

011908



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**“Sobre las Regiones Geométricas Articulares y su Aplicación en el Mejoramiento del Desempeño de un Manipulador Mediante Estrategias Evolutivas”**

**Tesis que para obtener el grado de Doctor en Ingeniería  
presenta**

**Ignacio Juárez Campos**

**Director de Tesis:**

**Dr. Marcelo López Parra**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**Agosto 2002**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

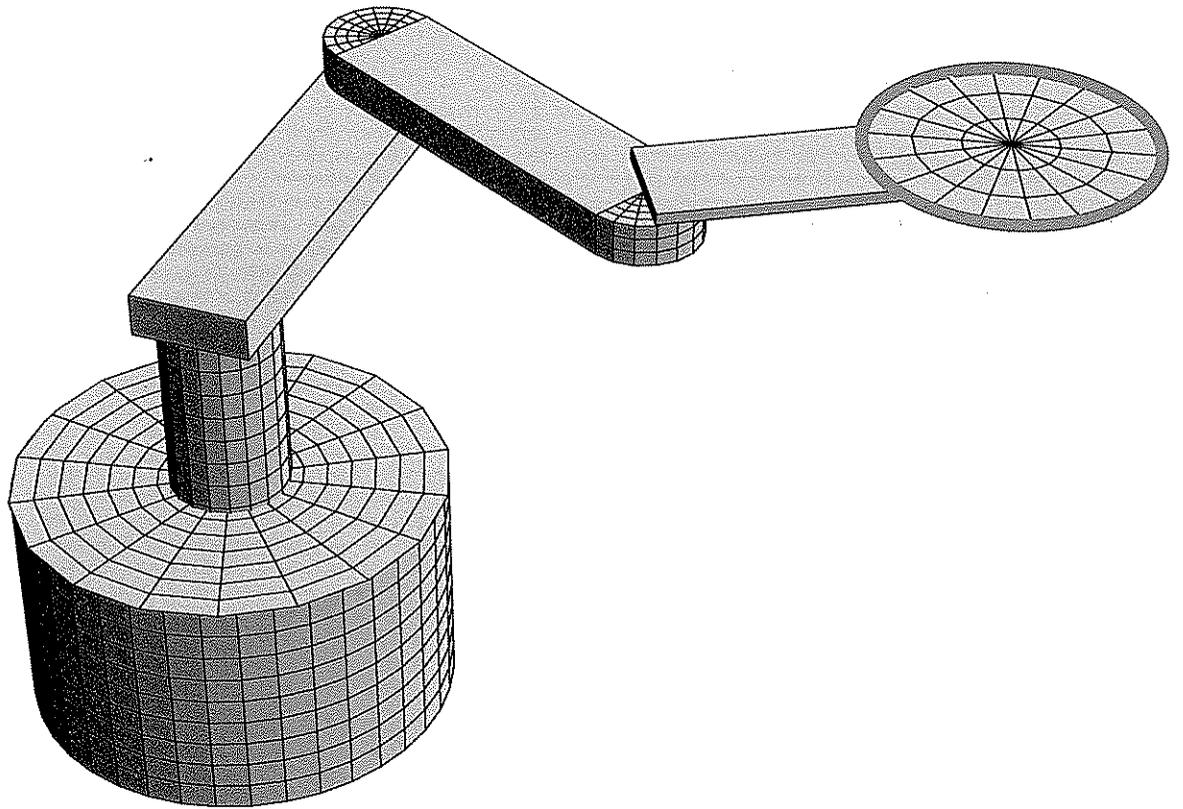


**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



# TESIS DOCTORAL

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## **AGRADECIMIENTOS**

**Al Dr. Marcelo López Parra.**

Por la dedicada dirección y valiosas sugerencias  
en el desarrollo y conclusión de este trabajo.

GRACIAS

**Al Dr. Saúl Daniel Santillán Gutiérrez.**

Por su apoyo y recomendaciones sobre la investigación,  
en especial, por su ayuda en mi iniciación  
en el conocimiento de los Algoritmos Genéticos.

GRACIAS

**Al Dr. Ángel Rojas Salgado.**

Hace 12 años inicié mi camino en la Robótica.  
Usted plantó la primer semilla que hoy comienza a dar frutos.

GRACIAS.

**A la UNAM.**

Que me permitió fortalecer mi conocimiento  
siendo, al mismo tiempo, profesor y alumno.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

*A Manuelito, Marthita y Maqui*

*A Margarita y a su mamá, la Sra. Esmeralda*

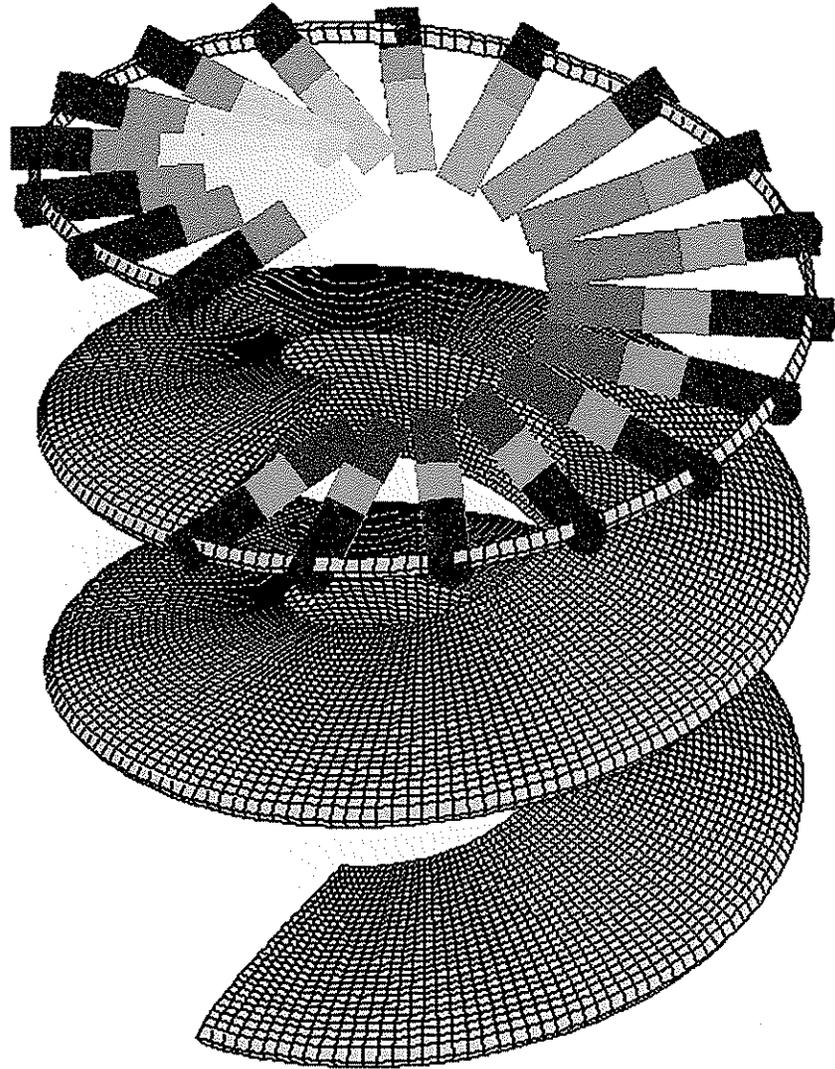
*A Rita, Bety y los chiquitos*

Los amo

---

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# VOLUMEN I



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

*“La Genética es el Medio por el Cual la Vida Encuentra su Camino”*

**CONTENIDO****VOLUMEN 1****Resumen**


---

<b>Objetivos</b>	<b>vii</b>
<b>Definición del problema</b>	<b>viii</b>
<b>Establecimiento de Hipótesis</b>	<b>xiii</b>

---

<b>Nomenclatura</b>	<b>xiv</b>
---------------------	------------

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1.1. Organización de la tesis</b>	<b>3</b>
<b>1.2. Revisión Bibliográfica y Estado del Arte</b>	<b>8</b>
<b>1.3. Justificación</b>	<b>16</b>

**PARTE I.****Sobre el Sistema Mecánico**

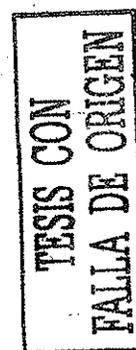
<b>2. Descripción del Manipulador</b>	<b>31</b>
<b>2.1. Introducción</b>	<b>31</b>
<b>2.2. Definición de las Bases Referenciales de los Eslabones</b>	<b>31</b>
<b>2.3. Variables Articulares</b>	<b>33</b>
<b>2.4. Multiplicidades de Soluciones</b>	<b>33</b>
<b>2.5. Descripción de los Eslabones Móviles</b>	<b>34</b>

---

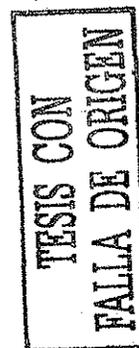
Sobre las Regiones Geométricas Articulares y su  
 Aplicación en el Mejoramiento del Desempeño de  
 un Manipulador Mediante Estrategias Evolutiva

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

2.6.	Centros Geométricos de Gravedad de los Eslabones Móviles	38
2.7.	Distribución de Masas de los Eslabones Móviles	38
2.8.	Cinemática Diferencial del Manipulador Genérico	39
2.9.	Clasificación de Manipuladores	41
2.10.	Restricciones Mecánicas del Manipulador Genérico	43
2.11.	Disposición de los Actuadores	44
2.12.	Cinética del Manipulador	44
<b>3.</b>	<b>Región Geométrica Articular TORNILLO J</b>	<b>45</b>
3.1.	Introducción	45
3.2.	Marco Teórico del Tornillo J	45
3.2.1.	Parámetros del Tornillo J	53
3.2.2.	Relaciones Importantes	67
3.2.3.	Paso del Tornillo J	73
3.2.4.	Cinemática Diferencial del Tornillo J	79
<b>4.</b>	<b>Región Geométrica Articular TUERCA J</b>	<b>80</b>
4.1.	Introducción	80
4.2.	Marco Teórico de la Tuerca J	80
4.2.1	Clasificación de los Dientes de las Tuercas J	84
4.2.2	Manipuladores Semejantes Antisimétricos	88
4.2.3	Representación Geométrica de la Tuerca J	94
4.2.4	Cinemática Diferencial de la Tuerca J	99
<b>5.</b>	<b>Familias de Tornillos y Tuercas J</b>	<b>100</b>
5.1.	Introducción	100
5.2.	Definición y Propiedades de Grandes Familias	100
5.2.1	Familia Universal de los Tornillos J	102



5.2.2	Familia Universal de las Tuercas J	103
5.2.3	Familias de Tornillos y Tuercas Tipos 1, 2 y 3	105
5.2.4	Propiedades de las FTJi, FNuJi; $i=1, 2, 3$	106
5.2.5	La Familia de Tornillos Semejantes	108
5.2.6	La Familia de Tuercas Semejantes	112
5.3.	Familias Potencialmente Investigables	117
5.3.1.	Introducción	117
5.3.2.	Selección de la Familia Potencialmente Investigable	117
6.	Eficiencia de los Tornillos y las Tuercas J	120
6.1.	Introducción	120
6.2.	Jacobiano del Diente del Tornillo J	120
6.3.	Eficiencia del Tornillo J	122
6.4.	Jacobiano del Diente de la Tuerca J	126
6.5.	Eficiencia de la Tuerca J	127
6.6.	Superficie del Jacobiano	131
6.6.1.	Introducción	131
6.6.2.	El Jacobiano y las Regiones Geométricas Articulares	131
6.6.3.	Singularidades	132
7.	Agentes de Exploración de Familias Potenciales	142
7.1.	Introducción	142
7.2.	La relación de Eslabonamiento $re_{23}$	142
7.2.1.	Definición y Propiedades	142
7.2.2.	Resumen de Propiedades	155
7.3.	Primer Criterio de Semejanza: m	156
7.4.	Segundo Criterio de Semejanza: n	156
7.5.	Formación del Agente de Exploración	157



7.5.1. Representación Genotípica Primitiva del Agente	157
7.5.2. Transformación de Genotipo a Fenotipo	158
7.5.3. Representación Genotípica Final del Agente	159

## PARTE II

### Sobre la Trayectoria y el Tiempo de Proceso más Corto

8. Perfil de Trayectoria Octal	160
8.1. Establecimiento del Perfil Octal	160
8.2. Familia Universal de Polinomios de Grado 8	164
8.2.1. Representación Primitiva del Perfil como Genotipo	164
8.2.2. Transformación de Genotipo a Fenotipo	165
8.2.3. Representación Completa de índice <sub>m</sub> como Genotipo	166
8.3. Familia de Genotipos Representativos	166
8.4. Determinación de los Límites de índice <sub>m</sub>	167
8.4.1. Familias Dentro de los Límites de índice <sub>m</sub>	167
8.4.2. Familias a la Izquierda del Límite Inferior de índice <sub>m</sub>	171
8.4.3. Familias a la Derecha del Límite Superior de índice <sub>m</sub>	175
8.4.4. Los tres grandes Grupos de Familias	180
9. Tiempo de Proceso Mínimo	181
9.1. Introducción	181
9.2. Funciones de Aptitud y Objetivo	181
9.3. Material Ilustrativo	183
9.4. Formación de Genotipos	186
9.4.1. Forma Primitiva del Genotipo	187
9.4.2. Forma Final del Genotipo	187
9.5. Formación de Fenotipos	187

9.6.	Generalización a otras Articulaciones	188
------	---------------------------------------	-----

### PARTE III

#### Sobre la Experimentación y la Conclusión

10.	Experimentación	189
10.1	Introducción	189
10.1.1.	Método de los Algoritmos Genéticos	189
10.1.2.	Método Alternativo	191
10.1.3.	Descripción del Experimento	192
10.1.4.	¿Cómo trabaja el Algoritmo Genético?	193
10.2	Experimento Principal	196
10.3	Discusión de los Resultados	217
11.	Conclusiones y Aportaciones	220
11.1.	Conclusiones	220
11.2	Resumen de Aportaciones	223
11.3	Trabajo Futuro	223
	Referencias	227

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**VOLUMEN II****ANEXOS**

<b>A. PROYECTO: “Buscador Evolutivo de la Mejor Productividad”</b>	<b>233</b>
<b>A.1. Introducción</b>	<b>233</b>
<b>A.2. Descripción del proyecto</b>	<b>233</b>
<b>A.3. Módulo POBLACIÓN INICIAL</b>	<b>236</b>
<b>A.4. Módulo TRADUCTOR</b>	<b>239</b>
<b>A.5. Módulo EVALUADOR</b>	<b>242</b>
<b>A.5.1. Módulo PERFILES_TRAYECTORIA</b>	<b>246</b>
<b>A.5.2. Módulo GEOMÉTRICAS_TRAYECTORIA</b>	<b>258</b>
<b>A.5.3. Módulo MODELOS_4DOF</b>	<b>274</b>
<b>A.5.4. Módulo INERCIAS_MASAS</b>	<b>281</b>
<b>A.5.5. Módulo VECTORES_CG_BASES_REF</b>	<b>286</b>
<b>A.5.6. Módulo DINÁMICA_4DOF</b>	<b>288</b>
<b>A.5.7. Módulo EVAL_FUN_APT</b>	<b>293</b>
<b>A.6. Módulo REPRODUCTOR</b>	<b>294</b>
<b>A.7. Módulo CRUZADOR</b>	<b>297</b>
<b>A.8. Módulo MUTADOR</b>	<b>306</b>
<b>B. PERFIL DE TRAYECTORIA MEDIANTE POLINOMIO DE GRADO 8: Colección de Familias</b>	<b>315</b>
<b>C. Teoremas Referentes a las Longitudes de los Dientes del Tornillo J y la Tuerca J</b>	<b>328</b>
<b>C. 1. Introducción</b>	<b>328</b>
<b>C. 2. Lemas 3.1 al 3.9</b>	<b>329</b>
<b>C.3. Teoremas 3.1 al 3.4</b>	<b>343</b>

## RESUMEN

El tiempo óptimo de la trayectoria, que depende del mejoramiento del desempeño de un manipulador, es importante debido a que juega un papel crucial en la productividad. En este trabajo, a diferencia de otros, ese tiempo óptimo se logra mejorando, simultáneamente, las dimensiones de los eslabones y el plan de movimiento mediante un polinomio de grado 8.

Para la optimización del eslabonamiento, se establece un modelo matemático distinto a los tradicionales porque ofrece nuevos parámetros que permiten medir la aptitud del manipulador de un robot dedicado a transportar discos de silicio en un proceso de ambiente limpio. Ese modelo matemático permite una clasificación de los manipuladores basada en las características entregadas por sus resultados.

Como perfil de trayectoria se escoge un polinomio de grado 8, poco apreciado por sus desventajas por ser un polinomio de grado alto y desplazado en estudio por otros perfiles más populares, pero menos suaves en sus transiciones de aceleraciones. Sin embargo, es una alternativa posible propuesta por este trabajo debido a su suavidad de movimiento que es importante para minimizar el desgaste de los elementos mecánicos de un manipulador empleado en cuartos limpios como el que aquí se trata.

El índice de control del polinomio es un escalar que deforma la curva y proporciona diferentes resultados dinámicos; el objetivo es encontrar el número que proporciona velocidad adicional al mejoramiento simultáneo del manipulador.

En este proceso de maximización, sólo se tiene una restricción que indica hasta donde se puede mejorar; esta limitación es el par que los motores que animan sus articulaciones son capaces de ofrecer.

El trabajo consiste en encontrar, con ayuda del modelado matemático denominado *Regiones Geométricas Articulares*, funciones de optimización que ayuden a determinar el mejor manipulador con base en la suavidad de su movimiento.

Por razones de robustez y número de variables manejadas en el pretendido proceso de mejoramiento, como herramienta de maximización se emplea un método basado en un algoritmo genético canónico

Como resultado de este trabajo, se encontró el tiempo de proceso más corto en el cual ni se desaprovechan ni se sobrecargan los actuadores del manipulador; además, se presenta el número de ciclos de trabajo máximos que el manipulador PRRRd puede realizar.

Se aportan al conocimiento dos elementos: (1) un modelo matemático nuevo y (2) la productividad máxima del manipulador mediante el mejoramiento combinado de las dimensiones de sus eslabones y de la trayectoria gobernada por un perfil polinomial de grado 8.

## ABSTRACT

The time optimal trajectory planning is very important in enhancing the robot performance, because motion time of a robotic manipulator plays a crucial role in the productivity.

In order to find the time optimal trajectory planning dealing with this research, not only the optimal link lengths of the clean-room manipulator but also the number that controls an eighth-degree polynomial trajectory is important to be determined.

On one hand, very little work has been done in regard to the optimum design of serially linked manipulators with respect to dimensional design variables.

On the other hand, high degree polynomial trajectories, such as an eighth-degree polynomial trajectory, may not be satisfactory because of their oscillating nature that tends to produce extraneous motion. But in some conditions, shown in this research, the motion, resulting from well conditioned high degree polynomial functions, is smooth enough and smoothness is very important in a clean room process where particulate contamination must be minimized.

The optimization is carried out via a canonical genetic algorithm which its penalty function formulation takes in account the torque constraint.

One of the main contributions resulting from this research deals with the mathematical approach called "Regiones Geométricas Articulares" that offers maximization functions.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# OBJETIVOS

## OBJETIVO PRINCIPAL

Maximizar la productividad del transporte de discos de silicio mediante un manipulador PRRRd con aplicación en un proceso de cuarto limpio.

## OBJETIVOS SECUNDARIOS

Para alcanzar el objetivo principal, es necesario lograr el siguiente objetivo:

1. **Mejorar el desempeño de un manipulador PRRRd, entendido éste como (1) la obtención de la mejor configuración mecánica (longitudes de los eslabones móviles) del sistema, además de (2) la mejor manera en que se moverá en su espacio de trabajo empleando un perfil de trayectoria gobernado por un polinomio de grado 8 cuya suavidad ayuda a evitar el desgaste de los elementos mecánicos del manipulador y consecuente contaminación.**

Además, se pretende:

2. **Desarrollar un *MODELO MATEMÁTICO INVERSO DE UN MANIPULADOR PRRRd* que proporcione nuevos criterios de optimización y patrones de clasificación de los manipuladores a partir de su respuesta dinámica. Este modelo debe contener una estructura matemática bastante sólida y bien formalizada, mediante definiciones, postulados, lemas y teoremas, con sus respectivas pruebas.**
3. **Proporcionar a la ciencia de la robótica nuevas estrategias de soluciones a los problemas de optimización de la productividad.**

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

En el Centro de Diseño y Manufactura (CDM) de la Universidad Nacional Autónoma de México se pretende mejorar las propiedades mecánicas de un manipulador empleado para el transporte de discos de silicio en un proceso de cuarto limpio. El objetivo de esta pretensión es maximizar la velocidad del transporte de estos cuerpos con movimientos suaves que no generen desgastes excesivos de sus componentes mecánicos y la consecuente producción de partículas contaminantes, **Craig (1989), Livesley (1991)**.

En este trabajo se define la **PRODUCTIVIDAD** del manipulador como el número de discos transportados por unidad de tiempo y para una tarea muy específica, **Young y Beom (1999)**.

*Maximizar* se entiende como *el intento de obtener el mayor provecho, rendimiento o beneficio de una cosa*, **Larousse (2000)**, en este caso, de un manipulador y de su plan de movimiento, cuyo mejoramiento mutuo ayudará a aumentar la **PRODUCTIVIDAD** al transportar la mayor cantidad de discos de silicio tomando en cuenta ciertas restricciones.

El mejoramiento de las características mecánicas del manipulador tiene que ver con determinar cuáles son las mejores dimensiones de cada uno de los eslabones con desplazamiento rotativo que proporcionen un movimiento que, en lo posible, sea el más rápido.

Además, se busca la mejor trayectoria operacional, de tipo polinomial de grado 8, que contribuya, aún más, a dicha velocidad de movimiento.

Este mejoramiento sólo es comprendido por sus restricciones, cuando, por un lado, el proceso no sobrepasa el valor máximo de los pares de los motores constitutivos y, por el otro, demanda el mayor desempeño de éstos.

En la figura (1) se presenta el manipulador PRRRd durante el proceso de transporte de discos de silicio. Este manipulador tiene 5 eslabones según la regla (ecuación (1)) que establece el número de eslabones (NE) que debe tener una cadena cinemática abierta respecto del número de sus articulaciones (NA). El manipulador tiene 4 ejes de diferente tipo según se puede observar en la tabla (1)

$$NE = NA + 1$$

(1)

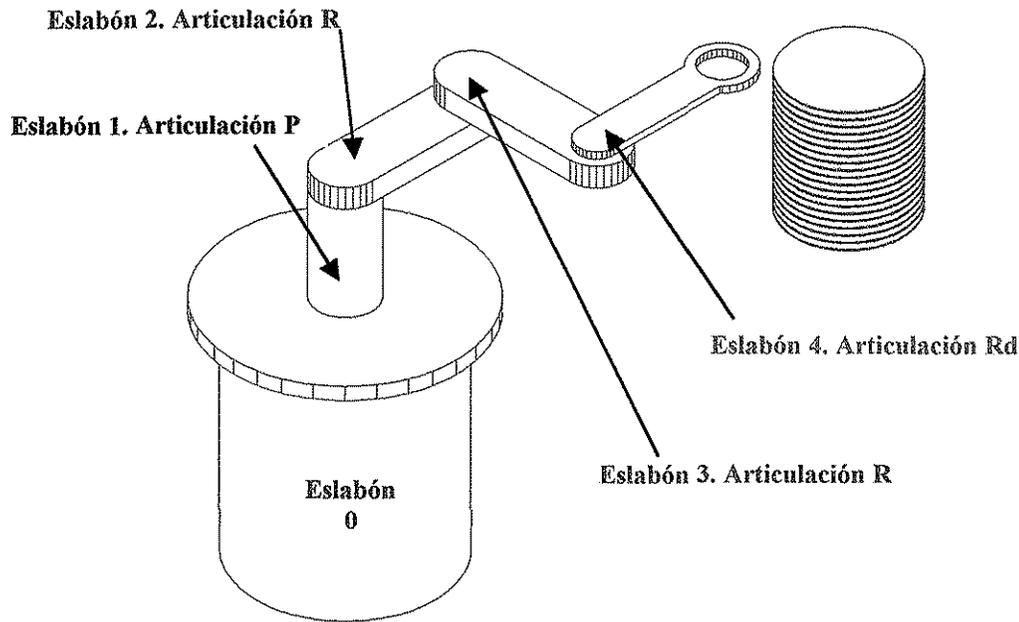


Figura (1). Manipulador PRRRd.

ARTICULACIÓN	TIPO	DESCRIPCIÓN
P	Prismática	Articulación independiente que proporciona el posicionamiento en la tercera coordenada cartesiana. Existe motor
R	Rotativa	Articulación independiente. Existe motor
R	Rotativa	Articulación independiente. Existe motor
Rd	Rotativa	Articulación dependiente de las dos rotativas anteriores. No existe motor. El movimiento se da por transmisión mecánica accionada por las dos articulaciones rotativas anteriores.

Tabla (1). Características de las articulaciones del manipulador.



Para alcanzar el objetivo 1: *“Mejorar el desempeño de un manipulador PRRR, entendido éste como la obtención de la mejor configuración mecánica (longitudes de los eslabones móviles) del sistema, además de la mejor manera en que se moverá en su espacio de trabajo”*, existen dos problemas por resolver:

El problema 1 consiste en determinar las longitudes óptimas de los eslabones 2, 3 y 4, manteniendo siempre el radio máximo del volumen de trabajo, tales que el manipulador proporcione el movimiento más rápido posible y se aprovechen más sus pares motrices sin sobrepasar sus cotas máxima.

El problema 2 consiste en determinar la mejor trayectoria, bajo un conjunto universal de trayectorias polinomiales de grado 8 proporcionado en este trabajo, que permita que el manipulador desarrolle velocidad adicional al movimiento de sus eslabones y de los discos de silicio que transporta, y se aprovechen más sus pares motrices.

Para alcanzar el objetivo 2: *“Desarrollar un MODELO MATEMÁTICO INVERSO DE UN MANIPULADOR PRRRd que proporcione nuevos criterios de optimización y patrones de clasificación de los manipuladores a partir de sus respuestas dinámicas. Este modelo debe contener una estructura matemática bastante sólida y bien formalizada, mediante definiciones, postulados, lemas y teoremas, con sus respectivas pruebas”*, es necesario desarrollar un modelo matemático el cual se desea que tenga las características mostradas en la tabla (2) y en la figura (2), además de las exigidas por los modelos matemáticos “tradicionales”. Estas características surgen de la necesidad de obtener parámetros de medición del desempeño de movimiento de los diferentes manipuladores PRRRd; éstos son diferentes entre sí por las longitudes de sus eslabones y este cambio exige diferentes evoluciones con el tiempo de sus pares motrices, que es la cota restrictiva, por esto, el modelo matemático debe ayudar a clasificar a los manipuladores con el objetivo de encontrar el mejor.

Por otro lado, el problema debe ser parametrizable con el fin de que, con la descripción de estos parámetros en forma de cadena genética, y empleando el método de búsqueda evolutiva de los algoritmos genéticos, se pueda encontrar el manipulador y su perfil de trayectoria más productivos.

Es necesario establecer las ventajas y desventajas de este modelo matemático sobre los tradicionales.

Para alcanzar el objetivo 3: “Proporcionar a la ciencia de la robótica nuevas estrategias de soluciones a los problemas de optimización”, el problema consiste en proporcionar una “receta”, algoritmo, o estrategia que defina claramente los pasos a seguir para resolver un problema de optimización de la productividad de un manipulador, empleando el modelo matemático que se pretende establecer.

CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
Representación Geométrica:	Característica que permite visualizar, al mismo tiempo, los espacios operacional y articular del manipulador; además, muestra las pendientes del movimiento y, como consecuencia, la dificultad o facilidad de desplazamiento a través del volumen de trabajo .
Organizable: Capacidad de ofrecer resultados que presenten patrones de clasificación.	Característica que, con base en la visualización de la representación geométrica, se puedan clasificar diferentes manipuladores
Parametrizable: Operabilidad mediante el uso de ciertos agentes de exploración sobre las clasificaciones de las representaciones geométricas.	Característica que proporcione facilidad en el empleo de agentes de exploración con capacidad de <b>EVOLUCIÓN</b> que permitan, mediante una codificación genotípica (cadena de genes) adecuada, propagarse a través de los espacios de búsqueda potenciales.

**Tabla (2).** Características del pretendido Modelo Matemático que surgen de (1) la necesidad de obtener parámetros de la medición del desempeño de los manipuladores, (2) la posibilidad de organización de los resultados en base a ciertos patrones de clasificación y (3) el requerimiento de parámetros cuyas variaciones ayudarán a explorar todo el espacio de búsqueda de la solución.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

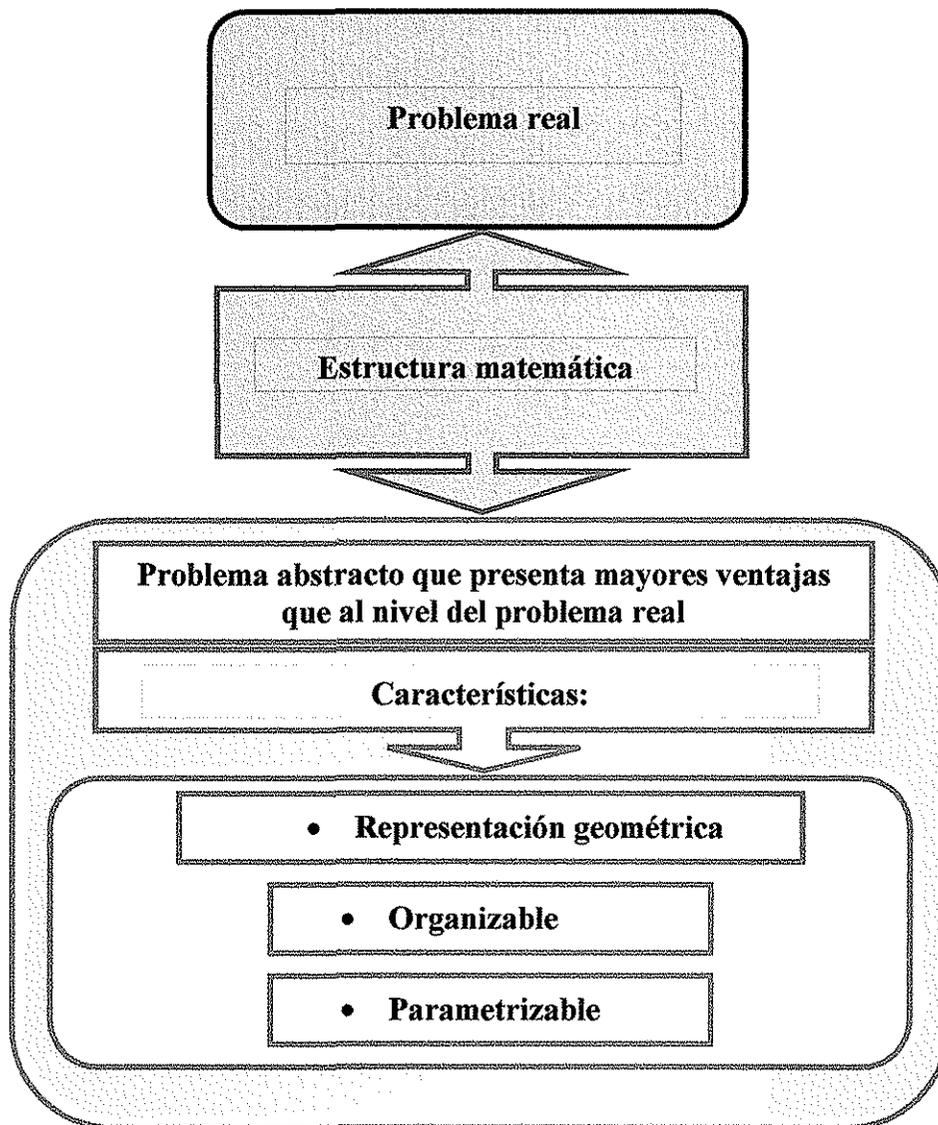


Figura (2). Estructuración y características del pretendido modelo matemático.

Como método de búsqueda se selecciona el proceso de algoritmos genéticos que es robusto, **Beasley (1993)**, **KrishnaKumar (1993)**, y sencillo de aplicar a problemas que presentan muchos máximos locales en un espacio de búsqueda no lineal y accidentado por discontinuidades (caso que concierne a este trabajo), en donde los métodos de optimización basados en cálculo son incapaces de trabajar, **Michalewicz (1996)**, **Goldberg (1989)**, **KrishnaKumar (1993)**.

## ESTABLECIMIENTO DE HIPÓTESIS

1. Existe un modelo matemático diferente a los “tradicionales” que proporciona información referente al mejoramiento del desempeño del manipulador PRRRd aquí tratado.
2. Debe existir un manipulador PRRRd que proporciona, mediante la elección correcta de la longitud de sus eslabones, el movimiento más rápido aprovechando al máximo los pares de torsión de los motores de las tres articulaciones independientes.
3. De todas las posibles familias de trayectorias operacionales polinomiales de grado 8, existe una que proporciona la mayor velocidad del movimiento de la estructura mecánica y del disco de silicio transportado; todo esto, simplemente por la definición correcta de un parámetro o índice de control de dichas trayectorias.
4. El mejoramiento combinado del manipulador y la trayectoria proporciona la máxima velocidad de transporte de piezas.

Estas hipótesis pueden ser probadas simplemente contestando las 3 siguientes preguntas:

- ¿Qué ley matemática diferente a las existentes proporciona criterios de optimización del manipulador?
- ¿Cuáles son las longitudes de los eslabones constitutivos de un manipulador PRRRd, tal que proporcionen mayor velocidad de movimiento?
- ¿Cuál es el índice de control de trayectoria octal más adecuado que proporciona el movimiento más rápido posible del manipulador?

Este trabajo concentra todo su esfuerzo para responder estas preguntas que, cuyas respuestas, validan las hipótesis.

# NOMENCLATURA

## DEFINICIONES

<b>PRRRd</b>	Arquitectura del manipulador: <b>P</b> risámico independiente- <b>R</b> otacional independiente- <b>R</b> otacional independiente- <b>R</b> otacional <b>d</b> ependiente.
<b>TTJ</b>	Transformación Tornillo <b>J</b> .
<b>Ind(*)</b>	Individuo número *.

## DESCRIPCIONES ESPACIALES

${}^j\{i\}$	Descripción de la terna ortonormal derecha $i$ respecto de la terna ortonormal $j$ . Establece las cualidades de traslación y rotación de $i$ observado desde $j$ .
-------------	---

## SÍMBOLOS

$\otimes$	Producto vectorial.
-----------	---------------------

## ESCALARES

$l_1, l_2, l_3$	Longitudes de los eslabones 2, 3 y 4 cuyas articulaciones son rotacionales.
$\Delta_{Ei-1}$	Longitud adicional del eslabón $i$ ( $i=2, 3, 4$ ) a la izquierda y derecha de las articulaciones.
$re_{23}$	Relación de eslabonamiento entre los eslabones 2 y 3 $re_{23}=l_1/l_2$ .
$re_{23}^+$	Relación de eslabonamiento para manipuladores tipo 2.
$re_{23}^-$	Relación de eslabonamiento para manipuladores tipo 3.
$re_{34}$	Relación de eslabonamiento entre los eslabones 3 y 4 $re_{34}=l_2/l_3$ .

$d_1$	Primera variable articular, cuyo desplazamiento es lineal, correspondiente a la primera articulación, que es prismática.
$\theta_i$	Variabes articulares, cuyos desplazamientos son angulares, correspondientes a las tres últimas articulaciones, que son rotacionales.
$\alpha$	Coordenada operacional; define la orientación del órgano terminal este valor depende de la posición del órgano terminal, por esta razón, la última articulación es dependiente de las dos anteriores.
$e_i$	Espesor del eslabón $i+1$ cuya primera articulación es rotacional. Esta se define en la dirección $z$ de la terna ortonormal $i+1$ .
$a_i$	Ancho de los eslabones $i+1$ ; medida en la dirección $y_i$ .
$\Delta z$	Separación de los eslabones rotativos en la dirección $z$ de sus bases ortonormales.
$U$	Multiplicidad de soluciones del espacio articular; en este caso es 2.
$r_{e0}^+$	Radio del conjunto ${}^+G_{E0}^{RG}$ .
$r_{e0}^-$	Radio del conjunto ${}^-G_{E0}^{RG}$ .
$h_{e0}^+$	Altura del conjunto ${}^+G_{E0}^{RG}$ .
$h_{e0}^-$	Altura del conjunto ${}^-G_{E0}^{RG}$ .
$h_{est1}$	Altura del eslabón 1.
$r_{est1}$	Radio del eslabón 1.
$\rho_{Ei}$	Densidad del eslabón $i = 1, 2, 3, 4$ .
$\gamma \in [0, \pi]$	Ángulo más chico entre los eslabones 2 y 3.
$i\beta$	Ángulo que, junto con $\alpha$ , forma la segunda variable articular, $\theta_2$ para la solución $i = 1, 2$ .

$r$	Segunda coordenada cilíndrica de la posición del órgano terminal.
$rvt$	Radio del volumen de trabajo.
$LdTJ$	Longitud del diente del Tornillo J.
$m$	Primer criterio de semejanza; es igual a la tercer longitud $l_3$ .
$n$	Segundo criterio de semejanza; es igual al volumen de trabajo del manipulador.
${}^{ogj}i_{xxj}, {}^{ogj}i_{yyj}, {}^{ogj}i_{zzj}$	Momentos de inercia de los eslabones $j = 1, 2, 3, 4$ .
$\Delta J(\Theta)$	Determinante del Jacobiano del manipulador.
$indice\_m$	Escalar que controla la curva del perfil de trayectoria gobernada por un polinomio de grado 8.
$w$	Medida de Manipulabilidad del manipulador.
$J_{DTJ} (*)$	Jacobiano del Diente del Tornillo J.
$J_{DNuJ} (*)$	Jacobiano del Diente de la Tuerca J.
$\Delta J_{DTJ} (*)$	Determinante del Jacobiano del Diente del Tornillo J.
$\Delta J_{DNuJ} (*)$	Determinante del Jacobiano del Diente de la Tuerca J.
$adj J_{DTJ} (*)$	Adjunta del Jacobiano del Diente del Tornillo J.
$adj J_{DNuJ} (*)$	Adjunta del Jacobiano del Diente de la Tuerca J.
$ETJ(r)$	Índice de la Eficiencia del Tornillo J en el punto r.
$ENuJ(r)$	Índice de la Eficiencia de la Tuerca J en el punto r.
$ETJ$	Eficiencia Global del Tornillo J.
$\ * \ $	Magnitud del vector *.
$\langle *, * \rangle$	Producto interno entre los vectores *.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$t_f$	Tiempo al fin de recorrido en el perfil de trayectoria
$t_{\text{proceso}}$	Tiempo de proceso.
NE	Número de eslabones.
NA	Número de articulaciones.
$D_{\text{eb}}$	Longitud del dominio del espacio de búsqueda eb.
$ndiv_{\text{min}}$	Número de divisiones mínimo del espacio de búsqueda.
pd	Precisión decimal.
$p(t)$	Perfil de trayectoria.
$d_{\text{total}}$	Distancia total de recorrido.
$P^5(d_{\text{total}}, t_{\text{proceso}})$	Polinomio de quinto grado.
$t^*$	Tiempo en el que ocurre el par motriz máximo.
$f_i(t^*)$	Par motriz máximo ocurrente en el tiempo $t^*$ .
$\tau$	Par motriz.
$g_i(*, *), g_i^{-1}(*, *)$	Funciones de aptitud.
$gen(*, \blacklozenge, \blackspade)$	Dígito 0 ó 1 del individuo *, segmento $\blacklozenge$ y localidad $\blackspade$ dentro del segmento.

## MATRICES

$I_{3 \times 3}$	Matriz identidad 3x3.
$R_B^A$	Descripción de orientación de {B} respecto de {A} obtenida por un operador de rotación actuando sobre los tres elementos de B.
${}^{og} I_j$	Matriz de inercia de los eslabones $j = 1, 2, 3, 4$ .
$X \in \mathfrak{R}^4$	Espacio Operacional.

$\Theta \in \mathcal{R}^4$	Espacio Articular.
$J(\Theta)$	Jacobiano del manipulador.
$AdjJ(\Theta)$	Matriz Adjunta del Jacobiano del manipulador.
${}^0\bar{g}_{E0}^+$	Vector medido en $\{0\}$ que genera el espacio ${}^+G_{E0}^{RG}$ del eslabón 0.
${}^0\bar{g}_{E0}^-$	Vector medido en $\{0\}$ que genera el espacio ${}^-G_{E0}^{RG}$ del eslabón 0.
${}^1\bar{g}_{E1}$	Vector medido en $\{1\}$ que genera el espacio $G_{E1}^{RG}$ del eslabón 1.
${}^0\bar{r}_{E0}^+$	Vector componente de ${}^0\bar{g}_{E0}^+$
${}^0\bar{h}_{E0}^+$	Vector componente de ${}^0\bar{g}_{E0}^+$
${}^0\bar{r}_{E0}^-$	Vector componente de ${}^0\bar{g}_{E0}^-$
${}^0\bar{h}_{E0}^-$	Vector componente de ${}^0\bar{g}_{E0}^-$
${}^1\bar{r}_{E1}$	Vector componente de ${}^1\bar{g}_{E1}$
${}^1\bar{h}_{E1}$	Vector componente de ${}^1\bar{g}_{E1}$
${}^0OT$	Coordenadas del órgano terminal respecto de $\{0\}$ .
${}^i p_{\beta}$	Vector que define cada punto del casco $i$ del diente del tornillo $J$ .
${}^i p_{\theta 3}$	Vector que define cada punto del casco $i$ del diente de la tuerca $J$ .
$S(*, +)$	Matriz antisimétrica de velocidad alrededor del eje $*$ con magnitud $+$ .
$A(*, +)$	Matriz antisimétrica de aceleración alrededor del eje $*$ con magnitud $+$ .

$(* \otimes)$	Matriz antisimétrica que contiene, como argumentos, los elementos de *.
${}^i\text{org}_j$	Vector que define el origen de {i} respecto {j}.
$\angle^*-\bullet$	Ángulo entre el vector * y el vector •.
$\text{Proy.}(*)$	Vector resultante de la proyección del vector * en el plano •.

## **CONJUNTOS**

$\{x_i, y_i, z_i\}$	Elementos de la terna ortonormal derecha i.
$\{x_{OT}, y_{OT}, z_{OT}\}$	Elementos de la terna ortonormal derecha del órgano terminal.
${}^+G_{E0}^{RG}, {}^-G_{E0}^{RG}$	Conjuntos que definen el eslabón 0
$G_{E0}^{RG}$	Eslabón 0 ó fijo que es el complemento de ${}^-G_{E0}^{RG}$ respecto de ${}^+G_{E0}^{RG}$ .
$G_{E1}^{RG}$	Conjunto que define el eslabón 1.
$G_{Ei}^{RG}$	Eslabones $i = 2, 3, 4$ .
$\{\text{cgj}\}$	Terna ortonormal en el centro de gravedad del eslabón $j = 1, 2, 3, 4$ .
$MAN_U$	Conjunto universal de manipuladores.
$MAN(l_1, l_2, l_3)$	Manipulador que depende de las longitudes de sus tres últimos eslabones rotativos.
$MAN_{Caso i}$	Subconjuntos de $MAN_U$ para los casos $i = 1, \dots, 7$ ; ecuaciones E(2.34) a E(2.40).
${}^r_1P_\beta^{RG}, {}^r_2P_\beta^{RG}$	Cascos del diente del Tornillo J.

$r'_1 P_{\theta 3}^{RG}, r'_2 P_{\theta 3}^{RG}$	Cascos del diente de la Tuerca J.
$r'_{U\beta}^{RG}$	Diente del Tornillo J.
$\alpha_U P_{\theta 2}^{RG}$	Tornillo J.
$r'_U P_{\theta 3}^{RG}$	Diente de la Tuerca J.
$\alpha_U P_{\theta 3}^{RG}$	Tuerca J.
$PC^{RG}$	Región universal de puntos críticos o singulares.
$PC_{r_{int}}^{RG}, PC_{r_{vt}}^{RG}$	Las dos regiones de puntos críticos que pertenecen a $PC^{RG}$ .
$\Delta J^{RG}$	Espacio de puntos del determinante del jacobiano del manipulador.
<b>FUTJ</b>	Familia Universal de Tornillos J.
<b>FUNuJ</b>	Familia Universal de Tuercas J.
<b>FTJ1</b>	La Familia de Tornillos J tipo 1.
<b>FTJ2</b>	La Familia de Tornillos J tipo 2.
<b>FTJ3</b>	La Familia de Tornillos J tipo 3.
<b>FNuJ1</b>	La Familia de Tuercas J tipo 1.
<b>FNuJ2</b>	La Familia de Tuercas J tipo 2.
<b>FNuJ3</b>	La Familia de Tuercas J tipo 3.
<b>FUTJS</b>   <sub>m,n</sub>	La Familia Universal de los Tornillos J Semejantes bajo los Criterios $m, n$ .
<b>FUNuJS</b>   <sub>m,n</sub>	La Familia Universal de las Tuercas J Semejantes bajo los Criterios $m, n$ .
<b>FUFTJS</b>	Familia Universal de Familias de Tornillos J Semejantes.
<b>FUFNuJS</b>	Familia Universal de Familias de Tuercas J Semejantes.

---

<b>FFTJS<sub>m</sub></b>	Familia de Familias de Tornillos J Parcialmente Semejantes Respecto de $m$ .
<b>FFNuJS<sub>m</sub></b>	Familia de Familias de Tuercas J Parcialmente Semejantes Respecto de $m$ .
<b>FFTJS<sub>n</sub></b>	Familia de Familias de Tornillos J Parcialmente Semejantes Respecto de $n$ .
<b>FFNuJS<sub>n</sub></b>	Familia de Familias de Tuercas J Parcialmente Semejantes Respecto de $n$ .
<b>FUP<sup>8</sup>(<math>d_{total}</math>, <math>t_{proceso}</math>)</b>	Familia universal de polinomios de grado 8.
<b>CUS<sub>m</sub></b>	Conjunto Universal del Criterio de Semejanza $m$ .
<b>CUS<sub>n</sub></b>	Conjunto Universal del Criterio de Semejanza $n$ .
<b>CUS</b>	Conjunto Universal de Criterios de Semejanza.
<b>CPS<sub>m</sub></b>	Conjunto Parcialmente Semejante respecto de $m$ .
<b>CPS<sub>n</sub></b>	Conjunto Parcialmente Semejante respecto de $n$ .
<b>C<sub>B</sub>(A)</b>	Conjunto complemento de B respecto de A.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

Este trabajo está orientado a aumentar la productividad de un manipulador PRRRd dedicado al transporte de discos de silicio dentro de un proceso de ambiente limpio. Se pretende lograr este objetivo mediante la optimización simultánea del diseño del manipulador y de la trayectoria.

Este tipo de optimización ha sido ignorado por trabajos anteriores, en los que se mejora una de las dos partes, pero no ambas.

La hipótesis respecto de este mejoramiento combinado que se pretende radica en que, por un lado, se puede tener el mejor manipulador, pero si su plan de trabajo es pobre, la velocidad de operación no es la óptima. Por el otro, el perfil de trayectoria puede ser el que proporciona más ciclos de trabajo, pero está limitado a las capacidades del manipulador.

Cabe destacar que el perfil de trayectoria usado es un polinomio de grado 8 que proporciona mucha suavidad de movimiento, lo cual se requiere para disminuir el desgaste de los elementos mecánicos del manipulador que trabajará en operaciones de extrema limpieza, además, debido al inconveniente grado alto de este plan de movimiento y su consecuente inestabilidad, a sido muy ignorado y se ha dejado un terreno fértil que esta investigación aprovecha para un estudio original, en el cual se destaca que estos polinomios operan bastante bien en un rango de existencia.

Se emplea un método evolutivo como herramienta de búsqueda, específicamente los algoritmos genéticos, que es un método robusto, sencillo y fácil de emplear para problemas restringidos complejos en donde se tiene que analizar el efecto de muchas variables, (Michalewicz (1996); Goldberg (1989); Beasley (1993); KrishnaKumar (1993)), en este caso, las tres longitudes de los eslabones rotativos, parámetro de control de la trayectoria y tiempos de proceso; todo esto, con la limitación de los pares máximos entregados por los motores.

Aunque los algoritmos genéticos consumen mucho tiempo de proceso para la entrega del resultado, este procedimiento es mucho más rápido comparado con aquel que se mueve a través de todo el espacio de búsqueda de cada variable (método de búsqueda directa), ya que es un proceso generacional dirigido que aprende de los procesos anteriores en cada generación. La dirección del proceso se logra por la adecuada definición de la función objetivo.

Se aprovecha la oportunidad de presentar el modelo denominado “**Regiones Geométricas Articulares**” que entrega resultados interesantes y que ayuda a clasificar los diferentes manipuladores a partir del genérico PRRRd mediante criterios más detallados que los proporcionados por otros modelos convencionales y comunes; además, ofrece criterios de mejoramiento del manipulador.

El desarrollo de esta modelación matemática representa una de las dos aportaciones principales de este trabajo. La otra aportación tiene que ver con la determinación del mejor manipulador y la mejor trayectoria que, cuya combinación, proporciona la máxima velocidad de transferencia de discos de silicio.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 1. 1. ORGANIZACIÓN DE LA TESIS

La tesis está formada por 2 volúmenes.

El **VOLUMEN I**, que representa el cuerpo principal del trabajo, consta de 3 partes:

- **PARTE I.** Trata el sistema mecánico.
- **PARTE II.** Tiene que ver con la trayectoria y el tiempo de proceso más corto.
- **PARTE III.** Se dedica a la experimentación y a la conclusión.

### 1.1.1. PARTE I

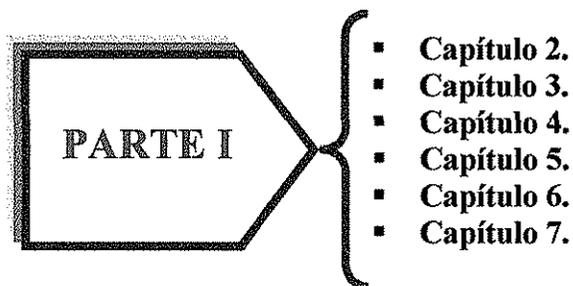
La **PARTE I** está dedica a todos los aspectos referentes al manipulador: como su descripción, modelado matemático, clasificación, definición de eficiencias o parámetros de medición de su desempeño atendiendo las propiedades de los diferentes tipos clasificados, formación de cadenas genéticas (genotipos) y sus respectivas traducciones (fenotipos), de los parámetros de búsqueda de la solución que se propagan en las diferentes familias de manipuladores, etc.

### OBJETIVOS DE LA PARTE I

La **PARTE I** Tiene como objetivo básico proporcionar parámetros de diseño para el mejoramiento del sistema mecánico, atendiendo las dimensiones de los eslabones constitutivos; además, presenta el particular punto de vista de ver al manipulador mediante el modelado denominado “**Regiones Geométricas Articulares**”.

### CAPÍTULOS CONSTITUTIVOS DE LA PARTE I

Esta parte está constituida por los siguientes capítulos:



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El propósito del ordenamiento y organización de estos capítulos obedece la estrategia siguiente:

1. Conocimiento detallado del problema.
2. Clasificación del problema atendiendo sus particularidades.
3. Reducción a simples parámetros manipulables que serán utilizados en el proceso de búsqueda evolutiva de la solución.

El **capítulo 2** describe el manipulador genérico. Establece la geometría de sus eslabones, sus masas y la distribución de éstas. También da cuenta de la descripción espacial de las bases referenciales de sus cuerpos móviles, multiplicidad de soluciones, etc.

Este capítulo ofrece una clasificación en grandes familias de manipuladores atendiendo la relación de las longitudes de sus eslabones. Se presenta la cinemática diferencial y la localización de las regiones singulares.

Los **capítulos 3 y 4** presentan las dos regiones geométricas articulares: el Tornillo J y la Tuerca J. Se ofrecen las definiciones, lemas, teoremas y postulados en los que se fundamenta la construcción de este modelado matemático.

El **capítulo 5** expone los criterios de la clasificación de ambas regiones geométricas articulares en tres grandes tipos.

Como parte fundamental de este trabajo, en particular de la **PARTE I**, se presenta el **capítulo 6** que muestra las eficiencias de los diferentes manipuladores desde el punto de vista de las regiones geométricas articulares. En esta investigación, la eficiencia se define como la capacidad que tiene un manipulador para proveer un movimiento cuya transición de aceleraciones es suave.

Los agentes que se difunden en las familias de las regiones geométricas articulares, se definen en el **capítulo 7**. Éstos tienen el propósito de ser usados como individuos en el proceso de búsqueda evolutiva; es por esta razón que se presentan en la forma genotípica y su respectiva traducción fenotípica.

### 1.1.2. PARTE II

Este trabajo busca el mejoramiento de la productividad del transporte de discos de silicio mediante el diseño óptimo del manipulador y el diseño del mejor perfil de trayectoria

basado en un polinomio de grado 8, aprovechando, al máximo, el par entregado por los motores constitutivos.

La **PARTE II** concierne la trayectoria: su definición y propiedades.

Esta sección está estructurada de la misma manera que la parte I:

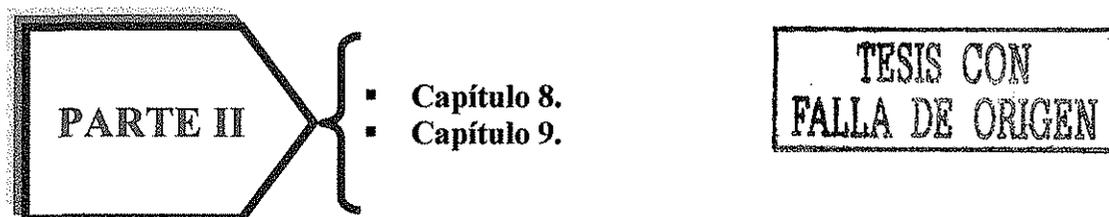
1. Conocimiento preciso del perfil de trayectoria,
2. su clasificación y,
3. la construcción de parámetros que serán manipulados por el algoritmo genético.

### **OBJETIVOS DE LA PARTE II**

Proporcionar información detallada de las características y propiedades de los perfiles de grado 8 que ayudarán a determinar cuáles trayectorias son las adecuadas para aumentar la productividad del manipulador.

### **CAPÍTULOS CONSTITUTIVOS DE LA PARTE II**

Esta parte está constituida por sólo dos capítulos:



El **capítulo 8** ofrece conocimiento detallado de los perfiles de grado 8, como los límites dentro de los cuales se encuentran las trayectorias octales candidatas a mejorar la productividad. Además, se proporciona una clasificación de éstas, así como la formación de fenotipos, a partir de sus genotipos, de los parámetros que modifican a los perfiles.

El **capítulo 9** proporciona las funciones objetivo y aptitud que permiten aumentar la productividad (tiempo de proceso mínimo) del manipulador aprovechando, al máximo, los pares que los motores son capaces de ofrecer.

### 1.1.3. PARTE III

Esta tercera parte aplica el conocimiento presentado y desarrollado en las dos anteriores, mediante un experimento llevado a cabo para un caso de estudio. Esta experimentación aplica los algoritmos genéticos como método de búsqueda principal, sin embargo, se presenta un método alternativo para confirmar los resultados entregados por aquel.

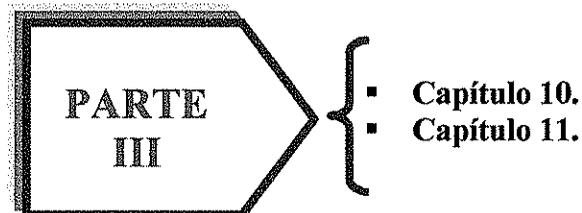
Este experimento intentan determinar cuál es la mejor relación de eslabonamiento que debe tener el manipulador tratado, además de la determinación de la mejor trayectoria para aumentar la productividad al máximo posible.

#### OBJETIVOS DE LA PARTE III

**Objetivo principal:** Determinar el mejor manipulador y la mejor trayectoria que proporcionen la productividad más alta posible.

#### CAPÍTULOS CONSTITUTIVOS DE LA PARTE III

Esta parte está constituida por los dos capítulos siguientes:



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El **capítulo 10**, correspondiente a la experimentación, está formado por 1 experimento. En el experimento principal, se escoge una tarea y se determina la máxima productividad proporcionada por el mejoramiento simultáneo del manipulador y de la trayectoria restringido al máximo par entregado por los motores constitutivos. También se ofrece una discusión de los resultados obtenidos.

El **capítulo 11** representa la conclusión del trabajo. Se resumen las aportaciones y se presentan los puntos importantes del trabajo futuro.

En lo que respecta al **VOLUMEN II**, éste está constituido de 3 anexos:

- El anexo A describe el desarrollo del proyecto denominado “Buscador Evolutivo de la Mejor Productividad” que es un programa de cómputo basado en un algoritmo genético dedicado a la maximización de la productividad del manipulador implicado.
- El anexo B fortalece la información proporcionada en el capítulo 8 al proveer la colección de perfiles de trayectoria gobernados por un polinomio octal que este trabajo utiliza.
- El anexo C se refiere a los lemas y teoremas que, en parte, sustentan el establecimiento del modelado matemático denominado como “Regiones Geométricas Articulares”

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 1. 2. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA Y ESTADO DEL ARTE

La definición del problema presentada anteriormente muestra 3 grandes campos del conocimiento, encaminados a mejorar la productividad del manipulador PRRRd (cuya justificación de su selección y empleo se puede encontrar en Stevens (1987) y Papanek (1987)), sobre los cuales se efectúa la investigación bibliográfica:

- Temas relacionados con el diseño del manipulador.
- Temas relacionados con el mejoramiento de la trayectoria.
- Temas relacionados con búsquedas evolutivas, como algoritmos genéticos, dedicados al mejoramiento de procesos restringidos a una o varias variables.

Por lo que se hizo una búsqueda de información de los trabajos más relacionados. Esa investigación ha detectado trabajos cercanos al tema concerniente y que han sido analizados y comparados con los objetivos que aquí se pretenden alcanzar.

### 1.2.1. TRABAJOS CERCANOS

Dentro de los trabajos más cercanos referentes al tema tratado, se pueden mencionar, de manera cronológica, los siguientes:

1. Sullivan, J.C.W.; Carse, B.; Pipe, A.G. *"A Fuzzy Clustering Evolution Strategy and its Application to Optimisation of Robot Manipulator Movement"*. Evolutionary Design and Manufacture, Selected Papers from ACDM'00. Springer. 2000.
2. Young Dee Lee, Beom Hee Lee. *"An Evolutionary Approach for Time Optimal Trajectory Planning of a Robotic Manipulator"*. Elsevier. Information Sciences 113 (1999) 245-260.
3. Berner, D.F.; J. Snyman, J.A.. *"The Influence of Joint Angle Constraints on the Optimum Design of a Planar Robot Manipulator Following a Complicated Prescribed Path"*. Pergamon. An International Journal on Computers and Mathematics with Applications 37 (1999) 111-124.
4. Saramago, S.F.P.; Steffen, V. *"Optimization of the Trajectory Planning of Robot Manipulators Taking into account the Dynamics of the System"*. Mechanism and Machine Theory. Vol. 33, No. 7, pp. 883-894. 1998.

5. Kim, W. y Rastegar, J. “*On the Optimal Design of Robot Manipulators for High Speed Motions*”. Proceedings of the 5<sup>th</sup> Applied Mechanism and Robotic Conference, Cincinnati, OH, AMR97-020-001 to 007, 1997.
6. Yoshimura, M. y Kanemaru, T. “*Multiobjective Optimization for Integrated Design of Machine Products Based on Working Environment Information*”. Proceedings of the 1995, IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems. University of Stuttgart, Germany, 1995.
7. Chou, H.C. y Sadler, J.P. “*Optimal Location of Robot Trajectories for Minimization of actuator Torque*”. Mechanism and Machine Theory, 28, 145-158, 1993.
8. Ma, O; Ángeles, J. “*Optimum Design of Manipulators under Dynamic Isotropic Conditions*”. IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA, pp 485-492, 1993.
9. Husain, M.; Mallik, A. K.; Ghosh, A. “*Design Improvement of Manipulators by Minimizing Shaking Force/Moment and Driving Forces*”. ASME Mechanisms Conference Tempe, AZ, DE-Volume45, pp. 139-147, 1992.
10. Dwawarakanah, T. A.; Ghosal, A.; Shrinivasa, U. “*Design of Articulated Manipulators Based on Kinematic and Dynamic Criteria*”. ASME Mechanisms Conference Tempe, AZ, DE-Volume 45, pp. 627-635, 1992.
11. Nakamura, Yoshihiko. “*Advanced Robotics. Redundancy and Optimization*”. Addison-Wesley Publishing Company. 1991.

### Discusiones respecto de Sullivan, Carse y Pipe (2000)

En su trabajo, Sullivan, Carse y Pipe (2000), describe un enfoque basado en búsqueda evolutiva dirigido a la optimización del movimiento de una tarea asignada a un manipulador RRR plano. El manipulador tiene que alcanzar una posición cualquiera desde donde se encuentre; el sistema evolutivo tiene que encontrar la región geométrica de la trayectoria más conveniente tal que el movimiento sea el **MÁS SUAVE** posible, esto es, que la curva de la integral de la tercera derivada de las variables articulares no presente grandes cambios en el tiempo. Esta investigación emplea 8 B-Splines de quinto grado como perfil de trayectoria.

Las características importantes de la investigación de **Sullivan, Carse y Pipe (2000)** son:

1. El tiempo de proceso es fijo.
2. La región geométrica de la trayectoria es la incógnita.
3. La suavidad del movimiento es la restricción.
4. El perfil de trayectoria es un Spline.

Las diferencias del trabajo de **Sullivan, Carse y Pipe (2000)** con respecto a la investigación que aquí se pretende son:

	<b>Sullivan, Carse y Pipe (2000)</b>	<b>Investigación concerniente</b>
<b>Objetivo</b>	Encontrar la mejor región geométrica de la trayectoria	Encontrar el tiempo de proceso más corto
<b>Tiempo de proceso</b>	Dato	Incógnita
<b>Región geométrica de trayectoria</b>	Incógnita	Dato
<b>Restricción</b>	Suavidad del movimiento	Par motriz
<b>Perfil de trayectoria</b>	8 segmentos B-Spline de quinto grado	Uno de los polinomio de grado 8 que permita el tiempo de proceso más corto (incógnita)
<b>Manipulador</b>	RRR con dimensiones fijas en sus eslabones	PRRRd cuyas dimensiones de sus eslabones pueden variar (incógnitas).
<b>Métodos de Búsqueda</b>	The Fuzzy Clustering Evolution Estrategy	Algoritmo genético.

Tabla (1.2.1). Diferencias entre la investigación de **Sullivan, Carse y Pipe (2000)** con respecto a la actual.

### Discusiones respecto del trabajo de **Young y Beom (1999)**

La investigación desarrollada en la escuela de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de Seúl, Corea del Sur, por **Young y Beom (1999)**, tiene que ver con mejoramiento del perfil de trayectoria, de tal manera que se aumente la productividad de un manipulador de dos grados de libertad RR plano, cuyas dimensiones de los eslabones son fijas. Las restricciones son la dinámica del manipulador y las limitaciones de los pares entregados por los motores. Existe un planeador de trayectoria que determina aquel perfil que permita el tiempo más corto, además, es importante mencionar que la región geométrica no existe,

sólo se proporcionan los datos de posición inicial y final; así el planeador de trayectoria debe buscar la región por donde debe viajar el órgano terminal. El método de búsqueda es un algoritmo genético cuyos resultados son comparados con los de un enfoque basado en programación no lineal convencional.

Las características importantes de la investigación de **Young y Beom (1999)** son:

1. El tiempo de proceso es incógnita.
2. La región geométrica de la trayectoria es la incógnita.
3. La dinámica del manipulador, como las velocidades y los pares motrices, son las restricciones.
4. El perfil de trayectoria es el objetivo principal de la investigación.

Las diferencias del trabajo de **Young y Beom (1999)** con respecto a la investigación que aquí se pretende son:

	<b>Young y Beom (1999)</b>	<b>Investigación concerniente</b>
<b>Objetivo</b>	Búsqueda de perfil de trayectoria que entrega el tiempo mínimo	Encontrar el tiempo de proceso más corto
<b>Tiempo de proceso</b>	Incógnita	Incógnita
<b>Región geométrica de trayectoria</b>	Incógnita	Dato
<b>Restricción</b>	Pares motrices y velocidades máximas de los actuadores	Pares motrices
<b>Perfil de trayectoria</b>	Determinada por el planeador	Un Polinomio de grado 8 dentro de la gran familia, tal que permita el tiempo de proceso más corto (incógnita)
<b>Manipulador</b>	RR plano con dimensiones fijas en sus eslabones	PRRRd cuyas dimensiones de sus eslabones pueden variar (incógnitas).
<b>Métodos de Búsqueda</b>	Algoritmo genético	Algoritmo genético.

Tabla (1.2.2). Diferencias entre la investigación de **Young y Beom (1999)** con respecto a la actual.

### Discusiones respecto del trabajo de **Berner y Snyman (1999)**

La investigación llevada a cabo por **Berner y Snyman (1999)**, del Grupo de Investigación de Optimización Estructural del Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de

Pretoria, África del Sur, tiene que ver con la aplicación de una metodología de optimización general sobre el diseño de los tres eslabones con movimiento rotativo de un manipulador RRR plano que ejecuta una tarea complicada. El objetivo consiste en encontrar cuál debe ser la posición del eslabón base ( $x$ ,  $y$ ) y cuánto deben medir los tres eslabones móviles, tales que los pares motrices sean los más bajos posibles.

Como características más importantes de este trabajo se pueden mencionar las siguientes:

1. Tiempo de proceso fijo.
2. SPLINE cúbico fijo como perfil de trayectoria.
3. Región geométrica de trayectoria fija.
4. Las longitudes de los eslabones pueden variar.
5. La posición del eslabón base puede cambiar.
6. La restricción es el par motriz; el más bajo par motriz es el requerido.

Comparando la investigación del trabajo doctoral con el de **Berner y Snyman (1999)** se encuentran las siguientes diferencias básicas:

	<b>Berner y Snyman (1999)</b>	<b>Investigación concerniente</b>
<b>Objetivo</b>	Encontrar la mejor posición de la base y las adecuadas longitudes de los eslabones	Encontrar el tiempo de proceso mínimo
<b>Tiempo de proceso</b>	Fijo	Incógnita
<b>Región geométrica de trayectoria</b>	Dato	Dato
<b>Restricción</b>	El par motriz más pequeño posible	Par motriz entregado por los actuadores
<b>Perfil de trayectoria</b>	Spline Cúbico	Un Polinomio de grado 8 dentro de la gran familia, tal que permita el tiempo de proceso más corto (incógnita)
<b>Manipulador</b>	RRR plano con dimensiones en sus eslabones por determinar	PRRRd cuyas dimensiones de sus eslabones pueden variar (incógnitas).
<b>Métodos de Búsqueda</b>	Diferente a un algoritmo genético	Algoritmo genético.

Tabla (1.2.3). Diferencias entre la investigación de **Berner y Snyman (1999)** con respecto al actual.

### **Discusiones respecto del trabajo de Ma y Ángeles (1993)**

Este trabajo describe el diseño óptimo de manipuladores escogiendo los parámetros cinemáticos e inerciales de tal manera que la matriz de distribución de la masa general del manipulador cambie muy poco durante el movimiento; estos manipuladores son llamados isotrópicos. De ninguna manera se intenta obtener el tiempo de proceso mínimo y, mucho menos, el perfil de trayectoria óptimo.

### **Discusiones respecto del trabajo de Husain, Mallik y Ghosh (1992)**

**Husain, Mallik, y Ghosh, (1992)** desarrollaron un procedimiento encaminado al diseño de manipuladores seriales minimizando las fuerzas y momentos de sacudida, así como los pares motrices. La masa total del manipulador se mantiene constante pero se distribuye óptimamente. Al igual que en **Ma y Ángeles (1993)**, tampoco se busca el tiempo mínimo. La selección del perfil de trayectoria no se presenta.

### **Discusiones respecto del trabajo de Dwawarakanah, Ghosal y Shrinivasa (1992)**

**Dwawarakanah, Ghosal y Shrinivasa (1992)** minimizaron los pares motrices con respecto a la longitud de los eslabones, rango de movimiento de las articulaciones y criterios de deflexión de los elementos. Esto resultó en manipuladores de robots más pequeños, ligeros y más rápidos. Ni el mejoramiento del perfil de trayectoria ni el tiempo mínimo de proceso se presentan. Además, no se utiliza ningún proceso de búsqueda evolutivo.

### **Discusiones respecto del trabajo de Chou y Sadler (1993)**

**Chou y Sadler (1993)** desarrollaron una técnica de optimización formal para determinar la localización del manipulador de robot plano para una tarea con trayectoria geométrica fija tal que se minimizaran los pares motrices requeridos. Ni el perfil de trayectoria ni las dimensiones de los eslabones se tratan en este estudio.

### **Discusiones respecto del trabajo de Yoshimura y Kanemaru (1995)**

Este estudio minimiza la energía total de un manipulador en función de las longitudes de los eslabones mediante un enfoque de optimización multiobjetivo. Sin embargo, la aplicación está restringida a un manipulador plano RR. No se busca la productividad del manipulador.

### Discusiones respecto del trabajo de Kim y Rastegar (1997)

**Kim y Rastegar (1997)** consideran el problema del diseño óptimo de manipuladores de robots basado en la excitación vibratoria mínima mientras se ejecutan tareas generales. Su aplicación, sin embargo, se restringe a un simple manipulador plano de dos articulaciones rotativas. La elección del perfil de trayectoria no es trascendental ni, mucho menos, el tiempo de proceso mínimo.

### Discusiones respecto del trabajo de Nakamura (1991)

En su libro, **Nakamura (1991)**, presenta el diseño óptimo de las longitudes de los eslabones de un manipulador de 2 grados de libertad, con articulaciones rotativas, desde el punto de vista del *Índice de Manipulabilidad* (MOM: Measurement of Manipulability), desarrollado por **Yoshikawa (1985)**, que simplemente es el valor absoluto del determinante del jacobiano del manipulador; la idea tiene sentido si se toma en cuenta que para valores grandes del determinante del jacobiano, el inverso de éste es más pequeño, así la transformación del espacio operacional y su efecto sobre el articular no se amplifica de manera desmedida. Sin embargo, y a diferencia de esta investigación doctoral, en donde se analiza un manipulador de 3 grados de libertad, **Nakamura (1991)** sólo analiza uno de 2 articulaciones plano. No presenta mejoramiento de trayectoria ni el empleo de su estudio en la búsqueda del tiempo de proceso mínimo.

### 1.2.2. DIFERENCIAS CON LOS TRABAJOS MÁS CERCANOS

En todos estos trabajos cercanos se ha notado lo siguiente:

Diferencias de estos trabajos respecto de la investigación presente	
1	La ausencia del perfil de trayectoria basado en un polinomio de grado 8
2	En ninguno de ellos se menciona el mejoramiento de la productividad de los manipuladores. (La productividad se entiende como la velocidad de transporte que ofrece la cadena cinemática).
3	En la mayoría se analizan sólo manipuladores de 2 grados de libertad.
4	En ninguno de ellos se trata el <u>mejoramiento simultáneo del manipulador y de la trayectoria</u> . Se estudia el mejoramiento del manipulador, o de la trayectoria, pero no se trata la integración de estos dos parámetros de los que depende la productividad que, según la hipótesis de este trabajo, el mejor manipulador y la mejor trayectoria permiten (ambos) la mayor velocidad de proceso.

**Tabla (1.2.4).** Diferencias de los trabajos más cercanos tomando en cuenta la productividad en función del diseño del manipulador y el perfil de trayectoria polinomial de grado 8.

### 1.2.3. TRABAJOS DE APOYO

#### MODELADO DE MANIPULADORES

El texto de Sciavico y Siciliano (1996) resultó muy útil respecto del modelado matemático del manipulador; sin embargo, un estudio más profundo sobre los puntos críticos y las regiones singulares, y sus efectos, se encuentra en Nakamura (1991), Mohammadi, Zsombor y Ángeles (1995) y Wenger (1997).

#### ARQUITECTURA MECÁNICA DEL MANIPULADOR

Respecto de la selección de la arquitectura del manipulador genérico se obtuvieron y analizaron los trabajos de Stevens (1987) y Papanek (1987). Estos tratan las ventajas y criterios de selección del manipulador PRRRd referentes a la limpieza y generación de partículas contaminantes.

#### ALGORITMOS GENÉTICOS

Como buenos libros de textos referentes a los fundamentos y aplicaciones de los algoritmos genéticos se tienen las obras de Michalewics (1996) y Goldberg (1989). Además, Beasley (1993a, 1993b) proporcionan buena información fundamental dedicada al conocimiento inicial de los algoritmos genéticos.

Como temas más profundos, por ejemplo, técnicas de formación de cadenas o genotipos, selección y reproducción, cruce y mutación de cromosomas, velocidad de convergencia, aplicaciones, etc., las referencias proporcionan los artículos empleados: Brown (1993), Carlson (1994, 1996), Celko (1993), Chapman (1994), Coello (-), De Jong (1992a, 1992b), De Jong y Spears (1989), Forrest y Michell (1992), Harris y Ellis (1993), entre otros.

#### EFICIENCIAS DE LOS TORNILLOS Y LAS TUERCAS J

Sobre el desarrollo del tema de la “Eficiencia de los Tornillos J y las Tuercas J”, capítulo 6, la obra de Nakamura (1991), particularmente el tema de la *Medida de Manipulabilidad*, proporcionó la idea básica en la cual se fundamentó ese capítulo.

#### ESTADO DEL ARTE DE LA ROBÓTICA EVOLUTIVA

Esta investigación tiene que ver con la aplicación de los métodos de búsqueda evolutivos y la robótica. El texto de Husband (1998) proporciona información sobre el estado actual y las tendencias de estas dos ciencias.

### 1.3. JUSTIFICACIÓN

Esta sección justifica la investigación doctoral con argumentos basados en la documentación bibliográfica descrita anteriormente o presentada en las referencias.

La justificación tiene que ver con el intento de dar respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Por qué el aumento de la productividad, mejorando el manipulador, si existen trabajos que reportan la maximización del tiempo de proceso con trayectoria (Husain, Mallik y Ghosh (1992), Dwawarakanah, Ghosal y Shrinivasa (1992))?
- ¿Por qué el aumento de la productividad, mejorando la trayectoria, si existen trabajos que reportan la maximización del tiempo de proceso con el diseño del manipulador (Young y Beom (1999))?
- ¿Por qué un polinomio de grado 8?
- ¿Por qué Algoritmos Genéticos como herramienta de búsqueda?
- ¿Por qué un manipulador con arquitectura PRRRd?
- ¿Por qué un modelo matemático diferente que sea útil tanto en el diseño mecánico como en la determinación de parámetros que describan la facilidad de movimiento del manipulador PRRRd?

#### JUSTIFICACIÓN 1

El análisis del siguiente extracto bibliográfico proporciona algunas inquietudes cuya satisfacción justifican el desarrollo de la investigación:

*... the configuration of the manipulator is optimal in the sense of the measure of manipulability (MOM) when  $\theta_2 = \pm\pi/2$ , regardless of  $\theta_1$  and the link lengths. When the constraint  $l_1+l_2=cte$  is imposed on the link lengths, the optimal ratio becomes  $l_1/l_2=1$ , regardless of  $\theta_1$  and  $\theta_2$ . Thus, we conclude that the optimal design of link lengths is  $l_1=l_2$  and the optimal configuration is  $\theta_2 = \pm\pi/2$  from the perspective of MOM.*

Nakamura (1991) "Advanced Robotics. Redundancy and Optimization". Addison-Wesley, Measure of Manipulability, pp. 122.

Aquí, Nakamura (1991) , cuyo trabajo es considerado como uno de los más cercanos, da una idea respecto de la longitud que debe tener cada eslabón para proporcionar la mayor suavidad de movimiento de un manipulador de dos eslabones rotativos, sin embargo, esta información no satisface respuesta a la siguiente pregunta:

**PREGUNTA 1:** ¿Cuáles son las longitudes que deben tener los tres eslabones rotativos del manipulador PRRRd tal que proporcionen mayor velocidad de producción?

La búsqueda de la respuesta que satisface la **PREGUNTA 1** es la primera justificación del trabajo.

## JUSTIFICACIÓN 2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La justificación del empleo de un polinomio de grado 8 como perfil de trayectoria puede entenderse mediante los siguientes párrafos, extractos de la literatura estudiada:

*The minimal requirement for a manipulator is the capability to move from an initial posture to a final assigned posture. Transition should be characterized by motion laws requiring the actuators to exert joint generalized forces which do not violate the saturation limits and do not excite the typically unmodeled resonant modes of the structure. It is then necessary to devise planning algorithms that generate suitably smooth trajectories.*

Sciavicco, L, Siciliano, B. (1996). "Modeling and Control of Robot Manipulators". McGraw Hill, p. 169.

*Usually, it is desirable for the motion of the manipulator to be smooth. ...a smooth function as one which is continuous and has a continuous first derivative. Sometimes a continuous second derivative is also desirable. Rough, jerky motions tend to cause increased wear on the mechanism, an cause vibration by exciting resonances in the manipulator.*

Craig, J. J. "Introduction to Robotics". Addison-Wesley, 1989

*...much of the particle contamination and wafer breakage is caused by careless handling of the wafers. An automated handling system needs to control acceleration and velocity to minimize handling damage and contamination...*

W.A. Livesley. "Clean Room Robotics. *The Present and Future Use of Robots in the Wafer Fabrication Industry*". Cranfield Robotics and Automation Group, College of Manufacturing, Cranfield Institute of Technology, Cranfield, Bedford, England. MK43 OAL.

Estos comentarios manifiestan la importancia del empleo de funciones suaves, máxime cuando se aplica a manipuladores donde la limpieza es requerida. Es importante recordar que el manipulador buscado trabajará en un cuarto que debe estar libre de micro partículas que pueden contaminar el proceso. Los movimientos violentos, como los trapezoidales, o polinomios de grado bajo, incrementan la posibilidad del desgaste de los elementos, dañino para una operación de este tipo.

Entre más grande sea el grado de un polinomio, éste proporciona mayor suavidad, **Sullivan, Carse y Pipe (2000)**. Sin embargo, una función de grado alto tiene el inconveniente de volverse inestable y a acarrear grandes errores (**Bartels, Beatty y Barsky (1989)**; **Fu, Gonzalez y Lee (1987)**). El polinomio de grado 8 no está exento de estos inconvenientes, sin embargo, en ciertos rangos funciona bien principalmente cuando se encuentra lejos de los límites de esos rangos, como se probará en este trabajo.

Además, otros perfiles como los SPLINE, principalmente los cúbicos, son muy socorridos en su uso: Diseño de levas (**Ángeles y López (1983)**), movimiento de máquinas de control numérico (**Chou y Yang (1992)**), etc., además de la generación de trayectoria de robots (**Nakamura (1991)**), donde es, prácticamente, el perfil siempre usado.

Otras comparaciones entre los polinomios de grado alto, como el octal, y los SPLINE, tomando en cuenta las ventajas y desventajas, se pueden presentar de la siguiente manera:

- **¿Por qué razón la trayectoria con SPLINE cúbicos es una planeación de movimiento preferida?**

*...cubic splines offer several advantages. First, it is the lowest degree polynomial function that allow continuity in velocity and acceleration. Second, low-degree polynomials reduce the effort of computations and the possibility of numerical instabilities (easily produced by high-degree polynomials).*

Fu, K. S.; Gonzalez, R. C.; Lee, C. S. G. "Robotics. Control, Sensing, Vision, and Intelligenge". Mc Graw Hill. 1987, pp.165.

Aquí se explican las ventajas que tienen los SPLINES cúbicos respecto de los perfiles de grado superior; entre éstas se tiene el hecho de que aquellos producen menos inestabilidades numéricas y, por consiguiente, del movimiento del manipulador.

- ¿Por qué razón la trayectoria con polinomios de grado alto no es muy apreciada?

*... however, the use of such a high-degree polynomial to interpolate the given knot points may not be satisfactory. It is difficult to find its extrema and it tends to have extraneous motion.*

Fu, K. S.; Gonzalez, R. C.; Lee, C. S. G. "Robotics. Control, Sensing, Vision, and Intelligence". Mc Graw Hill. 1987, pp.155.

En este extracto se muestra el inconveniente de un polinomio de grado alto, principalmente por su inestabilidad.

Sin embargo, para la suavidad de movimiento que se pretende, puede observarse que una curva de aceleración de un polinomio de grado 8 es más suave, figura (1.3.2), que la correspondiente a un SPLINE cúbico de 5 segmentos, figura (1.3.1).

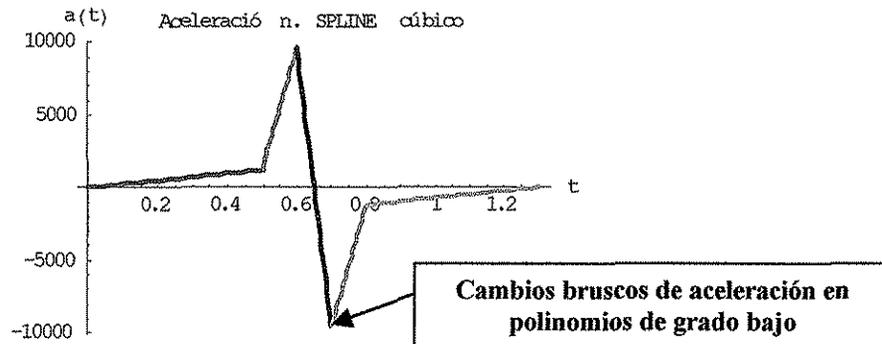


Figura (1.3.1). Perfil de aceleración de un SPLINE cúbico de 5 segmentos. Tiempo de proceso: 1.3 seg.; distancia recorrida: 300 unidades; tiempo en cada segmento: 0.5, 0.1, 0.1, 0.1, 0.5 seg.

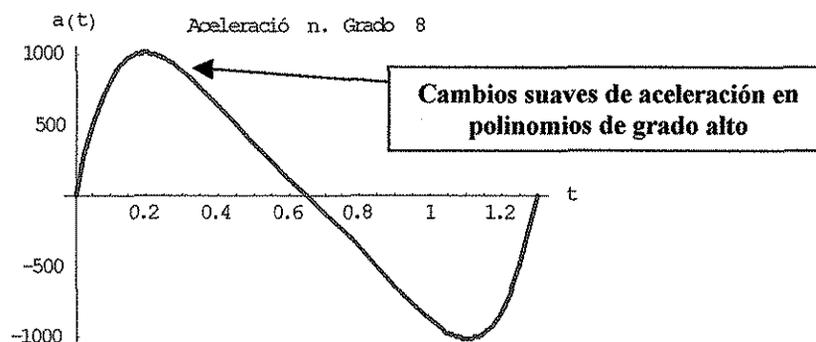


Figura (1.3.2). Perfil de aceleración de un polinomio de grado 8. Tiempo de proceso: 1.3 seg.; distancia recorrida: 300 unidades; índice  $m=1.7$

A pesar de los inconvenientes que presenta el polinomio de grado 8, se justifica el uso de este perfil en este trabajo por las siguientes razones:

- Por su suavidad, necesaria para reducir el desgaste de elementos mecánicos y posible contaminación por partículas producidas,
- posibilidad de controlar su velocidad máxima, mediante un parámetro, denominado índice de control.
- y su poco estudio debido al mayor interés por otros perfiles más populares, por ejemplo, el SPLINE.

### **JUSTIFICACIÓN 3**

Sobre el diseño óptimo de manipuladores seriales concernientes a mejorar alguna o algunas de sus cualidades de desempeño, como energía mínima, suavidad de movimiento, productividad, deflexión de los elementos, etc., poco se ha dicho y desarrollado. La siguiente afirmación se presenta como justificación:

*Very little work has been done in regard to the optimum design of serially linked manipulators with respect to dimensional and positional design variables. Until very recently, no general methodology was available for the optimum geometric design of serial robot manipulators. The methods that have been proposed appear to lack generality.*

D. F. Berner, J. A. Snyman. "The Influence of Joint Angle Constraints on the Optimum Design of a Planar Robot Manipulator Following a Complicated Prescribed Path". Pergamon. An International Journal on Computers and Mathematics with Applications 37 (1999) 111-124.

Ese párrafo, extraído de uno de los trabajos más cercanos a esta investigación (**Berner y Snyman (1999)**), es de fecha bastante reciente y muestra claramente el estado en que se encuentra el estudio del mejoramiento del diseño de manipuladores. La discusión de otros trabajos, también cercanos, se presenta en la sección anterior, 1.2. Revisión Bibliográfica, que justifican e impulsan, aún más, la investigación referente a este tema.

### **JUSTIFICACIÓN 4**

El análisis de la bibliografía reporta ciertas ausencias o carencias de temas que son objetivo de esta investigación doctoral; la tabla (1.4) reporta esos faltantes, mismas que son justificantes para la investigación.

## **JUSTIFICACIÓN 5**

El poder de los algoritmos genéticos tiene que ver con su robustez (**Beasley (1993)**; **KrishnaKumar (1993)**), no son sensibles a las discontinuidades (**Goldberg (1989)**), y en la mayoría de los casos encuentran su camino hacia la solución, siempre y cuando estén bien fundamentados los índices de cruce y mutación, tamaño de la población, la función objetivo, etc.

*The power of GAs comes from the fact that the **technique is robust**, and can deal successfully with a wide range of problem areas, including those which are difficult for other methods to solve.*

D. Beasley. "An Overview of Genetic Algorithms: Part 1, Fundamentals". University Computing, 1993. Vol. 15, Num. 2, 58-69.

Otros métodos desarrollados, como los basados en cálculo, que usan la información del gradiente de la función para guiar la dirección de búsqueda, fallan si ésta es discontinua. Ahora, si un máximo o un mínimo ha sido alcanzado, el proceso se detiene, no importando que pueda haber otros máximos o mínimos de mayor valor absoluto. Esto significa que no funcionan bien para funciones multimodales (**KrishnaKumar (1993)**).

Para el caso específico de este trabajo, los modelos inversos emplean funciones que son discontinuas y, además, multimodales significando que hay muchos máximos y mínimos en todo el espacio de búsqueda.

Esto justifica el empleo de los algoritmos genéticos como la herramienta de búsqueda.

## **JUSTIFICACIÓN 6**

**¿Por qué 3 articulaciones independientes y una dependiente?**

La siguiente justificación contesta esta pregunta porque concierne el número de grados de libertad del manipulador.

En el siguiente extracto, **Nakamura (1991)** informa que el mejor diseño de un sistema mecánico es aquel que integra la menor complejidad de la estructura:

*In traditional machine design, the best design synthesizes a mechanism that functions with the minimum complexity of the structure.*

Como complejidad mínima aquí se entiende:

1. La menor cantidad posible de grados de libertad del manipulador y que está determinada por los grados de libertad de la tarea (ver siguiente comentario tomado de Nakamura (1991)).

*Many simple assembly tasks require that the robot pick up a part on a horizontal plane and place that part onto another horizontal plane. The orientation may be changed only about the axis perpendicular to the plane. Hence SCARA-type robots have only four actuators.*

En este comentario se marca el hecho de que los grados de libertad del manipulador son dependientes de los grados de libertad de la tarea. Si la tarea presenta  $n$  grados de libertad, el manipulador debe presentar  $n$  grados de libertad, para cumplir con la complejidad mínima. Sin embargo, el manipulador puede tener más de  $n$  grados de libertad y poder realizar la tarea sin ningún problema, pero deja de ser la selección óptima, según Nakamura (1991).

Además de la mínima complejidad de la estructura, hay otro factor muy importante que es un indicador empleado para integrar el menor número de grados de libertad al manipulador. Analizando el siguiente extracto del trabajo de Hartley (1986) se puede entender este factor.

*Yaskawa decided that the best solution to the design of a clean room robot was to adapt the DD concept, since it has fewer working moving parts than conventional units, so that, particles of metal are less likely to be omitted into the atmosphere.*

Hartley, John. "Focus on Electronics as Growth slows". Japanese Scene. The Industrial Robot, 13(3),174-178,1986.

Como se trata de un robot para ambientes limpios, Hartley (1986), junto con las afirmaciones de Nakamura (1991), dan el número exacto de grados de libertad que un manipulador para ambiente limpio debe tener:

El menor número de grados de libertad que satisfaga la tarea, porque esto implica menor número de partes en movimiento y, por consiguiente, menor desgaste y producción de partículas que puedan contaminar el ambiente limpio.
---

2. La adecuada disposición y tipo de articulaciones dependientes de la tarea por realizar.

Para el caso que concierne este trabajo, y tomando en cuenta la conclusión de que el número de grados de libertad del manipulador depende de la tarea y sus grados de libertad, entonces es indispensable conocer ésta.

### **TAREA OPERACIONAL:**

Un disco de silicio debe ser colocado de una determinada manera dentro de una casetera. Esa colocación concierne una posición y una orientación,  $X(\Theta) = [X_p(\Theta) X_o(\Theta)]^T$ , y todo cuerpo en el espacio físico  $\mathfrak{R}^3$  exige 6 coordenadas independientes para que su situación espacial quede bien determinada, E(1.3.1), (Nakamura (1991); Sciavicco y Siciliano (1996); Juárez (1996)).

$$X(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ e_x\alpha \\ e_y\alpha \\ e_z\alpha \end{pmatrix}$$

E(1.3.1)

Donde  $(x, y, z)$  es la posición del objeto y  $(e_x\alpha \ e_y\alpha \ e_z\alpha)$  es su orientación, siendo  $e = (e_x \ e_y \ e_z)^T$  el eje de giro y  $\alpha$  el desplazamiento angular alrededor del eje de giro.

En la figura (1.3.3) siguiente se muestra una vista aérea de las posiciones de las caseteras donde se colocarán los discos de silicio.

Para que uno de estos cuerpos pueda ser insertado en los contenedores, el manipulador debe moverse de manera totalmente radial y colocarlo en la posición  $(x, y, z)$  correspondiente. Las primeras dos coordenadas  $(x, y)$  determinan la casetera, mientras que la tercer coordenada,  $(z)$ , describe el nivel dentro de ese contenedor. Lo anterior corresponde al posicionamiento del disco, mientras que la orientación requerida es aquella en la que la referencia del disco queda siempre radial al volumen de trabajo y los planos de sus caras permanecen siempre horizontales, ver Figura (1.3.3).

Con esta explicación se puede decir que el disco posa en las coordenadas (x, y, z) y gira alrededor del eje (z) la cantidad angular de  $\alpha = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ , sin embargo, se puede apreciar que este ángulo también depende de las coordenadas (x, y), por lo tanto se tienen realmente 3 coordenadas independientes y solamente una dependiente de las anteriores, E(1.3.2).

$$X(\Theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \\ 0 \\ \alpha = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$$

E(1.3.2)

Donde  $\varrho = z = (0 \ 0 \ 1)^T$ .

El análisis de los grados de libertad de la tarea exige que el manipulador tenga, como mínimo, los mismos grados de libertad de la tarea, según los comentarios anteriores de Nakamura (1991), respecto de la complejidad mínima, además de permitir la correcta orientación dependiente.

Así, el número de articulaciones del manipulador PRRRd seleccionado coincide con el número de elementos del vector operacional  $X(\Theta)$ , esto es:

1. La primera articulación prismática P corresponde a la coordenada z,
2. mientras que las dos articulaciones R independientes corresponden a las coordenadas (x, y);
3. la tercer articulación dependiente Rd ayuda a orientar el objeto que también depende de (x, y).

	<b>3 grados de libertad de la tarea</b>			Elemento variante pero dependiente
	Coordenada independiente	Coordenada independiente	Coordenada independiente	Coordenada dependiente
Elemento operacional	x	y	z	$\alpha(x, y)$
	↑ Dependencia			

Tabla (1.3.1). Grados de libertad de la tarea.

	<b>3 grados de libertad del manipulador</b>			Elemento variante pero dependiente
	Coordenada independiente	Coordenada independiente	Coordenada independiente	Coordenada dependiente
Elemento articular	<b>P</b>	<b>R</b>	<b>R</b>	<b>Rd</b>

Tabla (1.3.2). Grados de libertad del manipulador.

Aunque son cuatro articulaciones, sólo son tres grados de libertad del manipulador. Lo mismo sucede con el espacio operacional que tiene cuatro elementos que pueden variar, pero sólo 3 son independientes; el cuarto depende de los anteriores.

De esta manera se justifica el número de articulaciones y la existencia de la dependencia de una de ellas.

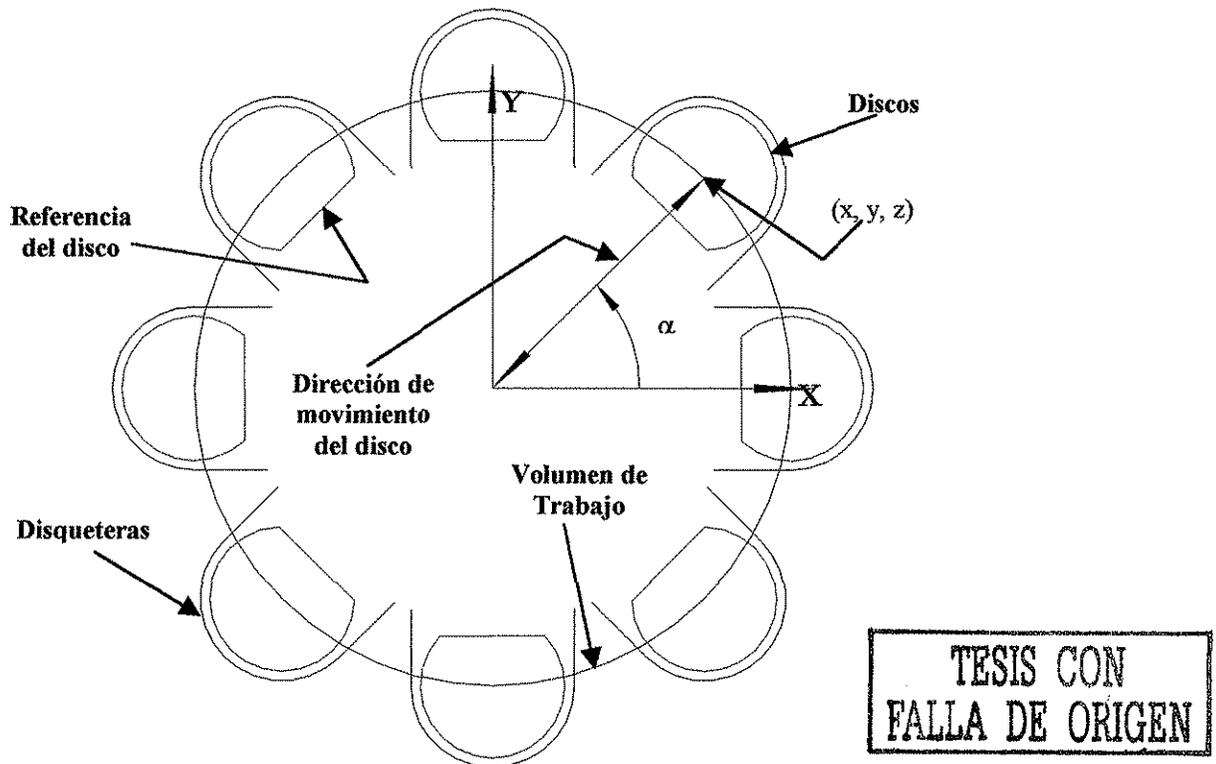


Figura (1.3.3). Vista aérea de los grados de libertad de la tarea.

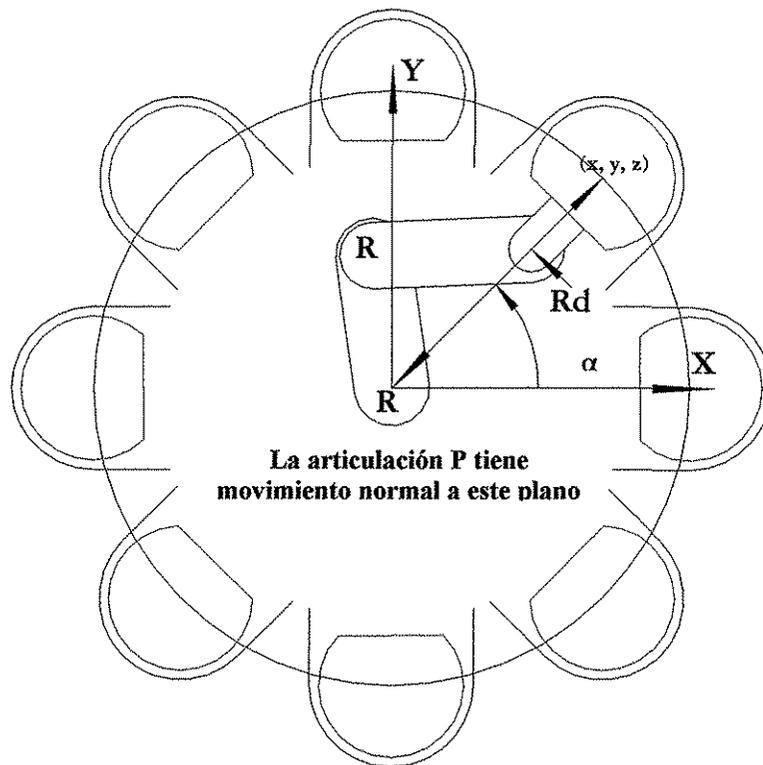


Figura (1.3.4). Vista aérea de los grados de libertad del manipulador.

## JUSTIFICACIÓN 7

**¿Por qué razón se coloca la articulación prismática en primer lugar y después las rotacionales, todas en el sentido vertical?**

La siguiente justificación responde esta pregunta porque concierne el orden y disposición de las articulaciones.

Esta justificación tiene que ver también con las necesidades de la tarea. Es importante recordar que la operación asignada al manipulador tiene que ver con procesos de ambiente limpio.

*...one advantage of this type of mechanisms is that most of the moving parts are below the wafer surface, thus minimizing the possibility that generated particles will reach the wafer surface.*

*Therefore the robot was designed with its links and joints below the wafer surface. This enable the clean room air flow to effectively remove particles that are generated before they can contaminate a wafer.*

Stevens, C. L. "The Design of a Clean Room Robot for Wafer Handling".  
Proceeding of the 17<sup>th</sup> ISIR. April 26-30, 1987. Chicago, USA.

Aquí se presenta la necesidad de colocar todas las articulaciones abajo del nivel de manipulación de los discos de silicio para que cualquier partícula producida tenga menos oportunidad de alojarse en ellos al ser arrastrada por el flujo laminar de aire del cuarto limpio.

*The joint design of a clean room mechanism is the most critical part of the whole mechanism design.*

*... linear joints have larger sliding surfaces and this generates particles because of wear which could contaminate the wafer. So this type of joints should be placed as far as possible...*

Papanek, T. "Design and Test of a Robot for Class 10 Clean Rooms".  
Proceeding of the 17<sup>th</sup> ISIR. April 26-30, 1987. Chicago, USA.

*Keeping particulates levels low... ... a minimum number of sliding interfaces are used; Intelldex preferes, instead, rotary-type motion.*

Iscoff, Ron "Robots in the Clean Room". Semiconductor international,  
November, 1984.

Con estos extracto del texto se justifica la posición de la articulación prismática, la cual produce una mayor cantidad de partículas contaminantes y por eso debe estar lo más alejada como sea posible de los discos, además se prefieren las articulaciones rotacionales por su menor tasa de desgaste.

Analizando la figura del manipulador y, en base en la información presentada, se puede observar que todas las articulaciones cumplen con lo anterior, es decir, se encuentran en un nivel inferior al disco de silicio, además, la articulación prismática, que es la que puede producir mayor cantidad de partículas, queda lo más alejada posible.

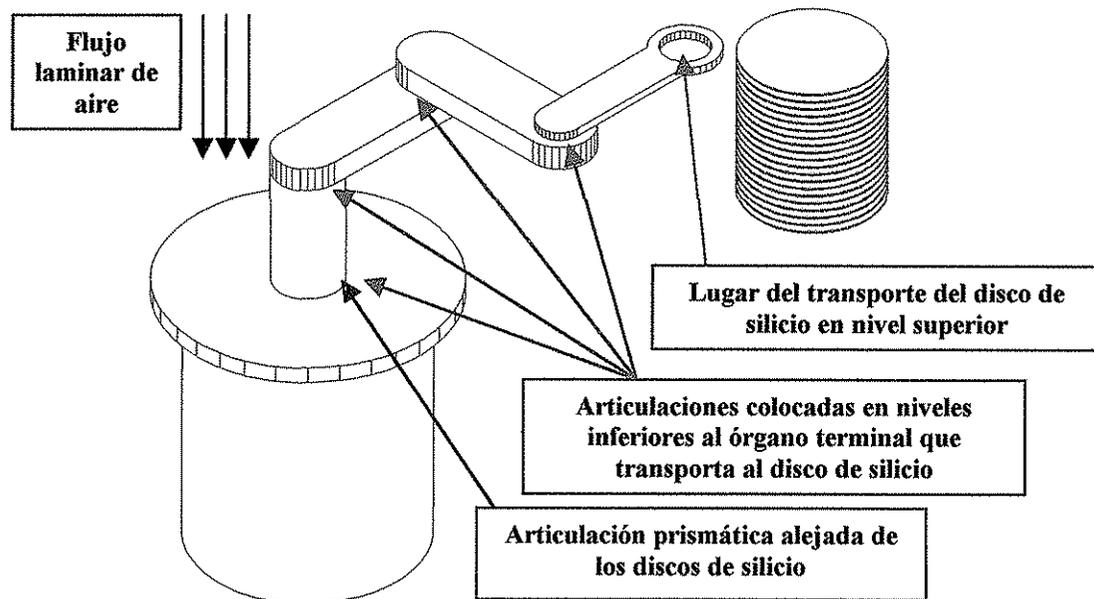


Figura (1.3.5). disposición de las articulaciones del manipulador.

De esta manera, con la **JUSTIFICACIÓN 6** y la **JUSTIFICACIÓN 7** se valida el número, tipo y disposición de las articulaciones del manipulador, y, por lo tanto, el empleo de éste.

### **JUSTIFICACIÓN 8**

Las obras de Nakamura (1991), Sciavicco y Siciliano (1996) y Yoshikawa (1985) describen algunas medidas de la facilidad de movimiento suave que un manipulador puede ofrecer para una postura operacional muy específica. Esta capacidad está descrita de una manera efectiva por dos indicadores muy conocidos:

- *Elipsoides de Manipulabilidad*, y
- *Medida de la Manipulabilidad*.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Aunque son muy efectivos, también son muy locales y, por lo mismo, no ofrecen información para todo el volumen de trabajo.

En cuanto a los Elipsoides de Manipulación, se ofrece una región geométrica de su existencia, pero para cada punto en el espacio de trabajo, no para todo.

Lo que se busca con una nueva descripción matemática es encontrar un medidor que, proporcione información global y no solamente para cada punto. Además, que lo haga por articulaciones, a diferencia de los Elipsoides y la Medida de Manipulabilidad, que lo hacen para todo el manipulador sin indicar qué articulación es más eficiente.

Como razones para la justificación del desarrollo de un nuevo modelo matemático que entregue indicadores de la facilidad de movimiento del manipulador PRRRd, se mencionan las siguientes:

- Interés por explorar nuevas vías para la optimización del movimiento del manipulador PRRRd.
- Obtener un indicador global de la medición del movimiento del manipulador.
- Obtener la facilidad de movimiento suave que un manipulador puede ofrecer por articulaciones a través de una región geométrica que muestre, entre otras, la variación del volumen de trabajo por cada cambio en las dimensiones de los eslabones, además, las pendientes y sus comportamientos en puntos de especial importancia, como los puntos críticos o singulares.

## CONCLUSIÓN DE LA JUSTIFICACIÓN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En conclusión, se justifica:

<b>1</b>	<b>¿Por qué?</b>
<b>El mejoramiento de la:</b> Productividad de manera combinada entre (a) el diseño del manipulador y (b) el perfil de trayectoria	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Porque se tiene la sospecha (hipótesis 4) de que el mejoramiento aislado del manipulador o de la trayectoria no produce la máxima velocidad de transporte; esto se estudia en este trabajo.</li> <li>2. Porque la bibliografía reporta el mejoramiento de estos conceptos de manera aislada y nunca de manera combinada.</li> </ol>

<b>2</b>		
El uso de:	¿Por qué?	¿Cómo ayuda al ambiente limpio?
Polinomio de grado 8	Porque el proceso de ambiente limpio requiere de la eliminación de movimientos bruscos que producen mayor desgaste y, consecuentemente, mayor generación de partículas contaminantes	El polinomio de grado 8 ofrece transición de aceleraciones suave

<b>3</b>	
El uso de un:	¿Por qué?
Manipulador con arquitectura PRRRd	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Porque proporciona el mismo número de grados de libertad para realizar la tarea y la disposición de sus articulaciones y eslabones se adaptan al posicionamiento y orientación del objeto transportado.</li> <li>2. Porque su articulación prismática, que puede producir mayor cantidad de partículas contaminantes, está en una posición alejada de los discos de silicio, proporcionando menor probabilidad de contaminación.</li> <li>3. Porque todas sus articulaciones se encuentran en una posición inferior que la correspondiente al objeto manipulado, delicado a la contaminación. Este hecho, y el arrastre del flujo de aire laminar del cuarto limpio, previenen el alojamiento de micropartículas en los discos de silicio.</li> </ol>

<b>4</b>	
El uso de:	¿Por qué?
Los algoritmos genéticos como herramienta de búsqueda y optimización	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Por ser una herramienta robusta.</li> <li>2. Por tratarse de un problema con muchos máximos locales y requerirse el máximo global; problema difícil para ser tratado con los métodos basados en cálculo.</li> <li>3. Por tratarse de un problema con muchas variables en movimiento.</li> </ol>

<b>5</b>	
La búsqueda de un:	¿Por qué?
Modelo matemático diferente	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Por el interés por explorar nuevas rutas que proporcionen nuevo conocimiento concerniente a la optimización de un manipulador.</li> <li>2. Por la necesidad de un medidor del desempeño de un manipulador que proporcione información en todo el espacio operacional al mismo tiempo que en el espacio articular.</li> </ol>



## CAPÍTULO 2

# DESCRIPCIÓN DEL MANIPULADOR

### 2.1 INTRODUCCIÓN

A continuación se presentan las características de un manipulador genérico PRRRd, cuyas longitudes de sus eslabones con movimiento rotativo particularizan un manipulador único. La determinación de las longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  óptimas determinan el mejor manipulador que se busca, uno de los objetivos de este trabajo de investigación. La elección de esta arquitectura se justifica por los trabajos de Stevens (1987) y Papanek (1987), donde se tratan las ventajas referentes a la limpieza y generación de partículas.

### 2.2 DEFINICIÓN DE LAS BASES REFERENCIALES DE LOS ESLABONES

En la figura (2.2.1) siguiente se presenta un manipulador serial genérico de 4 articulaciones. La primera es prismática, mientras que las restantes son del tipo rotacional (figura (1) de la sección de la definición del problema).

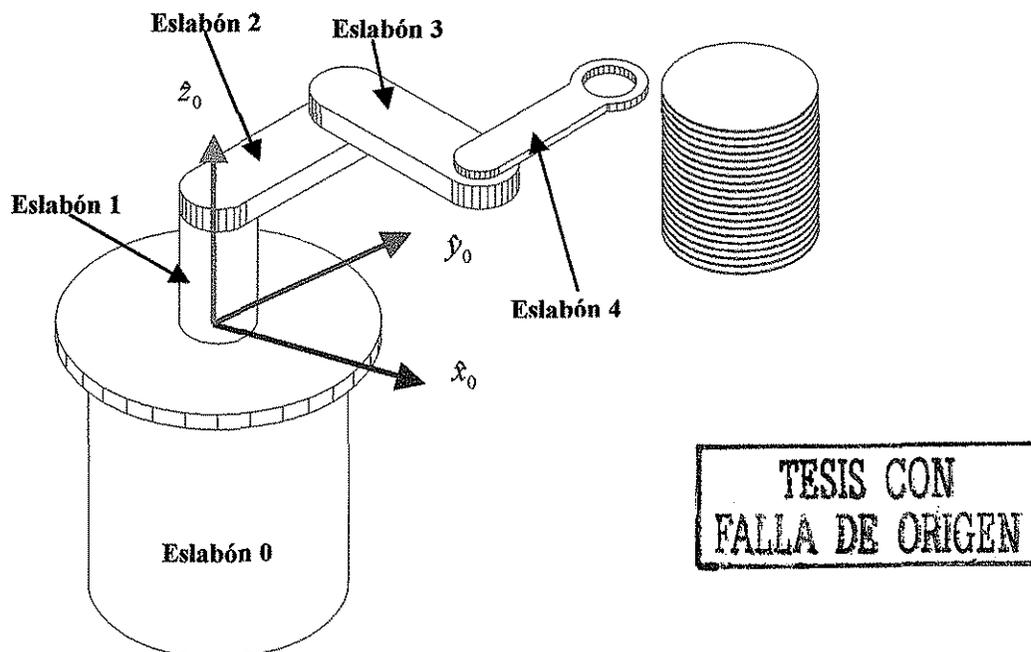


Figura (2.2.1). Base ortonormal inercial del manipulador y sus eslabones.

Las descripciones de los sistemas de referencia de cada eslabón, que se determinan mediante la convención de **Denavit y Hartenberg (1955)**, están dadas en las ecuaciones E(2.1)-E(2.5) que emplean la forma de Gibbs de la rotación, **Piña (1996)**.

$${}^0\{1\} = \{I_{3 \times 3}; [0 \ 0 \ d_1]^T\} \quad \text{E(2.1)}$$

$${}^1\{2\} = \{z_1 z_1^T + \cos \theta_2 (I_{3 \times 3} - z_1 z_1^T) + \text{sen } \theta_2 (z_1 \otimes); [0 \ 0 \ e_1]^T\} \quad \text{E(2.2)}$$

$${}^2\{3\} = \{z_2 z_2^T + \cos \theta_3 (I_{3 \times 3} - z_2 z_2^T) + \text{sen } \theta_3 (z_2 \otimes); [l_1 \ 0 \ (e_2 + \Delta z)]^T\} \quad \text{E(2.3)}$$

$${}^3\{4\} = \{z_3 z_3^T + \cos \theta_4 (I_{3 \times 3} - z_3 z_3^T) + \text{sen } \theta_4 (z_3 \otimes); [l_2 \ 0 \ (e_3 + \Delta z)]^T\} \quad \text{E(2.4)}$$

$${}^4\{5\} = \{I_{3 \times 3}; [l_3 \ 0 \ 0]^T\} \quad \text{E(2.5)}$$

Donde  $e_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) es el espesor del eslabón  $i+1$  y  $\Delta z$  la separación entre el eslabón 3 con el 4, que es igual a la existente entre el 4 con el 5, en dirección vertical.

El referencial operacional  $\{5\}$  está descrito en el inercial  $\{0\}$  mediante la ecuación E(2.6).

$${}^0\{5\} = \left\{ z_0 z_0^T + \cos \left( \sum_{i=2}^4 \theta_i \right) (I_{3 \times 3} - z_0 z_0^T) + \text{sen} \left( \sum_{i=2}^4 \theta_i \right) (z_0 \otimes); [x_{OR} \ y_{OR} \ z_{OR}]^T \right\} \quad \text{E(2.6)}$$

Los modelos directos de ese manipulador se muestran en las ecuaciones E(2.7)-E(2.10).

$$x_{OR} = l_1 \text{Cos } \theta_2 + l_2 \text{Cos}(\theta_2 + \theta_3) + l_3 \text{Cos}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad \text{E(2.7)}$$

$$y_{OR} = l_1 \text{Sen } \theta_2 + l_2 \text{Sen}(\theta_2 + \theta_3) + l_3 \text{Sen}(\theta_2 + \theta_3 + \theta_4) \quad \text{E(2.8)}$$

$$z_{OR} = d_1 + \sum_{i=1}^3 e_i + 2\Delta z \quad \text{E(2.9)}$$

$$\alpha = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 \quad \text{E(2.10)}$$

### 2.3. VARIABLES ARTICULARES

En la tabla (2.3.1) se presentan las variables articulares. Todas ellas se obtienen según la formulación de Denavit y Hartenberg (1955).

	Variable articular 1	Variable articular 2	Variable articular 3	Variable articular 4
vector	$d_1 \hat{z}_1$	$\theta_2 \hat{z}_2$	$\theta_3 \hat{z}_3$	$\theta_4 \hat{z}_4$
magnitud	$\ {}^0 org_1\ $	$\angle \text{Pr oy}_{x_1-p_1}(\hat{x}_2) - \hat{x}_1 = \cos^{-1}(\langle \hat{x}_1, \hat{x}_2 \rangle)$	$\angle \text{Pr oy}_{x_2-p_2}(\hat{x}_3) - \hat{x}_2 = \cos^{-1}(\langle \hat{x}_2, \hat{x}_3 \rangle)$	$\angle \text{Pr oy}_{x_3-p_3}(\hat{x}_4) - \hat{x}_3 = \cos^{-1}(\langle \hat{x}_3, \hat{x}_4 \rangle)$

Tabla (2.3.1). Definición de las variables articulares.

### 2.4. MULTIPLICIDAD DE SOLUCIONES

Este manipulador genérico presenta dos configuraciones admisibles, Sciavicco y Siciliano (1996), Juárez (1996), que satisfacen el mismo espacio operacional. Si los valores de esas dos configuraciones se proporcionan a las variables independientes de las ecuaciones E(2.7)-E(2.10), se obtendrá el mismo punto y la misma orientación alcanzada por el órgano terminal.

El número de configuraciones admisibles se denomina como U y representa la unicidad de soluciones del espacio operacional, figura (2.4.1).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

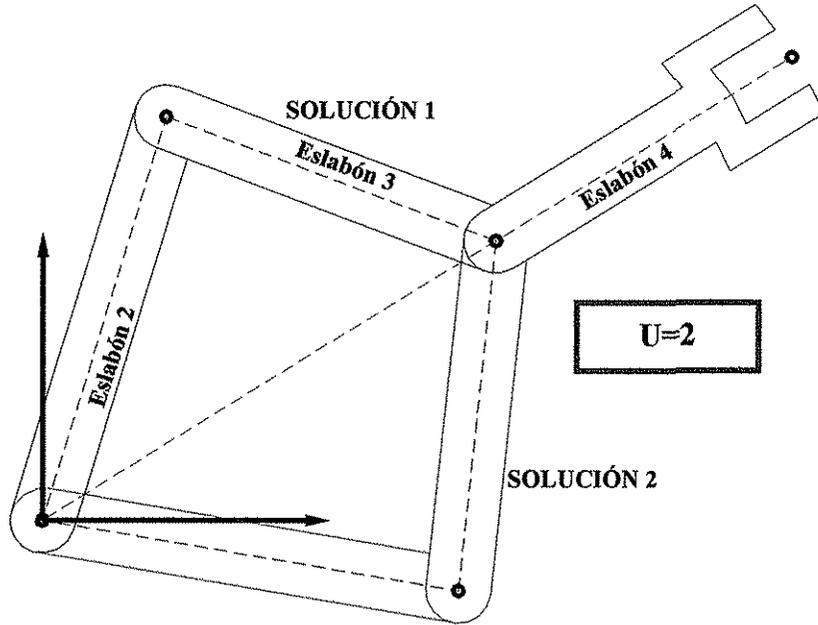


Figura (2.4.1). Multiplicidad de soluciones U=2.

2.5. DESCRIPCIÓN DE LOS ESLABONES MÓVILES

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

2.5.1. ESPACIO GEOMÉTRICO DEL ESLABÓN 0

Todos los puntos del eslabón 0, fijo, se obtienen al evolucionar los vectores  ${}^0\bar{g}_{E0}^+$  y  ${}^0\bar{g}_{E0}^-$  que son los generadores de los conjuntos  ${}^+G_{E0}^{RG}$  y  ${}^-G_{E0}^{RG}$ , y cuyo conjunto complemento de éste respecto de aquél, es el representante del eslabón 0:  $G_{E0}^{RG}$ ; ecuaciones E(2.11), E(2.12), E(2.13) y figura (2.5.1).

$${}^+G_{E0}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}^0\bar{g}_{E0}^+ = \\ = (\hat{z}_0 \hat{z}_0^T + c\phi(I - \hat{z}_0 \hat{z}_0^T) + s\phi(\hat{z}_0 \otimes)) {}^0\bar{v}_{E0}^+ + {}^0\bar{h}_{E0}^+ \end{array} \left| \begin{array}{l} \phi \in \mathfrak{R}; \phi \in [0, 2\pi] \\ {}^0\bar{v}_{E0}^+ \in \mathfrak{R}^3; {}^0\bar{v}_{E0}^+ = [r \ 0 \ 0]^T \\ {}^0\bar{h}_{E0}^+ \in \mathfrak{R}^3; {}^0\bar{h}_{E0}^+ = [0 \ 0 \ -h]^T \\ r \in \mathfrak{R}; r \in [0, r_{e0}^+] \\ h \in \mathfrak{R}; h \in [0, h_{e0}^+] \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(2.11)}$$

$${}^{-}G_{E0}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}^0\bar{g}_{E0}^- = \\ = (\hat{z}_0 \hat{z}_0^T + c\phi(I - \hat{z}_0 \hat{z}_0^T) + s\phi(z_0 \otimes)) {}^0\bar{r}_{E0}^- + {}^0\bar{h}_{E0}^- \end{array} \left| \begin{array}{l} \phi \in \mathfrak{R}; \phi \in [0, 2\pi] \\ {}^0\bar{r}_{E0}^- \in \mathfrak{R}^3; {}^0\bar{r}_{E0}^- = [r \ 0 \ 0]^T \\ {}^0\bar{h}_{E0}^- \in \mathfrak{R}^3; {}^0\bar{h}_{E0}^- = [0 \ 0 \ -h]^T \\ r \in \mathfrak{R}; r \in [0, r_{e0}^-] \\ h \in \mathfrak{R}; h \in [0; h_{e0}^-] \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(2.12)}$$

$$G_{E0}^{RG} = C_{-G_{E0}^{RG}} \left( {}^+G_{E0}^{RG} \right), \quad \forall r_{e0}^- < r_{e0}^+ \bullet \forall h_{e0}^- \leq h_{e0}^+ \quad \text{E(2.13)}$$

Donde  $C_B(A)$  es el conjunto complemento de B respecto de A, Obregón (1984), también definido como conjunto diferencia, Hrbacek (1999).

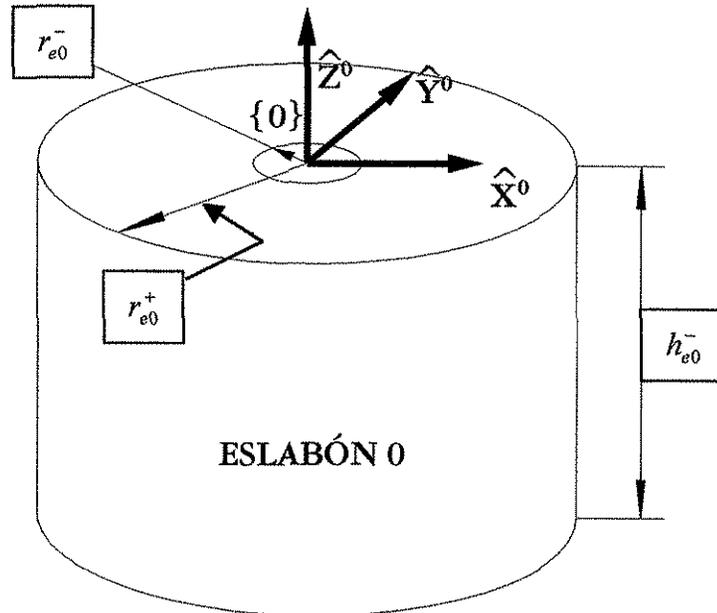


Figura (2.5.1). Conjunto eslabón 0  $G_{E0}^{RG} = C_{-G_{E0}^{RG}} \left( {}^+G_{E0}^{RG} \right), \quad \forall r_{e0}^- < r_{e0}^+ \bullet \forall h_{e0}^- \leq h_{e0}^+$

### 2.5.2. ESPACIO GEOMÉTRICO DEL ESLABÓN 1

Cada punto del primer eslabón, cuyo movimiento es prismático, se obtiene mediante el vector  ${}^1\bar{g}_{E1}$  que es generador del conjunto  $G_{E1}^{RG}$ , representante de ese cuerpo rígido tipo cilindro. Ecuación E(2.14).

$$G_{E1}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} \phi \in \mathfrak{R}; \phi \in [0, 2\pi] \\ \begin{array}{l} {}^1\bar{r}_{E1} \in \mathfrak{R}^3; {}^1\bar{r}_{E1} = [r \ 0 \ 0]^T \\ {}^1\bar{h}_{E1} \in \mathfrak{R}^3; {}^1\bar{h}_{E1} = [0 \ 0 \ -h]^T \\ r \in \mathfrak{R}; r \in [0, r_{esl1}] \\ h \in \mathfrak{R}; h \in [0, h_{esl1}] \end{array} \end{array} \right\} \quad E(2.14)$$

Es importante destacar que el conjunto  ${}^{-}G_{E0}^{RG}$  no puede interferir con  $G_{E1}^{RG}$ , por lo tanto, todos los elementos de aquél y de éste deben ser los mismos cuando  ${}^0\{1\} = \{I_{3 \times 3}; \bar{0}\}$ , ecuación E(2.15).

$$\emptyset = {}^{-}G_{E0}^{RG} \cap G_{E1}^{RG} \quad \text{cuando } d_1 = 0 \quad E(2.15)$$

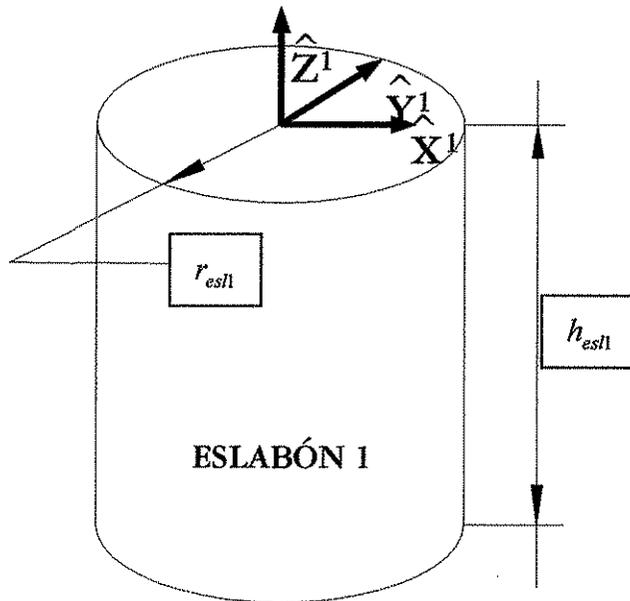


Figura (2.5.2). Conjunto eslabón 1  $G_{E1}^{RG}$

Para que esto se cumpla son necesarias las dos condiciones siguientes: (1)  $r_{e0}^- = r_{esl1}$  y (2)  $h_{e0}^- = h_{esl1}$ .

2.5.3. ESPACIOS GEOMÉTRICOS DE LOS ESLABONES 2, 3 Y 4

De la misma manera como se hizo para los eslabones anteriores, los paralelepípedos empleados como eslabones 2, 3 y 4, de movimiento rotativo, están descritos por la ecuación E(2.16), figura (2.5.3).

$$G_{Ei}^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}^i\bar{x}_{Ei} \in \mathfrak{R}^3; {}^i\bar{x}_{Ei} = [x \ 0 \ 0]^T \\ {}^i\bar{y}_{Ei} \in \mathfrak{R}^3; {}^i\bar{y}_{Ei} = [0 \ y \ 0]^T \\ {}^i\bar{z}_{Ei} \in \mathfrak{R}^3; {}^i\bar{z}_{Ei} = [0 \ 0 \ z]^T \\ {}^i\bar{g}_{Ei} = {}^i\bar{x}_{Ei} + {}^i\bar{y}_{Ei} + {}^i\bar{z}_{Ei} \mid \begin{array}{l} x \in \mathfrak{R}; x \in [-\Delta l_{Ei-1}, l_{i-1} + \Delta l_{Ei-1}] \\ y \in \mathfrak{R}; y \in \left[-\frac{a_{i-1}}{2}, \frac{a_{i-1}}{2}\right] \\ z \in \mathfrak{R}; z \in [0, -e_{i-1}] \end{array} \end{array} \right\}; \quad i = 2, 3, 4 \tag{E(2.16)}$$

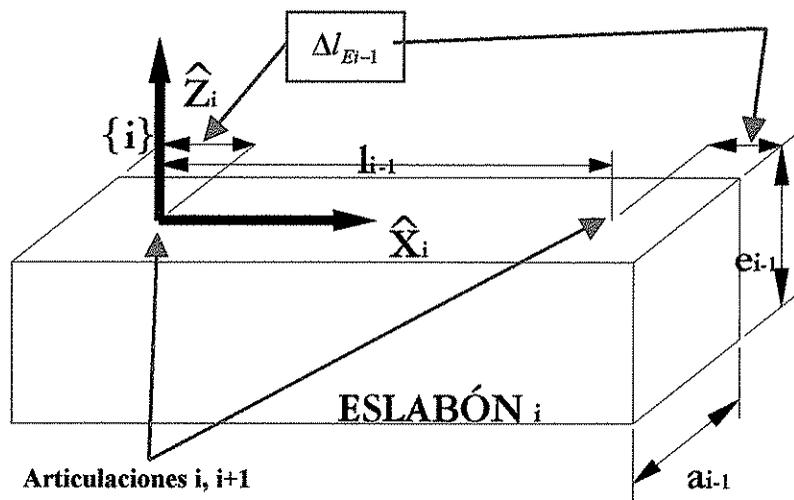


Figura (2.5.3). Eslabón i, i=2, 3, 4.  $G_{Ei}^{RG}$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## 2.6. CENTROS GEOMÉTRICOS DE GRAVEDAD DE LOS ESLABONES MÓVILES

Cada eslabón móvil contiene un terna ortonormal derecha en su centro de gravedad. A continuación se presentan las descripciones de esos conjuntos respecto de las ternas de los eslabones, ecuaciones E(2.17) y E(2.18).

$${}^1\{cg_1\} = \left\{ I_{3 \times 3}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h_{esl1}}{2} \end{bmatrix}^T \right\} \quad \text{E(2.17)}$$

$${}^i\{cg_i\} = \left\{ I_{3 \times 3}; \begin{bmatrix} l_{i-1} & 0 & -\frac{e_{i-1}}{2} \end{bmatrix}^T \right\}; i = 2, 3, 4 \quad \text{E(2.18)}$$

## 2.7. DISTRIBUCIÓN DE MASA DE LOS ESLABONES MÓVILES

La distribución de masa de cada uno de los eslabones que tienen movimiento queda definida por la matriz de inercia respecto de la terna ortonormal del centro de gravedad del cuerpo, ecuación E(2.19).

$${}^{cg}I_j = \text{diag}({}^{cg}i_{xxj}, {}^{cg}i_{yyj}, {}^{cg}i_{zzj}) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}; j = 1, 2, 3, 4 \quad \text{E(2.19)}$$

Donde los elementos de la diagonal se presentan en las ecuaciones E(2.20)-E(2.24).

$${}^{cg}i_{xx1} = {}^{cg}i_{yy1} = \frac{1}{4} \pi \rho_{E1} r_{esl1}^4 h_{esl1} + \frac{1}{12} \pi \rho_{E1} r_{esl1}^2 h_{esl1}^3 \quad \text{E(2.20)}$$

$${}^{cg}i_{zz1} = \frac{1}{12} \pi \rho_{E1} r_{esl1}^4 h_{esl1} \quad \text{E(2.21)}$$

$${}^{cg}i_{xxj} = \frac{1}{12} \rho_{Ej} e_{j-1} a_{j-1} (l_{j-1} + 2\Delta l_{Ej-1}) (a_{j-1}^2 + e_{j-1}^2); j = 2, 3, 4 \quad \text{E(2.22)}$$

$${}^{cg}i_{yyj} = \frac{1}{12} \rho_{Ej-1} e_{j-1} a_{j-1} (l_{j-1} + 2\Delta l_{Ej-1}) ((l_{j-1} + 2\Delta l_{Ej-1})^2 + e_{j-1}^2); j = 2, 3, 4 \quad \text{E(2.23)}$$

$${}^{ogf}i_{zzj} = \frac{1}{12} \rho_{Ej} e_{j-1} a_{j-1} (l_{j-1} + 2\Delta l_{Ej-1}) \left( (l_{j-1} + 2\Delta l_{j-1})^2 + a_{j-1}^2 \right), j = 2, 3, 4$$

E(2.24)

## 2.8. CINEMÁTICA DIFERENCIAL DEL MANIPULADOR GENÉRICO

El espacio operacional está definido por el vector  $X \in \mathfrak{R}^4$ , mientras que el espacio articular lo está por  $\Theta \in \mathfrak{R}^4$ , Wenger (1997).

Los elementos de X y de  $\Theta$  se presentan en la ecuaciones E(2.25) y E(2.26).

$$X = (x_{or} \quad y_{or} \quad z_{or} \quad \alpha)^T \in \mathfrak{R}^4$$

E(2.25)

$$\Theta = (d_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \quad \theta_4)^T \in \mathfrak{R}^4$$

E(2.26)

Como ambos espacios están relacionados, según se puede observar en las ecuaciones E(2.7)-E(2.10), se puede obtener la derivada, respecto del tiempo, para obtener la siguiente ecuación E(2.27) que define la dependencia del espacio operacional con el articular, Sciavicco y Siciliano (1996).

$$\dot{X} = J(\Theta) \dot{\Theta}$$

E(2.27)

Donde,

$$J(\Theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{or}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_{or}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_{or}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial x_{or}}{\partial d_1} \\ \frac{\partial y_{or}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial y_{or}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial y_{or}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial y_{or}}{\partial d_1} \\ \frac{\partial z_{or}}{\partial \theta_2} & \frac{\partial z_{or}}{\partial \theta_3} & \frac{\partial z_{or}}{\partial \theta_4} & \frac{\partial z_{or}}{\partial d_1} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_3} & \frac{\partial \alpha}{\partial \theta_4} & \frac{\partial \alpha}{\partial d_1} \end{pmatrix}$$

E(2.28)

La ecuación E(2.29) define la dependencia del espacio articular con el operacional.

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta) \dot{X}$$

E(2.29)

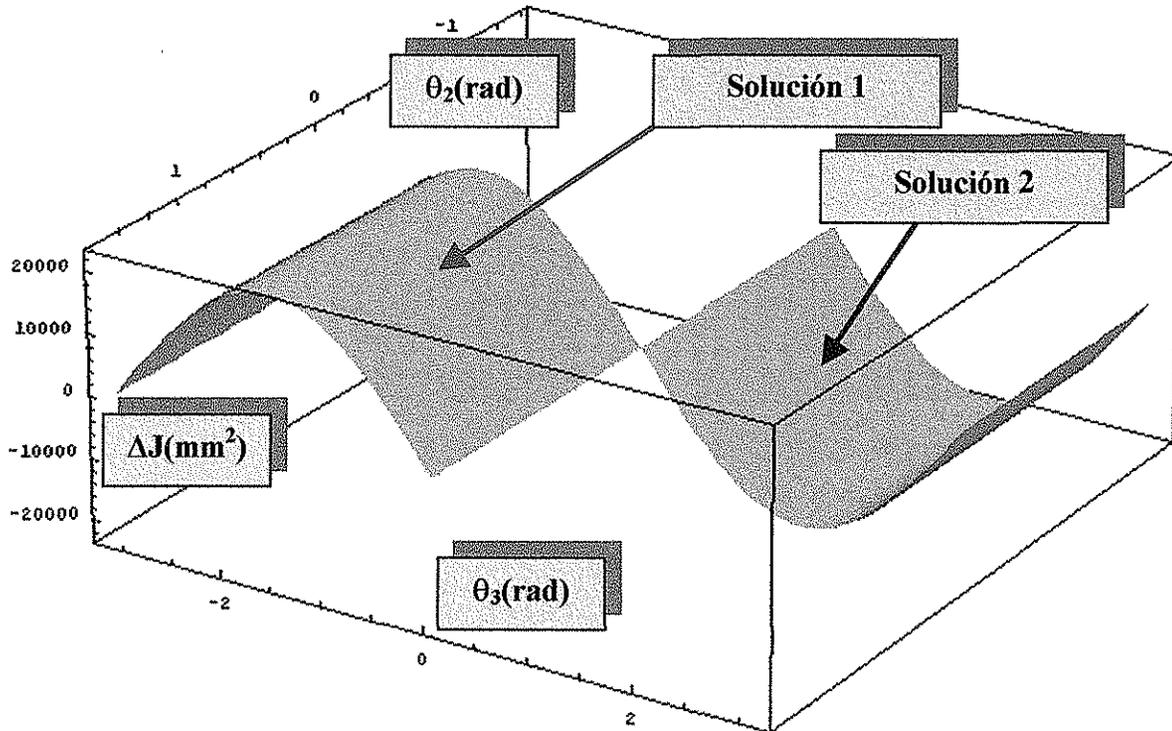
Donde,

$$J^{-1}(\Theta) = \frac{Adj J(\Theta)}{\Delta J(\Theta)} \tag{E(2.30)}$$

$$\Delta J(\Theta) = l_1 l_2 \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin(\theta_2) - l_1 l_2 \cos(\theta_2) \sin(\theta_2 + \theta_3) \tag{E(2.31)}$$

El manipulador presenta singularidades (puntos críticos, Wenger (1997); Mohammadi (1995)) en los radios interior y exterior del volumen de trabajo, que son las regiones en donde E(2.31) tiene un valor nulo, para cualquier combinación de las longitudes de eslabones  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ .

En la figura (2.8.1) se presenta la variación de  $\Delta J(\Theta)$  para ambas soluciones y para todo  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .



$l_1$	$l_2$	$l_3$
150 mm	150 mm	180 mm

Figura (2.8.1). Evaluación de determinante de  $J(\Theta)$ ,  $\Delta J(\Theta)$ , para un manipulador PRRRd cuyas dimensiones se muestran en la tabla.

Para obtener las aceleraciones de las articulaciones como funciones del estado operacional se deriva, respecto del tiempo, la ecuación E(2.27), de esta manera se obtiene la ecuación E(2.32).

$$\ddot{\Theta} = \frac{dJ^{-1}(\Theta)}{dt} \dot{X} + J^{-1}(\Theta) \ddot{X} \quad \text{E(2.32)}$$

Donde se observa nuevamente la participación del inverso del jacobiano que, en los extremos del volumen de trabajo, presenta singularidades. Esto hará crecer mucho la magnitud de cada variable articular en las vecindades y, por consiguiente, se tendrán grandes fuerzas y pares motrices en esas regiones, **Mohammadi (1995)**, **Wenger (1997)**, **Burdick (1995)**. Para un proceso de optimización se deben tener en cuenta esas regiones cuya influencia dinámica sobre el manipulador debe ser suavizada por una buena elección de las longitudes de los eslabones, además de la trayectoria, **Sciavicco y Siciliano (1996)**.

## 2.9. CLASIFICACIÓN DE MANIPULADORES

A partir del manipulador genérico descrito anteriormente, se pueden encontrar grandes grupos de manipuladores dependiendo de la variación de algunos parámetros. Estas variables son las longitudes de los eslabones 2, 3 y 4 cuyo movimiento es rotativo. Las otras características de los eslabones, como espesor, altura, densidad del material constitutivo, etcétera, permanecerán invariantes.

### 2.9.1. CONJUNTO UNIVERSAL DE MANIPULADORES

El conjunto de la ecuación E(2.33) colecciona todos los manipuladores PRRRd posibles para cualquier combinación de longitudes de eslabón  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ .

$$MAN_U = \{MAN(l_1, l_2, l_3) | \forall l_i \in \mathfrak{R}\} \quad \text{E(2.33)}$$

### 2.9.2. SUBCONJUNTOS DE MANIPULADORES

En los siguientes 7 subconjuntos, presentados por las ecuaciones E(2.34)-E(2.40), se desarrolla una clasificación más detallada dependiendo de las longitudes de los eslabones  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ .

Todos estos subconjuntos pertenecen al universal  $MAN_U$ .

$$MAN_{Caso1} = \{MAN(l_1, l_2, l_3) | l_1 = l_2 = l_3\} \quad \text{E(2.34)}$$

$$MAN_{Caso2} = \left\{ \begin{array}{l} l_1 = l_2 \\ MAN(l_1, l_2, l_3) | l_3 > l_1 \\ l_3 > l_2 \end{array} \right\} \quad \text{E(2.35)}$$

$$MAN_{Caso3} = \left\{ \begin{array}{l} l_1 = l_2 \\ MAN(l_1, l_2, l_3) | l_3 < l_1 \\ l_3 < l_2 \end{array} \right\} \quad \text{E(2.36)}$$

$$MAN_{Caso4} = \left\{ \begin{array}{l} l_1 > l_2 \\ MAN(l_1, l_2, l_3) | l_3 = l_1 \\ l_3 > l_2 \end{array} \right\} \quad \text{E(2.37)}$$

$$MAN_{Caso5} = \left\{ \begin{array}{l} l_1 > l_2 \\ MAN(l_1, l_2, l_3) | l_3 < l_1 \\ l_3 = l_2 \end{array} \right\} \quad \text{E(2.38)}$$

$$MAN_{Caso6} = \left\{ \begin{array}{l} l_1 < l_2 \\ MAN(l_1, l_2, l_3) | l_3 = l_1 \\ l_3 < l_2 \end{array} \right\} \quad \text{E(2.39)}$$

$$MAN_{Caso7} = \left\{ \begin{array}{l} l_1 < l_2 \\ MAN(l_1, l_2, l_3) | l_3 > l_1 \\ l_3 = l_2 \end{array} \right\} \quad \text{E(2.40)}$$

Todos estos conjuntos constituyen una partición del universal  $MAN_U$  ya que son disyuntos, exhaustivos y mutuamente excluyentes, ecuación E(2.41), **Obregón, (1984)**. Así, la unión de todos ellos forman la colección universal, ecuación E(2.42).

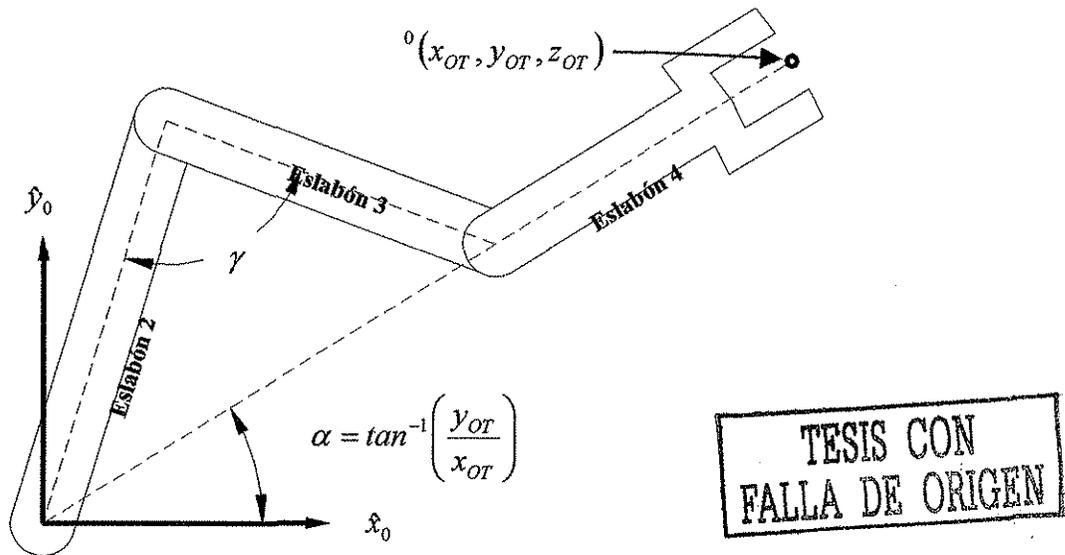
$$\emptyset = MAN_{Caso\ i} \cap MAN_{Caso\ j}; i \neq j \quad \text{E(2.41)}$$

$$MAN_U = MAN_{Caso\ 1} \cup MAN_{Caso\ 2} \cup MAN_{Caso\ 3} \cup MAN_{Caso\ 4} \cup MAN_{Caso\ 5} \cup MAN_{Caso\ 6} \cup MAN_{Caso\ 7} \quad \text{E(2.42)}$$

## 2.10. RESTRICCIONES MECÁNICAS DEL MANIPULADOR GENÉRICO

Existen dos restricciones mecánicas básicas en el manipulador genérico (éstas son impuestas por las restricciones físicas del mecanismo y la transmisión con que cuenta el sistema). Éstas son:

- Para cualquiera de las dos soluciones del espacio operacional, el ángulo entre los eslabones 2 y 3 está comprendido entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$ ,  $\gamma \in [0, \pi]$ .
- El ángulo  $\alpha$ , que define la orientación del órgano terminal del manipulador, es dependiente de la posición del mismo,  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_{OT}}{x_{OT}}\right)$ . Esto implica que la cuarta variable articular  $\theta_4$  es dependiente de la segunda y la tercera,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .



**Figura (2.10.1).** Los ángulos  $\alpha$  y  $\gamma$  están restringidas a ciertas condiciones mecánicas del manipulador.

## 2.11. DISPOSICIÓN DE LOS ACTUADORES

En este trabajo se supone que los actuadores que animan a las dos articulaciones rotacionales están directamente acoplados a ellas. Mientras que para la articulación prismática se tiene un conjunto de piñón-cremallera para la transformación de movimiento rotativo a movimiento lineal.

La articulación dependiente está animada por algún tipo de transmisión que permite que el órgano terminal se oriente con  $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{y_{OT}}{x_{OT}}\right)$ , figura (2.10.1).

Los detalles del conjunto piñón-cremallera que mueve la articulación prismática y del mecanismo actuador de la articulación dependiente no interesan en este trabajo.

## 2.12. CINÉTICA DEL MANIPULADOR

Para determinar los momentos y fuerzas de reacción en las articulaciones y, por consecuencia los pares motrices de las articulaciones, en este trabajo se empleó la formulación de NEWTON-EULER cuyo detalle puede ser revisado en Sciavicco y Siciliano (1996), Juárez (1996) y Craig (1989).

El módulo **DINÁMICA\_4DOF** de la sección A.5.6 del anexo A, procesa esta formulación y entrega las componentes de todas las reacciones de las fuerzas y momentos actuantes en los puntos articulares.

# CAPÍTULO 3

## TORNILLO J

### 3. 1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata, en primer lugar, de la construcción de la estructura matemática del modelo denominado “**Regiones Geométricas Articulares J**” referente a la segunda variable articular”, figura (3.1) o, como será denominada en adelante: “**Tornillo J**”; en segundo lugar, se trata de obtener la primer característica exigida al modelo matemático: debe tener representación geométrica bien definida en la cual se puede apreciar, entre otras cosas, el comportamiento dinámico del manipulador para cada punto operacional: pendientes, amplitud del volumen de trabajo, etc.

El “**Tornillo J**” es una representación del modelo matemático inverso de la segunda variable articular particular al manipulador que aquí se trata. Dadas las coordenadas cilíndricas de todo el espacio operacional, se obtiene todo el espacio que ocupa la segunda variable articular, formando un helicoide de donde proviene el nombre de *tornillo*.

Esta representación del modelo matemático inverso del manipulador es importante porque ayuda a formar familias de individuos genotípicos<sup>1</sup> con características muy particulares y que, mediante el método de búsqueda evolutiva, denominado algoritmos genéticos, se pretende, por un lado, obtener la mejor configuración mecánica de la cadena cinemática, por el otro, el mejor perfil de trayectoria, dentro del universo de perfiles de grado 8 tratados en este trabajo.

Cabe destacar que esta representación, un tanto abstracta, del modelado inverso del manipulador es de naturaleza única y original, por lo que es necesario presentar el marco teórico que sustenta esta manera de presentar el modelo inverso de la cadena cinemática.

### 3. 2. MARCO TEÓRICO DEL TORNILLO J

Básicamente la tarea operacional está descrita por 3 grados de libertad que son las componentes del vector  ${}^0OT = [ {}^0x_{ot} \quad {}^0y_{ot} \quad {}^0z_{ot} ]$  que pertenece al subespacio operacional de posición. La orientación depende de la posición del órgano terminal (segunda restricción del manipulador genérico, punto 2.10 del capítulo 2), esto es,  $\alpha = 2\text{Atan}({}^0y_{ot} / {}^0x_{ot})$ , ya que la línea[M-OT] siempre es radial al primer eje articular, según se puede observar en la figura (3.2).

---

<sup>1</sup> Genotipo: cadena de genes o caracteres que representan un y solamente un manipulador

Aunque el manipulador cuenta con 4 articulaciones, es necesario recordar que la última articulación rotativa es dependiente de las dos anteriores, como se explicó en el capítulo 2 anterior y en las justificaciones 6 y 7 de la sección 1.3 del capítulo 1. Así, el manipulador, al igual que la tarea, tiene 3 grados de libertad.

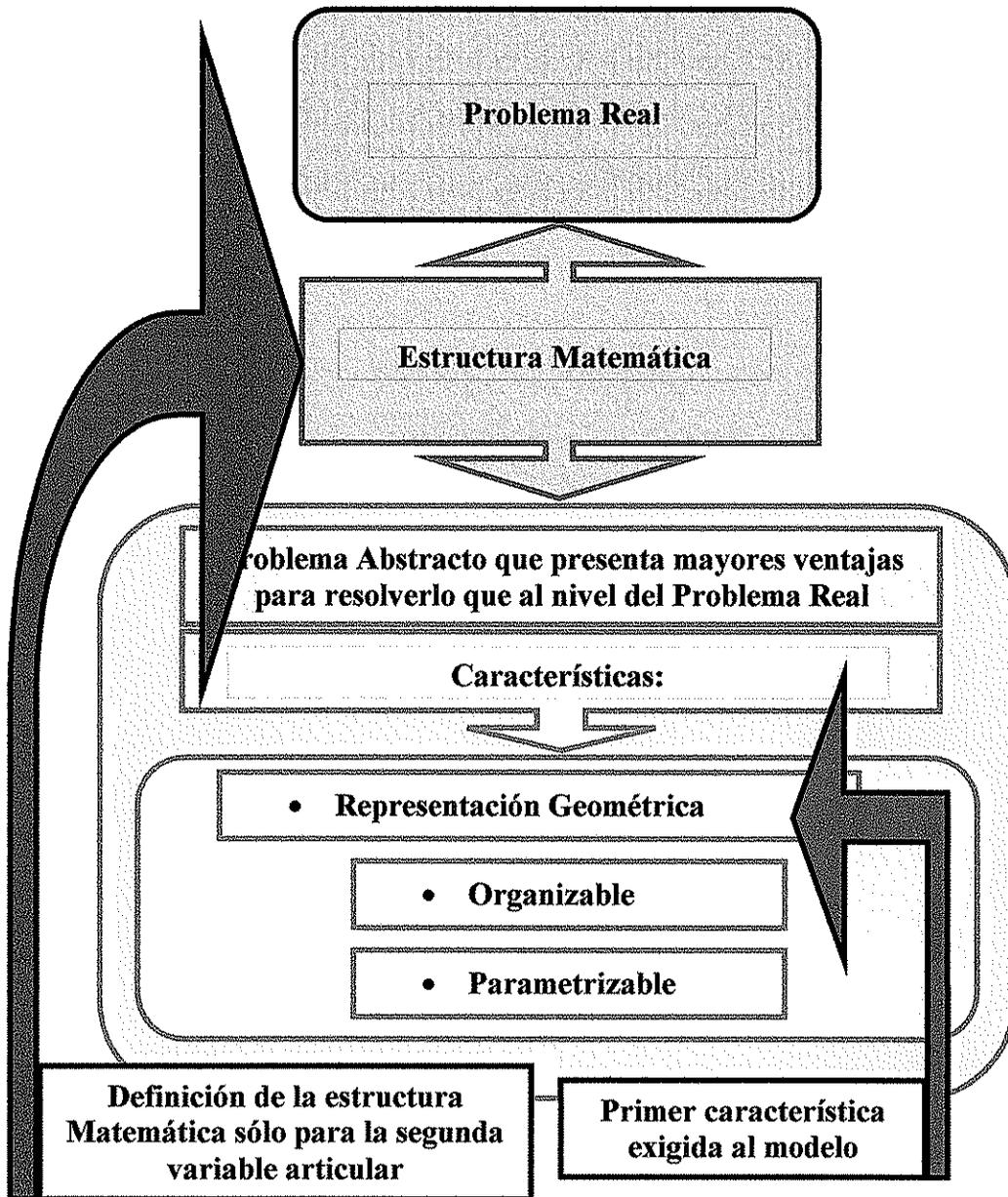
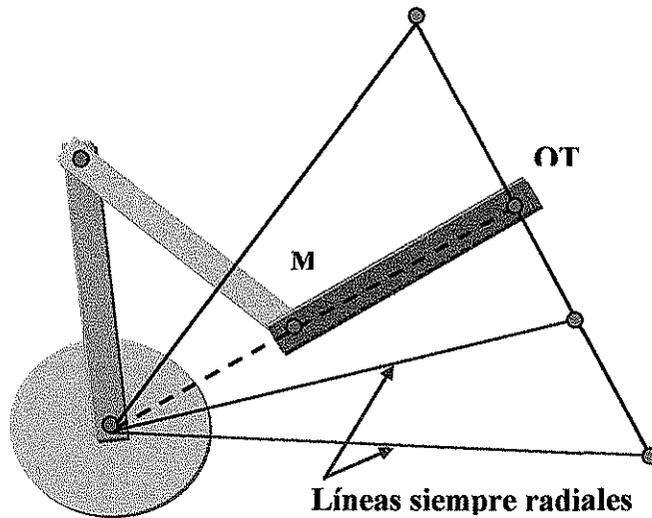


Figura (3.1). En este capítulo se tratan los puntos indicados por las flechas en lo referente a región geométrica de la segunda variable articular denominada "Tornillo J".



**Figura (3.2).** La línea [M-OT] siempre es radial al primer eje. Esto indica que la última articulación es dependiente de las dos rotacionales anteriores.

El vector que define las coordenadas del órgano terminal,  ${}^0OT$ , en coordenadas cartesianas, también puede representarse por coordenadas cilíndricas de la siguiente manera (ecuación E(3.1)).

$${}^0OT = \begin{pmatrix} \alpha \\ r \\ {}^0z_{ot} \end{pmatrix}$$

E(3.1)

Donde  $\alpha$  es el desplazamiento angular alrededor del eje vertical y que define la orientación del órgano terminal, mientras que  $r$  representa el desplazamiento lineal radial.  $z_{ot}$  representa la coordenada operacional en la dirección vertical cartesiana. Ver figura (3.3) siguiente.

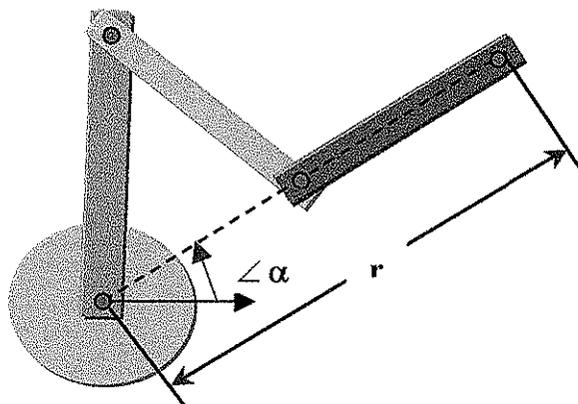


Figura F(3.3). Definición de la distancia radial  $r$  y del ángulo de orientación  $\alpha$ .

La magnitud de la segunda variable articular se debe a la aportación de dos elementos. Estos son las magnitudes angulares  $\alpha$  y  ${}_i\beta$ ,  $i=1, 2$ ; figura (3.4) y ecuación E(3.2).

$${}_i\theta_2 = \alpha + {}_i\beta; \quad i = 1, 2$$

E(3.2)

La unicidad de soluciones del espacio operacional es  $U=2$ , por esta razón se presentan dos valores de  $\beta$  como se aprecia en las figuras (2.4.1) y (3.4) siguiente.

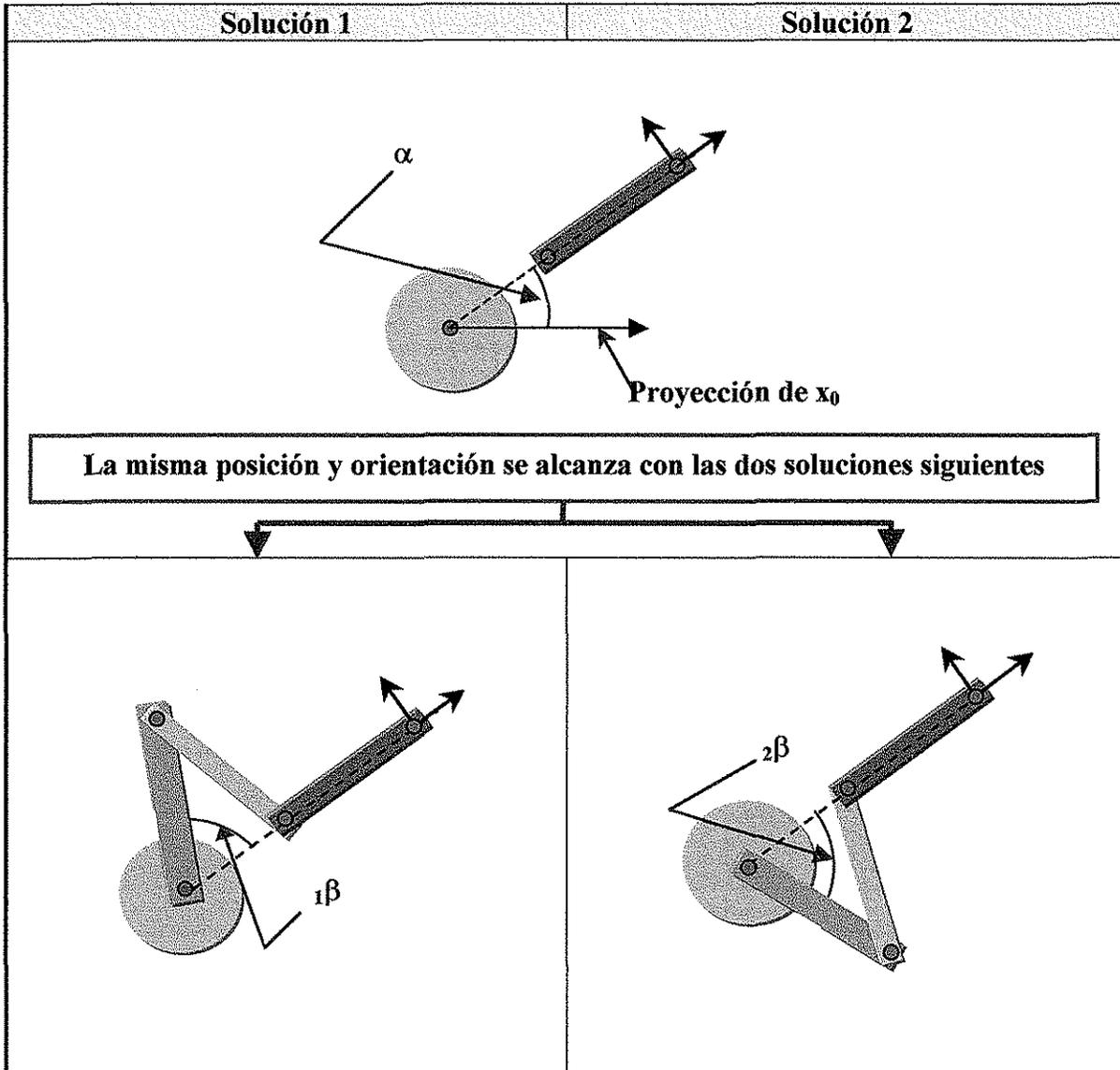


Figura (3.4). Dos soluciones del mismo estado operacional,  $U=2$ .

El elemento  $\alpha$  permite orientar el órgano terminal, mientras que  $i\beta$  permite variar la magnitud  $r$  radial.

Uniendo un sistema de referencia al manipulador de tal suerte que este sistema de referencia esté colocado de la siguiente manera: su origen coincidente con el punto  $H'$  que representa el corte entre la línea de acción del eje 0 y la extensión de la línea [M-OT]. Su

primer elemento,  $x_r$ , unitario, tiene su línea de acción sobre la extensión de la línea [M-OT] y sentido hacia el punto OT. Su tercer elemento,  $z_r$ , tiene la misma magnitud, dirección y sentido que el tercer elemento de la base inercial  $\{0\}$ ,  $z_0$ . Su segundo elemento colocado apropiadamente según  $z_r \otimes x_r$  (ver figura (3.5)).

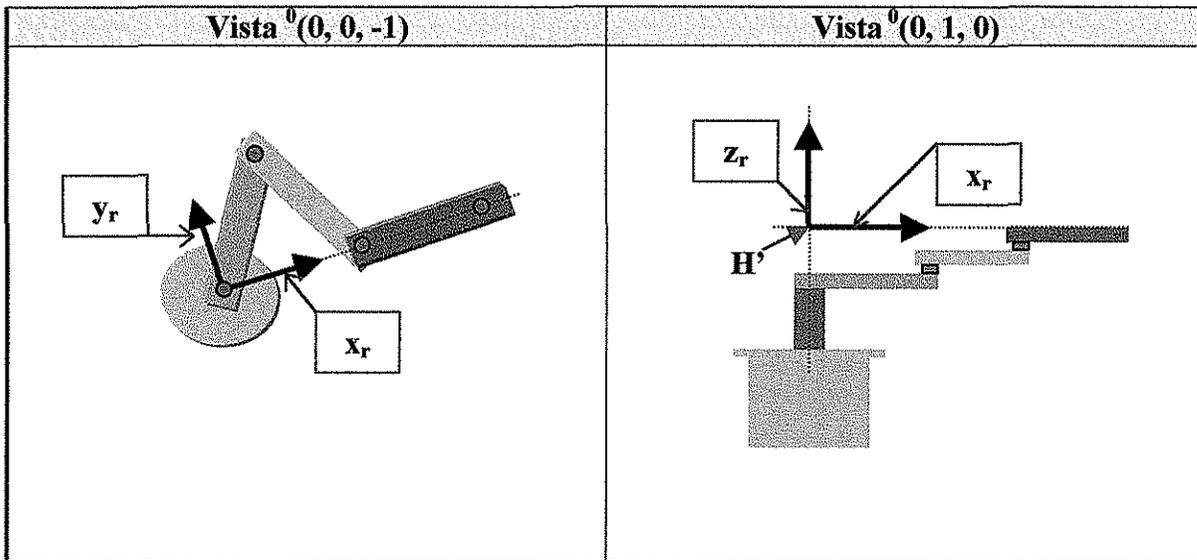


Figura (3.5). Descripción espacial de  $\{r\}$ .

La posición espacial de  $\{r\}$  respecto de  $\{0\}$ , como se muestra en la figura (3.5) anterior, está indicada en la ecuación E(3.3) siguiente.

$${}^0\{r\} = \left\{ \left( {}^0z_0 {}^0z_0^T + \text{Cos}\alpha \left( I_{3 \times 3} - {}^0z_0 {}^0z_0^T \right) + \text{Sen}\alpha \left( {}^0z_0 \otimes \right) \right); d_1 + \sum_{i=1}^3 e_i + 2\Delta z \right\} \tag{E(3.3)}$$

Los vectores  ${}_1\beta^r z_r$ , que están medidos en el sistema  $\{r\}$ , tiene las magnitudes siguientes (ecuaciones E(3.4) y E(3.5)).

$${}_1\beta = \text{ArcCos} \left( \frac{(r - l_3)^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1(r - l_3)} \right) \tag{E(3.4)}$$



y

$${}_2\beta = -\text{ArcCos}\left(\frac{(r-l_3)^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1(r-l_3)}\right) \quad \text{E(3.5)}$$

El vector  ${}_i p_\beta$ , medido en el sistema de referencia  $\{r\}$ , se puede definir como una combinación lineal de la manera indicada por la ecuación E(3.6).

$${}_i p_\beta = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ {}_i\beta \end{pmatrix} = r \cdot {}_r x_r + {}_i\beta \cdot {}_r z_r \quad \text{E(3.6)}$$

Si se hace variar el parámetro  $r$  desde el radio interior,  $r_{\min}$ , hasta el radio exterior del volumen de trabajo,  $r_{\text{vl}}$ , y para cada  $i = 1, 2$ , de forma separada, se forman 2 conjuntos,  ${}_1 p_\beta^{RG}$  y  ${}_2 p_\beta^{RG}$ , que son los contornos de una región geométrica que se denomina como “Diente del Tornillo J”<sup>2</sup>.

Esos dos conjuntos se denominan como “Casco superior del Diente del Tornillo J” y “Casco inferior del Diente del Tornillo J”

### DEFINICIÓN 3.1

Se denomina como “Casco Superior del Diente del Tornillo J” al conjunto  ${}_1 p_\beta^{RG}$ , correspondiente a la solución 1, que colecciona todos los elementos  ${}_i p_\beta$  que se obtienen para todo  $r \in [r_{\min}, r_{\text{vl}}]$ .

$${}_1 p_\beta^{RG} = \{ {}_i p_\beta \mid \forall r \in [r_{\min}, r_{\text{vl}}] \bullet \forall {}_i\beta(r) \in [0, \beta_{\max}] \} \quad \text{E(3.7)}$$

□

<sup>2</sup> Todas las denominaciones de las Regiones Geométricas Articulares como el Tornillo J, Tuerca J y sus dientes con sus respectivos cascos son responsabilidades atribuidas al autor de este trabajo.

**DEFINICIÓN 3.2**

Se denomina como “**Casco Inferior del Diente del Tornillo J**” al conjunto  ${}^r_2P_\beta^{RG}$ , correspondiente a la solución 2, que colecciona todos los elementos  ${}^r_2p_\beta$  que se obtienen para todo  $r \in [r_{min}, r_{vt}]$ .

$${}^r_2P_\beta^{RG} = \{ {}^r_2p_\beta \mid \forall r \in [r_{min}, r_{vt}] \bullet \forall_2 \beta(r) \in [\beta_{min}, 0] \mid |\beta_{max}| = |\beta_{min}| \}$$

**E(3.8)**

□

**DEFINICIÓN 3.3**

Se denomina como “**Diente del Tornillo J**” al conjunto  ${}^r_U P_\beta^{RG}$  que es la región geométrica que colecciona los elementos del casco superior e inferior del diente del tornillo J.

$${}^r_U P_\beta^{RG} = {}^r_1P_\beta^{RG} \cup {}^r_2P_\beta^{RG} = \left\{ \begin{array}{l} {}^r_i p_\beta \mid \forall r \in [r_{min}, r_{vt}] \bullet ( \forall_1 \beta(r) \in [0, \beta_{max}] \bullet \forall_2 \beta(r) \in [\beta_{min}, 0] ); \\ |\beta_{max}| = |\beta_{min}|; \quad i = 1, 2 \end{array} \right\}$$

**E(3.9)**

□

El diente del Tornillo J representa, por lo tanto, el universo de posibilidades del vector  ${}^r_i p_\beta$ ,  $i = 1, 2$ , ecuaciones E(3.7), E(3.8) y E(3.9).

Este tornillo presenta ciertas características, como el tipo de diente y su paso. En la siguiente sección se describen estos parámetros.

### 3.2.1. PARÁMETROS DEL TORNILLO J

Al igual que un tornillo común, el “Tornillo J” presenta ciertos parámetros que lo definen completamente. Estos son:

- Características del diente de su cuerda.
  - a) Diente cóncavo o convexo.
  - b) Profundidad del diente.
  - c) Tipo de raíz del diente
  - d) Amplitud del diente
- Paso del tornillo

#### CARACTERÍSTICAS DEL DIENTE

El “Diente del tornillo J”,  $r_{Up\beta}^{RG}$ , puede ser clasificado según la forma de su casco, el tipo de raíz y la profundidad de ésta. Su casco puede ser *cóncavo* o *convexo* (ver Márquez (1987), pp. 31-62), su raíz<sup>3</sup> puede ser *abierta* o *cerrada* y su profundidad variante, figuras (3.6), (3.9) y (3.13). Todas estas características dependen de las relaciones que guardan las longitudes de los eslabones,  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  del manipulador.

Existen tres tipos básicos de dientes o formas bien definidas en las que se puede presentar el conjunto  $r_{Up\beta}^{RG}$ , que son:

- **Diente Tipo 1.** Con casco convexo, raíz abierta y profundidad mayor comparada con la de los otros tipos de dientes.
- **Diente Tipo 2.** Con casco Convexo, raíz cerrada y profundidad menor a la del diente tipo 1.
- **Diente Tipo 3.** Con casco cóncavo, raíz abierta y profundidad menor a la del diente tipo 1.

---

<sup>3</sup> La raíz del diente coincide, en todos los casos, con el radio interno del volumen de trabajo y, el que sea abierta significa que, para un manipulador PRRRd totalmente retraído, el punto del casco superior no coincide con el correspondiente al casco inferior; en caso contrario es de raíz cerrada.

**DIENTE TIPO 1**

**DEFINICIÓN 3.4**

El “**Diente tipo 1**” del Tornillo J se obtiene con  $l_1=l_2$  y variando  $r$  desde  $r_{min}=l_3$  hasta  $r_{max}=rvt=\sum_{i=1}^3 l_i$ . Este Conjunto es la unión de los universales de cada solución.

$${}^r U P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1} = {}^r {}_1 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1} \cup {}^r {}_2 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1} \tag{E(3.10)}$$

□

Este tipo de diente se presenta en la figura (3.6) y sus características se muestran en la tabla (3.1)

Su amplitud máxima, que es de  ${}_1\beta = (\pi/2)$  y  ${}_2\beta = -(\pi/2)$ , se alcanza para un valor de  $r = l_3$ . Su casco es convexo, su raíz es abierta con profundidad  $l_3$  y su longitud es de  $LdTJ = l_1+l_2$ .

Tipo de Diente	Amplitud Máxima	Tipo de Casco	Tipo de Raíz	Profundidad de la Raíz	Longitud del Diente
Tipo 1	${}_1\beta = +(\pi/2)$ ${}_2\beta = -(\pi/2)$	Convexo	Abierta	$l_3$	$l_1+l_2$

Tabla (3.1). Características del diente TIPO 1.

También, los dos cascos del diente tipo 1,  ${}^r {}_1 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1}$  y  ${}^r {}_2 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1}$ , tienen un elemento común que es el que se encuentra cuando  $r = \sum_{i=1}^3 l_i$  (ecuación E(3. 11)).

$${}^r {}_1 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1} \cap {}^r {}_2 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO1} = \left\{ {}^r P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} \Big|_{TIPO1} = {}^r P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} = {}^r {}_1 P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} = {}^r {}_2 P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} = \left( \sum_{i=1}^3 l_i \quad 0 \quad {}_{1,2}\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right) \right)^T \right\} \tag{E(3. 11)}$$



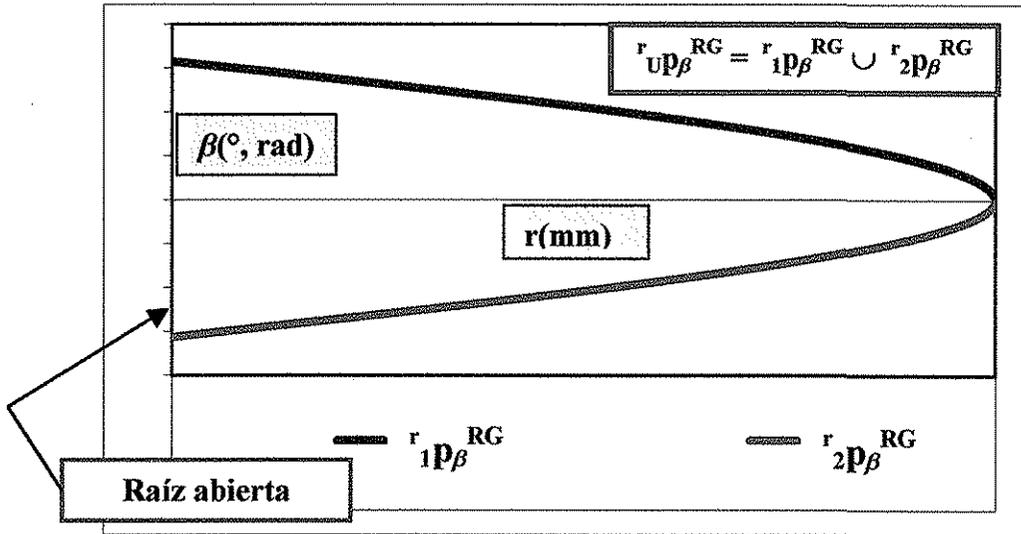


Figura (3. 6). Diente tipo 1. Casco  $r_{up\beta}^{RG}$  convexo con raíz abierta.

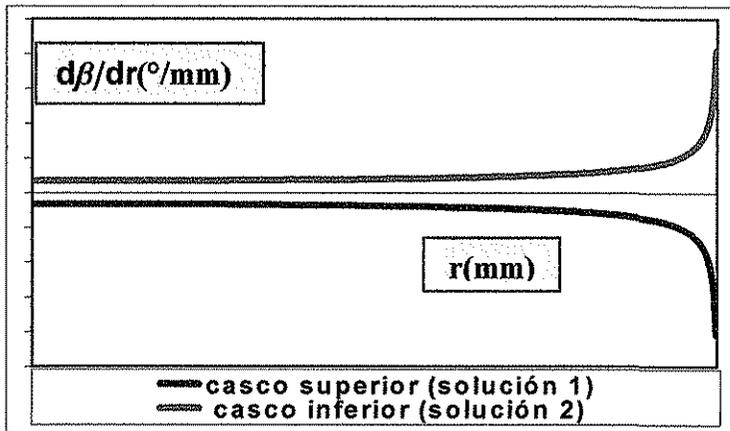


Figura (3.7). Variación o caída de los cascos del diente respecto de  $r$ . Se presenta un comportamiento asintótico cerca del límite externo del volumen de trabajo del manipulador.

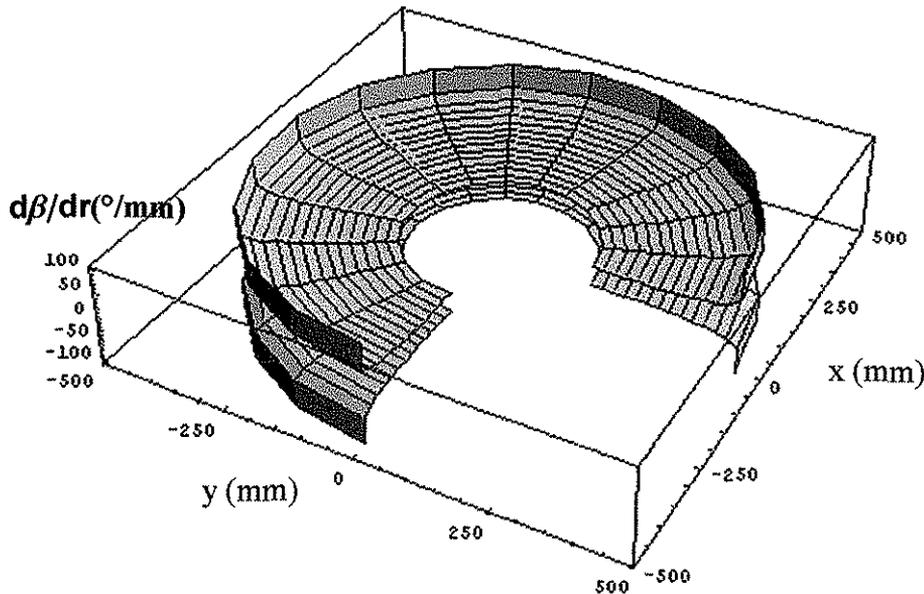


Figura (3.8). Variación o caída de los cascos del diente respecto de r en todo el espacio operacional. Comportamiento asintótico cerca del límite externo del volumen de trabajo del manipulador. Los datos que se emplearon en esta figura son  $l_1=150$  mm,  $l_2=150$  mm y  $l_3=180$  mm

**DIENTE TIPO 2**

**DEFINICIÓN 3.5**

El “Diente tipo 2” del Tornillo J se obtiene con  $l_1 > l_2$  y variando r desde  $r_{min}=l_1-l_2+l_3$  hasta  $r_{max}=rvt = \sum_{i=1}^3 l_i$ . Este Conjunto abarca los universales de cada solución.

$${}^r U P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2} = {}^r_1 P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2} \cup {}^r_2 P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2}$$

E(3.12)

□



Este tipo de diente se presenta en la figura (3.9) y sus características se muestran en la tabla (3.2).

Su amplitud máxima ( ${}_{1}\beta_{\max} = -{}_{2}\beta_{\max}$ ) se alcanza para un valor de  $r = \sqrt{l_1^2 - l_2^2}$ . Su casco es convexo, su raíz es cerrada con profundidad  $l_1 - l_2 + l_3$  y su longitud es de  $Ld_{TJ} = 2(l_2)$ .

Tipo de Diente	Amplitud Máxima	Tipo de Casco	Tipo de Raíz	Profundidad de la Raíz	Longitud del Diente
Tipo 2	${}_{1}\beta = + \text{Cos}^{-1} \left( \sqrt{(l_1^2 - l_2^2) / l_1^2} \right)$ ${}_{2}\beta = - \text{Cos}^{-1} \left( \sqrt{(l_1^2 - l_2^2) / l_1^2} \right)$	Convexo	Cerrado	$l_1 - l_2 + l_3$	$2(l_2)$

Tabla (3.2). Características del diente TIPO 2.

También, los dos cascos del diente tipo 2,  ${}^r_1 P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2}$  y  ${}^r_2 P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2}$ , tienen dos elementos comunes que son los que se encuentran cuando 1)  $r = \sum_{i=1}^3 l_i$  y 2)  $r = l_1 - l_2 + l_3$  (ecuación E(3.13)).

$${}^r_1 P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2} \cap {}^r_2 P_{\beta}^{RG} |_{TIPO2} = \left\{ {}^r P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)}, {}^r P_{\beta (l_1 - l_2 + l_3)} \right\} \cdot \left[ \begin{array}{l} \left( {}^r P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} = {}^r_1 P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} = {}^r_2 P_{\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right)} = \right) \\ \left( \left( \sum_{i=1}^3 l_i \quad 0 \quad \beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right) \right)^T \right) \\ \left( {}^r P_{\beta (l_1 - l_2 + l_3)} = {}^r_1 P_{\beta (l_1 - l_2 + l_3)} = {}^r_2 P_{\beta (l_1 - l_2 + l_3)} = \right) \\ \left( \left( (l_1 - l_2 + l_3) \quad 0 \quad \beta (l_1 - l_2 + l_3) \right)^T \right) \end{array} \right]$$

**E(3.13)**



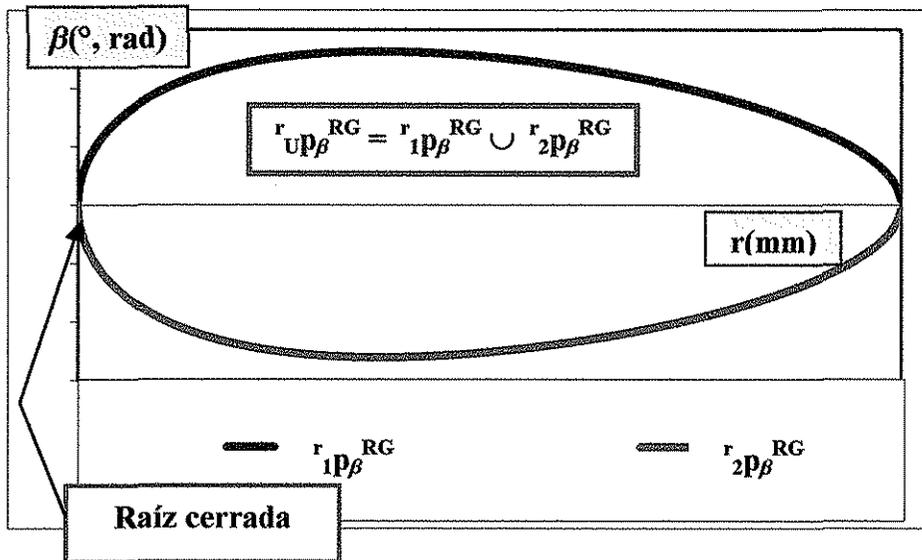


Figura (3.9). Diente tipo 2. Casco  $r_{UP\beta}^{RG}$  convexo con raíz cerrada.

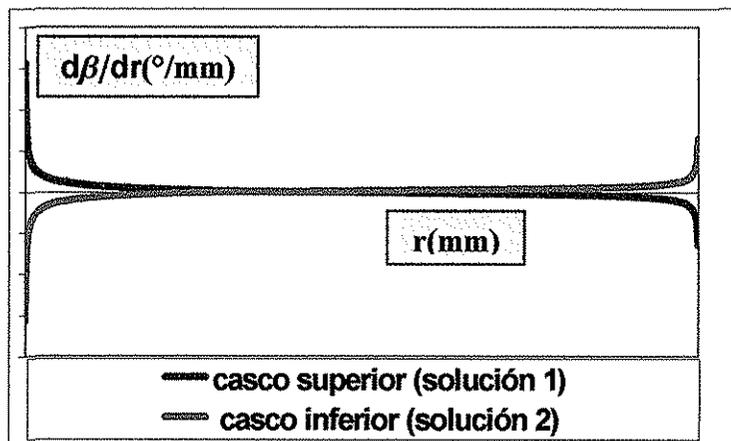


Figura (3.10). Variación o caída de los cascos del diente tipo 2 respecto de  $r$ . Comportamiento asintótico cerca de los límites interno y externo del volumen de trabajo del manipulador.

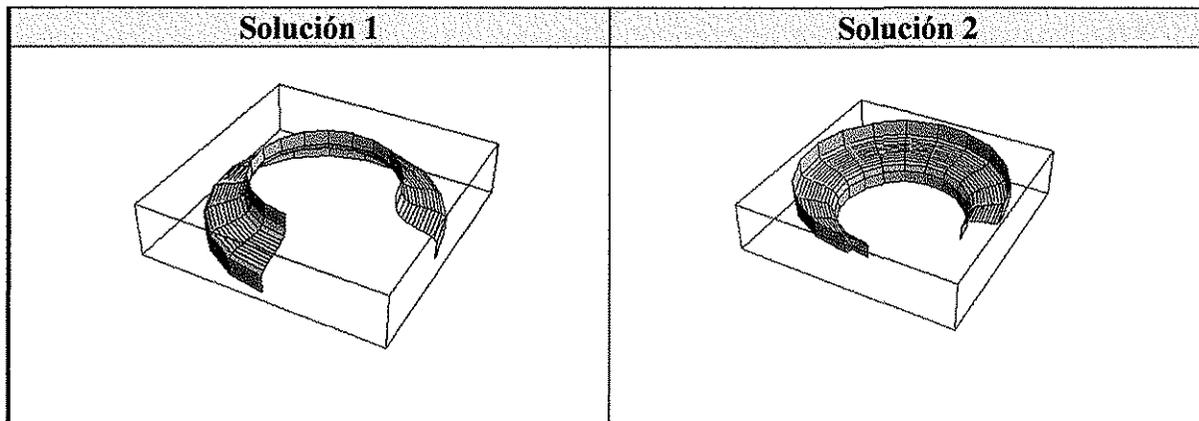


Figura (3.11). Variación o caída de los cascos del diente tipo 2 respecto de  $r$  y  $\alpha$ . Comportamiento asintótico cerca de los límites interno y externo del volumen de trabajo del manipulador.

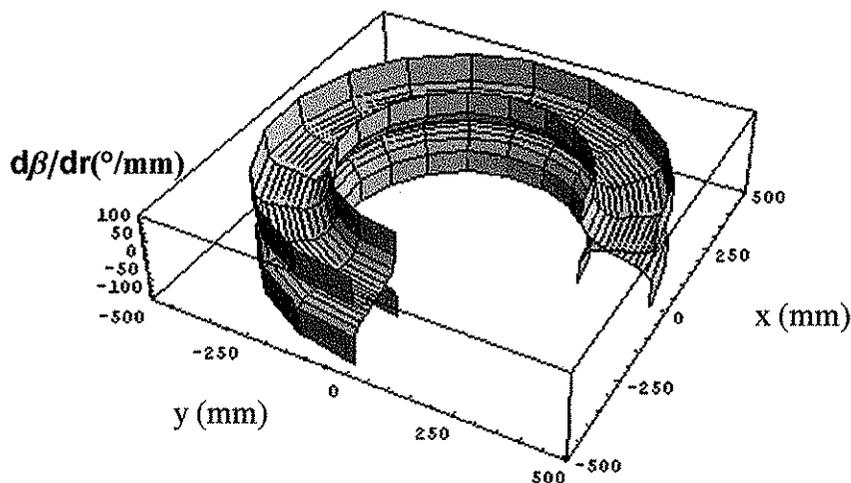


Figura (3.12). Variación de los cascos del diente tipo 2 respecto de  $r$  y  $\alpha$ . Comportamiento asintótico cerca de los límites interno y externo del volumen de trabajo del manipulador. Para la generación de las superficies se empleó  $l_1=150$  mm,  $l_2=150$  mm y  $l_3=180$  mm.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**DIENTE TIPO 3**

**DEFINICIÓN 3.6**

El “Diente tipo 3” del tornillo J se obtiene con  $l_1 < l_2$  y variando  $r$  desde  $r_{\min} = -l_1 + l_2 + l_3$  hasta  $r_{\max} = r_{vt} = \sum_{i=1}^3 l_i$ . Este Conjunto abarca los universales de cada solución.

$${}^r P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3} = {}^1 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3} \cup {}^2 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3} \tag{E(3.14)}$$

□

Este tipo de diente se presenta en la figura (3.13). Se obtiene cuando  $l_1 < l_2$  sin importar la longitud del tercer eslabón.

Su amplitud máxima, que es de  ${}_1\beta = \pi$  y  ${}_2\beta = -\pi$ , se alcanza para un valor de  $r = r_{\min} = -l_1 + l_2 + l_3$ . Su casco es cóncavo, su raíz es cerrada con profundidad  $-l_1 + l_2 + l_3$  y su longitud es de  $LdTJ = 2(l_1)$  (ver tabla (3.3)).

Tipo de Diente	Amplitud Máxima	Tipo de Casco	Tipo de Raíz	Profundidad de la Raíz	Longitud del Diente
Tipo 3	${}_1\beta = +\pi$ ${}_2\beta = -\pi$	Cóncavo	Cerrado	$-l_1 + l_2 + l_3$	$2(l_1)$

Tabla (3.3). Características del diente TIPO 3.

Los dos cascos del diente tipo 3,  ${}^1 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3}$  y  ${}^2 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3}$ , tienen un elemento común que es el que se encuentra cuando  $r = \sum_{i=1}^3 l_i$  (ecuación E(3.15)).

$${}^1 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3} \cap {}^2 P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3} = \left\{ {}^r P_{\beta} \Big|_{\left(\sum_{i=1}^3 l_i\right)} \right\} = \left( \sum_{i=1}^3 l_i \quad 0 \quad {}_{1,2}\beta \left( \sum_{i=1}^3 l_i \right) \right)^T \tag{E(3.15)}$$



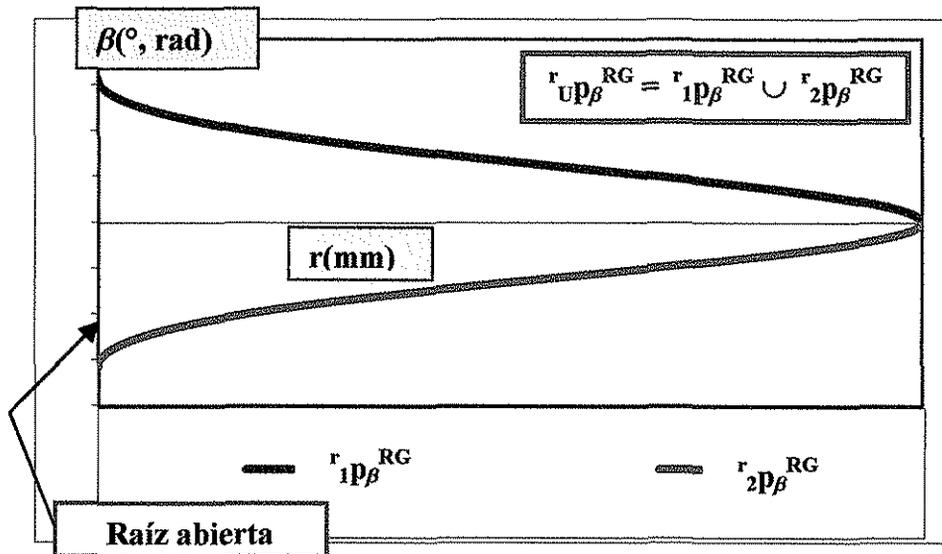


Figura (3.13). Diente tipo 3. Casco  $r_{up\beta}^{RG}$  convexo con raíz cerrada.

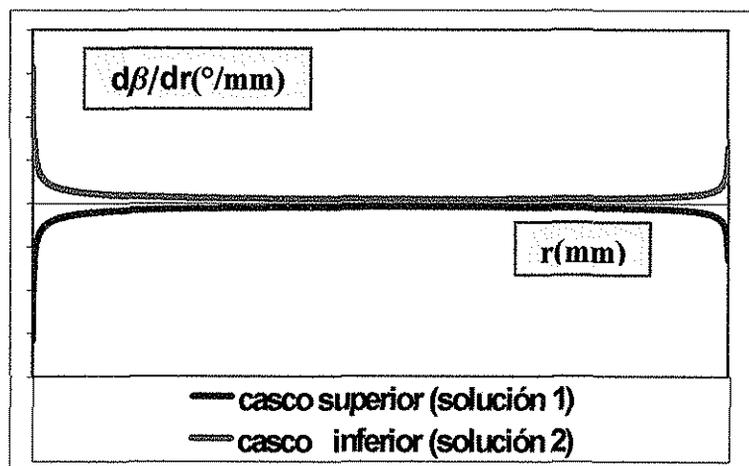


Figura (3.14). Variación de los cascos del diente tipo 3 con respecto de  $r$ . Comportamiento asintótico cerca de los límites interno y externo del volumen de trabajo del manipulador.

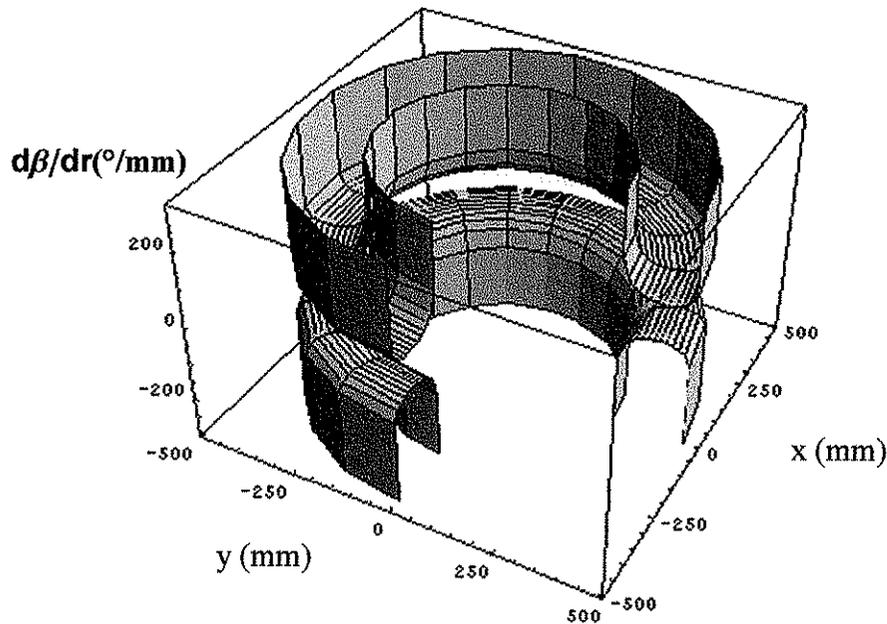


Figura (3.15). Variación de los cascos del diente tipo 3 con respecto de  $r$ . Comportamiento asintótico cerca de los límites interno y externo del volumen de trabajo del manipulador.

### DEFINICIÓN 3.7

Se denominan como “**Dientes Semejantes**” a aquellos dientes tipo 1, 2 y 3 que presentan las características de los CRITERIOS  $(m, n)$  descritas en la tabla (3.4) siguiente.

	Características
<b>Criterio m</b>	
Longitud del 4º. Eslabón entre manipuladores de diente tipo 1 y diente tipo2	$l_3 _{TIPO1} = l_3 _{TIPO2}$
Longitud del 4º. Eslabón entre manipuladores de diente tipo 1 y diente tipo3	$l_3 _{TIPO1} = l_3 _{TIPO3}$
Longitud del 4º. Eslabón entre manipuladores de diente tipo 2 y diente tipo3	$l_3 _{TIPO2} = l_3 _{TIPO3}$
<b>Criterio n</b>	
Longitud de la sub cadena rotativa entre manipuladores de diente tipo 1 y diente tipo2	$\sum_{i=1}^3 l_i _{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i _{TIPO2}$
Longitud de la sub cadena rotativa entre manipuladores de diente tipo 1 y diente tipo3	$\sum_{i=1}^3 l_i _{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i _{TIPO3}$
Longitud de la sub cadena rotativa entre manipuladores de diente tipo 2 y diente tipo3	$\sum_{i=1}^3 l_i _{TIPO2} = \sum_{i=1}^3 l_i _{TIPO3}$

Tabla (3.4). Características de Dientes Semejantes.

□

**PROFUNDIDAD DEL DIENTE**

Otra de las características del diente del “Tornillo J” es la profundidad de su raíz. Esta distancia determina la magnitud del volumen de trabajo, tal que entre menos profundo sea la raíz del diente (o mayor la longitud del diente) mayor es el volumen. Puede apreciarse en la figura (3.16) que el diente tipo 1 es más largo o menos profundo que los otros dos (Siempre y cuando se cumpla con la DEFINICIÓN 3.7 referente a “Dientes Semejantes”

donde la longitud  $l_3$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i$  se mantiene constantes para los tres tipos), por lo tanto, la profundidad de la raíz del diente más la longitud del diente es igual al radio externo o mayor del cilindro que forma el volumen de trabajo, ver tabla (3.5).



El problema, en este momento, consiste en probar que el tipo 1 de entre los dientes es el más largo bajo la definición de “Dientes Semejantes”; esto es muy importante porque la solución a este problema ayudará a evaluar el tipo de manipulador, que es uno de los objetivos del trabajo.

### VARIACIÓN DE LA LONGITUD DEL DIENTE DEL TORNILLO DEPENDIENDO DE SU TIPO

En el anexo C se presentan las pruebas de los lemas y teoremas que demuestran qué diente semejante es el más largo.

Para determinar qué longitud del diente es mayor, con las restricciones de “Dientes Semejantes” (ver tabla (3.4)), se establecen el **TEOREMA 3.1** (referente a la relación del diente tipo 1 con el diente tipo 2), **TEOREMA 3.2** (referente a la relación del diente tipo 1 con el diente tipo 3), **TEOREMA 3.3** (referente a la relación del diente tipo 2 con el diente tipo 3) y **TEOREMA 3.4** (teorema general sobre la relación de la longitud del diente  $V$  respecto del diente  $W$ , donde  $V$  y  $W$  pueden tomar los valores de 1, 2 y/ó 3).

Para establecer (y probar) los teoremas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4 es importante establecer, antes, los **LEMAS 3.1-3.9** que se refieren a la relación que guardan los eslabones de los manipuladores correspondientes a los tres tipos de dientes de los tornillos J, sometidos a las restricciones de la definición 3.7.

Los primeros cuatro Lemas (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4) tratan el manipulador cuyo diente es del tipo 1 comparado contra el manipulador cuyo diente corresponde al tipo 2.

Los cuatro siguientes (Lemas 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8) tienen que ver con la comparación entre un manipulador cuyo diente es del tipo 1 y un manipulador cuyo diente es del tipo 3.

El último Lema 3.9 tiene que ver con la comparación de un manipulador cuyo diente es del tipo 2 comparado con otro cuyo diente es del tipo 3.

## AMPLITUD DEL DIENTE DEL TORNILLO J

### DEFINICIÓN 3.8

Se denomina “Amplitud del diente” o AmpDTJ al máximo valor de  $\beta$  en todo el intervalo  $[r_{\min}, r_{\text{vt}}]$ , esto es  $\text{AmpDTJ} = |\beta_{\max}|$ ;  $i = 1, 2$ .

### POSTULADO 3.1

Si  $r \in P_{\beta}^{RG} \Big|_{\text{TPO1}}$ , entonces  $\text{AmpDTJ} = \frac{\pi}{2}$ .

□

### TEOREMA 3.5

Si  $r \in P_{\beta}^{RG} \Big|_{\text{TPO2}}$ , entonces  $\text{AmpDTJ} = \left| \beta \left( l_3 + \sqrt{l_1^2 - l_2^2} \right) \right|$ ;  $i = 1, 2$ .

### PRUEBA

La prueba se obtiene al encontrar  $r$  que satisface  $\frac{d_i \beta(r)}{dr} = 0$

$$\frac{d_i \beta(r)}{dr} = \pm \frac{-l_1^2 + l_2^2 + (l_3 - r)^2}{2l_1 \sqrt{1 - \frac{(l_1^2 - l_2^2 + (l_3 - r)^2)^2}{4l_1^2 (l_3 - r)^2}} (l_3 - r)^2}$$

Las raíces son  $r = ( l_3 \pm \sqrt{l_1^2 - l_2^2} )$

El valor de  $r = ( l_3 - \sqrt{l_1^2 - l_2^2} )$  queda fuera de  $[r_{\min}, r_{\text{vt}}]$ , por lo tanto, la raíz

$r = ( l_3 + \sqrt{l_1^2 - l_2^2} )$  satisface a  $\frac{d_i \beta(r)}{dr} = 0$ .

□

**POSTULADO 3.2**

Si  $\frac{r}{U} P_{\beta}^{RG} \Big|_{TIPO3}$ , entonces  $AmpDTJ = \pi$ .

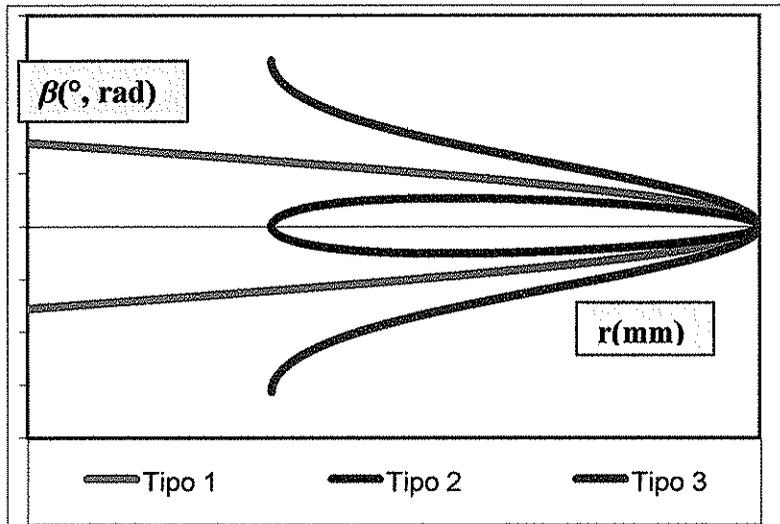
□

Se pueden resumir las características de los diferentes tipos de los dientes de los tornillos J en la tabla (3.5) siguiente.

Características ↓	Diente ⇒	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3
Profundidad de la raíz del diente, $P_{diente}$		$l_3$	$l_1 - l_2 + l_3$	$-l_1 + l_2 + l_3$
Longitud del Diente, $L_{dTJ}$		$l_1 + l_2$	$2*(l_2)$	$2*(l_1)$
Radio externo del volumen del trabajo, $r_{vt} = P_{diente} - L_{dTJ}$		$(l_1 + l_2) + l_3$	$l_1 + l_2 + l_3$	$l_1 + l_2 + l_3$
Radio interno del volumen del trabajo, $r_{vmin} = P_{diente}$		$l_3$	$l_1 - l_2 + l_3$	$-l_1 + l_2 + l_3$
Volumen del trabajo, $V_{trabajo} = \pi(r_{vt}^2 - r_{vmin}^2)l_1$		$\pi d_1 4(l_1^2 + l_1 l_3) = \pi d_1 4(l_2^2 + l_2 l_3)$	$4\pi d_1 (l_1 l_2 + l_2 l_3)$	$4\pi d_1 (l_1 l_2 + l_1 l_3)$

Tabla (3.5). Longitudes de los dientes y las profundidades de sus respectivas raíces, así como su relación con sus respectivos volúmenes de trabajo.





**Figura (3.16).** Dientes tipos 1, 2 y 3. Variación de las longitudes de los dientes y las respectivas profundidades de sus raíces para manipuladores semejantes, obedeciendo los Teoremas 3.1, 3.2 y 3.3, presentados en el anexo C.

### 3.2.2. RELACIONES IMPORTANTES

Los **TEOREMAS 3.3** y **3.4** (anexo C) establecen que la longitud de los “Dientes de los Tornillos J” semejantes, según  $(m,n)$  (**DEFINICIÓN 3.7**) pueden ser  $LdTJ|_{TIPO2} > LdTJ|_{TIPO3}$ ,  $LdTJ|_{TIPO2} < LdTJ|_{TIPO3}$  o  $LdTJ|_{TIPO2} = LdTJ|_{TIPO3}$ . En las figuras (3.18), (3.19) y (3.20) se presentan varios casos en los cuales  $LdTJ|_{TIPO2} = LdTJ|_{TIPO3}$ , esto sólo es posible cuando las relaciones entre los eslabones 3 y 4 de los respectivos manipuladores involucrados son las siguientes:  $l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO3}$  y  $l_2|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3}$  (**LEMA\_3.9**).

Estos manipuladores reciben el nombre especial de “**Manipuladores Semejantes Antisimétricos**”, cuya definición y sus propiedades se formalizan en el capítulo 4, referente a la Tuerca J, ya que se requiere completar el par Tornillo-Tuerca, que representan las *Regiones Geométricas Articulares J* de este trabajo.

En las figuras (3.18), (3.19) y (3.20) se presentan los resultados de los dientes de los Tornillos J de los manipuladores cuyas longitudes de los eslabones se exhiben en la

Tabla(3.6). Dicha tabla presenta un manipulador cuyo diente es del Tipo 1, además, otros diez que pueden verse en la figura (3.17) siguiendo el código de colores.

Cinco son del TIPO 2, otros cinco son del TIPO 3. La longitud del tercer eslabón del manipulador código ■ TIPO 2 es igual a la longitud del cuarto eslabón del manipulador ■ TIPO 3, y la longitud del cuarto eslabón del manipulador código ■ TIPO 2 es igual al tercer eslabón del manipulador código ■ TIPO 3. Lo mismo se puede decir de los otros cuatro pares restantes. El manipulador del TIPO 1 actúa como frontera entre los manipuladores del Tipo 2 y los manipuladores del TIPO 3.

Código, en color, del manipulador ↓	TIPO de Diente del Tornillo	$l_1$ (mm)	$l_2$ (mm)	$l_3$ (mm)
■	2	170	130	180
■	2	190	110	180
■	2	210	90	180
■	2	230	70	180
■	2	250	50	180
■	1	150	150	180
■	3	50	250	180
■	3	70	230	180
■	3	90	210	180
■	3	110	190	180
■	3	130	170	180

Tabla (3.6). Relaciones especiales entre 11 manipuladores diferentes que son “Semejantes” según ( $m=180$  mm,  $n=480$  mm) (DEFINICIÓN 3.7). Las longitudes  $l_1$  y  $l_2$  de los manipuladores de un código de color del TIPO 2 son iguales a  $l_2$  y  $l_1$ , respectivamente, de los manipuladores del mismo código de color pero del TIPO 3.

Se puede observar en las gráficas de las figuras (3.18), (3.19) y (3.20) que los manipuladores de mismo código de color, pero de tipo de diente diferente, tienen la misma **LdTJ**.

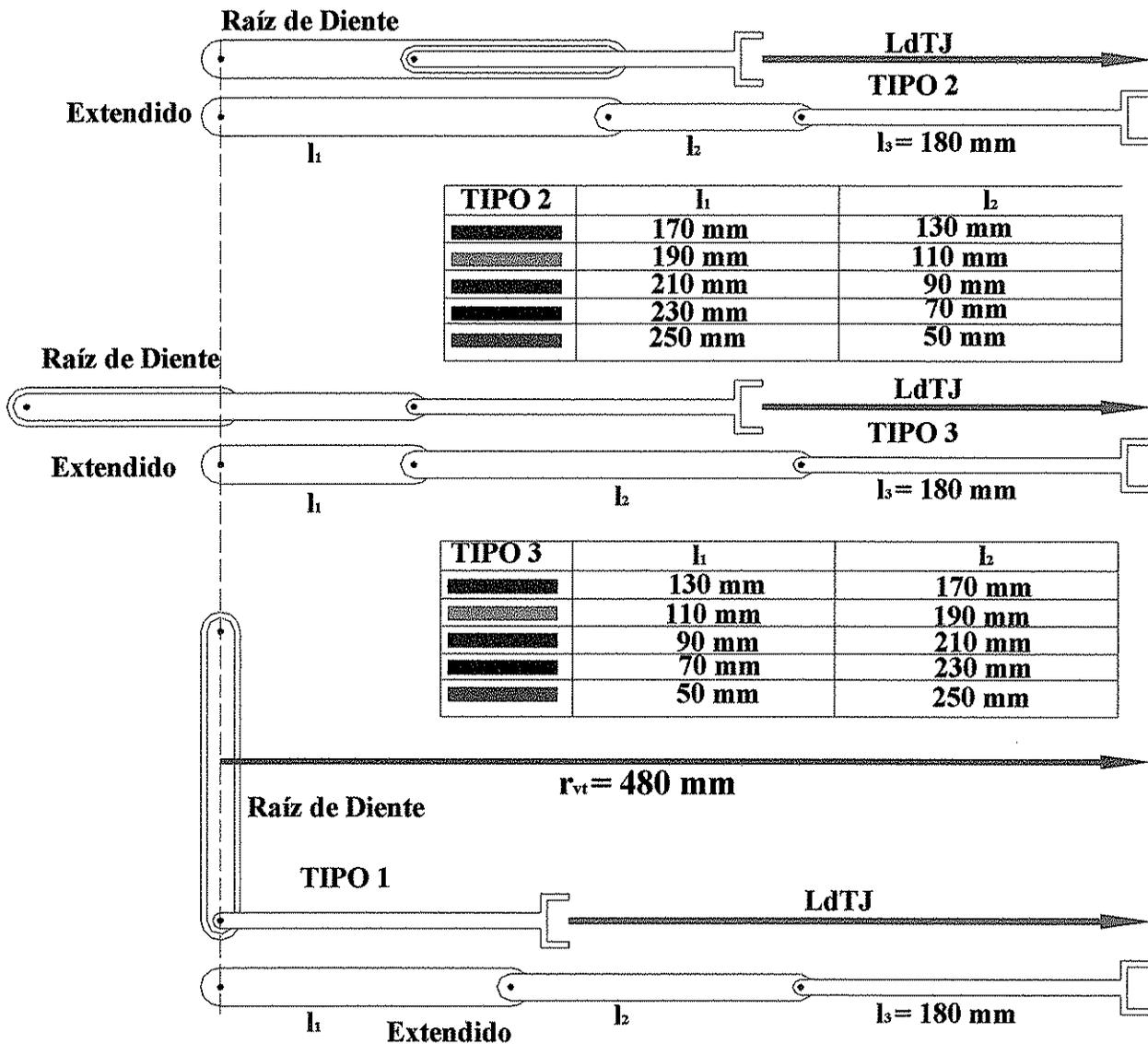
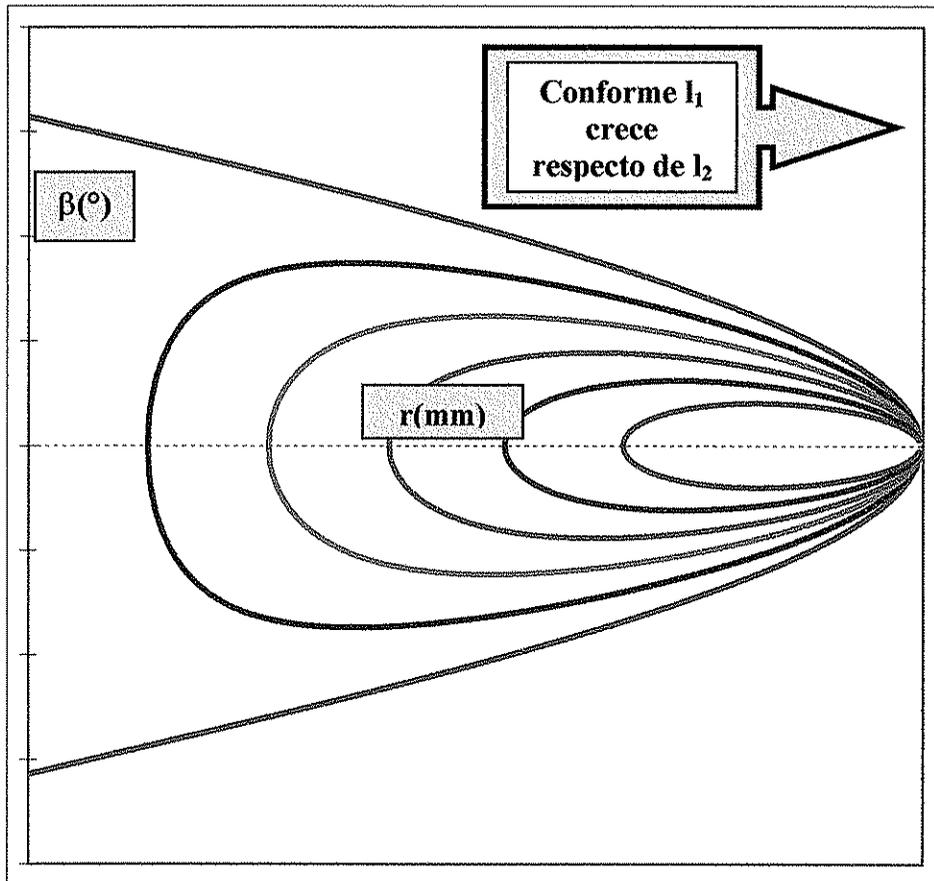
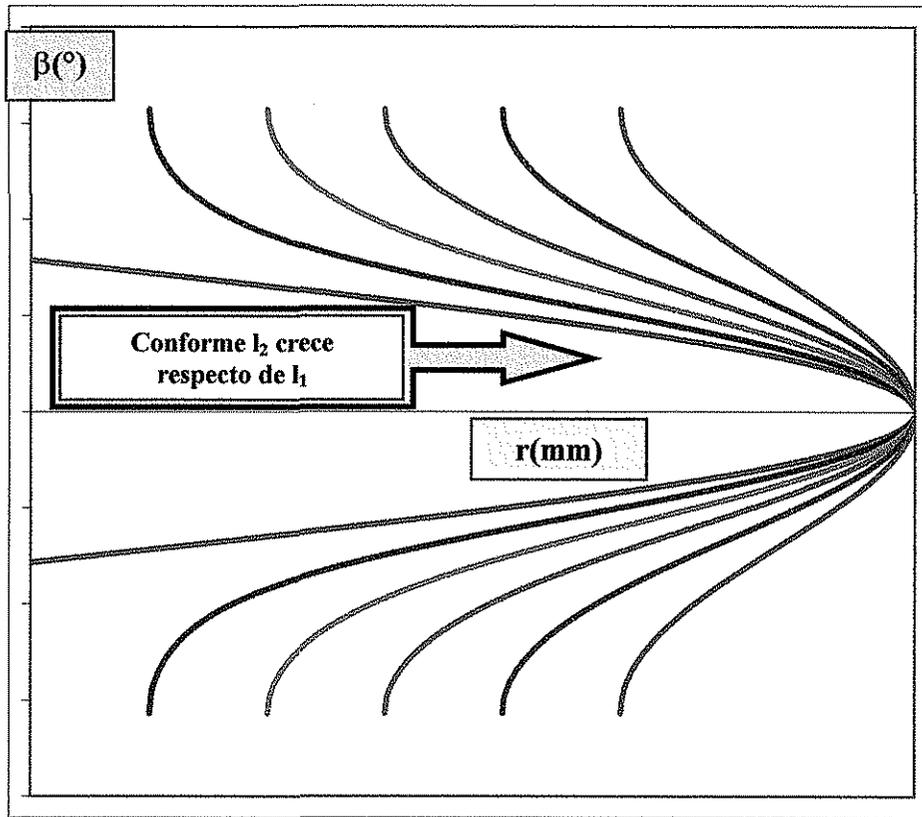


Figura (3.17). Un Manipulador del TIPO 1, 5 del TIPO 2 y otros 5 más del TIPO 3. Todos “semejantes” según ( $m=180$  mm,  $n=480$  mm) (DEFINICIÓN 3.7). Se presentan los dos estados extremos de los manipuladores: 1) totalmente retraídos, alcanzando la raíz de sus dientes, y 2) totalmente extendidos alcanzando la cima o punta de sus dientes.



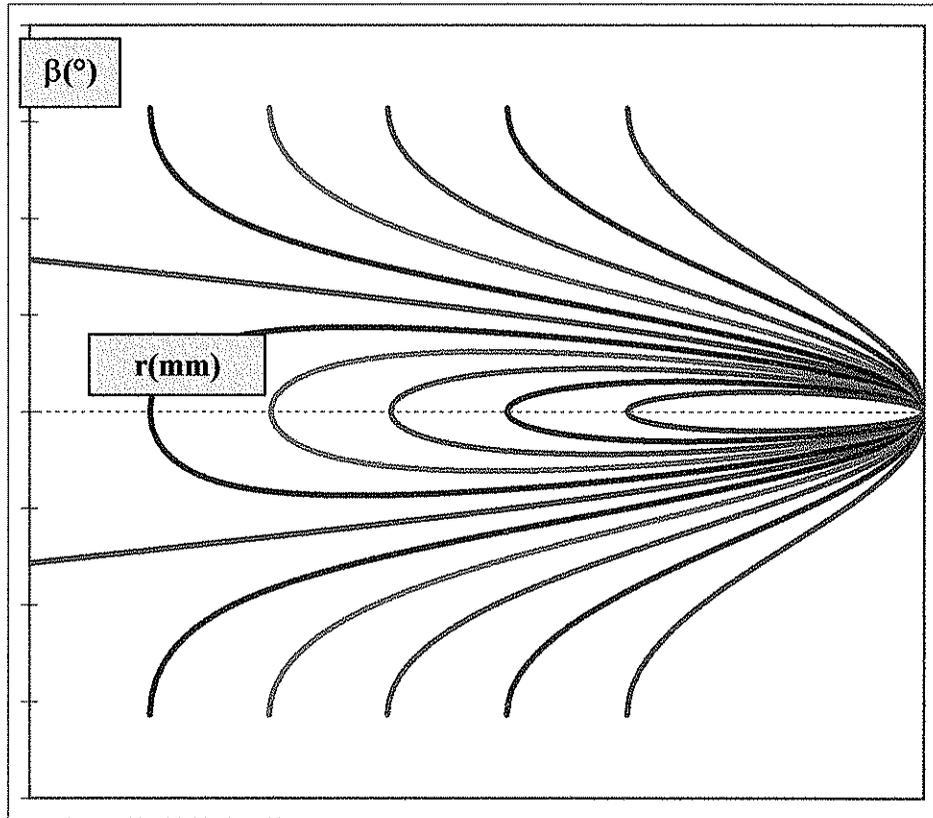
Color del Diente						
Propiedades (mm)	<b>TIPO 1</b> l <sub>1</sub> =150 l <sub>2</sub> =150 l <sub>3</sub> =180	<b>TIPO 2</b> l <sub>1</sub> =170 l <sub>2</sub> =130 l <sub>3</sub> =180	<b>TIPO 2</b> l <sub>1</sub> =190 l <sub>2</sub> =110 l <sub>3</sub> =180	<b>TIPO 2</b> l <sub>1</sub> =210 l <sub>2</sub> =90 l <sub>3</sub> =180	<b>TIPO 2</b> l <sub>1</sub> =230 l <sub>2</sub> =70 l <sub>3</sub> =180	<b>TIPO 2</b> l <sub>1</sub> =250 l <sub>2</sub> =50 l <sub>3</sub> =180

Figura (3.18). El Diente Tipo 1 y otros 5 dientes más del Tipo 2 correspondientes a 6 manipuladores “semejantes” según (m=180 mm, n=480 mm) (DEFINICIÓN 3.7)



Color del Diente						
Propiedades (mm)	<b>TIPO 1</b> $l_1=150$ $l_2=150$ $l_3=180$	<b>TIPO 3</b> $l_1=130$ $l_2=170$ $l_3=180$	<b>TIPO 3</b> $l_1=110$ $l_2=190$ $l_3=180$	<b>TIPO 3</b> $l_1=90$ $l_2=210$ $l_3=180$	<b>TIPO 3</b> $l_1=70$ $l_2=230$ $l_3=180$	<b>TIPO 3</b> $l_1=50$ $l_2=250$ $l_3=180$

Figura (3.19). El Diente Tipo 1 y otros 5 dientes más del Tipo 3 correspondientes a 6 manipuladores “semejantes” según ( $m=180$  mm,  $n=480$  mm) (DEFINICIÓN 3.7)



<b>Color del Diente</b>						
<b>Propiedades TIPO 2 (mm)</b>	<b>TIPO 1</b> $l_1=150$ $l_2=150$ $l_3=180$	$l_1=170$ $l_2=130$ $l_3=180$	$l_1=190$ $l_2=110$ $l_3=180$	$l_1=210$ $l_2=90$ $l_3=180$	$l_1=230$ $l_2=70$ $l_3=180$	$l_1=250$ $l_2=50$ $l_3=180$
<b>Propiedades TIPO 3 (mm)</b>	<b>TIPO 1</b> $l_1=150$ $l_2=150$ $l_3=180$	$l_1=130$ $l_2=170$ $l_3=180$	$l_1=110$ $l_2=190$ $l_3=180$	$l_1=90$ $l_2=210$ $l_3=180$	$l_1=70$ $l_2=230$ $l_3=180$	$l_1=50$ $l_2=250$ $l_3=180$
<b>LdTJ (mm)</b>	<b>300</b>	<b>260</b>	<b>220</b>	<b>180</b>	<b>140</b>	<b>100</b>
<b>Similitudes</b>	Todos son semejantes según $m$ y $n$ , además, $l_1 _{TIPO2} = l_2 _{TIPO3}$ y $l_1 _{TIPO2} = l_2 _{TIPO3}$ para cada Diente del Tornillo.					

Figura (3.20). Un diente TIPO 1, 5 dientes del TIPO 2 y otros 5 más del TIPO 3 de 11 manipuladores "semejantes" según ( $m=180$  mm,  $n=480$  mm) (DEFINICIÓN 3.7)

### 3.2.3. PASO DEL TORNILLO J

El vector mostrado por la ecuación E(3.6) contiene la información del elemento  $\beta$ , ya sea para una u otra solución. Para obtener la descripción de la segunda variable articular falta adicionar el elemento  $\alpha$ . Para esto, es necesario definir un segundo sistema de referencia  $\{\alpha\}$  tal que exista una descripción espacial relativa con  $\{r\}$  como lo indica la ecuación E(3.16).

$${}^{\alpha}\{r\} = \left\{ \left( {}^{\alpha}z_{\alpha} \quad {}^{\alpha}z_{\alpha}^T + \text{Cos}\alpha \left( I_{3 \times 3} - {}^{\alpha}z_{\alpha} \quad {}^{\alpha}z_{\alpha}^T \right) + \text{Sen}\alpha {}^{\alpha}z_{\alpha} \otimes \right), \alpha {}^{\alpha}z_{\alpha} \right\} \quad \text{E(3.16)}$$

De esta manera el vector  ${}^{\alpha}({}^r p_{\beta})$ , descrito en el referencial  $\{\alpha\}$ , se presenta en la ecuación E(3.17).

$${}^{\alpha} p_{\theta_2} = \left( {}^{\alpha}z_{\alpha} \quad {}^{\alpha}z_{\alpha}^T + \text{Cos}\alpha \left( I_{3 \times 3} - {}^{\alpha}z_{\alpha} \quad {}^{\alpha}z_{\alpha}^T \right) + \text{Sen}\alpha {}^{\alpha}z_{\alpha} \otimes \right) {}^r p_{\beta} + \alpha {}^{\alpha}z_{\alpha}; \quad \in R^3 \quad \text{E(3.17)}$$

O mediante transformación Homogénea,

$${}^{\alpha} p_{\theta_2} = {}^{\alpha}T {}^r p_{\beta}; \quad \in R^4 \quad \text{E(3.18)}$$

Donde,

$${}^{\alpha}T = \begin{pmatrix} \left( {}^{\alpha}z_{\alpha} \quad {}^{\alpha}z_{\alpha}^T + \text{Cos}\alpha \left( I_{3 \times 3} - {}^{\alpha}z_{\alpha} \quad {}^{\alpha}z_{\alpha}^T \right) + \text{Sen}\alpha {}^{\alpha}z_{\alpha} \otimes \right) \alpha {}^{\alpha}z_{\alpha} \\ \bar{0} \quad 1 \end{pmatrix}; \quad \in R^{4 \times 4} \quad \text{E(3.19)}$$

La ecuación E(3.17) o E(3.19) es una transformación lineal, llamada "*Transformación Tornillo J*"<sup>4</sup>, o **TTJ**, que produce un tornillo con avance de paso  $\alpha$  y un giro de la misma magnitud, donde  $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$ , que se adiciona a la magnitud  ${}^i\beta(r)$ ,  $r \in [r_{\min}, r_{vt}]$ ,  $i = 1, 2$ , dependiente de la longitud radial operacional deseada.

<sup>4</sup> Transformación atribuida al autor de este trabajo

Cuando se aplica la “Transformación Tornillo J” al conjunto  $r_{UP\beta}^{RG}$  se produce un helicoide llamado “Tornillo J”.

El **Tornillo J** estará dado entonces por la colección de elementos  ${}^{\alpha}iP_{\theta 2}$  recopilados en el conjunto  ${}^{\alpha}UP_{\theta 2}^{RG}$ , como según se define en las ecuaciones E(3.20), E(3.21) y E(3.22).

$${}^{\alpha}1P_{\theta 2}^{RG} = \left\{ {}^{\alpha}1P_{\theta 2} \left| \begin{array}{l} \forall \alpha, -360^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ}; \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} = l_1 + l_2 + l_3 \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(3.20)}$$

$${}^{\alpha}2P_{\theta 2}^{RG} = \left\{ {}^{\alpha}2P_{\theta 2} \left| \begin{array}{l} \forall \alpha, -360^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ}; \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} = l_1 + l_2 + l_3 \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(3.21)}$$

$${}^{\alpha}UP_{\theta 2}^{RG} = {}^{\alpha}1P_{\theta 2}^{RG} \cup {}^{\alpha}2P_{\theta 2}^{RG} = \left\{ {}^{\alpha}iP_{\theta 2} \left| \begin{array}{l} \forall \alpha, -360^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ}; \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} = l_1 + l_2 + l_3; \\ i = 1, 2 \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(3.22)}$$

Donde f puede ser 3 ó 4 si el vector es cartesiano o representado en forma homogénea, Craig (1989), Juárez (1996). La anterior región geométrica representa el universo de soluciones del espacio operacional concerniente a la primer variable articular rotativa.

### DEFINICIÓN 3.9

Un “Tornillo J tipo 1” es un conjunto generado al aplicar la transformación TTJ al “diente tipo 1” (ver DEFINICIÓN 3.4).

### DEFINICIÓN 3.10

Un “Tornillo J tipo 2” es un conjunto generado al aplicar la transformación TTJ al “diente tipo 2” (ver DEFINICIÓN 3.5).

**DEFINICIÓN 3.11**

Un “**Tornillo J tipo 3**” es un conjunto generado al aplicar la transformación TTJ al “**diente tipo 3**” (ver DEFINICIÓN 3.6).

En las figuras (3.21), (3.22) y (3.23) se muestran los tres tipos de tornillos. El paso de los tornillos es el mismo; la única diferencia entre ellos es la forma del diente correspondiente a la relación del eslabonamiento del manipulador (DEFINICIONES 3.4, 3.5 y 3.6).

Si existen varios tipos de tornillos, según sea el manipulador de que se trate, entonces surge la pregunta siguiente: ¿Cuál tornillo es el más eficiente<sup>5</sup>?

Darle respuesta a esta pregunta es uno de los motivos que dan lugar a la realización de este trabajo.

---

<sup>5</sup> Tornillo J más eficiente: aquel tornillo cuyo manipulador ofrece el movimiento más suave

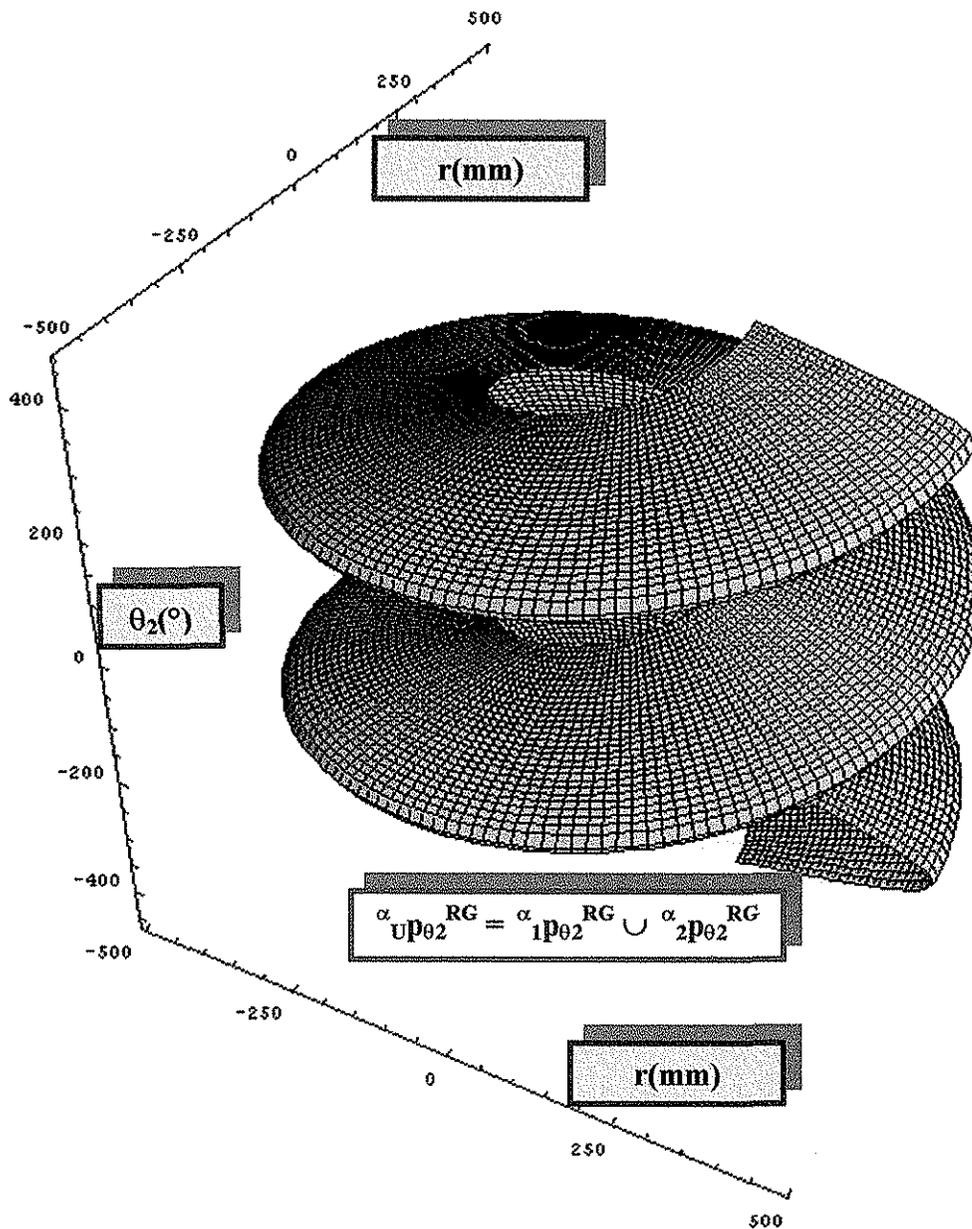


Figura (3.21). “Tornillo J Tipo 1” (DEFINICIÓN 3.9). Conjunto universal resultante de una relación de  $l_1=l_2$  con cualquier  $l_3$  (DEFINICIÓN 3.4).

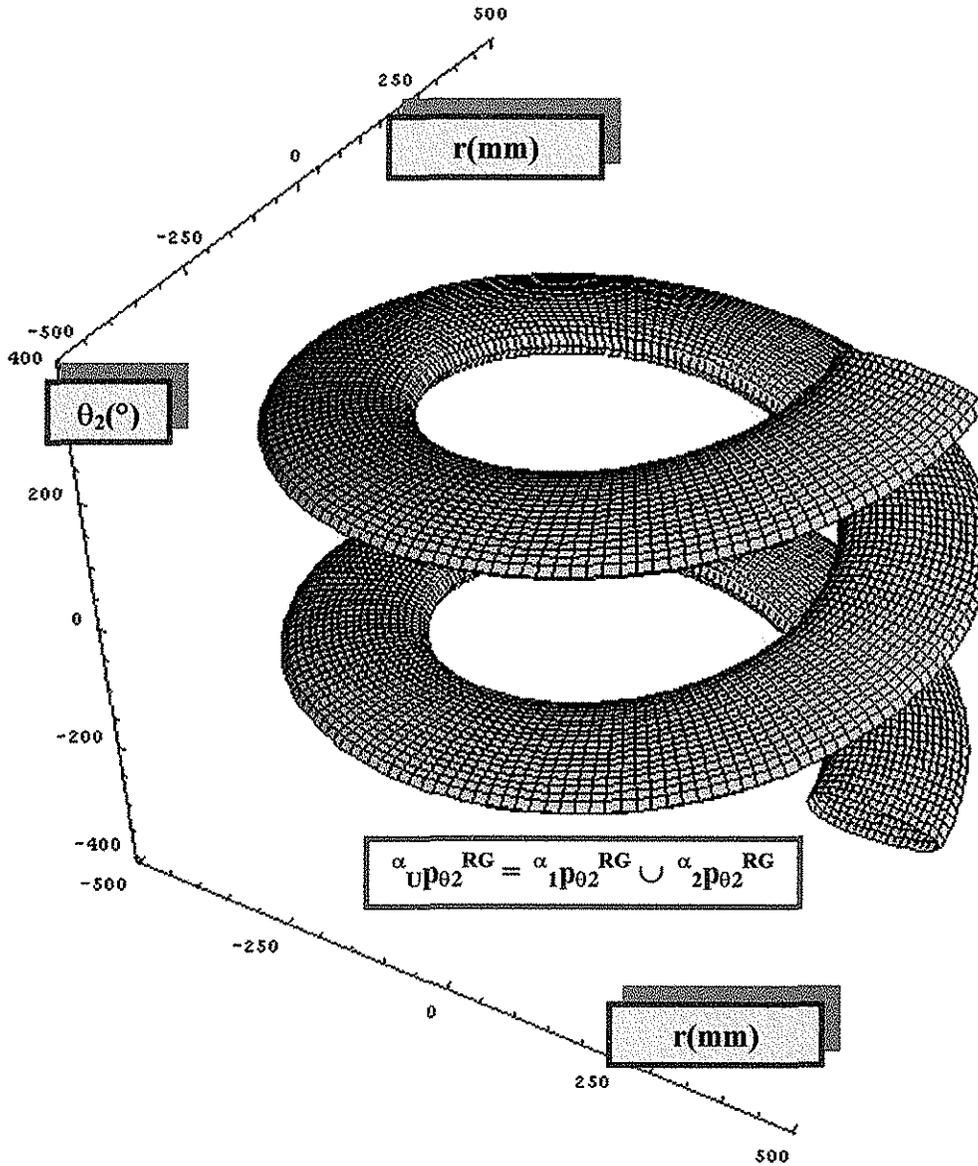


Figura (3.22). “Tornillo J Tipo 2” (DEFINICIÓN 3.10). Conjunto universal resultante de una relación de  $l_1 > l_2$  con cualquier  $l_3$  (DEFINICIÓN 3.5).

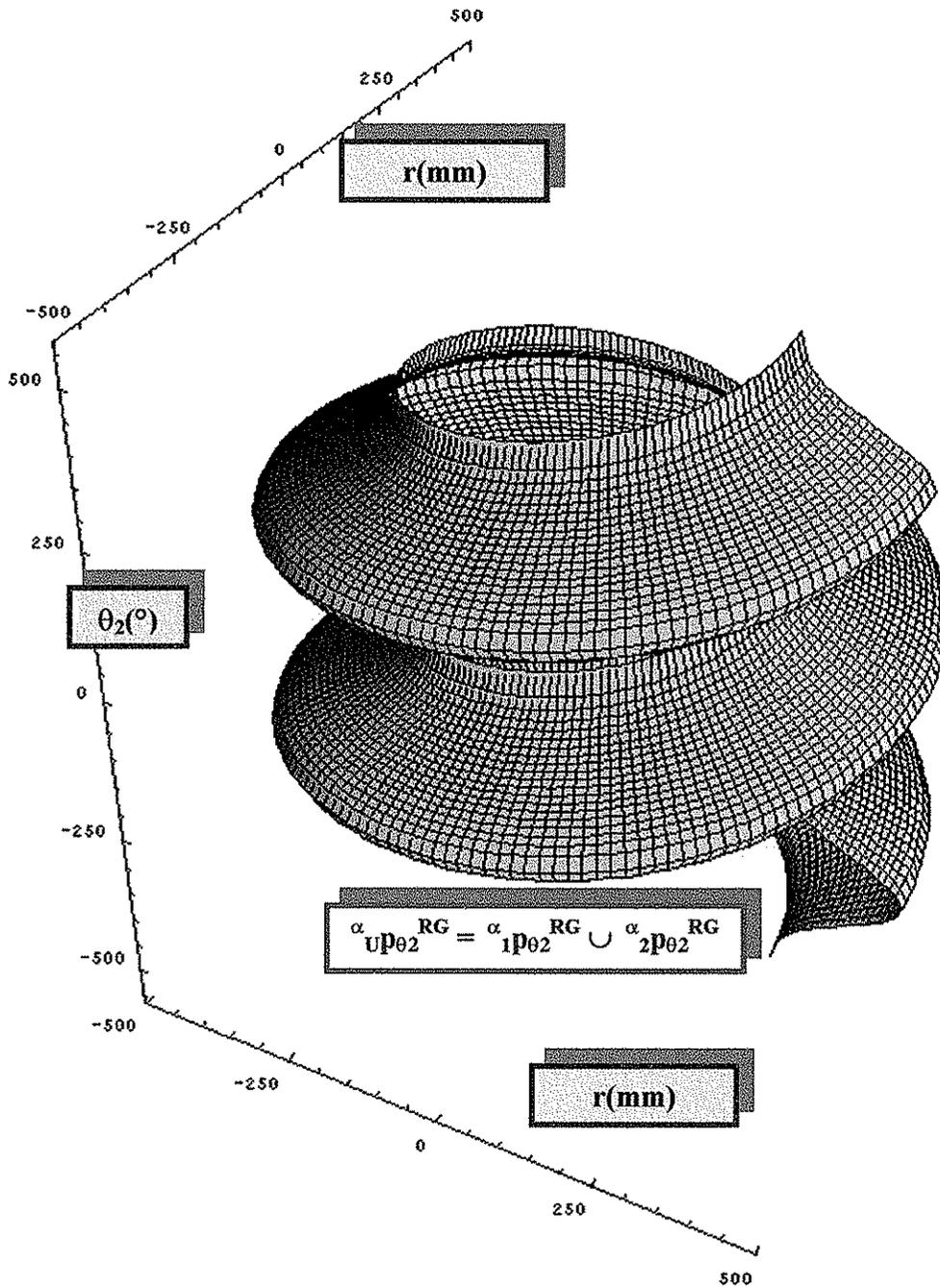


Figura (3.23). “Tornillo J Tipo 3” (DEFINICIÓN 3.11). Conjunto universal resultante de una relación de  $l_1 < l_2$  con cualquier  $l_3$  (DEFINICIÓN 3.6).

### 3.2.4. CINEMÁTICA DIFERENCIAL DEL TORNILLO J

Derivando con respecto al tiempo se obtiene la velocidad y aceleración del vector que define la superficie del Tornillo J y que tiene dos componentes: 1) la velocidad y aceleración lineales (angulares) de avance (rotación) del tornillo y 2) la velocidad y aceleración lineales del vector  ${}^r p_\beta$ . En las ecuaciones E(3.23) y E(3.25) se muestran los resultados.

$${}^{\alpha} \dot{p}_{\theta 2} = R_r^{\alpha} {}^r \dot{p}_\beta + S\left({}^{\alpha} z_\alpha, \dot{\alpha}\right) R_r^{\alpha} {}^r p_\beta + \dot{\alpha} {}^{\alpha} z_\alpha \quad \text{E(3.23)}$$

Extrayendo el tercer elemento de este vector, se tiene la magnitud de la velocidad angular de la segunda articulación, ecuación E(3.24).

$${}^{\alpha} \dot{\theta}_2 = {}^{\alpha} \dot{p}_{\theta 2} {}^{\alpha} z_\alpha^T \quad \text{E(3.24)}$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha} \ddot{p}_{\theta 2} = & R_r^{\alpha} {}^r \ddot{p}_\beta + 2S\left({}^{\alpha} z_\alpha, \dot{\alpha}\right) R_r^{\alpha} {}^r \dot{p}_\beta + S\left({}^{\alpha} z_\alpha, \dot{\alpha}\right) S\left({}^{\alpha} z_\alpha, \dot{\alpha}\right) R_r^{\alpha} {}^r p_\beta + \\ & + A\left({}^{\alpha} z_\alpha, \ddot{\alpha}\right) R_r^{\alpha} {}^r p_\beta + \ddot{\alpha} {}^{\alpha} z_\alpha \end{aligned} \quad \text{E(3.25)}$$

De la misma manera, la magnitud de la aceleración articular se define en la ecuación E(3.26) siguiente.

$${}^{\alpha} \ddot{\theta}_2 = {}^{\alpha} \ddot{p}_{\theta 2} {}^{\alpha} z_\alpha^T \quad \text{E(3.26)}$$

Donde  $S(\cdot, \cdot)$  y  $A(\cdot, \cdot)$  se definen como matriz de velocidad y aceleración angulares, Piña (1996).

## CAPÍTULO 4

### TUERCA J

#### 4.1. INTRODUCCIÓN

Al igual que el “Tornillo J”, la “Tuerca J” es una representación del modelo matemático inverso referente a la tercer variable articular del manipulador PRRRd. Este par de representaciones geométricas se complementan, como cualquier tuerca y tornillo; así, cada manipulador generado a partir del genérico tendrá un y sólo un par de regiones geométricas J.

En este capítulo se construye parte de la estructura matemática y se define la característica del modelo abstracto, el cual debe ser panorámico, es decir, presentar una figura tridimensional geométrica, figura (4.1).

#### 4.2. MARCO TEÓRICO DE LA TUERCA J

Se declara en la figura (4.2) que la tercer variable articular es  $\theta_3 = \pm(\gamma-180^\circ)$ , donde el signo depende de la solución (configuración) usada. Si es (+) entonces se trata de la solución 1; si es (-) se trata de la solución 2.

Al igual que en la definición del Tornillo J, se especifica un sistema de referencia denominado  $\{r^j\}$  de tal manera que la descripción relativa entre  $\{\alpha\}$  (ya vista anteriormente) y  $\{r^j\}$  está dada por la ecuación E(4.1) siguiente.

$${}^{\alpha}\{r^j\} = \left\{ {}^0z_0 \ {}^0z_0^T + \text{Cos}\alpha \left( I_{3 \times 3} - {}^0z_0 \ {}^0z_0^T \right) + \text{Sen}\alpha \left( {}^0z_0 \otimes \right), \quad \bar{0} \right\} \quad \text{E(4.1)}$$

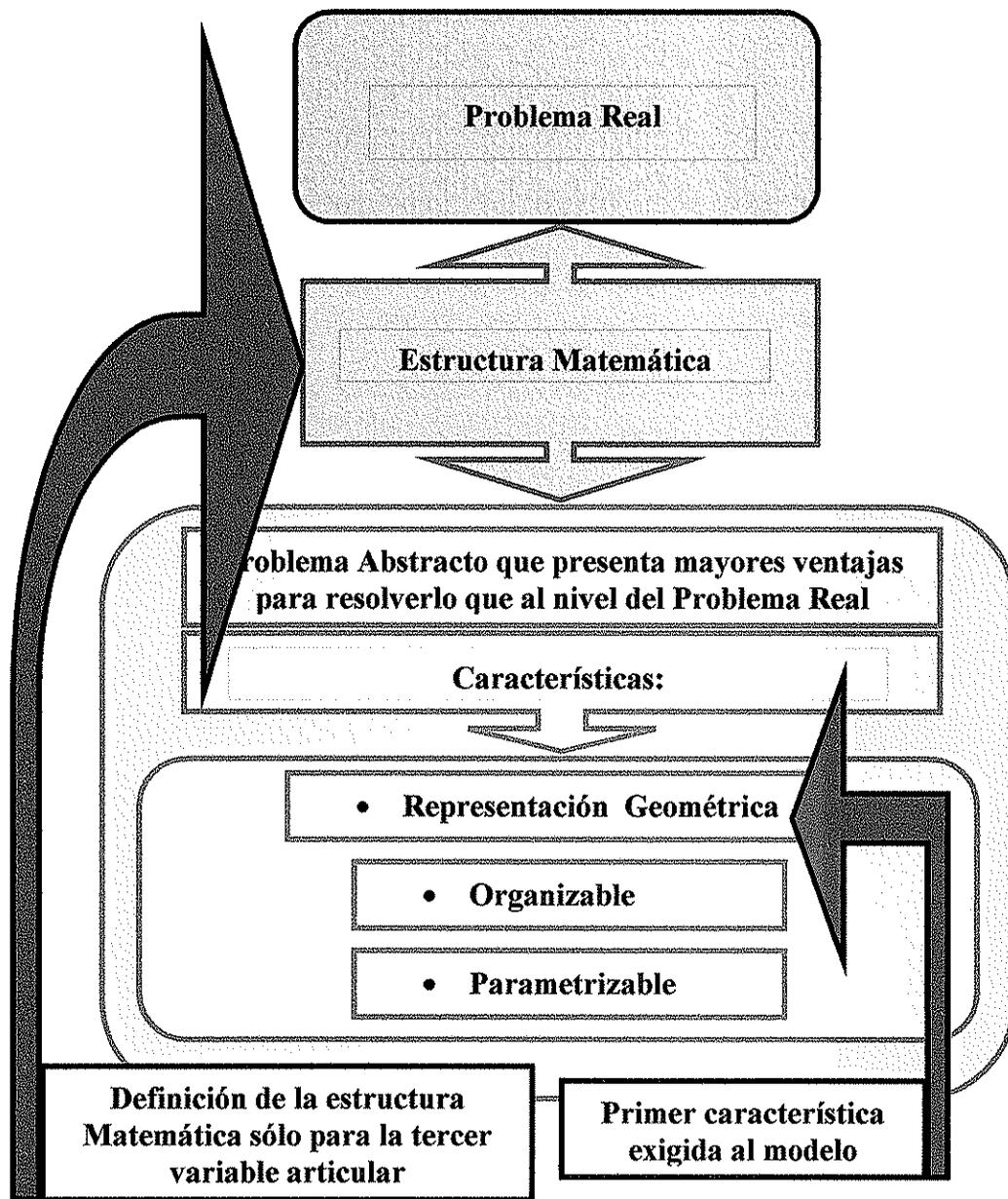


Figura (4.1). Estado de la construcción del modelo matemático.

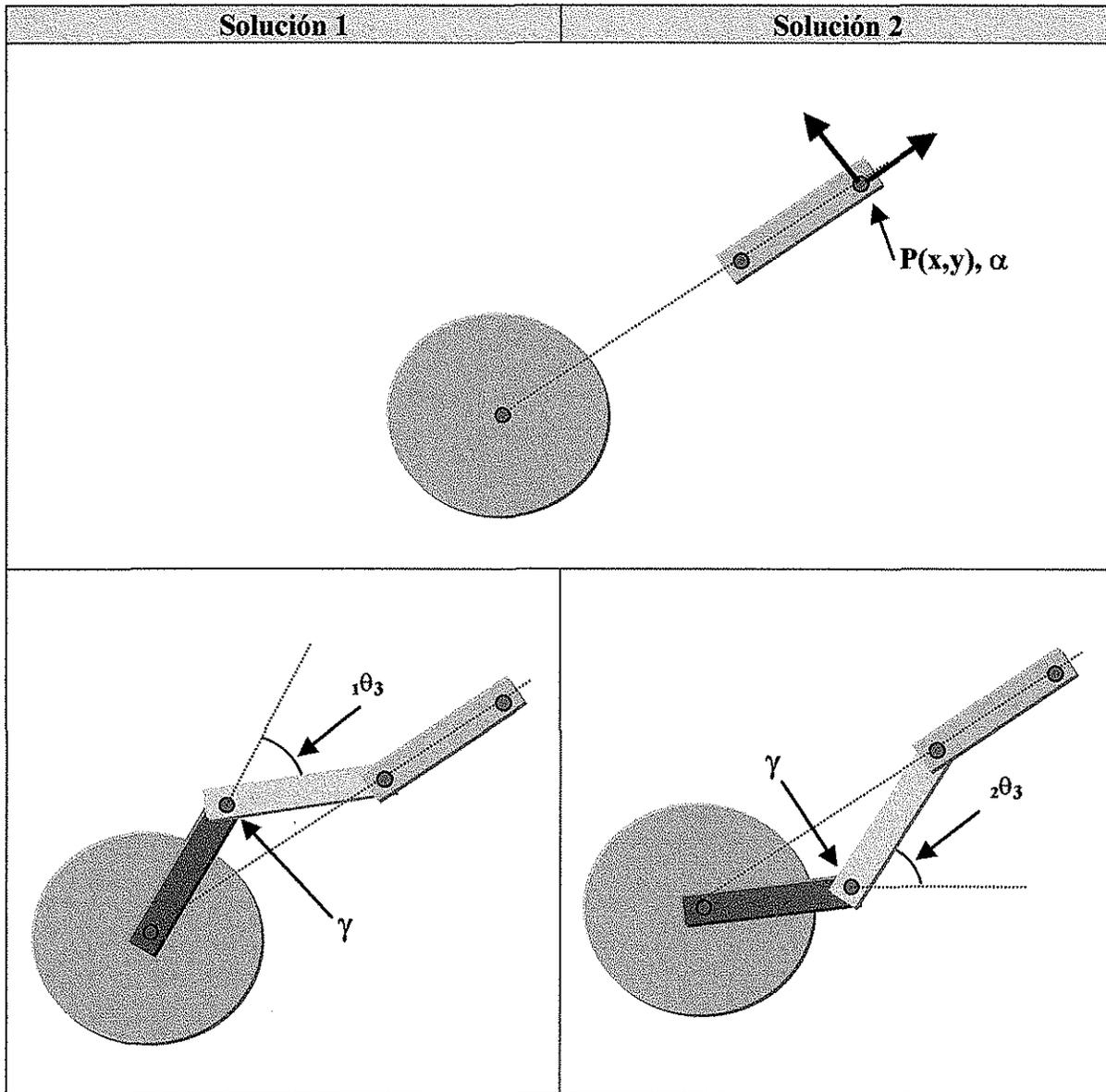


Figura (4.2). Multiplicidad de soluciones de la segunda variable articular rotativa.

Se pueden definir las magnitudes de los vectores  ${}_i\theta_3$   $r^z z_r$ ,  $i = 1, 2$  como se indica en las ecuaciones E(4.2) y E(4.3), para la primera y segunda soluciones, respectivamente.

$${}_1\theta_3 = \cos^{-1} \left( \frac{l_1^2 + l_2^2 - (r - l_3)^2}{2l_1 l_2} \right) - 180^\circ$$

E(4.2)



$${}^2\theta_3 = -\left(\cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - (r - l_3)^2}{2l_1l_2}\right) - 180^\circ\right) \quad \text{E(4.3)}$$

Así se puede definir el vector  ${}^r_i p_{\theta_3}$  como lo muestra la ecuación E(4.4).

$${}^r_i p_{\theta_3} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ {}_i\theta_3 \end{pmatrix} = r {}^r x_{r'} + {}_i\theta_3 {}^r z_{r'} \quad \text{E(4.4)}$$

Evolucionando  $r$  desde  $r_{\min}$  hasta  $r_{vt}=l_1+l_2+l_3$  se pueden generar dos conjuntos que se denominan “Casco Inferior de la Tuerca J” y “Casco Superior de la Tuerca J”.

#### DEFINICIÓN 4.1

Se denomina como “Casco Inferior del Diente de la Tuerca J” al conjunto  ${}^r_1 p_{\theta_3}^{RG}$ , correspondiente a la solución 1, que colecciona todos los elementos  ${}^r_1 p_{\theta_3}$  que se obtienen para todo  $r \in [r_{\min}, r_{vt}]$

$${}^r_1 p_{\theta_3}^{RG} = \left\{ {}^r_1 p_{\theta_3} \mid \forall r, r_{\min} \leq r \leq r_{vt} = (l_1 + l_2 + l_3) \right\} \quad \text{E(4.5)}$$

□

#### DEFINICIÓN 4.2

Se denomina como “Casco Superior del Diente de la Tuerca J” al conjunto  ${}^r_2 p_{\theta_3}^{RG}$ , correspondiente a la solución 2, que colecciona todos los elementos  ${}^r_2 p_{\theta_3}$  que se obtienen para todo  $r \in [r_{\min}, r_{vt}]$

$${}^r_2 p_{\theta_3}^{RG} = \left\{ {}^r_2 p_{\theta_3} \mid \forall r, r_{\min} \leq r \leq r_{vt} = (l_1 + l_2 + l_3) \right\} \quad \text{E(4.6)}$$

□

**DEFINICIÓN 4.3**

Se denomina “**Diente de la Tuerca J**” al conjunto unión de los cascos inferior y superior descritos en las **DEFINICIONES 4.1 y 4.2**.

$${}^r_U P_{\theta_3}^{RG} = {}^r_1 P_{\theta_3}^{RG} \cup {}^r_2 P_{\theta_3}^{RG} = \left\{ {}^r_i P_{\theta_3} \mid \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} = (l_1 + l_2 + l_3), i = 1, 2 \right\}$$

**E(4.7)**

□

**4.2.1. CLASIFICACIÓN DE LOS DIENTES DE LAS TUERCAS J**

**DEFINICIÓN 4.4**

El “**Diente Tipo 1**” de la Tuerca J se obtiene para los valores de  $l_1=l_2$  y r variante en el rango  $[r_{min}=l_3, r_{vt}=(l_1+l_2+l_3)]$ . Este conjunto se obtiene con la unión de los universales de cada solución.

$${}^r_U P_{\theta_3}^{RG} \Big|_{TIPO1} = {}^r_1 P_{\theta_3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \cup {}^r_2 P_{\theta_3}^{RG} \Big|_{TIPO1}$$

**E(4.8)**

□

Este tipo de “Diente de la Tuerca J” se presenta en la figura (4.3). Sus características se resumen en la tabla (4.1).

Su amplitud máxima, que es de  ${}_1\theta_3 = -\pi$  y  ${}_2\theta_3 = +\pi$ , se alcanza para  $r = l_3$ . Su casco es un conjunto convexo, su raíz es abierta con profundidad igual a  $l_3$  y su longitud de diente es igual a  $l_1+l_2$ .

Tipo de Diente	Amplitud Máxima	Tipo de casco	Tipo de Raíz	Profundidad de la raíz	Longitud del diente
1	${}_1\theta_3 = -\pi$ ${}_2\theta_3 = +\pi$	Convexo	Abierta	$l_3$	$l_1+l_2$

Tabla (4.1). Características del diente tipo 1 de la tuerca.



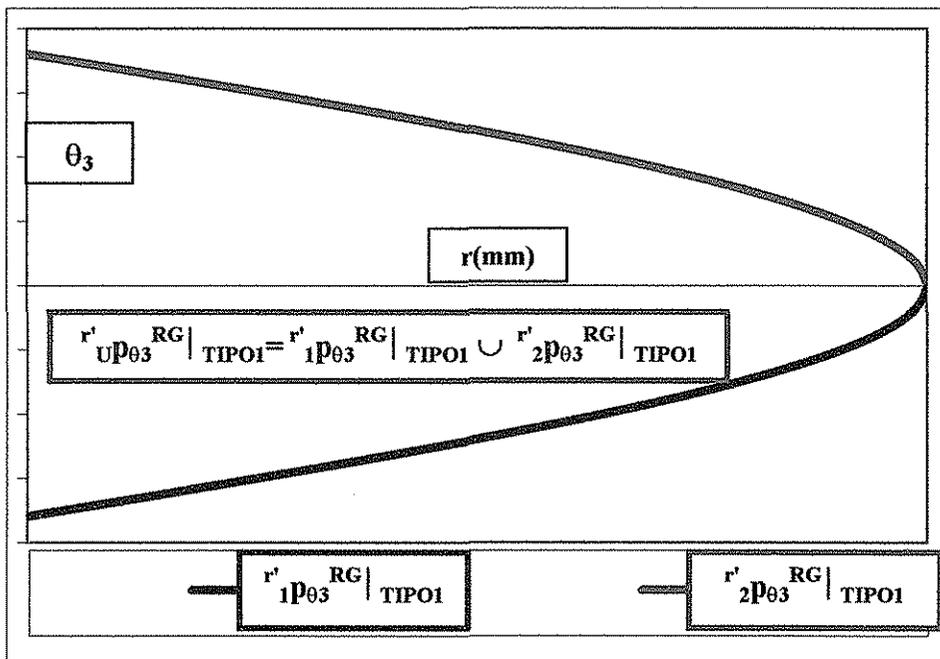


Figura (4.3). Perfil del diente tipo 1 de la Tuerca.

**DEFINICIÓN 4.5**

El “Diente Tipo 2” de la Tuerca J se obtiene para los valores de  $l_1 > l_2$  y  $r$  variante en el rango  $[r_{min}=(l_1-l_2+l_3), r_{vt}=(l_1+l_2+l_3)]$ . Este conjunto se obtiene con la unión de los universales de cada solución.

$$r' P_{\theta_3}^{RG} | TIPO2 = r' P_{\theta_3}^{RG} | TIPO2 \cup r' P_{\theta_3}^{RG} | TIPO2 \tag{E(4.9)}$$

□

Este tipo de “Diente de la Tuerca J” se presenta en la figura (4.4). Sus características se resumen en la tabla (4.2).

Su amplitud máxima, que es de  ${}_1\theta_3 = -\pi$  y  ${}_2\theta_3 = +\pi$ , se alcanza para  $r = l_1 - l_2 + l_3$ . Su casco es un conjunto convexo, su raíz es abierta con profundidad igual  $a = l_1 - l_2 + l_3$  y su longitud de diente es igual a  $2 * l_2$ .

Tipo de Diente	Amplitud Máxima	Tipo de casco	Tipo de Raíz	Profundidad de la raíz	Longitud del diente
2	${}_1\theta_3 = -\pi$ ${}_2\theta_3 = +\pi$	Convexo	Abierta	$l_1 - l_2 + l_3$	$2 * l_2$

Tabla (4.2). Características del diente tipo 2 de la tuerca.

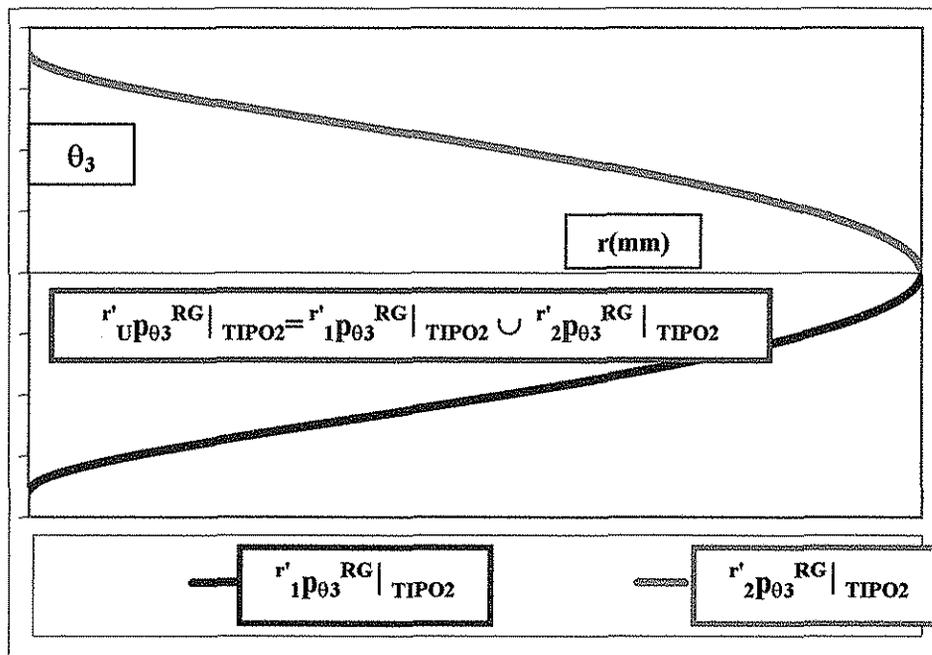


Figura (4.4). Perfil del diente tipo 2 de la tuerca.

**DEFINICIÓN 4.6**

El “Diente Tipo 3” de la Tuerca J se obtiene para los valores de  $l_1 < l_2$  y  $r$  variante en el rango  $[r_{\min} = (-l_1 + l_2 + l_3)_3, r_{vt} = (l_1 + l_2 + l_3)]$ . Este conjunto se obtiene con la unión de los universales de cada solución.

$${}^U P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO3} = {}^1 P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO3} \cup {}^2 P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO3} \tag{E(4.10)}$$

□

Este tipo de “Diente de la Tuerca J” se presenta en la figura (4.5). Sus características se resumen en la tabla (4.3).

Su amplitud máxima, que es de  ${}_1\theta_3 = -\pi$  y  ${}_2\theta_3 = +\pi$ , se alcanza para  $r = -l_1 + l_2 + l_3$ . Su casco es un conjunto convexo, su raíz es abierta con profundidad igual a  $-l_1 + l_2 + l_3$  y su longitud de diente es igual a  $2 * l_1$ .

Tipo de Diente	Amplitud Máxima	Tipo de casco	Tipo de Raíz	Profundidad de la raíz	Longitud del diente
2	${}_1\theta_3 = -\pi$ ${}_2\theta_3 = +\pi$	Convexo	Abierta	$-l_1 + l_2 + l_3$	$2 * l_1$

Tabla (4.3). Características del diente tipo 3 de la tuerca.

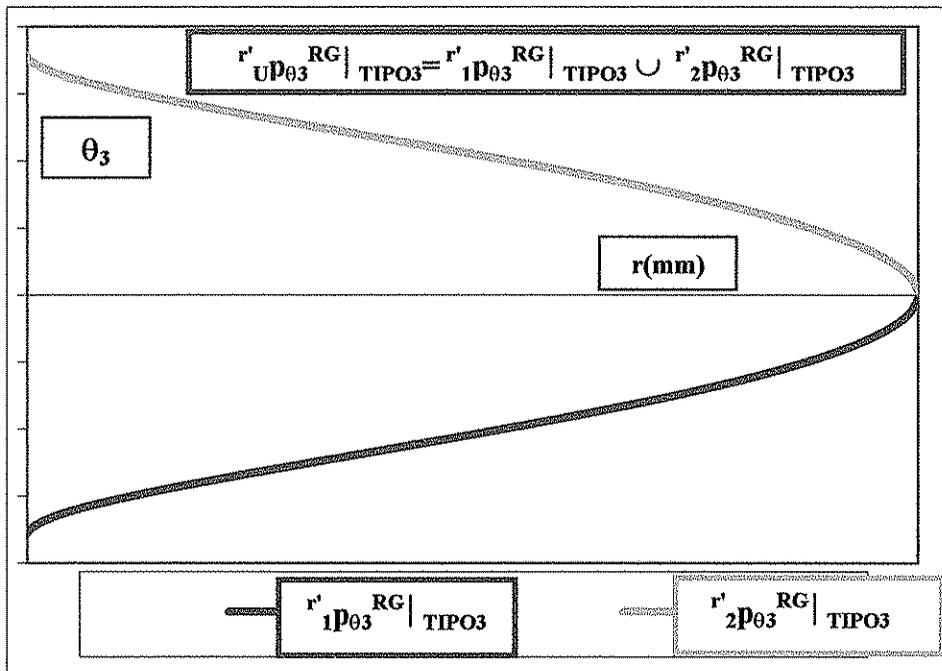


Figura (4.5). Perfil del diente tipo 3 de la tuerca.

### 4.2.2. MANIPULADORES SEMEJANTES ANTISIMÉTRICOS

#### DEFINICIÓN 4.7

Se dice que dos manipuladores  $MAN(l_1, l_2, l_3)a \in MAN_U$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)b \in MAN_U$  son “Semejantes Antisimétricos” si cumplen con: 1) los dos criterios de semejanza (m, n) (DEFINICIÓN 3.7) y, además, 2) la longitud del tercer eslabón de  $MAN(l_1, l_2, l_3)a$  es igual a la longitud del cuarto eslabón de  $MAN(l_1, l_2, l_3)b$ , y la longitud del cuarto eslabón de  $MAN(l_1, l_2, l_3)a$  es igual a la longitud del tercer eslabón de  $MAN(l_1, l_2, l_3)b$ . La condición 2) se denomina “Antisimetría”.

□

Los manipuladores semejantes antisimétricos presentan varias propiedades; los siguientes teoremas 4.1 y 4.2 las describen.

**TEOREMA 4.1**

Si  $MAN(l_1, l_2, l_3)a \in MAN_U$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)b \in MAN_U$  son Manipuladores Semejantes Antisimétricos, entonces  $LdNuJ|a = LdNuJ|b$ .

**PRUEBA TEOREMA 4.1**

En las figuras (4.6), (4.7) y (4.8) se presentan algunos manipuladores semejantes antisimétricos. Específicamente, la figura (4.8) muestra los pares de manipuladores formados por los casos 2 y 6, 3 y 7, 4 y 8, y 5 y 9. Cada uno de estos pares tiene la misma longitud del diente de la respectiva tuerca.

Esto prueba el teorema. □

**TEOREMA 4.2**

Si  $MAN(l_1, l_2, l_3)a \in MAN_U$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)b \in MAN_U$  son “Semejantes Antisimétricos”, según la DEFINICIÓN 4.7, entonces  $r'_U p_{\theta 3}^{RG}|_a = r'_U p_{\theta 3}^{RG}|_b$ .

**PRUEBA TEOREMA 4.2**

Dos tuercas correspondientes a manipuladores semejantes antisimétricos son iguales si tienen (1) la misma forma y (2) la misma longitud del diente. Con respecto a esta última propiedad, el TEOREMA 4.1, anterior confirma el requisito.

Falta probar que ambos manipuladores tienen la misma forma de tuerca. Esto se hace simplemente sobreponiendo el perfil de un diente sobre el perfil del otro.

En la figura (4.6) se muestran 9 manipuladores:  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso1 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso2 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso3 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso4 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso5 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso6 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso7 \in MAN_U$ ,  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso8 \in MAN_U$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso9 \in MAN_U$ .

Cuatro pares del conjunto de los 9 manipuladores son “Semejantes Antisimétricos”, según la DEFINICIÓN 4.7. Estos son:

- $MAN(l_1, l_2, l_3)caso2$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso6$ , de los TIPOS 2 y 3, respectivamente.
- $MAN(l_1, l_2, l_3)caso3$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso7$ , de los TIPOS 2 y 3, respectivamente.
- $MAN(l_1, l_2, l_3)caso4$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso8$ , de los TIPOS 2 y 3, respectivamente.
- $MAN(l_1, l_2, l_3)caso5$  y  $MAN(l_1, l_2, l_3)caso9$ , de los TIPOS 2 y 3, respectivamente.

El restante es un manipulador con diente de tornillo y tuerca TIPO 1, únicamente semejante.

- $MAN(l_1, l_2, l_3)$  caso 1.

Todas las relaciones de las longitudes de los terceros y cuartos eslabones se presentan en la tabla (4.4).

Si se presentan todos los dientes de sus “Tuercas J” se puede observar que los dientes del par de manipuladores de los CASO 2 y CASO 6 son iguales. Lo mismo sucede con los CASOS 3 y CASO 7, CASO 4 y CASO 8, y CASO 5 y CASO 9, tabla (4.4) y figuras (4.7) y (4.8).

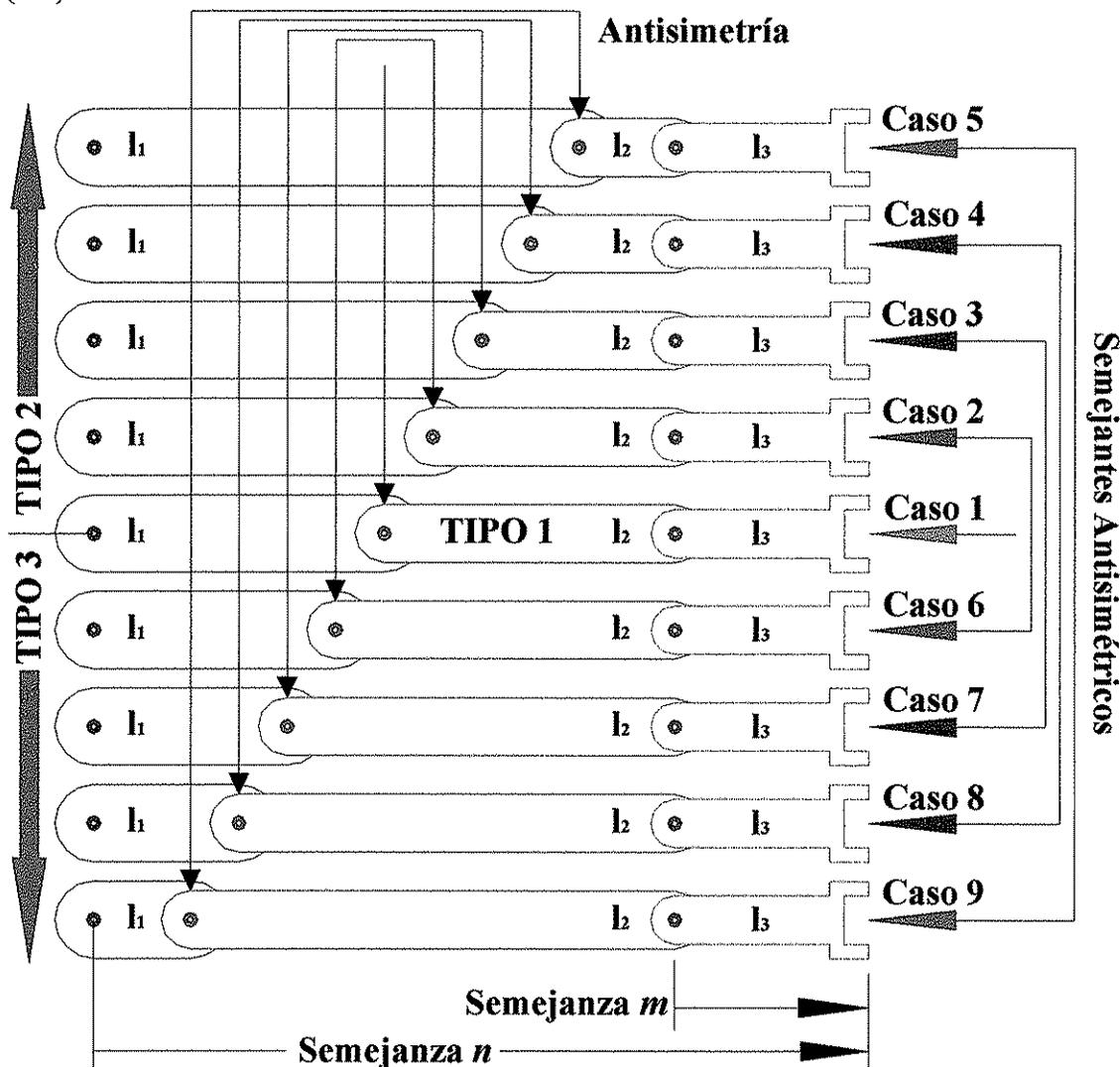


Figura (4.6). Nueve diferentes manipuladores; entre ellos se encuentran algunos semejantes antisimétricos, según la DEFINICIÓN 4.7.

	<b>Caso 1</b> <b>diente tipo 2</b>	<b>Caso 2</b> <b>diente tipo 2</b>	<b>Caso 3</b> <b>diente tipo 2</b>	<b>Caso 4</b> <b>diente tipo 2</b>	<b>Caso 5</b> <b>diente tipo 2</b>
<b>Caso 1</b> <b>diente tipo 1</b>	$l_1 = l_2$	$l_{1caso2} > l_{1caso1}$ $l_{2caso2} < l_{2caso1}$ $l_{1caso2} > l_{2caso1}$ $l_{2caso2} < l_{1caso1}$	$l_{1caso3} > l_{1caso1}$ $l_{2caso3} < l_{2caso1}$ $l_{1caso3} > l_{2caso1}$ $l_{2caso3} < l_{1caso1}$	$l_{1caso4} > l_{1caso1}$ $l_{2caso4} < l_{2caso1}$ $l_{1caso4} > l_{2caso1}$ $l_{2caso4} < l_{1caso1}$	$l_{1caso5} > l_{1caso1}$ $l_{2caso5} < l_{2caso1}$ $l_{1caso5} > l_{2caso1}$ $l_{2caso5} < l_{1caso1}$
<b>Caso 6</b> <b>diente tipo 3</b>	$l_{1caso1} > l_{1caso6}$ $l_{2caso1} < l_{2caso6}$ $l_{1caso1} < l_{2caso6}$ $l_{2caso1} > l_{1caso6}$	$l_{1caso2} > l_{1caso6}$ $l_{2caso2} < l_{2caso6}$ $l_{1caso2} = l_{2caso6}$ $l_{2caso2} = l_{1caso6}$	$l_{1caso3} > l_{1caso6}$ $l_{2caso3} < l_{2caso6}$ $l_{1caso3} > l_{2caso6}$ $l_{2caso3} < l_{1caso6}$	$l_{1caso4} > l_{1caso6}$ $l_{2caso4} < l_{2caso6}$ $l_{1caso4} > l_{2caso6}$ $l_{2caso4} < l_{1caso6}$	$l_{1caso5} > l_{1caso6}$ $l_{2caso5} < l_{2caso6}$ $l_{1caso5} > l_{2caso6}$ $l_{2caso5} < l_{1caso6}$
<b>Caso 7</b> <b>diente tipo 3</b>	$l_{1caso1} > l_{1caso7}$ $l_{2caso1} < l_{2caso7}$ $l_{1caso1} < l_{2caso7}$ $l_{2caso1} > l_{1caso7}$	$l_{1caso2} > l_{1caso7}$ $l_{2caso2} < l_{2caso7}$ $l_{1caso2} < l_{2caso7}$ $l_{2caso2} > l_{1caso7}$	$l_{1caso3} > l_{1caso7}$ $l_{2caso3} < l_{2caso7}$ $l_{1caso3} = l_{2caso7}$ $l_{2caso3} = l_{1caso7}$	$l_{1caso4} > l_{1caso7}$ $l_{2caso4} < l_{2caso7}$ $l_{1caso4} > l_{2caso7}$ $l_{2caso4} < l_{1caso7}$	$l_{1caso5} > l_{1caso7}$ $l_{2caso5} < l_{2caso7}$ $l_{1caso5} > l_{2caso7}$ $l_{2caso5} < l_{1caso7}$
<b>Caso 8</b> <b>diente tipo 3</b>	$l_{1caso1} > l_{1caso8}$ $l_{2caso1} < l_{2caso8}$ $l_{1caso1} < l_{2caso8}$ $l_{2caso1} > l_{1caso8}$	$l_{1caso2} > l_{1caso8}$ $l_{2caso2} < l_{2caso8}$ $l_{1caso2} < l_{2caso8}$ $l_{2caso2} > l_{1caso8}$	$l_{1caso3} > l_{1caso8}$ $l_{2caso3} < l_{2caso8}$ $l_{1caso3} < l_{2caso8}$ $l_{2caso3} > l_{1caso8}$	$l_{1caso4} > l_{1caso8}$ $l_{2caso4} < l_{2caso8}$ $l_{1caso4} = l_{2caso8}$ $l_{2caso4} = l_{1caso8}$	$l_{1caso5} > l_{1caso8}$ $l_{2caso5} < l_{2caso8}$ $l_{1caso5} > l_{2caso8}$ $l_{2caso5} < l_{1caso8}$
<b>Caso 9</b> <b>diente tipo 3</b>	$l_{1caso1} > l_{1caso9}$ $l_{2caso1} < l_{2caso9}$ $l_{1caso1} < l_{2caso9}$ $l_{2caso1} > l_{1caso9}$	$l_{1caso2} > l_{1caso9}$ $l_{2caso2} < l_{2caso9}$ $l_{1caso2} < l_{2caso9}$ $l_{2caso2} > l_{1caso9}$	$l_{1caso3} > l_{1caso9}$ $l_{2caso3} < l_{2caso9}$ $l_{1caso3} < l_{2caso9}$ $l_{2caso3} > l_{1caso9}$	$l_{1caso4} > l_{1caso9}$ $l_{2caso4} < l_{2caso9}$ $l_{1caso4} < l_{2caso9}$ $l_{2caso4} > l_{1caso9}$	$l_{1caso5} > l_{1caso9}$ $l_{2caso5} < l_{2caso9}$ $l_{1caso5} = l_{1caso9}$ $l_{2caso5} = l_{1caso9}$

Tabla (4.4). Relaciones de las longitudes de los eslabones para los diferentes casos de manipuladores involucrados.



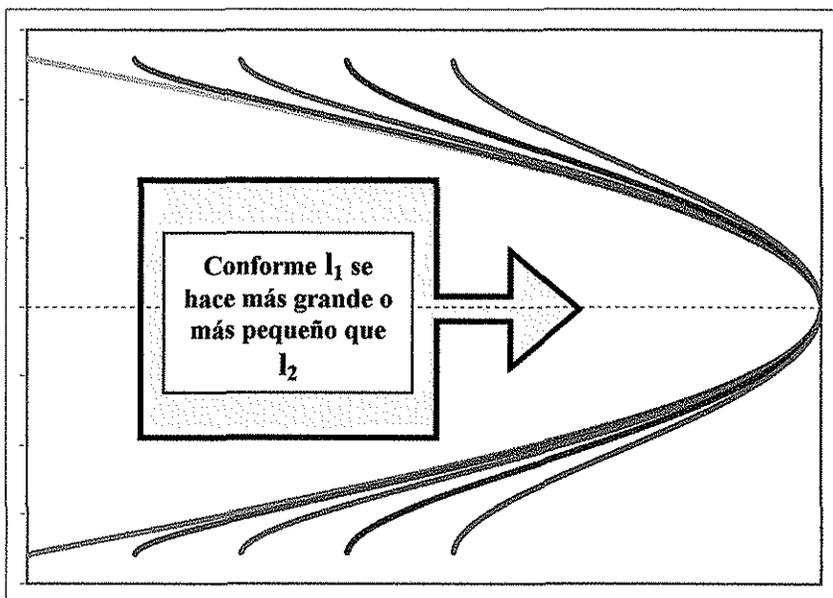


Figura (4.7). La variación de la longitud del diente de la Tuerca J conforme  $l_1$  crece o disminuye respecto de  $l_2$ . La mayor longitud del diente se tiene para  $l_1=l_2$ .

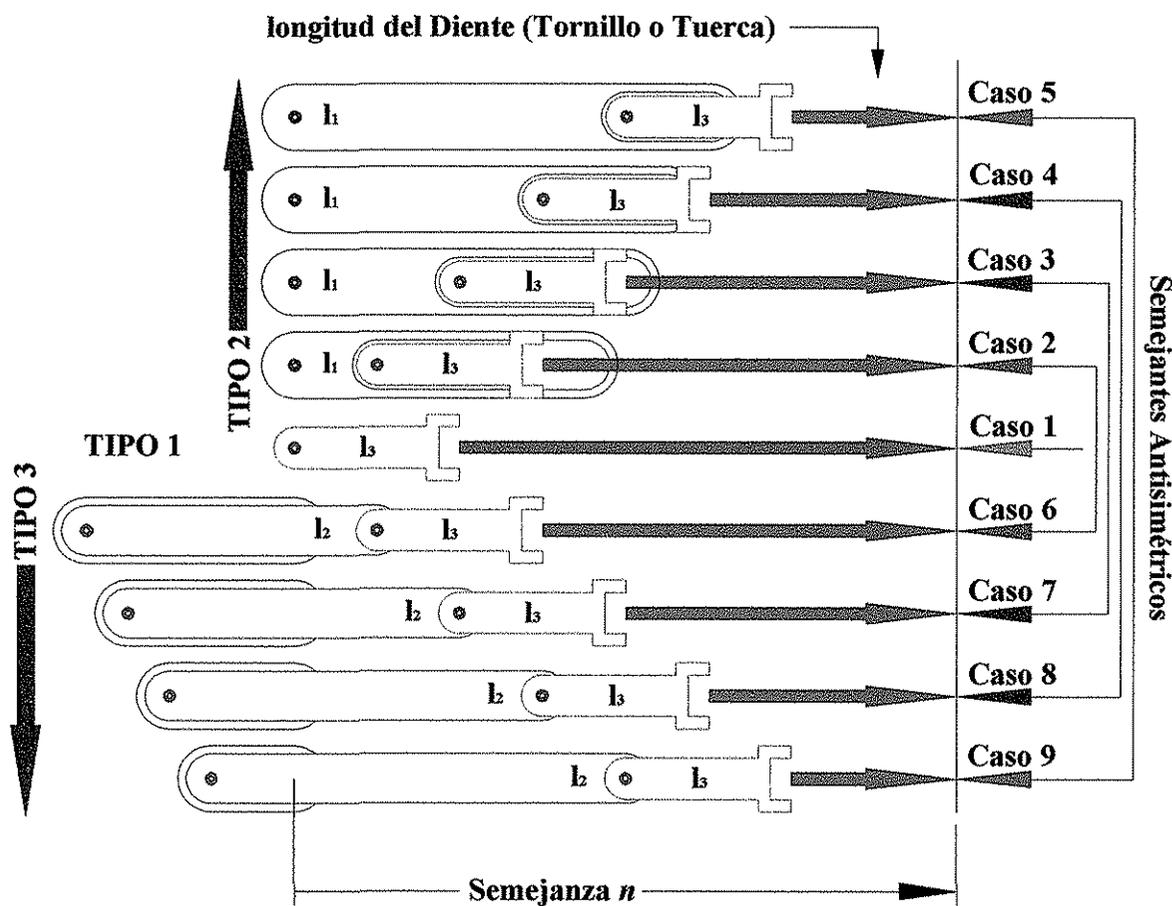


Figura (4.8). Se presentan, en su estado retraídos, 4 pares de manipuladores semejantes antisimétricos, además de un manipulador del TIPO 1. Aquí se aprecia la variación del diente, tanto del Tornillo como de la Tuerca J, para diferentes tipos y la semejanza entre los “antisimétricos”.

Esto prueba el TEOREMA 4.2

□

### 4.2.3. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LA TUERCA J

Si entre el sistema de referencia  $\{\alpha\}$  y  $\{r\}$  existe un cambio de descripción lineal de todos los puntos definidos por los vectores  ${}^r_i p_{\theta_3}$  mediante la transformación de rotación elemental alrededor del eje  ${}^\alpha z_\alpha$  y una magnitud  $\alpha$ , como se indica en la ecuación E(4.11).

$${}^\alpha_i p_{\theta_3} = \left( {}^\alpha z_\alpha {}^\alpha z_\alpha^T + \cos(\alpha) (I_{3 \times 3} - {}^\alpha z_\alpha {}^\alpha z_\alpha^T) + \sin(\alpha) ({}^\alpha z_\alpha \otimes) \right) {}^r_i p_{\theta_3} \quad \text{E(4.11)}$$

Evolucionando  $\alpha$  desde  $-360^\circ$  a  $360^\circ$ , entonces se puede formar el conjunto universal de elementos que dan lugar a la región geométrica de solución del espacio operacional denominada “**Tuerca J**”, ecuación E(4.12), y que permite obtener todos los valores de la tercer variable articular para cualquier punto operacional.

$${}^\alpha_U P_{\theta_3}^{RG} = {}^\alpha_1 P_{\theta_3}^{RG} \cup {}^\alpha_2 P_{\theta_3}^{RG} = \left\{ {}^\alpha_i P_{\theta_3}^{RG} \left| \begin{array}{l} \forall \alpha, -360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} \\ i = 1, 2 \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(4.12)}$$

En las figuras (4.9), (4.10) y (4.11) se presentan las tuercas poseedoras de los tres tipos de dientes. Esto da lugar a la definición de las “**Tuercas J Tipo 1**”, “**Tuercas J Tipo 2**” y “**Tuercas J Tipo 3**”.

#### DEFINICIÓN 4.8

Se denomina “**Tuerca J Tipo 1**” a la región geométrica J que relaciona todo el espacio operacional con la tercera variable articular y que se genera a partir de la rotación simple, alrededor del tercer elemento de la base inercial, del “**Diente de la Tuerca J Tipo 1**”.

$${}^\alpha_U P_{\theta_3}^{RG} |_{TIPO1} = {}^\alpha_1 P_{\theta_3}^{RG} |_{TIPO1} \cup {}^\alpha_2 P_{\theta_3}^{RG} |_{TIPO1} = \left\{ {}^\alpha_i P_{\theta_3}^{RG} |_{TIPO1} \left| \begin{array}{l} \forall \alpha, -360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} \\ i = 1, 2 \end{array} \right. \right\} \quad \text{E(4.13)}$$

□

**DEFINICIÓN 4.9**

Se denomina “**Tuerca J Tipo 2**” a la región geométrica J que relaciona todo el espacio operacional con la tercera variable articular y que se genera a partir de la rotación simple del “**Diente de la Tuerca J Tipo 2**”.

$${}^{\alpha}U P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO2} = {}^{\alpha}P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO2} \cup {}^{\alpha}P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO2} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{\alpha}P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO3} \\ \forall \alpha, -360^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ} \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} \\ i = 1, 2 \end{array} \right\} \quad \text{E(4.14)}$$

□

**DEFINICIÓN 4.10**

Se denomina “**Tuerca J Tipo 3**” a la región geométrica J que relaciona todo el espacio operacional con la tercera variable articular y que se genera a partir de la rotación simple del “**Diente de la Tuerca J Tipo 3**”.

$${}^{\alpha}U P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO3} = {}^{\alpha}P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO3} \cup {}^{\alpha}P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO3} = \left\{ \begin{array}{l} {}^{\alpha}P_{\theta 3}^{RG} |_{TIPO3} \\ \forall \alpha, -360^{\circ} \leq \alpha \leq 360^{\circ} \\ \forall r, r_{min} \leq r \leq r_{vt} \\ i = 1, 2 \end{array} \right\} \quad \text{E(4.15)}$$

□

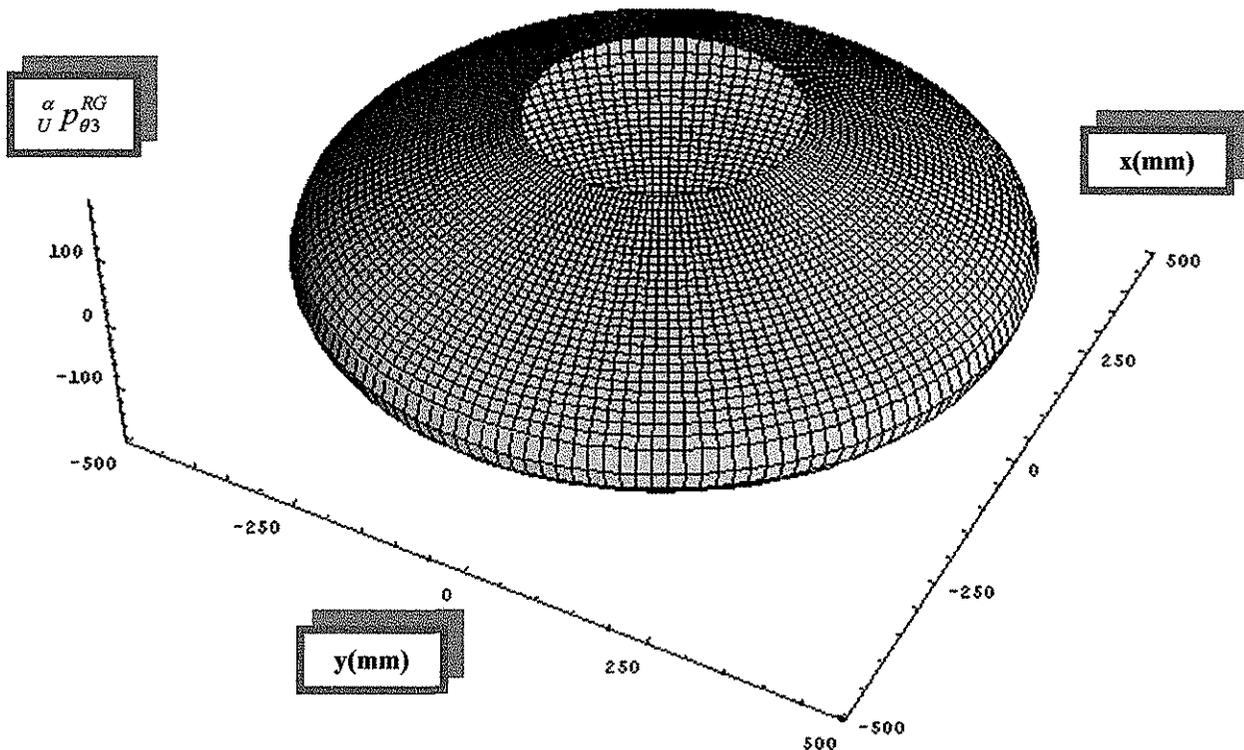


Figura (4.9). Región geométrica articular J denominada como la “Tuerca J Tipo 1”.

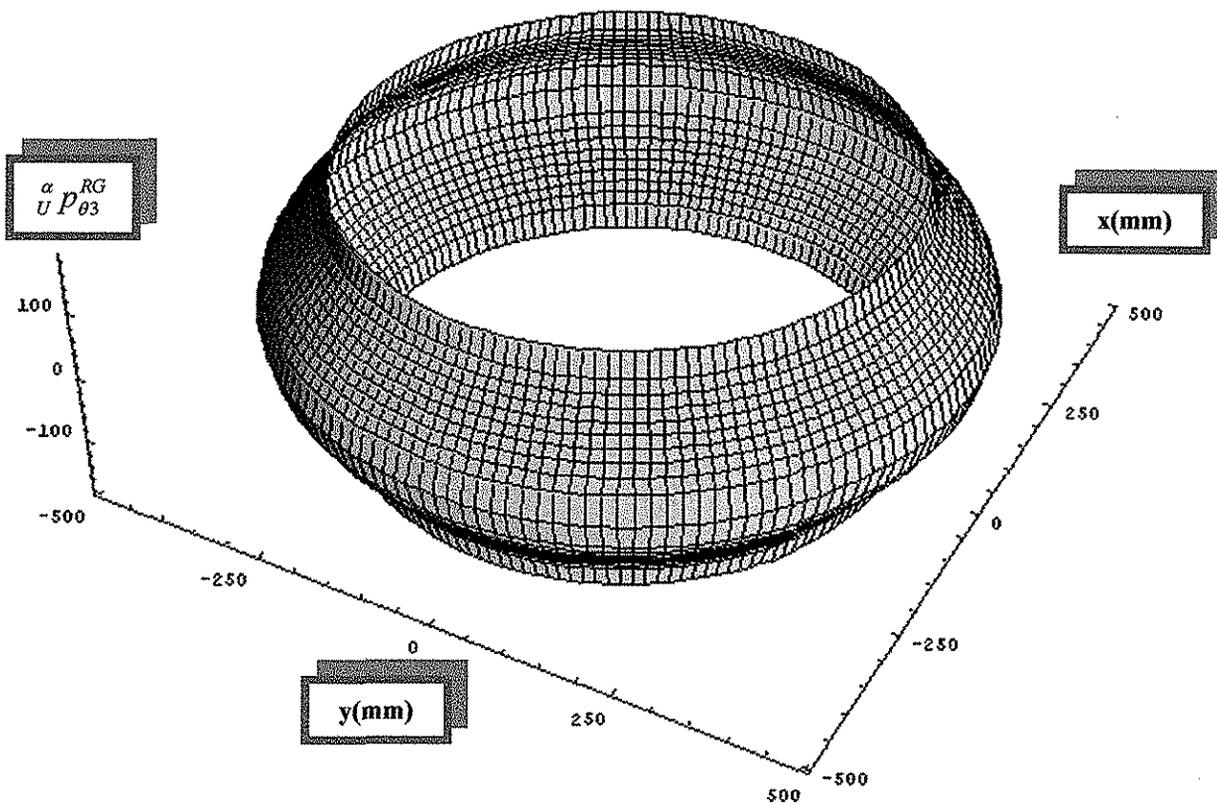


Figura (4.10). Región geométrica articular J denominada como la “Tuerca J Tipo 2”.

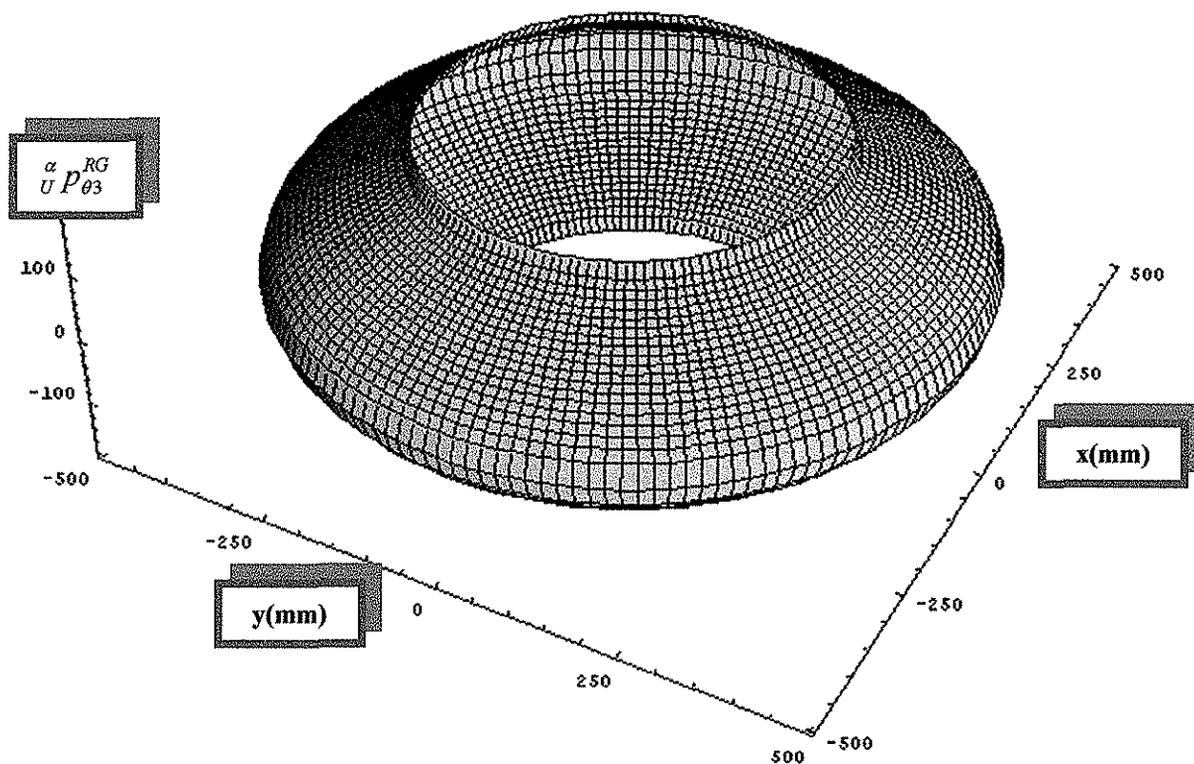


Figura (4.11). Región geométrica articular J denominada como la "Tuerca J Tipo 3".

#### 4.2.4. CINEMÁTICA DIFERENCIAL DE LA TUERCA J

La velocidad del vector que define cada punto del diente de la tuerca, para la solución  $i = 1, 2$ , está dada por la ecuación E(4.16), mientras que la aceleración está expresada por la ecuación E(4.17).

$${}^{\alpha} \dot{p}_{\theta 3} = Rot(\bar{z}, \alpha) {}^{r'} \dot{p}_{\theta 3} + S(\bar{z}, \dot{\alpha}) Rot(\bar{z}, \alpha) {}^{r'} p_{\theta 3} \quad \text{E(4.16)}$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha} \ddot{p}_{\theta 3} = & Rot(\bar{z}, \alpha) {}^{r'} \ddot{p}_{\theta 3} + 2S(\bar{z}, \dot{\alpha}) Rot(\bar{z}, \alpha) {}^{r'} \dot{p}_{\theta 3} + \\ & + S(\bar{z}, \dot{\alpha}) S(\bar{z}, \dot{\alpha}) Rot(\bar{z}, \alpha) {}^{r'} p_{\theta 3} + A(\bar{z}, \alpha) Rot(\bar{z}, \alpha) {}^{r'} p_{\theta 3} \end{aligned} \quad \text{E(4.17)}$$

## CAPÍTULO 5

# FAMILIAS DE TORNILLOS Y TUERCAS J

### 5.1. INTRODUCCIÓN

La otra característica del modelo abstracto es la de permitir que sus resultados puedan ser organizados a partir de las semejanzas entre las representaciones geométricas o, en lo general, “Regiones geométricas Articulares J”, en lo particular, el “Tornillo J” y la “Tuerca J” (figura (5.1)).

Las definiciones de los “*Tornillos J*” y las “*Tuercas J*” permiten formar familias de individuos que exhiben características comunes, por ejemplo, la “*Familia de Tornillos J tipo x*” agrupa individuos o elementos que son todos aquellos tornillos J cuyos dientes son única y solamente del tipo x, etc.

Con el anterior comentario se pueden establecer las siguientes definiciones:

### 5.2. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE GRANDES FAMILIAS

#### DEFINICIÓN 5.1

*El “Criterio de Homogeneidad de una Familia de Regiones Geométricas Articulares J” es un concepto declarado, sin ninguna ambigüedad, que permite determinar la pertenencia de ciertas Regiones Geométricas Articulares J (por ejemplo los Tornillos y las Tuercas J) como elementos de una misma especie agrupados en una familia.*

□

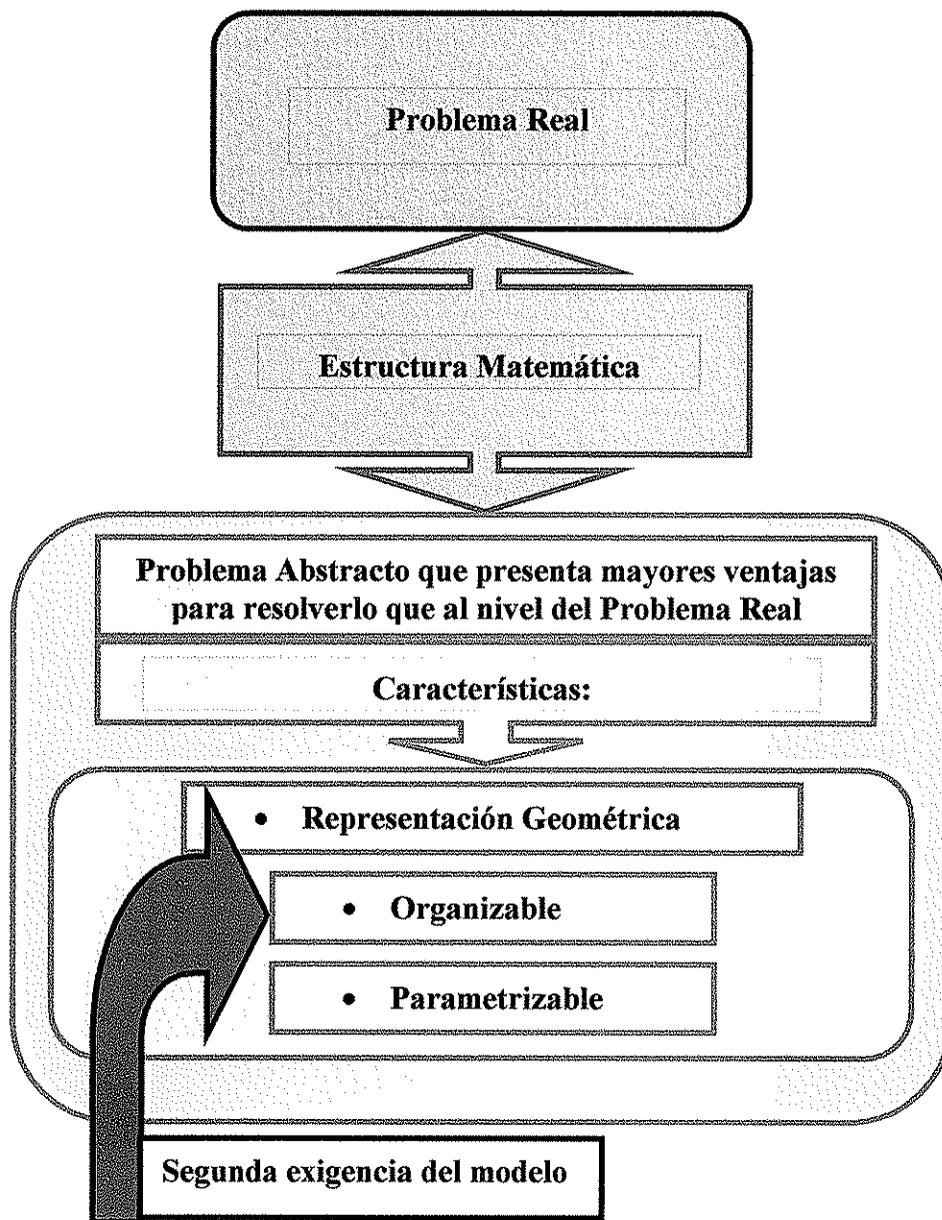


Figura (5.1). Estado de Construcción del Modelo “Regiones Geométricas Articulares J”.

**DEFINICIÓN 5.2**

Una “**Familia de Tornillos J**” es un conjunto de “**Tornillos J**” en el que todos sus elementos, sin excepción, exhiben características comunes según un cierto criterio de homogeneidad, formando así, un conjunto homogéneo bajo ese criterio.

□

**DEFINICIÓN 5.3**

Una “**Familia de Tuercas J**” es un conjunto de “**Tuercas J**” en el que todos sus elementos, sin excepción, exhiben características comunes según un cierto criterio de homogeneidad, formando así, un conjunto homogéneo bajo ese criterio.

□

Con las **DEFINICIÓN 5.2** y **DEFINICIÓN 5.3** anteriores se pueden definir grandes “**Familias de Tornillos y Tuercas J**”, basadas en ciertos *Criterios de Homogeneidad*, por ejemplo, el *Tipo de Diente*, la *Semejanza*, etc.

**5.2.1. FAMILIA UNIVERSAL DE LOS TORNILLOS J****DEFINICIÓN 5.4**

“**La Familia Universal de Tornillos J**” o **FUTJ** es el conjunto de todas las superficies de la segunda variable articular generada por la evolución de los dientes de los Tornillos J mediante la **TTJ**.

$$FUTJ = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO1} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO1} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO1} \right)_\infty, \\ \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_\infty, \\ \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_\infty \end{array} \right\}$$

**E(5.1)**

□

La **FUTJ** es el conjunto mayor de todos los tornillos J incluyendo los constitutivos de todas las demás posibles familias generadas por criterios de homogeneidad más restrictivos.

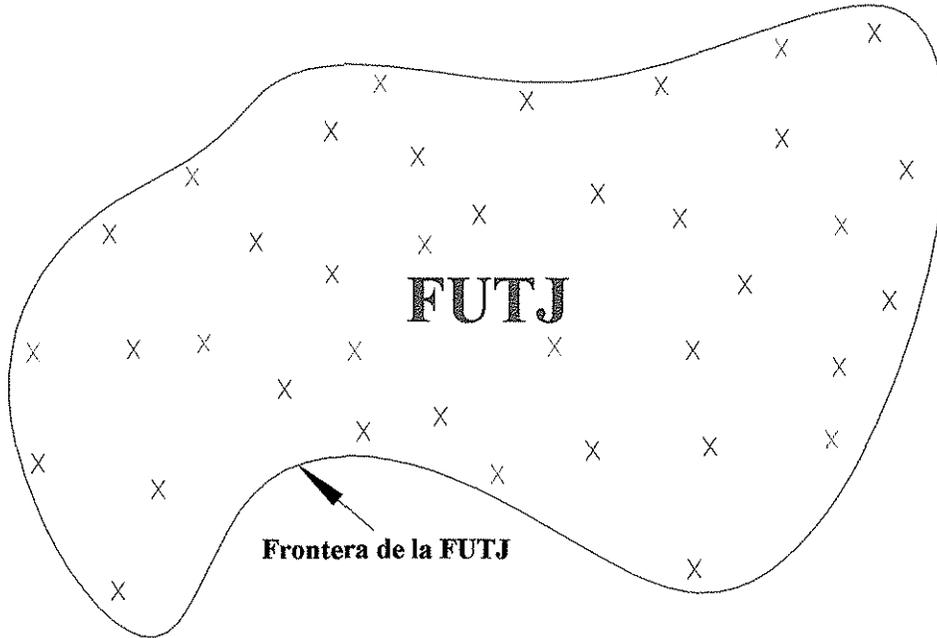


Figura (5.2). La FUTJ

## 5.2.2. FAMILIA UNIVERSAL DE LAS TUERCAS J

### DEFINICIÓN 5.5

“La *Familia Universal de Tuercas J*” o *FUNuJ* es el conjunto de todas las Regiones Geométricas de la tercer variable articular en todo el espacio de trabajo generadas por toda relación de eslabonamiento entre  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ .

$$FUNuJ = \left\{ \begin{array}{l} \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_1, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_2, \dots, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_\infty, \\ \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO2} \right)_1, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO2} \right)_2, \dots, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO2} \right)_\infty, \\ \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO3} \right)_1, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO3} \right)_2, \dots, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO3} \right)_\infty \end{array} \right\}$$

E(5.2)

□

La FUNuJ es la mayor familia de las Tuercas J.

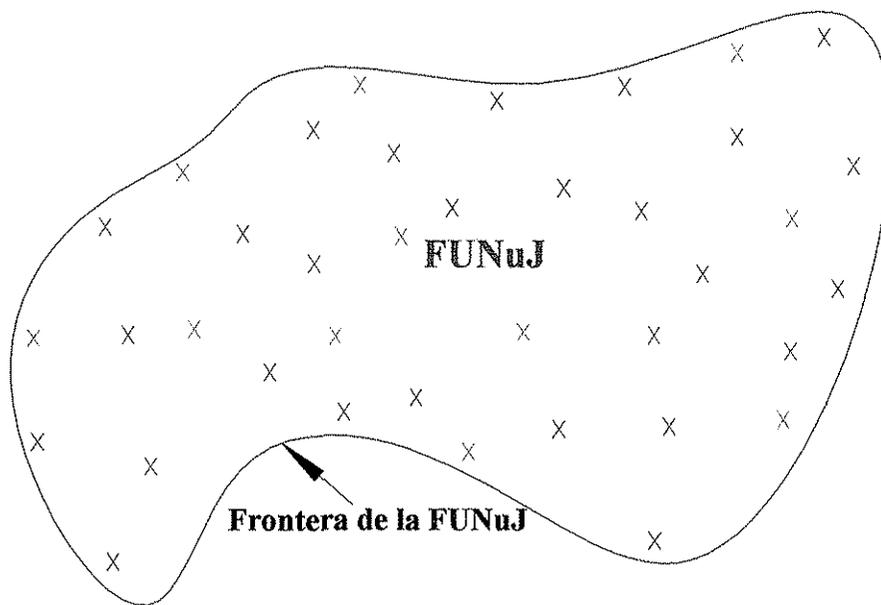


Figura (5.3). La FUNuJ

### 5.2.3. FAMILIAS DE TORNILLOS Y TUERCAS TIPOS 1, 2 y 3

#### DEFINICIÓN 5.6

“La Familia de Tornillos J tipo 1” o *FTJ1* es un conjunto que agrupa elementos cuyos dientes cumplen con todas las características de la **DEFINICIÓN 3.4** referente al “Diente tipo 1”.

$$FTJ1 = \left\{ \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_1, \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_2, \dots, \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_\infty \right\}$$

E(5.3)

□

#### DEFINICIÓN 5.7

“La Familia de Tuercas J tipo 1” o *FNuJ1* es un conjunto que agrupa elementos cuyos dientes cumplen con todas las características de la **DEFINICIÓN 4.4** referente al “Diente tipo 1” de la Tuerca J.

$$FNuJ1 = \left\{ \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_1, \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_2, \dots, \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 3}^{RG} \Big|_{TIPO1} \right)_\infty \right\}$$

E(5.4)

□

#### DEFINICIÓN 5.8

“La Familia de Tornillos J tipo 2” o *FTJ2* es un conjunto que agrupa elementos cuyos dientes cumplen con todas las características de la **DEFINICIÓN 3.5** referente al “Diente tipo 2”.

$$FTJ2 = \left\{ \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO2} \right)_1, \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO2} \right)_2, \dots, \left( \overset{\alpha}{U} P_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO2} \right)_\infty \right\}$$

E(5.5)

□

#### DEFINICIÓN 5.9

“La Familia de Tuercas J tipo 2” o *FNuJ2* es un conjunto que agrupa elementos cuyos dientes cumplen con todas las características de la **DEFINICIÓN 4.5** referente al “Diente tipo 2” de la Tuerca J.

$$FNuJ2 = \left\{ \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \middle|_{TIPO2} \right)_1, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \middle|_{TIPO2} \right)_1, \dots, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \middle|_{TIPO2} \right)_\infty \right\}$$

E(5.6)

□

## DEFINICIÓN 5.10

“La Familia de Tornillos J tipo 3” o **FTJ3** es un conjunto que agrupa elementos cuyos dientes cumplen con todas las características de la **DEFINICIÓN 3.6** referente al “Diente tipo 3”.

$$FTJ3 = \left\{ \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \dots, \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \middle|_{TIPO3} \right)_\infty \right\}$$

E(5.7)

□

## DEFINICIÓN 5.11

“La Familia de Tuercas J tipo 3” o **FNuJ3** es un conjunto que agrupa elementos cuyos dientes cumplen con todas las características de la **DEFINICIÓN 4.6** referente al “Diente tipo 3” de la Tuerca J.

$$FNuJ3 = \left\{ \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \dots, \left( \alpha P_{\theta 3}^{RG} \middle|_{TIPO3} \right)_\infty \right\}$$

E(5.8)

□

## 5.2.4. PROPIEDADES DE LAS FTJ1, FTJ2, FTJ3, FNuJ1, FNuJ2 y FNuJ3

Las FTJ1, FTJ2 y FTJ3 son conjuntos propios de la FUTJ, **Hrbacek (1999)**, ya que cumplen con las propiedades siguientes:

$$\begin{aligned} FTJ1 &\subseteq FUTJ \\ FUTJ &= FTJ1 \cup FUTJ \\ FTJ1 &= FTJ1 \cap FUTJ \end{aligned}$$

E(5.9 a, b, c)

$$\begin{aligned}
 FTJ2 &\subseteq FUTJ \\
 FUTJ &= FTJ2 \cup FUTJ \\
 FTJ2 &= FTJ2 \cap FUTJ
 \end{aligned}$$

E(5.10 a, b, c)

$$\begin{aligned}
 FTJ3 &\subseteq FUTJ \\
 FUTJ &= FTJ3 \cup FUTJ \\
 FTJ3 &= FTJ3 \cap FUTJ
 \end{aligned}$$

E(5.11 a, b, c)

Además, los conjuntos **FTJ1**, **FTJ2** y **FTJ3** son disyuntos o ajenos porque ninguno tiene, al menos, un elemento común con algún otro, ecuaciones E(5.12a), E(5.12b) y E(5.12c).

$$\begin{aligned}
 \emptyset &= FTJ1 \cap FTJ2 \\
 \emptyset &= FTJ1 \cap FTJ3 \\
 \emptyset &= FTJ2 \cap FTJ3
 \end{aligned}$$

E(5.12 a, b, c)

También, **FTJ1**, **FTJ2** y **FTJ3** constituyen, cada uno, una partición de la **FUTJ**, ya que la dividen en tres partes completas, figura F(5.4), Obregón, (1984), Hrbacek, (1999), ecuación E(5.13).

$$FUTJ = (FTJ1 \cup FTJ2) \cup FTJ3$$

E(5.13)

Estas propiedades convierten a los conjuntos **FTJ1**, **FTJ2** y **FTJ3** como conjuntos de la clase *exhaustivos* y *mutuamente excluyentes*, Obregón, (1984).

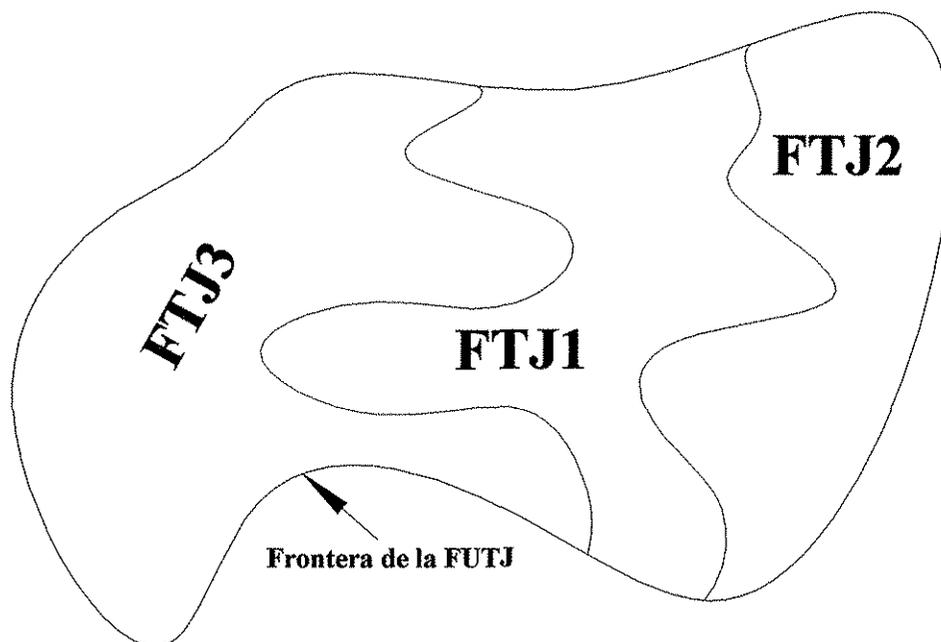


Figura (5.4). Partición de la FUTJ.

Lo mismo se puede decir para las FNuJ1, FNuJ2 y FNuJ3.

Estas seis grandes Familias agrupan individuos que tienen como criterio de homogeneidad el tipo del diente de todos los tornillos y las tuercas, sin embargo, y como las DEFINICIONES 5.1, 5.2 y 5.3 permiten una mayor libertad, hay otras características comunes que permiten que los individuos puedan ser agrupados, por ejemplo la “*Semejanza en los Tornillos*”.

### 5.2.5. LA FAMILIA DE TORNILLOS J SEMEJANTES

Se habló que las FTJ1, FTJ2 y FTJ3 son *exhaustivas* y *mutuamente excluyentes*. Esto no sólo dificulta sino que imposibilita encontrar el Tornillo J deseado si lo que se busca es mejorar el desempeño de la manipulación mediante una cadena cinemática de arquitectura PRRRd a partir de una cadena de presencia general como el descrito en el capítulo 2.

El espacio de búsqueda es tan amplio que se desconoce en qué Familia de Tornillos J FTJ1, FTJ2 y FTJ3 se encuentra el mejor Tornillo. Primero se tendría que procesar una de

ellas; posteriormente, la siguiente y comparar el resultado con el del anterior proceso, repitiendo el procedimiento para la tercer familia.

Es necesario un espacio de búsqueda que abarque elementos potenciales de las tres familias de Tornillos **FTJ1**, **FTJ2** y **FTJ3**.

En el capítulo 3 se definió la Semejanza bajo dos criterios  $m$  y  $n$  (**DEFINICIÓN 3.7**). Para cada par de criterios de semejanza  $(m, n)$  se puede formar una familia de dientes, tanto de tornillos como de tuercas. Así, el conjunto que agrupa el binomio  $(m, n)$  es coordinable, **Obregón (1984)**, con otras dos familias “imágenes”.

Estos nuevos conjuntos son la “**Familia de Tornillos J Semejantes bajo los Criterios  $m, n$** ” y la “**Familia de Tuercas J Semejantes bajo los Criterios  $m, n$** ” Su definición y propiedades se presentan a continuación, sin embargo es necesario definir los conjuntos de cada uno de los criterios de semejanza.

#### DEFINICIÓN 5.12

El “**Conjunto Universal del Criterio de Semejanza  $m$** ” o **CUS $m$**  agrupa todos los criterios  $m$  de semejanza que generan dientes de Tornillos y Tuercas  $J$  semejantes.

$$CUSm = \{m \mid m \in \mathfrak{R}, \text{ primer criterio de semejanza}\} \quad \text{E(5.14a)}$$

$$CUSm = \{m_1, m_2, \dots, m_\infty\} \quad \text{E(5.14b)}$$

□

Por cada elemento de **CUS $m$**  se puede construir un conjunto **CS $m_i$**  como se muestra a continuación:

$$CSm_i = \{m_i\}, \quad CSm_i \subseteq CUSm \quad \text{E(5.15a)}$$

$$CUSm = (((CSm_1 \cup CSm_2) \cup \dots) CSm_i \cup \dots) \cup CSm_\infty \quad \text{E(5.15b)}$$

#### DEFINICIÓN 5.13

El “**Conjunto Universal del Criterio de Semejanza  $n$** ” o **CUS $n$**  agrupa todos los criterios  $n$  de semejanza que generan dientes de Tornillos y Tuercas  $J$  semejantes.

$$CUSn = \{n | n \in \mathfrak{R}, \text{ segundo criterio de semejanza}\} \quad \text{E(5.16a)}$$

$$CUSn = \{n_1, n_2, \dots, n_\infty\} \quad \text{E(5.16b)}$$

□

De la misma forma como se hizo para  $CUSm$ , por cada elemento de  $CUSn$  se puede construir un conjunto  $CSn_j$  como se muestra a continuación:

$$CSn_j = \{n_j\} \quad CSn_j \subseteq CUSn \quad \text{E(5.17a)}$$

$$CUSn = (((CSn_1 \cup CSn_2) \cup \dots) CSn_j \cup \dots) \cup CSn_\infty \quad \text{E(5.17b)}$$

#### DEFINICIÓN 5.14

El “*Conjunto Universal de Criterios de Semejanza*” o *CUS* agrupa todos los Pares Ordenados (Hrbacek (1999)) de Criterios de Semejanza  $(m, n)$  operando los conjuntos  $CUSm$  y  $CUSn$  con el producto cartesiano de conjuntos  $\{\bullet\} \times \{\bullet\}$ .

$$CUS = CUSm \times CUSn \quad \text{E(5.18a)}$$

$$CUS = \{(m, n) | m \in CUSm, n \in CUSn\} \quad \text{E(5.18b)}$$

$$CUS = \{(m, n)_1, (m, n)_2, \dots, (m, n)_\infty\} \quad \text{E(5.18c)}$$

$$CUS = \left\{ \begin{array}{l} (m_1, n_1), (m_2, n_1), (m_3, n_1), \dots, (m_\infty, n_1), \\ (m_1, n_2), (m_2, n_2), (m_3, n_2), \dots, (m_\infty, n_2), \\ \vdots \\ (m_1, n_\infty), (m_2, n_\infty), (m_3, n_\infty), \dots, (m_\infty, n_\infty) \end{array} \right\} \quad \text{E(5.18d)}$$

□

**DEFINICIÓN 5.15**

Se denomina “*Conjunto Parcialmente Semejante respecto de m*” o *CPSm* al conjunto que agrupa pares de criterios de semejanza cuando el primer criterio, *m*, permanece constante en  $m_i$ .

$$CPSm = CSm_i \times CUSn \quad \text{E(5.19a)}$$

$$CPSm = \{(m_i, n_1), (m_i, n_2), \dots, (m_i, n_\infty)\} \quad \text{E(5.19b)}$$

□

**DEFINICIÓN 5.16**

Se denomina “*Conjunto Parcialmente Semejante respecto de n*” o *CPSn* al conjunto que agrupa pares de criterios de semejanza cuando el segundo criterio, *n*, permanece constante en  $n_j$ .

$$CPSn = CUSm \times CSn_j \quad \text{E(5.20a)}$$

$$CPSn = \{(m_1, n_j), (m_2, n_j), \dots, (m_\infty, n_j)\} \quad \text{E(5.20b)}$$

□

Los CUS, CPSm y CPSn, que contienen únicamente pares ordenados, pertenecen a la clase de conjuntos denominados: Relaciones Binarias, **Hrbacek (1999)**.

**DEFINICIÓN 5.17**

“*La Familia Universal de los Tornillos J Semejantes bajo los Criterios m, n*” o *FUTJS* / $_{m,n}$  es un conjunto que agrupa “*Tornillos J*” con dientes tipo 1, 2 y 3 que son semejantes según los dos criterios *m* y *n* dados en la **DEFINICIÓN 3.7**.

$$FUTJS|_{m,n} = \left\{ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_\infty, \\ \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO1} \right)_1 \\ \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 2}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_\infty \end{array} \right\}_{m,n}$$

E(5.21a)

$$FUTJS|_{m,n} \subseteq FUTJ$$

E(5.21b)

□

### 5.2.6. LA FAMILIA DE TUERCAS J SEMEJANTES

#### DEFINICIÓN 5.18

“La Familia Universal de los Tuercas J Semejantes bajo los Criterios  $m, n$ ” o  $FUNuJS|_{m,n}$  es un conjunto que agrupa “Tuercas J” con dientes tipo 1, 2 y 3 que son semejantes según los dos criterios  $m$  y  $n$  dados en la DEFINICIÓN 3.7.

$$FUNuJS|_{m,n} = \left\{ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO3} \right)_\infty, \\ \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO1} \right)_1 \\ \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_1, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_2, \dots, \left( \begin{array}{c} \alpha P_{\theta 3}^{RG} \\ U \end{array} \middle|_{TIPO2} \right)_\infty \end{array} \right\}_{m,n}$$

E(5.22a)

$$FUNuJS|_{m,n} \subseteq FUNuJ$$

E(5.22b)

□

Estos dos conjunto son unos de los muchos posibles. Sin embargo, para cada par de Criterios de Semejanza  $(m, n) \in CUS$  se tienen una  $FUTJS|_{m,n}$  y una  $FUNuJS|_{m,n}$  diferentes.

Como puede haber un número infinito de pares de criterios de semejanza,  $(m, n)$  (este binomio es un par ordenado, **Hrbacek (1999)**), agrupados en el conjunto  $CUS$ , ecuaciones E(5.18a), E(5.18b), E(5.18c), E(5.18d), se tiene también un número infinito de  $FUTJS|_{m,n}$  agrupadas en la “Familia Universal de Familias de Tornillos J Semejantes” y  $FUNuJS|_{m,n}$  agrupadas en la “Familia Universal de Familias de Tuercas J Semejantes”

**DEFINICIÓN 5.19**

La “Familia Universal de Familias de Tornillos J Semejantes” o **FUFTJS** colecciona una **FUTJS** /<sub>m,n</sub> por cada par de Criterios de Semejanza (m, n) del CUS.

$$FUFTJS = \left\{ (FUTJS|_{m,n})_1, (FUTJS|_{m,n})_2, \dots, (FUTJS|_{m,n})_\infty \right\} \quad \mathbf{E(5.23a)}$$

$$(FUTJS|_{m,n})_1, (FUTJS|_{m,n})_2, \dots, (FUTJS|_{m,n})_\infty \subseteq FUTJ \quad \mathbf{E(5.23b)}$$

$$(FUTJS|_{m,n})_1, (FUTJS|_{m,n})_2, \dots, (FUTJS|_{m,n})_\infty \in FUFTJS \quad \mathbf{E(5.23c)}$$

□

**DEFINICIÓN 5.20**

La “Familia Universal de Familias de Tuercas J Semejantes” o **FUFNuJS** colecciona una **FUNuJS** /<sub>m,n</sub> por cada par de Criterios de Semejanza (m, n) del CUS.

$$FUFNuJS = \left\{ (FUNuJS|_{m,n})_1, (FUNuJS|_{m,n})_2, \dots, (FUNuJS|_{m,n})_\infty \right\} \quad \mathbf{E(5.24a)}$$

$$(FUNuJS|_{m,n})_1, (FUNuJS|_{m,n})_2, \dots, (FUNuJS|_{m,n})_\infty \subseteq FUNuJ \quad \mathbf{E(5.24b)}$$

$$(FUNuJS|_{m,n})_1, (FUNuJS|_{m,n})_2, \dots, (FUNuJS|_{m,n})_\infty \in FUFNuJS \quad \mathbf{E(5.24c)}$$

□

La unión de todas las  $FUTJS|_{m,n}$  forman la  $FUTJ$ , esto es:

$$FUTJ = \left( \left( \left( FUTJS|_{m,n} \right)_1 \cup \left( FUTJS|_{m,n} \right)_2 \right) \cup \left( FUTJS|_{m,n} \right)_3 \cup \dots \cup \left( FUTJS|_{m,n} \right)_\infty \right) \tag{E.5.25}$$

Lo mismo se puede afirmar respecto de las  $FUNuJS|_{m,n}$ .

Como hay una correspondencia uno a uno de los elementos del  $CUS$  con los correspondientes de las  $FUFTJS$  y  $FUFNuJS$ , también éstas últimas pueden dividirse en conjuntos parcialmente semejantes respecto de  $m$  o respecto de  $n$ . Estas se denominan como la “Familia de Familias de Tornillos J Parcialmente Semejantes Respecto de  $m$ ”, la “Familia de Familias de Tornillos J Parcialmente Semejantes Respecto de  $n$ ”, la “Familia de Familias de Tuercas J Parcialmente Semejantes Respecto de  $m$ ” y la “Familia de Familias de Tuercas J Parcialmente Semejantes Respecto de  $n$ ”.

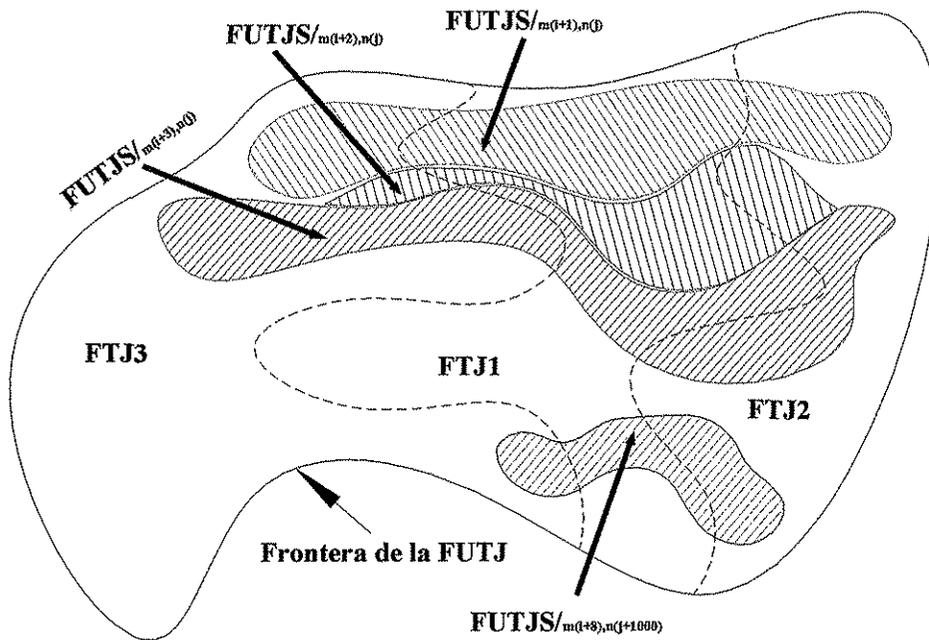


Figura (5.5). Ubicación de las  $FUTJS_{m,n}$



## DEFINICIÓN 5.21

La “Familia de Familias de Tornillos J Parcialmente Semejantes Respecto de  $m$ ” o  $FFTJS_m$  colecciona todas las  $FUTJS /_{m,n}$  correspondientes a cada par  $(m_i, n_k) \in CPSm$  si  $i=cte$  y  $k=1, \dots, \infty$ .

$$FFTJS_m = \{FUTJS|_{m_1, n_1}, (FUTJS|_{m_1, n_2}), \dots, (FUTJS|_{m_1, n_\infty})\} \quad E(5.26)$$

□

## DEFINICIÓN 5.22

La “Familia de Familias de Tuercas J Parcialmente Semejantes Respecto de  $m$ ” o  $FFNuJS_m$  colecciona todas las  $FUNuJS /_{m,n}$  correspondientes a cada par  $(m_i, n_k) \in CPSm$  si  $i=cte$  y  $k=1, \dots, \infty$ .

$$FFNuJS_m = \{FUNuJS|_{m_1, n_1}, (FUNuJS|_{m_1, n_2}), \dots, (FUNuJS|_{m_1, n_\infty})\} \quad E(5.27)$$

□

## DEFINICIÓN 5.23

La “Familia de Familias de Tornillos J Parcialmente Semejantes Respecto de  $n$ ” o  $FFTJS_n$  colecciona todas las  $FUTJS /_{m,n}$  correspondientes a cada par  $(m_k, n_j) \in CPSn$  si  $j=cte$  y  $k=1, \dots, \infty$ .

$$FFTJS_n = \{FUTJS|_{m_1, n_j}, (FUTJS|_{m_2, n_j}), \dots, (FUTJS|_{m_\infty, n_j})\} \quad E(5.28)$$

□

## DEFINICIÓN 5.24

La “Familia de Familias de Tuercas J Parcialmente Semejantes Respecto de  $n$ ” o  $FFNuJS_n$  colecciona todas las  $FUNuJS /_{m,n}$  correspondientes a cada par  $(m_k, n_j) \in CPSn$  si  $j=cte$  y  $k=1, \dots, \infty$ .

$$FFNuJS_n = \left\{ (FUNuJS|_{m1,nj}), (FUNuJS|_{m2,nj}), \dots, (FUNuJS|_{moo,nj}) \right\} \quad \text{E(5.29)}$$

□

**DEFINICIÓN 5.25**

Se dice que una Familia es de mayor “Grado de Homogeneidad” si integra menor cantidad de elementos de otra Familia.

□

**NOTA:** Esta definición es muy abstracta ya que el concepto de especie está sujeto al criterio de homogeneidad de que se trate.

Aunque una Familia es estrictamente homogénea bajo el criterio de homogeneidad por el que fue generada, ésta puede ser heterogénea bajo los criterios mediante los cuales fueron generadas otras. Esto determina el grado de Homogeneidad de la Familia; así, la FUTJ es la menos homogénea de todas, ya que agrupa todos los elementos constitutivos de otras subespecies generadas por sus respectivos criterios de homogeneidad.

Se puede observar que la FTJS $|_{m,n}$  agrupa solamente algunos individuos constitutivos de las familias FTJ1, FTJ2 y FTJ3. Así, ésta es heterogénea bajo el criterio del tipo del diente.

Por otro lado, la FTJ1 integra, entre sus elementos, el único individuo cuyo diente es del tipo 1 de la FUTJS $|_{m,n}$  (ecuación E(5.30)). La FTJ1 es heterogénea bajo el criterio de semejanza, sin embargo, es más “pura” (homogénea) que la FTJ2, y FTJ3 porque agrupa un solo individuo de FUTJS $|_{m,n}$ . Sin embargo, FTJ2 y FTJ3 agrupan, entre sus filas de elementos, el resto infinito de tornillos tipo 2 y 3 semejantes, respectivamente (ecuaciones E(5.31) y E(5.32)).

$$FTJ1 \cap FTJS|_{m,n} = \left\{ \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO1} \right\}_{m,n} \quad \text{E(5.30)}$$

$$FTJ2 \cap FTJS|_{m,n} = \left\{ \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO2} \right\}_1, \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO2} \right\}_2, \dots, \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO2} \right\}_{\infty} \right\}_{m,n} \quad \text{E(5.31)}$$

$$FTJ3 \cap FTJS|_{m,n} = \left\{ \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO3} \right\}_1, \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO3} \right\}_2, \dots, \left( \alpha P_{\theta 2}^{RG} \right)_{TIPO3} \right\}_{\infty} \right\}_{m,n} \quad \text{E(5.32)}$$

Por lo que se puede decir que la **FTJ1** es de mayor grado de homogeneidad que las **FTJ2** y **FTJ3**, bajo el criterio de semejanza.

Todas estas Familias de Tornillos (no las Familias de familias), definidas anteriormente, son subfamilias o subconjuntos de la universal **FUTJ**, cuyos individuos tienen, como característica común, el haber sido generados mediante la **TTJ**.

Todas estas anteriores familias pertenecen a la clase de conjuntos infinitos debido al número de elementos que incluyen.

Lo mismo se puede afirmar para las familias de las Tuercas J.

### 5.3. FAMILIAS POTENCIALMENTE INVESTIGABLES

#### 5.3.1. INTRODUCCIÓN

Se definieron grandes familias de Tornillos y Turcas J, sin embargo, no todas son potencialmente investigables, esto es, que sus características no ayudan al proceso de búsqueda. Las **FTJ1**, **FTJ2** y **FTJ3** son exhaustivas y mutuamente excluyentes, y si no se sabe en cuál se encuentra la solución se tendría que analizar cada una hasta abarcar toda la **FUTJ**, que es enorme.

Cada una de las **FUTJSm,n** son, también, ajenas; por cada par de criterios de semejanza (m, n) es necesario barrer toda la familia. Si estas son muchas, entonces el proceso de búsqueda se vuelve muy complicado.

#### 5.3.2. SELECCIÓN DE LA FAMILIA POTENCIALMENTE INVESTIGABLE

La selección de la o las familias que pueden contener la solución dependen de los casos a investigar; éstos son:

#### CASOS A INVESTIGAR

- **Caso 1.** El radio exterior del volumen de trabajo y la longitud del último eslabón permanecen constantes;  $l_1$  y  $l_2$  son variables.
- **Caso 2.** El radio exterior del volumen de trabajo permanece constante;  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  pueden variar en longitud.

- **Caso 3.** Tanto el radio exterior del volumen de trabajo como las longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  son variables.

La selección de la(s) Familia(s) potencial(es) se basa en la determinación de criterios bien definidos.

Para el primer caso, la familia que se debe investigar es la **FUTJS $_{mi,nj}$**  y la **FUNuJS $_{mi,ni}$** , con  $i = j = \text{cte}$ .

Para el caso 2, los criterios de selección de la familia potencial se establecen teniendo en cuenta las preguntas siguientes:

- **PREGUNTA 1:** es una garantía que la solución está en **FTJ1** y **FNuJ1**, o en **FTJ2** y **FNuJ2**, o en **FTJ3** y **FNuJ3**, pero ¿en cuál?
- **PREGUNTA 2:** La solución También está en una **FUTJS $_{m,n}$**  y **FUNuJS $_{m,n}$** , pero ¿en cuál?
- **PREGUNTA 3:** ¿Qué razón tiene el buscar en ambos criterios de semejanza, si lo que se pretende es determinar la longitud de los eslabones rotativos del manipulador dejando constante su radio exterior del volumen de trabajo?

Por lo tanto, para este caso, los criterios de selección de la(s) familia(s) potencial(es) son:

1. La(s) familia(s) debe(n) abarcar las tres grandes familias **FTJ1**, **FTJ2** y **FTJ3**.
2. La(s) familia(s) deben estar restringidas al segundo criterio de semejanza  $n$  de tal manera que se permita dejar constante el radio exterior del volumen de trabajo.

Los criterios anteriores permiten concluir a, b, c y d siguientes:

- a. No es el par ordenado (**FTJ1**, **FNuJ1**).
- b. No es el par ordenado (**FTJ2**, **FNuJ2**).
- c. No es el par ordenado (**FTJ3**, **FNuJ3**).
- d. No es un par ordenado (**FUTJS $_{m,n}$** , **FUNuJS $_{m,n}$** ) barriendo el (**FUTJS $_{mi,nj}$** , **FUNuJS $_{mi,nj}$** );  $i = \text{cte}$ ,  $j = 1, \dots, \infty$ .

Así, la solución, para el caso 2, se encuentra en una (**FUTJS $_{m,n}$** , **FUNuJS $_{m,n}$** ) barriendo las (**FUTJS $_{mi,nj}$** , **FUNuJS $_{mi,nj}$** );  $i = 1, \dots, \infty$ ,  $j = \text{cte}$ .

Para el caso 3, no queda más que explorar los binomios ( $FUTJSm,n$ ,  $FUNuJSm,n$ ) con  $m$  y  $n$  variables.

Para poder investigar estas familias se requiere de agentes que puedan propagarse a través de ellas. Estos agentes son los parámetros de la estructura matemática desarrollada que ayudarán a encontrar la solución y se pueden presentar en forma fenotípica o genotípica.

El capítulo 7 presenta las características y propiedades de esos agentes de exploración.

## CAPÍTULO 6

# EFICIENCIAS DE LOS TORNILLOS J Y LAS TUERCAS J

### 6.1. INTRODUCCIÓN

Nakamura (1991) presenta la definición de la “Medida de Manipulabilidad” que es un parámetro de evaluación del estado del espacio articular como función del estado operacional para casos de manipuladores tanto redundantes como no redundantes. Establece la facilidad para ofrecer suavidad de movimiento por parte del manipulador.

Esa *Medida de Manipulabilidad* es un escalar  $w$  como función del jacobiano del manipulador, ecuación E(6.1).

$$w = |\Delta J(\Theta)| \quad \text{E(6.1)}$$

Esa idea se basa en el hecho de que  $J(\Theta)^{-1}$  es inversamente proporcional al determinante  $\Delta J(\Theta)$ , tal que, para valores pequeños de éste último, aquel tomará valores grandes; como consecuencia, las velocidades, aceleraciones y pares motrices de las articulaciones crecerán numéricamente.

Paul y Stevenson (1983), Yoshikawa (1985) y Nakamura (1991) recomiendan determinar la longitud de los eslabones del manipulador y su configuración para aquellos valores absolutos de  $\Delta J(\Theta)$  mayores posibles.

### 6.2. JACOBIANO DEL DIENTE DEL TORNILLO J

Las ecuaciones E(3.4) y E(3.5), vistas en el capítulo 3, presentan la magnitud del tercer elemento del vector  ${}^r P_\beta \in {}^r P_\beta^{RG}$ , ecuación E(3.6), generador del diente del tornillo J.

Esas ecuaciones muestran la variación de  $\beta$  como función del dominio de  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ . El rango pertenece al espacio articular, mientras que el dominio pertenece al espacio operacional.

Mediante la Regla de la Cadena (**Leithold (1998)**) se puede obtener la variación de  $\beta$  como una función del tiempo y de  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ , ecuación E(6.2).

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial\beta}{\partial r} \frac{dr}{dt} \quad \text{E(6.2)}$$

En este momento se tiene la duda sobre la naturaleza de  $\frac{\partial\beta}{\partial r}$ ; la pregunta es la siguiente:

$$\text{¿es } \frac{\partial\beta}{\partial r} = J_{DTJ}(r) \text{ o } \frac{\partial\beta}{\partial r} = J_{DTJ}^{-1}(r)?$$

Esto es fácil de responder, recordando que el inverso del jacobiano transforma el espacio operacional a espacio articular, por lo tanto la elección correcta se expresa en la ecuación E(6.3).

$$\frac{\partial\beta}{\partial r} = J_{DTJ}^{-1}(r) \quad \text{E(6.3)}$$

Si  $J_{DTJ}(r) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  (para este caso  $m=n=1$ ) es no singular, esto es,  $\Delta J_{DTJ} \neq 0$ , entonces su inversa se expresa en la ecuación E(6.4).

$$J_{DTJ}^{-1}(r) = \frac{\text{adj } J_{DTJ}}{\Delta J_{DTJ}} \quad \text{E(6.4)}$$

De esta manera se obtiene el determinante del “Jacobiano del Diente del Tornillo J” (ecuación E(6.5)) que servirá como un parámetro de medición de la eficiencia de todos los tipos de Tornillos J, en lo referente a facilidad de suavidad de movimiento.

$$\Delta J_{DTJ} = (2l_1(r-l_3))^2 \sqrt{1 - \left( \frac{l_1^2 + (r-l_3)^2 - l_2^2}{2l_1(r-l_3)} \right)^2} \quad \text{E(6.5)}$$

### 6.3. EFICIENCIA DEL TORNILLO J

#### DEFINICIÓN 6.1

Se denomina “Índice de Eficiencia del Tornillo J en el punto r”,  $ETJ(r)$ , al valor escalar  $|\Delta J_{DTJ}(r)|$  en una posición  $r \in [r_{min}, r_{vt}]$

$$ETJ(r) = |\Delta J_{DTJ}(r)|; \quad r \in [r_{min}, r_{vt}] \quad \text{E(6.6)}$$

#### DEFINICIÓN 6.2

Se denomina “Eficiencia del Tornillo J”,  $ETJ$ , a la colección de todo los  $ETJ(r)$ .

$$ETJ = \{ETJ(r) | r \in [r_{min}, r_{vt}]\} \quad \text{E(6.7)}$$

#### DEFINICIÓN 6.3

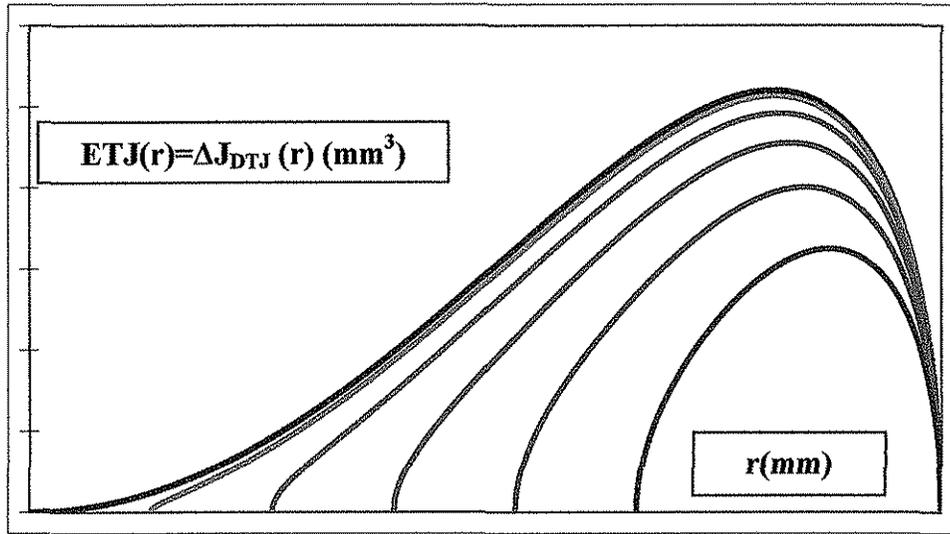
Un tornillo **a** es más eficiente que un tornillo **b** si:

- El área bajo el conjunto  $ETJ|_a$  es mayor que el área bajo el conjunto  $ETJ|_b$ .

$$\int_{r_{min}}^{r_{vt}} ETJ(r) dr \Big|_a > \int_{r_{min}}^{r_{vt}} ETJ(r) dr \Big|_b$$

- $\exists ETJ(r)|_a = ETJ(r^+)|_{a|_{MAX}}$ , en un punto raíz  $r^+ \in [r_{min}, r_{vt}]_a$ , y  
 $\exists ETJ(r)|_b = ETJ(r^+)|_{b|_{MAX}}$  en un punto raíz  $r^+ \in [r_{min}, r_{vt}]_b$ , tal que  
 $ETJ(r^+)|_{a|_{MAX}} > ETJ(r^+)|_{b|_{MAX}}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3								
$l_1=150$	$l_1=170$	$l_1=130$	$l_1=190$	$l_1=110$	$l_1=210$	$l_1=90$	$l_1=230$	$l_1=70$	$l_1=250$	$l_1=50$
$l_2=150$	$l_2=130$	$l_2=170$	$l_2=110$	$l_2=190$	$l_2=90$	$l_2=210$	$l_2=70$	$l_2=230$	$l_2=50$	$l_2=250$
$l_3=180$										
(mm)										
LdTJ										
=300	=260	=260	=220	=220	=180	=180	=140	=140	=100	=100
(mm)										

Figura (6.1). Eficiencias de 11 tornillos semejantes ( $m=180$  mm,  $n=480$  mm). Un Tornillo del Tipo 1, 5 tornillos del Tipo 2 y 5 Tornillos del Tipo 3. Además, los pares del mismo color son antisimétricos (DEFINICIÓN 4.7).

LEMA 6.1

Sea  $\Delta J_{DTJ} \in \mathbb{R}$  y  $r \in [r_{min}, r_{vi}]$ .

$$\Delta J_{DTJ} \left( \frac{1}{3} \left( -\sqrt{3} \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 + \sqrt{l_1^4 + 14l_1^2 l_2^2 + l_2^4} + 3l_3} \right) \right) = \Delta J_{DTJ} |_{MAX}$$

PRUEBA LEMA 6.1

La prueba se obtiene encontrando las raíces que satisfacen a  $\frac{d\Delta J_{DTJ}(r)}{dr} = 0$

Las raíces encontradas se presentan en las ecuaciones E(6.8), E(6.9), E(6.10) y E(6.11), sin embargo, la ecuación E(6.10) es la adecuada.



$$r_1 = \frac{1}{3} \left( -\sqrt{3} \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 - \sqrt{l_1^4 + 14l_1^2l_2^2 + l_2^4}} + 3l_3 \right) \quad \text{E(6.8)}$$

$$r_2 = \frac{1}{3} \left( \sqrt{3} \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 - \sqrt{l_1^4 + 14l_1^2l_2^2 + l_2^4}} + 3l_3 \right) \quad \text{E(6.9)}$$

$$r_3 = \frac{1}{3} \left( -\sqrt{3} \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 + \sqrt{l_1^4 + 14l_1^2l_2^2 + l_2^4}} + 3l_3 \right) \quad \text{E(6.10)}$$

$$r_4 = \frac{1}{3} \left( \sqrt{3} \sqrt{2l_1^2 + 2l_2^2 + \sqrt{l_1^4 + 14l_1^2l_2^2 + l_2^4}} + 3l_3 \right) \quad \text{E(6.11)}$$

□

**TEOREMA 6.1**

Un Tornillo J  $a$ ,  $\frac{\alpha}{\nu} p_{\theta 2}^{RG}|_a \in FUTJS|_{m,n}$ , es más “Eficiente” que un Tornillo J  $b$ ,  $\frac{\alpha}{\nu} p_{\theta 2}^{RG}|_b \in FUTJS|_{m,n}$ , si  $LdTJ|_a > LdTJ|_b$

**PRUEBA TEOREMA 6.1**

Para afirmar que un Tornillo J  $a$  es más eficiente que otro  $b$ , se debe cumplir con los criterios de la DEFINICIÓN 6.3.

En la figura (6.1) se presentan los resultados de 11 tornillos semejantes, según  $(m, n)$ , inclusive, algunos antisimétricos. Esos resultados muestran la  $LdTJ$  de cada uno.

Los TEOREMAS 3.1-3.4 establecen la relación de las longitudes de los dientes de los tornillos. Esos lemas y los resultados presentados en la Figura (6.1), prueban el TEOREMA 6.1.

□

**TEOREMA 6.2**

El  $\alpha \underset{U}{P}_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO1} \in FUTJS \Big|_{m,n}$  es el más eficiente de todos los tornillos de esa familia.

**PRUEBA TEOREMA 6.2**

El **TEOREMA 6.1** y los **TEOREMAS 3.1-3.4** prueban éste.

**TEOREMA 6.3**

Un tornillo  $\alpha \underset{U}{P}_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO1} \Big|_a \in FUTJS \Big|_{m_a,n} \in FFTJSn$  es más eficiente que otro tornillo  $\alpha \underset{U}{P}_{\theta 2}^{RG} \Big|_{TIPO1} \Big|_b \in FUTJS \Big|_{m_b,n} \in FFTJSn$  si  $m_a < m_b$ .

**PRUEBA TEOREMA 6.3**

Ambos tornillos están emparentados por el criterio de semejanza  $n$ , sin embargo, pertenecen a otras familias diferentes, de las cuales éstos son los tornillos más eficientes, según el **TEOREMA 6.2**.

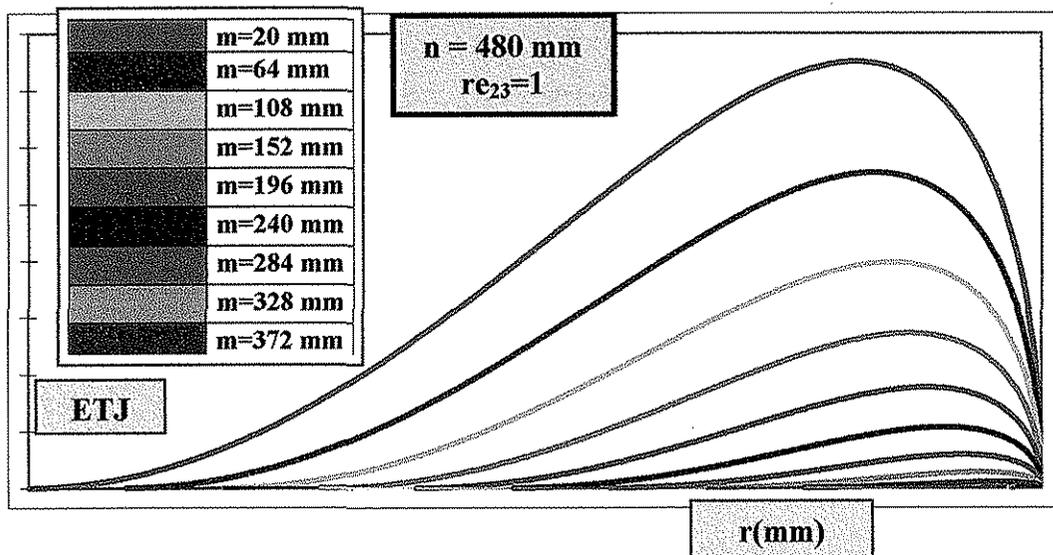


Figura (6.2). Eficiencia de tornillos parcialmente semejantes respecto de  $n$ .

El criterio de semejanza  $n$  constante implica que el radio externo del volumen de trabajo no cambia para ambos tornillos. El único parámetro que varía es  $m$ . Esto implica que  $l_3$  es diferente. Si  $m$  es pequeño también  $l_3$ .

La prueba se basa en determinar como varía la eficiencia de los tornillos como una función de  $l_3$ .

La figura (6.2) presenta una serie de resultados de ETJ de 9 tornillos del tipo 1. Se observa que la ETJ es mayor para tornillo con  $m$  más pequeño.

Esto prueba el **TEOREMA 6.3**.

#### 6. 4. JACOBIANO DEL DIENTE DE LA TUERCA J

Las ecuaciones E(4.2), E(4.3) y E(4.4), vistas en el capítulo 4, presentan la magnitud del tercer elemento del vector  ${}^r_i p_{\theta 3} \in {}^r_U p_{\theta 3}^{RG}$ , generador del diente del Tornillo J.

Esta ecuación muestra la variación de  $\gamma$  como función del dominio de  $r \in [r_{\min}, r_{vt}]$ . El rango pertenece al espacio articular, mientras que el dominio pertenece al espacio operacional.

Mediante la Regla de la Cadena (**Leithold (1998)**) se puede obtener la variación de  $\gamma$  como una función del tiempo y de  $r \in [r_{\min}, r_{vt}]$ , ecuación E(6.12).

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial r} \frac{dr}{dt} \quad \text{E(6.12)}$$

Con la misma consideración que se hizo para el tornillo J, se puede obtener el Determinante del Jacobiano para la Tuerca J, ecuación E(6.13).

$$\Delta J_{DNWJ} = l_1 l_2 \sqrt{1 - \frac{(l_1^2 + l_2^2 - (r - l_3)^2)^2}{4l_1^2 l_2^2}} \quad \text{E(6.13)}$$

## 6. 5. EFICIENCIA DE LA TUERCA J

### DEFINICIÓN 6.4

Se denomina “Índice de Eficiencia de la Tuerca J en el punto r”,  $ENuJ(r)$ , al valor escalar  $|\Delta J_{DNuJ}(r)|$  en una posición  $r \in [r_{min}, r_{vt}]$

$$ENuJ(r) = |\Delta J_{DNuJ}(r)|; \quad r \in [r_{min}, r_{vt}] \quad \text{E(6.14)}$$

□

### DEFINICIÓN 6.5

Se denomina “Eficiencia de la Tuerca J”,  $ENuJ$ , a la colección de todo los  $ENuJ(r)$ .

$$ENuJ = \{ENuJ(r) | r \in [r_{min}, r_{vt}]\} \quad \text{E(6.15)}$$

□

### DEFINICIÓN 6.6

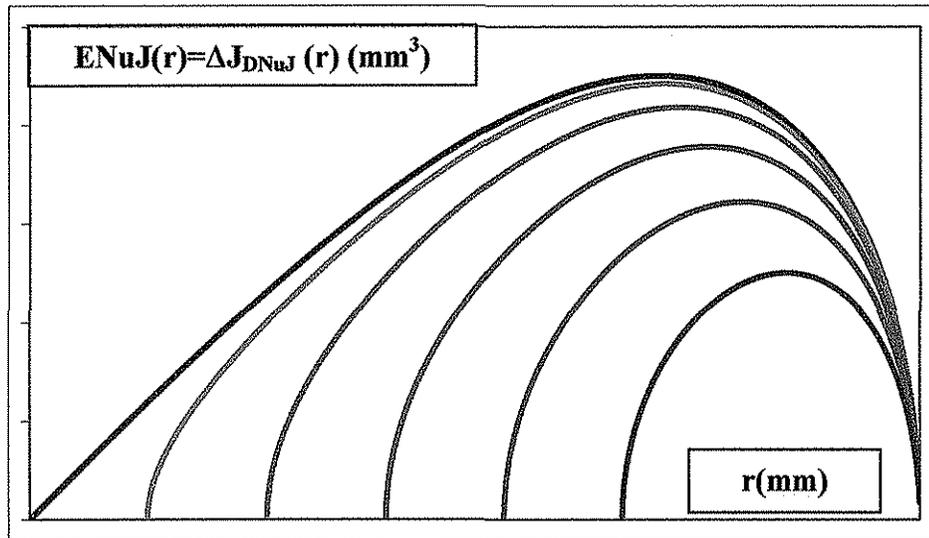
Una tuerca a es más eficiente que una tuerca b si:

- El área bajo el conjunto  $ENuJ|_a$  es mayor que el área bajo el conjunto  $ENuJ|_b$ .

$$\int_{r_{min}}^{r_{vt}} ENuJ(r) dr \Big|_a > \int_{r_{min}}^{r_{vt}} ENuJ(r) dr \Big|_b$$

- $\exists ENuJ(r)|_a = ENuJ(r^+)|_{a|_{MAX}}$ , en un punto raíz  $r^+ \in [r_{min}, r_{vt}]_a$ , y  $\exists ENuJ(r)|_b = ENuJ(r^+)|_{b|_{MAX}}$  en un punto raíz  $r^+ \in [r_{min}, r_{vt}]_b$ , tal que  $ENuJ(r^+)|_{a|_{MAX}} > ENuJ(r^+)|_{b|_{MAX}}$

□



Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 2	Tipo3	Tipo 2	Tipo 3
$l_1=150$	$l_1=170$	$l_1=130$	$l_1=190$	$l_1=110$	$l_1=210$	$l_1=90$	$l_1=230$	$l_1=70$	$l_1=250$	$l_1=50$
$l_2=150$	$l_2=130$	$l_2=170$	$l_2=110$	$l_2=190$	$l_2=90$	$l_2=210$	$l_2=70$	$l_2=230$	$l_2=50$	$l_2=250$
$l_3=180$										
(mm)										
LdNuJ =300 (mm)	LdNuJ =260 (mm)	LdNuJ =260 (mm)	LdNuJ =220 (mm)	LdNuJ =220 (mm)	LdNuJ =180 (mm)	LdNuJ =180 (mm)	LdNuJ =140 (mm)	LdNuJ =140 (mm)	LdNuJ =100 (mm)	LdNuJ =100 (mm)

Figura (6.3). Eficiencias de 11 tuercas semejantes ( $m=180$  mm,  $n=480$  mm). Una Tuerca del Tipo 1, 5 tuercas del Tipo 2 y 5 Tuercas del Tipo 3. Además, los pares del mismo color son antisimétricos (DEFINICIÓN 4.7).

LEMA 6. 2

Sea  $\Delta J_{DNuJ} \in \mathbb{R}$  y  $r \in [r_{min}, r_{vl}]$ .

$$\Delta J_{DNuJ} (\sqrt{l_1^2 + l_2^2} + l_3) = \Delta J_{DNuJ} |_{MAX}$$

**PRUEBA LEMA 6.2**

La prueba se obtiene encontrando las raíces que satisfacen a  $\frac{d\Delta J_{DNuJ}(r)}{dr} = 0$

Las raíces encontradas se presentan en las ecuaciones E(6.16), E(6.17) y E(6.18), sin embargo, la ecuación E(6.18) es la adecuada.

$$r_1 = l_3 \quad \text{E(6.16)}$$

$$r_2 = -\sqrt{l_1^2 + l_2^2} + l_3 \quad \text{E(6.17)}$$

$$r_3 = +\sqrt{l_1^2 + l_2^2} + l_3 \quad \text{E(6.18)}$$

□

**TEOREMA 6.4**

Una Tuerca J  $a$ ,  $\frac{r'}{U} p_{\theta 3}^{RG}|_a \in FUTJS|_{m,n}$ , es más “Eficiente” que una Tuerca J  $b$ ,  $\frac{r'}{U} p_{\theta 3}^{RG}|_b \in FUTJS|_{m,n}$ , si  $LdNuJ|_a > LdNuJ|_b$

**PRUEBA TEOREMA 6.4**

Para probar que una Tuerca J  $a$  es más eficiente que otra  $b$ , se deben cumplir los criterios de la DEFINICIÓN 6.6.

En la figura (6.3) se presentan los resultados de 11 tuercas semejantes, según  $(m, n)$ , inclusive, algunas antisimétricas. Esos resultados muestran la  $LdNuJ$  de cada una.

Los **TEOREMAS 3.1 - 3.4** establecen la relación de las longitudes de los Dientes de los Tornillos (cuyas longitudes es igual a las de sus respectivas tuercas). Esos lemas y los resultados presentados en la figura (6.3), prueban el **TEOREMA 6.4**.

**TEOREMA 6.5**

La  $\frac{r'}{U} p_{\theta 3}^{RG}|_{TPO1} \in FUTJS|_{m,n}$  es la más eficiente de todas las tuercas de esa familia.

**PRUEBA TEOREMA 6.5**

El TEOREMA 6.4 dice que aquella tuerca que tiene la longitud de su diente mayor que otra, entonces es más eficiente; como se ha probado que, para manipuladores semejantes antisimétricos, el tipo 1 es el eslabonamiento con mayor longitud del diente, entonces éste es el más eficiente.

□

**TEOREMA 6.6**

Una tuerca  $r'_{U P_{03}^{RG}}|_{TIPO1}_a \in FUTJS|_{m_a,n} \in FFTJSn$  es más eficiente que otra tuerca  $r'_{U P_{03}^{RG}}|_{TIPO1}_b \in FUTJS|_{m_b,n} \in FFTJSn$  si  $m_a < m_b$ .

**PRUEBA TEOREMA 6.6**

Ambas tuercas están emparentadas por el criterio de semejanza  $n$ , sin embargo, pertenecen a familias diferentes, de las cuales éstas son las tuercas más eficientes, según el TEOREMA 6.5.

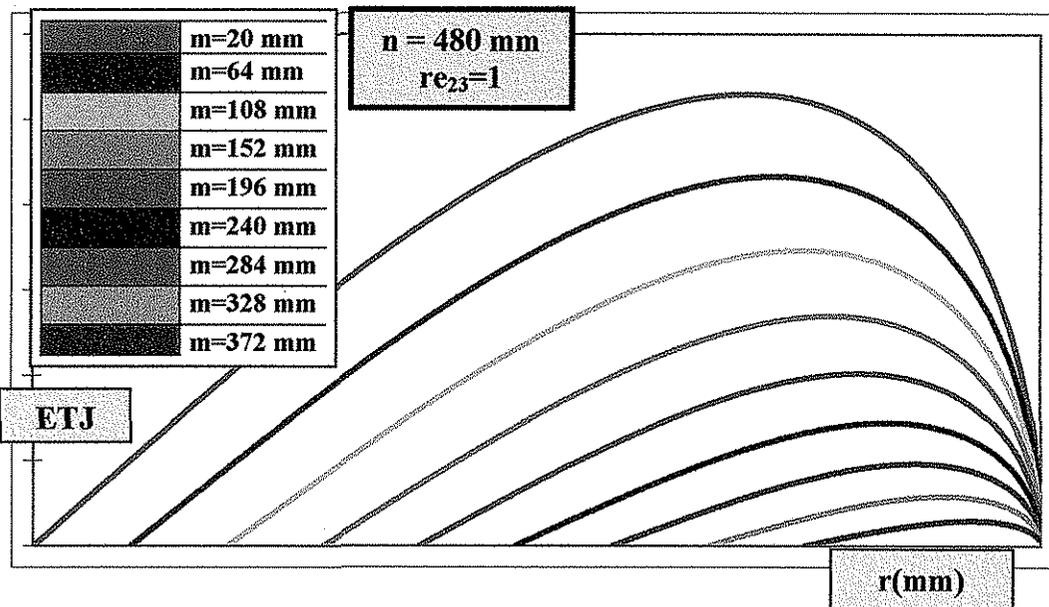


Figura (6.4). El resultado de 9 manipuladores parcialmente semejantes.

En la figura (6.4) se muestran resultados de 9 manipuladores en los que se ha variado la longitud  $l_3$ . Se observa que entre más pequeña es ésta, más eficiente es el manipulador. Esa eficiencia significa que se mueve con una velocidad y aceleración más suave.

## 6.6. SUPERFICIE DEL JACOBIANO

### 6.6.1. INTRODUCCIÓN

El JACOBIANO constituye una de las herramientas más importantes para la caracterización de un manipulador. Es útil para determinar configuraciones singulares, análisis de redundancia, determinación de algoritmos de cinemática inversa, transformación entre fuerzas aplicadas al órgano terminal y los resultantes pares motrices en las articulaciones, Sciavicco y Siciliano(1996), Sullivan (2000), Wenger (1997) .

Entre otras cosas, en este capítulo se tratará la influencia del JACOBIANO sobre las “Regiones Geométricas Articulares J”.

### 6.6.2. EL JACOBIANO Y LAS REGIONES GEOMÉTRICAS J

En el capítulo 2 se presentó la ecuación E(2.30) que expresa el inverso del Jacobiano,  $\mathbf{J}^{-1}$ , que es una transformación que permite la conexión entre el espacio operacional y el articular, y de aquel hacia éste. El determinante del Jacobiano,  $\Delta\mathbf{J}$ , es inversamente proporcional a  $\mathbf{J}^{-1}$ , queriendo decir que para valores pequeños de  $\Delta\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}^{-1}$  toma un valor grande, y entre más pequeño se va haciendo aquel, más va creciendo éste. Por este hecho, el espacio articular se ve afectado, dependiendo de la magnitud de  $\Delta\mathbf{J}$ .

Como las “Regiones Geométricas Articulares J” representan las articulaciones, es importante tener un conocimiento preciso de la influencia de  $\mathbf{J}$  sobre ellas.

La figura (2.8.1), en el capítulo 2, presenta la existencia de  $\Delta\mathbf{J}$ , sin embargo, esta no abarca la forma geométrica del volumen de trabajo del manipulador. Para esto es necesario hacer un cambio en la ecuación E(2.31). Para lograr esto, se emplean las expresiones del diente que quedan en función del parámetro  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ . Así, la ecuación E(2.31) puede manipularse para presentar a  $\Delta\mathbf{J}$  para todo  $\alpha \in [-2\pi, 2\pi]$  y todo  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ .

$$\Delta J = -l_1 l_2 \sqrt{1 - \frac{(l_1^2 - l_2^2 + (l_3 - r)^2)^2}{4l_1^2 (l_3 - r)^2}} \cos(\gamma + \beta) + \frac{l_2 (l_1^2 - l_2^2 + (l_3 - r)^2) \sin(\gamma + \beta)}{2(r - l_3)}$$

E(6.19)

Donde  $\beta = \beta_i$ ;  $i=1, 2$  porque  $U=2$ .

### 6. 6. 3. SINGULARIDADES

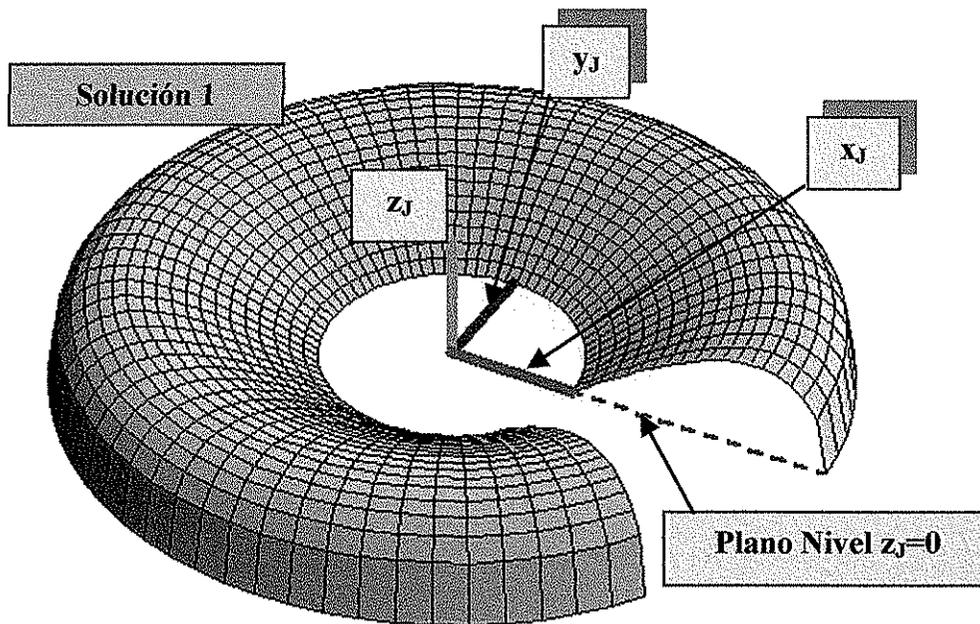
Se puede probar que, cuando  $r=r_{\min}$  o  $r=r_{vt}$ , se tienen puntos críticos, esto es,  $\Delta J = 0$ , **Wenger (1997)**; esto hace que la matriz **J** sea singular. Entonces el manipulador genérico analizado presenta posiciones singulares en los extremos radiales del volumen de trabajo.

Todos esos puntos singulares forman lo que se denomina como superficie de puntos críticos que es un subconjunto continuo conectado de un conjunto de puntos críticos, **Wenger (1997)**, **Burdick (1995)**. Esta región  $PC^{RG} \in \Delta J_{\text{Solución 1}}^{RG}$  y  $PC^{RG} \in \Delta J_{\text{Solución 2}}^{RG}$  se forma cuando  $\Delta J(\Theta)=0$ , y se encuentra en la intersección de las dos superficies del Jacobiano de ambas soluciones, figuras (6.7), (6.10) y (6.13).

$$PC^{RG} = \Delta J_{\text{Solución 1}}^{RG} \cap \Delta J_{\text{Solución 2}}^{RG} \quad \text{E(6.20)}$$

La intersección se presenta cuando el manipulador alcanza dos posiciones: los radios interior y exterior del volumen de trabajo; así la región  $PC^{RG}$  está dividida en dos grandes subconjuntos,  $PC_{r_{\text{int}}}^{RG} \in \Delta J_{\text{Solución } i}^{RG}$  y  $PC_{r_{\text{vt}}}^{RG} \in \Delta J_{\text{Solución } i}^{RG}$ , ecuación E(6.21).

$$PC^{RG} = PC_{r_{\text{int}}}^{RG} \cup PC_{r_{\text{vt}}}^{RG} \quad \text{E(6.21)}$$



**Figura (6.5).** Determinante del Jacobiano del manipulador PRRRd para la primera solución cuando  $l_1=l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 1)

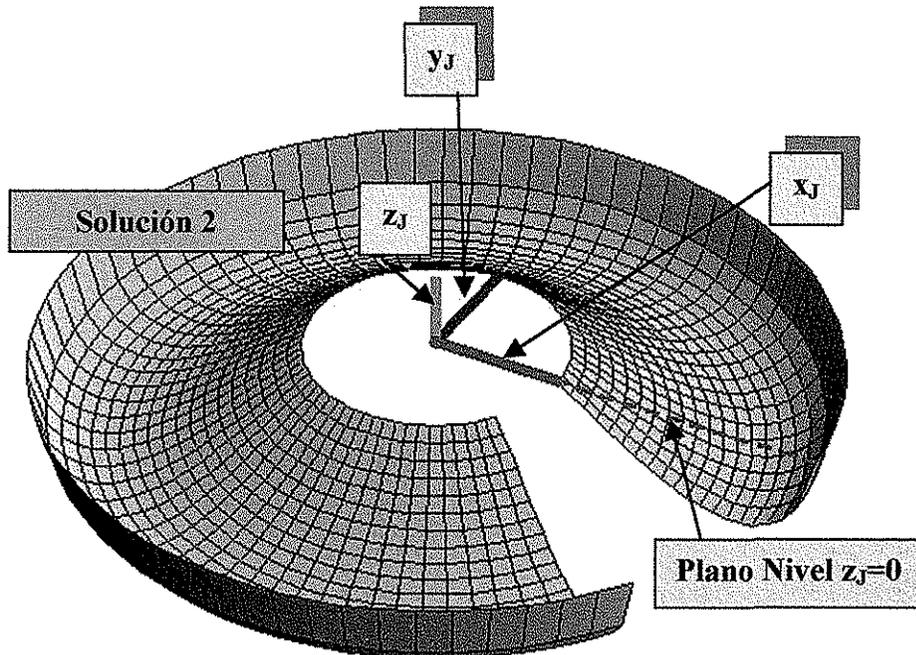


Figura (6.6). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRRd para la segunda solución cuando  $l_1=l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 1)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

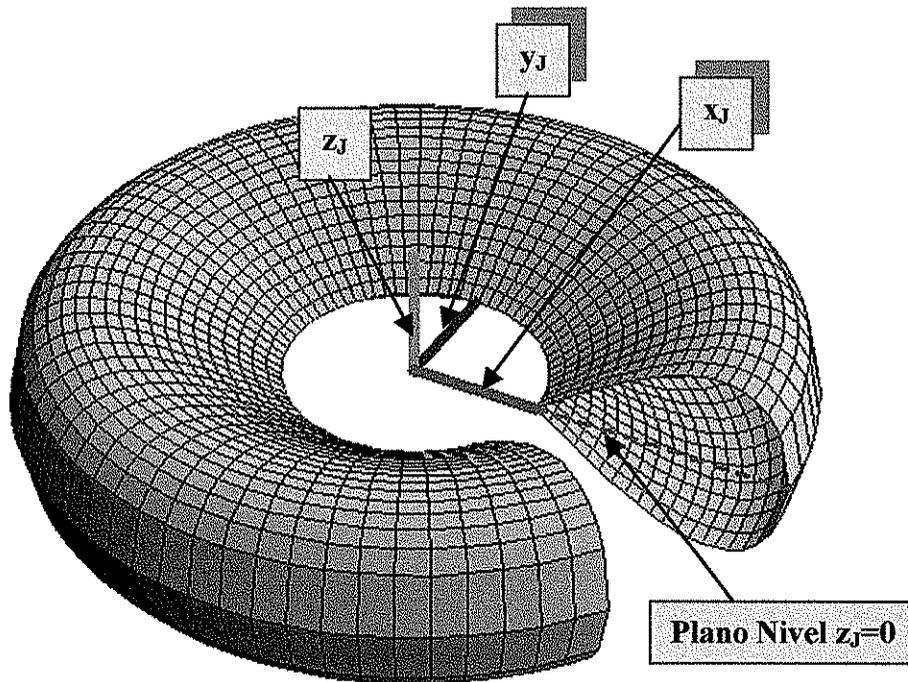


Figura (6.7). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRR para ambas soluciones cuando  $l_1=l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 1)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

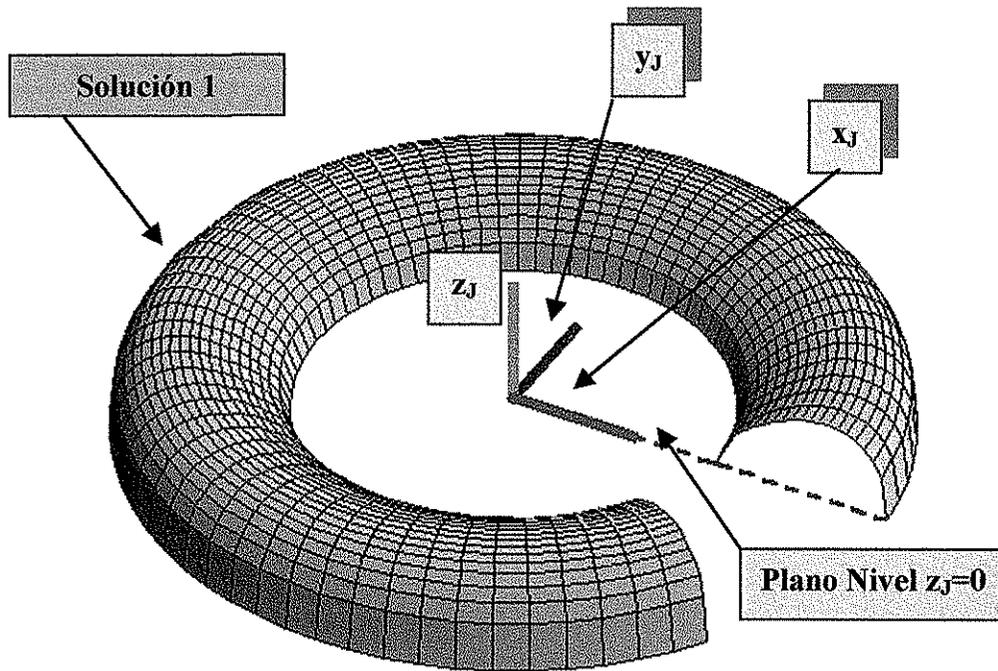


Figura (6.8). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRR para la primera solución cuando  $l_1 > l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 2)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

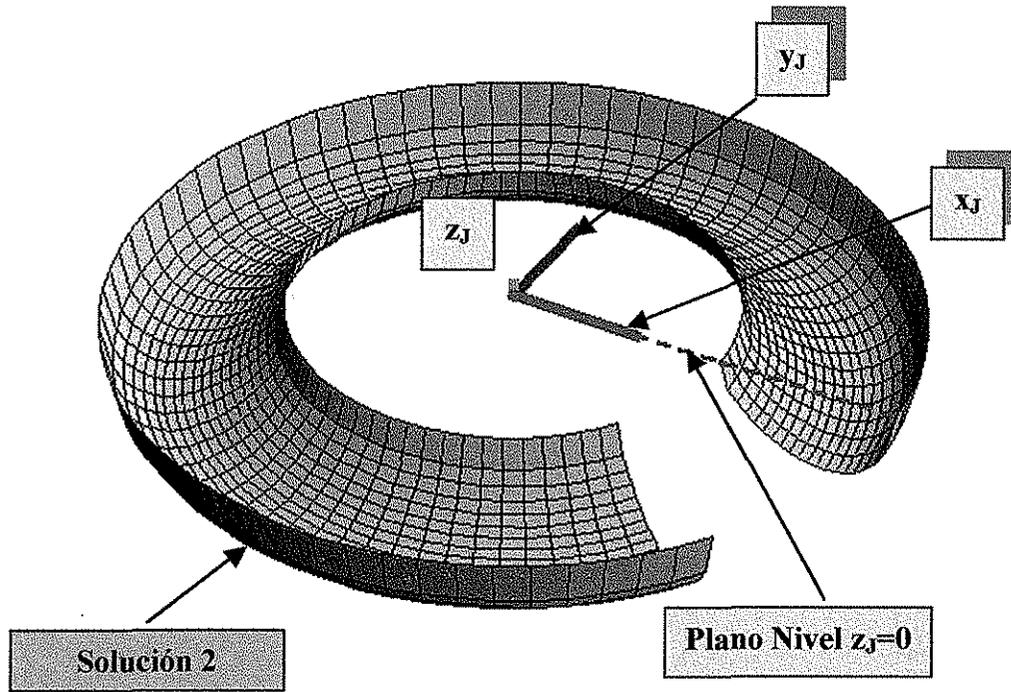


Figura (6.9). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRRd para la segunda solución cuando  $l_1 > l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 2)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

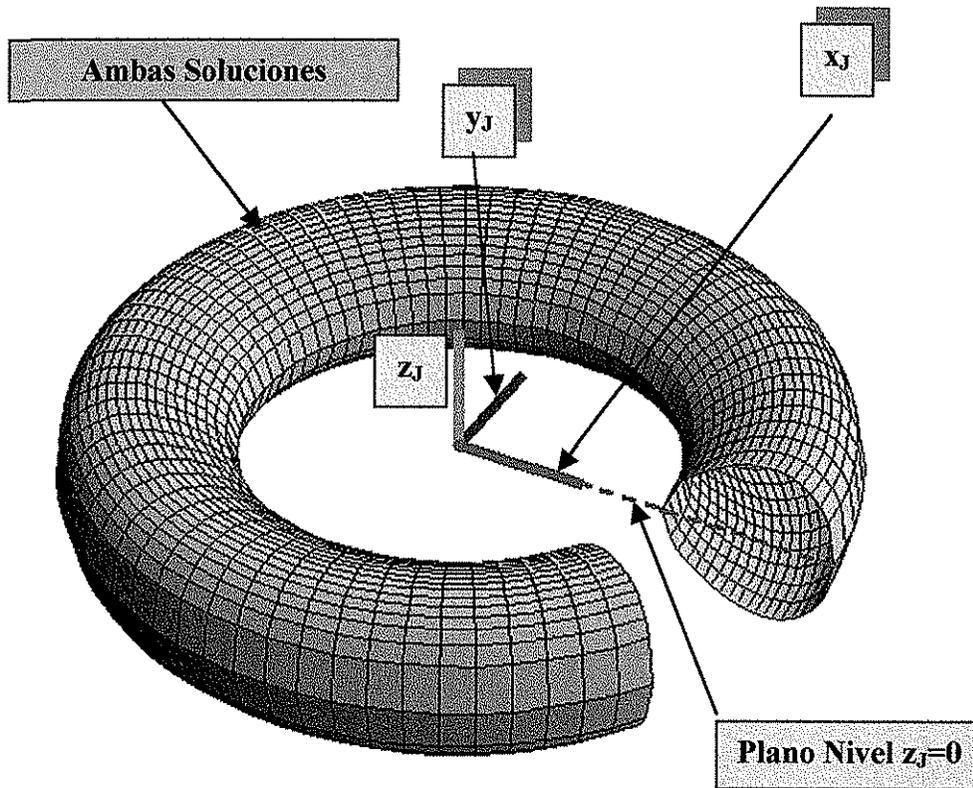


Figura (6.10). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRR para las dos soluciones cuando  $l_1 > l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 2)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

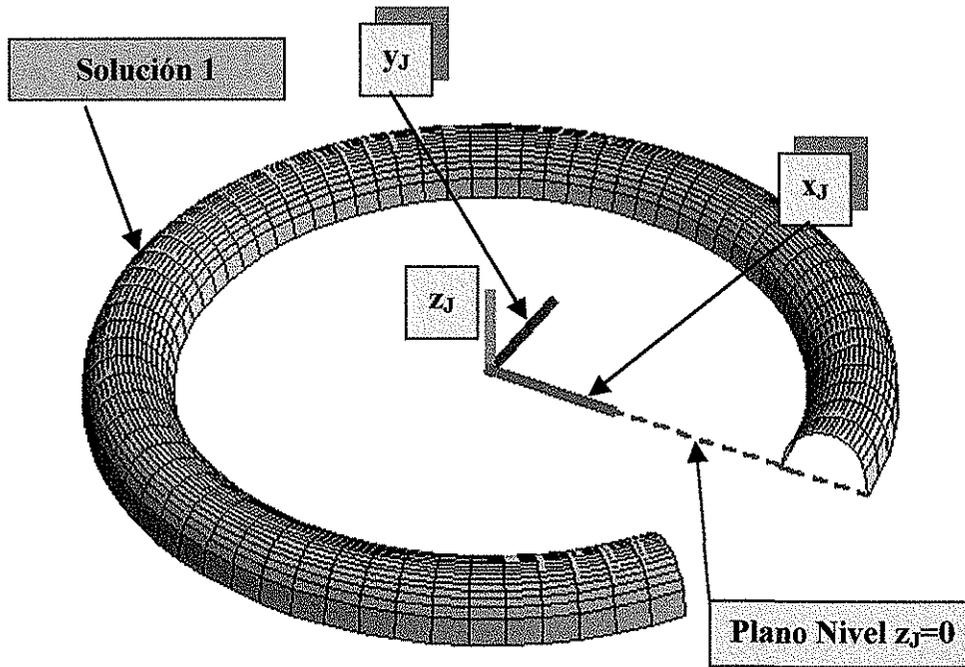


Figura (6.11). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRRd para la primera solución cuando  $l_1 < l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 3)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

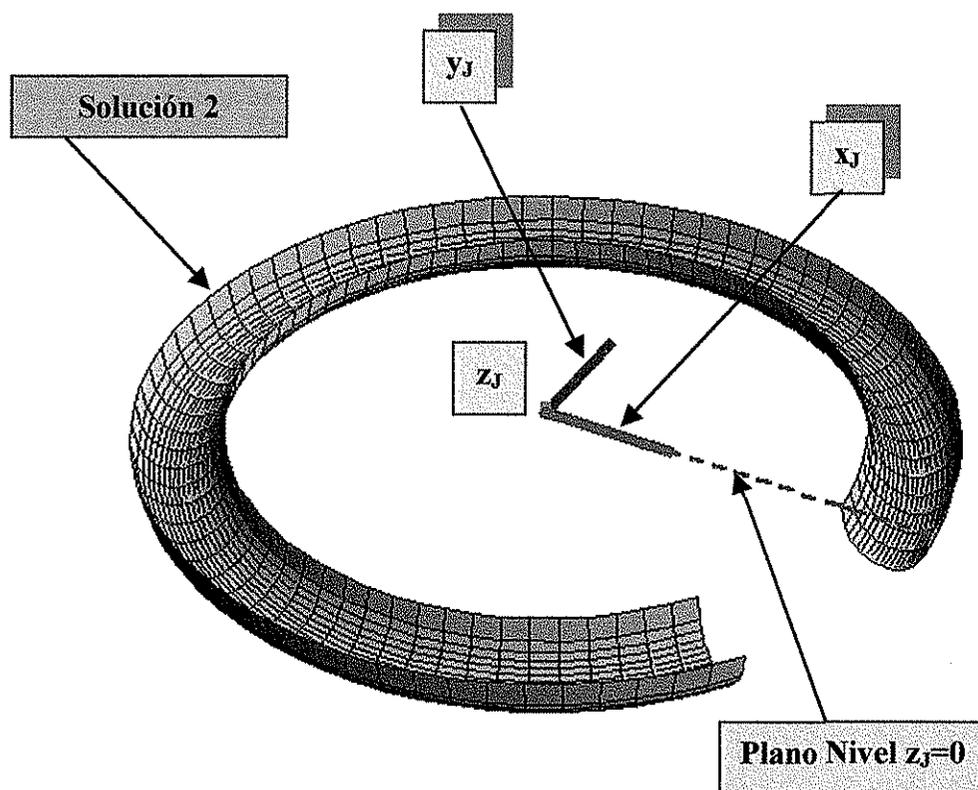


Figura (6.12). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRRd para la segunda solución cuando  $l_1 < l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 3)

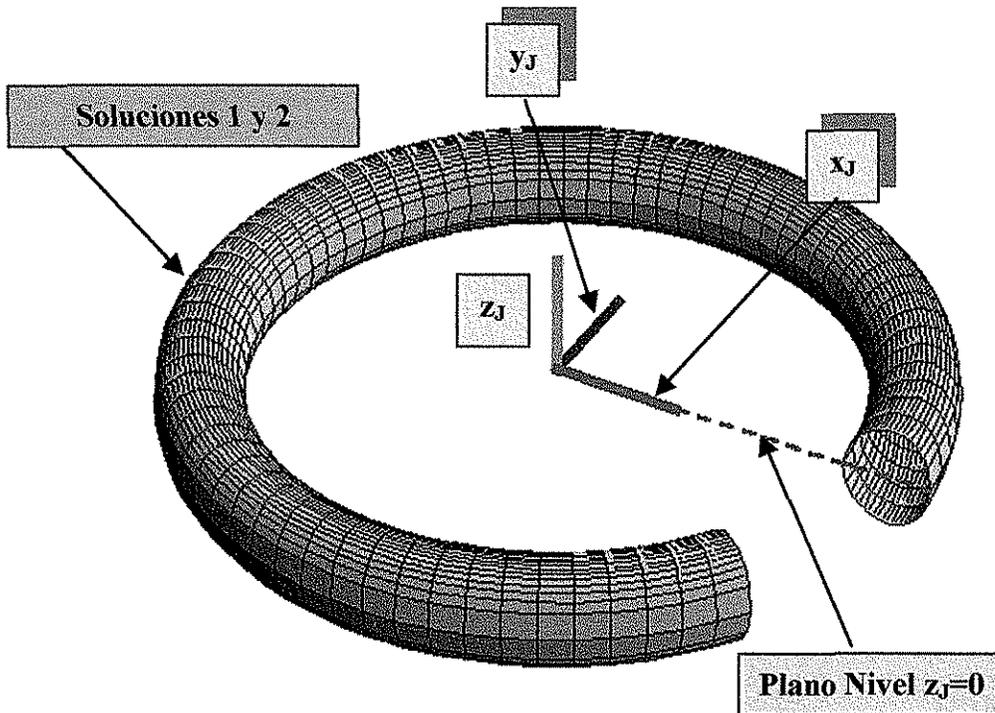


Figura (6.13). Determinante del Jacobiano del manipulador PRRRd para ambas soluciones cuando  $l_1 < l_2$  (manipulador cuyo binomio tornillo-tuerca es del tipo 3)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## CAPÍTULO 7

# AGENTES DE EXPLORACIÓN DE FAMILIAS POTENCIALES

### 7.1. INTRODUCCIÓN

Una vez clasificadas todas las familias a partir de sus definiciones y propiedades, como se hizo en el capítulo 5, el siguiente paso en la estrategia del mejoramiento del desempeño de un manipulador PRRRd, genérico, además del estado de construcción del modelo “Regiones Geométricas Articulares J” (figura (7.1)), consiste en la definición de agentes de exploración que, mediante su manipulación, se permita la propagación de la búsqueda a través de las familias potencialmente “sospechosas” de contener el mejor Tornillo y la mejor Tuerca como individuos óptimo. Estos “Agentes de Exploración” son los parámetros, en forma de cadena, que contienen (1)  $re_{23}$ , (2) el primer criterio de semejanza de los dientes  $m$  y (3) el segundo criterio de semejanza de los dientes  $n$  (DEFINICIÓN 3.7).

Las definiciones 3.4, 3.5, 3.6, 4.4, 4.5 y 4.6 establecen las características de los tornillos y las tuercas que pueden ser semejantes bajo los criterios  $m = l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2} = l_3|_{TIPO3}$  y

$$n = \sum_{i=1}^3 l_i \Big|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i \Big|_{TIPO2} = \sum_{i=1}^3 l_i \Big|_{TIPO3}, \text{ y cuyos dientes dependen de la proporción que}$$

guardan las longitudes  $l_1$  y  $l_2$ . Es por esta razón que se establece el concepto de relación de eslabonamiento  $re_{23}$  que es el cociente entre los eslabones 2 y 3 de los manipuladores involucrados. Esto produce propiedades muy importantes, además de que puede representarse tanto en forma genotípica como en forma fenotípica.

### 7.2. PRIMER ELEMENTO DEL AGENTE DE EXPLORACIÓN: LA RELACIÓN DE ESLABONAMIENTO $re_{23}$

#### 7.2.1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

##### DEFINICIÓN 7.1

*La relación  $re_{23}$  se define como la razón entre las longitudes de los eslabones 2 y 3 del manipulador genérico, ecuación E(7.1) siguiente.*

$$re_{23} = \frac{l_1}{l_2}; \quad \forall l_2 \neq 0$$

E(7.1)

□

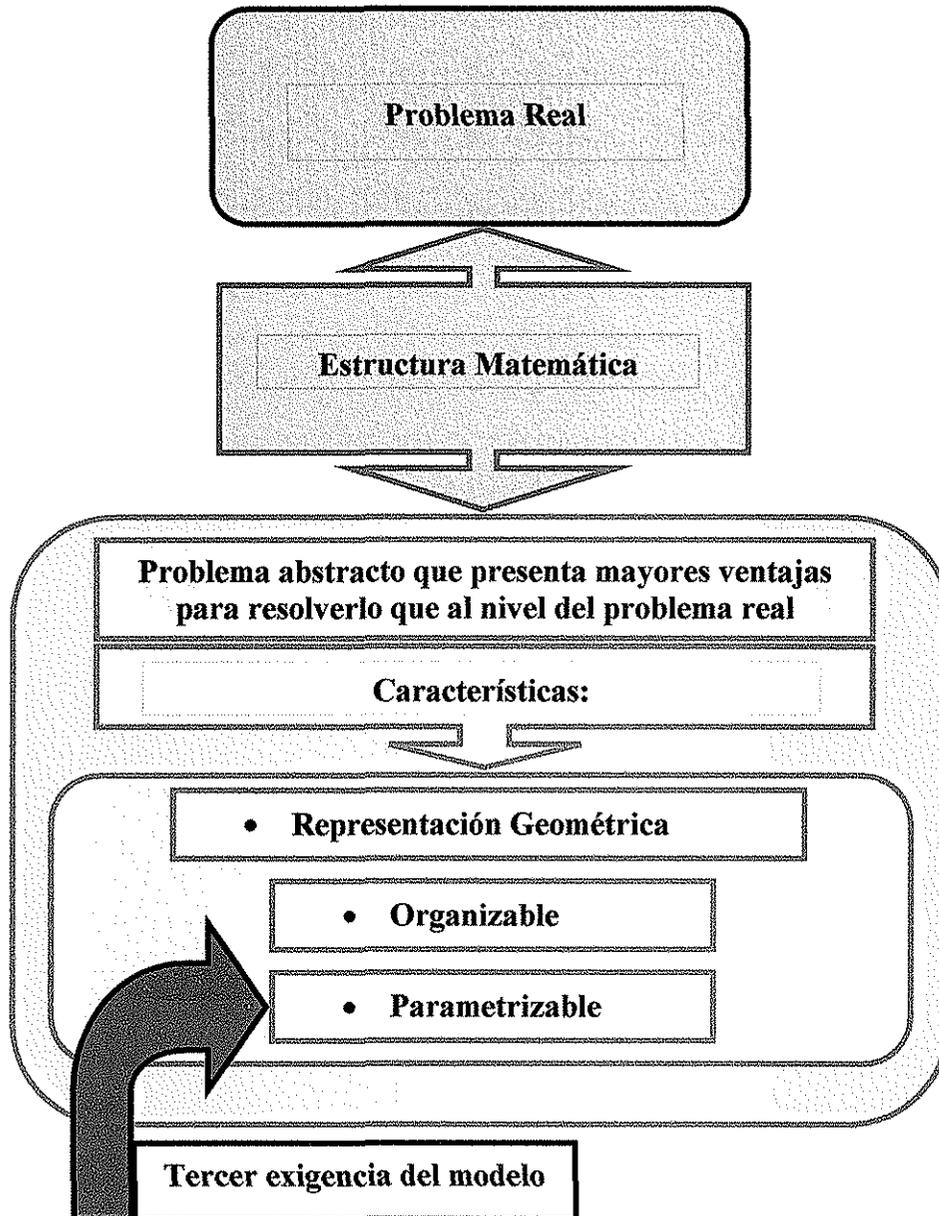


Figura (7.1). Estado de construcción del modelo “Regiones Geométricas Articulares J” referente a la característica de los parámetros.

Las proposiciones condicionales implicadas con esta definición son:

- (i)  $(re_{23} > 1) \supset (l_1 > l_2) \Rightarrow$  Dientes Tipo 2  $\Rightarrow$  Tornillo y Tuerca J Tipo 2
- (ii)  $(re_{23} < 1) \supset (l_1 < l_2) \Rightarrow$  Dientes Tipo 3  $\Rightarrow$  Tornillo y Tuerca J Tipo 3
- (iii)  $(re_{23} = 1) \supset (l_1 = l_2) \Rightarrow$  Dientes Tipo 1  $\Rightarrow$  Tornillo y Tuerca J Tipo 1

En la tabla (7.1) se presentan las relaciones que existen entre el primer elemento del agente y los diferentes Tornillos y Tuercas J.

Si $re_{23} > 1$ , éste se denominará como	$re_{23}^+$	Dientes Tipo 2	Tornillo y Tuerca Tipo 2
Si $re_{23} < 1$ , éste se denominará como	$re_{23}^-$	Dientes Tipo 3	Tornillo y Tuerca Tipo 3
Si $re_{23} = 1$ , éste se denominará como	$re_{23}$	Dientes tipo 1	Tornillo y Tuerca Tipo 1

Tabla (7.1). Relación de  $re_{23}$  y las regiones geométricas.

### PROPIEDAD 7.1: El ángulo $\beta$ en función $re_{23}$

La forma general de la magnitud del vectores  ${}^i p_{\beta}$ ,  $i=1, 2$ , estará dada por las ecuaciones E(7.2) y E(7.3) siguientes que se obtienen a partir de las ecuaciones E(3.4) y E(3.5).

$${}^1\beta = \cos^{-1} \left( \frac{(r-l_3)^2 (re_{23}+1)^2 + (re_{23}^2-1)(r_w-l_3)^2}{2re_{23}(re_{23}+1)(r_w-l_3)(r-l_3)} \right) \quad \text{E(7.2)}$$

$${}^2\beta = -\cos^{-1} \left( \frac{(r-l_3)^2 (re_{23}+1)^2 + (re_{23}^2-1)(r_w-l_3)^2}{2re_{23}(re_{23}+1)(r_w-l_3)(r-l_3)} \right) \quad \text{E(7.3)}$$

Donde se ha aplicado la relación siguiente:

$$l_2 = \frac{r_w - l_3}{re_{23} + 1} \quad \text{E(7.4)}$$

**PROPIEDAD 7.2: segunda variable articular según  $re_{23}$**

Si las ecuaciones E(7.2) y E(7.3) evolucionan con  $r$  desde  $r_{min}$  (dependiente del tipo del diente) hasta  $r_{max}=r_{vt}$ , para una  $re_{23}$  adecuada, se obtendrán los conjuntos vectoriales  $r_{ip\beta, re_{23}}^{RG}$ . Si estos dos conjuntos se unen para formar el universal  $r_{Up\beta, re_{23}}^{RG}$  (ecuación E(7.6)) y se le aplica la transformación TTJ evolucionando  $\alpha$  desde  $-360^\circ$  hasta  $360^\circ$ , se obtendrá el conjunto “Tornillo J correspondiente a la relación  $re_{23}$ ”,  $r_{Up\theta 1, re_{23}}^{RG}$ , ecuación E(7.7).

$$r_{min} = \begin{cases} (r_{vt} - l_3) \left( \frac{r_{23} - 1}{r_{23} + 1} \right) + l_3; & \forall r_{23} + \\ -(r_{vt} - l_3) \left( \frac{r_{23} - 1}{r_{23} + 1} \right) + l_3; & \forall r_{23} - \\ l_3; & re_{23} \equiv 1 \end{cases}$$

E(7.5)

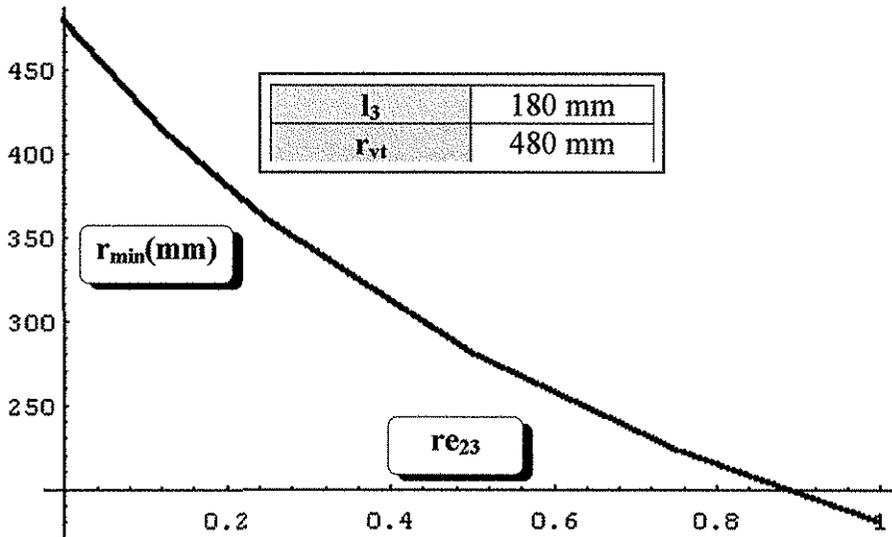


Figura (7.2). Variación de  $r_{min}$  como función de  $re_{23}$ -

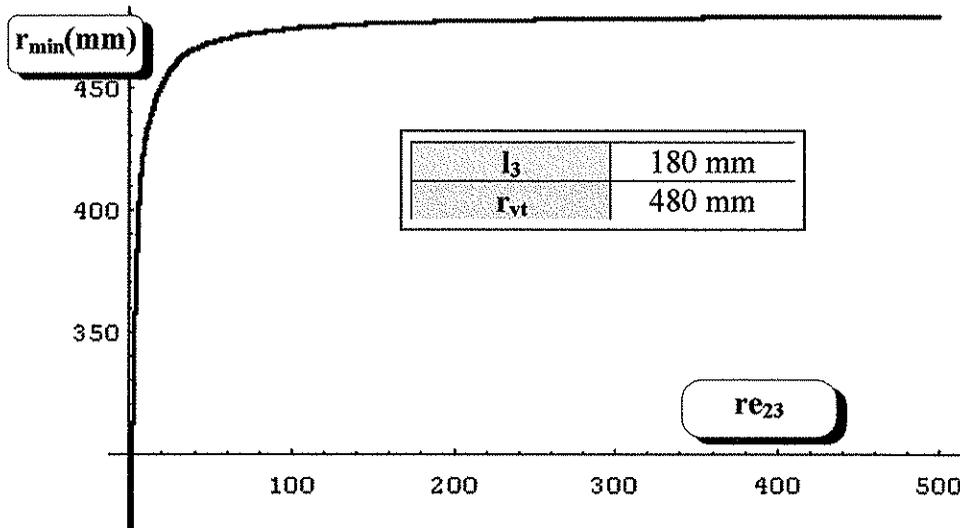


Fig. (7.3). Variación de  $r_{min}$  como función de  $re_{23}$

$${}^r P_{\beta, r_{23}}^{RG} = {}^r P_{\beta, r_{23}}^{RG} \cup {}^r P_{\beta, r_{23}}^{RG} = \left\{ {}^r P_{\beta, r_{23}}^{RG} \mid \forall r; r_{min} \leq r \leq l_1 + l_2 + l_3, \right. \\ \left. i = 1, 2 \right\}$$

E(7.6)

$${}^\alpha P_{\theta_2, r_{23}}^{RG} = \left\{ {}^\alpha T_{UP} {}^r P_{\beta, r_{23}}^{RG} \mid \forall \alpha, -360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ \right\}$$

E(7.7)

El conjunto  $[FUTJ]_{re_{23}} = FUTJ$  colecciona todos los elementos-conjunto  ${}^\alpha P_{UP\theta_2, re_{23}}^{RG}$  que se generan para todo  $re_{23}$ , ecuación E(7.8).

$$FUTJ = \left\{ {}^\alpha P_{\theta_1, re_{23}}^{RG} \mid \begin{array}{l} \forall \alpha; -360^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ, \\ \forall r; r_{min} \leq r \leq l_1 + l_2 + l_3, \\ \forall re_{23}; 0 < r_{23} \leq r_{23_{max}} \end{array} \right\}$$

E(7.8)

**PROPIEDAD 7.3: variación del volumen de trabajo según  $re_{23}$**

Un aspecto importante es que  $r_{min}(re_{23}) = r_{min}(1/re_{23}) = r_{min}(re_{32})$ . El **TEOREMA 4.1** establece que, para manipuladores semejantes antisimétricos (**DEFINICIÓN 4.7**), las longitudes de los dientes del tornillo y la tuerca son iguales. Utilizando la ecuación E(7.5) en donde se sustituye el valor  $re_{23}$ , o su inverso  $1/re_{23} = re_{32}$ , se puede comprobar este hecho y que implica que las dimensiones del volumen de trabajo son las mismas. Así, el volumen de trabajo estará definido por la siguiente ecuación E(7.9).

$$Vol_{trabajo} = \left\{ \begin{array}{l} \pi d_1 \left( r_{vt}^2 - \left( [r_{vt} - l_3] \left[ \frac{r_{23} - 1}{r_{23} + 1} \right] + l_3 \right)^2 \right); \forall r_{23} > 1 \\ -\pi d_1 \left( r_{vt}^2 - \left( [r_{vt} - l_3] \left[ \frac{r_{23} - 1}{r_{23} + 1} \right] + l_3 \right)^2 \right); \forall r_{23} < 1 \\ \pi d_1 (r_{vt}^2 - l_3^2); r_{23} \equiv 1 \end{array} \right\} \quad \text{E(7.9)}$$

El volumen de trabajo disminuirá conforme  $re_{23}$  se aleje de la unidad, tanto a la izquierda como a la derecha, por lo tanto el volumen máximo se presenta con  $re_{23}=1$ . Esto también se confirma con los **TEOREMAS 3.1** y **3.2** referente a la longitud del diente del tipo 1.

#### PROPIEDAD 7.4: relación de longitudes de eslabón $re_{34}$ según $re_{23}$

Similar a la relación  $re_{23}$ , la relación de longitudes de eslabón  $re_{34}$ , expresa la razón de la longitud entre los eslabones 3 y 4, ecuación E(7.10) siguiente.

$$re_{34} = \frac{l_2}{l_3}; \quad \forall l_3 \neq 0 \quad \text{E(7.10)}$$

Con esta ecuación E(7.10) y la E(7.1), antes vista, se puede definir la relación de longitudes de eslabón  $re_{24}$  que indica la magnitud relativa del eslabón 2 respecto del 4, según se presenta en la ecuación E(7.11) siguiente:

$$re_{24} = re_{23} re_{34} = \frac{l_1}{l_3}; \quad \forall l_3 \neq 0 \quad \text{E(7.11)}$$

En todas las relaciones anteriores se cumple las propiedades siguientes:

- a y b son manipuladores semejantes antisimétricos si **DEFINICIÓN 3.7** y  $re_{ij}|_a = re_{ij}^{-1}|_b$ .
- $re_{ij} = re_{ji}^{-1}$
- $re_{ij} = re_{(i)(j)} = re_{(i)(i+1)} re_{(i+1)(i+2)} \dots re_{(j-2)(j-1)} re_{(j-1)(j)} = \prod_{k=i+1}^j re_{(k-1)(k)}$

**E(7.12a, b, c)**

Para manipuladores que cumplen con la DEFINICIÓN 3.7, los elementos del conjunto  $re_{23}^{RG}$  o  $re_{32}^{RG}$  correspondientes uno a uno, a la izquierda y a la derecha de los elementos  $re_{23} = re_{32} = 1$ , son los tornillos y tuercas antisimétricas del conjunto  $re_{23}^{RG}$  o  $re_{32}^{RG}$ , figura (7.4).

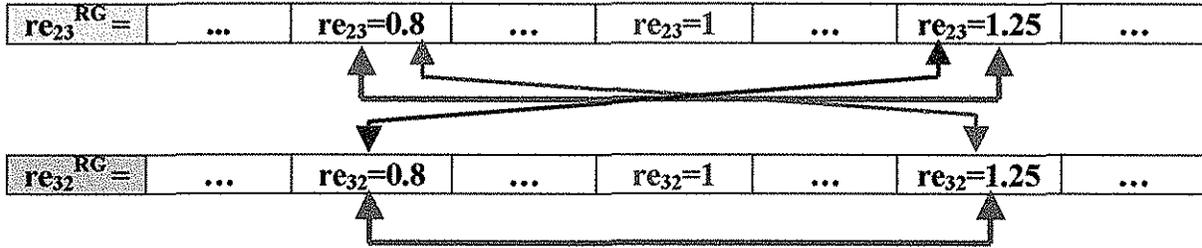


Figura (7.4). Los conjuntos  $re_{23}^{RG}$  y  $re_{32}^{RG}$  de manipuladores semejantes. Las flechas entre elementos de un mismo conjunto indican manipuladores antisimétricos, mientras que entre uno y otro indican manipuladores idénticos.

**PROPIEDAD 7.5: ángulo  $\beta$  en función de  $re_{23}$  y  $re_{34}$**

En la PROPIEDAD 7.1 anterior se trató la variación de  $i\beta$ ,  $i=1, 2$ , en función únicamente de  $re_{23}$ ; en este punto se presenta la variación en función de  $re_{34}$ , además de aquella, ya que cada una tendrá una aportación significativa en la forma del diente del “Tornillo y la Tuerca J” y, por lo tanto, diferente desempeño dinámico.

$${}_1\beta = \cos^{-1} \left\{ \frac{\left\{ \left( 1 + (re_{23} + 1)re_{34} \right) r - r_{vi} \right\}^2 + r_{vi}^2 re_{34}^2}{2re_{24}r_{vi} \left\{ \left( 1 + (re_{23} + 1)re_{34} \right) r - r_{vi} \right\}} \right\} \tag{E(7.13)}$$

y,

$${}_2\beta = -\cos^{-1} \left\{ \frac{\left\{ \left( 1 + (re_{23} + 1)re_{34} \right) r - r_{vi} \right\}^2 + r_{vi}^2 re_{34}^2}{2re_{24}r_{vi} \left\{ \left( 1 + (re_{23} + 1)re_{34} \right) r - r_{vi} \right\}} \right\} \tag{E(7.14)}$$

Que para su establecimiento se emplearon las relaciones siguientes (ecuaciones. E(7.15), E(7.16) y E(7.17)) que determinan la variación de las longitudes de los eslabones, figuras (7.5)-(7.13):



$$l_1 = \left( \frac{re_{23} r_{vt}}{re_{23} + 1 + \frac{1}{re_{34}}} \right)$$

E(7.15)

$$l_2 = \left( \frac{r_{vt}}{re_{23} + 1 + \frac{1}{re_{34}}} \right)$$

E(7.16)

$$l_3 = \frac{r_{vt}}{\{1 + (re_{23} + 1)re_{34}\}}$$

E(7.17)

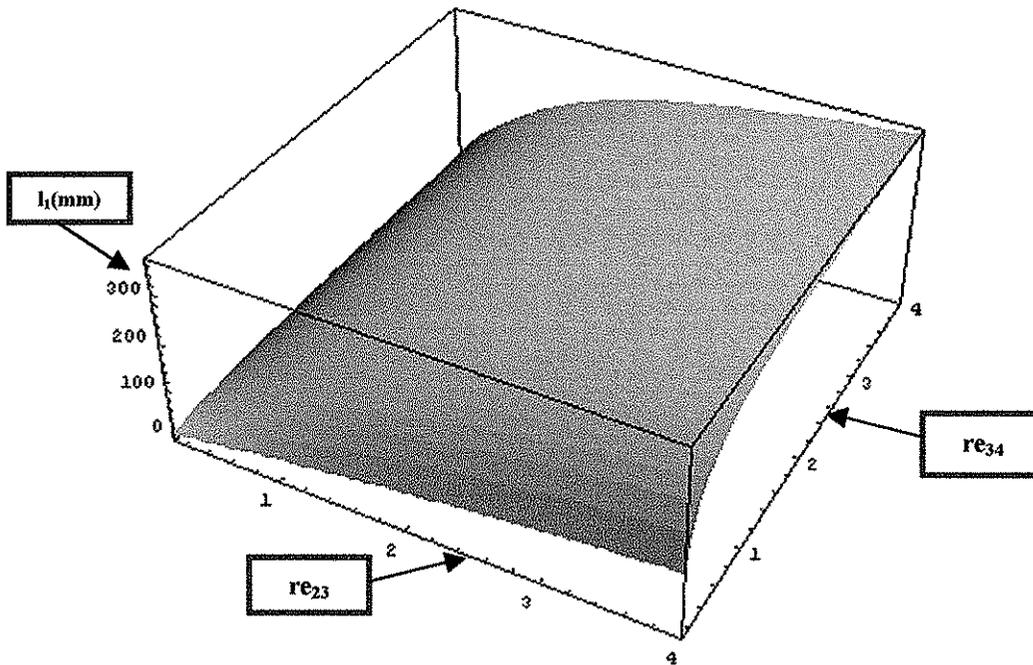


Figura (7.5). Variación de la longitud del tercer eslabón para  $re_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $re_{34} \in [0.1, 4.0]$

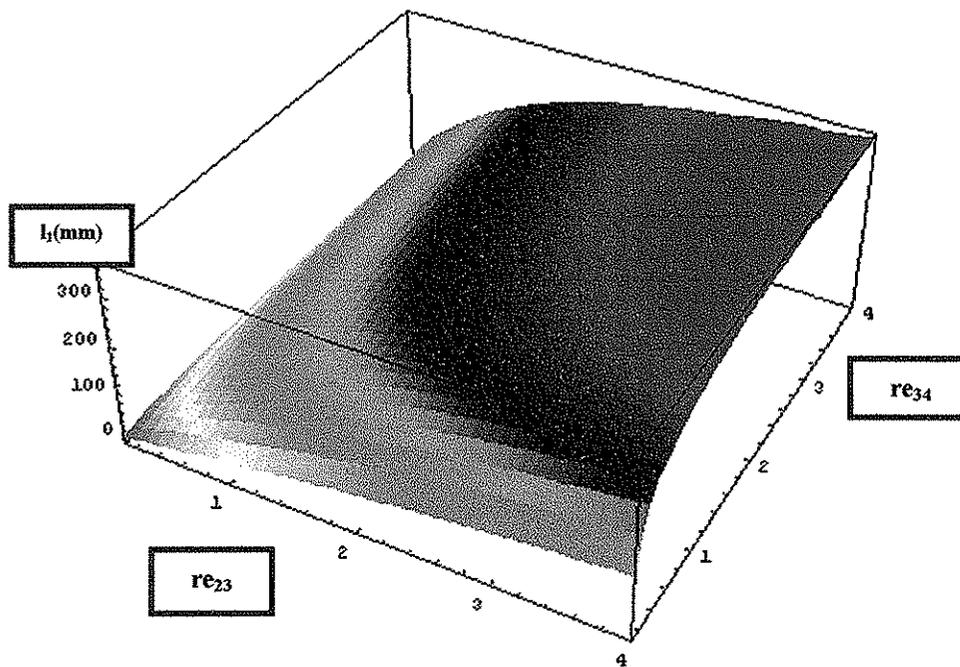


Figura (7.6). Variación de la longitud del tercer eslabón para  $re_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $re_{34} \in [0.1, 4.0]$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

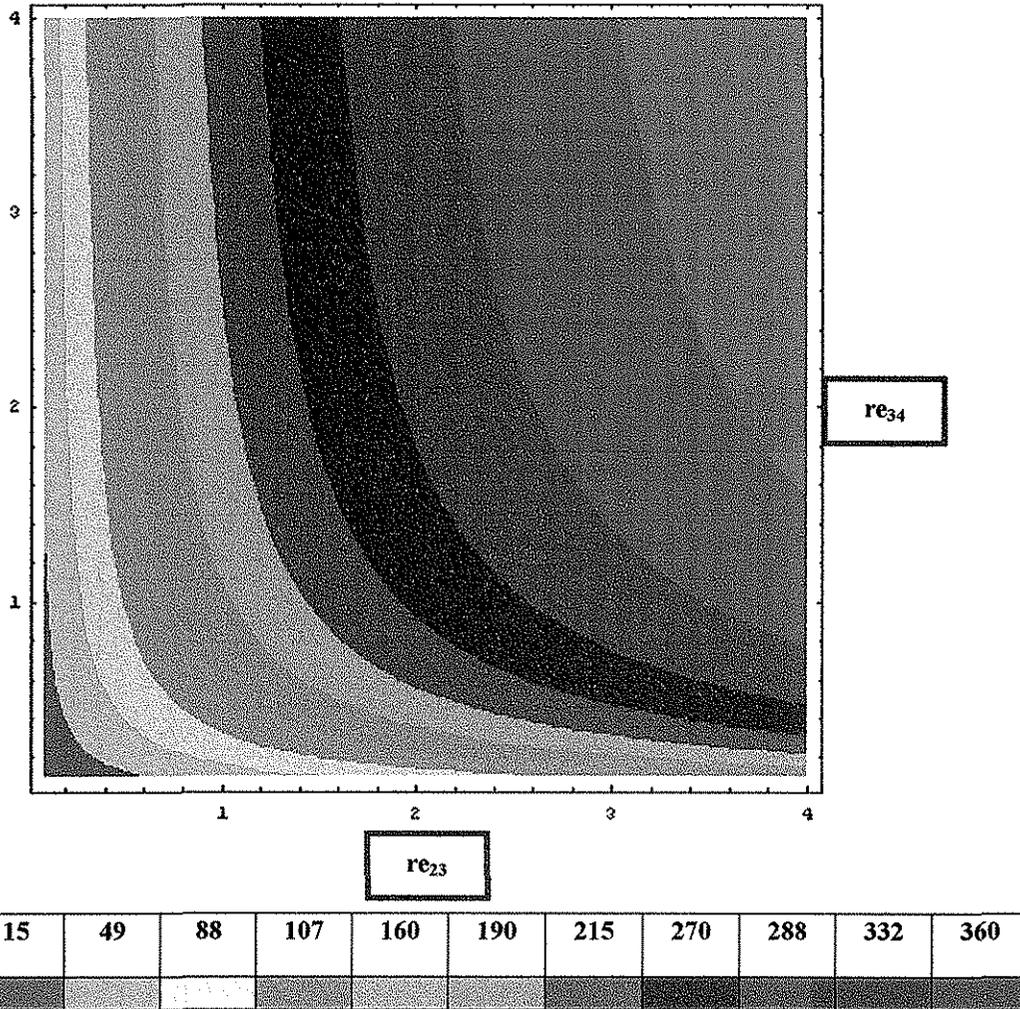


Figura (7.7). Variación de la longitud del tercer eslabón para  $re_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $re_{34} \in [0.1, 4.0]$

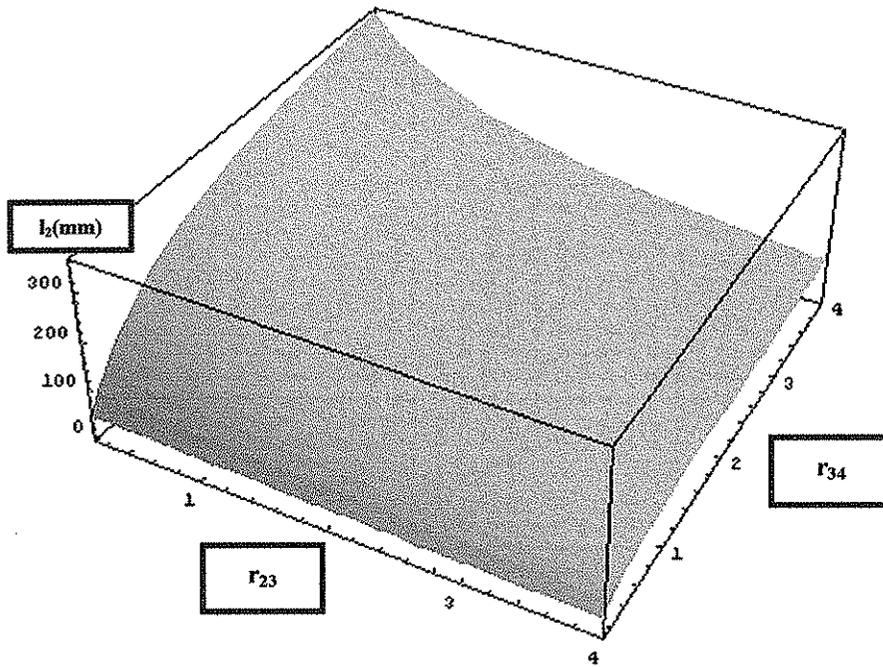


Figura (7.8). Variación de la longitud del cuarto eslabón para  $r_{e23} \in [0.1, 4.0]$  y  $r_{e34} \in [0.1, 4.0]$

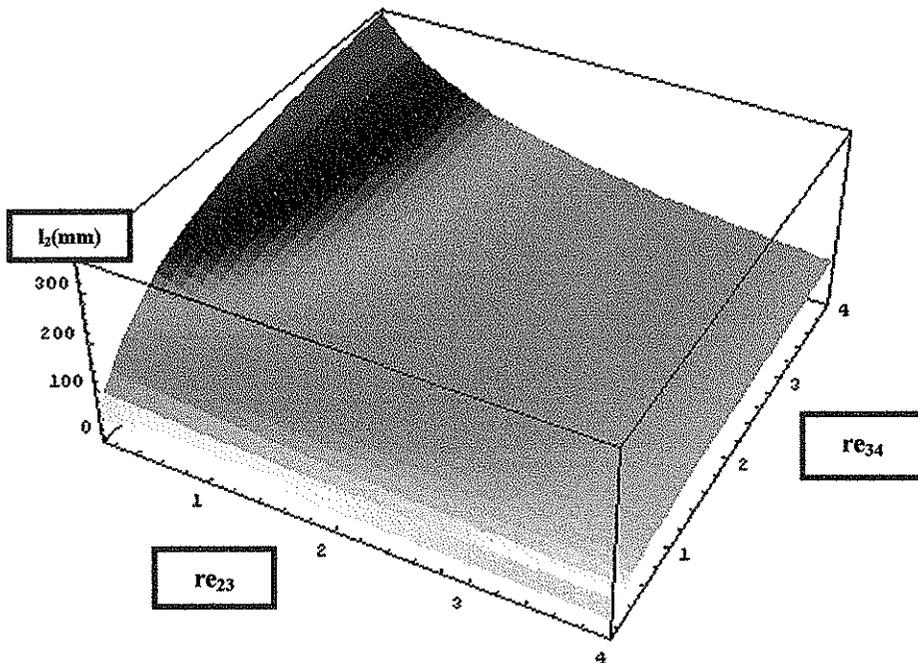
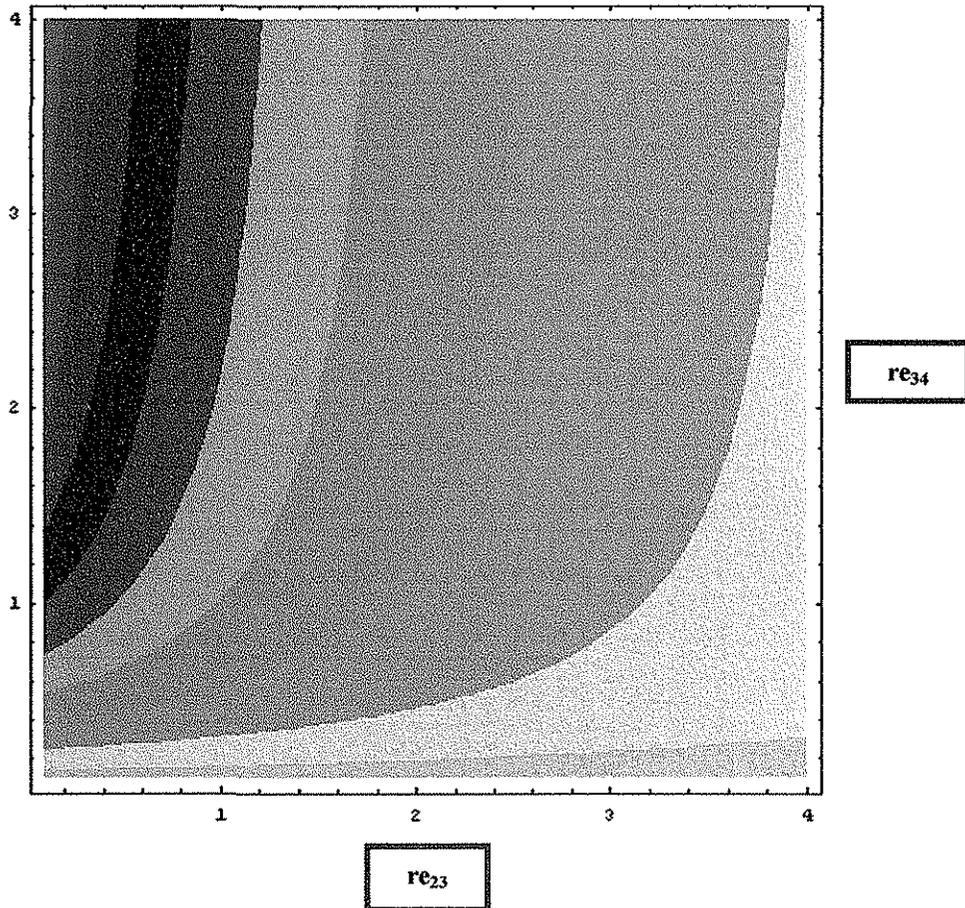


Figura (7.9). Variación de la longitud del cuarto eslabón para  $r_{e23} \in [0.1, 4.0]$  y  $r_{e34} \in [0.1, 4.0]$



$l_2(\text{mm})$ (vecindad)	45	71	106	160	176	218	252	282	313	355
Nivel										

Figura (7.10). Variación de la longitud del cuarto eslabón para  $re_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $re_{34} \in [0.1, 4.0]$

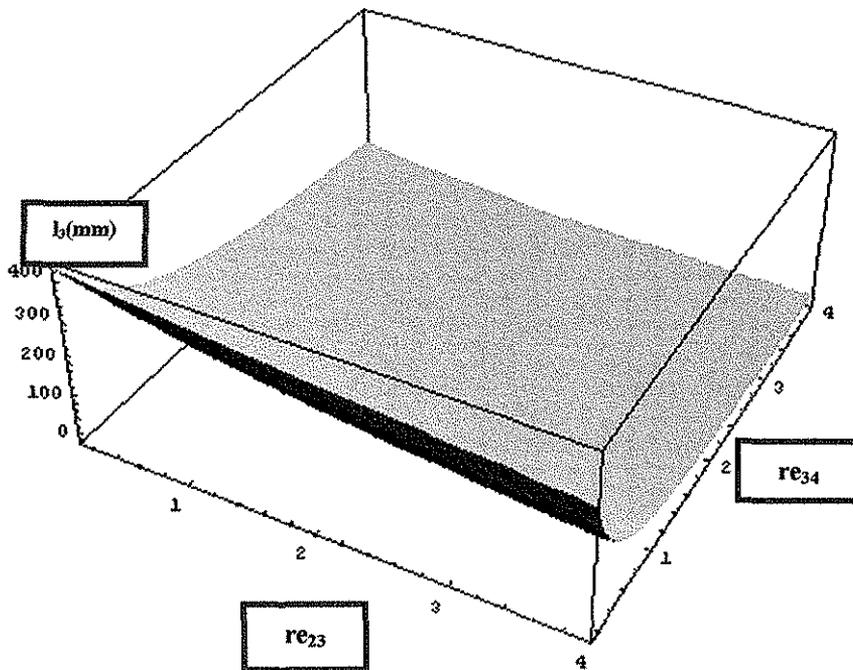


Figura (7.11). Variación de la longitud del quinto eslabón para  $re_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $re_{34} \in [0.1, 4.0]$

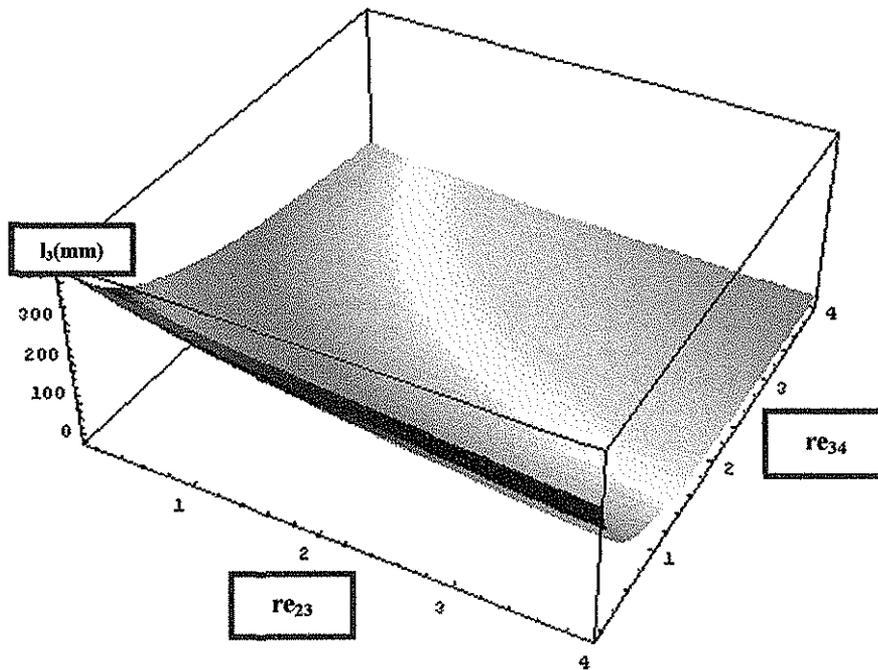
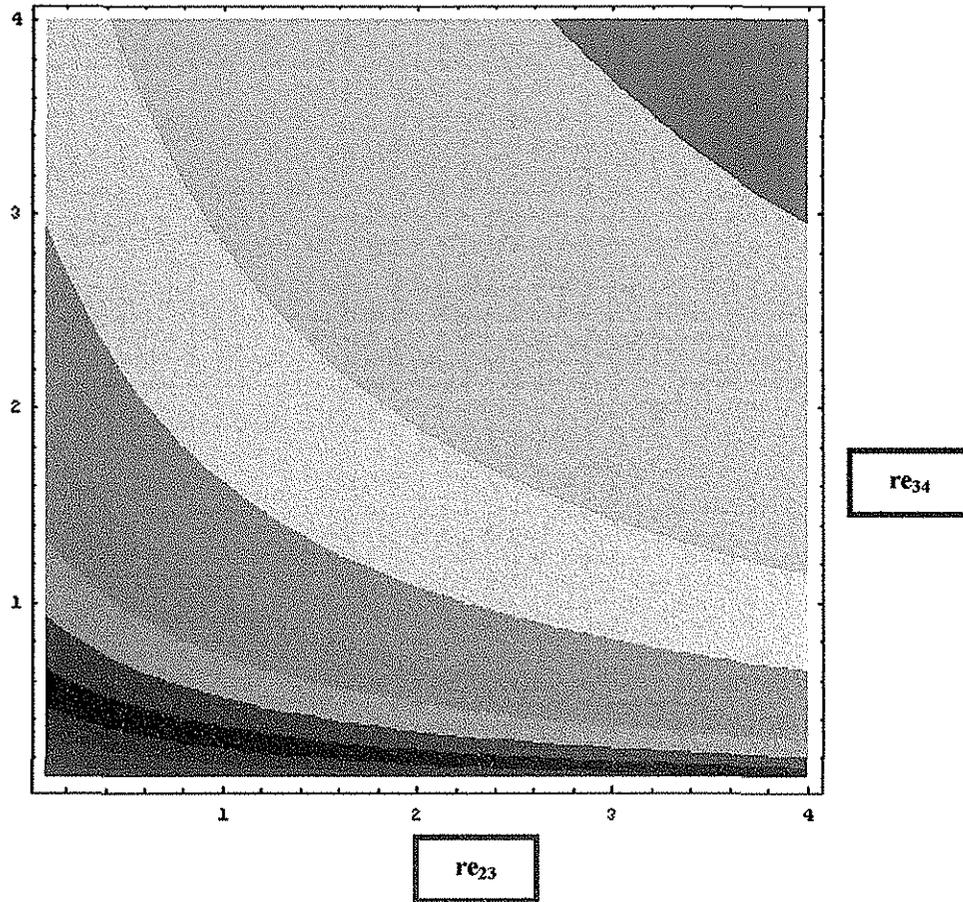


Figura (7.12). Variación de la longitud del quinto eslabón para  $r_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $r_{34} \in [0.1, 4.0]$



$l_3(\text{mm})$ (vecindad)	24	38	87	120	160	210	244	282	338	387	432
Nivel											

Figura (7.13). Variación de la longitud del quinto eslabón para  $re_{23} \in [0.1, 4.0]$  y  $re_{34} \in [0.1, 4.0]$

### 7.2.2. RESUMEN DE LAS PROPIEDADES DE LOS TORNILLOS Y LAS TUERCAS J EN FUNCIÓN DE $re_{23}$ .

Con todo el marco teórico desarrollado, se puede enumerar ciertas propiedades características de la Familias de los Tornillos y las Tuercas J en función de  $re_{23}$ :

- a) La cuerda del tornillo J es cerrada en su raíz para valores de  $re_{23}^+$
- b) La cuerda del tornillo J es abierta en su raíz para valores de  $re_{23}$  o  $re_{23}^-$ .

- c) Aunque el paso del tornillo es  $\alpha$  para toda la familia de tornillos, la profundidad de la cuerda, tanto de los tornillos como de las tuercas, es más pequeña para valores de  $re_{23}^+$  y  $re_{23}^-$  y va disminuyendo como  $re_{23}$  se aleja de la unidad, hacia la izquierda y hacia la derecha, haciendo más pequeño el volumen de trabajo.
- d) Para un  $re_{23}^+$  dado, como para su inverso, que es un  $re_{23}^-$ , el volumen de trabajo es el mismo.
- e) La eficiencia de los tornillos y las tuercas es menor para  $re_{23}^+$  y  $re_{23}^-$  comparadas con  $re_{23}$ .
- f) En los dientes de las regiones geométricas, las pendientes que se encuentran cerca de los extremos interior y exterior del volumen de trabajo son más abruptas para  $re_{23}^+$  y  $re_{23}^-$  comparadas con  $re_{23}$ , y se van acentuando más conforme se alejan de la unidad.
- g) Un diente de tuerca para un  $re_{23}^+$  es exactamente igual que el generado para un  $re_{23}^-$  si ambos son semejantes antisimétricos.

### 7.3. SEGUNDO ELEMENTO DEL AGENTE DE EXPLORACIÓN: EL PRIMER CRITERIO DE SEMEJANZA: $m$

El segundo elemento del agente de exploración es la primera coordenada de los elementos del CUS; estos elementos son parejas ordenadas de la forma  $(m, n)$ . Esa coordenada define la longitud del último eslabón,  $l_3$ .

Su efecto sobre la eficiencia de los tornillos y las tuercas queda establecido por los **TEOREMAS 6.3** y **6.6**. Esos teoremas afirman que, para manipuladores con coordenada  $n$  constante, entre más pequeño es el valor de la coordenada  $m$ , mayor es la eficiencia de las regiones geométricas.

Su empleo ayudará a resolver el problema del **CASO 2**, esto es, la difusión a través del par ordenado  $(FUTJS_{mi,nj}, FUNuJS_{mi,nj})$ ;  $i=1, \dots, \infty$ ,  $j=cte$ .

### 7.4. TERCER ELEMENTO DEL AGENTE DE EXPLORACIÓN: EL SEGUNDO CRITERIO DE SEMEJANZA: $n$

Este elemento del agente de exploración toma manipuladores de diferentes radios externos del volumen de trabajo. Este parámetro tendrá mayor influencia sobre las longitudes de los eslabones rotativos,  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ , ya que los eslabones tal vez tengan que alcanzar posiciones más alejadas del centro del espacio de trabajo.

Este elemento, junto con el segundo elemento del agente,  $m$ , permitirá explorar binomios ( $FUTJSm,n$ ,  $FUNuJSm,n$ ) con  $m$  y  $n$  variables; condición necesaria para el proceso de exploración del CASO 3 (sección 5.3.2 del capítulo 5).

## 7.5. FORMACIÓN DEL AGENTE DE EXPLORACIÓN

El agente de exploración es un individuo que está construido, en forma de cadena, por los tres elementos descritos anteriormente, ecuación E(7.18).

$$\text{Ind}(\ast) = \langle \langle re_{23} \rangle_B \mid \langle m \rangle_B \mid \langle n \rangle_B \rangle \quad \text{E(7.18)}$$

Donde  $B$  puede ser 10 ó 2 dependiendo de la presentación de la cadena, que puede ser: (1) fenotípica, si  $B = 10$  ó (2) genotípica, si  $B = 2$ .

Así, un individuo  $\langle \langle 1 \rangle_{10} \mid \langle 180 \rangle_{10} \mid \langle 480 \rangle_{10} \rangle$ , presentado en forma fenotípica, produce un manipulador cuyas longitudes son  $l_1=150$  unidades,  $l_2=150$  unidades y  $l_3 =180$  unidades, y con todas las propiedades de sus  ${}^{\alpha}p_{\theta 2}^{RG} \in FTJ1$  y  ${}^r p_{\theta 3}^{RG} \in FNuJ1$ .

### 7.5.1. REPRESENTACIÓN GENOTÍPICA PRIMITIVA DEL AGENTE DE EXPLORACIÓN

En la representación genotípica ( $B = 2$ ) la cadena está constituida por un conjunto de bits (ecuación E(7.19)) que sólo presentan dos estados: 1 ó 0, Michalewicz (1996).

$$\langle \langle b_j b_{j-1} \dots b_0 \rangle_2 \mid \langle b_k b_{k-1} \dots b_0 \rangle_2 \mid \langle b_l b_{l-1} \dots b_0 \rangle_2 \rangle \quad \text{E(7.19)}$$

La longitud de la representación genotípica o cadena cromosómica del agente de exploración depende de la longitud de la estructura cromosómica de cada uno de sus elementos. Cada una de las estructuras de estos últimos dependen de:

- La longitud del rango en el que se encuentra el dominio del elemento.
- La precisión que es el número de lugares decimales en que se quiere dividir el rango.

Si el elemento ( $re_{23}$ ,  $m$  o  $n$ ) es tomado, mediante cambio de variable, por  $e \in [e_{\min}, e_{\max}]$ , la longitud del dominio en ese rango es:

$$D_e = e_{\max} - e_{\min} \quad \mathbf{E(7.20)}$$

La precisión se obtiene de la siguiente manera, dependiendo de número de posiciones después del punto decimal:

$$\text{precisión} = p - \text{esimas}; \quad \text{donde: } p = 1 \times 10^{pd}; \quad pd = 1, \dots, \quad \mathbf{E(7.21)}$$

Esa precisión implica que el rango  $[e_{\min}, e_{\max}]$  debe ser dividido en:

$$ndiv_{\min} = (D_e)(p) \quad \mathbf{E(7.22)}$$

Esto significa que la cadena binaria que representa al cromosoma o genotipo debe tener  $s$  bits, esto es:

$$2^{s-1} < ndiv_{\min} < 2^s \quad \mathbf{E(7.23)}$$

Así, el cromosoma de ese elemento estará representado por una cadena de la forma:

$$\langle b_{s-1} b_{s-2} \dots b_0 \rangle \quad \mathbf{E(7.24)}$$

Por lo tanto  $s$  puede tomar cualquier valor  $j$ ,  $k$ ,  $l$  de la ecuación E(7.19), dependiendo del elemento de que se trate.

## 7. 5. 2. TRANSFORMACIÓN DE GENOTIPO A FENOTIPO

La transformación de la representación del elemento  $e \in [e_{\min}, e_{\max}]$ , en forma de genotipo, a su respectivo fenotipo, se efectúa en dos pasos:

- Conversión de la cadena binaria  $\langle b_{s-1} b_{s-2} \dots b_0 \rangle$  de base 2 a base 10:

$$\langle (b_{s-1}b_s \dots b_0) \rangle_2 = \left( \sum_{i=0}^{s-1} b_i 2^i \right)_{10} = e'$$

E(7.25)

- Valor real correspondiente:

$$e = e_{min} + e' \left( \frac{e_{max}}{2^s - 1} \right)$$

E(7.26)

### 7.5.3. REPRESENTACIÓN GENOTÍPICA FINAL DEL AGENTE DE EXPLORACIÓN

En la representación final del genotipo del agente de exploración, es importante introducir la información de rango de análisis del elemento y, además, la precisión; así, la presentación final utilizada será:

$$\langle [re_{23min}, re_{23max}] pd_{re23} \langle b_j b_{j-1} \dots b_0 \rangle [m_{min}, m_{max}] pd_m \langle b_k b_{k-1} \dots b_0 \rangle [n_{min}, n_{max}] pd_n \langle b_l b_{l-1} \dots b_0 \rangle \rangle$$

E(7.28)

# CAPÍTULO 8

## PERFIL DE TRAYECTORIA OCTAL

### 8.1. ESTABLECIMIENTO DEL PERFIL OCTAL

El perfil de trayectoria octal es una función polinomial de grado 8 (ecuación E(8.1)) con 9 coeficientes (  $a_i$ ;  $i = 0, \dots, 8$  ) que son las incógnitas determinadas con las 9 ecuaciones correspondientes a cada restricción temporal (ecuaciones E(8.2)-E(8.10)).

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 + a_6t^6 + a_7t^7 + a_8t^8 \quad \text{E(8.1)}$$

Para  $t=0$ ,

$$p(0) = 0 = a_0 \quad \text{E(8.2)}$$

$$\frac{dp(0)}{dt} = 0 = a_1 \quad \text{E(8.3)}$$

$$\frac{d^2 p(0)}{dt^2} = 0 = a_2 \quad \text{E(8.4)}$$

Para  $t=t_f/2$ , donde  $t_f$  es el tiempo de proceso total,

$$p\left(\frac{t_f}{2}\right) = a_0 + a_1\left(\frac{t_f}{2}\right) + a_2\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + a_4\left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + a_5\left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + a_6\left(\frac{t_f}{2}\right)^6 + a_7\left(\frac{t_f}{2}\right)^7 + a_8\left(\frac{t_f}{2}\right)^8 \quad \text{E(8.5)}$$

$$\frac{dp\left(\frac{t_f}{2}\right)}{dt} = v_{max} = a_1 + 2a_2\left(\frac{t_f}{2}\right) + 3a_3\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + 4a_4\left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + 5a_5\left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + 6a_6\left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + 7a_7\left(\frac{t_f}{2}\right)^6 + 8a_8\left(\frac{t_f}{2}\right)^7 \quad \text{E(8.6)}$$

$$\frac{d^2 p\left(\frac{t_f}{2}\right)}{dt^2} = 0 = 2a_2 + 6a_3\left(\frac{t_f}{2}\right) + 12a_4\left(\frac{t_f}{2}\right)^2 + 20a_5\left(\frac{t_f}{2}\right)^3 + 30a_6\left(\frac{t_f}{2}\right)^4 + 42a_7\left(\frac{t_f}{2}\right)^5 + 56a_8\left(\frac{t_f}{2}\right)^6$$

**E(8.7)**

Para  $t=t_f$ ,

$$p(t_f) = p_f = a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 + a_6 t_f^6 + a_7 t_f^7 + a_8 t_f^8$$

**E(8.8)**

$$\frac{dp(t_f)}{dt} = 0 = a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 + 6a_6 t_f^5 + 7a_7 t_f^6 + 8a_8 t_f^7$$

**E(8.9)**

$$\frac{d^2 p(t_f)}{dt^2} = 0 = 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 + 30a_6 t_f^4 + 42a_7 t_f^5 + 56a_8 t_f^6$$

**E(8.10)**

Resolviendo el sistema de ecuaciones E(8.2)-E(8.10), se obtienen los coeficientes  $a_i$  que le dan carácter al polinomio octal, ecuaciones E(8.11)-E(8.19).

$$a_0 = 0$$

**E(8.11)**

$$a_1 = 0$$

**E(8.12)**

$$a_2 = 0$$

**E(8.13)**

$$a_3 = \frac{70p_f}{t_f^3} - \frac{32v_{max}}{t_f^2}$$

**E(8.14)**

$$a_4 = \frac{-315p_f}{t_f^4} + \frac{160v_{max}}{t_f^3}$$

**E(8.15)**

$$a_5 = \frac{546p_f}{t_f^4} - \frac{288v_{max}}{t_f^4}$$

**E(8.16)**

$$a_6 = \frac{-420p_f}{t_f^6} + \frac{224v_{max}}{t_f^5}$$

**E(8.17)**

$$a_7 = \frac{120p_f}{t_f^7} - \frac{64v_{max}}{t_f^6}$$

**E(8.18)**

$$a_8 = 0$$

**E(8.19)**

Sustituyendo las ecuaciones E(8.11)-E(8.19) en la ecuación E(8.1), y arreglando, se obtiene un polinomio formado por otros dos, uno constante y otro variable para el valor de la velocidad máxima deseada, ecuación E(8.20).

$$p(t) = p_f \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + v_{max} \left( \frac{-32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right)$$

**E(8.20)**

En un polinomio de quinto grado, de la misma manera que en el de grado 8, el valor máximo de la velocidad se presenta en el instante  $t_f/2$  (afirmación válida sólo bajo ciertas condiciones (ver la sección 8.4)), y tiene el valor presentado por la ecuación E(8.21).

$$v_{max} = 1.875 \frac{p_f}{t_f}$$

**E(8.21)**

Este resultado implica que el perfil de trayectoria generado por el polinomio de quinto grado pertenece al conjunto o familia universal de polinomios de octavo grado que más adelante se definirá.

$$P^5(d_{total}, t_{proceso}) \in FUP^8(d_{total}, t_{proceso}) \quad \text{E(8.22)}$$

Donde  $p_f$  y  $t_f$  han tomado el valor de  $d_{total}$  y  $t_{proceso}$ , la distancia de recorrido y el tiempo total del proceso, respectivamente.

Si la velocidad máxima, en un polinomio de grado 8, está definido por un parámetro de control adimensional, llamado *índice\_m*, como en la ecuación E(8.23), entonces la ecuación E(8.20) anterior toma la forma E(8.24).

$$v_{max} = \text{índice\_m} \frac{p_f}{t_f} \quad \text{E(8.23)}$$

$$p(t) = p_f \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \text{índice\_m} \frac{p_f}{t_f} \left( \frac{-32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right) \quad \text{E(8.24)}$$

Si el valor de *índice\_m* en la ecuación E(8.24) anterior es 1.875 entonces el polinomio de grado 8 llega a ser el polinomio de grado 5.

El parámetro *índice\_m*, para condiciones adecuadas de perfil de trayectoria, no puede tomar cualquier valor. Como se verá más adelante, si el parámetro *índice\_m* queda fuera del rango [1.458334, 2.1875], el polinomio genera movimientos no naturales para el manipulador. Si el parámetro de control es *índice\_m* = 1.458334 la pendiente de la curva de velocidad generada es muy brusca al inicio y fin del recorrido, y se alcanza la menor velocidad máxima, como se muestra en la gráfica (8.1).

Por otro lado, si el parámetro de control *índice\_m* = 2.1875 la curva es muy suave al inicio y fin del recorrido, y la máxima  $v_{max}$  es alcanzada (gráfica (8.1)).

La manera en que se determinaron estos valores se describe posteriormente; antes es necesario definir el concepto de “*genotipo del polinomio de octavo grado*”.

## 8.2. FAMILIA UNIVERSAL DE POLINOMIOS DE GRADO 8

La familia universal de perfiles de octavo grado ( $FUP^8(d_{total}, t_{proceso})$ ) está definida por un cromosoma o cadena de información genética llamado genotipo. Este genotipo le da el carácter a cada individuo constitutivo de la familia.

Esta familia universal está formada por una infinita cantidad de subfamilias. Cada una de éstas emparentan a individuos que presentan ciertos rasgos característicos del conjunto, por ejemplo, distancia de recorrido, tiempo de proceso, longitud del dominio del índice de control  $índice\_m$ , rango en el que se define éste, y la precisión. Estos conceptos se definen a continuación.

$$FUP^8(d_{total}, t_{proceso}) = \left\{ \begin{array}{l} FP^8(d_{total}, t_{proceso})_{[índice\_m_{min}, índice\_m_{max}], pd} \\ FP^8(d_{total}, t_{proceso})_{[índice\_m_{min}, índice\_m_{max}], pd}, \dots \end{array} \right\} \quad E(8.25)$$

Donde  $[índice\_m_{min}, índice\_m_{max}]$  es el rango del  $índice\_m$  y  $pd$  es la precisión decimal.

Todos los individuos de esta familia universal están emparentados por la distancia total de recorrido, tiempo de proceso y precisión concerniente a la posición del dígito 1 después del punto decimal, sin embargo, entre subfamilias, los individuos se diferencian por el rango en que se encuentra su índice de control  $índice\_m$ .

La familia  $FUP^8(*, *)$  es infinita porque el  $índice\_m \in [-\infty, +\infty]$ , sin embargo, cada familia  $FP^8(*, *)_{[*], pd}$ , puede ser finita (número finito de individuos). Además, cada familia  $FP^8(*, *)_{[*], pd}$  puede contener otras familias.

### 8.2.1. REPRESENTACIÓN PRIMITIVA DEL PERFIL OCTAL COMO GENOTIPO

Se usa una cadena binaria como un cromosoma o genotipo que representará el valor real del índice de control  $índice\_m$ . La longitud del vector depende de la precisión requerida.

El dominio de la variable  $índice\_m$ , en el rango de  $[índice\_m_{min}, índice\_m_{max}]$ , tiene una longitud de:

$$D_m = \text{índice\_}m_{\max} - \text{índice\_}m_{\min} \quad \text{E(8.26)}$$

La precisión se obtiene de la siguiente manera, dependiendo de número de posiciones que se quieren después del punto decimal:

$$\text{precisión} = n - \text{esimas}; \quad \text{donde: } n = 1 \times 10^{pd}; \quad pd = 1, \dots, \quad \text{E(8.27)}$$

Esa precisión implica que el rango  $[\text{índice\_}m_{\min}, \text{índice\_}m_{\max}]$  debe ser dividida en:

$$ndiv_{\min} = (D_m)(n) \quad \text{E(8.28)}$$

Esto significa que la cadena binaria que representa al cromosoma o genotipo debe tener k bits, esto es:

$$2^{k-1} < ndiv_{\min} < 2^k \quad \text{E(8.29)}$$

Así, el cromosoma estará representado por una cadena de la forma:

$$\langle b_{k-1} b_{k-2} \dots b_0 \rangle \quad \text{E(8.30)}$$

### 8.2.2. TRANSFORMACIÓN DE GENOTIPO A FENOTIPO

La transformación de la representación del  $\text{índice\_}m$ , en forma de genotipo, a su respectivo fenotipo, se efectúa en dos pasos:

- Conversión de la cadena binaria  $\langle b_{k-1} b_{k-2} \dots b_0 \rangle$  de base 2 a base 10:

$$\left( \langle b_{k-1} b_{k-2} \dots b_0 \rangle \right)_2 = \left( \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i \right)_{10} = \text{índice\_}m' \quad \text{E(8.31)}$$

- Valor real correspondiente mediante traslado de coordenadas:

$$\text{índice}_m = \text{índice}_{m_{\min}} + \text{índice}_m' \left( \frac{D_m}{2^k - 1} \right) \quad \text{E(8.32)}$$

### 8.2.3. REPRESENTACIÓN COMPLETA DEL ÍNDICE DE CONTROL DEL PERFIL OCTAL COMO GENOTIPO

La representación primitiva del genotipo del perfil octal está dada por una cadena  $\langle b_{k-1}b_{k-2}\dots b_0 \rangle$ . Sin embargo ésta depende de la longitud del dominio de  $m$ ,  $D_m$ , y de la precisión.

Una representación más acabada del perfil octal debe comprender esa información, tal que la transformación de genotipo a fenotipo, sea clara. Dicha representación empleada tendrá la forma siguiente:

$$\left( \left[ \text{índice}_{m_{\min}}, \text{índice}_{m_{\max}} \right]_{pd}, \langle b_{k-1}b_k \dots b_0 \rangle \right) \quad \text{E(8.33)}$$

Además, es importante indicar de qué perfil se trata, así como los parámetros de dicho perfil,  $d_{\text{total}}$  y  $t_{\text{proceso}}$ :

$$\left( \left[ \text{índice}_{m_{\min}}, \text{índice}_{m_{\max}} \right]_{pd}, \langle b_{k-1}b_k \dots b_0 \rangle_{p8[d_{\text{total}}, t_{\text{proceso}}]} \right) \quad \text{E(8.34)}$$

### 8.3. FAMILIA DE GENOTIPOS REPRESENTATIVOS

Una familia de genotipos representativos del perfil octal es un conjunto finito o población de individuos que tiene la forma dada por la representación anterior, E(8.34).

Esa familia se representa de la siguiente manera:

$$FG_{p8(d_{\text{total}}, t_{\text{proceso}}), [m_{\min}, m_{\max}], pd} = \left\{ \left( \left[ \text{índice}_{m_{\min}}, \text{índice}_{m_{\max}} \right]_{pd}, \langle 00 \dots 0 \rangle \right)_{p8[d_{\text{total}}, t_{\text{proceso}}]}, \dots, \left( \left[ \text{índice}_{m_{\min}}, \text{índice}_{m_{\max}} \right]_{pd}, \langle 11 \dots 1 \rangle \right)_{p8[d_{\text{total}}, t_{\text{proceso}}]} \right\} \quad \text{E(8.35)}$$

## 8.4. DETERMINACIÓN DE LOS LÍMITES DEL ÍNDICE DE CONTROL

### 8.4.1. FAMILIAS DENTRO DE LOS LÍMITES DEL ÍNDICE DE CONTROL

Las familias  $FG_{p8(dtota, tproceso), [1.458334, 2.187500], pd}$ , cuya información genética genera la familia fenotípica  $FP^8(*,*)[1.458334, 2.187500],pd$ , son unos conjuntos de genotipos particulares que engloban la población de individuos que sólo existen en el rango  $[1.458334, 2.187500]$  de *índice\_m*. A continuación se presentan los perfiles generados por los individuos de los extremos izquierdo y derecho de una familia de genotipos, en particular, aquella generada para una precisión de 6 dígitos y que es una de tantas posibles en ese rango.

- PERFILES DE TRAYECTORIA DE UNA FAMILIA COMPRENDIDA ENTRE LOS LÍMITES DEL ÍNDICE DE CONTROL  $índice\_m \in [1.458334, 2.1875]$

FAMILIA ANALIZADA:

(Fenotípica)  $FP^8(1000,10)[1.458334, 2.187500], 6$   
 (Genotípica)  $FG_{p8(1000, 10), [1.458334, 2.187500],6}$

CARACTERÍSTICAS DE LA FAMILIA

Número de individuos:	1,048,576
Distancia de recorrido:	1000 mm
Tiempo de proceso:	10 segundos
Precisión:	6 dígitos

INDIVIDUOS ANALIZADOS:

Población muestra: 2 individuos (los extremos de la familia)

$ind(1) = ([1.458334, 2.1875], 6, \langle 00000000000000000000 \rangle)_{p8(1000,10)} \in FG_{p8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$

$ind(1,048,576) = ([1.458334, 2.1875], 6, \langle 11111111111111111111 \rangle)_{p8(1000,10)} \in FG_{p8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$

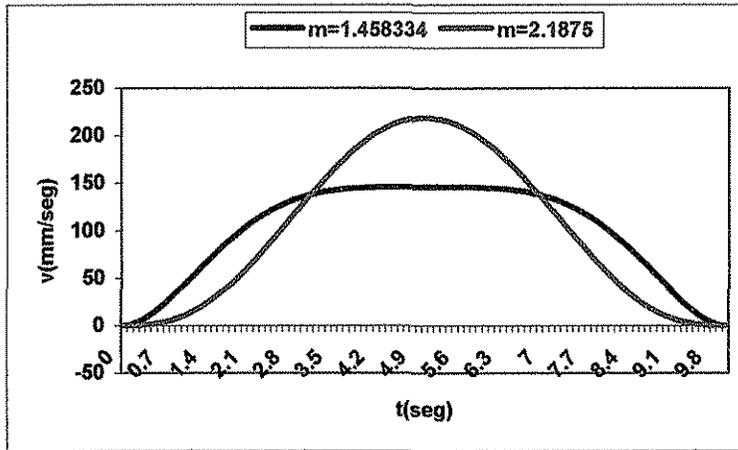
- PERFILES DE VELOCIDAD DE LA FAMILIA

OBSERVACIONES:

La gráfica (8.1) presenta las siguientes características:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1. Para el perfil de velocidad generado con  $índice\_m = 1.458334$ , las pendientes al inicio y fin de recorrido, son mayores que las correspondientes al perfil generado con  $índice\_m = 2.187500$



Individuo	Fenotipo (índice m)	Genotipo	Familia
Ind(1)	1.458334	$([1.458334, 2.1875], 6, \langle 00000000000000000000 \rangle)_{P8(1000,10)}$	$FG_{P8(1000,10)}$ , [1.458334, 2.187500],6
Ind(1,048,576)	2.187500	$([1.458334, 2.1875], 6, \langle 11111111111111111111 \rangle)_{P8(1000,10)}$	$FG_{P8(1000,10)}$ , [1.458334, 2.187500],6

**Gráfica (8.1).** Perfiles de velocidad para los fenotipos extremos  $índice\_m = 1.458334$  e  $índice\_m = 2.187500$  que pertenecen a la familia de genotipos  $FG_{P8(1000,10)}$ , [1.458334, 2.187500],6, generadora de la familia de polinomios  $FP^8(*,*)$ [1.458334, 2.187500],6

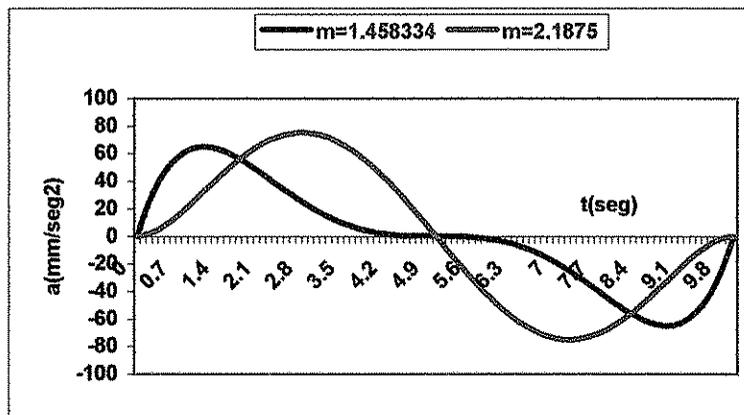
2. La velocidad máxima del perfil de velocidad correspondiente a  $índice\_m = 1.458334$  es inferior a la correspondiente al perfil generado con  $índice\_m = 2.187500$ .
3. La cima del perfil de velocidad correspondiente a  $índice\_m = 1.458334$  es más plana y llana que la del otro perfil que está más definida.

• PERFILES DE ACELERACIÓN DE LA FAMILIA

OBSERVACIONES:

La gráfica (8.2) presenta las siguientes características:

1. Comparado con el perfil de aceleración generado con *índice*  $m=2.187500$ , los picos máximo y mínimo del perfil de trayectoria de aceleración correspondiente a *índice*  $m=1.458334$  están más cercanos al inicio y fin de recorrido, respectivamente; esto se debe a que los puntos de inflexión del perfil de velocidad del mismo índice se movieron en la misma dirección.



Individuo	Fenotipo (índice_m)	Genotipo	Familia
Ind(1)	1.458334	$([1.458334, 2.1875], 6, \langle 00000000000000000000 \rangle)_{p8(1000,10)}$	$FG_{p8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$
Ind(1,048,576)	2.187500	$([1.458334, 2.1875], 6, \langle 11111111111111111111 \rangle)_{p8(1000,10)}$	$FG_{p8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$

**Gráfica (8.2).** Perfiles de aceleración para los fenotipos extremos de *índice*  $m=1.458334$  y de *índice*  $m=2.187500$  que pertenecen a la familia de genotipos  $FG_{p8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$ , generadora de la familia de polinomios  $FP^8(*, *) [1.458334, 2.187500], pd$

2. El valor del pico máximo del perfil correspondiente a *índice*  $m=1.458334$  es inferior al perfil dependiente de *índice*  $m=2.187500$ .

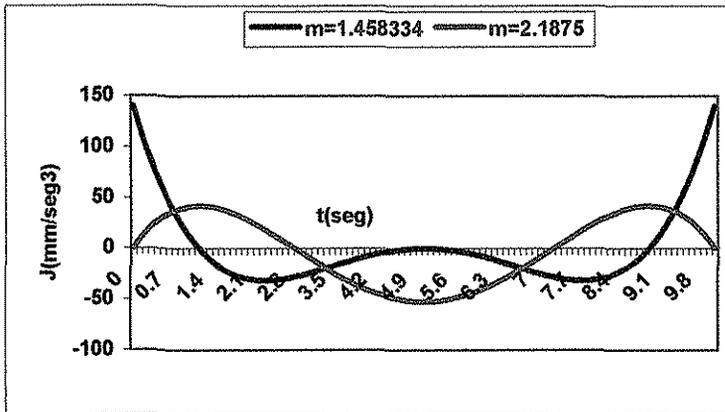
3. El perfil de aceleración correspondiente al *índice*  $m=1.458334$  presenta un valle muy plano en su nivel cero de aceleración; esto representa un estado próximo a que la parte izquierda de dicho valle pase a la región negativa y la parte derecha pase a la parte positiva.

• PERFILES DE JERKS DE LA FAMILIA

OBSERVACIONES:

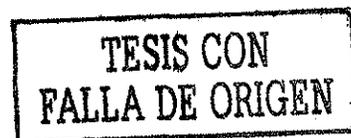
La gráfica (8.3) presenta las siguientes características:

1. El perfil del jerk correspondiente a *índice*  $m=1.458334$  tiene picos muy altos al inicio y fin del recorrido representando un mayor impulso de la partícula transportada es esos instantes.



Individuo	Fenotipo (índice m)	Genotipo	Familia
Ind(1)	1.458334	$([1.458334, 2.1875], 6, (00000000000000000000))_{P8(1000,10)}$	$FG_{P8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$
Ind(1,048,576)	2.187500	$([1.458334, 2.1875], 6, (11111111111111111111))_{P8(1000,10)}$	$FG_{P8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$

**Gráfica (8.3).** Perfiles de jerks para los fenotipos extremos de *índice*  $m=1.458334$  y de *índice*  $m=2.187500$  que pertenecen a la familia de genotipos  $FG_{P8(1000, 10), [1.458334, 2.187500], 6}$ , generadora de la familia de polinomios  $FP^8(*, *) [1.458334, 2.187500], pd$



2. Los impulsos presentados por el perfil del jerk correspondiente a  $\text{índice}_m=2.187500$  son menores, sin embargo, el pico negativo o mínimo central es mayor que el correspondiente a  $\text{índice}_m=1.458334$ .

#### 8.4.2. FAMILIAS A LA IZQUIERDA DEL LÍMITE INFERIOR DEL $\text{índice}_m$

Con cualquiera de los individuos de la familia  $FP^8(*,*)[1.458334, 2.187500]$ ,pd, (gráficas (8.1)-(8.3)) el máximo de las curvas de velocidad se encuentra en el instante  $t/2$ , sin embargo, para individuos de familias que se encuentran a la izquierda del  $\text{índice}_m=1.458334$  se puede formular las siguientes preguntas:

PREGUNTA 1. ¿Cuál es la forma de los perfiles generados para esos valores de  $\text{índice}_m$ ?

PREGUNTA 2. ¿Qué efecto tienen esos perfiles en el sistema mecánico?

- PERFILES DE TRAYECTORIA DE UNA FAMILIA COMPRENDIDA ENTRE LOS LÍMITES DEL ÍNDICE DE CONTROL  $\text{índice}_m \in [0.500000, 1.458333]$

FAMILIA ANALIZADA:

(Fenotípica)  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333]$ , 6  
 (Genotípica)  $FG_{p8(1000, 10), [0.500000, 1.458333], 6}$

CARACTERÍSTICAS DE LA FAMILIA

Número de Individuos:	1,048,576
Distancia de recorrido:	1000 mm
Tiempo de proceso:	10 segundos
Precisión:	6 dígitos

INDIVIDUOS ANALIZADOS:

Población muestra: 11 individuos

$\text{ind}(1) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 00000000000000000000 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [0.5, 1.458334], 6}$

$\text{ind}(104, 859) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 00011001100110011000 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [0.5, 1.458334], 6}$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\text{ind}(209,717) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 00110011001100110101 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(314,575) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 01001100110011001111 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(419,433) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 01100110011001101001 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(524,290) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 10000000000000000010 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(629,148) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 10011001100110011100 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(733,459) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 10110011000100010011 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(838,865) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 11001100110011010001 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(943,723) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 11100110011001101011 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

$$\text{ind}(1,048,576) = ([0.500000, 1.458333], 6, \langle 11111111111111111111 \rangle)_{P8(1000,10)} \in FG_{P8(1000,10), [0.5, 1.458334], 6}$$

- PERFILES DE VELOCIDAD DE LA FAMILIA

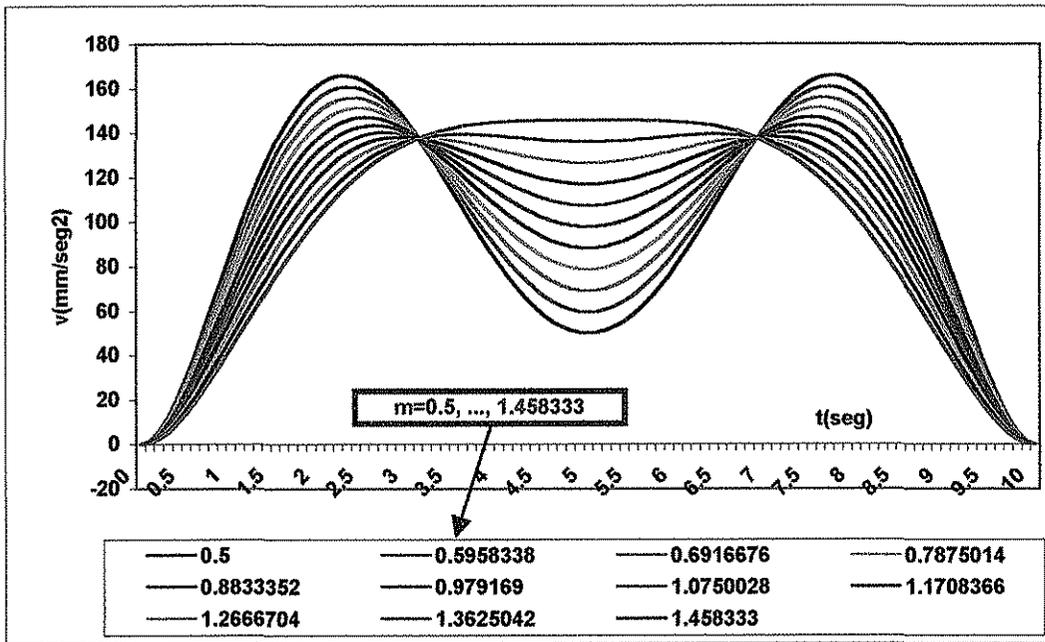
## OBSERVACIONES:

La gráfica (8.4) presenta las siguientes características:

1. Conforme el *índice<sub>m</sub>* disminuye, la velocidad en el tiempo  $t_f/2$  queda entre dos picos de velocidad que son máximos. Esto significa que la partícula transportada con un perfil como cualquiera de los aquí presentados, experimentará cuatro periodos: a) aumento de velocidad desde el reposo hasta una velocidad máxima, b) disminución desde un pico máximo hasta una velocidad inferior que tiende al reposo, c) nuevamente un aumento hasta un pico máximo para, posteriormente, d) disminuir hasta el reposo.

Si el objeto de este trabajo es optimizar el movimiento del órgano terminal de un robot, un desempeño con estas características queda lejos de ser el adecuado.

2. Las pendientes al inicio y fin de recorrido son más pronunciadas conforme disminuye el índice de control *índice<sub>m</sub>*. Esto significa que el arranque y frenado de la partícula transportada es más violento; las gráficas de aceleración e impulsos reportan este hecho.



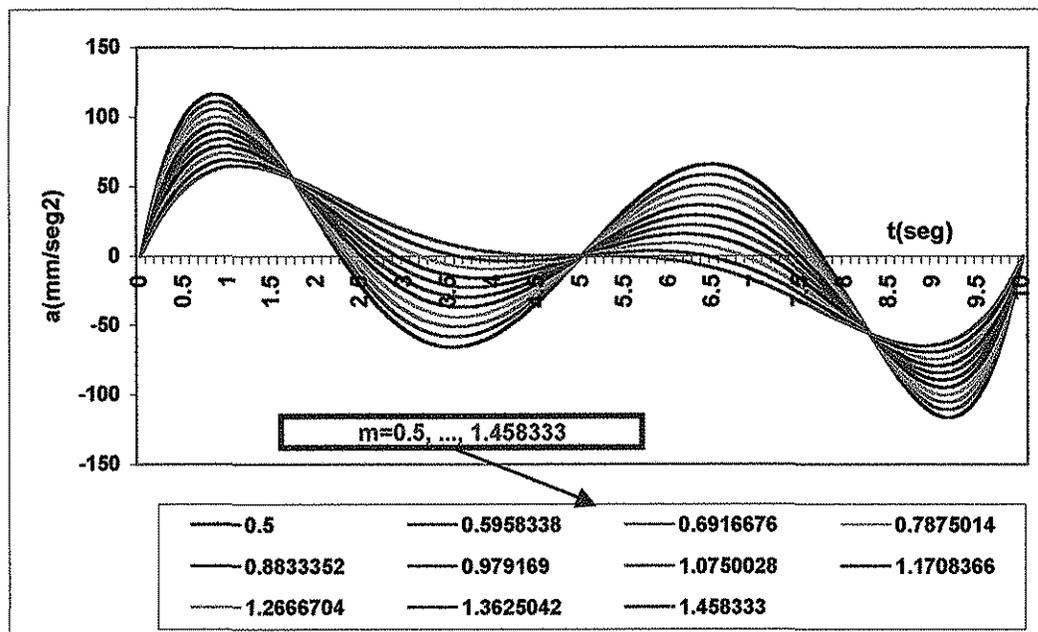
**Gráfica (8.4).** Individuos de la familia  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333], 6$  que se encuentra a la izquierda de la familia  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333], 6$

- PERFILES DE ACELERACIÓN DE LA FAMILIA

OBSERVACIONES:

La gráfica (8.5) presenta las siguientes características:

1. Los perfiles de aceleración de esta familia presenta dos periodos: a) de  $t=0$  a  $t=t_f/2$ , y b) de  $t=t_f/2$  a  $t=t_f$ . Ambos periodos presentan dos regiones de aceleración, una positiva y otra negativa. Si una partícula fuera transportada con perfiles como éstos, ella presentaría un proceso de cuatro cambios de aceleración. Un movimiento distante de ser suave.
2. Los picos de aceleración máximos se presentan más cercanos al inicio y fin de recorrido, debido al desplazamiento, en el mismo sentido, de los puntos de inflexión de las antiderivadas. ¿Cuál sería el sentido de acelerar mucho al inicio para, posteriormente, pasar por periodos de desaceleración-aceleración en instantes intermedios y, nuevamente aplicar desaceleración para detener la partícula?



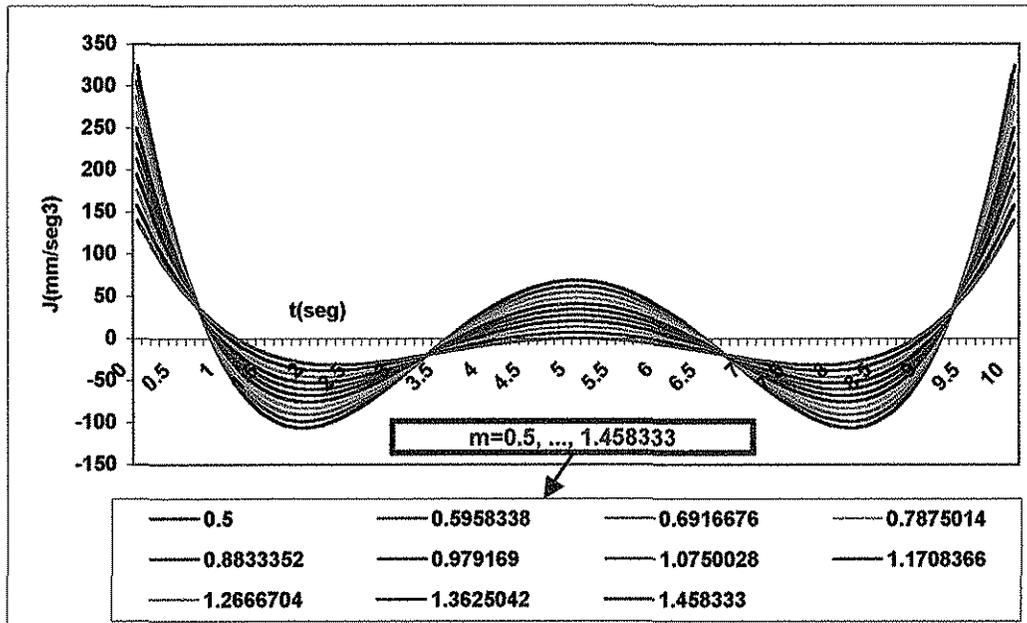
**Gráfica (8.5).** Perfiles de velocidad correspondientes a 11 individuos de la familia  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333],pd$  que se encuentra a la izquierda de la familia  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333],pd$

- PERFILES DE LOS JERKS DE LA FAMILIA

OBSERVACIONES:

La gráfica (8.6) presenta las siguientes características:

1. Los perfiles de la tercera derivada de la trayectoria polinomial de grado 8 muestran que los impulsos al inicio y fin del recorrido aumentan en magnitud conforme disminuye el valor de índice  $m$ . Además, en la parte intermedia del proceso van apareciendo tres picos cuya magnitud también crece. Se puede concluir que la suavidad de los perfiles disminuye para individuos que se van alejando, a la izquierda, del límite 1.458334.



**Gráfica (8.6).** Perfiles de los jerks correspondientes a 11 individuos de la familia  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333], 6$  que se encuentra a la izquierda de la familia  $FP^8(*,*)[0.500000, 1.458333], 6$

Un sistema mecánico, como el tratado en este trabajo, que intenta desempeñarse en el menor tiempo posible, bajo ciertas restricciones, no debe pasar de una velocidad, que es máxima y disminuirla para nuevamente aumentarla a un nuevo máximo de igual magnitud. Esto significa perder tiempo, que de ninguna manera es lo que se busca, además de perder la suavidad del movimiento y probable aumento de desgaste de partículas contaminantes. Ver gráficas de los perfiles de aceleración y jerks (gráficas (8.5) y (8.6)).

#### 8.4.3. FAMILIAS A LA DERECHA DEL LÍMITE SUPERIOR DEL índice $_m$

En la sección anterior se analizó una familia de polinomios que se encuentra a la izquierda del límite inferior, índice  $_m=1.458334$ . Ahora, si se tuvieran valores superiores a índice  $_m=2.1875$ , cuales serían las respuestas a las preguntas de la sección 8.4.2.

Para eso se hace un análisis de una familia comprendida a la derecha del límite superior.

- PERFILES DE TRAYECTORIA DE UNA FAMILIA COMPRENDIDA ENTRE LOS LÍMITES DEL ÍNDICE DE CONTROL  $\text{índice}_m \in [2.1875, 3.1875]$

FAMILIA ANALIZADA:

(Fenotípica)  $FP^8(1000, 10)[2.1875, 3.1875], 6$   
 (Genotípica)  $FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

CARACTERÍSTICAS DE LA FAMILIA

Número de Individuos: 1,048,576  
 Distancia de recorrido: 1000 mm  
 Tiempo de proceso: 10 segundos  
 Precisión: 6 dígitos

INDIVIDUOS ANALIZADOS:

Población muestra: 11 individuos

$\text{ind}(1) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 00000000000000000000 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(104,859) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 00011001100110011000 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(209,717) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 00110011001100110101 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(314,575) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 01001100110011001111 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(419,433) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 01100110011001101001 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(524,290) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 10000000000000000010 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(629,148) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 10011001100110011100 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(734,003) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 10110011001100110011 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(838,865) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 11001100110011010001 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

$\text{ind}(943,723) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 11100110011001101011 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

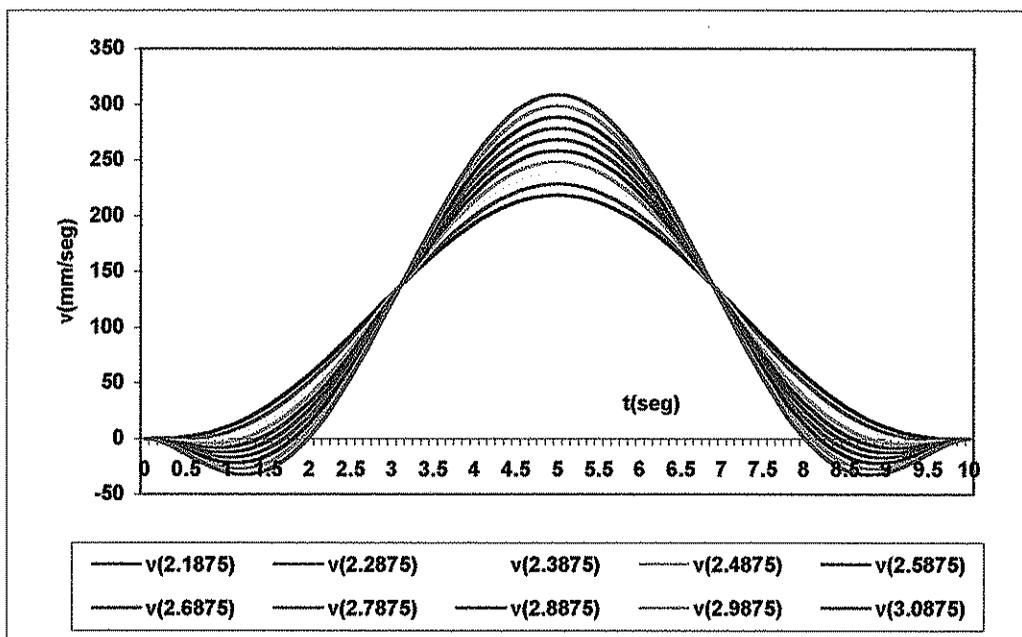
$\text{ind}(1,048,576) = ([2.1875, 3.1875], 6, \langle 11111111111111111111 \rangle)_{p8(1000, 10)} \in FG_{p8(1000, 10), [2.1875, 3.1875], 6}$

- PERFILES DE VELOCIDAD DE LA FAMILIA

## OBSERVACIONES:

La gráfica (8.7) presenta las siguientes características:

1. Conforme el *índice<sub>m</sub>* aumenta, la velocidad máxima, que ocurre en el tiempo  $t_f/2$ , también aumenta. Sin embargo, aparecen regiones negativas al inicio y fin de recorrido. Eso significa que el punto operacional pasa por el mismo punto en dos instantes diferentes.
2. Las pendientes en las vecindades de los puntos de inflexión entre los que queda la velocidad máxima va aumentando; esto tiene consecuencias en el aumento de la aceleración en esas regiones.



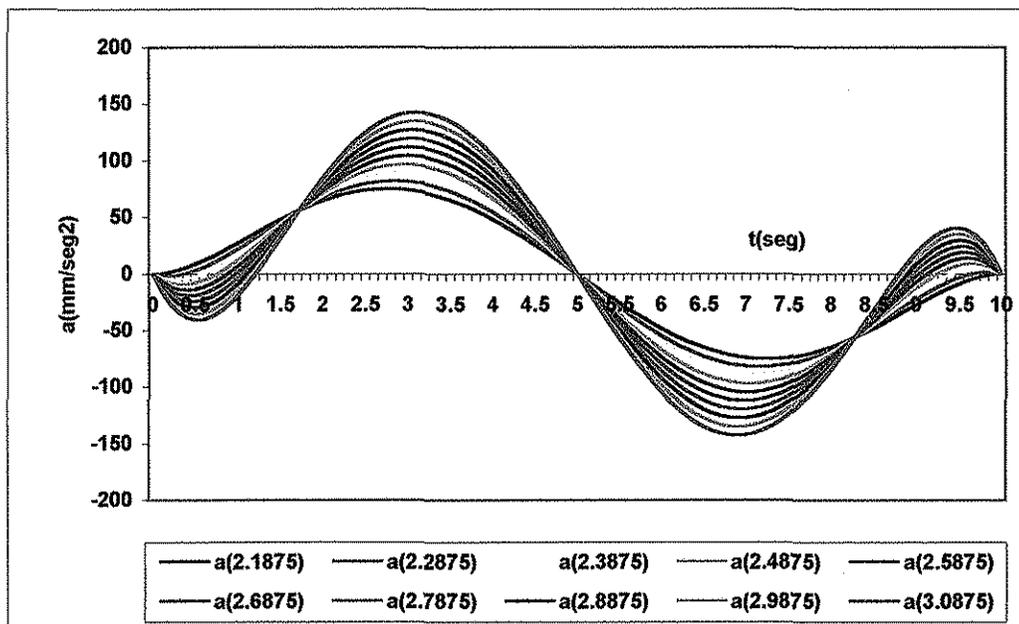
**Gráfica (8.7).** Perfiles de velocidad correspondientes a 10 individuos de la familia  $FP^8(*,*)[2.1875, 3.1875],6$  que se encuentra a la derecha de la familia  $FP^8(*,*)[1.458334,2.1875],6$

- PERFILES DE ACELERACIÓN DE LA FAMILIA

## OBSERVACIONES:

La gráfica (8.8) presenta las siguientes características:

1. Los perfiles de aceleración de esta familia presentan muchos periodos de aceleración y desaceleración. Esto se debe a que el punto operacional tiene que pasar por dos mismos puntos en diferentes instantes.
2. Los picos de aceleración máximos, que van aumentando como crece el *índice\_m*, se van moviendo hacia la mitad del tiempo de proceso, además de la aparición de nuevos picos que también van aumentando para aquellos individuos que se encuentran más alejados a la derecha del límite superior.



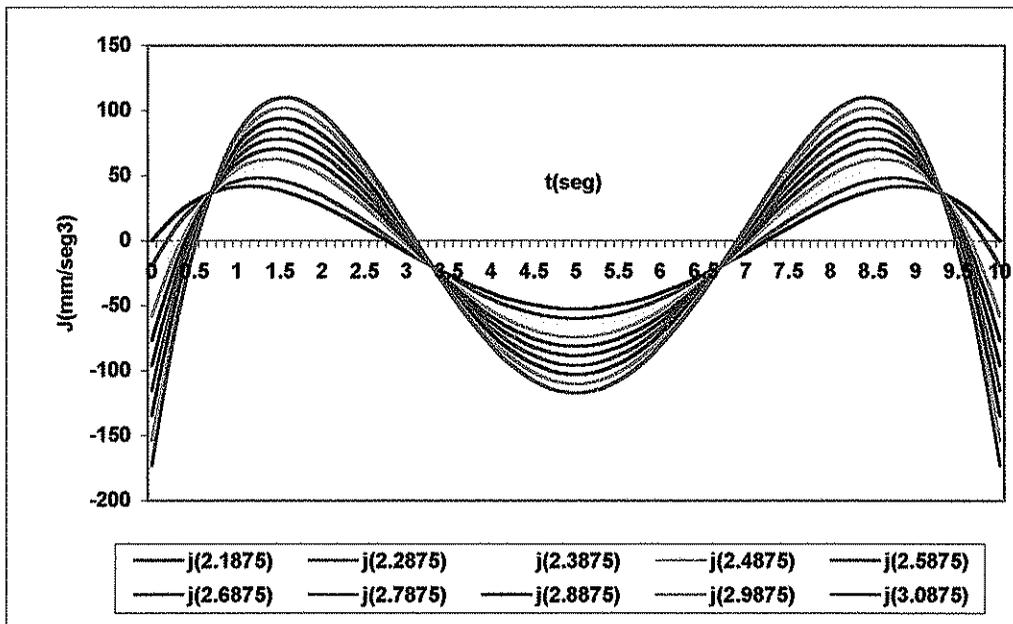
**Gráfica (8.8).** Perfiles de aceleración correspondientes a 10 individuos de la familia  $FP^8(*,*)[2.1875, 3.1875],6$  que se encuentra a la derecha de la familia  $FP^8(*,*)[1.458334, 2.1875],6$

- PERFILES DE LOS JERKS DE LA FAMILIA

## OBSERVACIONES:

La gráfica (8.9) presenta las siguientes características:

1. Conforme crece el índice  $m$ , también crece la magnitud de los impulsos al inicio y el fin del recorrido, así como la aparición de tres picos crecientes en regiones intermedias.



**Gráfica (8.9).** Perfiles de jerk correspondientes a 10 individuos de la familia  $FP^8(*,*)[2.1875, 3.1875],6$  que se encuentra a la derecha de la familia  $FP^8(*,*)[1.458334, 2.1875],6$

Esta familia de ninguna manera satisface los requisitos de suavidad requeridos para el mejoramiento del desempeño del manipulador genérico.

#### 8.4.4. LOS TRES GRANDES GRUPOS DE FAMILIAS

Con el análisis anterior, se pueden definir tres grandes grupos de familias:

- Grupo 1. Familias que quedan a la izquierda del *índice*  $m=1.458334$ .
- Grupo 2. Familias que quedan en el rango de *índice*  $m = [1.458334, 2.187500]$ .
- Grupo 3. Familias que quedan a la derecha del *índice*  $m=2.187500$ .

Los grupos 1 y 3 son considerados, para los fines que persigue este trabajo, como familias incluyentes de individuos poseedores de información genética indeseable. Por lo tanto se desechan y solamente se trabajará con el conjunto universal de individuos comprendidos en el rango de *índice*  $m = [1.458334, 2.187500]$ .

En el Anexo B se presenta información adicional de este perfil de trayectoria.

# CAPÍTULO 9

## TIEMPO DE PROCESO MÍNIMO

### 9.1. INTRODUCCIÓN

Con el mejor manipulador y con el mejor *índice\_m* del perfil de trayectoria de grado 8 se garantizan los más bajos pares motrices máximos ofrecidos por el sistema. Por lo tanto, lo único que queda es determinar el tiempo de proceso mínimo mediante el cual el pico máximo del par motriz de la articulación *i* coincide con los límites de par ofrecidos por el motor actuador de esa articulación.

Las siguientes secciones muestran el método empleado para obtener el tiempo de proceso mínimo.

### 9.2. FUNCIONES DE APTITUD Y OBJETIVO

La función de aptitud tiene como objetivo calificar a los individuos dentro de un proceso de búsqueda evolutiva (Michalewicz (1996), Nearchou y Aspragathos (1996)), tal que aquellos mejor calificados son más aptos para reproducirse y transmitir su buena información genética a futuras generaciones.

En esta sección se presentan dichas funciones, no sin antes definir la función  $f_i(t^*)$  que es igual al par motriz máximo obtenido en toda la evolución del proceso. Ese pico ocurre en  $t^*$ , ecuación E(9.1).

$$f_i(t^*) = \tau_i(t^*) = \tau_{iMAX} \tag{E(9.1)}$$

$$t^* \in [0, t_f] \tag{E(9.2)}$$

donde  $t_f$  es el tiempo de proceso.

Así, se puede formar la siguiente función, ecuación E(9.3), dependiente del par motriz máximo del motor del manipulador (dato del fabricante) y del tiempo  $t^*$ , que es el tiempo en el cual ocurre el máximo pico del par motriz demandado por la articulación.

$$g_i(\tau_{MAX\ MOTOR\ i}, t^*) = \frac{\tau_{MAX\ MOTOR\ i}}{f_i(t^*)} \quad E(9.3)$$

La función  $g_i(*,*)$  anterior tiene tres modalidades dependiendo del valor de  $f_i(*)$ , ecuaciones E(9.4a), E(9.4b) y E(9.4c), correspondientes a cada uno de los casos siguientes.

**CASO 1.** Valores de  $f_i(*)$  a la izquierda de la cota del par motriz máximo del motor.

$$g_i(*,*) > 1, \quad \forall f_i(*) < \tau_{MAX\ MOTOR\ i} \quad E(9.4a)$$

**CASO 2.** Valores de  $f_i(*)$  a la derecha de la cota del par motriz máximo del motor.

$$g_i(*,*) < 1, \quad \forall f_i(*) > \tau_{MAX\ MOTOR\ i} \quad E(9.4b)$$

**CASO 3.** Valores de  $f_i(*)$  igual a la cota del par motriz máximo del motor.

$$g_i(*, t_s^*) = 1, \quad \forall f_i(t_s^*) = \tau_{MAX\ MOTOR\ i} \quad E(9.4c)$$

donde  $t_s^* \in [0, t_{f\ SOLUCIÓN}]$

El **CASO 3** representa la solución del problema porque  $t_s^*$  pertenece al intervalo de tiempo de proceso solución,  $t_{f\ SOLUCIÓN}$ .

Para alcanzar el estado del **CASO 3** es necesario, entonces, (1) minimizar la función  $g_i(*,*)$  para el **CASO 1**, ó (2) maximizar  $g_i(*,*)$  para el **CASO 2**. Ecuaciones E(9.5) y E(9.6).

$$(1) \quad \text{Min} |g_i(*,*)|, \quad \forall f_i(t^*) < \tau_{MAX\ MOTOR\ i} \quad E(9.5)$$

$$(2) \quad \text{Max} |g_i(*,*)|, \quad \forall f_i(t^*) > \tau_{MAX\ MOTOR\ i} \quad E(9.6)$$

Para (1) anterior (E(9.5)) se puede optar por maximizar  $g_i^{-1}(*,*)$  en vez de minimizar  $g_i(*,*)$ , ecuación E(9.7).

$$\text{Max} |g_i^{-1}(*,*)|, \quad \forall f_i(t^*) < \tau_{MAX\ MOTOR\ i} \quad \text{E(9.7)}$$

Resumiendo, el objetivo consiste en encontrar  $t_s^* \in [0, t_{f\ SOLUCIÓN}]$ , que sustituye a cualquier otro  $t^* \in [0, t_f]$ , tal que se maximicen E(9.6) y E(9.7).

De esta manera se encuentra  $t_{f\ SOLUCIÓN}$ , que representa el tiempo de proceso más corto respetando el par motriz máximo ofrecido por el motor de la articulación  $i=1, 2, 3, 4$ .

El material ilustrativo siguiente puede ayudar a comprender el método.

### 9.3. MATERIAL ILUSTRATIVO

#### EJEMPLO 9.1.

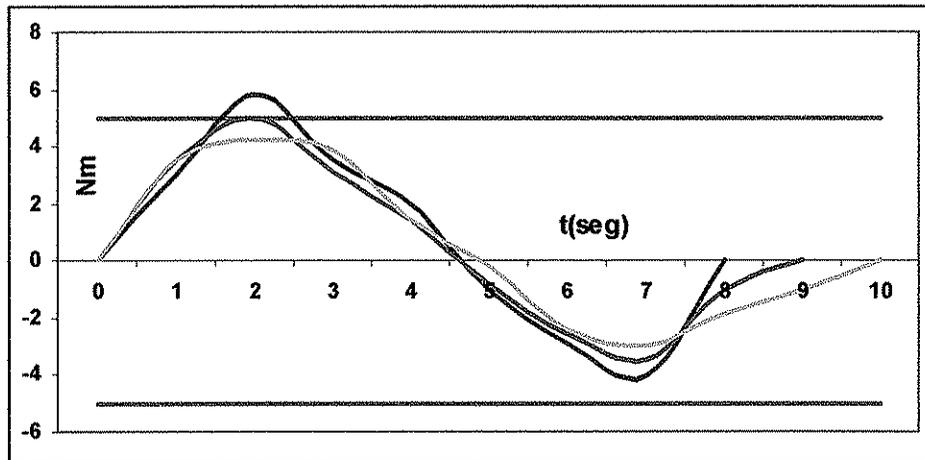
En la gráfica de la figura (9.1) se presentan las cotas superior e inferior, con mismo valor absoluto, del par motriz máximo ofrecido por el motor, y 3 evoluciones del par motriz de la articulación  $i$ , correspondientes a 3 diferentes tiempos de proceso, a un perfil de trayectoria de grado 8 y a un *índice\_m* óptimo.

Una de ellas, cuyo tiempo de proceso es 8 segundos, (línea color azul) presenta su pico máximo en las vecindades de los 2 segundos. Sin embargo, ese valor ha sobrepasado el valor límite del motor, significando que la corriente eléctrica ha sobrepasado su límite permisible y lo ha dañado (o, al menos, está siendo operado en condiciones dañinas), Sciavicco y Siciliano (1996).

La siguiente, que se muestra en color naranja, y cuyo tiempo de proceso es de 10 segundos, presenta un pico máximo en las mismas vecindades de la anterior, es decir, 2 segundos; en este caso, no se ha aprovechado al máximo el par motriz del motor y, por lo tanto, 10 segundos se considera un proceso largo.

La tercer evolución, representada por la línea roja, tiene un pico coincidente con la cota máxima del motor, esa evolución toma un tiempo de proceso de 9 segundos. Esto quiere decir que cualquier valor de tiempo de proceso diferente a 9 segundos produce un par motriz que, o daña el motor, o desaprovecha sus máximas capacidades.

Así, 9 segundos de tiempo de proceso es considerado como el tiempo de proceso mínimo, objeto de este trabajo.



Límites del par motriz ofrecidos por el motor i 5 Nm	$\tau_i(t^*) = \tau_{iMAX} > 5 Nm$ $t^* \in [0, 8 \text{ seg}]$	$\tau_i(t_s^*) = \tau_{iMAX} = 5 Nm$ $t_s^* \in [0, 9 \text{ seg}]$	$\tau_i(t^*) = \tau_{iMAX} < 5 Nm$ $t^* \in [0, 10 \text{ seg}]$
--	--	--	---

Figura (9.1). Evolución del par motriz de tres trayectorias diferentes. El tiempo de proceso de 9 segundos es considerado el tiempo de proceso mínimo.

En la gráfica de la figura (9.2) se muestra la evolución de las funciones  $g_i(*,*)$  y  $g_i^{-1}(*,*)$  donde el primer parámetro (\*) es la cota máxima del par ofrecida por el motor de la articulación i; en este caso se ha escogido como 5 Nm. Por otro lado, el segundo parámetro (\*) representa el tiempo en el cual ocurre el máximo par motriz de toda la evolución con el tiempo, desde 0 seg. hasta la duración del proceso escogido,  $t_f$ .

Así, el par motriz máximo de la articulación i es igual al par motriz ocurrido en  $t^*$ , esto es,  $\tau_{iMAX} = \tau_i(t^*)$ , ecuación E(9.1).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

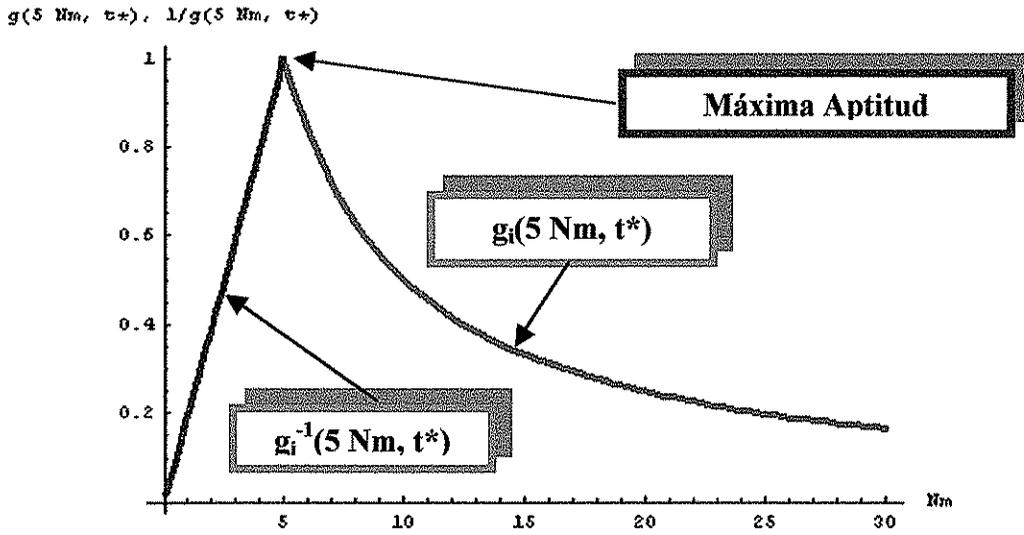


Figura (9.2). Funciones  $g_i(5 \text{ Nm}, t^*)$  y  $g_i^{-1}(5 \text{ Nm}, t^*)$ .

Se prefiere maximizar  $g_i^{-1}(*, *)$  para  $\forall f_i(t^*) < \tau_{MAX \text{ MOTOR } i}$  ecuación E(9.7) que minimizar  $g_i(*, *)$  para la misma desigualdad, ecuación E(9.5), la razón radica en que  $g_i(*, *)$  tiene comportamiento asintótico para valores a la izquierda de la solución, figura (9.3).

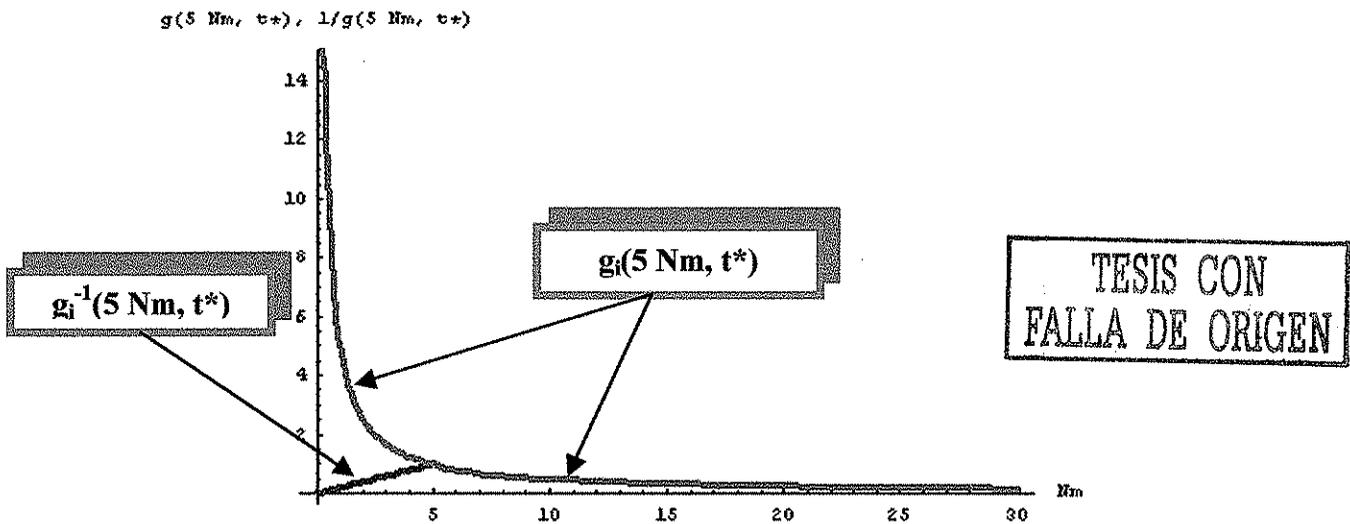


Figura (9.3). La evolución de  $g_i(5 \text{ Nm}, t^*)$  para  $\forall f_i(t^*) < \tau_{MAX \text{ MOTOR } i} \vee \forall f_i(t^*) > \tau_{MAX \text{ MOTOR } i}$ , además de  $g_i^{-1}(5 \text{ Nm}, t^*)$  válida únicamente para  $\forall f_i(t^*) < \tau_{MAX \text{ MOTOR } i}$ .

La **fuerza convergente** radica en presionar a los individuos del método evolutivo a que éstos escalen las pendientes del pico de la figura (9.2); así, aquel individuo que se encuentre en un nivel superior tendrá una mayor posibilidad de reproducirse y transmitir sus genes a otros, mejorando su descendencia.

Por lo tanto, la solución está representada por aquel individuo que ha alcanzado la cima de la figura, esto es,  $t_f$  SOLUCIÓN para el cual  $t^* = t_s^* \in [0, t_f \text{ SOLUCIÓN}]$ , que es la duración del proceso más corta para la cual se alcanzan los 5 Nm, para una articulación del mejor manipulador y para un polinomio de grado 8 cuyo *índice*  $_m$  es el óptimo.

#### 9.4. FORMACIÓN DE GENOTIPOS

Como genotipos se usan cadenas binarias o cromosomas que representarán el valor real del tiempo de proceso,  $t_f$ . El tamaño de esta cadena depende de la precisión requerida.

El dominio de la variable  $t_f$ , en el rango de  $[t_{f \min}, t_{f \max}]$ , tiene una longitud de:

$$T_m = t_{f \max} - t_{f \min} \quad \text{E(9.8)}$$

La precisión se obtiene de la siguiente manera, dependiendo de número de posiciones después del punto decimal:

$$\text{precisión} = n - \text{esimas}; \quad \text{donde: } n = 1 \times 10^{pd}; \quad pd = 1, \dots, \quad \text{E(9.9)}$$

Esa precisión implica que el rango  $[t_{f \min}, t_{f \max}]$  debe ser dividida en:

$$n \text{div} T_{\min} = (T_m)(n) \quad \text{E(9.10)}$$

Esto significa que la cadena binaria que representa al cromosoma o genotipo debe tener  $k$  bits, esto es:

$$2^{k-1} < n \text{div} T_{\min} < 2^k \quad \text{E(9.11)}$$

### 9.4.1. FORMA PRIMITIVA DEL GENOTIPO

Así, el cromosoma estará representado por una cadena de la forma:

$$\langle b_{k-1}b_{k-2}\dots b_0 \rangle \quad E(9.12)$$

### 9.4.2. FORMA FINAL DEL GENOTIPO

La representación primitiva del genotipo del tiempo de proceso está dada por una cadena  $\langle b_{k-1}b_{k-2}\dots b_0 \rangle$ , ecuación E(9.12). Sin embargo, ésta depende de la longitud del dominio de  $t_f$ ,  $T_m$ , y de la precisión.

Una representación más acabada genotipo de  $t_f$  debe comprender esa información, tal que la transformación de genotipo a fenotipo, sección 9.5 siguiente, sea clara. Dicha representación empleada tendrá la forma siguiente:

$$\left( \left[ t_{f \min}, t_{f \max} \right] pd, \langle b_{k-1}b_k\dots b_0 \rangle \right) \quad E(9.13)$$

La ecuación E(9.13) es la forma final del genotipo de  $t_f$ .

## 9.5. FORMACIÓN DE FENOTIPOS

La transformación de la representación genotípica, a su respectivo fenotipo, se efectúa en dos pasos:

- Conversión de la cadena binaria  $\langle b_{k-1}b_{k-2}\dots b_0 \rangle$  de base 2 a base 10 mediante la siguiente ecuación E(9.14):

$$\left( \langle b_{k-1}b_k\dots b_0 \rangle \right)_2 = \left( \sum_{i=0}^{k-1} b_i 2^i \right)_{10} = t'_f \quad E(9.14)$$

- Valor real correspondiente mediante traslado puro de coordenadas:

$$t_f = t_{f_{min}} + t'_f \left( \frac{T_m}{2^k - 1} \right)$$

E(9.15)

## 9. 6. GENERALIZACIÓN A OTRAS ARTICULACIONES

El proceso de búsqueda del tiempo mínimo de proceso con la restricción del par motriz de la articulación  $i$  puede implicar que alguna otra articulación  $j$  haya superado el respectivo par del motor.

Entonces la generalización de la búsqueda del mejor tiempo de proceso consiste en determinar el tiempo mínimo en que ninguna articulación sobrepasa el límite de su respectivo motor. El procedimiento, entonces, debe encontrar tantos tiempos de proceso mínimos como articulaciones se tengan; la duración más corta es el tiempo de proceso mínimo más largo.

Así, un algoritmo de búsqueda general es:

### ALGORITMO 9.1

- Obtener  $t_{fi\text{ SOLUCIÓN}}$  para la articulación  $i$ .
- Si  $\tau_j(t_i^*) > \tau_{MAX\text{ MOTOR }j}$ ;  $t_i^* \in [0, t_{fi\text{ SOLUCIÓN}}]$ 
  - Entonces obtener  $t_{fj\text{ SOLUCIÓN}}$  para la articulación  $j$ ; éste será el tiempo de proceso más corto.
  - Si no,  $t_{fi\text{ SOLUCIÓN}}$  es el tiempo de proceso más corto.

Este algoritmo se puede generalizar a más articulaciones.

# CAPÍTULO 10

## EXPERIMENTACIÓN

### 10.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos precedentes se han dado los marcos teóricos referentes al manipulador y a la trayectoria, y la metodología del mejoramiento del tiempo de proceso.

Este capítulo presenta la experimentación desarrollada; para esto, se ha diseñado un experimento tendiente a determinar las variaciones que deben sufrir la cadena cinemática y el perfil de trayectoria necesarios para mejorar el desempeño del manipulador para una tarea específica.

El objetivo principal es determinar la productividad máxima a partir del mejoramiento simultáneo del manipulador y la trayectoria, con la restricción de par máximo entregado por los motores.

Al final, se resumen los resultados y se discuten para su conclusión.

En la búsqueda de las condiciones óptimas se emplean dos métodos:

1. Algoritmos Genéticos.
2. Búsqueda directa no dirigida, llamada, en este trabajo como Método Alternativo, que consiste en la propagación de la búsqueda a través de todo el espacio, variable por variable.

Al final, se comparan los resultados de ambos métodos para confirmar la solución.

#### 10.1.1. MÉTODO DE ALGORITMOS GENÉTICOS

Este método es el elegido debido a su robustez, **Beasley (1993a, 1993b)**, y a su poder para atacar problemas sujetos a varias variables y de múltiples modos (muchos picos), **De Jong (1992)**. Además, es un proceso autodirigido que garantiza un acercamiento aceptable a la solución y se puede combinar con otros métodos, **Goldberg (1989)**.

En el experimento se define la función objetivo a maximizar y se prosigue con el ciclo básico en todo algoritmo genético, **Spillman (1993)**, también llamado por **De Jong (1992)** como Algoritmo Genético Canónico, figura (10.1) que consiste en:

1. Formación de la población inicial.
2. Evaluación de la generación.
3. Reproducción de los individuos más aptos.
4. Cruce y transmisión de la genética a la nueva generación.
5. Mutación que previene la pérdida de riqueza genética sobre la nueva generación.
6. Repetición del proceso desde el paso 2 hasta alcanzar la solución.

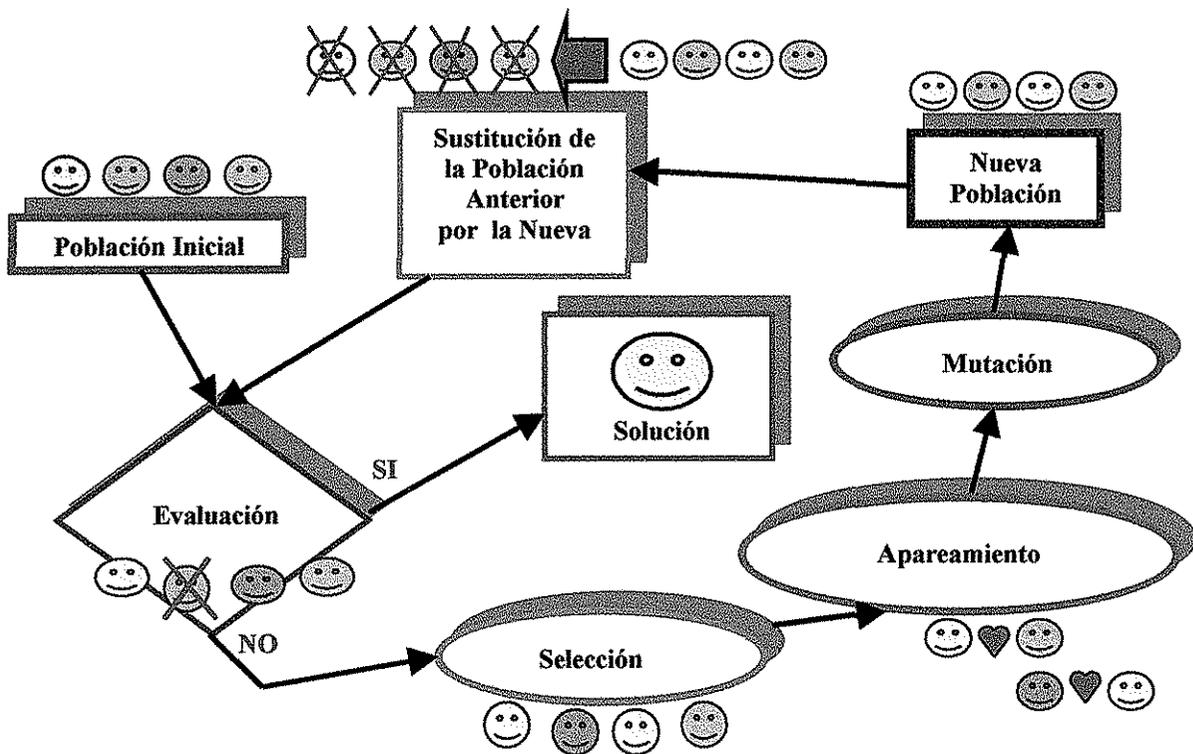


Figura (10.1). Ciclo básico del Algoritmo Genético Canónico.

Para los propósitos de este trabajo, es necesario recordar que, para encontrar la máxima productividad, se requiere la combinación de las 5 variables presentadas en la tabla (10.1).

Variable 1	Variable 2	Variable 3	Variable 4	Variable 5
Longitud del primer eslabón rotativo: $l_1$	Longitud del segundo eslabón rotativo: $l_2$	Longitud del tercer eslabón rotativo: $l_3$	índice_m	Tiempo de proceso, $t_f = t_{\text{proceso}}$

Tabla (10.1). Variables empleadas en la mejora de la productividad.

Las primeras dos variables definidas en la tabla (10.1) se relacionan mediante el número  $re_{23}$  cuando se define claramente la semejanza  $n=480$  mm y la longitud  $l_3$  variante, esto es, la propagación de la búsqueda en las familias **FUTJSmi,nj** y **FUNuJSmi,nj**, para  $j=\text{constante}$ .

Los objetivos y la restricción son:

<b>Objetivo</b>	Maximizar la productividad
<b>Restricción</b>	Par máximo entregado por los motores

Tabla (10.2). El objetivo y la restricción.

### 10.1.2. MÉTODO ALTERNATIVO

El segundo método se puede explicar de la siguiente manera.

Si se tienen  $q$  espacios de búsqueda, correspondientes a las variables que permiten el mejoramiento, tabla (10.3), la solución se encuentra determinando el mínimo o el máximo de la cualidad que se quiere mejorar variando uno de los espacios a la vez, elemento por elemento, y dejando fijos los otros, hasta que todos los espacios han sido recorridos. Este método, que no es de carácter autodirigido como el algoritmo genético, consume mucho tiempo de búsqueda ya que tiene que barrer todos los espacios que, dependiendo de la precisión, pueden ser muy grandes, figura (10.2). Sin embargo, entrega un resultado que puede ser mucho más cercano a la solución, a diferencia del primer método.

Variables del SISTEMA	Espacio de Búsqueda
A1	$A1 \in [A1_{\min}, A1_{\max}]$
A2	$A2 \in [A2_{\min}, A2_{\max}]$
...	
An	$Aq \in [Aq_{\min}, Aq_{\max}]$

Tabla (10.3). Espacios de búsqueda

Así, el mejor sistema es aquel que combina las mejores variables de cada espacio, tabla(10.4), y que maximizan la calidad deseada.

<b>SISTEMA<sub>óptimo</sub></b>	$A1_{óptimo} \Leftrightarrow A2_{óptimo} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Aq_{óptimo}$
---------------------------------	---

Tabla (10.4). Mejor sistema.

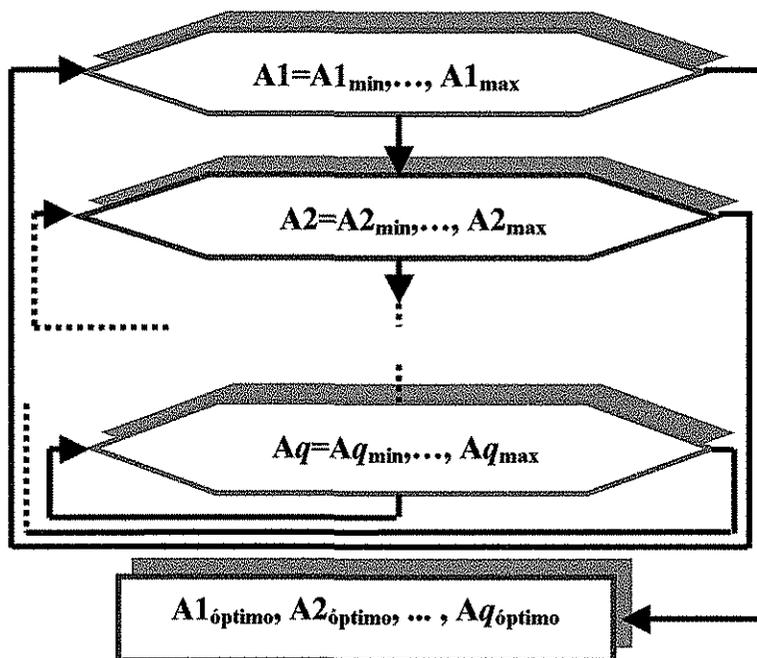


Figura (10.2). Método de búsqueda alternativo.

### 10.1.3. DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

Para llevar a cabo el experimento, se procede con los pasos siguientes:

1. Se escoge una tarea cualquiera y se introducen los datos primarios de un manipulador: densidades de los materiales de los eslabones, ancho y espesores de éstos, etc. dejando, como variables, las longitudes de los tres eslabones rotativos.



2. Se definen los espacios de búsqueda de las variables involucradas.
3. Se definen los parámetros del algoritmo genético: constitución del individuo, longitud de los cromosomas de las cadenas constitutivas del individuo, número de individuos de las poblaciones, número de puntos de cruce, índice de mutación, parámetros de paro del algoritmo y entrega de resultados, etc.
4. Definición clara de las funciones por maximizar (funciones objetivo).
5. Empleando los algoritmos genéticos, se procede con varias evaluaciones y se obtiene la mejor que será comparada con el resultado correspondiente al método alternativo para confirmar y probar la veracidad de la solución.
6. Determinado el mejor manipulador y la mejor trayectoria, se procede a definir la productividad máxima posible.

#### 10.1.4. ¿CÓMO TRABAJA EL ALGORITMO GENÉTICO?

Para explicar cómo trabaja el algoritmo genético en este trabajo, es conveniente dar una definición antes.

##### DEFINICIÓN 10.1

El **Costo de Pares Motrices Máximos** se puede definir como la diferencia de la magnitud del par motriz de pico máximo y del par motriz de los picos de menor magnitud, manteniendo constante el tiempo de proceso. Este costo depende tanto del manipulador como de la trayectoria

□

En la figura (10.3) se presentan las historias de los pares motrices de una de las articulaciones de dos manipuladores comunes con el genérico PRRRd y parcialmente semejantes con  $n$ , pero diferentes en las longitudes de sus eslabones.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

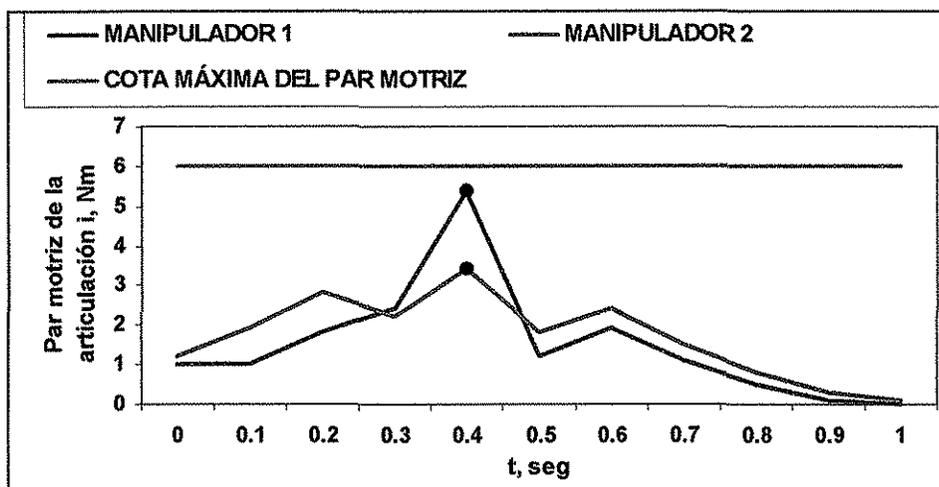


Figura (10.3). Distribución del par de dos manipuladores diferentes con tiempo de proceso igual y mismo perfil de trayectoria.

Según la figura (10.3), se observa que los pares motrices del manipulador 2 están mejor distribuidos (tiene un costo menor del par motriz máximo) que los correspondientes al manipulador 1. El que estos pares estén mejor distribuidos significa que la diferencia de magnitud entre el pico máximo y los más pequeños es menor en comparación con una distribución inferior (DEFINICIÓN 10.1). En ambos casos el tiempo de proceso y el perfil de trayectoria es el mismo, además ninguno de los dos ha alcanzado la cota máxima proporcionada por los motores de las articulaciones.

Esto quiere decir que el manipulador 2, que tiene la mejor distribución de par motriz, desarrolla menor tiempo de proceso para que su pico máximo alcance la cota máxima, mientras que el manipulador 1, con peor distribución, lo hará en un tiempo de proceso mayor. Esto se explica en la gráfica de la figura (10.4), en donde la evolución del manipulador 2 tenía mayor libertad para “crecer en par motriz” al ser mayormente “aplastada en el tiempo”.

Aquí se habló solamente del manipulador, sin embargo, y en lo que respecta a la trayectoria, también existen unas que distribuyen mejor el par motriz máximo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

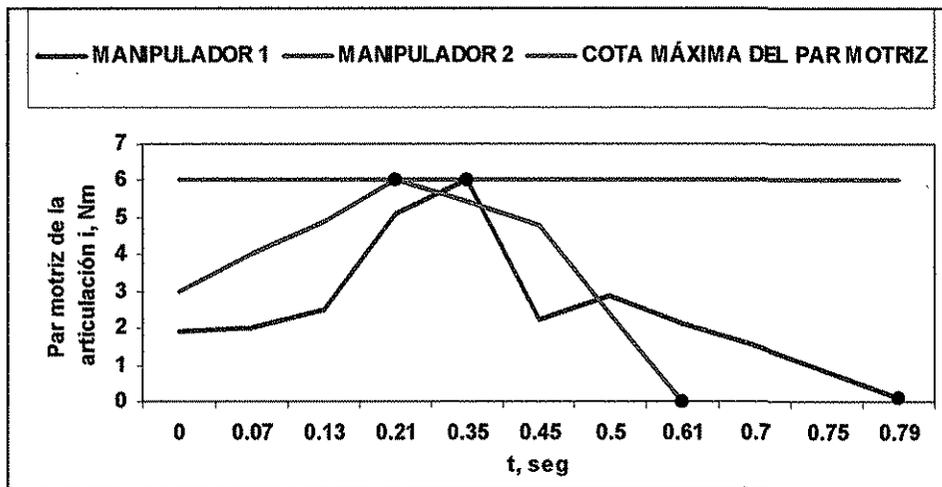


Figura (10.4). Distribución del par de dos manipuladores diferentes con tiempos de proceso diferentes y mismo perfil de trayectoria.

El algoritmo genético trabaja, entonces, “jalando” los picos máximos hacia los límites de los pares entregados por los motores moviendo las longitudes de los eslabones y cambiando la trayectoria, “aplastando”, simultáneamente, el tiempo de proceso.

Esto se logra haciendo que los individuos se adapten a esas condiciones exigidas, de otra manera, serán desplazados por individuos más aptos. La maximización de las funciones  $g_i(*,*)$  y  $g_i^{-1}(*,*)$  es precisamente esa presión externa.

Esta metodología se puede aplicar para cualquier otra tarea y cualquier conjunto diferente de datos del manipulador.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 10.2 EXPERIMENTO PRINCIPAL

### NOMBRE DEL EXPERIMENTO

**“Determinación de la Máxima Productividad del Transporte de Discos de Silicio Mediante un Manipulador PRRRd y una Trayectoria de Grado 8”**

### OBJETIVOS

- Encontrar el mejor manipulador que proporciona la mayor productividad del transporte de discos de silicio.
- Encontrar el mejor perfil de trayectoria, basado en un polinomio de grado 8, que proporciona la mayor productividad del transporte de discos de silicio.
- Indicar la máxima productividad.

### DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

**Parte 1:** Existe una Familia universal de manipuladores,  $MAN_U$ , basada en un manipulador genérico PRRRd que contiene una cadena cinemática particularizada por las longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$ , que proporciona la mayor velocidad de transporte de discos de silicio.

**Parte 2:** También se tiene un perfil de trayectoria basado en un polinomio de grado 8, que pertenece a  $FUP^8(*,*)$ , que es el que permite que el sistema mecánico sea el más rápido.

Se supone que los mejores de estas parte proporcionan, en conjunto, la máxima productividad, con la restricción del par motriz máximo de cada articulación.

El problema es el siguiente:

**¿Cuál es el mejor manipulador y la mejor trayectoria que proporcionan la mayor productividad sin sobrepasar los pares motrices máximos de las articulaciones?**

## ESTABLECIMIENTO DE HIPÓTESIS

- Se sospecha que el manipulador PRRRd más productivo es uno cuyos dientes de Tornillo J y Tuerca J son del tipo 1.
- El perfil de trayectoria más productivo es diferente al de los extremos de la existencia del índice  $m \in [1.458334, 2.1875]$ .
- Se sospecha que la máxima productividad es posible si se tienen el mejor manipulador de la familia MAN<sub>U</sub> y la mejor trayectoria de la familia FUP<sup>8</sup>(\*,\*).

### Razones en las que se basa el establecimiento de hipótesis:

- Respecto de la primera hipótesis, los resultados sobre las eficiencias de los tornillos y las tuercas indican que los mejores son los del tipo 1, **TEOREMA 6.2** y **TEOREMA 6.5**. Estas eficiencias indican que el manipulador tiene mayor facilidad para “fluir” o moverse dentro del volumen de trabajo. Los trabajos de Nakamura (1991) y Yoshikawa (1985) fortalecen las sospechas.
- Respecto de la segunda hipótesis, el índice  $m$  inferior es muy violento al inicio y fin del recorrido y muy suave en posiciones intermedias, mientras que el índice  $m$  mayor es muy suave al inicio y fin, pero muy violento en la región intermedia. Esto no es una buena distribución de velocidad y, al mismo tiempo, de suavidad.

## PRUEBA DE LA HIPÓTESIS

### Condiciones del experimento

- **Lugar geométrico de la trayectoria:** una recta comprendida entre los puntos  $p_1(400 \text{ mm}, 0, 100 \text{ mm})$  y  $p_2(0, 400 \text{ mm}, 100 \text{ mm})$ , figura (10.2.1).
- **Perfil de trayectoria:** un polinomio de grado 8 que se pretende determinar mediante un valor del índice  $m \in [1.458334, 2.1875]$ .
- **Manipulador:** con longitudes  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_3$  por determinar y valores primarios mostrados en la tabla (10.2.2).
- **Límites de los pares motrices:** En la tabla (10.2.1) se presentan los límites de los pares ofrecidos por los actuadores de las dos articulaciones rotativas.

	<b>Motor articulación 2</b>	<b>Motor articulación 3</b>
<b>Par motriz máximo</b>	<b>0.01 Nm</b>	<b>0.01 Nm</b>

Tabla (10.2.1). Pares motrices máximos de los motores de las articulaciones involucradas.

<b>Eslabón 1</b>	$r_{esl1}$		$h_{esl1}$		<b>Material</b>
	15 mm		150 mm		Aluminio
<b>Eslabón <math>i=2</math></b>	$e_{i-1}$	$a_{i-1}$	$l_{i-1}$	$\Delta l_{i-1}$	<b>Material</b>
	5 mm	15 mm	Por determinar	0	Aluminio
<b>Eslabón <math>i=3</math></b>	5 mm	15 mm	Por determinar	0	Aluminio
<b>Eslabón <math>i=4</math></b>	5 mm	15 mm	Por determinar	0	Aluminio

Tabla (10.2.2). Características primarias del manipulador.

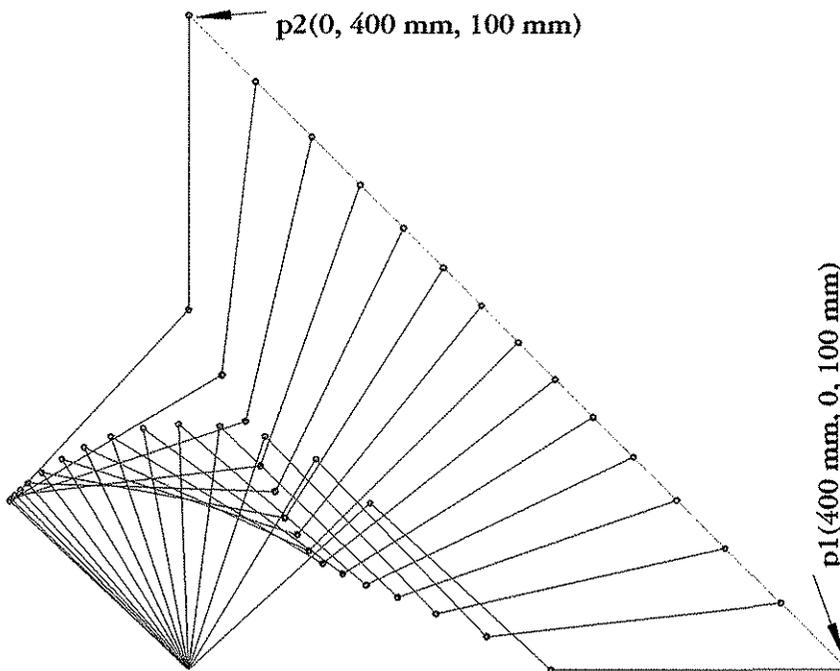


Figura (10.2.1). Lugar geométrico de la trayectoria.

**Estrategia de prueba****ESTRATEGIA 1.**

Esta estrategia emplea un algoritmo genético como método de búsqueda. En el anexo se presenta una descripción más detallada del proyecto de búsqueda evolutiva denominado como “**Buscador Evolutivo de la Mejor Productividad**”. Allí se presentan las partes constitutivas de un individuo  $n$  de una población cualquiera; éstas son:

$$\text{Individuo}(n) = \langle \langle \text{re}_{23} \rangle \langle l_3 \rangle \langle \text{índice\_m} \rangle \langle t_{\text{proceso}} \rangle \rangle \quad \text{E(A.3.1)}$$

La descripción de los segmentos o cadenas parciales de los individuos, además de los parámetros del algoritmo genético se presentan a continuación:

- Cadena  $\langle \text{re}_{23} \rangle$ :

Éste es uno de los agentes de exploración de las familias de los Tornillos J y las Tuercas J visto en el capítulo 7. Tiene que ver con la relación de longitudes entre los eslabones 2 y 3,  $l_1$  y  $l_2$ .

□ **Espacio de búsqueda:**  $\text{re}_{23} \in [0.8, 1.25]$

□ **Número de genes:** 13 (número obtenido para una precisión de cuatro lugares decimales mediante la siguiente relación  $2^{12} \leq (1.25 - 0.8) * 1 \times 10^4 \leq 2^{13}$ )

□ **Cadena genotípica:**  $\langle [0.8, 1.25], 4, \langle b_{12} b_{11} b_{10} b_9 b_8 b_7 b_6 b_5 b_4 b_3 b_2 b_1 b_0 \rangle \rangle$

- Cadena  $\langle l_3 \rangle$ :

Éste es el agente que permitirá explorar la longitud del último eslabón, también visto en el capítulo 7.

□ **Espacio de búsqueda:**  $l_3 \in [0.04\text{m}, 0.18\text{m}]$

□ **Número de genes:** 11 (número obtenido para una precisión de cuatro lugares decimales mediante la siguiente relación  $2^{10} \leq (0.18 - 0.04) * 1 \times 10^4 \leq 2^{11}$ )

□ **Cadena genotípica:**  $\langle [0.04, 0.18], 4, \langle c_{10} c_9 c_8 c_7 c_6 c_5 c_4 c_3 c_2 c_1 c_0 \rangle \rangle$

- Cadena (índice  $m$ ):

Esta cadena se modifica constantemente para explorar el espacio de búsqueda de la trayectoria polinomial de grado 8, tomando un valor de índice  $m \in [1.458334, 2.1875]$ , capítulo 8.

□ **Espacio de búsqueda:** índice  $m \in [1.458334, 2.1875]$

□ **Número de genes:** 20 (número obtenido para una precisión de seis lugares decimales mediante la siguiente relación  $2^{19} \leq (2.1875 - 1.458334) * 1 \times 10^6 \leq 2^{20}$ )

□ **Cadena genotípica:**  $\langle [1.458334, 2.1875], 6, \langle d_{19} d_{18} d_{17} \dots d_0 \rangle \rangle$

- Cadena ( $t_{\text{proceso}}$ ):

Esta cadena es la variable que toma el tiempo de proceso. Al final, éste proporcionará el tiempo más corto posible de viaje del órgano terminal del manipulador sin que se sobrepasen los pares motrices máximos de las articulaciones, pero también se aprovechen al máximo sus capacidades, capítulo 9.

□ **Espacio de búsqueda:**  $t_f \in [0.0001 \text{ seg}, 10.0000 \text{ seg}]$

□ **Número de genes:** 17 (número obtenido para una precisión de cuatro lugares decimales mediante la siguiente relación  $2^{16} \leq (10.0 - 0.0001) * 1 \times 10^4 \leq 2^{17}$ )

□ **Cadena genotípica:**  $\langle [0.0001, 10.0000], 4, \langle e_{16} e_{15} e_{14} \dots e_0 \rangle \rangle$

- Número de individuos en todo el espacio de búsqueda:

**1189888** (valor obtenido de la longitud de cada una de las cadenas anteriores  $2^{13} + 2^{11} + 2^{20} + 2^{17}$ ).

- Número de puntos de cruce:

4 distribuidos uno por cada cadena (el módulo **CRUZADOR** en el anexo A, sección A.7, describe este cruzamiento).

- Tamaño de la población:

Constante de 100 individuos (el módulo **POBLACIÓN INICIAL** en el anexo A, sección A.3, describe el tamaño de la población).

- Índice de mutación:

2 genes mutados por cada 2000 transferidos (el módulo **MUTADOR** en el anexo A, sección A.8, ofrece detalles).

- Dirección del algoritmo genético:

La presión de los individuos de la población de cada generación se ejerce mediante al maximización de las funciones:

$$\begin{cases} g_i(*, *); \quad \forall f_i(t^*) > \tau_{MAX\ MOTORI}; & i = 2,3 \\ g_i^{-1}(*, *); \quad \forall f_i(t^*) < \tau_{MAX\ MOTORI} \end{cases} \quad \text{E(9.6 y 9.7)}$$

Este direccionamiento tiende a jalar los “picos” mayores de los pares motrices hacia las cotas que son los límites de los pares ofrecidos por los motores, “aplastando”, simultáneamente, el tiempo.

- Paro del algoritmo genético y entrega del resultado:

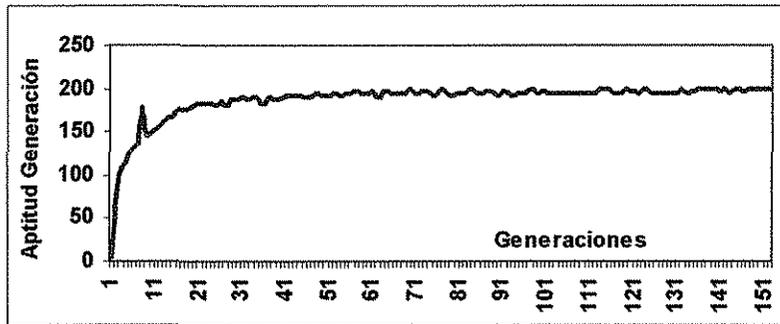
El algoritmo genético se detiene y entrega el resultado cuando la diferencia de calificación entre el primer y el último individuo de una pila ordenada, que va almacenando los 50 mejores individuos de las generaciones ocurridas, es menor a 0.0001.

El resultado es el individuo con mayor calificación contenido en esa pila.

- Resultados de la estrategia evolutiva:

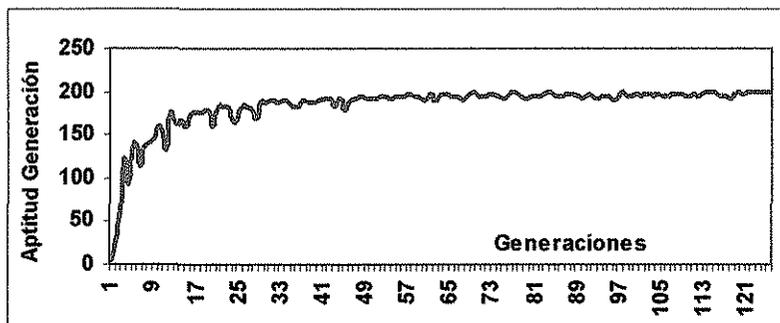
En las figuras (10.2.2), (10.2.3), (10.2.4) y (10.2.5) se presentan las evoluciones de las generaciones de cuatro evaluaciones y sus respectivos resultados.

Se puede observar que la evaluación número 4 (figura (10.2.5)) arroja la mayor aptitud o calificación de su mejor individuo, además de presentar el tiempo de proceso más corto; esta comparación puede verse en la tabla (10.2.3).



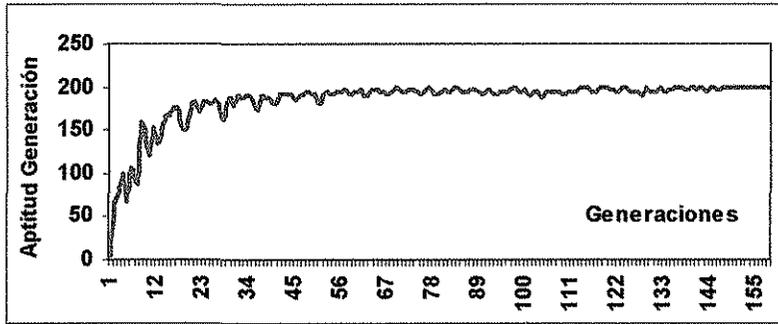
Evaluación	$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo Proceso [seg]	Máxima aptitud individuo	Máxima aptitud generación	Generación de convergencia
primera	0.9932	171.7	172.9	135.4	1.665181	0.9501	1.99027/2	198.8157	152
Par motriz máximo articulación 1 [Nm]					Par motriz máximo articulación 2 [Nm]				
0.00998534914803109					.00991732313607727				

Figura (10.2.2). Evolución de las generaciones correspondiente a la primera evaluación de la estrategia evolutiva.



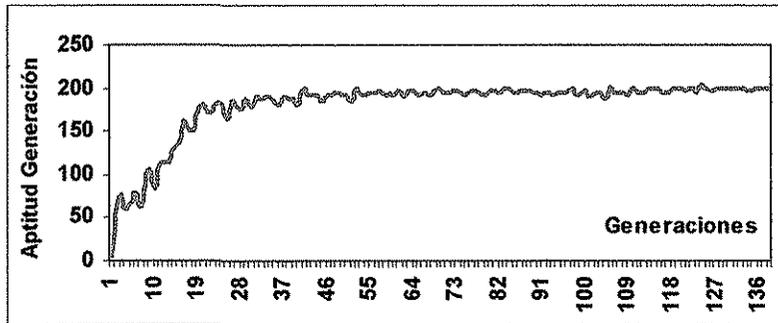
evaluación	$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	tiempo proceso [seg]	máxima aptitud individuo	máxima aptitud generación	generación de convergencia
segunda	0.9940	171.6	172.7	135.7	1.661	0.9497	1.9911/2	199.00997	125
Par motriz máximo articulación 1 [Nm]					Par motriz máximo articulación 2 [Nm]				
0.009994286229					.009916633813				

Figura (10.2.3). Evolución de las generaciones correspondiente a la segunda evaluación de la estrategia evolutiva.



Evaluación	$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	indice_m	Tiempo Proceso [seg]	Máxima aptitud individuo	Máxima aptitud generación	Generación de convergencia
tercera	1.0041	172.6	171.9	135.5	1.661	0.9499	1.98777/2	197.99	158
Par motriz máximo articulación 1 [Nm]					Par motriz máximo articulación 2 [Nm]				
0.009990516608284					.009887133496				

Figura (10.2.4). Evolución de las generaciones correspondiente a la tercera evaluación de la estrategia evolutiva.



Evaluación	$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	indice_m	Tiempo Proceso [seg]	Máxima aptitud individuo	Máxima aptitud generación	Generación de convergencia
cuarta	0.9930	171.7	172.9	135.4	1.665989	0.9496	1.9920/2	199.198	138
Par motriz máximo articulación 1 [Nm]					Par motriz máximo articulación 2 [Nm]				
0.00999588196369393					.00992412383102754				

Figura (10.2.5). Evolución de las generaciones correspondiente a la cuarta evaluación de la estrategia evolutiva.

	Evaluación 1	Evaluación 2	Evaluación 3	Evaluación 4
<b>Aptitud mejor individuo</b>	1.99027/2	1.9911/2	1.98777/2	<b>1.9920/2</b>
<b>Tiempo de proceso [seg]</b>	0.9501	0.9497	0.9499	<b>0.9496</b>

**Tabla (10.2.3).** Comparación de las cuatro evaluaciones del proceso evolutivo. La mejor corresponde a la cuarta corrida del programa

Tomando el mejor individuo de la mejor corrida se puede sospechar que la solución se encuentra en los alrededores del resultado de la cuarta evaluación, tabla (10.2.4).

$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo Proceso [seg]
0.9930	171.7	172.9	135.4	1.665989	<b>0.9496</b>

**Tabla (10.2.4).** Mejor individuo entregado por el proceso evolutivo.

## ESTRATEGIA 2.

¿Cómo se puede confirmar el resultado anterior?

Éste es el objetivo de la estrategia 2 que emplea el método alternativo de búsqueda directa no dirigida, descrito en la introducción de este capítulo. Cada una de las variables  $re_{23}$ ,  $l_3$  e  $índice\_m$  se moverá en su respectivo espacio de búsqueda, vecindad a la solución de la cuarta evaluación, figura (10.2.6).

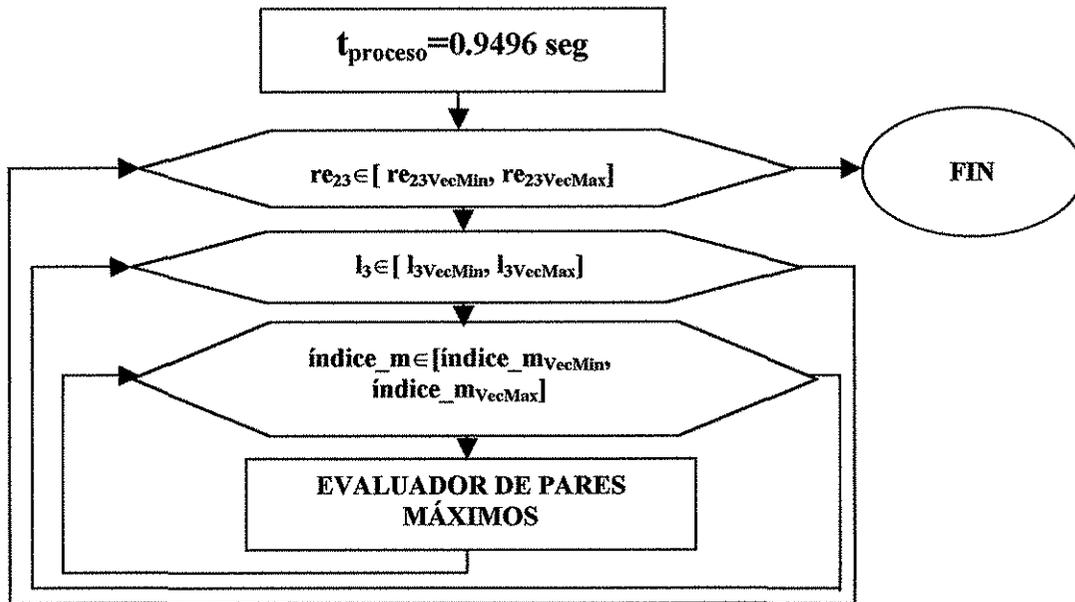


Figura (10.2.6). Método alternativo o de búsqueda directa no dirigida

Respecto del tiempo de proceso, éste se dejará fijo en 0.9496 seg, debido a que es el mejor tiempo entregado en el proceso evolutivo anterior. La razón de esta consideración se basa en el hecho de que este proceso es muy tardado como para ampliar el espacio de búsqueda, la **DISCUSIÓN 6** de la sección 10.3.6 explica esta consideración.

El propósito es encontrar el mínimo más pequeño de los pares motrices de las articulaciones involucradas para el tiempo de 0.9496 seg. y a qué valores de  $re_{23}$ ,  $l_3$  e  $índice\_m$  corresponde este mínimo.

Una vez determinado el mínimo se procederá a la disminución del tiempo hasta que el punto alcance el valor de la cota del par motriz correspondiente.

Esta estrategia entregó los resultados descritos en la tabla (10.2.5). Además, las figuras (10.2.7), (10.2.8), (10.2.9) y (10.2.10) muestran los movimientos de los pares motrices y de las variables involucradas en las vecindades de la solución.

$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo Proceso [seg]
0.9927	171.6688	172.9312	135.4	1.666	0.9496

**Tabla (10.2.5).** Resultado entregado por el proceso alternativo de búsqueda directa no dirigida empleado en la estrategia 2.

La figura (10.2.7) muestra el mínimo más pequeño de par motriz máximo que puede alcanzar la primera articulación rotacional correspondiente al manipulador y a la trayectoria descritos en la tabla (10.2.5). Ahí se puede observar que, para el tiempo de proceso fijo de 0.9496 seg., no se ha alcanzado la cota de máxima del par del motor de esa articulación, sin embargo, este valor está muy cercano a ese límite. En la figura (10.2.8) se observa que la articulación 3 tampoco ha sobrepasado su respectivo límite.

Esto indica que el valor del tiempo de proceso puede ser disminuido aún más hasta que dicho mínimo alcance la cota máxima.

Para probar que este mínimo es el más pequeño, se puede proceder de la siguiente manera.

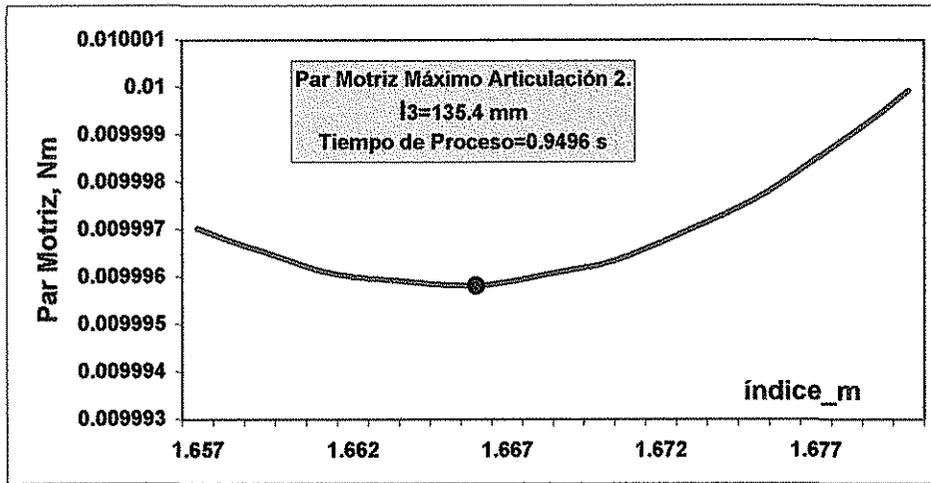
Un pensamiento muy sencillo que puede ayudar a probar que este mínimo es el más pequeño es el siguiente:

*“Estando en el fondo lo único que queda es subir”.*

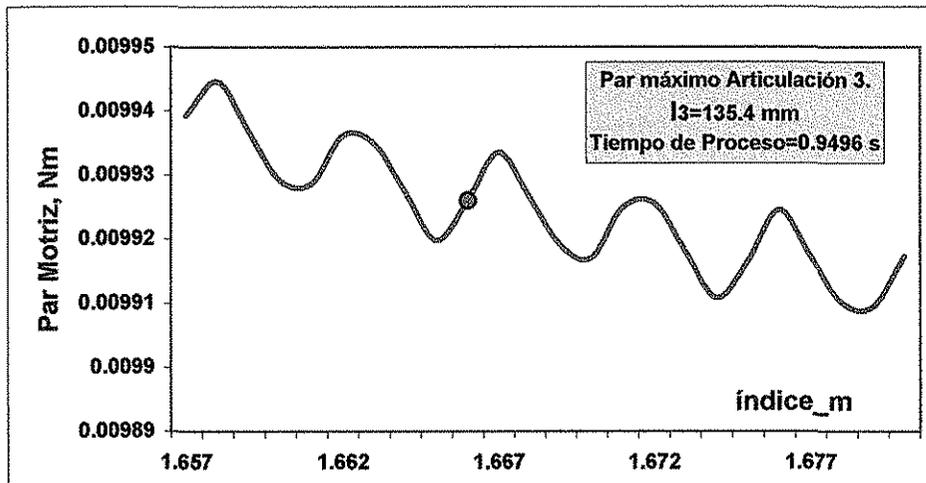
El proporcionar valores de  $re_{23}$ ,  $l_3$  e índice\_m en cualquier dirección a partir de la solución, el resultado arrojará una magnitud mayor del par motriz.

En las figuras (10.2.11) y (10.2.12) se presentan los mínimos del par motriz de la segunda articulación para diferentes manipuladores y diferentes trayectorias muy cercanos a la solución, a la izquierda y derecha, respectivamente. Ahí se observa que el mínimo “más mínimo” corresponde a  $l_3=135.4$  mm y un índice\_m=1.666.

Las figuras (10.2.13), (10.2.14) y (10.2.15) reportan la variación del par motriz correspondiente a la tercer articulación y para el tiempo de proceso de 0.9496 seg. Se observa que dicho par motriz está acotado al límite de las capacidades del respectivo motor.



**Figura (10.2.7).** Par motriz máximo más pequeño posible correspondiente a la segunda articulación, 0.0099958181 Nm. Manipulador:  $re_{23}=0.9927$  ( $l_1=171.6688\text{mm}$  y  $l_2=172.9311989\text{mm}$ ),  $l_3=135.4\text{ mm}$ , trayectoria: índice\_m=1.666, Tiempo de proceso=0.9496 s



**Figura (10.2.8).** Variación del par motriz máximo correspondiente a la tercer articulación en las vecindades de la solución. Para el valor más pequeño de la segunda articulación (figura ) se tiene un valor de 0.0099260000 Nm. Manipulador:  $re_{23}=0.9927$  ( $l_1=171.6688\text{mm}$  y  $l_2=172.9311989\text{mm}$ ),  $l_3=135.4\text{ mm}$ , Tiempo de proceso=0.9496 s

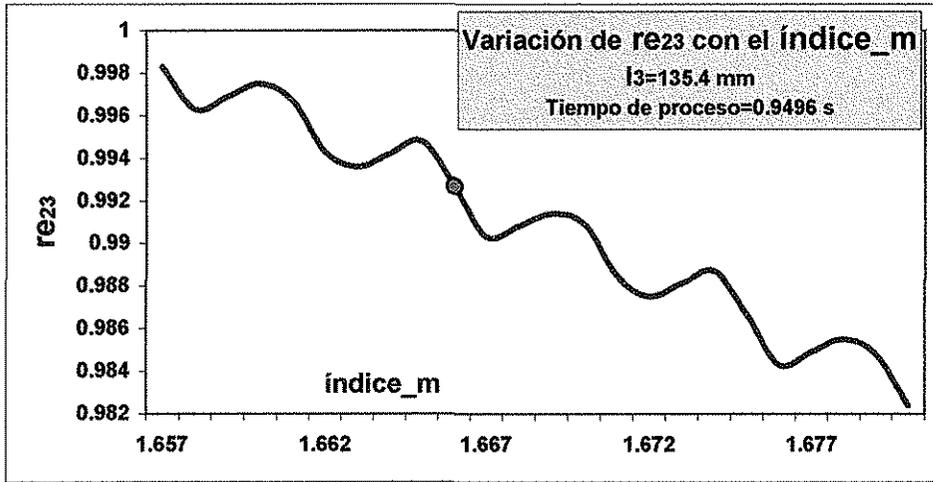


Figura (10.2.9). Variación de la relación de eslabonamiento en función de índice\_m. Éste alcanza un valor de  $re_{23}=0.9927$  para índice\_m=1.666, y para el manipulador cuya longitud de su último eslabón es  $l_3=135.4$ mm.

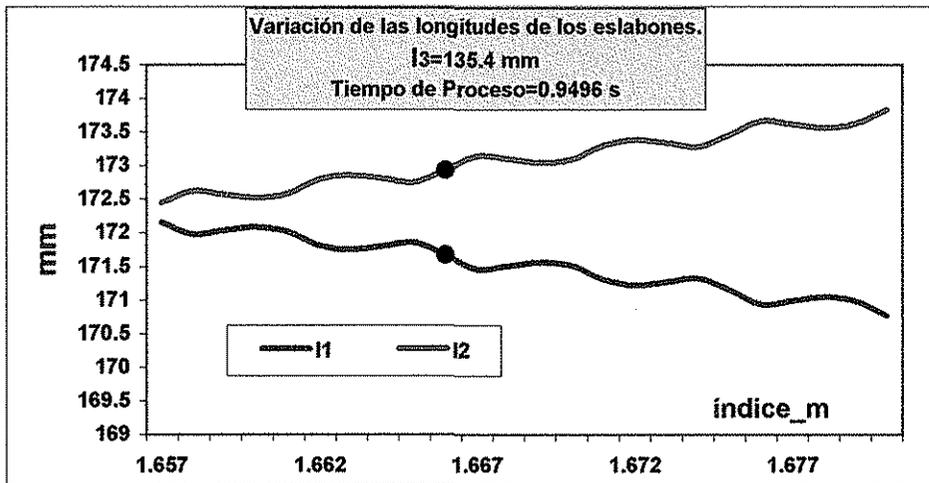


Figura (10.2.10). Variación de las longitudes de los eslabones en función de índice\_m. Éstos alcanzan un valor de  $l_1=171.6688$ mm y  $l_2=172.9311989$ mm para índice\_m=1.666, y para el manipulador cuya longitud de su último eslabón es  $l_3=135.4$ mm.

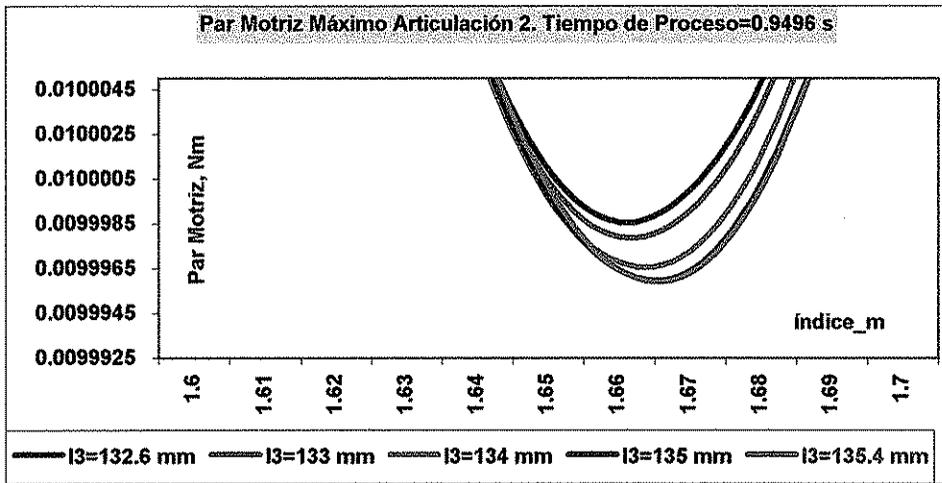


Figura (10.2.11). Variación del par motriz máximo en función de la trayectoria en la vecindad izquierda de  $l_3$  correspondiente a la solución y para un tiempo de proceso de 0.9496 seg.

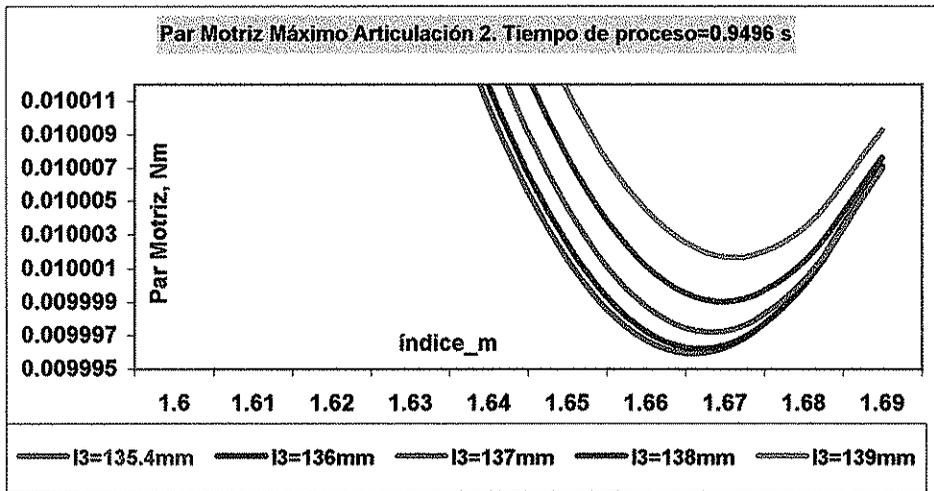


Figura (10.2.12). Variación del par motriz máximo en función de la trayectoria en la vecindad derecha de  $l_3$  correspondiente a la solución y para un tiempo de proceso de 0.9496 seg.

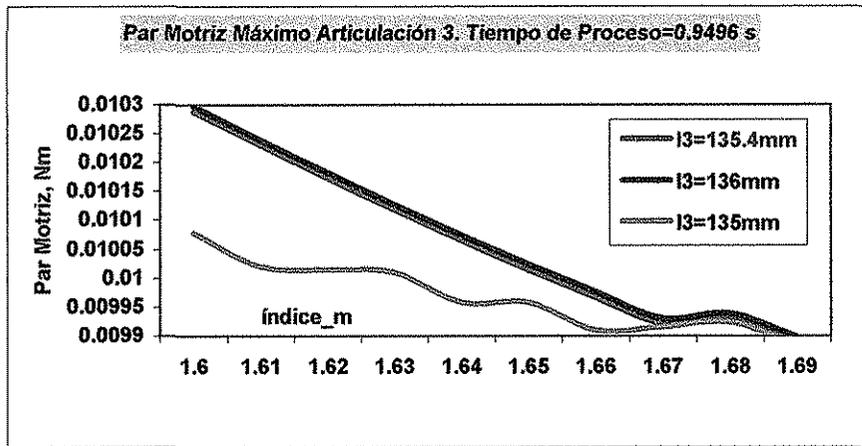


Figura (10.2.13). Variación del par motriz máximo de la tercer articulación en función de la trayectoria en la vecindad derecha e izquierda de  $l_3$  correspondiente a la solución y para un tiempo de proceso de 0.9496 seg.

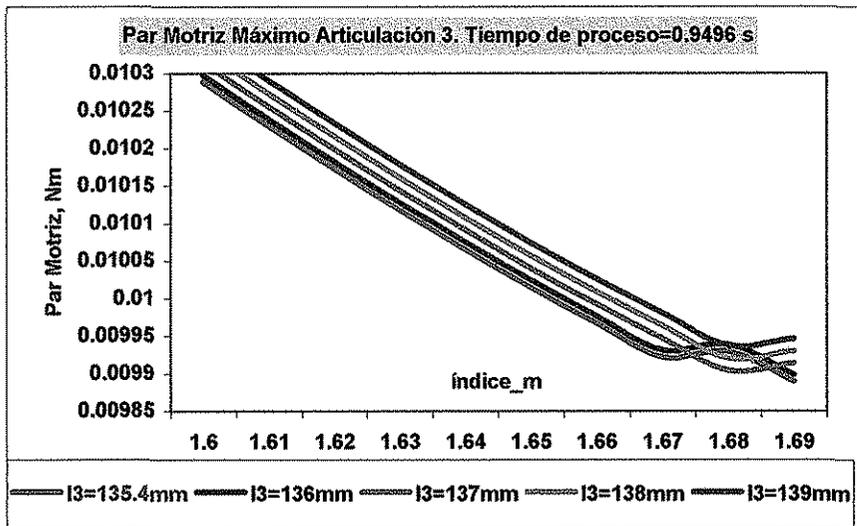


Figura (10.2.14). Variación del par motriz máximo de la tercer articulación en función de la trayectoria en la vecindad izquierda de  $l_3$  correspondiente a la solución y para un tiempo de proceso de 0.9496 seg.

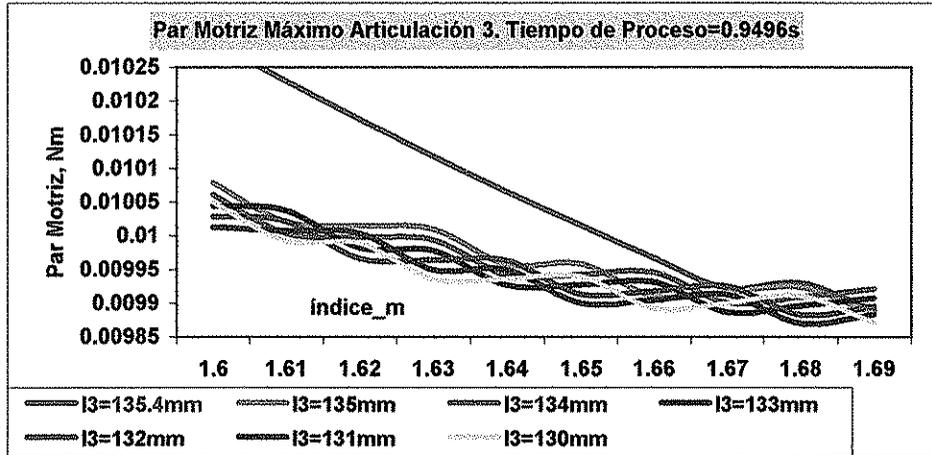
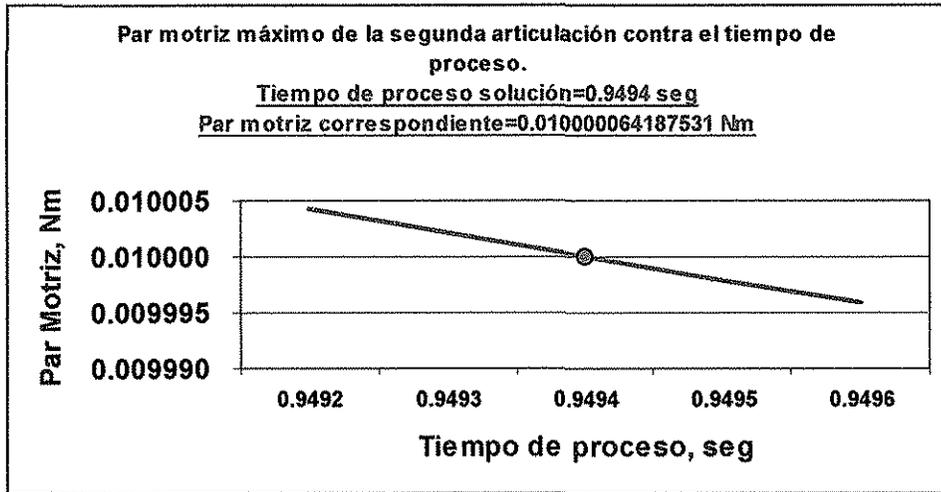


Figura (10.2.15). Variación del par motriz máximo de la tercer articulación en función de la trayectoria en la vecindad derecha de  $l_3$  correspondiente a la solución y para un tiempo de proceso de 0.9496 seg.

En los resultados correspondientes al tiempo de proceso de 0.9496 seg. se pudo observar que aún no se alcanzaban los límites de los pares motrices de las articulaciones 2 y 3. Esto significa que todavía se puede disminuir el tiempo de proceso. La figura (10.2.16) muestra la variación del par máximo de la articulación 2, y se observa claramente que la solución se encuentra en las vecindades muy cercanas de 0.9494 seg.

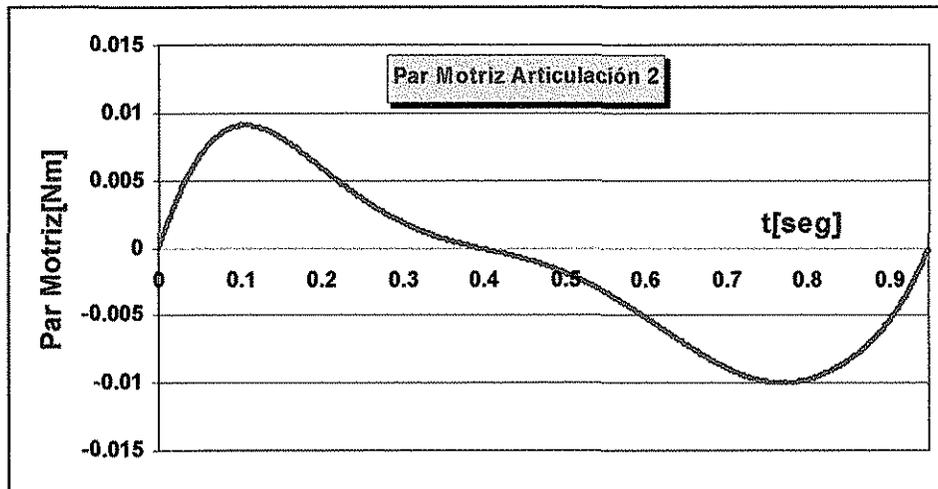
Por lo tanto, éste es el tiempo de proceso más corto en el cual se alcanza el par motriz máximo permitido por el actuador de la articulación 2.

Las figuras (10.2.17), (10.2.18) y (10.2.19) muestran las evoluciones de los pares motrices de las dos articulaciones independientes. Se observa claramente que los picos máximos están muy próximos a los límites de los respectivos motores lo que confirma que el tiempo de proceso de 0.9494 es el más corto posible y sólo puede alcanzarse con el manipulador y la trayectoria descritos en la tabla (10.2.5).



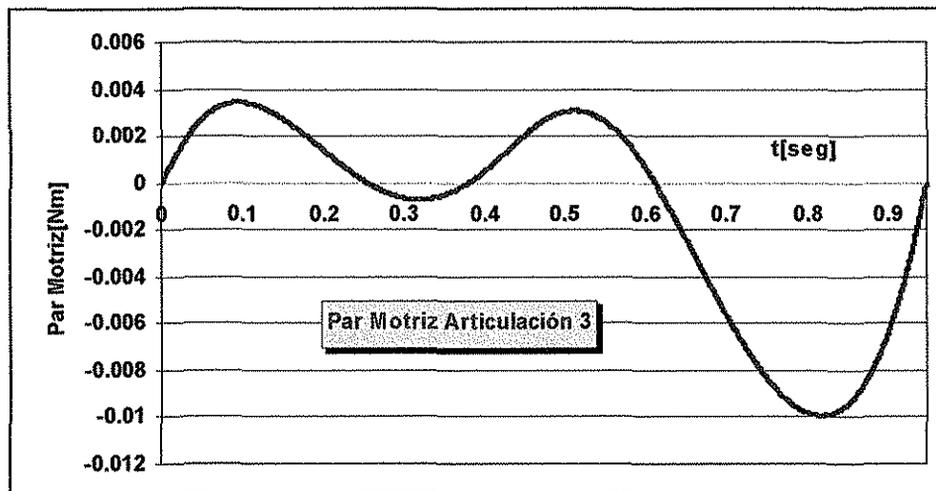
$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo de proceso[seg]
0.9927	171.6688011	172.9311989	135.4	1.666	<b>0.9494</b>

Figura (10.2.16). Variación del par motriz máximo de la segunda articulación para el mejor manipulador y la mejor trayectoria en función del tiempo de proceso.



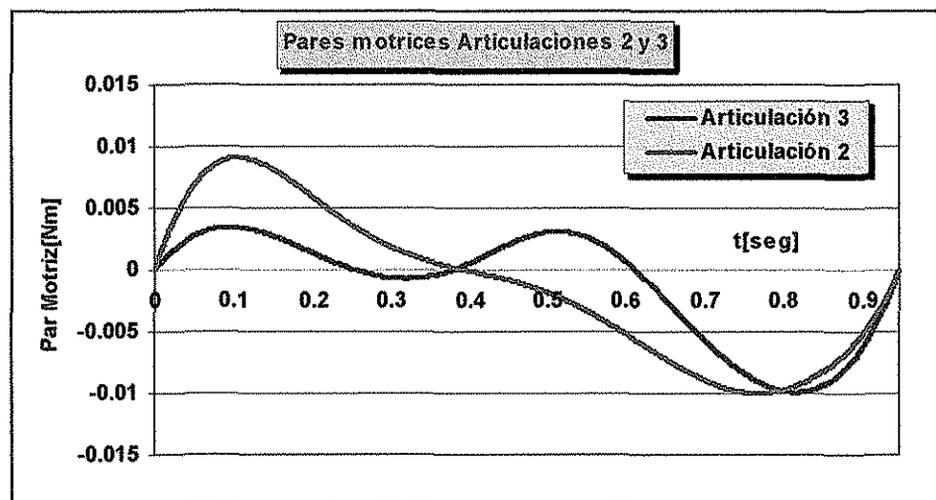
$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo de proceso[seg]	Par motriz máximo [Nm]
0.9927	171.6688011	172.9311989	135.4	1.666	<b>0.9494</b>	<b>0.01000006418</b>

Figura (10.2.17). Par motriz de la articulación 2, correspondiente a un tiempo de proceso de 0.9494 seg desarrollado por el mejor manipulador y la mejor trayectoria.



$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo de proceso[seg]	Par motriz máximo [Nm]
0.9927	171.6688011	172.9311989	135.4	1.666	0.9494	0.009930066

Figura (10.2.18). Par motriz de la articulación 3, correspondiente a un tiempo de proceso de 0.9494 seg desarrollado por el mejor manipulador y la mejor trayectoria.



$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo de proceso[seg]
0.9927	171.6688011	172.9311989	135.4	1.666	0.9494

Figura (10.2.19). Pares motrices de las articulaciones 2 y 3, correspondiente a un tiempo de proceso de 0.9494 seg desarrollado por el mejor manipulador y la mejor trayectoria.

## CONCLUSIÓN DE LA HIPÓTESIS

□ **Hipótesis:** Se sospecha que el manipulador PRRRd más productivo es uno cuyos dientes de Tornillo J y Tuerca J son del tipo 1.

□ **Conclusión de la hipótesis:** Es parcialmente verdadera.

El manipulador que proporciona la mayor velocidad posible en esta tarea particular tiene las dimensiones siguientes, tabla (10.2.6):

$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]
0.9927	171.6688	172.9312	135.4

Tabla (10.2.6). Mejor manipulador resultante.

Aunque  $re_{23}$  no es estrictamente 1.0 está muy cercano a serlo; la diferencia es de:

$$\left( \frac{l_2 - l_1}{2} \right) = 0.6312 \text{ mm}$$

Tomando en cuenta las precisiones numéricas empleadas, **probablemente** ésta sea la razón de esta pequeña diferencia, sin embargo, y para fines prácticos de construcción, se puede manejar el manipulador siguiente, tabla (10.2.7):

$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]
1.0	172.3	172.3	135.4

Tabla (10.2.7). Mejor manipulador resultante para fines prácticos de construcción.

□ **Hipótesis:** El perfil de trayectoria más productivo es diferente al de los extremos de la existencia del índice  $_m \in [1.458334, 2.1875]$ .

□ **Conclusión de la hipótesis:** es verdadera.

La mejor trayectoria que pertenece a la familia  $FUP^8(*,*)$  está definida por un índice  $_m=1.666$ .

□ **Hipótesis:** Se sospecha que la máxima productividad es posible si se tienen el mejor manipulador de la familia  $MAN_U$  y la mejor trayectoria de la familia  $FUP^8(*,*)$ .

□ **Conclusión de la hipótesis:** es verdadera.

Como el mejor manipulador y la mejor trayectoria proporcionan el tiempo de proceso más corto, entonces también se desarrolla la mayor cantidad de ciclos de trabajo. Si se emplea la ecuación (10.2.1) y si  $t_{SOLUCIÓN}$  es igual al tiempo de proceso,  $t_{proceso} = 0.9494$  seg. entonces la productividad máxima posible es:

<b>productividad</b>	45502.4 ciclos por jornada
----------------------	----------------------------

$$productividad = \frac{86400}{2 * t_{f\ SOLUCIÓN}} \left( \frac{ciclos}{jornada} \right) \quad E(10.2.1)$$

Esta es la máxima productividad que sólo se alcanza con el mejor manipulador y la mejor trayectoria.

### CONCLUSIONES GENERALES

1. Los 3 objetivos de este experimento se alcanzaron. La tabla (10.2.8) resume los resultados obtenidos.

re <sub>23</sub>	l <sub>1</sub> [mm]	l <sub>2</sub> [mm]	l <sub>3</sub> [mm]	índice_m	Tiempo Proceso [seg]	Productividad [ciclos por jornada]
0.9927	171.6688	172.9312	135.4	1.666	0.9494	45502.4

**Tabla (10.2.8).** El mejor manipulador y la mejor trayectoria que proporcionan la máxima productividad.

2. El método de búsqueda de los algoritmos genéticos es suficientemente preciso; la diferencia entre el resultado de la mejor evaluación y el empleado en la estrategia 2 es mínima. La tabla (10.2.9) muestra este hecho.

	$re_{23}$	$l_1$ [mm]	$l_2$ [mm]	$l_3$ [mm]	índice_m	Tiempo Proceso [seg]	Productividad [ciclos por jornada]
Evaluación 4 de la estrategia 1. <b>Método de los algoritmos genéticos</b>	0.9930	171.7	172.9	135.4	1.665989	<b>0.9496</b>	<b>45492.8391</b>
Estrategia 2. Método de búsqueda directa no dirigida	0.9927	171.6688	172.9312	135.4	1.666	0.9494	45502.4
Diferencia absoluta	0.0003	0.0312	0.0312	0	0.000011	<b>0.0002</b>	<b>9.5609</b>

**Tabla (10.2.9).** Diferencia entre el método de búsqueda directa y el método evolutivo.

### 10.3. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El experimento anterior entregó resultados muy interesantes que se discuten en esta sección.

#### 10.3.1. DISCUSIÓN 1

Las afirmaciones de Nakamura (1991), y Yoshikawa (1985) indican que cuando la relación de longitudes entre los eslabones rotativos es 1.0, el eslabonamiento parcial RR tiene un mejor desempeño en cuanto a suavidad de movimiento.

Para la tarea descrita en el experimento, se pudo observar que la relación entre las longitudes de los eslabones 2 y 3 del manipulador,  $l_1$  y  $l_2$ , es prácticamente 1.0

#### 10.3.2. DISCUSIÓN 2

Los TEOREMA 6.2 y TEOREMA 6.5 establecen que los mejores Tornillos J y Tuercas J son del tipo 1, pertenecientes a las familias FTJ1 y FNuJ1. Con el resultado del experimento, nuevamente se confirma la veracidad de estos teoremas.

#### 10.3.3. DISCUSIÓN 3

Se probó que un y solamente un manipulador es el que proporciona la máxima velocidad de transferencia de piezas. Sin embargo, esa máxima productividad también depende de la trayectoria empleada. Esto quiere decir que un manipulador diferente al óptimo puede ser más productivo si su trayectoria es mejor que la empleada en combinación con la mejor cadena cinemática.

En la figura (10.3) se observa que el manipulador 2 ofrece un costo menor de pares motrices máximos comparado con el manipulador 1.

El manipulador óptimo, obtenido en el experimento, es el mejor simplemente porque distribuye mejor sus pares motrices durante todo su proceso; este manipulador es el que ofrece un costo mínimo de pares motrices máximos, DEFINICIÓN 10.1.

#### 10.3.4. DISCUSIÓN 4

De la misma manera se probó que una y solamente una trayectoria polinomial de grado 8 es la que ofrece mayor producción. Sin embargo, esta trayectoria, comparada con una de cualidades inferiores, puede ayudar a transportar menor cantidad de discos de silicio si está acompañada de un manipulador menos productivo que el óptimo.

La mejor trayectoria es aquella que distribuye mejor la magnitud de los pares motrices, según la DEFINICIÓN 10.1.

#### 10.3.5. DISCUSIÓN 5

No queda duda, porque así se probó, que el mínimo par motriz máximo corresponde al manipulador, trayectoria y tiempo de proceso descritos en la tabla (10.2.8). Cualquier otro valor de las longitudes de los eslabones del manipulador y cualquier otro valor de índice\_m produce un tiempo de proceso mayor.

#### 10.3.6. DISCUSIÓN 6

Empleando cualquiera de los métodos de búsqueda, en todos estos proyectos, el tiempo de proceso para encontrar la solución fue muy grande.

Con los algoritmos genéticos, que fue el método de búsqueda más rápido, el tiempo de búsqueda para la tercera evaluación, cuya convergencia tuvo lugar en las 158 generaciones, fue de, aproximadamente, 9.35 horas, para la siguiente plataforma de cálculo:

- **Procesador:** Celeron Intel de 500 Mhz

El número de ciclos de trabajo empleados en la búsqueda se calcula empleando la ecuación E(10.3.5) siguiente.

$$\left( \frac{\text{Número\_generaciones}}{\text{Proceso\_Búsqueda}} \right) * \left( \frac{\text{Número\_Individuos}}{\text{Generación}} \right) = \text{Núm\_Ciclos}$$

E(10.3.5)

En la tabla (10.3.1) se muestra el número de ciclos de trabajo empleados por el algoritmo genético.

Número_generaciones/Proceso_Búsqueda (Número de generaciones por cada proceso de búsqueda=generación de convergencia)	Número_Individuos/Generación (Número de individuos por cada generación=Población)	Núm_Ciclos
158	100	15800

Tabla (10.3.1). Número de ciclos de trabajo que tuvieron lugar para la tercera evaluación empleando algoritmos genéticos.

El tiempo empleado por el método alternativo directo de búsqueda no dirigida sería impensable si se utilizara el mismo espacio de búsqueda para cada una de las variables, la misma precisión y la misma plataforma de cálculo que el manejado en el algoritmo genético, tabla (10.3.2).

Espacio de Búsqueda	Precisión	Ciclos
$r_{e_{23}} \in [0.8, 1.25]$	0.0001	4500
$l_3 \in [.04m, 0.18 m]$	0.0001	1400
índice $m \in [1.458334, 2.1875]$	0.000001	729166
$t_f \in [.0001 \text{ seg}, 10.0000 \text{ seg}]$	0.0001	99999
Número de ciclos de trabajo		<b>¡459,369,986,254,200,000!</b>

Tabla (10.3.2). Número de ciclos de trabajo que resultarían si se analizaran grandes espacios de búsqueda y minuciosas precisiones en el método alternativo.

Este número de ciclos de trabajo no sería posible procesarlo en la plataforma de cálculo empleada. Es por esa razón que se mantuvo constante el tiempo de proceso con el valor entregado por la mejor evaluación del proceso evolutivo (0.9696 seg), además, los espacios de búsqueda se redujeron a las vecindades de los resultados entregados por el algoritmo genético. Por otro lado, se empleó una plataforma diferente:

- **Pentium IV a 1.7 GHz**

Sin embargo, la determinación del mínimo valor del par motriz máximo empleando el método alternativo tomó varios días de trabajo.

Aquí se hace notar el poder de los algoritmos genéticos como método de búsqueda, sin embargo, aun es un procedimiento bastante lento, no obstante, las capacidades computacionales actuales.

Actualmente, se emplea, porque es necesario, el supercómputo y el procesamiento en paralelo para manejar este tamaño de información.

Husbands (1998), en el texto de "Evolutionary Robotics" confirma esto.

# CAPÍTULO 11

## CONCLUSIONES Y APORTACIONES

### 11.1. CONCLUSIONES

Este trabajo ha alcanzado los objetivos planteados en un inicio.

Con referencia al objetivo principal, el EXPERIMENTO PRINCIPAL probó que es posible encontrar la máxima productividad de una tarea mediante el mejoramiento combinado del sistema mecánico y del plan de movimiento gobernado por un polinomio de grado 8.

Con respecto al objetivo 1 se concluye que la máxima productividad, para una tarea en la que se transportan discos de silicio de la posición inicial  $P_1(400 \text{ mm}, 0, 100 \text{ mm})$  a la posición final  $P_2(0, 400 \text{ mm}, 100 \text{ mm})$ , en línea recta, se alcanza sólo con un manipulador considerado como el mejor en complicidad con la trayectoria, cuyo *índice\_m* es el óptimo, tablas (11.2) y (11.3), respectivamente. El mejor tiempo de proceso sin que se sobrepasen los pares máximos de los motores (0.01Nm), pero si se aprovechen al máximo, se presenta en la tabla (11.1).

Mejor tiempo de proceso	0.9494 seg
-------------------------	------------

Tabla (11.1). El mejor tiempo de proceso posible para esta tarea.

	$l_1[\text{mm}]$	$l_2[\text{mm}]$	$l_3[\text{mm}]$
Mejor manipulador	171.6688	172.9312	135.4

Tabla (11.2). Mejor manipulador para esta tarea.

Mejor trayectoria ( <i>índice_m</i> )	1.666
---------------------------------------	-------

Tabla (11.3). Mejor trayectoria para esta tarea

Con respecto al objetivo 2 se puede afirmar que las “Regiones Geométricas Articulares J” expresan un punto de vista diferente de ver la respuesta dinámica de un manipulador genérico. Este modelado ha permitido:

1. visualizar el comportamiento dinámico del manipulador simplemente con observar las características de los dientes de los tornillos y las tuercas J.
2. proporcionar información referente al desempeño del manipulador mediante los teoremas concernientes a la eficiencia de los tornillos y las tuercas J.
3. determinar la variación del volumen de trabajo para los diferentes tipos de tornillos y tuercas J.
4. clasificar en grandes familias los diferentes tipos de manipuladores.
5. aplicar agentes de búsqueda que se propagan a través de la clasificación en grandes familias.
6. aplicar el método de algoritmos genéticos con ayuda de esos agentes.

Respecto de las hipótesis planteadas se puede decir que:

**HIPÓTESIS 1:** Existe un modelo matemático que proporciona información suficiente referente al mejoramiento del desempeño del manipulador PRRRd aquí tratado.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 1:** Es verdadera.

**HIPÓTESIS 2:** Debe existir un manipulador que proporciona, mediante la elección correcta de las longitudes de sus eslabones, el movimiento más suave y también el más rápido que aprovecha, al máximo, los pares motrices límites entregados por los motores.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 2:** Es verdadera. El experimento principal es la prueban

**HIPÓTESIS 3:** De todas las posibles familias de trayectorias operacionales polinomiales de grado 8, existe una que proporciona la mayor velocidad de movimiento de la estructura mecánica y del disco de silicio transportado; todo

esto, simplemente por la definición correcta del índice de control de dichas trayectorias.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 3: Es verdadera.** El experimento principal es la prueba.

**HIPÓTESIS 4:** El mejoramiento combinado del manipulador y la trayectoria proporciona la máxima velocidad de transporte de piezas.

**CONCLUSIÓN HIPÓTESIS 4: Es verdadera.** El experimento principal es la prueba.

Así, las respuestas a las preguntas formuladas en un principio, en la sección de establecimiento de hipótesis, son las siguientes:

**PREGUNTA 1:** ¿Qué ley matemática diferente a las existentes proporciona criterios de optimización del manipulador?

**RESPUESTA A LA PREGUNTA 1:** El modelo de “Las Regiones Geométricas Articulares J” es una opción.

**PREGUNTA 2:** ¿Cuáles son las longitudes de los eslabones constitutivos de un manipulador PRRRd, tal que proporcionen mayor velocidad de movimiento?

**RESPUESTA A LA PREGUNTA 2:** La tabla (11.2) proporciona esa información. Esos resultados son válidos únicamente para la tarea descrita en el experimento principal.

**PREGUNTA 3:** ¿Cuál es el índice de control más adecuado que proporciona el movimiento más rápido posible del manipulador?

**RESPUESTA A LA PREGUNTA 3:** La tabla (11.3) proporciona esa información. Esos resultados son válidos únicamente para la tarea del experimento principal.

**PREGUNTA 4:** ¿Cuáles son las longitudes de los eslabones de un manipulador PRRRd y la trayectoria polinomial de grado 8 que proporcionan el movimiento más rápido posible del transporte de piezas?

**RESPUESTA A LA PREGUNTA 4:** Las respuestas a las preguntas 3 y 4 son la respuesta.

## 11.2. RESUMEN DE APORTACIONES

- a. Se presenta una estructura matemática formal denominada “**Regiones Geométricas Articulares**”, que incluye al binomio “**Tornillo J**” y “**Tuerca J**”, formada por definiciones, lemas, teoremas y postulados. Específicamente, la “**Eficiencia de los Tornillos J y las Tuercas J**” de esta estructura ayuda a entender mejor el comportamiento dinámico de un manipulador genérico que puede tomar tres configuraciones básicas diferentes dependiendo de las relaciones de eslabonamiento: **TIPO 1**, **TIPO 2** y **TIPO 3**. Con base en esta formulación matemática, se aportan las definiciones de **Manipuladores Semejantes Antisimétricos** no publicada en otros trabajos, ya que, como la formulación matemática es original, dichas definiciones, también lo son.
- b. La obtención de la relación de longitudes que deben tener tres de sus eslabones móviles necesarios para que el desempeño de productividad sea el mejor posible, desde el punto de vista del aprovechamiento máximo del par motriz. Este mejor manipulador es obtenido mediante dos métodos de búsqueda: (1) estrategia evolutiva que emplea algoritmos genéticos, y (2) un método que se propaga a través de todos y cada uno de los espacios de búsqueda. Los resultados se comparan para reafirmar lo obtenido.
- c. Mejoramiento del perfil de trayectoria polinomial de grado 8 empleado para mejorar el desempeño de la tarea productiva del mejor manipulador. La literatura no presenta mejoramiento de perfiles gobernados por polinomios de grado alto, tal vez por las razones expuestas en el capítulo 1, en la Revisión Bibliográfica y en la Justificación. Esto se considera un aporte al conocimiento.

## 11.3. TRABAJO FUTURO

Este trabajo ha contemplado una posible metodología que se puede seguir para mejorar la productividad de un manipulador, mediante el diseño de éste y de su perfil de trayectoria.

El análisis sólo ha considerado lo siguiente:

1. Respecto del manipulador, su diseño sólo ha prestado atención a las longitudes de los tres eslabones rotativos constitutivos. Estos cuerpos se han considerado como simples paralelepípedos.

2. Con respecto al mejoramiento de la trayectoria, éste ha considerado solamente el perfil de trayectoria. Nada se ha dicho de la optimización de la región geométrica por donde pasa el órgano terminal del manipulador.

Estas dos simplificaciones inevitablemente obligan a desarrollar el siguiente trabajo futuro:

- A. Aplicar la misma metodología a un manipulador cuyas dimensiones sean reales.
- B. Aplicar la misma metodología a una familia de regiones geométricas de trayectoria reales para encontrar el mejor camino que proporcione mayor productividad. Respecto de este punto, se puede decir que una posible familia de trayectorias geométricas es la siguiente.

En la figura (11.1) se muestra la disposición del manipulador y de las disqueteras donde tienen que ser depositadas las obleas de silicio. Los discos sólo pueden ser tomados o depositados de manera radial. Esto es una restricción de la región geométrica de la trayectoria. Los demás segmentos que unen estas dos rectas pueden ser los siguientes:

- Segmentos circulares (círculos de entrada o salida, figura (11.2)) que unen a las rectas con los círculos equipotenciales de manera tangencial.
- Los segmentos circulares de las líneas equipotenciales conectados a los segmentos del punto anterior, figura (11.2).
- El movimiento sería el siguiente: (1) salir de la disquetera inicial, de manera radial, siguiendo una línea recta; (2) al final de la recta, entrar a un segmento circular, tangente a la anterior recta; (3) al final del segmento circular de entrada, tomar la línea equipotencial de manera tangencial; (4) al final del segmento equipotencial, tomar el círculo de salida de manera tangencial; (5) al final del segmento circular de salida, tomar la línea recta en el punto tangente; (5) por último, dejar el objeto en la disquetera final.

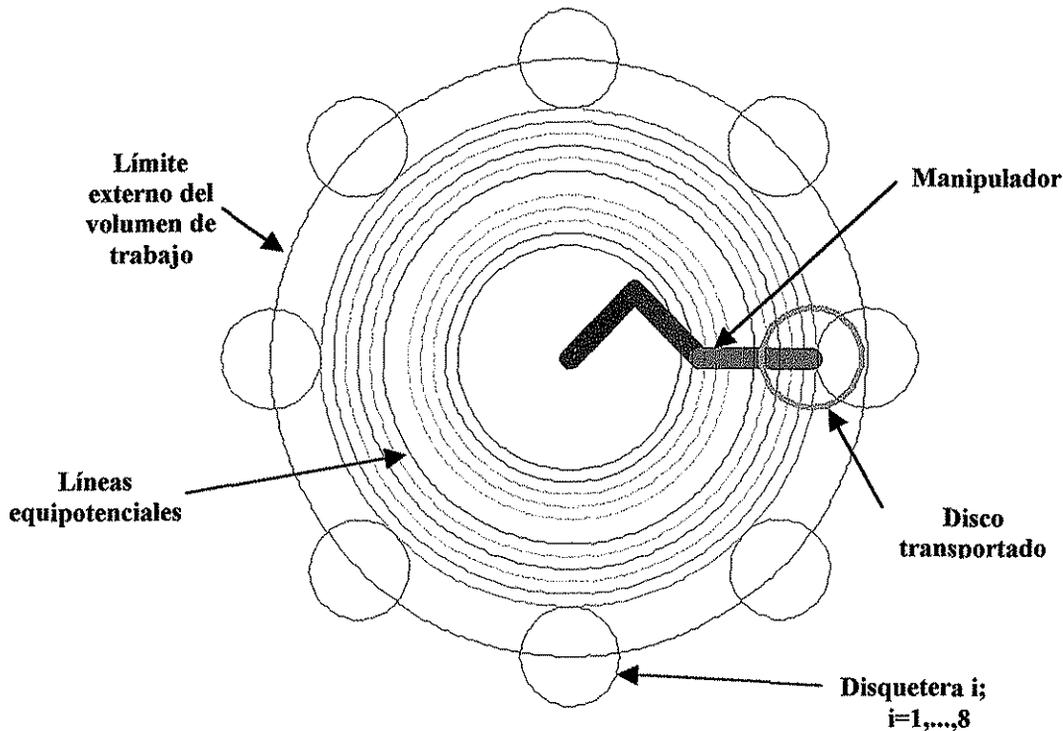


Figura (11.1). Vista aérea de la disposición del manipulador con las diferentes disqueteras.

La trayectoria genérica descrita anteriormente depende del radio de la línea equipotencial. Como existe una gran cantidad de líneas equipotenciales, entonces, también, las trayectorias geométricas. Este problema también puede analizarse empleando la herramienta de los algoritmos genéticos que ayudaría a encontrar la región geométrica más productiva, para la misma restricción del máximo par de los motores.

El empleo de los algoritmos genéticos también se justifica aquí, ya que crece el número de variables por manejar; además de las longitudes de los eslabones, *índice\_m* y tiempo de proceso, se tiene el radio de la línea equipotencial.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

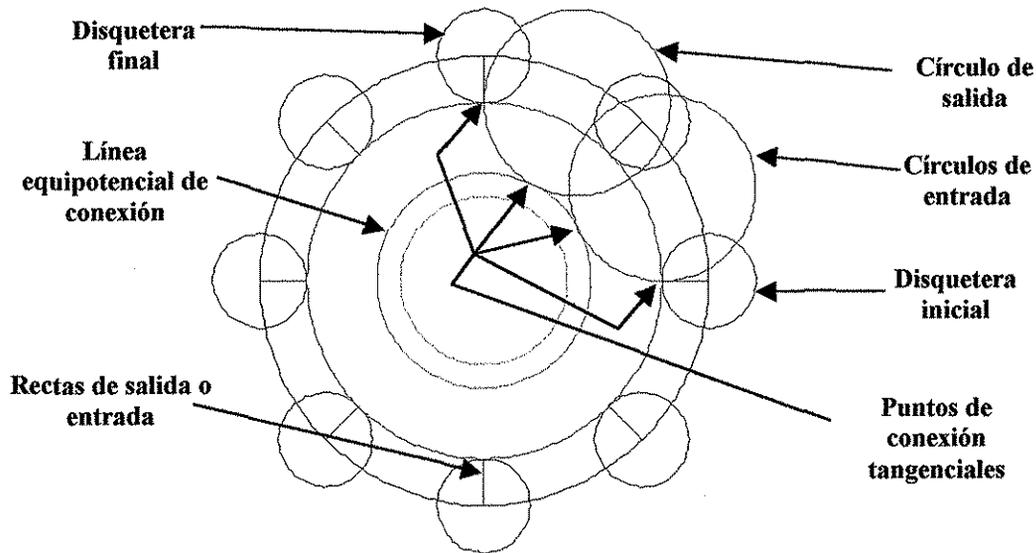


Figura (11.2). Una de las posibles trayectorias geométricas que se proponen como las que deben ser seguidas por el manipulador.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## REFERENCIAS

- Ángeles, J.; López Cajún, C. "*Diseño Automatizado de Mecanismos de Leva de Disco con Seguidor Traslacional de Cara Plana*". IX Congreso de la Academia Nacional de Ingeniería, 1983.
- Bartels, R. H.; Beatty, J. C.; Barsky, B. A. "*An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*". Morgan Kaufmann Publishers, Inc.
- Beasley, D. "*An Overview of Genetic Algorithms: Part 1, Fundamentals*". University Computing, 1993a. Vol. 15, Num. 2, 58-69.
- Beasley, D. "*An Overview of Genetic Algorithms: Part 2, Research Topics*". University Computing, 1993b. Vol. 15, Num. 2, 170-181.
- Berner, D. F.; Snyman, J.A. "*The Influence of Joint Angle Constraints on the Optimum Design of a Planar Robot Manipulator Following a Complicated Prescribed Path*". Pergamon. An International Journal on Computers and Mathematics with Applications 37 (1999) 111-124.
- Brown, Don R., Hwang, Kuo-Yen. "*Solving Fixed Configuration Problems with Genetic Search*". Research in Engineering Design (1993) 5: 80-87. Springer-Verlag.
- Burdick, J.W. " ". Mechanism and Machine Theory. Vol. 30, No. 7. 1995.
- Carlson, S.E. "*Genetic Algorithms Attributes for Component Selection*". Research in Engineering Design (1996) 8:33-51. Springer-Verlag.
- Carlson, S.E.; Shonkwiler, R. "*Comparison of Three non-derivative Optimization Methods with a Genetic Algorithms for Component Selection*". Journal of Engineering Design, Vol. 5, No. 4, 1994.
- Celko, J. "*Genetic Algorithms and Database Indexing*". Dr. Dobb's Journal, April 1993.
- Chapman, C.D.; Saitou, K. "*Genetic Algorithms as an Approach to Configuration and Topology Design*". Transactions of the ASME. Journal of Mech. Design. December 1994, Vol. 116/1011.

- Chou, H.C. y Sadler, J.P.. "*Optimal Location of Robot Trajectories for Minimization of actuator Torque*". Mechanism and Machine Theory, 28, 145-158, 1993.
- Chou, Jui-Jen; Yang, D.C.H. "*On the Generation of Coordinated Motion of Five-Axis CNC/CMM Machines*". Journal of Engineering for Industry. February 1992, Vol. 114: 15-22.
- Coello, C. A.; Figueroa-Gallegos, J. A. "*Use of Genetic Algorithms to Solve Optimal Regional Water Quality Management Problems*". Proceedings of ACEDC'96, University of Plymouth.
- Colin Johnson, R. "*What is Cognitive Computing?*". Dr. Dobb's Journal, February 1993.
- Craig, J. J. "*Introduction to Robotics*". Addison-Wesley, 1989.
- Dawn, T. "*Nature Shows the Way to Discover Better Answers*". Scientific Computing World, March 1995.
- De Jong, K. A. "*Genetic Algorithms are NOT Function Optimizers*". Foundation of GA'92 ISBN 1-55860-263-1, 5-17. Jul. 1992a, Colorado, USA.
- De Jong, K. A. "*Are Genetic Algorithms Function Optimizers?*". Parallel Problem Solving from Nature, 2; Elsevier Science Publishers, 1992b.
- De Jong, K. A.; Spears, W. M. "*Using Genetic Algorithms to Solve NP-Complete Problems*". ICGA'89.
- Denavit, J., Hartenberg, R.S. "*A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*". ASME J. Applied Mechanics, vol. 22, pp. 215-221, 1955.
- Dwawarakanah, T. A.; Ghosal, A.; Shrinivasa, U. "*Design of Articulated Manipulators Based on Kinematic and Dynamic Criteria*". ASME Mechanisms Conference Tempe, AZ, DE-Volume 45, pp. 627-635, 1992.
- Forrest, S. y Mitchell, M. "*Relative Building-Block Fitness and the Building-Block Hypothesis*". Foundation of GA'92 ISBN 1-55860-263-1, 109-126. Jul. 1992, Colorado, USA.
- Fu, K. S.; Gonzalez, R. C.; Lee, C. S. G. "*Robotics. Control, Sensing, Vision, and Intelligenge*". Mc Graw Hill. 1987
- Goldberg, D. E. "*Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*". Addison-Wesley Publishing Company. 1989.

Goldberg, D. E.; Deb, K.; Thierens, D. "*Toward a Better Understanding of Mixing in Genetic Algorithms*". Journal of the Society for Instrumentation and Control Engineers, 32(1), 10-16, 1992.

Goldberg, D. E. "*Los Placeres Existenciales de los Algoritmos Genéticos*". Soluciones Avanzadas, enero 1995.

Harris, R.; Ellis, C. "*An Alternative Description of the Action of Crossover*". Research Report PEDC-02-93. Plymouth Engineering Design Centre, Univ. of Plymouth, Dec. 1993.

Hartley, John. "*Focus on Electronics as Growth Slows*". Japanese Scene. The Industrial Robot, 13(3),174-178,1986.

Hon, K.K.B. "*A New Approach of Group Technology Part Families Optimization*". Annals of the CIRP, vol. 43/1/1994.

Hrbacek, K. "*Introduction to Set Theory*". Marcel Dekker. 1999.

Husain, M.; Mallik, A. K.; Ghosh, A. "*Design Improvement of Manipulators by Minimizing Shaking Force/Moment and Driving Forces*". ASME Mechanisms Conference Tempe, AZ, DE-Volume45, pp. 139-147, 1992.

Husbands, P; Meyer, J. "*Evolutionary Robotics*". Springer. First European Workshop, EvoRobot98, Paris, France, April 16-17, 1998.

Iscoff, Ron "*Robots in the Clean Room*". Semiconductor international, November, 1984.

Juárez Campos, I. "*Diseño y construcción de un Manipulador de 5GDL*". Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado, UNAM (1996).

Kim, W. y Rastegar, J. "*On the Optimal Design of Robot Manipulators for High Speed Motions*". Proceedings of the 5<sup>th</sup> Applied Mechanism and Robotic Conference, Cincinnati, OH, AMR97-020-001 to 007, 1997.

KrishnaKumar, K "*Genetic Algorithms. A Robust Optimization Tool*". AIAA, 31<sup>st</sup> Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Jan. 11-14, 1993. Reno, NV.

Lansberry, J. E.; Wozniak, L. "*Optimal Hydrogenerator Governor Tuning with a Genetic Algorithm*". IEEE Trans. On Energy Conversion, Vol. 7, No. 4, December 1992.

Larousse "*El Pequeño LAROUSSE Ilustrado*". 2000.

Leithold, L. "*El Cálculo*". Oxford Univ Press. 1998.

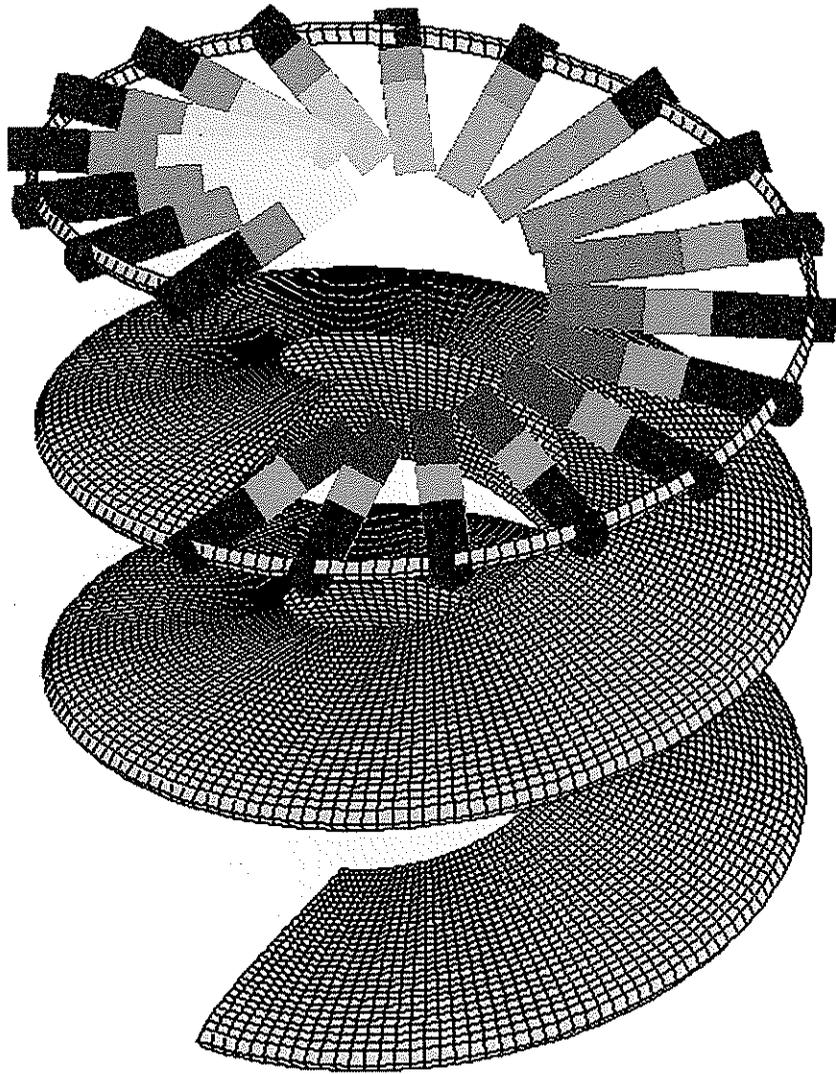
- Levine, D. "*A Parallel Genetic Algorithm for the Set Partitioning Problem*". MCS-P458-0894, Mathematics and Computer Science Division, Argonne National Laboratory, 1994.
- Livesley, W.A. "*Clean Room Robotics. The Present and Future Use of Robots in the Wafer Fabrication Industry*". Cranfield Robotics and Automation Group, College of Manufacturing, Cranfield Institute of Technology, Cranfield, Bedford, England. MK43 OAL.
- Louis, S. J. y Rawlins, J. E. "*Syntatic Análisis of Convergence in Genetic Algorithms*". Foundation of GA'92 ISBN 1-55860-263-1, 141-151. Jul. 1992, Colorado, USA.
- Ma, O., Ángeles, J. "*Optimum Design of Manipulators under Dynamic Isotropic Conditions*". IEEE International Conference on Robotics and Automation, Atlanta, GA, pp 485-492, 1993.
- Manela, M.; Campbell, J. A. "*Harmonic Analysis, Epistasis and Genetic Algorithms*". Parallel Problem Solving from Nature, 2; Elsevier Science Publishers, 1992.
- Marks, R. E. "*Breeding hybrid Strategies: Optimal Behavior for Oligopolists*". ICGA'98: 198-207.
- Márquez Diez-Canedo, Javier. "*Fundamentos de TEORÍA de OPTIMIZACIÓN*". Limusa. México. 1987.
- Masatoshi Sakawa, K. Yauchi. "*Interactive Decisión Making for Multiobjective non Convex Programming Problems with Fuzzy Numbers Through Coevolutionary Genetic Algorithms*". Elsevier. Fuzzy Sets and Systems 114 (2000), 151-165.
- Meyer, J. A. "*Evolutionary Robotics: A Survey of Applications and Real Problems*". Evolutionary Robotics. Proceedings of the First European Workshop, EvoRobot98, Springer. April 16-17, 1998, Paris, France.
- Michalewicz, Z. "*Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*". Springer, (1996).
- Mohammadi Daniali, H. R.; Zsombor-Murray, P. J.; Ángeles, J. "*Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators*". Mechanism and Machine Theory. Vol. 30, No. 5, pp. 665-678. 1995.
- Murdoch, T.N.S., Wallance, K.M. "*An Approach to Configuration Optimization*". Journal of Engineering Design, Vol. 3, No. 2, 1993.
- Nakamura, Yoshihiko. "*Advanced Robotics. Redundancy and Optimisation*". Addison-Wesley Publishing Company. 1991.

- Nearchou, A. C.; Aspragathos, N.A. "*Application of Genetic Algorithms to point to point motion of redundant Manipulators*". Mechanism and Machine Theory. Vol. 31, No. 3, pp. 261-270. 1996.
- Obregón Sanin, Iván. "*Teoría de la Probabilidad*". Limusa. México. 1984.
- Papanek, T. "*Design and Test of a Robot for Class 10 Clean Rooms*". Proceeding of the 17<sup>th</sup> ISIR. April 26-30, 1987. Chicago, USA.
- Paul, R. P., y Stevenson, C. N. "*Kinematics of Robot Wrists*". Int. J. of Robotic Research. 1 (2), 1983.
- Petit, C. W. "*Touched by Nature*". U.S. News and World Report, July 27, 1998.
- Piña Garza, Eduardo. "*Dinámica de Rotaciones*". Colección CBI, UAM. 1996.
- Poon, P. W.; Parks, G.T. "*Optimizing PWR Reload Core Design*". Parallel Problem Solving from Nature, 2; Elsevier Science Publishers, 1992.
- Qi, X.; Palmieri, F. "*The Diversification Role of Crossover in the Genetic Algorithms*". Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms, 132-145. Morgan Kaufmann, 1993.
- Rentería, A.; Rivas, M. "*Robótica Industrial. Fundamentos y Aplicaciones*". McGraw Hill, 2000.
- Rowlands, H. "*A Hybrid Approach for Optimum Design Using a Genetic Algorithm, a Neural Network and the Taguchi Method*". Proceedings of ACEDC'96, University of Plymouth.
- Saramago, S.F.P.; Steffen, V.. "*Optimization of the Trajectory Planning of Robot Manipulators Taking into account the Dynamics of the System*". Mechanism and Machine Theory. Vol. 33, No. 7, pp. 883-894. 1998.
- Sciavicco, L. y Siciliano, B. "*Modeling and Control of Robot Manipulators*". Mc. Graw Hill. 1996.
- Schaffer, J. D. "*A Study of Control Parameters Affecting Online Performance of Genetic Algorithms for Function Optimization*". ICGA'89: 51-60.
- Shearer, J. L.; Murphy, A. T. "*Introduction to System Dynamics*". Addison-Wesley, Reading, Mass. 1967.

- Spillman, R. "*Genetic Algorithms. Nature's way to search for the best*". Dr. Dobb's Journal, Feb. 1993, 26-30
- Stevens, C. L. "*The Design of a Clean Room Robot for Wafer Handling*". Proceeding of the 17<sup>th</sup> ISIR. April 26-30, 1987. Chicago, USA.
- Stiffler, A. K. "*Design with Microprocessors for Mechanical Engineers*". McGraw Hill, 1992.
- Sullivan, J. C. W.; Carse, B.; Pipe, A.G. "*A Fuzzy Clustering Evolution Strategy and its Application to Optimisation of Robot Manipulator Movement*". Evolutionary Design and Manufacture, Selected Papers from ACDM'00. Springer. 2000.
- Uckun, S. "*Managing Genetic Search in Job Shop Scheduling*". IEEE Expert Systems, October 1993.
- Wenger, Phillippe. "*Comments on a Classification of 5R Regional Manipulator Geometries and Singularities*". Mech. Mach. Theory. Vol. 3, Num. 4, pp 529-532. 1997.
- Yamada, T.; Nakano, R. "*A Genetic Algorithm Aplicable to Large-Scale Job Shop Problems*". Parallel Problem Solving from Nature, 2; Elsevier Science Publishers, 1992.
- Yoshikawa, T. "*Manipulability of Robotic Mechanisms*". Int. J. Of Robotics Research. 4 (2), 1985.
- Yoshimura, M. y Kanemaru, T. "*Multiobjective Optimization for Integrated Design of Machine Products Based on Working Environment Information*". Proceedings of the 1995, IUTAM Symposium on Optimization of Mechanical Systems. University of Stuttgart, Germany, 1995.
- Young Dee Lee, Beom Hee Lee. "*An Evolutionary Approach for Time Optimal Trajectory Planning of a Robotic Manipulator*". Elsevier. Information Sciences 113 (1999) 245-260.
- \_\_\_\_\_ "*Evolving Elegance*". HighTech Report'98.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# VOLUMEN II



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

*“La Genética es el Medio por el Cual la Vida Encuentra su Camino”*

# ANEXO A

## PROYECTO: “Buscador Evolutivo de la Mejor Productividad”

### A.1. INTRODUCCIÓN

En este anexo se describe el proyecto de cómputo denominado “**Buscador Evolutivo de la Mejor Productividad**” que se emplea en este trabajo para obtener la máxima productividad posible mediante la combinación del mejor manipulador PRRRd y la mejor trayectoria gobernada por un polinomio de grado 8.

La descripción del proyecto tiene que ver con la explicación de los módulos constitutivos del proyecto: estructura, conectividad entre módulos, transferencia de variables, etc.

### A.2. DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO

El proyecto está formado por un módulo de máxima jerarquía y otros subordinados a éste. En la figura (A.2.1) se presenta, de manera esquemática, el módulo **EVOLUTIVO\_Tes\_Doc** y su estructura interna. Este módulo mayor emplea el proceso de búsqueda evolutivo denominado algoritmo genético cuyo proceso se describe en la figura(10.1).

El módulo **EVOLUTIVO\_Tes\_Doc** recibe los datos primarios como: Lugar geométrico de la trayectoria, coordenadas descriptivas del lugar geométrico de la trayectoria escogida, anchos y espesores de los eslabones rotativos y altura y radio del eslabón prismático y materiales de éstos.

Entrega los datos del mejor manipulador, mejor trayectoria y mejor tiempo de proceso.

En los siguientes apartados se describe cada uno de los módulos constitutivos

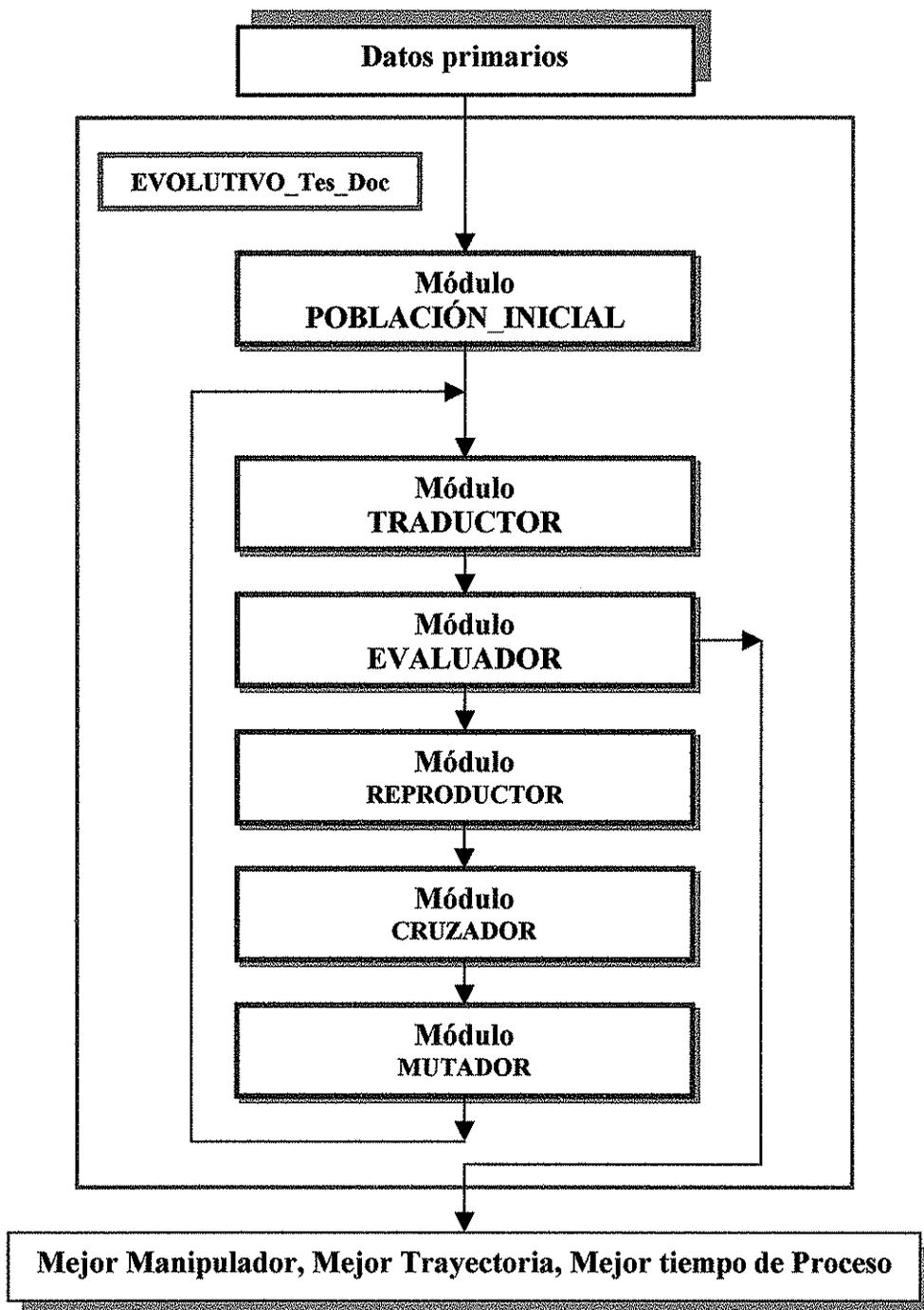


Figura (A.2.1). Estructura del módulo EVOLUTIVO\_Tes\_Doc

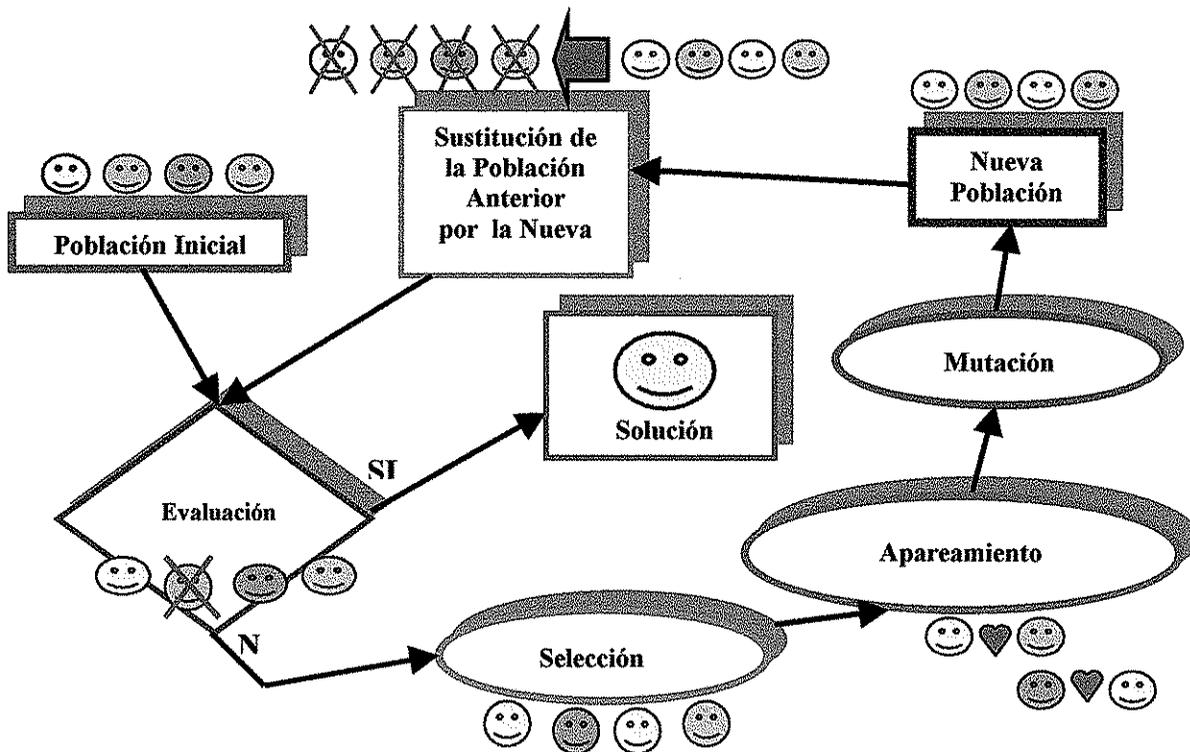


Figura (10.1). Ciclo básico del Algoritmo Genético Canónico.



### A.3. MÓDULO POBLACIÓN INICIAL

Este módulo genera el código genético de 100 individuos de una manera totalmente aleatoria, empleando la función RND que toma un número comprendido entre el intervalo cerrado de 0 y 1. Cada uno de estos individuos, en forma de cadena genotípica, tiene 4 segmentos, ecuación E(A.3.1); el primero se refiere a la variable  $re_{23}$  que relaciona las longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , el segundo tiene que ver con el primer criterio de semejanza  $m$  que describe la longitud del último eslabón,  $l_3$ , en tercer lugar se tiene el segmento referente al *índice\_m* de la trayectoria y, por último, el tiempo de proceso,  $t_{proceso}$ :

$$\text{Individuo}(n) = \langle \langle re_{23} \rangle \langle l_3 \rangle \langle \text{índice}_m \rangle \langle t_{proceso} \rangle \rangle \tag{E(A.3.1)}$$

Cada uno de los segmentos está formado por una cadena de bits que pueden ser 0 ó 1. Cada bit es asignado a una variable denominada como  $gen(*, *, *)$ , donde el primer argumento representa el individuo, el segundo es el segmento y el tercero es el bit constitutivo de ese segmento, figura (A.3.1).

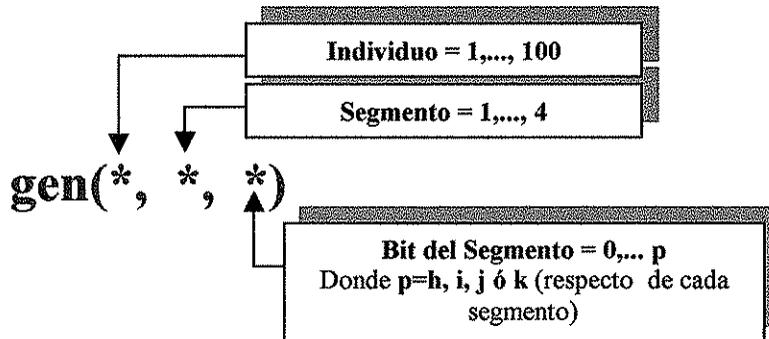


Figura (A.3.1). Argumentos de los genes de la cadena genotípica

Así, para una población de 100 individuos (la que se usa en este trabajo), se tendría la siguiente cadena para el individuo  $n$ , donde  $h, i, j$  y  $k$  son las longitudes de los segmentos menos uno.

<b>Individuo(n)</b>	$gen(n,1,0), \dots, gen(n,1,h), gen(n,2,0), \dots, gen(n,2,i), gen(n,3,0), \dots, gen(n,3,j), gen(n,4,0), \dots, gen(n,4,k)$
---------------------	--

En la figura (A.3.2) se presenta el proceso que genera los  $100(h + i + j + k + 4)$  números (0 ó 1) asignados a  $gen(*, *, *)$ . En ese proceso se hace uso de otros 4 módulos de segundo nivel; cada uno tiene la tarea de formar cada segmento del genotipo.

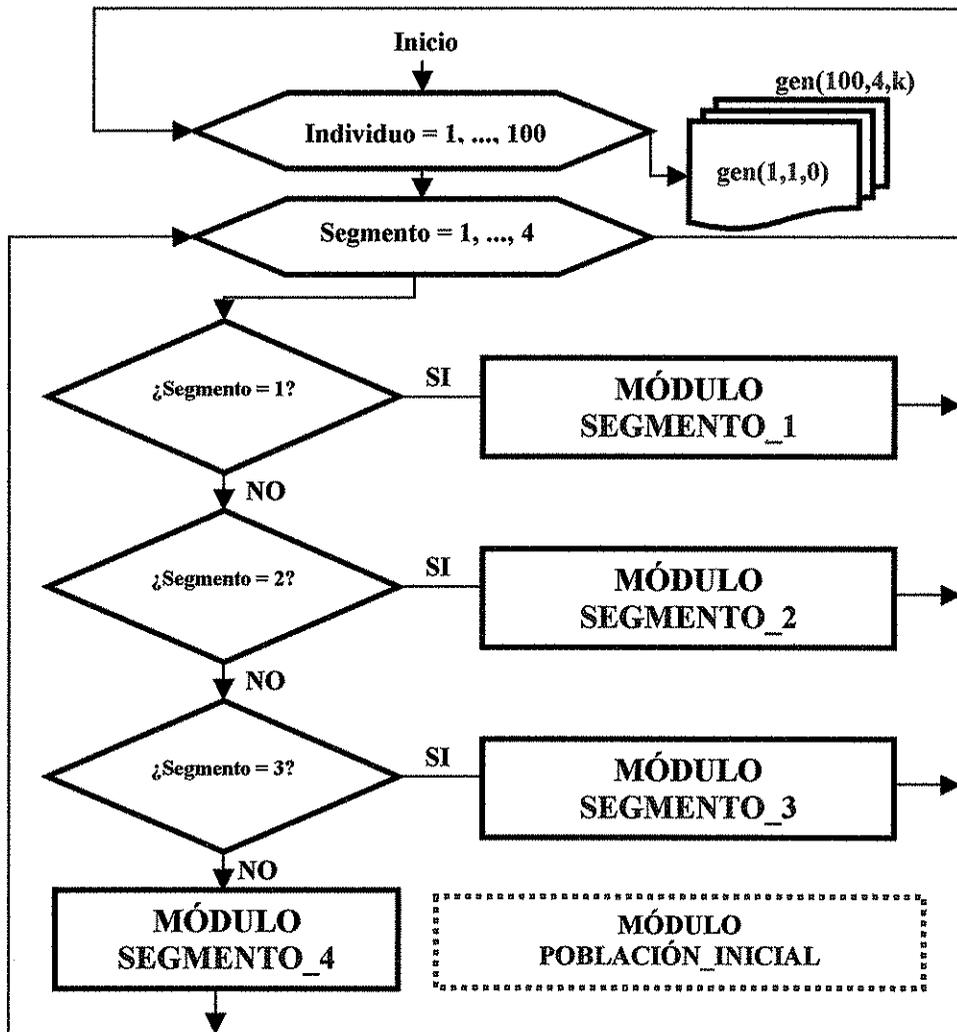


Figura (A.3.2). Proceso del Módulo POBLACIÓN\_INICIAL

En el diagrama de flujo de la figura (A.3.3) se presenta el módulo SEGMENTO\_1 cuya única función es generar los bits 1 ó 0 constitutivos del primer segmento del individuo correspondientes a  $re_{23}$ , ecuación E(A.3.1). Los procesos de los otros tres módulos son similares excepto por la variación en los ciclos que corren desde 0 a  $i$ ,  $j$  ó  $k$  según sea el caso.



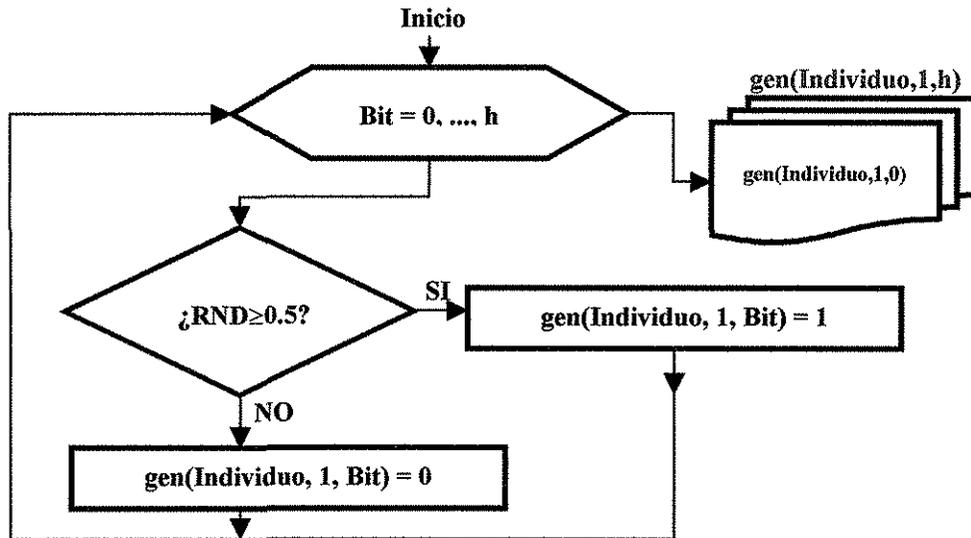


Figura (A.3.3). Proceso del Módulo SEGMENTO\_1

La relación que guarda el módulo **POBLACIÓN\_INICIAL** con otros módulos del proyecto se puede ver en la figura (A.3.4). Cada paquete de información genética de los individuos es entregado al módulo **TRADUCTOR** cuya función es darle forma fenotípica a la cadena de cromosomas.

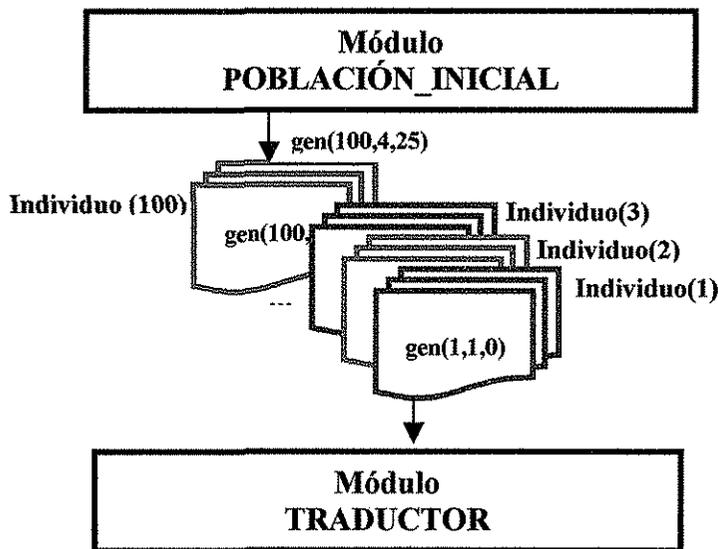


Figura (A.3.4). Relación del módulo **POBLACIÓN\_INICIAL** con otras partes del proyecto.

### A.4. MÓDULO TRADUCTOR

Este módulo del proyecto toma paquetes de información genética de 100 individuos mediante la transmisión de los  $100(h + i + j + k + 4)$  bits, cada uno transportado por  $gen(*,*,*)$ , y los transforma a su correspondiente cadena decimal. Esta información puede provenir del módulo **POBLACIÓN\_INICIAL** o de cualquier ciclo posterior del proceso genético cuya población ya ha sufrido la reproducción, cruce y mutación, figura (A.4.1).

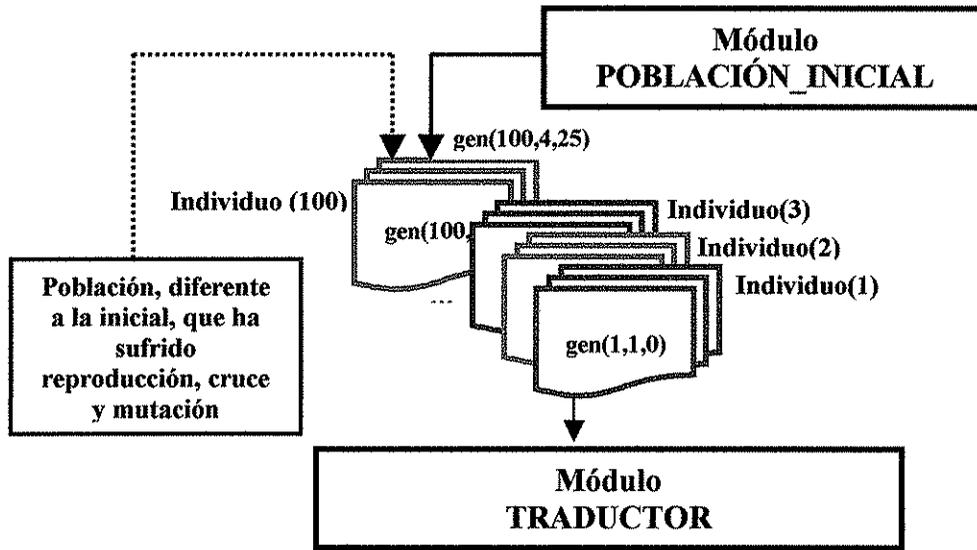


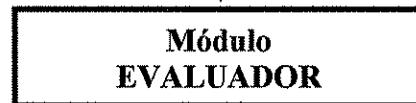
Figura (A.4.1). Origen de la información genética que TRADUCTOR procesa.

La información procesada, figura (A.4.1), la proporciona al módulo **EVALUADOR**

$$\text{Individuo}(n) = \langle \langle re_{23} \rangle \langle l_3 \rangle \langle \text{índice}_m \rangle \langle t_{\text{proceso}} \rangle \rangle_{\text{GENOTIPO}}$$



$$\text{Individuo}(n) = \langle \langle re_{23} \rangle \langle l_3 \rangle \langle \text{índice}_m \rangle \langle t_{\text{proceso}} \rangle \rangle_{\text{FENOTIPO}}$$

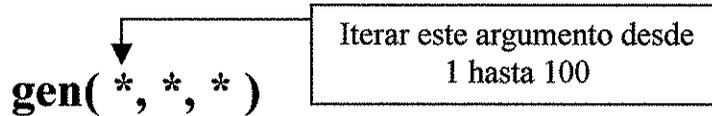


TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura (A.4.2). Transformación de la información genética y su relación con otras partes del proyecto.

Para traducir la información de genotipo a fenotipo, **TRADUCTOR** debe recibir la información de la segunda condición de semejanza del manipulador,  $n$ , que, en este caso, es constante para todo el proceso. Con esta información básica, los pasos del proceso son:

- **TRADUCTOR** toma un individuo de la población a la vez, comenzando por el primero. Esto significa analizar los elementos  $gen(*,*,*)$  iterando su primer argumento desde 1 hasta 100.



- **TRADUCTOR** conoce la longitud  $l_3$  del manipulador  $u$ , mediante la ecuación E(A.4.1). Esto se logra seleccionando los elementos  $gen(*,*,*)$  cuyo segundo argumento sea 2 correspondientes al mismo individuo del paso anterior. Dicho argumento indica que debe ser tomado solamente el segundo segmento de la ecuación E(A.4.1).

$$l_3(\text{Individuo}(u)) = l_{3MIN} + \left( \sum_{z=0}^{i-1} gen(u, 2, z) 2^z \right) \frac{l_{3MAX} - l_{3MIN}}{2^i - 1} \quad \text{E(A.4.1)}$$

- Para el mismo individuo  $u$ , **TRADUCTOR** encuentra el valor de  $re_{23}$ . Esta operación es posible si se seleccionan todos los elementos  $gen(*,*,*)$  cuyo segundo argumento sea 1; dicho argumento indica que debe ser tomado solamente el primer segmento de la ecuación E(A.4.2).

$$re_{23}(\text{Individuo}(u)) = re_{23MIN} + \left( \sum_{z=0}^{h-1} gen(u, 1, z) 2^z \right) \frac{re_{23MAX} - re_{23MIN}}{2^h - 1} \quad \text{E(A.4.2)}$$

- Ya determinados  $re_{23}$  y  $l_3$  del individuo  $u$ , **TRADUCTOR** encuentra  $l_1$  y  $l_2$  según las ecuaciones E(A.4.3) y E(A.4.4) siguientes.

$$l_1(\text{individuo}(u)) = re_{23}(\text{individuo}(u)) \left( \frac{r_{vt} - l_3(\text{individuo}(u))}{re_{23}(\text{individuo}(u)) + 1} \right) \quad \text{E(A.4.3)}$$

$$l_2(\text{individuo}(u)) = \left( \frac{r_{vt} - l_3(\text{individuo}(u))}{re_{23}(\text{individuo}(u)) + 1} \right) \quad \text{E(A.4.4)}$$

- Hasta este momento, **TRADUCTOR** a determinado las longitudes del manipulador  $u$ , sin embargo, **EVALUADOR** requiere otros parámetros como el *índice<sub>m</sub>* y el tiempo de proceso,  $t_{proceso}$ . Para *índice<sub>m</sub>* y para el individuo  $u$ , **TRADUCTOR** toma todos los números  $gen(*,*,*)$  cuyo segundo argumento sea 3; mientras que para  $t_{proceso}$  se toman aquellos en los cuales el argumento es 4.
- Para determinar *índice<sub>m</sub>*, **TRADUCTOR** aplica las ecuaciones E(8.31) y E(8.32), que se refieren a la transformación de genotipo a fenotipo de la trayectoria. Empleando los números  $gen(*,*,*)$ , esas ecuaciones se pueden resumir en la ecuación E(A.4.5) siguiente.

$$índice\_m(individuo(u)) = índice\_m_{min} + \left( \sum_{z=0}^{j-1} gen(u,3,z) 2^z \right) \left( \frac{índice\_m_{max} - índice\_m_{min}}{2^j - 1} \right)$$

E(A.4.5)

- En lo que respecta al tiempo de proceso, **TRADUCTOR** emplea las ecuaciones E(9.14) y E(9.15) que se pueden resumir en la ecuación E(A.4.6) siguiente.

$$t_{proceso}(individuo(u)) = t_{proceso\ min} + \left( \sum_{z=0}^{k-1} gen(u,k,z) 2^z \right) \left( \frac{t_{proceso\ max} - t_{proceso\ min}}{2^k - 1} \right)$$

E(A.4.6)

Con toda esta información traducida, lo único que queda es transmitir todos los fenotipos de los individuos a **EVALUADOR**, figura (A.4.3).

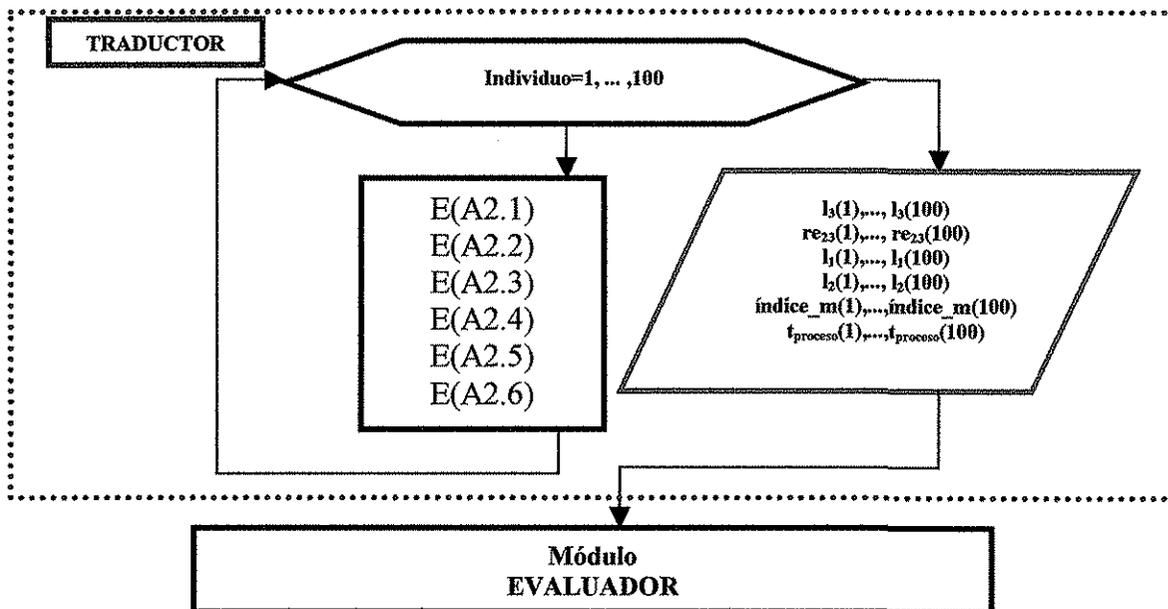


Figura (A.4.3). Transmisión de la información de los fenotipos a **EVALUADOR**.



## A.5. MÓDULO EVALUADOR

Este módulo, que recibe la información traducida por **TRADUCTOR**, figura (A.4.3), es el más extenso de toda la aplicación porque contiene otros módulos de nivel subordinado:

- El módulo **MODELOS\_4DOF** que procesa los modelos inversos del manipulador y que utilizan las ecuaciones de las Regiones Geométricas Articulares.
- El módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA** que evalúa los perfiles de trayectoria como: Trapezoidal, Polinomiales de quinto, octavo grado y Splines con 3, 4, 5 y hasta 6 puntos reales y dos virtuales.
- El módulo **GEOMÉTRICAS\_TRAYECTORIA** que contiene las regiones geométricas de la trayectoria como recta y arco representados en forma paramétrica donde el parámetro es cualquiera de los perfiles de trayectoria anteriores.
- El módulo **INERCIAS\_MASAS** que evalúa las inercias y las masas de los diferentes individuos (manipuladores).
- El módulo **VECTORES\_CG\_BASES\_REF** que define la posición de los centros de gravedad y bases referenciales de eslabón.
- El módulo **DINÁMICA\_4DOF** que evalúa las fuerzas y momentos articulares empleando la formulación de Newton-Euler.
- El módulo anterior proporciona la información de los pares motrices que serán transmitidos al módulo **eval\_fun\_apt** y que, por medio de las funciones de aptitud y objetivo descritas en el capítulo 9, a cada individuo se le dará una calificación que es un número comprendido entre 0 y 1 que representa la aptitud de ese manipulador en particular. Así, cualquier individuo que se encuentre más cercano a la cima de la función será más apto para reproducirse que aquel que se encuentre en un nivel inferior.

Ésta es la función básica del trabajo efectuado por **EVALUADOR**.

Todos los módulos descritos anteriormente, dentro de **EVALUADOR**, se aprecian en la figura (A.5.1).

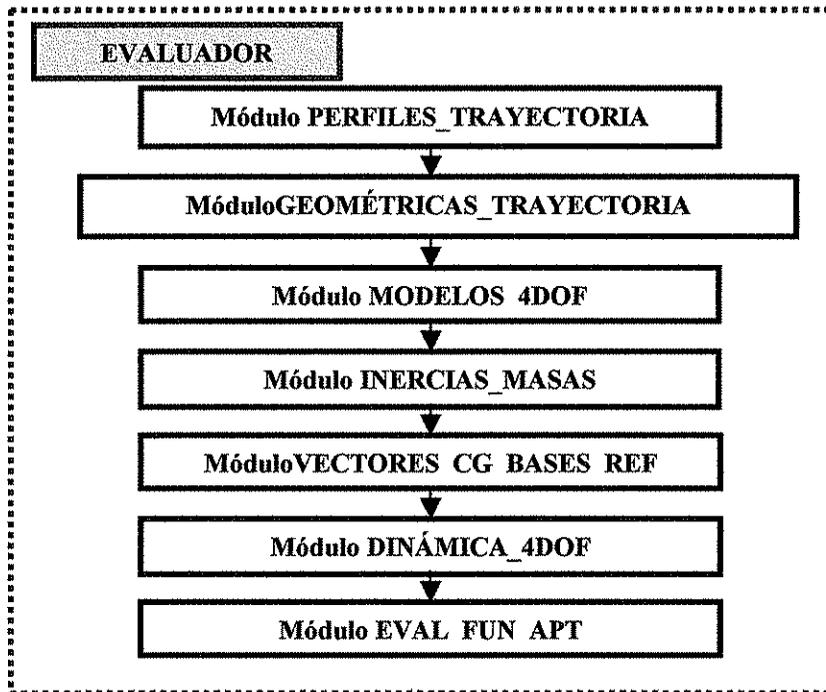


Figura (A.5.1). Módulos de nivel subordinado constitutivos del **EVALUADOR**.

Como datos de entrada se tienen:

- Los fenotipos y consecuentes que entrega **TRADUCTOR**, figura (A.4.3) y tabla(A.5.1).
- Además, los datos primarios como (1) selección de la región geométrica y del perfil de trayectoria, (2) coordenadas de los puntos de inicio y fin de la región geométrica de la trayectoria, en el caso de la recta, o (3) centro, eje de giro y radio, en el caso del arco, también, (4) espesores, alturas y materiales de los eslabones.

Variable	Características	Descripción
$re_{23}(1 \text{ a } 100)$	Tipo: Arreglo unidimensional de Precisión Doble. Ámbito: Global	Primeros segmentos de las cadenas de los fenotipos de los individuos entregados por <b>TRADUCTOR</b>
$l_3(1 \text{ a } 100)$	Tipo: Arreglo unidimensional de Precisión Doble. Ámbito: Global	Segundos segmentos de las cadenas de los fenotipos de los individuos entregados por <b>TRADUCTOR</b>
$l_1(1 \text{ a } 100)$	Tipo: Arreglo unidimensional de Precisión Doble. Ámbito: Global	Datos consecuentes de $re_{23}(u)$ y $l_3(u)$ de los individuos entregados por <b>TRADUCTOR</b>
$l_2(1 \text{ a } 100)$	Tipo: Arreglo unidimensional de Precisión Doble. Ámbito: Global	Datos consecuentes de $re_{23}(u)$ y $l_3(u)$ de los individuos entregados por <b>TRADUCTOR</b>
$índice\_m(1 \text{ a } 100)$	Tipo: Arreglo unidimensional de Precisión Doble. Ámbito: Global	Terceros segmentos de las cadenas de los fenotipos de los individuos entregados por <b>TRADUCTOR</b>
$t_{proceso}(1 \text{ a } 100)$	Tipo: Arreglo unidimensional de Precisión Doble. Ámbito: Global	Cuartos segmentos de las cadenas de los fenotipos de los individuos entregados por <b>TRADUCTOR</b>

Tabla (A.5.1). Datos de entrada entregados por el módulo **TRADUCTOR**, aparte de los datos primarios que necesita el módulo **EVALUADOR**.

Como datos de salida se tienen:

- La aptitud o calificación de la generación que está siendo procesada.
- La aptitud o calificación de cada individuo de la generación que se procesa.

Variable	Características	Descripción
$APTITUD\_GENERACIÓN(i)$	Tipo: Arreglo unidimensional Dinámico de Precisión Doble. Ámbito: Global	Aptitud o calificación de la generación $i$
$APTITUD\_INDIVIDUO(u)$	Tipo: Arreglo unidimensional Estático de Precisión Doble. Ámbito: Global	Aptitud o calificación del individuo $u$ . Esta calificación está comprendida entre 0 y 1, según las funciones de aptitud $g^{(*,*)}$ ecs. E(9.6) y E(9.7)

Tabla (A.5.2). Datos de salida entregados por el módulo **EVALUADOR**.

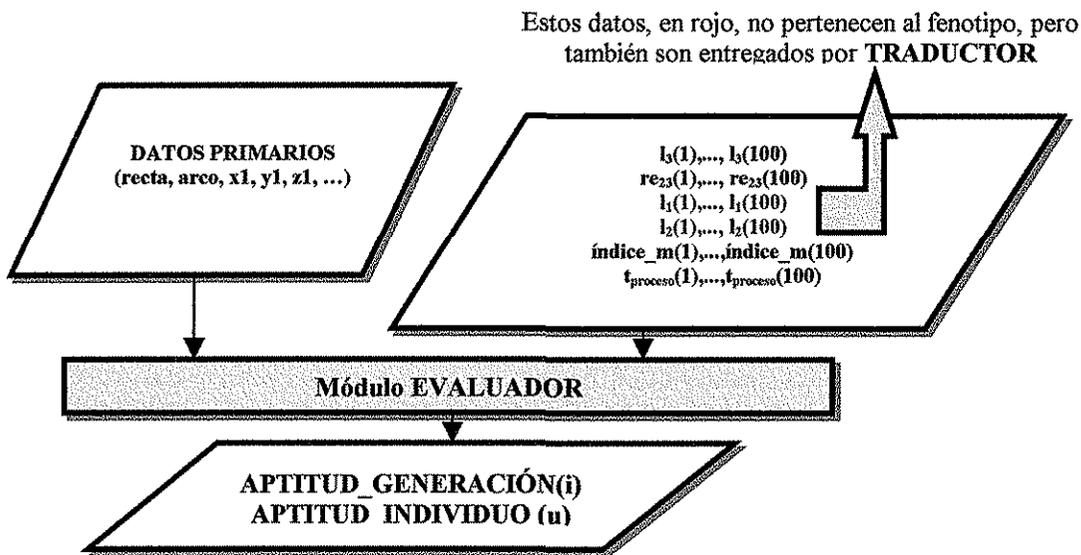


Figura FA.5.2). Datos de entrada y salida que interesan al módulo EVALUADOR.

A continuación se describe cada uno de los módulos anteriores. Sin embargo, se detallan solamente aquellas partes de ellos que tienen que ver con la recta en forma paramétrica y el perfil de trayectoria de grado 8 que son los que interesan en este trabajo.

Los otros módulos referentes al arco y demás perfiles de trayectoria son importantes para el trabajo futuro.



### A.5.1. MÓDULO PERFILES\_TRAYECTORIA

Este módulo, el primero de **EVALUADOR**, contiene otros módulos de nivel subordinado. Cada uno de ellos procesa un perfil de trayectoria diferente, que pueden ser:

- Trapezoidal,
- de Grado Superior,
- Splines Cúbicos 3p2v, 4p2v, 5p2v y 6p2v.

El que importa en este trabajo es el perfil de grado superior denominado como octal, recordando que el de quinto grado puede estar contenido en la familia de polinomios de grado 8 bajo ciertas condiciones, *índice*  $m=1.875$ .

En la figura (A.5.1.1) siguiente se aprecian los módulos constitutivos o subordinados al módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA**. Cada módulo contiene otros dos que corresponden a las versiones recta o arco.

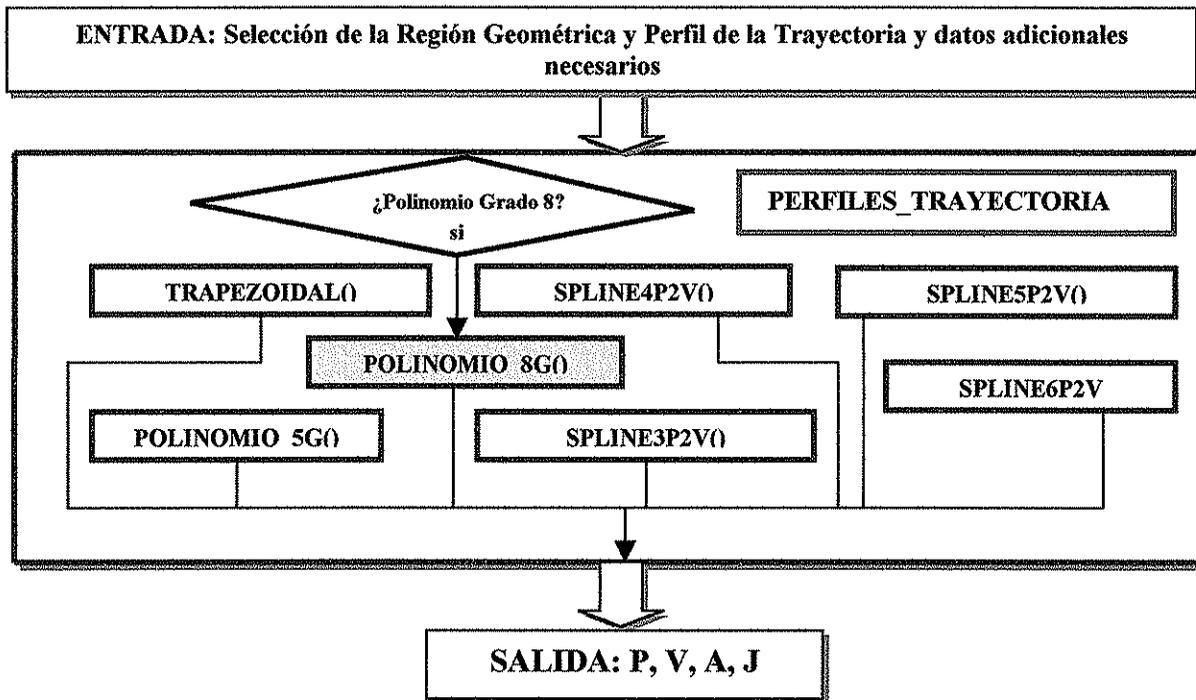


Figura (A.5.1.1). Módulos constitutivos del módulo mayor **PERFILES\_TRAYECTORIA**.

A continuación se describen los módulos subordinados a **PERFILES\_TRAYECTORIA**:

- **TRAPEZOIDAL()**. Este módulo procesa únicamente el perfil trapezoidal.
- **POLINOMIO\_5G()**. Procesa exclusivamente el perfil de quinto grado.
- **POLINOMIO\_8G()**. Encargado de los polinomios de grado 8. Éste puede sustituir al módulo **POLINOMIO\_5G()** si se escoge índice  $m=1.875$ .
- **SPLINE3P2V()**, **SPLINE4P2V()**, **SPLINE5P2V()** y **SPLINE6P2V()**. Éstos procesan exclusivamente perfiles tipo SPLINE cúbicos de 3, 4, 5 y 6 puntos reales con 2 virtuales.

Para poder hacer uso de este módulo es importante seleccionar de antemano (1) la región geométrica de la trayectoria, que puede ser una recta o un arco, y (2) el perfil de trayectoria, además, (3) es necesario proporcionar los datos adicionales completos para que los módulos procesen la información de manera adecuada, por ejemplo, las coordenadas de los puntos inicial y final de la recta, o las coordenadas del centro del arco, su radio y su eje de giro, el tiempo de proceso y el instante,  $t$ , en el que se desea saber la posición alcanzada, así como sus derivadas.

Como salidas se obtienen la posición, velocidad, aceleración y jerk operacionales que el órgano terminal debe de llevar en ese instante, **P, V, A, J**.

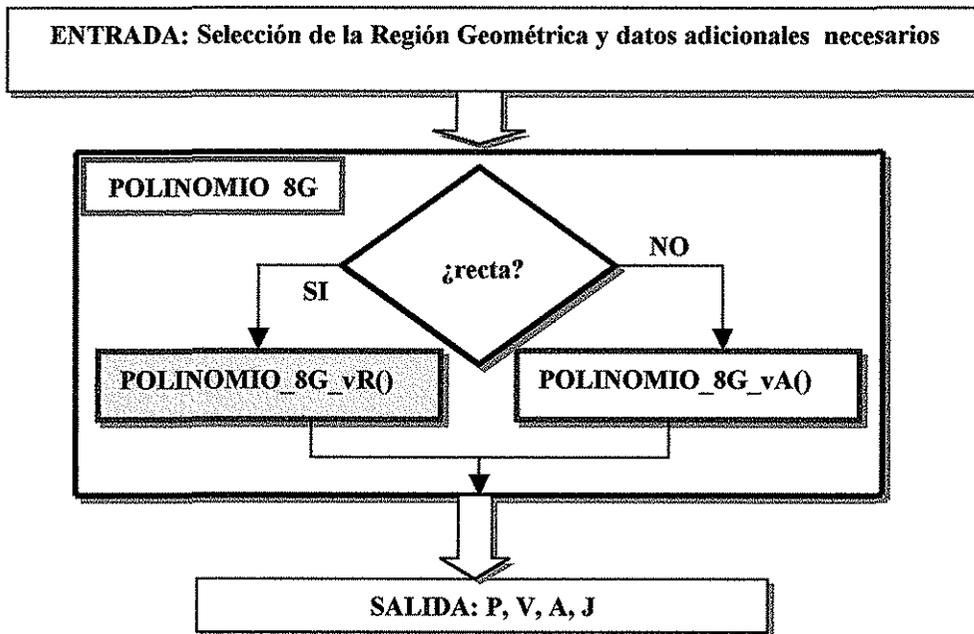


Figura (A.5.1.2). Constitución de **POLINOMIO\_8G()**.

El módulo **POLINOMIO\_8G()**, que es el que importa en este momento, contiene otros dos módulos, figura (A.5.1.2):

- **POLINOMIO\_8G\_vR()**. Encargado exclusivamente del perfil de grado 8 relacionado con la recta.
- **POLINOMIO\_8G\_vA()**. Encargado únicamente del perfil octal relacionado con el arco.

De estos dos módulos constitutivos de **POLINOMIO\_8G()** interesa explicar sólo **POLINOMIO\_8G\_vR()**.

Así, **POLINOMIO\_8G\_vR()**, figura (A.5.1.3), está constituido de una subrutina de primer nivel llamada **Polinomio8G\_vR(\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*)**, de nueve argumentos, que hace uso de 4 subrutinas de segundo nivel llamadas:

- **Pol8GP\_vR(\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*)**,
- **Pol8GV\_vR(\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*)**,
- **Pol8GA\_vR(\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*)** y
- **Pol8GJ\_vR(\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*,\*)**

Todas estas últimas subrutinas también hacen uso de nueve argumentos.

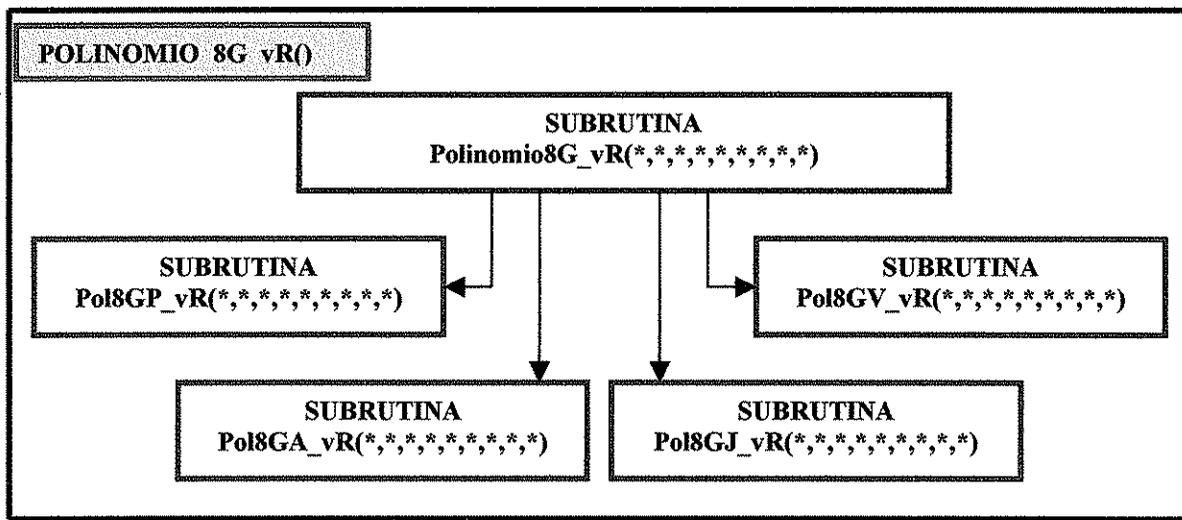
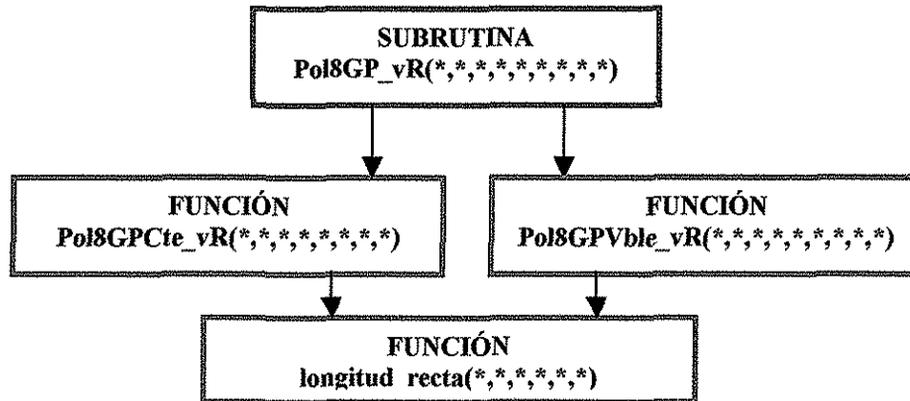


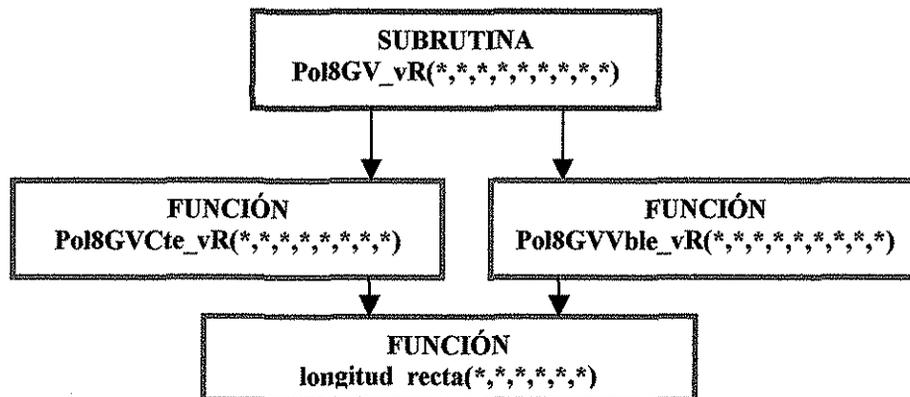
Figura (A.5.1.3). Constitución del módulo **POLINOMIO\_8G\_vR()**.



**Figura (A.5.1.4).** El uso de dos funciones distintas por parte de la subrutina  $\text{Pol8GP\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$ . La función  $\text{Pol8GPCte\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  evalúa la parte constante del perfil octal dedicado exclusivamente a la posición, mientras que  $\text{Pol8GPPVble\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  lo hace para el polinomio dependiente de  $\text{índice\_m}$ . A su vez, estas dos funciones hacen uso de la función  $\text{longitud\_recta}(*,*,*,*,*,*)$ .

Cada una de estas subrutinas de segundo nivel, a su vez, emplea las funciones  $\text{Pol8G+Cte\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  y  $\text{Pol8G+Vble\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  (donde + puede tomar las literales P, V, A o J) que evalúan los polinomios constantes y variables del perfil de grado 8, respectivamente, figuras (A.5.1.4), (A.5.1.5), (A.5.1.6) y (A.5.1.7).

Esos dos polinomios constante y variable del polinomio de grado 8 se pueden observar en el segundo miembro de las ecuaciones E(8.20) y E(8.24). El constante no depende de  $\text{índice\_m}$ , mientras que el variable modifica al perfil resultante con la variación de  $\text{índice\_m} \in [1.458334, 2.1875]$ .



**Figura (A.5.1.5).** El uso de dos funciones distintas por parte de la subrutina  $\text{Pol8GV\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$ . La función  $\text{Pol8GVCte\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  evalúa la parte constante del perfil octal dedicado exclusivamente a la velocidad, mientras que  $\text{Pol8GVVble\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  lo hace para el polinomio dependiente de  $\text{índice\_m}$ . A su vez, estas dos funciones hacen uso de la función  $\text{longitud\_recta}(*,*,*,*,*,*)$ .

Cada función  $\text{Pol8G+Cte\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  y  $\text{Pol8G+Vble\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$ , para  $+ = P, V, A, J$ , emplea, a su vez, otra función denominada  $\text{longitud\_recta}(*,*,*,*,*,*)$ , cuya tarea consiste en proporcionar la longitud de la recta solicitada por su dos pares de puntos, el de inicio y el de fin; de allí sus 6 argumentos.

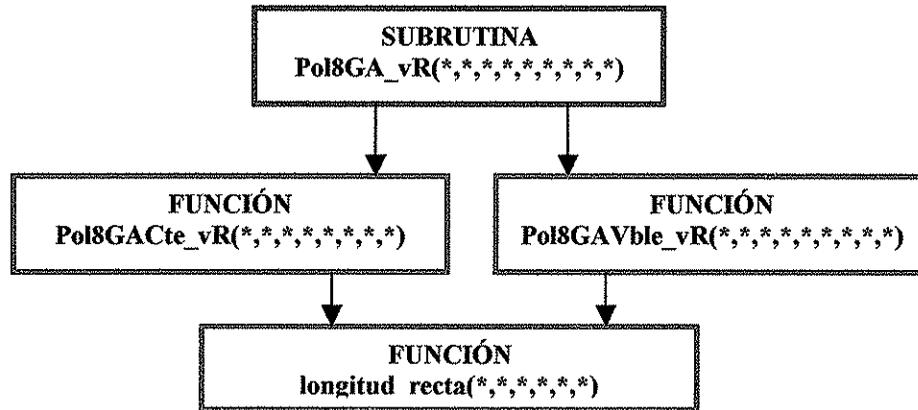


Figura (A.5.1.6). El uso de dos funciones distintas por parte de la subrutina  $\text{Pol8GA\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$ . La función  $\text{Pol8GACte\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  evalúa la parte constante del perfil octal dedicado exclusivamente a la aceleración, mientras que  $\text{Pol8GAVble\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  lo hace para el polinomio dependiente de índice\_m. A su vez, estas dos funciones hacen uso de la función  $\text{longitud\_recta}(*,*,*,*,*,*)$ .

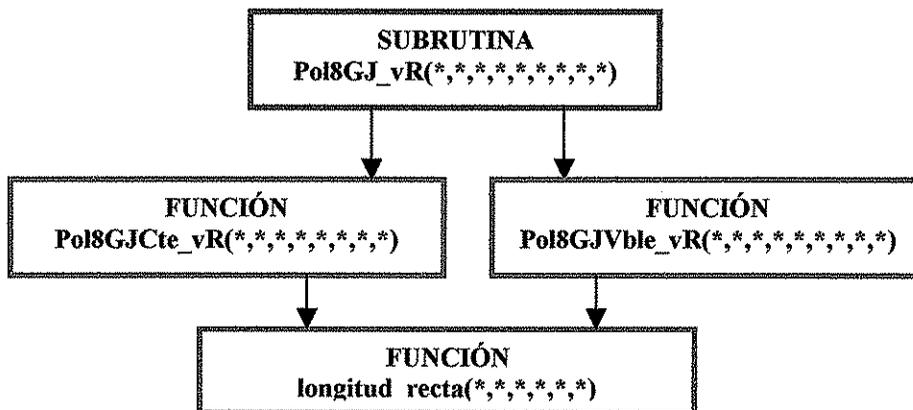


Figura (A.5.1.7). El uso de dos funciones distintas por parte de la subrutina  $\text{Pol8GJ\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$ . La función  $\text{Pol8GJCte\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  evalúa la parte constante del perfil octal dedicado exclusivamente al jerk, mientras que  $\text{Pol8GJVble\_vR}(*,*,*,*,*,*,*,*)$  lo hace para el polinomio dependiente de índice\_m. A su vez, estas dos funciones hacen uso de la función  $\text{longitud\_recta}(*,*,*,*,*,*)$ .

## DESCRIPCIÓN DE LAS SUBROUTINAS

En las tablas (A.5.1.1), (A.5.1.2), (A.5.1.3), (A.5.1.4), (A.5.1.5) y (A.5.1.6) se describen las características de las subrutinas empleadas por el módulo **POLINOMIO\_8G\_vR()**.

SUBROUTINA	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
<b>Polinomio8G_vR(*,*,*,*,*,*,*,*,*)</b>	Ámbito: Global Nivel: Primer	Subrutina Global con 9 parámetros de entrada y 4 de salida. Se auxilia de 4 subrutinas de segundo nivel, figura (A.5.1.3).
<b>Pol8GP_vR(*,*,*,*,*,*,*,*,*)</b>	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 9 parámetros de entrada y 1 de salida (posición del órgano terminal). Se auxilia de 2 funciones de primer nivel y una de segundo nivel, figura (A.5.1.4).
<b>Pol8GV_vR(*,*,*,*,*,*,*,*,*)</b>	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 9 parámetros de entrada y 1 de salida (velocidad del órgano terminal). Se auxilia de 2 funciones de primer nivel y una de segundo nivel, figura (A.5.1.5).
<b>Pol8GA_vR(*,*,*,*,*,*,*,*,*)</b>	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 9 parámetros de entrada y 1 de salida (aceleración del órgano terminal). Se auxilia de 2 funciones de primer nivel y una de segundo nivel, figura (A.5.1.6).
<b>Pol8GJ_vR(*,*,*,*,*,*,*,*,*)</b>	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 9 parámetros de entrada y 1 de salida (jerk del órgano terminal). Se auxilia de 2 funciones de primer nivel y una de segundo nivel, figura (A.5.1.7).

Tabla (A.5.1.1). Descripción de las subrutinas constitutivas del módulo **POLINOMIO\_8G\_vR()**.

**SUBROUTINA**

**Polinomio8G\_vR (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9)**

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de los polinomios de posición, velocidad, aceleración y jerk, P, V, A, J, del perfil octal en el instante t.

$$p(t) = p_f \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \text{indice}_m \frac{p_f}{t_f} \left( \frac{-32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right) \quad \text{E(8.24)}$$

Parámetro	Descripción
Par_1	Tercer segmento del fenotipo, <i>indice_m</i> .
Par_2	Tiempo t dentro del tiempo de proceso.
Par_3	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_4	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_7	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_8	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_9	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.2). Subrutina Polinomio8G\_vR () y sus parámetros de entrada.



**SUBROUTINA**

**Pol8GP\_vR (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9)**

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, del polinomio de posición, P, del perfil octal en el instante t.

$$\begin{aligned}
 p(t) = p_f & \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \\
 & + \text{indice}_m \frac{p_f}{t_f} \left( \frac{-32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right) \quad \text{E(8.24)}
 \end{aligned}$$

Parámetro	Descripción
Par_1	Tercer segmento del fenotipo, <i>indice_m</i> .
Par_2	Tiempo t dentro del tiempo de proceso.
Par_3	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_4	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_7	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_8	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_9	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.3). Subrutina Pol8GP\_vR () y sus parámetros de entrada.



**SUBROUTINA****Pol8GV\_vR (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9)**

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, del polinomio de la velocidad, V, del perfil octal en el instante t.

Parámetro	Descripción
Par_1	Tercer segmento del fenotipo, <i>índice_m</i> .
Par_2	Tiempo t dentro del tiempo de proceso.
Par_3	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_4	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_7	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_8	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_9	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.4). Subrutina Pol8GV\_vR () y sus parámetros de entrada.

**SUBROUTINA****Pol8GA\_vR (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9)**

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, del polinomio de aceleración, A, del perfil octal en el instante t.

Parámetro	Descripción
Par_1	Tercer segmento del fenotipo, <i>índice_m</i> .
Par_2	Tiempo t dentro del tiempo de proceso.
Par_3	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_4	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_7	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_8	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_9	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.5). Subrutina Pol8GA\_vR () y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

Pol8GJ\_vR (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9)

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, del polinomio del jerk,  $J$ , del perfil octal en el instante  $t$ .

Parámetro	Descripción
Par_1	Tercer segmento del fenotipo, <i>índice m</i> .
Par_2	Tiempo $t$ dentro del tiempo de proceso.
Par_3	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_4	Coordenada $x$ del punto $P_1$
Par_5	Coordenada $y$ del punto $P_1$
Par_6	Coordenada $z$ del punto $P_1$
Par_7	Coordenada $x$ del punto $P_2$
Par_8	Coordenada $y$ del punto $P_2$
Par_9	Coordenada $z$ del punto $P_2$

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.6). Subrutina Pol8GJ\_vR () y sus parámetros de entrada.

## LLAMADA DE FUNCIONES

En las tablas (A.5.1.7), (A.5.1.8), (A.5.1.9) y (A.5.1.10) se describen las funciones utilizadas por **POLINOMIO\_8G\_vR()**. Las funciones están diseñadas para ser usadas en cualquier parte de la aplicación gracias a que están declaradas como funciones globales o públicas. Todas las funciones regresan un solo valor a partir de ciertos parámetros de entrada, entregados en cierto orden. En las tablas siguientes se presenta la descripción de los parámetros de cada una de las funciones.

FUNCIONES	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
Pol8G+Cte_vR(*,*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble, Nivel: Primer	Función Global con 8 parámetros de entrada. Regresa el valor del polinomio constante de la posición, velocidad, aceleración o jerk (dependiendo de +). Hace uso de una función de segundo nivel, longitud_recta(*,*,*,*,*,*)
Pol8G+Vble_vR(*,*,*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble, Nivel: Primer	Función Global con 9 parámetros de entrada. Regresa el valor del polinomio variante con <i>índice_m</i> de la posición, velocidad, aceleración o jerk (dependiendo de +). Hace uso de una función de segundo nivel, longitud_recta(*,*,*,*,*,*)
longitud_recta(*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble, Nivel: Segundo	Función Global con 6 parámetros de entrada, las tres coordenadas de cada uno de los dos puntos. Regresa la longitud de la recta.

Tabla (A.5.1.7). Funciones de primer nivel y segundo nivel del módulo POLINOMIO\_8G\_vR().

FUNCIÓN	
Pol8G+Cte_vR(Par_1, Par_2, Par_3, Par_4, Par_5, Par_6, Par_7, Par_8); += P, V, A, J	
Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, del polinomio constante del perfil octal	
$p(t) = p_f \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) +$ <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 10px;">Polinomio constante</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-right: 10px;">Polinomio variable</div> </div> $+ \text{índice}_m \frac{p_f}{t_f} \left( \frac{-32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right) \quad E(8.24)$	
Parámetro	Descripción
Par_1	Tiempo t dentro del tiempo de proceso.
Par_2	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_3	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_8	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>
Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión	

Tabla (A.5.1.8). Función Pol8G+Cte\_vR() y sus parámetros de entrada.



**FUNCIÓN**

Pol8G+Vble\_vR(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9); += P, V, A, J

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, del polinomio variante con *índice\_m* del perfil octal

$$p(t) = p_f \left( \frac{70}{t_f^3} t^3 - \frac{315}{t_f^4} t^4 + \frac{546}{t_f^5} t^5 - \frac{420}{t_f^6} t^6 + \frac{120}{t_f^7} t^7 \right) + \text{Polinomio constante} + \text{Polinomio variable} \\ + \text{índice}_m \frac{p_f}{t_f} \left( \frac{-32}{t_f^2} t^3 + \frac{160}{t_f^3} t^4 - \frac{288}{t_f^4} t^5 + \frac{224}{t_f^5} t^6 - \frac{64}{t_f^6} t^7 \right) \quad \text{E(8.24)}$$

Parámetro	Descripción
Par_1	Tercer segmento del fenotipo, <i>índice_m</i> .
Par_2	Tiempo t dentro del tiempo de proceso.
Par_3	Tiempo de proceso. Último segmento del fenotipo
Par_4	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_7	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_8	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_9	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.9). Función Pol8G+Variable\_vR(); +=P, V, A, J, y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN**

longitud\_recta(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6)

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, de la longitud de la recta.

Parámetro	Descripción
Par_1	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_2	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_5	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Función pública y sus entradas, así como su salida, son declaradas datos de doble precisión

Tabla (A.5.1.10). Función longitud\_recta() y sus parámetros de entrada.

### A.5.2. MÓDULO GEOMÉTRICAS\_TRAYECTORIA

Este módulo de segundo nivel, constitutivo de **EVALUADOR**, tiene como objetivo procesar la región geométrica de la trayectoria que puede ser alguna de las siguientes:

- Recta en forma paramétrica.
- Arco en forma paramétrico.

La estructura de este módulo se puede ver en la figura (A.5.2.1) siguiente.

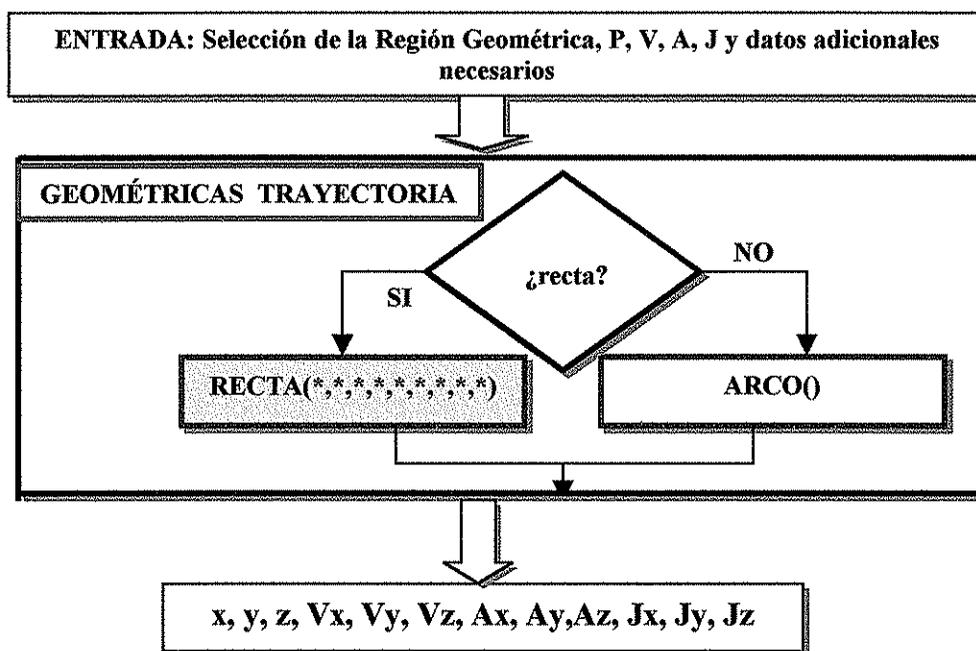


Figura (A.5.2.1). Estructura del módulo **GEOMETRICAS\_TRAYECTORIA**.

Este módulo recibe la selección de la región geométrica, algunos datos primarios, como puntos de inicio y fin de la recta o centro, eje de giro y radio del arco, y los datos procesados por **PERFILES\_TRAYECTORIA**, P, V, A y J.

Como datos de salida, **GEOMÉTRICAS\_TRAYECTORIA** entrega las coordenadas de la posición, velocidad, aceleración y jerk del órgano terminal en el instante  $t \in [0, t_{\text{proceso}}]$ , ya sea que siga una recta o un arco.

En este apartado se explica sólo el módulo correspondiente a la recta en forma paramétrica, **RECTA()**.

## MÓDULO RECTA()

Este módulo calcula un punto  $P(x(t), y(t), z(t))$  sobre una recta comprendida entre dos puntos  $P1$  y  $P2$ , y sus derivadas. Define la región geométrica de la trayectoria, tipo recta, regida por los parámetros  $P$ ,  $V$ ,  $A$  y  $J$  de cualquier perfil de trayectoria del módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA** (trapezoidal, de grado 5, de grado 8, spline, etc.).

## DESCRIPCIÓN

Como entradas se tienen las variables globales (visibles en toda la aplicación):  $P$ ,  $V$ ,  $A$ ,  $P1(P1x, P1y, P1z)$ ,  $P2(P2x, P2y, P2z)$ , cuya descripción se ofrece a continuación, en la tabla (A.5.2.1).

Variable	Características	Descripción
$P$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Variable regida por la función de posición del perfil de trayectoria.
$V$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Variable regida por la función de velocidad del perfil de trayectoria.
$A$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Variable regida por la función de aceleración del perfil de trayectoria.
$J$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Variable regida por la función del jerk del perfil de trayectoria.
$(P1x, P1y, P1z)$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del punto de inicio de la recta, $P1$ . Este dato es primario.
$(P2x, P2y, P2z)$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del punto de inicio de la recta, $P2$ . Este dato es primario.

Tabla (A.5.2.1). Variables de entrada del módulo **RECTA()**. Tipo y Características.

Como salida se tienen las variables globales:  $x, y, z, V_x, V_y, V_z, A_x, A_y, A_z, J_x, J_y, J_z$ , que son las coordenadas de la posición sobre la recta, su velocidad, su aceleración y su jerk, como funciones del tiempo y gobernadas por el perfil de trayectoria escogido. Su descripción se ofrece a continuación, en la tabla (A.5.2.2).

Variable	Características	Descripción
$(x, y, z)$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas de un punto de la recta alcanzada por el órgano terminal regida por la función de posición del perfil de trayectoria.
$(V_x, V_y, V_z)$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas de la velocidad del órgano terminal sobre la recta regidas por la función de velocidad del perfil de trayectoria.
$(A_x, A_y, A_z)$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas de la aceleración del órgano terminal regidas por la función de aceleración del perfil de trayectoria.
$(J_x, J_y, J_z)$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del jerk del órgano terminal regidas por la función de aceleración del perfil de trayectoria.

Tabla (A.5.2.2). Variables de salida del módulo RECTA(). Tipo y características

La estructura sintética del módulo RECTA se expresa mediante la figura (A.5.2.2) siguiente.

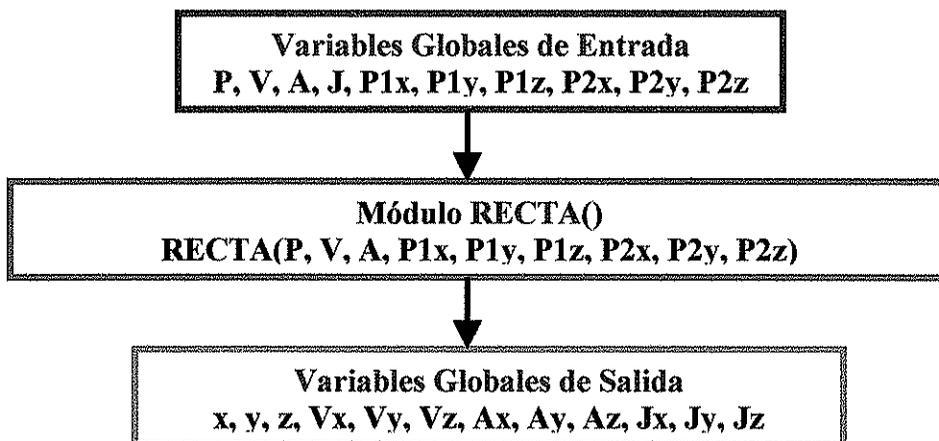


Figura (A.5.2.2). El Módulo RECTA() con sus entradas y sus salidas.

El módulo **RECTA()** hace uso de una subrutina de primer nivel, **Recta()**, de 4 subrutinas de segundo nivel, **RectaPOS()**, **RectaVEL()**, **RectaACE()** y **RectaJERK()**, de 12 funciones de primer nivel, **xRECTA()**, **yRECTA()**, **zRECTA()**, **VxRECTA()**, **VyRECTA()**, **VzRECTA()**, **AxRECTA()**, **AyRECTA()**, **AzRECTA()**, **JxRECTA()**, **JyRECTA()**, **JzRECTA()** y de la función ya definida, **longitud\_recta()**.

En la figura (A.5.2.3) siguiente se presenta la estructura detallada del Módulo **RECTA()** con sus subrutinas y funciones constitutivas.

Aunque el módulo está diseñado para ser llamado como uno totalmente independiente, éste recibe la información de los módulos **TRAPEZOIDAL**, **POLINOMIO\_5G**, **POLINOMIO\_8G**, **SPLINE3P2V**, **SPLINE4P2V**, **SPLINE 5P2V** o **SPLINE6P2V**, constitutivos de **PERFILES\_TRAYECTORIA** y que entrega las variable **P**, **V**, **A** y **J**, y los datos primarios de la selección del tipo de región geométrica de la trayectoria. Además, entrega sus resultados al módulo **MODELOS\_4DOF**. Ver figura (A.5.2.4)

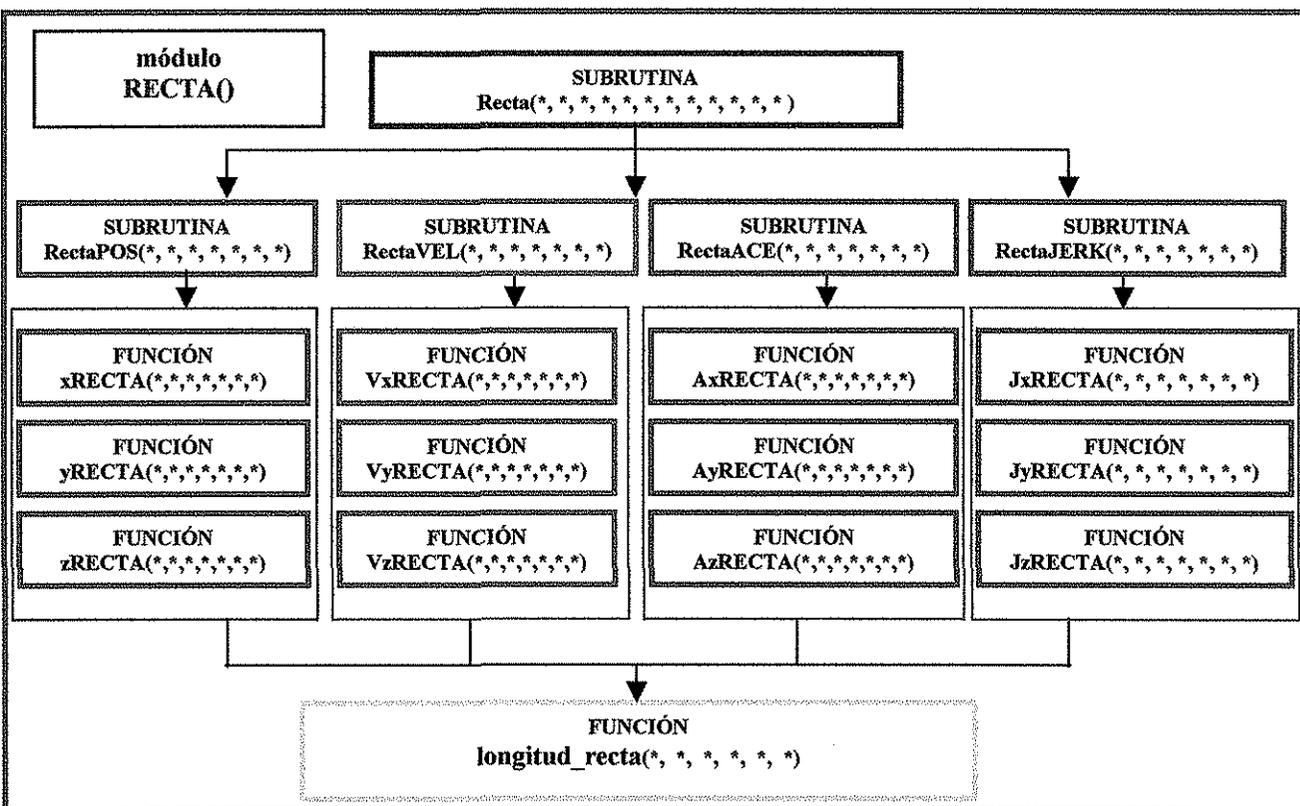


Figura (A.5.2.3). Estructura detallada del módulo RECTA.

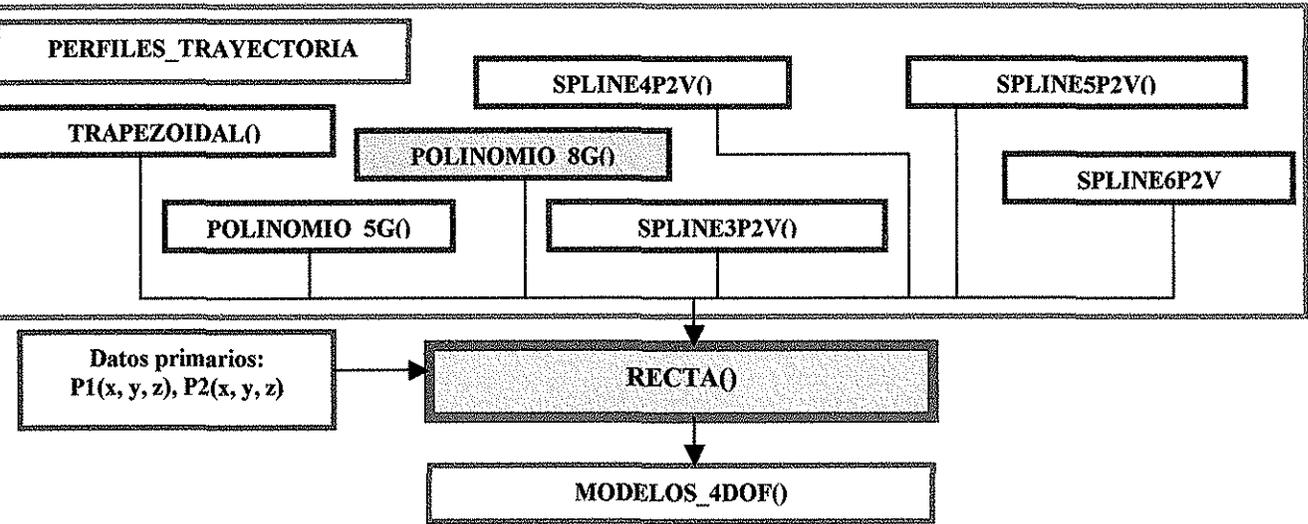


Figura (A.5.2.4). La relación del módulo RECTA() con otras partes del proyecto.

### DESCRIPCIÓN DE LAS SUBROUTINAS DEL MÓDULO RECTA

A continuación se presenta la tabla (A.5.2.3) que describe las subrutinas de primer y segundo niveles. Sus entrada se presentan en las tablas (A.5.2.4)-(A.5.2.8).

SUBROUTINA	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
Recta(*,*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Nivel: Primer	Subrutina Global con 10 parámetros de entrada y 12 de salida. Se auxilia de 3 subrutinas de segundo nivel: RECTAPOS(), RECTAVEL() y RECTAAACE().
RectaPOS(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 7 parámetros de entrada y 3 de salida (coordenadas de posición). Se auxilia de 3 funciones de primer nivel: xRECTA(), yRECTA() y zRECTA().
RectaVEL(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 7 parámetros de entrada y 3 de salida (coordenadas de velocidad). Se auxilia de 3 funciones de primer nivel: VxRECTA(), VyRECTA() y VzRECTA().
RectaACE(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 7 parámetros de entrada y 3 de salida (coordenadas de aceleración). Se auxilia de 3 funciones de primer nivel: AxRECTA(), AyRECTA() y AzRECTA().
RectaJERK(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 7 parámetros de entrada y 3 de salida (coordenadas del jerk). Se auxilia de 3 funciones de primer nivel: JxRECTA(), JyRECTA() y JzRECTA().

Tabla (A.5.2.3). Descripción de las subrutinas constitutivas del módulo RECTA.



## SUBROUTINA

Recta(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9, Par\_10)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las coordenada x, y, x, Vx, Vy, Vz, Ax, Ay, Az, Jx, Jy, Jz, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro P del perfil de trayectoria
Par_2	Parámetro V del perfil de trayectoria
Par_3	Parámetro A del perfil de trayectoria
Par_4	Parámetro J del perfil de trayectoria
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_8	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_9	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_10	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.2.4). Subrutina Recta() y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

RectaPOS(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las coordenada x, y, x, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro P del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.2.5). Subrutina RectaPOS() y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

RectaVEL(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las coordenada de la velocidad  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , sobre la recta, en el tiempo  $t$

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro V del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto $P_1$
Par_3	Coordenada y del punto $P_1$
Par_4	Coordenada z del punto $P_1$
Par_5	Coordenada x del punto $P_2$
Par_6	Coordenada y del punto $P_2$
Par_7	Coordenada z del punto $P_2$

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.2.6). Subrutina RectaVEL() y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

RectaACE(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las coordenada de la aceleración,  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ , sobre la recta, en el tiempo  $t$

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro A del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto $P_1$
Par_3	Coordenada y del punto $P_1$
Par_4	Coordenada z del punto $P_1$
Par_5	Coordenada x del punto $P_2$
Par_6	Coordenada y del punto $P_2$
Par_7	Coordenada z del punto $P_2$

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.2.7). Subrutina RectaACE() y sus parámetros de entrada.

**SUBROUTINA**

**RectaJERK(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las coordenada del jerk, Jx, Jy, Jz, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro J del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.2.8). Subrutina RectaJERK() y sus parámetros de entrada.

**DESCRIPCIÓN DE LAS FUNCIONES CONSTITUTIVAS DEL MÓDULO RECTA**

A continuación se presentan las tablas (A.5.2.9), (A.5.2.10), (A.5.2.11) y (A.5.2.12) que describen a cada una de las funciones de primer y segundo niveles.

FUNCIONES	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
xRECTA(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada de posición x . Se auxilia de la función de segundo nivel longitud_recta()
yRECTA(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada de posición y . Se auxilia de la función de segundo nivel longitud_recta()
zRECTA(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada de posición z . Se auxilia de la función de segundo nivel longitud_recta()

Tabla (A.5.2.9). Funciones de primer nivel que regresan las coordenadas x, y, z, sobre la recta, alcanzada en el tiempo t, según el perfil de trayectoria empleado.



FUNCIONES	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
$V_x\text{RECTA}(*,*,*,*,*,*,*)$	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada de la velocidad x. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud recta()
$V_y\text{RECTA}(*,*,*,*,*,*,*)$	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada de la velocidad y. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud recta()
$V_z\text{RECTA}(*,*,*,*,*,*,*)$	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada de la velocidad z. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud recta()

Tabla (A.5.2.10). Funciones de primer nivel que regresan las coordenadas  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , sobre la recta, alcanzada en el tiempo  $t$ , según el perfil de trayectoria empleado.

FUNCIONES	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
$A_x\text{RECTA}(*,*,*,*,*,*,*)$	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada x de la aceleración. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud recta()
$A_y\text{RECTA}(*,*,*,*,*,*,*)$	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada y de la aceleración. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud recta()
$A_z\text{RECTA}(*,*,*,*,*,*,*)$	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada z de la aceleración. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud recta()

Tabla (A.5.2.11). Funciones de primer nivel que regresan las coordenadas  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ , sobre la recta, alcanzada en el tiempo  $t$ , según el perfil de trayectoria empleado.

FUNCIONES	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
AxRECTA(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada x de la aceleración. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud_recta()
AyRECTA(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada y de la aceleración. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud_recta()
AzRECTA(*,*,*,*,*,*,*)	Ámbito: Global Tipo: precisión doble Nivel: Primer	Función Global con 7 parámetros de entrada. Regresa la coordenada z de la aceleración. Se auxilia de la función de segundo nivel longitud_recta()

Tabla (A.5.2.12). Funciones de primer nivel que regresan las coordenadas Jx, Jy, Jz, sobre la recta, alcanzada en el tiempo t, según el perfil de trayectoria empleado.

## LLAMADA DE FUNCIONES

Las funciones están diseñadas para ser usadas en cualquier parte de la aplicación gracias a que están declaradas como funciones globales o públicas. Todas las funciones regresan un solo valor a partir de ciertos parámetros de entrada, entregados en cierto orden. En las Tablas siguientes se presenta la descripción de los parámetros de cada una de las funciones.

### FUNCIÓN

xRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, de la coordenada x, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par 1	Parámetro P del perfil de trayectoria
Par 2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par 3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par 4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par 5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par 6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par 7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.13). Función xRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****yRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada y, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro P del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.14). Función yRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****zRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada z, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro P del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.15). Función zRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****VxRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada x de la velocidad, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro V del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.16). Función VxRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****VyRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada y de la velocidad, sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro V del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.17). Función VyRECTA() y sus parámetros de entrada.

---

**FUNCIÓN**
**VzRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**


---

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada z de la velocidad sobre la recta, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro V del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

---

Tabla (A.5.2.18). Función VzRECTA() y sus parámetros de entrada.

---

**FUNCIÓN**
**AxRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**


---

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada x de la aceleración, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro A del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

---

Tabla (A.5.2.19). Función AxRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN**

AyRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada y, de la aceleración, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro A del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.20). Función AyRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN**

AzRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada z, de la aceleración, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro A del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.21). Función AzRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****JxRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada x, del jerk, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro J del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.22). Función JxRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****JyRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)**

Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada y, del jerk, en el tiempo t

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro J del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single

Tabla (A.5.2.23). Función JyRECTA() y sus parámetros de entrada.

**FUNCIÓN****JzRECTA(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)****Salida: Entrega el valor, tipo Single, de la coordenada z, del jerk, en el tiempo t**

Parámetro	Descripción
Par_1	Parámetro J del perfil de trayectoria
Par_2	Coordenada x del punto P <sub>1</sub>
Par_3	Coordenada y del punto P <sub>1</sub>
Par_4	Coordenada z del punto P <sub>1</sub>
Par_5	Coordenada x del punto P <sub>2</sub>
Par_6	Coordenada y del punto P <sub>2</sub>
Par_7	Coordenada z del punto P <sub>2</sub>

**Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como Single**

Tabla (A.5.2.24). Función JzRECTA() y sus parámetros de entrada.

### A.5.3. MÓDULO MODELOS\_4DOF

Este módulo tiene como objetivo entregar las variables articulares y sus primeras, segundas y hasta terceras derivadas en función de las condiciones operacionales; por lo tanto, evalúa la cinemática inversa empleando, entre otras, las ecuaciones del Tornillo J y la Tuerca J.

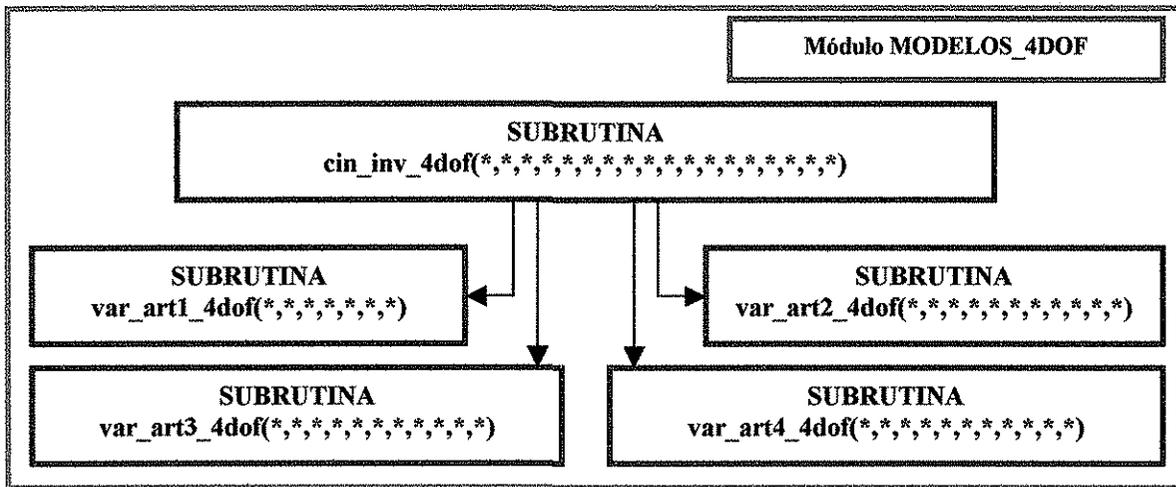


Figura (A.5.3.1). Estructura del módulo MODELOS\_4DOF.

Este módulo consta de la subrutina `cin_inv_4dof()`, de primer nivel, y 4 subrutinas subordinadas, `var_art1_4dof()`, `var_art2_4dof()`, `var_art3_4dof()` y `var_art4_4dof()`.

La subrutina `cin_inv_4dof()` recibe 18 parámetros o argumentos, tabla (A.5.3.1) y entrega 16 resultados que son las 4 variables articulares y sus primeras, segundas y terceras derivadas. Para lograrlo, esta subrutina delega responsabilidades a las 4 subrutinas subordinadas; cada una de éstas procesa su respectiva articulación.

Variable	Características	Descripción
(x, y, z)	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del punto operacional sobre la recta, P1. Entregado por <b>GEOMETRICAS TRAYECTORIA</b>
(Vx, Vy, Vz)	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas de velocidad del punto operacional sobre la recta, P1. Entregado por <b>GEOMETRICAS TRAYECTORIA</b>
(Ax, Ay, Az)	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas de aceleración del punto operacional sobre la recta, P1. Entregado por <b>GEOMETRICAS TRAYECTORIA</b>
(Jx, Jy, Jz)	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del jerk del punto operacional sobre la recta, P1. Entregado por <b>GEOMETRICAS TRAYECTORIA</b>
$l_1, l_2, l_3$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Longitudes de los eslabones con movimiento rotacional, entregados por <b>TRADUCTOR</b>
$e_1, e_2, e_3$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Espesores de los eslabones con movimiento rotacional, éstos son datos primarios

Tabla (A.5.3.1). Tipo y Características de las variables de entrada del módulo **MODELOS\_4DOF**, que también se transmiten a la subrutina de primer nivel, **cin\_inv\_4dof()**.

La subrutina **var\_art1\_4dof()** se auxilia de 4 funciones, figura (A.5.3.2):

- **d1\_4dof(\*,\*,\*,\*)**, procesa la posición de la primera variable articular cuyo movimiento es prismático.
- **d1p\_4dof(\*)**, evalúa la velocidad lineal de la articulación prismática.
- **d1pp\_4dof(\*)**, entrega la aceleración de la misma articulación.
- **d1ppp\_4dof(\*)**, proporciona los cambios de aceleración de la articulación.

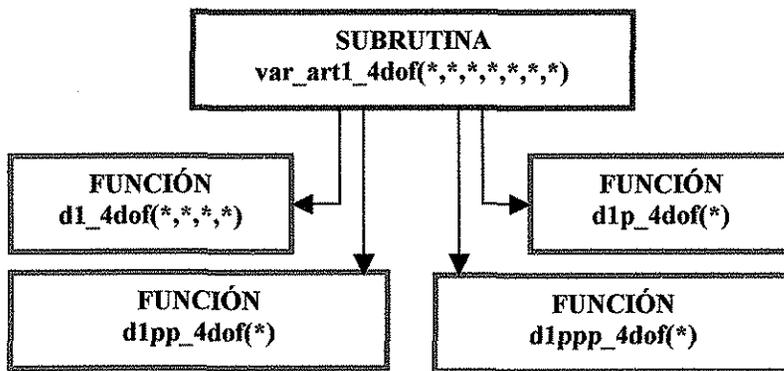


Figura (A.5.3.2). La estructura de la subrutina **var\_art1\_4dof()**.

La subrutina `var_art2_4dof()`, dedicada a procesar lo referente a la segunda variable articular, utiliza, también, 4 funciones, figura (A.5.3.3):

- `teta2_4dof(*,*,*,*)`, procesa la posición de la segunda variable articular cuyo movimiento es rotativo.
- `teta2p_4dof(*)`, evalúa la velocidad angular de la articulación.
- `teta2pp_4dof(*)`, entrega la aceleración de la misma articulación.
- `teta2ppp_4dof(*)`, proporciona los cambios de aceleración de la articulación.

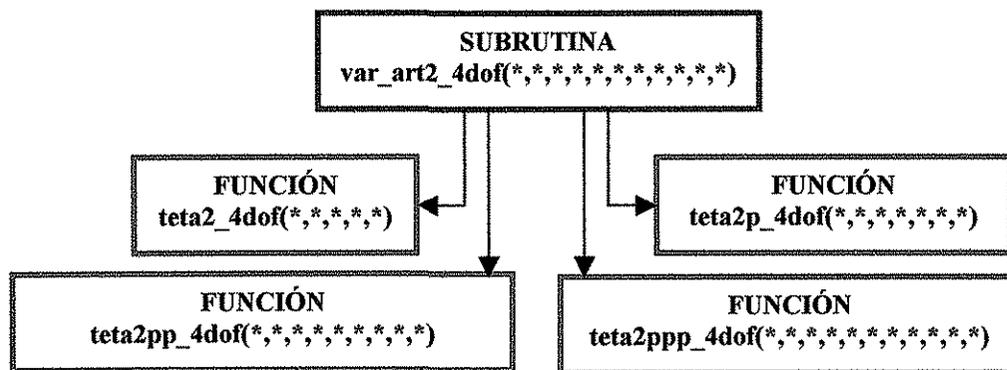
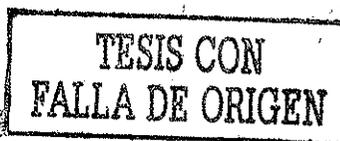


Figura (A.5.3.3). La estructura de la subrutina `var_art2_4dof()`.

En lo que respecta a la articulación 3 se diseñó la subrutina `var_art3_4dof()`; utiliza, también, 4 funciones, figura (A.5.3.4):

- `teta3_4dof(*,*,*,*)`, procesa la posición de la segunda variable articular cuyo movimiento es rotativo.
- `teta3p_4dof(*)`, evalúa la velocidad angular de la articulación.
- `teta3pp_4dof(*)`, entrega la aceleración de la misma articulación.
- `teta3ppp_4dof(*)`, proporciona los cambios de aceleración de la articulación.



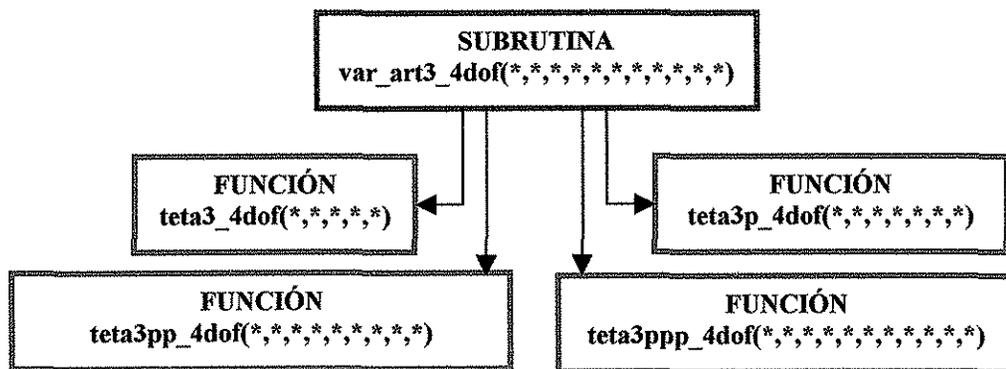


Figura (A.5.3.4). La estructura de la subrutina var\_art3\_4dof().

Por último, para la articulación 4, la subrutina var\_art4\_4dof(), hace uso de 4 funciones, figura (A.5.3.5):

- teta4\_4dof(\*,\*,\*,\*), procesa la posición de la segunda variable articular cuyo movimiento es rotativo.
- teta4p\_4dof(\*), evalúa la velocidad angular de la articulación.
- teta4pp\_4dof(\*), entrega la aceleración de la misma articulación.
- teta4ppp\_4dof(\*), proporciona los cambios de aceleración de la articulación.

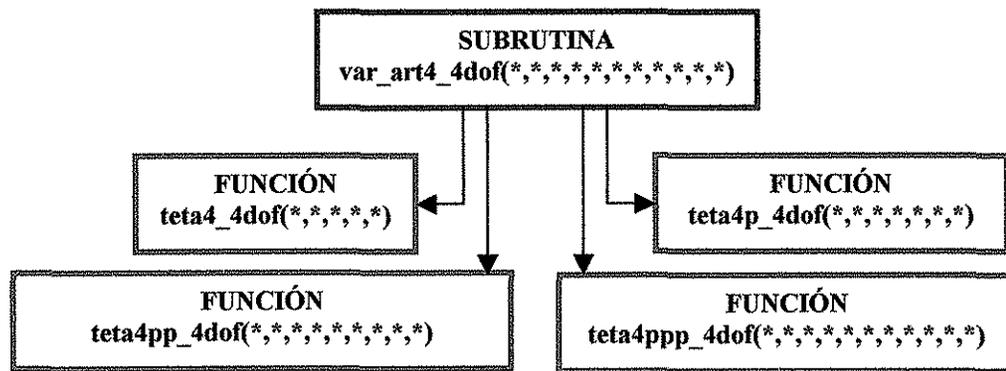


Figura (A.5.3.5). La estructura de la subrutina var\_art4\_4dof().

## LLAMADA DE LAS SUBRUTINAS

En las tablas (A.5.3.2)-(A.5.3.6) siguientes se describen los parámetros que deben ser pasados a las subrutinas constitutivas, declaradas como globales o públicas, del módulo **MODELOS\_4DOF**.

### SUBRUTINA

**cin\_inv\_4dof** (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9, Par\_10, Par\_11, Par\_12, Par\_13, Par\_14, Par\_15, Par\_16, Par\_17, Par\_18)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las variables articulares y sus derivadas: d1, d1p, d1pp, d1ppp, teta2, teta2p, teta2pp, teta2ppp, teta3, teta3p, teta3pp, teta3ppp, teta4, teta4p, teta4pp, teta4ppp

Parametro	Descripción
Par 1	Coordenada x del órgano terminal
Par 2	Coordenada y del órgano terminal
Par 3	Coordenada z del órgano terminal
Par 4	Coordenada Vx de la velocidad del órgano terminal
Par 5	Coordenada Vy de la velocidad del órgano terminal
Par 6	Coordenada Vz de la velocidad del órgano terminal
Par 7	Coordenada Ax de la aceleración del órgano terminal
Par 8	Coordenada Ay de la aceleración del órgano terminal
Par 9	Coordenada Az de la aceleración del órgano terminal
Par 10	Coordenada Jx del jerk del órgano terminal
Par 11	Coordenada Jy del jerk del órgano terminal
Par 12	Coordenada Jz del jerk del órgano terminal
Par 13	Longitud $l_1$ del primer eslabón rotativo
Par 14	Longitud $l_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 15	Longitud $l_3$ del tercer eslabón rotativo
Par 16	Espesor $e_1$ del primer eslabón rotativo
Par 17	Espesor $e_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 18	Espesor $e_3$ del tercer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.3.2). Subrutina **cin\_inv\_4dof** () y sus parámetros de entrada.

## SUBRUTINA

var\_art1\_4dof(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de la variable articular 1 y sus derivadas: d1, d1p, d1pp, d1ppp

Parámetro	Descripción
Par 1	Coordenada z del órgano terminal
Par 2	Coordenada Vz de la velocidad del órgano terminal
Par 3	Coordenada Az de la aceleración del órgano terminal
Par 4	Coordenada Jz de la aceleración del órgano terminal
Par 5	Espesor $e_1$ del primer eslabón rotativo
Par 6	Espesor $e_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 7	Espesor $e_3$ del tercer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.3.3). Subrutina var\_art1\_4dof () y sus parámetros de entrada.

## SUBRUTINA

var\_art2\_4dof(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9, Par\_10, Par\_11)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de la variable articular 2 y sus derivadas: teta2, teta2p, teta2pp, teta2ppp

Parámetro	Descripción
Par 1	Coordenada x del órgano terminal
Par 2	Coordenada y del órgano terminal
Par 3	Coordenada Vx de la velocidad del órgano terminal
Par 4	Coordenada Vy de la velocidad del órgano terminal
Par 5	Coordenada Ax de la aceleración del órgano terminal
Par 6	Coordenada Ay de la aceleración del órgano terminal
Par 7	Coordenada Jx del jerk del órgano terminal
Par 8	Coordenada Jy del jerk del órgano terminal
Par 9	Longitud $l_1$ del primer eslabón rotativo
Par 10	Longitud $l_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 11	Longitud $l_3$ del tercer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.3.4). Subrutina var\_art2\_4dof () y sus parámetros de entrada.

**SUBROUTINA****var\_art3\_4dof (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9, Par\_10, Par\_11)**

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de la variable articular 3 y sus derivadas: teta3, teta3p, teta3pp, teta3ppp

Parámetro	Descripción
Par_1	Coordenada x del órgano terminal
Par_2	Coordenada y del órgano terminal
Par_3	Coordenada Vx de la velocidad del órgano terminal
Par_4	Coordenada Vy de la velocidad del órgano terminal
Par_5	Coordenada Ax de la aceleración del órgano terminal
Par_6	Coordenada Ay de la aceleración del órgano terminal
Par_7	Coordenada Jx del jerk del órgano terminal
Par_8	Coordenada Jy del jerk del órgano terminal
Par_9	Longitud l <sub>1</sub> del primer eslabón rotativo
Par_10	Longitud l <sub>2</sub> del segundo eslabón rotativo
Par_11	Longitud l <sub>3</sub> del tercer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.3.5). Subrutina var\_art3\_4dof () y sus parámetros de entrada.

**SUBROUTINA****var\_art4\_4dof (Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9, Par\_10, Par\_11)**

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de la variable articular 4 y sus derivadas: teta4, teta4p, teta4pp, teta4ppp

Parámetro	Descripción
Par_1	Coordenada x del órgano terminal
Par_2	Coordenada y del órgano terminal
Par_3	Coordenada Vx de la velocidad del órgano terminal
Par_4	Coordenada Vy de la velocidad del órgano terminal
Par_5	Coordenada Ax de la aceleración del órgano terminal
Par_6	Coordenada Ay de la aceleración del órgano terminal
Par_7	Coordenada Jx del jerk del órgano terminal
Par_8	Coordenada Jy del jerk del órgano terminal
Par_9	Longitud l <sub>1</sub> del primer eslabón rotativo
Par_10	Longitud l <sub>2</sub> del segundo eslabón rotativo
Par_11	Longitud l <sub>3</sub> del tercer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.3.6). Subrutina var\_art4\_4dof () y sus parámetros de entrada.

### A.5.4. MÓDULO INERCIAS\_MASAS

Este módulo se encarga de determinar los momentos y productos de inercia, los volúmenes y las masas de los eslabones.

Entrega 20 resultados a partir de 18 parámetros de entrada, tabla (A.5.4.1), auxiliándose de una subrutina de primer nivel y de 4 subordinadas, figura (A.5.4.1).

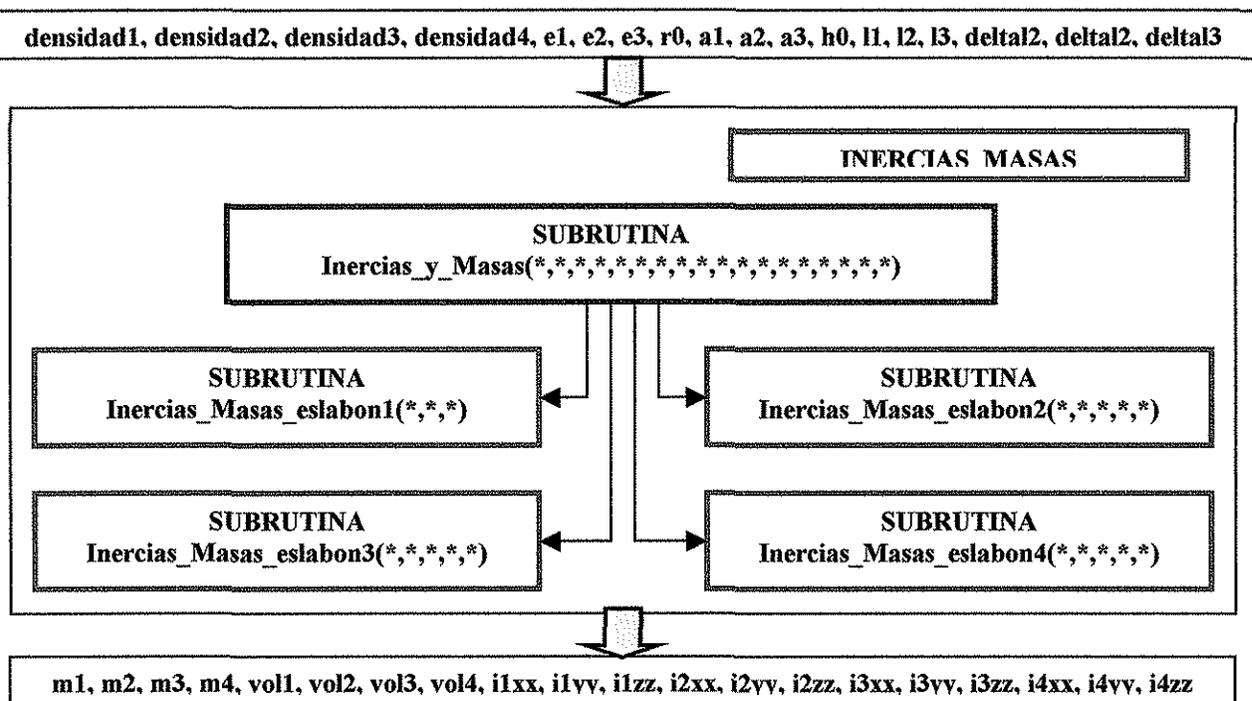


Figura (A.5.4.1). Estructura del módulo INERCIAS\_MASAS.

Cada una de las subrutinas de segundo nivel auxilia a la de primer nivel en la búsqueda de la masa, volumen y momentos de inercia del correspondiente eslabón.



Variable	Características	Descripción
densidad <sub>i</sub> ; i=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Densidad del eslabón i. Datos primarios
e <sub>1</sub> , e <sub>2</sub> , e <sub>3</sub>	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Espesores de los eslabones con movimiento rotacional; éstos son datos primarios
l <sub>1</sub> , l <sub>2</sub> , l <sub>3</sub>	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Longitudes de los eslabones con movimiento rotacional, entregados por TRADUCTOR
a <sub>1</sub> , a <sub>2</sub> , a <sub>3</sub>	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Anchos de los eslabones con movimiento rotacional; éstos son datos primarios
r0, h0	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Radio y altura del primer eslabón con movimiento prismático. Datos prismáticos
deltai; i=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Longitud a la izquierda y a la derecha de cada eje del eslabón i. Dato primario

Tabla (A.5.4.1). Tipo y Características de las variables de entrada del módulo INERCIAS\_MASAS, que también se transmiten a su subrutina de primer nivel, Inercias\_y\_Masas().

Cada subrutina procesa la información adecuadamente si el orden de entrega de los datos es la correcta. En las tablas (A.5.4.2), (A.5.4.3), (A.5.4.4), (A.5.4.5) y (A.5.4.6) se indica este orden y la descripción de los datos proporcionados a cada subrutina.

## SUBROUTINA

Inercias\_y\_Masas(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8, Par\_9, Par\_10, Par\_11, Par\_12, Par\_13, Par\_14, Par\_15, Par\_16, Par\_17, Par\_18)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las masas, volúmenes y momentos de inercia de los cuatro eslabones con movimiento:  $m_1, m_2, m_3, m_4, vol1, vol2, vol3, vol4, i1xx, i1yy, i1zz, i2xx, i2yy, i2zz, i3xx, i3yy, i3zz, i4xx, i4yy, i4zz$

Parámetro	Descripción
Par 1	Densidad del material del eslabón 1, densidad1.
Par 2	Densidad del material del eslabón 1, densidad2.
Par 3	Densidad del material del eslabón 1, densidad3.
Par 4	Densidad del material del eslabón 1, densidad4.
Par 5	Espesor $e_1$ del primer eslabón rotativo
Par 6	Espesor $e_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 7	Espesor $e_3$ del tercer eslabón rotativo
Par 8	Radio $r_0$ del eslabón prismático
Par 9	Ancho $a_1$ del primer eslabón rotativo
Par 10	Ancho $a_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 11	Ancho $a_3$ del tercer eslabón rotativo
Par 12	Altura $h_0$ del eslabón prismático
Par 13	Longitud $l_1$ del primer eslabón rotativo
Par 14	Longitud $l_2$ del segundo eslabón rotativo
Par 15	Longitud $l_3$ del tercer eslabón rotativo
Par 16	Longitud a la izquierda y a la derecha de los ejes del eslabón 2 delta1
Par 17	Longitud a la izquierda y a la derecha de los ejes del eslabón 3 delta2
Par 18	Longitud a la izquierda y a la derecha de los ejes del eslabón 4 delta3

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.4.2). Subrutina Inercias\_y\_Masas () y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

Inercias\_Masas\_eslabon1(Par\_1, Par\_2, Par\_3)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las masas, volúmenes y momentos de inercia de los cuatro eslabones con movimiento:  $m1$ ,  $vol1$ ,  $i1xx$ ,  $i1yy$ ,  $i1zz$

Parámetro	Descripción
Par 1	Densidad del material del eslabón 1, densidad1.
Par 2	Altura $h_0$ del eslabón prismático.
Par 3	Radio $r_0$ del eslabón prismático.

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.4.3). Subrutina Inercias\_Masas\_eslabon1() y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

Inercias\_Masas\_eslabon2(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5)

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las masas, volúmenes y momentos de inercia de los cuatro eslabones con movimiento:  $m2$ ,  $vol2$ ,  $i2xx$ ,  $i2yy$ ,  $i2zz$

Parámetro	Descripción
Par 1	Densidad del material del eslabón 1, densidad2.
Par 2	Longitud $l_1$ del primer eslabón rotativo
Par 3	Longitud a la izquierda y a la derecha de los ejes del eslabón 2 delta1
Par 4	Espesor $e_1$ del primer eslabón rotativo
Par 5	Ancho $a_1$ del primer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.4.4). Subrutina Inercias\_Masas\_eslabon2() y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

**Inercias\_Masas\_eslabon3(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5)**

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las masas, volúmenes y momentos de inercia de los cuatro eslabones con movimiento: m3, vol3, i3xx, i3yy, i3zz

Parámetro	Descripción
Par 1	Densidad del material del eslabón 1, densidad3.
Par 2	Longitud $l_2$ del primer eslabón rotativo
Par 3	Longitud a la izquierda y a la derecha de los ejes del eslabón 2 delta2
Par 4	Espesor $e_2$ del primer eslabón rotativo
Par 5	Ancho $a_2$ del primer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.4.5). Subrutina Inercias\_Masas\_eslabon3() y sus parámetros de entrada.

## SUBROUTINA

**Inercias\_Masas\_eslabon4(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5)**

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las masas, volúmenes y momentos de inercia de los cuatro eslabones con movimiento: m4, vol4, i4xx, i4yy, i4zz

Parámetro	Descripción
Par 1	Densidad del material del eslabón 1, densidad4.
Par 2	Longitud $l_3$ del primer eslabón rotativo
Par 3	Longitud a la izquierda y a la derecha de los ejes del eslabón 2 delta3
Par 4	Espesor $e_3$ del primer eslabón rotativo
Par 5	Ancho $a_3$ del primer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

Tabla (A.5.4.6). Subrutina Inercias\_Masas\_eslabon4() y sus parámetros de entrada.

### A.5.5. MÓDULO VECTORES\_CG\_BASES\_REF

Este módulo es el más pequeño de todos. Se encarga de determinar los vectores de los centros de gravedad de cada eslabón respecto de su base referencial, además, determina el origen del eslabón  $i+1$  respecto de  $i$ , con  $i = 0, 1, 2$  y  $3$ .

Entrega 24 resultados (los 3 componentes de los 4 vectores que determinan el centro de gravedad de los eslabones y los 3 componentes de los 4 vectores que definen el origen del eslabón siguiente al que se analiza) a partir de 8 parámetros de entrada, tabla (A.5.5.1), auxiliándose de simplemente una subrutina de primer nivel, figura (A.5.5.1).

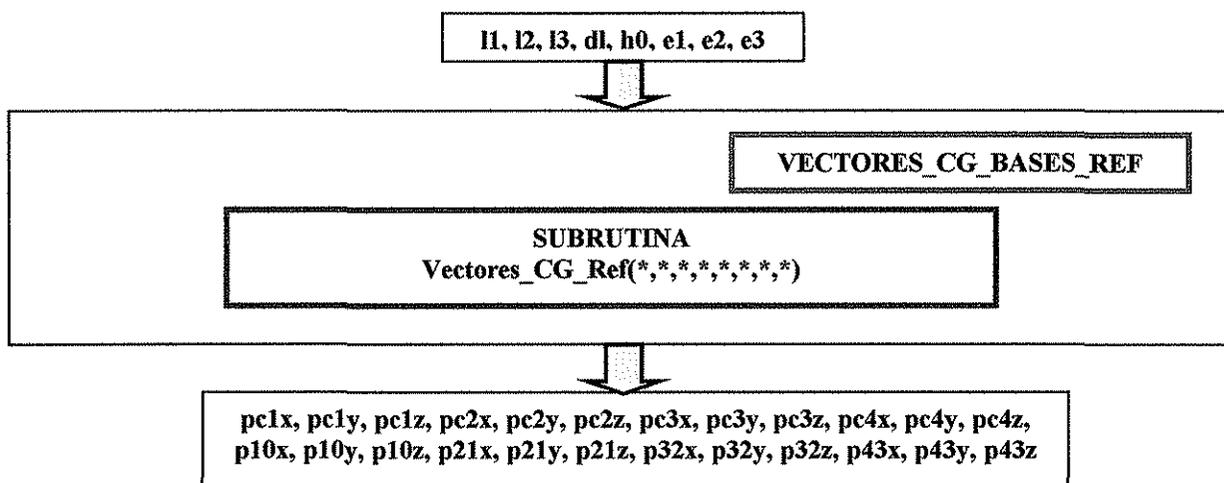
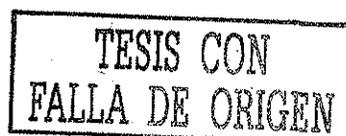


Figura (A.5.5.1). Estructura del módulo VECTORES\_CG\_BASES\_REF

Variable	Características	Descripción
$l_1, l_2, l_3$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Longitudes de los eslabones con movimiento rotacional, entregados por TRADUCTOR
d1	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Variable articular 1 proporcionada por MODELOS 4DOF
h0	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Altura del primer eslabón con movimiento prismático. Datos primarios.
$e_1, e_2, e_3$	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Espesores de los eslabones con movimiento rotacional; éstos son datos primarios

Tabla (A.5.5.1). Tipo y Características de las variables de entrada del módulo VECTORES\_CG\_BASES\_REF, que también se transmiten a su subrutina de primer nivel, Vectores\_CG\_Ref().



La subrutina procesa la información adecuadamente si el orden de entrega de los datos es la correcta. En la tabla (A.5.5.2) se indica este orden y la descripción de los datos proporcionados a ella.

---

**SUBRUTINA**

**Vectores\_CG\_Ref(Par\_1, Par\_2, Par\_3, Par\_4, Par\_5, Par\_6, Par\_7, Par\_8)**

---

Salida: Entrega los valores, tipo doble precisión, de las masas, volúmenes y momentos de inercia de los cuatro eslabones con movimiento:  $m_1, m_2, m_3, m_4, vol_1, vol_2, vol_3, vol_4, i_{1xx}, i_{1yy}, i_{1zz}, i_{2xx}, i_{2yy}, i_{2zz}, i_{3xx}, i_{3yy}, i_{3zz}, i_{4xx}, i_{4yy}, i_{4zz}$

Parámetro	Descripción
Par_1	Longitud $l_1$ del primer eslabón rotativo
Par_2	Longitud $l_2$ del segundo eslabón rotativo
Par_3	Longitud $l_3$ del tercer eslabón rotativo
Par_4	Variable articular 1 proporcionada por MODELOS_4DOF, $d_1$ .
Par_5	Altura $h_0$ del eslabón prismático
Par_6	Espesor $e_1$ del primer eslabón rotativo
Par_7	Espesor $e_2$ del segundo eslabón rotativo
Par_8	Espesor $e_3$ del tercer eslabón rotativo

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salidas, son declaradas como doble precisión

---

Tabla (A.5.5.2). Subrutina Vectores\_CG\_Ref() y sus parámetros de entrada.

### A.5.6. MÓDULO DINÁMICA\_4DOF

Este módulo procesa las ecuaciones de momentos, fuerzas y energías de un manipulador de 4 grados de libertad, PRRRd. Recibe 52 parámetros de entrada y regresa 29 parámetros de salida.

#### DESCRIPCIÓN

Como entradas se tienen las variables globales (visibles en toda la aplicación): d1, teta2, teta3, teta4, d1p, teta2p, teta3p, teta4p, d1pp, teta2pp, teta3pp, teta4pp, m1, m2, m3, m4, i1xx, i1yy, i1zz, i3xx, i3yy, i3zz, i4xx, i4yy, i4zz, pc1x, pc1y, pc1z, pc2x, pc2y, pc2z, pc3x, pc3y, pc3z, pc4x, pc4y, pc4z, p10x, p10y, p10z, p21x, p21y, p21z, p32x, p32y, p32z, p43x, p43y, cuya descripción se ofrece a continuación, en la tablas (A.5.6.1)-(A.5.6.6).

Variable	Características	Descripción
d1	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Primera variable articular, entregada por MODELOS 4DOF
teta2	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Segunda variable articular, entregada por MODELOS 4DOF
teta3	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Tercera variable articular, entregada por MODELOS 4DOF
teta4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Cuarta variable articular, entregada por MODELOS 4DOF

Tabla (A.5.6.1). Primeros 4 parámetros de entrada del módulo DINAMICA\_4DOF. Tipo, características y descripción

Variable	Características	Descripción
d1p	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Derivada de la primera variable articular, entregada por MODELOS 4DOF
teta2p	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Derivada de la segunda variable articular, entregada por MODELOS 4DOF
teta3p	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Derivada de la tercera variable articular, entregada por MODELOS 4DOF
teta4p	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Derivada de la cuarta variable articular, entregada por MODELOS 4DOF

Tabla (A.5.6.2). Parámetros 5, 6, 7 y 8 de entrada del módulo DINAMICA\_4DOF. Tipo, características y descripción

Variable	Características	Descripción
d1pp	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Doble derivada de la primera variable articular, entregada por <b>MODELOS_4DOF</b>
teta2pp	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Doble derivada de la segunda variable articular, entregada por <b>MODELOS_4DOF</b>
teta3pp	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Doble derivada de la tercera variable articular, entregada por <b>MODELOS_4DOF</b>
teta4pp	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Doble derivada de la cuarta variable articular, entregada por <b>MODELOS_4DOF</b>

Tabla (A.5.6.3). Parámetros 9, 10, 11 y 12 de entrada del módulo **DINAMICA\_4DOF**. Tipo, características y descripción

Variable	Características	Descripción
m1	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Masa del eslabón 1, entregada por <b>INERCIAS_MASAS</b>
m2	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Masa del eslabón 2, entregada por <b>INERCIAS_MASAS</b>
m3	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Masa del eslabón 3, entregada por <b>INERCIAS_MASAS</b>
m4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Masa del eslabón 4, entregada por <b>INERCIAS_MASAS</b>

Tabla (A.5.6.4). Parámetros 13, 14, 15 y 16 de entrada del módulo **DINAMICA\_4DOF**. Tipo, características y descripción

Variable	Características	Descripción
ijxx, ijyy, ijzz; j=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Momentos de inercia del eslabón j; j =1, 2, 3, 4; entregadas por <b>INERCIAS_MASAS</b>

Tabla (A.5.6.5). Parámetros 17 al 28 de entrada del módulo **DINAMICA\_4DOF**. Tipo, características y descripción

Variable	Características	Descripción
pcjx, pcjy, pcjz; j=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del centro de gravedad del eslabón j; j =1, 2, 3, 4; entregadas por <b>VECTORES_CG_BASES_REF</b>
pjix, pjiy, pjiz; j=i+1; i=0, 1, 2, 3	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Coordenadas del origen de la base referencial del eslabón j respecto del eslabón i; i=0, 1, 2, 3; entregadas por <b>VECTORES_CG_BASES_REF</b>

Tabla (A.5.6.6). Parámetros 29 al 52 de entrada del módulo **DINAMICA\_4DOF**. Tipo, características y descripción

Como salida se tienen las variables globales: energía\_total, energía1, energía2, energía3, energía4, f1x, f1y, f1z, f2x, f2y, f2z, f3x, f3y, f3z, f4x, f4y, f4z, T1x, T1y, T1z, T2x, T2y, T2z, T3x, T3y, T3z, T4x, T4y, T4z y cuya descripción se ofrece a continuación.

Variable	Características	Descripción
energía_total	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Energía total gastada por el manipulador en el tiempo t.
energía <sub>i</sub> ; i=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Energía total gastada por el eslabón i del manipulador en el tiempo t.
fix, fiy, fiz; i=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Componentes de las fuerzas aplicadas en la articulación i.
Tix, Tiy, Tiz; i=1, 2, 3, 4	Tipo: Precisión Doble, Ámbito: Global	Componentes de los momentos aplicados en la articulación i.

Tabla (A.5.6.7). Variables de salida del módulo DINÁMICA\_4DOF. Tipo y características

La estructura sintética del módulo DINÁMICA\_4DOF se expresa mediante la figura(A.5.6.1) siguiente.

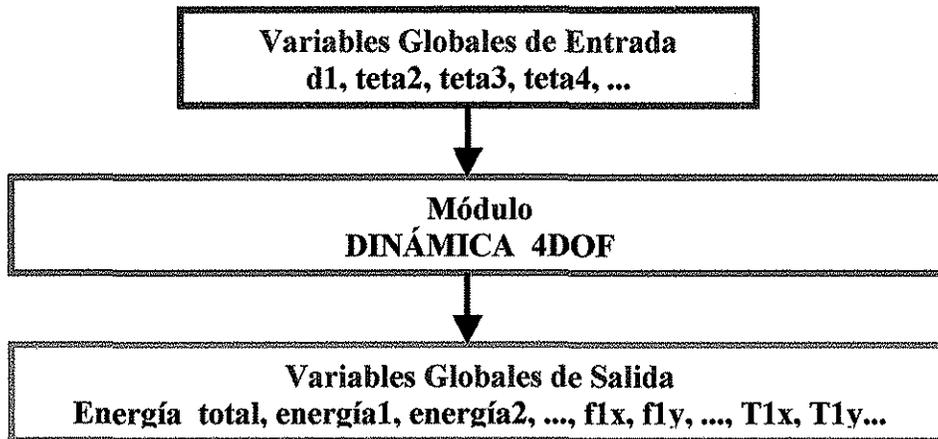


Figura (A.5.6.1). El Módulo DINÁMICA\_4DOF con sus entradas y sus salidas.

El módulo DINÁMICA\_4DOF hace uso de una subrutina de primer nivel, Dinámica\_PRRRd(), de 3 subrutinas de segundo nivel, Energía(), Fuerzas() y Torques().

En la figura (A.5.6.2) siguiente se presenta la estructura detallada del Módulo **DINÁMICA\_4DOF** con sus subrutinas constitutivas.

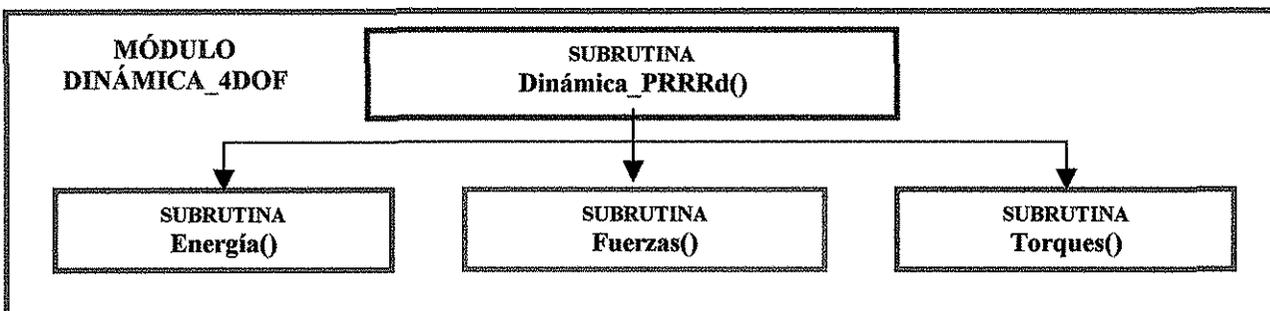


Figura (A.5.6.2). Estructura detallada del módulo **DINÁMICA\_4DOF**.

## DESCRIPCIÓN DE LAS SUBRUTINAS DEL MÓDULO **DINÁMICA\_4DOF**

A continuación se presenta la tabla (A.5.6.8) que describe las subrutinas de primer y segundo niveles.

SUBROUTINA	CARACTERÍSTICAS	DESCRIPCIÓN
Dinámica_PRRRd()	Ámbito: Global Nivel: Primer	Subrutina Global con 52 parámetros de entrada y 29 de salida. Se auxilia de 3 subrutinas de segundo nivel.
Energía()	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 52 parámetros de entrada y 5 de salida
Fuerzas()	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 52 parámetros de entrada y 12 de salida
Torques()	Ámbito: Global Nivel: Segundo	Subrutina Global con 52 parámetros de entrada y 12 de salida

Tabla T(A.5.6.8). Descripción de las subrutinas constitutivas del módulo **DINÁMICA\_4DOF**.

## LLAMADA DE LAS SUBRUTINAS

Las subrutinas están diseñadas para ser usadas en cualquier parte de la aplicación porque están declaradas como funciones globales o públicas. Todas las subrutinas regresan los valores a partir de ciertos parámetros de entrada, entregados en cierto orden. En la Tabla(A.5.6.9) siguiente se presenta la descripción de los parámetros de cada una de las subrutinas.

---

**SUBROUTINAS**

Dinámica\_PRRRd(Par\_1, Par\_2, ..., Par\_52)

Energía(Par\_1, Par\_2, ..., Par\_52)

Fuerzas(Par\_1, Par\_2, ..., Par\_52)

Torques(Par\_1, Par\_2, ..., Par\_52)

---

Salida: Entrega el valor, tipo doble precisión, de las energías, fuerzas y pares.

Parámetro	Descripción
Par_1, ..., Par_12	Las variables articulares y sus derivadas: d1, teta2, teta3, teta4, d1p, teta2p, teta3p, teta4p, d1pp, teta2pp, teta3pp, teta4pp,
Par_13, ..., Par_16	Las masas de los eslabones: m1, m2, m3, m4
Par_17, ..., Par_28	Los momentos de inercia del eslabón j: ijxx, ijyy, ijzz; j=1, 2, 3, 4
Par_29, ..., Par_40	Las coordenadas de los centros de gravedad: pcjx, pcjy, pcjz; j=1, 2, 3, 4
Par_41, ..., Par_52	Coordenadas del eslabón j respecto de I: pjix, pjiy, pjiz; j=i+1; i=0, 1, 2, 3

Nota : Esta función es pública y sus entradas, así como salida, son declaradas como doble precisión

---

Tabla (A.5.6.9). Subrutinas Dinámica\_PRRRd(), Energía(), Fuerzas() y Torques() y sus parámetros de entrada.

### A.5.7. MÓDULO EVAL\_FUN\_APT

Este módulo califica a cada individuo y a cada generación que va ocurriendo durante el proceso. Para eso es necesario que el procedimiento concluya una generación completa. La calificación de los individuos la ofrece de dos maneras posibles: absoluta o relativa.

- Para la manera absoluta se emplean las funciones de aptitud, ecuación E(9.4a) y E(9.4b).

$$apt\_abs(u) = g_{individuo}(*, *) \quad E(A.5.7.1)$$

- Para la manera relativa se emplea la siguiente ecuación:

$$apt\_rel\_ (u) = 100 \left( \frac{apt\_abs(u)}{\sum_{i=1}^{100} apt\_abs(i)} \right) \quad E(A.5.7.2)$$

Este módulo trabaja de la siguiente manera:

**Paso 1.** Obtención del pico máximo de la articulación  $i$ ;  $i= 1, 2, 3, 4$ , del individuo  $u$ ,  $Max\_Torque\_i(u)$ . Ese dato proviene del módulo **DINÁMICA\_4DOF**.

**Paso 2.** Obtención de la aptitud absoluta del individuo  $u$ , con la ecuación E(A.5.7.1) y las ecuaciones E(9.4a) y E(9.4b).

**Paso 3.** Obtención de la calificación absoluta de la generación  $j$  con la siguiente ecuación:

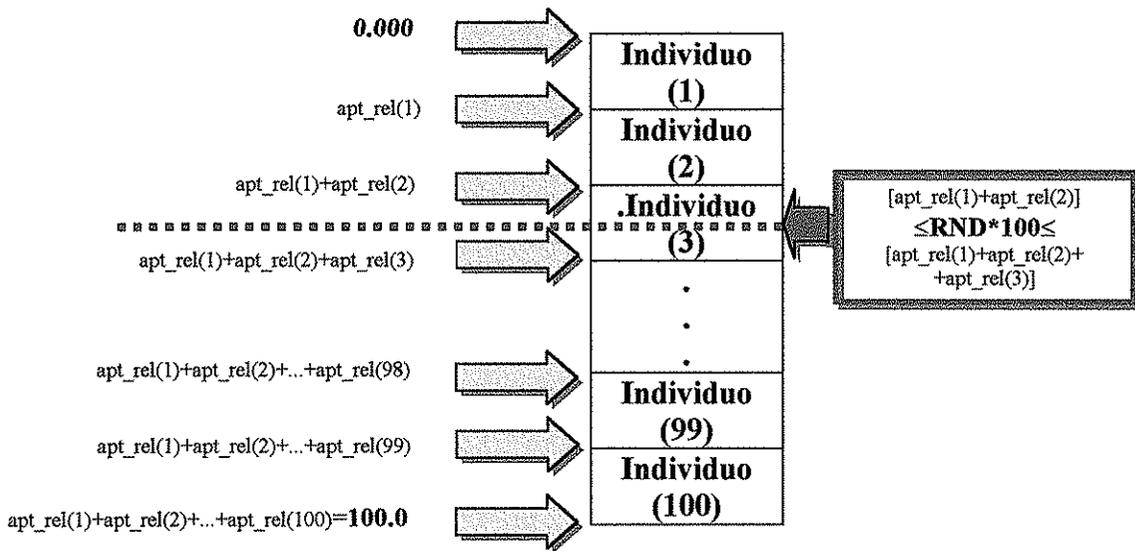
$$apt\_gen(j) = \sum_{i=1}^{100} apt\_abs(i) \quad E(A.5.7.3)$$

El módulo **EVAL\_FUN\_APT** entrega 3 resultados: (1) la aptitud de la generación, (2) vector de 100 elementos, cada uno conteniendo las calificaciones absolutas de cada uno de los 100 individuos y (3) vector de 100 elementos, cada uno conteniendo las calificaciones relativas de cada uno de los 100 individuos.

### A.6. MÓDULO REPRODUCTOR

Después de haber evaluado cada uno de los individuos de la población, el siguiente paso consiste en reproducir los individuos. Esto se puede lograr de la siguiente manera, figura (A.6.1.1):

- Supóngase que los individuos se encuentran ordenados de manera serial y descendente.
- Al lado izquierdo del ordenamiento anterior se encuentra la sumatoria de la calificación de los individuos que hasta ese momento se tienen, en base a la aptitud relativa de éstos, teniendo en cuenta que la suma de todos es 100.



**Figura F(A.6.1.1).** Proceso de selección del individuo 3 cuando el número generado por la función  $RND * 100$  cae entre la suma de las aptitudes de los dos primeros individuos y la correspondiente a las aptitudes de los primeros tres individuos.

- La función **RND**, que toma un número de manera aleatoria entre 0.000 y 1.000, tiene el objetivo de escoger al individuo  $n$  que se encuentra dentro del rango de

la escala de aptitudes del lado izquierdo en el cual  $RND*100$  cae, ecuación E(A.6.1.1).

$$\sum_{i=1}^{n-1} apt\_rel(i) \leq RND * 100 \leq \sum_{j=1}^n apt\_rel(j)$$

E(A.6.1.1)

- Repetir esta operación tantas veces como individuos tenga la población para producir una nueva población del mismo tamaño.

En este proceso se puede presentar el caso en que un individuo puede ser escogido más de una vez. El individuo con mayor calificación tiene mayor probabilidad de que esto ocurra, mientras que los menos aptos no tanta.

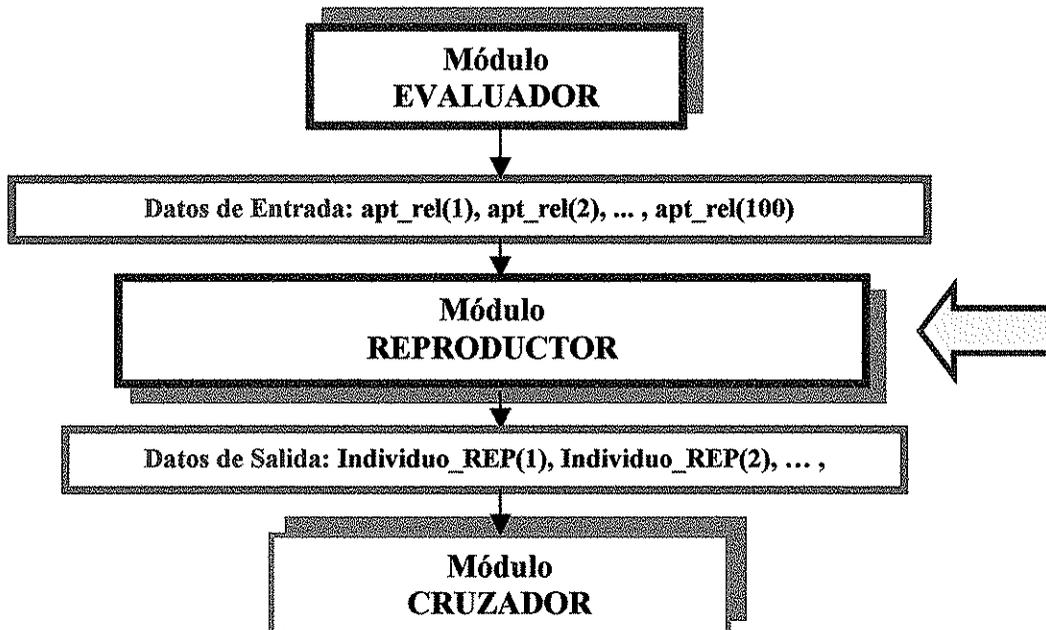


Figura (A.6.1.2). El módulo **REPRODUCTOR** y su relación con otros módulos.

El módulo **REPRODUCTOR** tiene que recibir la siguiente información:

1. El arreglo de los individuos proveniente de **POBLACIÓN\_INICIAL** o de otra generación posterior,

2. y la aptitud relativa de éstos, provenientes de **EVALUADOR**, particularmente de su módulo subordinado **EVAL\_FUN\_APT**.

Para el primer punto, y si el programa corre por primera vez, el módulo **POBLACIÓN\_INICIAL** le entrega el conjunto de individuos, en caso diferente, es el módulo **MUTADOR** para generaciones posteriores.

Para el segundo punto, la aptitud o calificación de los individuos la recibe del módulo **EVALUADOR**. La calificación de cada uno de los genotipos o fenotipos está comprendida entre 0 y 1, según la función aptitud vista en el capítulo 9, ecuaciones E(9.4a), E(9.4b) y E(9.4c).

Como salida, el módulo **REPRODUCTOR** entrega una nueva población de individuos en la que deben estar los individuos con mejores cualidades genéticas (esto se supone debido a las leyes probabilísticas, aunque es probable que también sean escogidos individuos menos calificados. Esto fortalece la búsqueda debido a la riqueza genética).

## A.7. MÓDULO CRUZADOR

El módulo **REPRODUCTOR** anterior está dedicado a seleccionar, de una manera totalmente aleatoria, a los individuos, sin embargo, los más aptos son los que tienen mejores probabilidades para transmitir su paquete genético a nuevos individuos. Se supone, entonces, que la nueva población estará representada, en su mayor parte, por los mejores individuos, aunque pueden “colarse” algunos con cualidades inferiores.

Esta nueva población de mejores individuos es la que procesará el módulo **CRUZADOR** con el objetivo de obtener una nueva población de “hijos” a los que se les ha transmitido la información genética de los individuos entregados por **REPRODUCTOR**.

Para tal efecto, los pasos que emplea **CRUZADOR** son los siguientes:

1. Formación de parejas.
2. Selección del paquete genético de cada pareja padre-madre que será transmitida a los hijos.
3. Concepción y alumbramiento de los hijos.
4. Sustitución de la población de padres por la población de hijos.

Para la formación de parejas se diseñó la subrutina **SELECCIÓN\_COMPañEROS**, constitutiva de **CRUZADOR**, que selecciona, de manera totalmente aleatoria, dos individuos, denominados **Compañero1** y **Compañero2**, figura (A.7.1).

Para la selección del paquete genético se tiene la subrutina **PUNTOS\_CRUCE**, la cual selecciona el punto de cruce de cada segmento del genotipo de los padres, figura (A.7.2). Esto significa que el cruce es múltiple, uno por segmento, lo que quiere decir que se tendrán 4 puntos de corte de los cromosomas involucrados.

Para la concepción y alumbramiento de los hijos se desarrolló la subrutina **FORMADOR\_HIJOS**, que tiene como tarea transmitir los segmentos parciales genéticos de uno y otro padre y formar dos nuevos genotipos denominados hijos. Las figuras (A.7.3), (A.7.4), (A.7.5) y (A.7.6) presentan dicha subrutina.

Por último, la subrutina **NUEVA\_POBLACIÓN\_CRUZADOR** sustituye a los padres por los hijos, figura (A.7.7).

La estructura detallada del módulo **CRUZADOR** se presenta en la figura (A.7.8).

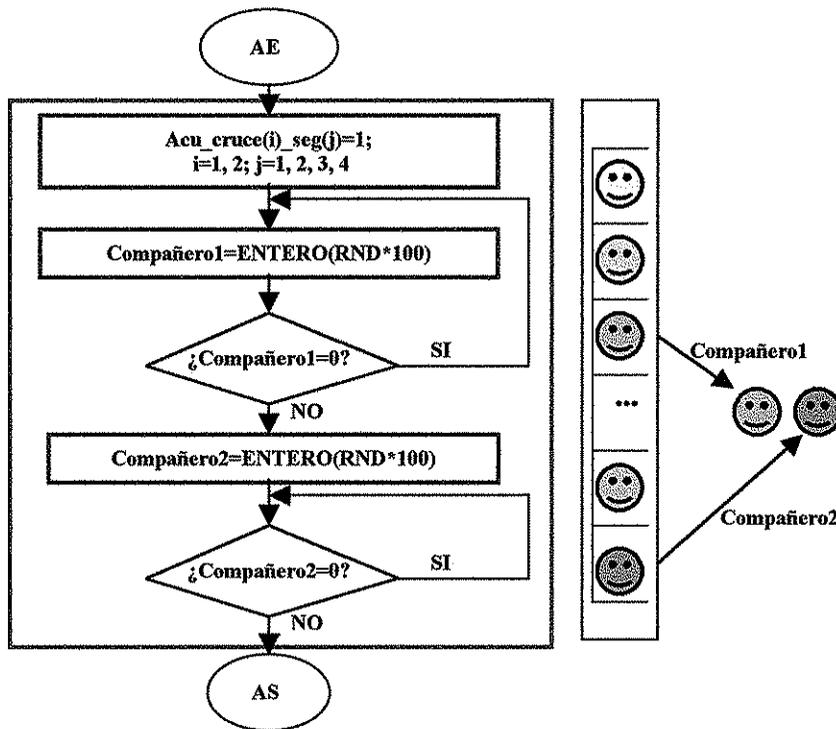


Figura (A.7.1). Subrutina **SELECCIÓN\_COMPAÑEROS**. Esta subrutina se dedica a formar una pareja de entre 100 individuos de la población.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

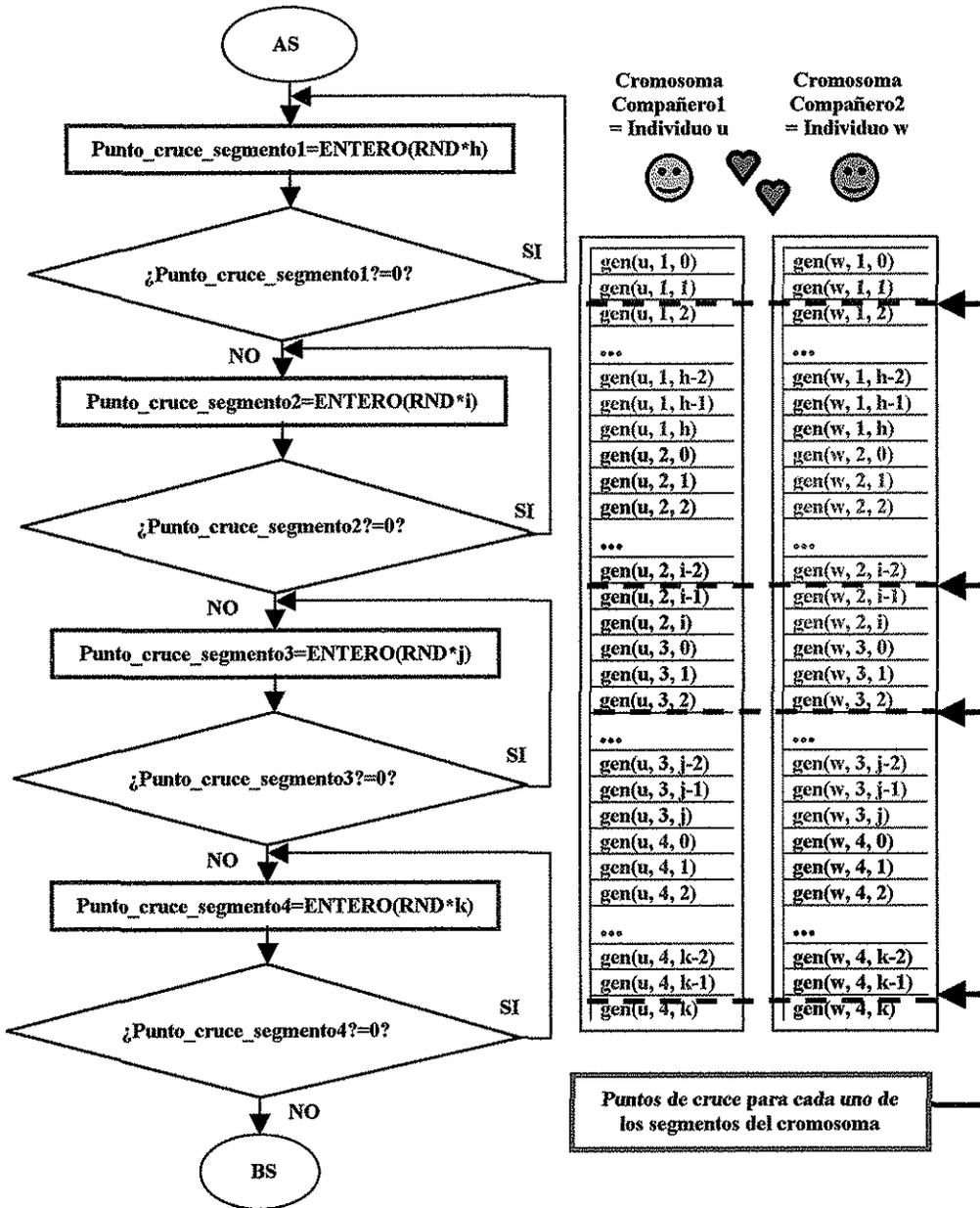
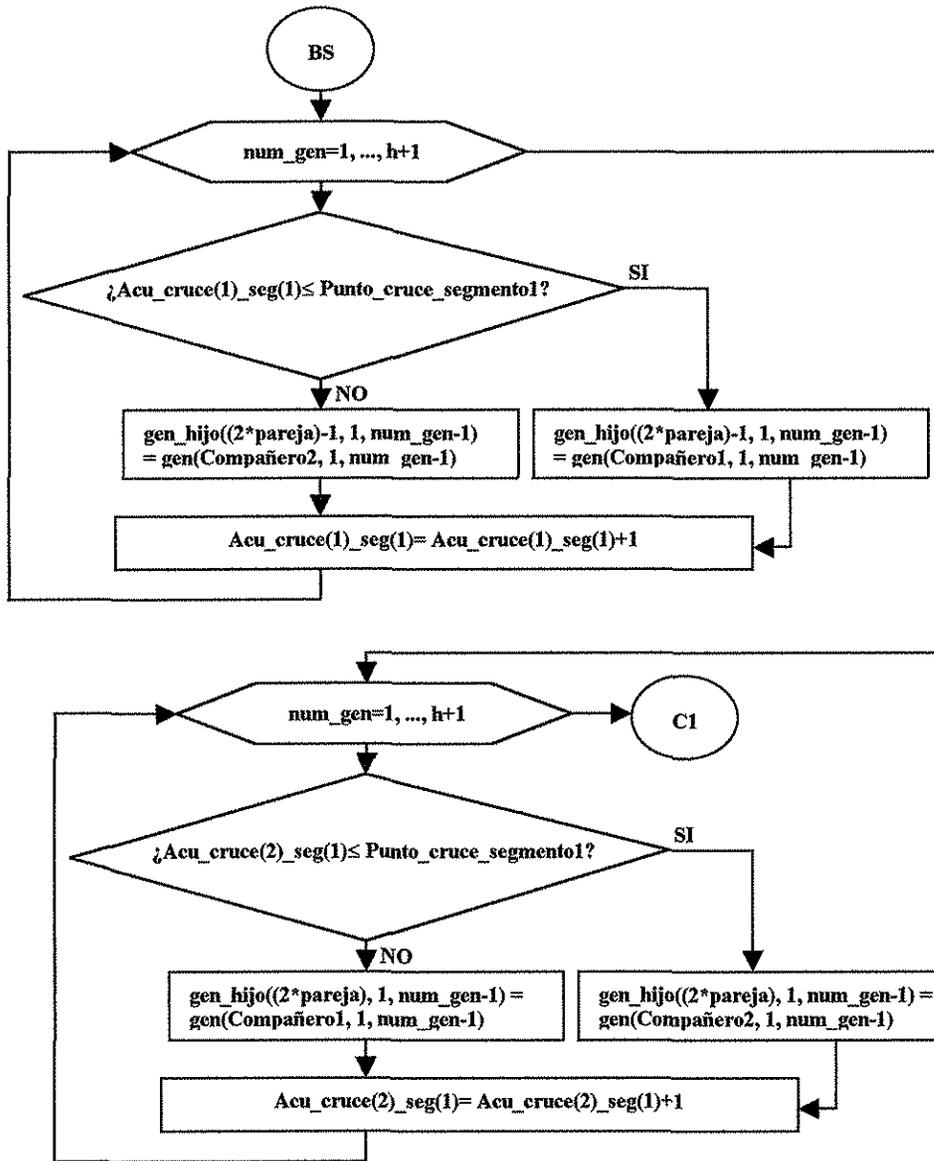


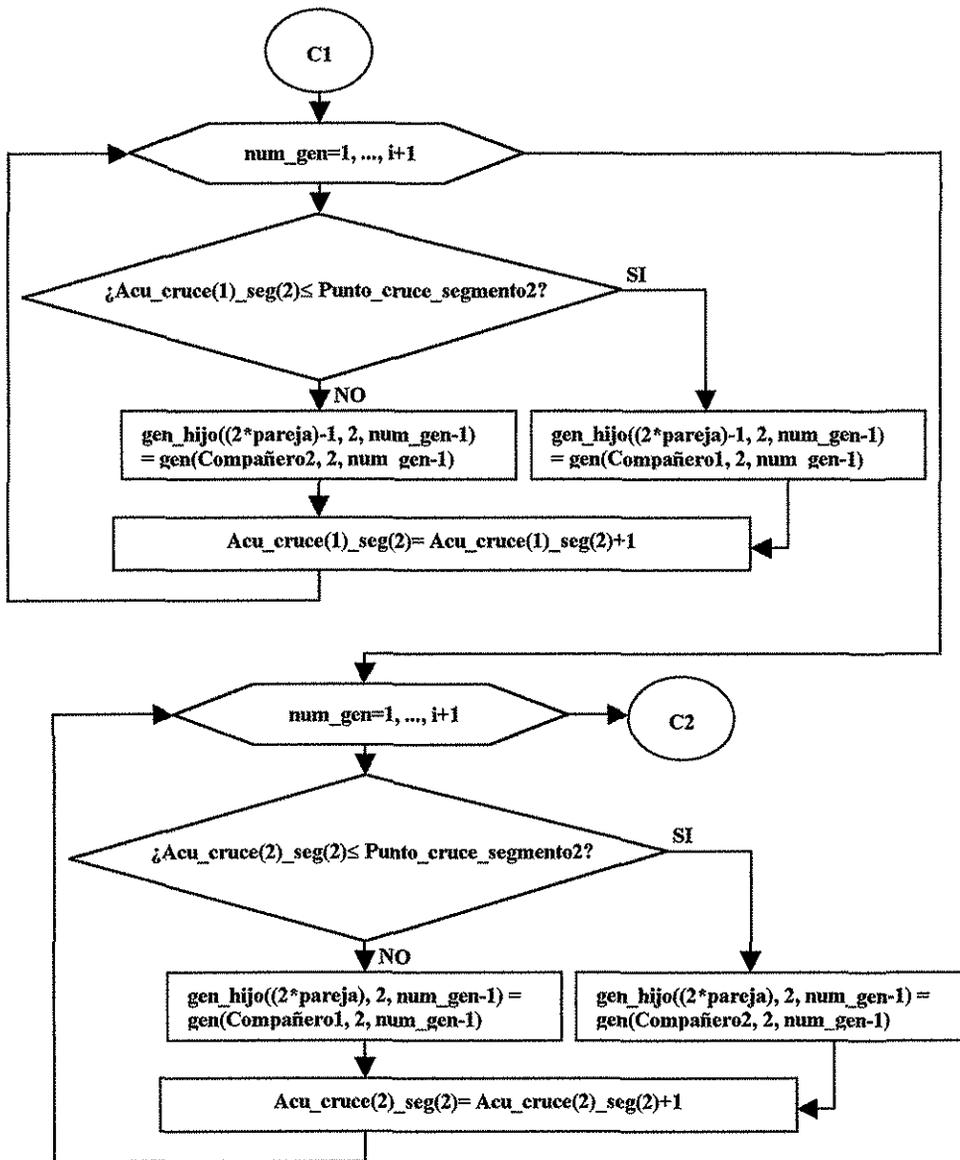
Figura (A.7.2). Subrutina PUNTOS\_CRUCE. Esta subrutina se dedica a determinar los puntos de cruce de cada segmento de los genotipos de los compañeros seleccionados por SELECCIÓN\_COMPAÑEROS.





☺	Compañero1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, h-2)	gen(u, 1, h-1)	gen(u, 1, h)
☹	Compañero2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, h-2)	gen(w, 1, h-1)	gen(w, 1, h)
☺	Hijo1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, h-2)	gen(w, 1, h-1)	gen(w, 1, h)
☹	Hijo2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, h-2)	gen(u, 1, h-1)	gen(u, 1, h)

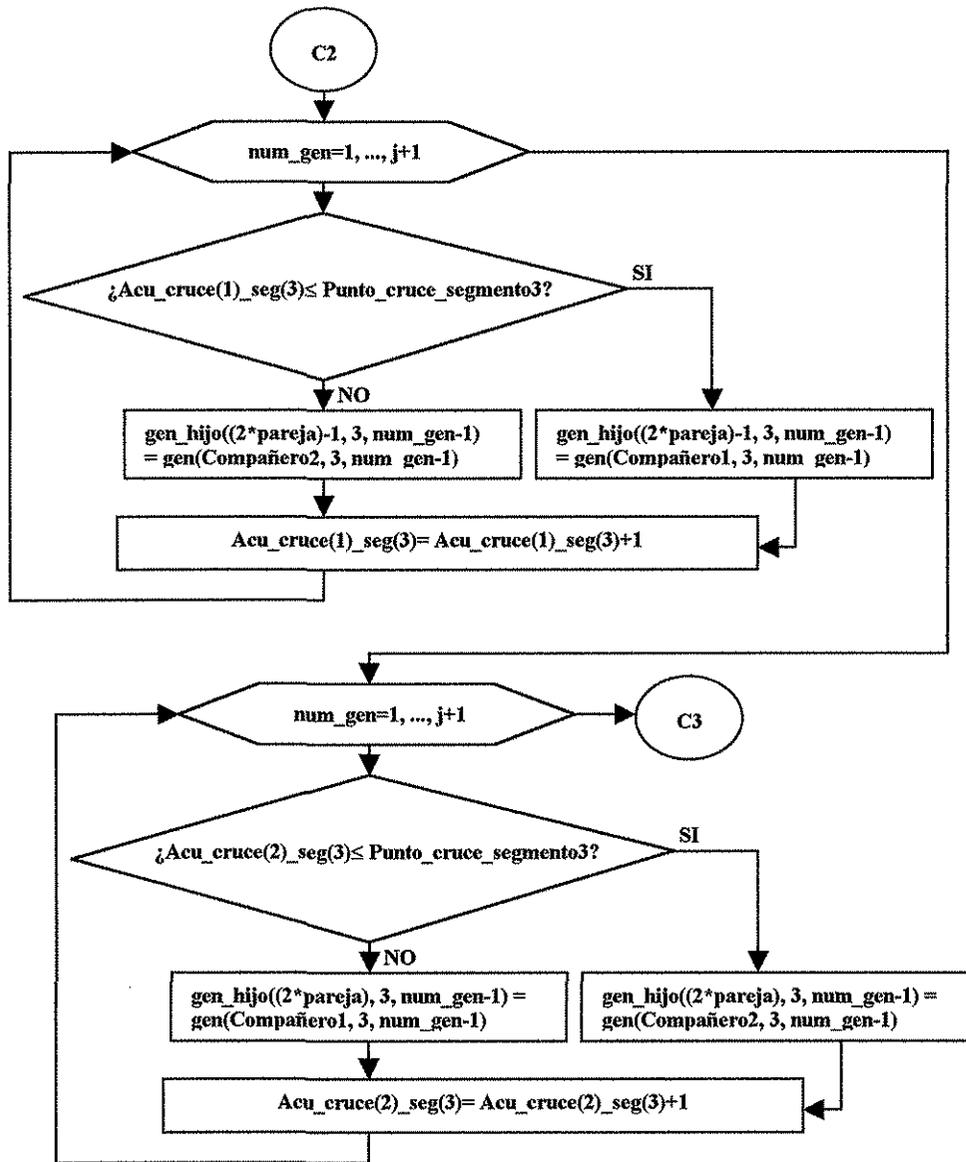
Figura (A.7.3). Parte 1 de **FORMADOR\_HIJOS** responsable de transmitir, a los hijos, los genes correspondientes al primer segmento de los padres. Con la información entregada por **PUNTOS\_CRUCE** se logra esto.



☺	Compañero1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, i-2)	gen(u, 1, i-1)	gen(u, 1, i)
☹	Compañero2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, i-2)	gen(w, 1, i-1)	gen(w, 1, i)
☺	Hijo1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, i-2)	gen(w, 1, i-1)	gen(w, 1, i)
☹	Hijo2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, i-2)	gen(u, 1, i-1)	gen(u, 1, i)

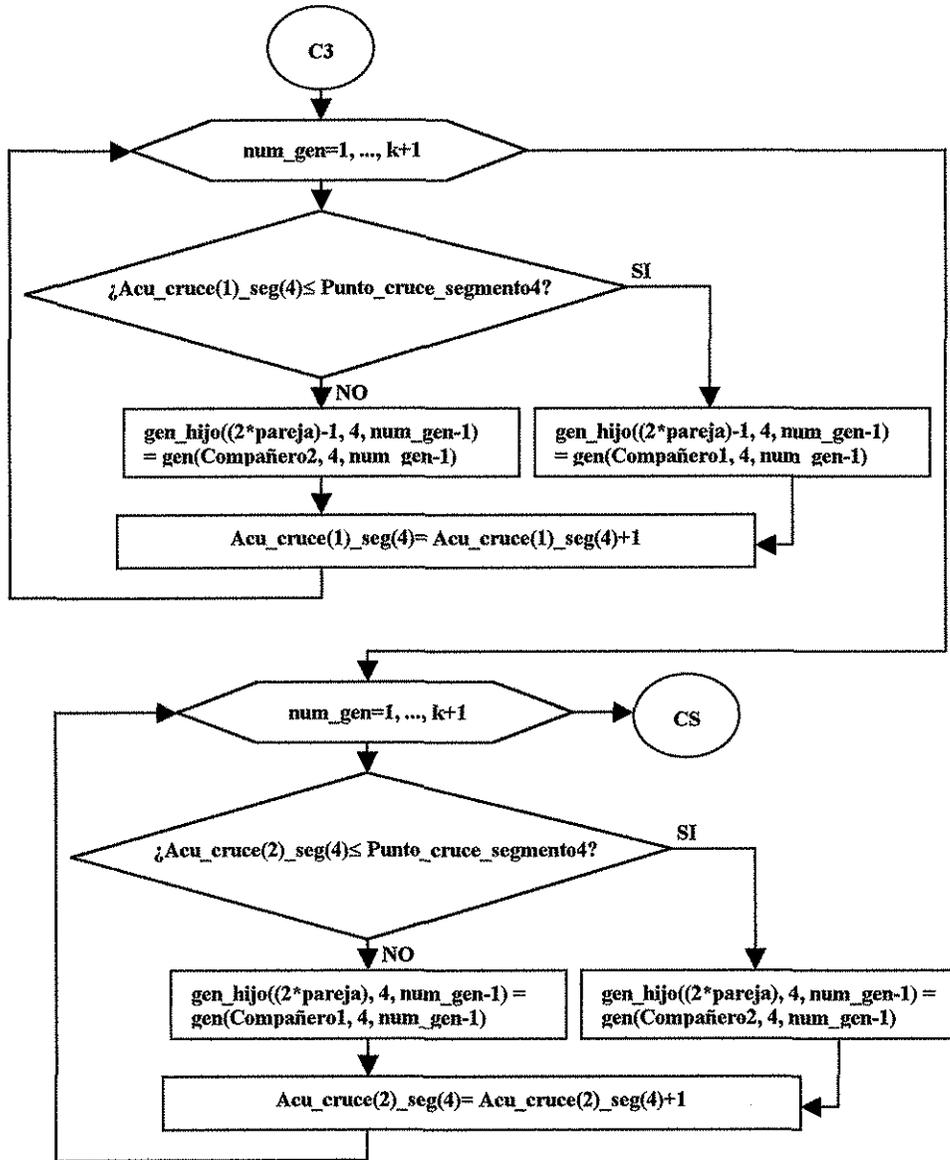
Figura (A.7.4). Parte 2 de FORMADOR\_HIJOS responsable de transmitir, a los hijos, los genes correspondientes al segundo segmento de los padres.





☺	Compañero1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, j-2)	gen(u, 1, j-1)	gen(u, 1, j)
☺	Compañero2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, j-2)	gen(w, 1, j-1)	gen(w, 1, j)
☺	Hijo1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(w, 1, j-2)	gen(w, 1, j-1)	gen(w, 1, j)
☺	Hijo2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(u, 1, j-2)	gen(u, 1, j-1)	gen(u, 1, j)

Figura (A.7.5). Parte 3 de **FORMADOR\_HIJOS** responsable de transmitir, a los hijos, los genes correspondientes al tercer segmento de los cromosomas de los progenitores.



☺	Compañero1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, k-2)	gen(u, 1, k-1)	gen(u, 1, k)
☹	Compañero2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, k-2)	gen(w, 1, k-1)	gen(w, i, k)
☺	Hijo1	gen(u, 1, 0)	gen(u, 1, 1)	gen(u, 1, 2)	...	gen(u, 1, k-2)	gen(u, 1, k-1)	gen(w, i, k)
☹	Hijo2	gen(w, 1, 0)	gen(w, 1, 1)	gen(w, 1, 2)	...	gen(w, 1, k-2)	gen(w, 1, k-1)	gen(u, 1, k)

Figura (A.7.6). Parte 4 de **FORMADOR\_HIJOS** responsable de transmitir, a los hijos, los genes correspondientes al cuarto segmento de los cromosomas de los progenitores.

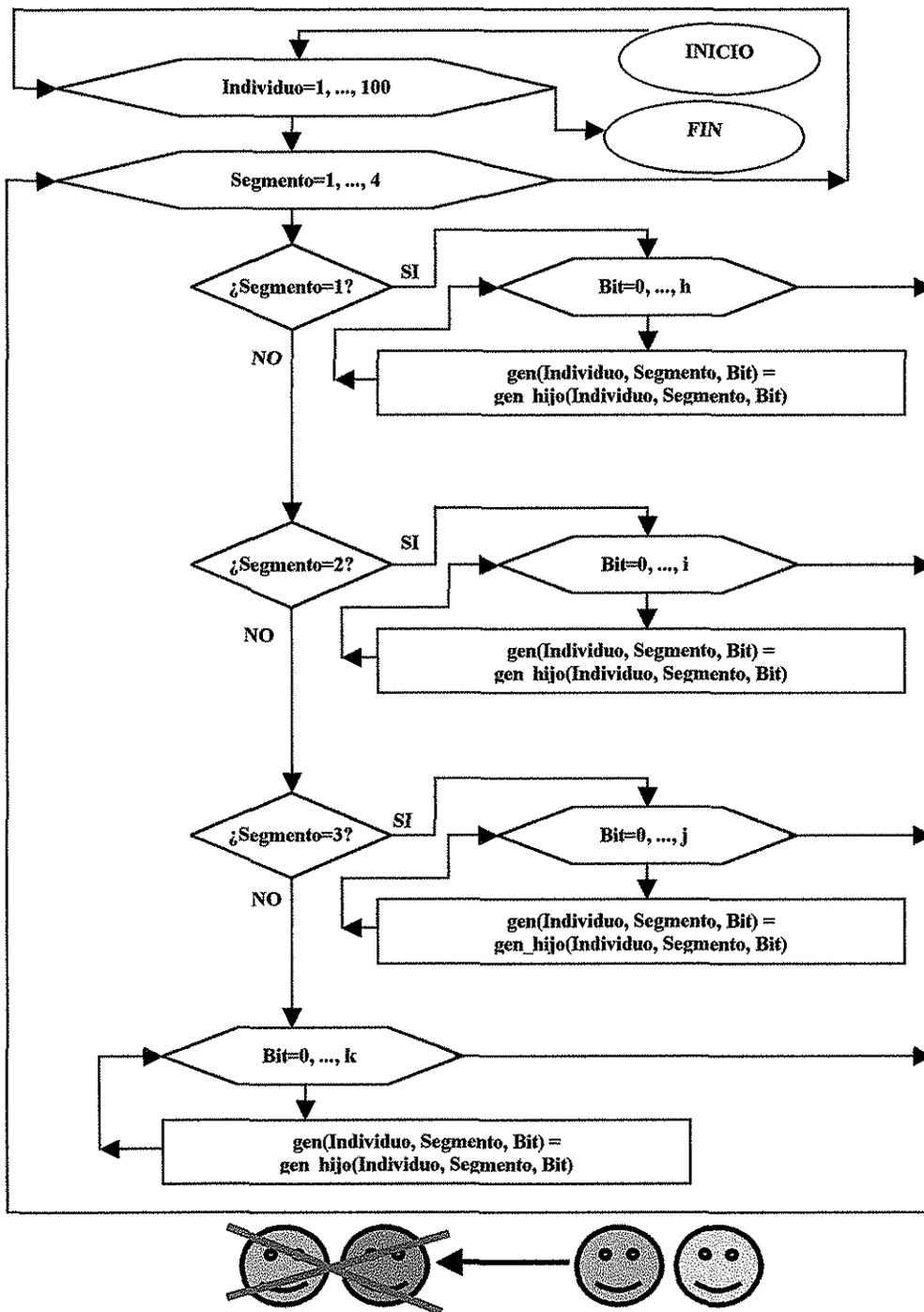


Figura (A.7.7). Subrutina NUEVA\_POBLACION\_CRUZADOR, que sustituye a la antigua población por la nueva.

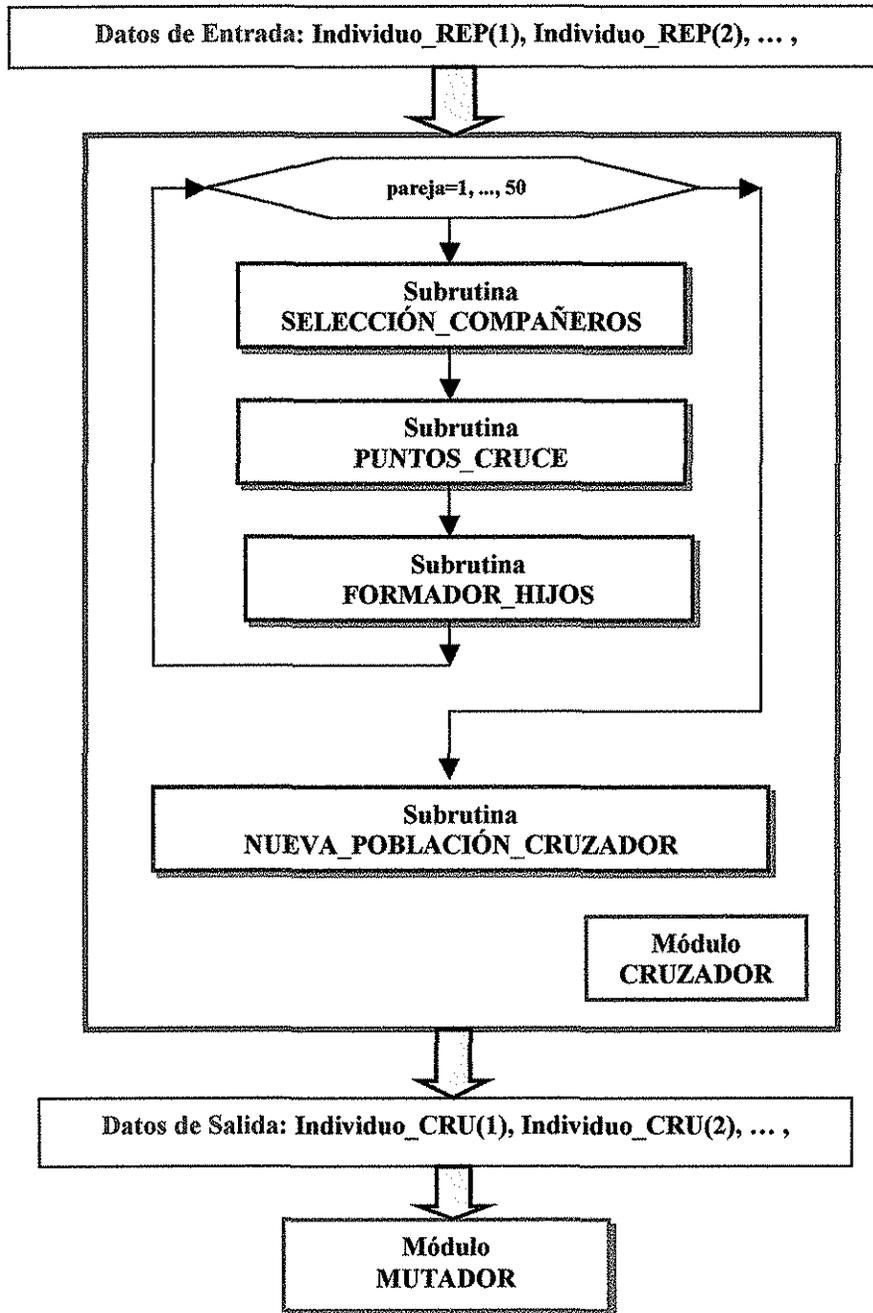


Figura (A.7.8). Estructura completa de CRUZADOR y su relación con otros módulos del proyecto.

### A. 8. MÓDULO MUTADOR

Este módulo está dedicado a mutar algún o algunos individuos de la población mediante un factor mutante. La mutación tiene que ver con la modificación de, al menos, un gen de, al menos, un individuo de la población, figura (A.8.1). Como se utilizan cadenas de bits cuyos valores pueden ser 0 ó 1, entonces la mutación consiste en cambiar el valor de ese gen por el otro valor, esto es, si el valor del gen es 0, éste debe ser cambiado por 1.

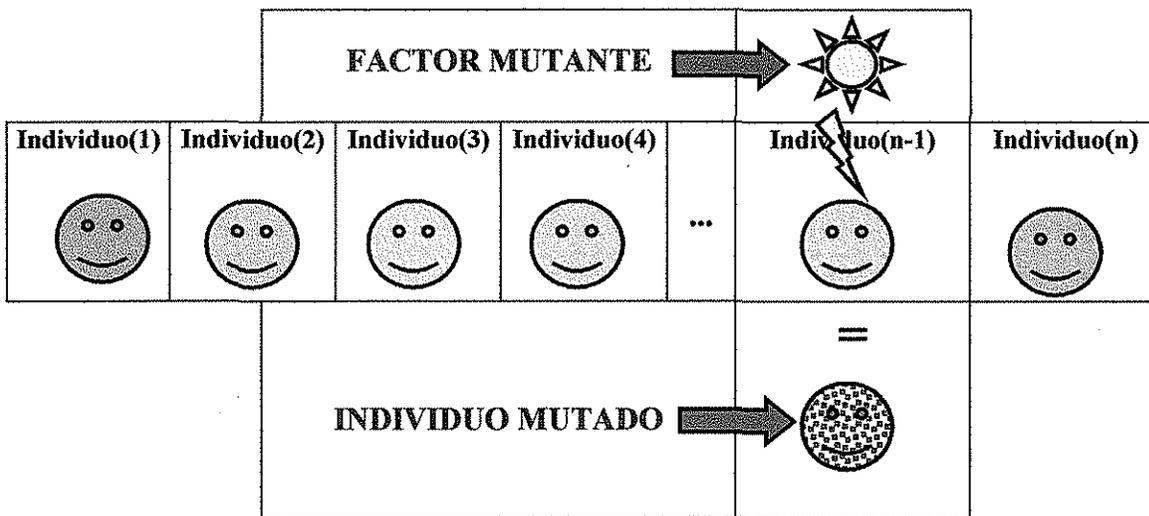


Figura (A.8.1). Proceso de mutación.

La justificación de la mutación tiene que ver con el hecho de que ésta previene la pérdida de la diversidad genética; sin embargo, si ésta es muy grande la generación no tenderá a superar su calificación o aptitud para encontrar la solución y la evolución estará oscilando entre generaciones pobres y generaciones ricas en el valor de la calificación. Si ésta es muy chica habrá una endogamia (pérdida de riqueza genética debido al cruce de individuos emparentados) y la generación se estabilizará en periodos de evolución muy cortos que, en la mayoría de los casos, presentan una calificación muy inferior a la correspondiente de la solución.

La literatura recomienda que se diseñe un factor mutante que cambie 2 genes por cada transferencia de 2000 de ellos, **Goldberg (1989)**.

En el caso tratado en este trabajo cada generación está constituida de una población de 100 individuos conteniendo, cada uno,  $(h + i + j + k + 4)$  genes.

**EJEMPLO**

Si los valores de los elementos del conjunto (h, i, j, k) fueran:

	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>J</b>	<b>K</b>	<b>100*(h + i + j + k + 4) = número de genes de la población</b>
valor	18	27	19	26	9400

Entonces, el número de genes por generación es 9400. Así, si el factor mutante fuera de 100%, entonces los 9400 genes mutarían.

**PROBLEMA**

El problema consiste en determinar la respuesta a la pregunta siguiente:

¿Cuál debe ser el factor mutante tal que su acción cambie 2 genes por cada 2000 de la población?

**SOLUCIÓN**

En 9400 genes transferidos deben ocurrir  $ENTERO\left[2\left(\frac{9400}{2000}\right)\right] = 9$  mutaciones (donde la función ENTERO[] trunca el resultado y entrega sólo el entero). Entonces si el factor mutante es de 100% (este factor muta los 9400 genes) ¿qué factor mutante cambia sólo 9?

$$factor\ mutante\% = 100\left(\frac{9}{9400}\right) = 0.09574468\%$$

Así el factor mutante adecuado a este ejemplo es de 0.09574468 %

Siguiendo este ejemplo, una ecuación general que determina el factor mutante puede ser la siguiente:

$$factor\_mutante\% = 100 \left( \frac{ENTERO \left[ 2 \left( \frac{población(h+i+j+k+4)}{bits\_transferidos} \right) \right]}{población(h+i+j+k+4)} \right) \quad E(A.8.1)$$

Esta ecuación muta sólo 2 bits por cada 2000 bits transferidos, pero si se quiere un mayor número de genes mutados debe emplearse la siguiente ecuación:

$$factor\_mutante\% = 100 \left( \frac{ENTERO \left[ bits\_mutados\_bt \left( \frac{población(h+i+j+k+4)}{bits\_transferidos} \right) \right]}{población(h+i+j+k+4)} \right) \quad E(A.8.2)$$

donde *bits\_mutados\_bt* puede tomar cualquiera de los valores enteros positivos comprendidos entre 0 y el valor de *bits\_transferidos*.

Por otro lado, si *factor\_mutante%* es el dato, ¿cuál es el número de bits mutados por cada número de bits transferidos? La ecuación E(A.8.3) responde esa pregunta.

$$bits\_mutados\_bt = ENTERO\_SUP \left[ \left( \frac{(factor\_mutante\%)(bits\_transferidos)}{100} \right) \right] \quad E(A.8.3)$$

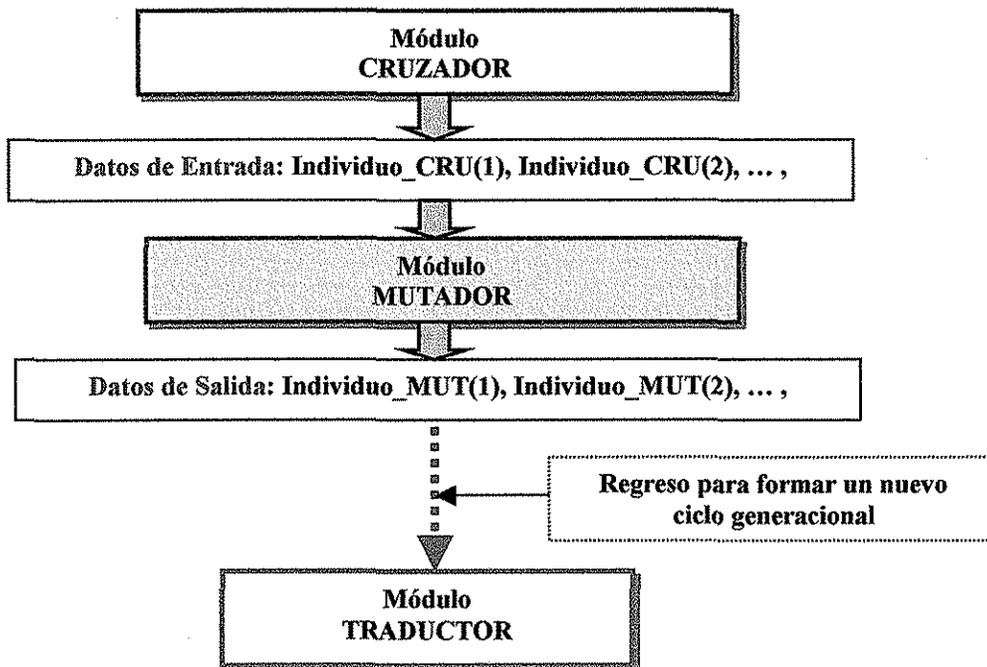
Donde la función ENTERO\_SUP[] entrega el entero más cercano al resultado.

Así, el valor de bits mutados en la población completa, *bits\_mutados\_pob*, en función del *factor\_mutante%* es:

$$bits\_mutados\_pob = ENTERO \left[ \left( \frac{(factor\_mutante\%)(población(h+i+j+k+4))}{100} \right) \right] \quad E(A.8.4)$$

Esta es la ecuación que emplea **MUTADOR** para cambiar el número de genes de la población completa.

La relación de **MUTADOR** con otros módulos del proyecto se puede apreciar en la figura(A.8.2). Así mismo su estructura de procesamiento está descrita en las figuras (A.8.3), (A.8.4), (A.8.5), (A.8.6) y (A.8.7).



**Figura (A.8.2).** Relación de **MUTADOR** con otras partes del proyecto. **MUTADOR** representa el último factor de transformación de la generación anterior a la nueva; por esta razón debe regresar la nueva población a **TRADUCTOR** para ser evaluada; ésta se supone superior a la progenitora.

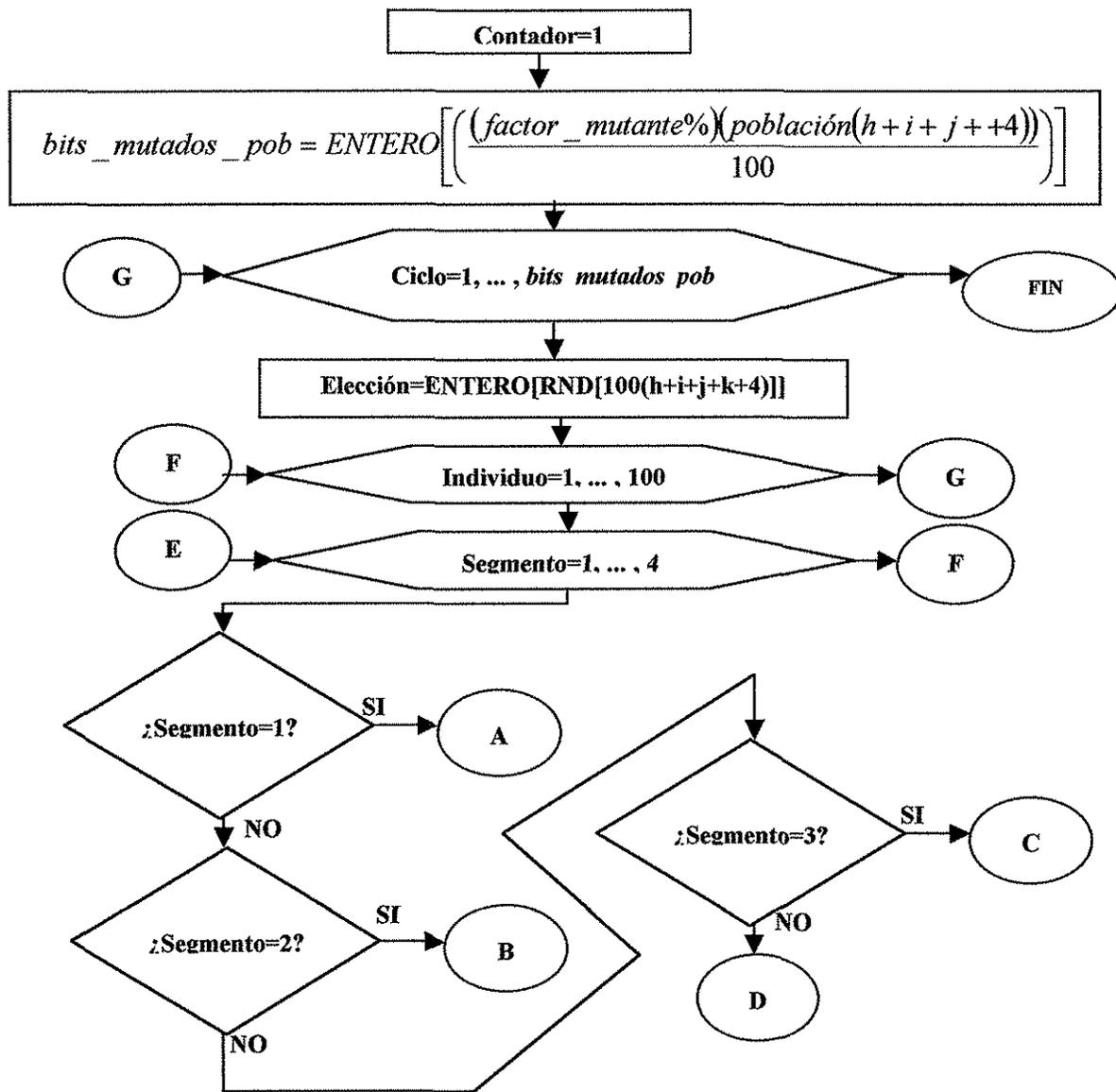


Figura (A.8.3). Estructura del ciclo de proceso empleada por MUTADOR.

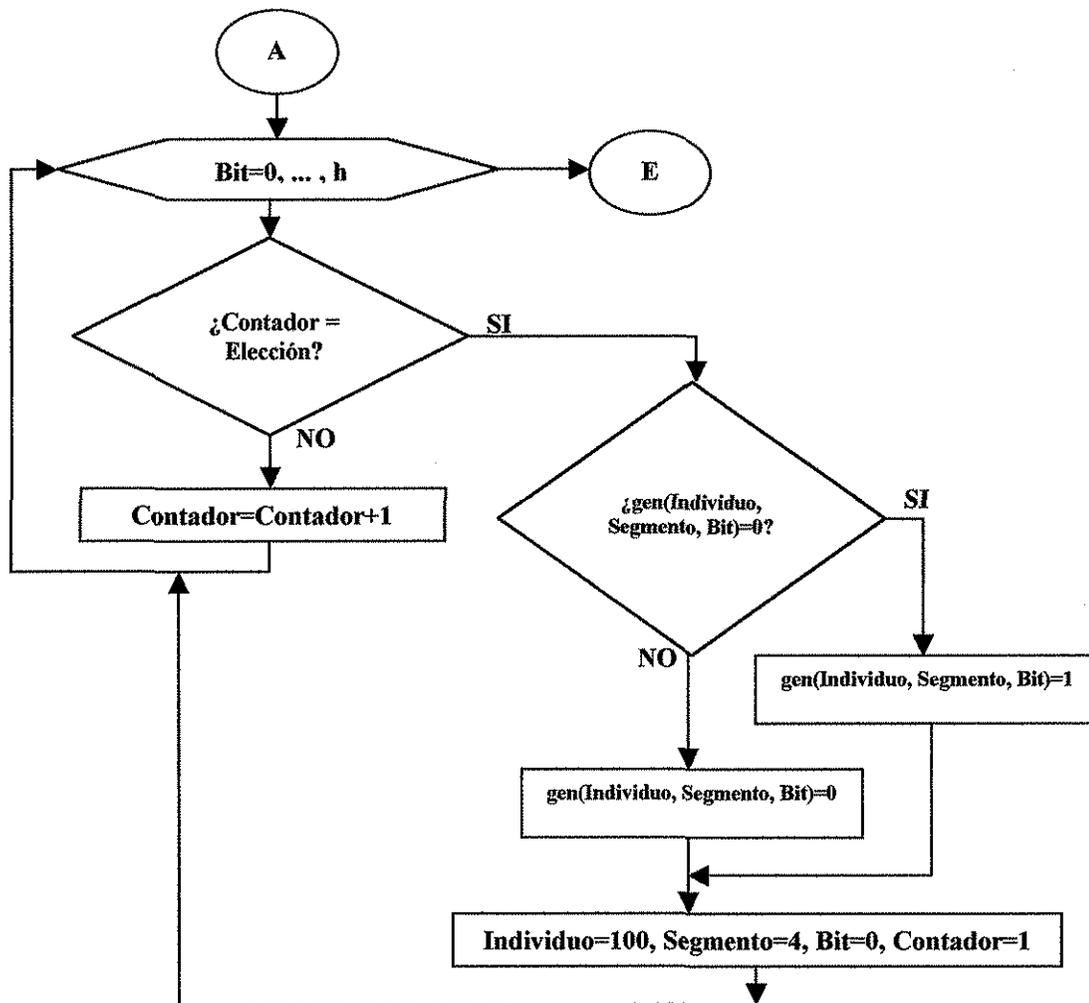


Figura (A.8.4). (continuación) Estructura del ciclo de proceso empleada por MUTADOR.

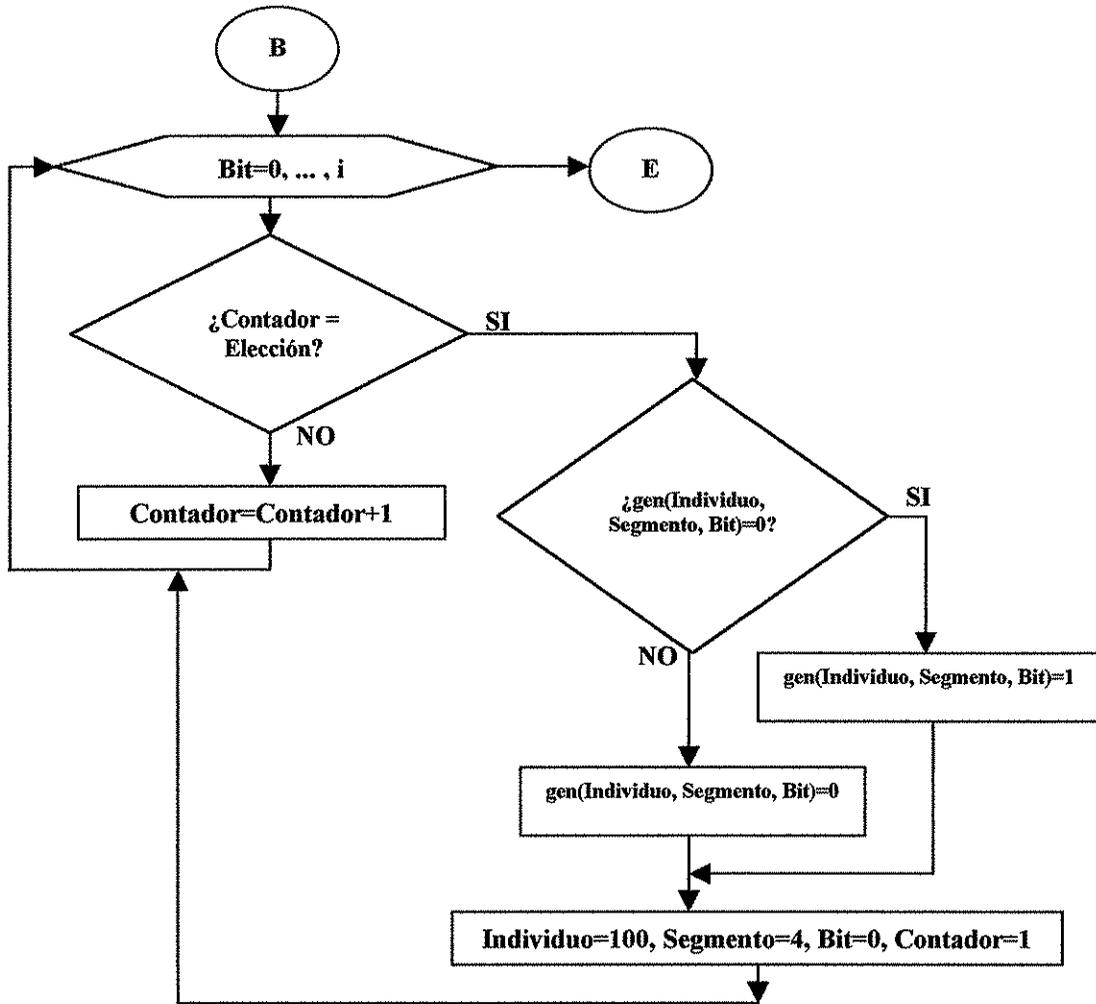


Figura (A.8.5). (continuación) Estructura del ciclo de proceso empleada por MUTADOR.

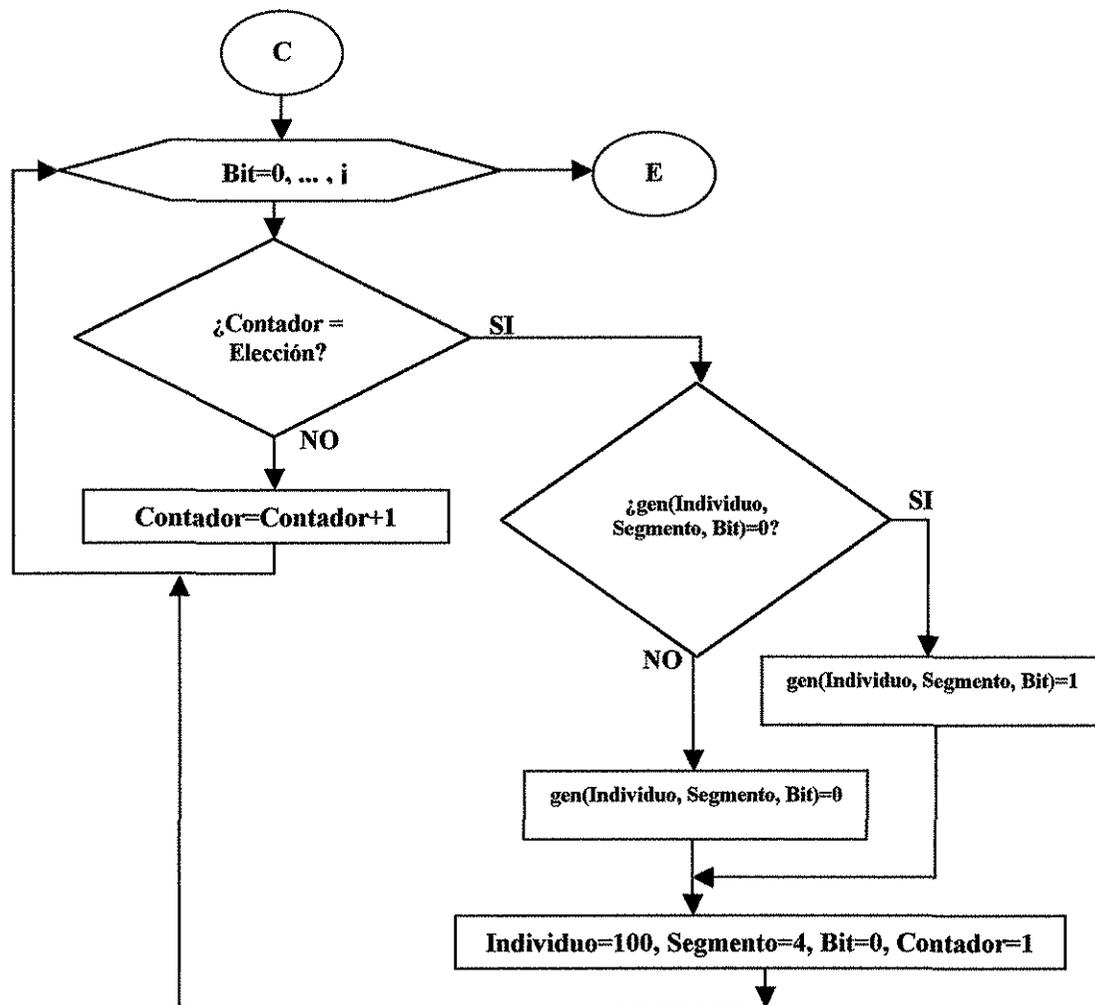


Figura (A.8.6). (continuación) Estructura del ciclo de proceso empleada por MUTADOR.

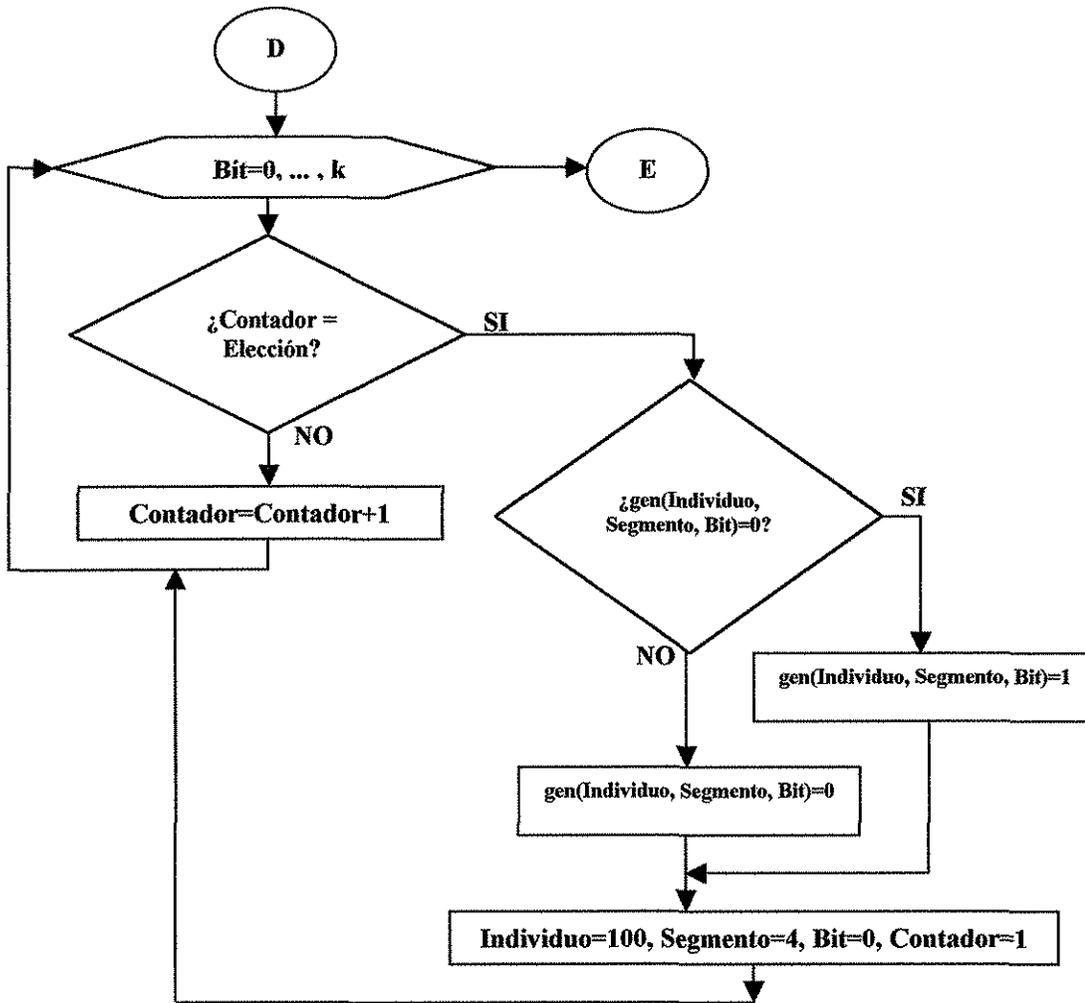


Figura (A.8.7). (continuación) Estructura del ciclo de proceso empleada por MUTADOR.

## ANEXO B

# PERFIL DE TRAYECTORIA MEDIANTE POLINOMIO DE GRADO 8: Colección de Familias

En este anexo se presenta la colección de familias de trayectorias gobernadas por el polinomio de grado 8, en donde se emplea un *índice\_m* comprendido entre 1.458334 y 2.1875.

Las gráficas de las figuras (B.1), (B.2) y (B.3) presentan los resultados de la posición entregados por la subrutina **Pol8GP\_vR()**, específicamente sus funciones **Pol8GPCte\_vR()** y **Pol8GPVble\_vR()**, constitutivas del módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA**.

Por otro lado, las gráficas de las figuras (B.4), (B.5) y (B.6) presentan los resultados de la velocidad entregados por la subrutina **Pol8GV\_vR()**, específicamente sus funciones **Pol8GVCte\_vR()** y **Pol8GVVble\_vR()**, que son constitutivas del módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA**.

Así mismo, las gráficas de las figuras (B.7), (B.8) y (B.9) presentan los resultados de la aceleración entregados por la subrutina **Pol8GA\_vR()**, específicamente sus funciones **Pol8GACte\_vR()** y **Pol8GAVble\_vR()**, empleadas por el módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA**.

De igual manera, las figuras (B.10), (B.11) y (B.12) presentan los resultados del jerk entregados por la subrutina **Pol8GJ\_vR()**, específicamente sus funciones **Pol8GJCte\_vR()** y **Pol8GJVble\_vR()**, contenidas por el módulo **PERFILES\_TRAYECTORIA**.

Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: constante de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función Pol8GPCte_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: constante de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función Pol8GPCte_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: constante de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función Pol8GPCte_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>
<b>Familia de Genotipos</b>	
<b><math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math> (Posición parte constante)</b>	

Figura (B.1). Familia de polinomios de posición constantes.

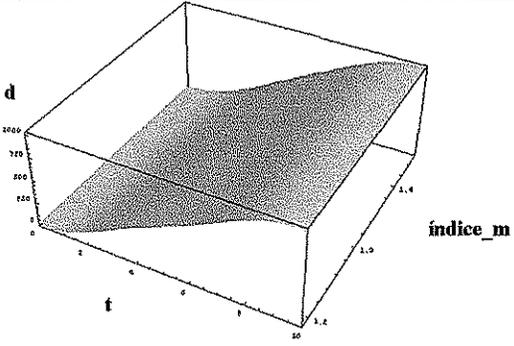
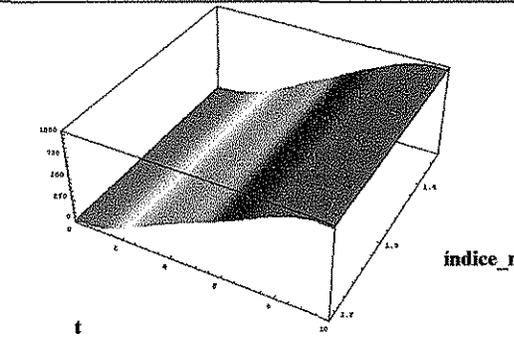
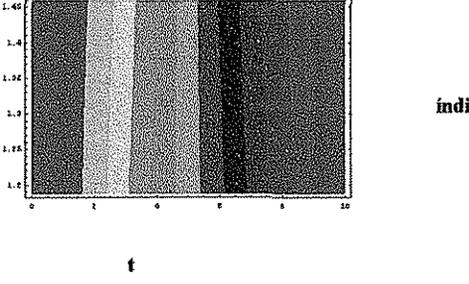
Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: variable de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GPVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GPVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GPCte\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{Pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}$  (Posición parte variable)**

Figura (B.2). Familia de polinomios de posición variable.



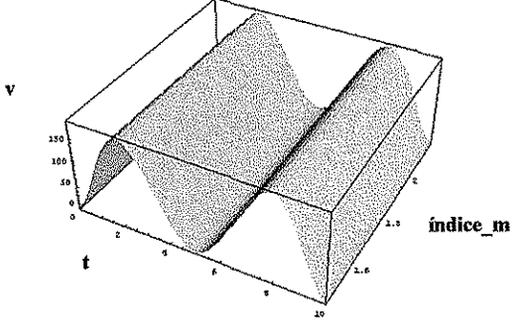
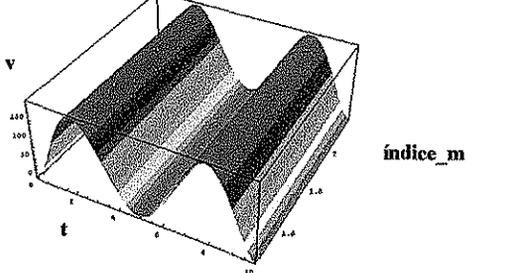
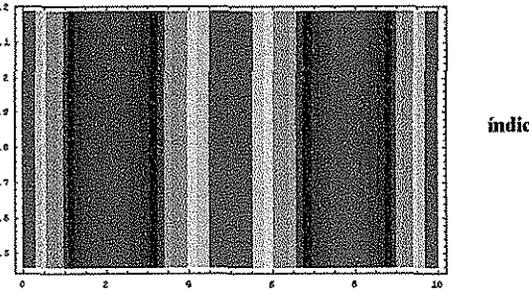
Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + variable de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GP_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + variable de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GP_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + variable de posición.</li> <li>• Familia: <math>FG_{pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GP_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{pp8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}$  (Posición constante + variable)**

Figura (B.3). Familia de polinomios de posición constante + variable.

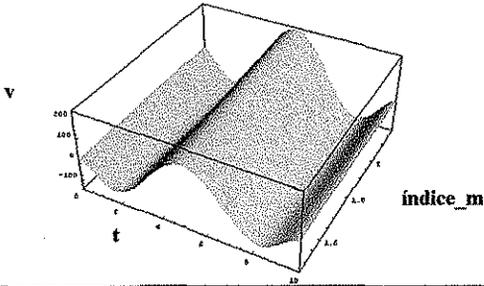
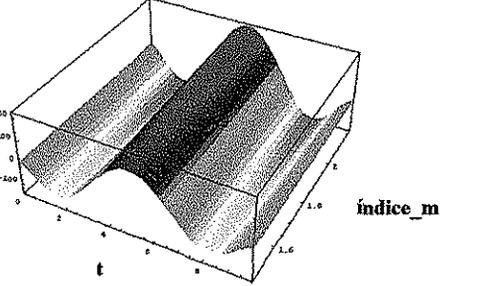
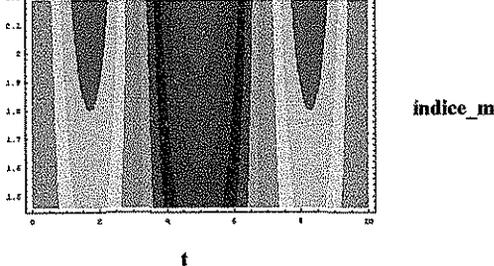


Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función pol8GVCte_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función pol8GVCte_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función pol8GVCte_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

Familia de Genotipos

$FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}$  (Velocidad constante)

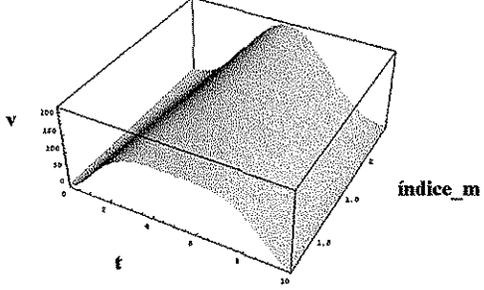
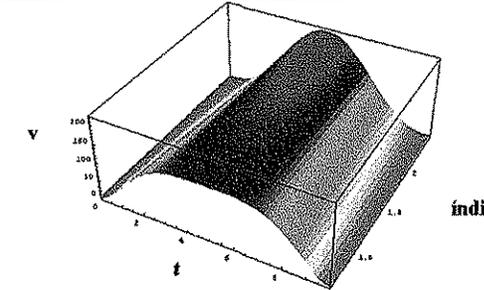
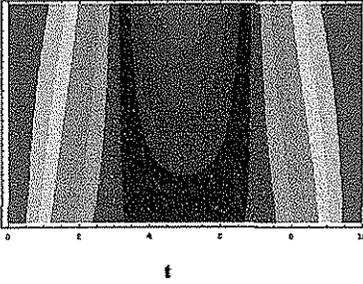
Figura (B.4). Familia de polinomios de velocidad constante.

Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GVVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GVVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GVVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**  
 **$FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}$  (Velocidad variable)**

Figura (B.5). Familia de polinomios de velocidad constante.



Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GV_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GV_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de velocidad.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GV_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{Pv8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}$  (Velocidad constante + variable)**

Figura (B.6). Familia de polinomios de velocidad constante + variable.

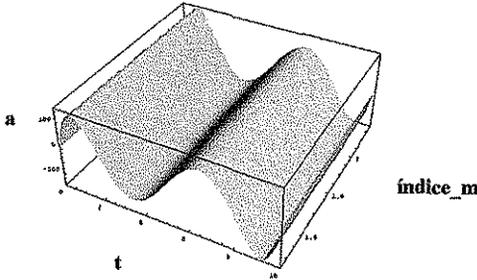
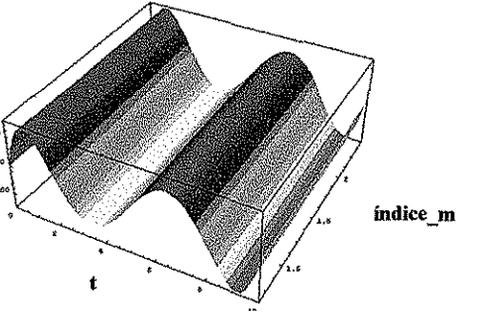
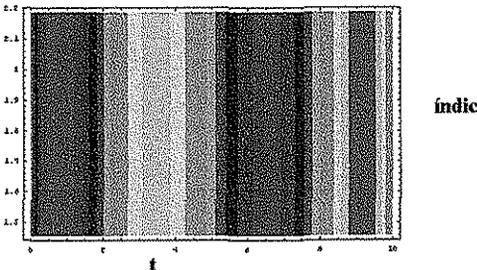
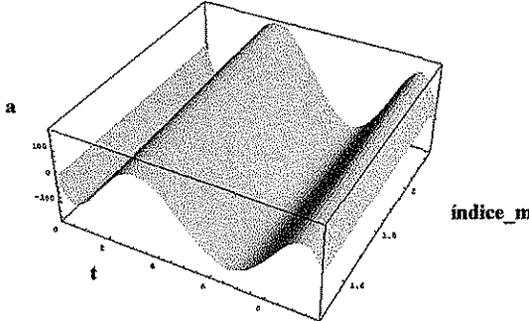
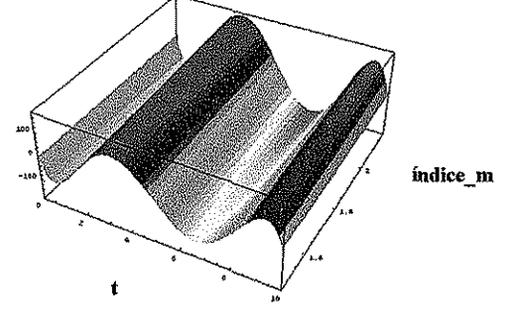
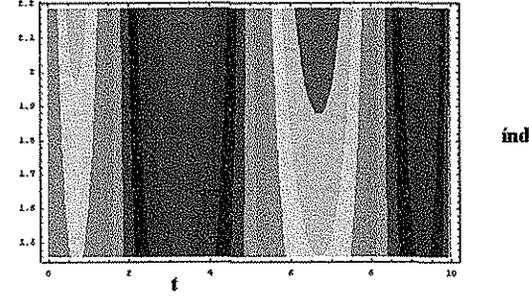
Gráfica	Descripción
 <p>A 3D surface plot showing acceleration 'a' on the vertical axis (ranging from -200 to 200) against time 't' on the horizontal axis (ranging from 0 to 10) and distance 'indice_m' on the depth axis (ranging from 0 to 10). The surface shows a complex, wavy pattern representing the acceleration profile over time and distance.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función Pol8GACte_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
 <p>A 3D surface plot showing acceleration 'a' on the vertical axis (ranging from -200 to 200) against time 't' on the horizontal axis (ranging from 0 to 10) and distance 'indice_m' on the depth axis (ranging from 0 to 10). The surface shows a complex, wavy pattern representing the acceleration profile over time and distance.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función Pol8GACte_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
 <p>A 2D level plot showing acceleration 'a' on the vertical axis (ranging from -2.0 to 2.0) against time 't' on the horizontal axis (ranging from 0 to 10) and distance 'indice_m' on the depth axis (ranging from 0 to 10). The plot shows vertical bands of varying intensity, representing the acceleration profile over time and distance.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función Pol8GACte_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>
<b>Familia de Genotipos</b>	
<b><math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math> (Aceleración constante)</b>	

Figura (B.7). Familia de polinomios de aceleración constante.

Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GAVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GAVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Función <math>Pol8GAVble\_vR()</math></li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}$  (Aceleración variable)**

Figura (B.8). Familia de polinomios de aceleración variable.



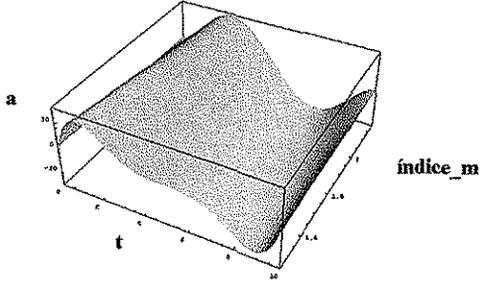
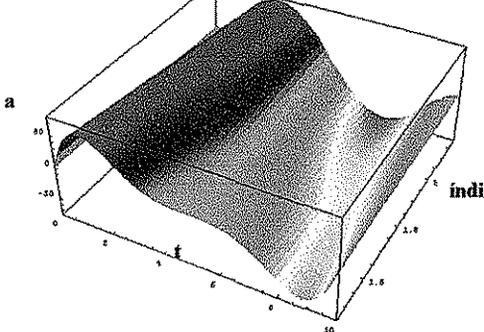
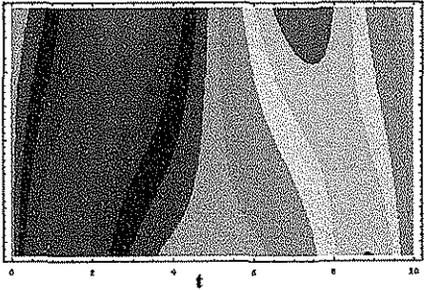
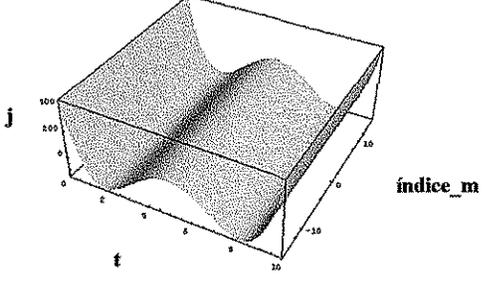
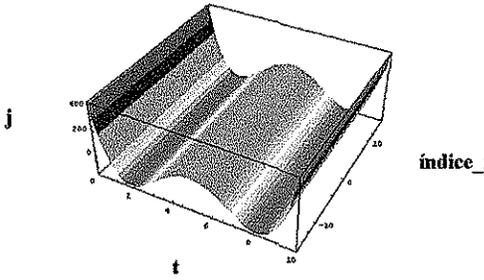
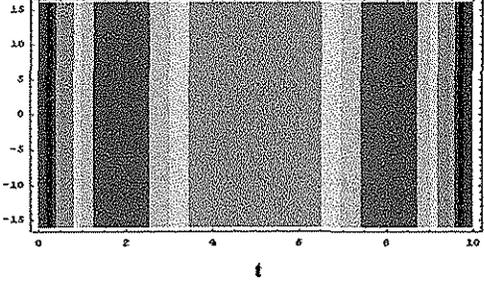
Gráfica	Descripción
 <p>A 3D surface plot showing acceleration 'a' on the vertical axis (ranging from -20 to 20) against time 't' on the horizontal axis (ranging from 0 to 10) and distance 'indice_m' on the depth axis (ranging from 0 to 10). The surface shows a complex, wavy pattern.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GA_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
 <p>A 3D surface plot showing acceleration 'a' on the vertical axis (ranging from -20 to 20) against time 't' on the horizontal axis (ranging from 0 to 10) and distance 'indice_m' on the depth axis (ranging from 0 to 10). The surface shows a complex, wavy pattern.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GA_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
 <p>A 2D contour plot showing acceleration 'a' on the vertical axis (ranging from -2.2 to 2.2) against time 't' on the horizontal axis (ranging from 0 to 10) and distance 'indice_m' on the depth axis (ranging from 0 to 10). The plot shows various shaded regions representing different acceleration levels.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de aceleración.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GA_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>
<b>Familia de Genotipos</b>	
<b><math>FG_{Pa8(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6}</math> (Aceleración constante + variable)</b>	

Figura (B.9). Familia de polinomios de aceleración constante + variable.

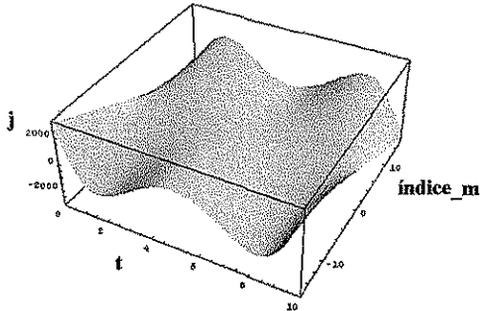
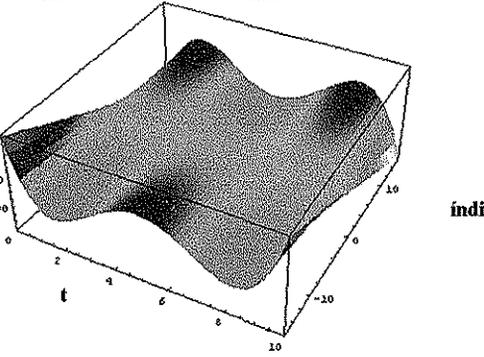
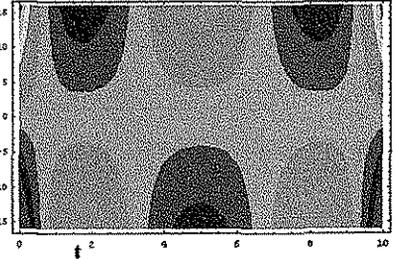
Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante del jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJCte_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante del jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJCte_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante del jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJCte_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{Pj8}(1000,10),[1.458334, 2.1875], 6$  (Jerk constante)**

Figura (B.10). Familia de polinomios de jerk constante.



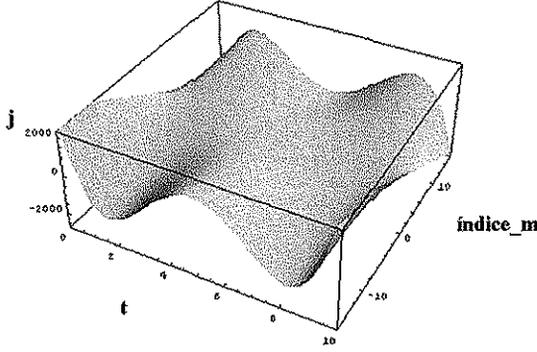
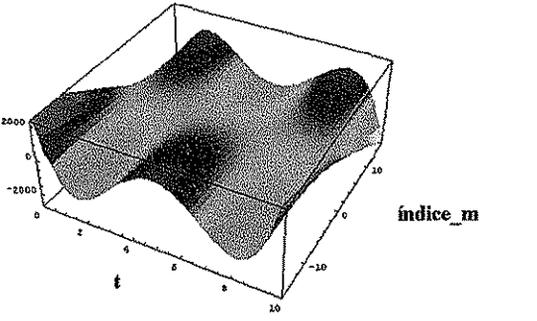
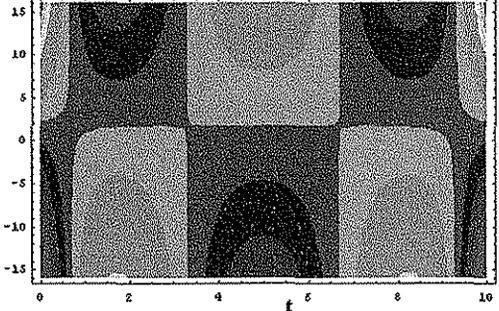
Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable del jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJVble_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable del jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pa8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJVble_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Variable de jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJVble_vR()</li> <li>• <math>tf=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6$  (Jerk variable)**

Figura (B.11). Familia de polinomios de jerk variable.



Gráfica	Descripción
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable del jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJ_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJ_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Polinomio: Constante + Variable de jerk.</li> <li>• Familia: <math>FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6</math></li> <li>• Graficador: Subrutina Pol8GJ_vR()</li> <li>• <math>t_f=10</math> seg</li> <li>• Distancia de recorrido=1000 mm</li> <li>• Gráfica de nivel; vista aérea</li> </ul>

**Familia de Genotipos**

**$FG_{Pj8}(1000,10), [1.458334, 2.1875], 6$  (Jerk constante + variable)**

Figura (B.12). Familia de polinomios de jerk constante + variable.

## ANEXO C:

# Teoremas Referentes a las Longitudes de los Dientes de los Tornillos J y las Tuercas J

### C. 1. INTRODUCCIÓN

En este anexo se presentan los teoremas que indican qué diente es el más largo dentro del universo de los “Dientes Semejantes” (ver la definición 3.7 y la tabla (3.4)).

Se establecen los siguientes teoremas:

- **TEOREMA 3.1:** referente a la relación del diente tipo 1 con el diente tipo 2.
- **TEOREMA 3.2:** referente a la relación del diente tipo 1 con el diente tipo 3.
- **TEOREMA 3.3:** referente a la relación del diente tipo 2 con el diente tipo 3.
- **TEOREMA 3.4:** que es el teorema general sobre la relación de la longitud del diente  $V$  respecto del diente  $W$ , donde  $V$  y  $W$  pueden tomar los valores de 1, 2 y/o 3.

Antes, es importante establecer los **LEMAS 3.1-3.9** que se refieren a la relación que guardan los eslabones de los manipuladores correspondientes a los tres tipos de dientes de los tornillos J, sometidos a las restricciones de la definición 3.7.

Los primeros cuatro Lemas (3.1, 3.2, 3.3 y 3.4) tratan el manipulador cuyo diente es del tipo 1 comparado contra el manipulador cuyo diente corresponde al tipo 2.

Los cuatro siguientes (Lemas 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8) tienen que ver con la comparación entre un manipulador cuyo diente es del tipo 1 y un manipulador cuyo diente es del tipo 3.

El último Lema 3.9 tiene que ver con la comparación de un manipulador cuyo diente es del tipo 2 comparado con otro cuyo diente es del tipo 3.

C. 2. LEMAS 3.1 al 3.9

Eslabón 2 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 2 del Diente Tipo 2

- **Hipótesis 3.1** Si se tienen las restricciones de los *Dientes Semejantes* (DEFINICIÓN 3.7) ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ), la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es menor que la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 2, es decir:

$$l_1|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO1}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.1.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.1 se establece el Lema 3.1. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_1|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO1} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_1|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO1}$ .

**LEMA 3.1**

Para las restricciones de los *Dientes Semejantes* (DEFINICIÓN 3.7)

$$l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}, \quad \exists \Delta > 0, \quad \text{tal que}$$

$$l_1|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO1} + \Delta, \quad \text{es verdadero.}$$

□

**PRUEBA LEMA 3.1**

PASO 1: las restricciones p1 y p2 implican c1 y c2:

**p1:**  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$

**p2:**  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$

**c1:**  $l_1|_{TIPO1} + l_2|_{TIPO1} = cte$

**c2:**  $l_1|_{TIPO2} + l_2|_{TIPO2} = cte$



PASO 2: la definición 3.5 (referente al diente tipo 2) implica c3:

**p3:**  $l_1|_{TIPO2} > l_2|_{TIPO2}$  (definición 3.5)

$$c3: \exists \Delta_1 > 0 \text{ tal que } l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO2} + \Delta_1$$

PASO 3: c2 y c3 implican c4:

$$l_1|_{TIPO2} + (l_2|_{TIPO2} + \Delta_1) - \Delta_1 = cte$$

$$c4: l_1|_{TIPO2} = \frac{cte + \Delta_1}{2}$$

PASO 4: c2 y c4 implican c5:

$$c5: l_2|_{TIPO2} = \frac{cte - \Delta_1}{2}$$

PASO 5: la definición 3.4 (referente al diente tipo 1) y p1 implica c6:

$$c6: cte = 2 * l_1|_{TIPO1}$$

PASO 6: (conclusión) c4 y c6 implican c7:

$$c7: l_1|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO1} + \frac{\Delta_1}{2}$$

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_1|_{TIPO1}$  requiere sumarse con  $\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_1|_{TIPO2}$ , por lo tanto c7 es verdadero.

- **Conclusión de la Hipótesis 3.1.** La suposición está validada por el Lema 3.1.

### Eslabón 3 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 2 del Diente Tipo 2

- **Hipótesis 3.2.** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ), la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es menor que la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 2, es decir:

$$l_2|_{TIPO1} < l_1|_{TIPO2}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.2.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.2 se establece el Lema 3.2. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO1} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_2|_{TIPO1} < l_1|_{TIPO2}$ .

**LEMA 3.2**

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO1} + \Delta$ , es verdadero.

□

**PRUEBA LEMA 3.2**

(Los pasos 1, 2, 3 y 4 de la prueba del Lema 3.1. son iguales a los pasos seguidos en la prueba de este Lema 3.2).

**PASO 5:** la definición 3.4 (referente al diente tipo 1) y p1 implica c6:

**c6:**  $cte = 2 * l_2|_{TIPO1}$

**PASO 6:** (conclusión) c4 y c6 implican c7:

**c7:**  $l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO1} + \frac{\Delta_1}{2}$

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_2|_{TIPO1}$  requiere sumarse con

$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_1|_{TIPO2}$ , por lo tanto c7 es verdadero.

□

- **Conclusión de la Hipótesis 3.2.** La suposición está validada por el Lema 3.2.

**Eslabón 2 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 3 del Diente Tipo 2**

- **Hipótesis 3.3** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ), la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es mayor que la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 2, es decir:

$$l_1|_{TIPO1} > l_2|_{TIPO2}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.3.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.3 se establece el Lema 3.3. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_1|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_1|_{TIPO1} > l_2|_{TIPO2}$ .

**LEMA 3.3**

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_1|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \Delta$ , es verdadero.

□

**PRUEBA LEMA 3.3**

(Los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 de la prueba del Lema 3.1 son iguales a los seguidos en la prueba de éste)

**PASO 6:** (conclusión) c5 y c6 implican c7:

**c7:**  $l_1|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \frac{\Delta_1}{2}$

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_2|_{TIPO2}$  requiere sumarse con

$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_1|_{TIPO1}$ , por lo tanto c7 es verdadero. Entonces c7 prueba este Lema.

- **Conclusión de la Hipótesis 3.3.** La sospecha está validada por el Lema 3.3.



**Eslabón 3 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 3 del Diente Tipo 2**

- **Hipótesis 3.4.** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ), la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es mayor que la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 2, es decir:

$$l_2|_{TIPO1} > l_2|_{TIPO2}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.4.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.4 se establece el Lema 3.4. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_2|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_2|_{TIPO1} > l_2|_{TIPO2}$ .

**LEMA 3.4**

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_2|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \Delta$ , es verdadero.

□

**PRUEBA LEMA 3.4**

(Los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 de la prueba del Lema 3.2. son iguales a los pasos seguidos en la prueba de este Lema 3.4).

**PASO 6:** (conclusión) c5 y c6 implican c7:

**c7:**  $l_2|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \frac{\Delta_1}{2}$

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_2|_{TIPO2}$  requiere sumarse con

$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_2|_{TIPO1}$ , por lo tanto c7 es verdadero.

□

- **Conclusión de la Hipótesis 3.4.** La suposición está validada por el Lema 3.4.



**Eslabón 2 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 2 del Diente Tipo 3**

- **Hipótesis 3.5** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ), la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es mayor que la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 3, es decir:

$$l_1|_{TIPO3} < l_1|_{TIPO1}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.5.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.5 se establece el Lema 3.5. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_1|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_1|_{TIPO3} < l_1|_{TIPO1}$ .

**LEMA 3.5**

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_1|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \Delta$ , es verdadero.

□

**PRUEBA LEMA 3.5**

**PASO 1:** las restricciones p1 y p2 implican c1 y c2:

**p1:**  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$

**p2:**  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$

**c1:**  $l_1|_{TIPO1} + l_2|_{TIPO1} = cte$

**c2:**  $l_1|_{TIPO3} + l_2|_{TIPO3} = cte$

**PASO 2:** la definición 3.6 (referente al diente tipo 3) implica c3:

**p3:**  $l_1|_{TIPO3} < l_2|_{TIPO3}$  (definición 4.3)

**c3:**  $\exists \Delta_1 > 0$  tal que  $l_2|_{TIPO3} = l_1|_{TIPO3} + \Delta_1$

PASO 3: c2 y c3 implican c4:

$$l_2|_{TIPO3} + (l_1|_{TIPO3} + \Delta_1) - \Delta_1 = cte$$

$$c4: l_2|_{TIPO3} = \frac{cte + \Delta_1}{2}$$

PASO 4: c2 y c4 implican c5:

$$c5: l_1|_{TIPO3} = \frac{cte - \Delta_1}{2}$$

PASO 5: la definición 3.4 (referente al diente tipo 1) y p1 implica c6:

$$c6: cte = 2 * l_1|_{TIPO1}$$

PASO 6: (conclusión) c5 y c6 implican c7:

$$c7: l_1|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \frac{\Delta_1}{2}$$

$\Delta$  puede ser igual a  $\frac{\Delta_1}{2}$  ya que la elección de aquel fue arbitrario.

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_1|_{TIPO3}$  requiere sumarse con

$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_1|_{TIPO1}$ , por lo tanto c7 es verdadero.

- **Conclusión de la Hipótesis 3.5.** La suposición está validada por el Lema 3.5.

**Eslabón 3 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 2 del Diente Tipo 3**

- **Hipótesis 3.6** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ), la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es mayor que la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 3, es decir:

$$l_2|_{TIPO1} > l_1|_{TIPO3}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.6.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.6 se establece el Lema 3.6. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_2|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_2|_{TIPO1} > l_1|_{TIPO3}$ .

**LEMA 3.6**

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_2|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \Delta$ , es verdadero.

□

**PRUEBA LEMA 3.6**

(Los pasos 1, 2, 3 y 4 de la prueba del Lema 3.5 son los mismos que los empleados en la prueba de éste)

**PASO 5:** la definición 3.4 (referente al diente tipo 1) y p1 implica c6:

**c6:**  $cte = 2 * l_2|_{TIPO1}$

**PASO 6:** (conclusión) c5 y c6 implican c7:

**c7:**  $l_2|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \frac{\Delta_1}{2}$

$\Delta$  puede ser igual a  $\frac{\Delta_1}{2}$  ya que la elección de aquel fue arbitrario.

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_1|_{TIPO3}$  requiere sumarse con



$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_2|_{TIPO1}$ , por lo tanto c7 es verdadero.

- **Conclusión de la Hipótesis 3.6.** La suposición está validada por el Lema 3.6.

### Eslabón 2 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 3 del Diente Tipo 3

- **Hipótesis 3.7** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ), la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 1 es menor que la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 3, es decir:

$$l_1|_{TIPO1} < l_2|_{TIPO3}$$

- **Demstración de la Hipótesis 3.7.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.7 se establece el Lema 3.7. siguiente, en el cual la estrategia a seguir es determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_2|_{TIPO3} = l_1|_{TIPO1} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_1|_{TIPO1} < l_2|_{TIPO3}$ .

#### LEMA 3.7

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_2|_{TIPO3} = l_1|_{TIPO1} + \Delta$ , es verdadero.

□

#### PRUEBA LEMA 3.7

(Los pasos 1, 2, 3, 4 y 5 de la prueba del Lema 3.5 son los mismos a los empleados en la prueba de éste)

PASO 6: (conclusión) c4 y c6 implican c7:

$$c7: l_2|_{TIPO3} = l_1|_{TIPO1} + \frac{\Delta_1}{2}$$

$\Delta$  puede ser igual a  $\frac{\Delta_1}{2}$  ya que la elección de aquel fue arbitrario.

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_1|_{TIPO1}$  requiere sumarse con

$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_2|_{TIPO3}$ , por lo tanto  $c7$  es verdadero.

- **Conclusión de la Hipótesis 3.7.** La suposición está validada por el Lema 3.7.

### Eslabón 3 del Diente Tipo 1 contra Eslabón 3 del Diente Tipo 3

- **Hipótesis 3.8** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ), la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 3 es mayor que la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 1, es decir:

$$l_2|_{TIPO1} < l_2|_{TIPO3}$$

- **Demostración de la Hipótesis 3.8.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.8 se establece el Lema 3.8. siguiente, en el cual la estrategia a seguir consiste en determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  mayor a cero tal que se cumpla el enunciado  $l_2|_{TIPO3} = l_2|_{TIPO1} + \Delta$ , así se prueba la desigualdad  $l_2|_{TIPO1} < l_2|_{TIPO3}$ .

#### LEMA 3.8

Para las restricciones  $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$  y  $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ,

$\exists \Delta > 0$ , tal que  $l_2|_{TIPO3} = l_2|_{TIPO1} + \Delta$ , es verdadero.

□

#### PRUEBA LEMA 3.8

(Los pasos 1, 2, 3 y 4, empleados en la prueba del lema 3.1, son iguales a los empleados en la prueba de éste)

PASO 5: la definición 3.4 (referente al diente tipo 1) y p1 implica c6:

$$c6: cte = 2 * l_2|_{TIPO1}$$

PASO 6: (conclusión) c4 y c6 implican c7:

$$c7: l_2|_{TIPO3} = l_2|_{TIPO1} + \frac{\Delta_1}{2}$$

$\Delta$  puede ser igual a  $\frac{\Delta_1}{2}$  ya que la elección de aquel fue arbitrario.

Como  $\Delta_1 > 0$  entonces  $\frac{\Delta_1}{2} > 0$ . Así,  $l_2|_{TIPO1}$  requiere sumarse con

$\frac{\Delta_1}{2}$  para alcanzar la igualdad con  $l_2|_{TIPO3}$ , por lo tanto c7 es verdadero.

- **Conclusión de la Hipótesis 3.8.** La suposición está validada por el Lema 3.8.

### Eslabones 2 y 3 del Diente Tipo 2 contra Eslabones 2 y 3 del Diente Tipo 3

- **Hipótesis 3.9** Si se tienen las restricciones de los manipuladores ( $l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$ ) y ( $\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$ ), entonces **a)** la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 2 puede ser mayor, menor o igual que la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 3, así mismo, **b)** la longitud del eslabón 3 del manipulador correspondiente al diente tipo 2 puede ser mayor, menor o igual que la longitud del eslabón 2 del manipulador correspondiente al diente tipo 3, también se cumple que **c)** la longitud del eslabón 2 de un manipulador correspondiente a un diente del tipo 2 es mayor que la longitud del eslabón 2 de uno del tipo 3 y **d)** la longitud del eslabón 3 de un manipulador correspondiente a un diente del tipo 2 es menor que la longitud del eslabón 3 de uno del tipo 3.
- **Demostración de la Hipótesis 3.9.** Para obtener la validación de la suposición o hipótesis 3.9 se establece el Lema 3.9. siguiente, en el cual la estrategia a seguir consiste en determinar la existencia de un escalar  $\Delta$  que puede ser mayor, menor o igual a cero, tal que la hipótesis tenga validez.

### LEMA 3.9

Para las restricciones de los tornillos semejantes:  $l_3|_{TIPO2} = l_3|_{TIPO3}$  y

$$\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}, \quad \exists \Delta_{2,2/1,3} \in \mathfrak{R}, \text{ tal que uno y sólo uno de los}$$

siguientes enunciados (a), (b), o (c) es verdadero:

(a)  $l_2|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO3}$

(b)  $l_2|_{TIPO2} < l_1|_{TIPO3}$

(c)  $l_2|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3}$

Además,  $\exists \Delta_{1,2/2,3} \in \mathfrak{R}$  tal que uno y solamente uno de los siguientes enunciados (d), (e), o (f) es verdadero:

d)  $l_1|_{TIPO2} > l_2|_{TIPO3}$

e)  $l_1|_{TIPO2} < l_2|_{TIPO3}$

f)  $l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO3}$

Además,  $\exists \Delta_{1,2/1,3} \in \mathfrak{R}$  se cumple que el enunciado (g) siguiente es verdadero:

g)  $l_1|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO3}$

Además,  $\exists \Delta_{2,2/2,3} \in \mathfrak{R}$  se cumple que el enunciado (h) siguiente es verdadero:

h)  $l_2|_{TIPO2} < l_2|_{TIPO3}$

□

### PRUEBA LEMA 3.9

PASO 1: la definición 3.5 (referente al diente tipo 2) implica p2:

p1:  $l_1|_{TIPO2} > l_2|_{TIPO2}$  (definición 3.5)

p2:  $\exists \Delta_1 \in \mathfrak{R}$  tal que  $l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO2} + \Delta_1$

**PASO 2:** Las restricciones de los dientes de los tornillos semejantes (definición 3.7) implican p3, además c1 y c2 son resultante de p2 y p3:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p3:} \quad & l_1|_{TIPO2} + l_2|_{TIPO2} = cte \\
 & l_1|_{TIPO2} + (l_2|_{TIPO2} + \Delta_1) - \Delta_1 = cte \\
 \mathbf{c1:} \quad & 2 * l_1|_{TIPO2} - \Delta_1 = cte \\
 \mathbf{c2:} \quad & 2 * l_2|_{TIPO2} + \Delta_1 = cte
 \end{aligned}$$

**PASO 3:** la definición 3.6 (referente al diente tipo 3) implica p5:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p4:} \quad & l_1|_{TIPO3} < l_2|_{TIPO3} \text{ (definición 3.6)} \\
 \mathbf{p5:} \quad & \exists \Delta_2 \in \mathbb{R} \text{ tal que } l_2|_{TIPO3} = l_1|_{TIPO3} + \Delta_2
 \end{aligned}$$

**PASO 4:** Las restricciones de los tornillos semejantes (definición 3.7) implican p6, además c3 y c4 son resultante de p5 y p6:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p6:} \quad & l_1|_{TIPO3} + l_2|_{TIPO3} = cte \\
 & l_2|_{TIPO3} + (l_1|_{TIPO3} + \Delta_2) - \Delta_2 = cte \\
 \mathbf{c3:} \quad & 2 * l_2|_{TIPO3} - \Delta_2 = cte \\
 \mathbf{c4:} \quad & 2 * l_1|_{TIPO3} + \Delta_2 = cte
 \end{aligned}$$

**PASO 5:** c1 y c3 implican c5:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{c5:} \quad & l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO3} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \\
 & \text{donde } \Delta_{1:2/2:3} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}
 \end{aligned}$$

$\Delta_1 > \Delta_2$	$\Delta_{1:2/2:3} > 0$	$l_1 _{TIPO2} > l_2 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (d)</b>
$\Delta_1 < \Delta_2$	$\Delta_{1:2/2:3} < 0$	$l_1 _{TIPO2} < l_2 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (e)</b>
$\Delta_1 = \Delta_2$	$\Delta_{1:2/2:3} = 0$	$l_1 _{TIPO2} = l_2 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (f)</b>

**Tabla 1L3.9.** Prueba de los enunciados (d), (e) y (f) del Lema 3.9.

**PASO 6:** c1 y c4 implican c6:

$$c6: l_1|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3} + \frac{\Delta_2 + \Delta_1}{2}$$

$$\text{donde } \Delta_{1:2/1:3} = \frac{\Delta_2 + \Delta_1}{2}$$

$\Delta_2 > \Delta_1$	$\Delta_{2:2/1:3} > 0$	$l_1 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (g)</b>
$\Delta_2 < \Delta_1$	$\Delta_{2:2/1:3} > 0$	$l_1 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (g)</b>
$\Delta_2 = \Delta_1$	$\Delta_{2:2/1:3} > 0$	$l_1 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (g)</b>

Tabla 2L3.9. Prueba del enunciado (g) del Lema 3.9.

PASO 7: c2 y c3 implican c7:

$$c7: l_2|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO3} - \frac{\Delta_2 + \Delta_1}{2}$$

$$\text{donde } \Delta_{2:2/2:3} = \frac{\Delta_2 + \Delta_1}{2}$$

$\Delta_2 > \Delta_1$	$\Delta_{2:2/2:3} > 0$	$l_2 _{TIPO3} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Enunciado (h)</b>
$\Delta_2 < \Delta_1$	$\Delta_{2:2/2:3} > 0$	$l_2 _{TIPO3} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Enunciado (h)</b>
$\Delta_2 = \Delta_1$	$\Delta_{2:2/2:3} > 0$	$l_2 _{TIPO3} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Enunciado (h)</b>

Tabla 3L3.9. Prueba del enunciado (h) del Lema 3.9.

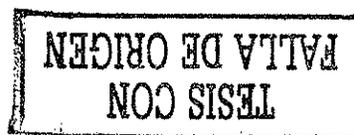
PASO 8: c2 y c4 implican c8:

$$c8: l_2|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2}$$

$$\text{donde } \Delta_{2:2/1:3} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2}$$

$\Delta_2 > \Delta_1$	$\Delta_{2:2/1:3} > 0$	$l_2 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (a)</b>
$\Delta_2 < \Delta_1$	$\Delta_{2:2/1:3} < 0$	$l_2 _{TIPO2} < l_1 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (b)</b>
$\Delta_2 = \Delta_1$	$\Delta_{2:2/1:3} = 0$	$l_2 _{TIPO2} = l_1 _{TIPO3}$	<b>Enunciado (c)</b>

Tabla 4L3.9. Prueba de los enunciados (a), (b) y (c) del Lema 3.9.



Enunciados⇒	$l_2 _{TIPO2}$ contra $l_1 _{TIPO3}$			$l_1 _{TIPO2}$ contra $l_2 _{TIPO3}$			$l_1 _{TIPO2}$ contra $l_1 _{TIPO3}$	$l_2 _{TIPO2}$ contra $l_2 _{TIPO3}$
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
$\Delta_2 > \Delta_1$	V	F	F	F	V	F	V	V
$\Delta_2 = \Delta_1$	F	F	V	F	F	V	V	V
$\Delta_2 < \Delta_1$	F	V	F	V	F	F	V	V
V: verdadero		F: falso						

Tabla 5L3.9. La validez de los 8 enunciados del LEMA 3.9 dependiendo de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$ .

¡Las conclusiones c5, c6, c7 y c8, y sus diferentes posibilidades plasmadas en las Tablas 1L3.9, 2L3.9, 3L3.9, 4L3.9 y 5L3.9 prueban el LEMA 3.9!

Conclusión de la Hipótesis 3.9. La suposición está validada por el Lema 3.9.

### C. 3. TEOREMAS 3.1 al 3.9

#### LOS DIENTES TIPO 1 Y TIPO 2

- **HIPÓTESIS 4.1:** La longitud del diente del tipo1 es mayor que la longitud del diente del tipo2.

$$L_{d1J}|_{TIPO1} > L_{d1J}|_{TIPO2}$$

- **DEMOSTRACIÓN:** La demostración de esta suposición conlleva al establecimiento del siguiente teorema 3.1, cuya prueba demuestra que la longitud del diente tipo 1 es mayor que la del diente tipo 2.

La demostración se basa en determinar la existencia de un escalar  $\Delta_1$  que determina la diferencia entre las longitudes de los dientes tipo 1 y tipo2, tal que los dos enunciados siguientes sean idénticos:

$$\exists \Delta_1 \in \mathfrak{R} \text{ tal que } (L_{dTJ}|_{TIPO1} > L_{dTJ}|_{TIPO2}) \equiv (L_{dTJ}|_{TIPO1} = L_{dTJ}|_{TIPO2} + \Delta_1)$$

### TEOREMA 3.1

$$\forall (l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}) \bullet \forall (\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}):$$

$$\exists \Delta_1 > 0 \text{ tal que } L_{dTJ}|_{TIPO1} = L_{dTJ}|_{TIPO2} + \Delta_1$$

### PRUEBA TEOREMA 3.1

**PASO 1:** Las premisas p1 y p2 siguientes implican c1 y c2 siguientes:

$$\mathbf{p1:} \quad l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO2}$$

$$\mathbf{p2:} \quad \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2}$$

$$\mathbf{c1:} \quad l_1|_{TIPO1} + l_2|_{TIPO1} = cte$$

$$\mathbf{c2:} \quad l_1|_{TIPO2} + l_2|_{TIPO2} = cte$$

Así,  $(p_1 \bullet p_2) \supset (c_1 \bullet c_2)$  es verdadero

**PASO 2:** La premisa p3 siguiente y la conclusión c1 anterior implican c3 siguiente:

$$\mathbf{p3:} \quad l_1|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO1}$$

$$\mathbf{c3:} \quad cte = 2 l_2|_{TIPO1}$$

Así,  $(c_1 \bullet p_3) \supset (c_3)$  es verdadero.

**PASO 3:** La premisa p4 siguiente y la conclusión c2 anterior implican c4 siguiente:

$$\mathbf{p4:} \quad l_1|_{TIPO2} > l_2|_{TIPO2}$$

$$\mathbf{c4:} \quad l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO2} + \Delta_2$$

Así,  $(p_4 \bullet c_2) \supset (c_4)$  es verdadero.

**PASO 4:** Las conclusiones c2 y c4 anteriores implican c5 siguiente:

$$l_1|_{TIPO2} + l_2|_{TIPO2} + \Delta_2 - \Delta_2 = cte$$

$$l_1|_{TIPO2} + l_1|_{TIPO2} - \Delta_2 = cte$$

$$c5: l_1|_{TIPO2} = \frac{cte + \Delta_2}{2}$$

Así,  $(c_2 \bullet c_4) \supset (c_5)$

**PASO 5:** Las conclusiones  $c_2$  y  $c_5$  anteriores implican  $c_6$  siguiente:

$$\frac{cte + \Delta_2}{2} + l_2|_{TIPO2} = cte$$

$$c6: l_2|_{TIPO2} = \frac{cte - \Delta_2}{2}$$

Así,  $(c_2 \bullet c_5) \supset (c_6)$  es verdadero.

**PASO 6:** La conclusiones  $c_3$  y  $c_6$  anteriores implican  $c_7$  siguiente:

$$l_2|_{TIPO2} = \frac{(2l_2|_{TIPO1}) - \Delta_2}{2}$$

$$c7: l_2|_{TIPO1} = l_2|_{TIPO2} + \frac{\Delta_2}{2}$$

Así,  $(c_3 \bullet c_6) \supset (c_7)$  es verdadero.

**PASO 7:** Las premisas  $p_3$ , siguiente, y  $p_5$ , anterior, implican  $c_8$  siguiente:

$$p5: L_{dTJ}|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO1} + l_2|_{TIPO1}$$

$$L_{dTJ}|_{TIPO1} = 2 * l_2|_{TIPO1}$$

$$c8: l_2|_{TIPO1} = \frac{L_{dTJ}|_{TIPO1}}{2}$$

Así,  $(p_3 \bullet p_5) \supset (c_8)$  es verdadero.

**PASO 8:** La premisa  $p_6$  siguiente implica  $c_9$  siguiente:

$$p6: L_{dTJ}|_{TIPO2} = 2 * l_2|_{TIPO2}$$

$$c9: l_2|_{TIPO2} = \frac{L_{dTJ}|_{TIPO2}}{2}$$

Así,  $(p_6) \supset (c_9)$  es verdadero.

**Paso 9: Conclusión.** Las conclusiones  $c_7$ ,  $c_8$  y  $c_9$  implican  $c_{10}$ .

$$c_{10}: L_{dTJ}|_{TIPO1} = L_{dTJ}|_{TIPO2} + \Delta_2 \quad \text{¡ES VERDADERO!}$$

si  $\Delta_2$  es igual a  $\Delta_1$  (la elección de  $\Delta_1$  fue arbitraria, por lo tanto se puede afirmar que ambas constantes son iguales) se comprueba la existencia de  $\Delta_1 > 0$ .

□

- **CONCLUSIÓN:** Por lo tanto, la longitud del diente del tipo1 es mayor que la longitud del diente del tipo 2, para manipuladores con radio externo del volumen de trabajo igual, además de  $l_3$  invariante.

### LOS DIENTES TIPO 1 Y TIPO 3

- **HIPÓTESIS 3.2:** La longitud del diente del tipo1 es mayor que la longitud del diente del tipo3, es decir:

$$L_{dIJ}|_{TIPO1} > L_{dIJ}|_{TIPO3}$$

- **DEMOSTRACIÓN:** La demostración de esta suposición conlleva al establecimiento del siguiente teorema 3.2, cuya prueba demuestra que la longitud del diente tipo 1 es mayor que la del diente tipo 3.

La demostración se basa en determinar la existencia de un escalar  $\Delta_1$  que determina la diferencia entre las longitudes de los dientes tipo 1 y tipo 3, tal que los dos enunciados siguientes sean idénticos:

$$\exists \Delta_1 \in \mathbb{R} \text{ tal que } (L_{dIJ}|_{TIPO1} > L_{dIJ}|_{TIPO3}) \equiv (L_{dIJ}|_{TIPO1} = L_{dIJ}|_{TIPO3} + \Delta_1)$$

#### TEOREMA 3.2

$$\forall (l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}) \bullet \forall (\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}):$$

$$\exists \Delta_1 > 0 \text{ tal que } L_{dIJ}|_{TIPO1} = L_{dIJ}|_{TIPO3} + \Delta_1$$

#### PRUEBA TEOREMA 3.2

PASO 1: Las premisas p1 y p2 siguientes implican c1 y c2 siguientes:

$$p1: l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}$$

$$p2: \sum_{i=1}^3 l_i \Big|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i \Big|_{TIPO3}$$

$$c1: l_1 \Big|_{TIPO1} + l_2 \Big|_{TIPO1} = cte$$

$$c2: l_1 \Big|_{TIPO3} + l_2 \Big|_{TIPO3} = cte$$

Así,  $(p_1 \bullet p_2) \supset (c_1 \bullet c_2)$  es verdadero.

PASO 2: La premisa p3 siguiente y la conclusión c1 anterior implican c3 siguiente:

$$p3: l_1 \Big|_{TIPO1} = l_2 \Big|_{TIPO1}$$

$$c3: cte = 2 l_2 \Big|_{TIPO1}$$

Así,  $(c_1 \bullet p_3) \supset (c_3)$  es verdadero.

PASO 3: La premisa p4 siguiente (de la definición 3.6 sobre el diente tipo3) y la conclusión c2 anterior implican c4 siguiente:

$$p4: l_1 \Big|_{TIPO3} < l_2 \Big|_{TIPO3}$$

$$c4: l_2 \Big|_{TIPO3} = l_1 \Big|_{TIPO3} + \Delta_2$$

Así,  $(p_4 \bullet c_2) \supset (c_4)$  es verdadero.

PASO 4: Las conclusiones c2 y c4 anteriores implican c5 siguiente:

$$l_1 \Big|_{TIPO3} + l_2 \Big|_{TIPO3} + \Delta_2 - \Delta_2 = cte$$

$$l_2 \Big|_{TIPO3} + l_2 \Big|_{TIPO3} - \Delta_2 = cte$$

$$c5: l_2 \Big|_{TIPO3} = \frac{cte + \Delta_2}{2}$$

Así,  $(c_2 \bullet c_4) \supset (c_5)$  es verdadero.

PASO 5: Las conclusiones c2 y c5 anteriores implican c6 siguiente:

$$\frac{cte + \Delta_2}{2} + l_1 \Big|_{TIPO3} = cte$$

$$c6: l_1 \Big|_{TIPO3} = \frac{cte - \Delta_2}{2}$$

Así,  $(c_2 \bullet c_5) \supset (c_6)$  es verdadero.

PASO 6: Las conclusiones c3 y c6 anteriores implican c7 siguiente:

$$l_1|_{TIPO3} = \frac{(2l_1|_{TIPO1}) - \Delta_2}{2}$$

$$c7: l_1|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO3} + \frac{\Delta_2}{2}$$

Así,  $(c_3 \bullet c_6) \supset (c_7)$  es verdadero.

PASO 7: Las premisas p3, anterior, y p5, siguiente, implican c8 siguiente:

$$p5: L_{dTJ}|_{TIPO1} = l_1|_{TIPO1} + l_2|_{TIPO1}$$

$$L_{dTJ}|_{TIPO1} = 2 * l_2|_{TIPO1}$$

$$c8: l_1|_{TIPO1} = \frac{L_{dTJ}|_{TIPO1}}{2}$$

Así,  $(p_3 \bullet p_5) \supset (c_8)$  es verdadero.

PASO 8: La premisa p6 siguiente implica c9 siguiente:

$$p6: L_{dTJ}|_{TIPO3} = 2 * l_2|_{TIPO3}$$

$$c9: l_1|_{TIPO3} = \frac{L_{dTJ}|_{TIPO3}}{2}$$

Así,  $(p_6) \supset (c_9)$  por lo tanto, verdadera

Paso 9: **Conclusión.** Las conclusiones c7, c8 y c9 implican c10.

$$c10: L_{dTJ}|_{TIPO1} = L_{dTJ}|_{TIPO3} + \Delta_2 \quad \text{¡ES VERDADERO!}$$

Si  $\Delta_2$  es igual a  $\Delta_1$  (la elección de  $\Delta_1$  fue arbitraria, por lo tanto se puede afirmar que ambas constantes son iguales) se comprueba la existencia de  $\Delta_1 > 0$ .

□

- **CONCLUSIÓN:** Por lo tanto, la longitud del diente tipo1 es mayor que la longitud del diente tipo 3 para manipuladores con radio externo del volumen de trabajo igual, además de  $l_3$  invariante.

**LOS DIENTES TIPO 2 Y TIPO 3**

- **HIPÓTESIS 3.3:** La longitud del diente del tipo2 puede ser menor, mayor o, incluso, igual que la longitud del diente del tipo3, es decir:

- a)  $L_{dTJ}|_{TIPO2} < L_{dTJ}|_{TIPO3}$
- b)  $L_{dTJ}|_{TIPO2} > L_{dTJ}|_{TIPO3}$
- c)  $L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3}$

- **DEMOSTRACIÓN:** La demostración de esta suposición conlleva al establecimiento del siguiente teorema 3.3, cuya prueba demuestra la veracidad de la hipótesis 3.3.

La relación de las longitudes de los dientes tipo 2 y tipo 3 dependen de  $\Delta$ , según se observa en la ecuación siguiente.

$$L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3} + \Delta$$

Así,

$\exists \Delta \in \mathfrak{R}$  tal que, dependiendo del valor de  $\Delta$ , uno de los 3 enunciados condicionales siguientes es verdadero:

$$\begin{aligned} (\Delta > 0) &\Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPO2} > L_{dTJ}|_{TIPO3}) \\ (\Delta < 0) &\Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPO2} < L_{dTJ}|_{TIPO3}) \\ (\Delta = 0) &\Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3}) \end{aligned}$$

**TEOREMA 3.3**

$$\begin{aligned} &\forall (l_3|_{TIPO1} = l_3|_{TIPO3}) \bullet \forall (\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO1} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}) \bullet \\ &(\exists \Delta \in \mathfrak{R}) \bullet (L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3} + \Delta) \text{ tales que:} \end{aligned}$$

$$\left\{ \left[ (\Delta > 0) \Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPO2} > L_{dTJ}|_{TIPO3}) \right] \vee \left[ (\Delta < 0) \Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPO2} < L_{dTJ}|_{TIPO3}) \right] \right\} \vee \left[ (\Delta = 0) \Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3}) \right]$$

es verdadero.



### PRUEBA TEOREMA 3.3

**PASO 1:** Las premisas p1, p2 siguientes y las definiciones 3.5 y 3.6, referentes a los dientes tipo 2 y tipo3, implican c1, c2, c3 y c4 siguientes:

$$p1: l_3|_{TIPO2} = l_3|_{TIPO3}$$

$$p2: \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO2} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPO3}$$

$$c1: l_1|_{TIPO2} + l_2|_{TIPO2} = cte$$

$$c2: l_1|_{TIPO3} + l_2|_{TIPO3} = cte$$

$$c3: l_1|_{TIPO2} = l_2|_{TIPO2} + \Delta_1$$

$$c4: l_2|_{TIPO3} = l_1|_{TIPO3} + \Delta_2$$

Así,  $(p_1 \cdot p_2) \Rightarrow ((c_1 \cdot c_2) \cdot c_3) \cdot c_4$  es verdadero.

**PASO 2:** Las conclusiones c1 y c3 anteriores implican c5 siguiente, y las conclusiones c2 y c4 implican c6 siguiente:

$$c5: 2 * l_2|_{TIPO2} + \Delta_1 = cte$$

$$c6: 2 * l_1|_{TIPO3} + \Delta_2 = cte$$

Así,  $(c_1 \cdot c_3) \Rightarrow (c_5)$  y  $(c_2 \cdot c_4) \Rightarrow (c_6)$  son verdaderos.

**PASO 3:** Las premisas p3 y p4 siguientes y las conclusiones c5 y c6 anteriores implican c7 siguiente:

$$p3: L_{dTJ}|_{TIPO2} = 2 * l_2|_{TIPO2}$$

$$p4: L_{dTJ}|_{TIPO3} = 2 * l_1|_{TIPO3}$$

$$c7: L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3} + (\Delta_2 - \Delta_1)$$

Así,  $((p_3 \cdot p_4) \cdot c_5) \cdot c_6 \Rightarrow (c_7)$  es verdadero.

**PASO 4:** de la conclusión c7 anteriores se puede preguntar lo siguiente:

$$c8: \text{Si } \Delta_2 > \Delta_1 \text{ entonces } L_{dTJ}|_{TIPO2} > L_{dTJ}|_{TIPO3} \text{ ¿es verdadero?}$$

$$c9: \text{Si } \Delta_2 < \Delta_1 \text{ entonces } L_{dTJ}|_{TIPO2} < L_{dTJ}|_{TIPO3} \text{ ¿es verdadero?}$$

$$c10: \text{Si } \Delta_2 = \Delta_1 \text{ entonces } L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO3} \text{ ¿es verdadero?}$$

**PASO 5:** Para determinar si los enunciados implicativos **c8**, **c9** y **c10** son verdaderos, es necesario determinar cuál es la naturaleza de sus antecedentes, para esto se requiere saber la magnitud de  $\Delta_1$  respecto de la magnitud de  $\Delta_2$ .

De **c5** y **c6** se puede concluir **c11**

$$\mathbf{c11:} \quad l_2|_{TIPO2} - l_1|_{TIPO3} = \frac{1}{2}(\Delta_2 - \Delta_1)$$

**Caso 1:**

$$\mathbf{p5:} \quad l_2|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO3} \quad (\text{posibilitado por el LEMA 3.9})$$

$$\mathbf{c12:} \quad l_2|_{TIPO2} - l_1|_{TIPO3} > 0$$

$$\mathbf{c13:} \quad (\Delta_2 - \Delta_1) > 0 \quad \text{ó} \quad (\Delta_2 > \Delta_1)$$

**c14:**  $p_5 \supset (c_{12} \bullet c_{13})$  verdadero porque tanto el antecedente como los consecuentes lo son.

$$\therefore L_{dTJ}|_{TIPO2} > L_{dTJ}|_{TIPO2}$$

**Caso 2:**

$$\mathbf{p6:} \quad l_2|_{TIPO2} < l_1|_{TIPO3} \quad (\text{posibilitado por el LEMA 3.9})$$

$$\mathbf{c15:} \quad l_2|_{TIPO2} - l_1|_{TIPO3} < 0$$

$$\mathbf{c16:} \quad (\Delta_2 - \Delta_1) < 0 \quad \text{ó} \quad (\Delta_2 < \Delta_1)$$

**c17:**  $p_6 \supset (c_{15} \bullet c_{16})$  verdadero porque tanto el antecedente como los consecuentes lo son.

$$\therefore L_{dTJ}|_{TIPO2} < L_{dTJ}|_{TIPO2}$$

**Caso 3:**

$$\mathbf{p7:} \quad l_2|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3} \quad (\text{posibilitado por el LEMA 3.9})$$

$$\mathbf{c18:} \quad l_2|_{TIPO2} - l_1|_{TIPO3} = 0$$

$$\mathbf{c19:} \quad (\Delta_2 - \Delta_1) = 0 \quad \text{ó} \quad (\Delta_2 = \Delta_1)$$

**c20:**  $p_7 \supset (c_{18} \bullet c_{19})$  verdadero porque tanto el antecedente como los consecuentes también lo son.

$$\therefore L_{dTJ}|_{TIPO2} = L_{dTJ}|_{TIPO2}$$

<b>Caso 1</b>	$(\Delta_2 > \Delta_1)$	$l_2 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO3}$	$\therefore L_{dTJ} _{TIPO2} > L_{dTJ} _{TIPO2}$
<b>Caso 2</b>	$(\Delta_2 < \Delta_1)$	$l_2 _{TIPO2} < l_1 _{TIPO3}$	$\therefore L_{dTJ} _{TIPO2} < L_{dTJ} _{TIPO2}$
<b>Caso 3</b>	$(\Delta_2 = \Delta_1)$	$l_2 _{TIPO2} = l_1 _{TIPO3}$	$\therefore L_{dTJ} _{TIPO2} = L_{dTJ} _{TIPO2}$

**Tabla 1T3.3.** Validez de los argumentos del **TEOREMA 3.3**

Por lo tanto, c8, c9 y c10 son verdaderos  
Lo cual queda demostrado.

□

- **CONCLUSIÓN:** Por lo tanto, la longitud del diente del tipo 2 es mayor que la longitud del diente del tipo 3 si y sólo si  $l_2|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO3}$  (**LEMA 3.9**). También, se afirma que la longitud del diente tipo 2 es menor que la longitud del diente tipo 3, si y sólo si  $l_2|_{TIPO2} < l_1|_{TIPO3}$  (**LEMA 3.9**). La tercer posibilidad existe si y sólo si  $l_2|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3}$  (**LEMA 3.9**).

### LOS DIENTES TIPO V Y TIPO W

- **HIPÓTESIS 3.4:** La longitud del diente del tipo V puede ser menor, mayor o, incluso, igual que la longitud del diente del tipo W, es decir:

$$a) L_{dTJ}|_{TIPOV} < L_{dTJ}|_{TIPOW}$$

$$b) L_{dTJ}|_{TIPOV} > L_{dTJ}|_{TIPOW}$$

$$c) L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW}$$

- **DEMOSTRACIÓN:** La demostración de esta suposición conlleva al establecimiento del siguiente **TEOREMA 3.4**, cuya prueba demuestra la veracidad de la hipótesis 3.4.

La relación de las longitudes de los dientes tipo V y tipo W dependen de  $\Delta$ , según se observa en la ecuación siguiente.

$$L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW} + \Delta$$

Así,

$\exists \Delta \in \mathbb{R}$  tal que, dependiendo del valor de  $\Delta$ , uno de los 3 enunciados condicionales siguientes es verdadero:

$$\begin{aligned}(\Delta > 0) &\Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPOV} > L_{dTJ}|_{TIPOW}) \\(\Delta < 0) &\Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPOV} < L_{dTJ}|_{TIPOW}) \\(\Delta = 0) &\Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW})\end{aligned}$$

**TEOREMA 3.4**

$$\forall (l_3|_{TIPOV} = l_3|_{TIPOW}) \bullet \forall (\sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPOV} = \sum_{i=1}^3 l_i|_{TIPOW}).$$

$$(\exists \Delta \in \mathfrak{R}) \bullet (L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW} + \Delta) \text{ tales que:}$$

$$\left\{ \left[ (\Delta > 0) \Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPOV} > L_{dTJ}|_{TIPOW}) \right] \vee \left[ (\Delta < 0) \Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPOV} < L_{dTJ}|_{TIPOW}) \right] \right\} \vee \left[ (\Delta = 0) \Rightarrow (L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW}) \right]$$

es verdadero.

**PRUEBA TEOREMA 3.4**

**PASO 1: Para el diente semejante tipo V.**

- p1:**  $l_1|_{TIPOV} \geq l_2|_{TIPOV}$
- c1:**  $l_1|_{TIPOV} + l_2|_{TIPOV} = cte$
- c2:**  $l_1|_{TIPOV} = l_2|_{TIPOV} + \Delta_1$
- c3:**  $l_2|_{TIPOV} = l_1|_{TIPOV} - \Delta_1$
- c4:**  $2 * l_2|_{TIPOV} + \Delta_1 = cte$
- c5:**  $2 * l_1|_{TIPOV} - \Delta_1 = cte$

**PASO 2: Para el diente semejante tipo W.**

- p2:**  $l_1|_{TIPOW} \leq l_2|_{TIPOW}$
- c6:**  $l_1|_{TIPOW} + l_2|_{TIPOW} = cte$
- c7:**  $l_2|_{TIPOW} = l_1|_{TIPOW} + \Delta_2$
- c8:**  $l_1|_{TIPOW} = l_2|_{TIPOW} - \Delta_2$
- c9:**  $2 * l_1|_{TIPOW} + \Delta_2 = cte$
- c10:**  $2 * l_2|_{TIPOW} - \Delta_2 = cte$



PASO 3:  $(c_4 \bullet c_9) \supset c_{12}$  y  $((c_{12} \bullet (p_3 \bullet p_4)) \supset c_{13}$

**c11:**  $2 * l_2|_{TIPOV} + \Delta_1 = 2 * l_1|_{TIPOW} + \Delta_2$

**c12:**  $l_2|_{TIPOV} - l_1|_{TIPOW} = \frac{1}{2}(\Delta_2 - \Delta_1)$

**p3:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = 2 * l_2|_{TIPOV} ; \forall V \neq 3$

**p4:**  $L_{dTJ}|_{TIPOW} = 2 * l_1|_{TIPOW} ; \forall W \neq 2$

**c13:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW} + (\Delta_2 - \Delta_1) ; (\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 2)$

**PASO 4: Tomando c12 y c13:**

<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPOV} > l_1 _{TIPOW}$	$l_2 _{TIPOV} - l_1 _{TIPOW} > 0$	$(\Delta_2 - \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} > L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 2)$
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPOV} < l_1 _{TIPOW}$	$l_2 _{TIPOV} - l_1 _{TIPOW} < 0$	$(\Delta_2 - \Delta_1) < 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} < L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 2)$
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPOV} = l_1 _{TIPOW}$	$l_2 _{TIPOV} - l_1 _{TIPOW} = 0$	$(\Delta_2 - \Delta_1) = 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} = L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 2)$

**Tabla 1T3.4.** Longitud del diente para todo tipo  $V \neq 3, W \neq 2$  y  $V \neq W$

**PASO 5: Si  $V=1$  y  $W=3$  y la Tabla 1T3.4:**

<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPO1} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Verdadero según el LEMA 3.6</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO3}$	<b>V</b>
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPO1} < l_1 _{TIPO3}$	<b>Contradice el LEMA 3.6</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} < L_{dTJ} _{TIPO3}$	<b>F</b>
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPO1} = l_1 _{TIPO3}$	<b>Contradice el LEMA 3.6</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} = L_{dTJ} _{TIPO3}$	<b>F</b>

**Tabla 2T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos  $V=1$  y  $W=3$  y su validez según el LEMA 3.6

**CONCLUSIÓN 1:** El caso 1 de la tabla 2T3.4, que no entra en conflicto con el LEMA 3.6, además de concordar con el TEOREMA 3.2, hace válido esta parte del TEOREMA 3.4.

**PASO 6: Si  $V=2$  y  $W=3$  y la Tabla 1T3.4:**



<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Posible según el LEMA 3.9</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} > L_{dTJ} _{TIPO3}$	V
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPO2} < l_1 _{TIPO3}$	<b>Posible según el LEMA 3.9</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} < L_{dTJ} _{TIPO3}$	V
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPO2} = l_1 _{TIPO3}$	<b>Posible según el LEMA 3.9</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} = L_{dTJ} _{TIPO3}$	V

**Tabla 3T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos V=2 y W=3 y su validez según el LEMA 3.9

**CONCLUSIÓN 2:** Los casos 1, 2 y 3 de la tabla 3T3.4, que no entran en conflicto con el LEMA 3.9, además de concordar con el TEOREMA 3.3, hacen válido esta parte del TEOREMA 3.4.

**PASO 7:** Si V=2 y W=1 y la Tabla 1T3.4:

<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPO2} > l_1 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.3</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	F
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPO2} < l_1 _{TIPO1}$	<b>Verdadero según el LEMA 3.3</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} < L_{dTJ} _{TIPO1}$	V
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPO2} = l_1 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.3</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} = L_{dTJ} _{TIPO1}$	F

**Tabla 4T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos V=2 y W=3 y su validez según el LEMA 3.9

**CONCLUSIÓN 3:** El casos 2 de la tabla 4T3.4, que no entra en conflicto con el LEMA 3.3, además de concordar con el TEOREMA 3.1, hace válido esta parte del TEOREMA 3.4.

**PASO 8:**  $(c_4 \bullet c_{10}) \supset c_{15}$  y  $((c_{15} \bullet (p_5 \bullet p_6)) \supset c_{16}$

**c14:**  $2 * l_2|_{TIPOV} + \Delta_1 = 2 * l_2|_{TIPOW} - \Delta_2$

**c15:**  $l_2|_{TIPOV} - l_2|_{TIPOW} = -\frac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta_1)$

**p5:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = 2 * l_2|_{TIPOV}$  ;  $\forall V \neq 3$

**p6:**  $L_{dTJ}|_{TIPOW} = 2 * l_2|_{TIPOW}$  ;  $\forall W \neq 3$

**c16:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW} - (\Delta_2 + \Delta_1)$  ;  $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 3)$



**PASO 9: Tomando c15 y c16:**

<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPOW} > l_2 _{TIPOV}$	$l_2 _{TIPOV} - l_2 _{TIPOW} < 0$	$(\Delta_2 + \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOW} > L_{dTJ} _{TIPOV}$ $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 3)$
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPOW} > l_2 _{TIPOV}$	$l_2 _{TIPOV} - l_2 _{TIPOW} < 0$	$(\Delta_2 + \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOW} > L_{dTJ} _{TIPOV}$ $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 3)$
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPOW} > l_2 _{TIPOV}$	$l_2 _{TIPOV} - l_2 _{TIPOW} < 0$	$(\Delta_2 + \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOW} > L_{dTJ} _{TIPOV}$ $(\forall V \neq 3) \bullet (\forall W \neq 3)$

**Tabla 5T3.4.** Longitud del diente para todo tipo  $V \neq 3, W \neq 3$  y  $V \neq W$

**PASO 10: Si  $V=1$  y  $W=2$  y la Tabla 5T3.4:**

<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPO2} > l_2 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.4</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPO2} > l_2 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.4</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPO2} > l_2 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.4</b>	$L_{dTJ} _{TIPO2} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>

**Tabla 6T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos  $V=1$  y  $W=2$  y su validez según el LEMA 3.4

**CONCLUSIÓN 4:** Todos los casos de la tabla 6T3.4, entra en conflicto con el LEMA 3.4, además de no concordar con el TEOREMA 3.1 y la CONCLUSIÓN 3. Esto hace válido esta parte del TEOREMA 3.4.

**PASO 11: Si  $V=2$  y  $W=1$  y la Tabla 5T3.4:**

<b>Caso 1</b>	$l_2 _{TIPO1} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Verdadero según el LEMA 3.4</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO2}$	<b>V</b>
<b>Caso 2</b>	$l_2 _{TIPO1} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Verdadero según el LEMA 3.4</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO2}$	<b>V</b>
<b>Caso 3</b>	$l_2 _{TIPO1} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Verdadero según el LEMA 3.4</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO2}$	<b>V</b>

**Tabla 7T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos  $V=2$  y  $W=1$  y su validez según el LEMA 3.4



**CONCLUSIÓN 5:** Todos los casos de la tabla 7T3.4, que no entra en conflicto con el **LEMA 3.4**, además de concordar con el **TEOREMA 3.1**, y contradecir la **CONCLUSIÓN 4**, hacen válido esta parte del **TEOREMA 3.4**.

**PASO 12:**  $(c_5 \cdot c_9) \supset c_{18}$  y  $((c_{18} \cdot (p_7 \cdot p_8)) \supset c_{19}$

**c17:**  $2 * l_1|_{TIPOV} - \Delta_1 = 2 * l_1|_{TIPOW} + \Delta_2$

**c18:**  $l_1|_{TIPOV} - l_1|_{TIPOW} = \frac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta_1)$

**p7:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = 2 * l_1|_{TIPOV}$ ;  $\forall V \neq 2$

**p8:**  $L_{dTJ}|_{TIPOW} = 2 * l_1|_{TIPOW}$ ;  $\forall W \neq 2$

**c19:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW} + (\Delta_2 + \Delta_1)$ ;  $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 2)$

**PASO 13: Tomando c18 y c19:**

<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPOV} > l_1 _{TIPOW}$	$l_1 _{TIPOV} - l_1 _{TIPOW} > 0$	$(\Delta_2 + \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} > L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 2)$
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPOV} > l_1 _{TIPOW}$	$l_1 _{TIPOV} - l_1 _{TIPOW} > 0$	$(\Delta_2 + \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} > L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 2)$
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPOV} > l_1 _{TIPOW}$	$l_1 _{TIPOV} - l_1 _{TIPOW} > 0$	$(\Delta_2 + \Delta_1) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} > L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 2)$

**Tabla 8T3.4.** Longitud del diente para todo tipo  $V \neq 2$ ,  $W \neq 2$  y  $V \neq W$

**PASO 14: Si  $V=1$  y  $W=3$  y la Tabla 8T3.4:**

<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPO1} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Validado por el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO3}$	<b>V</b>
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPO1} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Validado por el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO3}$	<b>V</b>
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPO1} > l_1 _{TIPO3}$	<b>Validado por el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO3}$	<b>V</b>

**Tabla 9T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos  $V=1$  y  $W=3$  y su validez según el **LEMA 3.5**



**CONCLUSIÓN 6:** Todos los casos de la tabla 9T3.4, que no entra en conflicto con el **LEMA 3.5**, además de concordar con el **TEOREMA 3.2**, hacen válido esta parte del **TEOREMA 3.4**.

**PASO 15:** Si  $V=3$  y  $W=1$  y la **Tabla 8T3.4:**

<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPO3} > l_1 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPO3} > l_1 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPO3} > l_1 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>

**Tabla 10T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos  $V=3$  y  $W=1$  y su validez según el **LEMA 3.5**

**CONCLUSIÓN 7:** Todos los casos de la tabla 10T3.4, que entra en conflicto con el **LEMA 3.5**, además de no concordar con el **TEOREMA 3.2**, y contradecir la **CONCLUSIÓN 6**, hacen válido esta parte del **TEOREMA 3.4**.

**PASO 16:**  $(c_5 \cdot c_{10}) \supset c_{21}$  y  $((c_{21} \cdot (p_9 \cdot p_{10})) \supset c_{22}$

**c20:**  $2 * l_1|_{TIPOV} - \Delta_1 = 2 * l_2|_{TIPOW} - \Delta_2$

**c21:**  $l_1|_{TIPOV} - l_2|_{TIPOW} = \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$

**p9:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = 2 * l_1|_{TIPOV}$ ;  $\forall V \neq 2$

**p10:**  $L_{dTJ}|_{TIPOW} = 2 * l_2|_{TIPOW}$ ;  $\forall W \neq 3$

**c22:**  $L_{dTJ}|_{TIPOV} = L_{dTJ}|_{TIPOW} + (\Delta_1 - \Delta_2)$ ;  $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 3)$

**PASO 13:** Tomando **c21** y **c22:**

<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPOV} > l_2 _{TIPOW}$	$l_1 _{TIPOV} - l_2 _{TIPOW} > 0$	$(\Delta_1 - \Delta_2) > 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} > L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 3)$
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPOV} < l_2 _{TIPOW}$	$l_1 _{TIPOV} - l_2 _{TIPOW} < 0$	$(\Delta_1 - \Delta_2) < 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} < L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 3)$
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPOV} = l_2 _{TIPOW}$	$l_1 _{TIPOV} - l_2 _{TIPOW} = 0$	$(\Delta_1 - \Delta_2) = 0$	$L_{dTJ} _{TIPOV} = L_{dTJ} _{TIPOW}$ $(\forall V \neq 2) \cdot (\forall W \neq 3)$

**Tabla 11T3.4.** Comparación de las Longitudes de los dientes tipo  $V \neq 2$ ,  $W \neq 3$  y  $V \neq W$



PASO 14: Si V=1 y W=2 y la Tabla 11T3.4:

<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPO1} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Validado por el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} > L_{dTJ} _{TIPO2}$	<b>V</b>
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPO1} < l_2 _{TIPO2}$	<b>Contradice el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} < L_{dTJ} _{TIPO2}$	<b>F</b>
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPO1} = l_2 _{TIPO2}$	<b>Contradice el LEMA 3.5</b>	$L_{dTJ} _{TIPO1} = L_{dTJ} _{TIPO2}$	<b>F</b>

Tabla 12T3.4. Comparación entre las longitudes de los dientes tipos V=1 y W=2 y su validez según el LEMA 3.5

CONCLUSIÓN 8: el caso 1 de la tabla 12T3.4, que no entra en conflicto con el LEMA 3.5, además de no concordar con el TEOREMA 3.1, hace válido esta parte del TEOREMA 3.4.

PASO 15: Si V=3 y W=1 y la Tabla 11T3.4:

<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPO3} > l_2 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.6</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} > L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPO3} < l_2 _{TIPO1}$	<b>Validado por el LEMA 3.6</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} < L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>V</b>
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPO3} = l_2 _{TIPO1}$	<b>Contradice el LEMA 3.6</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} = L_{dTJ} _{TIPO1}$	<b>F</b>

Tabla 13T3.4. Comparación entre las longitudes de los dientes tipos V=3 y W=1 y su validez según el LEMA 3.6

CONCLUSIÓN 9: el caso 2 de la tabla 13T3.4, que no entra en conflicto con el LEMA 3.6, además de concordar con el TEOREMA 3.2, hacen válido esta parte del TEOREMA 3.4.

PASO 15: Si V=3 y W=2 y la Tabla 11T3.4:



<b>Caso 1</b>	$l_1 _{TIPO3} > l_2 _{TIPO2}$	<b>Validado por el LEMA 3.9</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} > L_{dTJ} _{TIPO2}$	V
<b>Caso 2</b>	$l_1 _{TIPO3} < l_2 _{TIPO2}$	<b>Validado por el LEMA 3.9</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} < L_{dTJ} _{TIPO2}$	V
<b>Caso 3</b>	$l_1 _{TIPO3} = l_2 _{TIPO2}$	<b>Validado por el LEMA 3.9</b>	$L_{dTJ} _{TIPO3} = L_{dTJ} _{TIPO2}$	V

**Tabla 14T3.4.** Comparación entre las longitudes de los dientes tipos V=3 y W=2 y su validez según el LEMA 3.9

**CONCLUSIÓN 10:** Todos los casos de la tabla 14T3.4, que no entran en conflicto con el LEMA 3.9, además de concordar con el TEOREMA 3.3, hacen válido esta parte del TEOREMA 3.4.

□

- **CONCLUSIÓN:** Por lo tanto, la longitud del diente del tipo 2 es mayor que la longitud del diente del tipo 3 si y sólo si  $l_2|_{TIPO2} > l_1|_{TIPO3}$  (LEMA 3.9). También, se afirma que la longitud del diente tipo 2 es menor que la longitud del diente tipo 3, si y sólo si  $l_2|_{TIPO2} < l_1|_{TIPO3}$  (LEMA 3.9). La tercer posibilidad existe si y sólo si  $l_2|_{TIPO2} = l_1|_{TIPO3}$  (LEMA 3.9).

