

10561

5



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
CUAUTILÁN

'El Formalismo de la Mecánica de Nambu
Aplicado en Ecuaciones no Lineales de
Reacciones Químicas Homogéneas'

T E S I S

Que para obtener el grado de
MAESTRÍA EN FISICOQUÍMICA
(Métodos y Metrología)

P R E S E N T A :

CUAUHTÉMOC CARLOS ROVIROSA MADRAZO

Asesor:
DR. ROBERT IAMALEEV KUCHIMOVA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicada a mi Madre
Quien siempre me ha ayudado

Poema

Pues quita el año primavera el ceño,
y el verano risueño
restituye a la tierra sus colores,
y en donde vimos nieves, vemos flores,
y las plantas vestidas
gozan las verdes vidas,
dando a la voz del pájaro pintado
las ramas sombras, y silencio el prado;

Francisco de Quevedo y Villegas
1580-1645

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Cuauhtémoc Castro

Rovinson Madayo

FECHA: 27 agosto 2002

FIRMA: 

CONTENIDO

Introducción	5
Capitulo 1.- Formalismo de la Mecánica de Hamilton	
1.1.- Ecuaciones de Hamilton directas e inversas	9
1.2.- Teorema de Liouville y ecuaciones de evolución	13
1.3.- Ecuaciones dinámicas de Nambu-Yamaleev	15
Capitulo 2.- Formalismo de la Mecánica de Nambu	
2.1.- Fundamento de generalización	17
2.2.- Entorno de Nambu-Poisson	22
2.3.- Principio de acción y formalismo canónico	32
2.4.- Cuantización	36
Capitulo 3.- Extensión de la Mecánica de Newton	
3.1.- Ecuaciones de dinámica	42
3.2.- Extensión de las ecuaciones de Newton	46
3.3.- Ecuaciones elípticas de movimiento	51
3.4.- Los conceptos de energía	55
3.5.- Ecuación de movimiento relativista	61
Capitulo 4.- Cinética Química	
4.1.- Introducción	66
4.2.- Formalismo de la cinética	70
4.3.- Ejemplos	76
Conclusiones	90
Referencias	93

INTRODUCCIÓN

El título de esta tesis es 'El formalismo de la mecánica de Nambu aplicado en ecuaciones no lineales de reacciones químicas homogéneas', donde se incluyen dos términos que es importante definir. El formalismo se refiere a la observancia de formas o normas, y mecánica que se refiere al estudio de las fuerzas y sus acciones. Es decir que la ciencia se apoya en ciertos formalismos para desarrollar sus conocimientos.

De esta manera podemos aclarar que existen varias teorías de la mecánica donde cada una se apoya en su propio formalismo, por ejemplo: la mecánica clásica, que incluye los formalismos de Lagrange y Hamilton, la mecánica relativista, integrada por los formalismos de grupos de Lorentz y Poincare, la mecánica estadística, con los formalismos de Gibbs y Boltzman, la mecánica cuántica por los formalismos de Heisenberg y Schrödinger, el electromagnetismo, con el formalismo de Maxwell, etc.

El objetivo de esta tesis es utilizar el formalismo de Nambu en la construcción de una nueva mecánica, y generalizar la mecánica clásica para extenderla a la cinética química.

Al desarrollarse la mecánica clásica surgió el formalismo de Hamilton y apareció el concepto de espacio de fases, que establece que un sistema dinámico es dependiente de un número determinado de variables coordenadas, y un número igual de variables conjugadas de momentum, todas independientes entre si. Entonces el espacio de fases es un espacio cartesiano que se forma con este par de variables coordenadas, donde aplicamos la ecuación de Hamilton, Arnold [1].

$$\frac{dq^a}{dt} = \epsilon^{ab} \frac{\partial H}{\partial q^b} \quad (1)$$

En 1973 Yoshiro Nambu [2] propuso la generalización de la dinámica de Hamilton a través de la introducción de un conjunto de 3 variables dinámicas que describen un espacio de fases tridimensional, y el punto que representa este estado se mueve con el tiempo a lo largo de una curva en el espacio de fases tridimensional. Dado que las fases coordinadas están representadas por el triplete q_1, q_2, q_3 , y que es necesario para construir las ecuaciones de dinámica debemos introducir otro triplete H_1, H_2, t , donde el par H_1, H_2 es análogo al Hamiltoniano y t es el parámetro de tiempo. El par de Hamiltonianos determina las siguientes ecuaciones de dinámica:

$$\frac{dq^a}{dt} = \epsilon^{abc} \frac{\partial H_1}{\partial q^b} \frac{\partial H_2}{\partial q^c} \quad (2)$$

donde se adopta la convención para la suma y ϵ^{abc} es el tensor de Levi-Civita.

En síntesis el espacio de fases es aquel espacio donde se desarrolla un formalismo. Con base en lo anterior podemos decir que el estado de un sistema se representa por un punto en el espacio de fases con tres dimensiones, y que se mueve con el tiempo a lo largo de una curva en dicho espacio.

Muchos autores han investigado la relación entre el formalismo de Nambu y las ecuaciones mecánicas de Lagrange y Hamilton. En las referencias, Mukuda [4], Flato [16] se ha demostrado la posibilidad de encajar la dinámica de un triplete de Nambu en un espacio de

fases canónico de cuatro dimensiones. También se muestra que la estructura del espacio de fases canónico de cualquier dimensión y que las ecuaciones de movimiento de un sistema Hamiltoniano puede ser tratado dentro del formalismo de Nambu. En Bayen [3] se demostró que la dinámica de Nambu contiene la misma información dinámica de una mecánica Hamiltoniana singular. En particular, el espacio de fases de 3 dimensiones puede ser linealmente encajado dentro del espacio de fases con 6 dimensiones con tres ligaduras. Además ya ha sido apuntado en Mukuda [4], como un encaje local y no único. La formulación geométrica de los sistemas de Nambu fue examinada primero por Estabrook [17] y mas recientemente en Fecko [18], Pandit [19], en Takhtajan [8], Yamaleev [27] se desarrollo una aproximación algebraica, donde se postuló una generalización del corchete de Nambu, y también múltiples posibles aplicaciones del formalismo de Nambu, las que incluyen la descripción de tripletes de quarks, monopolos magnéticos, etc., que han sido investigados por los autores Hirayama [5] y Sucre [22].

Por otro lado en el campo del formalismo de Nambu, recientemente se han desarrollado contribuciones cruciales Yamaleev [23-25], donde se muestra que el formalismo de Nambu tiene una profunda conexión con la teoría de la relatividad. Podemos afirmar que el formalismo de Nambu no es de abstracción matemática pura y que presenta buenas relaciones con la realidad

Se sugiere que el formalismo de Nambu es útil para analizar ecuaciones multidimensionales y no lineales, como las que aparecen en la cinética química. Esta tesis se dedica al desarrollo del formalismo del formalismo de Nambu y a aplicarlo en la generalización de la mecánica clásica y utilizarlo en la cinética química.

En el capítulo 1 se llevan a cabo las transformaciones de coordenadas mediante el uso de Jacobianos, y se establece la correspondencia entre las ecuaciones de movimiento de Newton, expresadas en el espacio de fases con coordenadas de posición y momentum, y las del espacio de fases con coordenadas de energía y tiempo, logrando así transformar las ecuaciones de movimiento de Newton en las ecuaciones de dinámica de Hamilton y viceversa

Podemos apreciar que las ecuaciones de dinámica de Nambu son una consecuencia del Jacobiano de la transformación de coordenadas.

En el capítulo 2 se presentan los principios básicos del formalismo canónico de la mecánica de Nambu, (una generalización a la mecánica de Hamilton que está basada en el concepto del corchete de Nambu, que a su vez generaliza el corchete de Poisson) donde se efectúa una operación binaria sobre observables clásicos hasta una operación múltiple de alto orden $n \geq 3$.

La dinámica de Nambu se describe por el flujo de fases dado por las ecuaciones de movimiento de Nambu-Hamilton (un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que involucran $n-1$ Hamiltonianos), y se introduce la identidad fundamental para el corchete de Nambu (una generalización de la identidad de Jacobi) como una condición de consistencia en la dinámica.

También se muestra que la estructura del corchete de Nambu define una jerarquía de familias infinitas de estructuras subordinadas de bajo orden, incluyendo la estructura del corchete de Poisson. El concepto de corchete de Nambu nos permite definir los ambientes de Nambu-Poisson (espacio de fases de la mecánica de Nambu), que es mas rígido que en el ambiente de Poisson (espacio de fases de la mecánica Hamiltoniana). Y se introduce la analogía para la forma de acción y el principio de acción de la mecánica de Nambu. y en su formulación, aparece en forma natural la dinámica de ciclos. Se anotan varias ventajas de la cuantización de la mecánica de Nambu. basadas en la teoría de deformación, en una ruta de

formulación integral y sobre las relaciones de conmutación de Nambu-Heisenberg. En el último formalismo se presenta una representación explícita de la relación Nambu-Heisenberg para el caso de $n = 3$. Y se enfatiza el papel que juegan las operaciones algebraicas y estructuras matemáticas de tercer y de alto orden, durante la transformación, de una representación dinámica de Hamilton hacia una de Nambu Takhtajan [8].

En el capítulo 3 usamos el formalismo de Nambu como una guía para construir una mecánica análoga a la mecánica de Newton, en el espacio de fases con tres o más dimensiones, dentro de una familia de n Hamiltonianos definidos como

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad N_k = \frac{q_k^2}{2\mu_k} + V(x), \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3)$$

y que utilizamos como guía para la construcción de nuevas ecuaciones de movimiento por el procedimiento de la deformación elíptica del modelo del oscilador.

En la sección 2, se conciben las soluciones básicas para la construcción de un nuevo modelo de oscilador, se seleccionan un conjunto de funciones (coseno y seno) con las bien conocidas funciones elípticas de Jacobi. Al modelo obtenido por éste método lo llamamos el modelo del oscilador elíptico, entonces formulemos una extensión de las ecuaciones de Newton a la que denominamos ecuaciones elípticas de movimiento, en el espacio de fases de 3 dimensiones para una función de potencial arbitraria.

El nuevo sistema de ecuaciones contiene un parámetro de escala para la energía, donde el formalismo de Nambu representa un Hamiltoniano como superestructura de las ecuaciones elípticas. Posteriormente se aborda el caso de la extensión de las ecuaciones elípticas para el espacio de fases con 4 y n dimensiones, y se desarrollan los conceptos energías cinética, potencial y total. Con esto representamos la energía total de sistemas conservativos como el producto de las constantes de movimiento, que están relacionadas con la familia de Hamiltonianos. Para el caso de movimiento estacionario, se establece la equivalencia entre las ecuaciones elípticas para el espacio de fases con n dimensiones y las ecuaciones de Newton con potencial $V(x)$.

También se formulan las ecuaciones de movimiento para una partícula relativista en un campo de potencial estacionario mediante y utilizamos el procedimiento de deformación elíptica aplicada en el modelo del oscilador, como una guía para la construcción de nuevas ecuaciones de movimiento.

Para construir un nuevo modelo de oscilador sobre la base de soluciones concebidas, seleccionamos (preferentemente seno y coseno) el muy bien conocido conjunto de funciones elípticas de Jacobi, y al modelo obtenido por éste camino lo llamaremos 'El modelo del oscilador elíptico', entonces se formulará la extensión para las ecuaciones de Newton, en el espacio de fases con tres dimensiones para funciones de potencial arbitrarias, que llamaremos las Ecuaciones elípticas de movimiento. Este nuevo sistema de ecuaciones contiene como parámetro de escala a la energía.

En la sección 3 se ha dado una extensión de las ecuaciones elípticas en el espacio de fases con cuatro y n dimensiones.

En la sección 4 se establecen los conceptos de energía cinética, potencial, y total, donde se descubre que la energía total de un sistema conservativo es el producto de las constantes de movimiento relativas a la familia de Hamiltonianos, y para el potencial estacionario se

establece una equivalencia entre las ecuaciones elípticas (del espacio de fases de n -dimensiones con potencial $V(x)$) y las ecuaciones de Newton.

En la sección 5 se formula la ecuación de movimiento de una partícula relativista en un campo de potencial estacionario como una ecuación elíptica en el espacio de fases con 3 dimensiones.

En el capítulo 4 se aborda el formalismo la Cinética química y se presentan aspectos de la Cinética química formal en los sistemas Lotka-Volterra, de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que son aplicados a la descripción de algunos tipos interacciones no lineales, en varios campos de la ciencia. Históricamente, los sistemas Lotka Volterra aparecieron para modelar interacciones entre especies biológicas interconectivas y para el estudio de la cinética de reacciones químicas. También se presenta un sistema reaccionante formal, que es descrito por el sistema Lotka de ecuaciones diferenciales ordinarias. Tratándose así la correspondencia entre esquemas químicos y los sistemas dinámicos de Lotka-Volterra, se muestra que los sistemas del tipo Lotka-Volterra, que tienen la forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha xz - \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta yz + \gamma yx \\ \dot{z} &= -\alpha zx - \beta zy\end{aligned}\tag{4}$$

pueden representar un sistema cinético químico, descrito por el formalismo de ecuaciones de flechas como



donde $k_1 = \gamma$, $k_2 = -\beta$, $k_3 = \alpha$,

y se verifica si dichos sistemas satisfacen el formalismo de Nambu.

CAPITULO 1

Formalismo de la Mecánica de Hamilton

1.1.- Ecuaciones de Hamilton directas e inversas

En éste capítulo examinamos algunos aspectos interesantes de la dinámica de Hamilton y con el fin de simplificar consideremos primero el caso de dos dimensiones $d = 2$, además, restringiremos nuestras consideraciones a los casos en donde las ecuaciones de movimiento no dependen explícitamente del tiempo. Por lo que podemos seleccionar en forma arbitraria el tiempo inicial como t_0 , el cual es una de las constantes de movimiento, y la otra constante de movimiento es el Hamiltoniano H .

Las soluciones de un sistema dinámico están representadas por el conjunto de funciones

$$x = x(T, H), \quad p = p(T, H) \quad (1.1)$$

y sus inversos

$$T = T(p, x), \quad H = H(p, x) \quad (1.2)$$

Aquí $T = T(p, x)$ es la primera integral de movimiento, y la segunda $H = H(p, x)$ es el Hamiltoniano o la energía total del sistema, ahora reproducimos las ecuaciones de Hamilton utilizando como guía el principio de invariancia de la integral de Poincare

$$I_2 = \iint dx \wedge dp \quad (1.3)$$

de acuerdo con éste principio I_2 debe tener la forma invariante bajo el mapeo $(x^1, p^1) \leftrightarrow (x, p)$, y obtenemos

$$\iint dx \wedge dp = \iint dx^1 \wedge dp^1 \quad (1.4)$$

demandamos la misma condición para el mapeo $(H, T) \rightarrow (x, p)$, y obtenemos

$$\iint dx \wedge dp = \iint dH \wedge dT \quad (1.5)$$

tal que el Jacobiano de la transformación sea igual a 1

$$\det J\{(H, T) \rightarrow (x, p)\} = \frac{\partial x}{\partial H} \frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial p}{\partial H} = 1 \quad (1.6)$$

donde J es la matriz Jacobiana

$$J\{(H, T) \rightarrow (x, p)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial H} & \frac{\partial x}{\partial T} \\ \frac{\partial p}{\partial H} & \frac{\partial p}{\partial T} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Teorema 1-1

El mapeo $(H, T) \rightarrow (x, p)$ con Jacobiano, obedece la condición $\det J\{(H, T) \rightarrow (x, p)\} = 1$, que es equivalente a dos sistemas de ecuaciones

$$-\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (1.8,a)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial x}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial p} \quad (1.8,b)$$

Prueba

Claramente la matriz inversa para $J\{(H, T) \rightarrow (x, p)\}$ es la matriz adjunta de acuerdo con (1.6)

$$J^{-1}\{(H, T) \rightarrow (x, p)\} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial T} & \frac{\partial x}{\partial T} \\ \frac{\partial p}{\partial H} & -\frac{\partial x}{\partial H} \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

y por otro lado ésta matriz debe coincidir con la matriz Jacobiana del mapeo inverso $J\{(p, x) \rightarrow (H, T)\}$

$$J\{(p, x) \rightarrow (H, T)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

igualando (1.9) con (1.10) obtenemos dos sistemas Hamiltonianos equivalentes, primero (1.8,a), con el Hamiltoniano H , y segundo, (1.8,b) con el parámetro de evolución T , las soluciones de ambos sistemas son las funciones $p = p(H, T)$, $x = x(H, T)$.

□

A partir de este punto de vista las constantes de movimiento H, T tienen un papel simétrico en la dinámica de Hamilton, por el mismo camino podemos obtener las ecuaciones de Hamilton en el espacio de fases para $d = 2n$, y el siguiente conjunto de funciones represen-

ta la solución de un sistema dinámico, moviéndose en el espacio de fases para $d = 2n$, descrito por la ecuaciones de Hamilton

$$x_i = x_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{2n}), \quad p_i = p_i(t, C_1, C_2, \dots, C_{2n}) \quad (1.11)$$

donde C_1, C_2, \dots, C_{2n} , son las constantes de movimiento, debido a que el Hamiltoniano presenta una independencia explícita del tiempo, podemos escoger el tiempo inicial t_0 como una constante de movimiento, y la otra constante es el Hamiltoniano H , identifiquemos C_1 con t_0 y C_2 con H , entonces denotando $T = t - t_0$ podemos escribir

$$x_i = x_i(T, H, C_2, \dots, C_{2n}), \quad p_i = p_i(T, H, C_2, \dots, C_{2n}) \quad (1.12)$$

asumimos que el sistema (1.12) puede ser resuelto con respecto al conjunto $(T, H, C_2, \dots, C_{2n})$, por lo que estos valores son expresados en términos de (p, x_i) , y obtenemos las funciones

$$T = T(p, x_i), \quad H = H(p, x_i), \quad C_l = C_l(p, x_i), \quad l = 3, \dots, 2n. \quad (1.13)$$

Teorema 1-2

El mapeo $\{(H, T) \rightarrow (x_i, p_i)\}$ con la condición para el Jacobiano

$$\det J\{(H, T) \rightarrow (x_i, p_i)\} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial H} \frac{\partial p_i}{\partial T} - \frac{\partial x_i}{\partial T} \frac{\partial p_i}{\partial H} = 1 \quad (1.14)$$

nos arroja los sistemas Hamiltonianos directo e inverso

$$-\frac{\partial p_i}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.15.a)$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial H} = \frac{\partial T}{\partial p_i} \quad (1.15.b)$$

Demostración

Utilizando la representación conveniente para las matrices de Jacobi, donde cualquier elemento de la matriz es un vector de n dimensiones

$$J\{(H, T) \rightarrow (x_i, p_i)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial H} & \frac{\partial x_i}{\partial T} \\ \frac{\partial p_i}{\partial H} & \frac{\partial p_i}{\partial T} \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

manteniendo la condición (1.14) es posible obtener la matriz inversa en la siguiente forma

$$J^{-1}\{(H,T) \rightarrow (x_i, p_i)\} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p_i}{\partial T} & \frac{\partial x_i}{\partial T} \\ \frac{\partial p_i}{\partial H} & -\frac{\partial x_i}{\partial H} \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

por otro lado ésta matriz coincide con la matriz del mapeo inverso $\{(p, x) \rightarrow (H, T)\}$

$$J\{(p, x) \rightarrow (H, T)\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_i} & \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{\partial T}{\partial x_i} & \frac{\partial T}{\partial p_i} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

comparando (1.17) con (1.18) obtenemos dos sistemas Hamiltonianos equivalentes: primero (1.15,a) con el Hamiltoniano H y segundo (1.15,b) con el parámetro de evolución T .

1.2.- Teorema de Liouville y Ecuaciones de Evolución

Así como se ha indicado anteriormente las soluciones de dos sistemas Hamiltonianos equivalentes (1.15,a), (1.15,b), se representan por las funciones

$$x_i = x_i(H, T, C_3, C_4, \dots, C_{2n}), \quad p_i = p_i(H, T, C_3, C_4, \dots, C_{2n}) \quad (1.19)$$

En la sección anterior ya hemos probado la equivalencia de los sistemas Hamiltonianos con el principio de invariancia de la integral de Poincare I_2 , y dentro de este contexto generalizamos dicho principio mediante el uso del mapeo

$$(x_i, p_i) \leftarrow (H, T, C_3, \dots, C_{2n}) \quad (1.20)$$

este es el mapa del espacio de fases $d = 2n$ con las constantes de movimiento del espacio $d = 2n$, y la matriz Jacobiana de este mapeo tiene la forma cuadrática

$$J\left((x_i, p_i) \leftarrow (H, T, C_3, \dots, C_{2n})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial H} & \frac{\partial x_1}{\partial T} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial C_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial H} & \frac{\partial x_n}{\partial T} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial C_{2n}} \\ \frac{\partial p_1}{\partial H} & \frac{\partial p_1}{\partial T} & \dots & \frac{\partial p_1}{\partial C_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial p_n}{\partial H} & \frac{\partial p_n}{\partial T} & \dots & \frac{\partial p_n}{\partial C_{2n}} \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

ahora consideramos el teorema de Liouville de acuerdo con la integral

$$\int \dots \int dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n \quad (1.22)$$

que es de forma invariante dentro del mapeo (1.14), que nos arroja la condición

$$\text{Det } J\left\{(x_i, p_i) \leftarrow (H, T, C_3, \dots, C_{2n})\right\} = 1 \quad (1.23)$$

la cual es suficiente para construir las ecuaciones de evolución.

Ahora es conveniente introducir las siguientes funciones

$$q_i = \{x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n\}, \quad Q_i = \{H, T, C_3, \dots, C_{2n}\}, \quad i = 1, \dots, 2n \quad (1.24)$$

y utilizando la definición para la función determinante podemos reescribir (1.23) en la forma

$$\text{Det } J(\{Q \rightarrow q\}) = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial q_1}{\partial Q_{i_1}} \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial Q_{i_{2n}}} = 1 \quad (1.25)$$

donde $\epsilon_{i_1 \dots i_{2n}}$ es el tensor de Levi-Civita

Dada la condición (1.23) la matriz adjunta para la matriz Jacobiana $J(\{Q \rightarrow q\})$ debe coincidir con la matriz Jacobiana del mapeo $(\{q \rightarrow Q\})$.

Igualando cualquier elemento de la matriz adjunta con el elemento correspondiente de la matriz Jacobiana del mapeo inverso obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial Q_{i_k}}{\partial q_k} = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial q_1}{\partial Q_{i_1}} \dots \frac{\partial q_{k-1}}{\partial Q_{i_{k-1}}} \frac{\partial q_{k+1}}{\partial Q_{i_{k+1}}} \dots \frac{\partial q_{2n}}{\partial Q_{i_{2n}}} \quad (1.26)$$

tomemos como original el Jacobiano del mapeo $(\{Q \rightarrow q\})$ y comparemos su matriz adjunta con la matriz Jacobiana con mapeo $(\{q \rightarrow Q\})$, como resultado obtenemos otro tipo de ecuaciones de evolución

$$\frac{\partial q_{i_k}}{\partial Q_k} = \epsilon_{i_1 \dots i_{2n}} \frac{\partial Q_1}{\partial q_{i_1}} \dots \frac{\partial Q_{k-1}}{\partial q_{i_{k-1}}} \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial q_{i_{k+1}}} \dots \frac{\partial Q_{2n}}{\partial q_{i_{2n}}} \quad (1.27)$$

este sistema coincide con las ecuaciones de Nambu en el espacio de fases par, y a los sistemas (1.26) y (1.27) los llamamos las ecuaciones de evolución en el espacio de fases $2n$ dimensional, y desde luego en el espacio de fases $2n$ dimensional. se pueden construir n sistemas de evolución que son iguales a las integrales de Poincare en espacio de fases, en este contexto y en un sentido más general las ecuaciones de Nambu del espacio de fases par están basadas en el teorema de Liouville.

1.3.- Ecuaciones Dinámicas de Nambu-Yamaleev

En relación a la formulación de las ecuaciones de Nambu en el espacio de fases impar, se requiere un postulado adicional, y para simplificar consideremos el caso $n = 3$

postulamos las siguientes funciones

$$q_1 = x(H_1, H_2, t), \quad q_2 = p(H_1, H_2, t), \quad q_3 = q(H_1, H_2, t) \quad (1.28)$$

consideramos el mapeo $\{Q \rightarrow q\}$ con la matriz Jacobiana

$$J(\{Q \rightarrow q\}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \\ \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial p} & \frac{\partial t}{\partial q} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

y el Jacobiano del mapeo inverso es

$$J(\{q \rightarrow Q\}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial H_1} & \frac{\partial x}{\partial H_2} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial H_1} & \frac{\partial p}{\partial H_2} & \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial H_1} & \frac{\partial q}{\partial H_2} & \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

por lo que la matriz adjunta para $J(\{Q \rightarrow q\})$ es

$$J^{-1}(\{Q \rightarrow q\}) = \begin{pmatrix} -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial p} & \frac{\partial t}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial p}{\partial p} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial p}{\partial p} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial q} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial q} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial q} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial q}{\partial q} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial p} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial p} & \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial x} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial p} & \frac{\partial H_1}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial x} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

esta comparación nos arroja tres sistemas, uno de ellos es el sistema de ecuaciones de Nambu

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_2}{\partial q} - \frac{\partial H_1}{\partial q} \frac{\partial H_2}{\partial p} \\
 \frac{\partial p}{\partial t} &= \frac{\partial H_1}{\partial q} \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial q} \\
 \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial H_2}{\partial p} - \frac{\partial H_1}{\partial p} \frac{\partial H_2}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

y por el mismo camino podemos encontrar

$$J^{-1}(\{q \rightarrow Q\}) = \begin{pmatrix} -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial H_2} \\ \frac{\partial q}{\partial q} & \frac{\partial q}{\partial H_2} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial H_2} \\ \frac{\partial q}{\partial q} & \frac{\partial q}{\partial H_2} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial H_2} \\ \frac{\partial p}{\partial t} & \frac{\partial p}{\partial H_2} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial H_1} & \frac{\partial p}{\partial H_2} \\ \frac{\partial q}{\partial H_1} & \frac{\partial q}{\partial H_2} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial H_1} & \frac{\partial x}{\partial H_2} \\ \frac{\partial q}{\partial H_1} & \frac{\partial q}{\partial H_2} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial H_1} & \frac{\partial x}{\partial H_2} \\ \frac{\partial p}{\partial H_1} & \frac{\partial p}{\partial H_2} \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial H_1} & \frac{\partial p}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial H_1} & \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} & \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial H_1} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial H_1} & \frac{\partial q}{\partial t} \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial H_1} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial H_1} & \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

finalmente comparando con la expresión de $J(\{Q \rightarrow q\})$, encontramos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial H_1}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial H_2} \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial q}{\partial H_2} \\
 \frac{\partial H_1}{\partial p} &= \frac{\partial q}{\partial H_2} \frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial H_2} \\
 \frac{\partial H_1}{\partial q} &= \frac{\partial x}{\partial H_2} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial H_2}
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

que constituyen las ecuaciones de Nambu-Yamaleev [25]

CAPITULO 2

Formalismo de la Mecánica de Nambu

2.1.- Fundamento de Generalización

En 1973 Nambu propuso una profunda generalización a la mecánica clásica de Hamilton, Nambu [2], en su formulación presenta un conjunto de tres (o en forma general n) variables canónicas, que reemplazan al par conjugado del formalismo de Hamilton y con una operación triple (o generalizando una operación n -ésima), donde el corchete de Nambu reemplaza el usual corchete de Poisson. La Dinámica de acuerdo con Nambu, está determinada por las ecuaciones de movimiento de Nambu-Hamilton, que utilizan dos (generalizando $n - 1$) Hamiltonianos que reemplazan a las ecuaciones canónicas de Hamilton. Así el correspondiente flujo de fases preserva el volumen de fases, por lo que también es válida la analogía con el teorema de Liouville, la cual es fundamental para la formulación de la mecánica estadística, Nambu [2].

La propuesta de Nambu fue parcialmente analizada en las referencias; Bayen [3] y Mukuda [4], en Bayen [3] se muestra que la mecánica de Nambu puede ser considerada como un sistema Hamiltoniano degenerado de seis dimensiones con tres ligaduras (coordenadas), y un Lagrangiano que es lineal para las velocidades. En Mukuda [4] se muestra que se puede utilizar muy bien en el espacio de fases con 4 dimensiones, recientemente no se han encontrado intentos de formular los principios básicos de la mecánica de Nambu en una geometría de forma invariante similar a la mecánica Hamiltoniana, Arnold [1].

En este trabajo se desarrollan los principios de éste formalismo y presentamos una estructura matemática que puede tener algún significado físico.

Para comenzar formulemos la identidad fundamental (IF) del corchete de Nambu, como una condición de consistencia en la dinámica de Nambu, que como corolario nos arroja una analogía con el teorema de Poisson en la integral de movimiento, que en sí es otra integral de movimiento.

Basándose en la IF se introduce el mismo concepto para el caso Nambu-Poisson, el cuál desempeña el mismo papel en la mecánica de Nambu dado que el tratamiento de Poisson actúa dentro de la mecánica de Hamilton

También mostramos que la estructura del corchete de Nambu contiene una familia infinita de estructuras de Nambu subordinadas de menor grado, incluyendo la estructura del corchete de Poisson con condiciones de aplicación certeras, esto implica que la estructura del corchete de Nambu es ciertamente mas rígida que la estructura del corchete de Poisson, y al examinarla se puede ver explícitamente que la IF impone solo algunas ligaduras fuertes sobre las formas posibles del corchete de Nambu. Adicionalmente se introducen ecuaciones diferenciales cuadráticas en un sistema sobredeterminado de ecuaciones algebraicas cuadráticas del corchete de Nambu tensorial

Esta es la principal innovación en comparación con el caso del corchete de Poisson, donde tenemos únicamente restricciones diferenciales. Por otro lado los requerimientos algebraicos de la estructura del corchete de Nambu son responsables de su rigidez, en comparación con la estructura del corchete de Poisson. Podemos especificar, que cualquier antisimetría constante del 2-tensor nos arrojará un corchete de Poisson, que no será tan grande

como el corchete de Nambu. Lo que nos manifiesta un poco, la naturaleza específica de la mecánica de Nambu, y consideramos que es una ventaja de ésta teoría.

Ahora desarrollaremos el formalismo canónico de la mecánica de Nambu, basándonos en la integral invariante de Poincaré-Cartan, que es una forma de acción, con forma diferencial de grado $n-1$, extendida sobre el espacio de fases, que tiene propiedades similares a los espacios usuales e invariantes de Poincaré-Cartan, y que permite formular en la mecánica de Nambu, el principio de 'acción mínima'.

De todas las formas posibles de un sistema Hamiltoniano, preferimos considerar la del principio de acción de la mecánica clásica (todas las curvas conectan los puntos inicial y final en el espacio de configuración), en la mecánica de Nambu primero deberíamos considerar todas las $n-1$ cadenas en el espacio de fases extendido cuyo corte de tiempo está cerrado en $n-2$ cadenas, y satisface ciertas condiciones de frontera.

Definamos una acción clásica, como una integral generalizada, de la invariancia de Poincaré-Cartan, sobre $n-1$ cadenas, y probemos que el principio de la acción mínima: 'hojas-palabra' de $n-2$ cadenas está dado bajo el flujo de fase Nambu-Hamilton como extremos de la acción.

Final y brevemente, discutiremos la cuantización de la mecánica de Nambu, este problema fue primero considerado por Nambu [2], y por ahora está fuera de discusión. Pero indicaremos muchas aplicaciones posibles relacionadas con su solución, en particular construiremos una representación especial, para las relaciones de 'conmutación' Nambu-Heisenberg, la cuál es similar en esencia, a la representación de las relaciones canónicas de conmutación de Heisenberg, mediante operadores de creación-aniquilación en el espacio de los estados del oscilador armónico. En nuestra realización, los estados están parametrizados por una red de enteros algebraicos en un campo cíclico para la raíz cúbica de la unidad, donde los estados del oscilador armónico son parametrizados por enteros racionales no negativos.

Ahora podemos explicar las principales ideas con más detalle. Comenzamos con el simple espacio de fases de la mecánica Hamiltoniana (un espacio de 2 dimensiones \mathfrak{R}^2 con coordenadas x, y) y el corchete de Poisson canónico

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)} \quad (2.1)$$

el cual satisface la identidad de Jacobi

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} = 0 \quad (2.2)$$

y nos da acceso a las ecuaciones de movimiento de Hamilton

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} \quad (2.3)$$

donde f es un observable clásico (función monotonica en el espacio de fases) y H es el Hamiltoniano.

La generalización de este ejemplo nos conduce al concepto del ejemplar de Poisson, donde los casos de tipo monotonico equipados con la estructura del corchete de Poisson satisfacen la condición de antisimetría, para la identidad de Jacobi y la regla de Leibniz.

El corchete canónico de Nambu [2] está definido por un triplete de observables clásicos, dentro del espacio de fases tridimensional \mathfrak{R}^3 y con coordenadas x, y, z mediante la siguiente bella fórmula

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \frac{\partial (f_1, f_2, f_3)}{\partial (x, y, z)} \quad (2.4)$$

donde el lado derecho se apoya en el Jacobiano del mapeo $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$. Esta fórmula natural, generaliza el corchete usual de Poisson a partir de una operación binaria a terciaria sobre observables clásicos y aparentemente Nambu introduce éste corchete con la idea de desarrollar un 'modelo de juegos' para quarks considerados como tripletes, Flato [6].

La generalización de las ecuaciones de movimiento de Nambu-Hamilton involucran dos Hamiltonianos H_1 y H_2 y tienen la forma

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, H_2, f\} \quad (2.5)$$

El correspondiente flujo sobre el espacio de fases está en libre divergencia y preserva la forma del volumen estándar $dx \wedge dy \wedge dz$ análoga al teorema de Liouville para la mecánica de Nambu [2].

Mas adelante demostramos que el corchete de Nambu satisface la siguiente identidad fundamental generalizada para el caso enésimo.

$$\{\{f_1, f_2, f_3\}, f_4, f_5\} + \{f_3, \{f_1, f_2, f_4\}, f_5\} + \{f_3, f_4, \{f_1, f_2, f_5\}\} = \{f_1, f_2, \{f_3, f_4, f_5\}\} \quad (2.6)$$

Esta fórmula puede ser considerada como la generalización más natural (la menor desde el punto de vista dinámico) de la identidad de Jacobi.

Esto nos lleva al teorema 2.3 como una analogía del teorema clásico de Poisson dado que el corchete de Poisson de dos integrales de movimiento es nuevamente una integral de movimiento.

La versión generalizada de IF para el caso enésimo (el Jacobiano del mapeo $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$ define el corchete canónico de Nambu de orden n) nos permite introducir los esquemas de Nambu-Poisson como esquemas monótonos con la estructura del corchete de Nambu, una operación enésima sobre observables clásicos que satisfagan la condición de antisimetría, la regla de Leibniz y la IF. Además mostraremos que mediante la fijación de algunos argumentos en el corchete de Nambu de orden n se pueden obtener corchetes de bajo orden, los cuales satisfarán la identidad fundamental (son corchetes de Nambu) y adicionalmente, satisfacer condiciones certeras para la selección de diferentes argumentos predeterminados.

La estructura del corchete de Nambu nos muestra que este concepto es mas rígido que el de corchete de Poisson. Así discutiremos las condiciones explicitas IF impuestas en el correspondiente tensor enésimo del corchete de Nambu.

Mostraremos que contrariamente al caso de Poisson, la parte algebraica de IF reduce substancialmente las estructuras posibles de Nambu con antisimetría constante del tensor enésimo.

Específicamente, mostraremos que el corchete de Nambu en el espacio de fases $\mathfrak{R}^{3n} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{R}^3$, definido en Nambu [2] y usado en Hirayama [5], como la suma directa del corchete canónico de Nambu sobre \mathfrak{R}^3 , no satisface IF y entonces no es un corchete de Nambu. Posteriormente discutiremos los corchetes lineales de Nambu y mostraremos que estos dirigen en forma natural hacia un nuevo concepto de gebras de Nambu-Lie, las cuales generalizan las álgebras de Lie para el caso enésimo. En la sección 2 presentamos varios ejemplos simples de las ecuaciones de evolución que admiten la formulación de Nambu.

En la sección 2.3 introducimos la analogía de la integral invariante de Poincaré-Cartan para la mecánica de Nambu (forma diferencial de grado $n-1$) en el espacio de fases extendido. El ejemplo simple de 3 dimensiones descrito arriba está dado por la siguiente 2-forma sobre \mathfrak{R}^4

$$\omega^{(2)} = x dy \wedge dz - H_1 dH_2 \wedge dt \quad (2.7)$$

En el teorema 2.6 se demuestra que el campo vectorial del flujo de fases Nambu-Hamilton en el espacio de fases extendido es un campo lineal de la 3-forma $d\omega^{(2)}$, por lo que las curvas de integral son características. Definimos la acción clásica como una integral de Poincaré-Cartan actuando sobre las $n-1$ cadenas, y en el teorema 2.7 se demuestra el principio de la última acción, donde los estados de $n-1$ cadenas ('tubos' de la integral de curvas del flujo de fases Nambu-Hamilton 'pasando a través' de las $n-2$ cadenas dadas) son extremos de la acción. Estos resultados generalizan los fundamentos de la mecánica de Hamiltoniana, Arnol'd [1].

En la sección 2.4 discutimos los posibles desarrollos para la cuantización de la mecánica de Nambu. Sin embargo únicamente mencionamos aquellos basados en la teoría de deformación y la ruta integral de Feynman, nuestro primer resultado es la construcción explícita de una representación especial de la relación de conmutación Nambu-Heisenberg. Para el caso ternario esta relación fue introducida en Nambu [2] y tiene la forma

$$[A_1, A_2, A_2] = A_1 A_2 A_3 - A_1 A_3 A_2 + A_3 A_1 A_2 - A_3 A_2 A_1 + A_2 A_3 A_1 - A_2 A_1 A_3 = cI \quad (2.8)$$

donde A_1, A_2, A_3 son operadores lineales, I es un operador unitario y c es una constante. Consideremos que $Z[\rho]$ sea una red de enteros algebraicos en el campo de números cuadráticos $Q[\rho]$ donde $\rho^3 = 1$.

En el teorema 2.8 demostramos que la relación Nambu-Heisenberg puede ser representada por los operadores A_i actuando en el espacio lineal $H = \{ |\omega\rangle, \omega \in Z[\rho] \}$ mediante las fórmulas simples

$$A_1 |\omega\rangle = (\omega + 1 + \rho) |\omega + 1\rangle, \quad A_2 |\omega\rangle = (\omega + \rho) |\omega + \rho\rangle, \quad A_3 |\omega\rangle = \omega |\omega + \rho^2\rangle \quad (2.9)$$

Este resultado debería ser comparado con la representación canónica de las relaciones conmutativas de Heisenberg, en el espacio de los estados del oscilador armónico, dado por

los operadores de creación-aniquilación. Contrariamente al último caso, nuestra representación no tiene un vector vacío (como mínimo en el sentido convencional) y no sabemos donde la analogía del teorema de Stone-von Newman (representaciones irreducibles o unitariamente equivalentes) es real.

2.2.- Entorno de Nambu-Poisson

En la mecánica Hamiltoniana el entorno monotónico X se designa como el marco de Poisson y es una función anillo $A = C^\infty(X)$ (álgebra de observables) si existe el mapa $\{, \}$: $A \otimes A \mapsto A$ con las siguientes propiedades

1.- Antisimetría

$$\{f_1, f_2\} = -\{f_2, f_1\} \quad (2.10)$$

donde todas las $f_1, f_2 \in A$

2 - Regla de Leibniz (propiedad de derivación)

$$\{f_1 f_2, f_3\} = f_1 \{f_2, f_3\} + f_2 \{f_1, f_3\} \quad (2.11)$$

3 - Identidad de Jacobi

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_3, \{f_1, f_2\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} = 0 \quad (2.12)$$

para todas las $f_1, f_2, f_3 \in A$.

La correspondiente operación binaria $\{, \}$ sobre A es llamada el corchete de Poisson y juega un papel fundamental en la mecánica clásica. Denominada así, de acuerdo con Hamilton, la dinámica está determinada en el espacio de fases X mediante una función distintiva $H \in A$ llamada el "Hamiltoniano", descrito mediante las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}, \quad f \in A \quad (2.13)$$

Cuando existe una solución a las ecuaciones de Hamilton para todos los tiempos $t \in \mathbb{R}$ y todos los datos iniciales (esto es cuando X es compacta), se define el flujo de fases de Hamilton $x \mapsto g^t(x)$, $x \in X$, y el operador de evolución $U_t: A \mapsto A$.

$$U_t(f)(x) = f(g^t(x)), \quad x \in X, \quad f \in A \quad (2.14)$$

La imagen dinámica de Hamilton será consistente si el operador de evolución U_t es un isomorfismo del álgebra de observables A . Esto significa que U_t es un isomorfismo; $U_t(f_1 f_2) = U_t(f_1) U_t(f_2)$ y adicionalmente, conserva la estructura Poisson sobre A , es decir que $U_t(\{f_1, f_2\}) = \{U_t(f_1), U_t(f_2)\}$.

Que es fácil de ver (usando el teorema de inequidad estándar para las EDO) tal que la primera propiedad es equivalente a la regla de Leibniz y la segunda propiedad es equivalente a la identidad de Jacobi. Resumiremos éstos resultados bien conocidos en el siguiente enunciado

Teorema 2.1

El operador de evolución en la representación dinámica de Hamilton es un isomorfismo del álgebra de observables $A = C^\infty(X)$ si y solo si el espacio de fases X está dentro del marco de referencia de Poisson.

Los ejemplos básicos para el marco de referencia de Poisson están dados para el espacio de fases de dos dimensiones $X = \mathbb{R}^2$ con coordenadas x, y y el corchete de Poisson.

$$\{f_1, f_2\} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (x, y)} \quad (2.15)$$

Mediante la generalización $X = \mathbb{R}^{2N}$ en coordenadas $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ y el corchete de Poisson.

$$\{f_1, f_2\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i} \frac{\partial f_2}{\partial y_i} - \frac{\partial f_1}{\partial y_i} \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \right) \quad (2.16)$$

Geoméricamente, el entorno de Poisson X está caracterizado por el tensor η de Poisson, una sección del exterior cuadrático $\Lambda^2 TX$ para una tangente del cuerpo TX de X , que define la estructura de Poisson mediante la fórmula

$$\{f_1, f_2\} = \eta \{df_1, df_2\} \quad (2.17)$$

La identidad de Jacobi es equivalente a la propiedad donde η tuvo que desvanecerse a si misma mediante el corchete. En coordenadas locales (x_1, \dots, x_N) sobre X el tensor de Poisson η está dada por

$$\eta = \sum_{i,j=1}^N \eta_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.18)$$

La identidad de Jacobi toma la forma

$$\sum_{i=1}^N \left(h_{ii} \frac{\partial h_{jj}}{\partial x_i} + h_{ji} \frac{\partial h_{ki}}{\partial x_i} + h_{ki} \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.19)$$

para todas las $i, j, k = 1, \dots, N$

La dinámica de acuerdo con Nambu, consiste en remplazar el corchete de Poisson mediante una operación ternaria (n ésima) sobre el álgebra de observables A y se requieren dos $(n-1)$ 'Hamiltonianos' H_1, H_2, \dots, H_{n-1} para describir la evolución.

Esta imagen dinámica es consistente si y solo si el operador evolución es un isomorfismo del álgebra de observables, entonces, proponemos la siguiente definición.

Definición 1

El marco de referencia X es llamado el marco de Nambu-Poisson de orden n si existe un mapa $\{, \dots, \}: A^{\otimes n} \mapsto A$, generalización del corchete de Nambu de orden n , que satisface las siguientes propiedades

1.- Antisimetría

$$\{f_1, \dots, f_n\} = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \{f_{\sigma(1)}, \dots, f_{\sigma(n)}\} \quad (2.20)$$

para todas las $f_1, \dots, f_n \in A$ y $\sigma \in \text{Symm}(n)$, donde $\text{Symm}(n)$ es un grupo simétrico de n elementos y $\varepsilon(\sigma)$ es la paridad de la permutación σ

2.- Regla de Leibniz

$$\{f_1 f_2, f_3, \dots, f_{n+1}\} = f_1 \{f_2, f_3, \dots, f_{n+1}\} + f_2 \{f_1, f_3, \dots, f_{n+1}\} \quad (2.21)$$

para todas las $f_1, \dots, f_{n-1} \in A$.

3 - Identidad fundamental (IF)

$$\begin{aligned} & \{ \{f_1, \dots, f_{n-1}, f_n\}, f_{n+1}, \dots, f_{2n-1} \} + \{ f_n, \{f_1, \dots, f_{n-1}, f_{n+1}\}, f_{n+2}, \dots, f_{2n-1} \} \\ & + \dots + \{ f_n, \dots, f_{2n-2}, \{f_1, \dots, f_{n-1}, f_{2n-1}\} \} = \{ f_1, \dots, f_{n-1}, \{f_n, \dots, f_{2n-1}\} \} \end{aligned} \quad (2.22)$$

para todas las $f_1, \dots, f_{2n-1} \in A$.

Nota 1

La estructura del corchete de Nambu de orden n en el espacio de fases X induce una familia infinita de estructuras de Nambu subordinadas de ordenes $n-1$ y menores, incluyendo la familia de estructuras de Poisson, verdaderamente, debemos considerar el caso de $n=3$ y con cualquier $H \in A$ se define el corchete $\{, \}_H$ sobre X como

$$\{\psi, \phi\}_H = \{H, \psi, \phi\} \quad (2.23)$$

para todas las $\psi, \phi \in A$. Si aplicamos $f_1 = f_3 = H$ en la IF, podremos ver dentro de la identidad de Jacobi una familia de corchetes $\{, \}_H$ parametrizados por los observables H . Contrariamente, dado que una familia de corchetes de Poisson nos da una salida para el corchete de Nambu si las condiciones de funcionamiento certeras son satisfechas, para cualquier $\phi \in A$ definimos

$$D_\phi^H(f) = \{\phi, f\}_H, \quad f \in A \quad (2.24)$$

la cual se deriva del corchete de Nambu $\{, \}_H$ (identidad de Jacobi). Entonces la familia $\{, \}_H, H \in A$ del corchete de Poisson sobre X nos conduce al corchete de Nambu, definido como

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \{f_2, f_3\}_{f_1} \quad (2.25)$$

si y solo si

$$D_\phi^H(\{\psi, \chi\}_{H_2}) = \{D_\phi^{H_1}(\psi), \chi\}_{H_2} + \{\psi, D_\phi^{H_1}(\chi)\}_{H_2} + \{\psi, \chi\}_{D_\phi^{H_1}(H_2)}, \quad \phi, \psi, \chi \in A \quad (2.26)$$

Para todas las $H_1, H_2 \in A$ es verdaderamente fácil de ver en esta ecuación, una propiedad de derivación de $D_\phi^{H_1}$ con respecto a toda la familia de los corchetes de Poisson $\{, \}_H$ que es equivalente a IF (si alguna de las identidades $f_1 = H_1, f_2 = \phi, f_3 = \psi, f_4 = \chi$ y $f_5 = H_2$) Además que ésta condición para el caso $H_1 = H_2 = H$ es equivalente a la identidad de Jacobi para el corchete $\{, \}_H$. Lo mismo es real para el caso general donde de todos los $H_1, \dots, H_{n-k} \in A$, donde la asignación

$$\{f_1, \dots, f_k\}_{H_1, \dots, H_{n-k}} = \{H_1, \dots, H_{n-k}, f_1, \dots, f_k\} \quad (2.27)$$

define la jerarquía para las estructuras subordinadas de Nambu de ordenes $k = 2, \dots, n-1$ parametrizadas por los elementos en $\wedge^{n-k} A$. Y todas ellas satisfacen IF (la cuál muestra a partir de IF la estructura básica de orden n) y con condiciones de juego del mismo tipo que las anteriores.

La dinámica para el esquema de Nambu-Poisson se determina por $n-1$ funciones H_1, \dots, H_{n-1} y está descrita en las ecuaciones de movimiento generalizadas de Nambu-Hamilton.

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, \dots, H_{n-1}, f\}, \quad f \in A \quad (2.28)$$

El correspondiente flujo de fase Nambu-Hamilton g^t define el operador evolución $U_t, U_t(f)(x) = f(g^t x), x \in X$, para todas las $f \in A$.

El siguiente teorema aclara el pensamiento 'dinámico' para comprender mejor el concepto del esquema Nambu-Poisson

Teorema 2.2

El operador de evolución dentro de la representación de la dinámica de Nambu es un isomorfismo del álgebra de observables $A = C^\infty(X)$ si y solo si el espacio de fases X es un esquema de Nambu-Poisson.

Prueba

Es necesario probar que

$$U_t(\{f_1, \dots, f_n\}) = \{U_t(f_1), \dots, U_t(f_n)\} \quad (2.29)$$

Dado que (2.30) es obviamente válida a tiempo $t=0$, es suficiente mostrar que ambos lados de la ecuación satisfacen la misma ecuación diferencial de evolución. Denotando mediante $L \in Vect(x)$ el campo vectorial para el flujo de Nambu-Hamilton g^t , según la ecuación

$$L(f) = \{H_1, \dots, H_{n-1}, f\} \quad (2.30)$$

podemos expresar la t -derivada de (2.30) como

$$L(\{f_1, \dots, f_n\}) = \{L(f_1), f_2, \dots, f_n\} + \{f_1, L(f_2), \dots, f_n\} + \{f_1, f_2, \dots, L(f_n)\} \quad (2.31)$$

que no es relevante, pero la IF se especializa para las funciones $H_1, \dots, H_{n-1}, f_1, \dots, f_n$.
□

Nota 2:

La formulación equivalente de IF utilizada en la demostración previa, puede ser establecida explícitamente para cualquiera de los elementos H_1, \dots, H_{n-1} y el mapeo $L: A \mapsto A$ es una derivación del corchete de Nambu.

Definición 2

El observable $F \in A$ es conocido como la integral de movimiento para el sistema de Nambu-Hamilton con Hamiltonianos H_1, \dots, H_{n-1} si

$$\{H_1, \dots, H_{n-1}, F\} = 0 \quad (2.32)$$

y como un corolario obvio de IF obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3

El corchete de Nambu de n integrales de movimiento es una integral de movimiento.

Nota 3

Así como vimos en la nota 1, la estructura del corchete de Nambu de orden n , contiene una familia infinita de estructuras subordinadas de bajo grado incluyendo la estructura del corchete de Poisson, manteniendo las condiciones de afinidad entre ellas. se puede asumir que la estructura de Nambu debería ser mas 'rígida' que su contraparte de Poisson. Como ya sabemos esto se puede ver en la comparación de IF de orden n y la identidad de Jacobi (caso especial donde $n=2$), como ya sabemos, el lado izquierdo de la identidad de Jacobi considera que mapa desde $A \otimes A \otimes A$ dentro de A , es una derivación con respecto a cada argumento. Por lo que, para el caso general $n \geq 3$ la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de IF, al ser consideradas como un mapa desde el producto tensorial con $2n-1$ capas $A \otimes \dots \otimes A$ dentro de A , constituye únicamente una derivada respecto a los argumentos f_n, \dots, f_{2n-1} , y no para f_1, \dots, f_{n-1} . Esto es debido a que cada uno de estos grupos aparecen en IF con su propio camino. Una vez denominado el análisis de IF, es fácil ver que los observables del primer grupo aparecen únicamente en pares bajo 'el corchete de Nambu doble', por lo cual hay n términos para cada uno de los miembros en el segundo grupo,

esto no es sorprendente dado que de acuerdo con la interpretación de la nota 2, los miembros del segundo grupo pueden ser considerados como Hamiltonianos de las ecuaciones de movimiento Nambu-Hamilton, donde los miembros del primer grupo son justamente observables

Consideremos por ejemplo, aquellos términos del argumento f_{2n-1} , denotados por el campo vectorial $L_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ correspondiente al flujo de fases Nambu-Hamilton con Hamiltonianos $f_{i_1, \dots, i_{n-1}}$ podemos arreglar éstos términos como el conmutador $[L_{i_1, \dots, i_{n-1}}, L_{j_1, \dots, j_{n-1}}](f_{2n-1})$, por lo que estarán dados por la acción del campo vectorial. Esto provee la propiedad de derivación con respecto a f_{2n-1} (argumentos estándar en la mecánica Hamiltoniana, Arnold [1]). Los mismos argumentos se aplican a todos los miembros del segundo grupo, pero no a los del primer grupo, como veremos más adelante, este enfoque de IF implica fuertes ligaduras en las formas posibles del corchete de Nambu.

Geoméricamente, la estructura de Nambu de orden n puede ser realizada como

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \eta (df_1, \dots, df_n) \quad (2.33)$$

Donde η es una sección de los n -cortes exteriores en $\wedge^n TX$ de la superficie tangente TX . En coordenadas locales (x_1, \dots, x_n) sobre el tensor de Nambu, η está dada por

$$\eta = \sum_{i_1, \dots, i_n} \eta_{i_1, \dots, i_n}(x) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \quad (2.34)$$

y debería satisfacer IF. Como mencionamos al principio IF implica fuertes ligaduras en el tensor n -ésimo η

Ahora tomemos en cuenta la nota 3, donde vimos que todos los términos que contienen las segundas derivadas de f_1, \dots, f_{n-1} deberían desvanecerse. Estos resultados se muestran en el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas cuadráticas

$$N_{ij} + P(N)_{ij} = 0 \quad (2.35)$$

que para todos los multíndices $i = \{i_1, \dots, i_n\}$ y $j = \{j_1, \dots, j_n\}$ del conjunto $\{1, \dots, N\}$, donde

$$N_{ij} = \eta_{i_1, \dots, i_n} \eta_{j_1, \dots, j_n} + \eta_{j_1, i_2, \dots, i_n} \eta_{i_1, \dots, i_{n-1}} + \dots + \eta_{j_1, i_2, \dots, i_{n-1}} \eta_{i_1, \dots, i_n} - \eta_{i_1, i_2, \dots, i_n} \eta_{j_1, \dots, j_n} \quad (2.36)$$

y P es un operador de permutación que intercambia los primeros índices $n+1$ (como son i_1 y j_1) de un $2n$ -tensor N , y todos los términos que contienen las primeras derivadas de f_1, \dots, f_{2n-1} se deben desvanecer.

Este resultado arroja el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales cuadráticas

$$\sum_{i=1}^n \left(\eta_{j_2 \dots j_n} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_i} + \eta_{j_1 j_3 \dots j_n} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_i} + \dots + \eta_{j_1 j_2 \dots j_{n-1}} \frac{\partial \eta_{i_1 \dots i_n}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (2.37)$$

para todos los índices $i_2, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n = 1, \dots, N$.

Por lo que el n -tensor simétrico η define el corchete de Nambu de orden n si y solo si este satisface las ecuaciones (2.35)-(2.37)

Esto muestra una diferencia significativa entre las formulaciones de Nambu y Hamilton, donde un n -tensor antisimétrico η que satisface (2.37) para $n \geq 3$ y cuando no es mayor, 'automáticamente' define el corchete de Nambu, y para hacer esto se deben satisfacer las ligaduras algebraicas (2.35)-(2.37). Podemos maravillarnos de que existan varias soluciones del sistema algebraico diferencial (2.35)-(2.37).

La siguiente interpretación geométrica del tensor N nos da los siguientes ejemplos simples. Dejemos que V sea el espacio lineal de N -dimensiones y V^* sea su espacio dual. Donde cualquier n -tensor η antisimétrico constante puede ser interpretado como un elemento en el espacio lineal $\wedge^n V$, que también se denota por η , y para cada $\eta \in \wedge^n V$ se puede asociar un mapa $N: \wedge^{n-1} V^* \mapsto \wedge^{n+1} V$ definido por la fórmula

$$N_a = i_a(\eta) \wedge \in \wedge^{n+1} V \quad (2.38)$$

que para todos los $a \in \wedge^{n-1} V^*$, aquí $i_a(\eta) \in V$ está dado por $(i_a(\eta), v^*) = (\eta, a \wedge v^*)$ en cualquier $v^* \in V^*$ y $(,)$ mantiene la paridad entre V y V^* , ésta es la bien conocida ecuación $N=0$ que es equivalente a la condición donde se puede descomponer el elemento $\eta \in \wedge^n V$, por lo que existe un conjunto $v_1, \dots, v_n \in V$ tal que $\eta = v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, y es fácil el verificar que en el mapa de coordenadas N está representada por el $2n$ -tensor N dado por la fórmula (2.36). Con lo cuál ya ha sido probado el siguiente resultado.

Teorema 2.4

Dejemos que V sea un espacio lineal, donde cualquier elemento descompuesto en $\wedge^n V$ y envuelto en V , con estructura del marco de Nambu-Poisson de orden n .

En particular, consideremos el ejemplo original de Nambu [2], donde $X = \mathfrak{R}^n$ es un espacio de fases con coordenadas x_1, \dots, x_n y el corchete de Nambu canónico está dado por

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \frac{\partial (f_1, \dots, f_n)}{\partial (x_1, \dots, x_n)} \quad (2.39)$$

donde el lado derecho se mantiene para el Jacobiano del mapa $f = (f_1, \dots, f_n): \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R}^n$, y a partir del teorema 2.4 obtenemos

Corolario

El espacio Euclidiano \mathfrak{R}^n con el corchete de Nambu de canónico de orden n es un entorno de Nambu-Poisson.

Prueba

El corchete de Nambu canónico de orden n está dado por la totalidad del n -tensor $\eta_{i_1, \dots, i_n} = \varepsilon_{i_1, \dots, i_n}$ antisimétrico, el cuál corresponde a el elemento de volumen de \mathfrak{R}^n que es del tipo descompuesto

□

Nota 4

Definimos las transformaciones canónicas, como el difeomorfismo en el espacio de fases que preserva la estructura del corchete de Nambu. Para el ejemplo de Nambu, las transformaciones lineales canónicas forman un grupo $SL(n, \mathfrak{R})$

Nota 5

En (2.28) también se considera otro ejemplo de Nambu, la suma directa de corchetes canónicos, donde $x = \mathfrak{R}^{3n} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{R}^3$ y el corchete está dado por los siguientes elementos

$$\eta = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 + e_4 \wedge e_5 \wedge e_6 + \dots + e_{3n-2} \wedge e_{3n-1} \wedge e_{3n} \in \wedge^3 \mathfrak{R}^{3n} \quad (2.40)$$

Donde $e_i, i = 1, \dots, 3n$ es una base para \mathfrak{R}^{3n} (corchete utilizado en (2.36) para escribir las ecuaciones de movimiento de una partícula interactuando con el monopolo $SU(2)$). Por lo que es fácil de ver que un tensor η no satisface el sistema (2.35) y entonces, no define el corchete de Nambu. Esto explica las observaciones de Nambu [2] y estas transformaciones lineales canónicas para este corchete desacoplado constituyen el producto directo de n copias de $SL(3, \mathfrak{R})$, y un hecho que él considero difícil de despreciar.

Para resumir esta discusión, observamos que hay una diferencia significativa entre la mecánica de Nambu y la de Hamilton, dado que la formulación de Nambu es mas rígida

Nota 6

Se sabe que en el caso constante podría haber otros ejemplos del corchete de Nambu a un lado de aquellos dados por tensores que se pueden descomponer. Dado que las ecuaciones (2.35) no implican inmediatamente que $N = 0$, otros ejemplos de clase están dados por tensores η no constantes. Como sabemos, la estructura lineal del corchete de Poisson (estructura de Poisson sobre un espacio lineal es tal que el corchete de Poisson de funciones lineales es nuevamente lineal) es equivalente a la estructura del álgebra de Lie en el espacio dual, con lo que podemos decir que clase de estructura del corchete de Nambu se introduce.

Definición 3

Un espacio vectorial V es llamado 'gebra' de Nambu-Lie de orden n si existe un mapa (corchete de Nambu-Lie) $[\dots, \dots]: \wedge^n V \rightarrow V$ tal que

$$\begin{aligned} & [[v_1, \dots, v_{n-1}, v_n], v_{n+1}, \dots, v_{2n-1}] + \dots + [v_n, [v_1, \dots, v_{n-1}, v_{n+1}], v_{n+2}, \dots, v_{2n-1}] + \dots + \\ & + [v_n, \dots, v_{2n-2}, [v_1, \dots, v_{n-1}, v_{2n-1}]] = [v_1, \dots, v_{n-1}, [v_n, \dots, v_{2n-1}]] \end{aligned} \quad (2.41)$$

para todos $v_1, \dots, v_{2n-1} \in V$

Nota 7

La definición de ‘gebras’ Nambu-Lie pueden estar determinadas en forma equivalente como una condición para cualquier $v_1, \dots, v_{2n-1} \in \mathcal{V}$ adjunta al mapa $[v_1, \dots, v_{n-1}, \dots]: \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ es una derivación con respecto del corchete de Nambu-Lie $[\dots]$.

Teorema 2.5

Las estructuras lineales de Nambu de orden n están en correspondencia uno a uno con las ‘gebras’ de Nambu-Lie de orden n en el espacio dual.

Prueba:

La identidad fundamental es despreciable en funciones lineales, pero no lo es en la definición de las ‘gebras’ de Nambu-Lie \square

La estructura lineal de Nambu de orden n en coordenadas está dada por $n+1$ tensores $C_{i_1 \dots i_n}^k$

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} = \sum_{k=1}^N C_{i_1 \dots i_n}^k x_k \quad (2.42)$$

La ‘estructura de constantes’ C_1^k satisface el sistema sobredeterminado de ecuaciones algebraicas cuadráticas que se muestran en (2.35)-(2.37).

Ahora presentaremos varios ejemplos de sistemas dinámicos que admiten la formulación de Nambu.

Ejemplo 2.1

Consideremos las ecuaciones de Euler para el momentum angular de un cuerpo rígido en 3 dimensiones presentadas en Nambu [2]. Dichas ecuaciones admiten también la formulación Hamiltoniana con respecto al corchete lineal de Poisson sobre $\mathfrak{R}^3 \cong SU(2)$, donde el Hamiltoniano está dado por la energía cinética y la formulación de Nambu con respecto al corchete de Nambu canónico y ternario sobre \mathfrak{R}^3 y de los dos Hamiltonianos (energía cinética y el momentum angular total).

Ejemplo 2.2

El sistema Lagrange (sistema de Nahm en la teoría de monopolos estáticos $SU(2)$, (8,9)) sobre \mathfrak{R}^3 , está dado por las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 x_3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_1 x_2 \quad (2.43)$$

que también puede ser descrito por la forma de Nambu

$$\frac{dx_i}{dt} = \{H_1, H_2, x_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.44)$$

Donde $H_1 = x_1^2 - x_2^2$, $H_2 = x_1^2 - x_3^2$ Y las integrales H_1 y H_2 confinan el flujo de fases en la intersección de dos cuadrantes en \mathfrak{R}^3 , que es un foco de una curva elíptica por lo cual el sistema puede ser integrado para funciones elípticas.

Por lo que existe otro sistema con no linealidad cuadrática (llamado sistema Halpen, referido al sistema de Lagrange, Chakravarty [7], Takhtajan [8]). Esto puede ser integrado en términos de formas modulares, Takhtajan [8], que no admiten integrales globales (por evaluación simple) de movimiento. Entonces, este sistema tiene dos integrales multi-valuadas que juegan el papel de dos Hamiltonianos en la formulación de Nambu, Chakravarty [9].

Ejemplo 2.3

Dejemos que $X = \mathfrak{R}^n$ sea el espacio de fases con el corchete de Nambu canónico de orden n y permitamos que las funciones simétricas elementales de n variables sean x_1, \dots, x_n , para obtener los Hamiltonianos $H_1 = s_1, \dots, H_{n-1} = s_{n-1}$, donde $(x - x_1) \dots (x - x_n) = x^n - s_1 x^{n-1} \dots \pm s_n$ son las ecuaciones de movimiento de Nambu-Hamilton

$$\frac{dx_i}{dt} = \{H_1, \dots, H_{n-1}, x_i\}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.45)$$

que puede ser presentada como

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial^n f}{\partial x_i^n}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.46)$$

donde

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \quad (2.47)$$

que puede sugerir una generalización del gradiente de flujos.

2.3.- Principio de Acción y Formalismo Canónico

Aquí para el caso de la mecánica de Nambu extendemos el formalismo canónico de la mecánica de Hamilton, basado en la integral invariante de Poincaré-Cartan y en el principio de la última acción, Arnol'd [1], e ilustremos las características esenciales de nuestra aproximación en el ejemplo simple del esquema de Nambu-Poisson $X = \mathfrak{R}^3$ con el corchete canónico de Nambu. Haciendo que $\tilde{X} = \mathfrak{R}^4$ sea el espacio de fases con coordenadas x, y, z, t

Definición 4

La siguiente biforma $\omega^{(2)}$ sobre \tilde{X}

$$\omega^{(2)} = x dy \wedge dz - H_1 dH_2 \wedge dt \quad (2.48)$$

que conocida como la integral generalizada de Poincaré-Cartan de acción invariante en la forma de la mecánica de Nambu, Arnol'd [1]

Considerar las ecuaciones de Nambu-Hamilton con Hamiltonianos H_1 y H_2

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{H_1, H_2, f\} = L(f) \quad (2.49)$$

donde

$$L = L_1 \frac{\partial}{\partial x} + L_2 \frac{\partial}{\partial y} + L_3 \frac{\partial}{\partial z} \in Vect(X) \quad (2.50)$$

y

$$L_1 = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(y, z)}, \quad L_2 = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(z, x)}, \quad L_3 = \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x, y)} \quad (2.51)$$

descrito por

$$\tilde{L} = L + \frac{\partial}{\partial t} \in Vect(\tilde{X}) \quad (2.52)$$

que corresponde a un campo vectorial sobre el espacio de fases \tilde{X}

Teorema 2.6

El campo vectorial $\tilde{L} \in Vect(\tilde{X})$ es un campo lineal de la forma tridimensional $d\omega^{(2)}$ tal que

$$i_{\tilde{L}}(d\omega^{(2)}) = 0 \quad (2.53)$$

Prueba

Dado que

$$\begin{aligned} d\omega^{(2)} &= dx \wedge dy \wedge dz - dH_1 \wedge dH_2 \wedge dt \\ d\omega^{(2)} &= dx \wedge dy \wedge dz - L_3 dx \wedge dy \wedge dt + L_2 dx \wedge dz \wedge dt - L_1 dy \wedge dz \wedge dt \end{aligned} \quad (2.54)$$

el cálculo directo (2.37) muestra que

$$\begin{aligned}
i_{\tilde{X}}(d\omega^{(2)}) = d\omega^{(2)}(\tilde{L}_\cdot) &= L_1 dy \wedge dz - L_2 dx \wedge dz + L_3 dx \wedge dy \\
&- L_3(L_1 dy \wedge dt - L_2 dx \wedge dt) + L_2(L_1 dz \wedge dt - L_3 dx \wedge dt) \\
&- L_1(L_2 dz \wedge dt - L_3 dy \wedge dt) - L_3 dx \wedge dy + L_2 dx \wedge dz \\
&- L_1 dy \wedge dz = 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

□

Así como para el caso de la mecánica Hamiltoniana, éste teorema tiene un importante corolario, Arnol'd [1] A saber, sea c una cadena doble cerrada dentro de \tilde{X} , y sea g' el flujo de fases en la cadena triple $J'c = \{g^\tau c \leq \tau \leq t\}$ con una traza de la cadena c dentro de la isotopía g' .

Corolario

$$\int_c \omega^{(2)} = \int_{g'(c)} \omega^{(2)} \tag{2.56}$$

Prueba

Usando la fórmula $\partial(J'c) = c - g'(c)$, con el teorema de Stokes y el teorema 2.6, obtenemos

$$\int_c \omega^{(2)} - \int_{g'(c)} \omega^{(2)} = \int_{J'c} d\omega^{(2)} = 0 \tag{2.57}$$

□

Ahora formulemos el principio de la última acción, recordando que en la mecánica de Hamilton éste principio establece, Arnol'd [1] que la trayectoria clásica para la curva integral γ en el flujo de fases con los puntos iniciales y finales (p_0, q_0, t_0) , es un extremo de la acción funcional

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} (pdq - Hdt) \tag{2.58}$$

En el caso de que todas las rutas que conectan los puntos inicial y final en los subespacios dados de n -dimensiones $(t = t_0, q = q_0)$ y $(t = t_1, q = q_1)$ en el espacio de fases extendido.

Definición 5

Dada la funcionalidad

$$I(C_2) = \int_{C_2} \omega^{(2)} \tag{2.59}$$

que es una integral para la forma de acción sobre las 2-cadenas en el espacio de fases extendido \tilde{X} , se denomina como la acción funcional para la mecánica de Nambu (basado en Frécht [10] de 1905, y en Volterra [11] publicado en 1890).

Dejemos que γ sea una 1-cadena en X , y que defina una 2-cadena Γ en \tilde{X} como una traza de γ bajo la isotopía $g^t, t_0 \leq t \leq t_1$, por lo que $\partial \Gamma = \gamma_{t_0} - \gamma_{t_1}$, donde $\gamma_{t_0} = \gamma$, $\gamma_{t_1} = g^{t_1-t_0}(\gamma)$.

Ahora presentamos el teorema que establece el principio de la última acción para la mecánica de Nambu

Teorema 2.7

Como una 2-cadena Γ es un extremo de la acción $A(C)$ en la clase de todas las 2-cadenas C cuyas fronteras (1-cadenas c_{t_0} y c_{t_1}) tienen las mismas proyecciones dentro de los planos yz como las 1-cadenas dadas γ_{t_0} y γ_{t_1} .

Prueba

Como en el caso de la mecánica Hamiltoniana, ésta declaración proviene del teorema previo presentado por Arnol'd [1].

Aquí está otra prueba, basada en el cálculo directo, asumamos que Γ admite una parametrización $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$, donde $0 \leq s \leq 1$, $t_0 \leq t \leq t_1$, dado que estos deslices del tiempo son curvas cerradas, para todas las funciones t se cumple que x, y, z son periódicas en s con período igual a 1. Las variaciones $\delta x, \delta y, \delta z$ satisfacen las condiciones $\delta y(s, t_0) = \delta y(s, t_1) = \delta z(s, t_0) = \delta z(s, t_1) = 0$ para todas las $0 \leq s \leq 1$, y explícitamente tenemos

$$A(C) = \iint_{\Pi} \left\{ x \left(\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial z}{\partial s} \right) - H_1 \left(\frac{\partial H_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial H_2}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \right) \right\} ds dt \quad (2.60)$$

donde $\Pi = \{0 \leq s \leq 1, t_0 \leq t \leq t_1\}$. Que utilizando el teorema de Stokes y las propiedades de δy y δz , obtenemos la expresión para las variaciones de la acción

$$\begin{aligned} \delta A(\Gamma) = & \iint_{\Pi} \left\{ \left[\frac{\delta z}{\delta t} \frac{\delta(H_1, H_2)}{\partial(y, z)} \right] \frac{\partial y}{\partial s} - \left[\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(z, x)} \right] \frac{\partial z}{\partial s} \right\} \delta x \\ & + \left\{ \left[\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(y, z)} \right] \frac{\partial z}{\partial s} - \left[\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x, y)} \right] \frac{\partial y}{\partial s} \right\} \delta y \\ & + \left\{ \left[\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(z, x)} \right] \frac{\partial x}{\partial s} - \left[\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(y, z)} \right] \frac{\partial y}{\partial s} \right\} \delta z \right\} ds dt \quad (2.61) \end{aligned}$$

La cuál muestra que $\delta A(\Gamma) = 0$ para todas las variaciones admisibles $\delta x, \delta y, \delta z$, si Γ consiste en curvas integrales del flujo de fase de Nambu-Hamilton \square

Nota 8

La declaración inversa es también real: un extremo de la acción funcional es la 'hoja de palabras' $x(s, t), y(s, t), z(s, t)$ consistente de familias de curvas integrales de Nambu-Hamilton del flujo de fases parametrizado por s . Claramente éste extremo está caracterizado por la condición de que el producto cruz de los siguientes vectores en \mathfrak{R}^3

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} - \{H_1, H_2, x\}, \frac{\partial y}{\partial t} - \{H_1, H_2, y\}, \frac{\partial z}{\partial t} - \{H_1, H_2, z\} \right) \quad (2.62)$$

y

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right) \quad (2.63)$$

son cero, lo cual significa que existe una función $\alpha(s, t)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} - \alpha(s, t) \frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(y, z)} \\ \frac{\partial y}{\partial t} - \alpha(s, t) \frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(z, x)} \\ \frac{\partial z}{\partial t} - \alpha(s, t) \frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(x, y)} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Cambiando la parametrización $s \mapsto s' = s + \alpha(s, t)t$, $t \mapsto t' = t$, podemos ver que éste sistema se reduce a la familia de ecuaciones parametrizadas de Nambu-Hamilton parametrizadas por s

Nota 9

Comparando los principios de la última acción para las mecánicas de Nambu y Hamilton podemos ver que el 'espacio de configuración' de la mecánica de Nambu de orden 3 constituye 'dos tercios' del espacio de fases. La generalización de los resultados presentados para el caso del corchete de Nambu de orden n están en el camino correcto. La analogía de la integral invariante de Poincaré-Cartan está definida para la siguiente $n-1$ forma

$$\omega^{(n-1)} = x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - H_1 dH_2 \wedge \dots \wedge dH_{n-1} \wedge dt \quad (2.65)$$

y la acción funcional está dada por

$$A(C_{n-1}) = \int_{C_{n-1}} \omega^{(n-1)} \quad (2.66)$$

y se define sobre las $n-1$ cadenas en el espacio de fases extendido. Dentro de ésta formulación las variaciones admisibles son aquellas que no cambian las proyecciones de la frontera ∂C_{n-1} sobre los hiperplanos $x_2 x_3 \dots x_n$, por lo que en este caso la parte del espacio de configuración en el espacio de fases es $1 - \frac{1}{n}$

Nota 10

La construcción de una forma de acción y de una acción funcional es en forma similar a la construcción de cociclos cíclicos en conos utilizados en la geometría diferencial no conmutativa, Connes [12].

2.4.- Cuantización

Existe una gran diferencia (en el sentido certero equivalente) en puntos de vista sobre el problema de la cuantización. Una está basada en el desarrollo que utiliza la teoría de deformación para álgebras asociativas. Esta considera la cuantización como una deformación del álgebra (conmutativa) de observables clásicos sobre el espacio de fases en la dirección definida por una estructura dada de Poisson, Bayen [13].

Dejemos que X sea un esquema de Poisson con el corchete de Poisson $\{, \}$ y un álgebra de observables clásicos $A = C^\infty(X)$, con un parámetro de familias $\{A_h\}$ para las álgebras asociativas que se llame álgebra conmutativa de la cuantización A para los observables clásicos, si se satisfacen las condiciones siguientes

1. El álgebra A está incluida dentro de la familia

$$A_h \Big|_{h=0} = A \quad (2.67)$$

(o en la categoría algebraica formal, $A \cong A_h / \hbar A_h$)

2. Todas las álgebras A_h son isomórficas para A (o en relación con $A[[\hbar]]$ para la categoría formal algebraica) como espacios lineales.

3. Denotemos mediante $*_h$ el producto (asociativo) en A_h ($*$ es producto en la terminología de Bayen [13]), el cual tiene la expansión

$$f_1 *_h f_2 = f_1 f_2 + \frac{\hbar}{2} C_2(f_1, f_2) + O(\hbar^2) \quad (2.68)$$

con la propiedad

$$C_2(f_1, f_2) - C_2(f_2, f_1) = \{f_1, f_2\} \quad (2.69)$$

Esta última propiedad frecuentemente es referida como el principio de correspondencia

$$\{f_1, f_2\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\hbar} (f_1 *_h f_2 - f_2 *_h f_1) \quad (2.70)$$

entre la mecánica clásica y la cuántica.

La teoría desarrollada para la deformación puede ser utilizada explícitamente para el caso de $X = \mathfrak{R}^2$ (o \mathfrak{R}^{2n}) con el corchete canónico de Poisson, y nos arroja el célebre esquema de cuantización de Hermann Weyl s. Correspondiente al mapa para el producto $*$ (producto $*_h$) a partir de $A \otimes A$ dentro de A , dado por la composición usual del producto punto conmutativo sobre A con el siguiente operador bilineal pseudo-diferencial.

$$\exp\left(\frac{\hbar}{2}\{, \}\right) = \exp\left(\frac{\hbar}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}\right\}\right) : A \otimes A \mapsto A \otimes A \quad (2.71)$$

Una poderosa aplicación del mismo desarrollo está encaminada hacia la cuantización de la mecánica de Nambu. Para denominarla supongamos que podemos tratar de incluir el

producto ternario usual (un mapa a partir de $A \otimes A \otimes A$ dentro de A), que ésta dado por la multiplicación puntual-inteligente de los observables clásicos, dentro de una operación ternaria nueva $(\cdot, \cdot)_h$ la cuál depende del parámetro h y satisface certeramente las propiedades naturales (análogamente a la condición de asociatividad en el caso binario) y el principio de correspondencia.

$$\{f_1, f_2, f_3\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \text{Alt}(f_1, f_2, f_3)_h \quad (2.72)$$

donde Alt denota una anti-simetrización con respecto a los argumentos f_1, f_2, f_3 .

Con lo que podemos fácilmente generalizar la fórmula de Weyl's haciendo que la nueva operación ternaria $(\cdot, \cdot)_h$ sea la composición de un punto certero del producto ternario y el siguiente pseudo operador diferencial

$$\exp\left(\frac{h}{6} \{ \cdot, \cdot \} \right) = \exp\left\{ \frac{h}{6} \left[\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\}: A \otimes A \otimes A \mapsto A \otimes A \otimes A \quad (2.73)$$

Esta fórmula generaliza al pie de la letra el corchete de Nambu canónico de orden n .

Nota 11

Podemos hacer notar lo siguiente:

- (i) Contrariamente al caso usual binario, el punto certero para el producto ternario de observables clásicos aparece menos natural.
- (ii) Las corrientes naturales en operaciones ternarias cuando se generalizan las corrientes asociativas usuales aparentemente no son bien comprendidas

Por lo que la deformación propuesta tiene una atracción certera y debería ser analizada posteriormente. Esto nos conduce hacia una respuesta (parcial) para el problema dado en (ii)

Nota 12

Recientemente, R. Lawrence [14] propuso un sistema de axiomas para espacios lineales con operaciones n -esimas (n -álgebras usando su terminología). Esto aparece como el producto deformado $(\cdot, \cdot)_h$, tan bueno como el producto ternario de punto-certero, el cuál no los satisface. Uno podría tener en mente que ese desarrollo en Lawrence [14] generaliza certeramente propiedades combinatorias de operaciones algebraicas (notablemente en el poliedro Stasheff) que al igual que nuestro desarrollo está basado en la dinámica.

Hay otro desarrollo que utiliza la ruta de Feynman para la formulación integral de la mecánica cuántica. Para una partícula cuántica, descrita clásicamente por el sistema Hamiltoniano, lo cuál nos da la amplitud de probabilidades de la transición a partir del estado $|q_0\rangle$ a tiempo $t = t_0$ dentro del estado $|q_1\rangle$ a tiempo $t = t_1$ como una integral funcional de la exponencial en una acción clásica.

$$\exp\left\{ \frac{i}{h} A(\gamma) \right\} \quad (2.74)$$

sobre todas las 'historias' con respecto a la 'medición de Liouville'

$$\frac{i}{h} D_p D_q \quad (2.75)$$

en el espacio funcional de todas las 'historias'.

El principio de la mínima acción para la mecánica de Nambu puede ser utilizado para formular una regla similar. Por lo cual, la forma especial del principio de acción (ver teorema 2.7) requiere que para los estados cuánticos $|y(s), z(s)\rangle$ debería ser parametrizado mediante ciclos $y(s), z(s)$ mejor que los puntos en el espacio de configuración. Esta apariencia natural de ciclos se ve poco atrayente. Lo cual sugiere que las partículas contienen una poderosa inmovilidad como puntos que representan objetos de un esquema clásico, y la dinámica de los ciclos (o generalmente $n-2$ cadenas cerradas) en una representación cuántica.

Finalmente, presentamos otro desarrollo para la cuantización (formalismo canónico). Basado en las relaciones conmutativas de Heisenberg, donde para el espacio de fases $X = \mathfrak{R}^2$ con el corchete canónico de Poisson, presentado (en su forma compleja) de la forma siguiente

$$[a, a^+] = a a^+ - a^+ a = I \quad (2.76)$$

donde los operadores a^+ y a actúan en un espacio lineal de estados cuánticos (estados en el espacio de Hilbert). Los cuales tienen la siguiente realización en el espacio H_2 con las bases $\{|n\rangle\}_{n=0}$ parametrizados mediante números enteros racionales no-negativos:

$$a|n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, a^+|n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle \quad (2.77)$$

El vector $|0\rangle$ juega el papel de un estado vacío y los operadores a^+ y a son llamados operadores de creación y aniquilación.

Las relaciones conmutativas de Heisenberg, inician uno de los principios fundamentales de la mecánica cuántica, que tienen propiedades matemáticas relevantes. Hay una en particular que tuvo el celebre teorema de Stone-von Neumann que describe todas las representaciones de las relaciones conmutativas de Heisenberg y que son unitariamente equivalentes.

Las aplicación del teorema de Stone-von Neumann en las transformaciones lineales canónicas nos da una certera representación proyectiva de un grupo simpléctico, el cuál ha sido mostrado por André Weil [15] que juega el papel fundamental en la aritmética de formas cuadráticas y la reciprocidad cuadrática de campos numéricos.

En [2] Nambu propuso la siguiente generalización de las relaciones conmutativas de Heisenberg

$$[A_1, A_2, A_3] = A_1 A_2 A_3 - A_1 A_3 A_2 + A_3 A_1 A_2 - A_3 A_2 A_1 + A_2 A_3 A_1 - A_2 A_1 A_3 = cI \quad (2.78)$$

donde A_1, A_2, A_3 son operadores lineales, I es un operador unitario y c es una constante, llamaremos a (2.78) la relación de Nambu-Heisenberg

Nota 13

Dado que la relación de Nambu satisface el principio de correspondencia

$$\frac{1}{\hbar} [,] \mapsto \{ , , \} \quad (2.79)$$

A priori no está claro que los observables en la mecánica cuántica de Nambu deberían ser realizados por operadores lineales. Entonces, la forma (2.78) se muestra poderosa, esto también fue señalado por Nambu [2] tal que, contrariamente al conmutador usual $[,]$, el 'conmutador ternario' $[, ,]$ no es una derivación con respecto al producto de operadores, lo cual crea serios problemas en la formulación de la dinámica cuántica, Takhtajan [20]. Desde nuestro punto de vista, esto se observa como si no hubiera razón para imponer la propiedad de derivación sobre el operador producto. El 'conmutador triple' $[, ,]$, podría ser considerado para definir una estructura de 'gebra' de Nambu-Lie sobre observables cuánticos. Esta propiedad de comenzar una derivación de esta estructura (definición 3), la cual implica la consistencia de la dinámica cuántica de Nambu, aquí presentamos únicamente la realización explícita de la relación de Nambu-Heisenberg (2.78)

Dejemos que $\mathcal{Q}[\rho]$ sea un campo de números cuadráticos con $1 + \rho + \rho^2 = 0$, Yamaleev [26]

$$\rho = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad (2.80)$$

y hagamos que $\mathcal{Z}[\rho]$ sea un anillo de enteros algebraicos en $\mathcal{Q}[\rho]$, $\omega = m_1 + m_2 \rho$, $\in \mathcal{Z}[\rho]$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ que denotado por el espacio lineal H_3 sobre la base $\{|\omega\rangle\}$ y parametrizado por $\mathcal{Z}(\rho)$. El cálculo directo provee el siguiente resultado

Teorema 2.8

La relación de Nambu-Heisenberg con $c = \rho - \bar{\rho} = \sqrt{-3}$ admite la siguiente representación:

$$A_1|\omega\rangle = (\omega + 1 + \rho)|\omega + 1\rangle, \quad A_2|\omega\rangle = (\omega + \rho)|\omega + \rho\rangle, \quad A_3|\omega\rangle = \omega|\omega + \rho^2\rangle \quad (2.81)$$

en el espacio H_3

□

Los siguientes argumentos explican porqué es posible este tipo de representación. Utilizando la analogía para el caso $n = 2$, y considerando la representación (2.78) de la forma

$$A_1|\omega\rangle = f_1(\omega)|\omega + 1\rangle, \quad A_2|\omega\rangle = f_2(\omega)|\omega + \rho\rangle, \quad A_3|\omega\rangle = f_3(\omega)|\omega + \rho^2\rangle \quad (2.82)$$

Así como que $1 + \rho + \rho^2 = 0$, los vectores $|\omega\rangle$ son vectores propios para todos los productos triples posibles $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ de A_3, A_2, A_1 y la relación (2.78) de Nambu-Heisenberg se reduce a la ecuación funcional de las incógnitas $f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega)$

El teorema 2.8 muestra una de estas soluciones, y podemos obtener otras, utilizando el siguiente artificio; en la ecuación (2.78) que es invariante bajo transformaciones similares.

$$A_i \mapsto \tilde{A}_i = U^{-1} A_i U, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.83)$$

Donde $U: H_3 \mapsto H_3$ es un operador lineal invertible. Ahora seleccionemos a U como la diagonal en la base estándar de H_3

$$U|\omega\rangle = u(\omega)|\omega\rangle, \quad u(\omega) \neq 0, \quad \omega \in Z[\rho] \quad (2.84)$$

Entonces los operadores \tilde{A}_i están representados por las mismas fórmulas que las A_i con

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\omega) &= u^{-1}(\omega+1)u(\omega)f_1(\omega), \quad \tilde{f}_2(\omega) = u^{-1}(\omega+\rho)u(\omega)f_2(\omega) \\ \tilde{f}_3(\omega) &= u^{-1}(\omega+\rho^2)u(\omega)f_3(\omega) \end{aligned} \quad (2.85)$$

Ahora suponemos que A_1 y A_2 conmutan y que f_1, f_2 no son cero para todas las $\omega \in Z[\rho]$.

Entonces se puede seleccionar $u(\omega)$ tal que $\tilde{f}_1(\omega) = \tilde{f}_2(\omega) = 1$. Por lo que, $u(\omega)$ puede ser creado como la solución del siguiente sistema compatible (por conmutabilidad de A_1 y A_2) de la diferencia de ecuaciones:

$$u(\omega+1) = f_1(\omega)u(\omega), \quad u(\omega+\rho) = f_2(\omega)u(\omega) \quad (2.86)$$

dando condiciones certeras en el infinito a las funciones, entonces f_1 y f_2 son satisfechas, $u(\omega)$ puede ser dada como un producto semi-infinito sobre la red $Z[\rho]$. Así la ecuación funcional original para las f_i se reduce a la siguiente simple ecuación

$$\tilde{f}_3(\omega+1) - \tilde{f}_3(\omega) = c \quad (2.87)$$

la cual puede ser resuelta fácilmente.

Y 'renormalizando' estos resultados con $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 = 1$ obtenemos otras soluciones.

La solución presentada en el teorema 2.8 no pertenece a esta clase, los operadores A_1 y A_2 (al igual que otros pares) no conmutan y dado que los operadores A_1, A_2 y A_3 aniquilan los vectores $|\rho^2\rangle, |1+\rho^2\rangle$ y $|0\rangle$, correspondientemente las funciones f_i tienen ceros. Esto implica que en éste caso, no exista el operador invertible U correspondiente.

Esto muestra el papel especial de la representación para el teorema 2.8: por lo cual no hay un vector vacío en el sentido convencional, con lo que existe un triplete de vectores

$$|\rho^2\rangle, |1+\rho^2\rangle, |0\rangle \quad (2.88)$$

con propiedades similares

Nota 14

Se puede señalar que ésta relación de Nambu-Heisenberg debe ser suplementaria con la analogía del Hermítico anti-evolución, el cuál en éste caso podría ser un operador de orden 3 (por tratarse de un triplete de pares)

Finalmente, consideraremos brevemente para el caso de la mecánica de Nambu de orden n , el que podamos postular la forma siguiente en la relación de Nambu-Heisenberg

$$\sum_{\sigma \in \text{Sym}(n)} (-1)^{\epsilon(\sigma)} A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} = cI \quad (2.89)$$

Asumiendo que n es un primo (mayor que 2), consideramos la representación de (2.89) en el espacio lineal H_n sobre la base $\{|\omega\rangle\}$ parametrizada por los enteros algebraicos $Z[\rho]$ en el campo ciclotómico de la raíz n enésima de la unidad $\rho^n = 1$, o sea

$$1 + \rho + \dots + \rho^{n-1} = 0 \quad (2.90)$$

Y asumiendo que los operadores A_i están representados por un camino similar

$$A_i |\omega\rangle = f_i(\omega) |\omega + \rho^{i-1}\rangle, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.91)$$

se puede tratar de repetir el mismo artificio: 'fuera normas' de los coeficientes f_1, \dots, f_{n-1} , asumiendo así que las f_i son tales que el siguiente sistema de ecuaciones

$$u(\omega + \rho^{i-1}) = f_i(\omega) u(\omega), \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (2.92)$$

es compatible y tiene una solución que nos da una salida hacia un operador invertible U . En este caso, los operadores conmutativos $\tilde{A}_i = U^{-1} A_i U$ para $i = 1, \dots, n-1$, representan $n-1$ translaciones básicas (generadores) de la red $Z[\rho]$. Y analizando la relación (2.89) para el caso general n , vemos que todos esos términos están contenidos en el último par de A_i , con $i \leq n-1$ para las aproximaciones más cercanas. Esos términos aparecen doblemente en (2.89) y la conmutatividad de \tilde{A}_i , lo cuál implica que se cancelarán mutuamente unos con otros.

Esto muestra que en el caso de alto orden, la relación de Nambu-Heisenberg no admite soluciones simples con $n-1$ operadores conmutativos A_i , por lo que se tiene una solución similar a la del teorema 2.8.

CAPITULO 3

Extensión de la Mecánica de Newton.

3.1.- Ecuaciones de Dinámica

Las ecuaciones de dinámica representan un fenómeno físico en forma mas general que las ecuaciones de evolución (funciones dependientes del tiempo), es decir que las ecuaciones de evolución son una solución particular de las ecuaciones de dinámica, donde tenemos toda la información concerniente a un sistema particular. En la mecánica de Nambu el conjunto de ecuaciones de dinámica está determinado por

$$\frac{dq^a}{dt} = \epsilon^{abc} \frac{\partial H_1}{\partial q^b} \frac{\partial H_2}{\partial q^c} \quad (3.1)$$

Ahora consideremos el sistema de ecuaciones de movimiento de Newton

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde las variables se definen como

$$\begin{aligned} p &= \text{momentum} \\ m &= \text{masa} \\ x &= \text{posición} \\ V(x) &= \text{función de potencial} \\ t &= \text{tiempo} \end{aligned}$$

calculamos la solución de éste sistema de ecuaciones diferenciales, multiplicamos los miembros de la igualdad por dx

$$dx \frac{dp}{dt} = -dV(x) \quad (3.3)$$

derivamos respecto de la coordenada de posición

$$\frac{dx}{dt} dp = -dV(x) \quad (3.4)$$

integramos la ecuación y obtenemos la constante de integración

$$\int \frac{p}{m} dp = - \int dV(x) + H \quad (3.5)$$

despejando la constante de integración, también conocida como constante de movimiento y obtenemos la función de Hamilton

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (3.6)$$

Derivando ésta función podemos transformar las ecuaciones de movimiento de Newton en las ecuaciones de dinámica de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \end{aligned} \quad (3.7)$$

que en forma abreviada son

$$\frac{dq_a}{dt} = \epsilon^{ab} \frac{\partial H}{\partial q_b} \quad (3.8)$$

donde las variables se definen como

- q^a = coordenada de momentum
- q^b = coordenada de posición
- t = tiempo
- ϵ^{ab} = tensor de Levi-Civita
- H = función de Hamilton

Ahora siguiendo el mismo procedimiento podemos extender las ecuaciones de movimiento de Newton al espacio de fases con tres dimensiones (o mas). dentro de la familia de Hamiltonianos definidos por

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad N_k = \frac{q_k^2}{2\mu_k} + V(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.9)$$

La siguiente fórmula, representa un conjunto de ecuaciones de dinámica, de acuerdo con el formalismo de Nambu

$$\frac{dq_i}{dt} = \sum_{ikl} \epsilon_{ikl} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} \frac{\partial H_2}{\partial q_l}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

En éste sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, se adopta la convención para el tensor de Levi-Civita, que está definida por los siguientes valores.

$$\text{Tensor Levi - Civita} \begin{cases} \epsilon_{ikl} = 1 \Rightarrow \text{permutación par} \\ \epsilon_{ikl} = -1 \Rightarrow \text{permutación impar} \\ \epsilon_{ikl} = 0 \Rightarrow \text{dos índices iguales} \end{cases} \quad (3.11)$$

dejando correr el primer índice, el sistema se define como:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \sum_{kl} \epsilon_{1kl} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} \\ \frac{dq_2}{dt} &= \sum_{kl} \epsilon_{2kl} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} \\ \frac{dq_3}{dt} &= \sum_{kl} \epsilon_{3kl} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} \end{aligned} \quad (3.12)$$

y aplicando el valor del tensor Levi-Civita, podemos cancelar los miembros de la suma, cuyos coeficientes sean cero por tener subíndices iguales

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \sum_l \left[\epsilon_{12l} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} + \epsilon_{13l} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} \right] \\ \frac{dq_2}{dt} &= \sum_l \left[\epsilon_{23l} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} + \epsilon_{21l} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} \right] \\ \frac{dq_3}{dt} &= \sum_l \left[\epsilon_{31l} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} + \epsilon_{32l} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_l} \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

repetiendo el mismo procedimiento, para los demás índices obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= \epsilon_{123} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \epsilon_{132} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \\ \frac{dq_2}{dt} &= \epsilon_{231} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \epsilon_{213} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \\ \frac{dq_3}{dt} &= \epsilon_{312} \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} + \epsilon_{321} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \end{aligned} \quad (3.14)$$

sustituyendo los valores de los coeficientes

$$\begin{aligned}
 \frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} \\
 \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} \\
 \frac{dq_3}{dt} &= \frac{\partial H_1}{\partial q_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_2} - \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ahora hacemos un cambio de variables para utilizar la nomenclatura de Nambu

$$q_1 = p, \quad q_2 = q, \quad q_3 = x, \quad H_1 = H, \quad H_2 = N \tag{3.16}$$

y obtenemos el sistema de ecuaciones de Nambu, que nos definen la dinámica de un sistema en el espacio de fases tridimensional

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial q} \\
 \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial N}{\partial x} \\
 \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial N}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial N}{\partial p}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

derivando este par de Hamiltonianos con respecto a las variables indicadas. obtenemos tres ecuaciones diferenciales lineales que son las ecuaciones de evolución del sistema Yamaleev [23]

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{q}{\mu} \\
 \frac{dq}{dt} &= - \frac{\partial V(x)}{\partial x} \frac{p}{m} \\
 \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \frac{q}{\mu}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

estas tres ecuaciones describen las fuerzas de un campo de potencial actuando sobre una partícula en movimiento, con coordenadas generalizadas en el espacio de fases con tres dimensiones.

Es importante mencionar que siguiendo el camino inverso es posible construir el conjunto de ecuaciones de la dinámica, a partir de las ecuaciones de evolución. y ésta es una de las bondades del formalismo de la mecánica de Nambu. además permite transformar las ecuaciones de la mecánica de Newton en ecuaciones de la mecánica de Hamilton y generalizar la mecánica clásica para el espacio de fases con tres dimensiones

3.2 - Extensión de las Ecuaciones de Newton

Las funciones elípticas de Jacobi son una extensión natural de las funciones seno y coseno.

Una propiedad muy importante de las funciones elípticas de Jacobi es la doble periodicidad que es contraria a la periodicidad simple de las funciones circulares. Para construir un modelo de oscilador elíptico naturalmente se parte de la formulación de la diferenciación de las funciones elípticas de Jacobi, Akhiezer [31], $cn(\phi, k)$, $sn(\phi, k)$, $dn(\phi, k)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\phi} cn(\phi, k) &= -sn(\phi, k) dn(\phi, k) \\ \frac{d}{d\phi} sn(\phi, k) &= dn(\phi, k) cn(\phi, k) \\ \frac{d}{d\phi} dn(\phi, k) &= -k^2 sn(\phi, k) cn(\phi, k)\end{aligned}\tag{3.19}$$

adicionalmente contamos con dos relaciones algebraicas (en lugar de una para las funciones trigonométricas)

$$\begin{aligned}cn^2(\phi, k) + sn^2(\phi, k) &= 1 \\ dn^2(\phi, k) + k^2 sn^2(\phi, k) &= 1\end{aligned}\tag{3.20}$$

donde k es una medida de la deformación elíptica de las funciones coseno y seno, recordando la correspondencia

$$\begin{aligned}dn(\phi, k) &\rightarrow 1 \\ cn(\phi, k) &\rightarrow \cos(\phi) \\ sn(\phi, k) &\rightarrow \sin(\phi)\end{aligned}\tag{3.21}$$

cuando $k = 0$ y la identificación de modelo del oscilador convencional está dado por

$$\begin{aligned}\frac{p}{m\rho\omega} &= \cos\phi \\ \frac{x}{\rho} &= \sin\phi \\ \phi &= \omega t\end{aligned}\tag{3.22}$$

ahora reproducimos las ecuaciones de evolución a partir de (3.19)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{\omega dt} \frac{p}{m\rho\omega} &= -\frac{x}{\rho} \frac{k}{K} \\
 \frac{d}{\omega dt} \frac{k}{K} &= -\frac{m\rho^2}{K} \frac{x}{\rho} \frac{p}{m\omega\rho} \\
 \frac{d}{\omega dt} \frac{x}{\rho} &= \frac{p}{m\omega\rho} \frac{k}{K}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

donde m es la masa, ω es la frecuencia y ρ amplitud de las oscilaciones y también se ha introducido una variable nueva $\frac{k}{K}$ referente a la función $dn = (\phi, k)$. Comparando (3.19) con (3.23) obtenemos la siguiente correspondencia de las variables dinámicas con las funciones de Jacobi

$$\operatorname{sn}(\phi, k) = \frac{x}{\rho}, \quad \operatorname{cn}(\phi, k) = \frac{p}{m\omega\rho}, \quad \operatorname{dn}(\phi, k) = \frac{k}{K}, \quad k = \frac{m\rho^2}{K} \tag{3.24}$$

el valor K ($\dim(k) = \dim(K)$) no dependerá de ϕ y es un parámetro de las nuevas ecuaciones de movimiento.

Ahora vamos a reestructurar el sistema (3.23) de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dt} &= -\frac{d}{dx} \left\{ \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\} \frac{k}{K} \\
 \frac{dk}{dt} &= -\frac{d}{dx} \left\{ \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right\} \frac{p}{\omega^2 m} \\
 \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \frac{k}{K}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

debemos observar que la función entre llaves $\{ \dots \}$ representa el potencial del oscilador

$$V(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \tag{3.26}$$

primero formulemos las ecuaciones elípticas para el potencial del oscilador, y podemos generalizar la ecuación (3.25) para el caso de una función de potencial arbitraria. Con este propósito definimos las variables k y K de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 k\omega^2 &= q \\
 K\omega^2 &= \mu
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

como resultado obtenemos las ecuaciones de movimiento, Yamaleev [23]

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{dp}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{q}{\mu} \\
 (b) \quad \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \frac{q}{\mu} \\
 (c) \quad \frac{dq}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{p}{m}
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

a este sistema de ecuaciones lo llamaremos ecuaciones de movimiento elípticas. Así el estado del sistema en tal mecánica está determinado por el conjunto de coordenadas $\{x, p, q\}$, las que constituyen el espacio de fases tridimensional. Notar que la variable q y el parámetro de escala μ son los valores de la dimensionalidad energética. Esas ecuaciones admiten dos integrales de movimiento

$$\begin{aligned}
 C_p &= \frac{p^2}{2m} + V(x) \\
 C_q &= \frac{q^2}{2\mu} + V(x)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

notar que cada una de las integrales tiene la forma de la función de Hamilton dada (3.6) y existe una simetría entre dos conjuntos $\{C_p, p, m\}$ y $\{C_q, q, \mu\}$. Esto nos da idea para interpretar esos tripletes como energía, momentum y masa de las partículas p y q respectivamente. Y si la partícula p es una partícula física entonces la partícula q desempeña el papel de alguna subpartícula concomitante a la partícula física.

Teniendo dos integrales de movimiento C_p, C_q una de ellas puede dentro de este principio representar una solución de la ecuación de la ecuación (3.28) por cuadratura. Considerando las ecuaciones (3.29) y a partir de la ec. (3.28, b) obtenemos

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{m\mu}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(C_p - V(x))(C_q - V(x))}} \tag{3.30}$$

la cual contiene la función $x = x(t)$ en forma oculta.

Para el caso del potencial en el oscilador (3.26) la integral (3.30) es reducida a la integral elíptica

$$\omega \sqrt{\frac{2C_q}{\mu}} (t - t_0) = \int \frac{dy}{(1-y^2)(1-k^2y^2)}, \tag{3.31}$$

donde hemos definido $y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2C_p}} x$ y $k^2 = \frac{C_p}{C_q}$. Lo que nos permite representar la solución (3.28) con las funciones elípticas de Jacobi

$$x = \sqrt{\frac{2C_p}{m\omega^2}} \operatorname{sn}(\phi, \kappa), \quad p = \sqrt{2C_p m} \operatorname{cn}(\phi, \kappa), \quad q = \sqrt{2C_q \mu} \operatorname{dn}(\phi, \kappa) \quad (3.32)$$

$$\text{con } \phi = \omega(t - t_0) \sqrt{\frac{2C_q}{\mu}}$$

Como la función Hamiltoniana es usada para construir ecuaciones dinámicas, podemos usar las funciones (3.29) para obtener las ecuaciones de Hamilton análogas, es fácil demostrar que el Hamiltoniano como superestructura de las ecuaciones elípticas está dado por el conocido sistema de las ecuaciones de Nambu

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial q} \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial N}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial N}{\partial p} \end{aligned} \quad (3.33)$$

La correspondencia de las soluciones de las ecuaciones elípticas para el potencial al del oscilador (3.32) con las soluciones del modelo del oscilador estándar, obviamente es alcanzada por el uso de $\kappa = 0$ y $2N = \mu$. Si consideramos $C_p = 0$ (la energía total correspondiente a la partícula p es igual a cero) obtenemos $x = 0$ y $2N = \mu$. Entonces la amplitud de las coordenadas x y p serán igual a cero, por lo que la amplitud de la tercera coordenada se convierte en

$$q = \sqrt{2N\mu} \quad (3.34)$$

Este valor puede ser interpretado como la amplitud de las fluctuaciones al vacío. Naturalmente podríamos querer obtener el parámetro μ , como una constante universal de la teoría y establecer un comportamiento asintótico de la dinámica cuando $\mu \rightarrow \infty$.

Suponemos que cuando $\mu \rightarrow \infty$ el sistema (3.28) ha sido reducido a las ecuaciones de movimiento de Newton. Esta aseveración está basada en el modelo del oscilador, donde hemos obtenido las soluciones del modelo estándar al considerar $\kappa = 0$.

Completemos esta sección mediante las ecuaciones elípticas en el espacio Euclidiano de tres dimensiones

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{q}{\mu} \\
 \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{p}}{m} \\
 \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\bar{p}}{m} \frac{q}{\mu}
 \end{aligned}
 \tag{3.35}$$

en particular para un campo Newtoniano central obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{p}}{dt} &= -\frac{\alpha}{r} \frac{q}{\mu} \\
 \frac{dq}{dt} &= -\frac{\alpha}{mr} (\bar{x}\bar{p}) = -\frac{\alpha}{m} p_r \\
 \frac{d\bar{x}}{dt} &= \frac{\bar{p}}{m} \frac{q}{\mu}
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

donde p_r es la componente radial del momentum

3.3.- Ecuaciones Elípticas de Movimiento

Primero consideremos el caso del espacio de fases con cuatro dimensiones, e introduciendo el cuarteto $\{x, p, q_1, q_2\}$ de variables de fase, postulamos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \frac{q}{\mu_q} \frac{h}{\mu_h} \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{q}{\mu_q} \frac{h}{\mu_h} \\ \frac{dq}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{p}{m} \frac{h}{\mu_h} \\ \frac{dh}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{p}{m} \frac{q}{\mu_q} \end{aligned} \quad (3.37)$$

el sistema tiene tres integrales de movimiento

$$E_p = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad E_q = \frac{q^2}{2\mu_q} + V(x), \quad E_h = \frac{h^2}{2\mu_h} + V(x) \quad (3.38)$$

que pueden ser utilizadas para obtener una solución de (3.37) en una cuadratura, en ese caso la solución $x = x(t)$ oculta en la cuadratura está dada por

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m \mu_1 \mu_2}{8}} \int \frac{dx}{\sqrt{(E_p - V(x))(E_q - V(x))(E_h - V(x))}} \quad (3.39)$$

para el potencial del oscilador (3.26) ésta integral es reducida a la denominada integral hiperbólica

$$2\omega \sqrt{\frac{E_q E_h}{\mu_q \mu_h}} (t - t_0) = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \kappa_1^2 y^2)(1 - \kappa_2^2 y^2)}} \quad (3.40)$$

donde $y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2E_p}} x$ $\kappa_1^2 = \frac{E_p}{E_q}$, $\kappa_2^2 = \frac{E_p}{E_h}$

la función hiperbólica de Jacobi es obtenida al invertir la integral (3.40), estas funciones obedecen las siguientes ecuaciones diferenciales (comparar con (3.37))

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\phi} hcn(\phi, \kappa) &= -hsn(\phi, \kappa) hdn(\phi, \kappa) hdm(\phi, \kappa) \\
\frac{d}{d\phi} hsn(\phi, \kappa) &= hcn(\phi, \kappa) hdn(\phi, \kappa) hdm(\phi, \kappa) \\
\frac{d}{d\phi} hdn(\phi, \kappa) &= -\kappa_1^2 hsn(\phi, \kappa) hcn(\phi, \kappa) hdm(\phi, \kappa) \\
\frac{d}{d\phi} hdm(\phi, \kappa) &= -\kappa_2^2 hsn(\phi, \kappa) hcn(\phi, \kappa) hdn(\phi, \kappa),
\end{aligned} \tag{3.41}$$

con $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ Entonces tomamos la solución de (3.37) e invertimos la integral (3.40), y la solución está dada por

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{2E_p}{m\omega^2}} hsn(\phi, \kappa_1, \kappa_2) \\
p &= \sqrt{2mE_p} hcn(\phi, \kappa_1, \kappa_2) \\
q_1 &= \sqrt{2\mu_q E_q} hdn(\phi, \kappa_1, \kappa_2) \\
q_2 &= \sqrt{2\mu_h E_h} hdm(\phi, \kappa_1, \kappa_2)
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\text{con } \phi = 2\omega(t - t_0) \sqrt{\frac{E_q E_h}{\mu_q \mu_h}}$$

con el procedimiento desarrollado en las secciones anteriores y por inducción, extendemos las ecuaciones de Newton sobre el espacio de fases de n -dimensiones, para obtener las ecuaciones análogas dadas por el siguiente conjunto de n -elementos

$$\{x, p, q_1, q_2, \dots, q_{n-2}\} \tag{3.43}$$

y postulamos las siguientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{1}{\mu} \prod_{k=1}^p q_k \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m\mu} \prod_{k=1}^p q_k \\
\frac{dq_l}{dt} &= -\frac{dV(x)}{dx} \frac{p}{m} \prod_{k=1}^p \frac{q_k}{\mu_k}, \quad l=2, \dots, n-1
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\text{con } \mu = \prod_{k=1}^p \mu_k, \quad p = n-2$$

este sistema de ecuaciones está formado sobre el espacio de fases con n -dimensiones y admite $n-1$ integrales de movimiento

$$E_p = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad E_l = \frac{q_l^2}{2m} + V(x), \quad l=1, 2, \dots, n-2 \quad (3.45)$$

formando las funciones de Hamilton-Nambu del sistema

$$H = E_p, \quad N_l = E_l, \quad l=1, \dots, n-2 \quad (3.46)$$

en el ambiente de la teoría de Nambu estas funciones desempeñan el papel de generadores de movimiento, y las ecuaciones correspondientes de Hamilton-Nambu pueden ser escritas como

$$\frac{dq_i}{dt} = \epsilon_{ijk} \left(\frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial N_l}{\partial x_k} - \frac{\partial N_{n-2}}{\partial x_i} \right), \quad (i, k, \dots, l) = 1, \dots, n \quad (3.47)$$

considerando el movimiento estacionario, con el potencial independiente del parámetro tiempo, y haciendo uso de las constantes de movimiento (3.45) encontramos la primera integral a partir de la segunda ecuación de (3.44), que tiene la forma

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{m\mu}}{2^{(n-2)/2}} \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{\left\{ (E_p - V) \prod (E_l - V) \right\}^{1/2}} \quad (3.48)$$

la solución de (3.44) $x = x(t - t_0, E_p, E_1, \dots, E_{n-2})$ se oculta en la integral (3.48), haciendo uso de la integral (3.48) examinamos la solución para el potencial del oscilador, bajo las designaciones

$$y = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2H}} x, \quad K_i^2 = \frac{H}{n_i}, \quad N = \prod N_i \quad (3.49)$$

la integral (3.48) acepta la forma siguiente

$$\phi = \int \frac{dy}{(1-y^2) \prod (1-k_i^2 y^2)} \quad (3.50)$$

donde $\phi = (t - t_0) \omega \sqrt{\frac{N}{\mu}} 2^{(n-2)/2}$

como resultado la solución está dada por el conjunto de las funciones hiperbólicas de Jacobi de orden n

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{2C_l}{mw^2}} \operatorname{hsn}(f, k_1, k_2, \dots, k_{n-2}) \\
 p &= \sqrt{2mC_l} \operatorname{hcn}(f, k_1, k_2, \dots, k_{n-2}) \\
 q_l &= \sqrt{2m_l C_l} \operatorname{hdn}(f, k_1, k_2, \dots, k_{n-2}) \\
 l &= 1, 2, \dots, n-2
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\operatorname{con} \kappa_l = \frac{C_l}{C_l}$$

3.4.- Los Conceptos de Energía

El punto de partida esencial es la fase coordinada en el marco de las ecuaciones hiperelípticas de fase coordinadas $x = x(t)$. Sin embargo mantiene la interpretación como una función de trayectoria. La virtud de esta interpretación nos permite introducir los conceptos de "momentum efectivo" y el de "trabajo de la fuerza efectiva". De esta forma podemos establecer la correspondencia con la mecánica Newtoniana

Nuestro desarrollo está basado en el punto de vista natural, donde $x = x(t)$ tiene el significado de una coordenada de posición en la trayectoria de la partícula moviéndose de acuerdo a la ley (3.28). Entonces $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad y $\frac{d^2x}{dt^2}$ es la aceleración de la partícula. En el marco de la mecánica Newtoniana y mediante el uso de estos principios primero introduciremos los conceptos de fuerza y trabajo realizados por una partícula

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F, \quad A = \int_a^{b_r} F dx \quad (3.52)$$

ahora estamos listos para calcular las energías cinética y potencial de una partícula moviéndose a lo largo de la trayectoria predecida por la ecuación (3.28), por lo cual tenemos

$$m \int_a^{b_r} \frac{d^2x}{dt^2} dx = \frac{1}{\mu} \int_a^{b_r} d(pq) dx = E_k(x=b) - E_k(x=a) \quad (3.53)$$

entonces la expresión

$$E_k = \frac{p^2 q^2}{2m\mu^2} \quad (3.54)$$

puede ser interpretada como la energía cinética.

Para obtener la parte de un potencial en la energía debemos calcular la integral utilizando (3.28, a), (3.28, b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \int_a^b \left(q \frac{dp}{dt} + p \frac{dq}{dt} \right) dx &= -\frac{1}{\mu} \int_a^b \frac{\partial V}{\partial x} \left(\frac{p^2}{m} + \frac{q^2}{\mu} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{\mu} \int_a^b \frac{\partial V}{\partial x} \left(2(C_p + C_q) - 4V \right) dx = \\ &= 2 \frac{1}{\mu} \left((C_1 + C_2)(V(b) - V(a)) - (V^2(b) - V^2(a)) \right) = \\ &= E_p(x=b) - E_p(x=a) \end{aligned} \quad (3.55)$$

dado que la energía potencial está representada por

$$E_p = \frac{2}{\mu} \left\{ (C_p + C_q) V(x) - V^2(x) \right\} \quad (3.56)$$

la energía total es la suma de las energías cinética y potencial

$$\begin{aligned} E_t &= E_k + E_p = \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{p^2 q^2}{2m2\mu} + \left((C_1 + C_2) V(x) - V^2(x) \right) \right\} \\ &= \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{p^2 q^2}{2m2\mu} + V \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{q^2}{2\mu} \right) + V^2 \right\} \\ &= \frac{2}{\mu} \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \left(\frac{q^2}{2\mu} + V \right) = \frac{2}{\mu} C_1 C_2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

de acuerdo con (3.54), (3.57), la diferencial de la energía total relacionada con la diferencial del momentum por el camino estándar es

$$v d\pi = dE \quad (3.58)$$

de esta manera podemos establecer la correspondencia con las ecuaciones de Newton, y definiendo la cantidad $\pi = p \frac{q}{\mu}$ como el momentum de la partícula moviéndose dentro del campo de potencial $W = E_t$. Tal que (3.28, b) expresa una relación usual entre el momentum y la velocidad. Uniendo (3.28, a) con (3.28, c) obtenemos

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad (3.59)$$

por lo que las ecuaciones (3.28) y (3.59) son equivalentes para el caso del potencial estacionario. entonces podemos resumir este resultado con el postulado siguiente

Teorema 5.1

Las soluciones del sistema (3.28) en el potencial $V(x)$ y constantes de integración E_p, E_q coinciden con las soluciones de la ecuación (3.59) con potencial

$$W = \frac{2}{\mu} \left\{ (C_p + C_q) V(x) - V^2(x) \right\} \quad (3.60)$$

entonces primero estableceremos la correspondencia entre las ecuaciones de Newton con el potencial

$$W = \alpha V(x) - \lambda V^2(x), \quad (3.61)$$

y las ecuaciones elípticas con el potencial $V(x)$. Pero poniendo dentro de la correspondencia de los dos potenciales dados obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones para definir μ, C_p, C_q , como las funciones de los parámetros α, λ , y la energía total E

$$\frac{2}{\mu} = \lambda, \quad \frac{2}{\mu}(C_p + C_q) = \alpha, \quad \frac{2}{\mu}C_p C_q = E. \quad (3.62)$$

la solución está dada por

$$\begin{aligned} C_q &= \frac{\mu}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{8E}{\mu}} \right) \\ C_p &= \frac{\mu}{4} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8E}{\mu}} \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

estas relaciones nos conducen a encontrar el comportamiento de C_p, C_q bajo el límite

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{2N}{\mu} = 1, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} H = E, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{q}{\mu} = 1. \quad (3.64)$$

asintóticamente q es representada por series

$$q = \mu + Q + \frac{Q_1}{\mu} + \dots \quad (3.65)$$

en el límite $\mu \rightarrow \infty$ la ecuación (3.28, c) se reduce a la ecuación para la energía cinética

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dV(x)}{dx} \frac{p}{m} \quad (3.66)$$

ahora por el mismo camino vamos a deducir la fórmula de las energías; total, cinética y potencial para el caso donde $n = 4$, y dentro de la ecuación (3.44) obtenemos

$$m \int_a^{b_r} \frac{d^2 x}{dt^2} dx = \frac{1}{\mu_q \mu_h} \int_a^{b_r} \frac{d(pqh)}{dt} dx = \int_a^{b_r} v d\pi = E_k(x=b) - E_k(x=a) \quad (3.67)$$

donde

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \frac{q^2 h^2}{\mu_q^2 \mu_h^2} \quad (3.68)$$

el momentum del sistema está definido por $\pi = p \frac{qh}{\mu_q \mu_h}$ y la parte de la energía potencial está dada por la integral

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{dp}{dt} dx &= \frac{1}{m_q m_h} \int_a^b \left\{ qh \frac{dp}{dt} + ph \frac{dq}{dt} + qp \frac{dh}{dt} \right\} dx = \\
 &= -\frac{1}{m_q m_h} \int_a^b \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{p^2 q^2}{m m_q} + \frac{q^2 h^2}{m_q m_h} + \frac{p^2 h^2}{m m_h} \right\} dx = \\
 &= -\frac{4}{m_1 m_2} \int_a^b \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ (N_1 - V)(N_2 - V) + (N_2 - V)(H - V) + (H - V)(N_1 - V) \right\} dx = \\
 &= E_p(x=b) - E_p(x=a)
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

donde

$$E_p = \frac{4}{\mu_q \mu_h} \left\{ (N_1 N_2 + N_2 H + H N_1) V - (N_1 + N_2 + H) V^2 + V^3 \right\} \tag{3.70}$$

la energía total del sistema está dada por

$$\begin{aligned}
 E_t &= E_k + E_p = \\
 &= \frac{4}{\mu_q \mu_h} \left\{ \frac{p^2}{2m} \frac{q^2 h^2}{2\mu_q 2\mu_h} + (N_1 N_2 + N_2 H + H N_1) V - (N_1 + N_2 + H) V^2 + V^3 \right\} \\
 &= \frac{4}{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \left(\frac{q_1^2}{2\mu_1} + V \right) \left(\frac{q_2^2}{2\mu_2} + V \right) = \frac{4}{\mu_1 \mu_2} (N_1 N_2 H)
 \end{aligned} \tag{3.71}$$

donde

$$W = \frac{4}{\mu_1 \mu_2} \left\{ (N_1 N_2 + N_2 H + H N_1) V - (N_1 + N_2 + H) V^2 + V^3 \right\} \tag{3.72}$$

comparando (3.72) con la función de potencial que está dada por

$$W = \alpha_1 V - \alpha_2 V^2 + \lambda V^3 \tag{3.73}$$

obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{4}{\mu_1 \mu_2} (N_1 + N_2 + H) \\ \alpha_2 &= \frac{4}{\mu_1 \mu_2} (N_1 N_2 + N_2 H + H N_1) \\ E &= \frac{4}{\mu_1 \mu_2} (N_1 N_1 H)\end{aligned}\quad (3.74)$$

estas relaciones pueden ser comprendidas como la fórmula de Vietta para las raíces de un polinomio

$$x^3 - \frac{\mu_1 \mu_2 \alpha_2}{4} x^2 + \frac{\mu_1 \mu_2 \alpha_1}{4} x - \frac{\mu_1 \mu_2}{4} E = 0 \quad (3.75)$$

las soluciones de ésta ecuación están dadas por la fórmula de Cardano, a partir de la cual obtenemos los valores C_p, C_q, C_n como las funciones de E, α_1, α_2 .

Ahora utilizaremos la experiencia acumulada para obtener fórmulas análogas en el caso del espacio de fases con n -dimensiones Y de acuerdo con la segunda ecuación escribimos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{m} \quad (3.76)$$

donde el momentum efectivo π es

$$\pi = p \prod_{k=1}^p \frac{q_k}{\mu_k} \quad (3.77)$$

y la energía cinética está dada por

$$E_k = \frac{p^2}{2m} \prod_{k=1}^p \frac{q_k^2}{\mu_k^2} \quad (3.78)$$

para obtener la parte del potencial de la energía total debemos calcular la integral

$$\begin{aligned}\int_a^{b_r} \frac{dp}{dt} dx &= \frac{1}{m_a} \left\{ \prod_{k=1}^p q_k \frac{dp}{dt} + p \sum_{l=1}^{n-2} \frac{dq_l}{dt} \left(\prod_{k \neq l}^p q_k \right) \right\} dx = \\ &= -\frac{1}{m_a} \int_a^{b_r} \frac{\partial V}{\partial x} \left\{ \frac{p^2}{m} \prod_{k \neq l}^p q_k + \frac{1}{m} \prod_{k \neq l}^p q_k^2 \right\} dx = \\ &= -\frac{2^p}{m_a} \int_a^{b_r} (H - V) \left\{ \sum_{l=1}^p \prod_{k \neq l}^p (N_k - V) + \prod_{k=1}^p (N_k - V) \right\} dV = \\ &= E_p(x=b) - E_p(x=a)\end{aligned}\quad (3.79)$$

donde la E_p está dada por la serie

$$E_p = \frac{2^p}{\mu} \left\{ \alpha_1 V - \alpha_2 V^2 + (-1)^p \alpha_p V^p + (-1)^{p+1} V^{p+1} \right\} \quad (3.80)$$

con los coeficientes

$$\begin{aligned} a_1 &= \prod_{k=1}^p N_k + \sum_{l=1}^p \prod_{k \neq l}^p N_k H \\ a_p &= \sum_{k=1}^p N_k + H \end{aligned} \quad (3.81)$$

estas relaciones reproducen la conocida fórmula de Vietta para polinomios.

3.5. - Ecuación de Movimiento Relativista

En esta sección se deduce la relación relativista entre la energía, masa y momentum para una partícula moviéndose en un campo de potencial estacionario, donde se sugiere que el movimiento de esta partícula obedece las ecuaciones de movimiento elípticas. Comenzamos con las ecuaciones elípticas escritas de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{d p_1}{d \tau} &= - \frac{d V(x)}{d x} \frac{p_2}{m_2 c} \\
 (b) \quad \frac{d x}{d \tau} &= \frac{p_1 p_2}{m_1 m_2 c} \\
 (c) \quad \frac{d p_2}{d \tau} &= - \frac{d V(x)}{d x} \frac{p_1}{m_1 c}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

La diferencia con las ecuaciones de movimiento elípticas, estriba únicamente, cuando introducimos la constante de la velocidad de la luz, a través de las definiciones $q = p_2 c$, $\mu = m_2 c^2$ el sistema (3.82) es de forma completamente simétrica a las variables $\{p_1, m\}$, $\{p_2, m_2\}$, mediante el uso de dos constantes de movimiento

$$C_1 = \frac{p_1^2}{2m_1} + V(x), \quad C_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} + V(x) \tag{3.83}$$

y con (3.82, a), (3.82, b) obtenemos

$$c \frac{d(p_1 p_2)}{d \tau} = -2 \frac{\partial}{\partial x} (2E - V^2) \tag{3.84}$$

que con $2E = C_1 + C_2$ También podemos introducir los conceptos de momentum y masa

$$P = \frac{p_1 p_2}{2c \sqrt{m_1 m_2}}, \quad M = \frac{1}{2} \sqrt{m_1 m_2} \tag{3.85}$$

con estas variables el sistema (3.82) se reduce a las ecuaciones de Newton

$$\frac{d p}{d t} = - \frac{\partial W(x)}{\partial x}, \quad \frac{d x}{d t} = \frac{P}{M} \tag{3.86}$$

el Hamiltoniano de (3.82) está dado por :

$$H = \frac{P^2}{2M} + W(x) \tag{3.87}$$

combinadas las relaciones

$$\begin{aligned}
 c^2 P^2 + W &= c^2 P^2 + 2EV - V^2 \\
 &= H_1 H_2 = E^2 - (mc^2)^2 \\
 &= \left(\frac{p_1^2}{2m_1} + V(x) \right) \left(\frac{p_2^2}{2m_2} + V(x) \right)
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

con $2mc^2 = H_2 - H_1$ escogemos la relación

$$c^2 P^2 + 2EV - V^2 = E^2 - (mc^2)^2 \tag{3.89}$$

la cuál puede ser escrita como sigue

$$(E - V)^2 - (mc^2)^2 = c^2 P^2 \tag{3.90}$$

Siendo esta la muy bien conocida relación de la energía, la masa y el momentum, es necesario hacer notar que en esta relación los valores de E y m son las constantes de movimiento del sistema (3.82).

Nuestra formulación contiene dos definiciones de la masa en reposo; m y M , por lo que para obtener la fórmula de Lorentz con dependencia de la energía con la velocidad se debe identificar m con M , por lo que tomamos

$$\frac{1}{2c^2} (H_2 - H_1) = m = M = \frac{1}{2} \sqrt{m_1 m_2} \tag{3.91}$$

ahora sugerimos el parámetro de evolución que será el tiempo propio de la partícula, y para el caso del movimiento libre escribimos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P}{M} = u \tag{3.92}$$

con las constantes de movimiento

$$C_1 = \frac{p_1^2}{2m_1}, \quad C_2 = \frac{p_2^2}{2m_2} \tag{3.93}$$

a partir de (3.88) se muestra que

$$\frac{1}{c^2} (H_2 H_1) = u^2 M^2 = P^2, \quad 2mc^2 = H_2 - H_1 \tag{3.94}$$

lo que nos da

$$(H_1 + mc^2)^2 = u^2 M^2 c^2 + (mc^2)^2 = E^2 \quad (3.95)$$

recordando la definición del tiempo propio

$$dt = d\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.96)$$

obtenemos

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad v = \frac{dx}{d\tau} \quad (3.97)$$

substituyendo (3.97) en (3.95), obtenemos la fórmula de Lorentz

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.98)$$

Ahora consideremos el problema inverso, que es obtener las ecuaciones elípticas mediante el uso de la relación (3.90), y para tal propósito reescribiremos (3.90) como se muestra a continuación

$$cP = \sqrt{(E - mc^2 - V(x))(E + mc^2 - V(x))} \quad (3.99)$$

y definimos

$$\frac{p_1}{\sqrt{2m_1}} = \sqrt{(E - mc^2 - V(x))}, \quad \frac{p_2}{\sqrt{2m_2}} = \sqrt{(E + mc^2 - V(x))} \quad (3.100)$$

$$P = \frac{p_1 p_2}{2c \sqrt{m_1 m_2}}, \quad M = \frac{1}{2} \sqrt{m_1 m_2} \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\sqrt{2m_1}} &= -\sqrt{2m_1} \frac{1}{\sqrt{(E - mc^2 - V(x))}} \frac{dx}{dt} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \\ \frac{p_2}{\sqrt{2m_2}} &= -\sqrt{2m_2} \frac{1}{\sqrt{(E + mc^2 - V(x))}} \frac{dx}{dt} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.102)$$

recordando las definiciones de p_1 , p_2 , obtenemos (3.82), para una partícula confinada en un potencial de oscilador armónico sobre una dimensión espacial

$$\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^2 = c^2 p^2 + (mc^2)^2 \quad (3.103)$$

dado que estamos considerando el caso de movimiento estacionario, es trivial obtener la solución de la ecuación clásica de movimiento $x = x(t)$, donde t se interpreta como el parámetro de tiempo propio de la partícula, en ese caso

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m} \quad (3.104)$$

mediante la determinación de $p = p(x)$ y a partir de (3.82) con sustitución en (3.83) encontramos la primera integral, que está descrita como

$$H = E - mc^2, \quad N = E + mc^2 \quad (3.105)$$

la integral se reduce a una integral elíptica

$$(t - t_0) \omega \sqrt{\frac{mN}{2}} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \quad (3.106)$$

donde hemos utilizado

$$y = x \sqrt{\frac{m\omega^2}{2H}}, \quad \omega = \sqrt{\frac{mN}{2}}, \quad k^2 = \frac{H}{N} \quad (3.107)$$

a partir de la integral (3.106) obtenemos la solución como una función elíptica de Jacobi

$$x = \sqrt{\frac{2(E - Mc^2)}{m\omega^2}} \operatorname{sn}(u, k) \quad (3.108)$$

sustituyendo esta solución dentro de (3.104) obtenemos el momentum como el producto de las funciones de Jacobi

$$x = \sqrt{(E^2 - (Mc^2)^2)} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k) \quad (3.109)$$

con lo que podemos hacer una observación esencial

La solución al movimiento relativista para el potencial del oscilador armónico es doblemente periódica, de hecho un análisis simple en las raíces (puntos de cambio) de la función muestra, que el intervalo de movimiento es de dos tipos

1 - En el intervalo $(-a, a)$ la partícula se mueve con un movimiento real.

2. En el intervalo $(-b, -a)$ y (a, b) el momentum de la partícula se convierte en un valor puramente imaginario, y es posible calcular los períodos de movimiento.

CAPITULO 4

Cinética Química.

4.1- Introducción

En la cinética química aparecen ecuaciones no lineales y multidimensionales, que son parecidas a las presentadas en los sistemas Lotka-Volterra (SLV), de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (EDO), que permiten describir algunos tipos de interacciones no lineales (comportamiento oscilatorio), en varios campos de la ciencia, Dubovik [32].

Históricamente, los SLV aparecieron al modelar las interacciones entre especies biológicas interconectivas, Volterra [33], Lotka [34], y al estudiar la cinética de las reacciones químicas, Lotka [34]. Posteriormente, SLV despertó gran interés en los problemas relacionados con el acoplamiento de ondas de la física del láser, Lamb [35]. El interés en SLV fue revivido en, Zakharov [36], donde se había establecido que en la estructura fina del espectro de ondas de Langmuir para el plasma y que fue descrito a través de un SV especial, al hacer que todos los coeficientes fueran iguales al valor de ± 1 .

Posteriormente L. Brening [37] probó que un conjunto grande de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), denominado como la generalización de ELV, tiene aplicación en varios campos de la física, la biología, la química y la economía, y puede ser reducido a ELV mediante transformaciones cuasi monomiales de sus variables. Korzukhin reportó lo anterior en el libro de Ebeling [38], y demostró el siguiente teorema:

Si

$$\frac{dC_i}{dt} = F_i(C_1, C_2, \dots, C_f), \quad i = 1, 2, \dots, f \quad (4.1)$$

donde C_i es la concentración del reactivo i ésimo y F_i es un polinomio (dependiente de las concentraciones de cada especie) arbitrario de potencias enteras no negativas, y que es posible transformarlo asintóticamente en uno más pequeño y equivalente a un sistema químico reaccionante

Entonces debido a este hecho son permitidas dentro de la cinética química las no linealidades arbitrarias

El sistema de reacción formal de Lotka, en Volterra [33] está descrito como un sistema de ecuaciones químicas con flechas



Este mecanismo "Lotka" muestra el comportamiento oscilatorio, Steinfeld [44], donde todas las etapas son irreversibles, y los pasos (1) y (2) son autocatalíticos. Consideramos que el sistema es abierto y que $[A]$ se mantiene igual a A_0 todo el tiempo. Esto puede ser

realizado, por ejemplo, en un reactor de flujo, donde la especie A es introducida y Z es retirada continuamente, manteniendo los intermediarios X, Y en un estado estable. Las ecuaciones cinéticas para estos intermediarios son

$$\begin{aligned}\dot{X} &= k_1 A_0 X - k_2 XY \\ \dot{Y} &= k_2 XY - k_3 Y\end{aligned}\quad (4.3)$$

una solución para el estado estable (subíndices 'ss') ocurre cuando $\dot{X} = \dot{Y} = 0$, o

$$\begin{aligned}k_2 Y_{ss} &= k_2 Y_0 = k_1 A_0 \\ k_2 X_{ss} &= k_2 X_0 = k_3\end{aligned}\quad (4.4)$$

Observar que, cuando [A] se mantiene a un valor constante A_0 , las concentraciones del estado estable dadas por las ecuaciones (4.4) son completamente independientes del tiempo.

Ahora veremos que pasa cuando las concentraciones son temporalmente desplazadas de sus valores en el estado estable. Con la finalidad de dar un tratamiento matemático al problema, introducimos variables de desplazamiento como en la cinética de relajación. En éste caso son

$$\begin{aligned}X &= x(t) + X_0 \\ Y &= y(t) + Y_0\end{aligned}\quad (4.5)$$

En términos de las variables de desplazamiento, las ecuaciones (4.3) se transforman

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1 A_0 (x + X_0) - k_2 (x + X_0)(y + Y_0) \\ \dot{y} &= k_2 (x + X_0)(y + Y_0) - k_3 (y + Y_0)\end{aligned}\quad (4.6)$$

realizamos los productos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1 A_0 x + k_1 A_0 X_0 - k_2 xy - k_2 x Y_0 - k_2 X_0 y - k_2 X_0 Y_0 \\ \dot{y} &= k_2 xy + k_2 x Y_0 + k_2 X_0 y + k_2 X_0 Y_0 - k_3 y - k_3 Y_0\end{aligned}\quad (4.7)$$

sustituyendo las ecuaciones (4.4) en (4.6)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_2 Y_0 x + k_2 Y_0 X_0 - k_2 xy - k_2 x Y_0 - k_2 X_0 y - k_2 X_0 Y_0 \\ \dot{y} &= k_2 xy + k_2 x Y_0 + k_2 X_0 y + k_2 X_0 Y_0 - k_2 X_0 y - k_2 X_0 Y_0\end{aligned}\quad (4.8)$$

reduciendo términos semejantes obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -k_2 X_0 y - k_2 xy \\ \dot{y} &= k_2 Y_0 x + k_2 xy\end{aligned}\quad (4.9)$$

Si los desplazamientos desde el estado estable son pequeños, podemos despreciar los términos xy en las ecuaciones (4.9) y obtener un conjunto simple de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden acopladas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -k_2 X_0 y \\ \dot{y} &= k_2 Y_0 x\end{aligned}\quad (4.10)$$

Si consideramos $\dot{x} = -ay$, $\dot{y} = bx$, en las ecuaciones (4.6), derivamos la primera ecuación con respecto al tiempo y obtenemos

$$\ddot{x} = -a\dot{y}\quad (4.11)$$

sustituimos la segunda ecuación en (4.11), y podemos ver que las ecuaciones (4.6) son equivalentes a una simple ecuación diferencial de segundo orden,

$$\ddot{x} = -a\dot{y} = -(ab)x\quad (4.12)$$

La solución de las ecuaciones (4.6) o (4.7) corresponde al modelo del oscilador armónico, donde la variación del desplazamiento con el tiempo es

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\quad (4.13)$$

Físicamente, esto significa que si el sistema se desplaza de su estado estable, lo suficiente para que retorne suavemente a sus valores previos de concentración de especies, entonces oscilará y los desplazamientos serán mayores en magnitud.

Aunque no se conocen sistemas químicos que sigan exactamente el mecanismo de Lotka dado en las reacciones (4.2) varios "osciladores químicos" han sido descubiertos. Uno de los que más extensamente se han estudiado es la reacción de Belousov-Zhabotinsky, que es la oxidación de ácido malónico por bromato, catalizada por iones de cerio.

Ahora consideremos un sistema de 3 componentes de EDO

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \alpha x_1 x_3 - \gamma x_1 x_2, \\ \dot{x}_2 &= \beta x_2 x_3 + \gamma x_1 x_2, \\ \dot{x}_3 &= -\beta x_1 x_3 - \alpha x_2 x_3.\end{aligned}\quad (4.14)$$

El sistema (4.14) es una forma especial del SV, el cual fue introducido en las referencias, Ebeling [38], Galperin [39] las soluciones y las investigaciones detalladas de (4.14) están dadas en las referencias Galperin [39], Galperin [40], Dubovik [41].

La peculiaridad de (4.14) es la de presentar una matriz simétrica de los coeficientes. Y como resultado, los términos de la diagonal son iguales a cero y es por esto que los términos proporcionales a $X_i X_i$ están ausentes. Por otro lado no hay términos lineales en el sistema (4.14). Esto normalmente significa que desde el punto de vista químico o de la cinéti-

ca formal, que el lado izquierdo de las ecuaciones de flechas apropiadas no pueden contener términos como $2X$, donde las variables X son especies químicas arbitrarias. Por ejemplo, la reacción $2S \rightarrow T + \dots$, establece en la correspondiente ecuación diferencial un término proporcional a C_s^2 , donde S y T son especies químicas y C_s es la concentración de S en la notación química común.

Podemos indicar que el SV es un subcaso de las ecuaciones del SLV, Dubovik [32].

$$\dot{x}_i = x_i y_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad \text{donde } y = Ax + b \quad (4.15)$$

y_i es la otra especie química presente y que reacciona en forma proporcional (siguiendo la ecuación de una recta) con la concentración de la especie química x_i , en realidad i toma valores hasta 3, porque para valores mayores la probabilidad de choque tiende a cero, por otro lado se cumplirá si existe una $\beta_i \neq 0$, tal que $\beta_i a_{ij} = -\beta_j a_{ji}$, pero el sistema (4.14) es un subcaso del tipo ($\beta_i = 1, i = 1, \dots, N; b = 0$). Por lo que, en su caso, el sistema (4.14) es el caso general del SV en interacción con matriz antisimétrica, Galperin [40], Dubovik [41].

Esperamos encontrar algún ejemplo de un sistema químico que este descrito con esas ecuaciones diferenciales.

4.2.- Formalismo de la Cinética

El punto de vista de la cinética formal es que en un proceso químico actual se cumpla lo siguiente :

- 1 - El sistema esté descrito por un conjunto de ecuaciones químicas elementales que representen al mecanismo de reacción, y formuladas con cierta aproximación a la realidad.
- 2 - Este sistema produzca un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Después de resolver estas ecuaciones, en muchas ocasiones será posible estudiar algunas de las propiedades del sistema y de la reacción química real

Por otro lado el camino inverso para tratar este problema es el de obtener un conjunto de ecuaciones químicas (mecanismo de reacción) formuladas a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales, por lo que las propiedades cinéticas de un proceso químico real estén descritas en términos de las soluciones de aquellas ecuaciones diferenciales

También podemos mencionar algo muy importante, y es que si no hay exactamente una reacción química para esas ecuaciones diferenciales puede ser debido, a que el fenómeno químico real sea descrito solo en forma aproximada, por el formalismo que actualmente es conocido para las reacciones químicas

Pero desde el punto de vista teórico es muy importante reconocer que un conjunto finito de ecuaciones químicas no es siempre suficiente para tener una descripción detallada del proceso químico en cuestión, debido a que una reacción química en realidad representa un conjunto de reacciones químicas elementales.

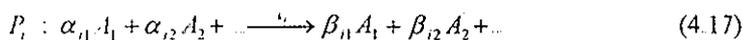
No podemos dar una regla regular para obtener una ecuación diferencial, pero si podemos enumerar todos los conjuntos de ecuaciones químicas mediante algún lenguaje formal (pudiendo ser alguno de los conjuntos de ecuaciones mencionados que pueden ser encontrados, pero posteriormente estos no conducirán hacia sus efectos o consecuencias).

a) - Definición de Clase

Se puede considerar la clase K para un sistema dinámico

$$D = (A, P_D, Q_D) \quad (4.16)$$

donde $A_D = \{A_1, A_2, \dots\}$ es un alfabeto: esto es la lista finita de sustancias químicas y las variables de los mismos nombres, $P_D = \{P_1, P_2, \dots\}$ es la lista finita de esquemas de reacciones químicas elementales de la forma



donde todas las $\alpha_j, \beta_j, \kappa_i$ son símbolos diferentes, y representan los coeficientes estequiométricos de reactivos, productos y de las constantes de velocidad de cada reacción química

$Q_D = \{Q_1, Q_2, \dots\}$ es la lista de EDO en la correspondencia uno a uno para cada variable del alfabeto A_D de la forma

$$Q_j : \frac{dA_j}{dt} = \sum_{P_i \in P_D} k_i (\beta_{ij} - \alpha_{ji}) \prod_{A_k \in A_D} A_k^{\alpha_{ki}} \quad (4.18)$$

Cualquier conjunto de ecuaciones químicas formales puede ser encontrado como un miembro de esa clase y viceversa : algunos conjuntos de ecuaciones diferenciales pueden ser encontrados ahí. Las ecuaciones son consideradas iguales a cualquier otra si ambas son idénticas después de sustituir algunos números o expresiones en lugar de los símbolos α_{ij} , β_{ij} , k_i . Ahora podemos formular cualquier problema concerniente a la existencia (o no existencia) de algunos esquemas, por lo que la predefinición de EDO las satisface o puede ser convertido en ellas.

b) - El Problema

El problema se suscita para la existencia de un sistema D en la clase K , tal que sus componentes Q_D tengan la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k_3 z x - k_1 x y \\ \dot{y} &= +k_1 x y - k_2 y z \\ \dot{z} &= +k_2 y z - k_3 z x \end{aligned} \quad (4.19)$$

c) - La Solución

Podemos representar el sistema anterior mediante ecuaciones de flechas, según el formalismo de la cinética química, y obtenemos el mecanismo de reacción



d) - Crecimiento y Desintegración

Es bien conocido el caso 1.

$$\begin{aligned} A_D &= \{x\}, \\ P_D &= \{P_x : \alpha x \xrightarrow{k} \beta x\}, \\ Q_D &= \{Q_x : \dot{x} = k(\beta - \alpha) x^\alpha\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

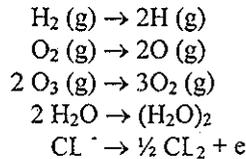
Si $k(\beta - \alpha) > 0$ corresponde al crecimiento y el opuesto a la desintegración. Una ecuación más general es

$$\dot{x} = f(y), \quad \text{con la existencia continua de } f(y) \neq 0 \quad (4.22)$$

es del mismo tipo debido a la conversión

$$x = e^{\int \frac{dy}{f(y)}} \quad y \quad k(\beta - \alpha) = 1 \quad (4.23)$$

Ejemplos:



Ahora tratemos el caso

$$\begin{aligned} A_D &= \{x\}, \\ P_D &= \left\{ \begin{array}{l} P_1 : \alpha_1 x \xrightarrow{k_1} \beta_1 x \\ \vdots \\ P_n : \alpha_n x \xrightarrow{k_n} \beta_n x \end{array} \right\} \\ Q_D &= \left\{ Q_x : \dot{x} = \sum_{i=1}^n k_i (\beta_i - \alpha_i) x^{\alpha_i} \right\} \end{aligned} \quad (4.24)$$

que es para algunos procesos simultáneos de crecimiento y desintegración

El sistema (4.23) puede tener algunos puntos críticos (donde la parte derecha de EDO equivale a 0), v.g. establece, puntos de equilibrio del tipo de un focus. No existen otro tipo de puntos críticos en el caso unidimensional.

Cualquier ecuación del tipo

$$\dot{y} = f(y) \quad (4.25)$$

cuyo conjunto finito de puntos críticos (donde $f(y) = 0$) es igual al conjunto de ceros

$$\sum_{i=1}^n k_i (\beta_i - \alpha_i) x^{\alpha_i} = 0 \quad (4.26)$$

Es del mismo tipo que (4.44) dado que la conversión satisface la ecuación

$$\frac{dx}{\sum_{i=1}^n k_i (\beta_i - \alpha_i) x^{\alpha_i}} = \frac{dy}{f(y)} \quad (4.27)$$

e) - El Caso de dos Substancias

Tratemos este caso:

$$\begin{aligned}
 A_D &= \{x, y\}, \\
 P_D &= \{P : a_1 x + a_2 y \xrightarrow{k} b_1 x + b_2 y\} \\
 D_D &= \left\{ \begin{array}{l} Q_x : \dot{x} = k(b_1 - a_1) x^{a_1} y^{a_2} \\ Q_y : \dot{y} = k(b_2 - a_2) x^{a_1} y^{a_2} \end{array} \right\}
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Es fácil ver que las curvas integrales de aquellas EDO son

$$y = \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_1} + C, \tag{4.29}$$

donde C es una constante arbitraria.

El conjunto de puntos críticos de EDO incluyen la unión de los ejes de coordenadas ($x = 0, o y = 0$)

f) - Ecuaciones Diferenciales Lineales

Ahora consideremos como una subclase de la clase de sistemas dinámicos, aquella que tiene todas las α_{ij} en (4.8) iguales a 0 o 1 únicamente, pero con solo un coeficiente α_{ij} igual a 1 para cada ecuación P_i .

Sabemos que el caso de las EDO lineales es muy bien conocido. Donde todos los puntos críticos son subespacios lineales.

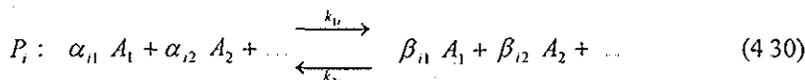
g) - Ecuaciones Diferenciales Cuadráticas

Consideremos como una subclase de sistemas dinámicos, aquellos donde todos los α_{ij} en (4.8) son iguales únicamente a 0 o a 1, pero que no en más de dos coeficientes, α_{ij} sea igual a 1 para cada ecuación P_i .

Esto es que para el caso de los sistemas Lotka-Volterra (SLV). La razón de restricción es que el conocimiento correcto del proceso cinético tiene ecuaciones químicas, el cual puede contener una, dos o tres sustancias en el lado izquierdo. En otros casos aquellas ecuaciones deben estar detalladas con la incorporación de sustancias intermedias

4.3.- Ejemplos

Como se mostró, las reacciones formales están usualmente escritas en la forma



donde ambas flechas tienen las $k_1, k_2 > 0$.

Esta es una restricción a la clase original de los sistemas dinámicos y el problema definido puede no tener solución.

En un contexto cinético formal esto significa que ambas reacciones están interpretadas como reversibles y cuasiestacionarias. Realmente a cada instante dado ocurren ambas reacciones, la directa y la reversible. Con esto la diferencia mencionada entre las reacciones, acerca de quien gobierna la dirección del curso de reacción antes de alcanzar el punto de equilibrio ya ha sido superada. Ahora sugerimos la existencia de alguna correspondencia entre las ecuaciones (4.17) y las reacciones químicas reales. En ese caso se puede decir que, aquellas reacciones pueden ser descritas únicamente en el límite de $k_2 \rightarrow 0$ {ver ec. (4.30)}. En otras palabras, estas deberían ser asintóticamente no reversibles.

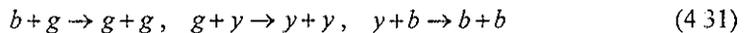
Física del quark

En el caso de la física del quark también puede ser aplicado el esquema de razonamiento anterior. Consideremos un quark compuesto de tres sustancias con igual número de quarks con color, esto es azul (b), verde (g) y amarillo (y), que están confinados en una bolsa cerrada. A igual proporción de colores el sistema considerado como un agujero podemos asumir que sea descolorido.

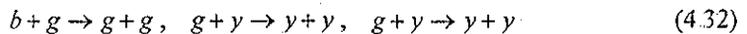
Por lo que llamaremos a las colisiones de quarks del mismo color como colisiones elásticas, y a las colisiones de quarks de diferente color como inelásticas. Entonces, se puede definir una regla para la transferencia de colores:

El quark azul cambia su color a verde después de una colisión con uno verde.

El quark verde cambia a amarillo después de una colisión con uno amarillo, el quark amarillo se convierte en azul después de una colisión con uno azul, por lo que tenemos



Tomando esta regla de transmisión de colores, cuando únicamente hay 3 quarks en la bolsa, cualquier selección aleatoria para que la primera colisión que tenga lugar inevitablemente conducirá a un proceso en cadena casual resultando en un estado final coloreado. Claramente,



El cual corresponde a la siguiente cadena de cambios en los estados internos dentro de la bolsa: $bgy \rightarrow ggy \rightarrow gyy \rightarrow yyy$. Entonces, el último quark en entrar al "juego" es el que "gana", debido a su antagonismo está perdido en el primer "combate".

Cuando en nuestro "hadron" el número de quarks de cada color es "muy grande" (el que corresponda a la representación corriente de quarks en la teoría de quarks) y ocurran las tres reacciones inelásticas con la misma intensidad, entonces este objeto puede ser considerado como descolorido durante los períodos de tiempo que sean mayores que el tiempo medio de colisión. Suponer ahora que, dado que el objeto es absolutamente estable, podemos fijar las fluctuaciones en su color mediante o por medio de la medición del pintado aleatorio para el decaimiento de productos estadísticos.

Entonces podemos, sobre la misma base, construir un modelo sin ninguna colisión elástica o inelástica dentro de la bolsa. En otras palabras, si las reacciones dentro de un sistema compuesto forman un ciclo cerrado, y su equilibrio estadístico no puede ser distinguido a partir de la ausencia de interacciones macroscópicas dinámicas.

La mayor parte de las soluciones en las ecuaciones (4.14) describen el equilibrio estadístico en un sistema de 3 fases aisladas. Es por esto que no podemos tomar las condiciones iniciales con una de las fases ausentes en orden de alcanzar una solución en "equilibrio", y el sistema, en términos de "quarks", e inevitablemente adquiriremos uno de los dos colores que permanecen.

Deberíamos resaltar que dado que las soluciones para el sistema poseídas, mediante las siguientes notables propiedades. Llamada ésta como la representación de un punto en un triángulo de fases dentro de cualquiera de sus vértices, cuando en cualesquiera 2 de las tres fases desaparecen (esto corresponde a la coloración) Este estado ocurre en un periodo de tiempo infinito.

En la física de los quarks reales tal situación es imposible sin una condición adicional.

La exclusión del principio de fermiones que prohíbe la presencia de 2 quarks con el mismo color (y el mismo orden en números cuánticos) dentro del mismo campo (un hadron dado), v.g. en el campo de acción de su potencial medio generalizado. Por lo que, el punto esencial en nuestro contexto es que la teoría de campo cuántico para el quark-gluon desprecia las interacciones quark-quark en general a pequeñas distancias. El cual es nombrado la libertad asintótica ultravioleta del quark.

Ahora presentamos algunos sistemas de EDO conocidos, y verificamos si satisfacen el formalismo de Nambu.

4.3 - EJEMPLOS

Sistema Lotka

Con mecanismo de reacción, Steinfeld [44]



ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{X} &= k_1 A_0 X - k_2 XY \\ \dot{Y} &= k_2 XY - k_3 Y \end{aligned} \quad (4.34)$$

definimos el cambio de variable $d\rho = k_1 k_2 k_3 A_0 XY dt$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\rho} &= \frac{k_1 A_0 X}{k_1 k_2 k_3 A_0 XY} - \frac{k_2 XY}{k_1 k_2 k_3 A_0 XY} \\ \frac{dY}{d\rho} &= \frac{k_2 XY}{k_1 k_2 k_3 A_0 XY} - \frac{k_3 Y}{k_1 k_2 k_3 A_0 XY} \end{aligned} \quad (4.35)$$

simplificando

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\rho} &= \frac{1}{k_2 k_3 Y} - \frac{1}{k_1 k_3 A_0} \\ \frac{dY}{d\rho} &= \frac{1}{k_1 k_3 A_0} - \frac{1}{k_1 k_2 A_0 X} \end{aligned} \quad (4.36)$$

separamos variables

$$\begin{aligned} \frac{dX}{\frac{1}{k_2 k_3 Y} - \frac{1}{k_1 k_3 A_0}} &= d\rho \\ \frac{dY}{\frac{1}{k_1 k_3 A_0} - \frac{1}{k_1 k_2 A_0 X}} &= d\rho \end{aligned} \quad (4.37)$$

igualando términos semejantes, reordenando e integrando

$$\int \left(\frac{1}{k_1 k_3 A_0} - \frac{1}{k_1 k_2 A_0 X} \right) dX = \int \left(\frac{1}{k_2 k_3 Y} - \frac{1}{k_1 k_3 A_0} \right) dY + H \quad (4.38)$$

despejamos la constante de integración

$$H = \frac{X}{k_1 k_3 A_0} - \frac{\ln X}{k_1 k_2 A_0} - \frac{\ln Y}{k_2 k_3} + \frac{Y}{k_1 k_3 A_0} \quad (4.39)$$

de acuerdo con el formalismo de Hamilton y considerando el cambio de variable efectuado, expresamos las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -\rho \frac{\partial H}{\partial Y} \\ \dot{Y} &= \rho \frac{\partial H}{\partial X} \end{aligned} \quad (4.40)$$

realizando las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \frac{\rho}{k_2 k_3 Y} - \frac{\rho}{k_1 k_3 A_0} \\ \dot{Y} &= \frac{\rho}{k_1 k_3 A_0} - \frac{\rho}{k_1 k_2 A_0 X} \end{aligned} \quad (4.41)$$

sustituyendo el valor de $\rho = k_1 k_2 k_3 A_0 XY$ obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{X} &= k_1 A_0 X - k_2 XY \\ \dot{Y} &= k_2 XY - k_3 Y \end{aligned} \quad (4.42)$$

que son las ecuaciones de movimiento originalmente planteadas, por lo cual éste sistema satisface el formalismo de Nambu

Sistema Lotka (reducido)

Consideremos el sistema Lotka cuando hay un paso determinante, con mecanismo de reacción, Steinfeld [44]



Como ya se expuso anteriormente en ec (4.8) si los desplazamientos desde el estado estable son pequeños, obtenemos un conjunto simple de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden acopladas, expresadas en términos de k_2

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_2 X_0 y \\ \dot{y} &= k_2 Y_0 x \end{aligned} \quad (4.44)$$

Como el sistema consta de dos ecuaciones diferenciales, existirá una constante de movimiento, hacemos la separación de variables

$$dx = -k_2 X_0 y dt, \quad dy = k_2 Y_0 x dt \quad (4.45)$$

despejamos la variable independiente en cada ecuación e igualamos términos

$$\frac{dx}{-k_2 X_0 y} = \frac{dy}{k_2 Y_0 x} \quad (4.46)$$

agrupamos variables e integramos

$$\int k_2 Y_0 x dx = - \int k_2 X_0 y dy + H \quad (4.47)$$

Despejamos la constante de integración

$$H = \frac{k_2 Y_0 x^2}{2} + \frac{k_2 X_0 y^2}{2} \quad (4.48)$$

Según el formalismo de Hamilton la dinámica del sistema está determinada por las ecuaciones

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (4.49)$$

efectuamos las derivadas parciales y obtenemos las ecuaciones de movimiento del sistema

$$\dot{x} = -k_2 X_0 y, \quad \dot{y} = k_2 Y_0 x \quad (4.50)$$

Las ecuaciones obtenidas son idénticas a la ley de velocidad propuesta originalmente, con lo cual vemos que éste sistema satisface el formalismo de Nambu.

ESTA TESIS NO SALI
DE LA BIBLIOTECA

Sistema Nahm

Este sistema consta de las ecuaciones diferenciales, Takhtajan [8]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= yz \\ \dot{y} &= zx \\ \dot{z} &= xy\end{aligned}\tag{4.51}$$

consideramos la tercera ecuación diferencial, y despejamos sus variables independientes

$$\begin{aligned}\dot{z} &= xy \\ x &= \frac{\dot{z}}{y}, \quad y = \frac{\dot{z}}{x}\end{aligned}\tag{4.52}$$

sustituimos en las dos primeras ecuaciones diferenciales, integramos y despejamos las constantes de integración

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\dot{z}z}{x}, & \dot{y} &= \frac{z\dot{z}}{y} \\ \int dx &= \int zdz + H, & \int ydy &= \int zdz + N \\ H &= \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2}, & N &= \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}\end{aligned}\tag{4.53}$$

ahora aplicamos el formalismo de Nambu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial y} = yz \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial z} = zx \\ \dot{z} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} = xy\end{aligned}\tag{4.54}$$

obtenemos el conjunto de ecuaciones de movimiento, inicialmente planteadas

$$\begin{aligned}\dot{x} &= yz \\ \dot{y} &= zx \\ \dot{z} &= xy\end{aligned}\tag{4.55}$$

por lo tanto éste sistema satisface el formalismo de Nambu

Sistema Volterra

Mecanismo de reacción, Dubovik [32]



con ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha zx - \gamma xy \\ \dot{y} &= -\beta yz + \gamma xy \\ \dot{z} &= \beta yz - \alpha zx \end{aligned} \quad (4.57)$$

Verificamos si este sistema satisface el formalismo de Nambu, considerando que un sistema con n ecuaciones diferenciales ordinarias dentro del formalismo de Nambu se resuelve para $n-1$ constantes de integración (constantes de movimiento), calculamos las dos constantes de movimiento de este sistema.

hacemos el cambio de variable $d\rho = xyzdt$ y obtenemos:

$$\begin{aligned} dx &= \left(\frac{\alpha}{y} - \frac{\gamma}{z} \right) d\rho \\ dy &= \left(\frac{\beta}{x} - \frac{\gamma}{z} \right) d\rho \\ dz &= \left(-\frac{\beta}{x} - \frac{\alpha}{y} \right) d\rho \end{aligned} \quad (4.58)$$

sumamos las tres ecuaciones, integramos y obtenemos la primera constante de movimiento

$$H = x + y + z \quad (4.59)$$

ahora calculamos la segunda constante de integración, dividiendo cada ecuación entre su variable dependiente del tiempo y multiplicando por el coeficiente estequiométrico que no aparece en la ecuación

$$\begin{aligned}
 \beta \frac{dx}{x} &= \left(\frac{\alpha\beta}{xy} - \frac{\beta\gamma}{zx} \right) d\rho \\
 -\alpha \frac{dy}{y} &= \left(-\frac{\alpha\beta}{xy} - \frac{\gamma\alpha}{yz} \right) d\rho \\
 -\gamma \frac{dz}{z} &= \left(\frac{\beta\gamma}{zx} + \frac{\gamma\alpha}{yz} \right) d\rho
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

sumamos las tres ecuaciones, integramos y obtenemos la segunda constante de movimiento

$$N = \beta \ln x - \alpha \ln y - \gamma \ln z \tag{4.61}$$

cabe resaltar el hecho de que ya calculadas las constantes de integración (constantes de movimiento) podemos describir completamente la dinámica del sistema, de acuerdo con el formalismo de Nambu. La fórmula de Nambu que representa las ecuaciones de dinámica para este sistema es

$$\dot{p}_i = \sum_{kl} \epsilon_{ikl} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial N}{\partial p_l} \tag{4.62}$$

desarrollándola para las tres especies y restituyendo el cambio de variable efectuado obtenemos

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \rho \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial y} \right) \\
 \dot{y} &= \rho \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial z} \right) \\
 \dot{z} &= \rho \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

efectuando las derivadas parciales y sustituyendo el cambio de variable efectuado, obtenemos las ecuaciones diferenciales originales del sistema químico reaccionante

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \alpha x - \gamma xy \\
 \dot{y} &= \beta yz + \gamma xy \\
 \dot{z} &= -\beta yz - \alpha xz
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

que corresponden al sistema de Volterra presentado.

Sistema de 3 Vórtices

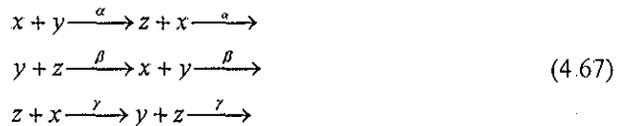
El sistema presenta el conjunto de ecuaciones de movimiento, Makhaldiani [43]

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x (y - z) \\ \dot{y} &= \beta y (z - x) \\ \dot{z} &= \gamma z (x - y)\end{aligned}\quad (4.65)$$

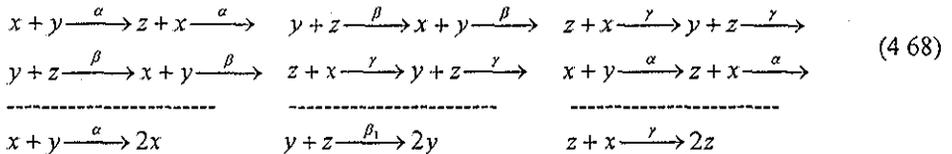
elaborando los productos obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha xy - \alpha zx \\ \dot{y} &= \beta yz - \beta xy \\ \dot{z} &= \gamma zx - \gamma yz\end{aligned}\quad (4.66)$$

que en la representación de reacciones químicas es



combinando las ecuaciones y cancelando términos semejantes



obtenemos el mecanismo de reacción



Ahora procedemos a aplicar el formalismo de Nambu, hacemos un cambio de variable, donde $\rho = \alpha\beta\gamma xyz$, y las ecuaciones de movimiento se transforman en

Haciendo la separación de variables e integrando obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\rho} &= \frac{\alpha x(y-z)}{\rho} = \alpha x \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma x z} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma x y} \right) \\ \frac{dy}{d\rho} &= \frac{\beta y(z-x)}{\rho} = \beta y \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma x y} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma y z} \right) \\ \frac{dz}{d\rho} &= \frac{\gamma z(x-y)}{\rho} = \gamma z \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma y z} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma z x} \right)\end{aligned}\quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\alpha} &= \int x \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma x z} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma x y} \right) d\rho + h_1, & \int \frac{dx}{\alpha x} &= \int \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma x z} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma x y} \right) d\rho + n_1 \\ \int \frac{dy}{\beta} &= \int y \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma x y} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma y z} \right) d\rho + h_2, & \int \frac{dy}{\beta y} &= \int \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma x y} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma y z} \right) d\rho + n_2 \\ \int \frac{dz}{\gamma} &= \int z \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma y z} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma z x} \right) d\rho + h_3, & \int \frac{dz}{\gamma z} &= \int \left(\frac{1}{\alpha \beta \gamma y z} - \frac{1}{\alpha \beta \gamma z x} \right) d\rho + n_3\end{aligned}\quad (4.71)$$

sumamos las ecuaciones obtenemos las constantes de movimiento del sistema

$$\begin{aligned}H &= \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \\ N &= \frac{\ln x}{\alpha} + \frac{\ln y}{\beta} + \frac{\ln z}{\gamma}\end{aligned}\quad (4.72)$$

Aplicamos el formalismo de Nambu

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \rho \left(\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial y} \right) = \rho \left(\frac{1}{\beta \gamma z} - \frac{1}{\gamma \beta y} \right) = \alpha xy - \alpha xz \\ \dot{y} &= \rho \left(\frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial z} \right) = \rho \left(\frac{1}{\gamma \alpha x} - \frac{1}{\alpha \gamma z} \right) = \beta yz - \beta xy \\ \dot{z} &= \rho \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N}{\partial x} \right) = \rho \left(\frac{1}{\alpha \beta y} - \frac{1}{\beta \alpha x} \right) = \gamma zx - \gamma yz\end{aligned}\quad (4.73)$$

que es el sistema de ecuaciones de movimiento planteadas por el sistema de 3 vórtices

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x(y-z) \\ \dot{y} &= \beta y(z-x) \\ \dot{z} &= \gamma z(x-y)\end{aligned}\quad (4.74)$$

Reacciones unimoleculares

Acorde con el formalismo de la cinética química, consideremos la secuencia de reacción



las ecuaciones de velocidad de cada especie para este sistema reaccionante son

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -k p \\ \dot{x} &= k p \end{aligned} \quad (4.76)$$

multiplicamos ambas ecuaciones entre si

$$k p \dot{p} = -k p \dot{x} \quad (4.77)$$

cancelamos términos semejantes y obtenemos la ecuación diferencial

$$dp = -dx \quad (4.78)$$

definimos los límites de integración

$$\begin{aligned} p &\leq p \leq 0 \\ 0 &\leq x \leq x \end{aligned} \quad (4.79)$$

integramos

$$\int_p^0 dp = - \int_0^x dx \quad (4.80)$$

y obtenemos

$$p = x \quad (4.81)$$

con lo cual podemos expresar las ecuaciones (4.81) como

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -k x \\ \dot{x} &= k p \end{aligned} \quad (4.82)$$

ahora resolveremos el sistema de ecuaciones (4.82), primero multiplicamos ambas ecuaciones entre si

$$k p \dot{p} = -k x \dot{x} \quad (4.83)$$

multiplicamos la igualdad por dt , e integramos

$$\int k p dp = - \int k x dx + H \quad (4.84)$$

Despejamos la constante de integración

$$H = \frac{k}{2} p^2 + \frac{k}{2} x^2 \quad (4.85)$$

Ahora presentamos el formalismo de Hamilton en su forma general

$$\dot{q}^a = \varepsilon^{ab} \frac{\partial H}{\partial q^b} \quad (4.86)$$

lo aplicamos a las variables del problema

$$\begin{aligned} \dot{p} &= - \frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \end{aligned} \quad (4.87)$$

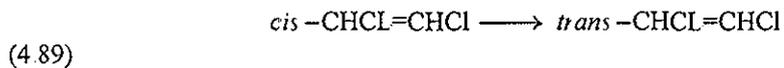
efectuamos la derivas parciales y obtenemos las ecuaciones de movimiento planteadas por el mecanismo de reacción

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -k p \\ \dot{x} &= k p \end{aligned} \quad (4.88)$$

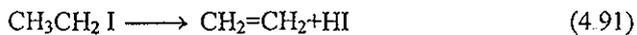
por lo tanto este sistema al cumplir con el formalismo de Hamilton satisface el formalismo de Nambu.

Ejemplos de reacciones unimoleculares son:

La isomerización unimolecular

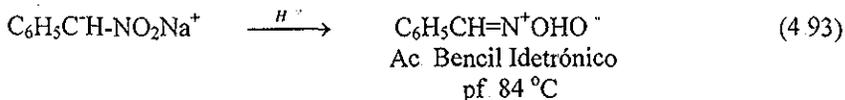
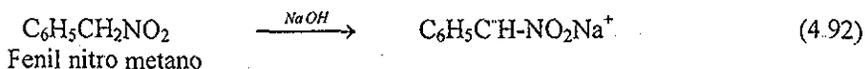


La descomposición unimolecular

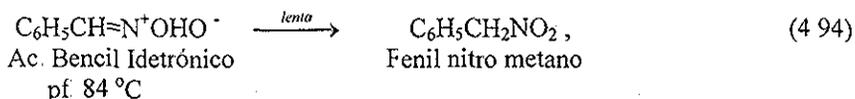


Ejemplos de reacciones químicas cíclicas

Formación de compuestos nitroalifáticos, consideremos la reacción del ácido Bencil idetrónico, Alliger [45]

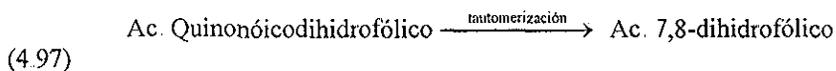
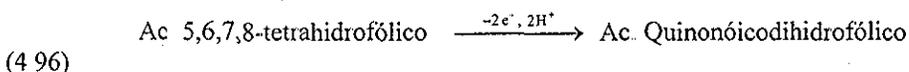


etapa de tautomerización inversa



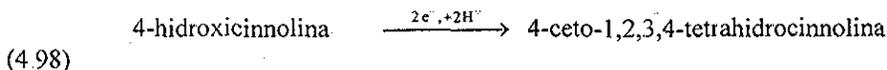
Electrólisis de compuestos heterocíclicos

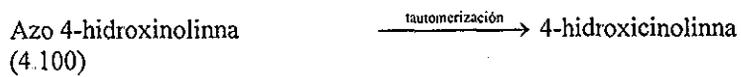
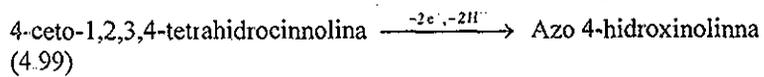
Reacciones de Purina y Pteridina



Estas reacciones se utilizan como mediadores en reacciones de transferencia electrónica de moléculas biológicas, Lund [46].

Derivados de Cinnolina, Lund [46]





CONCLUSIONES

Se han generalizado las ecuaciones de movimiento de Newton, en el espacio de fases con mas de dos dimensiones, las que han sido denominadas como ecuaciones elípticas de movimiento, donde la superestructura de éstas ecuaciones está dada por el formalismo de Nambu, el cual es una generalización del formalismo de Hamilton mediante las ecuaciones elípticas de Jacobi para el espacio de fases con n -dimensiones, también se describió la extensión de ésta mecánica para el modelo del oscilador.

Para esta nueva mecánica es posible el introducir los conceptos de energía, y momentum; donde se observó que la energía total para el movimiento estacionario es proporcional a el producto de las funciones de Hamilton-Nambu, y de esta manera se ha establecido la correspondencia entre las ecuaciones Newtonianas y las elípticas, formuladas con los teoremas 1-1 y 1-2, presentados en el capítulo 1.

Se aprecian conexiones entre el formalismo de Nambu y los sistemas dinámicos reales; como la dinámica relativista, dado que se presentó una correspondencia entre las ecuaciones elípticas y la expresión relativista de la energía, masa y momentum, y el problema de la cuantización al desarrollar la formulación presentada para la mecánica en el espacio de fases con n -dimensiones y a la investigación realizada con los teoremas 1-1 y 1-2.

Se demostró que los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, de: Lotka, Volterra, Nham. 3-Vórtices, admiten la formulación de Nambu.

<u>Sistema</u>	<u>Ecuaciones Diferenciales</u>	<u>Constantes de movimiento</u>	<u>Mecanismo de reacción</u>
Lotka	$\begin{aligned} \dot{X} &= k_1 A_0 X - k_2 XY \\ \dot{Y} &= k_2 XY - k_3 Y \end{aligned}$	$H = \frac{X}{k_1 k_3 A_0} - \frac{\ln X}{k_1 k_2 A_0} - \frac{\ln Y}{k_2 k_3} + \frac{Y}{k_1 k_3 A_0}$	$\begin{aligned} A + X &\xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y &\xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y &\xrightarrow{k_3} Z \end{aligned}$
Lotka simple	$\begin{aligned} \dot{x} &= -k_2 X_0 x y \\ \dot{y} &= k_2 Y_0 x \end{aligned}$	$H = \frac{k_2 Y_0 x^2}{2} + \frac{k_2 X_0 y^2}{2}$	$\begin{aligned} A + X &\xrightarrow{k_1} 2X \\ X + Y &\xrightarrow{k_2} 2Y \\ Y &\xrightarrow{k_3} Z \end{aligned}$
Nham	$\begin{aligned} \dot{x} &= yz \\ \dot{y} &= zx \\ \dot{z} &= xy \end{aligned}$	$\begin{aligned} H &= \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2} \\ N &= \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} \end{aligned}$	$\begin{aligned} y + z &\rightarrow x \\ z + x &\rightarrow y \\ x + y &\rightarrow z \end{aligned}$

Volterra	$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \gamma xy \\ \dot{y} &= \beta y + \gamma xy \\ \dot{z} &= -\beta yz - \alpha xz\end{aligned}$	$\begin{aligned}H &= x + y + z \\ N &= \beta \ln x - \alpha \ln y - \gamma \ln z\end{aligned}$	$\begin{aligned}z + x &\xrightarrow{\alpha} 2x \\ x + y &\xrightarrow{\gamma} 2y \\ y + z &\xrightarrow{\beta} 2z\end{aligned}$
3-Vórtices	$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x(y - z) \\ \dot{y} &= \beta y(z - x) \\ \dot{z} &= \gamma z(x - y)\end{aligned}$	$\begin{aligned}H &= \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \\ N &= \frac{\ln x}{\alpha} + \frac{\ln y}{\beta} + \frac{\ln z}{\gamma}\end{aligned}$	$\begin{aligned}x + y &\xrightarrow{\alpha} 2x \\ y + z &\xrightarrow{\beta} 2y \\ z + x &\xrightarrow{\gamma} 2z\end{aligned}$
unimolecular	$\begin{aligned}\dot{p} &= -kp \\ \dot{x} &= kx\end{aligned}$	$H = \frac{kp^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$	$p \xrightarrow{k} x$

Vemos claramente la similitud que tienen todos los sistemas con los sistemas Lotka-Volterra, tanto en las ecuaciones de movimiento (ley de velocidad) como en el mecanismo de reacción.

Con lo cual apreciamos que los SLV representan diversos aspectos de la cinética química. En síntesis se ha demostrado que el sistema Lotka-Volterra de ecuaciones diferenciales ordinarias, puede representar un sistema cinético-químico formal escrito en el formalismo usual de ecuaciones de flechas. Sobre la suposición de la existencia de alguna correspondencia entre las ecuaciones del SV y las reacciones químicas reales, podemos decir que esas reacciones pueden ser descritas únicamente en el límite de $k_2 \rightarrow 0$ (constante de velocidad para la reacción reversible, ver ec (4 30)), lo que significa que deben ser asintóticamente no reversibles.

El sistema Volterra, tiene peculiaridad de que la matriz de los coeficientes estequiométricos es simétrica. Por ello pensamos que sería muy promisorio hacer la clasificación completa de las soluciones a las ecuaciones SV, e investigar si satisfacen el formalismo de Nambu.

Podemos concluir que las ecuaciones de la cinética química pertenecen a la categoría de ecuaciones de evolución (descripción empírica de un cierto fenómeno), y en esta tesis transformamos algunas ecuaciones de cinética en ecuaciones de dinámica, para lo cual se requiere utilizar un formalismo más general que el de Hamilton, tal es el caso del formalismo de Nambu, y gracias a éste formalismo podemos reformular como ecuaciones de dinámica los sistemas de; Lotka, Volterra, Nahm, 3-Vórtices, etc.

El uso de un formalismo apropiado en la cinética química, aportaría una perspectiva teórica para desarrollar mejores conocimientos, y constituir así una ciencia formal.

Finalmente pensamos que es muy importante seguir investigando el formalismo de la mecánica de Nambu, y su relación con los mecanismos de las reacciones químicas, para enriquecer el formalismo de cinética química.

Agradecimientos:

Para el Centro de Investigaciones Teóricas, de la Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán UNAM.

Así como para el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT.

REFERENCIAS

- 1 - Arnold, V : *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. GITM 60. New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1978
- 2 - Nambu, Y : *Generalized Hamiltonian mechanics*, *Phys. Rev. D7*, 2405-2412 (1973).
- 3.- Bayen. F. Flato, M.: *Remarks concerning Nambu's generalized mechanics* *Phys. Rev D11*. 3049-3053 (1975).
- 4.- Mukunda, N., Sudarshan, E.: *Relation between Nambu and Hamiltonian mechanics* *Phys. Rev. D13*, 2846-2850 (1976)
- 5.- Hirayama, M : *Realization of Nambu mechanics: A particle interacting with SU(2) monopole.* *Phys Rev. D16*, 530-532 (1977)
- 6.- Flato, M., Fronsdal C.: *Private communication*, 1992.
- 7.- Chakravarty. S, Ablowitz, M., Clarkson, P : *Reductions of the self-dual Yang-Mills fields and classical systems* *Phys Rev. Lett.* 65, 1085-1087(1990).
- 8.- Takhtajan L : *On Foundation of the Generalized Nambu Mechanics*, *Commun Math Phys* 160 295-315 (1994).
- 9.- Chakravarty, S.: *private communication*, 1992.
- 10.- Fréchet, M : *Sur une extension de la méthode de Jacobi-Hamilton.* *Annali di Matematica. ser. III*, XI, 187-199 (1905).
- 11 - Volterra, M : *Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni.* *Rend Accademia dei Lincei XI* 127-129 (1890).
- 12 - Connes, A : *Non-commutative differential geometry.* *Publ Math I E H.S.* 62. 257-360 (1986).
- 13 - Bayen, F , Flato M , Fronsdal, C , Lichnerowicz, A , Sternheimer, D : *Deformation theory and quantization I-II* *Ann Phys* 110, 67-110, 111-151 (1978).
- 14 - Lawrence, R.J : *Algebras and triangle relations.* *Harvard University preprint* 1991.
- 15.- Weil, A : *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires* *Acta. Math.* 111, 143-211 (1964).
- 16 - Flato M , A. Lichnerovicz, D. Sternheimer, *J Math Phys.* 17, (1976) 1754
- 17 - Estabrook F B , *Phys Rev.* D8, (1973) 2740.
- 18.- Fecko M., *J Math Phys.* 33 (1992), 926.
- 19.- Pandit S. A and A D Gangal, *J Phys. A: Math Gen.* 31 (1998), 2899.
- 20 - Takhtajan L., *Comm Math Phys.* 160, 295.
- 21 - Ruggeri G J, *Int. J. Theor. Phys.*, 12 (1975) 287; *Lett , Nuovo Cimento*, 17, (1976) 169; *Acta Cient. Venez.* 32(1891)203.
- 22 - Sucre M.G , A.J. Kalnay, *Int. J. Ther. Phys.* , 12 (1975) 149
- 23.- Yamaleev R M. , *Generalized Newtonian Equations of Motion*, *Annals of Physics* 277, 1-18 (1999).
- 24 - Yamaleev R. M. , *Relativistic Equations of Motion within Nambu's formalism of dynamics*, *Annals of Physics* 285, 2, pp. 1-20 (2000)
- 25 - Yamaleev R. M. , *From Generalized Clifford Algebras to Nambu Formalism of Dynamics.* *Advances in applied Clifford Algebras*, Vol 10, No 2, p 1 (2000)
- 26.- Yamaleev R M. , *JINR Comm.* P2-88-871, Dubna (1988).
- 27.- Yamaleev R. M. , in "Clifford Algebras and Their Application in Mathematical Physics" (V Dietrich et al , Eds.), pp. 433-441, Kluwer Academic, Dordrecht/Norwall, MA, 1998.

- 28.- Yamaleev R. M. , Semiclassical Quantization of elliptic Equations of Motion, Comm. Joint Inst. Nucl. Res. Dubna, P2-94-109 (1994); E2-249 (1994), P2-95-192 (1995); P2-97-110 (1997).
- 29.- Yamaleev R. M. , in "Proceedings, Conference on Dynamical System, and Chaos, Iokio, May 23-24, 1994" (Y. Aizowa, Saito, and K. Shirawa, Eds) Vol 2, p. 414, World Scientific, Singapore, 1995.
- 30.- Yamaleev R. M. , Abstracts of the conference on Dynamical Systems and Chaos, Iokyo P2-94-109, Dubna, 1994. May 23-24, 1994.
- 31 - Akhiezer N I, Elements of the theory of elliptic funtions M., "Nauka", Moscow, 1970.
- 32.- Dubovik V. M., Galperin A.G., Richvitsky V S., The correspondence between Chemical Schemes and Dynamical Lotka-Volterra Systems comm of JINR , Dubna, dec 31, 1997.
- 33 - Volterra V , Lecons sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie. Gauthier Villars, Paris, 1931.
- 34.- Lotka A.J. Elements of mathematical biology, N.Y. 1956.
- 35.- Lamb W. E., Theory of an optical maser. Phys.Rev. A 134, p 1441. 1964.
- 36.- Zakharov V. E , Musher S L , and Rubenchik A.M., JETP Lett. 19, 151, (1974).
- 37 - Brening L. , Complete factorization and analytic solutios of generalized Lotka-Volterra equations, Phys. Lett A 133,378(1988)
- 38.- Ebeling W. , "Eine Einfurung in die Theorie dissipativer Structuren", BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1976
- 39 - Galperin A. G., Dubovik V.M., Richvitsky. V S , Nonlinear Dynamical model of evolution if a 3-component system conserving total number of objects, Int Conf. CMCP96, JINR, D5 11-96-300, p69. Dubna 1996.
- 40 - Galperin A. G., Dubovik V M., Richvitsky V.S., 1997, P4-97-340 (preprint JINR. Dubna).
- 41 - Dubovik V. M., Galperin A., Richvitsky V., and Slepnyov S., The conditions of existence of first integrals and Hamiltonian structures of Lotka-Volterra and Volterra systems, in SYMPHYS97, Dubna, 1997 (to be published in Yad. Fis)
- 42.- Dubovik V., Galperin A., Richvitsky V., Slepnyov S.K., The conditions of existence of first integrals and Hamiltonian structures of the Lotka-Volterra equations Comment on some recent papers , Preprint JINR, E4-97-416, Dubna, 1997.
- 43 - Makhaldiani N , The system of Three Vortexes of Two-Dimensional Ideal Hydrodynamics as a New Example of the (Integrable) Nambu-Poisson Mechanics. E2-97-407, Comm. Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, 1997.
- 44.- Steinfeld J., Francisco J., Hase W , Chemical Kinetics and Dynamics, chap. 5, Prentice Hall, 1989.
- 45.- Allinger N., Cava M., Organic Chemistry, Sec. Ed., North Pub Inc., pg 561
- 46 - Lund H., Baizer M., Organic Electrochemistry Third De., Marcel Dekker, inc., 1991, pg 737, 1991