: Semiperímetro del rectángulo = (AB + AD) = ½ (92) = 46 ya que el área del rectángulo es 92 cm. Dado que los puntos A, B, C y D son los puntos medios de los lados del rombo, podemos escribir: AB = ½ FH = ½ (32) = 16cm, ya que la razón de semejanza entre los triángulos EFH y ABE es ½ .Como consecuencia: AD = OE = semiperímetro – AB = 46 – 16 = 30 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras para el triángulo rectángulo EFO tenemos que:
EF = hipotenusa = lado del rombo $= \sqrt{(OE)^2 + (OF)^2} = \sqrt{30^2 + 16^2} = \sqrt{900 + 256} = \sqrt{1156} =$ 34 cm, por ser AB = OF y OE = AD

98.-

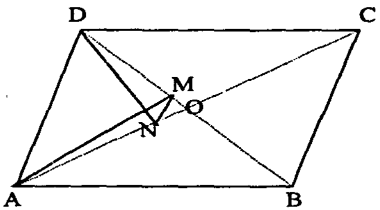


Observando la figura tenemos que:

$$\frac{AN}{AD} = \frac{1}{3} = \frac{AM}{AB} \qquad \frac{BM}{BA} = \frac{2}{3} = \frac{BP}{BC} \qquad \frac{CP}{CB} = \frac{1}{3} = \frac{CQ}{CD} \qquad \frac{DQ}{DC} = \frac{2}{3} = \frac{DN}{DA}$$

Por el teorema de Thales de Mileto, estas igualdades implican respectivamente que MN es paralela con BD, MP lo es con AC, PQ lo es con BD y QN lo es con CB.

99.-



Observando la figura, los triángulos ABD y ABC, como AM y DN son bisectrices entonces:

$$\frac{DM}{MB} = \frac{AD}{AB} \qquad \frac{AN}{NC} = \frac{AD}{DC}$$ **y como AB = DC por ser lados paralelos de un paralelogramo**

Entonces $$\frac{DM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$ **como DM = OD-OM , AN = OA-ON, MB = OM+OB y NC = ON + OA**

Sustituyendo $$\frac{OD - OM}{OM + OB} = \frac{OA - ON}{ON + OC}$$ **y como OB = OD, OA = OC; ya que las diagonales de un paralelogramo se intersectan en el punto medio. Sustituyendo**

$$\frac{OD - OM}{OM + OD} = \frac{OA - ON}{ON + OA} \qquad \text{o sea} \qquad \frac{OD}{OM} = \frac{OA}{ON}$$ **Por el Teorema de Thales de Mileto, MN es paralela con AD**

100.-

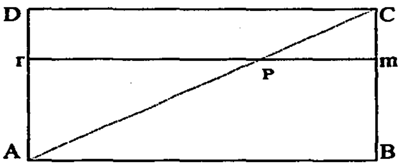


fig. 1

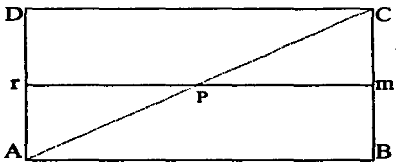


fig. 2

Veamos dos casos:

En la figura 1, cuando r pasa por 1/3 deAD. Sea $Cm = 1/3$ de BC
Al observar la figura tenemos lo siguiente:

$Ar = 2/3$ de AD, $Cm = 1/3$ de BC, $rP = 2/3$ de rm, $Pm = 1/3$ de rm, $AP = 2/3$ de AC y $PC = 1/3$ de AC.

Por lo tanto el área del triángulo APr $= \frac{1}{2}$ (base)(altura) $= \frac{1}{2}(Ar)(rP) =$
$\frac{1}{2}(2/3(AD)(2/3(rm)) = 4/18\ (AD\ rm)$
El área del triángulo CmP $= \frac{1}{2}$ (base)(altura) $= \frac{1}{2}(Cm)(mP) =$
$\frac{1}{2}(1/3(AD)(1/3(rm)) = 1/18\ (AD\ rm)$, ya que $AD = BC$.
Si sumamos ambas áreas obtenemos lo siguiente
Área total $= 4/18\ (AD\ rm) + 1/18\ (AD\ rm) = 5/18\ (AD\ rm)$

Vamos a ver ahora el segundo caso:

En la figura 2, cuando r pasa por el punto medio de AD. Al observar la figura tenemos lo siguiente:

$Ar = \frac{1}{2}$ de AD, $Cm = \frac{1}{2}$ de BC, $rP = \frac{1}{2}$ de rm, $Pm = \frac{1}{2}$ de rm, $AP = \frac{1}{2}$ de AC y $PC = \frac{1}{2}$ de AC.

Por lo tanto el área del triángulo APr $= \frac{1}{2}$ (base)(altura) $= \frac{1}{2}(Ar)(rP) =$
$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(AD)(\frac{1}{2}(rm)) = 1/8\ (AD\ rm)$, como son dos triángulos congruentes, su área es la misma, por lo tanto el área total es:

Área total $= 1/8\ (AD\ rm) + 1/8\ (AD\ rm) = 2/8\ (AD\ rm) = \frac{1}{4}\ (AD\ rm)$

Si comparamos 5/18 con $\frac{1}{4}$, podemos concluir que $5/18 > \frac{1}{4}$ por lo que cuando r pasa por el punto medio de AD, la suma de las áreas de los triángulos es mínima

IV Definiciones y teoremas

IV DEFINICIONES Y TEOREMAS

A continuación se presenta lista de definiciones y teoremas, muchos de ellos utilizados en las demostraciones de los 100 problemas de éste trabajo

a) Nociones geométricas básicas

- Bisectriz: de un ángulo es la recta que divide a éste en dos ángulos iguales
- Mediatriz: de un segmento es la recta perpendicular a éste que pasa por su punto medio
- Dos rectas en el plano se dicen paralelas si coinciden o tienen intersección vacía
- Se dice que dos ángulos son adyacentes si tienen el vértice y un lado común y los lados restantes forman un par de semirectas opuestas
- Dos ángulos se dicen que son complementarios si su suma es un ángulo recto y cada uno de ellos se conoce como complemento del otro
- Dado tres puntos distintos A,B, y C se dice que son colineales, si uno cualquiera de ellos pertenece a la recta determinada por los otros dos

Teorema 1.- Los ángulos adyacentes son suplementarios
Teorema 2.- Si dos paralelas son cortadas por una secante los ángulos alternos internos son iguales
Teorema 3.- Si dos paralelas son cortadas por una secante los ángulos alternos externos son iguales
Teorema 4.- Si dos paralelas son cortadas por una secante los ángulos correspondientes son iguales
Teorema 5.- Si dos paralelas son cortadas por una secante los ángulos opuestos por el vértice son iguales
Teorema 6.- Si dos paralelas son cortadas por una secante los ángulos colaterales internos son suplementarios
Teorema 7.- Si dos paralelas son cortadas por una secante los ángulos colaterales externos son suplementarios
Teorema 8.- Cada ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente
Teorema 9.- La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a 180°
Teorema 10.- Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él
Teorema 11.- La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es de cuatro rectos
Teorema 12.- La suma de los ángulos interiores de un polígono regular de n lados es 180°(n-2), donde n es el número de lados
Teorema 13.- Los ángulos interiores de un polígono regular de n lados miden 180°(n-2) / n, donde n es el número de lados
Teorema 14.- Los ángulos exteriores de un polígono regular de n lados miden 360°/n, donde n es el número de lados

b) Congruencia y desigualdades en el triángulo

Clasificación de los triángulos.-

- <u>Escaleno</u>: Triángulo que tiene sus tres lados distintos
- <u>Equilátero</u>: Triángulo que tiene sus tres lados iguales
- <u>Isósceles</u>: Triángulo que tiene dos lados iguales y uno distinto

<u>Teorema 1.-</u> (Desigualdad triangular) En un triángulo un lado es menor que la suma de los otros
<u>Teorema 2.-</u> Cada ángulo de un triángulo equilátero mide 60°
<u>Teorema 3.-</u> Cada ángulo de un triángulo escaleno es diferente
<u>Teorema 4.-</u> Del triángulo isósceles.- Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a esos ángulos son congruentes

- <u>Mediana</u>: La recta que pasa por un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto

<u>Teorema 5.-</u> La mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los dos adyacentes
<u>Teorema 6.-</u> La suma de las tres medianas de un triángulo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro, siendo mayor que las ¾ de perímetro

- <u>Incentro</u>: Punto donde se cortan las tres bisectrices de un triángulo cualquiera; es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo
- Las alturas de un triángulo cualquiera se intersecan en un punto. Este punto se llama <u>ortocentro</u> del triángulo
- Punto donde se cortan las tres medianas de un triángulo cualquiera, es el <u>baricentro</u>

<u>Teorema 7.-</u> El baricentro está situado a 1/3 de la base y a 2/3 de cada vértice; se corresponde con el centro de gravedad
<u>Teorema 8.-</u> El baricentro de un triángulo está alineado con el ortocentro y el circuncentro, y a doble distancia del primero que del segundo

- Dos figuras son <u>congruentes</u> si al superponerse coinciden todos sus puntos. Entonces dos figuras congruentes tienen la misma forma y tamaño
    - Criterio LLL. Los tres lados correspondientes resultan congruentes
    - Criterio LAL. Dos lados correspondientes y el ángulo que forman son congruentes
    - Criterio ALA. Dos ángulos correspondientes y el lado común son congruentes

- <u>Teorema de Pitágoras</u>.- Para cualquier triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $c^2 = a^2 + b^2$

Corolario 1.- Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales algún cateto y la hipotenusa
Teorema 9.- Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces sus ángulos opuestos son congruentes.
Teorema 10.- Si un cuadrilátero es un paralelogramo, entonces sus lados opuestos son congruentes
Teorema 11.- Los ángulos colaterales internos de un paralelogramo son suplementarios
Teorema 12.- Si un trapezoide es isósceles, entonces cada par de ángulos de base es congruente
Teorema 13.- Las diagonales de un rectángulo son iguales
Teorema 14.- Las diagonales de un paralelogramo se dimidian en su centro
Teorema 15.- Las diagonales de un rombo (o cuadrado) son perpendiculares
Postulado 1.- Si dos polígonos son congruentes, entonces ellos tienen áreas iguales
Postulado 2.- Si dos regiones sólidas son congruentes, entonces ellos tienen el mismo volumen.

c) Áreas de figuras

Teorema 1.- Dado un paralelogramo con base b y altura correspondiente h, el área está dada por la fórmula $A = bh$
Teorema 2.- Dado un triángulo con base b y altura correspondiente h, el área está dada por la fórmula $A = ½ (bh)$
Teorema 3.- Fórmula de Herón.- Si un triángulo tiene lados de longitud a, b y c entonces $A = s (s - a)(s - b) (s - c)$, donde $s = ½ (a + b + c)$
Teorema 4.- Dado un trapecio con bases: Base mayor = B, base menor = b y altura = h, el área A está dada por la fórmula $A = ½ (B+b)h$
Teorema 5.- Dado un polígono regular de n lados de longitud s y apotema a, el área A está dada por la fórmula $A = ½ a n s = ½ a p$, donde el perímetro $p = n s$
Teorema 6.- Dado un círculo con radio r y diámetro d, la circunferencia C está dada por la fórmula C = pi(diámetro) = 2pi(radio)
Teorema 7.- Dado un círculo con radio r, el área A está dada por la fórmula $A = pi(r^2)$
Teorema 8.- Triángulos(paralelogramos), que tienen la misma base y que están entre paralelas tienen la misma área

d) La circunferencia

- Semicircunferencia: Es un arco de longitud igual a la mitad de la circunferencia
- Cuerda: Es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia
- Secante: Es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos
- Arco: Es una parte de la circunferencia
- Tangente: Es la recta que toca a la circunferencia en un punto, . Este punto único se llama punto de tangencia o punto de contacto

- Ángulo central: Es aquel que está formado por dos radios
- Ángulo inscrito: Es aquel que está formado por dos cuerdas y tiene su vértice sobre la circunferencia
- Circuncentro: Punto donde se cortan las tres mediatrices de un triángulo cualquiera; es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo

Teorema 1.- Tres puntos distintos y no colineales determinan una única circunferencia
Teorema 2.- Toda circunferencia tiene un único centro y un único radio
Teorema 3.- Tres puntos colineales no pueden estar en una circunferencia
Teorema 4.- El diámetro de una circunferencia que pasa por el punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda y viceversa
Teorema 5.- En una circunferencia cuerdas iguales equidistan del centro y subtienden el mismo ángulo del centro
Teorema 6.- En una circunferencia a mayor cuerda menor distancia al centro
Teorema 7.- Un ángulo inscrito en un círculo es la mitad del ángulo central, ambos determinados por el mismo arco.
Teorema 8.- Si un ángulo esta inscrito en un semicírculo, entonces el ángulo formado es un ángulo recto
Teorema 9.- Si los ángulos de un cuadrilátero están inscritos en un círculo, entonces cada par de ángulos opuestos son suplementarios
Teorema 10.- Una recta pasa por un punto del interior de una circunferencia, entonces tal recta contiene un trazo que es común con el interior de la circunferencia, y tal recta corta a la circunferencia en dos puntos
Teorema 11.- Una condición necesaria y suficiente para que una recta sea tangente a una circunferencia es que l sea perpendicular al diámetro que pasa por el punto de contacto
Teorema 12.- Si la distancia entre el centro de la circunferencia y una recta l es menor que el radio entonces l es secante; si es igual a r entonces es tangente y si es mayor que r entonces l es exterior
Teorema 13.- Las tangentes trazadas a una circunferencia desde un punto exterior son iguales
Teorema 14.- Si una línea es tangente a un círculo, entonces es perpendicular al radio dibujado al punto de tangencia
Teorema 15.- Si dos secantes intersectan en el exterior de un círculo, entonces la medida del ángulo formado es un medio de la diferencia de las medidas de los arcos interceptados.
Teorema 16.- Si una secante y una tangente intersectan en el punto de tangencia, entonces la medida de cada ángulo formado es un medio de la medida de su arco interceptado
Teorema 17.- Si una secante y una tangente, o dos tangentes, intersectan en el exterior de un círculo, entonces la medida del ángulo formado es un medio de la diferencia de la medida de los arcos interceptados

e) Triángulos semejantes

- Semejanza: Dos triángulos son semejantes cuándo tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales
- Homotecia: Dos figuras semejantes, no congruentes, son homotéticas si sus lados correspondientes son paralelos

Teorema 1.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de los perímetros correspondientes son proporcionales a la medida de los lados correspondientes
Teorema 2.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de las alturas correspondientes son proporcionales a la medida de los lados correspondientes
Teorema 3.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de las bisectrices angulares correspondientes de los triángulos son proporcionales a la medida de los lados correspondientes
Teorema 4.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de las medianas correspondientes son proporcionales a la medida de los lados correspondientes.
Teorema 5.- Si D,E y F son los puntos medios de los lados del triángulo ABC, entonces el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF
Teorema 6.- En el triángulo ABC, D y E son los puntos medios de AC y BC, respectivamente, entonces el triángulo ABC es semejante al triángulo DEF
Teorema 7: Teorema de Tales de Mileto.- Si se cortan varias rectas paralelas por dos transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de ellas es igual a la razón de los correspondientes de la otra
Teorema 8: Teorema fundamental de la semejanza de triángulos.- Toda paralela a un lado de un triángulo, forma con las rectas a que pertenecen los otros dos, un nuevo triángulo semejante al primero
Teorema 9.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de los perímetros correspondientes son proporcionales a la medida de los lados correspondientes.
Teorema 10.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de las altitudes correspondientes son proporcionales a la medida de los lados correspondientes
Teorema 11.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de las bisectrices angulares correspondientes de los triángulos son proporcionales al medida de los lados correspondientes
Teorema 12.- Si dos triángulos son semejantes, entonces la medida de las medianas correspondientes son proporcionales a la medida de los lados correspondientes.
Teorema 13.- Si la altitud es dibujada desde el vértice de un ángulo recto hacia la hipotenusa de un triángulo recto, entonces los dos triángulos formados son semejantes al triángulo dado y son semejantes entre si.

V Ayuda de Internet

V AYUDA DE INTERNET

A continuación se ofrece una breve lista de direcciones electrónicas donde los docentes o alumnos podrán encontrar información útil

- Instituto Latinoamericano de la comunicación educativa
  http:// www.ilce.edu.mx

- El paraíso de las matemáticas
  http:// members.xoom.com/pmatematicas

- Matemáticas. Antonio Pérez
  http:// platea.pntic.mec.es/aperez4/

- Concurso de primavera de matemáticas
  http:// concursomatematicas.itam.mx
  http:// www.redesc.ilce.edu.mx/

- Olimpiada Mexicana de matemáticas
  http:// ichi.fismat.umich.mx/omm/

- Olimpiadas de matemáticas
  http:// titan. Usach.cl/~olimpiadas/z.html

CONCLUSIONES

Los 100 problemas aquí propuestos con sus respectivas soluciones, espero que puedan servir a jóvenes de 13 años en adelante a practicar para prepararse para concursos de matemáticas. Algunos de los problemas, considero que tienen cierta dificultad para los alumnos de secundaria, no quiero decir con esto que no son capaces de resolverlos o se debe a que los temas no hayan sido explicados durante la secundaria, sino más bien creo que pueden ser resueltos fácilmente por estudiantes de nivel preparatoria que ya tienen más maduración.

Estos problemas también pueden servir para ayudar a docentes que se encuentren interesados en preparar para concursos a alumnos sobresalientes en matemáticas, o para poder ir interesando a los alumnos en las clases normales. Maestros, yo recomendaría que se dieran ellos mismos y a los alumnos una oportunidad en conocer y dar a conocer la Geometría, ya que muchos saltan estos temas o los dejan para el final del curso y no permiten a los alumnos adentrarse en el conocimiento de esta rama de las matemáticas que tiene su encanto. Existen además diferentes ayudas tecnológicas en Internet que pueden utilizar para enriquecer sus clases e ir haciendo más agradable el estudio de la geometría.

Los alumnos y docentes que utilicen esta tesis o que traten de resolver problemas de éste tipo deben de estar concientes de que deberán de aprenderse y manejar una serie de teoremas y definiciones necesarias para poder resolver muchos o casi todos los problemas propuestos aquí.

Si éste trabajo de investigación, le ayuda al menos a un alumno o docente, me sentiré contenta ya que el objetivo que persigue éste trabajo estará cumplido.

BIBLIOGRAFÍA

1.- EJERCICIOS DE GEOMETRÍA ELEMENTAL
AUTOR(ES): **Gonzalo Masjuán T. Fernando Arenas D.**
EDITORIAL: **Ediciones Universidad Católica de Chile**

2.- PROBLEMAS DE GEOMETRÍA. PLANIMETRÍA
AUTOR(ES): **Shariguin**
EDITORIAL: **Mir Moscú**

3.- GEOMETRY FOR THE CLASSROOM. EXERCISE AND SOLUTIONS
AUTOR(ES): **C.Herbert Clemens. Michael B. Clemens**
EDITORIAL: **Springer-Verlag**

4.- REQUISITOS DE GEOMETRÍA PLANA PARA LOS PROBLEMAS DE LAS OLIMPIADAS
AUTOR(ES): **Elias Mata Nereo**
TESIS

5.- CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMATICAS
EXAMENES DE PRIMER Y SEGUNDO NIVEL AÑOS: 1998, 2000 Y 2001

6.-BOLETÍN DEL CONCURSO DE PRIMAVERA PARA MAESTROS. NO.7 ABRIL DE 1998
AUTOR(ES): **Iñaqui de Olai**

7.- EXAMENES DE OLIMPIADAS DE MATEMATICAS DE MAYO.
II OLIMPIADA DE MAYO 1996, III OLIMPIADA DE MAYO 1997, IV OLIMPIADA DE MAYO 1998, V OLIMPIADA DE MAYO 1999 Y VI OLIMPIADA DE MAYO 2000

8.- RED ESCOLAR EN INTERNET.CARTELES MENSUALES DEL CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS. www.redesc.ilce.edu.mx
AUTOR(ES):

9.- PROBLEMAS PARA LA 13ª OLIMPIADA MEXICANA DE MATEMATICAS 1999
AUTOR(ES):JORGE ALBARRAN, ALEJANDRO BRAVO, RADMILA BULAJICH, CARLOS CABRERA, JOSÉ A. GÓMEZ, ANA RECHTMAN