



3 00365
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS EN
DIGRÁFICAS QUE SON CASI TORNEOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

ADRIANA/MIRANDA COTARDO

DIRECTORA DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ

MÉXICO, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

JULIO, 2002



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas

Tesis Digitales

Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE MÉXICO
MEXICO

a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Adriana Miranda Cotardo
FECHA: 26 agosto 2002
FIRMA: [Firma]

FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS
COORDINACIÓN

OFICIO FCIE/PCM/690/02

ASUNTO: Asignación de sinodales.

DRA. HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
PRESENTE.

Por este conducto me permito comunicarle que ha sido ratificado(a) como Director(a) de Tesis del(a) **MAT. ADRIANA MIRANDA COTARDO**, quien desarrolló el trabajo de tesis titulado: **NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS EN DIGRÁFICAS QUE SON CASI TORNEOS**.

Asimismo comunico que el Comité Académico del Programa de Maestría y Doctorado en Ciencias Matemáticas y de la Especialización en Estadística Aplicada ha asignado a los siguientes sinodales para dictaminar si el trabajo que ha desarrollado como tesis el(a) alumno(a) antes mencionado(a) tiene los méritos para obtener el grado de **MAESTRO(A) EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)**.

CARGO	GRADO,	NOMBRE COMPLETO
PRESIDENTE	: M. EN C.	ALEJANDRO BRAVO MOJICA
PRIMER VOCAL	: DRA.	HORTENSIA GALEANA SÁNCHEZ
SEGUNDO VOCAL	: DR.	HUGO ALBERTO RINCÓN MEJÍA
TERCER VOCAL	: M. EN C.	PATRICIA CORTES FLORES
SECRETARIO	: DR.	EDUARDO RIVERA CAMPO
SUPLENTE	: M. EN C.	VIRGINIA ABRÍN BATULE
SUPLENTE	: DR.	BERNARDO LLANO PÉREZ

Sin más por el momento aprovecho la ocasión para enviarles un cordial saludo.

ATENTAMENTE
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"
Cd. Universitaria, D. F., 9 de julio de 2002
COORDINADORA

[Firma]
DRA. MARÍA ASUNCIÓN BEGOÑA FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ

MABFF/ASR/



NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS EN
DIGRÁFICAS QUE SON CASI TORNEOS

ADRIANA MIRANDA COTARDO

DEDICO ESTE TRABAJO A QUIENES MÁS AMO:

Mi esposo Rolando.

Mis hijas: Adriana, Alejandra y Luz Andrea.

Mis Padres: Sr. Francisco J. Miranda, Sra. A. Margarita Cotardo.

AGRADEZCO DE MANERA MUY ESPECIAL A

Mi directora de Tesis, Dra. Hortensia Galeana Sánchez, por su paciencia, dedicación, amistad, apoyo y por haberme permitido desarrollar este trabajo con ella.

Mis sinodales, por haber revisado este trabajo con gran interés.

Ma. del Rocío Rojas Monroy por su apoyo incondicional, por compartir sus conocimientos y por su amistad

Mi esposo Rolando por su amor, apoyo y por estar conmigo en todo momento.

Mis Padres por entregarme su amor y dedicarme su tiempo y trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
CONCEPTOS BÁSICOS	5
CAPITULO 1 Sobre trayectorias monocromáticas en Torneos m-coloreados.	11
CAPITULO 2. Sobre Trayectorias monocromáticos y Ciclos monocromáticos en Torneos coloreados por Flechas.	21
CAPITULO 3. Núcleos en Digráficas coloreadas por Flechas.	47
CAPITULO 4. Núcleos por Trayectorias monocromáticas en Digráficas m-coloreadas.	71
CAPITULO 5. Núcleos por Trayectorias monocromáticas en Digráficas m-coloreadas que son casi Torneos.	105
CONCLUSIONES	136
REFERENCIAS	137

INTRODUCCIÓN

El estudio de la coloración en Digráficas de las últimas décadas ha generado una diversa gama de nuevos conceptos e importantes resultados enriqueciendo la Teoría de Gráficas que es actualmente un área importante dentro de las Matemáticas y que ha tenido un notable crecimiento recientemente.

El concepto de núcleo fue introducido por Von Neumann y Morgestern para Teoría de Juegos [13]. Y durante varios años el problema de la existencia de un núcleo en una digráfica dada ha sido estudiado por varias personas, en particular por Richardson [14, 15], Duchet y Meyniel [6], Duchet [4, 5], Galeana-Sánchez y Neumann-Lara [10, 11, 12, 13].

Un aspecto importante de estudio de una digráfica D es determinar si ésta es núcleo perfecta, es decir, si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo (recordemos que un núcleo N de D es un conjunto independiente de vértices tal que $F(D[N]) = \emptyset$ y para cada $z \in V(D) - N$ existe una zN -flecha en D).

En la presente tesis desarrollo algunos resultados obtenidos en los últimos 20 años acerca del núcleo por trayectorias monocromáticas en digráficas coloreadas en flechas con m colores (m -coloreadas), entendiéndose por núcleo por trayectorias monocromáticas, un conjunto N de vértices de la digráfica que no tiene trayectorias dirigidas monocromáticas entre cualquier par de vértices de N y además para cada vértice de la digráfica que no pertenece a N ,

este vértice tiene una trayectoria dirigida monocromática hacia algún vértice que sí esté en N .

En este trabajo expongo algunos resultados acerca de núcleos por trayectorias monocromáticas en: Digráficas asimétricas completas m -coloreadas (Torneos m -coloreados), y Digráficas asimétricas completas menos una flecha m -coloreadas (Casi-torneos m -coloreados), siendo éstos últimos el principal objeto de estudio de esta tesis.

Entenderemos por ciclo casi-monocromático, un ciclo en el que con a lo más una excepción todas sus flechas están coloreadas con el mismo color.

El primer antecedente que involucra resultados acerca de núcleos por trayectorias monocromáticas en Torneos m -coloreados, es el trabajo realizado en 1982, por Sands, Sauer y Woodrow de la Universidad de Calgary, Canadá, [17], quienes probaron que todo torneo T 2-coloreado tiene un vértice $\{v\}$ que es núcleo por trayectorias monocromáticas. Además ellos plantearon la siguiente conjetura ¿si T es un Torneo 3-coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es casi-monocromático, el torneo T , debe tener un núcleo por trayectorias monocromáticas?

En el Capítulo 1 se responde de forma parcial la cuestión planteada por estas tres personas, mostrando el trabajo realizado por Shen Minggang, de la Universidad de Profesores de Shanghai, China [18], al probar que si T es un Torneo m -coloreado tal que todo ciclo de longitud 3 es casi-monocromático y todo torneo transitivo de longitud 3 es casi-monocromático, entonces el Torneo tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Además se presentan

algunos Torneos m -coloreados $m \geq 4$, donde se enfatiza la necesidad de considerar los torneos con la hipótesis descrita por Minggang para que el torneo tenga núcleo por trayectorias monocromáticas.

En el Capítulo 2, se desarrolla el trabajo realizado por H. Galeana Sánchez, [7], Investigadora del Instituto de Matemáticas de la UNAM, quién obtiene algunas condiciones para que un Torneo m -coloreado tenga núcleo por trayectorias monocromáticas. En particular se expone el caso de que si T es un torneo en el que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático, entonces el torneo tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Además se analiza la relación de este resultado particular con el resultado obtenido por Shen Minggang (Capítulo 1), mediante algunos ejemplos.

En el capítulo 3 se dan los primeros resultados que involucran a las digráficas conocidas como casi-torneos en relación a que contengan núcleo por trayectorias monocromáticas. En particular se prueba que si D es una digráfica que resulta de borrar una sola flecha de algún torneo m -coloreado y todo ciclo de longitud a lo más 4 en D es casi-monocromático entonces la digráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Estos resultados fueron obtenidos por H. Galeana Sánchez, [8]

El capítulo 4, presenta el trabajo realizado por H. Galeana y J. García-Ruvalcaba [9] en digráficas que son casi-torneos que no contienen ciclos de longitud 3 ni torneos transitivos de longitud 3 y para las cuales la digráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. En este capítulo también se presentan algunos ejemplos que enfatizan la necesidad de la hipótesis de que

las digráficas que son casi torneos y que no contengan ni C_3 tricolor ni T_3 tricolor para que éstas digráficas tengan núcleo por trayectorias monocromáticas.

Finalmente en el capítulo 5, expongo nuevos resultados obtenidos en colaboración con H. Galeana Sánchez para digráficas que son casi-torneos en los cuales todo ciclo dirigido de longitud 3 es monocromático y para las que existe núcleo por trayectorias monocromáticas. También en este capítulo presento algunos ejemplos que enfatizan la necesidad de la hipótesis de que todo C_3 sea monocromático en las digráficas que son casi torneos para que estas digráficas tengan núcleo por trayectorias monocromáticas. Además describo mediante ejemplos que las condiciones de la hipótesis en las digráficas que son casi-torneos de que todo C_3 sea monocromático no implica las condiciones de las hipótesis expuestas en los capítulos 3 y 4, y viceversa.

CONCEPTOS BÁSICOS

DEFINICIÓN 1. Una **digráfica** $D=(V(D), F(D))$ consiste de un conjunto finito, no vacío de objetos llamados vértices, denotado por $V(D)$, y un conjunto de parejas ordenadas de vértices llamadas flechas, denotado por $F(D)$.

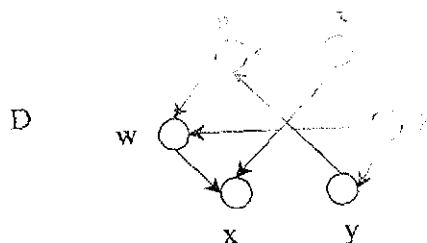


Figura 1

DEFINICIÓN 2. Si $f=(u,v) \in F(D)$ diremos que u es **adyacente hacia** v en D y v es **adyacente desde** u en D . Si $f=(u,v) \in F(D)$ diremos que f **incide hacia** v en D y f **incide desde** u en D .

En la figura 1, el vértice w es adyacente hacia x , y el vértice y es adyacente desde z .

DEFINICIÓN 3. Una **subdigráfica** H de una digráfica D es una digráfica tal que $V(H) \subseteq V(D)$ y $A(H) \subseteq A(D)$.

DEFINICIÓN 4. Dado un conjunto V' de vértices de D la **subdigráfica de D inducida por V'** es aquella que tiene como conjunto de vértices a V' y sus flechas son las de D que tiene sus dos extremos en V' , denotada por $D[V']$.

La siguiente figura muestra una subdigráfica de la digráfica de la Figura 1 inducida por el conjunto de vértices $V'=\{u, v, w, x\}$.

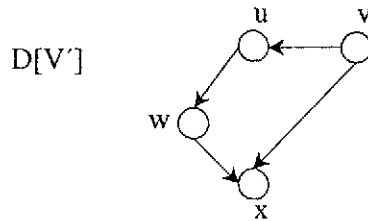


Figura 2

DEFINICIÓN 5. Se dice que una subdigráfica H de D es **generadora** si contiene a todos los vértices de D . Ver la Figura 3.

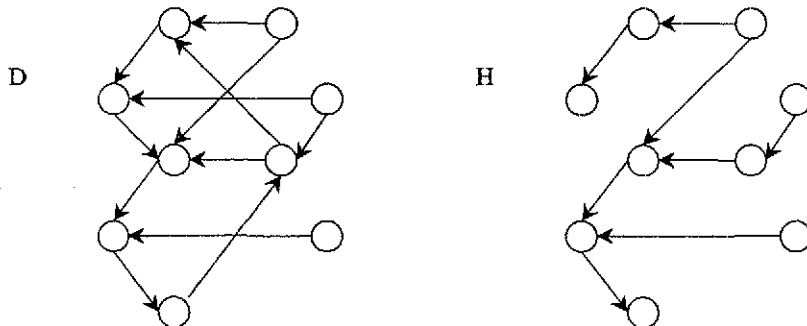


Figura 3

DEFINICIÓN 6. Un **camino dirigido** en una digráfica D es una sucesión de vértices $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, tal que $v_i v_{i+1} \in F(D)$ para toda $i=0, 1, 2, \dots, n-1$. Si en el camino dirigido $v_0 = v_n$ diremos que es un **camino dirigido cerrado**.

DEFINICIÓN 7. Una **trayectoria dirigida** en D es un camino dirigido en el que no se repiten vértices. Si u y v son el inicio y final de la trayectoria dirigida diremos que tenemos una uv -trayectoria dirigida.

DEFINICIÓN 8. Un **ciclo dirigido** es un camino dirigido cerrado donde no se repiten vértices excepto el primero y el último.

DEFINICIÓN 9. Para un vértice u de D definimos la **vecindad exterior de u** como $N^+(u) = \{v \in V(D) / (u, v) \in F(D)\}$, análogamente la **vecindad interior de u** es $N^-(u) = \{v \in V(D) / (v, u) \in F(D)\}$.

DEFINICIÓN 10. El **ingrado** $d_D^-(v)$ de un vértice v en D es el número de flechas que inciden hacia v y el **exgrado** $d_D^+(v)$ de un vértice v en D es el número de flechas que inciden desde v .

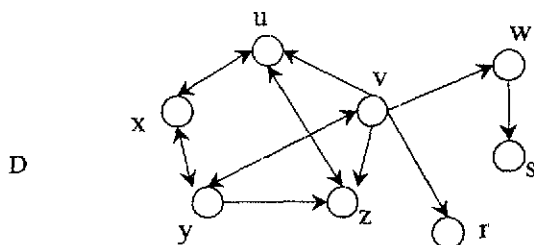


Figura 4

En la Figura 4 la vecindad interior de v es $N(v)=\{y\}$ por lo que el ingrado $d_D^-(v) = 1$ y la vecindad exterior de v es $N^+(v)=\{u, y, z, w, r\}$, así que el exgrado $d_D^+(v) = 5$.

DEFINICIÓN 11. Sea D una digráfica, con $V(D)$ y $F(D)$ los vértices y flechas de D respectivamente, una flecha uv de $F(D)$ es llamada **asimétrica** si vu no está en $F(D)$. Una flecha uv de $F(D)$ es **simétrica** si vu también está en $F(D)$.

DEFINICIÓN 12. La **parte asimétrica** de D denotada por $Asim(D)$, es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas asimétricas de D , y la **parte simétrica** de D , $Sim(D)$, es la subdigráfica generadora de D cuyas flechas son las flechas simétricas de D .

La figura 5 muestra la parte simétrica y la parte asimétrica de la Figura 4.

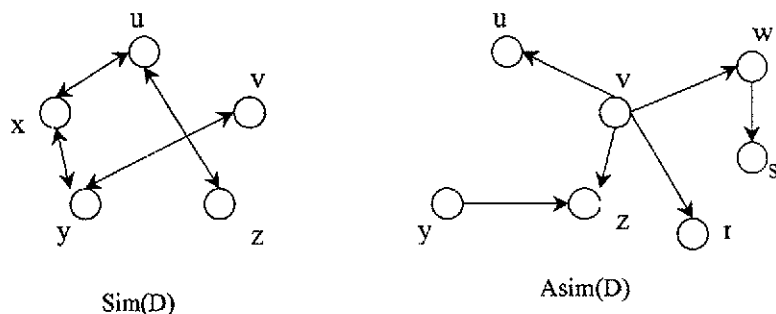


Figura 5

DEFINICIÓN 13. Si D es una digráfica, podemos obtener la gráfica no dirigida D^* , llamada **gráfica subyacente**, y denotada G_D , reemplazando cada

flecha asimétrica y cada par de flechas simétricas por una arista. Si G es una gráfica no orientada también se puede obtener una digráfica D a partir de G únicamente dándoles orientación a las aristas de G en al menos una de las dos direcciones donde cada arista es orientada en solo una dirección.

DEFINICIÓN 14. Sea D una digráfica, se dice que es **m-coloreada** si las flechas de D son coloreadas con m colores.

DEFINICIÓN 15. Una digráfica D es llamada **completa** si para todo par de vértices distinto u y v de D , al menos una de las flechas (u, v) y (v, u) está presente en D . Un **torneo** es una digráfica asimétrica completa.

DEFINICIÓN 16. El **orden** de una digráfica D , es el número de vértices que contiene, se denota por $|V(D)|$.

DEFINICIÓN 17. Sean S_1, S_2 subconjuntos no vacíos de $V(D)$ y sea (u_1, u_2) una flecha de D , se dice que ésta es una **S_1S_2 flecha** siempre que $u_1 \in S_1$ y $u_2 \in S_2$.

DEFINICIÓN 18. Un conjunto $I \subseteq V(D)$ es **independiente** si $F(D[I]) = \emptyset$. Un **núcleo** N de D es un conjunto independiente de vértices tal que para cada $z \in V(D) - N$ existe una zN -flecha en D .

DEFINICIÓN 19. Sea D una digráfica m -coloreada y $N \subseteq V(D)$, N es **independiente por trayectorias monocromáticas**, si para cualquier par de vértices u, v en N , no existe una uv -trayectoria dirigida monocromática.

Diremos que N es **absorbente por trayectorias monocromáticas** si para cada $z \in V(D) \setminus N$ existe algún u en N tal que hay una zu -trayectoria dirigida monocromática. Si N es independiente por trayectorias monocromáticas y absorbente por trayectorias monocromáticas diremos que N es **núcleo por trayectorias monocromáticas**.

Si D es un torneo, un núcleo por trayectorias monocromáticas consta de sólo un vértice $v \in V(T)$ tal que para cualquier otro vértice $x \in V(T)$, existe una trayectoria monocromática de x a v .

CAPITULO I

SOBRE TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS EN TORNEOS m COLOREADOS

En esta sección se considerará el Torneo de orden 3 para mostrar algunos resultados importantes. Es fácil ver que sólo hay dos torneos de orden 3: el ciclo dirigido de orden 3, denotado por C_3 y el torneo transitivo de orden 3, que denotaremos por T_3 .

La siguiente notación nos será de gran utilidad. Sean u, v vértices de una digráfica D , si existe una uv -trayectoria dirigida monocromática escribiremos simplemente $(u \rightarrow_{\text{mono}} v)$. Si la trayectoria monocromática es de un color conocido por ejemplo rojo entonces se especifica el color de la siguiente manera: $(u \rightarrow_{\text{rojo}} v)$.

De manera similar si $u, v \in V(T)$, para una digráfica D , $(u \sim \rightarrow_{\text{mono}} v)$ indica que no hay una trayectoria dirigida monocromática de u hacia v , y $(u \sim \rightarrow_{\text{rojo}} v)$ indica que no hay una uv -trayectoria dirigida roja.

El siguiente problema fue propuesto por Sands, Sauer y Woodrow.

Sea T un torneo 3-coloreado el cual no contiene C_3 tricolor. ¿Debe el torneo T contener un vértice v que sea núcleo por trayectorias monocromáticas?

Un caso particular se da en el siguiente Teorema probado por Shen Minggang [18], en el que tenemos un torneo T que no contiene C_3 tricolor ni T_3 tricolor pero en el cual el torneo T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

TEOREMA 1.1. Sea T un torneo m -coloreado el cual no contiene ni C_3 tricolor ni T_3 tricolor, entonces existe un vértice v que es núcleo por trayectorias monocromáticas

DEMOSTRACIÓN. La prueba se hará por inducción sobre el orden de T , $|V(T)| = n$.

Para $n=1$ y $n=2$ el resultado se da inmediatamente.

Supóngase que el resultado es cierto para todos los torneos m -coloreados de orden menor que n , con $n > 2$.

Consideremos ahora un torneo m -coloreado de orden n . Por la hipótesis de inducción, para cada $v \in V(T)$, existe un vértice $f(v) \in V(T - \{v\})$, que es núcleo por trayectorias monocromáticas.

Se puede suponer que el torneo T no tiene una trayectoria monocromática de v a $f(v)$, pues si ésta existiera, $f(v)$ sería núcleo de D .

Afirmamos que la función f definida anteriormente es biyectiva.

Demostración:

a) f es inyectiva.

Si $f(u) = f(v)$ por demostrar que $u = v$.

Procederemos por reducción al absurdo suponiendo que $u \neq v$. Por definición de $f(v)$, $(x \rightarrow_{\text{mono}} f(v))$ para todo vértice $x \in V(T - \{v\})$. Como $u \neq v$, $u \in V(T - \{v\})$ por lo que $(u \rightarrow_{\text{mono}} f(v))$ pero por hipótesis $f(u) = f(v)$ lo cual indica que $(u \rightarrow_{\text{mono}} f(u))$ lo cual no puede ser por la observación 1.

b) f es suprayectiva.

Como f es inyectiva de un conjunto finito en él mismo entonces f es suprayectiva.

Por lo tanto f es biyectiva.

Sean $v_1, v_2, \dots, v_n$ los vértices del torneo. Sin pérdida de generalidad consideremos al vértice v_1 . Como no hay trayectoria dirigida monocromática de v_1 a $f(v_1)$ y T es torneo, debe existir la flecha de $f(v_1)$ a v_1 . También debe existir la flecha $f(f(v_1))$ a $f(v_1)$. Continuando de esta forma como el torneo es finito y f es biyectiva existe un vértice v_{n1} tal que $f(v_{n1}) = v_1$ y por el argumento anterior se debe de tener la flecha de v_1 a v_{n1} .

Reetiquetando los vértices $f(v_{n1}) = v_1$, $f(v_1) = v_2$, $f(v_2) = v_3$, ..., $f(v_{n1-i}) = v_{ni}$, obtenemos el ciclo $C_1 = (v_1, v_{n1}, \dots, v_2, v_1)$.

Si C_1 no contiene a todos los vértices del torneo entonces consideremos ahora un vértice v_{n1+1} que no esté en C_1 .

Repitiendo el argumento anterior obtendremos el ciclo $C_2 = (v_{n1+1}, \dots, v_{n2}, v_{n1+1})$.

Continuando con este proceso se tendrá una partición de los vértices del torneo T en ciclos ajenos.

Demostremos que en esta construcción sólo hay un ciclo.

Supongamos que existen al menos dos ciclos y sean $C_1, C_2, \dots, C_k$ los ciclos. Entonces el número de vértices de C_r , $r=1,2, \dots, k$, es menor que n y por hipótesis de inducción en $T[V(C_k)]$ existe un vértice $f(v)$, que es núcleo por trayectorias monocromáticas con lo que se tendría una trayectoria monocromática de v a $f(v)$, lo cual no era posible. Por lo tanto sólo se puede tener un ciclo con la construcción anterior.

Sea $C = (v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_3 = f(v_2), v_2 = f(v_1), v_1)$ el ciclo que contiene a todos los vértices del torneo, donde v_{i+1} es adyacente hacia v_i y no hay trayectorias monocromáticas de v_i a v_{i+1} . Supongamos que las flechas $(v_1, v_n), (v_n, v_{n-1}), (v_{n-1}, v_{n-2}), \dots, (v_3, v_2), (v_2, v_1)$, del ciclo tiene asignados los colores $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1$, respectivamente. Si $a_i = a_j$, para toda i distinta de j , con i entre 1 y n entonces la trayectoria $(v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_3, v_2, v_1)$ es una trayectoria monocromática de v_n a v_1 , lo cual es una contradicción pues $v_1 = f(v_n)$. Por lo tanto los a_i no son todos iguales, por lo que existen al menos 2 colores consecutivos distintos en el ciclo.

Consideremos $a_{s-1} \neq a_s$. Sin pérdida de generalidad supongamos que las flechas (v_s, v_{s-1}) y (v_{s+1}, v_s) tienen asignados los siguientes colores: $a_{s-1} = 1$ y $a_s = 2$.

Como $v_s \in V(T)$, existe un v3rtice $x = f(v_s) \in V(T - \{v_s\})$, que es n3cleo por trayectorias monocrom3ticas en $T - \{v_s\}$, pero por la forma en que se asignaron los 3ndices $f(v_s) = v_{s+1}$, en particular $(v_{s-1} \rightarrow_{\text{mono}} v_{s+1})$.

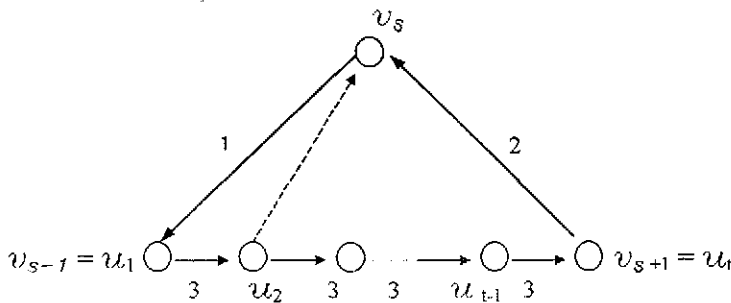


Figura 6

Sup3ngase que el color de esta trayectoria es b . Si $b = 1$ entonces existen $(v_s \rightarrow_1 v_{s-1})$ y $(v_{s-1} \rightarrow_1 v_{s+1})$, por lo tanto $(v_s \rightarrow_1 v_{s+1})$ lo cual no puede ser. De manera similar si $b = 2$ $(v_{s-1} \rightarrow_2 v_s)$ lo cual tampoco puede ser, por lo tanto b debe ser distinto de 1 y 2. Consideremos $b = 3$.

Sea $\mathcal{T} = (v_{s-1} = u_1, u_2, \dots, u_{t-1}, u_t = v_{s+1})$ la trayectoria monocrom3tica de longitud mas corta de v_{s-1} , a v_{s+1} con color 3.

Como T es un torneo deben existir flechas entre los v3rtices de $\mathcal{T}$ y v_s . No importa cual sea el sentido de estas flechas, ellas no pueden ser de color 3, pues si esto sucediera entonces $(v_{s-1} \rightarrow_3 v_s)$, cuando el sentido de la flecha fuera de u_i hacia v_s o $(v_s \rightarrow_3 v_{s+1})$ para flechas del tipo (v_s, u_i) , $1 < i < t$, lo cual ser3a una contradicci3n.

Vamos a demostrar que la flecha entre v_s y u_2 , es de color 1. Considerando $T[\{v_s, v_{s-1}, u_2\}]$ tenemos que la flecha entre v_s y u_2 debe

tener color 1 o 3, de otra forma $T[\{v_s, v_{s-1}, u_2\}]$ es un C_3 o un T_3 tricolor lo cual contradice nuestra hipótesis inicial y ya hemos observado que la flecha no puede tener color 3, por lo tanto debe tener color 1. Supongamos ahora que la flecha entre v_s y u_i , es de color 1, con $2 < i < t-2$, demostraremos que la flecha entre v_s y u_{i+1} , es de color 1. Considerando $T[\{u_i, u_{i+1}, v_s\}]$ tenemos que la flecha entre v_s y u_{i+1} debe tener color 1 o 3, de otra forma $T[\{u_i, u_{i+1}, v_s\}]$ es un C_3 o un T_3 tricolor lo cual contradice nuestra hipótesis inicial y ya hemos observado que la flecha no puede tener color 3, por lo tanto debe tener color 1.

De esta forma la flecha entre v_s y u_{t-1} tiene color 1 por lo tanto $T[\{u_{t-1}, u_t, v_s\}]$ es un C_3 o un T_3 tricolor, contradiciendo la hipótesis del teorema.

Por tanto debe haber trayectoria dirigida monocromática de v a $f(v)$, $v \in V(D)$. ■

De este resultado se obtiene inmediatamente el siguiente Corolario.

COROLARIO 1.2. Sea T un torneo 2-coloreado. Entonces existe un vértice v de T que es núcleo por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Como T es un torneo 2-coloreado, T no tiene C_3 tricolor ni T_3 tricolor y por el Teorema 1, en T existe un vértice v que es núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Otro resultado es el siguiente:

COROLARIO 1.3. Supóngase que $T, H_1, H_2, \dots, H_n$ son todos torneos m -coloreados sin T_3 ni C_3 tricolor, con $V(T) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n\}$. Sea T' el torneo que resulta de sustituir cada vértice $u_i \in V(T)$ por una copia del torneo H_i y agregando flechas entre los vértices de la copia del torneo H_i y los vértices de la copia del torneo H_j en cualquier sentido y con el color correspondiente a la flecha entre v_i y v_j de T . Entonces T' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Para ver que T' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas probaremos que T' no contiene T_3 ni C_3 tricolores.

Consideremos $v_i, v_j, v_k \in V(T')$, si los tres vértices están sólo en un H_s estos vértices no forman ni un T_3 ni C_3 tricolor.

Si tomamos $v_i, v_j \in V(H_s)$ y $v_k \in V(H_t)$, entonces como las flechas que unen v_i con v_k y v_j con v_k son del mismo color no importa el sentido que tengan tampoco forman ni un T_3 ni un C_3 tricolor.

Ahora si consideramos $v_i \in V(H_r)$, $v_j \in V(H_s)$ y $v_k \in V(H_t)$, estos vértices no forman un T_3 ni un C_3 tricolor en T' ya que si lo formaran entonces habría un T_3 o un C_3 tricolor en T , lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por lo tanto en T' no hay T_3 ni C_3 tricolores, y por el Teorema 1.1, T' tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

Si en el Teorema 1.1 se mantiene solamente la condición de que el torneo T no contenga C_3 tricolor, el resultado no es cierto. Enseguida mostramos un contraejemplo, Figura 7. La digráfica denotada por G_5 , es un torneo con 5 vértices, 5-coloreada que no contiene C_3 tricolor pero si contiene un T_3 tricolor formado por los vértices v_1, v_4 y v_5 . Esta digráfica no contiene núcleo por

trayectorias monocromáticas pues $(v_{i+1} \sim \rightarrow_{\text{mono}} v_i)$ considerando la suma módulo 5.

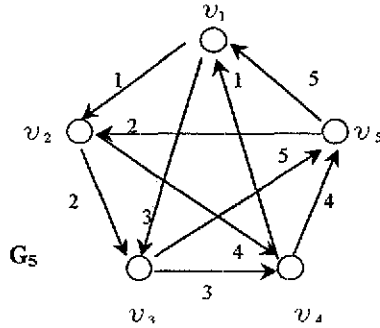


Figura 7

Si a G_5 le agregamos un nuevo vértice, v_6 , y todas las flechas del nuevo vértice a los vértices anteriores con color 1, la digráfica obtenida no contendrá C_3 y tampoco tendrá núcleo por trayectorias monocromáticas ya que el nuevo vértice no puede ser núcleo por la forma en que se construyó y los vértices de la digráfica original tampoco pueden ser núcleo por el argumento anterior y porque no se forman trayectorias monocromáticas que pasen por el nuevo vértice.

Si se va agregando un nuevo vértice, y todas las flechas desde el nuevo vértice dirigidas hacia los vértices anteriores y coloreadas con cualquier color, la(s) digráfica(s) obtenida(s) no contendrá(n) C_3 tricolor y tampoco tendrá(n) núcleo por trayectorias monocromáticas. Por lo que podemos construir una infinidad de contraejemplos sin C_3 tricolor, con un número de vértices mayor que 5 que no tengan núcleo por trayectorias monocromáticas.

Los contraejemplos anteriores conservan sólo la condición del Teorema 1.1, de que en el Torneo no exista C_3 tricolor, en una digráfica m -coloreada con $m \geq 5$. Shen Minggang deja como problemas abiertos los casos $m=3$ y $m=4$. Recientemente Ma. del Rocío Rojas Monroy da en su Tesis Doctoral un contraejemplo para $m=4$, Figura 8, el cual contiene un T_3 tricolor, no contiene C_3 tricolor, y no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas pues cada vértice no tiene trayectoria monocromática hacia su vértice anterior en el ciclo, es decir, $(v_{i+1} \sim \rightarrow_{\text{mono}} v_i)$, para i módulo 6. Para $m=3$ aún no se ha podido encontrar un contraejemplo.

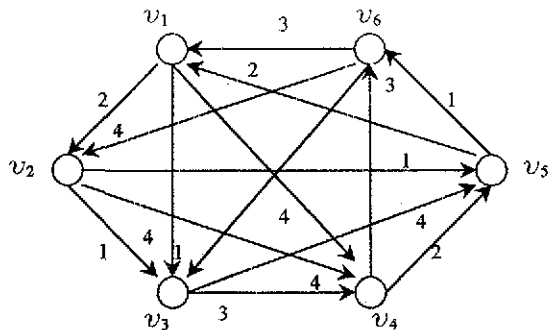


Figura 8

Ahora, si en el Teorema 1.1 sólo se mantiene la condición de que el torneo T no contenga T_3 tricolor, el resultado tampoco es cierto, enseguida mostramos un contraejemplo. Consideremos el ciclo tricolor C_3 , coloreado con los colores 1, 2 y 3 si agregamos un nuevo vértice, v_4 , dirigiendo todas las flechas desde el nuevo vértice hacia los vértices anteriores coloreando estas flechas con color 4, la digráfica obtenida no contendrá T_3 tricolor y tampoco

tendrá núcleo por trayectorias monocromáticas. Si se va agregando un nuevo vértice, y todas las flechas del nuevo vértice hacia los vértices anteriores coloreadas de color 4, la(s) digráfica(s) obtenida(s) no contendrá(n) T_3 y tampoco tendrá(n) núcleo por trayectorias monocromáticas. Por lo que podemos construir una infinidad de contraejemplos sin T_3 tricolor, con un número de vértices mayor que 5 que no tengan núcleo por trayectorias monocromáticas. Ver Figura 9 a) y b).

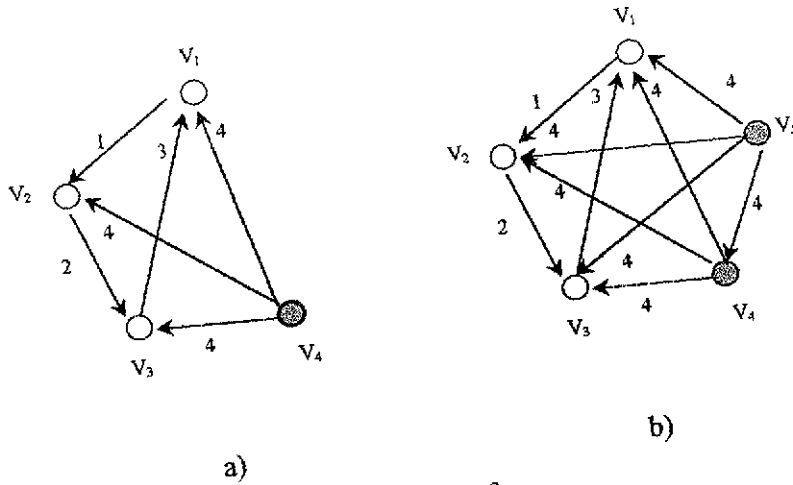


Figura 9

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO 2

SOBRE TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS Y CICLOS MONOCROMÁTICOS EN TORNEOS COLOREADOS POR FLECHAS

En este capítulo se mostrarán algunas condiciones suficientes dadas por Hortensia Galeana Sánchez, para que un torneo T m -coloreado tenga un vértice v que es núcleo por trayectorias monocromáticas en T . Se demostrará que si un torneo T es un torneo m -coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático entonces existe un vértice v de T tal que para cualquier otro vértice x de T existe una trayectoria dirigida monocromática de x a v .

DEFINICIÓN 20. Una digráfica D es llamada (i) **digráfica núcleo-perfecta** cuando toda subdigráfica inducida de D tiene Núcleo y (ii) **digráfica núcleo imperfecta crítica** cuando D no tiene núcleo pero toda subdigráfica inducida propia de D tiene un núcleo.

Las trayectorias dirigidas y los ciclos dirigidos pares son ejemplos de digráficas núcleo perfectas. Los ciclos dirigidos impares son ejemplos de digráficas núcleo imperfectas críticas. A continuación se muestra otro ejemplo de digráfica núcleo imperfecta crítica construida por H. Galeana Sánchez y V. Neumann Lara [10].

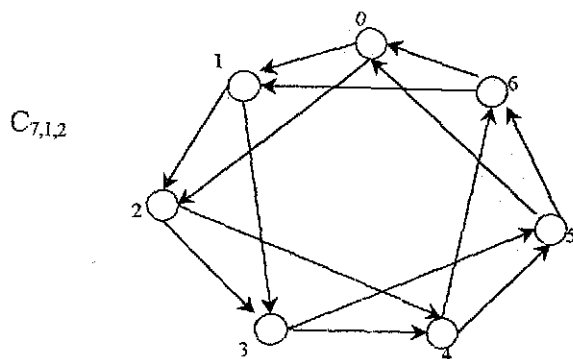


Figura 10

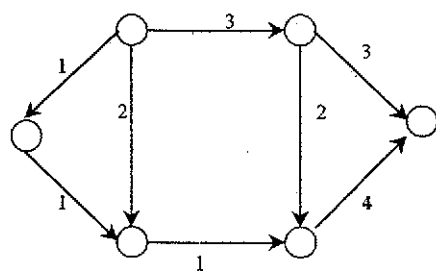
Si $C = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0)$ es un ciclo dirigido, denotaremos por $\ell(C)$ su longitud, y si $v_i, v_j \in V(C)$ denotaremos por (v_i, C, v_j) la $v_i v_j$ -trayectoria dirigida contenida en C .

DEFINICIÓN 21. Un **ciclo dirigido** (o una trayectoria dirigida) es llamado **monocromático** si todas sus flechas son coloreadas con un solo color. Un ciclo dirigido es llamado un **ciclo casi-monocromático** si con a lo más por una excepción todas sus flechas son coloreadas del mismo color.

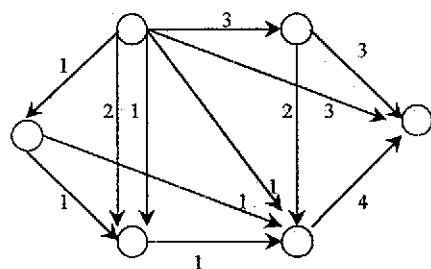
DEFINICIÓN 22. La **cerradura de una digráfica D m -coloreada**, denotada por $\mathcal{C}(D)$, es aquella que tiene como conjunto de vértices los vértices de D y como conjunto de flechas $F(\mathcal{C}(D)) = F(D) \cup \bigcup_{i=1}^m \{uv \text{ con color } i \mid \text{ existe una } uv\text{-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ contenida en } D\}$.

Observemos que para una digráfica D , $\mathcal{C}(\mathcal{C}(D)) \cong \mathcal{C}(D)$, ya que en $\mathcal{C}(D)$ no se forman nuevas trayectorias dirigidas monocromáticas distintas de las existentes en D .

Ver figuras 11, 12 y 13.

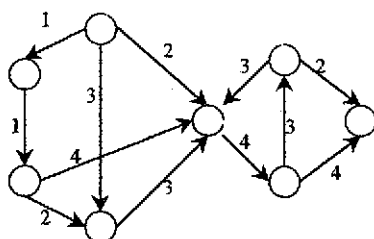


D_1

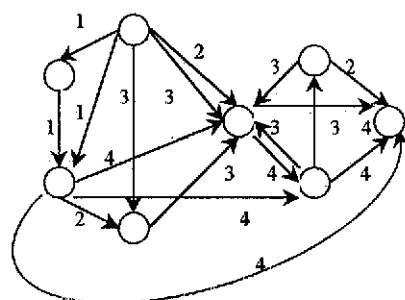


$\mathcal{G}(D_1)$

Figura 11



D_2



$\mathcal{G}(D_2)$

Figura 12

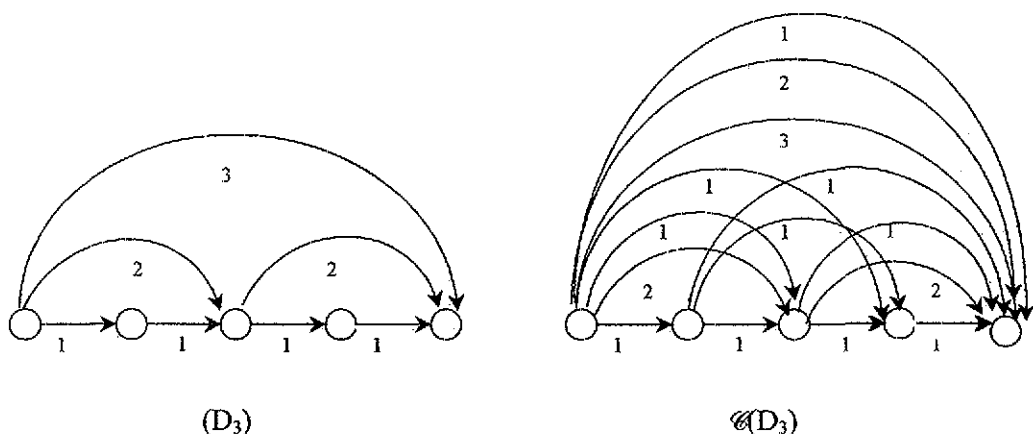


Figura 13

Un resultado que relaciona a $\mathcal{C}(D)$ con los núcleos por trayectorias monocromáticas es el siguiente.

PROPOSICIÓN 2.1. Sea D una digráfica m -coloreada, N es un núcleo por trayectorias monocromáticas de D si y sólo si N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

DEMOSTRACIÓN. Por una parte, sea N núcleo por trayectorias monocromáticas de una digráfica D m -coloreada, demostraremos que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$, probando que N es independiente y absorbente en $\mathcal{C}(D)$.

Por demostrar que N es independiente en $\mathcal{C}(D)$. Supongamos que N no es independiente en $\mathcal{C}(D)$, entonces existen u, v vértices de N tal que (u, v) está en las flechas de $\mathcal{C}(D)$, pero por la definición de $\mathcal{C}(D)$, existe una uv -trayectoria dirigida monocromática en D , lo cual es una contradicción al

hecho de que N es independiente por trayectorias monocromáticas. Por lo tanto N es independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Por demostrar que N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$. Sea u un vértice de $V(\mathcal{C}(D)) \setminus N$, entonces u está en $V(D) \setminus N$ y por la definición de núcleo por trayectorias monocromáticas existe una trayectoria dirigida monocromática de u hacia algún vértice z de N , de color i , $1 \leq i \leq m$, por lo que en $\mathcal{C}(D)$ existe una uz -flecha. Por lo tanto N es absorbente en $\mathcal{C}(D)$. Así que N es núcleo de $\mathcal{C}(D)$.

Ahora, sea N núcleo de $\mathcal{C}(D)$, probaremos que N es núcleo por trayectorias monocromáticas de D , es decir demostraremos que N es independiente y absorbente por trayectorias monocromáticas.

Por demostrar que N es independiente por trayectorias monocromáticas en D . Supongamos que N no es independiente por trayectorias monocromáticas en D , entonces existen vértices u, v en N tal que existe una uv -trayectoria dirigida monocromática en D , y por definición de $\mathcal{C}(D)$, existe una uv -flecha en $\mathcal{C}(D)$, contradiciendo que N es independiente en $\mathcal{C}(D)$.

Por lo tanto N es independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Por demostrar que N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D . Sea u un vértice de $D \setminus N$, entonces u está en $V(\mathcal{C}(D)) \setminus N$ y por definición de núcleo para algún vértice v de N existe una uv -flecha en $\mathcal{C}(D)$, y por

definición de cerradura, existe una uv -trayectoria dirigida monocromática en D . Por lo tanto N es absorbente por trayectorias monocromáticas en D . ■

En 1982 Sands, Sauer y Woodrow, probaron que si D es una digráfica 2-coloreada, entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, así que por la Proposición 2.1 podemos decir que si D es una digráfica 2-coloreada entonces $\mathcal{A}(D)$ tiene núcleo.

Como caso particular, Sands, Sauer y Woodrow, probaron que si T es un torneo 2-coloreado, entonces existe un vértice v del torneo tal que v es núcleo de $\mathcal{A}(T)$, además ellos plantearon el problema: ¿Debe $\mathcal{A}(T)$ tener un núcleo si T es un torneo 3-coloreado que no contiene C_3 tricolor? y fue Shen Mingangg quien respondió parcialmente a la pregunta probando que para un torneo T 3-coloreado, sin C_3 tricolor ni T_3 tricolor, $\mathcal{A}(T)$ tiene núcleo. De esta forma para todo torneo T 3-coloreado tal que todos sus ciclos de longitud 3 y todos sus torneos transitivos de orden 3 son casi-monocromático, se tiene que $\mathcal{A}(T)$ tiene núcleo.

DEFINICIÓN 23. Una digráfica D se dice que es **fuertemente conexa** si para cualquier par de vértices u, v , existe una uv -trayectoria dirigida.

PROPOSICIÓN 2.2. Una digráfica D es fuertemente conexa si y sólo si para toda partición de $V(D)$ en dos conjuntos V_1 y V_2 existe una flecha de V_1 a V_2 y una flecha de V_2 a V_1 .

DEMOSTRACIÓN. Sea D una digráfica fuertemente conexa y V_1, V_2 una partición de los vértices de D .

Sea $x \in V_1$ y $y \in V_2$, como D es fuertemente conexa existe una xy -trayectoria dirigida T . Además como $y \in V_2$, existe $y' \in V_2$ el primer vértice de T que está en V_2 . Entonces el vértice anterior a y' en T debe estar en V_1 , sea x' éste vértice.

Entonces en D existe una $x'y'$ -flecha que es una V_1V_2 -flecha. Análogamente en D existe una V_2V_1 -flecha.

Ahora, sea D una digráfica. Supongamos que para toda partición de los vértices de D en dos conjuntos V_1 y V_2 existe una flecha de V_1 hacia V_2 , y una flecha de V_2 hacia V_1 . Demostraremos que D es fuertemente conexa.

Sean $u, v \in V(D)$ por demostrar que existe una trayectoria dirigida de u a v . Por reducción al absurdo, supongamos que no hay trayectoria dirigida de u a v . Sea $V_1 = \{x \in V(D) / \text{en } D \text{ existe una } ux\text{-trayectoria dirigida}\}$ y $V_2 = V(D) - V_1$.

$v \in V_2$ ya que estamos suponiendo que en D no hay una uv -trayectoria dirigida. Observemos que V_1, V_2 es una partición de $V(D)$ pues $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $V_1 \cup V_2 = V(D)$, además $u \in V_1$ y $v \in V_2$.

Por hipótesis existe una flecha de V_1 a V_2 . Sean $x \in V_1$ y $y \in V_2$ tal que (x, y) es una flecha de V_1 a V_2 , como $x \in V_1$ existe una ux -trayectoria dirigida T , ahora $T \cup (x, y)$ es un uy -camino dirigido que contiene una uy -trayectoria dirigida, se sigue que $y \in V_1$ y por lo tanto $y \in V_1 \cap V_2$, contradiciendo que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Por lo tanto existe una trayectoria dirigida de

u a v . Análogamente existe una trayectoria de v a u . Por lo tanto D es fuertemente conexa. ■

La Proposición 2.2 nos ayuda a comprender mejor el siguiente Teorema, el cual se necesitará posteriormente.

TEOREMA 2.3 (H. Galeana Sánchez y Neumann-Lara) [12].

Si D es una digráfica núcleo imperfecta crítica, no existe una partición $\{V_1, V_2\}$ de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ ($D[V_1, V_2] = \{(u, v) \in E(D) / u \in V_1, v \in V_2\}$); en otras palabras, $\text{Asim}(D)$ es fuertemente conexa.

DEMOSTRACIÓN. (Por reducción al absurdo)

Sea D una digráfica núcleo imperfecta crítica y supongamos que en D existe una $\{V_1, V_2\}$ partición de $V(D)$ tal que $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$.

Como $V_1 \subset V(D)$, $D[V_1]$ tiene núcleo. Sea N_1 el núcleo de $D[V_1]$ y sea X el conjunto de vértices de V_2 tal que existe una flecha de V_2 a N_1 , entonces N_1 absorbe a los vértices del conjunto X . Consideremos ahora $V_2 \setminus X$, en $D[V_2 \setminus X]$, existe un núcleo. Sea N_2 el núcleo de $D[V_2 \setminus X]$.

Sea $N = N_1 \cup N_2$, demostraremos que N es independiente.

Claramente N_1 es independiente y N_2 es independiente. Demostraremos que no hay flechas entre N_1 y N_2 .

Supongamos que existe $f = (u, v)$ una flecha tal que $u \in N_1$ y $v \in N_2$, como $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ existe $f' = (v, u)$, como $u \in N_1$, v debe de estar en X contradiciendo que v está en $N_2 \subset V_2 \setminus X$.

Supongamos ahora que existe una flecha $f = (u, v)$ tal que $u \in N_2$ y $v \in N_1$, entonces por definición de X , $(v, u) \in F(D)$, pero u debe de estar en X , $u \in N_2 \subset V_2 \setminus X$, lo cual es una contradicción.

Demostraremos ahora que N es absorbente.

DEMOSTRACIÓN. Ya que N_1 es núcleo de $D[V_1]$, N_1 absorbe a los vértices de $V_1 \setminus N_1$ y por la definición de X , N_1 absorbe a los vértices de X .

Ahora por definición de N_2 , N_2 absorbe a los vértices de $V_2 \setminus X$.

Por lo tanto N es absorbente

Concluimos que N es núcleo de D , contradiciendo que D es núcleo imperfecta crítica y que por lo tanto no tiene núcleo. ■

PROPOSICIÓN 2.4. Toda digráfica que no es núcleo perfecta contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica.

DEMOSTRACIÓN. Sea D una digráfica no núcleo perfecta. Si toda subdigráfica inducida propia de D es núcleo perfecta entonces D es núcleo imperfecta crítica. Si no, nos fijamos en una subdigráfica inducida propia no núcleo perfecta D_1 , si toda subdigráfica inducida propia de D_1 es núcleo perfecta, entonces D_1 es núcleo imperfecta crítica, si no, nos fijamos en una subdigráfica inducida propia de D_1 no núcleo perfecta, denotada por D_2 , si toda subdigráfica inducida propia de D_2 es núcleo perfecta, entonces D_2 es

núcleo imperfecta crítica, si no, nos fijamos en una subdigráfica inducida propia de D_2 no núcleo perfecta, denotada por D_3 , y continuamos de esta forma mientras se sigan obteniendo subdigráficas que no son núcleo perfectas hasta obtener una núcleo imperfecta crítica. ■

Usaremos ahora el Teorema 2.3 y la Proposición 2.4, para demostrar el siguiente Teorema.

TEOREMA 2.5 (Berge y Duchet) [3]. Una digráfica completa es una digráfica núcleo perfecta si y sólo si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

DEMOSTRACIÓN. Sea D una digráfica completa, núcleo perfecta.

Sea C un ciclo de D . Como $D[V(C)]$ es una subdigráfica completa y D es núcleo perfecta, $D[V(C)]$ tiene núcleo. Sea $\{x\}$ el núcleo de $D[V(C)]$. Ahora x absorbe a todos los vértices del ciclo, en particular absorbe a su vértice sucesor en el ciclo, digamos x' , por lo que en C se tienen las flechas (x, x') y (x', x) .

Queremos probar ahora que si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica en una digráfica completa D , entonces D es núcleo perfecta.

Supongamos que D no es una digráfica núcleo perfecta. Entonces, por la Proposición 2.4, D contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, sea H esta subdigráfica, nota que $|H| \geq 3$. Por el Teorema 2.3, $\text{Asim}(H)$ es fuertemente conexa, lo que implica que H tiene un ciclo dirigido

asimétrico C , en consecuencia C es un ciclo dirigido asimétrico de D , contradicción. Por lo tanto D es una digráfica núcleo perfecta. ■

DEFINICIÓN 24. Sea D una digráfica, diremos que D tiene un **ciclo hamiltoniano** si en D hay un ciclo dirigido que contiene a todos los vértices de D . Un torneo es hamiltoniano si contiene un **ciclo hamiltoniano**.

TEOREMA 2.6. (H. Galeana_Sánchez y S. Rajsbaum) [14]. Sea T un torneo hamiltoniano con n vértices y γ un ciclo dirigido hamiltoniano de T . Para $k=3$ y $k=4$ existen ciclos dirigidos de longitud k , diremos γ_k , contenidos en T tal que $|F(\gamma_k) \cap F(\gamma)| \geq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sea T un torneo hamiltoniano con n vértices y $\gamma = \{0, 1, 2, \dots, n-2, n-1, 0\}$ un ciclo dirigido hamiltoniano de T .

Se demostrará que existen ciclos de longitud 3 y 4 contenidos en el torneo, que comparten al menos una flecha con el ciclo hamiltoniano γ .

Para longitud 3).

Primero probaremos por inducción sobre i que podemos suponer que las flechas $(0, i)$ con $2 \leq i \leq n-3$, están en T .

Si $(2, 0) \in F(T)$ entonces $(0, 1, 2, 0)$ es el γ_3 buscado. Entonces podemos suponer que $(0, 2) \in F(T)$. Supongamos que $(0, j) \in F(T)$, $2 \leq j \leq n-3$. Por demostrar que $(0, j+1) \in F(T)$, $2 \leq j \leq n-3$.

Si $(j+1, 0) \in F(T)$ entonces $(0, j, j+1, 0)$ es el γ_3 buscado, por lo que podemos suponer que $(0, j+1) \in F(T)$, $2 \leq j \leq n-3$. Entonces $(0, n-2, n-1, 0)$ es el γ_3 buscado en T .

Para longitud 4).

Primero se probará por inducción sobre i que podemos suponer que las flechas $(0, i)$ con $i \in \{3, 5, 7, \dots\} \cap V(\gamma - (n-1))$, están en T

Si $(3, 0) \in F(T)$ entonces $(0, 1, 2, 3, 0)$ es el γ_4 buscado. Entonces podemos suponer que $(0, 2j-1) \in F(T)$, $2j-1 \in \{3, 5, 7, \dots\} \cap V(\gamma - (n-1))$.

Si $(2j+1, 0) \in F(T)$ entonces $(0, 2j-1, 2j, 2j+1, 0)$ es el γ_4 buscado, por lo que podemos suponer que $(0, 2j+1) \in F(T)$.

Si γ es de longitud par, observemos que $(0, n-3) \in F(T)$ por la afirmación anterior. De esta forma, $(0, n-3, n-2, n-1, 0)$ es el γ_4 buscado.

Ahora, si γ es de longitud impar, observemos que:

- 1) $(0, n-2) \in F(T)$ por la afirmación anterior.
- 2) $(n-3, 0) \in F(T)$, pues de lo contrario $(0, n-3, n-2, n-1, 0)$ es el γ_4 buscado.
- 3) $(n-1, n-3) \in F(T)$, ya que de lo contrario $(0, n-4, n-3, n-1, 0)$ es el γ_4 buscado.

Con lo cual se tiene el γ_4 formado por $(0, n-2, n-1, n-3, 0)$. ■

TEOREMA 2.7. Sea T un torneo m -coloreado. Si cada ciclo dirigido contenido en T de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático entonces $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por contradicción. Supóngase que $\mathcal{C}(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta, como $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica completa tenemos por el Teorema 2.5 que existe un ciclo dirigido en $\mathcal{C}(T)$ que no tiene flechas simétricas, es decir un ciclo dirigido contenido en $\text{Asim}(\mathcal{C}(T))$.

Sea $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}, z_0)$ un ciclo dirigido de longitud mínima n contenido en $\text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. Ahora probaremos algunas afirmaciones para posteriormente completar la demostración del Teorema.

Afirmación 1) El ciclo γ está en el torneo T .

Demostración. Sabemos que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$ y que $V(\mathcal{G}(T)) = V(T)$, probaremos que toda flecha de γ está en T .

Sea $f_i = (z_i, z_{i+1})$, $0 \leq i \leq n-1$, una flecha de γ .

Si $f_i \notin F(T)$, como $z_i, z_{i+1} \in V(T)$ y T es torneo, existe en T $(z_{i+1}, z_i) \in F(T)$, por lo que (z_i, z_{i+1}) y (z_{i+1}, z_i) , son flechas de $\mathcal{G}(T)$, contradiciendo que γ está en $\text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. Por lo tanto $f_i \in F(T)$, para $0 \leq i \leq n-1$. Concluimos así que $\gamma \subseteq T$. ♦

Afirmación 2) La longitud del ciclo γ es al menos 5.

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que la longitud de γ es a lo más 4. Como $\gamma \subseteq T$, γ es un ciclo casi-monocromático. Supongamos sin pérdida de generalidad que las flechas $\{(z_i, z_{i+1}) \in F(\gamma) / i \in \{0, 1, \dots, n-2\}\}$ se colorean con el mismo color. Por lo que $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ es una trayectoria dirigida monocromática en T , así que $(z_0, z_{n-1}) \in F(\mathcal{G}(T))$, es decir $(z_{n-1}, z_0) \in F(\text{Sim}(\mathcal{G}(T)) \cap \gamma)$, contradiciendo que $(z_{n-1}, z_0) \in F(\text{Asim}(\mathcal{G}(T)) \cap \gamma)$. ♦

Afirmación 3) Para todos $z_i, z_j \in V(\gamma)$ tal que $j \notin \{i-1, i+1\}$ se cumple que $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(\mathcal{G}(T))$.

Demostración. Sean $z_i, z_j \in V(\gamma)$ tal que $j \notin \{i-1, i+1\}$. Como $z_i, z_j \in V(T)$ existe $(z_i, z_j) \in F(T)$ o $(z_j, z_i) \in F(T)$. Supongamos que $(z_i, z_j) \in F(T)$. Entonces $\gamma' = (z_i, z_j, z_{j+1}, \dots, z_{i-1}, z_i)$ es un ciclo dirigido de T de menor longitud que γ . Como γ es el ciclo de longitud menor que está en $\text{Asim}(\mathcal{G}(T))$, $(z_i, z_j) \in F(\text{Sim}(\mathcal{G}(T)))$. Análogamente si $(z_j, z_i) \in F(T)$, se tiene que $(z_j, z_i) \in F(\text{Sim}(\mathcal{G}(T)))$. Es decir $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(\mathcal{G}(T))$. ♦

Afirmación 4) γ no es monocromático.

Demostración. Por contradicción, supongamos que γ es un ciclo dirigido monocromático, entonces $(z_0, z_1, \dots, z_{n-1})$ es una trayectoria dirigida monocromática, así que $(z_0, z_{n-1}) \in F(\text{Sim}(\mathcal{G}(T) \cap \gamma))$, contradiciendo que las flechas de $\gamma \in F(\text{Asim}(\mathcal{G}(T) \cap \gamma))$. ♦

Como γ no es monocromático, existen al menos dos flechas consecutivas en γ con diferente color. Supongamos sin pérdida de generalidad que (z_0, z_1) es de color rojo y (z_1, z_2) es de color azul.

Afirmación 5) $(z_0, z_2) \in F(T)$.

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos que $(z_2, z_0) \in F(T)$, entonces $\gamma_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$ es un triángulo en T . La hipótesis del Teorema implica que (z_2, z_0) es rojo o azul. Si (z_2, z_0) es rojo entonces (z_2, z_0, z_1) es una trayectoria dirigida de color rojo de z_2 a z_1 , por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{G}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. De manera similar si (z_2, z_0) es azul entonces (z_1, z_2, z_0) es una

trayectoria dirigida de color azul de z_1 a z_0 , por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{G}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. Así que $(z_2, z_0) \notin F(T)$ y concluimos que $(z_0, z_2) \in F(T)$. ♦

Por la afirmación 5, $(z_0, z_2) \in F(T)$ y además la afirmación 3) implica que $(z_2, z_0) \in F(\mathcal{G}(T))$, por lo que existe una $z_2 z_0$ trayectoria dirigida monocromática de longitud al menos 2 contenida en T .

Sea $\alpha = (z_2 = 0, 1, \dots, p = z_0)$ esta trayectoria, $(p \geq 2)$.

Afirmación 6. La trayectoria α no es azul ni roja.

Demostración. Supongamos que α es azul, entonces $(z_1, z_2) \cup \alpha$ contiene una $z_1 z_0$ trayectoria dirigida azul, por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{G}(T))$, lo que es una contradicción a $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$.

Si α es roja, entonces $\alpha \cup (z_0, z_1)$ contiene una $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida roja, por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{G}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. ♦

Sin pérdida de generalidad consideremos α de color negro.

Afirmación 7. Para cada $i \geq 0$ tal que $2i < p$, $(z_1, 2i) \in F(T)$.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe $i \geq 0$ tal que $2i < p$ y $(2i, z_1) \in F(T)$. Sea $2i_0 = \min \{2i / (2i, z_1) \in F(T), (0 \leq 2i < p)\}$. Como $0 = z_2$, y $(z_1, z_2) \in F(T)$ se sigue que $2i_0 > 0$ y $2i_0 - 2 \geq 0$. Además $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(T)$, y $(2i_0, z_1) \in F(T)$.

Así que $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T con dos flechas negras, la $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1)$ y la $(2i_0 - 1, 2i_0)$.

Como γ_4 es un ciclo casi-monocromático, al menos una de las dos flechas $(z_1, 2i_0-2)$ o $(2i_0, z_1)$ es de color negro.

Si $(z_1, 2i_0-2)$ es negra entonces $(z_1, 2i_0-2) \cup (2i_0-2, 2i_0-1, 2i_0, \dots, p = z_0)$, contiene una $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida negra, por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$.

Si $(2i_0, z_1)$ es de color negro entonces $(z_2 = 0, 1, \dots, 2i_0-1, 2i_0) \cup (2i_0, z_1)$, contiene una trayectoria dirigida negra, por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$. ♦

Se analizarán los casos p par y p impar para terminar la demostración del Teorema.

Si p es par, con $p > 0$, entonces $p-2$ es par y $p-2 \geq 0$. Así que por la Afirmación 7), $(z_1, p-2) \in F(T)$, además $\gamma_4 = (z_1, p-2, p-1, p, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T con al menos dos flechas de color negro, la $(p-2, p-1)$ y la $(p-1, p)$. Como γ_4 es un ciclo casi-monocromático, por la hipótesis del Teorema, al menos una de las flechas $(z_1, p-2)$ o (p, z_1) de γ_4 es de color negro, pero $(p, z_1) = (z_0, z_1)$ es roja, por lo que $(z_1, p-2)$ es negra. Así que $(z_1, p-2, p-1, p = z_0)$ es una trayectoria dirigida monocromática en T , por lo tanto $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$. ♦

Para el caso en que p es impar necesitamos primero probar las siguientes afirmaciones.

Afirmación 8). Si p es impar entonces para cada $i \geq 0$ con $1 \leq 2i+1 \leq p$, $(2i+1, z_1) \in F(T)$.

Demostración. Supongamos que existe $i \geq 0$, con $1 \leq 2i+1 \leq p$ y tal que $(z_1, 2i+1) \in F(T)$. Sea $2i_0+1 = \max \{2i+1 / (z_1, 2i+1) \in F(T) (1 \leq 2i+1 \leq p)\}$. Como $p = z_0$ y $(z_0, z_1) \in F(T)$ debemos tener que $2i_0+1 < p$. Así que $(2i_0+3, z_1) \in F(T)$, $(z_1, 2i_0+1) \in F(T)$ y $\gamma_4 = (z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T con al menos dos flechas negras: $(2i_0+1, 2i_0+2)$ y $(2i_0+2, 2i_0+3)$. Como γ_4 es un ciclo casi-monocromático, al menos una de las dos flechas $(z_1, 2i_0+1)$ o $(2i_0+3, z_1)$ es de color negro.

Si $(z_1, 2i_0+1)$ es de color negro entonces $(z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, \dots, p=z_0)$, es una trayectoria dirigida de color negro de z_1 a z_0 , por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$.

Si $(2i_0+3, z_1)$ es de color negro entonces $(z_2=0, 1, \dots, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$, es una trayectoria dirigida de color negro de z_2 a z_1 por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(T))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$. ♦

Afirmación 9. Si p es impar entonces $(1, z_1) \in F(T)$ es azul.

Demostración. Por la afirmación 8), $(1, z_1) \in F(T)$, por demostrar que ésta flecha es azul.

Como $\gamma_3 = (z_2=0, 1, z_1, z_2)$ es un triángulo en T , donde la flecha (z_1, z_2) es azul, la flecha $(0, 1)$ es negra y γ_3 es un ciclo casi-monocromático, tenemos que la flecha $(1, z_1)$ es azul o negra.

Si $(1, z_1)$ es negra entonces $(z_2, 1, z_1)$ es una trayectoria dirigida negra en T , con lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{G}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. Por tanto $(1, z_1)$ es azul $\diamond$

Afirmación 10. Si p es impar entonces $(z_1, p-1) \in F(T)$ es roja.

Demostración Si p es impar entonces $p-1$ es par y por la afirmación 7), $(z_1, p-1) \in F(T)$.

Así que $\gamma_3 = (z_1, p-1, p, z_1)$ es un triángulo en T . Ahora $(z_0, z_1) = (p, z_1)$ es roja, y $(p-1, p)$ es negra, pero γ_3 es un ciclo casi-monocromático, así que $(z_1, p-1) \in F(T)$ es roja o negra.

Si $(z_1, p-1) \in F(T)$ es negra entonces $(z_1, p-1, z_0)$ es una trayectoria dirigida negra en T , por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{G}(T))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(T))$. Por tanto $(z_1, p-1) \in F(T)$ es roja. $\diamond$

Demostraremos ahora el Teorema considerando dos casos:

Caso 1) Si $(1, p) \in F(T)$, entonces $\gamma_4 = (p = z_0, z_1, z_2 = 0, 1, p)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T donde (z_0, z_1) es roja, (z_1, z_2) es azul y $(z_2 = 0, 1)$ es negra, contradiciendo que γ_4 es casi-monocromático.

Caso 2) Si $(p, 1) \in F(T)$, entonces $\gamma_4 = (1, z_1, p-1, p, 1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en T donde $(1, z_1)$ es azul, $(z_1, p-1)$ es roja y $(p-1, p)$ es negra, contradiciendo que γ_4 es casi-monocromático.

Por lo tanto $\mathcal{G}(T)$ es núcleo perfecta. $\blacksquare$

DEFINICIÓN 25. Diremos que D es **núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas**, si toda subdigráfica inducida de D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

COROLARIO 2.8. Sea T un torneo m -coloreado. Si cada ciclo dirigido contenido en T de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático entonces T es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Sea T un torneo m -coloreado, si cada ciclo dirigido contenido en T de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático entonces, $\mathcal{C}(T)$ es núcleo perfecta, por el Teorema 2.7, así que toda subdigráfica inducida de $\mathcal{C}(T)$ tiene núcleo, de donde, toda subdigráfica inducida de T tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, por la Proposición 2.1. Por lo tanto T es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.

LEMA 2.9. Sea T un torneo m -coloreado, si cada ciclo dirigido en T de longitud 3 es monocromático entonces cada ciclo de longitud 4 es casi-monocromático.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma_4 = (0, 1, 2, 3, 0)$ un ciclo dirigido de longitud 4 en T . Supongamos que γ_4 no es monocromático. Sin pérdida de generalidad supongamos que las flechas $(0, 1)$ y $(1, 2)$ son coloreadas con distintos colores, digamos que $(0, 1)$ es roja y $(1, 2)$ es azul. Afirmamos que $(2, 3)$ y $(3, 0)$ son ambas de color rojo o azul.

Primero probaremos que $(2, 3)$ y $(3, 0)$ tienen asignado el mismo color.

Supóngase por contradicción que $(2, 3)$ y $(3, 0)$ tienen asignado color distinto. Si $(0, 2) \in F(T)$, entonces $(0, 2, 3, 0)$ es un ciclo no monocromático de longitud 3 contenido en T , contradicción.

Si $(2, 0) \in F(T)$, entonces $(0, 1, 2, 0)$ es un ciclo no monocromático de longitud 3 contenido en T , contradicción. Así que $(2, 3)$ y $(3, 0)$ tienen asignado el mismo color.

Mostraremos ahora que el color de $(2, 3)$ y $(3, 0)$ es azul o rojo.

Supongamos por contradicción que $(2, 3)$ y $(3, 0)$ están coloreadas de negro.

Si $(1, 3) \in F(T)$, entonces $(0, 1, 3, 0)$ es un ciclo no monocromático de longitud 3, contradicción. Y si $(3, 1) \in F(T)$, entonces $(1, 2, 3, 1)$ es un ciclo no monocromático de longitud 3, contradicción. Por lo tanto las dos flechas $(2, 3)$ y $(3, 0)$ están coloreadas de azul o rojo, en cualquiera de estos dos casos γ_4 es ciclo dirigido casi-monocromático de longitud 4. ■

TEOREMA 2.10. Sea T un torneo m -coloreado, tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es un ciclo monocromático, entonces $\mathcal{A}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 2.9, los ciclos dirigidos de longitud 4 en T son casi monocromáticos, además por hipótesis tenemos que los ciclos de longitud 3 en T son monocromáticos, por lo que por el Teorema 2.7, $\mathcal{A}(T)$ es núcleo perfecta. ■

DEFINICIÓN 25. Sea D una digráfica m -coloreada y $\zeta_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$ un ciclo dirigido de D . Diremos que ζ_n es $\mathcal{C}(D)$ -monocromático si existe un conjunto $\{f_i = (i, i+1) \in F(\mathcal{C}(D)) \mid i \in \{1, \dots, n\}, \text{ notación mod } n\}$ de flechas coloreadas con el mismo color.

Las siguiente figura muestra al ζ_3 que es $\mathcal{C}(D)$ -monocromático de la digráfica D formada por los vértices del ciclo tricolor en D .

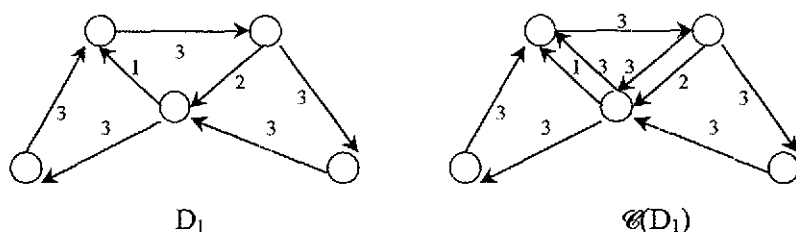


Figura 14

TEOREMA 2.11. Sea T un torneo m -coloreado, tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en T es $\mathcal{C}(T)$ -monocromático. Entonces $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{C}(T)$ es una digráfica completa, por el Teorema 2.5 es suficiente probar que cada ciclo dirigido contenido en $\mathcal{C}(T)$ tiene al menos una flecha simétrica.

Sea γ un ciclo dirigido contenido en $\mathcal{C}(T)$. Supóngase por contradicción que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$, así que por la afirmación 1 del Teorema 2.7, $\gamma \subseteq T$.

Claramente γ es un ciclo dirigido hamiltoniano de $D[V(\gamma)] = T'$. Así que por el Teorema 2.6 existe un ciclo dirigido γ_3 de longitud 3 tal que $\gamma_3 \subseteq T'$.

y donde $|F(\gamma_3) \cap F(\gamma)| \geq 1$. Ahora por hipótesis γ_3 es $\mathcal{Q}(T)$ monocromático, por lo que para $\gamma_3 = (x_0, x_1, x_2, x_0)$ existen x_0x_2 -trayectoria dirigida monocromática, x_1x_0 -trayectoria dirigida monocromática, x_2x_1 -trayectoria dirigida monocromática, así que las flechas $\{(x_0, x_2), (x_1, x_0), (x_2, x_1)\} \subseteq \mathcal{Q}(T)$, es decir $\{(x_2, x_0), (x_0, x_1), (x_1, x_2)\} \subseteq \text{Sim}(\mathcal{Q}(T))$. De esta forma $F(\text{Sim}(\mathcal{Q}(T))) \cap F(\gamma) \neq \emptyset$. ■

TEOREMA 2.12 Sea T un torneo m -coloreado con p vértices tal que existe una digráfica H con $V(T) = V(H)$, $\mathcal{Q}(T) \subseteq H$ y $\mathcal{Q}(H)$ una digráfica núcleo imperfecta crítica. Si existe alguna k ($4 \leq k \leq p$) tal que todo ciclo dirigido de longitud k contenido en T es $\mathcal{Q}(H)$ – monocromático, entonces cada ciclo dirigido de longitud $k - 1$ contenido en T es $\mathcal{Q}(H)$ – monocromático.

DEMOSTRACIÓN. Sea T un torneo m -coloreado y H una digráfica tal que $|V(T)| = |V(H)| = p$, $\mathcal{Q}(T) \subseteq H$ y $\mathcal{Q}(H)$ es una digráfica núcleo imperfecta crítica. Consideremos $\gamma_{k-1} = (z_0, z_1, \dots, z_{k-2}, z_0)$ un ciclo de longitud $k-1$ contenido en T , ($3 \leq k-1 \leq p-1$). Analizemos los siguientes casos:

Caso 1) Cuando existe un vértice $w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$ tal que $\{(z, w) \in F(T) / z \in V(\gamma_{k-1})\} \neq \emptyset$ y $\{(w, z) \in F(T) / z \in V(\gamma_{k-1})\} \neq \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad supóngase que $(z_0, w) \in F(T)$ y sea $i = \min \{j \in \{1, 2, \dots, k-2\} / (w, z_j) \in F(T)\}$. De esta forma $(z_{i-1}, w) \in F(T)$ y $(w, z_i) \in F(T)$. De donde $\gamma_k = (z_{i-1}, w, z_i) \cup (z_i, \gamma_{k-1}, z_{i-1})$ es un ciclo dirigido de longitud k contenido en T y por hipótesis éste ciclo es $\mathcal{Q}(H)$ -monocromático, digamos que es azul, por lo que en $\mathcal{Q}(\mathcal{Q}(H))$ existe una

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

flecha azul de z_{l-1} a z_l , pero $\mathcal{A}(\mathcal{A}(H)) = \mathcal{A}(H)$, además existe $\{f_l = (z_l, z_{l+1}) / l = \{0, 1, \dots, k-2\}$ notación módulo $k-2\}$ de color azul.
 Por lo tanto γ_{k-1} es $\mathcal{A}(H)$ -monocromático.

Caso 2) Cuando hay más de un vértice $w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$.

Para todo vértice $w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$ al menos una de las dos siguientes proposiciones es cierta.

$$a) \{(z, w) \in F(T) / z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset$$

$$b) \{(w, z) \in F(T) / z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset$$

Considerese

$$V_1 = \{w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1})) / \{(z, w) \in F(T) / z \in V(\gamma_{k-1}) = \emptyset\}\} \quad y$$

$$V_2 = \{w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1})) / \{(w, z) \in F(T) / z \in V(\gamma_{k-1}) = \emptyset\}\}.$$

Caso 2.1) Supongamos que $V_2 = \emptyset$. Como $k-1 \leq |V(T)| - 1$ y $V_1 \cup V_2 = (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$, se sigue que $V_1 \neq \emptyset$.

Por hipótesis $\mathcal{A}(H)$ es una digráfica núcleo imperfecta crítica así que cualquier subdigráfica inducida propia por un conjunto de vértices de la cerradura tiene núcleo, en particular consideremos a N_1 el núcleo de $\mathcal{A}(H)[V_1]$. Ahora, como para cada $w \in V_1$, y cada $z \in V(\gamma_{k-1})$, $(z, w) \in F(T)$, tenemos que N_1 es el núcleo de $\mathcal{A}(H)$, contradiciendo que $\mathcal{A}(H)$ es núcleo imperfecta crítica. Por lo tanto $V_2 \neq \emptyset$.

Caso 2.2) Supongamos ahora que $V_1 = \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ y sabemos que $\mathcal{A}(H)$ es núcleo imperfecta crítica, así que $\mathcal{A}(H)[V(\gamma_{k-1})]$ tiene núcleo, digamos que N_1 es núcleo de $\mathcal{A}(H)[V(\gamma_{k-1})]$. Como $V_2 \neq \emptyset$, para cada $w \in V_2$ y

$z \in V(\gamma_{k-1})$ se sigue que $(w, z) \in F(T)$, así que N_1 es el núcleo de $\mathcal{A}(H)$, contradiciendo que $\mathcal{A}(H)$ es núcleo imperfecta crítica. Por lo tanto $V_1 \neq \emptyset$.

Caso 2.3) Consideremos entonces $V_1 \neq \emptyset$, $V_2 \neq \emptyset$ y $(V_1 \cup V(\gamma_{k-1}), V_2)$, una partición de $V(T) = V(H) = V(\mathcal{A}(H))$, como $\mathcal{A}(H)$ es una digráfica núcleo imperfecta crítica, se sigue por el Teorema 2.3 que $\text{Asim}(\mathcal{A}(H))$, es fuertemente conexa, así que existe una flecha de $V_1 \cup V(\gamma_{k-1})$ hacia V_2 en $\text{Asim}(\mathcal{A}(H))$, pero en T no existen flechas de los vértices de γ_{k-1} hacia los vértices de V_2 por lo que en $\text{Asim}(\mathcal{A}(H))$ debe existir una $V_1 V_2$ -flecha llamémosle (x, y) , donde $(x, y) \subseteq \text{Asim}(\mathcal{A}(H))$. Por definición de V_1 y V_2 , $(z_0, x) \in F(T)$ y $(y, z_2) \in F(T)$. Así que $\gamma_k = (z_0, x, y, z_2) \cup (z_2, \gamma_{k-1}, z_0)$ es un ciclo dirigido de longitud k contenido en T , el cual es $\mathcal{A}(H)$ -monocromático por hipótesis, así que $\mathcal{A}(H)$ existe una yx -trayectoria dirigida monocromática, por lo que $(y, x) \in F(\mathcal{A}(H))$, contradiciendo que $(x, y) \in \text{Asim}(\mathcal{A}(H))$. ■

TEOREMA 2.13. Sea T un torneo m -coloreado con p vértices, si existe alguna k ($3 \leq k \leq p$) tal que:

- i.) Para todo torneo m -coloreado T' , $T' \subseteq T$, que no contiene ciclos dirigidos de longitud k , tenemos que $\mathcal{A}(T')$ es una digráfica núcleo perfecta.
 - ii.) Cada ciclo dirigido de longitud k contenido en T es $\mathcal{A}(T)$ -monocromático.
- Entonces $\mathcal{A}(T)$ es una digráfica núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción. Supongamos que $\mathcal{A}(T)$ no es una digráfica núcleo perfecta, así que $\mathcal{A}(T)$ contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica, llamémosle H .

Sea $T_H = T[V(H)]$. Si T_H no tiene ciclos dirigidos de longitud k , tenemos por $i)$ que $\mathcal{A}(T_H)$ es una digráfica núcleo perfecta, por lo que $\mathcal{A}(T_H)$ tiene núcleo, llamémosle $\{v\}$. Como $\mathcal{A}(T_H) \subseteq H$, se tiene que $\{v\}$ es núcleo de H . Contradicción pues H es núcleo imperfecta crítica.

Así que T_H contiene al menos un ciclo dirigido de longitud k .

Ahora tenemos por $ii)$ cada ciclo dirigido de longitud k contenido en T es $\mathcal{A}(T)$ -monocromático.

Así que, si $k = 3$, se sigue del Teorema 2.11 que $\mathcal{A}(T_H)$ es una digráfica núcleo perfecta por lo que $\mathcal{A}(T_H)$ tiene núcleo digamos $\{v\}$ y como $\mathcal{A}(T_H) \subseteq H$, se tiene que $\{v\}$ es núcleo de H , contradiciendo que H es núcleo imperfecta crítica.

Si $k \geq 4$, al aplicar el Teorema 2.12 cada ciclo de longitud $k-1$ es $\mathcal{A}(T_H)$ -monocromático. Por lo que se puede volver a usar el Teorema 2.12 recursivamente hasta obtener cada ciclo de longitud 3 contenido en T_H es $\mathcal{A}(T_H)$ -monocromático. Y por el Teorema 2.11, $\mathcal{A}(T_H)$ es una digráfica núcleo perfecta, por lo que $\mathcal{A}(T_H)$ tiene núcleo digamos $\{v\}$ y como $\mathcal{A}(T_H) \subseteq H$, se tiene que $\{v\}$ es núcleo de H , contradicción.

Por lo tanto $\mathcal{A}(T)$ es núcleo perfecta. ■

Si en el Teorema 2.7 sólo se tienen triángulos dirigidos de longitud 3 casi-monocromáticos contenidos en T , sin pedir que los ciclos de longitud 4 sean casi-monocromáticos el resultado falla. El torneo G_5 , con 5 vértices, 5-coloreado en el que todo C_3 es casi-monocromático obtenido por Shen Minggang no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, por lo que $\mathcal{A}(G_5)$ no es una digráfica núcleo perfecta. Por lo tanto no se puede quitar la hipótesis de que cada C_4 sea casi-monocromático. Ver la figura 15.

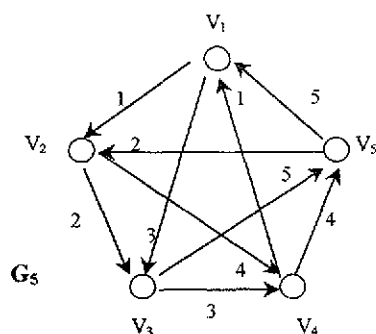


Figura 15

La Figura 16 es un torneo 3-coloreado que cumple la condición del Teorema de Shen Minggang pues cada ciclo de longitud 3 es casi-monocromático, sin embargo el ciclo de longitud 4 no es casi monocromático, por lo que no cumple la condición del Teorema 2.7.

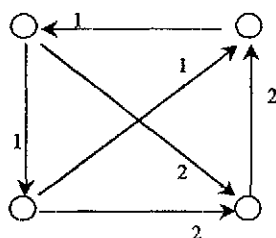


Figura 16

La Figura 17 es un torneo 3-coloreado que cumple la condición del Teorema 2.7 pues cada ciclo de longitud a lo más 4 es un torneo es casi-monocromático, pero no cumple la condición del Teorema de Shen Minggang, ya que tiene un T_3 tricolor.

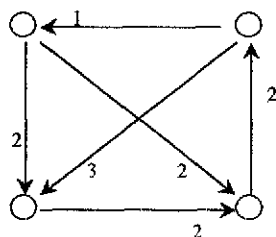


Figura 17

CAPITULO 3

NÚCLEOS EN DIGRÁFICAS COLOREADAS POR FLECHAS

DEFINICIÓN 26. Sea D una digráfica, una m -coloración es llamada **m -coloración libre de $\{C_3, T_3\}$ de D** si ésta es una m -coloración de D tal que todo torneo de orden 3 es casi-monocromático.

Denotaremos por $\mathcal{E}$ la clase de digráficas tal que toda m -coloración libre de $\{C_3, T_3\}$ es una digráfica núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas. Observemos que si la digráfica D es un torneo de orden n , $D = T_n$, toda subdigráfica inducida de D también es un torneo así que en el Teorema 1.1, (Shen Minggang) toda subdigráfica inducida es un torneo m -coloreado libre de $\{C_3, T_3\}$ y cada subdigráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. De esta forma todo torneo m -coloreado libre de $\{C_3, T_3\}$ esta en $\mathcal{E}$. Más adelante se probará que la digráfica obtenida de un torneo al eliminar una sola flecha está en $\mathcal{E}$.

DEFINICIÓN 27. Sea D una digráfica, una m -coloración es llamada **m -coloración libre de $\{C_3, C_4\}$ de D** si ésta es una m -coloración de D tal que todo ciclo de longitud 4 es casi-monocromático.

Denotaremos por $\mathcal{F}$ la clase de digráficas tal que toda m -coloración libre de $\{C_3, C_4\}$ es una digráfica núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.

Cuando la digráfica D es un torneo de orden n , $D = T_n$, m -coloreado libre de $\{C_3, C_4\}$, D está en $\mathcal{F}$, por el Corolario 2.8.

En este capítulo y los siguientes denotaremos $[x, y]$ la flecha entre x y y que puede ser (x, y) o (y, x) .

DEFINICIÓN 28. Una digráfica D es llamada un **casi-torneo** si D resulta de borrar una sola flecha de un torneo T_n .

LEMA 3.1. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una flecha $[x, y]$ de algún torneo T_n m -coloreado (es decir $D \cong T_n - [x, y]$). Si toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. Entonces al menos una de las siguientes condiciones es cierta.

- i). D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.
- ii). Existe un ciclo dirigido $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$. Y para cualesquiera dos vértices no consecutivos $z, w \in V(\gamma)$, se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

DEMOSTRACIÓN. Si D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas se cumple i).

Supóngase que D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, probaremos ii). Recalquemos que los únicos 2 vértices no adyacentes de D son x y y .

Primero definamos un orden en $V(D)$ como sigue:

Como $D-\{x\}$ es un torneo y $D-\{x\}$ es una subdigráfica inducida propia de D , se tiene por hipótesis que $D-\{x\}$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, digamos que el vértice $\{w_0\}$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de $D-\{x\}$.

Si $(x \rightarrow_{\text{mono}} w_0)$ en D entonces w_0 es núcleo por trayectorias monocromáticas en D . Así que $(x \sim \rightarrow_{\text{mono}} w_0)$ en D .

Si $\{x, w_0\}$ es un subconjunto de D independiente por trayectorias monocromáticas entonces $w_0 = y$ y $\{x, y\}$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Así que $\{x, w_0\}$ no es un subconjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D y como $(x \sim \rightarrow_{\text{mono}} w_0)$ en D se debe tener que $(w_0 \rightarrow_{\text{mono}} x)$ en D , así que $(w_0, x) \in F(\mathcal{G}(D))$, de hecho, $(w_0, x) \in \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$.

Ahora, $D-\{x, w_0\}$ es también una subdigráfica inducida propia de D , así que por hipótesis debemos tener un vértice w_1 que es núcleo por trayectorias monocromáticas en $D-\{x, w_0\}$.

$D-\{x, w_0, w_1\}$ también es una subdigráfica inducida propia de D , así que existe un vértice w_2 que es núcleo por trayectorias monocromáticas en $D-\{x, w_0, w_1\}$.

Continuando de esta forma podemos dar un orden a los vértices de $D-\{x\}$ tal que el vértice w_k es núcleo por trayectorias monocromáticas de la digráfica $D-\{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$. Llamaremos a este el w -orden de $V(D)-\{x\}$, y diremos que un vértice w precede a otro si éste aparece antes en el w -orden.

Si $\{x\}$ es absorbente por trayectorias monocromáticas en $(D - \{x\})$ entonces $\{x\}$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Por lo tanto

existe un vértice en $(D - \{x, w_0\})$ que no es absorbido por x . Elijase k el menor número natural tal que $(w_k \sim \rightarrow_{\text{mono}} x)$ en D . Observemos que por nuestra elección de w_k todos los vértices w -precedentes a w_k son absorbidos por x .

Si $\{x, w_k\}$ es un subconjunto de $V(D)$ independiente por trayectorias monocromáticas en D , entonces $\{x, w_k\}$ es núcleo por trayectorias monocromáticas de D , pues por la elección de k todos los vértices anteriores a w_k son absorbidos por x y el resto de los vértices de D son absorbidos por w_k . Así que $\{x, w_k\}$ no es independiente por trayectorias monocromáticas, pero sabemos que $(w_k \sim \rightarrow_{\text{mono}} x)$, por lo que $(x \rightarrow_{\text{mono}} w_k)$. Por lo tanto $(x, w_k) \in \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$.

Consideremos $u_0 = w_k$. Existe un vértice en el w -orden el cual no es absorbido por u_0 , ya que de otra forma $\{u_0\}$ sería núcleo por trayectorias monocromáticas de D . Este vértice debe w -preceder a u_0 , en el w -orden. Elijamos el menor l tal que $(w_l \sim \rightarrow_{\text{mono}} u_0)$ en D y $u_1 = w_l$. Nota que por la definición de el w -orden se sigue que $(u_0 \rightarrow_{\text{mono}} u_1)$ en D y por tanto $(u_0, u_1) \in \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$.

Elijamos l_2 el menor natural tal que $(w_{l_2} \sim \rightarrow_{\text{mono}} u_1)$ en D y $u_2 = w_{l_2}$. Nota que por la definición de el w -orden se sigue que $(u_1 \rightarrow_{\text{mono}} u_2)$ en D y por tanto $(u_1, u_2) \in \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$.

Podemos continuar en una forma similar para definir u_3, u_4 , etc. Llamemos a este el u -orden y notemos que no necesariamente incluye a todos los vértices de $D - \{x\}$. Existe un primer vértice en el u -orden el cual no absorbe a x (porque w_0 no absorbe a x).

Sea m el menor número natural tal que $(x \rightsquigarrow_{\text{mono}} u_m)$ en D .
 Observemos que $(u_m \rightarrow_{\text{mono}} x)$ ya que $u_m = w_l$, $l < k$, y por la definición de w_k ya que w_k es el primer vértice en el w -orden que no es absorbido por trayectorias monocromáticas por x .

Tenemos $\gamma = (x, w_k = u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, x) \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$.

Observemos que, $\{(u_i, x), (x, u_i)\} \in F(\mathcal{Q}(D))$, $1 < i < m$, Si $m > 1$,
 $\{(u_i, u_j), (u_j, u_i)\} \in F(\mathcal{Q}(D))$, $j \notin \{i-1, i+1\}$, $1 < i < m$, pues k es
 el menor número natural tal que $(w_k \rightsquigarrow_{\text{mono}} x)$ en D y m es el menor
 número natural tal que $(x \rightsquigarrow_{\text{mono}} u_m)$ en D .

Por construcción x absorbe por trayectorias monocromáticas a todo
 vértice en γ excepto a $u_0, \dots, u_i$ ($0 \leq i \leq m$) absorbe por trayectorias
 monocromáticas a todo vértice en γ excepto a u_{i+1} y u_m absorbe por
 trayectorias monocromáticas a todo vértice en γ excepto a x .

Por construcción $x \in V(\gamma)$. Finalmente probaremos que $y \in V(\gamma)$.
 Consideremos que γ no es un ciclo hamiltoniano, pues si lo fuera $y \in V(\gamma)$.
 Si $y \notin V(\gamma)$ entonces $D[V(\gamma)]$ es una subdigráfica inducida propia de D y la
 hipótesis implica que existe un vértice $z \in \gamma$ tal que $\{z\}$ es núcleo por
 trayectorias monocromáticas en $D[V(\gamma)]$ y por lo tanto $\{z\}$ es absorbente por
 trayectorias monocromáticas en $D[V(\gamma)]$ lo cual es una contradicción pues
 ningún vértice de γ absorbe por trayectorias monocromáticas a todos los
 demás vértices de γ . Así que $y \in V(\gamma)$ y $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$. ■

Por el Corolario 2.8, si T es un torneo m -coloreado, donde cada ciclo dirigido contenido en T de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático, T es núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas. Veamos ahora que sucede en digráficas que son casi-torneos que tienen las mismas hipótesis del Corolario 2.8.

TEOREMA 3.2. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha $[x, y]$ de algún torneo m -coloreado T_n (es decir $D \cong T_n - [x, y]$). Si todo ciclo dirigido contenido en D de longitud a lo más 4 es un ciclo casi-monocromático entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción sobre $|V(D)| = n$. Para $n = 1$ ó 2 la proposición es obvia. Supóngase que toda digráfica m -coloreada D' que resulta de borrar una sola flecha $[x, y]$ de algún torneo m -coloreado T' con $|V(D')| < n$ y tal que todo ciclo dirigido de longitud a lo mas 4 casi-monocromático tiene un núcleo por trayectorias monocromáticas. Y sea D una digráfica como en la hipótesis con $|V(D)| = n$. Probaremos que D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Por contradicción. Supóngase que D no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas

Por la hipótesis de inducción y por el Teorema 2.12 del Capítulo 2, toda subdigráfica inducida propia de D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas y por el Lema anterior, existe un ciclo $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ tal que para cualesquiera 2 vértices no consecutivos $z, w \in V(\gamma)$, se tiene que $\{(z, w), \{(w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$

Sea $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_m, z_0)$. Probaremos algunas propiedades de γ .

Afirmación 1) El ciclo γ no es monocromático.

Demostración. Supongamos que γ es un ciclo dirigido monocromático, entonces $(z_1, z_2, \dots, z_m, z_0)$ es una trayectoria dirigida monocromática en D , por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim } \mathcal{C}(D)$. ♦

Afirmación 2) Si $z_i, z_j \in V(\gamma)$ tal que $j \notin \{i-1, i+1\}$ entonces $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Demostración. La demostración se sigue del Lema 3.1 ♦

Afirmación 3) El único cambio de colores en γ está en x y en y .

Demostración. Por contradicción supóngase sin pérdida de generalidad que z_1 es un vértice de γ distinto de x y de y tal que en z_1 existe un cambio de color de γ .

Supongamos que (z_0, z_1) es roja y (z_1, z_2) es azul

Afirmación 3.1) $(z_2, z_0) \notin F(D)$

Demostración. Supóngase por contradicción que $(z_2, z_0) \in F(D)$ entonces $\gamma_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$ es un triángulo en D . La hipótesis del teorema implica que (z_2, z_0) es roja o azul. Si (z_2, z_0) es roja entonces (z_2, z_0, z_1) es una $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida roja en D por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Si (z_2, z_0) es azul entonces (z_1, z_2, z_0) es

una $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida azul en D por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Así que $(z_2, z_0) \notin F(D)$. No obstante la afirmación 2) implica que $(z_2, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$, por lo tanto existe una trayectoria dirigida monocromática de longitud al menos 2 de z_2 a z_0 en D .

Sea $\alpha = (z_2 = 0, 1, \dots, p = z_0)$ tal trayectoria ($p \geq 2$)

Afirmación 3.2) La trayectoria α no es azul, ni roja

Demostración. Supongamos por contradicción que α es azul, entonces $(z_1, z_2) \cup \alpha$ es una trayectoria dirigida azul de z_1 a z_0 en D , por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$ lo cual contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Supongamos ahora que α es roja, entonces $\alpha \cup (z_0, z_1)$ es una trayectoria dirigida roja de z_2 a z_1 en D , por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(D))$ lo cual contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Supongamos sin pérdida de generalidad que la trayectoria α es negra.

Afirmación 3.3. Para cada $i \geq 0$ tal que $2i < p$, se sigue que $(z_1, 2i) \in F(D)$.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que existe $j \geq 0$ tal que $2j < p$ y $(z_1, 2j) \notin F(D)$.

Sea $2i_0 = \min \{2j \mid (z_1, 2j) \notin F(D), (0 \leq 2j < p)\}$.

Como $0 = z_2$, y $(z_1, z_2) \in F(D)$ se sigue que $2i_0 > 0$ por lo que $2i_0 - 2 \geq 0$. Ahora $z_1 \notin \{x, y\}$ y $D = T_n - [x, y]$ de aquí se sigue que $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(D)$, $(z_1, 2i_0) \notin F(D)$ y $(2i_0, z_1) \in F(D)$.

Sea $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, z_1)$, observemos que γ_4 es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con dos flechas negras, la flecha $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1)$ y la flecha $(2i_0 - 1, 2i_0)$.

Por la hipótesis del Teorema γ_4 debe ser un ciclo casi-monocromático, así que al menos una de las dos flechas $(z_1, 2i_0 - 2)$ o $(2i_0, z_1)$ es de color negro.

Si $(z_1, 2i_0 - 2)$ es negra entonces $(z_1, 2i_0 - 2) \cup (2i_0, \alpha, p = z_0)$ contiene una $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida negra, por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Si $(2i_0 - 2, z_1)$ es de color negro entonces $(z_2 = 0, \alpha, 2i_0) \cup (2i_0, z_1)$, contiene una trayectoria dirigida negra, por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Concluimos la prueba de la afirmación 3) analizando los casos sobre la longitud de α , con p par y p impar.

Si p es par, entonces $p - 2$ también es par y como $p \geq 2$, tenemos que $p - 2 \geq 0$. Así que por la Afirmación 3.4), $(z_1, p - 2) \in F(D)$, así que $\gamma_4 = (z_1, p - 2, p - 1, p, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D que tiene al menos dos flechas negras, la $(p - 2, p - 1)$ y la $(p - 1, p)$, y una

flecha roja, la $(z_0 = p, z_1)$, además γ_4 es un ciclo casi-monocromático por hipótesis, lo que implica que la flecha $(z_1, p-2)$ es de color negro. De donde $(z_1, p-2, p-1, p = z_0)$ es una trayectoria dirigida negra en D , así que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$

Ahora si la longitud de la trayectoria α es impar entonces necesitamos primero probar algunas afirmaciones.

Afirmación 3.4). Si p es impar entonces para cada $i \geq 0$ tal que $1 \leq 2i+1 \leq p$, se sigue que $(2i+1, z_1) \in F(D)$.

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un $i \geq 0$, tal que $(2i+1, z_1) \notin F(D)$, y sea $2i_0+1 = \max \{2i+1 / (2i+1, z_1) \notin F(D)\}$, $(1 \leq 2i+1 \leq p)$. Como $p = z_0$ y $(z_0, z_1) \in F(D)$ debemos tener que $2i_0+1 < p$. Así que $(2i_0+3, z_1) \in F(D)$, $(z_1, 2i_0+1) \in F(D)$. Ahora $z_1 \neq x$, $z_1 \neq y$, de aquí que por la definición de D , z_1 es adyacente a todo vértice de $D - \{z_1\}$.

Sea $\gamma_4 = (z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$ entonces γ_4 es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con dos flechas negras, $(2i_0+1, 2i_0+2)$ y $(2i_0+2, 2i_0+3)$. La hipótesis del Teorema para γ_4 implica que al menos una de las flechas $(z_1, 2i_0+1)$, $(2i_0+3, z_1)$ es negra.

Si $(z_1, 2i_0+1)$ es negra entonces $(z_1, 2i_0+1) \cup (2i_0+1, \alpha, p = z_0)$, es una $z_1 z_0$ - trayectoria dirigida negra en D , por lo que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$

Si $(2i_0+3, z_1)$ es negra entonces $(z_2 = 0, \alpha, 2i_0+3) \cup (2i_0+3, z_1)$, es una $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida negra en D , por lo que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(T))$.

Afirmación 3.5. Si p es impar entonces a) $(1, z_1) \in F(D)$ es azul, b) $(z_1, p-1) \in F(D)$ es roja.

Demostración. Para demostrar a) tenemos de la afirmación 3.4) que $(1, z_1) \in F(D)$, así que $\gamma_3 = (z_1, z_2, 1, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3, donde (z_1, z_2) es de color azul y $(z_2, 1)$ es de color negro, como por hipótesis el ciclo γ_3 es casi-monocromático, la flecha $(1, z_1)$ de γ_3 es azul o es negra.

Si $(1, z_1)$ es negra entonces $(z_2, 1, z_1)$ es una $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida negra en D , así que $(z_2, z_1) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto $(1, z_1) \in F(D)$ es azul.

Por demostrar b). Como p es impar, $p-1$ es par así que por la afirmación 3.3) la flecha $(z_1, p-1)$ está en D .

Así que $\gamma_3 = (z_1, p-1, p, z_1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en D donde $(p=z_0, z_1) = (p, z_1)$ es roja, $(p-1, p)$ es negra, y como γ_3 es un ciclo casi-monocromático por hipótesis se debe tener que $(z_1, p-1)$ es negra o roja.

Si $(z_1, p-1)$ es negra entonces $(z_1, p-1, p=z_0)$ es una trayectoria dirigida negra en D , así que $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Por tanto $(z_1, p-1) \in F(D)$ es roja.

Afirmación 3.6). $\{(1, p), (p, 1)\} \cap F(D) = \emptyset$

Demostración. Si $(1, p) \in F(D)$ entonces $(1, p = z_0, z_1, z_2 = 0, 1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con al menos 3 flechas coloreadas con distinto color: (z_0, z_1) roja, (z_1, z_2) azul y $(0, 1)$ negra, contradiciendo que todo ciclo de longitud a lo mas 4 en D sea casi-monocromático.

Si $(p, 1) \in F(D)$ entonces $(p, 1, z_1, p-1, p)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con al menos 3 flechas coloreadas con distinto color $(1, z_1)$ azul, $(z_1, p-1)$ roja y $(p-1, p)$ negra, contradiciendo que todo ciclo de longitud a lo mas 4 en D sea casi-monocromático.

Afirmación 3.7). $\{(0, p-1), (p-1, 0)\} \cap F(D) = \emptyset$

Demostración. Si $(0, p-1) \in F(D)$ entonces $(0, p-1, p, z_1, 0)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con al menos 3 flechas coloreadas con distinto color: $(p-1, p)$ negra, (p, z_1) roja y $(z_1, 0)$ azul, lo cual contradice que todo ciclo de longitud a lo mas 4 en D sea casi-monocromático.

Si $(p-1, 0) \in F(D)$ entonces $(p-1, 0, 1, z_1, p-1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con al menos 3 flechas coloreadas con distinto color: $(0, 1)$ negra, $(1, z_1)$ azul y $(z_1, p-1)$ roja, lo cual contradice que todo ciclo de longitud a lo mas 4 en D sea casi-monocromático.

De la afirmación 3.6) se sigue que $\{x, y\} = \{1, p\}$ y de la afirmación 3.7) se sigue que $\{x, y\} = \{0, p-1\}$ por lo que $\{1, p\} = \{0, p-1\}$ lo cual no es posible pues $p \geq 2$.

Por lo tanto se cumple que los únicos cambios de colores en γ están en x y en y . ♦

En lo que sigue supondremos que (x, γ, y) es azul y (y, γ, x) es roja.

Afirmación 4) El ciclo $\gamma \subseteq D$

Demostración. Como $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$ y $D \cong T_n - [x, y]$ es suficiente probar que x y y no son consecutivos en γ .

Por contradicción, supóngase que x y y son consecutivos en γ , digamos $x=z_i$ y $y=z_{i+1}$ y como por la afirmación 3) los únicos cambios de color del ciclo γ están en x y en y entonces (z_{i+1}, γ, z_i) es una trayectoria dirigida monocromática en D , así que $(z_{i+1}, z_i) \in F(\mathcal{G}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$. ♦

Afirmación 5) La longitud del ciclo γ es al menos 5.

Demostración. Sea $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_m, z_0)$. Supongamos por contradicción que la longitud de γ es a lo más 4, entonces γ es un ciclo casi-monocromático.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $(z_1, z_2, \dots, z_m, z_0)$ es una trayectoria dirigida monocromática en D , entonces $(z_1, z_0) \in F(\mathcal{G}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$. ♦

En lo que sigue denotaremos $\ell(\gamma) = q$, $\ell(x, \gamma, y) = p$, $\gamma = (x = q, 1, \dots, p-1, p = y, p+1, \dots, q-1, q)$ y supondremos sin pérdida de generalidad que $\ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$.

Afirmación 6) La flecha $(q - i, i)$ está en D para cada $i (1 \leq i \leq p-1)$.

Demostración. Procederemos por inducción sobre i .

Para $i=1$, probaremos que la flecha $(q-1, 1)$ está en D . Supongamos por contradicción que $(q-1, 1) \notin F(D)$. Como $\{q-1, 1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, entonces por la definición de D , $(1, q-1) \in F(D)$. Así que $(1, q-1, q, 1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en D , el cual debe ser casi-monocromático, pero estamos suponiendo que (x, y, x) es azul y (y, x, y) es roja, por lo tanto $(x, 1)$ es azul y $(q-1, q)$ es roja, así que $(1, q-1)$ debe ser azul o roja.

Si $(1, q-1)$ es azul, entonces $(x = q, 1, q-1)$ es una trayectoria dirigida azul en D . Así que $(q, q-1) \in F(\mathcal{C}(D))$, de donde $(q-1, q) \in \text{Sim}(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Si $(1, q-1)$ es roja entonces $(1, q-1, q)$ es una trayectoria dirigida roja en D . Así que $(1, q) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto $(q-1, 1) \in F(D)$.

Supongamos ahora que $(q - i, i) \in F(D)$. Probaremos que $(q - (i+1), i+1) \in F(D)$ para $i (1 \leq i+1 \leq p-1)$.

Por contradicción supongamos que $(q - (i+1), i+1) \notin F(D)$, con $1 \leq i+1 \leq p-1$.

Como $1 \leq i+1 \leq p-1$ y $l(x, y, x) \leq l(y, x, y)$, tenemos que $\{q - (i+1), i+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$. Así que por la definición de D , $((i+1), q - (i+1)) \in F(D)$ y $\gamma_4 = ((i+1), q - (i+1), q - i, i, (i+1))$ es un ciclo dirigido en D de longitud 4, donde $(i, (i+1))$ es azul y $(q - (i+1), q - i)$ es roja.

Pero γ_4 es casi-monocromático por la hipótesis del Teorema, así que $(i+1, q - (i+1))$ y $(q - i, i)$ deben ser ambas rojas o azules.

Si $(i+1, q - (i+1))$ y $(q - i, i)$ son ambas rojas entonces $(i+1, q - (i+1), q - i, i)$ es una trayectoria dirigida roja en D por lo que $(i+1, i) \in F(\mathcal{Q}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$.

Si $(i+1, q - (i+1))$ y $(q - i, i)$ son ambas azules entonces $(q - i, i, i+1, q - (i+1))$ es una trayectoria dirigida azul en D así que $(q - i, q - (i+1)) \in F(\mathcal{Q}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$.

Por lo tanto $(q - (i+1), (i+1)) \in F(D)$. ♦

Afirmación 7) $(p - i, p + i) \in F(D)$ para cada i ($1 \leq i \leq p-1$).

Demostración. Procederemos por inducción sobre i .

Para $i=1$, probaremos que la flecha $(p-1, p+1)$ está en D . Supongamos por contradicción que $(p-1, p+1) \notin F(D)$. Como x y y no son consecutivos en γ , $\{p-1, p+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, así que por la definición de D , $(p+1, p-1) \in F(D)$. De esta forma $\gamma_3 = (p+1, p-1, p, p+1)$ es un ciclo dirigido de longitud 3 en D , en donde $(p-1, p)$ es azul y $(p, p+1)$ es roja. Como γ_3 debe ser casi-monocromático por hipótesis, entonces $(p+1, p-1)$ debe ser azul o roja.

Si $(p+1, p-1)$ es azul, entonces $(p+1, p-1, p)$ es una trayectoria dirigida azul en D , por lo que $(p+1, p) \in F(\mathcal{Q}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$.

Si $(p+1, p-1)$ es roja entonces $(p, p+1, p-1)$ es una trayectoria dirigida roja en D , así que $(p, p-1) \in F(\mathcal{Q}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$. Por lo tanto $(p-1, p+1) \in F(D)$.

Supongamos ahora que $(p - i, p + i) \in F(D)$, para i ($1 \leq i \leq p-1$).

Demostraremos que $(p - (i+1), p+(i+1)) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(p - (i+1), p+(i+1)) \notin F(D)$, $1 \leq i+1 \leq p-1$.

Como $\{(p - (i+1), p + (i+1))\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, se tiene por la definición de D que $(p + (i+1), p - (i+1)) \in F(D)$. Así que $\gamma_4 = (p + (i+1), p - (i+1), p - i, p + i, p + (i+1))$ es un ciclo dirigido de longitud 4 en D , en el que $(p - (i+1), p - i)$ es azul y $(p + i, p + (i+1))$ es roja. Como por hipótesis γ_4 es casi-monocromático entonces $(p + (i+1), p - (i+1))$ y $(p - i, p + i)$ son ambas azules o rojas.

Si $(p + (i+1), p - (i+1))$ y $(p - i, p + i)$ son ambas azules entonces $(p + (i+1), p - (i+1), p - i, p + i)$ es una trayectoria dirigida azul en D por lo que $(p + (i+1), p + i) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Si $(p + (i+1), p - (i+1))$ y $(p - i, p + i)$ son ambas rojas entonces $(p - i, p + i, p + (i+1), p - (i+1))$ es una trayectoria dirigida roja en D por lo que $(p - i, p - (i+1)) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto $(p - i, p + i) \in F(D)$, para cada i ($1 \leq i \leq p-1$). ♦

Afirmación 8) $(p - 1, p + 2) \in F(D)$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $(p - 1, p + 2) \notin F(D)$. Como por la afirmación 5) la longitud del ciclo γ es al menos 5, $\{p - 1, p + 2\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, y por la definición de D , se tiene que $(p + 2, p - 1) \in F(D)$. Así que $\gamma_4 = (p + 2, p - 1, p, p + 1, p + 2)$ es un ciclo

dirigido de longitud 4 en D , en donde $(p-1, p)$ es azul y $(p, p+1)$, $(p+1, p+2)$ son rojas. Como por hipótesis γ_4 es casi-monocromático, se sigue que $(p+2, p-1)$ debe ser de color rojo. De esta forma $(p, p+1, p+2, p-1)$ es una trayectoria dirigida de color rojo en D , de p hacia $p-1$, por lo que $(p, p-1) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. ♦

Afirmación 9) $(p-i-1, p+i) \in F(D)$ para cada i ($1 \leq i \leq p-2$).

Demostración. Procederemos por inducción sobre i .

Para $i=1$, probaremos que $(p-2, p+1) \in F(D)$. Supongamos por contradicción que $(p-2, p+1) \notin F(D)$. La afirmación 5) y la suposición de que $\ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$, implica que $\{p-2, p+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, y por la definición de D , se tiene que $(p+1, p-2) \in F(D)$.

Así que $\gamma_4 = (p+1, p-2, p-1, p, p+1)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 en D , donde la flecha $(p, p+1)$ es de color rojo y las flechas $(p-2, p-1)$, $(p-1, p)$ son de color azul. Como γ_4 es un ciclo casi-monocromático por hipótesis, se debe tener que la flecha $(p+1, p-2)$ es de color azul.

Así $(p+1, p-2, p-1, p)$ es una trayectoria dirigida azul en D , por lo que $(p+1, p) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto $(p-2, p+1) \in F(D)$.

Supongamos ahora que $(p-i-1, p+i) \in F(D)$, para i ($1 \leq i \leq p-2$).

Demostraremos que $(p-(i+1)-1, p+(i+1)) \in F(D)$.

Supongamos por contradicción que $(p-(i+1)-1, p+(i+1)) \notin F(D)$. Como la longitud del ciclo γ es al menos $2p$ y $1 \leq (i+1) \leq p-2$, además $\ell(x, \gamma, y) = p \leq \ell(y, \gamma, x)$, se tiene que $p-(i+1)-1 \geq 1$ y $p+(i+1) \leq q-2$ por lo que $\{p-(i+1)-1, p+(i+1)\} \cap \{x, y\} = \emptyset$.

Se sigue de la definición de D que $(p + (i+1), p - (i+1) - 1) \in F(D)$. Así que $\gamma_4 = (p + (i+1), p - (i+1) - 1, p - (i+1), p + i, p + (i+1))$ es un ciclo dirigido de longitud 4 en D , donde $(p + i, p + (i+1))$ es roja y $(p - (i+1) - 1, p - (i+1))$ es azul. Como γ_4 es casi-monocromático por hipótesis, se debe tener que $(p - i - 1, p + i)$ y $(p + (i+1), p - (i+1) - 1)$ son ambas azules o rojas.

Si estas dos flechas son rojas entonces $(p - i - 1, p + i, p + (i+1), p - (i+1) - 1)$ es una trayectoria dirigida roja en D y $(p - i - 1, p + (i+1) - 1) \in F(\mathcal{Q}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$.

Si ambas flechas son azules entonces $(p + (i+1), p - (i+1) - 1, p - i - 1, p + i)$ es una trayectoria dirigida azul en D por lo que $(p + (i+1), p + i) \in F(\mathcal{Q}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{Q}(D))$.

Por lo tanto, $(p - i - 1, p + i) \in F(D)$ para cada i ($1 \leq i \leq p-2$). ♦

Ahora de la suposición de que $\ell(x, \gamma, y) \leq \ell(y, \gamma, x)$ se sigue que $\ell(x, \gamma, y) = p \leq \frac{q}{2}$.

Si $p = \frac{q}{2}$ entonces se sigue de la afirmación 6) aplicada a $i = \frac{q}{2} - 1$,

que $(q - (\frac{q}{2} - 1), (\frac{q}{2} - 1)) \in F(D)$, es decir $(\frac{q}{2} + 1, \frac{q}{2} - 1) \in F(D)$,

con lo cual $(p + 1, p - 1) \in F(D)$, contradiciendo la afirmación 7).

Si $p = \frac{q-1}{2}$ entonces $p+2 = q - (p-1)$ pues $\frac{q-1}{2} + 2 = q - (\frac{q-1}{2} - 1)$

lo que implica que $\frac{q}{2} + \frac{3}{2} = \frac{q}{2} + \frac{3}{2}$ y por la Afirmación 6)

considerando $i = p-1$, se tiene que $(q - (p-1), p-1) \in F(D)$ con lo que $(p+2, p-1) \in F(D)$ contradiciendo la afirmación 8). Así que supondremos que $p < \frac{q-1}{2}$.

Afirmación 10) Para cada i ($1 \leq i \leq p-1$) existe $j(i) \in (y, \gamma, x)$, tal que $(p-i, j(i)) \in F(D)$ es roja y $(p+i \leq j(i) \leq q - (p-i))$.

Demostración. Por inducción sobre i .

Para $i=1$, probaremos que existe $j(1) \in (y, \gamma, x)$, tal que $(p-1, j(1)) \in F(D)$ es roja.

Sea $j(1) = \min \{ k, p+2 < k \leq q / (k, p-1) \in F(D) \} - 2$.

$j(1)$ está bien definida porque $(q - (p-1), p-1) \in F(D)$ (de la Afirmación 6) tomando $i=p-1$ y $q - (p-1) > p+2$ (pues $p < (q-1)/2$ por hipótesis, lo que implica que $2p < q-1$, de donde $p < q-1-p$, así que $p+2 < q-p+1$).

Claramente $p+2 < \min \{ k, p+2 < k \leq q / (k, p-1) \in F(D) \} \leq q - (p-1)$.

Para la segunda desigualdad: como $(q - (p-1), p-1) \in F(D)$ y $p+2 < q - (p-1) \leq q$ se sigue que $q - (p-1) \in \{ k, p+2 < k \leq q / (k, p-1) \in F(D) \}$ por lo que $\min \{ k, p+2 < k \leq q / (k, p-1) \in F(D) \} \leq q - (p-1)$.

Por lo tanto $p+1-1 = p < j(1) < q - (p-1)$. Así que $p+1 \leq j(1) \leq q - (p-1)$.

Ahora como $(p-1, p+1) \in F(D)$ (De la afirmación 7) con $i=1$ y $(p-1, p+2) \in F(D)$ (por la Afirmación 8) se sigue de la definición de $j(1)$ que $\{(p-1, j(1)), (p-1, j(1)+1), (j(1)+2, p-1)\} \subseteq F(D)$.

Así $\gamma_4 = (j(1)+2, p-1, j(1), j(1)+1, j(1)+2)$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D con $(j(1), j(1)+1)$, $(j(1)+1, j(1)+2)$ de color rojo por la hipótesis del Teorema se debe tener que al menos una de las flechas $(j(1)+2, p-1)$, $(p-1, j(1))$ es de color rojo.

Si $(j(1)+2, p-1)$ es roja entonces $(p, p+1, \dots, j(1), j(1)+1, j(1)+2, p-1)$ es una trayectoria dirigida roja y por lo tanto $(p, p-1) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto $(p-1, j(1))$ es roja.

Sea i , $1 \leq i \leq p-1$ y supóngase que existe $j(i) \in (y, \gamma, x)$, tal que $(p-i, j(i)) \in F(D)$ es roja y $p+i \leq j(i) \leq q-(p-i)$.

Ahora supongamos que $1 \leq i+1 \leq p-1$. Se demostrará que existe $j(i+1) \in (y, \gamma, x)$, tal que $(p-(i+1), j(i+1)) \in F(D)$ es roja y $p+(i+1) \leq j(i+1) \leq q-(p-(i+1))$.

Sea $j(i+1) = \min \{k \in (y, \gamma, x) / p+(i+1)+1 < k, \text{ y } (k, p-(i+1)) \in F(D)\} - 2$. Demostraremos que $j(i+1)$ está bien definida demostrando que para $k = q-(p-(i+1))$ se tiene $k > p+(i+1)+1$ y $(k, p-(i+1)) \in F(D)$.

Se sigue de la Afirmación 6) que $(q-(p-(i+1)), p-(i+1)) \in F(D)$ pues como $1 \leq (i+1) \leq p-1$, $-1 \geq -(i+1) \geq -p+1$, así que al sumar p tenemos $1 \leq p-(i+1) \leq p-1$ y nuestra suposición de que $p < (q-1)/2$ implica que $p+(i+1)+1 < q-(p-(i+1))$ (pues como $p < (q-1)/2$, $2p < q-1$, $p < q-1-p$, $p+(i+1) < q-1-p+(i+1)$, lo que implica que $p+(i+1)+1 < q-(p-(i+1))$).

Por lo tanto $j(i+1)$ está bien definida y $p+(i+1) \leq j(i+1) \leq q-(p-(i+1))$ (pues como $k > p+(i+1)+1$, se tiene que $k-2 > p+i$

por lo que $k-2 \geq p+i+1$. Por otro lado $q-(p-(i+1))$ es una posible k , así que la mínima de las $k-2$ que es $j(i+1)$ cumple también con ser menor o igual que $q-(p-(i+1))$.

Se demostrará que $(p-(i+1), j(i+1))$ es roja.

Como $(p-(i+1), p+(i+1)) \in F(D)$ por la afirmación 7) y el hecho de que $1 \leq (i+1) \leq p-1$ y además $(p-(i+1), p+(i+1)-1) \in F(D)$ por la Afirmación 9) y el hecho de que $1 \leq (i+1) \leq p-1$, la definición de $j(i+1)$ implica que $\{(p-(i+1), j(i+1)), (j(i+1)+2, p-(i+1))\} \subseteq F(D)$.

Por lo tanto $\gamma_4 = (p-(i+1), j(i+1), j(i+1)+1, j(i+1)+2, p-(i+1))$ es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en D .

Para continuar la prueba de la Afirmación 10 necesitamos las tres siguientes afirmaciones.

Afirmación 10.1) Sea $z \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$ tal que $z+1 \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$. Si $i \in (y, \gamma, x)$, $(i, z) \in F(D)$ y $i-1 \neq y$ entonces $(i-1, z+1) \in F(D)$.

Demostración. Supongamos por contradicción que $(i-1, z+1) \notin F(D)$.

Como $\{i-1, z+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$, se sigue de la definición de D que $(z+1, i-1) \in F(D)$. Por lo tanto $\gamma_4 = (z+1, i-1, i, z, z+1)$ es un ciclo de longitud 4 contenido en D con $(i-1, i)$ de color rojo y $(z, z+1)$ de color azul. Así que por la hipótesis del Teorema las flechas (i, z) , $(z+1, i-1)$ son ambas rojas o azules.

Si $(i, z), (z+1, i-1)$ son ambas rojas, entonces $(z+1, i-1, i, z)$ es una trayectoria dirigida de color rojo en D , así que $(z+1, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$

Si $(i, z), (z+1, i-1)$ son ambas azules, entonces $(i, z, z+1, i-1)$ es una trayectoria dirigida de color azul en D , lo que implica que $(i, i-1) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto $(i-1, z+1) \in F(D)$.

Afirmación 10.2) Si $k \in (y, \gamma, x)$, $k > p+(i+1)+1$, $i \geq 1$ y $(k, p-(i+1)) \in F(D)$ entonces $k-1 \in (y, \gamma, x)$, $k-1 > p + i+1$ y $(k-1, p-i) \in F(D)$.

Demostración. Como $p-(i+1) \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$, $i \geq 1$, $p-i \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$ además si $k \in (y, \gamma, x)$, con $(k, p-(i+1)) \in F(D)$ y $k-1 > p + i+1$ se tiene que $k-1 \neq y$, así que $(k-1, p-i) \in F(D)$.

Afirmación 10.3) $j(i) \leq j(i+1)-1$.

Demostración. Sea $k_0 = \min \{k \in (y, \gamma, x) / k > p + (i+1)+1 \text{ y } (k, p-(i+1)) \in F(D)\}$ se sigue de la afirmación 10.2) que $k_0-1 \in (y, \gamma, x)$, $k_0-1 > p + i + 1$ y $(k_0-1, p-i) \in F(D)$.

Así que $k_0-1 \geq \min \{k \in (y, \gamma, x) / k > p+i+1 \text{ y } (k, p-i) \in F(D)\}$ y entonces $k_0 - 1 - 2 \geq j(i)$, es decir $j(i+1)-1 \geq j(i)$.

De esta forma continuando con la demostración de la Afirmación 10) tenemos $\gamma_4 = (p-(i+1), j(i+1), j(i+1)+1, j(i+1)+2, p-(i+1))$ es un

ciclo dirigido de longitud 4 donde las flechas $(j(i+1), j(i+1)+1)$ y $(j(i+1)+1, j(i+1)+2)$ son de color rojo, así que por la hipótesis del Teorema, al menos una de las flechas $(p-(i+1), j(i+1)), (j(i+1)+2, p-(i+1))$ es de color rojo.

Si $(j(i+1)+2, p-(i+1))$ es roja entonces como $j(i)+1 \leq j(i+1)$, $T = (p-i, j(i), j(i)+1, \dots, j(i+1), j(i+1)+1, j(i+1)+2, p-(i+1))$ es una trayectoria dirigida roja en D , por lo que $(p-i, p-(i+1)) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto $(p-(i+1), j(i+1))$ es de color rojo. ♦

Para terminar la demostración del Teorema, consideremos $i = p-1$ y aplicando la Afirmación 10) tenemos que existe $j(p-1) \in (y, \gamma, x)$ tal que $(p-(p-1), j(p-1)) \in F(D)$ es roja. Así que $(1, j(p-1)) \cup (j(p-1), \gamma, x)$ es una trayectoria dirigida roja en D por lo que $(1, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

TEOREMA 3.3. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha $[x, y]$ de algún torneo m -coloreado T_n (es decir $D \cong T_n - [x, y]$). Si todo ciclo dirigido en D de longitud a lo más 4 es casi-monocromático entonces D es una digráfica núcleo perfecta por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \cong T_n - [x, y]$ y $D[H]$ una subdigráfica inducida de D por algún subconjunto H de vértices de D .

Si $D[H] \cong T_k$, $1 \leq k \leq n-1$, entonces cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es casi monocromático en $D[H]$, y por el Teorema 2.7, $\mathcal{C}(D[H])$ es núcleo perfecta, por lo que contiene núcleo, así que por la proposición 2.1 $D[H]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Si $D[H] \cong T_k - [x, y]$, $1 \leq k \leq n-1$, entonces cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es casi monocromático en $D[H]$, y por el Teorema 3.2, $D[H]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas. ■

CAPITULO 4

NÚCLEOS EN LA CERRADURA DE DIGRÁFICAS M-COLOREADAS

En este capítulo daremos algunos resultados obtenidos por H. Galeana Sánchez y J. J. García Ruvalcaba [9], acerca de digráficas que son casi-torneos m-coloreados libres de $\{C_3, T_3\}$ que son núcleo perfectas por trayectorias monocromáticas, es decir que están en $\mathcal{E}$.

TEOREMA 4.1. Sea D una digráfica m-coloreada que resulta de borrar una sola flecha, la flecha entre x y y , de algún torneo m-coloreado T_n (es decir $D \cong T_n - [x, y]$). Si D no contiene C_3 ni T_3 tricolor, entonces $\mathcal{C}(D)$ no contiene ningún ciclo dirigido asimétrico γ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y que entre dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción. Supongamos que existe un ciclo $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y que para cualesquiera dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Probaremos algunas afirmaciones acerca de los vértices de γ antes de llegar a la contradicción del Teorema.

Para $z \in V(\gamma)$, denotaremos como z^- el predecesor de z en γ y como z^+ el sucesor de z en γ .

Observemos que como γ es un ciclo dirigido asimétrico y entre cualesquiera dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$, se tiene que z^- es el único vértice w del ciclo γ tal que $(z, w) \notin F(\mathcal{C}(D))$ y z^+ es el único vértice w del ciclo γ tal que $(w, z) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Afirmación 1) Si $z \in V(\gamma)$, entonces $(z^+, z^-) \in F(\mathcal{C}(D))$

Demostración. Como z^- absorbe por trayectorias monocromáticas a todos los vértices de γ excepto a z , en particular absorbe por trayectorias monocromáticas a z^+ . $\square$

Por la Afirmación 1) tenemos que en D existe al menos una trayectoria dirigida monocromática de z^+ a z^- . Denotemos por $P(z)$ una trayectoria dirigida monocromática más corta de z^+ a z^- en D . Ver figura 18

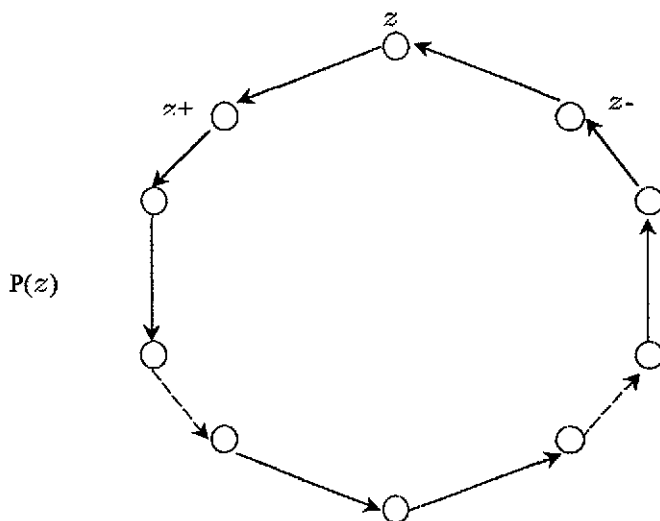


Figura 18

Afirmación 2) Si $z \in V(\gamma)$, es adyacente en D a todo vértice de $P(z)$ entonces $(z^-, z) \in F(D)$ y $(z, z^+) \in F(D)$ son del mismo color.

Demostración. El vértice z es adyacente a z^- en D , (por hipótesis de la Afirmación 2). Demostraremos que $(z^-, z) \in F(D)$. Supongamos que $(z, z^-) \in F(D)$, entonces $(z, z^-) \in F(\mathcal{C}(D))$ pues $F(D) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$ lo cual no es posible pues γ es asimétrico. Por lo tanto $(z^-, z) \in F(D)$.

El vértice z es adyacente a z^+ en D , (por hipótesis de la Afirmación 2). Demostraremos que $(z, z^+) \in F(D)$. Supongamos que $(z^+, z) \in F(D)$, entonces $(z^+, z) \in F(\mathcal{C}(D))$ pues $F(D) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$ lo cual no es posible pues γ es asimétrico. Por lo tanto $(z, z^+) \in F(D)$.

Ahora probaremos que las flechas $(z^-, z) \in F(D)$ y $(z, z^+) \in F(D)$ son del mismo color. Supongamos sin pérdida de generalidad que $(z, z^+) \in F(D)$ es azul. Probaremos que $(z^-, z) \in F(D)$ es azul.

Afirmación 2. a) La trayectoria $P(z) \subset D$ no es azul.

Demostración. Supongamos que $P(z)$ es azul, (figura 19), entonces $(z, z^+) \cup P(z)$ contiene una trayectoria dirigida azul de z , a z^- en D por lo que $(z, z^-) \in F(\mathcal{C}(D))$ lo que contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Por lo tanto $P(z)$ no es azul.

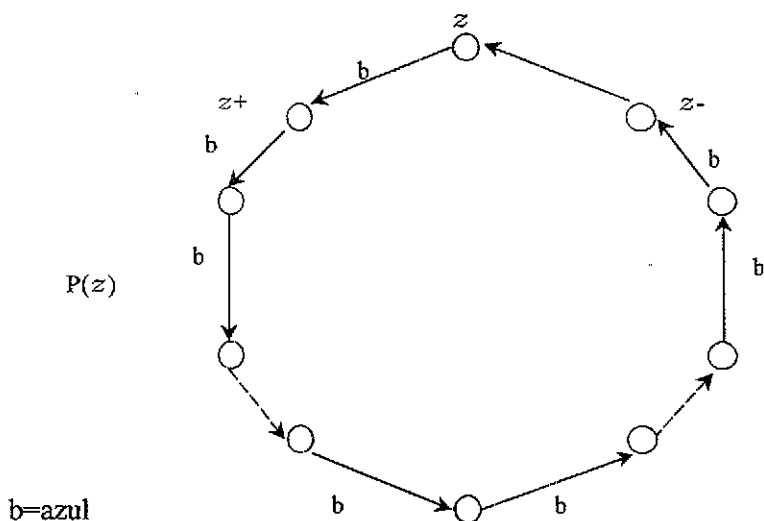


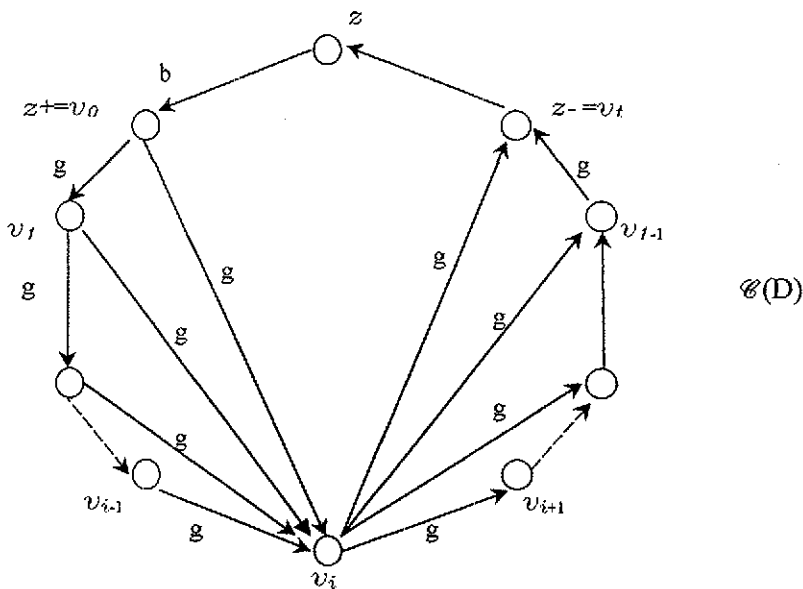
Figura 19

Supongamos sin pérdida de generalidad que $P(z)$ es verde y sea $P(z) = (v_0 = z+, v_1, v_2, \dots, v_t = z-)$.

Afirmación 2. b) Para $1 \leq i \leq t$, $(z+, v_i) \in F(\mathcal{G}(D))$ es verde y $(v_i, z-) \in F(\mathcal{G}(D))$ es verde.

Demostración. Dado que la trayectoria $P(z)$ es verde y $P(z)$ inicia en $z+$, entonces de $z+$ a cualquier vértice v_i hay una trayectoria dirigida verde en D por lo que $(z+, v_i) \in F(\mathcal{G}(D))$ es verde.

Ahora, como la trayectoria $P(z)$ termina en $z-$, entonces desde cualquier vértice v_i hacia $z-$ también se tiene una trayectoria dirigida verde en D por lo que $(v_i, z-) \in F(\mathcal{G}(D))$ es verde. Figura 20



b=azul

g= verde

Figura 20

Afirmación 2. c) Para $1 \leq i \leq t$, la flecha entre z y v_i en D no es verde.

La Figura 21 representa sin dirección la flecha entre z y v_i , pudiendo ser esta flecha (z, v_i) o (v_i, z) para demostrar la afirmación 2.c).

Demostración. Como por hipótesis de la Afirmación 2) z es adyacente en D a todo vértice de $P(z)$, debemos probar que las flechas entre z y v_i no son verdes.

Supongamos por contradicción que para $1 \leq i \leq t$, $(z, v_i) \in F(D)$ es verde, entonces $(z, v_i) \cup (v_i, P(z), z_-)$ contiene una trayectoria dirigida verde de z a z_- en D , por lo que $(z, z_-) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Supongamos ahora que para $1 \leq i \leq t$, $(v_i, z) \in F(D)$ es verde, entonces $(z_+, P(z), v_i) \cup (v_i, z)$ contiene una trayectoria dirigida verde de z_+ a z en D , por lo que $(z_+, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto la flecha entre z y v_i en D no es verde.

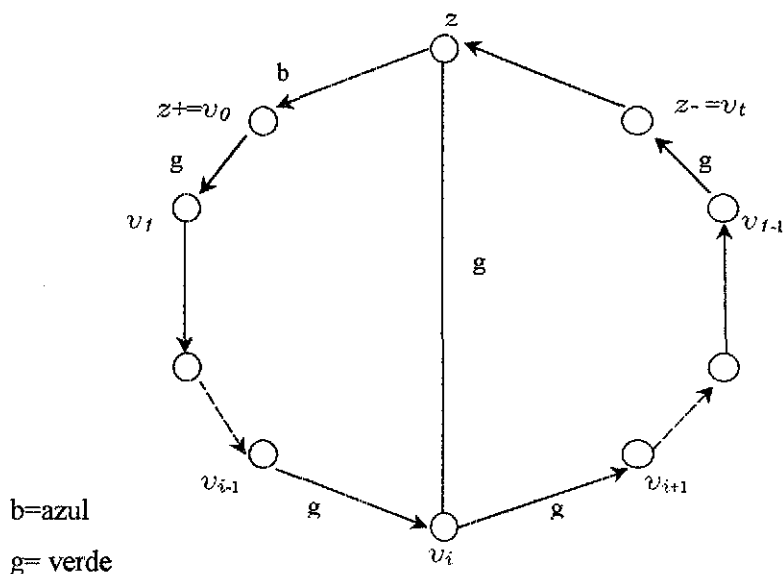


Figura 21

Afirmación 2. d) Para $1 \leq i \leq t$, si la flecha entre z y v_{i-1} en D es azul entonces la flecha entre z y v_i en D es azul.

La Figura 22 representa la flecha entre z y v_{i-1} sin dirección (pudiendo representar (z, v_{i-1}) o (v_{i-1}, z)) y la flecha entre z y v_i sin dirección (que puede representar (z, v_i) o (v_i, z)).

Demostración. Por hipótesis del Teorema, D no tiene C_3 ni T_3 tricolor y z es adyacente a todo vértice de $P(z)$. Ahora estamos suponiendo que la flecha z y v_{i-1} en D es azul y sabemos que $(v_{i-1}, v_i) \in F(P(z))$ es verde $1 \leq i \leq t$, así que la flecha entre z y v_i debe ser azul o verde, pero por la Afirmación 2.c) $(z, v_i) \in F(D)$ no es verde, así que $(z, v_i) \in F(D)$ debe ser azul.

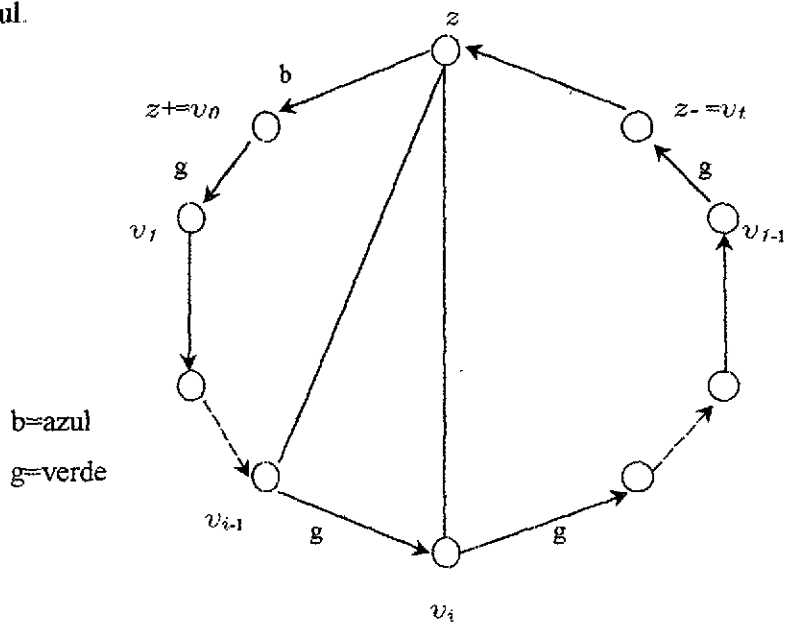


Figura 22

Afirmación 2. e) $(z-, z) \in F(D)$ es azul.

Demostración. Como estamos suponiendo que la flecha entre z y v_0 es azul en D entonces en D la flecha entre z y v_1 es azul, la flecha entre z y v_2 es azul, ..., la flecha entre z y v_t es azul, pero $v_t = z-$ y el sentido de la flecha entre estos dos vértices en D es de $z-$ a z , lo que implica que $(z-, z) \in F(D)$ es azul.

Por lo tanto $(z-, z) \in F(D)$ y $(z, z+) \in F(D)$ son del mismo color. $\square$

Afirmación 3) Si $s \in V(\gamma) \setminus \{x, y\}$ entonces $(s-, s) \in F(D)$ y $(s, s+) \in F(D)$ son del mismo color.

Demostración. Como $s \neq x$ y $s \neq y$, entonces s es adyacente a todos los vértices de $P(s)$ en D , así que por la Afirmación 2) $(s-, s) \in F(D)$ y $(s, s+) \in F(D)$ son del mismo color. $\square$

Afirmación 4) Las trayectorias (x, γ, y) y (y, γ, x) son monocromáticas en D .

Demostración. Sea $(x, \gamma, y) = (x = s_0, s_1, s_2, \dots, s_k = y)$, si $s = s_i$, $1 \leq i \leq k-1$, entonces $(s-, s) \in F(D)$ y $(s, s+) \in F(D)$ son del mismo color por la Afirmación 3), en particular si $s = s_1$, entonces $(s_0, s_1) \in F(D)$ y $(s_1, s_2) \in F(D)$ son del mismo color, pero $(s_1, s_2) \in F(D)$ es del mismo color que $(s_2, s_3) \in F(D)$ cuando $s = s_2$, y $(s_2, s_3) \in F(D)$ es del mismo color que $(s_3, s_4) \in F(D)$ cuando $s = s_3$, y así sucesivamente, por lo que la trayectoria $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_k)$ es monocromática en D .

De manera similar (y, γ, x) es monocromática en D . $\square$

Afirmación 5) x y y no son consecutivos en γ .

Demostración. Por contradicción. Supongamos que x y y son consecutivos en γ , con x predecesor de y . Como por la Afirmación 4) las trayectorias (x, γ, y) y (y, γ, x) son monocromáticas en D , entonces $(x, y) \in F(\mathcal{C}(D))$ y $(y, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, así que $(x, y) \in \text{Sym}(\mathcal{C}(D))$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis sólo los vértices no consecutivos en γ tienen flechas simétricas en $\mathcal{C}(D)$. $\square$

Afirmación 6) Las trayectorias (x, γ, y) y (y, γ, x) no son del mismo color.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que (x, γ, y) y (y, γ, x) son del mismo color, por lo que γ es monocromático en D , entonces entre cualesquiera par de vértices z, w de γ existen trayectorias monocromáticas de z a w y de w a z en D , de donde $(z, w) \in F(\mathcal{C}(D))$ y $(w, z) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto, (x, γ, y) y (y, γ, x) no son del mismo color. $\square$

Supongamos sin pérdida de generalidad que (x, γ, y) es roja y (y, γ, x) es azul en D . Figura 23.

r=rojo
b=azul

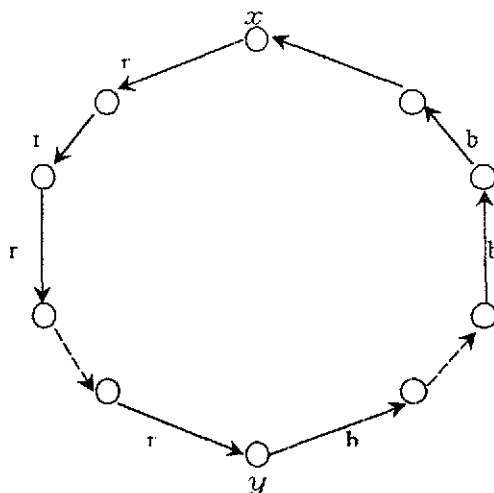
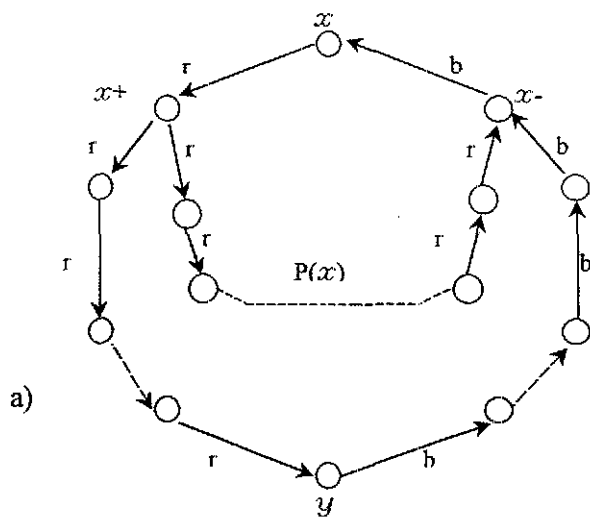


Figura 23

Afirmación 7) $P(x)$ no es roja ni azul.

Demostración. Si $P(x)$ es roja, entonces se tiene una trayectoria dirigida roja en D de x a x^- formada por $(x, x^+) \cup P(x)$ donde $(x, x^+) \subseteq (x, \gamma, y)$, por lo que $(x, x^-) \in F(\mathcal{G}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$. Figura 24 a).

Si $P(x)$ es azul entonces se tiene una trayectoria dirigida azul de x^+ a x en D , la cual se forma por $P(x) \cup (x^-, x)$ con $(x^-, x) \subseteq (y, \gamma, x)$, de donde $(x^+, x) \in F(\mathcal{G}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$. Figura 24 b) $\square$



r=rojo
b=azul

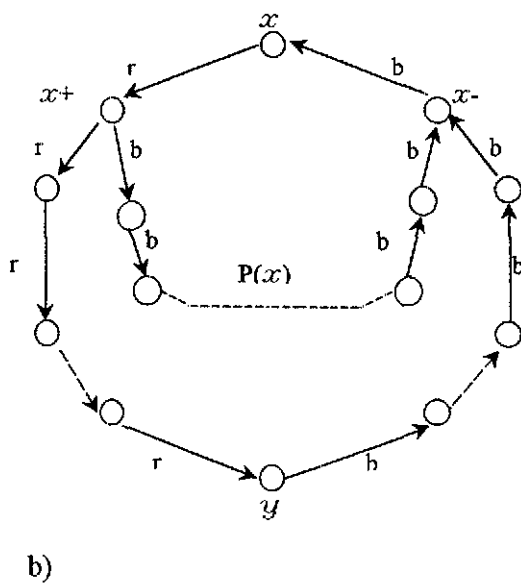


Figura 24

Afirmación 8) $y \in V(P(x))$.

Demostración. Si $y \notin V(P(x))$, como (x, y) es la única flecha que no está en D , entonces x debe ser adyacente en D a todos los vértices de $P(x)$. Ahora, por la Afirmación 2), $(x-, x) \in F(D)$ y $(x, x+) \in F(D)$ son del mismo color, contradiciendo que $(x-, x)$ es azul y que $(x, x+)$ es roja. Por lo tanto $y \in V(P(x))$. $\square$

Afirmación 9) $P(y)$ no es roja ni azul.

Demostración. Si $P(y)$ es azul entonces se tiene una trayectoria dirigida azul de y a y^- en D formada por $(y, y+) \cup P(y)$ donde $(y, y+) \subseteq (y, \gamma, x)$, por lo que $(y, y-) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Figura 25 a)

Si $P(y)$ es roja entonces se tiene una trayectoria dirigida roja de y^+ a y en D , la cual se forma por $P(y) \cup (y^-, y)$ con $(y^-, y) \subseteq (x, \gamma, y)$, de donde $(y^+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Figura 25 b) $\square$

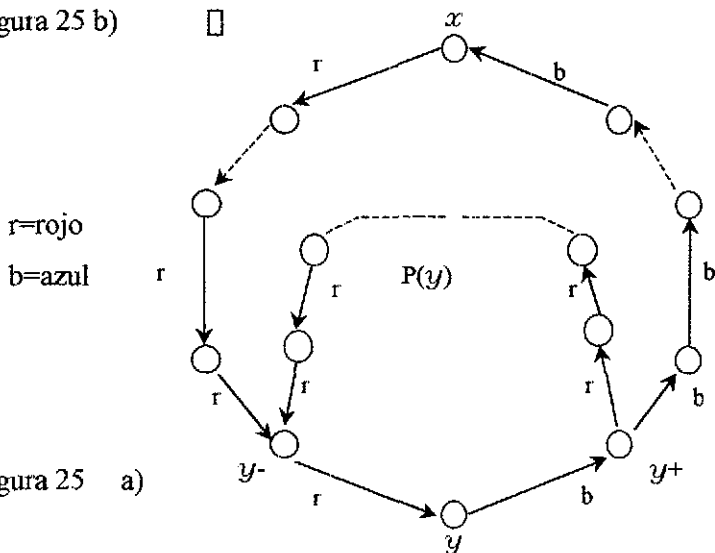


Figura 25 a)

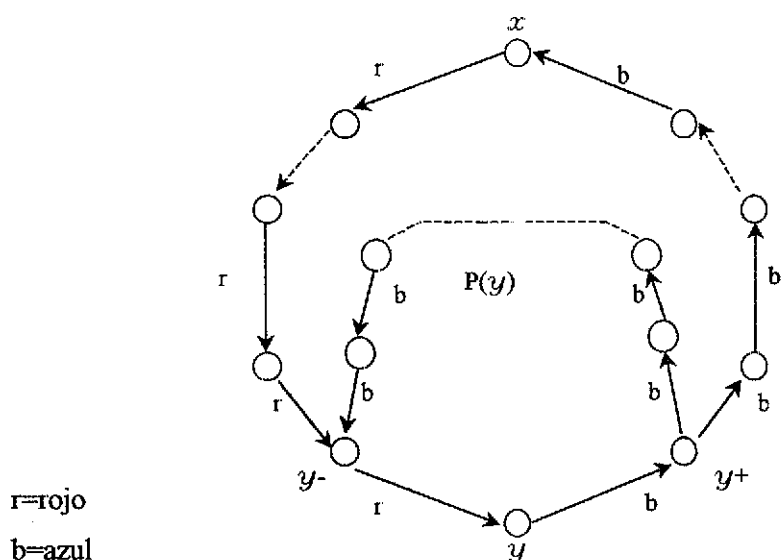


Figura 25 b)

Afirmación 10) $x \in V(P(y))$.

Demostración Si $x \notin V(P(y))$, entonces y debe ser adyacente en D a todos los vértices de $P(y)$. Ahora, por la Afirmación 2), $(y^-, y) \in F(D)$ y $(y, y^+) \in F(D)$ son del mismo color, contradiciendo que (y^-, y) es roja y (y, y^+) es azul. Por lo tanto $x \in V(P(y))$. $\square$

De la Afirmación 8) $y \in V(P(x))$ y de la Afirmación 10) $x \in V(P(y))$.

Sean $P(x) = (x^+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} = y, a_{r+2}, \dots, x^-)$ y $P(y) = (y^+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1} = x, b_{s+2}, \dots, y^-)$

Consideraremos los casos: A) $P(x)$ y $P(y)$ son del mismo color y B) $P(x)$ y $P(y)$ no son del mismo color; para alcanzar la contradicción en ambos casos de la demostración.

Caso A) Supongamos que $P(x)$ y $P(y)$ son ambas del mismo color y supongamos sin pérdida de generalidad que estas trayectorias son de color verde. Véase la Figura 26.

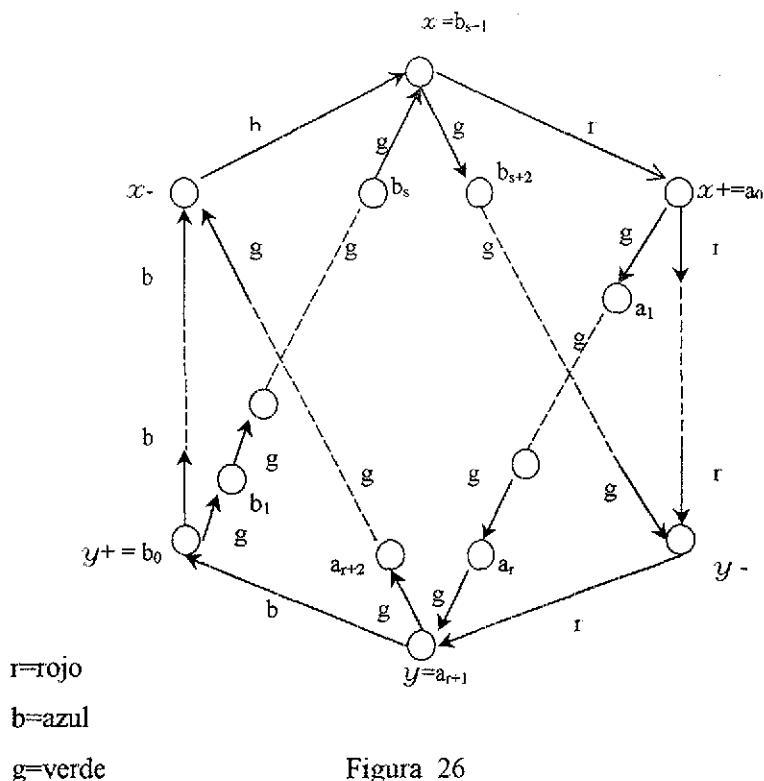


Figura 26

Demostraremos que la flecha entre $y+$ y $x+$ en D es azul. Observemos que

a) Para $0 \leq i \leq r$, la flecha entre $y+$ y a_i en D no es verde.

Pues si $(y^+, a_i) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de y^+ a y^- formada por $(y^+, a_i) \cup (a_i, P(x), y^-)$, por lo que $(y^+, y^-) \in F(\mathcal{G}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$.
 Figura 27.

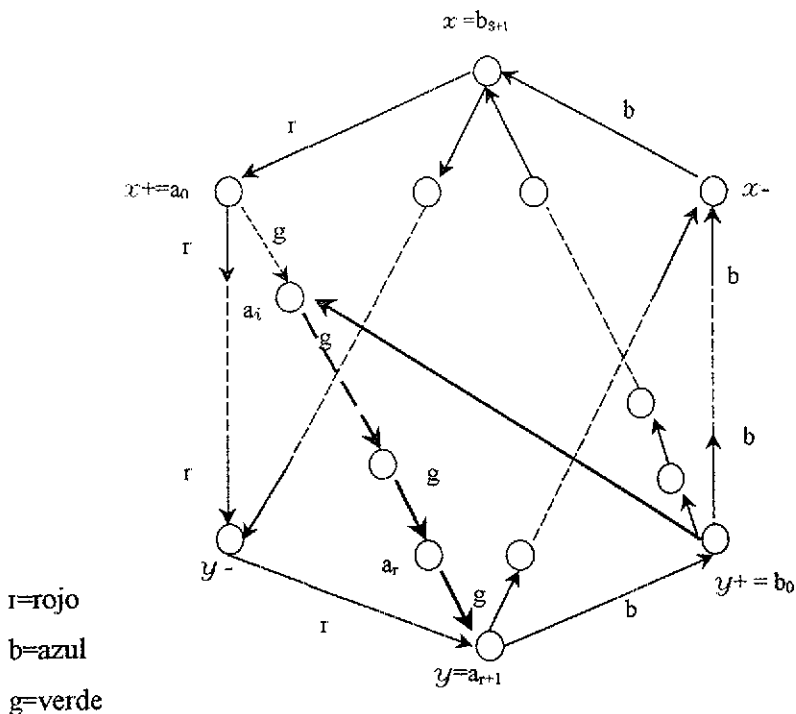


Figura 27

Ahora si $(a_i, y^+) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de x^+ a x^- formada por $(x^+, P(x), a_i) \cup (a_i, y^+) \cup (y^+, P(y), x^-)$, por lo que $(x^+, x^-) \in F(\mathcal{G}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$.
 Figura 28.

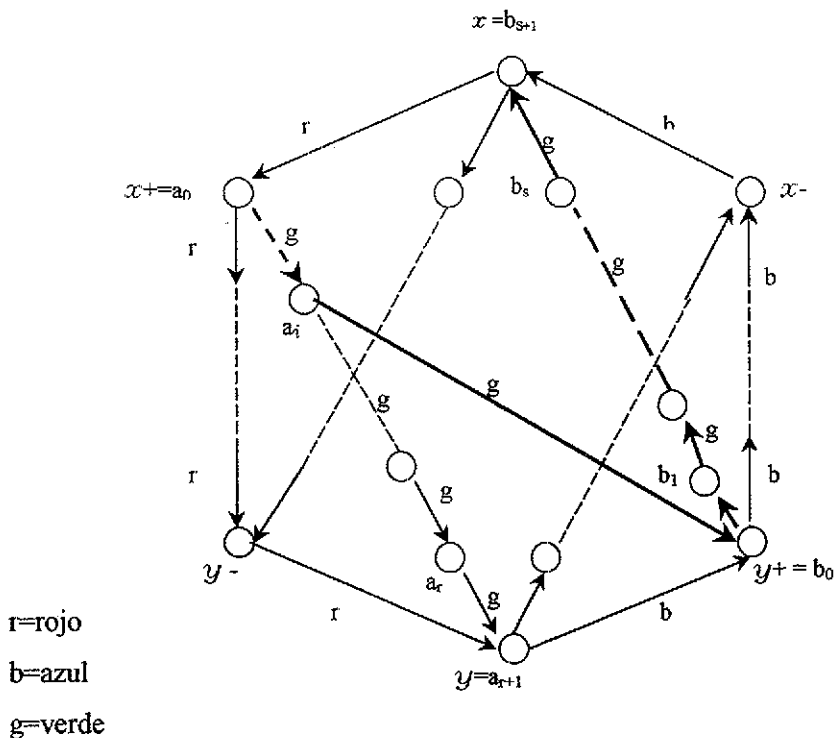


Figura 28

Por lo tanto la flecha entre y^+ y a_i en D no es verde, $(0 \leq i \leq r)$. $\square$

b) Para $0 \leq i \leq r$, si la flecha entre y^+ y a_{i+1} en D es azul entonces la flecha entre y^+ y a_i en D también es azul.

Por la definición de $P(x)$ en el caso A) $(a_i, a_{i+1}) \in F(D)$ es verde y por la hipótesis del Teorema, D no tiene C_3 ni T_3 tricolor, por lo que si la flecha entre y^+ y a_{i+1} en D es azul, entonces la flecha entre y^+ y a_i debe ser azul o verde, pero por a) esta flecha no es verde, por lo tanto la flecha entre y^+ y a_i en D debe ser azul. (Figura 29) $\square$

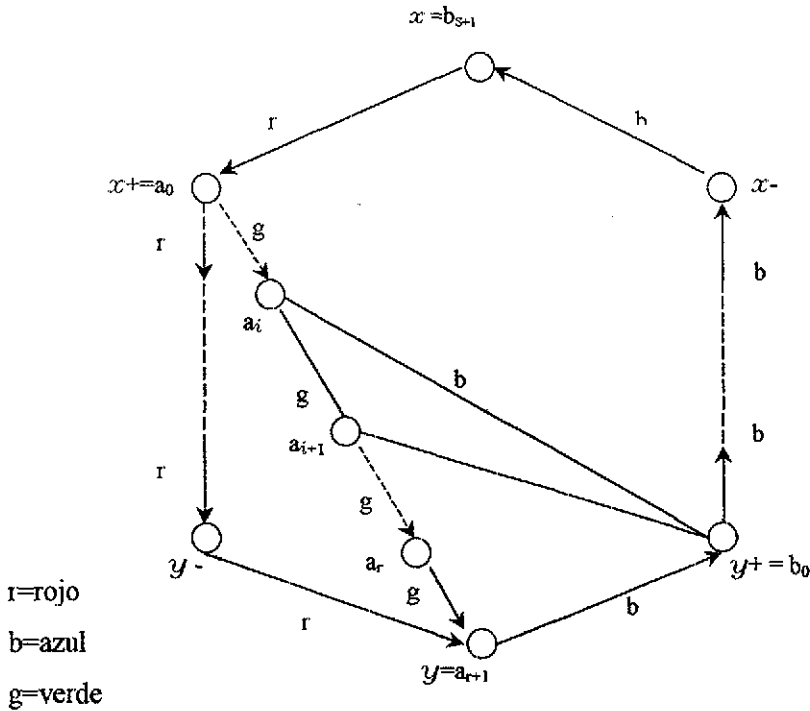


Figura 29

Por demostrar que la flecha entre $y+$ y $x+$ en D es azul.

$(y, y+) \subseteq F(y, \gamma, x)$, así que $(y, y+) \in F(D)$ es azul, pero $y = a_{r+1}$ por lo que la flecha entre $y+$ y a_r en D también es azul, por b), y aplicando b) para $0 \leq i \leq r-1$, tenemos que las flechas entre $y+$ y a_i en D son azules, en particular la flecha entre $y+$ y $a_0 = x+$ es azul. $\square$

Demostraremos ahora que la flecha entre $y+$ y $x+$ en D es roja.

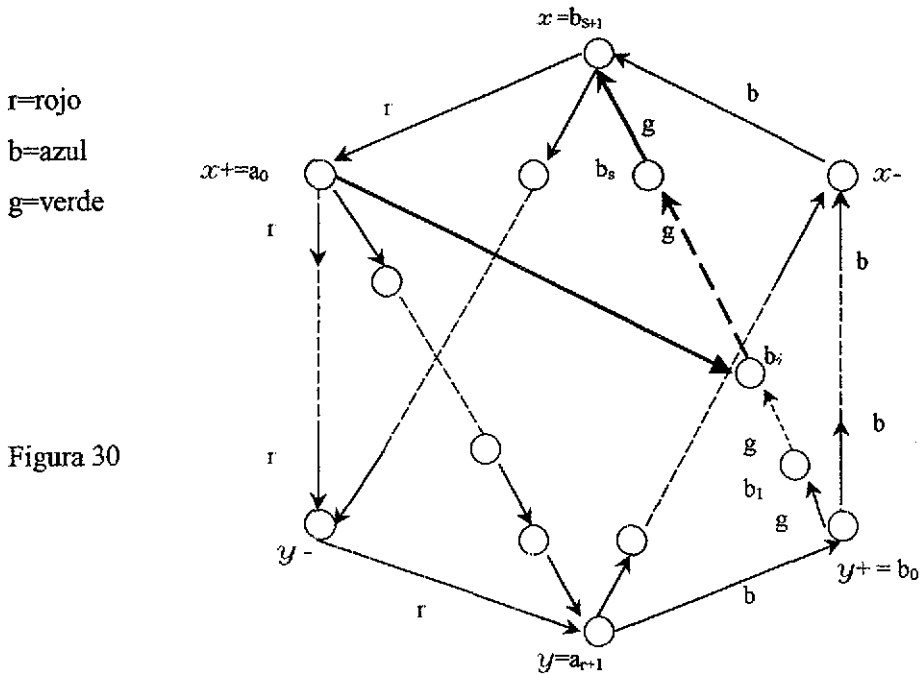
Observemos que:

a') Para $0 \leq i \leq s$, la flecha entre $x+$ y b_i en D no es verde.

Si $(x+, b_i) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq s$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de $x+$ a x formada por $(x+, b_i) \cup (b_i, P(y), x)$, por lo que $(x+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.
Figura 30.

Si $(b_i, x+) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq s$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de $y+$ a y formada por $(y+, P(y), b_i) \cup (b_i, x+) \cup (x+, P(x), y)$, por lo que $(y+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Figura 31.

Por lo tanto la flecha entre $y+$ y b_i en D no es verde, ($0 \leq i \leq s$). $\square$





Por la definición de $P(y)$ en el caso A) $(b_i, b_{i+1}) \in F(D)$ es verde y por la hipótesis del Teorema, D no tiene C_3 ni T_3 tricolor, por lo que si la flecha entre $x+$ y b_{i+1} en D es roja, $0 \leq i \leq s$, entonces la flecha entre $x+$ y b_i debe ser roja o verde, pero por a) esta flecha no es verde, por lo tanto la flecha entre $x+$ y b_i en D debe ser roja, $(0 \leq i \leq s)$. (Figura 32) $\square$

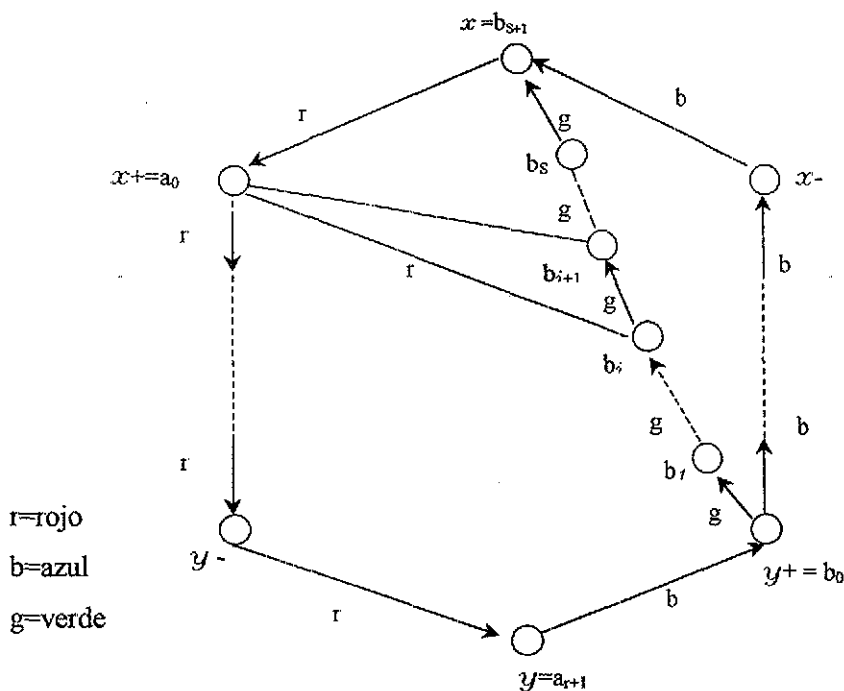


Figura 32

Por demostrar que la flecha entre x^+ y y^+ en D es roja.

$(x, x^+) \subseteq F(x, \gamma, y)$, así que $(x, x^+) \in F(D)$ es roja, pero $x = b_{s+1}$ por lo que la flecha entre x^+ y b_s en D también es roja, por b'), y aplicando b') para $0 \leq i \leq s-1$, tenemos que las flechas entre x^+ y b_i en D son rojas, en particular la flecha entre x^+ y $b_0 = y^+$ es roja. $\square$

De esta forma tenemos por un lado la flecha entre y^+ y x^+ en D es azul y por otro lado que la flecha entre y^+ y x^+ en D es roja, lo cual no puede ser posible ya que en D existe una sola flecha entre y^+ y x^+

coloreada con un único color. Por lo tanto $P(x)$ y $P(y)$ no pueden ser ambas del mismo color. $\square$

Caso B) Consideremos que $P(x)$ y $P(y)$ no son ambas del mismo color y supongamos sin pérdida de generalidad que en D $P(x)$ es verde y $P(y)$ es amarilla. Véase la Figura 33.

Demostraremos que la flecha entre x y a_r en D es roja.

Observemos que:

a) Para $0 \leq i \leq r$, la flecha entre x y a_i en D no es verde.

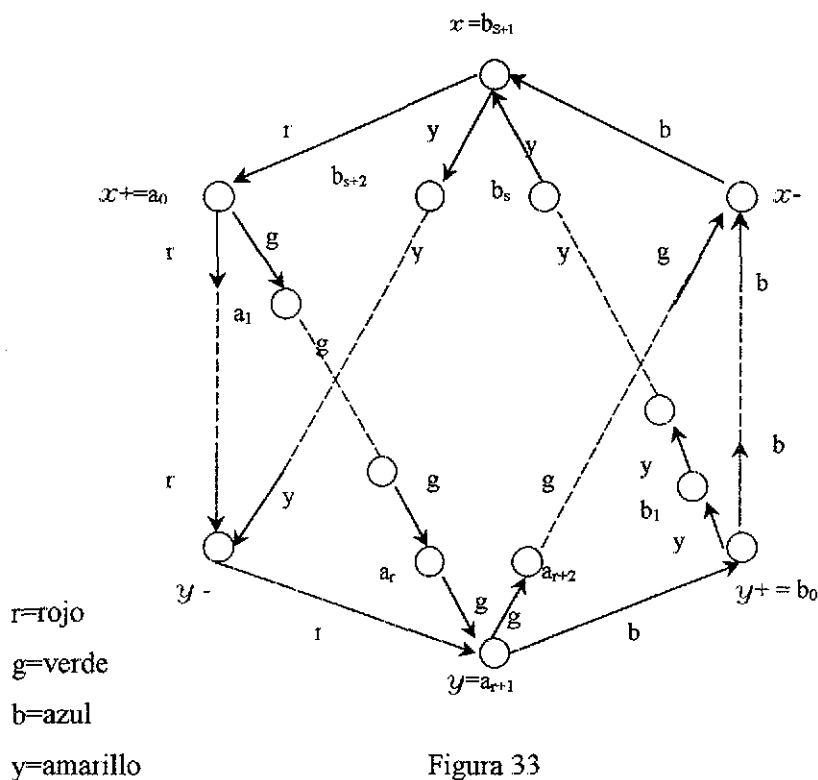
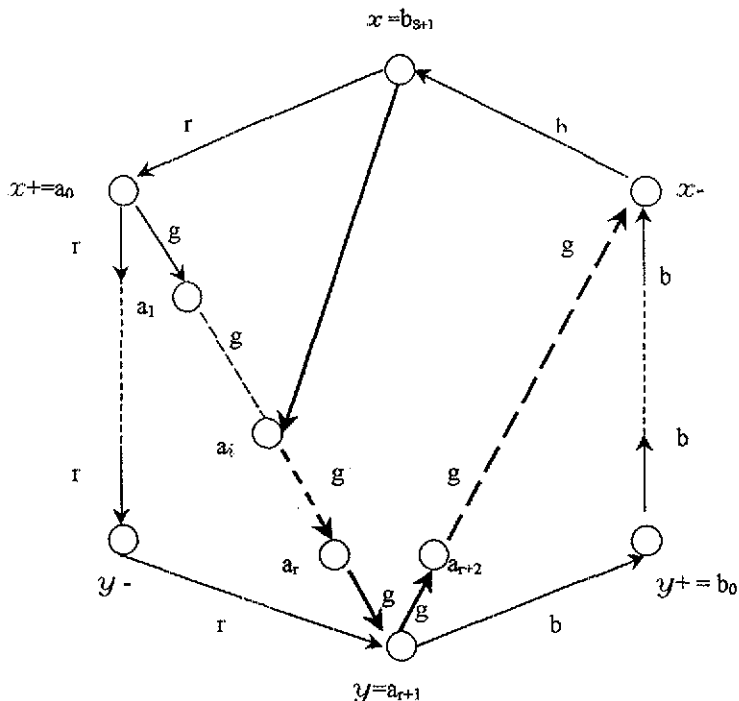


Figura 33

r=rojo
g=verde
b=azul
y=amarillo

Figura 34



Si $(x, a_i) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de x a $x-$ formada por $(x, a_i) \cup (a_i, P(x), x-)$, por lo que $(x, x-) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Figura 34.

Si $(a_i, x) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de $x+$ a x formada por $(x+, P(x), a_i) \cup (a_i, x)$, por lo que $(x+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.
Figura 35.

Por lo tanto la flecha entre x y a_i en D no es verde, $(0 \leq i \leq r)$ $\square$

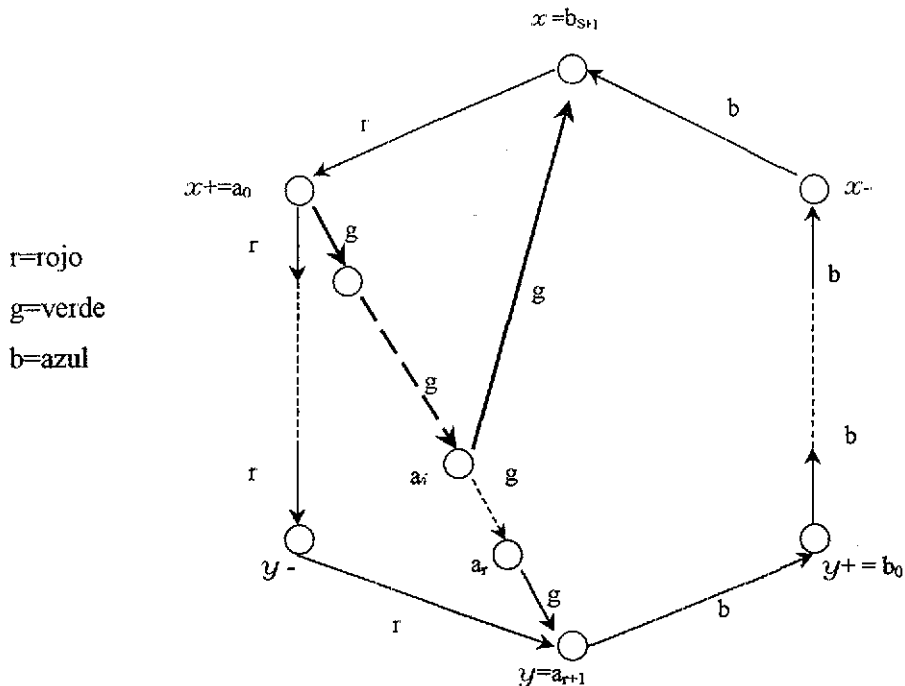


Figura 35

b) Para $1 \leq i \leq r$, si la flecha entre x y a_{i-1} en D es roja entonces la flecha entre x y a_i en D también es roja.

Por la definición de $P(x)$ en el caso B) $(a_i, a_{i+1}) \in F(D)$ es verde y por la hipótesis del Teorema, D no tiene C_3 ni T_3 tricolor, por lo que si la flecha entre x y a_{i-1} en D es roja, $1 \leq i \leq r$, entonces la flecha entre x y a_i debe ser roja o verde, pero por la a) esta flecha no es verde, por lo tanto la flecha entre x y a_i en D debe ser roja, $(1 \leq i \leq r)$. (Figura 36) $\square$

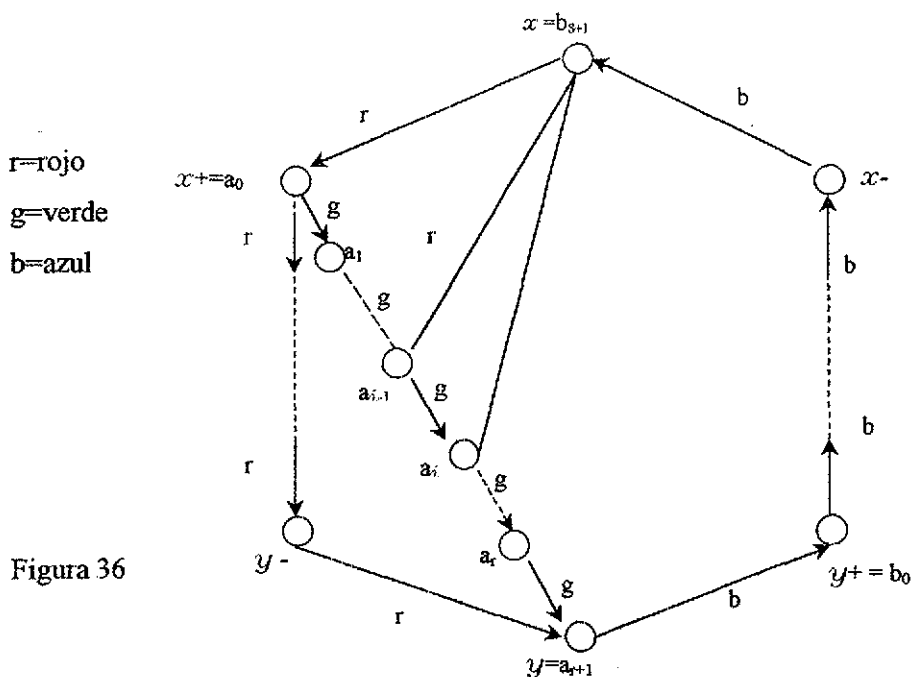


Figura 36

Por demostrar que la flecha entre x y a_r en D es roja

$(x, x+) \subseteq F(x, y, y)$, así que $(x, x+) \in F(D)$ es roja, pero $x+ = a_0$ y aplicando b) la flecha entre x y a_1 en D también es roja, y aplicando b) para $1 \leq i \leq r$, tenemos que la flecha entre x y a_i en D es roja, en particular la flecha entre x y a_r en D es roja. $\square$

Ahora demostraremos que la flecha entre a_r y b_s en D es roja o amarilla.

Como la flecha entre x y a_r en D es roja y por la definición de $P(y)$ en el caso B, $(b_s, b_{s+1}) \in F(D)$ es amarilla. Ahora como D no tiene C_3 ni T_3 tricolor se debe tener que la flecha entre a_r y b_s es roja o amarilla. $\square$

Demostraremos ahora que la flecha entre y y b_s en D es azul.
Observemos lo siguiente:

a') Para $0 \leq i \leq s$, la flecha entre y y b_i en D no es amarilla.

Si $(y, b_i) \in F(D)$ es amarilla, $0 \leq i \leq s$, entonces se tiene una trayectoria dirigida amarilla en D de y a y^- formada por $(y, b_i) \cup (b_i, P(y), y^-)$, por lo que $(y, y^-) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ Figura 37.

Si $(b_i, y) \in F(D)$ es amarilla, $0 \leq i \leq s$, entonces se tiene una trayectoria dirigida amarilla en D de y^+ a y formada por $(y^+, P(y), b_i) \cup (b_i, y)$, por lo que $(y^+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. Figura 38.

Por lo tanto la flecha entre y y b_i en D no es amarilla, $(0 \leq i \leq s)$. $\square$

r=rojo
b=azul
y=amarillo

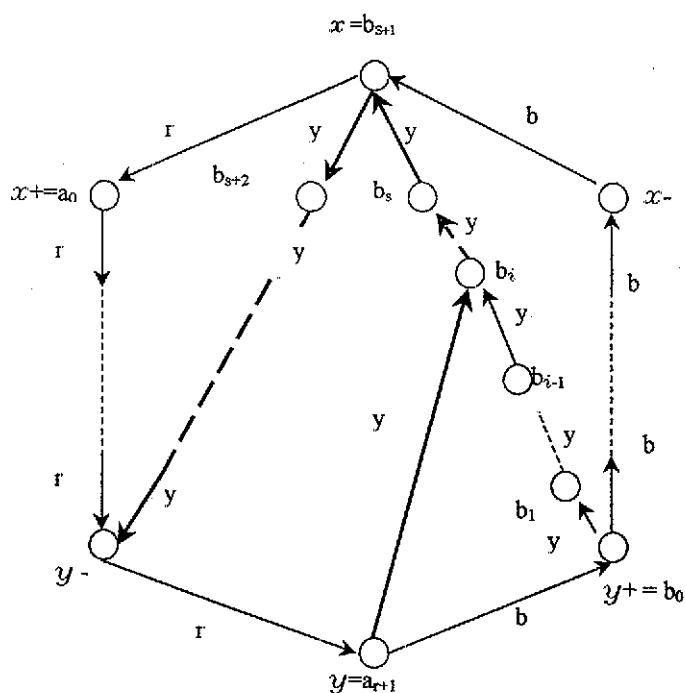


Figura 37

r=rojo
b=azul
y=amarillo

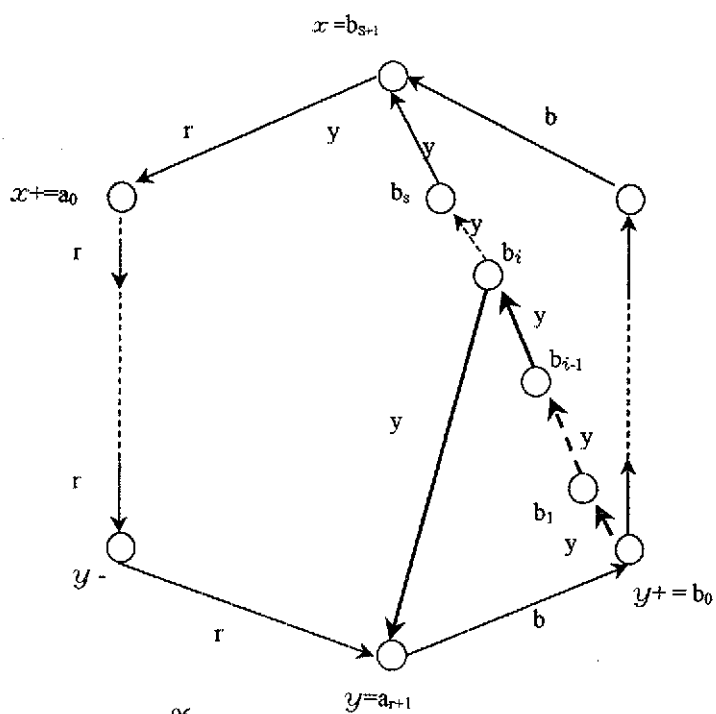


Figura 38

b') Para $1 \leq i \leq s$, si la flecha entre y y b_{i-1} en D es azul entonces la flecha entre y y b_i en D también es azul.

Por la definición de $P(y)$ en el caso B) $(b_{i-1}, b_i) \in F(D)$ es amarilla y por la hipótesis del Teorema, D no tiene C_3 ni T_3 tricolor, así que si la flecha entre y y b_{i-1} en D es azul, $0 \leq i \leq s$, entonces la flecha entre y y b_i en D tiene que ser amarilla o azul, pero por la observación a') esta flecha no es amarilla, por lo que la flecha entre y y b_i en D debe ser azul, $(0 \leq i \leq s)$.

Figura 39 $\square$

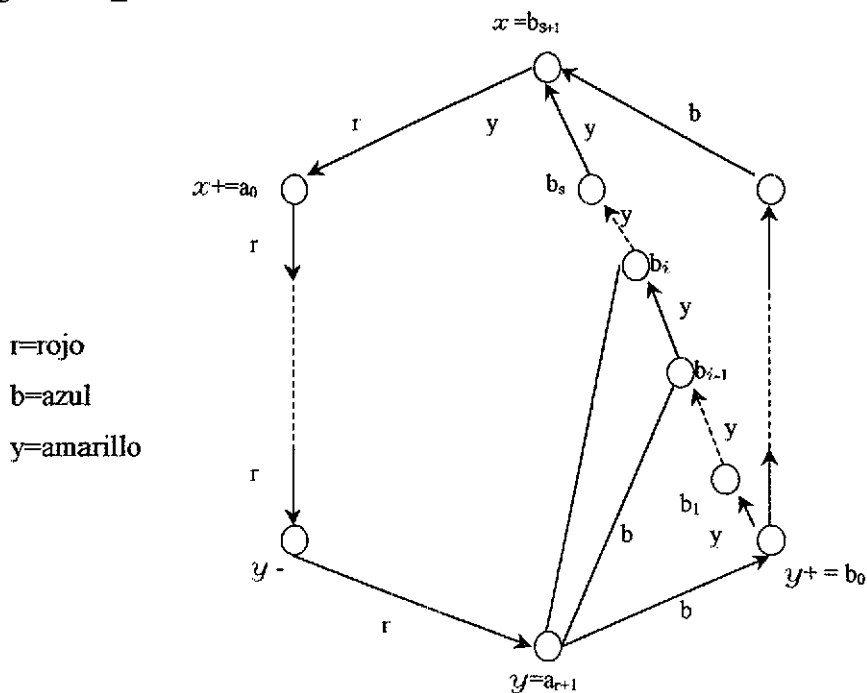


Figura 39

Por demostrar que la flecha entre y y b_s en D es azul

$(y, y^+) \subseteq F(y, \gamma, x)$, así que $(y, y^+) \in F(D)$ es azul, pero $y^+ = b_0$ por lo que la flecha entre y y b_1 en D también es azul, b'), y aplicando la b') para $0 \leq i \leq s$, tenemos que la flecha entre y y b_i en D es azul, en particular la flecha entre y y b_s en D es azul. $\square$

Ahora demostraremos que la flecha entre a_r y b_s en D es verde o azul.

Como la flecha entre y y b_s en D es azul y por la definición de $P(x)$ en el caso B, $(a_r, a_{r+1}) \in F(D)$ es verde. Ahora como D no tiene C_3 ni T_3 tricolor se debe tener que la flecha entre a_r y b_s es verde o azul. $\square$

Demostración del caso B). Por un lado la flecha a_r y b_s en D es roja o amarilla y por otro lado la flecha a_r y b_s en D es verde o azul, lo cual no puede ser posible ya que en D solo existe una flecha entre a_r y b_s coloreada con un único color.

Por lo tanto $P(x)$ y $P(y)$ no pueden tener distinto color en D . $\square$

Para completar la demostración del Teorema. Dado que $P(x)$ y $P(y)$ son ambas trayectorias monocromáticas y estas trayectorias no pueden ser ambas del mismo color ni tampoco pueden ser ambas de color distinto en D se tiene un imposible en D .

Por lo tanto $\mathcal{C}(D)$ no tiene ningún ciclo dirigido asimétrico γ tal que entre dos vértices z , w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$. ■

TEOREMA 4.2. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha, la flecha entre x y y , de un torneo m -coloreado. Si D no tiene C_3 ni T_3 tricolor entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue directamente del Lema 3.1 y del Teorema 4.1. ■

Si en el Teorema 4.2 sólo se pide que D no contenga T_3 tricolor, pero si contenga C_3 tricolor el resultado no es cierto. Veamos el ejemplo de la figura 40, el cual contiene al menos un C_3 tricolor, no contiene T_3 tricolor y no tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

r=rojo
b=azul
g=verde

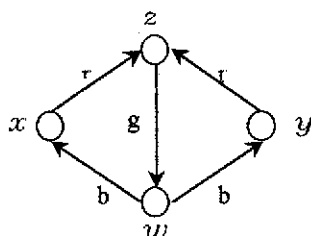
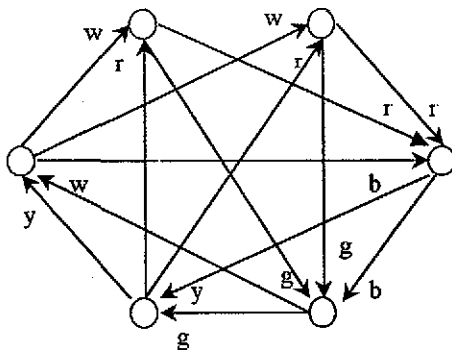


Figura 40

Ahora si en el Teorema 4.2 sólo se conserva la condición de que D no contenga C_3 tricolor pero si contenga T_3 tricolor el resultado tampoco resulta ser cierto. El ejemplo de la Figura 41, contiene al menos un T_3

tricolor, no contiene C_3 tricolor y tampoco tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.



r=rojo g=verde
b=azul y=amarillo
w=blanco

Figura 41

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TEOREMA 4.3. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha, la flecha entre x y y , de algún torneo m -coloreado. Si D no tiene C_3 ni T_3 tricolor entonces $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN. Primero observemos que:

Para $C \subseteq V(D)$. Si B es núcleo de $\mathcal{C}(D[C])$, B es núcleo de $\mathcal{C}(D)[C]$.

Demostración. Sea B un núcleo por trayectorias monocromáticas de $D[C]$. Dado que B es conjunto absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en $D[C]$ y como las trayectorias dirigidas monocromáticas en $D[C]$ también son trayectorias dirigidas monocromáticas en D se tiene que $F(\mathcal{C}(D[C])) \subseteq F(\mathcal{C}(D)[C])$, por lo tanto B es conjunto absorbente en $\mathcal{C}(D)[C]$, donde la última contención se demuestra enseguida.

Sea $a=(u, v) \in F(\mathcal{C}(D[C]))$. Demostraremos que $a \in F(\mathcal{C}(D)[C])$.

Como $a=(u, v)$ es una flecha en $\mathcal{G}(D[C])$, existe una trayectoria dirigida monocromática de u hacia v en $D[C]$, así que ésta uv -trayectoria dirigida monocromática está en D , donde $C \subset D$. Por lo que a es una uv -flecha en $\mathcal{G}(D)[C]$.

Ahora como B es núcleo por trayectorias monocromáticas en $D[C]$, B sólo puede estar formado por a lo más dos vértices (el vértice x y es vértice y), ya que los vértices x y y son los únicos vértices en D que no tienen flecha entre sí.

Si B tiene un único vértice, entonces éste vértice es un conjunto independiente en $\mathcal{G}(D)[C]$.

Si B tiene dos vértices, estos vértices deben ser x y y , entonces $B=\{x, y\}$. Ya que $\{x, y\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D se sigue que $\{x, y\}$ es independiente en $\mathcal{G}(D)[C]$.

Por lo tanto B es núcleo de $\mathcal{G}(D)[C]$.

Para la demostración del Teorema consideremos dos casos posibles.

Caso A) $\{x, y\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Demostración. Sea $C \subseteq V(D)$ un conjunto no vacío de vértices. Probaremos que $\mathcal{G}(D)[C]$ tiene núcleo.

Observemos que $D[C]$ es una digráfica completa ó una digráfica completa menos la flecha entre x y y .

Si $D[C]$ es una digráfica completa, entonces por el Teorema 1.1, existe un vértice v de $D[C]$ que es núcleo por trayectorias monocromáticas, y por la proposición 2.1, v es núcleo de $\mathcal{C}(D[C])$.

Si $D[C]$ es una digráfica completa menos la flecha entre x y y , entonces por el Teorema 4.2, $D[C]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, y por la proposición 2.1, $\mathcal{C}(D[C])$ tiene núcleo.

Pero por la observación anterior todo núcleo de $\mathcal{C}(D[C])$ es núcleo de $\mathcal{C}(D)[C]$.

Por lo tanto si $\{x, y\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

Caso B) $\{x, y\}$ no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Demostración. Por contradicción.

Supongamos que $\mathcal{C}(D)$ no es una digráfica núcleo perfecta.

Observemos que en $\mathcal{C}(D)$ todo par de vértices es adyacente, pues $[x, y]$ es la única flecha faltante en D , pero $\{x, y\}$ no es conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , así que en $\mathcal{C}(D)$, x y y están unidas por una flecha. De esta forma tenemos $\mathcal{C}(D)$ es una digráfica completa.

Ahora como $\mathcal{C}(D)$ no es una digráfica núcleo perfecta, se tiene por el Teorema 2.5 que $\mathcal{C}(D)$ tiene un ciclo dirigido asimétrico.

Sea γ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima contenido en $\mathcal{C}(D)$.

Afirmación 1) Para todo par de vértices, $u, v \in V(\mathcal{C}(D))$ no consecutivos en γ , $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Demostración. Supongamos que existen dos vértices, u, v no consecutivos en γ , tal que sólo existe la flecha (u, v) o la flecha (v, u) en $\mathcal{E}(D)$. Entonces existe un ciclo dirigido asimétrico γ' de longitud menor que γ contenido en $\mathcal{E}(D)$, donde γ' puede ser $\gamma' = (u, \gamma, v) \cup (v, u)$, o $\gamma' = (u, v) \cup (v, \gamma, u)$ dependiendo el sentido de la flecha asimétrica entre u y v en $\mathcal{E}(D)$.

Afirmación 2) $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$.

Demostración. Supongamos que $\{x, y\} \not\subseteq V(\gamma)$. Entonces $D[V(\gamma)]$ es una digráfica completa, que no contiene C_3 ni T_3 tricolor, y por el Teorema 1.1, $D[V(\gamma)]$ tiene un vértice v que es núcleo por trayectorias monocromáticas, y por la proposición 2.1, $\{v\}$ es núcleo de $\mathcal{E}(D[V(\gamma)])$, y por el caso A) $\{v\}$ es núcleo de $\mathcal{E}(D)[V(\gamma)]$, en particular v absorbe a su sucesor en γ lo cual implica que γ tiene alguna flecha simétrica en $\mathcal{E}(D)[V(\gamma)]$, lo cual es imposible.

Por la Afirmación 1) y la Afirmación 2) se tiene una contradicción al Teorema 4.1.

Por lo tanto si $\{x, y\}$ no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , $\mathcal{E}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta. ■

Recordemos que $\mathcal{E}$ es la clase de digráficas m -coloreadas libres $\{C_3, T_3\}$, que son núcleo perfectas por trayectorias monocromáticas.

Del Teorema 4.3 podemos decir que si D es un casi-torneo m -coloreado libre de $\{C_3, T_3\}$, D pertenece a $\mathcal{E}$, ya que toda subdigráfica inducida de $\mathcal{C}(D)$ tiene núcleo y por la proposición 2.1 cada subdigráfica inducida tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

CAPITULO 5

NÚCLEOS POR TRAYECTORIAS MONOCROMÁTICAS EN DIGRÁFICAS QUE SON CASI TORNEOS

En este capítulo se expondrán nuevos resultados obtenidos en colaboración con H. Galeana sobre la existencia de núcleos por trayectorias monocromáticas en digráficas que son casi-torneos.

Recordemos que $[x, y]$ denota la flecha entre x y y que puede ser (x, y) o (y, x) .

TEOREMA 5.1. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha, la flecha entre x y y , de algún torneo m -coloreado T_n (es decir $D \cong T_n - [x, y]$). Si en D todo ciclo dirigido de longitud 3 es monocromático, entonces $\mathcal{C}(D)$ no tiene ningún ciclo dirigido asimétrico γ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y que entre dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

DEMOSTRACIÓN. Por contradicción. Supongamos que existe un ciclo $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$ tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y que para cualesquiera dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$.

Probaremos las siguientes afirmaciones antes de llegar a la contradicción.

Para $z \in V(\gamma)$, denotaremos como z^- el predecesor de z en γ y como z^+ el sucesor de z en γ .

Observemos que como γ es un ciclo dirigido asimétrico y entre cualesquiera dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{C}(D))$, se tiene que z^- es el único vértice w del ciclo γ tal que $(z, w) \notin F(\mathcal{C}(D))$ y z^+ es el único vértice w del ciclo γ tal que $(w, z) \notin F(\mathcal{C}(D))$.

Afirmación 1) Si $z \in V(\gamma)$, entonces $(z^+, z^-) \in F(\mathcal{C}(D))$

Demostración. Como z^- absorbe por trayectorias monocromáticas a todos los vértices de γ excepto a z , en particular absorbe por trayectorias monocromáticas a z^+ . $\square$

Se sigue de la Afirmación 1) que en D existe al menos una trayectoria dirigida monocromática de z^+ a z^- . Denotemos por $P(z)$ una trayectoria dirigida monocromática más corta de z^+ a z^- en D .

Afirmación 2) Si $z \in V(\gamma)$, es adyacente en D a todo vértice de $P(z)$ entonces $(z^-, z) \in F(D)$ y $(z, z^+) \in F(D)$ son del mismo color.

Demostración. El vértice z es adyacente a z^- en D , por hipótesis de la Afirmación 2) y ya que $z^- \in V(P(z))$. Demostraremos que $(z^-, z) \in F(D)$. Supongamos que $(z, z^-) \in F(D)$, entonces $(z, z^-) \in F(\mathcal{C}(D))$ (pues $F(D) \subseteq F(\mathcal{C}(D))$), lo cual no es posible pues γ es asimétrico en $\mathcal{C}(D)$. Por lo tanto $(z^-, z) \in F(D)$.

Ahora el vértice z es adyacente a z^+ en D , por hipótesis de la Afirmación 2) y ya que $z^+ \in V(P(z))$. Demostraremos que $(z, z^+) \in F(D)$. Supongamos que $(z^+, z) \in F(D)$, entonces $(z^+, z) \in F(\mathcal{G}(D))$ (pues $F(D) \subseteq F(\mathcal{G}(D))$), lo cual no es posible pues γ es asimétrico en $\mathcal{G}(D)$. Por lo tanto $(z, z^+) \in F(D)$.

Ahora probaremos que las flechas $(z^-, z) \in F(D)$ y $(z, z^+) \in F(D)$ son del mismo color.

Por contradicción, supongamos que $(z^-, z) \in F(D)$ y $(z, z^+) \in F(D)$ son de distinto color y supongamos sin pérdida de generalidad que $(z^-, z) \in F(D)$ es de color rojo y $(z, z^+) \in F(D)$ es de color azul.

Afirmación 2. a) La trayectoria $P(z) \subset D$ no es azul.

Demostración. Supongamos que $P(z)$ es azul, entonces $(z, z^+) \cup P(z)$ contiene una trayectoria dirigida azul de z a z^- en D , por lo que $(z, z^-) \in F(\mathcal{G}(D))$ lo que contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$. Por lo tanto $P(z)$ no es azul.

Afirmación 2. b) La trayectoria $P(z) \subset D$ no es roja.

Demostración. Supongamos que $P(z)$ es roja, entonces $P(z) \cup (z^-, z)$ contiene una trayectoria dirigida roja de z^+ a z en D , por lo que $(z^+, z) \in F(\mathcal{G}(D))$ lo que contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{G}(D))$. Por lo tanto $P(z)$ no es roja.

Supongamos sin pérdida de generalidad que $P(z)$ es verde y sea $P(z) = (v_0 = z^+, v_1, v_2, \dots, v_t = z^-)$. Ver figura 42.

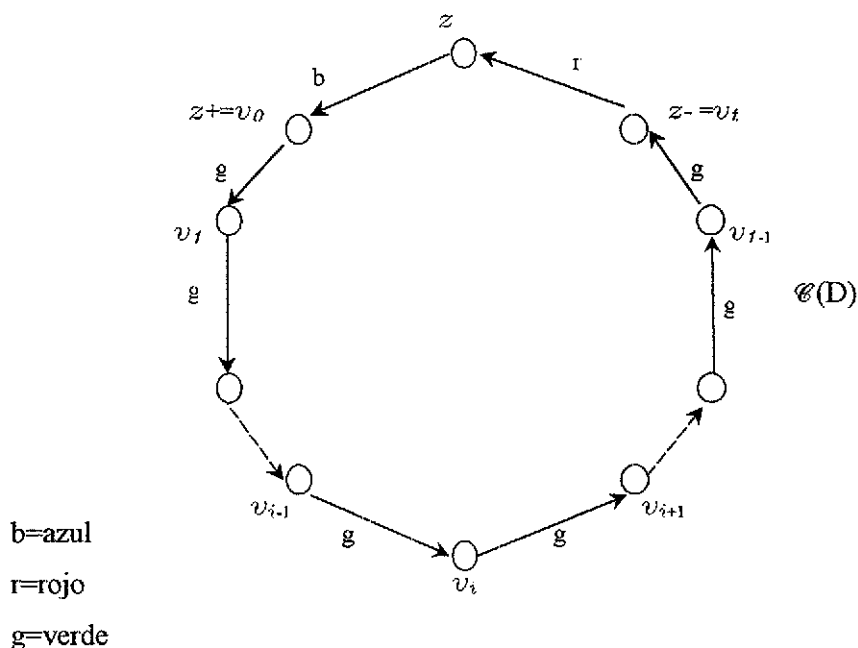


Figura 42

Afirmación 2. c) Para $1 \leq i \leq t-1$, la flecha entre z y v_i en D no es verde.

Demostración. Por hipótesis de la Afirmación 2) z es adyacente en D a todo vértice de $P(z)$, debemos probar que las flechas entre z y v_i no son verdes.

Supongamos por contradicción que para algún i , $1 \leq i \leq t-1$, la flecha entre z y v_i es verde.

Si $(z, v_i) \in F(D)$ es verde, entonces $(z, v_i) \cup (v_i, P(z), z-)$ contiene una trayectoria dirigida verde de z a $z-$ en D , por lo que $(z, z-) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Si $(v_i, z) \in F(D)$ es verde, entonces $(z+, P(z), v_i) \cup (v_i, z)$ contiene una trayectoria dirigida verde de $z+$ a z en D , por lo que $(z+, z) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto la flecha entre z y v_i en D no es verde.

Afirmación 2. d) Para $1 \leq i \leq t-1$, la flecha entre z y v_i va de z hacia v_i .

Demostración. Recordemos que por hipótesis del Teorema, todo ciclo dirigido de longitud 3 en D es monocromático, y z es adyacente a todo vértice de $P(z)$ por hipótesis de la Afirmación 2).

Enseguida analizaremos la dirección de las flechas entre z y v_i , para $1 \leq i \leq t-1$.

Si la flecha entre z y v_1 , va de v_1 hacia z , entonces tenemos en D el ciclo dirigido de longitud 3 $(z, z+, v_1, z)$, con $(z, z+) \in F(D)$ azul y $(z+, v_1) \in F(D)$ verde, contradiciendo que todo C_3 en D es monocromático.

Por lo tanto la flecha entre z y v_1 , va de z hacia v_1 .

Supongamos que para $1 \leq j \leq t-2$, la flecha entre z y v_j , va de z hacia v_j , probaremos que la flecha entre z y v_{j+1} , va de z hacia v_{j+1} .

Supongamos por contradicción que la flecha entre z y v_{j+1} , es (v_{j+1}, z) , ver Figura 43, entonces tenemos en D el ciclo dirigido de longitud 3

(z, v_j, v_{j+1}, z) , con $(v_j, v_{j+1}) \in F(D)$ verde, se sigue de la hipótesis del Teorema 5.1 que (z, v_j) y (v_{j+1}, z) son de color verde, contradiciendo la Afirmación 2.c).

Por lo tanto la flecha entre z y v_{j+1} , es (z, v_{j+1}) .

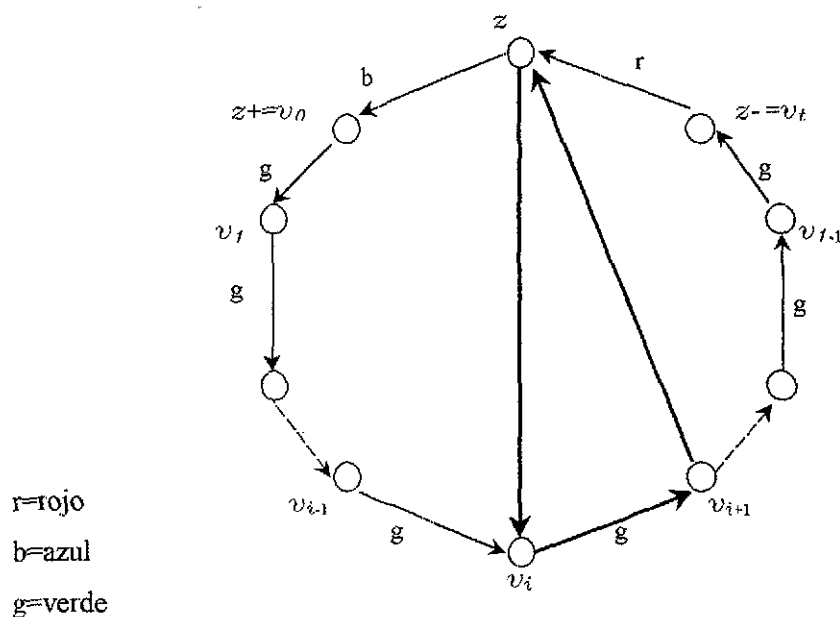


Figura 43

Por la Afirmación 2. d) tenemos la flecha (z, v_{t-1}) , así que en D se tiene el ciclo dirigido de longitud 3, (z, v_{t-1}, v_t, z) , Figura 44, con $(v_{t-1}, v_t) \in F(D)$ verde y $(v_t, z) \in F(D)$ roja, contradiciendo que todo C_3 en D es monocromático.

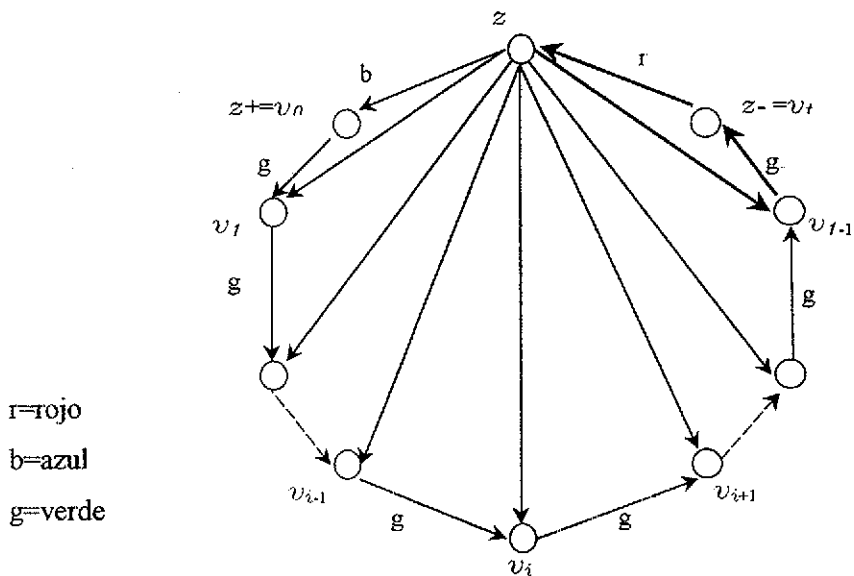


Figura 44

Concluimos que $(z-, z) \in F(D)$ y $(z, z+) \in F(D)$ son del mismo color. $\square$

Afirmación 3) Si $s \in V(\gamma) \setminus \{x, y\}$ entonces $(s-, s) \in F(D)$ y $(s, s+) \in F(D)$ son del mismo color.

Demostración. Como $s \neq x$ y $s \neq y$, entonces s es adyacente a todos los vértices de $P(s)$ en D , así que por la Afirmación 2) $(s-, s) \in F(D)$ y $(s, s+) \in F(D)$ son del mismo color. $\square$

Afirmación 4) Las trayectorias (x, γ, y) y (y, γ, x) son monocromáticas en D .

Demostración. Sea $(x, \gamma, y) = (x = s_0, s_1, s_2, \dots, s_k = y)$, si $s = s_i$, $1 \leq i \leq k-1$, entonces $(s-, s) \in F(D)$ y $(s, s+) \in F(D)$ son del mismo color por la Afirmación 3), en particular si $s = s_1$, entonces $(s_0, s_1) \in F(D)$ y $(s_1, s_2) \in F(D)$ son del mismo color, pero $(s_1, s_2) \in F(D)$ es del mismo color que $(s_2, s_3) \in F(D)$ cuando $s = s_2$, y $(s_2, s_3) \in F(D)$ es del mismo color que $(s_3, s_4) \in F(D)$ cuando $s = s_3$, y así sucesivamente, por lo que la trayectoria $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_k)$ es monocromática en D .

De manera similar (y, γ, x) es monocromática en D . $\square$

Afirmación 5) x y y no son consecutivos en γ .

Demostración. Por contradicción. Supongamos que x y y son consecutivos en γ , con x predecesor de y . Por la Afirmación 4) las trayectorias (x, γ, y) y (y, γ, x) son monocromáticas en D , entonces $(x, y) \in F(\mathcal{C}(D))$ y $(y, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, así que $(x, y) \in \text{Sim}(\mathcal{C}(D))$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis sólo los vértices no consecutivos en γ tienen flechas simétricas en $\mathcal{C}(D)$. $\square$

Afirmación 6) Las trayectorias (x, γ, y) y (y, γ, x) no son del mismo color.

Demostración. Por contradicción. Supongamos que (x, γ, y) y (y, γ, x) son del mismo color, por lo que γ es monocromático en D ,

entonces entre cualesquiera par de vértices z, w de γ existen trayectorias monocromáticas de z a w y de w a z en D , de donde $(z, w) \in F(\mathcal{C}(D))$ y $(w, z) \in F(\mathcal{C}(D))$. Tomando z y w consecutivos se contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por lo tanto, (x, γ, y) y (y, γ, x) no son del mismo color. $\square$

Supongamos sin pérdida de generalidad que en D , (x, γ, y) es roja y (y, γ, x) es azul.

Afirmación 7) $P(x)$ no es roja ni azul.

Demostración. Si $P(x)$ es roja entonces se tiene una trayectoria dirigida roja en D de x a x^- formada por $(x, x^+) \cup P(x)$ donde $(x, x^+) \subseteq (x, \gamma, y)$, por lo que $(x, x^-) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Si $P(x)$ es azul entonces se tiene una trayectoria dirigida azul de x^+ a x la cual se forma por $P(x) \cup (x^-, x)$ con $(x^-, x) \subseteq (y, \gamma, x)$, de donde $(x^+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. $\square$

Afirmación 8) $y \in V(P(x))$.

Demostración. Si $y \notin V(P(x))$, como $[x, y]$ es la única flecha que no está en D , entonces x es adyacente a todos los vértices de $P(x)$ en D . Ahora, por la Afirmación 2), $(x^-, x) \in F(D)$ y $(x, x^+) \in F(D)$ son del mismo color, contradiciendo que $(x^-, x) \in F(y, \gamma, x)$ es de color azul y $(x, x^+) \in F(x, \gamma, y)$ es de color rojo. Por lo tanto $y \in V(P(x))$. $\square$

Afirmación 9) $P(y)$ no es roja ni azul.

Demostración. Si $P(y)$ es azul entonces se tiene una trayectoria dirigida azul de y a y^- formada por $(y, y^+) \cup P(y)$ donde $(y, y^+) \subseteq (y, \gamma, x)$, por lo que $(y, y^-) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Si $P(y)$ es roja entonces se tiene una trayectoria dirigida roja de y^+ a y en D , la cual se forma por $P(y) \cup (y^-, y)$ con $(y^-, y) \subseteq (x, \gamma, y)$, de donde $(y^+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$ contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$. $\square$

Afirmación 10) $x \in V(P(y))$.

Demostración. Si $x \notin V(P(y))$, entonces y debe ser adyacente en D a todos los vértices de $P(y)$. Ahora, por la Afirmación 2), $(y^-, y) \in F(D)$ y $(y, y^+) \in F(D)$ son del mismo color, contradiciendo que (y^-, y) es roja y (y, y^+) es azul. Por lo tanto $x \in V(P(y))$. $\square$

De la Afirmación 8) se tiene que $y \in V(P(x))$ y de la Afirmación 10) se tiene que $x \in V(P(y))$.

Sean $P(x) = (x^+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, a_{r+1} = y, a_{r+2}, \dots, x^-)$ y $P(y) = (y^+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_s, b_{s+1} = x, b_{s+2}, \dots, y^-)$. Figura 45

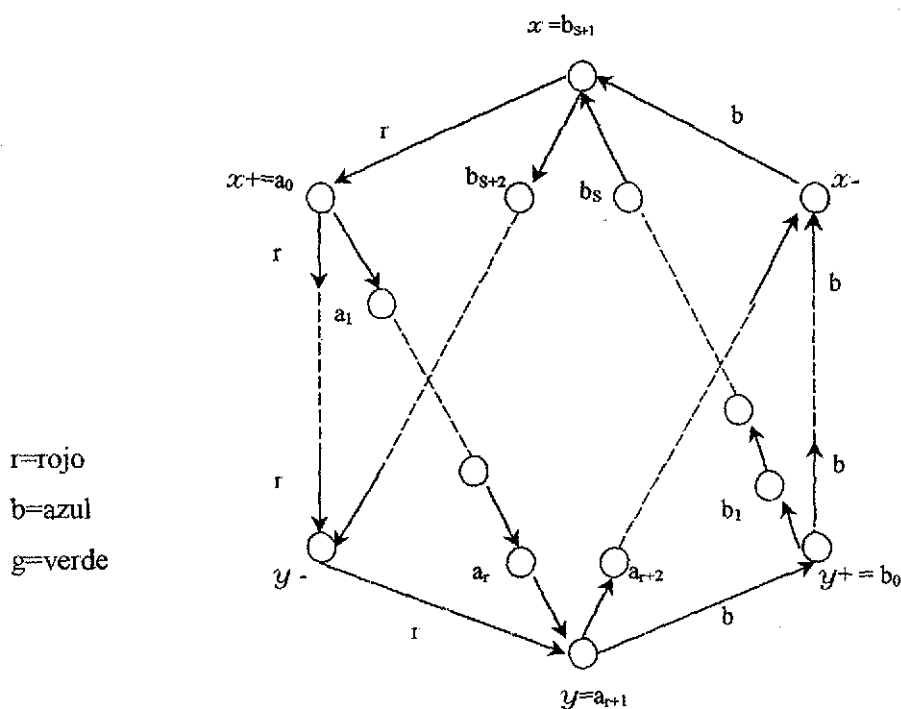


Figura 45

Consideraremos los casos: A) $P(x)$ y $P(y)$ son del mismo color y B) $P(x)$ y $P(y)$ no son del mismo color, para alcanzar la contradicción en ambos casos de la demostración del Teorema 5.1.

Caso A) Supongamos que $P(x)$ y $P(y)$ son ambas del mismo color, como $P(x)$ y $P(y)$ no son de color rojo ni azul, consideremos sin pérdida de generalidad que $P(x)$ y $P(y)$ son de color verde, como se muestra en la Figura 46.

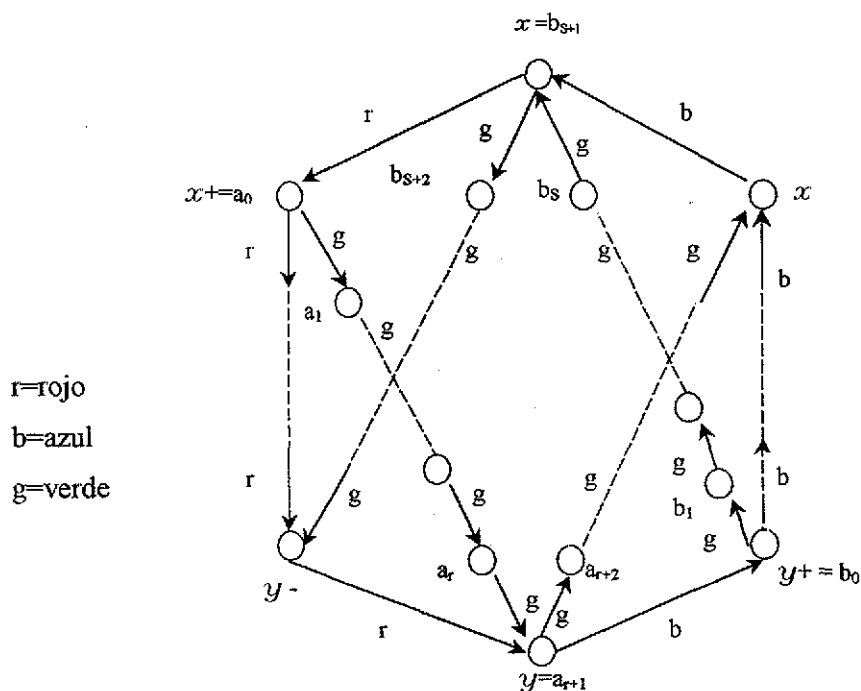


Figura 46

Demostraremos que la flecha entre y^+ y x^+ en D va de x^+ hacia y^+ . Observemos que:

a) Para $0 \leq i \leq r$, la flecha entre y^+ y a_i en D no es verde.

Demostración Supongamos primero que $(y^+, a_i) \in F(D)$ es verde, ver Figura 47, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de y^+ a y formada por $(y^+, a_i) \cup (a_i, P(x), y)$, por lo que $(y^+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

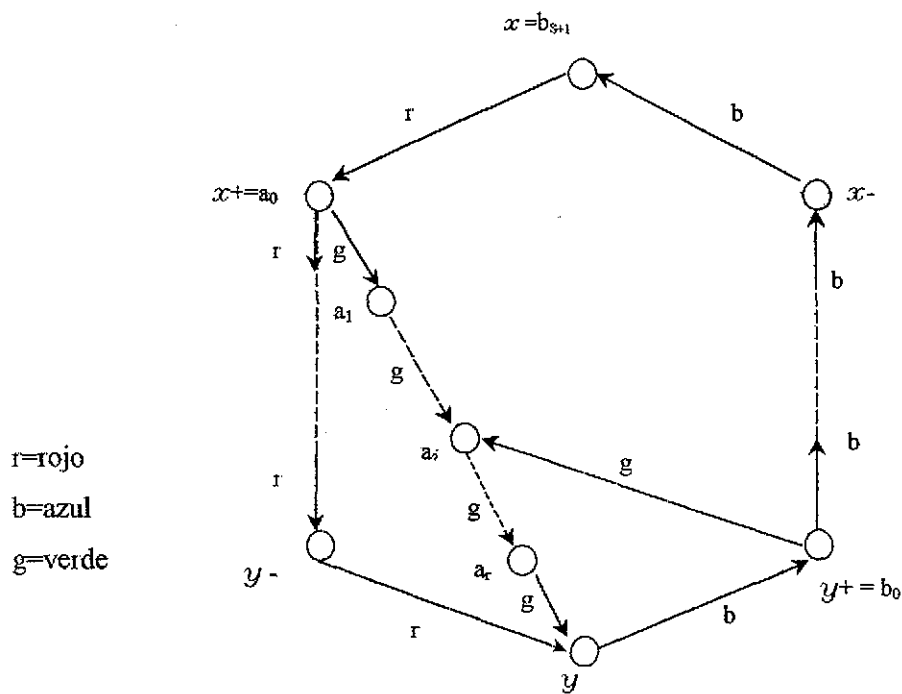


Figura 47

Supongamos ahora que $(a_i, y+) \in F(D)$ es verde, ver Figura 48, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de $x+$ a x formada por $(x+, P(x), a_i) \cup (a_i, y+) \cup (y+, P(y), x)$, por lo que $(x+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

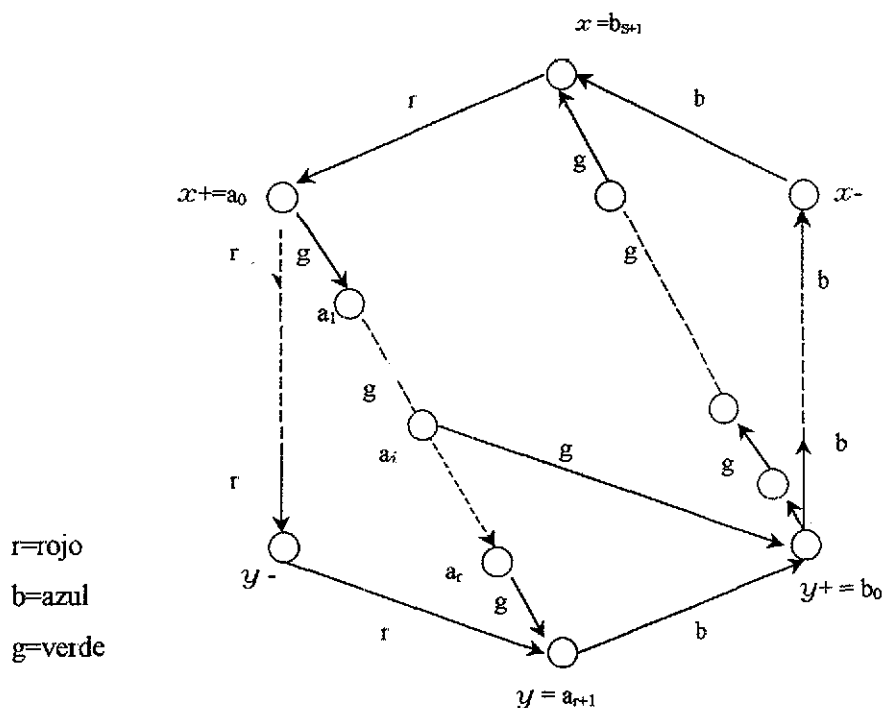


Figura 48

Por lo tanto la flecha entre y^+ y a_i en D no es verde, $(0 \leq i \leq r)$. $\square$

b) Para $0 \leq i \leq r$, si la flecha entre y^+ y a_{i+1} en D va de a_{i+1} hacia y^+ , entonces la flecha entre y^+ y a_i en D va de a_i hacia y^+ .

Demostración. Consideremos $(a_{i+1}, y^+) \in F(D)$ y supongamos por contradicción que $(y^+, a_i) \in F(D)$ entonces (y^+, a_i, a_{i+1}, y^+) , es un triángulo en D con $(a_i, a_{i+1}) \in F(D)$ verde, Figura 49, este triángulo es

monocromático (Por hipótesis del Teorema 5.1) así que $(y^+, a_i) \in F(D)$ y $(a_{i+1}, y^+) \in F(D)$ son de color verde, lo que contradice a).

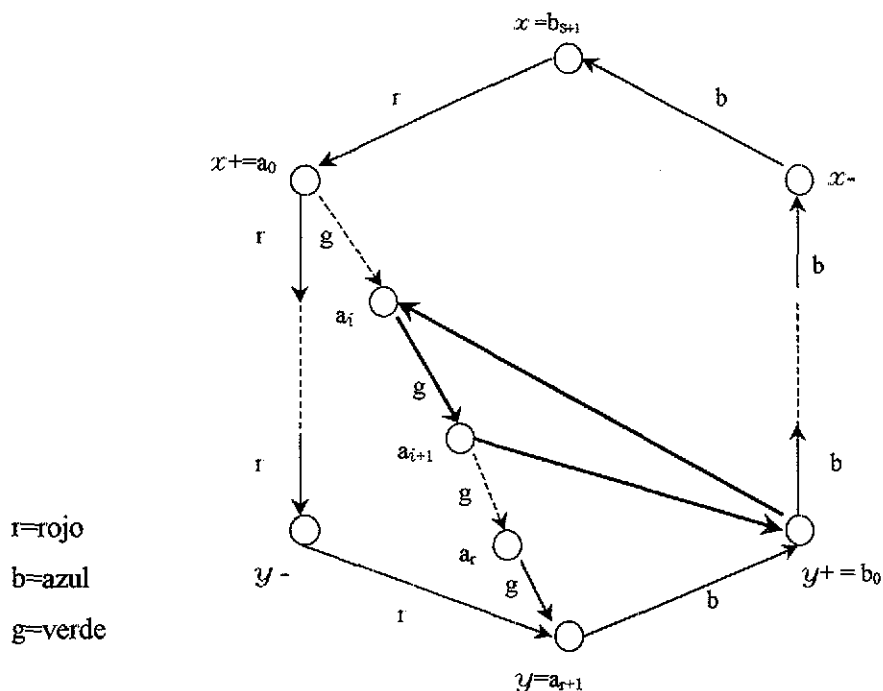


Figura 49

Por demostrar que la flecha entre x^+ y y^+ en D es (x^+, y^+) .

Como la flecha entre $y = a_{r+1}$ y y^+ en D es (a_{r+1}, y^+) se sigue inductivamente por b) que $(a_0 = x^+, y^+)$ también está en D . $\square$

Demostraremos ahora que la flecha entre y^+ y x^+ en D va de y^+ hacia x^+ . Observemos que:

a') Para $0 \leq i \leq s$, la flecha entre x^+ y b_i en D no es verde.

Demostración. Cuando $(x^+, b_i) \in F(D)$ es verde, $0 \leq i \leq s$, Figura 50, se tiene una trayectoria dirigida verde en D de x^+ a x formada por $(x^+, a_i) \cup (a_i, P(y), x)$, por lo que $(x^+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

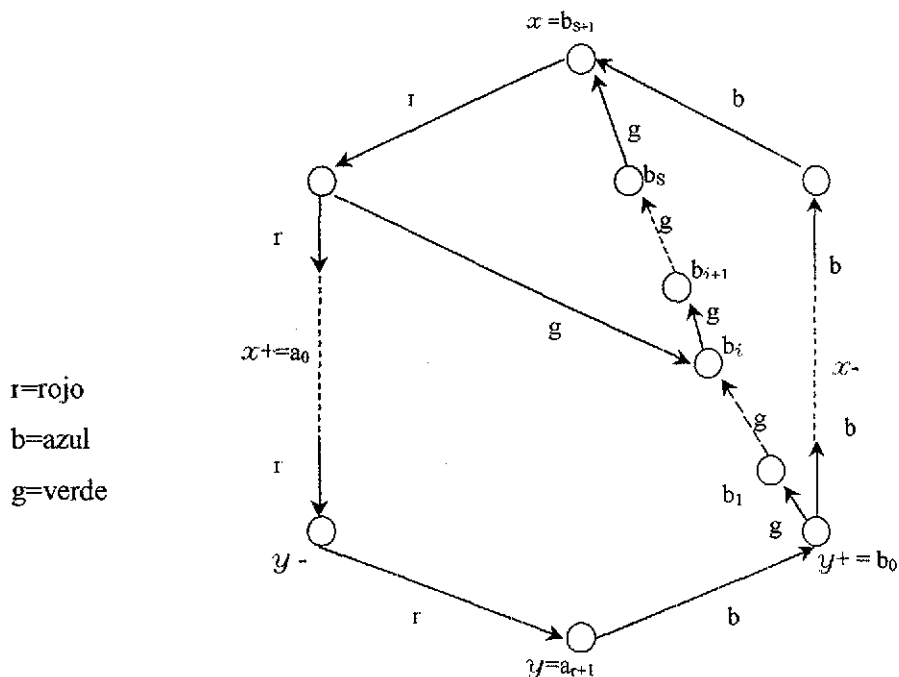


Figura 50

Cuando $(b_i, x^+) \in F(D)$ es verde, Figura 51, $0 \leq i \leq s$, se tiene una trayectoria dirigida verde en D de y^+ a y formada por

$(y^+, P(y), b_i) \cup (b_i, x^+) \cup (x^+, P(x), y)$, por lo que $(y^+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$

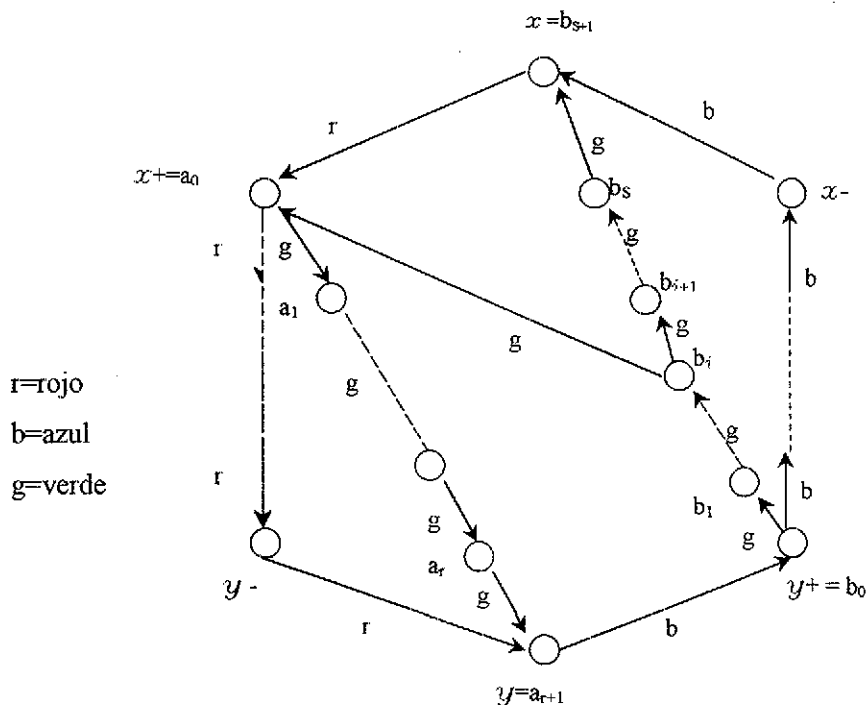


Figura 51

Por lo tanto la flecha entre x^+ y b_i en D no es verde, ($0 \leq i \leq s$). $\square$

b') Para $0 \leq i \leq s$, si la flecha entre x^+ y b_{i+1} en D va de b_{i+1} hacia x^+ , entonces la flecha entre x^+ y b_i en D va de b_i hacia x^+ .

r=rojo
b=azul
g=verde



122

Demostración del caso A) Por una parte se demostró la flecha entre $x+$ y $y+$ en D es $(x+, y+)$, y por otro lado se demostró que la flecha entre $x+$ y $y+$ en D , es $(y+, x+)$ lo cual no es posible ya que en D se tiene que entre dos puntos hay a lo más una flecha. $\square$

Caso B) Supongamos que $P(x)$ y $P(y)$ no son ambas del mismo color y consideremos sin pérdida de generalidad que en D $P(x)$ es verde y $P(y)$ es amarilla. Véase la Figura 53.

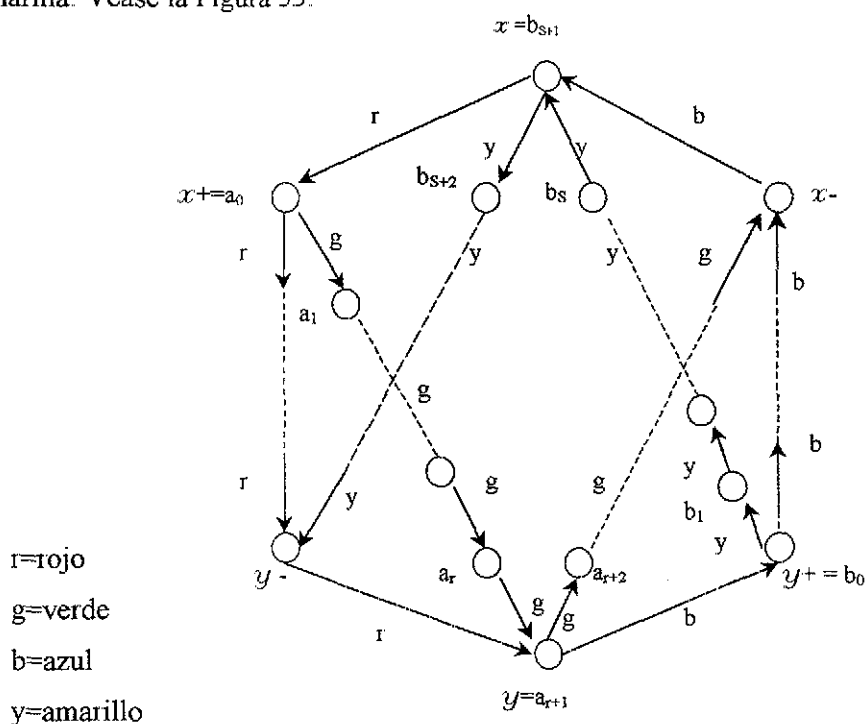


Figura 53

Demostraremos que la flecha entre $x+$ y $y+$ en D va de $x+$ hacia $y+$

Observemos que:

a) Para $0 \leq i \leq r$, si la flecha entre y^+ y a_i en D va de y^+ hacia a_i ésta flecha no puede ser verde.

Demostración. Supongamos que $(y^+, a_i) \in F(D)$ es verde, ver Figura 54, $0 \leq i \leq r$, entonces se tiene una trayectoria dirigida verde en D de y^+ a y formada por $(y^+, a_i) \cup (a_i, P(x), y)$, por lo que $(y^+, y) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

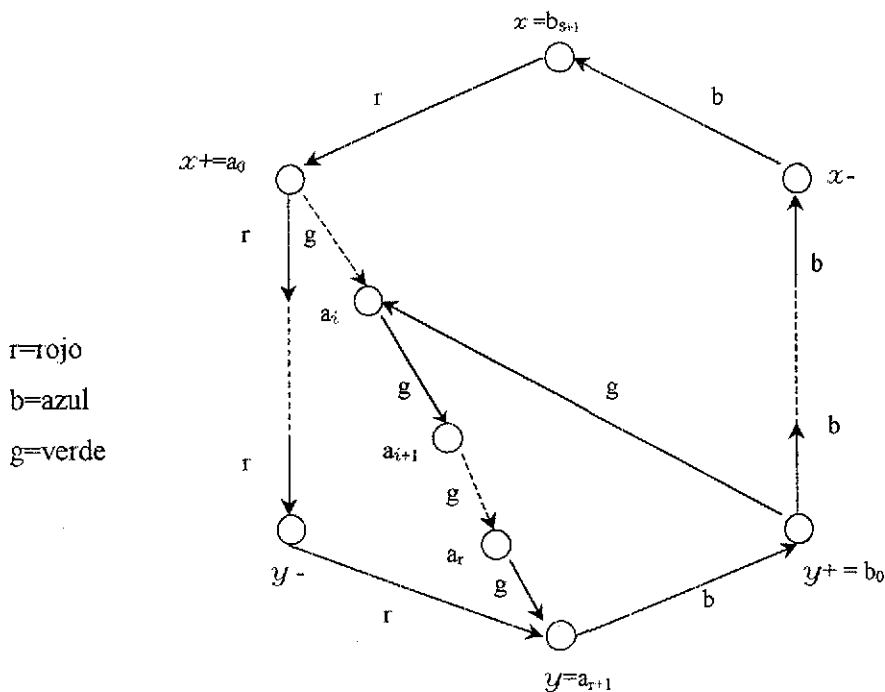


Figura 54

Por lo tanto si $(y^+, a_i) \in F(D)$, ésta flecha no puede ser verde.

b) Para $0 \leq i \leq r$, si la flecha entre y^+ y a_{i+1} en D va de a_{i+1} hacia y^+ entonces la flecha entre y^+ y a_i en D va de a_i hacia y^+ .

Demostración. Supongamos que $(a_{i+1}, y^+) \in F(D)$, y supongamos por contradicción que $(y^+, a_i) \in F(D)$ entonces (y^+, a_i, a_{i+1}, y^+) , es un triángulo en D con $(a_i, a_{i+1}) \in F(D)$ verde, Figura 55, este triángulo es monocromático (Por hipótesis del Teorema 5.1) así que $(y^+, a_i) \in F(D)$ es de color verde, lo que contradice a). Por lo tanto la flecha entre y^+ y a_i es (a_i, y^+) .

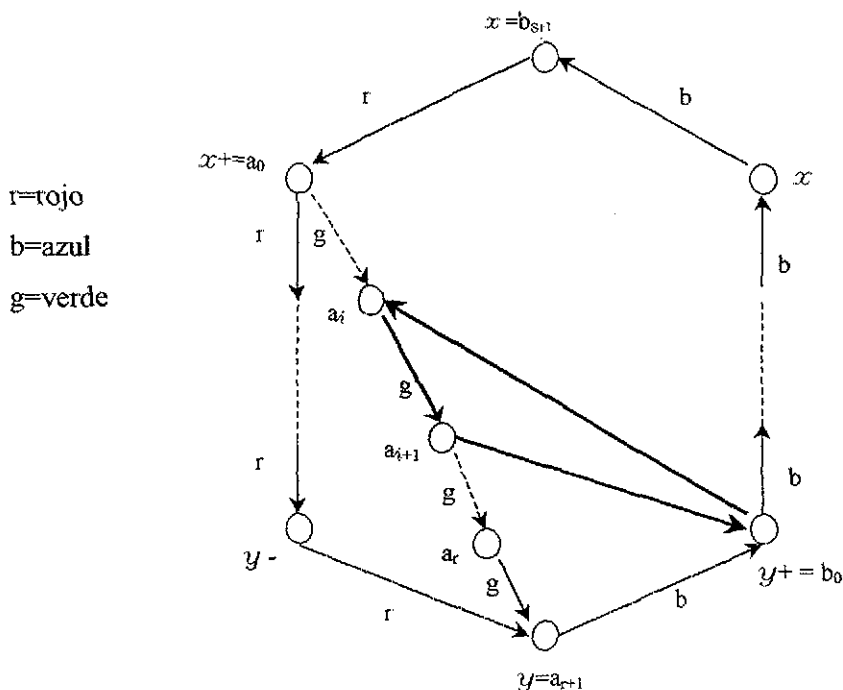


Figura 55

Por demostrar que la flecha entre $y = a_{r+1}$ y y^+ en D es (a_{r+1}, y^+) . Como la flecha entre $y = a_{r+1}$ y y^+ en D es (a_{r+1}, y^+) se sigue inductivamente por la b) que $(a_0 = x^+, y^+)$ también está en D . Figura 56 $\square$

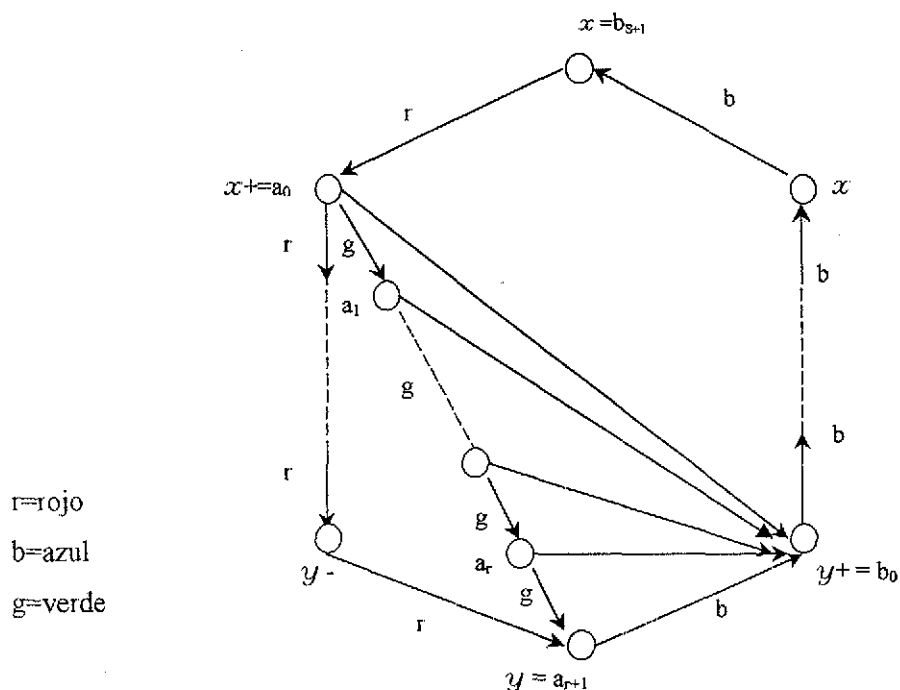


Figura 56

Demostremos que la flecha entre $x+$ y $y+$ en D va de $y+$ hacia $x+$.

a') Para $0 \leq i \leq s$, si la flecha entre $x+$ y b_i en D va de $x+$ hacia b_i ésta flecha no puede ser amarilla.

Demostración. Supongamos que $(x+, b_i) \in F(D)$ es amarilla, $0 \leq i \leq s$, ver Figura 57, entonces se tiene una trayectoria dirigida amarilla en D de $x+$ a x formada por $(x+, b_i) \cup (b_i, P(y), x)$, por lo que $(x+, x) \in F(\mathcal{C}(D))$, contradiciendo que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

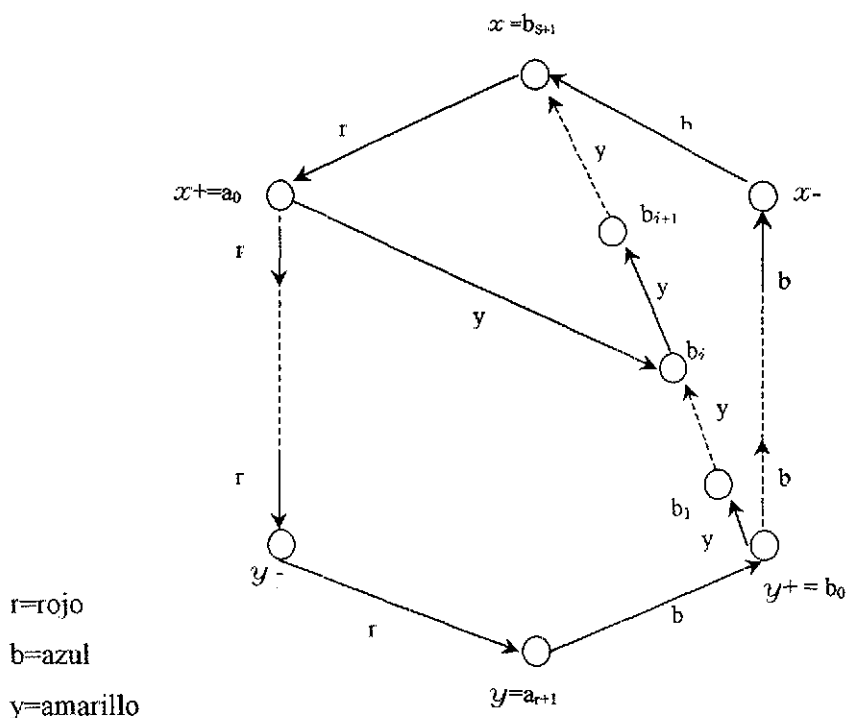


Figura 57

b') Para $0 \leq i \leq s$, si la flecha entre $x+$ y b_{i+1} en D va de b_{i+1} hacia $x+$ entonces la flecha entre $x+$ y b_i en D va de b_i hacia $x+$.

Demostración. Supongamos que $(b_{i+1}, x+) \in F(D)$, y supongamos por contradicción que $(x+, b_i) \in F(D)$ entonces $(x+, b_i, b_{i+1}, x+)$, es un triángulo en D con $(b_i, b_{i+1}) \in F(D)$ amarilla, Figura 58, este triángulo es monocromático (Por hipótesis del Teorema 5.1) así que $(x+, b_i) \in F(D)$ es de color amarilla, lo que contradice la a'. Por lo tanto la flecha entre $x+$ y b_i en D va de b_i hacia $x+$.

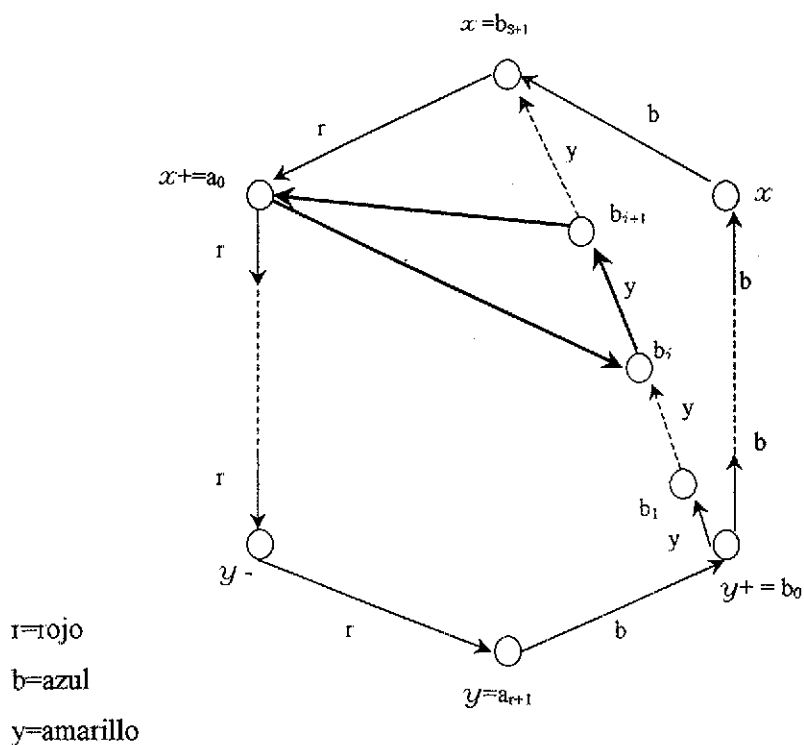


Figura 58

Por demostrar que la flecha entre $x = b_{s+1}$ y $x+$ en D es $(b_{s+1}, x+)$. Como la flecha entre $x = b_{s+1}$ y $x+$ en D es $(b_{s+1}, x+)$ se sigue inductivamente por b') que $(b_0 = y+, x+)$ también está en D . Figura 59. $\square$

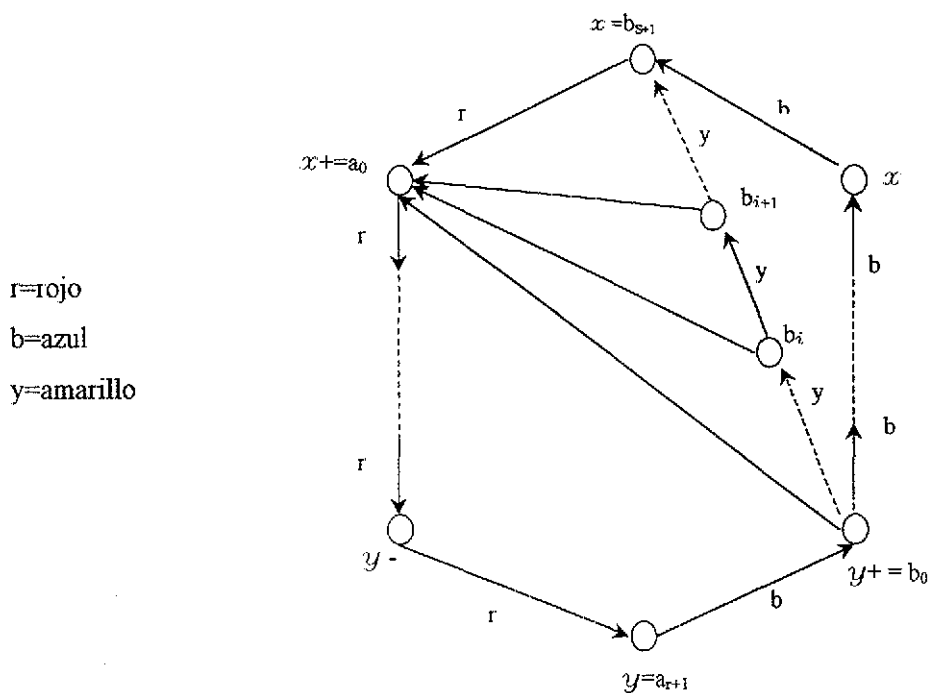


Figura 59

Demostración del caso B) Por una parte demostramos que la flecha entre x^+ y y^+ en D es (x^+, y^+) , y por otra parte que la flecha entre x^+ y y^+ en D , es (y^+, x^+) lo cual no es posible ya que en D se tiene que entre dos puntos hay a lo más una flecha. $\square$

Para completar la demostración del Teorema. Dado que $P(x)$ y $P(y)$ son ambas trayectorias monocromáticas y estas trayectorias no pueden ser ambas del mismo color ni tampoco pueden ser ambas de color distinto en D se tiene un imposible.

Por lo tanto $\mathcal{G}(D)$ no tiene ningún ciclo dirigido asimétrico y tal que $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ y entre dos vértices z, w no consecutivos en γ se tiene que $\{(z, w), (w, z)\} \subseteq F(\mathcal{G}(D))$. ■

TEOREMA 5.2. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha, la flecha entre x y y , de un torneo m -coloreado. Si en D todo C_3 es monocromático entonces D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue directamente del Lema 3.1 y del Teorema 5.1. ■

TEOREMA 5.3. Sea D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha, la flecha entre x y y , de algún torneo m -coloreado. Si en D todo C_3 es monocromático entonces $\mathcal{G}(D)$ es una digráfica núcleo perfecta.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos dos casos posibles.

Caso A) $\{x, y\}$ es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Demostración. Sea $C \subseteq V(D)$ un conjunto no vacío de vértices. Probaremos que $\mathcal{G}(D)[C]$ tiene núcleo.

Observemos que $D[C]$ es una digráfica completa ó una digráfica completa menos la flecha entre x y y .

Si $D[C]$ es una digráfica completa, entonces por el Teorema 2.10, $\mathcal{G}(D[C])$ es núcleo perfecta, así que $\mathcal{G}(D[C])$ tiene núcleo.

Si $D[C]$ es una digráfica completa menos la flecha entre x y y , entonces por el Teorema 5.2, $D[C]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, y por la proposición 2.1, $\mathcal{G}(D[C])$ tiene núcleo.

Por la Observación del Teorema 4.3, se tiene que si B es núcleo de $\mathcal{G}(D[C])$, B es núcleo de $\mathcal{G}(D)[C]$. Por lo tanto $\mathcal{G}(D)[C]$ tiene núcleo. Se sigue que $\mathcal{G}(D)$ es núcleo perfecta.

Caso B) $\{x, y\}$ no es un conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D .

Demostración. Por contradicción.

Supongamos que $\mathcal{G}(D)$ no es una digráfica núcleo perfecta.

Observemos que en $\mathcal{G}(D)$ todo par de vértices es adyacente, pues $[x, y]$ es la única flecha faltante en D , pero $\{x, y\}$ no es conjunto independiente por trayectorias monocromáticas en D , así que en $\mathcal{G}(D)$, x y y están unidas por una flecha. De esta forma tenemos $\mathcal{G}(D)$ es una digráfica completa.

Ahora como $\mathcal{G}(D)$ no es una digráfica núcleo perfecta, se tiene por el Teorema 2.5 que $\mathcal{G}(D)$ tiene un ciclo dirigido asimétrico.

Sea γ un ciclo dirigido asimétrico de longitud mínima contenido en $\mathcal{G}(D)$.

Afirmación 1) Para todo par de vértices, $u, v \in V(\mathcal{G}(D))$ no consecutivos en γ , $\{(u, v), (v, u)\} \subseteq F(\mathcal{G}(D))$.

Demostración. Supongamos que existen dos vértices, u, v no consecutivos en γ , tal que sólo existe la flecha (u, v) o la flecha (v, u) en

$\mathcal{C}(D)$. Entonces existe un ciclo dirigido asimétrico γ' de longitud menor que γ contenido en $\mathcal{C}(D)$, donde γ' puede ser $\gamma' = (u, \gamma, v) \cup (v, u)$, o $\gamma' = (u, v) \cup (v, \gamma, u)$ dependiendo el sentido de la flecha asimétrica entre u y v en $\mathcal{C}(D)$

Afirmación 2) $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$.

Demostración. Supongamos que $\{x, y\} \not\subseteq V(\gamma)$. Entonces $D[V(\gamma)]$ es una digráfica completa, donde todo C_3 es monocromático, y por el Teorema 2.10, $D[V(\gamma)]$ tiene núcleo por trayectorias monocromáticas, así que $\mathcal{C}(D[V(\gamma)])$ tiene núcleo y por la observación del Teorema 4.3, el núcleo $\mathcal{C}(D[V(\gamma)])$, es núcleo de $\mathcal{C}(D)[V(\gamma)]$. Consideremos v núcleo de $\mathcal{C}(D)[V(\gamma)]$, v absorbe a todo vértice de γ , en particular v absorbe a su sucesor en γ , lo que contradice que $\gamma \subseteq \text{Asim}(\mathcal{C}(D))$.

Por la Afirmación 1) y la Afirmación 2) se tiene una contradicción al Teorema 5.1. ■

Enseguida mostramos que la hipótesis del Teorema 5.1 es necesaria mediante algunos contraejemplos de casi-torneos m -coloreados, $m \geq 4$, que no contienen ciclos dirigidos de longitud 3 monocromáticos y los cuales tampoco tienen núcleo por trayectorias monocromáticas.

La Figura 60 representa la digráfica $D = T_7 - [v_1, v_7]$, 4-coloreada en la que los todos los ciclos dirigidos de longitud 3 contenidos en D no son monocromáticos. Se puede verificar fácilmente que ésta digráfica no tiene

núcleo por trayectorias monocromáticas ya que, cada vértice v_i no tiene trayectoria monocromática hacia su vértice anterior, con i módulo 6, es decir $(v_{i+1} \not\sim \rightarrow_{\text{mono}} v_i)$, además el vértice v_7 no absorbe a ningún vértice v_i , $1 \leq i \leq 6$.

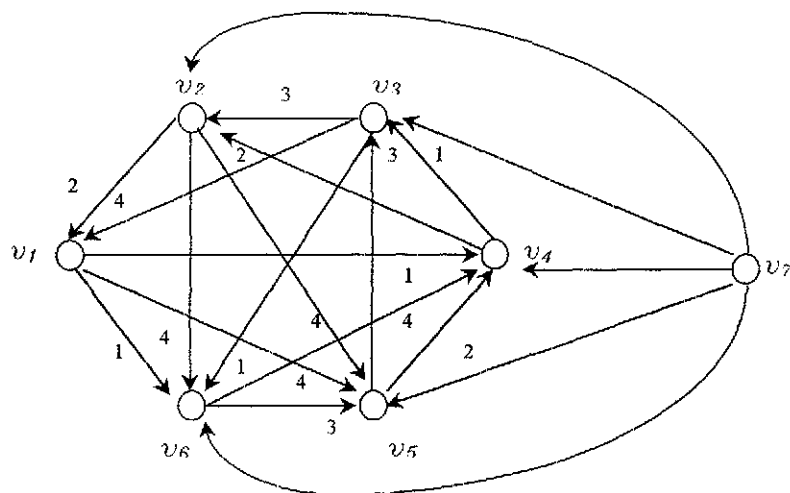


Figura 60

A partir de la digráfica de la figura 60 se pueden construir una infinidad de casi-torneos 4-coloreados que no tienen ciclos dirigidos de longitud 3 monocromáticos, y tampoco tienen núcleo por trayectorias monocromáticas.

Para contruir éstos casi-torneos de sólo necesitamos ir agregando cada vez un nuevo vértice y todas las flechas de color 1 del nuevo vértice hacia todos los vértices anteriores. Los nuevos casi-torneos obtenidos de esta forma son también 4-coloreados, no contienen ciclos monocromáticos de longitud 3 y tampoco tienen núcleo por trayectorias monocromáticas.

Ahora, mostraremos porqué las hipótesis de los Teoremas 1.1 y 5.1 son independientes.

Por un lado la hipótesis de que un casi-torneo m -coloreado no contenga C_3 tricolor ni T_3 tricolor no implica que en éste todos los ciclos dirigidos de longitud 3 sean monocromáticos. La digráfica $D = T_4 - [x, y]$, de la Figura 61, no contiene C_3 tricolor ni T_3 tricolor y tampoco tiene C_3 monocromáticos

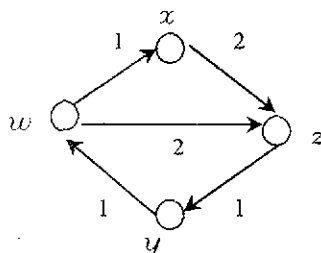


Figura 61

Por otro lado, la hipótesis de que un casi-torneo m -coloreado todo ciclos de longitud 3 es monocromático tampoco implica que éste casi-torneo carezca de T_3 es tricolor. En la digráfica de la Figura 62 ($D = T_4 - [x, y]$), todo C_3 es monocromático pero todo T_3 es tricolor.

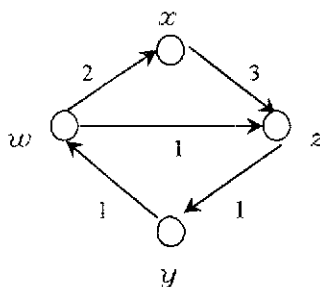


Figura 62

Veamos ahora, que las hipótesis de los Teoremas 1.1 y 5.1 también son independientes.

Por un lado la hipótesis de que en un casi-torneo m -coloreado todo C_3 sea casi-monocromático y todo C_4 sea casi-monocromático, no implica que los ciclos de longitud 3 sean monocromáticos. En la digráfica $D = T_4 - [x, y]$, de la Figura 61, todo C_3 y todo C_4 son casi-monocromáticos y podemos observar que D no contiene C_3 monocromáticos.

Por otro lado, la hipótesis de que en un casi-torneo m -coloreado todo ciclo de longitud 3 es monocromático tampoco implica que en éste casi-torneo todo C_3 y todo C_4 sean casi-monocromáticos. En la digráfica $D = T_4 - [x, y]$, de la Figura 62, todo C_3 es monocromático pero no hay C_4 casi-monocromáticos.

Del teorema 5.3 decimos que si D una digráfica m -coloreada que resulta de borrar una sola flecha, de algún torneo m -coloreado en la que todo C_3 es monocromático D está en la clase de digráficas $\mathcal{E}$ y $\mathcal{F}$.

Aún queda pendiente una conjetura: Si D es un torneo menos una flecha coloreada con sólo tres colores, y en la que todo ciclo dirigido de longitud tres es casi-monocromático, ¿ D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas?

CONCLUSIONES

El trabajo realizado en el último capítulo proporciona resultados nuevos que consideran como hipótesis las Digráficas conocidas como casi-torneos con la condición de que en éstas digráficas todo ciclo dirigido de longitud 3 sea monocromático, ésta hipótesis es independiente de las hipótesis consideradas en los diferentes trabajos realizados por Shen Minggang [20], H. Galeana-Sánchez [7, 8], H-Galeana-García Ruvalcaba [9] para determinar si una digráfica tiene núcleo por trayectorias monocromáticas.

Dejamos abierta la conjetura Si D es un torneo menos una flecha coloreada con sólo tres colores, y en la que todo ciclo dirigido de longitud tres es casi-monocromático, ¿ D tiene núcleo por trayectorias monocromáticas?

REFERENCIAS

1. C. Berge, *Graphs and Hipergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1973
2. C. Berge, *Graphs*, , Mathematical Library, Vol. 6, North-Holland Amsterdam, 1985.
3. C. Berge, and P. Duchet, *Recent problems and results about kernels in directed graphs*, Discrete Math., 86 (1990) 27-31.
4. P. Duchet, *Graphes Noyau-Parfaits*, Ann. Discrete Math. 9 (1980) 93-101
5. P. Duchet, *A sufficient condition for a digraph to be kernel-perfect*, Journal Graph Theory II. (1) (1987) 81-85
6. P. Duchet, H. Meynel, *A note on kernel-critical graphs*, Discrete Math. 33 (1981) 103-105.
7. H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996) 103-112
8. H. Galeana-Sánchez, *Kernels in edge coloured digraphs*, Discrete Math. Por aparecer.
9. H. Galeana-Sánchez and J.J. García-Ruvalcaba, *Disccusiones Mathematicae Graph Theory*, 20 (2000), 243-254.

10. H. Galeana-Sánchez, V. Neumann_Lara, *Núcleos y seminúcleos en digráficas*, Tesis profesional, Universidad Nacional Autónoma de México. 1980
11. H. Galeana-Sánchez, V. Neumann_Lara, *On Kernels and Semikernels of digraphs*, Discrete Math. 48 (1984), 64-76.
12. H. Galeana-Sánchez, V. Neumann_Lara, *On Kernel-perfect critical digraphs*, Discrete Math. 59 (1986), 257-261
13. H. Galeana-Sánchez, V. Neumann_Lara, *Orientations of graphs in kernel theory*, Discrete Math. 87 (1991), 271-280. North-Holland.
14. H. Galeana-Sánchez, and P. Rajsbaum, *Cycle pancychsm in tourment*, 111 Submitted.
15. Von Neumann, O. Morgestern, *Theory of games and econocmic behavior*, Princenton University Press, Princenton.
16. M. Richarson, *Solutions of irreflexive relations*, Ann. Math. 58 (2) (1953), 573.
17. M. Richarson, *Extensions theorems for solutions of reflexive relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 39 (2) (1953), 649
18. Ma. del Rocío Rojas Monroy, *Núcleos por Trayectorias monocromáticas*. Por aparecer.

19. B. Sands, N. Sauer, and R. Woodrow, *On monochromatic Paths in Edge-Coloured Digraphs*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 33, 271-275 (1982).
20. Shen Minggang, *On monochromatic Paths in m -Coloured Tournaments*. Journal of Combinatorial Theory, Series B 45, 108-111 (1986).