17

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

REVISIÓN DEL PROGRAMA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA DE LA CARRERA DE MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN CAMPUS ACATLÁN.

TESINA

PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

Acompañada de un disco de 3½

PRESENTA

JOSÉ JAVIER JORGE GONZÁLEZ SOLANO

ASESOR MAYRA OLGUIN ROSAS

AGOSTO 2002.

PAGINACION DISCONTINUA

Agradecimientos

La presente tesina no es el producto de un solo individuo, sino del esfuerzo de un gran número de personas que generosamente aportaron su valioso tiempo y que siempre estuvieron cuando los necesite.

Reconozco una gran deuda con todas las personas e instituciones que, de una forma u otra apoyaron y participaron en la elaboración de este texto.

Quiero darle las gracias a dios que me brindo la oportunidad de estudiar y terminar la licenciatura pese a tantos obstáculos encontrados en el camino y que sin su ayuda no lo hubiese logrado.

Considero sumamente necesario agradecer a mi esposa Regina que fue el pilar durante toda la carrera, por su motivación y ayuda en los momentos difíciles, por su paciencia, comprensión y amor que me brindo durante todo este tiempo, por sus consejos y regaños en los momentos importantes y complicados.

A mis hijos Omar Joaquín y Jorge Alfonso porque son el motivo de no haber dejado de luchar, esperando que esto sea un incentivo profesional para que logren sus metas, así como su comprensión por el poco tiempo que les dedique durante este proceso.

Deseo agradecer a Héctor y Margarita por su apoyo moral, durante mi carrera y por estimularme para que no me diera por vencido y favorecerme con su amor y cariño. A ambos les expreso mi permanente agradecimiento.

Y mi más profunda gratitud a mis padres Miguel y Carmen que me enseñaron a trabajar y luchar pese a todas las cosas adversas, a ser honesto, sobre todo un reconocimiento a su esfuerzo, tenacidad y lucha para no dejarnos sin estudio, gracias padres sin ustedes no podría escribir estas líneas.

Quiero reconocer el apoyo del profesor Domingo por darme la oportunidad de enseñar todo lo que aprendí y por tenerme confianza para formar parte de su personal y espero no defraudarle en la tarea encomendada.

INDICE

PAG

Introducción I

Capitulo 1 Álgebra Vectorial. 1

1.1 Coordenadas Cartesianas. 1
1.2 Definición del vector (R^2 y R^3) representación geométrica y operaciones. 5
1.2.1 Magnitud de un vector en R^2. 6
1.2.2 Magnitud de un vector en R^3. 7
1.2.3 Suma de vectores. 8
1.2.4 Diferencia de vectores. 10
1.2.5 Multiplicación de un vector por un número. 11
1.2.6 Representación de vectores en el plano. 13
1.3 Producto punto. 16
I.3.1 Proyección de un vector sobre otro. 17
1.4 Proyección ortogonal. 19
I.4.1 Vectores paralelos y ortogonales. 19
1.5 Ángulo entre vectores 20
1.6 Producto Cruz (R^3) 24
I.6.1 U x V ortogonal tanto a V como a U 26

Capitulo II Rectas y Planos. 28

II.1 La recta en R^2 y R^3 y sus diferentes ecuaciones. 28
2.1 Formula del punto medio. 30
2.2 Punto medio en R^3. 32
2.3 Distancia entre dos puntos R^2. 33
2.4 Distancia entre dos puntos en R^3. 35
2.5 Ecuación de recta Punto Pendiente. 37
2.6 Forma de dos puntos de la ecuación de la recta. 38
2.7 Formas pendiente – ordenada al origen de ecuación de recta. 40
2.8 Forma simétrica de la ecuación de la recta. 41
2.9 Forma general de la ecuación de una recta. 42
II.2 Distancia de un punto a una recta en R^2 y R^3. 44
II.3 Ángulo e intersecciones de rectas. 47
II.4 El plano y sus diferentes ecuaciones. 51
II.5 Distancia de un punto a un plano. 57
II.6 Familia de los planos. 59

Capitulo III Circulos y Esferas. 61

III. 1 Circunferencia y sus diferentes ecuaciones. 61
III.2 La esfera y sus diferentes ecuaciones. 70
III.3 Intersección de circulos y rectas, de esferas y rectas, y de esferas y planos. 76

Capitulo IV Cónicas. 83

IV.1 Teoría general de la ecuación de segundo grado. 83
IV.2 Parábola, su ecuación cartesiana y vectorial. 86
IV.2.1 Ecuación de la Parábola con vértice (h, k) y el eje paralelo a un eje coordenado. 91
IV.3 Elipse, su ecuación cartesiana. 100
IV.3.1 Ecuación de la elipse Centro(h, k) y ejes paralelos a los coordenado. 107
IV.4 Hipérbola , su ecuación cartesiana. 118
IV.4.1 Ecuación de la Hipérbola centro (h, k) y ejes paralelos a los coordenados. 124
IV.5 Curvas de grado superior y curvas trascendentes. Construcción de curvas.
a) Elipsoide 131
b) Hiperboloide de una hoja o un manto 132
c) Hiperboloide de dos hojas. 133
d) Cuádricas sin centro.
i) Paraboloide Elíptico. 134
ii) Paraboloide Hiperbólico. 136

Capitulo V Transformación de Coordenadas. 139

V.1 Sistema de coordenadas polares. 139
V.2 Ecuaciones de transformación entre coordenadas polares y cartesianas. 142
V.3 Curvas especiales en coordenadas polares. Trébol de "n" hojas espirales y cardioides. 147
V.4 Rectas, planos y cónicas en coordenadas polares. Criterio unificado de las curvas. 152
V.4.1 Ecuaciones polares Rectas y Círculos. 155
V.5 Coordenadas Cilíndricas. 162
V.6 Coordenadas Esféricas. 165

Capitulo VI Ecuaciones Paramétricas. 168

VI.1 Definiciones Básicas. 168
VI.2 Ecuaciones paramétricas de una curva y sus identidad con las coordenadas cartesianas. 172
VI.3 Representación paramétrica de las cónicas. La Cicloide y la Hipocicloide. 180
VI.4 Ecuaciones paramétrica de curva en el espacio. 185
Anexo 1 188

Conclusiones

Bibliografía.

INTRODUCCIÓN

"El origen del término geometría es una descripción precisa de los primeros geómetras, que se interesaban en problemas como la medida del tamaño de los campos ó el trazado de ángulos rectos para las esquinas de los edificios. Este tipo de geometría empírica, que floreció en el antiguo Egipto, Sumeria y Babilonia, fue refinado y sistematizado por los griegos. ... Quizá las mayores contribuciones de los griegos antiguos a las matemáticas fueron las de Tales y de Pitágoras, alrededor de 600 antes de Cristo. Fueron los primeros en considerar las matemáticas como un sistema deductivo en el cual las afirmaciones matemáticas son consecuencia lógica de otras afirmaciones.... En el siglo VI a.c. un matemático Pitágoras demuestra, las diversas leyes arbitrarías e inconexas de la geometría empírica se deducen como conclusiones lógicas de un número ilimitado de axiomas, o postulados.... Ejemplo típico de los postulados desarrollados y aceptados por los matemáticos griegos es la siguiente afirmación: una línea recta es la distancia más corta entre dos puntos.... La geometría no avanzó mucho en la era final de los griegos hasta la edad media. el siguiente paso más importante la da un filósofo y matemático Francés René Descartes:... Donde fraguó la conexión entre la geometría y el álgebra al demostrar como aplicar los métodos de una disciplina en la otra. Este es el fundamento de la geometría analítica en el que las figuras se representan mediante expresiones algebraicas, sujeto subyacente en la mayor parte de la geometría moderna. ... " [A]

"En el siglo XVII, cuando empezaba a desarrollarse el álgebra, Fermat y Descartes, inventaban un método nuevo de geometría denominado desde entonces, la geometría analítica, que permitiría resolver los problemas de distinta forma que mediante el encadenamiento de los teoremas euclidianos. Efectivamente, la geometría tradicional, presentaba numerosas imperfecciones. ... Ahora bien, el álgebra, con sus símbolos y sus mecanismos de cálculo apasionaba a los espíritus. Por ello Fermat y Descartes tuvieron la idea de traducir al lenguaje algebraico (es decir a ecuaciones) los problemas de geometría y aprovechar de esta manera, los automatismos algebraicos. Las etapas de un problema geométrico consistían en traducirlo al lenguaje algebraico, resolver las ecuaciones planteadas y traducir los resultado al lenguaje geométrico.... La geometría analítica ha tenido gran importancia en el desarrollo de las matemáticas pues ha

[A] Enciclopedia Microsoft: Encarta: Geometria unificado los conceptos de análisis (relaciones numéricas) y geometría (relaciones espaciales). ... La nueva geometría creada por Descartes en el siglo XVII, ganó muchos adeptos rápidamente, debido a que sus primeros éxitos fueron notorios. En realidad, hubo que esperar a finales del siglo XVII para que estas cuestiones fueran estudiadas verdaderamente y que la herramienta creada por Descartes se convirtiera en una impresionante máquina de resolver problemas. El autor de esta generación de la geometría analítica fue Monge, quien se interesó particularmente por las propiedades de las curvaturas, estudiadas con anterioridad a él por Meusnier (1776) y Euler (1760) y, posteriormente, por el gran matemático alemán Gauss (1827). El estudio de las curvaturas establece un notable paralelismo entre el análisis (o sea el cálculo infinitesimal y la teoría de las funciones) y la geometría y se puede decir que los trabajos de Monge, dieron un impulso brillante a la geometría de Descartes. Monge fue también el inventor de la Geometría descriptiva. ... A principios del siglo XIX. ... Fue un alumno de Monge, Poncelet, quien descubrió lo que él llamó las *propiedades proyectivas de las figuras* en un Tratado aparecido en 1822 que sería fundamental para el desarrollo de la geometría proyectiva. ... En la segunda mitad del siglo XIX, la geometría proyectiva y el análisis se completaron armoniosamente en muchos campos y se desarrolló el método mixto (Cayley, Sylvester, Hermite, Clebs y Elie Cartan). Paralelamente, la geometría se fue volviendo más abstracta y se transformó en una combinatoria (geometría llamada algebraica); de manera que se puede decir que, a partir de finales del siglo XVIII, la geometría ya no es una ciencia de la extensión y de la medida creada por los griegos" [b].

"Geometría analítica, la parte de las matemáticas que establece una conexión entre el Álgebra y la Geometría Euclidiana: estudia las propiedades de las figuras por procedimientos algebraicos y sujeta las cuestiones de la Geometría a métodos generales y uniformes, aplicables a todas las figuras. ... Rama de la geometría en las que las líneas rectas, las curvas y las figuras geométricas se representan mediante expresiones algebraicas y numéricas usando un conjunto de ejes y coordenadas." [c]

[b] Universal Enciclopedia Multimedia: Micronet V 2.02

[c] Anfossi Meyer: Geometría Analítica: Progreso.

"La geometría analítica se ocupa de dos tipos clásicos de problemas. primero: dada la descripción geométrica de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación algebraica que cumplen dichos puntos. Segundo tipo de problema es: dada una expresión algebraica, describir en términos geométricos el lugar geométrico de los puntos que cumplen dicha expresión." [d]

"El fundamento de la geometría analítica es la correspondencia biunívoca entre los elementos o puntos de una recta orientada y los elementos o números del conjunto de los números reales R. En el sistema de Descartes, el número que corresponde a cada punto de la recta es su distancia a un punto origen dado de la misma. Tal número se llama la abscisa cartesiana. La misma idea se aplica con facilidad al plano y al espacio. ... En geometría analítica se ha llegado a definir diversos sistemas de coordenadas que se utilizan según las propiedades que se quiera poner en evidencia. Los más usados son las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares. ... Al igual que se pueden determinar analíticamente los puntos en el plano y en el espacio, y dar la ecuación de una recta, se puede averiguar la de una curva. Las curvas más conocidas son la circunferencia, la hipérbola, la parábola y la elipse, todas ellas son curvas de segundo grado y reciben el nombre de **cónicas**. ... El estudio analítico de estas curvas tiene una enorme trascendencia en sus aplicaciones a las leyes físicas. Basta aquí recordar por ejemplo que las órbitas de los planetas son elípticas, que los graves describen parábolas en su caída, que muchas leyes físicas pueden representarse mediante hipérbolas o que, finalmente, sin conocer la teoría de las secciones cónicas hubiera sido imposible realizar la navegación de altura. ... Desde el punto de vista analítico, la propiedad común de todas las cónicas es que vienen representadas por una ecuación de segundo grado del tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$" [e]

"En el siglo XX se han escrito demostraciones tan complejas que una sola persona no es capaz de entender todos y cada uno de los razonamientos utilizados. En el año de 1976 se utilizo un ordenador o computadora para completar la demostración del teorema de los cuatro colores. ... El uso de un ordenador en esta demostración produjo discusiones considerables en la

[d] Enciclopedia Microsoft Encarta: Geometría Analítica

comunidad matemática. El principal problema es saber si el teorema se puede considerar demostrado sin que ningún ser humano compruebe todos los pasos y detalles de la demostración." [f]

"Con el advenimiento de calculadoras graficadoras y de programas de cómputo para graficación ha tenido una gran influencia sobre la enseñanza de las matemáticas, y solo cabe esperar que esta influencia aumente mucho más durante los próximos años. ... La graficación electrónica puede auxiliar mucho para visualizar las superficies en tres dimensiones; sin embargo, existen algunos problemas. El primero es que, mientras la mayoría de los programas de cómputo para graficación incluyen gráficas tridimensionales, las calculadoras graficadoras no pueden hacer esas gráficas." [g]

"La ventaja de la graficación por computadora es que, aprovechando la capacidad de la máquina, se pueden calcular miles de soluciones a la ecuación, obteniendo de esta manera una cantidad de puntos fuera del alcance de un calculista humano. ... En la actualidad el método de las coordenadas es muy importante en el manejo y utilización de las máquinas computadoras, pues por una parte permite resolver complicados problemas geométricos aprovechando la capacidad de cómputo de las máquinas, y por la otra es clave en el aprovechamiento de sus capacidades gráficas. " [h]

"Aparte del uso que se puede hacer con un ordenador para representar funciones , conviene que el alumno se habitué a representar con cierta precisión algunas funciones sencillas apropiadas a la etapa: rectas, parábolas, elipses, hipérbolas y alguna cúbica. Se consigue con ello romper el tópico de que el ordenador es un robot pensante capaz de todo. Es más convendrá enseñar a construir algún pequeño programa de dibujo de curvas para hacerle ver que el ordenador sólo toma un valor de x tras otro, calcula F(x) y dibuja los puntos (x, F(x)). Eso si con toda la rapidez y sin errores." [i]

---

[e] Universal Enciclopedia Multimedia; Geometria Analitica
[f] Enciclopedia Microsoft Encarta; Demostración Matemática
[g] Douglas F. Riddle; Geometría Analítica; Thomson
[h] Torres Alcaraz Carlos; Geometria Analítica; Santillana
[i] Nueva Enciclopedia Temática Planeta; Matemáticas

"Todavía quizás más sorprendentemente es, la habilidad de crear cuadros gráficos claros, que han producido nuevas interacciones con campos fuera de matemática; retribuyen por ejemplo, estos dos desarrollos la nueva teoría y las nuevas conexiones pueden hacer pensar en algunos de los beneficios de usar a las computadoras. ..." [j]

" Para el desarrollo de los objetivos del programa en particular y de las matemáticas en general, se sugiere al profesor asumir el papel de coordinador de las actividades, alternando con expresiones claras y precisas, de manera que el papel protagónico descanse en las actividades que desarrollen los alumnos, y evitar al máximo la exposición como único método de conducción del proceso educativo, para ello; se sugiere hacer uso intensivo de la calculadora y la microcomputadora. " [k].

Esta tesina se ha escrito de manera que el estudiante que le consulte pueda abordar el tema conforme lo marca el programa de Geometría por su cuenta, puesto que su estructura pretende favorecer al alumno tanto de nivel medio superior como nivel superior que le permita alcanzar los objetivos que se plantean por el programa de una manera normal y en menor tiempo, con la presentación de diversos ejemplos y la solución de cada uno de ellos desarrollados paso a paso para que el alumno logre obtener la habilidad y confianza en la solución de problemas.

Este uso apropiado de los ejemplos le permitirá al alumno entender cuáles son los elementos básicos del álgebra que le permitirán avanzar en el desarrollo de cada ejercicio, estos a su vez incluyen ilustraciones en gran detalle para que el alumno pueda realizar seguimiento con más facilidad y estar listos para aplicarlo a otro ejercicio.

Los problemas resueltos a todo lo largo de la tesina tienen una relación muy estrecha con los ejercicios que se hayan al final de cada tema, que pretenden afianzar los conceptos y problemas del tema o unidad consultada. En cada capitulo contiene ejercicios propuestos, serie de ejemplos con distintos niveles de dificultad. Desarrollados de manera analítica para después apoyarse

---

[j] Concus P. R. Finn . Springer_verlag; Geometric Analysis and Computers Graphics; New York
[k] Bachillerato Propedéutico Estatal; Geometria Analitica

y comprobar los resultados con el software realizado para los primeros 4 capítulos. El alcance que pueda tener cada capítulo y cada ejemplo está en función del alumno o la persona que consulte la presente, repasando conceptos aprendidos y utilizándolos correctamente y familiarizándose con todos los conceptos usados en la asignatura de Geometría Analítica.

Esta tesina se plantea como apoyo para un semestre de preparatoria o para estudiantes de licenciatura en su primer año, teniendo presente que no se trata de un texto y no debe emplearse como un medio para evitar el estudio de las cuestiones teóricas de la asignatura y un software que le permita comprobar que el ejercicio que se está desarrollando cumple con las condiciones indicadas por el problema.

Debido a que existe un alto índice de reprobación en esta asignatura por la falta de interés, análisis y entender los temas que marca el programa de Geometría Analítica propongo el desarrollo de esta tesina como apoyo al estudiante para entender y aplicar formulas así como resolver los problemas que indica el programa de una manera más autodidacta y con sus propios recursos.

El propósito de esta tesina es ejemplificar los ejercicios de una manera clara y precisa que permita resolver problemas al alumno analizando como se resuelven los ejercicios y adquiriera la habilidad que se requiere en esta asignatura logrando mejores resultados y conocimientos de la materia.

Capitulo I ÁLGEBRA VECTORIAL

En este capitulo se pretende reforzar y agilizar la práctica para la resolución de problemas de vectores.

1.1 **Coordenadas Cartesianas.**

"Una de las definiciones de función (y de relación en general) nos habla de un conjunto de pares ordenados, es decir dos conjuntos de números y una relación de correspondencia o dependencia entre ellos; En consecuencia el concepto del sistema de coordenado lineal se logra formando lo que se llama un **Sistema Coordenado Rectangular** o **Sistema Coordenado Cartesiano** en honor del matemático Francés que lo invento René Descartes (1637).

El sistema se forma usando dos rectas numéricas perpendiculares entre sí a las que se les denomina ejes coordenados normalmente se les denomina *x* e *y* respectivamente y se intersecan en sus orígenes, punto al que se le llama simplemente el origen del sistema que generalmente se representa por la letra O, ver figura 1.1" [1]

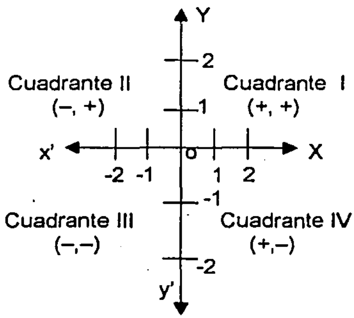


Figura 1.1

Generalmente uno de los ejes se dibuja horizontalmente y en él los números **positivos** que dan a la derecha y los **Negativos** a la Izquierda del origen, el otro eje o recta numérica queda entonces de forma vertical y los números positivos están hacia arriba y los negativos hacia abajo del origen.

Las unidades de longitud usadas en la recta numérica que en adelante llamaremos ejes coordenados, por lo general son iguales en ambos ejes pero en algunos casos puede tomarse una para eje horizontal y otra para eje vertical.

[1] Geometria Analítica: Joseph H. Kindle: Mc Graw Hill

El plano en el que se dibujan los ejes coordenados queda dividido en cuatro partes que se denominan cuadrantes y que se enumeran como se muestra en la gráfica 1 empezando por él superior derecho en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Con este sistema de coordenadas rectangulares se puede establecer la correspondencia uno a uno o biunívocas entre cada punto del plano y un par ordenado de números reales (x, y).

Lo acostumbrado es considerar al eje horizontal como el correspondiente al del dominio, por lo cual se le conoce como eje de las X o también eje de las abscisas, nombre que también se da a los elementos del dominio; al eje vertical en el cual se representan los elementos del recorrido le llamaremos eje de las Y o también eje de las ordenadas entonces en un par ordenado, los elementos se llaman abscisa y ordenada respectivamente y estos nombres son muy usados.

DEFINICIÓN

Si el par ordenado(x, y) se asocia con un punto M podemos decir "M es la grafica de (x, y) " o también "(x, y) son las coordenadas de M" lo que simboliza M(x, y) que se lee M en x, y.

Considerando el punto M en un sistema de coordenadas rectangulares sus coordenadas se localizan trazando una recta perpendicular al eje horizontal la abscisa X, a este punto se le llama **representación perpendicular** de M al eje X. Después encontramos la representación perpendicular de M al eje de las Y con lo que localizamos la ordenada de M. Ver. Figura 1.2

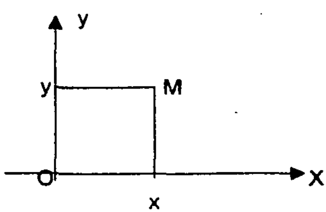
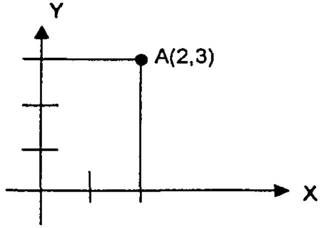


Figura 1.2

El punto en que se cortan las perpendiculares levantadas en las coordenadas es la grafica del par ordenado.

Ejemplo 1: A(2, 3) donde Abscisa es 2 en el eje de las X y la ordenada es 3 en el eje de las Y.



EJERCICIOS 1.1 Localice el punto P sobre un sistema coordenado cartesiano rectangular y establezca el cuadrante donde se ubica.

1. a) P(3, 7)
2. b P(-4, -6)
3. c) P(2, -5)
4. d) P(-1,4)
5. e) P(5, 6)
6. f) P(8, -1)
7. g) P(-7, -2)
8. h) P(-0,3)

Otro sistema de coordenadas se presenta en tres dimensiones donde se dibujan tres ejes denominados $\ell 1$, $\ell 2$, $\ell 3$, rectas que se intersecan en un punto común O y que están sobre el mismo plano ambas rectas se designan respectivamente como eje X, eje Y, eje Z en el plano que contiene los ejes X y Y reciben el nombre de plano XY y en forma semejante se habla de los planos YZ y X Z, ver figura 1.3 en forma colectiva reciben el nombre de planos coordenados y sus tres rectas de intersección $\ell 1$, $\ell 2$,y $\ell 3$ en los ejes coordenados.

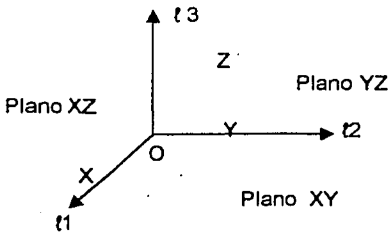
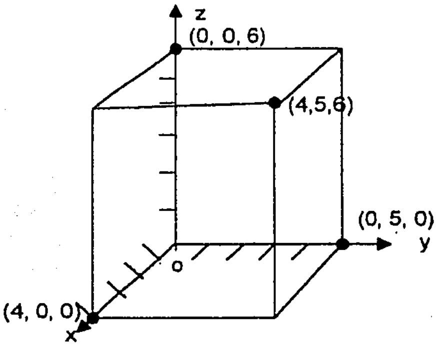


Figura 1.3

Los tres planos coordenados dividen el espacio en ocho partes llamados octantes, la correspondencia uno a uno entre los puntos en el espacio y las ternas ordenadas de números reales se le llama sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones.

Para construir un sistema de este tipo, se selecciona un punto O, conocido como origen, y se eligen tres rectas mutuamente perpendiculares, llamadas ejes coordenados, que pasen por el origen. Se denominan estos ejes como x, y, z y se selecciona la dirección para cada uno de ellos así como la unidad de longitud para medir las distancias. A cada punto P en el espacio tridimensional se le asigna una terna de números par de ejes (x, y, z) llamados coordenados.

Ejemplo 2: Situar el punto cuyas coordenadas es A(4, 5, 6).



EJERCICIOS PROPUESTOS: dibuje un sistema de coordenadas y ubique los puntos cuyas coordenadas son.

1. a) (2, 3, 4)
2. b (-2, 3, 4)
3. c) (2, -3, 5)
4. d) (-1,2,-4)
5. e) (4, 5, -3)

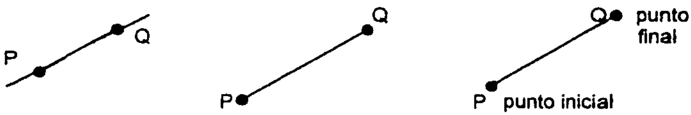
1.2 Definición de Vector (R^2 y R^3) representación geométrica y operaciones

En términos sencillos, un vector es una cantidad que tiene magnitud y dirección. Para un vector en el plano, único caso que analizaré conviene representarlo como una flecha. La longitud de la flecha representa la **magnitud** del vector y la cabeza de la flecha indica la dirección del vector. Ver figura 1.2.1

Figura 1.2.1

Si P y Q son dos puntos distintos en el plano xy, existe exactamente una recta que contiene a ambos. Los puntos en la parte de la recta que une P con Q , incluyéndolos, forman el segmento de recta $\overline{PQ}$.

Si ordenamos los puntos de modo que vayan de P a Q, tenemos un segmento de recta dirigido de P A Q , el cual denotamos $\overrightarrow{PQ}$. En un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, llamamos P al **punto inicial** y Q al **punto final**, como se indica en la figura numero 1.2.2



a) Recta que contiene a P y Q b) El segmento $\overline{PQ}$ c) Segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$

Figura 1.2.2

La magnitud del segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ es la distancia del punto P al punto Q ; es decir, la longitud del segmento de recta. La dirección de $\overrightarrow{PQ}$ es de P a Q. Si un vector v tiene la misma magnitud y la misma dirección que el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$, entonces escribimos

$$v = \overrightarrow{PQ}$$

El vector v cuya magnitud es cero es **el vector cero, 0**. El vector cero no tiene asignada dirección.

Dos vectores v y w son iguales , lo que se escribe $v = w$ si tienen la misma magnitud y la misma dirección.

Por ejemplo los vectores de la figura 1.2.3 tiene la misma magnitud y la misma dirección, por lo que son iguales, no obstante tener distintos puntos iniciales y finales. De aquí que sea útil pensar en un vector sólo como una flecha , teniendo en mente que dos flechas (vectores) son iguales si tienen la misma dirección y la misma magnitud (longitud).

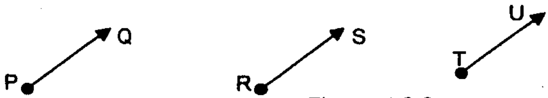


Figura 1.2.3

"Un vector $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ en R³ se puede representar en un sistema coordenado rectangular mediante un segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ con un punto inicial arbitrario en P(x, y, z) y un punto final $Q(x+a_1, y+a_2, z+a_3)$ como se muestra en la figura 1.2.4 "[2]

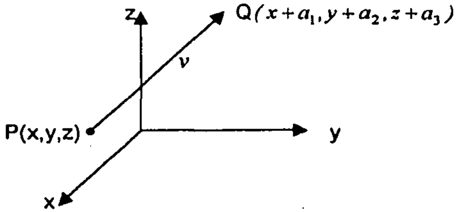


figura 1.2.4

1.2.1 MAGNITUD DE UN VECTOR EN R².

La magnitud de un vector v es la longitud de cualquiera de sus representaciones por v y se denota por $\|v\|$. La dirección de un vector, diferente del vector cero, es la dirección de cualquiera de sus representaciones.

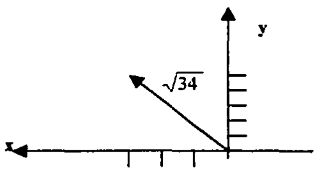
Si v es el vector $\langle v_1, v_2 \rangle$, entonces tenemos que $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Observe que $\|v\|$ es un número no negativo y no un vector, por lo que se deduce que $\|0\| = 0$ esto es, la magnitud del vector cero es cero.

Ejemplo 1: Encontrar la magnitud si $v = \langle -3, 5 \rangle$ y obtener su gráfica.
Solución: Empleando la formula de magnitud de un vector tenemos:

Empleando $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
Tenemos
$\|v\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2}$

$\|v\| = \sqrt{9 + 25}$
$\|v\| = \sqrt{34}$



---
[2] Calculo Con Geometría Analítica ; Earl W. Swokowski

1.2.2 MAGNITUD DE UN VECTOR EN R^3.

La magnitud $\|v\|$ de un vector $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es la longitud de cualquiera de sus representaciones geométricas. Aplicando la fórmula de distancia se obtiene $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Observe que $\|v\| \geq 0$ y que $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = 0$. igual que en dos dimensiones.

Si v es el vector $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, entonces tenemos que $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

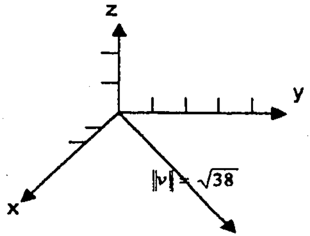
Ejemplo 2.- Encontrar la magnitud si $v = \langle 2,5,-3 \rangle$ y obtener su gráfica.

Solución: Empleando $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ tenemos:

$\|v\| = \sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (-3)^2}$

$\|v\| = \sqrt{4 + 25 + 9}$

$\|v\| = \sqrt{38}$



Ejercicios Propuestos:

Sea el vector v encontrar su magnitud y graficar.

Vector	Solución
1.- $v = \langle 2,-6 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{40}$
2.- $v = \langle 3,4 \rangle$	$\|v\| = 5$
3.- $v = \langle 7,-3 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{58}$
4.- $v = \langle -4,-5 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{41}$
5.- $v = \langle -4,1,7 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{66}$
6.- $v = \langle 5,6,-2 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{65}$
7.- $v = \langle -8,2,9 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{149}$
8.- $v = \langle 3,-3,-1 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{19}$
9.- $v = \langle 7,-4,6 \rangle$	$\|v\| = \sqrt{101}$

1.2.3 SUMA DE VECTORES

"La suma de $v + w$ de dos vectores se define : colocamos los vectores v y w de modo que el punto final de v coincida con el punto inicial de w, como en la figura 1.2.5 . El vector $v + w$ es entonces el vector cuyo punto inicial coincide con el punto inicial de v y cuyo punto final coincide con el punto final de w .

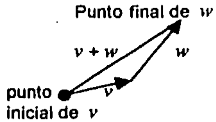


Figura 1.2.5

La suma de dos vectores nos determina un tercer vector, para ello basta sumar las componentes correspondientes. En forma geométrica, la suma de dos vectores $v + w = \langle v_1 + v_2 \rangle + \langle w_1 + w_2 \rangle$, seria colocar las componentes $v_1 + w_1$, $v_2 + w_2$ puesto que las dos sumas yacen sobre la diagonal de un paralelogramo. Por esta razón, la regla para la adición de vectores se le llama ley del paralelogramo.

La suma de dos vectores es conmutativa . Es decir si v y w son dos vectores cualquiera, entonces $v + w = w + v$ la figura 1.2.6 muestra esta propiedad.

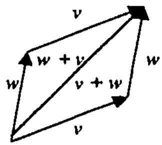


figura 1.2.6

La suma de dos vectores también es asociativa. Es decir, u ,v y w son vectores entonces $u +(v + w) = (u + v) + w$ la figura 1.2.7 muestra la propiedad."[3]

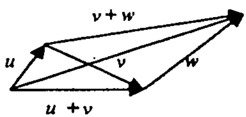
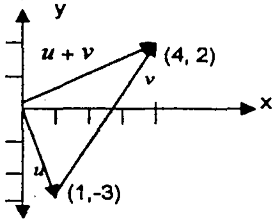


Figura 1.2.7

[3] Precalculo . Sullivan, Interamericana

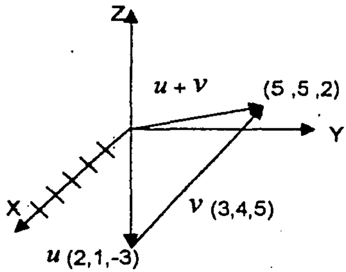
Ejemplo 1.- Sea $u = (1, -3)$ y $v = (3, 5)$ encontrar $u + v$ y graficar.
Solución:

$u + v = (1+3, -3+5) \rightarrow u + v = (4, 2)$



Ejemplo 2.- Sea $u = (2, 1, -3)$ y $v = (3, 4, 5)$ encontrar $u + v$ y graficar.
Solución:

$u + v = (2 + 3, 1 + 4, -3 + 5) \rightarrow u + v = (5, 5, 2)$



Ejercicios propuestos:

Sea $u = (2, 4)$ y $v = (-3, 5)$, Encontrar $u + v$ Solución (-1, 9)
Sea $u = (-3, 0)$ y $v = (4, -5)$, Encontrar $u + v$ Solución (1, -5)
Sea $u = (2, 3)$ y $v = (1, 4)$; Encontrar $u + v$ Solución (3, 7)
Sea $u = (1,-4)$ y $v = (5, 3)$, Encontrar $u + v$ Solución (6, -1)
Sea $u = (7, -3)$ y $v = (-2, 4)$, Encontrar $u + v$ Solución (5, 1)
Sea $u = (2, 5,-3)$ y $v = (-4, 2,1)$ Encontrar $u + v$ Solución (-2, 7,-2)
Sea $u = (3, 1, 2)$ y $v = (1, 2, 0)$ Encontrar $u + v$ Solución (4, 3, 2)
Sea $u = (-3, 2, 6)$ y $v = (1, 5, -1)$ Encontrar $u + v$ Solución (-2, 7, 5)
Sea $u = (2, 4, -5)$ y $v = (4, -2, 3)$ Encontrar $u + v$ Solución (6, 2, -2)
Sea $u = (5, 6, -2)$ y $v = (-3, 8, 7)$ Encontrar $u + v$ Solución (2,14, 5)

1.2.4 DIFERENCIA DE VECTORES

"La diferencia de dos vectores de v y w es representada por $v - w$ es el vector que se obtiene al sumar v al negativo de w esto es:

$$v - w = v + (-w)$$

v en términos de componentes escalares sería; $v_1 - w_1,\ v_2 - w_2$.

si $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ entonces el vector negativo $\langle -v_1, -v_2 \rangle$ y se define como el negativo de v y se representa $-v$. Notar que $v + (-v) = 0$.

El negativo del vector v es un vector que tiene la misma magnitud que v pero dirección opuesta. Por lo que refiriéndonos la diferencia de vectores podemos decir que restar un vector es lo mismo que sumar su negativo."[4]

Esto nos proporciona una interpretación geométrica para $v - w$. Si representamos a v y a w por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con el mismo punto inicial, como se muestra en la figura 1.2.8 entonces $\overrightarrow{PR}$ - $\overrightarrow{RQ}$ - $\overrightarrow{PQ}$ y por lo tanto $\overrightarrow{RQ}$ representa a $v - w$

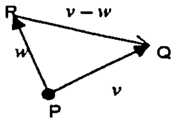


Figura 1.2.8

Para interpretar geométricamente la diferencia de dos vectores, considere las representaciones de los vectores v y w que tienen el mismo punto inicial, entonces, el segmento rectilíneo dirigido desde el punto final de la representación de v hasta el final de la representación de w es una representación $v - w$."[5]

Ejemplo 2.- Sea $v = \langle 5,-4 \rangle$ y $w = \langle -3,2 \rangle$ encontrar $v - w$ y graficar.

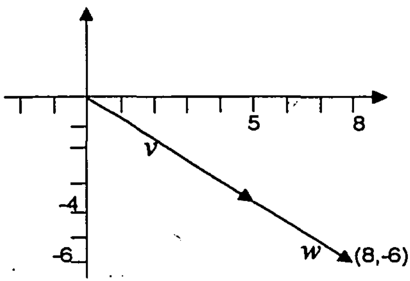
Solución: $v - w = (5, -4) - (-3, 2)$

$= (5, -4) + (3, -2)$

$= (5 + 3, \ -4 - 2)$

$= (8, -6)$

$v - w = (8, -6)$



---

[4] Montes de Oca Francisco, Álgebra Lineal, Upiicsa
[5] Ibidem.

1.2.5 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES POR UN NUMERO

Al trabajar con vectores, nos referimos a los números reales como **escalares** Los escalares son cantidades que sólo tienen magnitud. Algunos ejemplos físicos de cantidades escalares son la temperatura, la rapidez y el tiempo. Ahora de definirá la multiplicación de un vector por un escalar.

Si α es un escalar y v un vector , el producto de v por el escalar α se define como:

1.- Si $\alpha > 0$, el producto $\alpha\ v$ es el vector cuya magnitud es α veces la magnitud de v y cuya dirección es igual a la de v.

2.- Si $\alpha > 0$, entonces v es un vector cuya representación tiene una longitud de α veces la magnitud de v y en la misma dirección que v ver figura 1.2.9.

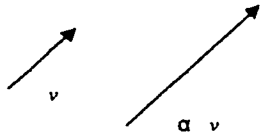


figura 1.2.9

2.- Si $\alpha < 0$, el producto $\alpha\ v$ es el vector cuya magnitud es $|\alpha|$ veces la magnitud de v y cuya dirección es opuesta a la de v.

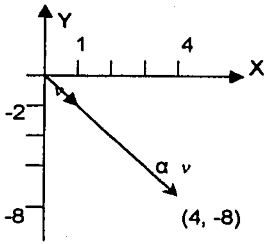
Si $\alpha < 0$, entonces $\alpha\ v$ es un vector cuya representación tiene una longitud que es α veces la magnitud de v en dirección opuesta a la de v ver figura 1.2.10

Figura 1.2.10

3.- si $\alpha = 0$ o si $v = 0$, entonces $\alpha\ v = 0$.

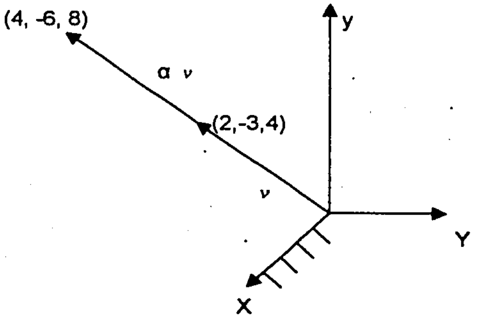
Ejemplo 1.- si $v = \langle 1,-2 \rangle$ y $\alpha = 4$

Solución: Tenemos $\alpha \; v = [(4)(1)+(4)(-2)] = (4, -8)$



Ejemplo 2.- Si $v = \langle 2,-3,4 \rangle$ y $\alpha = 2$

Solución: Tenemos $\alpha \; v = [\,(2)(2),\ (2)(-3),\ (2)(4)\,] = [4, -6, 8]$



Ejercicios propuestos:

Ejercicios: Sea $u = (2, 3)$, $v = (4, -1)$ Encontrar:

a).- $5u$	Solución (10, 15)
b) $5u - 6v$	Solución (-14, 21)
c).- $-6v$	Solución (-24, 6)
d) $3v - 2u$	Solución (8, -9)
e).- $-2u$	Solución (-4, -6)
f) $3u + 2v$	Solución (14, 7)

1.2.6 REPRESENTACIÓN DE VECTORES EN EL PLANO.

"Utilizamos un sistema de coordenadas rectangulares para representar vectores en el plano. Sean i un vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje x positivo, y j un vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje y positivo. Si v es un vector unitario cuya dirección es a lo largo del eje y positivo. Si v es un vector como punto inicial en el origen O y punto final en P = (a, b), entonces podemos representar v en términos de vectores i y j como; $v = ai + bj$

Los escalares a y b son lo componentes del vector $v = ai + bj$ donde a es la componente en la dirección **i** , y b es la componente en la dirección **j** ver figura 1.2.11

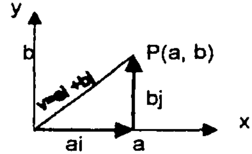


Figura 1.2.11

Definición: Sea un vector con punto inicial en $p_1 = (x_1, y_1)$, no necesariamente el origen, y el punto final $p_2 = (x_2, y_2)$. Si $v = P_1 P_2$, entonces v es igual al vector de posición $v = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$ ver figura 1.2.12

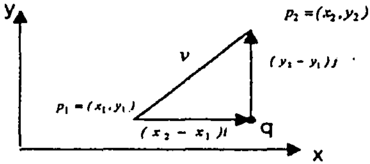


figura 1.2.12

En el sistema de coordenadas rectangulares, se usan habitualmente los símbolos especiales **i, j, k** para designar los vectores unitarios en las direcciones de x, y, z respectivamente ver figura 1.2.13. Nótese que **i, j, k** no necesitan estar localizados en el origen. Como todos los vectores, pueden trasladarse a cualquier parte en el espacio de las coordenadas, siempre y cuando no se cambien sus direcciones respecto a los ejes coordenados."[6]

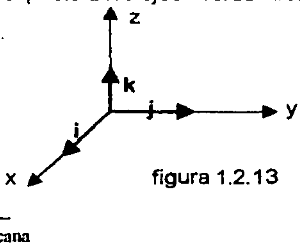


figura 1.2.13

[6] Precalculo: Sullivan; Interamericana

Se dice que v es un vector unitario si $|v| = 1$. Los vectores unitarios particulares son : $i = \langle 1,0,0 \rangle$, $j = \langle 0,1,0 \rangle$, $k = \langle 0,0,1 \rangle$

Son importantes ya que todo vector $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se puede expresar como una combinación lineal de i, j, k. Explícitamente.

$$v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad = \quad v_1 i, v_2 j, v_3 k$$

En la figura 1.2.14 se muestra la representación geométrica de i, j, k

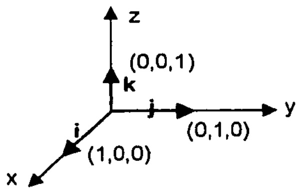


figura 1.2.14

y en la figura 1.2.14 se representa el vector de posición correspondiente a $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ se puede considerar como la suma de los tres vectores correspondientes de $v_1 i, v_2 j, v_3 k$.

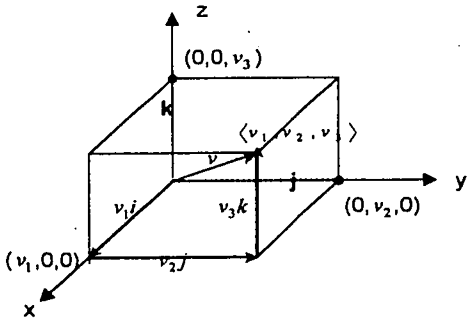


Figura 1.2.14

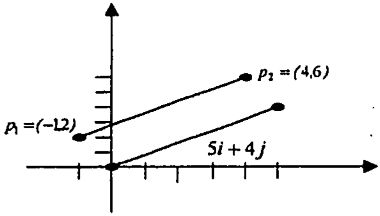
Ejemplo 1.- Determinar el vector posición del vector $v = P_1P_2$ si $p_1 = (-1,2)$ y $p_2 = (4,6)$

Solución: Empleando la ecuación $v = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j$ el vector de posición es igual a v es

$v = [4-(-1)]i + [6-2]j$

$v = [4+1]i + 4j$

$v = 5i + 4j$



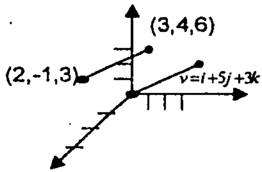
Ejemplo 2.- Dados los puntos $p_1 = (2,-1,3)$ y $p_2 = (3,4,6)$ Encontrar el vector unitario que tiene la misma dirección que tiene $v(P_1P_2)$.

Solución:

$v = [3-2]i + [4-(-1)]j + [6-(3)]k$

$v = i + (4+1)j + (6-3)k$

$v = i + 5j + 3k$



Ejercicios propuestos :

En los siguientes problemas en vector v tiene un punto inicial P y un punto final Q escriba v en la forma ai +bj, determine su vector posición.

Ejercicio	Solución
1.- P(0, 0) y Q(3, 4)	v = 3i + 4j
2.- P(3, 2) y Q(5, 6)	v = 2i + 4j
3.- P(-2, -1) y Q(6, -2)	v = 8i - j
4.- P(1, 0) y Q(0, 1)	v = -i + j
5.- P(0, 0) y Q(-3, -5)	v = -3i - 5j
6.- P(-3, 2) y Q(6, 5)	v = 9i + 3j
7.- P(-1, 4) y Q(6, 2)	v = 7i - 2j
8.- P(1, 1) y Q(2, 2)	v = i + j
9.- P(3,-1,-4) y Q(7,2,4)	v= 2i + 3j + 8k
10.- P(4,-3,-1) y Q(-2,-4,-8)	v= -6i – j – 7
11.- P(1,3,5) y Q(2,-1,4)	v= i – 4j – k
12.- P(-2,6,5) y Q(2,4,1)	v= 4i –2j – 4k

1.3 PRODUCTO PUNTO

La definición del producto punto de dos vectores es algo sorpresiva. Sin embargo, este producto tiene cierto significado en las aplicaciones geométricas y físicas

Sea v y w vectores en R^n $v=(v_1,v_2,v_3,...,v_n)$ y $w=(w_1,w_2,w_3,...,w_n)$

Si $v = a_1 i + b_1 j$ y $w = a_2 i + b_2 j$ son dos vectores, el producto punto $v \cdot w$ se define como : $v \cdot w = a_1a_2 + b_1b_2$

Como el producto punto $v \cdot w$ de dos vectores v y w es un número real (escalar), también se le conoce como producto escalar o producto interior.

La definición de producto punto de dos vectores en R^3 es una extensión de la definición para vectores en R^2

Si $v=v_1,v_2,v_3$ y $w=w_1,w_2,w_3$ entonces el producto punto de v y w denotado por $v \cdot w$ está dado por $v \cdot w = a_1b_2 + a_2b_2 + a_3 b_3$

Ejemplo 1.- Dados los vectores $v = \langle 2,-3 \rangle$ y $w = \left\langle \frac{-1}{2},4 \right\rangle$ encontrar $v \cdot w$

Solución: $v \cdot w = \langle 2,-3 \rangle \cdot \left\langle \frac{-1}{2},4 \right\rangle$

$= (2)(-\frac{1}{2}) + (-3)(4)$

$= -1 - 13$

$v \cdot w = -14$

Ejemplo 2.- Dados los vectores $v=\langle 4,2,-6 \rangle$ y $w = \langle -5,3,-2 \rangle$ encontrar $v \cdot w$

Solución: $v \cdot w = \langle 4,2,-6 \rangle \cdot \langle -5,3,-2 \rangle$

$= 4(-5) + (2)(3) + (-6)(-2)$

$= -20 + 6 + 12$

$v \cdot w = -2$

Ejercicios propuestos: Dados los siguientes vectores encontrar. $v \cdot w$

1.- $v = \langle -1,2 \rangle$ y $w = \langle -4,3 \rangle$ Solución. $v \cdot w = 10$

2.- $v = \langle \frac{1}{3}, \frac{-1}{2} \rangle$ y $w = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3} \rangle$ Solución. $v \cdot w = \frac{1}{6}$

3.- $v = \langle 4,3 \rangle$ y $w = \langle 1,-1 \rangle$ Solución. $v \cdot w = 1$

4.- $v = \langle -2,-3 \rangle$ y $w = \langle 3,-2 \rangle$ Solución. $v \cdot w = 0$

5.- $v = \langle 5,-12 \rangle$ y $w = \langle 4,3 \rangle$ Solución. $v \cdot w = -16$

6.- $v = \langle -4,-2,4 \rangle$ y $w = \langle 2,7,-1 \rangle$ Solución. $v \cdot w = -24$

7.- $v = \langle \frac{1}{3}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{5} \rangle$ y $w = \langle \frac{5}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{4} \rangle$ Solución. $v \cdot w = \frac{4}{15}$

8.- $v = \langle 6,-3,0 \rangle$ y $w = \langle 5,4,-3 \rangle$ Solución. $v \cdot w = 15$

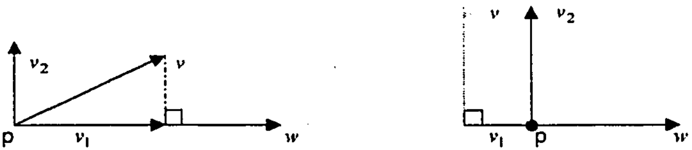
9.- $v = \langle -2,-3,5 \rangle$ y $w = \langle 3,-2,4 \rangle$ Solución. $v \cdot w = 20$

10.- $v = \langle 5,-12,6 \rangle$ y $w = \langle 4,3,-3 \rangle$ Solución. $v \cdot w = -34$

1.3.1 PROYECCIÓN DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Una interpretación geométrica del producto punto se obtiene considerando la proyección de un vector sobre otro vector.

Sean v y w dos vectores no nulos con el mismo punto inicial P. Queremos descomponer v en dos vectores v_1 paralelo a w, y v_2, ortogonal a w. Véase las figuras. 1.3.1 . El vector v_1 es la **proyección vectorial de v sobre w** y se denota $Proy_w v$.



Figuras 1.3.1

Obtenemos el vector v_1 como sigue : desde el punto final de v trazamos una perpendicular hasta la recta que contiene a w. El vector v_2 está dado por $v_2 = v - v_1$. Observe que $v = v_1 + v_2$, v_1, v_1 es paralelo a w y que v_2 es ortogonal a v que se esta buscando.

Ahora buscamos una fórmula para v_1 con base en el conocimiento de los vectores v y w. Como $v = v_1 + v_2$, tenemos

$$v \cdot w = (v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$$

Como v_2 es ortogonal a w, $v_2 \bullet w = 0$, Como v_1 es paralelo a $w \bullet v_1 = \alpha w$ para algún escalar α. Así, podemos escribir la ecuación de la siguiente forma :

$$v \bullet w = \alpha \; w \bullet w = \alpha \; \|w\|^2$$

$$\alpha = \frac{v \bullet w}{\|w\|^2}$$

Entonces ,

$$v_1 = \alpha w = \frac{v \bullet w}{\|w\|^2} w$$

si v y w son dos vectores no nulos, la proyección vectorial de v sobre w es

$$Proy_w v = \frac{v \bullet w}{\|w\|^2} w$$

La descomposición de v en v_1 y v_2, donde v_1 es paralelo a w y v_2 perpendicular a w, es

$$v_1 = Proy_w v = \frac{v \bullet w}{\|w\|^2} w \qquad v_2 = v - v_1$$

Ejemplo 1.- Determinar la proyección vectorial de $v = i + 3j$ sobre $w = i + j$

Solución: Primero descomponer v en dos vectores v_1 y v_2, donde v_1 sea paralelo a w y v_2 sea ortogonal a w

Empleando la formula $v_1 = Proy_w v = \frac{v \bullet w}{\|w\|^2} w$, tenemos

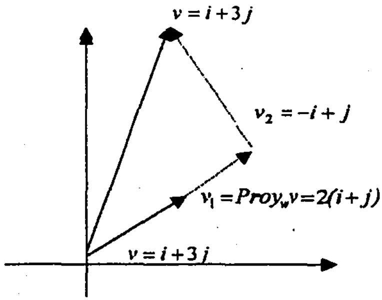
$$v_1 = Proy_w v = \frac{1+3}{(\sqrt{2})^2} w$$

$$v_1 = Proy_w v = \frac{4}{2} w$$

por lo tanto $2w$

y como $w = i + j$

➔ $v_1 = 2i + 2j$



y como $v_2 = v - v_1$

$$v_2 = (i + 3j) - 2(i + j)$$

$$v_2 = i - 2i + 3j - 2j$$

$$v_2 = -i + j$$

1.4 Proyección Ortogonal

Se define dos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ como ortogonales (escrito $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$) si $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} = 0$. Si se conviene que el vector cero forma un ángulo de $\pi/2$ con todo vector, entonces dos vectores son ortogonales si y sólo si son geométricamente perpendiculares.

"El producto escalar es útil en problemas en los que se tiene interés en "descomponer" un vector en una suma de vectores perpendiculares, si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores diferentes de cero en el espacio bidimensional o en el tridimensional, entonces siempre es posible escribir $\boldsymbol{u}$ como:

$$U = W_1 + W_2$$

Donde W_1 es un múltiplo escalar de $\boldsymbol{v}$ y W_2 es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ Ver figura 1.4.1

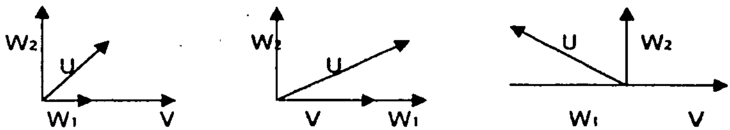


Figura 1.4.1

El vector W_1 recibe el nombre de proyección ortogonal de $\boldsymbol{v}$ y el W_2 es el componente de $\boldsymbol{u}$ ortogonal a $\boldsymbol{v}$.

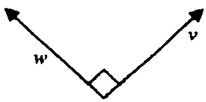
1.4.1 VECTORES PARALELOS Y ORTOGONALES

Dos vectores v y w son paralelos si existe un escalar no nulo α tal que $v = \alpha\, w$. En este caso , el ángulo θ entre v y w es 0 o π.

Si el ángulo θ entre dos vectores no nulos v y w es $\frac{\pi}{2}$ los vectores v y w son **ortogonales.**

Por otro lado, si $v \bullet w = 0$, entonces $v = 0$ o $w = 0$ o $\cos\theta = 0$. En el último caso $\theta = \frac{\pi}{2}$ y v y w son ortogonales, véase la figura 1.4.2 Si v o w Son el vector cero, entonces, como el vector cero no tiene una dirección específica, adoptaremos la convención de que el vector cero es ortogonal a cualquier vector.

Por lo que dos vectores v y w son ortogonales si y sólo si $v \bullet w = 0$



$v \bullet w = 0$

v es ortogonal a w

figura 1.4.1

1.5 ANGULO ENTRE VECTORES

Sean u y v dos vectores con el mismo punto inicial A. En este caso, los vectores u , v y $u - v$ forman un triángulo. El ángulo θ en el vértice A del triángulo es **ángulo entre los vectores** véase la figura 1.5.1 donde queremos determinar una fórmula para calcular en ángulo θ.

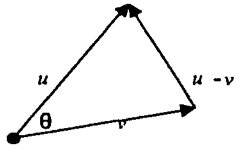


Figura 1.5.1

Los lados del triángulo miden $\|v\|$, $\|u\|$, y $\|u-v\|$, y θ es el ángulo entre los lados de la longitud $\|v\|$ y $\|u\|$. Podemos utilizar la ley de los Cosenos para determina el coseno del ángulo entre estos dos lados:

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\ \|v\|\cos\theta$$

Ahora utilizando la propiedad 4 para escribir esta ecuación en términos de productos puntos;

$$(u - v)\cdot(u - v) = u \cdot u + v \cdot v - 2\|u\|\ \|v\|\cos\theta$$

después se aplica la propiedad distributiva 3 dos veces al lado izquierdo para obtener

$$\begin{aligned}(u - v)\cdot(u - v) &= u \cdot(u - v) - v\cdot(u - v)\\ &= u \cdot u - u \cdot v - v\cdot u + v\cdot v\\ &= u \cdot u + v \cdot v - 2u \cdot v\end{aligned}$$

combinamos

$$u \cdot u + v \cdot v - 2u \cdot v = u \cdot u + v\cdot v - 2\|u\|\ \|v\|\cos\theta$$

$$u \cdot v = \|u\|\ \|v\|\cos\theta$$

Así queda demostrado el siguiente enunciado:

Si u y v son dos vectores no nulos, el ángulo θ, $0 \le \theta \le \pi$, entre u y v está dado por la fórmula :

$$Cos\ \theta = \frac{u \bullet v}{\|u\|\|v\|}$$

Escoja un sistema ortogonal con unidades iguales sobre los ejes sean U = (X_1, Y_1, Z_1) y V = (X_2, Y_2, Z_2) son dos vectores cualesquiera; para hallar el ángulo entre U y V no se pierde generalidad si se supone que sus orígenes están en el de las coordenadas, de modo que sus extremos son: $U(X_1, Y_1, Z_1)$ y $V(X_2, Y_2, Z_2)$ Ver figura 1.5.2

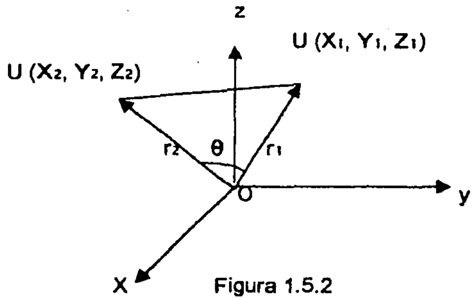


Figura 1.5.2

sean U = r_1 y V = r_2 por fórmula de la distancia y por la ley de los cósenos.

$$(UV)^2 = (X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2$$

$$= r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos\theta.$$

Donde la expresión del primer miembro, recibe el nombre de producto escalar o interno de los vectores U y V y se representa por $u \cdot v$ o sea

$$u \cdot v = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

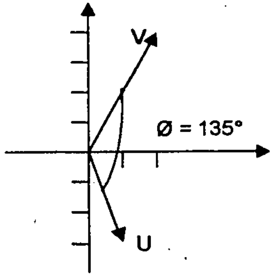
también como

$$\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_1r_2} = \frac{u \bullet v}{\|u\|\|v\|}$$

que es la fórmula para calcular el Coseno del ángulo que forman los vectores U y V, en términos de sus componentes .

Ejemplo 1.- Encuentre el ángulo entre los vectores U = (1, -3) y V = (2, 4)

Solución: $U \cdot V = (1)(2) + (-3)(4)$
$= 2 - 12$
$U \cdot V = -10$



$\| U \| = \sqrt{(1^2 + (-3)^2)}$
$= \sqrt{(1 + 9)}$
$\| U \| = \sqrt{10}$

$\| V \| = \sqrt{(2^2 + 4^2)}$
$= \sqrt{(4 + 16)}$
$\| V \| = \sqrt{20}$

$$Cos\ \theta = \frac{u \bullet v}{\|u\|\|v\|}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-10}{\sqrt{20}\sqrt{10}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-10}{\sqrt{5 x 4}\sqrt{10}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{\cancel{-10}}{\cancel{2}\sqrt{5}\sqrt{10}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{2 x 5}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{\cancel{-5}}{\cancel{5}\sqrt{2}}$$

$$Cos\ \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = Cos^{-1} \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 135^0$$

Ejemplo 2.- Encuentre el ángulo entre los vectores $u = \langle 4,1,8 \rangle$ y $v = \langle 1,0,3 \rangle$

Solución: Solución: $u \bullet v = (4)(1) + (1)(0) + (8)(-3)$

$= 4 + 0 - 24$

$u \bullet v = -20$

$|| U || = \sqrt{(4^2 + 1^2 + 8^2)}$

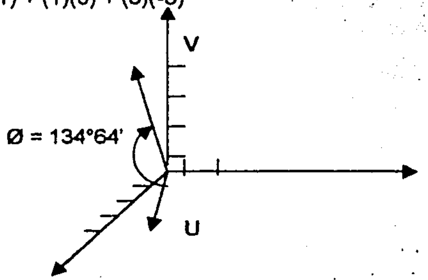
$= \sqrt{(16 + 1 + 64)}$

$|| U || = \sqrt{81}$

$|| V || = \sqrt{(1^2 + 0^2 + (-3)^2)}$

$= \sqrt{(1 + 9)}$

$|| V || = \sqrt{10}$



$$Cos\ \theta = \frac{u \bullet v}{\|u\|\|v\|}$$

entonces el $Cos\theta = \dfrac{-20}{9\sqrt{10}}$

$$Cos\theta = \frac{-20}{9\sqrt{10}}$$

$$\theta = Cos^{-1}\frac{-20}{9\sqrt{10}}$$

por lo tanto Ø = 134°64'

Ejercicios propuestos:

Encontrar los Cosenos y los ángulos de los siguientes vectores

a). $u = (-1, 0)$ $v = (3, 8)$ Solución. Cos Ø = $-3/\sqrt{73}$ Ø = 110.56°

b). $u = (1/2, -3)$ $v = (-2, 12)$ Solución. Cos Ø = -1 Ø = 180°

c). $u = (4, -3)$ $v = (1, 2)$ Solución. Cos Ø = $(-2/5\sqrt{5})$ Ø = 100.3°

d). $u = (-1, 5, 2)$ $v = (2, 4, -9)$ Solución. Cos Ø = 0 Ø = 90°

e). $u = (4, -1)$ $v = (-3, 2)$ Solución. Cos Ø = -14 Ø = 160.21°

f). $u = (10, 7)$ $v = (-2, -7/5)$ Solución. Cos Ø = (-149/5) Ø = 180°

g). $u = (1,01,0)$ $v = (-3,-3,-3,-3)$ Solución. Cos Ø = $(-1/\sqrt{2})$ Ø = 135°

h). $u = (4,3,1,-2)$ $v = (-2,1, 2, 2)$ Solución. Cos Ø = $(-3/\sqrt{30}\sqrt{2})$ Ø = 112.78°

i). $u = (2,1,7,-1)$ $v = (4,0,0,0)$ Solución. Cos Ø = $(2/\sqrt{55})$ Ø = 74.35°

1.6 Producto Cruz (R^3)

"En muchas aplicaciones de los vectores a problemas de la Geometría, Física e Ingeniería, se tiene interés en construir un vector en el espacio tridimensional que sea perpendicular a dos vectores dados.

Definición :

Si $u = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ y $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$, entonces el producto vectorial o producto cruz o producto exterior de u por v es:

$$u \times v = (b_1 c_2 - c_1 b_2) i + (c_1 a_2 - a_1 c_2) j + (a_1 b_2 - b_1 a_2) k$$

al trabajar con productos vectoriales es conveniente usar determinantes. Un determinante de orden 2 se define como:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

donde todas las letras representan números reales.

Un determinante de orden 3 está dado por

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} c_3$$

El producto vectorial (o producto cruz) u por v de los vectores $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$

se obtiene reemplazando a c_1, c_2, c_3 , en el lado derecho de la ecuación con los vectores i, j, k . Así por definición

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

una manera conveniente para recordar está fórmula es usar la notación.

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

"Si v es cualquier vector en R³, entonces $v \times 0 = 0 = 0 \times v$. Ya que si cada uno de los vectores en :

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

es 0, entonces cada uno de los determinantes tiene un renglón de ceros. También es cierto que $v \times v = 0$ para todo v ya que en este caso cada uno de los determinantes en

$$u \times v = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

tiene dos renglones iguales. Por lo que resulta importante la siguiente expresión. El vector $u \times v$ es ortogonal a u y a v. En términos geométricos implica que si dos vectores u y v diferentes de cero están representados por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ con el mismo punto inicial P, entonces $u \times v$ se pueden representar por un vector $\overrightarrow{PS}$ que es normal al plano determinado de P, Q , R como se ve en la figura 1.6.1 y se escribe como $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$." [7]

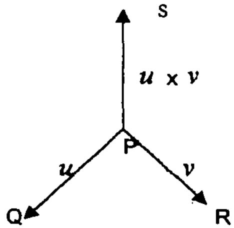


Figura 1.6.1

Ejemplo 1.- Halle $u \times v$ en donde $u = \langle 2,-1,3 \rangle$ y $v = \langle 0,1,7 \rangle$.
Solución: Escribiendo

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$= (-7-3)i - (14-0)j + (2-0)k$$
$$= -10i - 14j + 2k$$

[7] Calculo con Geometría Analítica; Earl W. Swokowski; Iberoamericana

Ejercicios Propuestos:

Sean $u = \langle 2,-2,3 \rangle$, $v = \langle 0,1,7 \rangle$ y $w = \langle 1,4,5 \rangle$. Calcule

a) $u \times v$ Solución. -4i,-14j,12k
b) $u \times (v \times w)$ Solución. -4i, -4j, -6k
c) $(u \times v) \times w$ Solución. -59i, -4j, 15k
d) $(u \times v) \times (v \times w)$ Solución. 0i, 48j, 56k
e) $u \times (v - 2w)$ Solución. -34i, 7j, -10k
f) $(u \times v) - 2w$ Solución. 0i, 15j, 1k

1.6.1 $u \times v$ Ortogonal tanto a u como a v:

En tanto que el producto escalar (punto) de dos vectores es un escalar, el producto vectorial cruz es otro vector. El teorema que sigue da una relación importante entre el producto escalar y el vectorial y también indica que $u \times v$ es ortogonal tanto a u como a v.

Teorema 1: Si u y v son vectores en el espacio tridimensional, entonces,

a) $u \cdot (u \times v) = 0$ ($u \times v$ es ortogonal a u)

b) $v \cdot (u \times v) = 0$ ($u \times v$ es ortogonal a v)

c) $\| u \times v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 - (u \cdot v)^2$ (Identidad de Lagrange)

Demostración
El inciso a y b se demuestran de la misma forma

a, b) $u \cdot (u \times v) = (u_1, u_2, u_3) \cdot (u_2 v_3 - u_3 v_2,\ u_3 v_1 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - u_2 v_1)$

$$= u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= 0$$

c) como $\| u \times v \|^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$

$\|u\|^2 + \|V\|^2 - (u \cdot v)^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2$

Resolviendo las multiplicaciones de $\| u \times v \|^2$ y $\| u \|^2 + \| v \|^2 - (u \cdot v)^2$ se verifica la igualdad.

Ejemplo 1.- Considere los vectores $u = \langle -5,3,2\rangle$ y $v = \langle 2,6,-3\rangle$ demostrar que es ortogonal.
Solución:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$u \times v = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} k$$

$$= (-9-12)i - (15-4)j + (-30-6)k$$

$$= -21i - 11j - 36k$$

Para comprobar que son ortogonales $u \cdot (u \times v)$ entonces

$$\begin{aligned} u \cdot (u \times v) &= (-5)(-21) + (3)(-11) + (2)(-36) \\ &= 105 - 33 - 72 \\ &= 105 - 105 \end{aligned}$$

$$u \cdot (u \times v) = 0$$

para comprobar que son ortogonales $v \cdot (u \times v)$ entonces

$$\begin{aligned} v \cdot (u \times v) &= (2)(-21) + (6)(-11) + (-3)(-36) \\ &= -42 - 66 + 108 \\ &= -108 - 108 \end{aligned}$$

$$v \cdot (u \times v) = 0$$

Por lo tanto $u \times v$ es ortogonal a u como para v por lo tanto los vectores son ortogonales.

Ejercicios Propuestos:

En cada uno de los ejercicios . Halle un vector ortogonal tanto a u como a v

a). $u = (-7, 3, 1)$ $v = (2, 0, 4)$ Solución. (12, 30, 6)

b). $u = (-1, -1, -1)$ $v = (2, 0, 2)$ Solución. (-2, 0, 2)

c). $u = (1, -5, 6)$ $v = (2, 1, 2)$ Solución. (-16, 10, 11)

d). $u = (0, 1, 7)$ $v = (1, 4, 5)$ Solución. (-23, 7; -1)

e). $u = (-1, 3, 2)$ $v = (1, 1, -1)$ Solución. (-5, 1, -4)

f). $u = (6, 7, 4)$ $v = (2, 0, -1)$ Solución. (-7, 14, -14)

Capitulo II Rectas y Planos

El objetivo de esta unidad es deducir las ecuaciones de recta y planos a partir de su definición como lugar Geométrico y su aplicación a problemas prácticos.

II.1 La recta en R^2 y R^3 y sus diferentes ecuaciones

En geometría aprendemos que toda recta en el plano se determina por dos puntos, un punto y su dirección (pendiente o su coeficiente angular), etc. Empezaremos indicando cuales son las diferentes ecuaciones de la recta:

a): **Punto-Pendiente**. La ecuación de la recta que pasa por el punto $p_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es M es:

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

b) **Pendiente ordenada al origen**: La ecuación de la recta de pendiente m y que corta al eje y en el punto (0, b) – Siendo b la ordenada al origen – es:

$$y = mx + b.$$

c): **Cartesiana**: la ecuación de la recta que pasa por los puntos $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$ es :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

d): **Reducida o Abscisa y ordenada en el origen**: La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados x e y en los puntos (a, 0) – siendo a la abscisa en el origen – y (0, b) – siendo b la ordenada en el origen – , respectivamente, es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

e): **General**: Una ecuación lineal o de primer grado en las variables x e y es de la forma $Ax + By + C = 0$, en donde A. B y C son constantes arbitrarias. La pendiente de la recta escrita en esta forma es $m = -A / B$ y su ordenada al origen es $b = -C / B$.

f): **Normal**: Una recta también queda determinada si se conoce la longitud de la perpendicular a ella trazada desde el origen (0, 0) y el ángulo de dicha perpendicular forma con el eje x.

A lo largo de este capitulo se estudiaran cada una de ellas, como se estructuran y cual es la forma de resolverlas.

Sea L una recta no vertical y $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$ dos puntos distintos sobre L Ver figura 2.1.1

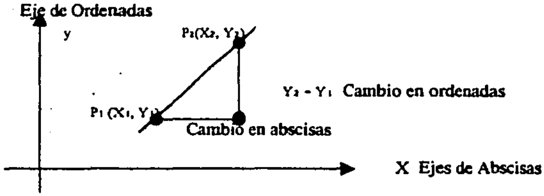


Figura 2.1.1

Al movemos el punto P_1 al punto P_2 obtenemos un cambio en las abscisas y en las ordenadas. Hallemos la razón del cambio en las ordenadas respecto al cambio en las abscisas.

Cambio en las ordenadas: $Y_2 - Y_1$

Cambio en las ordenadas: $X_2 - X_2$

La razón del cambio en ordenadas respecto al cambio en abscisas se representa como:

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1},$$ si el cambio es diferente de cero ver figura 2.1.2.

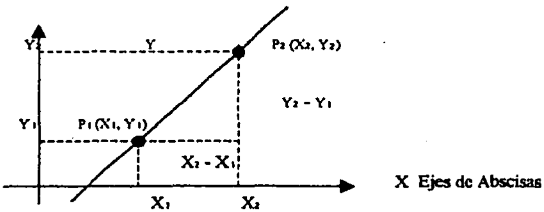


Figura 2.1.2

Esto nos demuestra que la razón de cambio en las ordenadas respecto al cambio en las abscisas es constante, no importa qué par de puntos seleccionemos. Esta razón de cambio se le llama Pendiente o declive de una recta y usualmente se representa con la letra M.

Si $P_1(X_1, Y_1)$, $P_2(X_2, Y_2)$ son dos puntos en una recta, con $X_1 \neq X_2$, entonces la pendiente de la recta es:

$$M = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

La ecuación de una gráfica es una ecuación que es satisfecha por las coordenadas de los puntos y solamente los puntos que estén en la grafica.

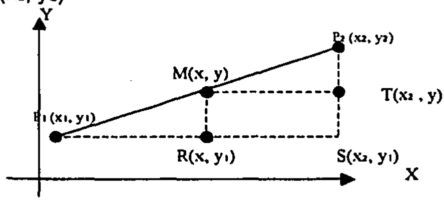
Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera y diferentes sobre la recta L, la cual no es paralela al eje Y, entonces, la Pendiente de L, representada por M esta dada por:

$$M = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

2.1 Formula del punto Medio

Ahora se obtendrán las formulas para determinar el punto medio de un segmento de recta.

Suponga que $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$



Debido a que los triángulos P_1RM y MTP son congruentes,

$P_1R = MT$ y $RM = TP_2$

De este modo

$$x - x_1 = x_2 - x \qquad\qquad y - y_1 = y_2 - y$$
$$x + x = x_1 + x_2 \qquad\qquad y + y = y_1 + y_2$$
$$2x = x_1 + x_2 \qquad\qquad 2y = y_1 + y_2$$
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Si $M(x, y)$ es el punto medio del segmento de recta que va de $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ entonces:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad\qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

En la deducción de las fórmulas, se ha considerado que $x_2 > x_1$ y $y_2 > y_1$, se obtienen las mismas fórmulas usando cualquier orden para estos números.

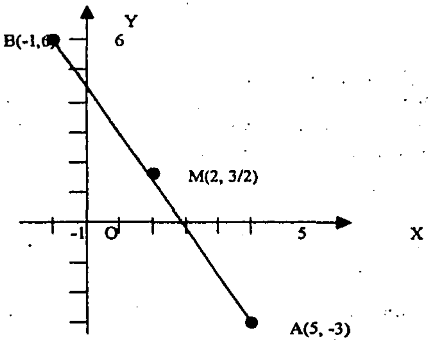
Ejemplo 1: Determine las coordenadas del punto medio M del segmento de recta que va de A(5, -3) y B(-1, 6)
Solución:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x = \frac{5 - 1}{2} \qquad y = \frac{-3 + 6}{2}$$

$$x = \frac{4}{2} \qquad y = \frac{3}{2}$$

por tanto M es el punto (2, 3/2)



Ejemplo 2. Encuentre Y_1, X_2 si $A(-3, Y_1)$, $B(X_2, 0)$, si el punto medio es (0, 4) y graficar
Solución:

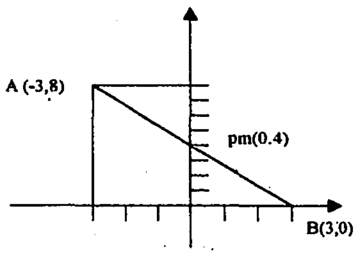
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$0 = \frac{-3 + x_2}{2} \qquad 4 = \frac{y_1 + 0}{2}$$

$$0 = -3 + x_2 \qquad 8 = y_1$$

$$x_2 = 3 \qquad y_1 = 8$$

por lo tanto los puntos son A(-3, 8) y B(3, 0)



Ejercicios propuestos: Encontrar el punto medio de los siguientes puntos

a).- $P_1(7, 4)$ y $P_2(-1, -2)$ Solución. Pm (3, 1)
b).- $P_1(-2, -3)$ y $P_2(4, -2)$ Solución. Pm (1, 5/2)
c).- $P_1(-2, -3)$ y $P_2(-4, 2)$ Solución. Pm (-3, -1/2)
d).- $P_1(-3, 4)$ y $P_2(6, 1)$ Solución. Pm (3/2, 5/2)
e).- $P_1(-3, -2)$ y $P_2(4, 2)$ Solución. Pm (1/2, 0)
f).- $P_1(2, 5)$ y $P_2(4, 2)$ Solución. Pm (3, 7/2)
g).- P_1 (6, Y_1) , P_2 (X_2,-4) y pm(5,-1) Solución. $y_1 = 2$ $x_2 = 4$
h).- P_1 (5, Y_1) , P_2 (X_2, 8) y pm(2, 5) Solución. $y_1 = 2$ $x_2 = -1$
i) .- P_1 (x_1, 5) , P_2 (3 , y_2) y pm(2,13/2) Solución. $x_1 = 1$ $y_2 = 8$
j) .- P_1 (x_1, 2) , P_2 (-2 , y_2) y pm(0,0) Solución. $x_1 = 2$ $y_2 = -2$

2.2 Punto Medio en R³

Las Coordenadas del punto medio del segmento dirigido cuyos extremos son los puntos $P_1 (x_1 , y_1, z_1)$ y $P_2 (x_2 , y_2, z_2)$ son:

$$x = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad y = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \qquad z = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

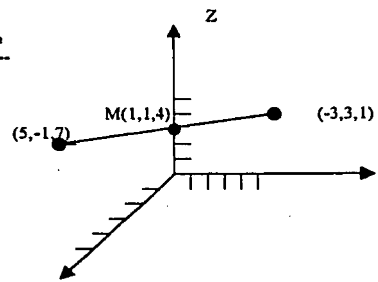
Ejemplo 1: Hallar las coordenadas del punto medio de los puntos P_1 (5, -1, 7) y P_2 (-3, 3, 1).

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \quad Z = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

$$X = \frac{5 - 3}{2} \quad Y = \frac{-1 + 3}{2} \quad Z = \frac{7 + 1}{2}$$

$$X = \frac{2}{2} \quad Y = \frac{2}{2} \quad Z = \frac{8}{2}$$

X= 1, Y = 1, Z = 4



2.3 Distancia entre dos puntos R^2:

Estableceremos la distancia entre dos puntos de un eje coordenado .
Sea P_1 y P_2 dos puntos en una recta y tengan las coordenadas x_1 y x_2 respectivamente.

Supongamos que nos interesa calcular la distancia entre $P_1 = (x_1 , y_1)$ y $P_2 = (x_2 , y_2)$ ver figura 2.1.3

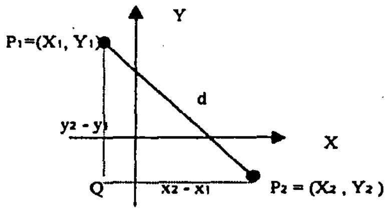


Figura 2.1.3

Se traza una recta vertical que pasa por P_1 y una horizontal que pase por P_2 y se intersecten en el punto $Q = (X_1, Y_2)$.

La distancia entre dos puntos $P_1 = (x_1 , y_1)$ y $P_2 = (x_2 , y_2)$ es

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Suponiendo que P_1 y P_2 no se encuentren en la misma recta horizontal y vertical P_1, P_2 , Q forman un triangulo rectángulo que tiene su ángulo recto en Q entonces podemos emplear ahora el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de P_1 , P_2 de acuerdo con lo anterior tenemos:

$$QP_2 = | x_2 - x_1| \quad y \quad P_1Q = | y_2 - y_1 |$$

Mantenemos en este caso los valores absolutos, porque deseamos que la fórmula obtenida sea válida para cualquier punto P_1 y P_2 según el teorema de Pitágoras.

$$P_1P_2 = \sqrt{| x_2 - x_1 |^2 + | y_2 - y_1|^2}$$

Pero como $| x_2 - x_1 |^2 = (x_2 - x_1)^2$ y $| y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$ podemos omitir los símbolos del valor absoluto y llegamos a :

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta ecuación establece la conocida relación para obtener la distancia entre los puntos A y B. En resumen la distancia entre dos puntos del plano es igual a la raíz cuadrada (no negativa) de la suma de los cuadrados de la diferencia de coordenadas entre los puntos dados.

Ejemplo 1.- Calcular la distancia entre los puntos cuyas ordenadas son P(-2, 4) y q(3, -5).

Solución: Se considera la formula de distancia entre dos puntos

$$pq = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

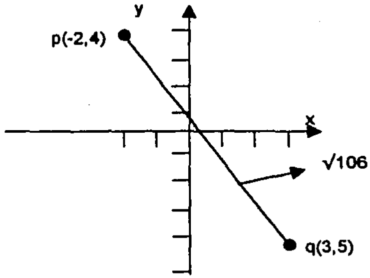
Sustituyendo los puntos tenemos.

$$pq = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-5 - 4)^2}$$

$$pq = \sqrt{(5)^2 + (-9)^2}$$

$$pq = \sqrt{25 + 81}$$

$$pq = \sqrt{106}$$



Ejemplo 2.- Uno de los extremos de un segmento es el punto p(5, 8) y el otro es q(x, 2) y la distancia pq = 10 obtener el valor de x.

Solución: empleando la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$pq = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

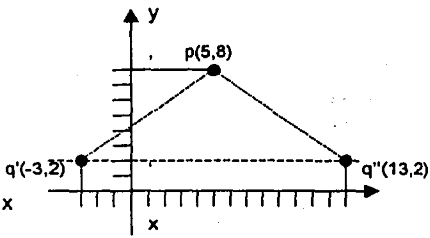
$$10 = \sqrt{(x - 5)^2 + (8 - 2)^2}$$

resolviendo el binomio

$$10 = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 6^2}$$

$$10 = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 36}$$

$$10^2 = x^2 - 10x + 61$$
$$x^2 - 10x + 61 - 100 = 0$$
$$x^2 - 10x - 39 = 0$$



factorizando se obtiene el valor de x

$$(x - 13)(x + 3) = 0$$

por lo tanto los valores de x son $x = 13$ y $x = -3$

Ejercicios propuestos:

1).- Determinar las distancias entre los puntos del triángulo cuyas coordenadas son los vértices p(-2, 3), q(1, 2), r(-4, 5)

Solución: pq = $\sqrt{10}$ qr = $\sqrt{34}$, rp = $\sqrt{8}$

2).- Un segmento de recta tiene por extremos los puntos p(1, 2) y q(5, -6). Encuentre la distancia entre los dos puntos.

Solución: pq = $\sqrt{80}$

3).- Un segmento de recta tiene por extremos los puntos p(2, 6) y q(2, -2). Encuentre la distancia entre los dos puntos.

Solución: pq = $\sqrt{16}$ = 4

4).- Encontrar el valor de x ya que p(8, 6) y q(x, 6) siendo la distancia pq = 7

Solución: x' = 15 y x'' = 1

5).- Encontrar el valor de y ya que p(-3, 8) y q(5, y) siendo la distancia pq = 10

Solución: x' = 14 y x'' = 2

6).- Encontrar el valor de y si p(-2, y) y q(3, -5) siendo la distancia pq = $\sqrt{106}$

Solución: y' = 14 y y'' = - 4

7).- Encontrar el valor de x si p(-3, 1) y q(x, -1) siendo la distancia pq = $\sqrt{40}$

Solución: x' = -9 y x'' = 3

8).- Encontrar el valor de y si p(2, -6) y q(2, y) siendo la distancia pq = 4

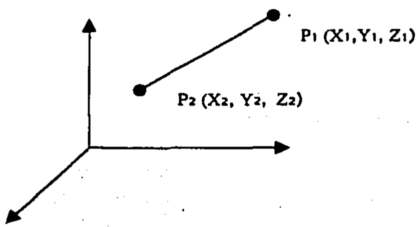
Solución: y' = -10 y y'' = -2

2.4 Distancia entre dos puntos R^3:

Sea $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ dos puntos en el espacio tridimensional entonces la distancia d entre ellos es la norma del vector P_1P_2:

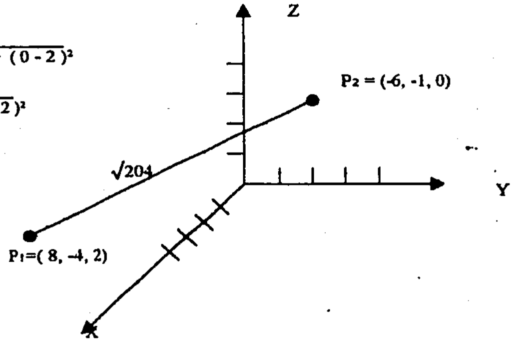
Debido a que $P_1P_2 = (x_2 - x_1), (y_2 - y_1), (z_2 - z_1)$

Se deduce que $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$



Ejemplo 1.- Encuentre la distancia d entre los puntos $P_1 = (8, -4, 2)$ y $P_2 = (-6, -1, 0)$

Solución:



$$d = \sqrt{(-6-8)^2 + (-1-(-4))^2 + (0-2)^2}$$

$$d = \sqrt{(-14)^2 + (-1+4)^2 + (-2)^2}$$

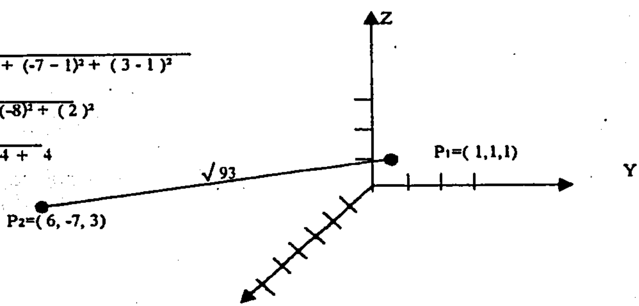
$$d = \sqrt{196 + (3)^2 + 4}$$

$$d = \sqrt{196+9+4}$$

$$d = \sqrt{204}$$

Ejemplo 2.- Encuentre la distancia d entre los puntos $P_1 = (1, 1, 1)$ y $P_2 = (6, -7, 3)$

Solución:



$$d = \sqrt{(6-1)^2 + (-7-1)^2 + (3-1)^2}$$

$$d = \sqrt{(5)^2 + (-8)^2 + (2)^2}$$

$$d = \sqrt{25 + 64 + 4}$$

$$d = \sqrt{93}$$

Ejercicios: Calcule las distancias entre los puntos P_1P_2

a)	$P_1 = (2, -1, -5)$	$P_2 = (4, -3, 1)$	Solución	$p_1p_2 = \sqrt{44}$
b)	$P_1 = (1, -3, 7)$	$P_2 = (8, -2, -2)$	Solución	$p_1p_2 = \sqrt{121}$
c)	$P_1 = (-3, 1, 2)$	$P_2 = (4, 2, -5)$	Solución	$p_1p_2 = \sqrt{99}$
d)	$P_1 = (7, 3, 5)$	$P_2 = (-8, 4, 2)$	Solución	$p_1p_2 = \sqrt{235}$
e)	$P_1 = (6, -1, 2)$	$P_2 = (2, 7, 4)$	Solución	$p_1p_2 = \sqrt{89}$

2.5 Ecuación de recta punto pendiente

"Una recta que tiene pendiente M y contiene al punto (x_1, y_1) tiene la ecuación

$$y - y_1 = M(x - x_1)$$

Demostración:

Sea (x, y) cualquier punto distinto de (x_1, y_1) en la recta dada figura 2.1.4 como la recta tiene pendiente, no es vertical. Por consiguiente, $x \neq x_1$, con lo cual obtenemos.

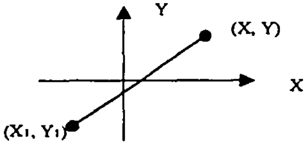


Figura 2.1.4

$$M = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

y

$$y - y_1 = M(x - x_1)$$

Aunque la fórmula se derivó sólo para puntos en la recta del punto (x_1, y_1), se ve que (x_1, y_1) satisface la ecuación"[1].

Ejemplo 1: Ecuación de recta que pasa por P(-3, -2) con pendiente M = 4/5

Solución:

$y - y_1 = M(x - x_1)$

$y - (-2) = 4/5\,(x - (-3))$

$y + 2 = 4/5\,(x + 3)$

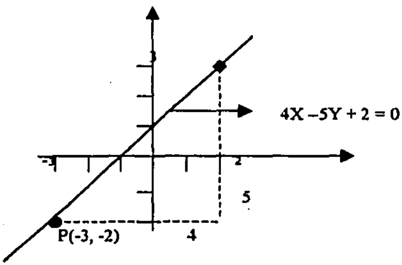
$5(y + 2) = 4(x + 3)$

$5y + 10 = 4x + 12$

$5y - 4x + 10 - 12 = 0$

$(5y - 4x - 2 = 0) * -1$

$4x - 5y + 2 = 0$



[1] Geometría Analítica: Tomas F. Ridlle; Thomson.

Ejercicios propuestos:
Deduce la ecuación de la recta indicada en los siguientes incisos:

	Solución.
a) Pasa por (2,-4), M = 2	$2x - y - 8 = 0$
b) Pasa por (5, 3), M =4	$4x - y - 17 = 0$
c) Pasa por (2, 2), M = 1	$x - y = 0$
d) Pasa por (-4, 6), M =5	$5x - y + 26 = 0$
e) Pasa por (1, 3), M = ½	$x - 2y + 5 = 0$
f) Pasa por (1, 3), M =1/4	$x - 4y + 11 = 0$
g) Pasa por (-2, -4), M = -3	$3x + y + 10 = 0$
h) Pasa por (3, -4), M =2/5	$2x - 5y - 26 = 0$

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos

a) (-4, 3) y pendiente ½	$x - 2y + 10 = 0$
b) (0, 5) y pendiente -2	$2x + y - 5 = 0$
c) (2, 0) y pendiente ¾	$3x - 4y - 6 = 0$
d) (-6, 2) y pendiente $^3/_2$	$3x - 2y + 14 = 0$
e) (-5, 8) y pendiente $-^1/_5$	$x + 5y - 35 = 0$
f) (-2, 4) y pendiente $-^5/_3$	$5x - 3y - 2 = 0$

2.6 Forma de dos puntos de la ecuación de la recta

"Una recta que pasa por 2 puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ cuando $x_1 \neq x_2$ tienen la ecuación:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Es importante mencionar que el resultado se representa muchas veces como:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$"[2]

[2] Geometria Analítica : Tomas F. Ridlle: Thomson

Ejemplo 1 : Determinar la ecuación de recta que pasa por 2 puntos A (4, 2) y B(-5, 7)

Solución.

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{2 - 7}{4 + 5}(x - 4)$$

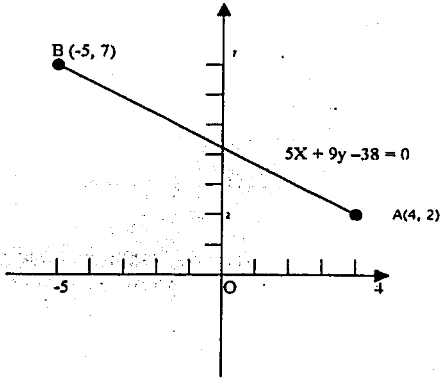
$$y - 2 = \frac{-5}{9}(x - 4)$$

$$9(y - 2) = -5(x - 4)$$

$$9y - 18 = -5x + 20$$

$$5x + 9y - 18 - 20 = 0$$

$$5x + 9y - 38 = 0$$



Ejercicios propuestos:

Deducir la ecuación de la recta que contiene los siguientes puntos:

	Puntos	Ecuación
a)	a(2, 5) b(-3, 1)	$4x - 5y + 17 = 0$
b)	a(1, 4) b (3, 5)	$x - 2y + 7 = 0$
c)	a(3, 3) b(1, 1)	$x - y = 0$
d)	a(2, 3) b(5, 3)	$3y - 9 = 0$
e)	a(2, -1) b(4, 4)	$5x - 2y - 12 = 0$
f)	a(2, 1) b(-3, 3)	$2x - 5y - 9 = 0$
g)	a(-7, 3) b(4, -4)	$7x + 11y + 16 = 0$
h)	a(-3, -3) b(4, 5)	$8x - 7y + 3 = 0$

2.7 Forma pendiente–ordenada al origen de ecuación de la recta.

"La abscisa al origen y la ordenada al origen son los puntos en los cuales una línea cruza a los ejes x, y respectivamente. Esos puntos se expresan en forma (a,0) y (0,b) ver figura 3.1.7 pero casi siempre sólo se representan mediante a y b, porque se sobreentiende por su posición en los ejes.

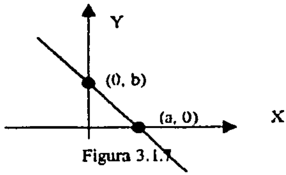


Figura 3.1.7

forma pendiente–ordenada al origen de la ecuación de una recta. La ecuación de una recta cuya pendiente es M y cuya ordenada al origen es b es:

$y = Mx + b$

Demostración: Considerando la formula de recta entre dos puntos tenemos que:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

Como $y_1 = b$ y $x_1 = 0$ $y_2 = 0$ y $x_2 = a$

Entonces tenemos que :

$$y - b = \frac{b - 0}{0 - a}(x - 0)$$

$$y - b = -\frac{b}{a}x$$

Como las coordenadas al origen son los puntos (a, 0) y (0, b), la pendiente de la recta es

$M = \frac{0 - b}{a - 0}$, por lo tanto queda $M = \frac{-b}{a}$

entonces sustituyendo M por –b/a tenemos la siguiente ecuación y – b = Mx despejando b la forma de la recta ordenada al origen queda como y = **Mx + b**

2.8 Forma simétrica de la ecuación de una recta:

La ecuación de una recta cuyas coordenadas al origen son a y b distintas de cero, es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

al emplear la forma pendiente – ordenada al origen tenemos que

$$y = \frac{-b}{a}x + b$$

Estas dos formas son sólo casos especiales de las formas punto – pendiente y de dos puntos en cualquier ocasión se puede emplear siempre la primera ecuación."[3]

Ejemplo 1: Deducir la ecuación de la recta que tiene como pendiente 4 y ordenada al origen 2

Solución:

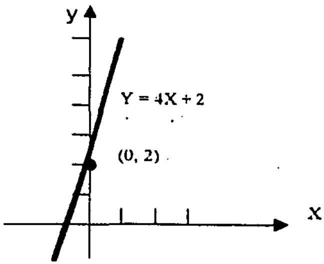
Empleando la ecuación de $y = Mx + b$

Tenemos que $y = 4x + 2$

De forma general de la recta

$-4x + y - 2 = 0$ multiplicando por –1 tenemos

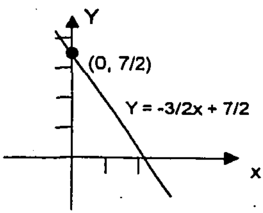
$4x - y + 2 = 0$



Ejemplo 2.- Hallar la pendiente m y la ordenada en el origen b de la recta $2y + 3x = 7$.

Solución:

Escribiendo la ecuación de la forma
$y = mx + b$
tendríamos $y = -3/2\ X + 7/2$
por lo tanto la pendiente seria $m = -3/2$
y su ordenada al origen seria 7/2



---

[3] Geometría Analítica : Gordon fuller : CECSA.

Ejemplo 3: Encontrar la Ecuación de la recta cuyas ordenadas al origen son a = 4 y b = 2 respectivamente

Solución.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

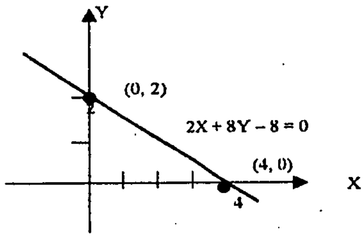
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

multiplicando todo por 8 tenemos

$$\frac{8x}{4} + \frac{8y}{2} = 1(8)$$

$$2x + 4y = 8$$

E.R $2x + 4y - 8 = 0$



Ejercicios Propuestos:
Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos siguientes:

a) abscisa = 7/2 ordenada = 7 Solución. $2x + y - 7 = 0$
b) abscisa = 5 ordenada = - 3 Solución. $3x - 5y - 3 = 0$
c) abscisa = 6 ordenada = 2 Solución. $x - 3y - 2 = 0$
d) abscisa = 3 ordenada = 4 Solución. $4x + 3y - 4 = 0$

2.9 Forma general de ecuación de una recta.

"Toda línea recta se puede representar mediante una ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$. En la cual A y B no son ceros a la vez, y toda ecuación de esta forma representa una línea recta.

Demostración: Suponemos que tenemos una ecuación de la forma $Ax + By + C=0$ se describen dos casos:

Caso I. si B = 0 Entonces

$$Ax + 0y + C = 0$$
$$Ax + C = 0$$
$$y \quad Ax = -C$$
$$x = -C/A$$

y esto representa una ecuación de una recta vertical.

Caso II. $B \neq 0$ al despejar y de $Ax + By + C = 0$, obtenemos

$$Y = -\frac{A}{B}X - \frac{C}{B}$$

Esta ecuación representa una recta cuya pendiente es $-A / B$ y cuya ordenada al origen es $-C / B$.
Al graficar toda ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$ representa una recta, y su gráfica se determina mediante dos de sus puntos. Con ella se determina fácilmente las coordenadas al origen, y la forma más rápida de trazar una recta es encontrar la que pasa por esas coordenadas."[4]

Ejemplo 1 : Trazar la recta representada por $2x - 5y + 1 = 0$

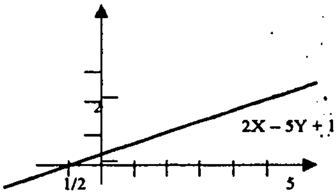
Solución: Cuando $y = 0$ entonces $x = -1/2$ y cuando $x = 0$ entonces $y = 1/5$

Empleando

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{tenemos}$$

$$y = -\frac{2}{-5}x - \frac{1}{-5}$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$$

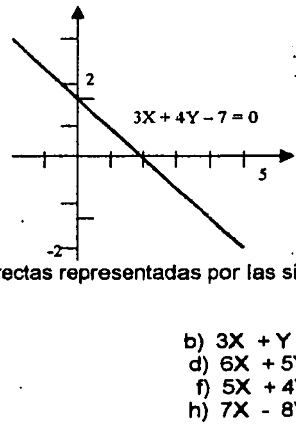


Ejemplo 2 : Trazar la recta representada por $3x + 4y - 7 = 0$
Solución: Empleando

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \quad \text{tenemos}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{-7}{4}$$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{7}{4}$$



Ejercicios propuestos: Trazar las rectas representadas por las siguientes ecuaciones generales

a) $5X + 9Y - 38 = 0$
b) $3X + Y + 2 = 0$
c) $4X - 5Y + 2 = 0$
d) $6X + 5Y - 7 = 0$
e) $3X + 4Y - 6 = 0$
f) $5X + 4Y - 20 = 0$
g) $8X - 4Y = 5$
h) $7X - 8Y = 0$

[4] Geometría Analítica; Ridlle; Thomson

II.2 *Distancia de un punto a una recta en R^2 y R^3*

"La Distancia del punto (x_1 , y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$d = \frac{| Ax_1 + By_1 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración dada la recta

$$Ax + By + C = 0$$

Y el punto (x_1 , y_1), entonces

$$Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$$

Es paralela a la recta dada y contiene a (x_1 , y_1) ver figura.3.1.8

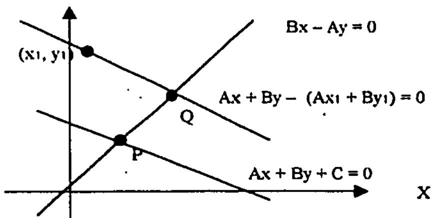


Figura 3.1.8

Además, $Bx - Ay = 0$ es perpendicular a ambas. La distancia que buscamos es la que hay entre los puntos P y Q de la figura. El punto de intersección de $Bx - Ay = 0$ y $Ax + By + C = 0$ es

$$P = \left(\frac{-AC}{A^2 + B^2}, \frac{-BC}{A^2 + B^2} \right)$$

Mientras que el punto de intersección de $Bx - Ay = 0$ con
$Ax + By - (Ax_1 + By_1) = 0$ es

$$Q = \left(\frac{A (Ax_1 + By_1)}{A^2 + B^2}, \frac{B(Ax_1 + By_1)}{A^2 + B^2} \right)$$

Al emplear la fórmula de la distancia obtenemos

$$d = \sqrt{\left(\frac{A(Ax_1 + By_1)}{A^2 + B^2} + \frac{AC}{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(\frac{B(Ax_1 + By_1)}{A^2 + B^2} + \frac{BC}{A^2 + B^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ "[6]

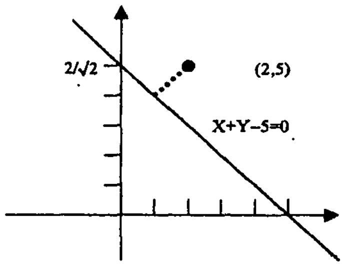
Ejemplo 1: Calcular la distancia del punto (2, 5) a la recta $x + y - 5 = 0$

Solución

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{|1.2 + 1.5 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{|2|}{\sqrt{2}}$$



La distancia del punto (x, y, z) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

[6] Geometría Analítica: Ridlle; thomson

Ejemplo 1. Calcular la distancia entre (3, -4, 1) y $x - 2y + 2z + 4 = 0$

Solución

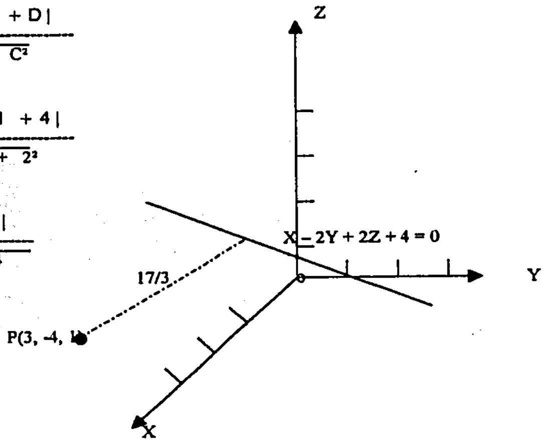
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|1*3 + -2*-4 + 2*1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}}$$

$$d = \frac{|3 + 8 + 2 + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 4}}$$

$$d = \frac{|17|}{\sqrt{9}}$$

$$d = \frac{17}{3}$$



Ejercicios Propuestos:
Determine la distancia de los siguientes ejercicios:

a). punto(4, 6) recta $3x + 6y - 8 = 0$ Solución $d = 22/\sqrt{45}$

b). punto(6, 2) recta $6x + 3y + 4 = 0$ Solución $d = 22/\sqrt{45}$

c). punto(2,-1) recta $3x - 2y + 5 = 0$ Solución $d = 13/\sqrt{13}$

d). punto(-2,-3) recta $8x + 15y - 24 = 0$ Solución $d = -5$

e). punto(-1, 7) recta $6x - 8y + 5 = 0$ Solución $d = 57/10$

f) recta $4x - y + 4 = 0$ y recta $12x - 3y + 5 = 0$ Solución $d = 7/\sqrt{153}$

g) recta $6x + 4y = 0$ y recta $12x + 8y - 10 = 0$ Solución $d = 5/\sqrt{52}$

h) recta $3x + 2y = 0$ y recta $6x + 4y - 5 = 0$ Solución $d = 5/2\sqrt{13}$

II. 3 Angulo e intersección de rectas

Considerando las dos rectas L_1 y L_2 y sea C el punto de intersección y A y B los puntos en que cortan al eje X ver figura 3.1.9 Sea θ_1 y θ_2 los dos ángulos suplementarios que forman. Cada uno de estos ángulos, θ_1 y θ_2 que se miden, tal como indican las flechas curvadas, en sentido contrario de las manecillas del reloj, o sea en sentido positivo. La recta a partir de la cual se mide el ángulo se le llama recta inicial la recta hacia la cual se dirige el ángulo se le llama recta final. Las pendientes de las recta se llaman pendiente inicial y pendiente final. Designemos por α_1 el ángulo de inclinación de la recta L_1 y por M_1 la pendiente; para L_2, sea α_2 y M_2 el ángulo de inclinación y la pendiente respectivamente.

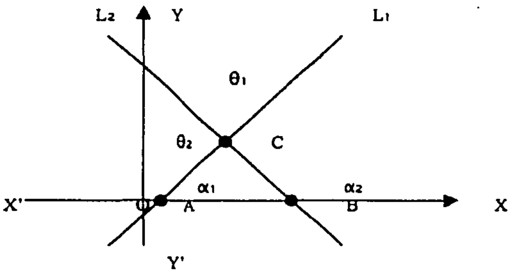


Figura 3.1.9

Vamos ahora a calcular cada uno de los ángulos de θ_1 y θ_2 cando se conocen sus pendientes M_1 y M_2 De los lados que forman estos ángulos.

Un ángulo exterior de un triangulo es igual a la suma de los ángulos opuestos por tanto en el triángulo ABC siendo θ_1 = ángulo ABC, tendremos.

$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$

tomando la tangente de ambos miembros de tenemos,

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg}. \alpha_2 - \operatorname{tg}. \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 . \operatorname{tg} \alpha_1} \qquad 2$$

pero como $M_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ $M_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ luego de 2 tenemos

$$\operatorname{tg}\ \theta_1 = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_2 M_1} \qquad 3$$

para el triangulo ABC de ambos miembros obtenemos

$$\operatorname{tg}\ \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg}.\ \alpha_1 + \operatorname{tg}\ (180° - \alpha_2)}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha(180° - \alpha_2)}$$

$$\operatorname{tg}\ \theta_2 = \frac{\operatorname{tg}.\ \alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2)}$$

donde obtenemos el resultado buscado.

$$\operatorname{tg}\ \theta_1 = \frac{M_1 - M_2}{1 + M_1 M_2} \qquad 4$$

comparando 3 y 4 vemos que solamente difieren en el signo lo cual era de esperarse puesto que θ_1 y θ_2 son ángulos suplementarios donde:

Un ángulo especificado θ formado por dos recta esta dado por la fórmula

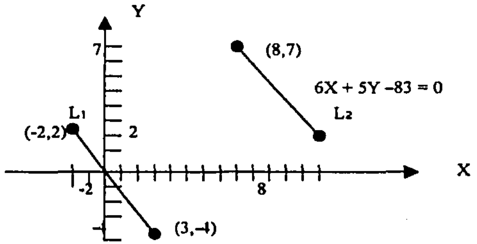
$$\operatorname{tg}\ \theta_1 = \frac{M_2 - M_1}{1 + M_1 M_2} \qquad M_1 M_2 \neq -1$$

en donde M es la pendiente inicial y M_2 la pendiente final correspondiente al ángulo θ

si $M_1\ M_2 = -1$ la tg θno está definida por la fórmula y en este caso se consideran dos características .

a) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que sus pendientes sean iguales. $M_1 = M_2$.

Ejemplo 1 : Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (7, 8) y es paralela a la recta determinada por los dos puntos C(-2, 2) y D (3, -4).
Solución:



obteniendo la pendiente de la recta L_1 que es la misma que L_2 $M_1 = \dfrac{-4-2}{3-(-2)}$

$M_1 = -6/5$

Utilizando la formula de punto pendiente obtenemos la ecuación de la recta L_2

$$y - y_1 = M(x - x_1)$$

$$y - 7 = -6/5\,(x - 8)$$

$$5(y - 7) = -6(x - 8)$$

$$5y - 35 = -x + 48$$

$$5y + 6x - 35 - 48 = 0$$

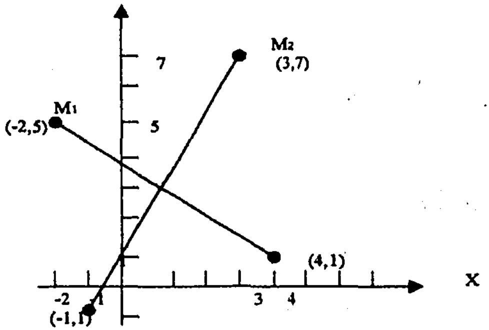
$$5y + 6x - 83 = 0$$

b) La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean perpendiculares entre sí es que el producto de sus pendientes sea igual a –1.

$$M_1 M_2 = -1$$

Ejemplo 2: Demostrar que la recta que pasa por los puntos (-2, 5) y (4, 1) es perpendicular a la que pasa por los puntos (-1, 1) y (3, 7).
Solución:

$$M_1 = \frac{5-1}{-2-4} = \frac{4}{-6} \quad , \quad M_2 = \frac{1-7}{-1-3} = \frac{-6}{-4} \rightarrow M_2 = \frac{6}{4}$$



$$M_1 \, M_2 = -1$$

Entonces $\dfrac{-4}{6} * \dfrac{6}{4} = -1$

$$\frac{-24}{24} = -1 \quad \rightarrow \quad -1 = -1$$

Entonces las rectas son perpendiculares.

Ejercicios propuestos:

Demostrar que las rectas que pasan por los puntos dados son perpendiculares

a) A(-2, 5) y B(4,1) con C(3, 7) y D(-1, -1) Solución: m1 = -2/3 m2 = 3/2
b) A(2, 4) y B(6,-2) con C(1,-1) y D(7, 3) Solución: m1 = -3/2 m2 = 2/3

II. 4 El plano y sus diferentes ecuaciones

En geometría analítica en el plano, se pueden especificar una recta al dar su pendiente y uno de sus puntos. Análogamente, es posible determinar un plano en el espacio tridimensional al dar su inclinación y especificar uno de sus puntos. Un método conveniente para describir la inclinación es especificar un vector (llamado normal) que sea perpendicular al plano.

"Supóngase que se desea la ecuación del plano que pasa por el punto P_1 (x_1, y_1, z_1) un punto fijo cualquiera y n una recta fija cualquiera en el espacio. Sean (A, B, C). Los números directores de n. Ver figura 3.1.10 Queremos hallar la ecuación del plano único que pasa por el punto P_1 y el perpendicular a la recta n.

Sea P(x, y, z) un punto cualquiera, diferente de P_1 sobre el plano.

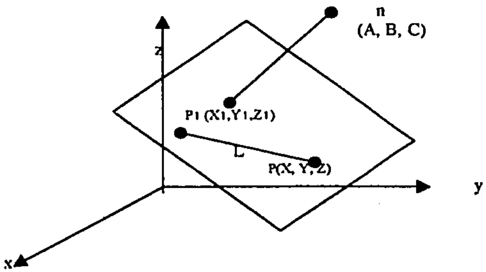


Figura 3.1.10

Sea L la recta que pasa por los puntos P_1 y P y que por tanto está contenida en el plano. Entonces L y n son perpendiculares entre sí donde un sistema de números directores para la recta que pasa por los puntos P_1 (x_1, y_1, z_1) y P_2 (x_2, y_2, z_2) está dado por $| x_2 - x_1 , y_2 - y_1 , z_2 - z_1 |$ por lo tanto para que dos rectas dirigidas sean perpendiculares es necesario y suficiente que la suma de los productos de sus números directores correspondientes sea igual a cero. Entonces tenemos

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad \text{-----------}1$$

Y esta es la condición que debe satisfacer cualquier punto en el plano por lo tanto la ecuación anterior también se puede escribir como

$$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$$

y como la expresión encerrada entre los paréntesis es una constante y por tanto puede reemplazarse por el termino constante D resulta que la ecuación es de la forma .

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \text{-------------- } 2$$

Recíprocamente si P_2 (x_2, y_2, z_2) es un punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (2) y por tanto a la ecuación (1) se verifica que:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

y como esta igualdad establece que la recta L' que pasa por los puntos P_1 y P_2 es perpendicular a la normal n y por lo tanto, esto sobre el plano, por lo tanto la ecuación general del plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ en donde A, B, C, y D son constantes y [A, B, C] son los números directores de sus normal."[4]

Ejemplo 1: Hallar la ecuación del plano que pasa por P_1 (6, 4, -2), y es perpendicular a la recta que pasa por P_2 (7, -2, 3), y P_3 (1, 4, -5)

Solución : Calcula primero los números directores P_2P_3

[1 – 7, 4 + 2, -5 – 3] = -6, 6, -8 Dividimos entre –2 y tenemos entonces 3, -3 , 4

Como L es perpendicular al plano, los números directores de su normal son también (3, -3, 4). Por tanto, por pasar por el plano por el punto P_1 (6, 4, 2), tenemos la ecuación buscada del plano.

Utilizando fórmula 1

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ entonces tenemos.

$3(x - 6) + (-3)(y - 4) + 4(z -(-2)) = 0$

$3x - 18 - 3y + 12 + 4z + 8 = 0$

$3x - 3y + 4z - 18 + 12 + 8 = 0$

$3x - 3y + 4z + 2 = 0$

[4] Geometría Analítica : Charles H. Lehmann : Limusa

Ejemplo 2. Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos no colineales $P_1\,(-3, 2, 4)$, $P_2\,(1, 5, 7)$, $P_3\,(2, 2, -1)$

Solución: Determinar primero los números directores de la normal al plano considerando el $P_1 P_2$ tenemos:

$P_1 P_2 \quad [\,1 + 3,\ 5 - 2,\ 7 - 4\,] \quad = \quad [\,4, 3, 3\,]$

$P_1 P_3 \quad [\,2 + 3,\ 2 - 2,\ -1 - 4\,] \quad = \quad [\,5, 0, -5\,]$ dividiendo entre 5 tenemos
$[\,1, 0, -1\,]$

Como este segmento esta en el plano, son ambos perpendiculares a su normal y utilizando determinantes se obtiene A, B, C

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} -3 \qquad B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} 7 \qquad C = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} -3$$

Utilizando las coordenadas del punto $P_1\,(-3, 2, 4)$ hallamos la ecuación buscada es:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$-3(\,x - (-3)) + 7(y - 2) + (-3)\,(z - 4) = 0$$

$$-3(x + 3) + 7(y - 2\,) - 3\,(z - 4\,) = 0$$

$$-3x - 9 + 7y - 14 - 3z + 12 = 0$$

$$-3x + 7y - 3z - 9 - 14 + 12 = 0$$

$$-3x + 7y - 3z - 11 = 0 \qquad *(-1)\,.$$

$\mathbf{3x - 7y + 3z + 11 = 0}$ que es la ecuación del plano buscada.

"La ecuación general del plano es $Ax + By + Cx + D = 0$ Donde [A, B, C] son los números directores del la normal y otra forma de escribirla es:

$$x + \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z + \frac{D}{A} = 0$$

Esta ecuación contiene tres constantes arbitrarias independientes. Por tanto, La ecuación de cualquier plano queda perfectamente determinada por tres condiciones independientes; por ejemplo tres puntos dados no colineales determinan el plano único."[5]

[5] ibidem

Ejemplo 3.- Hallar la ecuación del plano determinado por los tres puntos no colineales

P_1 (1, 4,-4), P_2 (2, 5, 3), y P_3(3, 0, -2).

Solución: Utilizando la ecuación general $Ax + By + Cz + D = 0$ podemos obtener un sistema de ecuaciones simultáneas con tres incógnitas sustituyendo cada uno de los puntos en la ecuación.
Para

P_1 $A(1)+B(4)+C(-4)+D = 0$ entonces la ecuación es $A + 4B - 4C + D = 0$ — 1

P_2 $A(2)+B(5)+C(3)+D = 0$ entonces la ecuación es $2A + 5B + 3C + D = 0$ — 2

P_3 $A(3)+B(0)+C(-2)+D = 0$ entonces la ecuación es $3A + 0 - 2C + D = 0$ — 3

Resolviendo por Ecuaciones simultáneas tenemos:
Sumar la ecuación (1)* –2 y ecuación(2)

$$\begin{array}{r} -2A - 8B + 8C - 2D = 0 \\ 2A + 5B + 3C + D = 0 \\ \hline -3B + 11C - D = 0 \text{ — } 4 \end{array}$$

sumar la ecuación (1)* –3 y ecuación(3)

$$\begin{array}{r} -3A - 12B + 12C - 3D = 0 \\ 3A + 0 - 2C + D = 0 \\ \hline -12B + 10C - 2D = 0 \text{ — } 5 \end{array}$$

Sumando la ecuación (4) * -4 y ecuación (5) tenemos

$$\begin{array}{r} 12B - 44C + 4D = 0 \\ -12B + 10C - 2D = 0 \\ \hline -34C + 2D = 0 \end{array}$$

donde el valor de $C = -\dfrac{2D}{-34}$ o $C = \dfrac{D}{17}$

Sustituyendo C en ecuación (3) tenemos

$$3A - 2\frac{D}{17} + D = 0 \rightarrow 3A + \frac{2D}{17} + D = 0 \rightarrow 3A + \frac{15D}{17}$$

$$\rightarrow A = -\frac{15D}{17(3)} \quad A = -\frac{5D}{17}$$

sustituyendo A y C en ecuación (1) tenemos

$$\frac{-5D}{17} + 4B - 4\frac{D}{17} + D = 0 \rightarrow 4B - \frac{9D}{17} + D = 0$$

$$\rightarrow 4B = \frac{9D}{17} - D \rightarrow 4B = -\frac{8D}{17} \quad B = -\frac{8D}{17(4)} \rightarrow B = -\frac{2D}{17}$$

sustituyendo A , B, y C en la ecuación general tenemos.

$$-\frac{5}{17}D\,x - \frac{2}{17}Dy + \frac{1}{17}D\,z + D = 0$$

considerando el valor de D como 17 tenemos:

$$-\frac{5}{17}(17)\,x - \frac{2}{17}(17)y + \frac{1}{17}(17)\,z + 17 = 0$$

$-5x\ -2y\ +z\ +\ 17\ = 0$ multiplicando (-1) tenemos la ecuación.

$5x + 2y - z - 17 = 0$. Que es la ecuación del plano buscada.

La parte más importante de la Geometría Analítica es la construcción de figuras a partir de una ecuación. Esta construcción de una superficie se facilita considerablemente por la determinación de sus intersecciones con los ejes coordenados y de sus trazos sobre los planos coordenados..

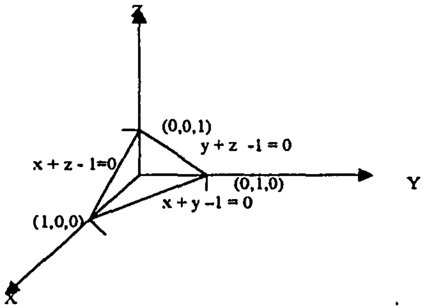
Ejemplo 4.- A partir de la ecuación de un plano $x + y + z - 1 = 0$.

Hallar sus intercepciones en los ejes coordenados y las ecuaciones sobre los planos coordenados y construir la grafica.
Solución:

Haciendo $y = z = 0$ y despejando x tenemos $x = 1$ (1, 0, 0).

Haciendo $x = z = 0$ y despejando y tenemos $y = 1$ (0, 1, 0).

Análogamente $x = y = 0$ y despejando z tenemos $z = 1$ (0, 0, 1).



Para encontrar las ecuaciones en cada uno de los planos igual a una variable 0

Plano xy la ecuación queda sí $z = 0$ $x + y - 1 = 0$

Plano xz la ecuación queda sí $y = 0$ $x + z - 1 = 0$

Plano yz la ecuación queda sí $x = 0$ $y + z - 1 = 0$

Ejercicios Propuestos:
Hallar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos dados.

1) P_1 (-2, -1,5), perpendicular a P_2 (2, -1, 2), y P_3 (-3, 1, -2).
Solución : $5x - 2y + 4z - 12 = 0$.

2) P_1 (2, -1,1), P_2 (-2, 1, 3), y P_3 (3, 2, -2) no colineales.
Solución: $6x + 5y + 7z - 14 = 0$

3) $4X + 6Y + 3Z - 12 = 0$ Graficar

4) $X + 2Y + 15Z - 15 = 0$

II. 5 Distancia de un punto a un plano

"Sea δ el plano y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el punto se va a determinar la distancia de P_1 a δ.

Supongamos que la forma normal de la ecuación de δ es

$x\text{Cos}\,\alpha + y\text{Cos}\,\beta + z\text{Cos}\,\gamma - \rho = 0$

Sea δ' el plano que pasa por P_1 y es paralelo a δ, sea p' la longitud de la normal trazada desde el origen a δ' ver figura 3.1.9. Como se ha convenido, p y p' se consideran números positivos.

Existen 6 casos posibles para las posiciones relativas de P_1, δ y el origen solamente uno de los casos se encuentra en la gráfica. Ver figura 3.1.11

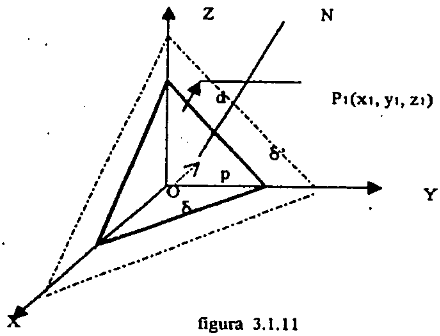


figura 3.1.11

Para llegar a un resultado común a todos los casos, emplearemos distancias dirigidas.

Como la ecuación del plano se da usualmente de la forma general entonces

$Ax + By + Cz + D = 0$

Entonces el resultado de la ecuación se puede expresar como

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

la distancia dirigida <u>d</u> del punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ se obtiene por la fórmula

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

en donde el signo del radical se elige de acuerdo a :

a) Si $D \neq 0$, r es de signo contrario a D

b) Si $D = 0$ y $C \neq 0$, r y C son del mismo signo.

c) Si $D = C = 0$ y $B \neq 0$, r y B son del mismo signo.

d) Si $D = C = B = 0$ entonces $A \neq 0$ y r y A son del mismo signo.

Si el plano no pasa por el origen el signo de D se interpreta de acuerdo con los incisos anteriores para la dirección de la normal al plano y usadas para la determinación del signo radical."[6]

Si se requiere solamente la distancia de un punto al plano tomamos el valor absoluto de d.

Ejemplo 1. Hallar la distancia del punto P(3, 2, -1) al plano $5y + 12z + 26 = 0$ interpretar el signo de esta distancia.

Solución:

$$d = \frac{0(3) + 5(2) + 12(-1) + 26}{\pm\sqrt{0^2 + 5^3 + 12^2}}$$

$$d = \frac{10 - 12 + 26}{\pm\sqrt{25 + 144}}$$

$$d = \frac{24}{\pm\sqrt{169}}$$

$$d = \frac{24}{\pm 13}$$

Ejercicios propuestos: Hallar la distancia del punto P al plano indicado.

a) P(-3, -4, 2)	plano $3x + 12y - 4z - 39 = 0$	Solución	$D = -8$
b) P(3, - 2, 7)	plano $x + 2y - 2z + 12 = 0$	Solución	$D = 1$
c) P(-5, -10, -3)	plano $4x - 3y + 12z = 0$	Solución	$D = -2$
d) P(2, 1, 6)	plano $2x - y + z - 18 = 0$	Solución	$D = 3\sqrt{6} / 2$

[6] Geometría Analítica: Charles H. Lehmann : Limusa.

II. 6 Familia de los planos

" La ecuación de un plano que satisface solamente 2 condiciones independientes contiene una sola constante arbitraria independiente o paramétrica que se conoce como plano monoparamétrica.

Con un solo parámetro $Ax + By + Cz + k = 0$.

Donde A, B y C son constantes fijas y k toma valores reales.

Esta ecuación representa a la familia de dos planos que son paralelos al plano dado $Ax + By + Cz + D = 0$.
Cuando existen intersecciones de dos planos entonces se toman las ecuaciones

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0. \text{ - - - - } 1$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \text{ - - - - } 2$$

Cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan ambas ecuaciones 1 y 2 esta sobre su recta de intersección.

En el caso de una familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas se obtiene la ecuación.

$$A_1x + B_1y + C_1z + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \text{ - - - - } 3$$

Donde k toma valores reales. "[7]

Ejemplo 1.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(3, -1, 4) recta de intersección de los planos $x + 2y - z = 4$, $2x - 3y + z = 0$

Solución: Sustituyendo ambos planos en la ecuación (3) tenemos

$X + 2y - z - 4 + K(2x - 3y + z - 6) = 0$ - - - - a

Como pasa por el punto p(3, -1, 4) se sustituye en la ecuación (a) y tenemos:

$3 + 2(-1) - 4 - 4 + k(2(3) - 3(-1) + 4 - 6) = 0$

$3 - 2 - 8 + k(6 + 3 + 4 - 6) = 0$

$-7 + k(7) = 0$ despejando k tenemos $k = 7/7$ $k = 1$.

sustituyendo k en la ecuación en la ecuación (a)

$x + 2y - z - 4 + 1(2x - 3y + z - 6) = 0$ - - - - a

$x + 2y - z - 4 + 2x - 3y + z - 6) = 0$ sumando términos semejantes.

$\mathbf{3x - y - 10 = 0}$ que es la ecuación del plano.

---

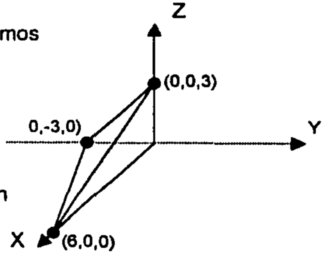
[7] Geometría Analítica: Gordon fuller. CECSA.

Ejemplo 2: Hallar la ecuación del plano $2x - 4y + 3z - 12 = 0$ en función de los segmentos que interceptan sobre los ejes de coordenadas.

Solución

Se divide toda la ecuación por 12 y tenemos

$$\frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$$



por lo tanto los puntos de intersección son con los ejes son 6, 3, 4.

Ejemplo 2.- Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al de ecuación $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ y que distan 5 unidades del origen.

Solución:

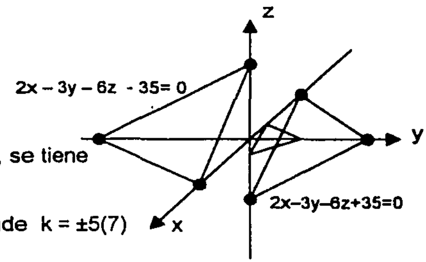
La ecuación de la familia de planos paralelos al dado tiene la forma

$2x - 3y - 6z - k = 0$

la distancia de un punto cualquiera (x_1, y_1, z_1) al plano

$2x - 3y - 6z - k = 0$ es

$$d = \frac{2x_1 - 3y_1 - 6z_1 - k}{7}$$



como $d = \pm 5$ desde el punto (0,0,0), se tiene

$$\pm 5 = \frac{2(0) - 3(0) - 6(0) - k}{7}, \text{ de donde } k = \pm 5(7)$$

por lo tanto la ecuación de los planos es $2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$

Ejercicios propuestos: Hallar la ecuación del plano que contiene los siguientes datos.

1.- P(4, -1, 1) plano $4x - 2y + 3z - 5 = 0$ Solución $4x - 2y + 3z - 21 = 0$

2.- Hallar los puntos de intersección de la ecuación $5x - 3y + 6z = 60$

Solución . Los puntos con los ejes (12, -20, 10)

3.- Hallar los puntos de intersección de la ecuación $3x - 5y + 2z - 30 = 0$

Solución. Los puntos con los ejes (10, -6, 15)

4.- Hallar la ecuación del plano paralelos al de ecuación $6x - 6y - 2z - 44 = 0$ y 2 unidades del origen. Solución. Planos $6x - 6y + 7z \pm 66 = 0$.

Capitulo III CÍRCULOS Y ESFERAS

El objetivo de este capítulo es deducir las ecuaciones de la circunferencia y la esfera a partir de sus definiciones como lugar geométrico y de su aplicación a problemas prácticos.

III. 1 Circunferencia y sus diferentes ecuaciones.

La ecuación de la circunferencia se obtendrá a partir de la siguiente definición: "La circunferencia cuyo, centro es el punto (h, k) y cuyo radio es la constante r, y tiene por ecuación

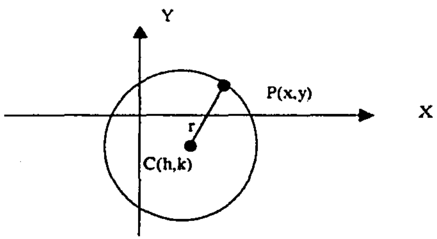
$$(X-h)^2 + (Y-k)^2 = r^2$$

A esta ecuación se le conoce como **forma centro – radio** otros nombres estándar o canónica.

Definición:

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante de un punto fijo. Al punto fijo se le llama centro y la distancia constante se le llama radio de la circunferencia. "[1]

Sea P(x, y) un punto cualquiera de la circunferencia de centro C(h, k) y de radio r



[1] Louis Leithold; El Calculo con Geometria Analitica: Harla

El punto **p** debe satisfacer la condición geométrica $|CP| = r$ la cual por el teorema de distancia entre dos puntos tenemos expresada en forma analítica la ecuación.

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$\text{donde} \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

recíprocamente para el caso en que el centro esta en el origen $h = k = 0$ tenemos, La circunferencia de centro en el origen y radio r tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2$$

forma general de la ecuación de la circunferencia en el origen .

si se desarrolla la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ obtenemos

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

lo cual se escribe de la forma

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $D = -2h$, $E = -2k$, $F = h^2 + k^2 - r^2$

se deduce por lo tanto que la ecuación de la circunferencia cualquiera puede escribirse de la forma $\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$ llamada forma general de la ecuación de la circunferencia.

Si escribimos esta ecuación en la forma $x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$ y sumamos y restamos los términos que se indican para completar cuadrados, se tiene,

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = \frac{E^2 + D^2}{4} - F$$

o bien

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2 + E - 4F}{4}$$

con centro en $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y el radio $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

de tal forma que el valor interno de la raíz toma los siguientes valores entonces tenemos:

Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$, la circunferencia es real.

Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia es imaginaria.

Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$, el radio es cero y la ecuación representa al punto $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$

Ejemplo 1: Escribir la ecuación de la circunferencia de centro A(-3, -5) y $r = 7$

Solución: donde $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

sustituyendo el centro tenemos

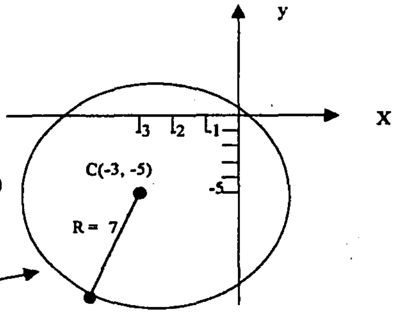
$$(x-(-3))^2 + (y-(-5))^2 = 7^2$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 49$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 49 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y - 7 = 0$$

$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 49$$



Ejemplo 2: Dada a la ecuación de forma general, determinar si representa o no una circunferencia. Hallar su centro radio y graficar.

$$2x^2 + 2y^2 - 6x + 10y + 7 = 0$$

solución:

dividimos la ecuación general entre 2

$x^2 + y^2 - 3x + 5y + 7/2 = 0$ separamos en términos semejantes

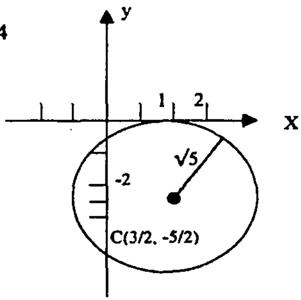
$x^2 - 3x + 9/4 + y^2 + 5y + 25/4 = -7/2 + 9/4 + 25/4$ completando cuadrados tenemos.

$x^2 - 3x + 9/4 + y^2 + 5y + 25/4 = -7/2 + 34/4$

$2a = -3$	$2a = 5$
$a = -3/2$	$a = 5/2$
$a^2 = 9/4$	$a = 25/4$

factorizando y reduciendo términos.
$(x-3/2)^2 + (y+5/2)^2 = 5$

centro (3/2, -5/2) radio $\sqrt{5}$



Ejemplo 3: Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro pasa por C(4, -1) y además pasa por el punto (-1, 3).
Solución.

Toda circunferencia esta completamente determinada si su centro y su radio son conocidos. Entonces la distancia entre el punto y el centro nos dará su radio.

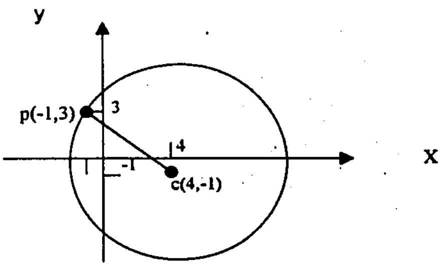
$$D = r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

$$D = r = \sqrt{(4+1)^2 + (-1-3)^2} \quad D = r = \sqrt{(5)^2 + (-4)^2} \quad D = r = \sqrt{25 + 16}$$

$D = r = \sqrt{41}$ por lo tanto el radio es igual a 41

O bien

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 41$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 - 41 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 2y - 24 = 0$$



Ejemplo 4: Encontrar la ecuación de la circunferencia la cual tiene como diámetro el segmento que une a los puntos A(-3, 5) y B(7, -3).

Solución. Encontrar primero el punto medio

$$X = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = \frac{5 - 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

por lo que el centro de esta circunferencia esta en C(2, 1)

para encontrar el radio se toma el centro y cualquiera de los dos puntos. En este caso punto A

$$D = r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

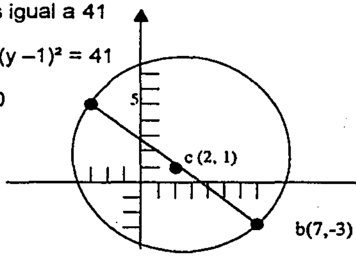
$$D = r = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (-5 - 1)^2} \quad D = r = \sqrt{(-5)^2 + (4)^2} \quad D = r = \sqrt{25 + 16}$$

$D = r = \sqrt{41}$ por lo tanto el radio es igual a 41

Entonces la ecuación será $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 41$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 - 41 = 0$

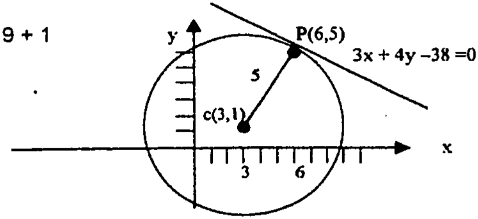
$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$



Ejemplo 5: Determine la ecuación de la recta tangente a una circunferencia Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$. En el punto P(6, 5), trace la circunferencia y la recta tangente en el mismo rectángulo de inspección.

Solución



$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 15 + 9 + 1$

$2a = -6$	$2a = -2$
$a = -6/2$	$a = -2/2$
$a = -3$	$a = -1$
$a^2 = 9$	$a^2 = 1$

$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$

centro en C(3, 1) y radio r = 5

si m_1 es la pendiente que pasa por el punto CP entonces $m_1 = 5 - 1 / 6 - 3$

$m_1 = 4/3$

como la recta tangente es perpendicular a la recta que pasa de CP por lo tanto m_1 de la recta tangente

$$m_1 m_2 = -1$$

sustituyendo m_1

$m_2 (4/3) = -1$ entonces $m_2 = -3/4$

de la forma de punto pendiente de la ecuación de la recta que pasa por el punto p(6, 5) con pendiente $-3/4$

$y - 5 = -3/4 \ (x - 6)$

$(y - 5 = -3/4\, x + 18/4) * 4$

$4y - 20 = -3x + 18$

$3x + 4y - 38 = 0$

Ecuación de la recta que se buscaba.

Ejemplo 6: Encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados A(4, 5), B(3, – 2) y C(1, – 4).

Solución : Para determinar que tipo de ecuación es emplearemos la formula general del la circunferencia y sustituimos cada uno de los puntos en la misma y con ello obtener un sistema de ecuaciones, para después resolverlo por Determinantes o Ecuaciones Simultaneas.

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

sustituyendo A tenemos;

$4^2 + 5^2 + D(4) + E(5) + F = 0$

$16 + 25 + 4D + 5E + F = 0$

$4D + 5E + F = -41$

sustituyendo B tenemos:

$3^2 + (-2)^2 + D(3) + E(-2) + F = 0$

$9 + 4 + 3D - 2E + F = 0$

$3D - 2E + F = -13$

sustituyendo C tenemos;

$1^2 + (-4)^2 + D(1) + E(-4) + F = 0$

$1 + 16 + D - 4E + F = 0$

$D - 4E + F = -17$

El sistema de ecuaciones queda :

$4D + 5E + F = -41 \qquad (1)$

$3D - 2E + F = -13 \qquad (2)$

$D - 4E + F = -17 \qquad (3)$

Empleando Ecuaciones Simultaneas tenemos;

Sumando 1 Multiplicada por 3 y multiplicando 2 por – 4 tenemos

$$\begin{array}{r} 12D + 15E + 3F = -123 \\ -12D + 8E - 4F = 52 \\ \hline 23E - F = -71 \quad (4) \end{array}$$

sumando 1 y multiplicando 3 por – 4 tenemos

$$\begin{array}{r} 4D + 5E + F = -41 \\ -4D + 16E - 4F = 68 \\ \hline 21E - 3F = 27 \quad (5) \end{array}$$

Sumando 4 multiplicada por –3 con 5 tenemos

$$\begin{array}{r} -69E + 3F = 213 \\ 21E - 3F = 27 \\ \hline -48E = 240 \end{array}$$

despejando E tenemos $E = 240/-48 \quad E = -5$

sustituyendo E en (4) tenemos: $23(-5) - F = -71$,

$-F = -71 + 115$, $-F = 44$, $F = -44$

sustituyendo E y F en (3) tenemos:

$D - 4(-5) - 44 = -17$, $D = -17 - 20 + 44$, $D = 7$

Sustituyendo los valores D, E y F en la formula general tenemos la ecuación de la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + 7x - 5y - 44 = 0$$

$x^2 + 7x + \underline{49/4} + y^2 - 5y + \underline{25/4} = 44 + 49/4 + 25/$

$2a = 7$ $2a = -5$ $44 + 74/4$

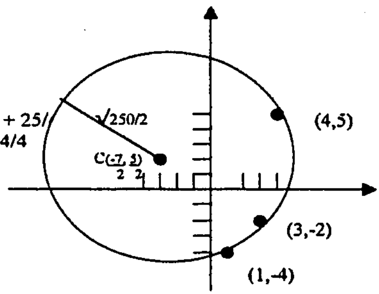
$a = 7/2$ $a = -5/2$

$a^2\ 49/4$ $a^2 = 25/4$

factorizando

$$(x + 7/2)^2 + (y - 5/2)^2 = 250/4$$

centro $(-7/2, 5/2)$ radio $\sqrt{250}/2$



Ejercicios Propuestos.

1) Encontrar una ecuación de la circunferencia con centro y radio.

Ejercicios	Solución,.
a) C (2, -3) r = 4	$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$
b) C(4, -3) r = 5	$x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$
c) C(-5, -12) r = 3	$x^2 + y^2 + 10x + 24y + 160 = 0$
d) C (1, 1) r = 2	$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
e) C(4, -7) r = 3	$x^2 + y^2 - 8x + 14y + 56 = 0$
f) C(0, 3) r = ½	$x^2 + y^2 - 6y + 2 = 0$
g) C(2, 0) diámetro = 16	$x^2 + y^2 - 4x - 60 = 0$

2) Dada la ecuación. Demostrar que es una circunferencia. Encontrar, Centro, radio y su grafica.

a)	$4x^2 + 4y^2 + 16x - 4y - 32 = 0$	C(-2, ½) radio 7/2
b)	$2x^2 + 2y^2 + 12x - 8y + 31 = 0$	C(-3, 1) radio = 5
c)	$3x^2 + 3y^2 + 4y - 7 = 0$	C(0, -2/3) radio = 5/3
d)	$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$	C(5, 5) radio = 5
e)	$2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 6 = 0$	C(2, 3) radio =4

3) Encontrar la ecuación del circulo que satisface las condiciones dadas:

a) centro (1 2) y punto (3, -1) $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 13 = 0$

b) centro (-2,3) y punto (4, 5) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 27 = 0$

c) centro (-3, -5) y tangente a recta $12x + 5y - 4 = 0$ $x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 = 0$

d) centro (1, 6) y tangente a recta $x - y - 1 = 0$ $x^2 + y^2 - 2x - 12y + 19 = 0$

e) centro (0, -2) y tangente a recta $5x - 12y + 2 = 0$ $x^2 + y^2 + 4y = 0$

f) centro(-2, 5) y tangente a la recta $x = 7$

4) Encontrar la Ecuación de la circunferencia con los puntos A y B que son los extremos de un diámetro. Obtener Centro, radio, ecuación y gráfica.

Solución

a) (1, -3) y (2, 5) $x^2 + y^2 - 3x - 2y - 13 = 0$ C(3/2, 1) $r = \sqrt{65}/2$

b) (-6, 5) y (-2, 4) $x^2 + y^2 + 8x - 9y + 132 = 0$ C(-4, 9/2) r = 17/4

c) (2, -1) y (6, -5) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 8$ C(4, -3) $r = \sqrt{8}$

d) (3, 4) y (9, 4) $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 9$ C(6, 4) r = 3

e) (3, -1) y (-2, - 4) $(x - ½)^2 + (y - 5/2)^2 = 9$ C(1/2 ,-5/2) $r = \sqrt{14}$

5) Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los tres puntos dados

Solución

1.- a(1, 1), b(4, 0), c(2, -1) $x^2 + y^2 - 5x - 2y - 13 = 0$

2.- a(-1, 1), b(3, 5), c(5, -3) $(x - 16/5)^2 + (y - 4/5)^2 = 442/25$

3.- a(1, 5), b(2, -3), c(2, -1) $5x^2 + 5y^2 - 9x - 19y - 26 = 0$

4.- a(2, 3), b(3, -3), c(-1, -1) $11x^2 + 11y^2 - 43x + 2y - 63 = 0$

5.- a(1, 3), b(4, -6), c(-3, 1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

6.- a(-5, 1), b(2, 2), c(4, 2) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$

6) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia.

Solución

a) $x^2 + y^2 = 25$ Punto(-4, 3) $y = (4/3\, X + 4) + 13$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ P(5, 1) $y = -4/3\,(X - 5) + 1$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ P(4, -7) $y = -3/4\,(X - 4) - 7$

d) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ P(1, 3) $2x + y - 5 = 0$

e) $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 0$ P(8, 4) $2x + y + 20 = 0$

III. 2 La esfera y sus diferentes ecuaciones.

"La gráfica de una ecuación en tres variables x, y, z se define como el conjunto de todos los puntos P(a, b, c) en un sistema coordenado rectangular, tales que la terna ordenada (a, b, c) es una solución de la ecuación, es decir, al sustituir a, b, y c en lugar de x, y, z respectivamente obtenemos una igualdad, la gráfica de una ecuación así es una superficie. Es fácil encontrar una ecuación cuya gráfica es una esfera de radio r y centro en el punto C(h, k, l) un punto P(x, y, z) esta sobre la esfera si y sólo si $[d(c, p)]^2 = r^2$ aplicando la formula de distancia obtenemos la **ecuación canónica de la esfera de radio r y centro en C(h, k, l)**."[2]

La superficie esférica se define como el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan en un mismo punto fijo. La distancia constante se llama radio y el punto fijo centro.

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

esta ecuación se le conoce como forma ordinaria de la ecuación de la esfera.
si se desarrolla los binomios de cada término tenemos

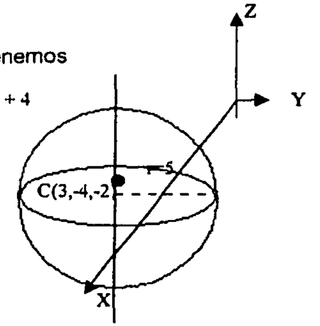
$x^2 - 2xh - h^2 + y^2 - 2yk + k^2 + z^2 - 2zl + l^2 = r^2$ donde
$x^2 + y^2 + z^2 - ax + by + cz + d = 0$
se le llama forma general de la ecuación de la esfera.
donde $a = -2h$, $b = -2k$ $c = -2l$, $d = h^2 + k^2 - l^2$
donde los coeficiente son números racionales.

La superficie esférica cuyo centro es el origen y cuyo radio es la constante dada r tiene por ecuación.
$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

toda esfera puede representarse mediante una ecuación de la forma
$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0$ donde $A \neq 0$

[2] Earl W. Swokowski: Calculo con Geometria Analítica: Interamericana.

Ejemplo 1: Discutir la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 4z + 4 = 0$



Solución.

Acomodando término y completando cuadrados tenemos

$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 + z^2 + 4z + 4 = -4 + 9 + 16 + 4$

$2a = -6$	$2a = 8$	$2a = 4$
$a = -6/2$	$a = 8/2$	$a = 4/2$
$a = -3$	$a = 4$	$a = 2$
$a^2 = 9$	$a^2 = 16$	$a^2 = 4$

$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 25$

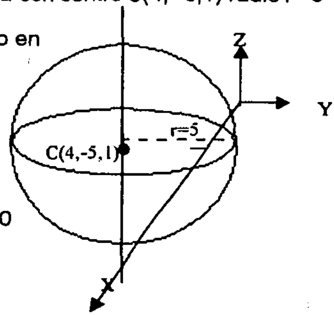
centro en $(3, -4, -2)$ y radio = 5

Ejercicios propuestos:

Encuentre el centro y radio de la esfera que tiene la ecuación.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 2z + 2 = 0$ Solución: $C(-2, 1, -1)$ $r = 2$
b) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 8z + 16 = 0$ Solución: $C(4, 0, -4)$ $r = 4$
c) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y + 6z + 34 = 0$ Solución: $C(3, 5, -3)$ $r = 3$
d) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4x + 8y - 3 = 0$ Solución: $C(1/2, -1, 0)$ $r = \sqrt{2}$
e) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 4z + 5 = 0$ Solución: $C(1, 3, -2)$ $r = 3$
f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 8z + 5 = 0$ Solución: $C(-1, 2, 4)$ $r = 4$
g) $x^2 + y^2 + z^2 - z + \frac{1}{4} = 0$ Solución: $C(0, 0, -1/2)$ $r = 0$
h) $x^2 + y^2 + z^2 + 4y = 0$ Solución: $C(0, -2, 0)$ $r = 2$
i) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 3z = 15$ Solución: $C(3, -2, 3/2)$ $r = 11/2$
j) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$ Solución: $C(4, -2, -1)$ $r = 5$

Ejemplo 2.- Encuentre la ecuación de la esfera con centro $C(4, -5, 1)$ radio $r = 5$



Empleando la ecuación de la esfera con centro en $C(h, k, l)$

$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$

entonces tenemos

$(x-4)^2 + (y-(-5))^2 + (z-1)^2 = 5^2$

resolviendo binomios

$x^2 - 8x + 16 + y^2 + 10y + 25 + z^2 - 2z + 1 = 25$

reacomodando términos

$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 2z + 16 + 25 + 1 - 25 = 0$

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 10y - 2z + 17 = 0}$$

Ejercicios Propuestos :

Encuentre la ecuación de la esfera con centro C r radio r

a) $C(-5, 0, 1)$ $r = \frac{1}{2}$ Solución: $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 40x - 8z + 103 = 0$

b) $C(3, -1, 2)$ $r = 3$ Solución: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 5 = 0$

c) $C(0, -3, -6)$ $r = \sqrt{3}$ Solución: $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 12z + 42 = 0$

d) $C(-1, 2, 4)$. $r = 4$ Solución: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 8z + 5 = 0$

e) $C(1, 3, -2)$ $r = 3$ Solución: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 2z + 5 = 0$

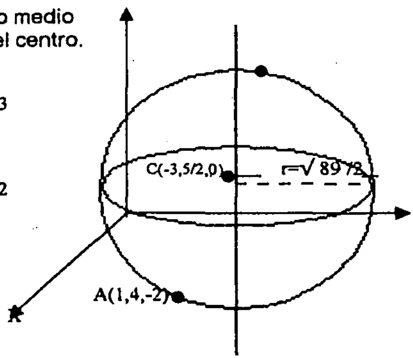
f) $C(3, 2, -1)$ $r = 4$ Solución: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y + 2z = 2$

g) $C(4, -2, -1)$ $r = 5$ Solución: $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 4 = 0$

Ejemplo 3.- Encuentre la ecuación de la esfera que tiene como extremos de un diámetro $A(1, 4, -2)$ y $B(-7, 1, 2)$.

Solución:

Primero encontramos el punto medio Entre A y B para determinar el centro.



$$x = \frac{1 + (-7)}{2} \qquad x = \frac{-6}{2} \qquad x = -3$$

$$y = \frac{4 + 1}{2} \qquad y = \frac{5}{2} \qquad y = 5/2$$

$$z = \frac{-2 + (-2)}{2} \qquad z = \frac{0}{2} \qquad z = 0$$

centro $(-3, 5/2, 0)$

para encontrar el radio obtenemos la distancia del centro al punto A

$$D = r = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5/2 - 4)^2 + (0 + 2)^2}$$

$$D = r = \sqrt{(-4)^2 + (-3/2)^2 + (2)^2}$$

$$D = r = \sqrt{16 + 9/4 + 4}$$

$$D = r = \sqrt{20 + 9/4}$$

$$D = r = \sqrt{89/4}$$

$$r = \frac{\sqrt{89}}{2}$$

sustituyendo el radio y el centro en $(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$ entonces tenemos:

$$(x-(-3))^2 + (y - 5/2)^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{89}/2)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 5y + 25/4 + z^2 = 89/4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 5y + 25/4 + 9 - 89/4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 5y + 9 - 64/4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 5y + 9 - 16 = 0$$

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 5y - 7 = 0}$$

Ejercicios Propuestos:

Ejercicios	Solución
a) a(2, -1, 3) b(-1, 5, 1)	$x^2 + y^2 + z^2 - x - 4y - 4z - 4 = 0$
b) a(5, 0, -4) b(2, -1,7)	$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y - 3z - 33 = 0$
c) a(-5, 6, -2) b(9, -4, 0)	$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 69 = 0$

Ejemplo 4.- Encontrar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos A(3, 1, –1), B(2, 5, 2), C(–3, 0, 1) y D(–1, 0, 0)

Solución: Empleando la forma general de la esfera

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad \text{donde } A \neq 0$$

Y sustituyendo cada uno de los puntos en la forma general tenemos:
El siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rl}
3G + H - I + J = -11 & \text{———— 1} \\
2G + 5H + 2I + J = -33 & \text{———— 2} \\
-3G + 0 + 0 + J = -10 & \text{———— 3} \\
-G + 0 + 0 + J = -1 & \text{———— 4}
\end{array}$$

resolviendo por ecuaciones simultaneas tenemos de ecuación 1 y 2 eliminamos H, multiplicando por -5 la ecuación 1.

$$\begin{array}{rrrrrr} -15G & -5H & +5I & +5J & = & 55 \\ 2G & +5H & +2I & +J & = & -33 \\ \hline -13G & & +7I & -4J & = & 22 \end{array} \quad \text{———} \quad 5$$

De la Ecuación 5 mas la ecuación 3 Eliminamos a I
Multiplicando la ecuación 3 por -7

$$\begin{array}{rrrrr} -13G & +7I & -4J & = & 22 \\ 21G & -7I & -7J & = & 70 \\ \hline 8G & & -11J & = & 92 \end{array} \quad \text{———} \quad 6$$

de la ecuación 6 sumada a la ecuación 4 eliminamos J multiplicando 4 por 11

$$\begin{array}{rrrr} 8G & -11J & = & 92 \\ -11G & +11J & = & -11 \\ \hline -3G & & = & 81 \end{array}$$

$G = 81/-3$

$G = -27$

Sustituyendo G en la ecuación 6 tenemos

$$8(-27) - 11J = 92$$
$$-216 - 11J = 92$$
$$-11J = 92 + 216$$
$$-11J = 308$$
$$J = 308/-11$$
$$J = -28$$

sustituyendo J y G en 3 tenemos:

$$-3(-27) + I - 28 = -10$$
$$81 + I - 28 = -10$$
$$I = -10 - 81 + 28$$
$$I = -63$$

Sustituyendo J, G y I en ecuación 1 tenemos

$$3(-27) + H - (-63) + (-28) = -1$$
$$-81 + H + 63 - 28 = -1$$
$$H = -1 + 81 - 63 + 28$$
$$H = 35$$

Entonces la ecuación buscada es

$$\mathbf{x^2 + y^2 + z^2 - 27x + 35y - 63z - 28 = 0}$$

Acomodando términos semejantes

$$X^2 - 27x \quad + Y^2 + 35y \quad + Z^2 - 63z \quad = 28$$

Completando cuadrados tenemos:

$$X^2 - 27x + \frac{729}{4} + Y^2 + 35y + \frac{1225}{4} + Z^2 - 63z + \frac{3969}{4} = 28$$

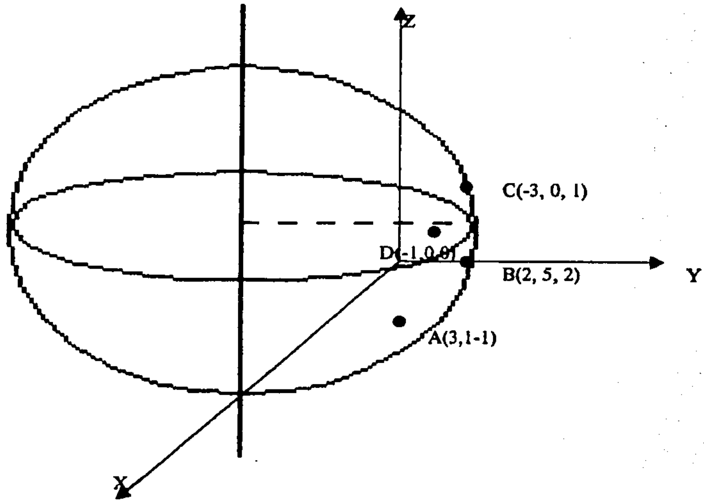
factorizando encontramos el centro y radio de la esfera.

$$(X - 27/2)^2 + (Y + 35/2)^2 + (Z - 63/2)^2 = 112/4 + 729/4 + 1225/4 + 3969/4$$

$$(X - 27/2)^2 + (Y + 35/2)^2 + (Z - 63/2)^2 = 6035/4$$

$$(X - 27/2)^2 + (Y + 35/2)^2 + (Z - 63/2)^2 = \sqrt{6035/2}$$

centro $(27/2, -35/2, 63/2)$ radio $r = \sqrt{6035/2}$



Ejercicios

1.- Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos
A(7, 9, 1), B(-2, -3, 2), C(1, 5, 5), D(-6, 2, 5).

Sol. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 14y + 18z - 79 = 0.$

III. 3 Intersección de círculos y rectas de esferas y rectas y de esferas y planos.

Ejemplo 1: Deducir una ecuación del o de los círculos tangente a $3x + 4y - 15 = 0$ en (5, 0) y que contenga al punto (–2, –1).

Solución. Primero encontramos la recta perpendicular de $3x + 4y - 15 = 0$

$4x - 3y + C = 0$

Sustituyendo el punto (5, 0) tenemos: $4(5) - 3(0) + C = 0$

$20 + C = 0 \rightarrow c = -20$

Por lo tanto la ecuación perpendicular $4x - 3y - 20 = 0$ —— 1

Del punto (5, 0) y (–2, –1) encontramos el punto medio.

$$X = \frac{5-2}{2} = \frac{3}{2} \qquad Y = \frac{0-1}{2} = \frac{-1}{2}$$

las coordenadas del punto medio son (3/2, -1/2)

como se trata de una recta estos dos puntos podemos encontrar la pendiente

$$M = \frac{-1-0}{-2-5} \qquad M = \frac{-1}{-7} \qquad M = \frac{1}{7}$$

con las coordenadas del punto medio y la pendiente inversa encontramos la mediatriz y la recta

$y - (-1/2) = -7\,(x - 3/2)$

$y + 1/2 = -7x + 21/2$

$7x + y + 1/2 - 21/2 = 0$

$7x + y - 20/2 = 0$

$7x + y - 10 = 0$ —— 2

sumamos la ecuación 1 multiplicada por 3 y 2

$$\begin{aligned} 21h + 3k - 30 &= 0 \\ 4h - 3k - 20 &= 0 \\ \hline 25h \qquad - 50 &= 0 \end{aligned}$$

despejando h tenemos

$h = 50/25$ por lo tanto tenemos $h = 2$

sustituyendo h en 1 tenemos

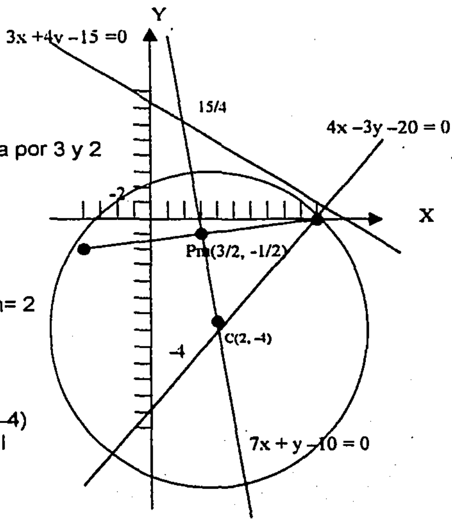
$4(2) - 3k - 20 = 0$

$-3k = 20 - 8$

$k = 12/-3$

$k = -4$ entonces el centro C(2, –4)

para obtener el radio sustituimos el centro con (5, 0)



$r^2 = (2-5)^2 + (-4-0)^2$
$r^2 = (-3)^2 + (-4)^2$
$r^2 = 9 + 16$
$r^2 = 25$
$r = \sqrt{25}$
$r = 5;$

sustituyendo el centro y radio, en la ecuación de circunferencia

$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 5^2$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 8y + 16 = 25$

$x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 + 16 - 25 = 0$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0}$

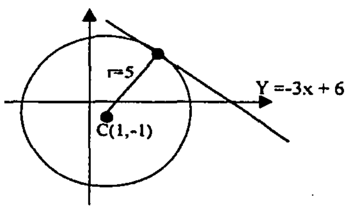
que es la ecuación que se busca.

Ejemplo 2. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25$ en el punto P(4, 3).

Solución.

Por la ecuación que se tiene sabemos que el centro es : C(1, -1) y radio r = 5
Se observa que p es un punto de la circunferencia, luego la tangente es perpendicular a la recta CP = [4 -1, 3 - (-1)] entonces (3, 4) y por lo tanto paralela a [-4, 3] de aquí su pendiente M sera igual a (3/-4) = M =-3/4 asi que la ecuación de la tangente es :

$y - 3 = -3/4(x - 4)$
$y - 3 = -3x/4 + 3$
$y = -3x/4 + 6$



Ejemplo 3.- Dada la ecuación de la circunferencia $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$ encontremos la ecuación trazada desde el punto P(12, 4).

Solución: Centro (1, −1) y radio r = 5. P es un punto exterior al circulo de modo que de el se pueden trazar 2 tangentes dado que la tangente G es perpendicular al radio en el punto de contacto, equivale a determinar una línea L tal que:

a) La distancia de C(1,-1) a L sea igual a 5 (longitud del radio)

b) L pase por P(2, 4).

De la ecuación de la recta dados un punto tenemos L tiene la forma

$y - 4 = m(x - 12)$ y se presenta la familia de las rectas en P(12, 4) una para cada M. Entonces la ecuación de la forma general tenemos $Lm = mx - y + 4 - 12m = 0$

Para calcular la distancia del centro a la recta utilizamos la formula de distancia de un punto a una recta.

$$D(c,Lm) = \frac{/Mx - y + 4 - 12m/}{\sqrt{m^2 + 1}}$$ sustituyendo 1, .1 por x , y respectivamente

$$D(c,Lm) = \frac{/M(1) - (-1) + 4 - 12m\ /}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{-11m + 5}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

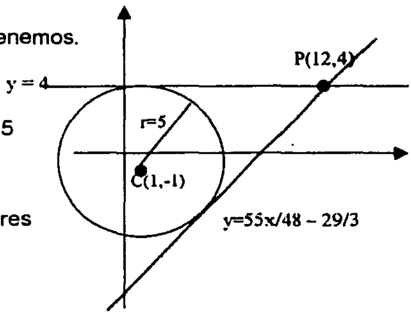
como la distancia que se calcula del centro a la recta tangente es de 5 entonces tenemos.

$$5 = \frac{-11m + 5}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

despejando el denominador tenemos.

$(5(\sqrt{m^2 + 1}) = -11m + 5)^2$
elevando todo al cuadrado
$25m^2 + 25 = 121m - 110m + 25$
$96m^2 - 110m = 0$
$m(96m - 110) = 0$

por lo tanto tenemos dos valores de m



$m = 0$ y $m = 110/96$ o $m = 55/48$

sustituyendo los valores de m en la ecuación $y - 4 = m(x - 12)$

tenemos que $y - 4 = 0(x - 12)$ esto es igual a $y = 4$

y $y - 4 = 55/48(x - 12)$ resolviendo tenemos la ecuación $y = 55x/48 - 29/3$

Ejemplo 4.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (1, -4) y (5, 2) y cuyo centro esta situado en la recta $x - 2y + 9 = 0$

Solución: Sean (h, k) las coordenadas del centro de la circunferencia y como (h, k) equidista de los puntos (1 -4) y (5, 2) entonces;

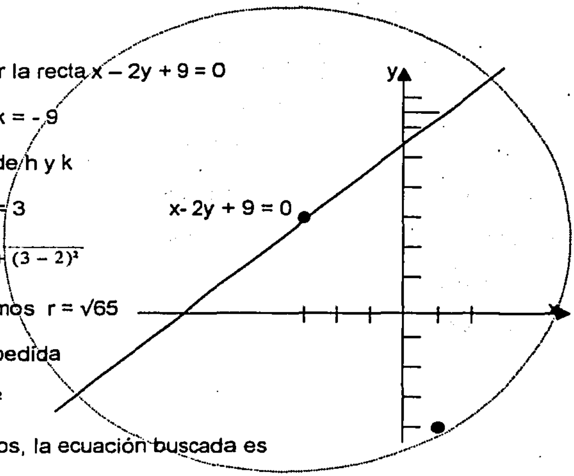
$$\sqrt{(h-1)^2 + (k+4)^2} = \sqrt{(h-5)^2 + (k-2)^2}$$

elevando al cuadrado tenemos

$(h - 1)^2 + (k + 4)^2 = (h - 5)^2 + (k - 2)^2$

resolviendo binomios y simplificando tenemos

$8h + 12k = 12$



Como el centro pasa por la recta $x - 2y + 9 = 0$

Entonces se tiene $h - 2k = -9$

Despejando los valores de h y k

tenemos que $h = -3$ y $k = 3$

por tanto $r = \sqrt{(-3-5)^2 + (3-2)^2}$

resolviendo la raíz tenemos $r = \sqrt{65}$

por lo tanto la ecuación pedida

$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = (\sqrt{65})^2$

desarrollando los binomios, la ecuación buscada es
$x^2 + y^2 + 6x - 6y - 47 = 0$

Ejercicios propuestos:
Ejercicio 1. Obtener la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $2x - 3y - 8 = 0$. En el punto T(7, 2) sabiendo que pasa por el punto Q(9, 12).

Ejercicio 2. Hallar las ecuaciones de las circunferencias que pasen por los puntos A(1, 2) y B(3, 4) y sean tangentes a la recta $3x + y - 3 = 0$.

Solución: $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$ y $x^2 + y^2 - 3x - 7y + 12 = 0$

Ejercicio 3.- Consideremos la ecuación $x^2 + y^2 + 2y - 19 = 0$ y encontremos la ecuación de las tangentes con pendiente $M = ½$.

Solución: $y = ½x + 4$ y $y = ½x - 6$

Ejercicio 4.- Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto (-2, 7) a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 12 = 0$

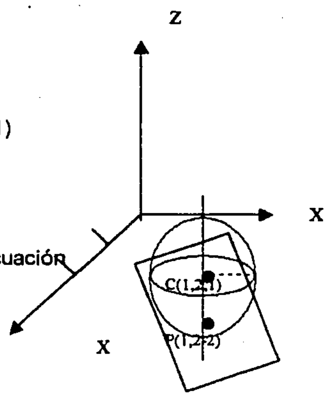
Solución:: $2x - y + 11 = 0$ y $x + 2y - 12 = 0$

Ejercicios 5.- Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2, 3) y (-1,1) y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$

Solución: $x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$

Ejemplo 1 Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera $X^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 5 = 0$ En el punto P(1, 2, -2).

Solución: La ecuación de le esfera la podemos escribir de forma estandar por lo tanto $x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 + 2z = -5$



completando cuadrados tenemos

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 1$

por lo tanto el centro de la esfera es de C(1, 2, -1)

entonces el vector normal al plano será

$n = PC = (0, 0, -1)$

y como la ecuación del plano está dada por la ecuación

$ax + by + cz + k = 0$ donde $n = (a, b, c)$

entonces la ecuación del plano buscado será

$-z + k = 0$

como P(1, 2, -2) también pertenece al plano, tenemos

$-(-2) + k = 0$; $k = -2$ por la tanto la ecuación del plano buscado es: $z + 2 = 0$

Ejemplo 2.- Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos P(1, 0, 1), Q(-1, 2, 3) y R(-3, 1, 1), y cuyo centro está sobre el plano x, y.

Solución : como el centro de la esfera está en el plano xy, sus coordenadas son de la forma : C(a, b,0) por lo que obteniendo la distancia de cada uno de los puntos con el del plano tenemos:

$$CP = \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 0)^2 + (0 - 1)^2}$$

$$CQ = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$CR = \sqrt{(a + 3)^2 + (b - 1)^2 + (0 - 1)^2}$$

Ahora, como CP = CQ = CR = r (r radio es la esfera), tendremos :

$$CP = CQ \qquad \sqrt{(a - 1)^2 + (b - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + (0 - 3)^2}$$

elevando ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$(a - 1)^2 + (b - 0)^2 + (0 - 1)^2 = (a + 1)^2 + (b - 2)^2 + (0 - 3)^2$$

resolviendo los binomios tenemos:

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 + 1 = a^2 + 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 + 9$$

pasando los términos de la derecha antes del sigo igual tenemos:

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 + 1 - a^2 - 2a - 1 - b^2 + 4b - 4 - 9 = 0$$

eliminamos los términos semejantes

$$-2a \quad -2a \quad + 4b \quad - 12 = 0$$

$-4a + 4b - 12 = 0$ dividiendo todo entre -4 nos queda la ecuación

$a - b + 3 = 0$ también tenemos la igualdad

CQ = CR entonces

$$\sqrt{(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(a + 3)^2 + (b - 1)^2 + (0 - 1)^2}$$

Elevando al cuadrado ambos términos nos queda:

$$(a + 1)^2 + (b - 2)^2 + (0 - 3)^2 = (a + 3)^2 + (b - 1)^2 + (0 - 1)^2$$

resolviendo los binomios tenemos:

$$a^2 + 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 + 9 = a^2 + 6a + 9 + b^2 - 2b + 1 + 1$$

pasando los términos de la derecha antes del sigo igual tenemos:
$a^2 + 2a + 1 + b^2 - 4b + 4 + 9 - a^2 - 6a - 9 - b^2 + 2b - 1 - 1 = 0$

eliminando términos semejantes nos queda :
$-2b + 3 - 4a = 0$ multiplicando por -1 toda la ecuación nos queda la ecuación:
$4a + 2b - 3 = 0$ las dos ecuaciones serán entonces :

$$a - b = -3 \quad \text{——— } 1$$
$$4a + 2b = 3 \quad \text{——— } 2$$

resolviendo el sistema de ecuaciones multiplicamos por 2 la ecuación 1 y nos queda:

$$\begin{array}{l} 2a - 2b = -6 \\ 4a + 2b = 3 \\ \hline 6a = -3 \end{array}$$

encontramos que el valor de
$a = -1/2$ y sustituyendo a en la ecuación 2 tenemos

$4(-1/2) + 2b = 3$
$-2 + 2b = 3$
$2b = 3 + 2$
$2b = 5$
$b = 5/2$
luego el centro de la esfera tiene coordenadas de C(-1/2, 5/2, 0)
sustituyendo a y b en CP para obtener el radio:

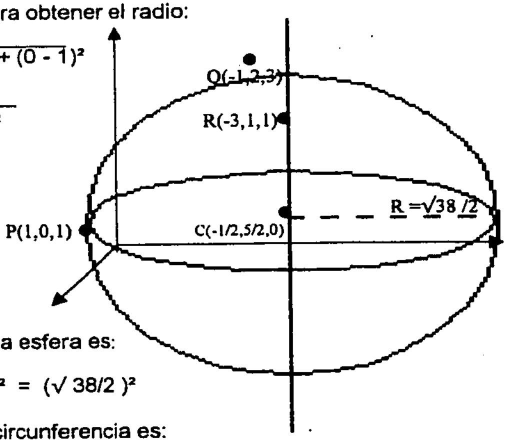
$CP = \sqrt{(-1/2-1)^2 + (5/2 - 0)^2 + (0 - 1)^2}$

$CP = \sqrt{(-3/2)^2 + (5/2)^2 + (-1)^2}$

$CP = \sqrt{9/4 + 25/4 + 1}$

$CP = \sqrt{38/4}$

y radio $= \sqrt{38}/2$



por lo tanto la ecuación de la esfera es:

$$(x + 1/2)^2 + (y - 5/2)^2 + z^2 = (\sqrt{38}/2)^2$$

y de la forma general de la circunferencia es:
$x^2 + 2x + 1/4 + y^2 - 5y + 25/4 = 38/4$
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 5y + 1/4 + 25/4 - 38/4 = 0$
$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 5y - 3 = 0$

Capitulo IV CÓNICAS

IV.1 Teoría General de la Ecuación de segundo grado.

" En este capítulo se realizará un estudio de la ecuación general de segundo grado,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ---- (1)$$

En particular, consideraremos el caso en que la ecuación (1) contiene un término en xy, es decir, el caso en que $B \neq 0$. Demostraremos que por medio de una rotación de los ejes coordenados siempre es posible transformar la ecuación (1) en otra de la forma.

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad ----- \quad (2)$$

En la que uno de los coeficientes A' y C', por lo menos, es diferente de cero, y no aparece el término x'y'.

La ecuación (2) representa un lugar geométrico real, representa o bien una cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas. Como la naturaleza de un lugar geométrico no se altera por transformación de coordenadas, se sigue que, si la ecuación (1) tiene lugar geométrico, este lugar debe ser también o una sección cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas. Por lo tanto, la ecuación (1) se toma, generalmente, como la definición analítica de cónica. De esto podemos inferir la existencia de una definición geométrica que incluya todas las cónicas. Veremos más adelante que tal definición general existe para la parábola, la elipse e hipérbola.

Teorema 1: La ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ---- (1)$$

En donde $B \neq 0$, puede transformarse siempre en otra forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad ----- \quad (2)$$

Sin términos en x'y' , haciendo girar los ejes coordenados un ángulo positivo agudo θ tal que $(tg2\theta) = \frac{B}{A-C}$, si $A \neq 0$, y

y $\theta = 45°$, si $A = C$.

Como $B \neq 0$, $tg2\theta \neq 0$, y, por tanto, θ es diferente de cero en todos los casos . De acuerdo con esto la ecuación (1) puede transformarse en la forma (2) girando los ejes coordenados un ángulo diferente de cero.

... Teorema 2 Si la ecuación general de segundo grado,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ---- (1)$$

En donde $B \neq 0$, representa una sección cónica, el eje focal es oblicuo con respecto a los ejes coordenados , y recíprocamente.

El indicador $I = B^2 - 4AC$ si los ejes coordenados giran un ángulo θ, la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad ---- (1)$$

Se transforma en $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad ---- (2)$

En donde ,

$A' = A\cos^2\theta + B \operatorname{sen}\theta \operatorname{Cos}\theta + C \operatorname{sen}^2\theta$

$B' = 2(C - A)\operatorname{sen}\theta \cos\theta + B(\operatorname{Cos}^2\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$C' = A \operatorname{sen}^2\theta - B \operatorname{sen}\theta \operatorname{Cos}\theta + C \operatorname{sen}^2\theta$

$D' = D\cos\theta + E \operatorname{sen}\theta$

$E' = E\cos\theta - D \operatorname{sen}\theta$

$F' = F$.

Si se toma el ángulo de rotación θ como lo especifica el teorema 1 la ecuación (2) toma la forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \quad ---- (4)$$

Para convertirse en $(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B\cos 2\theta = 0$

... Por ejemplo si A' y C' son iguales a cero, uno u otro, la ecuación (4) representa una parábola. Cuyo eje paralelo a (o coincidente con) uno de los ejes coordenados, constituye uno de los casos excepcionales de dos rectas diferentes o coincidentes, paralelas a uno de los ejes coordenados, o ningún lugar geométrico. Ahora diremos, con el fin de una mayor brevedad de expresión, que la ecuación (4) representa una cónica género parábola.

Para los demás casos se usaran términos semejantes al anterior según las siguientes definiciones:

1. Si uno de los coeficientes A' y C' es igual a cero , la ecuación (4) representa una cónica del género parábola, es decir, uno cualquiera de los casos especificados. Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincidente con) el eje X . Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje es paralelo a (o coincidente con) el eje Y.

2. Si A' y C' son del mismo signo, se dice que la ecuación (4) representa una cónica del género elipse, es decir, uno cualquiera de los casos especificados. Con ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún lugar geométrico real.

3.. Si A' y C' son de signo contrario, se dice que la ecuación (4) representa una cónica del género hipérbola, es decir, uno cualquiera de los casos especificados. Con ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

... cuando la ecuación (1) se transforma en la ecuación (4), $B' = 0$ y la relación $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ se reduce a

$$B^2 - 4AC = -4A'C' \quad \text{------} \quad (6)$$

Si uno cualquiera de los coeficientes A' y C' es igual a cero, la ecuación (4) y, por tanto, la ecuación (1) , es del género parábola en este caso la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC = 0$ elementos

Si A' y C' son del mismo signo, la ecuación (4) y en consecuencia, la ecuación (1) , es del género elipse. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC < 0$.

Si A' y C' difieren en el signo, la ecuación (4) y en consecuencia, la ecuación (1) es del género hipérbola. En este caso, la relación (6) muestra que $B^2 - 4AC > 0$.

Como la expresión $B^2 - 4AC$ indica la naturaleza del lugar geométrico de la ecuación (1), llamaremos indicador (discriminante) a este invariante. Denotaremos el indicador por la letra I, es decir,

$$I = B^2 - 4AC.$$

Los resultados precedente se pueden resumir en el siguiente teorema:

Teorema 3. La ecuación general de segundo grado,

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,

Representa una cónica del género parábola, elipse o hipérbola, según que el indicador, $I = B^2 - 4AC$, sea cero, negativo o positivo.

Teorema 4. Una cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola, según que su excentricidad sea igual a, menor que, o mayor que la unidad.

Se debe observar el paralelismo entre los valores del indicador $I = B^2 - 4AC$ y de la excentricidad e de las diversas cónicas, como aparece en el siguiente cuadro.

	PARABOLA	ELIPSE	HIPERBOLA
Indicador $I = B^2 - 4AC$	$I = 0$	$I < 0$	$I > 0$
Excentricidad e	$e = 1$	$e < 1$	$e < 1$

La determinación de las ecuaciones de las directrices de las cónicas centrales se basa en el siguiente teorema

Teorema 5. Para la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2 b^2$ y la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2 b^2$, cada una de excentricidad e, los focos$(ae, 0)$ y $(-ae, 0)$ tienen como directrices correspondientes las rectas cuyas ecuaciones son $x = a/e$ y $x = -a/e$, respectivamente.

Tangente a la cónica general. La determinación de la ecuaciones de las tangentes a las cónicas se facilita considerablemente por el uso de la ecuación de la tangente a la cónica general,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Teorema 6. La ecuación de la tangente a la cónica general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ,$$

En cualquier punto de contacto dado P(x, y), es

$$Ax_1x + \frac{B}{2}(x_1y + y_1x) + Cy_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0.\text{"}$$ [1]

IV. 2 Parábola, su ecuación cartesiana y vectorial.

Una sección cónica es una curva de intersección de un plano con un cono circular recto de dos hojas.

Existen tres tipos de curvas que se obtienen de esta manera: La parábola, la elipse (incluyendo el circulo como un caso especial) y la hipérbola.

Cuando el plano que corta es paralelo a un elemento del cono, se obtiene una parábola.

Definición de parábola: Una parábola es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistantes de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se le llama el foco y la recta fija se le llama directriz. [2] figura 1

Demostración:

Sea p la distancia dirigida OF. El foco es el punto F(p, 0) y la directriz es la recta que tiene la ecuación $X = -p$. un punto p(x, y) está en la parábola si y sólo si p equidista de F y la directriz. Esto es Q(-p, y) es el pie de la recta perpendicular que va de p a la directriz, entonces p está en la parábola si y solos si.

FP = QP

Ya que $FP = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$

Y $QP = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2}$

P esta en la parábola si y sólo si

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

elevando al cuadrado ambos términos obtenemos

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

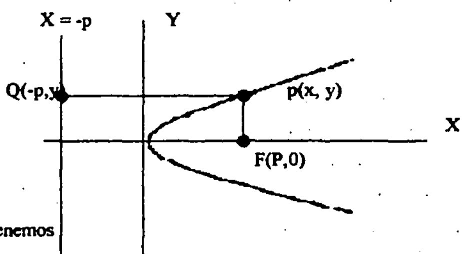


figura 1

[1] Geometría Analítica, Charles H. Lehmann. Limusa,
[2] Geometría Analítica, Douglas F. Ridlle, Thompson

resolviendo binomios obtenemos

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$

reacomodando términos

$x^2 - x^2 + p^2 - p^2 + y^2 = 2px + 2px$

$y^2 = 4px$

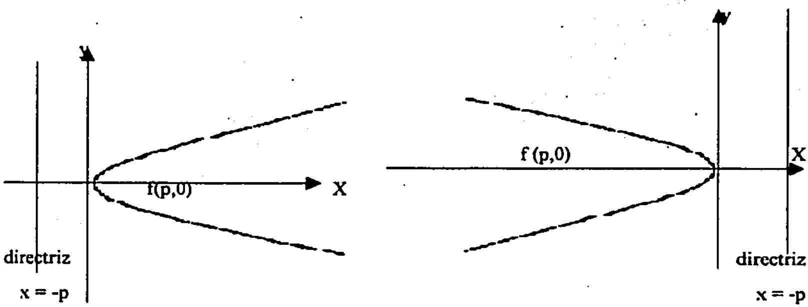
una ecuación de la parábola que tiene foco en (p, 0) y sus directriz en la recta $x = -p$ es

$y^2 = 4px$

abre a la derecha si $p > 0$ y a la izquierda si $p < 0$ ver figura 2

Cuadro 1 Formulas de la Parábola en el origen:

Cuando abre sobre x	**Cuando abre sobre Y**
Foco (p, 0)	Foco (0, p)
vértice (0, 0)	Vértice (0, 0)
$LR = 2b^2 / a$	$LR = 2b^2 / a$
$e = p / a$	$e = p / a$
Directriz $x = -p$	Directriz $y = -p$
Figura 2 a	Figura 3



p > 0 figura 2 a p < 0

el punto medio entre el foco y la directriz de la parábola se le llama vértice una ecuación de la parábola que tiene foco en (0, p) y sus directriz en la recta $y = -p$ es

$x^2 = 4py$

abre hacia arriba si $p > 0$ y a abre hacia abajo si $p < 0$ ver figura 3.

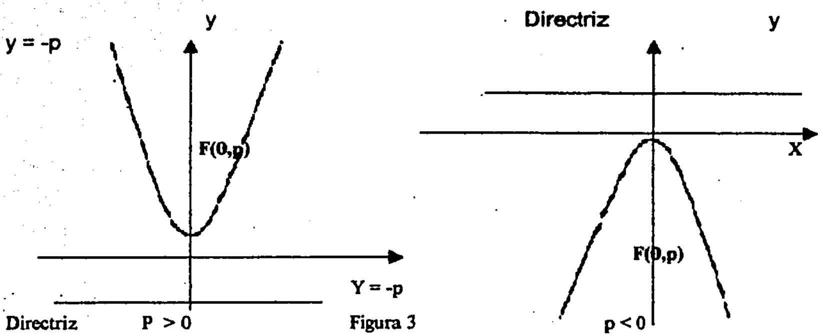


Figura 3

Ejemplo 1: Dada la parábola que tiene la ecuación $y^2 = 6x$ encontrar las coordenadas del foco, ecuación de la directriz y la longitud del lado recto y trazar su gráfica.

Solución :

De acuerdo a la ecuación esta abre en X a la derecha por lo tanto utilizaremos

$4p = 6$

$p = 6/4$

$p = 3/2$

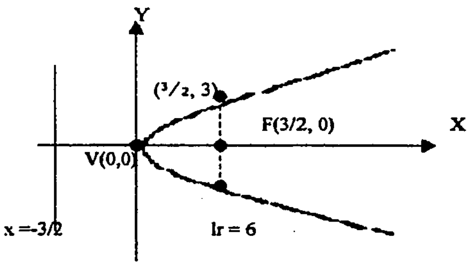
por lo tanto la coordenada del foco

será $F(3/2, 0)$

vértice en el origen $V(0, 0)$

directriz ➔ $x = -3/2$

lado recto $= 6$



Ejemplo 2. Hallar las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz, y la longitud del lado recto para la siguiente ecuación. $x^2 + 8y = 0$ y graficar.

Solución: $x^2 = -8y$ Por lo que la grafica abre en y,

es hacia abajo porque $p < 0$

$4p = -8$ graficando tenemos:

$p = -8/4$

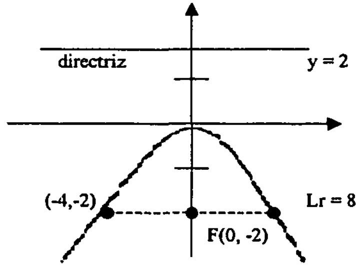
$p = -2$

por lo tanto

F(0, -2)

Directriz $Y = 2$

$Lr = 8$



Ejemplo 3. Encontrar una ecuación de la parábola que tiene como foco(0, 4) l directriz $y = -4$ y trazar la grafica.

Solución como el foco es (0, p) entonces

$P = 4$

Sustituyendo p en la ecuación $x^2 = 4py$

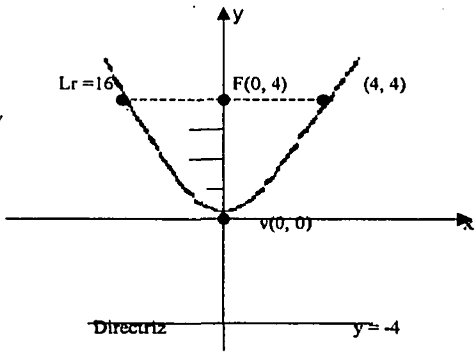
Tenemos $x^2 = 4(4)y$

La ecuación de la parábola es

$x^2 = 16y$

$x^2 - 16y = 0$

$Lr = 16$



Ejemplo 4: Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje X pasa por el punto (-2, 4). Hallar la ecuación de la parábola coordenadas del foco, ecuación de directriz y lado recto.

Solución : La ecuación a utilizar $y^2 = 4px$

Como pasa por el punto (-2, 4) entonces tenemos $4^2 = 4p(-2) \Rightarrow 16 = -8p$

Por lo que $P = -2$

Entonces la ecuación buscada es

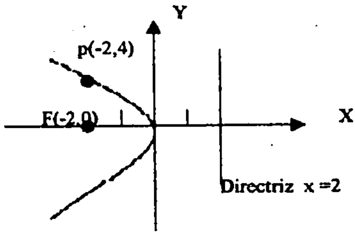
$y^2 = 4(-2)x$

$y^2 = -8x$

foco(-2, 0)

directriz $x = 2$ o $x - 2 = 0$

lado recto = 8



Ejercicios propuestos: Dadas las siguientes condiciones encontrar las propiedades de la parábola o la ecuación según sea el caso.

a) $y^2 - 8x = 0$ solución V(0, 0) F(2, 0) $X = -2$

b) vértice(0,0) F(0, ¼) Solución $x^2 - Y = 0$

c) Foco(0, 3) Lr = 12 Solución $x^2 \pm 12y = 0$

d) $y^2 = 12x$ Solución V(0,0), F(3, 0) $x = -3$

e) $x^2 + 2y = 0$ solución V(0, 0), F(0, ½) $y = -½$

f) F(0, -3), V(0,0) Solución $x^2 + 12y = 0$

g) V(0,0) directriz $y - 5 = 0$ Solución $x^2 + 20y = 0$

IV.2.1. Ecuación de la parábola con vértice (h, k) y eje paralelo a un eje coordenado.

"Cuando se pueden tomar los ejes coordenados como se quiera, se toman generalmente de tal forma que las ecuaciones sean tan simples como sea posible. Si los ejes están dados. Si en el plano con ejes dados X y Y se escogen nuevas coordenadas paralelas a las ya dadas, decimos que ha habido una traslación de ejes en el plano.

Trasladamos los ejes dados X y Y a los ejes X' y Y' con origen (h, k) respetando a los ejes dados vea figura 4

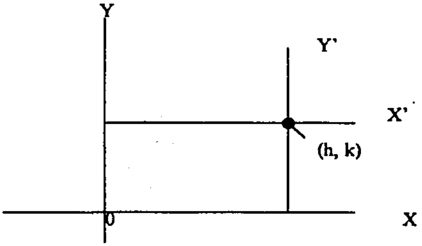


Figura 4

Aplicaremos ahora la traslación de ejes para encontrar la ecuación general de la parábola a un eje coordenado y su vértice en el punto(h, k)." [3]

Si el vértice está en el punto V(h, k), entonces la directriz tiene la ecuación $X = h - p$ y el foco está en el punto $F(h + p, k)$ entonces tenemos $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ para cuando esta sobre x ver figura 5

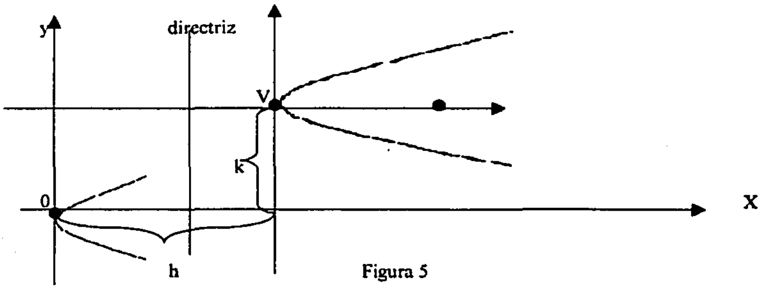


Figura 5

[3] Calculo con Geometría Analítica. Louis Leithold

Para obtener la ecuación de esta parábola con respecto a los ejes X se reemplaza por (x – h) y Y por (y – k) en la ecuación $y^2 = 4pX$ y entonces obtenemos $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

Análogamente si la directriz de una parábola es paralela al eje X y el vértice esta en V(h, k) entonces el foco está en F(h, k – p) y la directriz tiene la ecuación $y = k - p$ y su ecuación es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Cuadro 1 Fórmulas de la Parábola en el origen:

Cuando abre sobre x	**Cuando abre sobre Y**
Foco (h + p, k)	Foco (h, k + p)
vértice (h, k)	Vértice (h, k)
$LR = 2b^2 / a$	$LR = 2b^2 / a$
$e = p / a$	$e = p / a$
Directriz $x = h - p$	Directriz $y = k - p$
Figura 6	Figura 6a

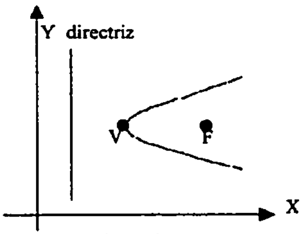


Figura 6

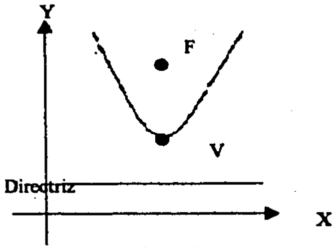


Figura 6a

Ejemplo 1. Demostrar que la ecuación $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud del lado recto.

Solución: por la ecuación $4y^2 - 48x - 20y - 71 = 0$ sabemos que representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje x

Simplificando términos tenemos:

$4y^2 - 20y = 48x + 71$

$4(y^2 - 5y + \quad) = 48x + 71$ completando cuadrados

$2a = -5$

$a = -5/2$

$a^2 = 25/4 \rightarrow$

$4(y^2 - 5y + 25/4) = 48x + 71 + 25$ conjugando el binomio

$4(y - 5/2)^2 = 48x + 96$

$4(y - 5/2)^2 = 48(x + 2)$ * ¼ tenemos

$(y - 5/2)^2 = 12(x + 2)$

vértice(-2, 5/2)

4p= 12

p= 12/4

p = 3

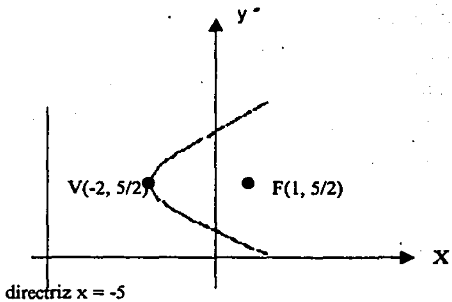
foco(-2 + 3, 5/2)

foco(1, 5/2)

Directriz = x = -2 – 3

x = -5

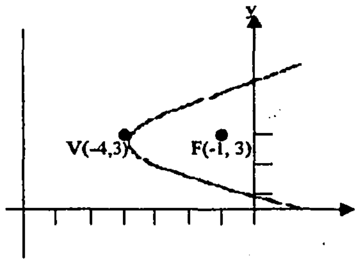
lr = 4p $\rightarrow$ lr =4(3) $\rightarrow$ lr = 12



Ejemplo 2: Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto(-4, 3) y foco(-1, 3). Hallar también la ecuación de su directriz, y la longitud del lado recto.

Solución:

Graficando los puntos conocidos de la parábola sabemos sobre que eje se encuentra.



Directriz $x = -7$

Como la grafica lo indica esta sobre X entonces $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

Como el Vértice (-4, 3), Entonces $(y-3)^2 = 4p(x-(-4))$

$(y-3)^2 = 4p(x+4)$

considerando los valores del foco y vértice tenemos

foco$(h+p, k)$ entonces $h+p = -1$ como el vértice no da el valor de $h = -4$ entonces

$-4 + p = -1 \quad p = -1 + 4 \quad \rightarrow p = 3$

entonces la directriz $x = h - p$

por lo tanto $x = -4 - 3 \quad \rightarrow x = -7$

lado recto $lr = 4p$

entonces $lr = 4(3) \quad lr = 12$

ecuación de la parábola es: $y^2 - 6y + 9 = 12x + 48$

por lo tanto $y^2 - 12y - 6y - 39 = 0$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es paralelo al eje Y y que pasa por los puntos (0, 0) , (8, -4) y (3 1).

Solución: como sabemos que es paralelo al eje Y entonces la ecuación es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Considerando la forma general de la parábola $x^2 + Dx + Ey + F = 0$

Sustituyendo cada punto en la ecuación general se tiene:

Para (0, 0) es $0^2 + D(0) + E(0) + F = 0 \rightarrow F = 0$ 1

Para (8, -4) es $8^2 + D(8) + E(-4) + F = 0 \rightarrow 8D - 4E + F = -64$ 2

Para (3, 1) es $3^2 + D(3) + E(1) + F = 0 \rightarrow 3D + E + F = -9$ 3

Resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos: de ecuación 2 y 3

$8D - 4E + F = -64$ $\qquad$ $8D - 4E + F = -64$

$(3D + E + F = -9) * 4$ $\qquad$ $12D + 4E + 4F = -36$

$20D + 5F = -100$ como $F = 0$ por ecuación 1

$20D = -100 \rightarrow D = -100/20$ por lo tanto $D = -5$ sustituyendo D y F en 3

$3(-5) + E + 0 = -9$ $\qquad$ $E = -9 + 15 \rightarrow E = 6$

por lo tanto la ecuación de la parábola es $x^2 - 5x + 6y = 0$

separando términos tenemos

$x^2 - 5y + \quad = -6y$ completando cuadrados

$2^a = -5$

$a = -5/2$

$a^2 = 25/4$

$x^2 - 5y + 25/4 = -6y + 25/4$

$(x - 5/2)^2 = -6(y + 25/24)$

vértice $(5/2, -25/24)$

$4p = -6$

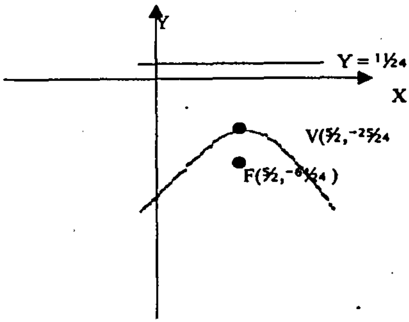
$p = -6/4$ o $p = -3/2$

Foco$(5/2, -25/24 - 3/2)$

Foco$(5/2, -61/24)$

Directriz $Y = -25/24 + 3/2$ $Y = 11/24$

$Lr = 4p \rightarrow lr = 6$



Ejemplo 4.- Deducir las ecuación de las rectas tangente trazadas desde el punto (-3, 3) a la parábola $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$.

Solución : La ecuación de la familia de las rectas que pasan por el punto (-3, 3) es : $Y - 3 = m(x+3)$

Donde m es la pendiente de la tangente buscada entonces $y = mx + 3m + 3$

Este valor se sustituye en la ecuación de la parábola

$(mx + 3m + 3)^2 - 3x - 8(mx + 3m + 3) + 10 = 0$.

Resolviendo la ecuación tenemos:

$m^2x^2 + 6m^2x + 6mx + 9m^2 + 18m + 9 - 3x - 8mx - 24m - 24 + 10 = 0$

$m^2x^2 + 6m^2x - 2mx - 3x + 9m^2 - 18m - 5 = 0$

$m^2x^2 + (6m^2 - 2m - 3)x + 9m^2 - 18m - 5 = 0$

dado que la ecuación cuadrática sólo tiene una solución que es $B^2 - 4AC = 0$ *© entonces $m^2x^2 = A$

$6m^2 - 2m - 3 = B$

$9m^2 - 6m - 5 = C$ por lo tanto;

$(6m^2 - 2m - 3)^2 - 4m^2(9m^2 - 6m - 5) = 0$ resolviendo

$\cancel{36m^4} - \cancel{24m^3} - 32m^2 + 12m + \cancel{9} - \cancel{36m^4} + 24m^3 + 20m^2 = 0$

$(-12m^2 + 12m + 9 = 0) * -1$

$12m^2 - 12m - 9 = 0$ simplificamos

$3(4m^2 - 4m - 3) = 0$

$4m^2 - 4m - 3 = 0$ factorizando

$(2m - 1)(2m + 3) = 0$

despejando tenemos dos valores de m

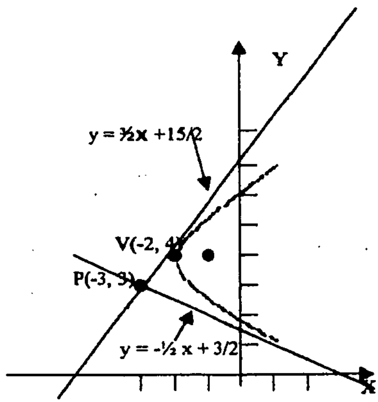
$m = -\frac{1}{2}$ y $m = \frac{3}{2}$

sustituyendo cada pendiente en la ecuación

$Y - 3 = m(x+3)$ tenemos

$Y - 3 = -\frac{1}{2}(x+3) \Longrightarrow x + 2y - 3 = 0$

$Y - 3 = \frac{3}{2}(x+3) \Longrightarrow 3x - 2y - 15 = 0$



Que son las ecuaciones tangentes a la parábola. Ver la grafica.

Para saber cual el la gráfica de la parábola resolver el ejemplo 4

Ejemplo 5.- Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes trazadas del punto (1, 4) a la parábola $y^2 + 3x - 6y + 9 = 0$

Solución:

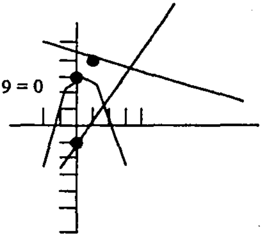
La ecuación de la familia de las rectas que pasan por los puntos (1, 4) es

$y - 4 = m(x - 1)$ o $y = mx - m + 4 = 0$

donde el parámetro m es la pendiente de la tangente buscada .

Al sustituir el valor de y en la ecuación de la parábola no queda

$(mx - m + 4)^2 + 3x - 6(mx - m + 4) + 9$



resolviendo el binomio nos queda

$m^2x^2 - 2m^2x + m^2 + 8mx - 8m + 16 + 3x - 6mx + 6m - 24 + 9 = 0$

$m^2x^2 - 2m^2x + m^2 + 2mx - 2m + 3x + 1 = 0$

$m^2x^2 + (-2m^2 + 2m + 3)x + (m^2 - 2m + 1) = 0$

que es una ecuación de segundo grado en x,

para que haya tangencia se debe tener *©

$(-2m^2 + 2m + 3)^2 - 4(m^2)(m^2 - 2m + 1) = 0$

resolviendo esa ecuación se tiene que

$4m^4 - 8m^3 - 8m^2 + 12m + 9 - 4m^4 + 8m^3 - 4m^2 = 0$

eliminando términos semejantes

$-12m^2 + 12m + 9 = 0$ dividiendo todo entre –12 nos queda

$m^2 - m - 9/12 = 0$ simplificando 9/12 tenemos $m^2 - m - 3/4$

factorizando

$(m - 3/2)(m + 1/2) = 0$

entonces $m = 3/2$ y $m_2 = -1/2$

por tanto las ecuaciones de las rectas tangentes buscadas son

$y - 4 = 3/2(x - 1)$ y $y - 4 = -1/2(x - 1)$ o también

$3x - 2y + 5 = 0$ y $x + 2y - 9 = 0$

Ejemplo 6.- La ecuación de una familia de las parábolas es $y = ax^2 + bx$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por los puntos p(2, 8) y q(-1, 5).

Solución:

Si la parábola que pasa por P(2, 8), se tiene la ecuación:
$8 = 2^2a + 2b$ o $8 = 4a + 2b$

De la misma forma, al pasar por Q(-1, 5) se tendrá
$5 = -1^2a - 1b$ o $5 = a - b$

Por lo que al resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lll} 4a + 2b = 8 & \quad & 4a + 2b = 8 \\ (a - b = 5)*2 & & \underline{2a - 2b = 10} \\ & & 6a \quad = 18 \rightarrow a = 18/6 \quad a = 3 \end{array}$$

sustituyendo a en cualquier ecuación se tiene el valor de b $8 = 4(3) + 2b$

$8 - 12 = 2b \rightarrow b = -4/2 \rightarrow b = -2.$

por lo tanto la ecuación buscada es $y = 3x^2 - 2x$.

***© Intersecciones de una cónica con una recta**

Para calcular la intersección de una cónica con una recta se ha de resolver un sistema de ecuaciones, que dará lugar a una ecuación de segundo grado ($ax^2 + bx + c = 0$). Al resolver esta ecuación, se obtienen resultados distintos dependiendo del valor que tome el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$):

- Si el discriminante es negativo ($b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales; sus dos soluciones son números complejos conjugados), el sistema no tiene solución. La recta no corta a la cónica y se dice que es *exterior* a ella.

- Si el discriminante es nulo ($b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales iguales), la recta corta a la cónica en un solo punto. En este caso se dice que la recta es *tangente* a la cónica.

- Si el discriminante es positivo ($b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas), la recta tiene dos puntos comunes con la cónica. Entonces se dice que la recta es *secante* a la cónica.

Ejemplos Propuestos:

Trazar y resolver los ejemplos siguientes encontrando foco, directriz, Lado recto y vértice.

1. $9y^2 + 36x - 6y - 23 = 0$ Sol. V(2/3, 1/3), F(-1/3, 1/3), x = 5/3 lr = 4

2. $4y^2 - 48y - 20y - 71 = 0$ V(-2, 5/2), F(1, 5/2), x = -5, Lr = 12

3.- $x^2 - 4x + 4y - 24 = 0$ V(2, 7). F(2, 6) , y = 8, Lr = 4

4.- $y^2 - 3x - 8y + 10 = 0$ V(-2, 4), F(-5/4, 4), x = -11/4 Lr = 3

5.- $2x^2 + 20x + 12y + 38 = 0$ V(-5,1), F(-5, - ½) , y = 5/2, Lr = 6

6.- $x^2 - 2x - 8y + 33 = 0$ V(1, 4), F(1, 6) directriz y = 2

Para cada ejercicio siguiente encontrar la ecuación de la parábola dada las siguientes condiciones.

1. Foco (-3, 7) y directriz $y - 1 = 0$ $x^2 + 6x - 12y + 57 = 0$

2. Vértice (-1, 5) y directriz $x + 3 = 0$ $y^2 - 8x - 10y + 17 = 0$

3. Vértice (0, 3) y directriz $x + 5 = 0$ $y^2 - 20x - 6y + 9 = 0$

4. Vértice (3, 4) y Foco (3, 2) $x^2 - 6x + 8y - 23 = 0$

De los ejercicios siguientes encontrar la ecuación, dados los puntos, A, B y C:

1.- A(2, 3), B(-1, 6) y C(1, 0), Eje focal paralelo a x $12y^2 - 18x - 6y + \frac{1}{2} = 0$

2.- A(-2, -8), B(1, 1) y C(3, -3), eje focal paralelo a y $x^2 - 2x + y = 0$

3.- A(1, 2), B(5, 3) y C(11, 4), Eje focal paralelo a x $y^2 - x - y - 1 = 0$

4.- A(-3, 9), B(1, 1) y C(2, 4), Eje focal paralelo a y $x^2 - y = 0$

Encontrar la ecuación de las tangentes trazadas del punto P a la parábola dada.

1.- $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$ P(-2, -1) $y + 2x + 5 = 0$ y $2x + y + 5 = 0$

2.- $x^2 - 6x - 4y + 17 = 0$ P(2, -4) $2x - y - 8 = 0$ y $3x + y - 2 = 0$

3.- $y^2 + 8x = 0$ P(-2, 4) $x + y - 2 = 0$

4.- $y^2 + 16x = 0$ paralela $x + y - 1 = 0$ $x + y - 4 = 0$

IV. 3 Elipse, su ecuación cartesiana.

"Una Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

Los puntos fijos se le llaman Focos F y F', o eje focal que corta a la elipse en dos puntos V y V' llamados vértices, la porción del eje focal comprendida entre los vértices, es el segmento VV' se le llama eje mayor."[4]

Ecuación de la elipse de centro en el origen y ejes de coordenadas los ejes de la elipse. Donde los focos están sobre el eje x F y F' por lo tanto las coordenadas serán (c, 0) y (–c,0) respectivamente siendo f una constante positiva, Sea un punto P(x, y) un punto cualquiera de la elipse ver figura 7 que debe cumplir la condición geométrica.

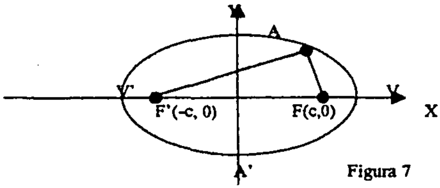


Figura 7

$| FP | + | F'P | = 2a$, donde a es una constante positiva mayor que f

Demostración.

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$(\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ )^2$$

$$(x-c)^2+y^2 = (\ 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}\ )^2$$

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$$

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + (x+c)^2+y^2-(x-c)^2-y^2$$

resolviendo binomios tenemos:

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - (x^2-2cx+c^2) - y^2$$

[4] Geometría Analítica, Charles H. Lehmann

eliminando términos semejantes.

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 \cancel{+x^2} + 2cx \cancel{+c^2} \cancel{+y^2} \cancel{-x^2} + 2cx \cancel{-c^2} \cancel{-y^2}$$

$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$ despejando 4a de la raíz

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = (4a^2 + 4cx) / 4^{a}$ simplificando tenemos:

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + cx / a$ elevando todo al cuadrado para eliminar la raíz

$(x+c)^2 + y^2 = (a + cx/a)^2$ resolviendo los binomios

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + c^2x^2 / a^2$ despejando los términos al cuadrado tenemos.

$$x^2 + y^2 = a^2 - \cancel{2cx} - c^2 + \cancel{2cx} + c^2x^2 / a^2$$

$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 + c^2x^2 / a^2$ despejando el término en fracción tenemos:

$-c^2x^2 / a^2 + x^2 + y^2 = a^2 - c^2$ resolviendo la fracción con el término x tenemos:

$$\frac{-c^2x^2 + a^2x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$$

$\dfrac{(a^2 - c^2)\,x^2}{a^2} + y^2 = a^2 - c^2$ dividiendo todo por $(a^2 - c^2)$ tenemos

$$\frac{\cancel{(a^2 - c^2)}\,x^2}{a^2\cancel{(a^2 - c^2)}} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = \frac{\cancel{a^2 - c^2}}{\cancel{(a^2 - c^2)}}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

como $(a^2 - c^2)$ es positiva ➔ $b^2 = a^2 - c^2$ por lo tanto que es la ecuación de la elipse. $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

Un punto (x, y) esta en la elipse con vértices en (o, a) , focos en (o, c) si y solo satisface la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

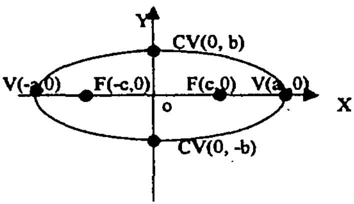
Donde

$$b^2 = a^2 - c^2$$

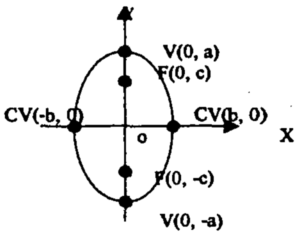
$$a^2 > b^2$$

Cuadro 1 Formulas de la Elipse en el origen:

Cuando abre sobre x	**Cuando abre sobre Y**
Foco ($\pm$ c, 0)	Foco (0, $\pm$ c)
Vértice ($\pm$ a, 0)	Vértice (0, $\pm$ a)
Covértice (0, $\pm$ b)	Covértice ($\pm$ b, 0)
LR = 2b² / a	LR = 2b² / a
$e = c / a$	$e = c / a$
Directriz x = $\pm$ a² /p	Directriz y = $\pm$ a² /p
Gráfica num. 1	Gráfica num. 2



Gráfica num. 1



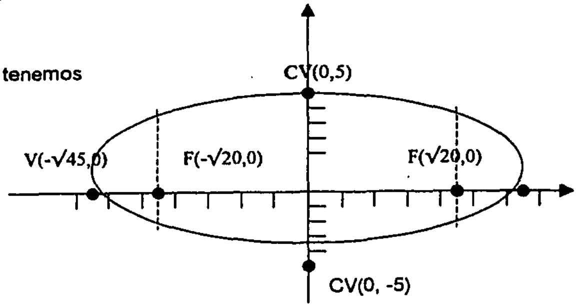
Gráfica num. 2

Ejemplo 1.- Encuentre todos los elementos de la elipse dada la ecuación es $5x^2 + 9y^2 - 225 = 0$ Y graficar.

Solución:
$5x^2 + 9y^2 = 225$
dividiendo todo entre 225 tenemos

$$\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$V(\sqrt{45},0)$



donde :

$a^2 = 45 \rightarrow a = \sqrt{45}$
$b^2 = 25 \rightarrow b = 5$
$c^2 = 20 \rightarrow c = \sqrt{20}$

Vértice$(\pm\sqrt{45}, 0)$	Lado recto $= 50/\sqrt{45}$
Foco$(\pm\sqrt{20}, 0)$	Excentricidad $= \sqrt{20}/\sqrt{45}$
Covértice$(0, \pm 5)$	Directriz $X = \pm\ 45/\sqrt{20}$

Ejemplo 2.- Deducir la ecuación de la elipse dadas las siguientes condiciones Covértice $(\pm 5, 0)$ y $Lr = 5$ y graficar.

Solución: Del Covértice obtenemos el valor de b

$b = 5 \rightarrow b^2 = 25$
$Lr = 2b^2 / a$ obtenemos el valor de a
$5 = 2(25)/ a$ despejando a tenemos

$a = 50/5 \rightarrow a = 10 \rightarrow a^2 = 100$

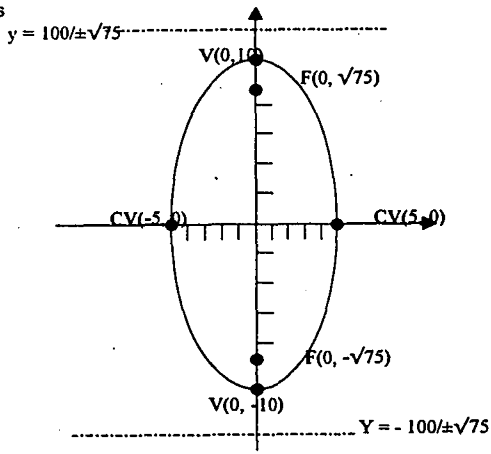
por lo tanto el valor de c
$c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = 100 - 25$
$c^2 = 75 \rightarrow c = \sqrt{75}$

obtenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$100x^2 + 25y^2 - 2500 = 0$

foco $(0, \pm\sqrt{75})$
Vértice(0, 10)
$e = \sqrt{75} / 10$
$y = \pm 100 / \sqrt{75}$



Ejemplo 3.- Deducir la ecuación de las rectas que contiene el punto P(2, 2) y que son tangentes a $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$

Solución: Como se trata de rectas tangentes entonces la fórmula a utilizar será

$y - y_1 = m(x - x_1)$

sustituyendo el punto P(2, 2) en la formula

$y - 2 = m(x - 2)$

despejando y tenemos $y = mx - 2m + 2$

sustituyendo y en la ecuación de la elipse se tiene

$x^2 + 4(mx - 2m + 2)^2 - 20 = 0$

resolviendo el binomio

$x^2 + 4(m^2x^2 - 4m^2x + 4mx + 4m - 8m + 4) - 20 = 0$

$x^2 + 4m^2x^2 - 16m^2x + 16mx + 16m - 32m + 16 - 20 = 0$

simplificando términos semejantes

$$\underbrace{(1 + 4m^2)}_{A}x^2 + \underbrace{(-16m^2 + 16m)}_{B}x + \underbrace{(16m^2 - 32m - 4)}_{C} = 0$$

Que son los elementos de la ecuación cuadrática $B^2 - 4AC = 0$

Entonces

$(-16m^2 + 16m)^2 - 4(1 + 4m^2)(16m^2 - 32m - 4) = \sqrt{0}$

$\cancel{256m^4} - \cancel{512m^3} + 256m^2 \cancel{- 64m^2} + 128m + 16 \cancel{- 256m^4} + \cancel{512m^3} + 64m^2 = 0$

Eliminando términos semejantes

$256m^2 + 128m + 16 = 0$

$16(16m^2 + 8m + 1) = 0$ factorizando

$(4m + 1)(4m + 1) = 0$

por lo tanto $m = -\frac{1}{4}$

sustituyendo en la ecuación

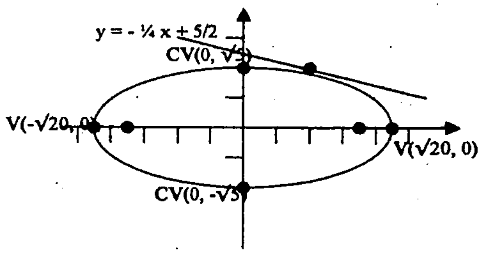
$y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 2)$

$y = -\frac{1}{4}x + 2/4 + 2$

$y = -\frac{1}{4}x + 10/4$ o

$x + 4y - 10 = 0$

que es la recta buscada.



Ejemplo 4.- Hallar la ecuación de la elipse que tiene sus centro en el origen, uno de sus vértices en el punto(0, 7) y pasa por el punto ($\sqrt{5}$, 14/3).

Solución:

La ecuación buscada de acuerdo al vértice es $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$
Como conocemos el valor del vértice sabemos que a = 7 entonces

$$\frac{x^2}{b^2} \quad \frac{y^2}{49} = 1$$

sustituyendo el punto ($\sqrt{5}$, 14/3

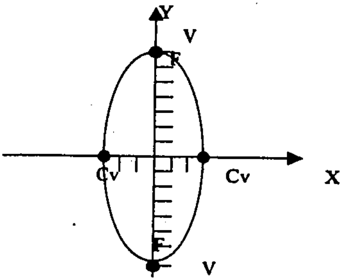
$$\frac{(\sqrt{5})^2}{b^2} + \frac{(14/3)^2}{49} = 1$$

$$\frac{5}{b^2} + \frac{(7^2 * 2^2)/\ 3^2}{49} = 1 \qquad \frac{5}{b^2} + \frac{4}{9} = 1$$

despejando $(9)(5) + 4b^2 = 9b^2$

$45 + 4b^2 = 9b^2 \quad 45 = 9b^2 - 4b^2$
$45 = 5b^2$ por lo tanto $b^2 = 9$ entonces $b = 3$
por lo tanto la ecuación será

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$$



$c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = 40 \rightarrow c = \sqrt{40}$

Foco (0, $\pm\sqrt{40}$) Cv =(±3, 0)

Vértice(0, -7) Lr = 18/7

$e = \sqrt{40}/7$

Encontrar todos los elementos de la elipse dada su ecuación general.

a.)	$36x^2 + 4y^2 - 144 = 0$	$V(0, \pm 6)$, $F(0, \pm 32)$, $CV(\pm\sqrt{32}, 0)$, $e = \sqrt{32}/6$
b.)	$9x^2 + y^2 - 9 = 0$	$V(0, \pm\sqrt{8})$, $F(0, \pm 3)$, $CV(\pm 1, 0)$, $e = \sqrt{21}/5$
c.)	$2x^2 + 3y^2 - 18 = 0$	$V(\pm 3, 0)$, $F(\pm\sqrt{3}, 0)$, $CV(0, \pm\sqrt{6})$, $e = \sqrt{3}/3$
d.)	$3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$	$V(\pm 4, 0)$, $F(\pm 2, 0)$, $CV(0, \pm 2\sqrt{3})$, $Lr = 6$
e.)	$12x^2 + 8y^2 - 96 = 0$	$V(0, \pm\sqrt{12})$, $F(0, \pm 2)$, $CV(\pm\sqrt{8}, 0)$, $e = \sqrt{3} / 2$
f.)	$x^2 + 4y^2 - 20 = 0$	$V(\pm\sqrt{20}, 0)$, $F(\pm\sqrt{15}, 0)$, $CV(0, \pm\sqrt{5})$ $Lr = 10/\sqrt{20}$

Deducir la ecuación de la elipse dadas las siguientes condiciones.

1.)	Foco$(\pm 5, 0)$, $e = 5/7$, $Lr = 48/7$	$24x^2 + 49y^2 - 1176 = 0$
2.)	Foco$(0, \pm 4)$, $e = 4/5$, $y = + 25/4$	$25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$
3.)	Covertice$(\pm 9, 0)$, $Lr = 2$	$6561x^2 + 81y^2 - 531441 = 0$
4.)	Foco$(\pm 8, 0)$, Vértice$(\pm 9, 0)$	$17x^2 + 81y^2 - 1377 = 0$
5.)	Foco$(0, \pm 4)$, Vértice$(0, \pm 6)$	$20x^2 + 36y^2 - 720 = 0$

Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto dado.

a)	$2x^2 + 7y^2 = 11$	en $P(2,1)$	
b)	$9x^2 + y^2 = 8$	en $P(3, -2)$	$2x - 7y - 20 = 0$, $2x + y - 4 = 0$
c)	$3x^2 + 8y^2 = 84$	en $P(2, 4)$	
d)	$9x^2 + 25y^2 = 225$	en $P(5, 1)$	$4x + 5y - 25 = 0$
e)	$2x^2 + 3y^2 = 5$	en $P(1, 1)$	$2x - 3y - 5 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$

IV.3.1. Ecuación de la elipse de centro C(h, k) y ejes paralelos a los coordenados.

"Los ejes coordenados son un artificio que se introdujo en el plano para poder representar puntos y curvas. En algunos casos se prefieren mover para simplificar la ecuación. Todo cambio en la posición de los ejes se pueden representar mediante la combinación de una traslación. Una traslación de los ejes produce un nuevo conjunto de ejes paralelos a los anteriores ver figura 8

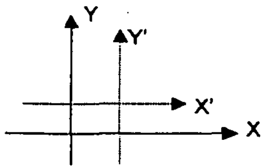


Figura 8

Si representamos a los ejes de modo que el origen del nuevo sistema de coordenadas sea el punto (h, k) del sistema, ver figura 9 entonces todo punto tiene dos representaciones: (x, y) en el sistema anterior de coordenadas, y (x', y') en el nuevo.

La relación entre las coordenadas de los dos sistemas se determina con facilidad en la figura 9 y resulta.

$$X = x' + h \qquad \text{o sea,} \quad x' = x - h$$

Y $$Y = y' + k \qquad \text{o sea,} \quad y' = y - k.$$

A estas ecuaciones en la elipse se le llaman ecuaciones de traslación."[5]

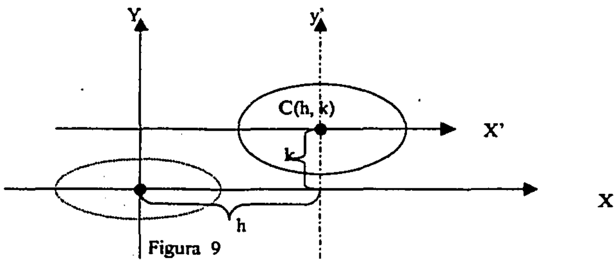
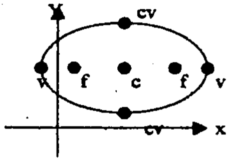


Figura 9

[5] Geometría Analítica , Douglas F. Riddle; Thomson

Un Punto(x, y) está en la elipse con centro en (h, k), vértices en $(h \pm a, k)$ y covértices en $(h, k \pm b)$ si y sólo si satisface la ecuación.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

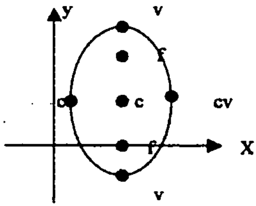


Los focos se ubican en $(h \pm c, k)$ siendo $c^2 = a^2 - b^2$.

Gráfica num. 3

Un Punto(x, y) está en la elipse con centro en (h, k), vértices en $(h, k \pm a)$ y covértices en $(h \pm b, k)$ si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Los focos se ubican en $(h, k \pm c)$ siendo $c^2 = a^2 - b^2$.

Gráfica num. 4

Cuadro 2 Formulas de la Elipse fuera del origen:

Cuando abre sobre X	**Cuando abre sobre Y**
Foco $(h \pm c, k)$	Foco $(h, k \pm c)$
Vértice $(h \pm a, k)$	Vértice $(h, k \pm a)$
Covértice $(h, k \pm b)$	Covértice $(h \pm b, k)$
$LR = 2b^2 / a$	$LR = 2b^2 / a$
$e = c / a$	$e = c / a$
Directriz $x = h \pm a^2 / p$	Directriz $y = k \pm a^2 / p$
Gráfica num. 3	Gráfica num. 4

Ejemplo 1: Dada la ecuación de la Elipse determinar las coordenadas del centro, vértices, focos, lado recto, eje mayor y eje menor.

$4x^2 + 9y^2 + 32x - 18y + 37 = 0$

solución.

$4x^2 + 32x \quad + \quad 9y^2 - 18y \quad = -37$ simplificando

$4(x^2 + 8x \quad) + \quad 9(y^2 - 2y \quad) = -37$

$2a = 8 \qquad\qquad 2^a = -2$

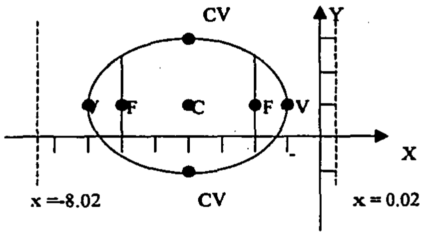
$a = 4 \qquad\qquad a = -1$

$a^2 = 16 \qquad\qquad a^2 = 1$

$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 2y + 1) = -37 + 64 + 9$

$4(x + 4)^2 + 9(y - 1)^2 = 36$ se divide entre 36 tenemos

$$\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$



donde

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3$

$b^2 = 4 \rightarrow b = 2$

$c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$

coordenadas del centro serán

C(-4, 1) h = -4 y k = 1

Foco $(-4 \pm \sqrt{5}, 1) \quad \rightarrow \quad F(-1.8, 1)$ y $(6.2, 1)$

Vértice $(-4 \pm 3, 1) \quad \rightarrow \quad V(-1, 1)$ y $(-7, 1)$

Covértice$(-4, 1 \pm 2) \quad \rightarrow \quad CV(-4, 3)$ y $(-4, -1)$

$LR = 2b^2/a \quad 2(4)/3 \quad Lr = 8/3$

$2a = 6$ y $2b = 4$

$e = \sqrt{5}/3$ como la excentricidad es menor a 1 entonces se dice que es una elipse.

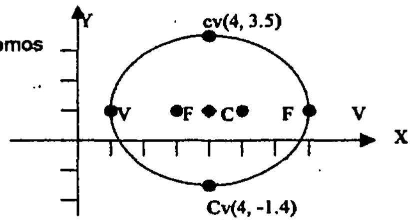
Directriz $x = h \pm a^2/c \quad x = -4 \pm 9/\sqrt{5}, \quad x = -4 \pm 4.02$

$X = 0.02$

$X = -8.02$

Ejemplo 2.- Los vértices de una elipse son los puntos (1, 1) y (7, 1) y su excentricidad es de 1/3. Hallar la ecuación de la elipse, las coordenadas del foco, longitudes del lado mayor y menor de cada lado recto.

Solución. Graficando los puntos como primer paso, estos nos indica donde abre la elipse .



Utilizando las coordenadas del vértice podemos
Encontrar h, k

$h - a = 1$ y $h + k = 7$

$h - a = 1$
$h + a = 7$

$2h = 8$
$h = 8/2$

$h = 4$ $k = 1$ Centro (4, 1)

$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$
$b = \sqrt{8} \rightarrow b^2 = 8$
$c = 1 \rightarrow c^2 = 1$

por lo tanto la ecuación $\dfrac{(x-4)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{8} = 1$

Focos (5, 1) y (3, 1)
Covértices (4, 3.5) y (4, -1.3)

$e = 1/3$
$Lr = 16/3$

Longitud de lado recto
$2a = 6$ y $2b = 4\sqrt{2}$

directriz $x = 4 \pm 9/1$ por lo tanto
$x = 13$ y $x = -5$

Ecuación General será
$8(x-4)^2 + 9(y-1)^2 = 72$
$8(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 2y + 1 = 72$
$8x^2 + 9y^2 - 64x - 18y + 56 = 0$

Ejemplo 3.- La elipse con vértices en (-1, 8) y (-1, -2) que contiene al punto P(1, 0). ¿Encuentre la ecuación, Foco, longitud de los lados rectos, excentricidad, directriz.?

Solución: Encontramos primero el centro de la elipse.

Con los puntos del vértice que graficados están sobre Y

$$\begin{array}{l} k + a = 8 \\ k - a = -2 \\ \hline 2k \quad = 6 \end{array}$$

$k = 6/2$

$k = 3$ $\qquad h = -1$

centro (-1, 3)

como tenemos el valor de k podemos encontrar el valor de a

$k + a = 8$ sustituyendo k

$3 + a = 8$

$a = 8 - 3$

$a = 5 \rightarrow \qquad a^2 = 25$

sustituyendo a, k, h en la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{25} + \frac{(x-(1-1))^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y-3)^2}{25} + \frac{(x+1)^2}{b^2} = 1$$

sustituyendo el punto P(1, 0) en la ecuación

$$\frac{(0-3)^2}{25} + \frac{(1+1)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{b^2} = 1$$

despejando el valor de b^2

$b^2 = 25/4 \quad \rightarrow$

$b = 5/2$

como conocemos a^2, b^2 entonces sustituimos en la ecuación .

$$\frac{(y-3)^2}{25}+\frac{(x+1)^2}{\frac{25}{4}}=1$$

Entonces la ecuación general de la elipse

$25/4(y-3)^2 + 25(x+1)^2 = 625/4$ multiplicando por 4 tenemos

$25(y-3)^2 + 25(4)(x+1)^2 = 625$ resolviendo los binomios

$25(y^2 - 6y + 9) + 100(x^2 + 2x + 1) = 625$

$25y^2 - 150y + 225 + 100x^2 + 200x + 100 - 625 = 0$

$100x^2 + 25y^2 + 100x - 150y - 300 = 0$

para encontrar el valor de c

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 25/4$

$c^2 = 75/4 \rightarrow c = \sqrt{75}/2$

Focos $(-1, 3 + \sqrt{75}/2)$ y $(-1, 3 - \sqrt{75}/2)$

Covértices(3/2, 3) y(-7/2, .3)

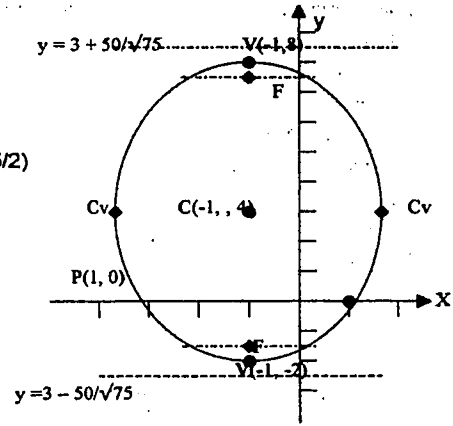
longitud de los lados rectos

$2a = 10$

$2b = 5$

$e = \sqrt{75}/10$

Directriz $y = 3 \pm 50 / \sqrt{75}$



Ejercicios propuestos:

1. Dadas las ecuaciones de la elipse encontrar Foco, Vértice, Covértices, longitud de los lados, excentricidad y directriz.

1.) $9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0$ F(6, -3) y (-2, -3), V(7, -3) y (-4, -3) CV(2, 0) y (2, -6), 2a = 10, 2b = 6 , e = 4/5 , Lr = 18/5

2.) $9x^2 + y^2 + 36x - 24y + 36 = 0$ F(-2, 3+√5) y (-2, 3 -√5), V(-2, 6) y (-2, 0) 2a=6, 2b=4, e=√5 /3, Lr=8/3, Cv(0,3) y (-4,3)

3.) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$ F(1, 2+√5) y (2, 2 -√5), V(1, 5) y (1, -1) 2a=6, 2b=4, e=√5 /3, Lr=8/3, Cv(3, 2) y (-1, 2)

4.) $2x^2 + y^2 + 20x - 40 = 0$ F(-5, -√45) y(-5, √45), V(-5, -√90) y (-5, √90) CV(-5-√45, 0) y(-5 +√45, 0), e = √45/ √90

5.) $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$ F(2 -√3, 3) y (2+√3, 3), V(5, 3) y (-1, 3), Lr = 4 2a = 6, e = √3 /3 , Cv(2, 3 -√6) y (2, 3 +√6)

6.) $49x^2 + 24y^2 - 196x + 96y - 884 = 0$ F(2, 3) y (2 , -7), V(2, 5) y (2,-9), Lr = 48/7 2a = 14, e = 5 /7, Cv(2+√24, -2) y (2-√24, -2)

2. Dados algunos de los elementos de la elipse encontrar la ecuación general.

1.) Centro (-2,1) eje focal a y eje mayor 2a = 24 $144x^2 + 64y^2 + 576x - 128y - 8576 = 0$
2.) Centro (3, 1), un Vértice (3, -2) e = 1/3 $9x^2 + 8y^2 - 54y - 16y + 17 = 0$
3.) Covértices (1, 1) y (-5, 1) , e = √7/4 $16x^2 + 9y^2 + 64y - 18y - 71 = 0$
4.) Vértice (7, 2) Covértice (4, 0) $4x^2 + 9y^2 - 32y - 36y + 64 = 0$
5.) Focos (2, 3) y (2, 7) , e = 5/7 $49x^2 + 24y^2 + 196y - 116y - 764 = 0$
6.) Centro(-3, 4) Covértice (-11,4) eje mayor 2a=20 $100x^2 + 64y^2 - 800x + 576y - 4224 = 0$

3. Hallar la ecuación de la elipse con centro en (4, -1) y foco(1, -1) y que pasa por el punto P (8, 0).

Respuesta $$\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

4. Hallar las ecuaciones de la tangente para la elipse $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$ en el punto p(2, 1).

Respuesta: $9x + 5y - 23 = 0$ y $5x - 9y - 1 = 0$

5. Hallar las ecuaciones de la tangente para la elipse $2x^2 + 3y^2 + x - y - 5 = 0$ en el punto p(3, -1).

Respuesta: $x + y - 2 = 0$ y $9x - 191y - 218 = 0$

Ejemplo 1.- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuyas distancias al eje y es siempre igual al doble de su distancia del punto (3, 2).

Solución: Sean P(x, y) un punto cualesquiera del lugar geométrico D(P, y) distancia de P al eje y

El enunciado se interpreta en forma matemática como

$D(P, Y) = 2d(P, F)$

$X = 2\,(x-3)^2 + (y-2)^2$ Elevando al cuadrado

$X^2 = 4[\,(x-3)^2 + (y-2)^2\,]$ resolviendo binomios

$X^2 = 4[\,x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4\,]$

$X^2 = 4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 16y + 16$

$X^2 = 4x^2 + 4y^2 - 24x - 16y + 52$

$3x^2 + 4y^2 - 24x - 16y = -52$ Completando cuadrados

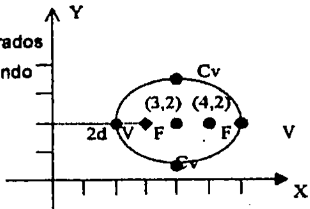
$3x^2 - 24x \quad + 4y^2 - 16y = -52$ simplificando

$3(x^2 - 8x \quad) + 4\,(y^2 - 4y \quad) = -52$

$2a = -8 \qquad 2a = -4$

$a = -4 \qquad a = -2$

$a^2 = 16 \qquad a^2 = 4$



$3(x^2 - 8x + 16\,) + 4\,(y^2 - 4y + 4 \quad) = -52 + 48 + 16$

$3(x-4)^2 + 4(y-2)^2 = 12$ dividiendo todo entre 12

$$\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

se trata de una elipse con centro (4, 2) y ejes paralelos a los ejes coordenados.

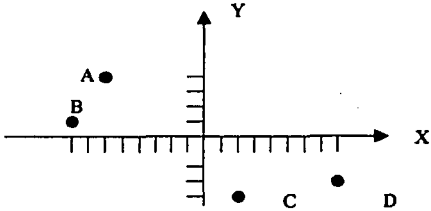
Sus respectivos datos a esta elipse son :

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$ Vértice (6, 2) y (2, 2) Lr = 3

$b^2 = 3 \rightarrow b = \sqrt{3}$ Covértice $(4, 2+\sqrt{3})$ y $(4, 2-\sqrt{3})$ e = 1/2

$c^2 = 1 \rightarrow c = 1$ Foco (5, 2) y (3, 2) 2a = 4

Ejemplo 2.- Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos A (-6, 4); B (-8, 1); C (2, -4); D (8, -3).



Solución:

La ecuación de acuerdo a los puntos en la gráfica será :

$X^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$

Los puntos dados deben satisfacer la ecuación se tiene:

(-6, 4); $36 + 16B - 6D + 4E + F = 0$

(-8 1); $64 + B - 8D + E + F = 0$

(2, -4); $4 + 16B + 2D - 4E + F = 0$

(8, -3); $64 + 9B + 8D - 3E + F = 0$

El sistema anterior se puede resolver por método de Gauss Jordan o Ecuaciones simultaneas: $B = 4$; $D = -4$; $E = -8$; $F = -92$

Así que la ecuación buscada es: $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 92 = 0$

Que en su forma ordinaria queda como:

$x^2 - 4x \quad + 4y^2 - 8y \quad = 92$

$x^2 - 4x \quad + 4(y^2 - 2y \quad) = 92$

$2a = -4 \qquad 2a = -2$

$a = -2 \qquad a = -1$

$a^2 = 4 \qquad a^2 = 1$

$x^2 - 4x + 4 + 4(y^2 - 2y + 1) = 92 + 4 + 4$

$(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 100$

Foco $(2 \pm \sqrt{75}, 1)$

Vértice $(2 \pm 10, 1)$

Covértice $(2, 1 \pm 5)$

Lr = 5

$e = \sqrt{75} / 10$

longitud de lados rectos $2a = 20$ $2b = 10$

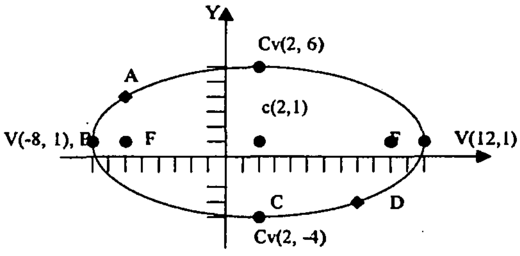
$$\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$$

Centro (2, 1)

$a^2 = 100 \rightarrow a = 10$

$b^2 = 25 \rightarrow b = 5$

$c^2 = 75 \rightarrow c = \sqrt{75}$



Ejemplo 3.- Hallar los puntos de intersección de la recta $x + y + 1 = 0$ y la elipse $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$.

solución:

se resuelve el sistema $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 9 = 0. \end{cases}$

$x = -y - 1$

$2(-y - 1)^2 + 3y^2 - 4(-y - 1) + 6y - 9 = 0$

$2(y^2 + 2y + 1) + 3y^2 + 4y + 4 + 6y - 9 = 0$

$2y^2 + 4y + 2 + 3y^2 + 4y + 4 + 6y - 9 = 0$ términos semejantes:

$5y^2 + 14y - 3 = 0$ factorizando tenemos

$(5y - 1)(y + 3) = 0$

dos valores $y_1 = 1/5$, $y_2 = -3$

por lo tanto sustituyendo los valores de y en $x = -y - 1$ serán

$x_1 = -6/5$, $x_2 = -2$

Que son los puntos donde cortan las rectas. $(-6/5, 1/5)$ y $(2, -3)$

Trazar una tangente vertical a la cónica $x^2 - y^2 + 2x + y - 2 = 0$.

Solución: Las rectas verticales son de la forma $x = k$, Sustituyendo este valor en la ecuación:

$K^2 - y^2 + 2k + y - 2 = 0,$

$-y^2 + y + (k^2 + 2k - 2) = 0$

$* ©\ b^2 - 4ac = 1 - 4(-1)(k^2 + 2k - 2) = 1 + 4k^2 + 8k - 8 = 4k^2 + 8k - 7$

$4k^2 + 8k - 7 = 0$ por factorización no se puede resolver entonces se emplea fórmula general para encontrar los valores k

$$k = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(4)(-7)}}{2(4)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 112}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{176}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{16 * 11}}{8} = \frac{-8 \pm 4\sqrt{11}}{8}$$

$k = -1 \pm \sqrt{11}/2$

Las tangentes verticales son:

$X = -1 + \sqrt{11}/2$ y $x = -1 - \sqrt{11}/2$

Ejercicios Propuestos:

1.) Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los puntos P(1, 1); Q(2, 0); R(-1, -1) y S (0, -3) y tiene sus ejes paralelos a los coordenados.

Sol. $A = 19$, $B = 11$, $C = -23$, $D = 23$ y $E = -30$

$$19x^2 + 11y^2 - 23x + 23y - 30 = 0$$

2.) Deducir una ecuación de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados, que pasa por A (6, -1), B (-4, -5), C (6, -5) y D (-12, -3).

Sol. $A = 1$, $B = 36$, $C = -2$, $D = 216$ y $E = 156$

$$x^2 + 36y^2 - 2x + 216y + 156 = 0$$

3.- De una familia de elipses es $4x^2 + 9y^2 + ax + by - 11 = 0$. Hallar la ecuación del elemento de la familia que pasa por el punto (2, 3) y (5, 1).

Solución $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 11 = 0$.

4.- El punto medio de una recta de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$. es el punto (5, 2) Hallar la ecuación de la recta.

Solución: $x + 2y - 9 = 0$

5.- Por el punto (2, 7) se traza una tangente a la elipse $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$. Hallar las coordenadas de los puntos de contacto.

Solución.- (1, 1) (- 13/9, 29/9)

6.- Hallar la ecuación de la tangente a la elipse $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ que son perpendiculares a la recta $x + y - 5 = 0$

Solución. $x - y - 1 = 0$; $3x - 3y + 13 = 0$.

IV.4 Hipérbola, su ecuación cartesiana.

Se llama hipérbola al lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante (se representa por 2a).

La recta que une los dos focos se llama eje real de la hipérbola y la mediatriz se llama eje imaginario de la hipérbola.

El punto donde se cortan ambos ejes (que es, evidentemente, el punto medio de los focos) se llama centro de la hipérbola.

Los puntos donde la hipérbola corta a los ejes (se verá que únicamente corta al eje real) se llaman vértices de la hipérbola.

Al igual que en la elipse, se llama distancia focal a la distancia entre los dos focos y a las distancias desde un punto cualquiera de la hipérbola a ambos focos se les llama radios vectores del punto.

A diferencia de la elipse, aquí se tiene $2c > 2a$ (por tanto $c > a$) y se puede Considerar $b=\sqrt{c^2 - a^2}$. Este valor se llama semieje imaginario de la hipérbola.

El cociente $e = c/a$, que es un número mayor que 1, se le llama excentricidad de la hipérbola.

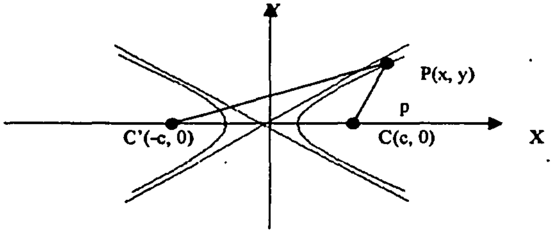
Al igual que en la elipse, se considerarán en primer lugar las hipérbolas centradas en el origen de coordenadas y con focos en el eje de abscisas.

"Definición: Una Hipérbola es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano, tales que la diferencia positiva entre las distancias de (x,) a un par de puntos fijos distintos (los focos) es igual a una constante" [6]

---

[6] Geometría Analítica, Douglas F. Riddle

Se representan los focos como (c, 0) y (-c, 0) ver la figura 9 y la constánte como 2a. Si (x, y) representa un punto en la hipérbola, se cumplirá lo siguiente.



$| CP | - | C' P | = 2a$, donde a es una constante positiva mayor que f
Demostración.

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2} + y^2 = \sqrt{(x+c)^2 + } y^2 \pm 2a$$

$$\cancel{x^2} - 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + 2cx + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + } y^2 + 4^{a}$$

simplificando tenemos:

$\pm 4a \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$ dividiendo entre 4a

$\pm \sqrt{(x+c)^2 + } y^2 = a + cx/a$ elevando al cuadrado

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + \frac{2acx}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + c^2x^2 / a^2$ despejando los términos al cuadrado tenemos.

$x^2 + y^2 = a^2 - \cancel{2}cx - c^2 + \cancel{2}cx + c^2x^2 / a^2$ como $c^2 > a^2$ entonces

$x^2 + y^2 = c^2 - a^2 + c^2x^2 / a^2$ despejando el término en fracción tenemos:

$c^2x^2 / a^2 + x^2 + y^2 = c^2 - a^2$

resolviendo la fracción con el término x tenemos:

$$\frac{c^2x^2 - a^2x^2}{a^2} - y^2 = a^2 - c^2$$

$\frac{(c^2 - a^2)\,x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$ dividiendo todo por $(c^2 - a^2)$ tenemos

$$\frac{\cancel{(c^2 - a^2)}\,x^2}{a^2\cancel{(c^2 - a^2)}} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = \frac{a^2 - c^2}{(c^2 - a^2)}$$

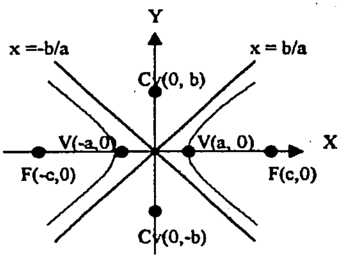
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 + b^2)} = 1$$

como $(c^2 - a^2)$ es positiva ➔ $b^2 = c^2 - a^2$ por lo tanto

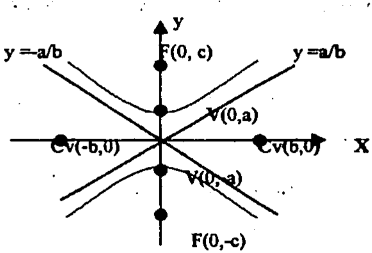
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es la ecuación de la Hipérbola.

Un punto (x, y) esta en la elipse con vértices en (o, a) , focos en (o, c) si y solo satisface la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Donde $b^2 = c^2 - a^2$.

Cuadro 1 Fórmulas de la Hipérbola en el origen:	
Cuando abre sobre x	**Cuando abre sobre Y**
Foco (± c, 0)	Foco (0, ± c)
Vertices (± a, 0)	Vértices (0, ± a)
Covértice (0, ± b)	Covértice (± b, 0)
LR = 2b² / a	LR = 2b² / a
e = c / a donde e > 1	e = c / a donde e> 1
Directriz x = ± b /a	Directriz y = ± a /b
Gráfica num. 3	Gráfica num. 3a



Gráfica num. 3



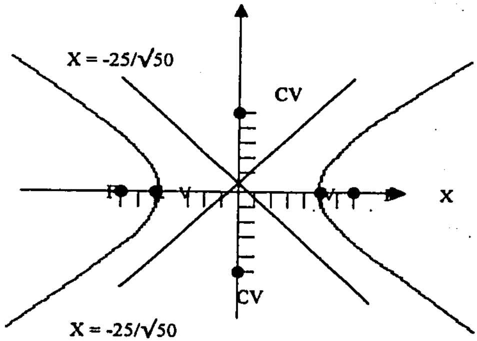
Gráfica num. 3a

Ejemplo 1.- Hallar los elementos de la hipérbola $x^2 + y^2 = 25$

Solución :

Dividimos todo entre 25

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$$



$a^2 = 25 \rightarrow a = 5$

$b^2 = 25 \rightarrow b = 5$

$c^2 = 50 \rightarrow c \sqrt{50}$

Vértices (± 5, 0), Covértice (0, ± 5)

Foco($\pm\sqrt{50}$, 0)

$e = \sqrt{50} / 5$

Lr = 10

Directriz = x = ± 5/5

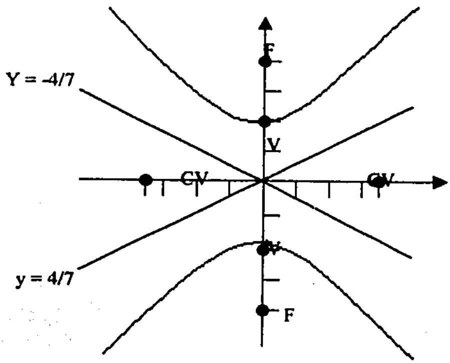
Ejemplo 2.- Hallar los elementos de la hipérbola con la ecuación

$49y^2 - 16y^2 = 784$

Solución:

Dividiendo toda la ecuación entre 784 tenemos:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$



$a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

$B^2 = 49 \rightarrow b = 7$

$C^2 = 65 \rightarrow c = \sqrt{65}$

Focos (0, $\pm\sqrt{65}$)

Vértices (0, ± 4)

Covértices (±7, 0)

$e = \sqrt{65} / 4$

Lr = 49/2

Directriz = ± 4 / 7.

Ejemplo 3.- Hallar la ecuación de la hipérbola conociendo los siguientes datos $2b = 6$ y Focos en (0, 5) y (0, 5)

Solución: Como los focos indican el tipo de ecuación que se debe trabajar entonces $$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

En donde $2b = 6 \rightarrow b = 3 \rightarrow b^2 = 9$

Como $c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

Por lo tanto el valor de $a^2 = 16 \rightarrow a = 4$

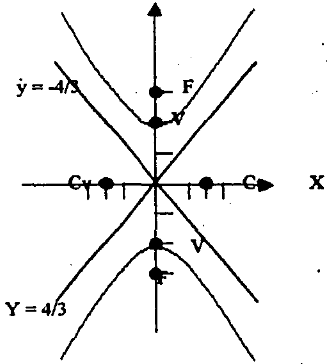
$Lr = 9/2$

$e = 5/4$

$y = \pm 4/3$

Vértices $(0, \pm 4)$

Covértices $(\pm 3, 0)$



Finalmente la ecuación buscada es

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

En forma general $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$

Ejemplo 4.- Hallar la ecuación de la hipérbola conocidos los siguientes datos $2a = 8$, $e = 4/3$ y centro en C(0, 0) con los focos sobre el eje X.

Solución: Como sabemos que esta sobre el eje X entonces la ecuación buscada será $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$2a = 8 \rightarrow a = 4 \rightarrow a^2 = 16$

Como excentricidad $= 4/3$ entonces

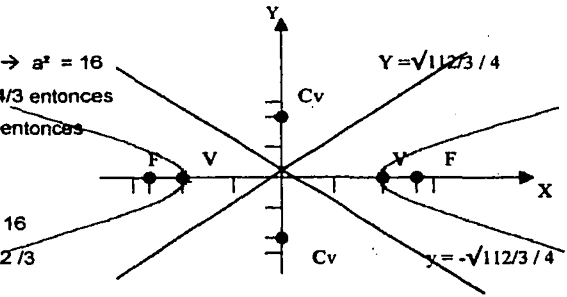
$4/3 = c/a$ como $a = 4$ entonces

$c = 4(4) / 3$

$c = 16/3 \rightarrow c^2 = 256/9$

$b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow 256/9 - 16$

$b^2 = 112/9 \rightarrow b = \sqrt{112}/3$



finalmente la ecuación buscada es $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{\frac{112}{9}} = 1$

($112/9x^2 - 16y^2 = 1792/9$) * 9 tenemos

$112x^2 - 144y^2 = 1792$

Focos ($\pm$ 16/3, 0)

Vértices ($\pm$ 4, 0)

Covértices (0, $\pm \sqrt{112/3}$)

Directriz x = $\pm \sqrt{112/3}$ / 4

Ejercicios Propuestos 1. En los ejercicios para la hipérbola de ecuación dada, determine, Vértice, Foco, Covértice, lado recto, excentricidad, Asíntotas.

1 $16x^2 - 9y^2 = 144$	V(±3, 0), F(±5, 0), Cv(0, ±4), Lr = 8/3, e = 5/3 y = ± 4/3, 2a = 6, 2b = 8.
2 $144x^2 - 25y^2 = 3600$;	V(0, ±5), F(0, ±3), Cv(±12,0), Lr = 288/5, e = 13/5 y = ± 5/12, 2a = 10, 2b =24.
3 $x^2 - 4y^2 = 16$	V(±4, 0), F(±$\sqrt{20}$, 0), Cv(0, ±2), Lr = 2, e = $\sqrt{20}$/4 y = ± 2/4, 2a = 10, 2b = 4.
4 $25y^2 - 36x^2 = 900$	V(0, ±6), F(0,±$\sqrt{61}$), Cv(±5,0), Lr = 25/3, e = $\sqrt{61}$/6 y = ± 6/5, 2a = 12, 2b = 10.
5 $4x^2 - 4y^2 = 16$	V(±2, 0), F(±$\sqrt{8}$, 0), Cv(0, ±2), Lr = 4, e = $\sqrt{8}$/2, y = ± x, 2a = 4, 2b = 4.
6 $9y^2 - 25x^2 = 225$	V(0,±5), F(0, ±$\sqrt{34}$), Cv(±3,0), Lr = 18/5 e = $\sqrt{34}$/5, y = ± 5/3,. 2a = 6, 2b = 4.
7 $x^2 - y^2 = 9$	V(±3,0), F(±3$\sqrt{2}$, 0), Cv(0,±3), Lr = 6, e = $\sqrt{2}$, y = ± $\sqrt{34}$/3, 2a = 6, 2b = 4.

Ejercicios 2.

Determine una ecuación de la hipérbola conociendo los siguientes datos.

1	Foco(5, 0) y Cv(0, ±2)	$4x^2 - 21y^2 = 48$
2	Vértice (±2, 0) y Eje conjugado 6	$9x^2 - 4y^2 = 36$
3	Foco(0, ±5) y un vértice (0, 4)	$9y^2 - 16x^2 = 144$
4	Foco(26, 0) y asíntota la recta $12y = \pm 5x$	$100x^2 - 576y^2 = 57600$
5	Centro Origen, Focos sobre Y, pasa por (-2, 4) y (-6, 7)	$32y^2 - 33x^2 = 380$
6	Asíntotas $y = \pm 2/3$, Vértice (6, 0)	$16x^2 - 36y^2 = 576$
7	Vértices (0, ±3), e =5/3	$16y^2 - 9x^2 = 144$

IV.4.1 Ecuación de la Hipérbola de centro C(h, k) y ejes paralelos a los coordenados .

"Los ejes coordenados son un artificio que se introdujo en el plano para poder representar puntos y curvas. En algunos casos se prefieren mover para simplificar la ecuación. Todo cambio en la posición de los ejes se pueden representar mediante la combinación de una traslación. Una traslación de los ejes produce un nuevo conjunto de ejes paralelos a los anteriores ver figura 10

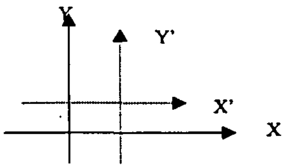


Figura 10

Si representamos a los ejes de modo que el origen del nuevo sistema de coordenadas sea el punto (h, k) del sistema ver figura 11 entonces todo punto tiene dos representaciones : (x, y) en el sistema anterior de coordenadas, y (x', y') en el nuevo.

La relación entre las coordenadas de los dos sistemas se determina con facilidad en la figura 9 y resulta.

$$X = x' + h \qquad \text{o sea,} \quad x' = x - h$$

Y

$$Y = y' + k \qquad \text{o sea,} \quad y' = y - k.$$

A estas ecuaciones en la elipse se le llaman ecuaciones de traslación." [7]

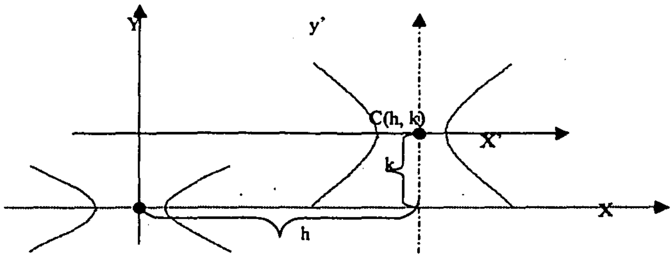
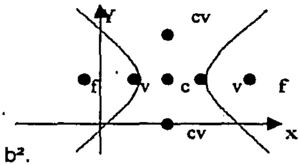


Figura 11

Un Punto(x, y) está en la hipérbola con centro en (h, k), vértices en (h ± a, k) y covértices en (h, k ± b) si y sólo si satisface la ecuación.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

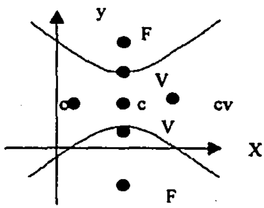


Los focos se ubican en (h ± c, k) siendo $c^2 = a^2 - b^2$.

Gráfica num. 5

Un Punto(x, y) está en la Hipérbola con centro en (h, k), vértices en (h, k ± a) y covértices en (h ± b, k) si y sólo si satisface la ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Los focos se ubican en (h, k ± c) [2].
siendo $c^2 = a^2 - b^2$

Gráfica num. 6

[7] Geometria Analítica , Douglas F. Riddle; Thomson

Cuadro 3 Formulas de la Hipérbola fuera del origen:

Cuando abre sobre X	**Cuando abre sobre Y**
Foco ($h \pm c, k$)	Foco ($h, k \pm c$)
Vértice ($h \pm a, k$)	Vértice ($h, k \pm a$)
Covértice ($h, k \pm b$)	Covértice ($h \pm b, k$)
$LR = 2b^2 / a$	$LR = 2b^2 / a$
$e = c / a$	$e = c / a$
Directriz $x = h \pm a^2 /p$	Directriz $y = k \pm a^2 /p$
Asíntotas $Y = \pm b/a$	Asíntotas $y = \pm a/b$
Gráfica num . 5	Gráfica num 6

Ejemplo 1.- Determinar los elementos de la Hipérbola

$$9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 43 = 0$$

Solución: Se despeja el –43, simplificamos cada término tanto para x como para y

$9(x^2 + 2y + \quad) - 4(y^2 - 4y + \quad) = 43$ completando cuadrados

$2a = 2$ $\qquad 2a = -4$

$a = 1$ $\qquad a = -2$

$a^2 = 1$ $\qquad a^2 = 4$

$9(x^2 + 2y + 1) - 4(y^2 - 4y + 4) = 43 + 9 - 16$

$9(x + 1)^2 - 4(y - 2)^2 = 36$ dividiendo entre 36 nos queda la ecuación

$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ Centro (-1, 2)

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

$b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$c^2 = 13 \rightarrow c = \sqrt{13}$

asíntotas $\frac{\pm 3}{2} x$

lado recto = 9

Excentricidad $\rightarrow e = \sqrt{13}/2$

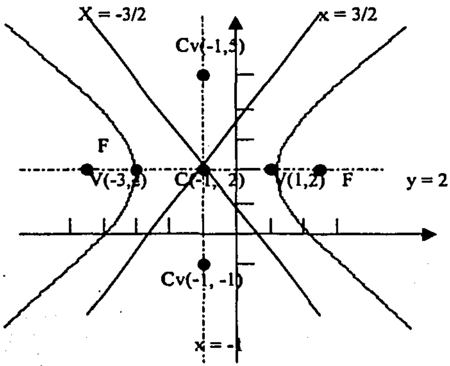
Eje real $y = 2$

Eje imaginario $x = -1$

Focos ($-1 + \sqrt{13}$, 2) y ($-1-\sqrt{13}$, 2)

Vértices (1, 2) y (-3, 2)

Covértices (-1, 5) y (-1, -1)



Ejemplo 2.- Determinar los elementos de la Hipérbola $x^2 - 3y^2 - 12y = 0$

Solución:

$x^2 - 3(y^2 + 4y \quad) = 0$

$2a = 4$

$a = 2$

$a^2 = 4$

$x^2 - 3(y^2 + 4y + 4) = -12$

$x^2 - 3(y + 2)^2 = -12$ dividiendo entre -12 y ordenando

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$$

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2$

$b^2 = 12 \rightarrow b = \sqrt{12}$

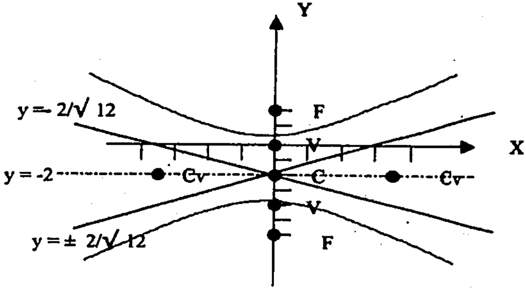
$c^2 = 16 \rightarrow c = 4$

excentricidad $e = 2$

Lado recto = 12

Eje real $x = 0$

Eje imaginario $y = -2$



Centro C(0, -2)

Focos (0, 2) y (0, -6)

Vértices (0,0) y (0, -4)

Covértices ($\sqrt{12}$, -2) y($-\sqrt{12}$, -2)

Asíntotas $y = \frac{\pm 2}{\sqrt{12}} x$

Ejemplo 3.- Encontrar la ecuación de la hipérbola dadas las siguientes condiciones Vértices (–1, 3) y (3, 3) con excentricidad e = 3/2.

Solución : como conocemos los vértices podemos encontrar el valor de h, y k por lo tanto $h - a = -1$ y $h + a = 3$ por lo tanto $k = 3$

resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos

$$\begin{array}{l} h - a = -1 \\ \underline{h + a = 3} \\ 2h = 2 \end{array}$$

$h = 2/2$; $h = 1$

Entonces el centro esta en C(1, 3),

Como conozco h entonces puedo encontrar el valor de a

$h + a = 3$

$a = 3 - h$

$a = 3 - 1$

$a = 2$

$a^2 = 4$

con la excentricidad determinamos el valor de c

$e = c/a$ por lo tanto $3/2 = c/2$

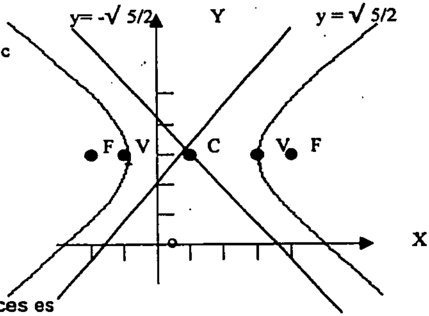
$c = 3$

$c^2 = 9$

$b^2 = c^2 - a^2$

$b^2 = 9 - 4$

$b^2 = 5$



por lo tanto la ecuación de la hipérbola que se utiliza por la posición de los vértices es

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$$

Focos (4, 3) y (-2, 3)

Covértice $(1, 3+\sqrt{5})$, $(1, 3-\sqrt{5})$

Lr = 5

Asíntotas $y = \frac{\pm\sqrt{5}}{2}x$

Ejemplo 4.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en (5, 4), Foco (5, 8) y Excentricidad $e = 2$.

Solución : Como del centro conocemos h, k entonces $h = 5$, $k = 4$

del Foco sabemos que esta sobre el eje y por lo tanto

$k + c = 8$ sustituyendo el valor de k tenemos

$c = 4, \rightarrow c^2 = 16$

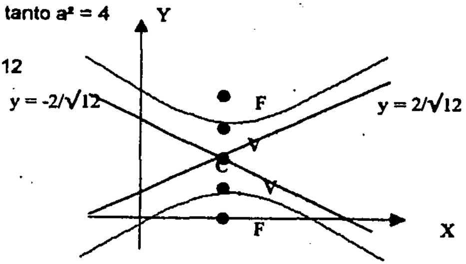
Con la excentricidad $e = c/a$ entonces

$2 = 4 / a \rightarrow a = 4/2 \rightarrow a = 2$ por lo tanto $a^2 = 4$

$b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b^2 = 16 - 4 \rightarrow b^2 = 12$

La ecuación deseada es :

$$\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-5)^2}{12} = 1$$



Vértices en (5, 6) y (5, 2)

Foco(5, 0)

Covértice $(5+\sqrt{12}, 4)$ y $(5-\sqrt{12}, 4)$

Lr = 12

Asíntotas $y = \frac{\pm 2}{\sqrt{12}} x$

Ejercicios Propuestos:

Trasladar los ejes de tal manera que el centro y el vértice de la Hipérbola quede en el origen del nuevo sistema.

1.- $9x^2 - 4y^2 - 18x - 24y - 63 = 0$ $C(1, -3)$, $a^2=4$, $b^2 = 9$, $c^2 = 13$, Vértices $(3, -3)$ y $(-1,-3)$
Focos$(1 \pm \sqrt{13}, -3)$, Asíntota $Y = \pm\ 3x/2$, $Lr = 9$.

2.- $6x^2 - 8y^2 + 12x + 32y - 78 = 0$ $C(-1, 2)$, $a^2 = 8$, $b^2 = 6$, $c^2 = 14$, Vértices $(-1\pm \sqrt{8}, 2)$
Focos $(-1\pm\sqrt{14}, 2)$, Asíntota $Y = \pm\ \sqrt{6}x/2\sqrt{2}$, $Lr = 3\sqrt{2}$.

3.- $4x^2 - 3y^2 - 8x + 12y + 28 = 0$ $C(1, 2)$, $a^2 = 12$, $b^2 = 9$, $c^2 = 21$, Vértices $(1\ 2 \pm \sqrt{12})$
Focos $(1, 2 \pm\sqrt{21})$, Asíntota $Y = \pm\ 2x/3\sqrt{3}$, $Lr = 3\sqrt{3}$.

4.- $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$ $C(1, -2)$, $a^2 = 9$, $b^2 = 4$, $c^2 = 13$, Vértices $(1, 1)$ y $(1, -5)$
Focos $(1, -2\pm\sqrt{13})$, Asíntota $Y = \pm\ 3x/2$, $Lr = 2$.

Determinación de la ecuación de una hipérbola a partir de las siguientes propiedades.

5.- Vértices$(-5, -3)$ y $(-5,-1)$, Cv$(-7, -2)$ y$(-3, -2)$ $$\frac{(y+2)^2}{1} - \frac{(x-5)^2}{4} = 1$$

6.- Vértices $(4, 1)$ y $(0, 1)$, foco$(6, 1)$ $3x^2 - y^2 - 12x + 2y - 1 = 0$

7.- Centro$(\frac{1}{2}, 3/2)$, $Lr = 16$, $2a = 4$ $4x^2 - 16y^2 + 12x + 16y + 69 = 0$

8.- Focos $(4, 0)$ y $(-6, 0)$, $e = 5/2$ $21x^2 - 4y^2 + 42x - 63 = 0$

IV.5 Curvas de grado superior y curvas trascendentes. Construcción de curvas

"En la geometría analítica en tres dimensiones, las gráficas de una ecuación de segundo grado en x, y y z se le llama superficie cuadrática. En este capitulo estudiaremos las ecuaciones canónicas de estas superficies.

a).- Elipsoide:

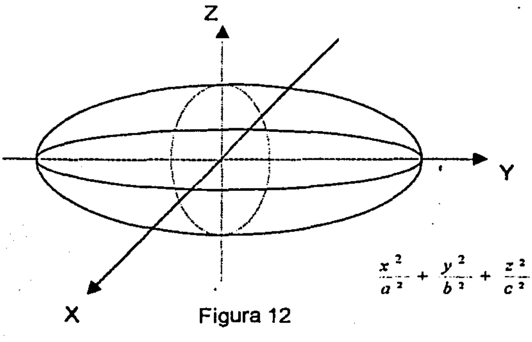
La gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Donde a, b y c son números reales positivos se le llama elipsoide. Las trazas de esta superficie en planos paralelos a los planos coordenados son elipse. Por ejemplo, la traza en el plano xy es la elipse de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Análogamente, como se indica en la figura 12, las trazas en los planos yz y xz son elipses, encontremos ahora la traza en un plano arbitrario paralelo al plano xy, es decir en un plano cuya ecuación es de la forma z = k.

Sustituyendo k en lugar de z en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

obtenemos la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}$

Si $k > c$, entonces $1 - k^2/c^2 < 0$ y no hay gráfica. Por consiguiente la gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Está entre los planos z = -c y z = c. Si $k < 0$, entonces $1 - k^2/c^2 > 0$ y por lo tanto la traza en el plano z = k es una elipse. Análogamente , las trazas en los planos paralelos a los otros dos planos coordenados son la elipse, siempre y cuando no intersequen al eje x fuera del intervalo abierto(-a, a) o al eje y fuera de (-b,b).



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Figura 12

b).- Hiperboloide de una Hoja o un manto.

La Gráfica de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ se le llama un hiperboloide de un manto.

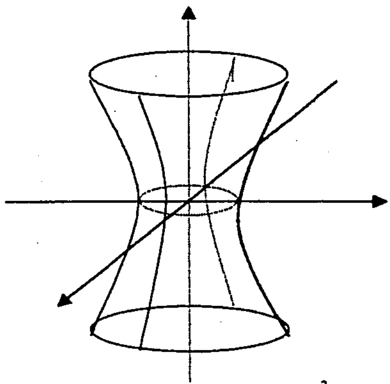
Y las otras dos formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \;; \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Las trazas en los planos xy y yz son hipérbolas con ecuaciones $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ y $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ respectivamente. Las trazas en los planos paralelos al plano xy tienen ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}$$

donde k es un número real y por lo tanto son elipses. La grafica de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ se muestra en la figura 13. El eje z se le llama el eje del hiperboloide.



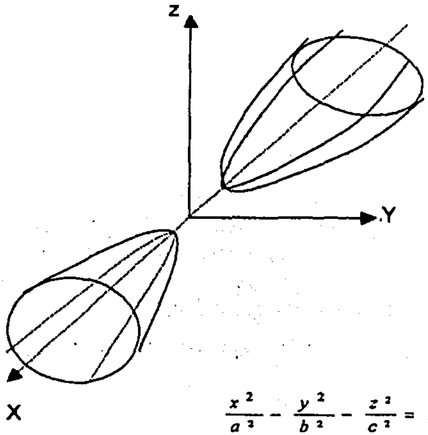
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Figura 13

La gráfica de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ También es un hiperboloide de un manto; sin embargo en este caso el eje del hiperboloide es el eje y. Si el término que contiene a x^2 es negativo y los otros dos son positivos, entonces el eje del hiperboloide coincide con el eje x.

c).- Hiperboloide de dos hojas.

La gráfica de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ se llama un hiperboloide de dos mantos. Las trazas en los planos xy y xz son hipérbolas, mientras que las trazas en los planos con ecuaciones de la forma x = k donde k > a son elipses. Ver figura 14 . El eje x se le llama el eje del hiperboloide. Usando signos menos en distintas parejas de términos podemos obtener hiperboloides cuyo eje es el eje y o el eje z.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

La gráfica de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ es un cono cuyo eje es el eje Z. La traza en el plano yz tiene la ecuación $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Despejando y, obtenemos $y = \pm (b/c)z$, lo cual no da las ecuaciones de dos rectas que pasan por el origen. Análogamente la traza en el plano xz consta de un par de rectas que se intersecan en el origen. Las trazas en los planos paralelos al plano xy son elipses.

La grafica 15 muestra que cambiando los signos de los términos de $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ obtenemos un cono cuyo eje es el eje x o el eje y.

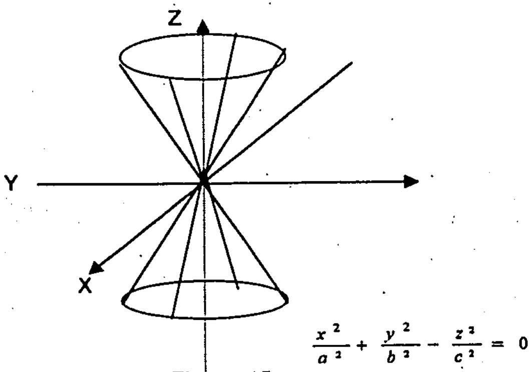


Figura 15

La grafica de una ecuación de la forma $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ se le llama un paraboloide." [8]

d).- Cuádricas sin centro.

"Representadas por la ecuación $Mx^2 + Ny^2 = Sz$

En donde todos los coeficientes son diferentes de cero entonces esta ecuación se puede escribir de la forma $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$ llamadas forma ordinaria o canónica de una superficie cuádrica sin centro. Atendiendo a las diversas combinaciones posibles de signos en la ecuación $\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz$, se deduce que, en esencia, existen solamente dos tipos diferentes de superficies que son: Paraboloides elípticos y paraboloides hiperbólicos.

[8] Calculo Con Geometría Analítica: Earl W. Swokowski: Interamericana

i).- **Paraboloide Elíptico**: Son aquellos en que los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo. Y en su forma canónica tenemos la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ las otras formas canónicas son $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy$ y $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx$ para cada forma podemos tener dos variaciones según que c sea positivo o negativo. Las trazas sobre los planos XY, XZ, YZ, son respectivamente, el origen, la parábola $\frac{x^2}{a^2}=cz$, y = 0 y la parábola $\frac{y^2}{b^2}=cz$, x = 0. La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z.

Las secciones de las superficies por planos paralelos al XY son las curvas. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=ck$, z = k.

Estas curvas son elipse si c y k son del mismo signo; si c y k tienen signos contrarios, no hay lugar geométrico. Si se toma c como positivo, k debe ser positivo, y a medida que k aumente de valor las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=ck$ crecen en tamaño a medida que los planos de corten se alejan más y más del plano XY. Una porción de la superficie, en el caso de c positivo, aparece en la figura 16. si c es negativo la superficie esta en su totalidad abajo del plano XY. Se dice que cada superficie que se extiende a lo largo de Z. Si la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz$ es a = b, la superficie es un paraboloide de revolución que puede generarse haciendo girar la parábola $\frac{y^2}{b^2}=cz$, x = 0 en torno del eje Z.

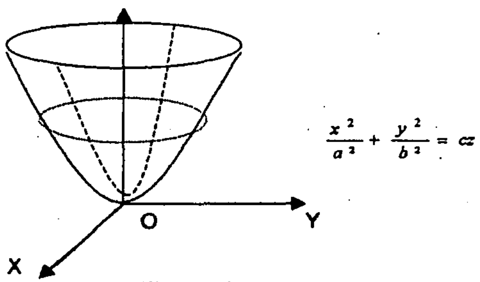


Figura 16.

ii) **Paraboloide Hiperbólico**. Una forma canónica de la ecuación del paraboloide hiperbólico es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz$ para la cual también existen dos formas canónicas, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = cy$ y $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = cx$, donde existen dos variaciones para cada forma según que c sea positivo o negativo. La superficie es simétrica con respecto los planos YZ y XZ y al eje Z. Las secciones de las superficies por los planos paralelos **a**, pero no coincidentes con, el plano XY son las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck$, $z = k \neq 0$.

Es evidente que a medida que crece k numéricamente, las ramas de estas hipérbolas se alejan más y más del eje Z. Por tanto, la superficie no es cerrada, sino que se extiende indefinidamente. Las secciones de las superficies por los planos paralelos al XZ son las parábolas

$\frac{x^2}{a^2} = cz + \frac{k^2}{b^2}$, y = k las cuales se abren hacia arriba o hacia abajo según si **c** es positiva o negativo. Una porción de la superficie se muestra en la figura 17 para el caso donde **c** es positivo.

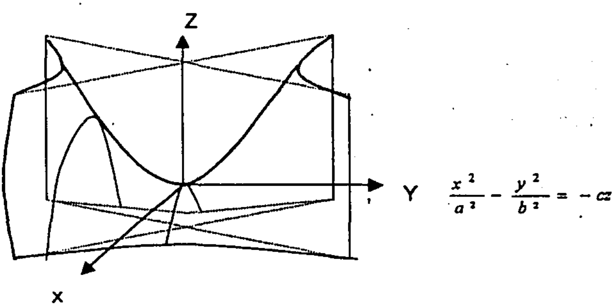
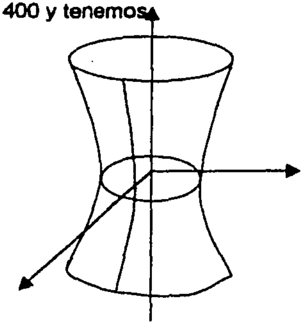


Figura 17

La superficie tiene una figura de una silla de montar y se extiende a lo largo del eje Z. Todo paraboloide hiperbólico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación. Por lo que un paraboloide hiperbólico nunca puede ser una superficie de revolución." [9].

[9] Geometría Analítica: Gordon fuller : CECSA

Ejemplo 1.- Dibuje la gráfica de la ecuación $16x^2 + 100y^2 - 25z^2 = 400$
Solución: Dividimos toda la ecuación por 400 y tenemos



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$$

las trazas XY seria $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

Elipse con vértice en (±5,0,0)

las trazas YZ seria $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$

Hipérbola con vértice en (0,±2,0)

las trazas XZ seria $\frac{x^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$

Hipérbola con vértice en (±5,0,0)

Ejemplo 2.- Dibuje la gráfica de $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

Solución: Para encontrar la traza en el plano xy, hagamos z = 0 en la ecuación dada. Por lo tanto la gráfica de la ecuación resultante

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ es una elipse.

Las trazas en los planos xz con y = 0 la ecuación resultante $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ es una elipse.

Las trazas en los planos yz con x = 0 la ecuación resultante $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$ también es una elipse, en la figura 18 se muestra estas tres trazas que ayudan a obtener la elipsoide requerida.

Elipsoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

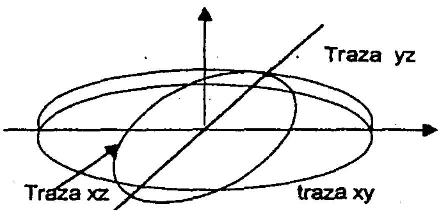
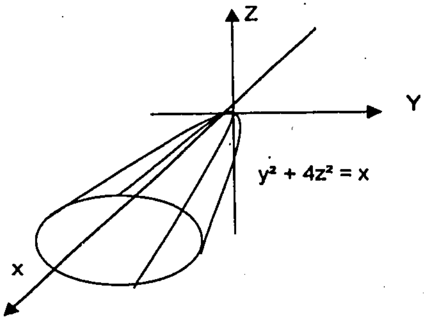


Figura 18

Ejemplo 3.- Dibuje la gráfica de $y^2 + 4z^2 = x$ e identifique la superficie

Solución: La traza en el plano xy es la parábola $y^2 = x$
La traza en el plano xz es la parábola $4z^2 = x$
La traza en el plano yz es la grafica $y^2 + 4z^2 = 0$
Y por lo tanto consta de un solo punto, el origen.



Ejemplos propuestos:
Analice las ecuaciones

1.- $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{16} = 1$	Plano xy Elipse, Plano xz, yz son Hipérbolas
2.- $4x^2 + 4y^2 - 25z^2 + 100 = 0$	Hiperboloide de dos hojas no intersecta plano xy
3.- $y^2 + z^2 - 12y = 0$	Cilindro circular paralelo al eje de las x
4.- $9x^2 + 4z^2 - 36y = 0$	Paraboloide elíptico, simétrica al eje de las y
5.- $9x^2 + 36y^2 + 16z^2 - 144 = 0$	Obtiene un Elipsoide
6.- $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 4 = 0$	Plano xy, yz tenemos hipérbolas plano xz elipse
7.- $4x^2 + 9y^2 - 12z = 0$	Paraboloide elíptico
8.- $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4 = 0$	Hiperboloide de dos hojas
9.- $9x^2 + 25y^2 + 9z^2 = 225$	Obtiene un Elipsoide
10.- $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$	Obtiene un Elipsoide
11.- $16x^2 + y^2 = 64 - 4z^2$	Obtiene un Elipsoide
12.- $16x^2 - 9y^2 - z^2 - 144 = 0$	Hiperboloide de dos hojas
13.- $x^2 + 25y^2 - z^2 = 0$	Cono Elíptico

Capitulo V TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS.

El objetivo de este capítulo es deducir en coordenadas polares las ecuaciones de rectas, planos, cónicas y algunas curvas trascendentes.

V.1 Sistema de coordenadas polares.

"Hasta ahora se ha localizado el punto en el plano mediante sus coordenadas cartesianas rectangulares. Sin embargo, otros sistemas de coordenadas dan la posición de un punto plano. El sistema coordenado polar es uno de ellos, y es importante debido a que ciertas curvas tienen ecuaciones simples en este sistema.

Las coordenadas cartesianas son números, la abscisa y la ordenada, las cuales representan distancia dirigida y una medida de ángulo, en el cual se considera con respecto al punto fijo y un rayo fijo(o semirrecta), El punto fijo llamado polo (u origen), se designa por medio de la letra O. El rayo fijo denominado eje polar(o recta polar) y se representa por OA. El rayo OA generalmente se dibuja de forma horizontal y se extiende a la derecha indefinidamente. Como se indica en la figura 5.1.1

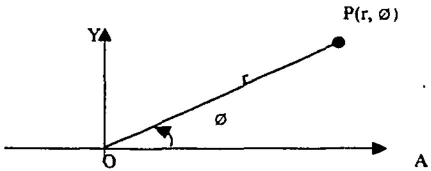


Figura 5.1.1

Sea P cualquier punto del plano diferente de O. Sea Ø la medida en radianes del ángulo dirigido AOP, positiva cuando mide en sentido contrario del giro de las manecillas del reloj y negativo cuando es en el sentido del giro de las manecillas del reloj, teniendo como su lado inicial al rayo OA y el rayo OP como su lado terminal. Entonces, si r es la distancia no dirigida desde O a P (esto es r = |OP|), un conjunto de coordenadas polares para P esta dado por r y Ø y se escriben estas coordenadas como (r, Ø)."[1]

[1] Matemáticas previas al calculo. Louis Leithold, Oxford University Press

" Se determina de la siguiente manera: Primero se halla el lado terminal del ángulo Ø en posición normal; si $r \geq 0$, P está en su lado terminal, a una distancia r del polo; si $r < 0$, P está en el rayo opuesto al lado terminal y a una distancia $|r|$ del polo. Las coordenadas polares presentan un problema que no tienen las coordenadas rectangulares; un punto tiene más de una representación. Por ejemplo $(2, \pi/2)$ y $(-2, -\pi/2)$ representan al mismo punto. De hecho, si (r, Ø) es una representación de un punto, entonces (r, Ø + π n), en donde n es un número entero par (otra representación del mismo punto); al igual que (-r, Ø + π n), donde n es un entero impar. Además, (0, Ø) es el polo para cualquier valor de Ø." [2]

"A estas dos cantidades se llama coordenadas polares del punto O; en particular, r se le llama radio vector y Ø ángulo polar, ángulo vectorial o argumento de P. Para la mayor parte de nuestros problemas, un par de coordenadas es suficiente para cualquier punto en el plano. Tomando el radio vector r de un punto en particular como positivo y un ángulo polar Ø comprendido entre el cero y el ángulo positivo más pequeño menor de 360°, de manera que la variación de los valores de Ø está dada por.

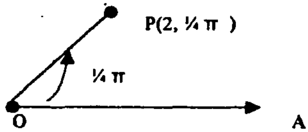
$$0° \leq Ø < 360°.$$

A tal par lo llamaremos par principal de coordenadas polares del punto. El ángulo polar puede expresarse en grados o radianes, pero se debe observar que los ángulos expresados en radianes vienen dados por números abstractos. Así, un ángulo polar de $\pi/2$ significa $\pi/2$ radianes, o sea , 90°. " [3]

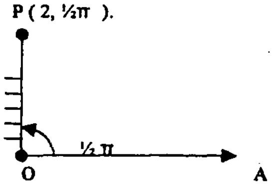
[2] Geometría Analítica. Douglas F. Riddle. Thomson.
[3] Geometría Analítica. Charles H. Lehmann. Limusa

Ejemplo 1: Localización de puntos a partir de sus coordenadas polares.

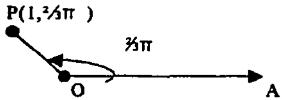
a) Localice el conjunto indicado de coordenadas polares; $(2, \frac{1}{4}\pi)$.



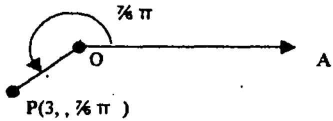
b) Localice el conjunto indicado de coordenadas polares; $(5, \frac{1}{2}\pi)$.



c) Localice el conjunto indicado de coordenadas polares; $(1, \frac{2}{3}\pi)$.



d) Localice el conjunto indicado de coordenadas polares; $(3, \frac{7}{6}\pi)$.



V.2 Ecuaciones de transformación entre coordenadas polares y cartesianas.

"Existen algunas relaciones entre las coordenadas rectangulares y las coordenadas polares que se pueden deducir fácilmente a partir de la figura 5.1.2.

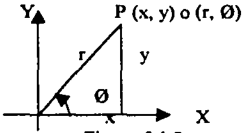


Figura 5.1.2.

Por el triángulo de la figura 5.1.2 tenemos

$$\text{Cos } \varnothing = x / r$$

Y

$$\text{Sen } \varnothing = y / r$$

Que proporcionan el teorema siguiente:

Teorema: Si (x, y) y (r, Ø) representan al mismo punto en coordenadas rectangulares y coordenadas polares, respectivamente, entonces

$$x = r \text{ Cos } \varnothing$$

$$y = r \text{ sen } \varnothing$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Sen } \varnothing = \pm y / (\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\text{Cos } \varnothing = \pm x / (\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\tan \varnothing = x / y$$

Las dos últimas ecuaciones, de las que se pueden despejar r y Ø, nos darán expresiones donde intervienen ± y arctan;" [4]

Supongamos que P es un punto cuya representación en el sistema coordenado cartesiano rectangular es (x, y) y (r, Ø) es una representación en coordenadas polares de P se distinguirán dos casos; $r > 0$ y $r < 0$.

[4] Geometría analítica. Douglas F. Riddle. Thompson

En el primer caso r > 0, entonces el punto P esta en el lado terminal del ángulo de Ø radianes, y r = |OP|. La figura 5.1.3 muestra este caso. Entonces

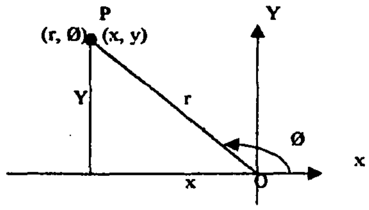


Figura 5.1.3.

Cos Ø = x / r   sen Ø = y / r

de donde

x = r cos Ø   y   y = r sen Ø

En el segundo caso si r < 0 entonces el punto P está en la prolongación del lado terminal y r = - | OP| véase la figura 5.1.4 por tanto si Q es el punto (-x, -y),

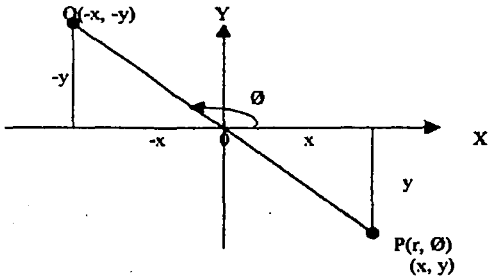


figura 5.1.4

$$\text{Cos } Ø = \frac{-x}{|OQ|} \quad , \quad \text{Sen } Ø = \frac{-y}{|OQ|}$$

$$= \frac{-x}{|OP|} \quad , \quad = \frac{-y}{|OP|}$$

$$= -x/-r \qquad = -y/-r$$

$= x/r$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $= y/r$

en consecuencia

$$x = r\cos \varnothing \qquad \text{y} \qquad y = r \operatorname{sen} \varnothing.$$

estas ecuaciones son idénticas para el caso uno de modo que son válidas en todos los casos.

A partir de las ecuaciones, $x = r\cos\varnothing$, $y = r \operatorname{sen} \varnothing$, se pueden obtener las coordenadas cartesianas rectangulares de un punto cuando se conocen sus coordenadas polares. También de las ecuaciones se pueden encontrar una ecuación polar de una curva si se proporciona su ecuación cartesiana rectangular.

Ejemplo 1. El punto cuyas coordenadas polares son $(-6, 7/4\,\pi)$, se muestra en la figura 5.1.5. Se determinarán sus coordenadas cartesianas rectangulares.
Solución:

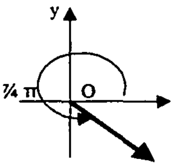


Figura 5.1.5

Utilizando las ecuaciones

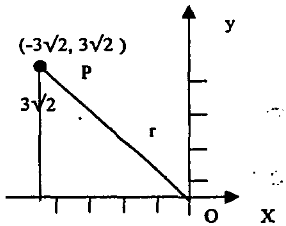
$x = r\cos\varnothing$, $\qquad y = r \operatorname{sen} \varnothing$, tenemos

$x = -6\operatorname{Cos}(7/4\,\pi) \qquad y = -6\operatorname{Sen}(7/4\,\pi)$

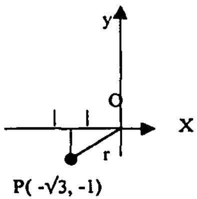
$x = -6(\sqrt{2}/2) \qquad y = -6(-\sqrt{2}/2)$

$x = -3\sqrt{2} \qquad y = 3\sqrt{2}$

por tanto el punto es $P(-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.



Ejemplo 2. Determine $(r, \varnothing)$ para el punto cuya representación en coordenadas cartesianas rectangulares es $(-\sqrt{3}, -1)$.
Solución:



Utilizando la ecuación

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{Tan}\varnothing = -1/-\sqrt{3}$

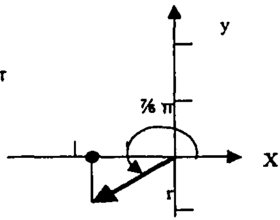
$r^2 = (-\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \qquad \text{como } \pi < \varnothing < 3/2\pi$

$r^2 = 3 + 1 \qquad \varnothing = \operatorname{Arctg}(-1/-\sqrt{3})$

$r^2 = 4 \qquad \varnothing = 225°$

$r = 2 \qquad \varnothing = 7/6\,\pi$

por tanto el punto es $P(2, 7/6\,\pi)$.



Ejemplo 3. Determine la ecuación cartesiana de la gráfica que tiene la ecuación polar $r^2 = 4$ Sen $2\varnothing$.

Solución: Debido a que $2\varnothing = 2$ Sen $\varnothing$ Cos $\varnothing$ se tiene entonces por formula

Sen $2\varnothing = 2(y / r)(x / r)$

$r^2 = x^2 + y^2$

sustituyendo r^2 y Sen $2\varnothing$ en la ecuación polar tenemos.

$x^2 + y^2 = 4(2)\ y / r \cdot x / r$

$x^2 + y^2 = 8xy / r^2$ sustituyendo r^2

$x^2 + y^2 = 8xy/(x^2 + y^2)$ multiplicando todo por $x^2 + y^2$ se obtiene

$(x^2 + y^2)^2 = 8xy$ que es la ecuación deseada.

Ejemplo 4: Determine una ecuación polar de la gráfica cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 - 4x = 0$

Solución : se sustituye $x = r$ Cos $\varnothing$, $y = r$ Sen $\varnothing$ en $x^2 + y^2 - 4x = 0$

$r^2 \text{ Cos}^2 \varnothing + r^2 \text{ Sen}^2 \varnothing - 4(r \text{ Cos } \varnothing) = 0$ simplificando tenemos

$r^2 (\text{Cos}^2\varnothing + \text{Sen}^2\varnothing) - 4r \text{ Cos}\varnothing = 0$ Como $\text{Sen}^2 \varnothing + \text{Cos}^2 \varnothing = 1$ entonces

$r^2 - 4r \text{ Cos}\varnothing = 0$ Simplificando r

$r(r - 4 \text{ Cos}\varnothing) = 0$

por tanto

$r = 0$ o $r - 4\text{Cos}\varnothing$

por tanto la ecuación deseada

$r = 4 \text{ Cos}\varnothing$.

Ejercicios propuestos:

1. Dibujar una figura para cada ejercicio y hallar los pares de coordenadas rectangulares.

a. $P(\sqrt{2}, -3\pi/4)$	$(-1, -1)$
b. $P(-4, 2\pi/3)$	$(2, -2\sqrt{3})$
c. $P(4, \pi/4)$	$(4/\sqrt{2}, 4/\sqrt{2})$
d. $P(-1, -7\pi/6)$	$(\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2})$
e. $P(2, -7\pi/6)$	$(\sqrt{3}, -1)$
f. $P(5, 2\pi/3)$	$(-5/2, 5\sqrt{2}/2)$
g. $P(3, \pi)$	$(-3, 0)$

2. Hallar el par de coordenadas polares de cada uno de los puntos cuyas coordenadas rectangulares son. Considere $r > 0$ y $(0 \quad < 2\pi)$.

a. $(-2, 3)$	$(\sqrt{2}, 7\pi/4)$
b. $(3, -2)$	$(\sqrt{13}, -17\pi/90)$
c. $(1, -1)$	$(\sqrt{2}, 7\pi/4$
d. $(-5, 0)$	$(5, \pi)$
e. $(-2, -2\sqrt{3})$	$(4, \pi/3)$
f. $(-\sqrt{3}, 1)$	$(2, 5\pi/6)$

3. Encuentre la ecuación polar de las siguientes ecuaciones cartesianas indicadas.

1. $x^2 + y^2 = a^2$	$r = \lvert a \rvert$
2. $y^2 = 4(x+1)$	$r = 2/(1 - \cos \varnothing)$
3. $x^2 = 6y - y^2$	$r = 6 \operatorname{Sen} \varnothing$
4. $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$	$r^2 = 4\operatorname{Cos} 2\varnothing$
5. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$	$r^2 - 4r \operatorname{Cos}\varnothing - 2r\operatorname{Sen}\varnothing + 1 = 0$
6. $x^2 - y^2 = 4$	$r^2 \operatorname{Cos} 2\varnothing = 4$
7. $xy = 2$	$r^2 \operatorname{Sen} 2\varnothing = 4$
8.- $2x - 3y = 5$	$r^2 (2 \operatorname{Cos} \varnothing - 3 \operatorname{Sen} \varnothing) = 5$

5. Encuentre la ecuación rectangular dada la ecuación polar.

1. $r = 4\operatorname{Sen} \varnothing$	$x^2 + y^2 - 4y = 0$
2. $r - r \operatorname{Cos} \varnothing = 4$	$y^2 - 8x - 16 = 0$
3. $r = 2/(2 - \operatorname{Cos} \varnothing)$	$3x^2 + 4y^2 - 4x - 4 = 0$
4. $r = 2(1 - \operatorname{Cos} \varnothing)$	$(x^2 + y^2 + 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$.
5. $r = 2\operatorname{Sec}^2(\varnothing/2)$	$y^2 + 8x - 16 = 0$
6. $r^2 = 4 \operatorname{Cos} 2\varnothing$	$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.
7. $\operatorname{Sen}^2 \varnothing - 4r\operatorname{Cos}^3 \varnothing = 0$	$y^2 = 4x^3$

V.3 Curvas especiales en coordenadas polares. Trébol de "n" hojas, espirales y cardioides.

"Consideremos ahora el trazado de curvas dadas en ecuaciones polares, de la misma forma que lo hicimos para ecuaciones rectangulares. Para nuestros fines, la construcción de curvas en coordenadas polares constará de los seis pasos siguientes.
1.- Determinación de las intersecciones con el eje polar y con el eje a 90°
2.- Determinación de la simetría de la curva con respecto al eje polar, al eje 90°, y al polo.
3.- Determinación de la extensión del lugar geométrico.
4.- Calculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener la grafica adecuada.
5.- Trazado de la gráfica.
6.- Transformación de la ecuación polar a rectangular.
... en coordenadas polares se tiene un número infinito de pares de coordenadas. Puede ocurrir, entonces, que mientras un par de coordenadas polares de un punto P de un lugar geométrico puede satisfacer su ecuación, otro par de coordenadas no lo verifica. ...

1.- Intersecciones: Con el eje polar, cuando existen, pueden obtenerse resolviéndose los valores de $0, \pm\pi$, 2π en la ecuación si aparece $r = 0$ la grafica pasa por el polo.

2.- Simetría: Si la curva es simétrica con respecto al eje polar, entonces para cada punto P existe un punto P' también de la curva, tal que el segmento PP' es bisecado perpendicularmente por el eje polar. Ver la figura 5.1.6.

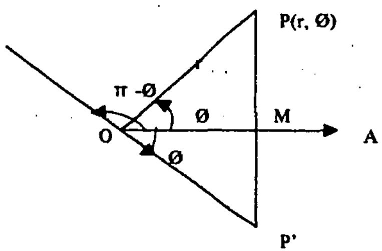


Figura 5.1.6

Teorema : La pruebas para averiguar la simetría del lugar geométrico de una ecuación polar están dadas en la siguiente tabla.

Simetría con respecto	a) La ecuación polar no se altera, o se transforma una ecuación equivalente cuando.
Eje polar	a). Se sustituye Ø por -Ø, 0 b). Se sustituye Ø por π - Ø y r por -r
Eje a 90°	a). Se sustituye Ø por π - Ø , 0 b). Se sustituye Ø por - Ø y r por -r
Polar	a). Se sustituye Ø por π + Ø , 0 b). Se sustituye r por -r

3.- Extensión del lugar geométrico. Para determinar la extensión de la grafica de un lugar geométrico dado en coordenadas polares, primero se despeja r en función de Ø, de modo que tenemos $r = f(Ø)$

Si r es finito para todos los valores de Ø, entonces se trata de una curva cerrada.
Si r se vuelve infinita para ciertos valores de Ø, entonces se trata de una curva no cerrada. Para valores de Ø que hacen a r compleja no hay curva.

4.- Calculo de las coordenadas de algunos puntos. Asignando un valor particular a Ø podemos obtener el valor o valores reales correspondientes de r , se pueden tomar valores de 0 a intervalos de 30°.

5.- Construcción de la gráfica . los puntos del lugar geométrico pueden trazarse directamente a partir de los valores de las coordenadas obtenidos en el 4 paso, una gráfica que pase por los puntos localizados será, por lo general, la grafica buscada. " [5]

Ejemplo 1.- Dibuje la gráfica de la ecuación $r = 4(1 - \text{Sen } Ø)$.
Solución: Se convierte la ecuación polar en rectangular.
$r = 4(1 - \text{Sen } Ø)$ multiplicamos Todo por r
$r^2 = 4r(1 - \text{Sen } Ø)$ Sustituyendo el valor de r y el de Seno tenemos

$x^2 + y^2 = 4r - (\sqrt{x^2 + y^2})\,(y / (\sqrt{x^2+ y^2}))$

$x^2 + y^2 = 4r - 4y$ Pasamos el término de 4y al primer término

$x^2 + y^2 + 4y = 4r$ elevando todo al cuadrado

$(x^2 + y^2 + 4y)^2 = (4r)^2$

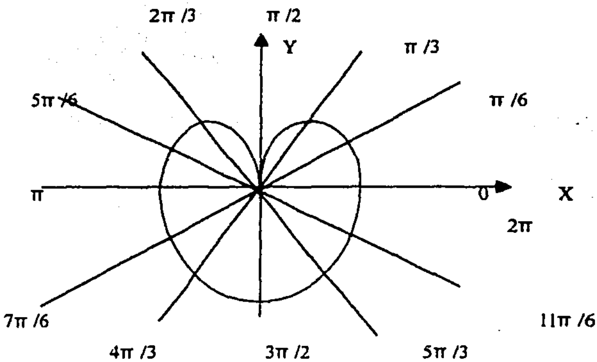
$(x^2 + y^2 + 4y)^2 = 16(x^2 - y^2)$ La ecuación en forma rectangular

[5] Geometría Analítica. Charles H. Lehmann. Limusa.

para graficar esta ecuación se puede utilizar el método tradicional.
$R = 4 - 4 \text{ Sen } Ø$

Solución

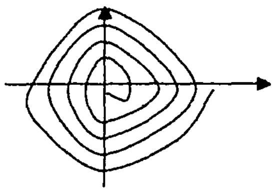
Ø	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
r	4	2	.53	0	.53	2	4	6	7.7	8	7.5	6	4



Representa una cardioide

Ejemplo 2.- Describa y trace la gráfica de la ecuación. $r = Ø$, $Ø > 0$

Solución. Como Ø crece entonces también r lo hace, por lo tanto existe simetría, Cuando $r = 0$, $Ø = 0$ de modo que el polo esta en la gráfica.



$r = Ø$ donde $Ø = C$
$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = C$ elevando al cuadrado
$x^2 + y^2 = C^2$
por lo tanto es la ecuación buscada.

Ejemplo 3.- Graficar la ecuación polar r = Sen 2Ø
Obtenemos la ecuación rectangular.
r = Sen 2Ø como Sen 2 Ø = 2 sen Ø Cos Ø sustituyendo tenemos
(r = 2sen Ø Cos Ø por lo tanto) * r
r^2 = 2rsen Ø Cos Ø

$$x^2 + y^2 = 2\,r \;\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\;\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ multiplicamos

$$x^2 + y^2 = 2r\;\frac{xy}{x^2+y^2}$$ sustituyendo r tenemos

$$x^2 + y^2 = 2\;\sqrt{x^2+y^2}\;\frac{xy}{x^2+y^2}$$ simplificamos términos semejantes

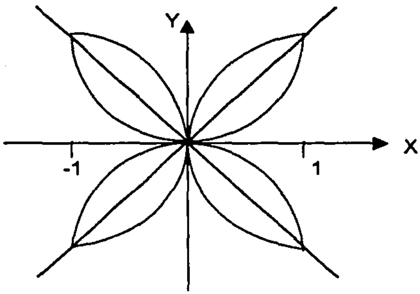
$$x^2 + y^2 = \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$ pasamos multiplicando el denominador al otro término

$$x^2 + y^2\;\sqrt{x^2+y^2} = 2xy$$

que es la ecuación $(x^2 + y^2)^{3/2} = 2xy$

Graficando en forma polar tenemos
r = Sen 2Ø
Solución

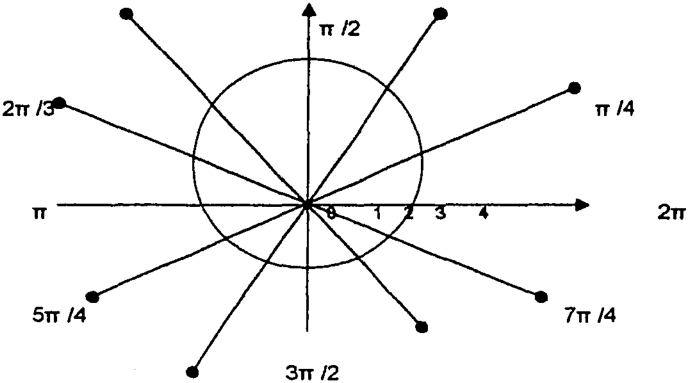
Ø	0	π /4	π /2	3π /4	π	5π /4	3π /2	7π /4	2π
r	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



Representa una Rosa de 4 pétalos

Ejemplo 4: Construir la gráfica de r = 3 sen Ø

Ø	0	π /4	π /2	2π /3	π	5π /4	3π /2	7π /4	2π
r	3	3.7	4	3.9	3	2.3	2	2.3	3



r = 3 + Sen Ø

Ejercicios Propuestos:
Dibuje la gráfica de cada una de las ecuaciones polares

1.- r = -6(1+ cos Ø) Cardioide

2.- r = 6 sen² ½ Ø Cardioide

3.- r = 2 + 2 Cos Ø Cardioide

4.- r = 1/Ø Espiral recíproca.

5.- r = 2Ø Espiral de Arquímedes.

6.- r² = 8Ø Espiral de Fermat.

7.- r = 3(1 + sen Ø) Cardioide

8.- r = sen 2Ø Rosa de cuatro hojas

9.- r² = 9 Cos2Ø) Lemniscata

V.4 Rectas, planos y cónicas en coordenadas polares. Criterio unificado de las cónicas.

"El teorema siguiente proporciona un nuevo método para describir las secciones cónicas.

Teorema a1: Sean F un punto fijo y ℓ una recta fija en un plano. El conjunto de todos los puntos P en el plano tales que la razón d(P, F) / d(P, Q) es una constante positiva e, donde d(P, Q) denota la distancia de P a ℓ, es una curva cónica. Más aún, la cónica es una parábola si e = 1, una elipse si 0 < e < 1 y una hipérbola si e > 1.

La constante e se llama excentricidad de la cónica y no debe confundirse con la base de los logaritmos naturales. Veremos que el punto F es un foco de la cónica. La recta ℓ se le llama directriz.

Supongamos que 0 < e < 1. Será conveniente utilizar un sistema de coordenadas polares en el plano con el polo en F y el eje polar perpendicular a ℓ de manera que el punto de intersección del eje polar y ℓ sea D(d, 0) donde d > 0.

Sea P(r, Ø) un punto en el plano tal que d(P, F) /d(P, Q) = e < 1. Entonces en la figura 5.1.7 vemos que P se encuentra a la izquierda de ℓ.

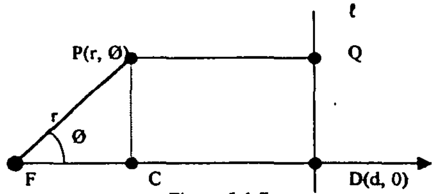


Figura 5.1.7

Sea C la proyección de P sobre el eje polar. Como
d(P, F) = r y d(P, Q) = FD – FC = d – r Cos Ø
concluimos que P satisface la condición del teorema si y sólo si

$$\frac{r}{d - rCos\phi} = e$$

o Equivalente a r = d e – e r Cos Ø

dejando r obtenemos $r = \dfrac{de}{1 + e\,Cos\ Ø}$

que es una ecuación polar de la gráfica. La misma ecuación se obtiene en el caso e = 1; sin embargo en este caso no existe el punto (r, Ø) sobre la gráfica cuando 1+ Cos Ø = 0.

La ecuación rectangular correspondiente a $r = de - er \cos \varnothing$ es $\sqrt{x^2 + y^2} = de - ex$.

Elevando al cuadrado ambos lados y arreglando los términos llegamos a

$(1 - e^2)^2 x^2 + 2de^2x + y^2 = d^2e^2$

completando el cuadrado en la ecuación anterior y simplificando obtenemos.

$$(x+\frac{de^2}{1-e^2})^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{d^2e^2}{(1-e^2)^2}$$

Finalmente, dividiendo ambos lados por $d^2e^2/(1 - e^2)^2$ obtenemos la forma .

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Por consiguiente la gráfica es una elipse con centro en el punto $(-de^2 / (1 - e^2), 0)$ sobre el eje x y cuyos semiejes están dados por

$$a^2=\frac{d^2e^2}{(1-e^2)^2}, \qquad b^2=\frac{d^2e^2}{1-e^2}$$

por lo tanto

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{d^2e^2}{(1-e^2)^2}$$

y por tanto $c = de^2 / (1 - e^2)$. Esto demuestra que F es un foco de la elipse . también concluimos que $e = c / a$. Para el caso $e > 1$ se puede dar una demostración parecida.

Como el teorema (a1) incluye tres tipos de cónicas, a veces se toma como una definición de las secciones cónicas.

Si hubiésemos escogido el foco F al lado derecho de la directriz, como se ilustra en la figura 5.1.8 (en donde $d > 0$), entonces habríamos obtenido una ecuación semejante a

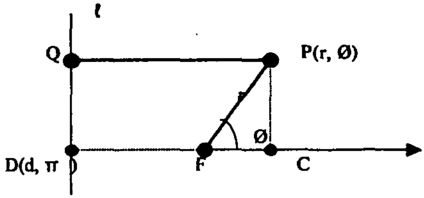


Figura 5.1.8

$$r = \frac{de}{1 + e \text{ Cos } Ø}$$

pero con un signo menos en lugar de un signo más . Si se permite que d sea negativo entonces aparecen otros cambios de signos.

Si ℓ se escoge paralela al eje polar, de tal manera que pase por uno de los puntos (d, π 2) o (d, 3π /2), entonces en las ecuaciones correspondientes aparece Sen Ø en lugar de Cos Ø.
El Teorema a2 resume la discusión anterior.

Teorema a2
Las gráficas de las ecuaciones polares con un foco en el origen, directriz representada por x = ± d (d positiva) tiene la ecuación polar.

$$r = \frac{de}{1 \pm eCos\,\phi}$$

Si directriz representada por y = ± d (d positiva) su ecuación es.

$$r = \frac{de}{1 \pm eSen\,\phi}$$

Son secciones cónicas. Más aún si e = 1 la cónica es una parábola, si 0 < e < 1 es una elipse, y si e > 1 es una hipérbola." [6]

[6] Calculo Con Geometría Analítica. Earl W. Swokowski. Grupo Editorial Iberoamérica.

V.4.1. - Ecuaciones polares rectas y círculos

Las ecuaciones de las rectas y círculos se pueden obtener en ecuaciones polares transformando las ecuaciones en coordenadas rectangulares de estas curvas. Deduciré la ecuación de una recta y también la de un círculo.

"En la figura 5.1.21. el segmento OR está trazado perpendicularmente a la recta L Designaremos la longitud de este segmento por p y el ángulo que hace con el eje polar por w. Las coordenadas de un punto variable sobre esta recta son (r, Ø) en el triangulo rectángulo ORP tenemos

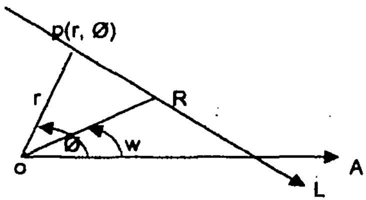


Figura 5.1.21

$$p/r = \cos(Ø - w)$$

$$r \cos(Ø - w) = p$$

esta ecuación es valida para todos los puntos de la recta.

La ecuación $r \cos(Ø - w) = p$ se le llama forma polar normal de la ecuación de la línea recta. Si se desarrolla $\cos(Ø - w)$ por la formula del coseno de la diferencia de dos ángulos, la ecuación toma la forma

$$r(\cos Ø \cos w + \operatorname{Sen} Ø \operatorname{Sen} w) = p$$

para $w = 0°$ esta ecuación se convierte en $r \cos Ø = p$ y la recta correspondiente es perpendicular al eje polar y a p unidades del origen. Si $w = 180°$ la ecuación se transforma en $r \cos Ø = -p$ en este caso la recta está p unidades a la izquierda del origen así para estos casos tenemos las ecuaciones

$$r \cos Ø = \pm p \qquad y \qquad r \operatorname{Sen}Ø = \pm p$$

Ecuación de un círculo de radio a y de centro R(r1, Ø1) observe la figura 5.1.2.2. y aplicando la ley de cosenos al triangulo ORP, obtenemos la ecuación del círculo en la forma

$$r^2 + r^21 - 2\ \pi\ \text{Cos}(Ø - Ø1) = a^2$$

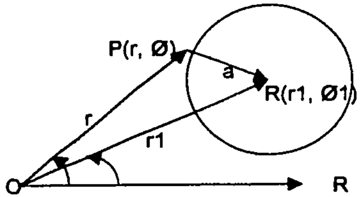


Figura 5.1.2.2

Si el centro está en (a, 0°), entonces r1 = a y Ø1 = 0° entonces la ecuación se reduce a $r = 2a\ \text{Cos}\ Ø$

Si el centro esta en (a, 90°) , la ecuación toma la forma de $r = 2a\ \text{Sen}\ Ø$ " [7]

Ejemplo 1.- Hallar la ecuación del circulo con centro en (5, 60°) y radio 3

Solución: Sustituyendo en la ecuación $r^2 + r^21 - 2\ \pi\ \text{Cos}(Ø - Ø1) = a^2$

Tenemos $r^2 + 25 - 10r\ \text{Cos}(Ø - 60°) = 9$

$R^2 - 10r\ \text{Cos}(Ø - 60) + 16 = 0$

Ejercicios propuestos

Hallar la ecuación polar del circulo en cada uno de los ejercicios.

1.- centro(4, 0°) y radio 4

2.- centro (5, 0°) y radio 5

3.- centro(6, 60°) y radio 3

4.- centro(9, 225°) y radio 8

5.- centro(8, 240°) y radio 7

[7] Geometria Analítica Gordon Fuller CECSA.

Ejemplo 2.- Identificación y determinación de las propiedades de una cónica a partir de su ecuación polar.

$$r = \frac{2}{1 - Cos\phi}$$

Que tiene la forma de la ecuación $$r = \frac{de}{1 \pm eCos\phi}$$

Con e = 1, por lo tanto se trata de una cónica tipo parábola.

El valor de de = 2
como e = 1 entonces d = 2
Como la función tiene signo menos entonces la directriz se encuentra al lado izquierdo del Foco. Para determinar la directriz se tiene la fórmula siguiente rCos Ø = -d por lo tanto r Cos Ø = -2
Para determinar la coordenada de la directriz r = -2/Cosπ , entonces r = 2

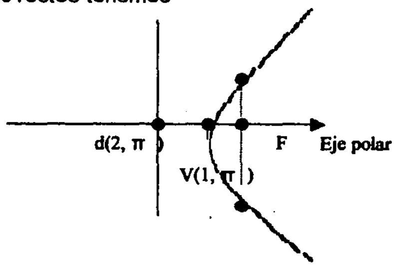
Para determinar el vértice se considera la función principal

Con el ángulo Ø = π tenemos:

$$r = \frac{2}{1 - Cos\phi} \;, \qquad r = \frac{2}{1 - Cos\,\pi} \;, \qquad r = \frac{2}{1 - (-1)} \;, \qquad r = \frac{2}{2}$$

r = 1, entonces las coordenadas del vértice son (1, π)
Para determinar las coordenadas de los lados rectos tenemos
Con el ángulo Ø = π /2 , 3π /2, tenemos:

$$r = \frac{2}{1 - Cos\phi} \;, \qquad r = \frac{2}{1 - Cos\,\pi/2}$$



$$r = \frac{2}{1 - Cos\,\pi/2} \;, \qquad r = \frac{2}{1}$$

Entonces r = 2
por lo tanto (2, π /2) y (2, 3π /2)

Ejemplo 3.- Describa y dibuje la gráfica de la ecuación $r = \dfrac{5}{3+2Sen\phi}$

Solución : Dividiendo el denominador y el numerador por 3 obtenemos

$$r = \frac{5/3}{1+2/3Sen\phi}$$

Que tiene la forma de la ecuación $r = \dfrac{de}{1 \pm eSen\phi}$

Con e = 2/3 entonces e < 1, por lo tanto la gráfica es una elipse.
Como la función es positiva se toma la directriz arriba del Foco F en el origen al eje polar.

El valor de = 5/3 por lo tanto despejando d = 5/3 / e , sustituyendo tenemos d = 5/3
Con la ecuación

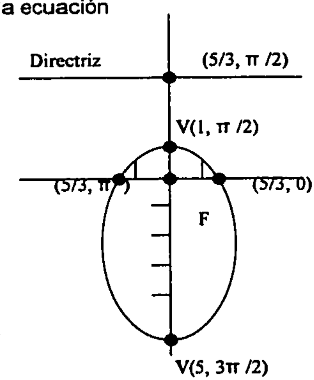
r = 5 / (3 + 2Sen Ø)

determinamos las coordenadas del lado recto para Ø = 0

r = 5 / (3 + 2Sen0) = r = 5/3, entonces (5/3, 0) y Ø = π ,

r = 5 / (3 + 2Sen π) = r = 5/3, entonces (5/3, π)

Los Vértices de la elipse, los determinamos con la ecuación
r = 5 / (3 + 2 Sen Ø)
cuando Ø = π /2
r = 5 / (3 + 2 Sen π /2)
r = 5 / (3 + 2(1))
r = 5/5
r = 1 por lo tanto (1, π /2).
cuando Ø = 3π /2
r = 5 / (3 + 2 Sen 3π /2)
r = 5 / (3 + 2(-1))
r = 5/1
r = 5 por lo tanto (5, 3π /2).



Ejemplo 4.- Describa y dibuje la gráfica de la ecuación

$$r = \frac{12}{2 - 6Cos\phi}$$

Solución : Dividimos el numerador y el denominador de la ecuación entre 2 obteniendo así

$$r = \frac{12/2}{2/2 - 6/2Cos\phi} \qquad r = \frac{6}{1 - 3Cos\phi}.$$

Que tiene la forma de la ecuación $$r = \frac{de}{1 \pm eCos\phi}$$

Por lo tanto e = 3 y como e > 1 entonces se esta hablando de una hipérbola con foco en el polo.
de = 6 entonces d = 2 Como la función es negativa entonces
la directriz se encuentra a la izquierda del Foco por lo tanto,
Para calcular el vértice sustituimos Ø = 0 en la ecuación

$$r = \frac{12}{2 - 6Cos0}$$

r = 12 / /2 -6(1)
r = 12 / -4
r = -3
entonces la coordenada es (-3, 0)

Sustituimos Ø = π en la ecuación

$$r = \frac{12}{2 - 6Cos\pi}$$

r = 12 / (2- 6(-1))

r = 12 / 8

r = 3/2

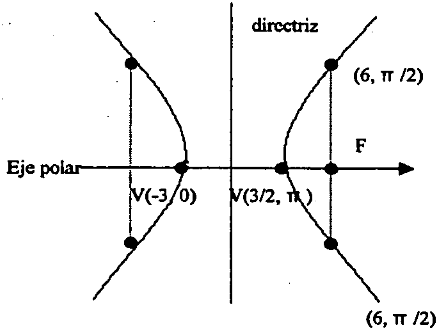
entonces la coordenada es (3/2, π)

podemos calcular los lados rectos de una parte de la hipérbola y dibujar la otra en forma simétrica en la ecuación

$$r = \frac{12}{2-6Cos\phi}$$

Cuando Ø = π /2 entonces

$$r = \frac{12}{2-6Cos\pi/2}$$



R = 12 / 2 – 6(0)
R = 12 /2
R = 6
Entonces el punto
es (6, π /2)

Cuando Ø = 3π /2 entonces

$$r = \frac{12}{2-6Cos3\pi/2}$$

R = 12 / 2 – 6(0)

R = 12 /2

R = 6

Entonces el punto es (6, 3π /2)

Ejercicios Propuestos:
En cada uno de los ejercicios identifique y dibuje la grafica de la ecuación dada.

1.- $r = \dfrac{10}{3 + 2Cos\phi}$ V(2, 0) y V'(10, π), e = 2/3, Elipse con Foco F En el eje polar

2.- $r = \dfrac{10}{2 + 3Sen\phi}$ V(-10, 3π /2) y V'(2, π /2), e = 3/2, Hipérbola con Foco F En el polo

3.- $r = \dfrac{15}{4 - 4Cos\phi}$ V(15/8, π), e = 1, Parábola con Foco F En el eje polar

4.- $r = \dfrac{12}{6 + 2Sen\phi}$ V(3/2, π /2) y V'(3, 3 π /2), e = 1/3, Elipse con Foco F En el eje polar

5.- $r = \dfrac{3}{2 + 4Cos\phi}$ V(1/2, 0) y V'(-3/2, π), e = 2, Hipérbola con Foco F En el eje polar

6.- $r = \dfrac{3}{2 + 2Cos\phi}$ V(3/4, 0) , e = 1, Parábola con Foco F En el eje polar

7.- $r = \dfrac{4}{2 + Cos\phi}$ V(4/3, 0) y V'(4, π), e = 1/2, Elipse con Foco F En el eje polar

V.5 Coordenadas cilíndricas.

"La distancia z de la figura 5.1.9 de un punto P(x, y, z) al plano xy y las coordenadas polares (r, Ø) de su proyección A(x, y, 0) sobre el plano xy, se le llama coordenadas cilíndricas de P.

Las coordenadas cilíndricas de P se escriben (r, Ø, z).
Si (x, y, z) son las coordenadas rectangulares de P, entonces, de las definiciones y de la gráfica 5.1.9, tenemos.

$x = r \, \mathrm{Cos}\,(Ø)$
$y = r \, \mathrm{Sen}\,(Ø)$
$z = z$
$r^2 = x^2 + y^2$
$Ø = \mathrm{Arctg}\,(y/x)$

$r = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$

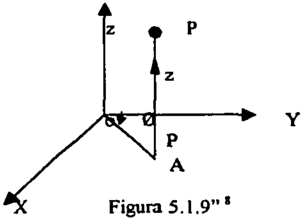


Figura 5.1.9"[8]

Para determinar ángulo del seno, Coseno, o tangente se emplearán las siguientes figuras. 5.1.10 y 5.1.11

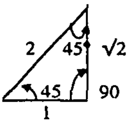


figura 5.1.10

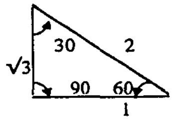


Figura 5.1.11

para saber cuales son los ángulos de algunos de los valores de π utilizados se tiene la siguiente tabla.

Ø	0	π /6	π /4	π /3	π /2	2π /3	3π /4	5π /6	π	7π /6	5π /4	4π /3	3π /2	5π /3	7π /4	2π
	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	360

[8] Calculo Diferencial e Integral. William Anthony Granville, Limusa

Ejemplo 1. Expresar en coordenadas rectangulares el punto cuyas coordenadas cilíndricas son (2, 45°, 1)

Solución. Como necesitamos el valor de x, y, z entonces considerando las formulas tenemos.

$x = r \cos Ø = 2 \text{ Cos } (45°) \rightarrow 2(\sqrt{2}/2) \rightarrow \sqrt{2}$

$y = r \text{ sen } Ø = 2 \text{ Sen } (45°) \rightarrow 2(\sqrt{2}/2) \rightarrow \sqrt{2}$

$z = z = 1$

por lo tanto el punto en coordenadas rectangulares es ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 1) como lo indica la figura.5.1.12

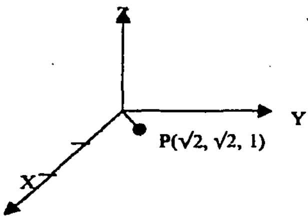
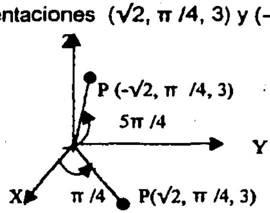


Figura 5.1.12

Ejemplo 2: Representar en coordenadas cilíndricas el punto cuyas coordenadas rectangulares son: (1, 1, 3)

Solución: Como ahora se necesita conocer el valor de (r , Ø, z) entonces tenemos:

$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \pm\sqrt{1^2 + 1^2} \rightarrow \pm\sqrt{2}$
$Ø = \text{Arctg } (x/y) \rightarrow \text{Arctg } (1/1) \rightarrow \text{Arctg } (1)\ \pi/4$
$z = 3$
entonces tenemos dos representaciones ($\sqrt{2}$, $\pi/4$, 3) y ($-\sqrt{2}$, $5\pi/4$, 3)



Ejemplo 3: Expresar en coordenadas cilíndricas la ecuación $x^2 + y^2 = 4$

Solución : sustituyendo x , y tenemos

$x = r \cos \varnothing$
$y = r \operatorname{Sen} \varnothing$
Entonces $(r \cos \varnothing)^2 + (r \operatorname{Sen} \varnothing)^2 = 4$ resolviendo
$r^2 \cos^2 \varnothing + r^2 \operatorname{Sen}^2 \varnothing = 4$ simplificando
$r^2 (\cos^2 \varnothing + \operatorname{Sen}^2 \varnothing) = 4$, Como $\cos^2 \varnothing + \operatorname{Sen}^2 \varnothing = 1$ entonces
$r^2 = 4$
$r = 2$

Ejemplo 4:. Expresar en coordenadas rectangulares la ecuación cilíndrica $r = 4\cos\varnothing$

Solución : Multiplicando toda la ecuación por r

$r^2 = 4r\cos \varnothing$ Sustituyendo r y Cos por sus valores originales

$x^2 + y^2 = 4\cancel{\sqrt{x^2 + y^2}}\,(x \,/\, \cancel{\sqrt{x^2 + y^2}})$ eliminando términos semejantes

$x^2 + y^2 = 4x$ Que es la ecuación buscada .

Ejercicios Propuestos: Los puntos siguientes están definidos en coordenadas Rectangulares: indicar sus coordenadas Cilíndricas:

1.- P(3, 4, 7) Solución. (5, Arctg(4/3), 7).
2.- P(5, -12, 8) Solución. (13, Arctg(-13/5), 8).

Los puntos siguientes están definidos en coordenadas Cilíndricas: indicar sus coordenadas Rectangulares:
3.- P(1, 45°, -2) Solución. ($1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, -2).
4.- P(2, 120°, 4) Solución (-1, /3, 4).

Expresar en coordenadas cilíndricas las coordenadas rectangulares siguientes:
6.- $2x = y$ Solución. $\theta = \arctg(2)$
7.- $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ Solución. $r = 2\operatorname{Sen}\theta$
8.- $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ Solución. $r^2 \cos 2\theta - z^2 = 1$
9.- $x^2 - y^2 = z$ Solución. $r^2\cos 2\theta = z$

Expresar en coordenadas Rectangulares las coordenadas Cilíndricas siguientes:
10.- $r(\cos\varnothing + \operatorname{Sen} \theta) - Z$ Solución. $x + y - z = 4$
11.- $r = 5$ Solución. $x^2 + y^2 = 25$
12.- $r^2\cos^2\theta - z^2 = 4$ Solución. $x^2 - y^2 = 4$
13.- $r^2 + z^2 = 4$ Solución. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

V.6 Coordenadas esféricas.

"El radio vector figura 5.1.13 de un punto P, el ángulo Ø que forma OP sobre el plano xy con el eje x, se le llaman coordenadas esféricas. El ángulo Ø se le llama colaltitud y θ la longitud. Las coordenadas esféricas de P se escriben (r, θ, Ø). Si (x, y, z) son las coordenadas rectangulares de P, entonces, de la definiciones y de la figura 5.1.13 tenemos.

x = r Sen (Ø) Cos (θ)

y = r Sen (Ø) Sen (θ)

z = r Cos (Ø)

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Ø = Arctg (y/x)

θ = Arctg ($\sqrt{x^2 + y^2}$) / z .

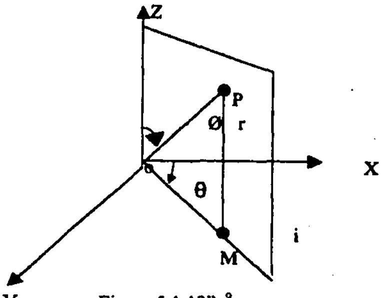


Figura 5.1.13" [9]

Ejemplo 1. Expresar las coordenadas rectangulares del punto cuyas coordenadas esféricas son (2, 5π /6, 3π /4).

Solución:

x = r Sen (Ø) Cos (θ)
= 2 Sen(5π /6)• Cos(3π /4)
= 2 • 1/√2 • 1/2
x = 1 / √2

y = r Sen (Ø) Sen (θ)
= 2 Sen(5π /6)• Sen (3π /4)
= 2 •1/√2 • 1/2
y = 1/√2

z = r Cos (Ø)
= 2 Sen (5π /6)
= 2 • -√3/2
z = -√3

El punto en coordenada rectangular esta en (1/ √2, 1/√2 , -√3)

[9] Calculo Diferencial e Integral. William Anthony Granville, Limusa.

Ejemplo 2.- Determinar las coordenadas esféricas del punto cuyas ordenadas rectangulares son $(2, -\sqrt{3}, 4)$
Solución:

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
$= 2^2 + (-\sqrt{3})^2 + 4^2$
$= 4 + 3 + 16$
$r^2 = 23$
$r = \sqrt{23}$

$z = r \text{ Cos } Ø$
$4 = \sqrt{23} \text{Cos } Ø$
$\text{Cos } Ø = 4 / \sqrt{23}$

$Ø = \text{Cos}^{-1} (4 / \sqrt{23})$

$Ø = 33.48$

$X = r \text{ Sen } (33.48) \text{ Cos } (\theta)$

$2 = \sqrt{23} \text{ Sen } (33.48) \text{ Cos } (\theta)$

$\text{Cos } (\theta) = 2\sqrt{23}(.552)$

$\theta = \text{Cos}^{-1} (5.291)$

$\theta = 1$

entonces el punto en coordenadas rectangulares es:

$(\sqrt{23} ,33.48 , 1)$.

Ejemplo 3.- Resolver la ecuación rectangular a coordenada esférica.

Solución:

$x^2 + y^2 + z^2 = 4y$ sustituyendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ tenemos

$r^2 = 4 \text{ rSen}Ø\text{Sen } \theta$ dividiendo todo por r

$r = 4 \text{ Sen}Ø\text{Sen } \theta$ que es la ecuación buscada.

Ejemplo 4.- Expresar en coordenadas rectangulares la ecuación que está en coordenada esférica. $r Sen\varnothing Tan\varnothing Sen2\,\theta = 2$

Solución: Cambiando la $Tan\varnothing$ por $Sen\varnothing / Cos\varnothing$ tenemos

$$r Sen\varnothing \frac{Sen\varnothing}{Cos\varnothing} Sen2\,\theta = 2$$

Despejando $Cos\varnothing$ tenemos

$r Sen\varnothing\ Sen\varnothing\ Sen2\,\theta = 2Cos\varnothing$ después sustituyendo $Sen2\,\theta$ por $2Sen\,\theta\ Cos\,\theta$

$r Sen\varnothing\ Sen\varnothing\ 2Sen\,\theta\ Cos\,\theta = 2Cos\varnothing$ dividiendo todo entre 2

$r Sen\varnothing\ Sen\varnothing\ Sen\,\theta\ Cos\,\theta = Cos\varnothing$ reacomodando términos

$r(Sen\varnothing\ Cos\,\theta\ \ Sen\varnothing\ Sen\,\theta) = 2Cos\varnothing$

como $x = rSen\varnothing\ Cos\,\theta$, $y = rSen\varnothing\ Sen\,\theta$, $z = rCos\varnothing$ entonces

$xy = z$ por faltarle el termino en r entonces z deberá ser diferente de cero

$xy = z$ será la ecuación buscada.

Ejercicios Propuestos: Determinar las coordenadas esféricas del punto cuyas coordenadas rectangulares son los siguientes:

Ejercicios	Solución
1.- P(6, 3, 2)	(7, ArcCos(2/7), Arctg(1/2)).
2.- P(3, -4, 0)	(5, $\pi/2$, Arctg(-4/2)).
3.- ($\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$)	($2\sqrt{2}$, $\pi/4$, $2\pi/3$).

Determinar las coordenadas Rectangulares del punto cuyas coordenadas. Esféricas son los siguientes:

4.- P(1, 60°, 30)	(¾, $\sqrt{3}/4$, ½).
5.- P(2, 45°, 120)	($-\sqrt{2}/2$, $\sqrt{6}/2$, $\sqrt{2}$).
6.- P(2, $2\pi/3$, $\pi/2$)	(0, $\sqrt{3}$, 0)
7.- P(3, $\pi/6$, $2\pi/3$)	(-3/4, $3\sqrt{3}/4$, -3/2)

Determinar las ecuación rectangular, de las siguientes ecuaciones en forma esférica:

8.- $r^2 = 2\ sen\varnothing\ Cos\,\theta$	$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$
9.- $r^2 Sen\varnothing\ Cos\varnothing\ Cos\,\theta = 1$	$xz = 1$.
10.- $r = sen\varnothing\ Cos\varnothing$	$x^2 + y^2 + z^2 - x = 0$

Capitulo VI ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

VI. 1 Definiciones básicas.

"Suponga que una partícula se desplaza de modo que las coordenadas (x, y) de su posición en cualquier instante t están dadas por las siguientes condiciones $x = f(t)$ y $y = f(g)$. Entonces, para cada número de t en el dominio común de f y g existe un vector $f(t)i + g(t)j$, y los puntos finales de la representaciones de posición de estos vectores describen la curva C recorrida por la partícula. Esto lleva a considerar una función cuyo dominio es un conjunto de números reales y cuyo contradominio es un conjunto de vectores. Dicha función se denomina función de valor vectorial (o de forma breve , función vectorial).

Definición: Sean f y g dos funciones reales de variable real t. Entonces, para cada número t en dominio común de f y g existe un vector R definido por
$R(t) = f(t)i + g(t)j$ y R se denomina función vectorial.

La ecuación de $R(t) = f(t)i + g(t)j$ se denomina ecuación también ecuación vectorial, y define una curva C. La misma curva C también esta definida por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ que reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de C también se denomina gráfica; esto es, el conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen $x = f(t)$ y $y = g(t)$ es la gráfica de la Función vectorial R

Una ecuación vectorial de una curva, así como sus ecuaciones paramétricas, dan a la curva una dirección en cada punto. Esto es, si se piensa que la curva esta descrita por una partícula, se puede considerar el sentido positivo, a lo largo de la curva, como el sentido en el cual se mueve la partícula cuando el parámetro t se incrementa. En un caso como éste t puede tomarse como la medida del tiempo, y el vector R(t) se denomina Vector de posición. Algunas veces a R(t) se le llama radio vector."*

Si el parámetro t se elimina del par de ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, se obtiene una ecuación en x y y denominada ecuación cartesiana de C.

Sea el punto P y un sistema de coordenadas junto con 2 puntos A y B diferentes ver figura 6.1.1

Los puntos A y B definen una recta y sólo una (D) en el espacio. Se le llama vector director de una recta D el vector se representa por AB siendo A y B dos puntos que pertenecen a la recta D, y por $\bar{u}$ cualquier vector paralelo a la recta D. Una recta está definida por un vector director $\bar{u}$ y un punto A por el que pasa dicha recta : $M = A + t \cdot \bar{u}$.

---

* Matemáticas previas al cálculo; Louis Leithold: Oxford.

En este caso t representa a todos los valores reales posibles, mientras que m será cada punto de la recta correspondiente a los valores de t.

Si el punto A esta definido para (a_1, a_2) siendo estos dos valores correspondientes a sus coordenadas cartesianas, mientras que el vector ū está definido por las coordenadas (α , β), y el punto m está definido por las coordenadas (x, y): la recta se podrá expresar entonces por el par siguiente:

$X = a_1 + t \cdot \alpha$

$Y = a_2 + t \cdot \beta$

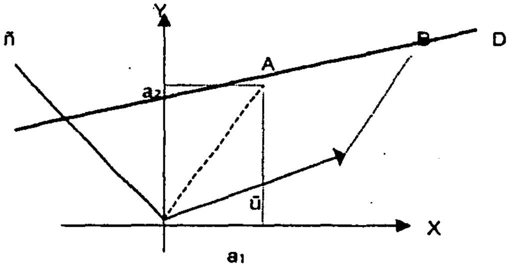


Figura 6.1.1

Representación paramétrica de las gráficas con dos variables x y y. Otra manera de expresar una gráfica en x y y separadamente en términos de una tercera variable. Las ecuaciones de esta clase son muy importantes, porque el tratamiento matemático de muchos problemas se facilita por su empleo. Por lo que la siguiente definición establece que :

La ecuación de una gráfica en dos dimensiones se llama forma paramétrica si cada coordenada de un punto cualquiera P(x, y) se expresa en términos de una tercera variable. La tercera variable, se le llama parámetro.

Las ecuaciones serán:

$X = t - 1$ y $y = 2t + 3$

Por ejemplo, son ecuaciones paramétricas, y t es el parámetro.

Las ecuaciones definen una gráfica. Si a t se le signa un valor , se determinan valores correspondiente para x y y. El par de valores de x y y son las coordenadas de un puno en una gráfica. La gráfica consiste en el conjunto de todos los puntos determinados de esta manera cuando t varia tomando todos sus valores escogidos.

Ejemplo 1: Obtener la ecuación rectangular de las curvas cuyas ecuaciones paramétricas se dan en cada caso.

$X = 4t + 3$, $Y = 2t + 4$

Solución: eliminamos el parámetro t de las dos ecuaciones

$T = (x - 3)/4$

$T = (y - 4)/2$

Igualamos las ecuaciones y tenemos

$$\frac{X-3}{4} = \frac{y-4}{2}$$ despejando los denominadores tenemos

$2(x - 3) = 4(y - 4)$ quitando paréntesis

$2x - 6 = 4y - 16$ igualando todo a cero

$2x - 4y - 6 + 16 = 0$

$2x - 4y + 10 = 0$ que es la ecuación de una recta.

Ejemplo 2.- Obtener la ecuación paramétrica de la parábola $x^2 + 2x + y - 4 = 0$ si $x = 2t$

Solución: en $x^2 + 2x + y - 4 = 0$ despejamos y

$Y = 4 - x^2 - 2x$

En donde sustituimos el valor de $x = 2t$

$Y = 4 - (2t)^2 - 2(2t)$

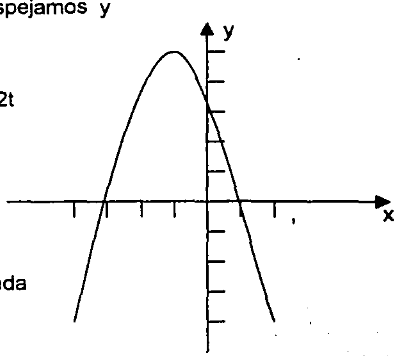
$Y = 4 - 4t^2 - 4t$

Como $x = 2t$

entonces la ecuación paramétrica queda

$Y = 4 - 4t^2 - 4t$

$X = 2t$



Que es la ecuación paramétrica buscada.

Ejercicios propuestos:

Problema	Respuesta.
1.- $X^3 + y^3 = 6xy$ con $y = tx$	$x = \dfrac{6t}{1+t^3}$ $\quad y = \dfrac{6t^2}{1+t^3}$
2- $X^3 + y^3 = xy$ con $x = yt$	$y = \dfrac{t}{t^3+1}$ $\quad x = \dfrac{t^2}{t^3+1}$
3.- $X^4 + y^3 = 4x^2y$ con $y = tx$	$x = t(4-t^2)$ $y = t^2(4-t^2)$
4.- $X^3 + xy^2 + 2y^2 - 6x^2$ con $y = tx$	$x = \dfrac{2(3-t^2)}{t^2+1}$, $\quad y = \dfrac{2t(3-t^2)}{t^2+1}$
5.- $X^2 + 6x - 4y + 17 = 0$ con $x = t-3$	$x = t-3$, $\quad y = \dfrac{t^2+8}{4}$
6.- $y^2 - x - 2y - 3 = 0$ con $y = t+1$	$x = t^2 - 4$ $\quad y = t+1$
7.- $4X^2 - 9y^2 + 16x - 54y - 101 = 0$ con $x = 2t$	$y = \pm\dfrac{\sqrt{16t^2 - 36}}{3}$ $\quad x = 2t$
8.- $9x^2 + 16y^2 - 36x - 32y - 92 = 0$ con $x = 2t$	$y = \pm\sqrt{9} - 9/4t^2$ $\quad x = 2t$

VI. 2 Ecuaciones paramétricas de una curva y su identidad con las coordenadas cartesianas.

"Representación analítica de una curva por medio de un par de ecuaciones en las cuales cada una de las dos variables está expresada en función de una tercera variable. Ver figura 6.1.2

Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$

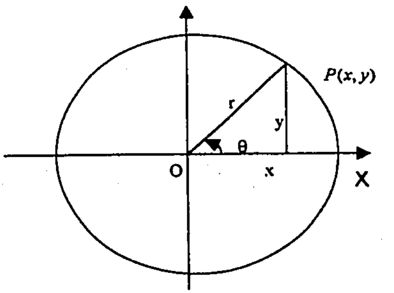


Figura 6.1.2

se representa también por la ecuación

$$X / a = \text{Cos } Ø \quad \text{y} \quad y / a = \text{Sen } Ø$$

Equivalentes al par de ecuaciones

$$X = \text{Cos } Ø \quad \text{y} \quad y = \text{Sen } Ø \quad \text{-----------} (1).$$

Donde Ø es una variable independiente que puede tomar cualquier valor real entonces sustituyendo cualquier valor a la ecuación (1) tenemos un par de valores de x y y que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$

elevando al cuadrado $X^2 = \text{Cos}^2 Ø$ y $y^2 = \text{Sen}^2 Ø$

y sumando cada termino tenemos

$X^2 + y^2 = \text{Cos}^2 Ø + \text{Sen}^2 Ø$ Como $\text{Cos}^2 Ø + \text{Sen}^2 Ø = 1$

Entonces todos los valores de Ø, es idéntica a la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

Ahora considerando el centro de la circunferencia en C(h, k) con radio r ver figura 6.1.3.

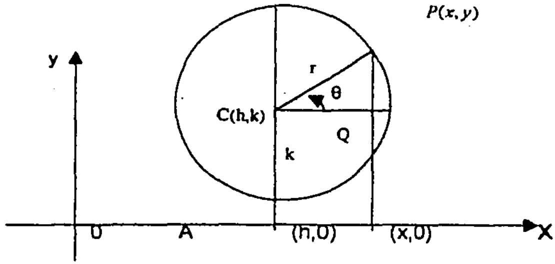


Figura 6.1.3

Para las distancias dirigidas CQ y QP obtenemos :

CQ = x – h = a Cos θ y Qp = y – k = a Sen θ o el par de ecuaciones

$x = h + a \cos\theta \qquad y = k + a \operatorname{Sen}\theta$

por eso estas ecuaciones constituyen una representación paramétrica de un circulo con centro en C(h, k) y de radios a

En general si F(x, y) = 0.

La ecuación rectangular de una curva y cada una de las variables x, y son función de una tercera variable t , de tal manera que podemos escribir.

$$x = f(t) \quad , y = g(t) \text{ -------} \quad (2).$$

Entonces para cada valor de la variable independiente (t) las ecuaciones (2) determinan un par de valores reales de x , y que satisfacen a f(x, y) = 0 por lo tanto las ecuaciones x = f(t) y y = g(t) se les llama ecuaciones paramétricas y el valor de t se le conoce como parámetro.

La ecuación rectangular de una curva se obtiene a partir de su representación paramétrica eliminando el parámetro .

Si las ecuaciones paramétricas contienen funciones trigonométricas, la ecuación rectangular puede obtenerse a veces, por medio de una de las identidades trigonométricas fundamentales Anexo (1) otras veces si una ecuación paramétrica es más complicada; la ecuación rectangular, puede obtenerse, despejando el parámetro de la ecuación sencilla y sustituyendo su valor en la otra ecuación"[1]

[1] Geometría Analítica: Charles H. Lehmann ; Limusa

Ejemplo 1.- obtener la ecuación rectangular de la curva cuya ecuación paramétrica es:

$X = 2\cos\theta$
$Y = 2 \operatorname{sen}\theta$

Solución: eliminamos el parámetro θ de las dos ecuaciones elevando al cuadrado.

$X^2 = 4\cos^2\theta$
$Y^2 = 4 \operatorname{sen}^2\theta$

Despejando θ

$X^2/4 = \operatorname{Cos}^2\theta$
$Y^2/2 = \operatorname{Sen}^2\theta$
Se suman los dos términos y obtenemos

$$\frac{X^2}{4} + \frac{y^2}{4} = \operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta$$

Como $\operatorname{Cos}^2\theta + \operatorname{Sen}^2\theta = 1$ entonces

sustituyendo obtenemos

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

multiplicando por 4 obtenemos
$x^2 + y^2 = 4$ que es la ecuación rectangular de una circunferencia.

"Para hallar una representación paramétrica de la elipse usaremos las ecuaciones siguientes

$$X = a\operatorname{Cos}\theta \quad \text{y} \quad y = b\operatorname{Sen}\theta$$

Donde $a > b$.

Estas ecuaciones definen una elipse, si eliminamos el parámetro θ se puede verificar. Así escribiendo las ecuaciones como $x/a = \operatorname{Cos}\theta$ y $y/b = \operatorname{Sen}\theta$, y elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación y sumando, obtenemos.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = Cos^2\theta + Sen^2\theta$$

o

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De este resultado vemos que las ecuaciones paramétricas representan una elipse con a y b semiejes. El significado geométrico de θ se puede determinar recurriendo a la figura 6.1.4 El radio del circulo menor es b y el radio del circulo mayor es a. El lado terminal de θ corta a los círculos en B y A. La recta horizontal que pasa por B y la recta vertical que pasa por A se intersectan en P(x, y), que es un punto de la elipse Cuando θ varía, P se mueve a lo largo de la elipse. Si θ comienza en 0° y aumenta hasta 360° el punto P comienza en (a, 0) y recorre la elipse en dirección contraria a las manecillas del reloj.

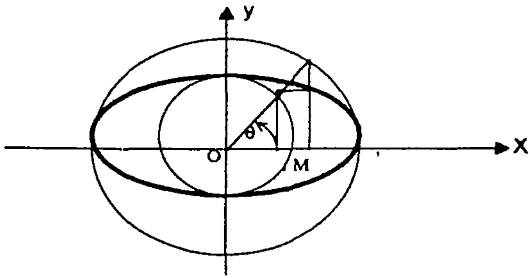


Figura 6.1.4

Para obtener la ecuación paramétrica de una hipérbola usamos las ecuaciones,

$X = a \operatorname{Sec} \theta$ y $y = b \operatorname{Tan} \theta$

Donde a y b son números positivos. Puesto que $\operatorname{Sec}^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ podemos escribir

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = Sec^2\theta - Tan^2\theta$$

o

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Notamos que Sec θ y Tan θ existen para todos los ángulos, excepto aquellos para los cuales θ es un múltiplo impar de 90°, Supongase que hacemos que θ tome todos los valores de manera que $0° \le \theta < 90°$. En 0°, Sec θ = 1 y Tan θ = 0. Cuando θ aumenta en este intervalo especificado, Sec θ comienza en 1 y toma todos los valores positivos mayores que 1. y Tan θ comienza con 0° y toma todos los valores positivos. Por lo tanto X comienza en a y toma todos los valores positivos mayores que a y y comienza en 0 y toma todos los valores positivos. Vemos que este intervalo escogido para θ es suficiente para la parte de la hipérbola del primer cuadrante. Similarmente los valores de θ tales que $90° < \theta \le 180°$ representa la parte de la hipérbola en el tercer cuadrante." [2]

Ejemplo 1.- Trazar la grafica de las ecuaciones paramétricas.

$X = 3 - t \qquad y = t^2 - 2$

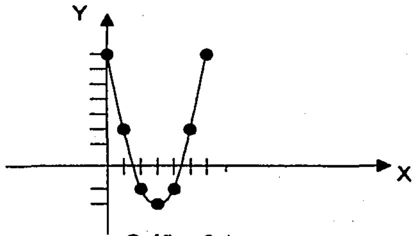
Solución: primero consideramos los valores del parámetro y obtenemos los valores correspondientes de x y y estos a sus vez dan una guía para el trazo de la gráfica.

Sustituimos los valores de t en cada una de las ecuaciones paramétricas y obtenemos los valores de x y y ver tabla 1

Tabla1

T	-3	-2	-1	0	1	2	3
X	6	5	4	3	2	1	0
Y	7	2	-1	-2	-1	2	7

Ver la grafica 6.1



Gráfica 6.1

[2] Geometría Analítica; Gordon Fuller, CECSA.

Ejemplo 2. Construir la gráfica de las ecuaciones

$X = 3 \text{ Sen } \theta$ $\qquad$ $Y = 4 \text{ Cos } \theta$

Solución: Eliminamos el parámetro θ de estas ecuaciones.

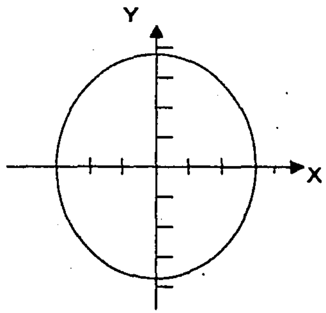
$X/3 = \text{Sen } \theta$ $\quad$ $y/4 = \text{Cos } \theta$ elevando un cuadrado

$(X/3)^2 = \text{Sen}^2 \theta$ $\quad$ $(y/4)^2 = \text{Cos}^2 \theta$ sumando

$(X/3)^2 + (y/4)^2 = \text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta$ Como $\text{Sen}^2 \theta + \text{Cos}^2 \theta = 1$
tenemos:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

que es la ecuación de la elipse con centro en el origen y sobre el eje y



Ejemplo 3.- Hallar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son : $x = 2\text{Tg}\varnothing$ y $y = 3\text{Ctg}\varnothing$.

Solución: Dado que tenemos los elementos de tangente y cotangente como términos de la ecuación paramétrica entonces emplearemos identidades trigonométricas.

Despejando tg de la ecuación $x = 2\text{Tg}\varnothing$ y despejando Ctg de la ecuación $y = 3\text{Ctg } \varnothing$ tenemos.

$X/2 = \text{Tg}\varnothing$ $\quad$ y $\quad$ $y/3 = \text{Ctg}\varnothing$

Ejemplo 4.- Hallar la ecuación rectangular de la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = t\,v_o \cos \alpha \qquad y = t\,v_o \operatorname{Sen} \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$$

donde t es el parámetro y v_o, α, g son constantes.

Solución : como la primera ecuación es la más sencilla despejamos de ella el valor de t

$$T = \frac{X}{v_o \cos \alpha}$$

se sustituye t en $y = t v_o \operatorname{Sen} \alpha - \tfrac{1}{2} g t^2$ por lo tanto

$$y = \frac{X\,v_o}{v_o \cos \alpha} \cdot \operatorname{sen} \alpha - \tfrac{1}{2} g\left(\frac{x}{v_o \operatorname{Sen} \alpha}\right)$$

eliminado términos semejantes la ecuación queda

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \tfrac{1}{2} g \left(x^2 / v_o \cos^2 \alpha \right).$$

Que es la ecuación rectangular buscada.

Ejercicios Propuestos.

Encontrar las ecuaciones rectangulares de las curvas cuya ecuación paramétrica es:

Ejercicio	Solución
a).- $x = t - 1$, $y = 3T$	$3x - y + 3 = 0$
b).- $x = 2 + 5 \tan \theta$, $y = 1 + 2 \operatorname{Sec} \theta$	$\dfrac{(y-1)^2}{4} - \dfrac{(x-2)^2}{25} = 1$
c).- $x = t - 2$, $y = 3t$	$3x - y + 6 = 0$
d).- $x = t^2$, $y = 3t$	$y^2 = 9x$
e).- $x = 2\operatorname{Sen}\theta$, $y = 5\operatorname{Cos}\theta$	$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
f).- $x = 3\operatorname{Sec}\theta$, $y = 2\operatorname{Tan}\theta$	$\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$
g).- $x = 2 + 3\operatorname{Cos}\theta$, $y = -5 + 3\operatorname{Sen}\theta$	$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$
h).- $x = 3 + 2\operatorname{Cos}\theta$, $y = -2 + 5\operatorname{Sen}\theta$	$\dfrac{(x-3)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{25} = 1$
i).- $x = 2 + 4\operatorname{Cot}^2\theta$, $y = 3 + 8\operatorname{Cot}^2\theta$	$(y-3)^2 = 16(x-2)$
j).- $x = 2 + 3\operatorname{Sec}\theta$, $y = -5 + 4\operatorname{Tan}\theta$	$\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+5)^2}{16} = 1$
k).- $x = 3\operatorname{Cos}\theta$, $y = 1 + \operatorname{Se}\theta$	$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-5)^2}{1} = 1$

VI. 3 Representación paramétrica de las cónicas. La cicloide y la hipocicloide.

"Ahora demostraremos como se pueden usar las ecuaciones paramétricas para definir una curva la cual está descrita por un movimiento físico.
La curva que consideramos es una cicloide, que es la curva trazada por un punto en la circunferencia de un círculo tiene radio a. Sea el eje x la línea recta fija en la cual rueda el círculo y sea el origen uno de los puntos en el cual el punto P dado tiene contacto con el eje x. Vea la figura 6.3.1

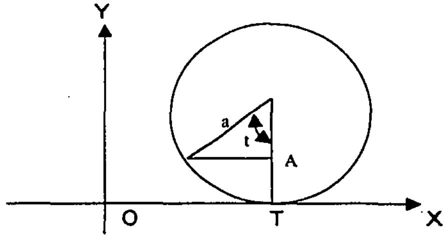


Figura 6.3.1

En la cual muestra el círculo después de que ha rodado a través de un ángulo de t radianes vea la figura 6.3.1

V(OT) + V(TA) + V(AP) = V(OP) - - - - - - 0

V(OT) = Longitud del arco PT = at . ya que la dirección de V(OT) está a lo largo del eje x positivo concluimos que V(OT) = ati - - - - - -1

También, V(TA) = a – a cos t. Y ya que la dirección de V(TA) es la misma que la dirección de j tenemos. V(TA) = a(a – cos t) j - - - - - 2

V(AP) = a Sen t y la dirección de V(AP) es la misma que la dirección de –i ; de este modo, V(AP) = – a sen t i - - - - - - -3

Sustituimos 1, 2, 3 en 0 y obtenemos

Ati + a(1 – sen t)j – a sen ti = V(OP) O el equivalente,

V(OP) = a(t – sen t)i + a(1 – cos t)j - - - - - - - - 4

La ecuación (4) es una ecuación vectorial del cicloide. Así las ecuaciones paramétricas del cicloide son

X = a(t – sen t) y y = a(1 – cos t)

Donde t es cualquier numero real. Una porción de la gráfica del cicloide se muestra en la figura 6.3.3 " [3]

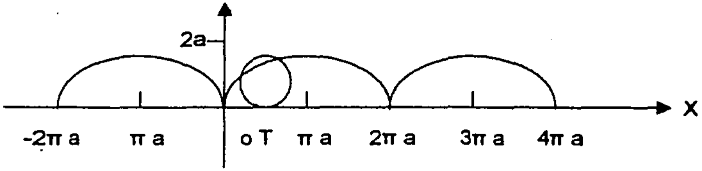


Figura 6.3.3

La curva trazada por un punto fijo P de un círculo que rueda sin resbalar sobre una línea recta, se llama cicloide.

Círculo con radio a y que rueda sobre (y encima de) el eje X en la dirección positiva. Si una de las direcciones de P es el origen, entonces una parte de la curva y una de las posiciones posibles del círculo que puede verse en la figura 6.3.4

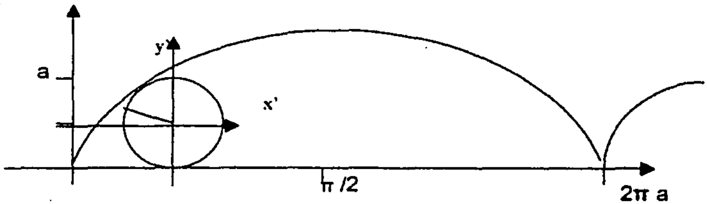


Figura 6.3.4

Sea C el centro del círculo y T el punto de contacto con el eje x. Definimos el parámetro t como el ángulo TCP medido en radianes como OT es la distancia que el círculo ha rodado , OT = aT entonces las coordenadas de C son (at, a) . y P(x', y') denota el punto P en relación a este sistema entonces usando $x = x' + h$ y $y = y' + k$ con $h = at$ y $k = a$ tenemos
$X = at + x'$ y $y = a + y'$

Ø denota el ángulo del siguiente segmento CP respecto al eje x' entonces $Ø = 3/2\,\pi - t$ por lo tanto :

[3] Matemáticas previas al Calculo: Louis Leithold: Oxford.

$X' = a \cos \varnothing = a \cos(3/2\pi - t) = a \operatorname{Sen} t$

$Y' = a \operatorname{Sen} \varnothing = a \operatorname{Sen}(3/2\pi - t) = a \cos t$

Y sustituyendo e $x = at + x'$, $y = at + y'$ obtenemos unas ecuaciones paramétricas para la cicloide.

$X = a(t - \operatorname{Sen} t) \qquad y = a(a - \cos t)$.
Donde t está en los números reales.

"Una **hipocicloide** es el lugar geométrico de un punto fijo cualquiera de una Circunferencia C de radio b que rueda sin resbalar dentro de otra circunferencia con una ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ donde $b < a$. Sea P un punto fijo de C y suponga que la posición inicial de P es A(a, 0). Use como parámetro t el ángulo que forma el segmento de recta que va de O al centro de C con la parte positiva del eje x. Por lo tanto las ecuaciones paramétricas de la curva trazada por el punto P es una hipocicloide son.

$X = (a - b) \cos t + b \cos(a - b / b)\, t, \qquad y = (a - b) \operatorname{Sen} t + b \operatorname{Sen}(a - b / b)\, t.$

donde $0 \leq t \leq 2\pi$.

donde a y b son, respectivamente los radios de la circunferencia fija y rodante, y el parámetro t es al ángulo que la recta de los centros OC forma con la parte positiva del eje X tal como se observa en la figura 6.3.5 " [4]

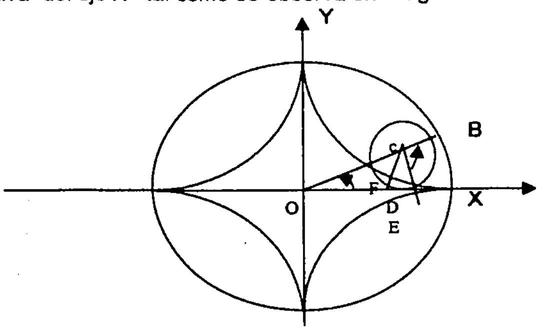


Figura 6.3.5

Que es una hipocicloide de cuatro picos y también se le llama astroide

[4] Geometría Analítica : Gordon Fuller : Cecsa

Ejemplo 1. Hallar la representación paramétrica de la ecuación

$$Y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$$

Solución : Resolviendo esta ecuación para $y^{2/3}$, obtenemos

$Y^{2/3} = a^{2/3} - x^{2/3}$ Simplificando

$= a^{2/3}(1 - (x/a)^{2/3})$

Ejemplo 2.- Trazar la cicloide con respecto a las ecuaciones paramétricas dadas $x = 2(\varnothing - \pi - \text{Sen } \varnothing)$ y $y = -2(1 + \text{Cos } \varnothing)$

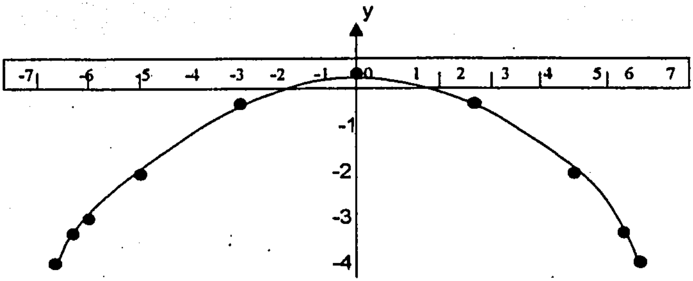
Solución: El parámetro Ø aparece como termino aislado por lo que el valor se tomará en radianes para asignar valores de x y y será necesario asignar valores a Ø en función de π .

La tabla 1 nos indica los valores que toma cada una de las funciones paramétricas de la cicloide.

Tabla 1

Ø	Sen Ø	CosØ	X	Y
0	0	1	0	0
π /6	0.5	0.87	-6.24	-3.73
π /4	0.71	0.71	-6.13	-3.41
π /3	0.87	0.5	-5.92	-3.0
π /2	1	0	-5.142	-2
3π /4	0.71	-0.71	-2.99	-0.586
π	0	-1	0	0
5π /4	-0.71	-1.071	2.99	-0.586
3π /2	-1	0	5.14	-2
7π /4	-0.71	0.71	6.13	-3.41
2π	0	1	6.29	-4

graficando los puntos



Para obtener la ecuación de la cicloide podemos entonces

$y = -2(1 + \text{Cos } Ø)$ despejar Cos Ø

$\text{Cos } Ø = y/-2 - 1$ despejamos Ø

$Ø = \text{arcCos } (-y/2 - 1)$

sustituyendo Ø en

$x = 2(Ø - \pi - \text{Sen } Ø)$ tenemos

$x = 2(\text{Arcos } (-y/2 - 1) - \pi - \text{sen } (\text{arcos } (-y/2 - 1))$

que es la ecuación rectangular buscada.

VI. 4 Ecuaciones paramétricas de curva en el espacio.

"Curvas en R^3 sean h_1, h_2 y h_3 tres funciones reales de una variable real t. Entonces para todo número t en el dominio común a h_1, h_2 y h_3 existe un vector R definido por.

$$R(t) = h_1(t)\mathbf{i} + h_2(t)\mathbf{j} + h_3(t)\mathbf{k}$$

y R se le llama función vectorial.

La gráfica de una función vectorial en el espacio tridimensional se obtiene considerando todos los valores de t en el dominio de R, el punto terminal de la representación de la posición del vector R(t) describe una curva M, y esta curva se le llama gráfica de

$$R(t) = h_1(t)\mathbf{i} + h_2(t)\mathbf{j} + h_3(t)\mathbf{k}$$

Un punto en la curva tiene una representación cartesiana (x, y, z) donde

$$X = h_1(t) \qquad y = h_2(t) \qquad z = h_3(t)$$

Donde estas ecuaciones son las ecuaciones paramétricas de M y la ecuación

$$R(t) = h_1(t)\mathbf{i} + h_2(t)\mathbf{j} + h_3(t)\mathbf{k}.$$

Es la ecuación vectorial de M . eliminando el parámetro de t en la ecuación

$$X = h_1(t) \qquad y = h_2(t) \qquad z = h_3(t)$$

$$X/h_1 = t \qquad y/h_2 = t \qquad z/h_3 = t$$

Para obtener dos ecuaciones en x, y y z. Estas ecuaciones se le llaman ecuaciones cartesianas de M. Cada ecuación cartesiana es a una ecuación de una superficie y una curva M es la intersección de las dos superficies. Las ecuaciones de cualquiera de dos superficies que contienen a M se puede tomar como las ecuaciones cartesianas que definen a M. " [5]

[5] Calculo con Geometría Analítica : Louis Leithold Harla.

Ejemplo 1.- Trazar la curva que tiene la ecuación vectorial $R(t) = ti + t^2 j + t^3 k$

Solución : las ecuaciones paramétricas de la ecuación es

$X = t \qquad y = t^2 \qquad z = t^3$

Eliminando t de las primeras dos ecuaciones tenemos.

$X = \sqrt{y}$ entonces $y = x^2$, lo cual es una parábola en el plano xy y una porción de la función en el punto t =0 y t = 2 ver la figura 6.6.1

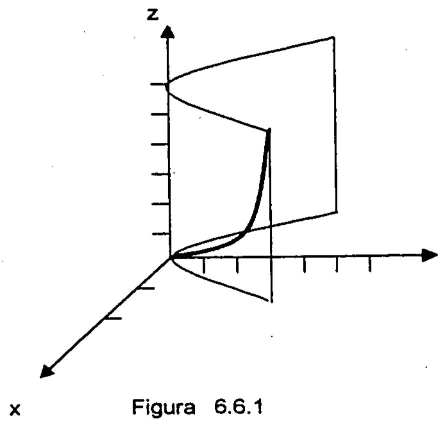


Figura 6.6.1

Ejemplo 2.- Trazar la curva que tiene las ecuación paramétricas x = a Cos t Y = b Sen t, z = t.

Solución: Para eliminar t de las dos primeras ecuaciones las elevamos al cuadrado. $X^2 = a^2 \, Cos^2 \, t$ y $y^2 = b^2 \, Sen^2 \, t$

De lo cual obtenemos $\frac{x^2}{a^2} = Cos^2 t$ y $\frac{y^2}{b^2} = Sen^2 t$

Sumando los miembros correspondientes a esta ecuaciones e igualando $Cos^2 \, t + Sen^2 t = 1$ que es por identidad trigonométrica.

Tenemos $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que es una elipse localizada en el plano xy y cuyo determinantes son paralelos al eje z ver figura 6.6.2

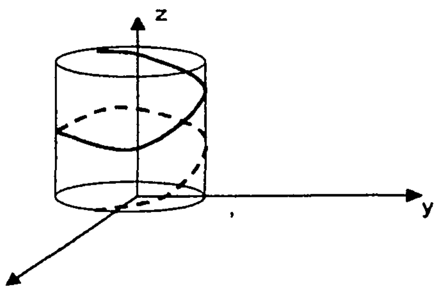


Figura 6.6.2

Ejercicios Propuestos.

1.- x = 2Sent , y = 2Cost , z = 2t

2.- aCost, y = aSent , z = kt

3.- x = t , y = t , $z = \sqrt{2 - t^2}$

4.- x = 2t, $y = 4t^2$, z = t

5.- x = Cost , $y = Cos^2 t$, z = Sent

6.- $x = Sen^2 t$, y = SentCost, z= Cost

7.- x = Sent , y= Csct, z = Cost

8,. X = Cost, y= 2Sent, z = 3t

9.- $x= 2 \, Sen^2 t$, y= Sen2t, z= 2cosT

Anexo 1

Trigonometría

Definiciones e identidades fundamentales

$$Sen \propto = \frac{y}{r} = \frac{1}{Csc \propto}$$

$$Cos \propto = \frac{x}{r} = \frac{1}{Sec \propto}$$

$$Tan \propto = \frac{y}{x} = \frac{1}{Cot \propto} = \frac{Sen \propto}{Cos \propto}$$

$$Sen^2 \propto + Cos^2 \propto = 1$$

$$1 + Tan^2 \propto = Sec^2 \propto$$

$$1 + Cot^2 \propto = Csc^2 \propto$$

$$Sen\, 2 \propto = 2 Sen \propto Cos \propto$$

$$Cos\, 2 \propto = Cos^2 \propto - Sen^2 \propto = 2 Cos^2 \propto - 1 = 1 - 2 Sen^2 \propto$$

$$Tan\, 2 \propto = \frac{2 Tan \propto}{1 - Tan^2 \propto}$$

$$Cot \propto = \frac{Cot^2 \propto}{2 Cot \propto}$$

CONCLUSIONES

Al elaborar el programa de Geometría Analítica de la carrera de Matemáticas Aplicadas y Computación, pude observar que cuenta con capítulos muy extensos y para poder cubrirlos se requiere que el catedrático que imparte la asignatura, se convierta en un coordinador y no en un expositor, de tal forma que el alumno investigue por su cuenta y ponga en práctica todos los conocimientos que tiene de semestres y/o cursos anteriores, logrando con ello que los estudiantes dispongan del mismo conjunto de conocimientos al termino del semestre, utilizando este tipo de estrategias que ayuden a aumentar la capacidad de análisis que el alumno debe de tener al plantearse un problema. Asimismo se necesita la utilización de herramientas alternas a la exposición como son los programas de cómputo, para obtener un mayor alcance en el entendimiento y aprendizaje de la asignatura.

Por otra lado y debido a la importancia que presenta la geometría en el cálculo, se requiere que el alumno domine conceptos y ecuaciones para poderlo aplicar sin dificultad en algunos temas de Cálculo Diferencial e Integral que sè le presentarán en semestres posteriores.

Esta tesina abordó ejercicios desarrollados en forma detallada, para que alumnos que no entienden como se obtienen algunos resultados, logre asimilar estos tips y con ello poder aplicarlo a los ejercicios que se les presenten, utilizando el software propuesto y así puedan vislumbrar la gráfica y los datos importantes de cualquier ecuación.

Como profesor de Geometría Analítica, utilizo herramientas como éstas para que el alumno se interese y entienda la materia de forma diferente, para con esto hacerla menos tediosa. Debido a que en la actualidad la PC capta más la atención de los estudiantes, sugiero el aprovechar este instrumento como un medio de ayuda. Existen software que presentan sólo resultados, por lo que el alumno no puede verificar el ejercicio desarrollado por él con la respuesta correcta, por lo tanto el software elaborado en ésta tesina intenta obtener de forma rápida dichos resultados, gráficas y puntos más relevantes del tema que se consulta para que el alumno los compare con sus propias respuestas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anfossi, Meyer, Geometría Analítica, Editorial Progreso. P.34

Bachillerato propedéutico estatal programa Geometría Analítica 4to semestre 1996

Concus P, R, Finn Springer_Verlag, Geometric Analysis and Computers Graphics P. New York.1998.

Enciclopedia Microsoft® Encarta® Geometría 99 ©1993 -1998

Enciclopedia Microsoft® Encarta® Geometría Analítica 99 ©1993-1998

Enciclopedia Microsoft ® Encarta® Demostración Matemática 99 ©1993-1998

Fuenlabrada de la Vega Trucíos Samuel, Geometría Analítica, Editorial Mc Graw Hill, México 2000

Fuller Gordon: Geometría Analítica, Editorial C.E.C.S.A , México 1990.

Granville William Anthony. Calculo Diferencial e Integral, Editorial Limusa, Mexico1987.

Kindle H. Joseph, Geometría Analítica, Editorial Mc Graw Hill, México 1970

Lehman H.Charles H., Geometría Analítica, Editorial Limusa, México 1994

Leithold Louis, El Calculo Con Geometría Analítica, Editorial Harla, México 1973.

Leithold Louis, Matemáticas Previas al Cálculo, Editorial Oxford University Press, México 1998.

Montes de Oca Francisco: Álgebra Lineal : Upiicsa

Nueva enciclopedia temática planeta Matemáticas 1993

Riddle F. Douglas, Geometría Analítica, Editorial Thomson, México 1997.

Sullivan Michael: Precalculo: Prentice Hall

Swokowski W. Earl, Calculo Con Geometría Analítica, Editorial Grupo editorial Iberoamericana, México 1982.

Torres Alcaraz Carlos, Geometría Analítica, Segunda Edición 1998 Editorial Santillana Bachillerato

Universal Enciclopedia Multimedia® Micronet, S.A. Geometría Analítica1995-1997