M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Optimización en Carteras de Fondos de Pensiones

realizado por Lourdes Gómez Nava

con número de cuenta 09757146-1 **, quién cubrió los créditos de la carrera de:** Mátemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L.
Propietario	Dra. Eliane Regina Rodrigues Caloni	Eliane Regina Rodrigues
Propietario	Act. Jaime Vazquez Alamilla	
Suplente	M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández	
Suplente	Act. Jorge Humberto Del Castillo Spíndola	

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

M. en C. José Antonio Gómez Ortega.

A mis padres por su gran amor

Optimización en Carteras de Fondos de Pensiones

Lourdes Gómez Nava

Agradecimientos

A mi madre por su apoyo en todo momento, sus consejos y su amor incondicional.Gracias maá por confiar en mí.

A mi padre por su apoyo y su gran amor. Gracias por tu confianza y por enseñarme a luchar por mis objetivos.

Agradezco a mis hermanas Carmen y Mirian por estar siempre conmigo, y brindarme su cariño.

A mi hermano Jorge por su buen carácter, y por los buenos momentos que hemos pasado juntos.

Alenka gracias por todo lo que me has enseñado y por la felicidad que me has dado. Te amo

Muy en especial agradezco a Daniel que ha sido una persona muy importante en mi vida, por toda su paciencia y apoyo. Gracias por compartir conmigo todo este tiempo y por tu gran amor. Te amo.

Gracias a mis abuelito por su tierno cariño y muy en especial a mi abuelita, donde quiera que estes gracias por todo.

Quiero agradecer en especial al Dr. Pablo Padilla por su confianza, "paciencia" y dedicación durante la elaboración de este trabajo. Gracias por tu sincera amistad.

A la Dra. Eliane Caloni por la revisión de este trabajo.

También agradezco a la M. en C. Beatriz Rodríguez por su apoyo y confianza en este trabajo y por compartir conmigo sus conocimientos.

Al Act. Jaime Vazquez por su gran disposición en la revisión de este trabajo.

Con gran cariño agradezco a mi sinodal y amigo el Act. Humberto del Castillo por su gran apoyo en este trabajo y por su sincera amistad y cariño.

Gracias a Liliana por ser una gran amiga y conciencia. Lili gracias por tu cariño y estar siempre conmigo.

A Rogelio mi gran amigo, por todos sus consejos y sincera amistad. Fue un gusto haber compartido contigo toda mi carrera.

También quiero agradecer a mi amiga Raquel por todos los momentos que pasamos juntas. Espero verte pronto.

Agradezco a Juanjo, Enrique, Ramiro, Omar y Karilia por su sincera amistad y apoyo que me brindaron durante todo este tiempo. Los quiero mucho.

Con cariño agradezco a Javier Torales por su gran amistad y por ser un excelente amigo.

Quiero agradecer a Adriana, parte importante en la etapa final de este trabajo. Gracias por tu apoyo y por esas desveladas.

A Emmanuel Castelán por su apoyo incondicional y su sincera amistad.

Gracias a mis compañeras del IIMAS, Norma, Lucia, Violeta y Lirio, por los momentos agradables que pasamos juntas. A Pablito por ser tan chido.

A Sara Zambrano por su amistad y por la revisión de este trabajo.

Muy en especial agradezco a Susana y Natalia por su gran cariño. A manuel por su gran amistad y enseñanzas.

Gracias a mis amigas las más viejitas Rocío, Alicia y Gaby, por su eterna amistad.

Agradezco a todo el personal de IIMAS y muy en especial a Ana Pérez por su apoyo técnico en la elaboración de este trabajo.

Gracias a la M. en C. Elena de Oteyza por su gran apoyo y comprensión.

Al proyecto de CONACYT G25427-E, por su apoyo económico durante la elaboración de este trabajo.

Índice General

Introducción

La insuficiecia de programas de pensiones a nivel mundial y la mala administración de muchos de ellos dan como resultado que una gran parte de la población mundial corra el riesgo de caer en la pobreza durante su vejez.

En los países en desarrollo las principales causas del fracaso de los programas de pensión son:

1) Gran parte de la población trabaja en el sector informal o en regiones rurales que proporcionan pocas prestaciones.

2) Los asalariados de las pequeñas empresas (de diez o menos trabajadores) con frecuencia se ven excluidos de la participación en los programas de pensiones.

3) Muchos programas de pensiones son mal administrados, lo que tiene como consecuencia costos administrativos excesivamente altos.

4) El déficit de operaciones que se presenta, es debido a la incapacidad de las instituciones encargadas para cobrar las cotizaciones.

5) Muchos programas se basan en sistemas financieros débiles o no reglamentados que pueden prestarse a la corrupción.

Respecto a los problemas planteados por los incisos 3) y 5), una de las formas de controlar el desempeño de los fondos de pensiones es a través de la regulación de los instrumentos y los porcentajes de las carteras en los que se puede invertir. La regulación vigente en materia de inversión es muy restrictiva y no permite a los administradores diversificar adecuadamente los riesgos.

El objetivo de este trabajo es buscar optimizar los fondos de pensiones con la finalidad de lograr un mejor desempeño de éstos.

En el capítulo 1 se presenta una descripción de las características y funcionamientos generales de los sistemas de pensiones públicos a nivel federal, como son: el IMSS e ISSSTE.

En el capítulo 2 se describen los diferentes instrumentos derivados (contratos adelantados, contratos sobre futuros y opciones), así como sus principales características y funciones.

En el tercer capítulo se establecen las herramientas matemáticas para desarrollar modelos continuos y valuar instrumentos financieros como son, la ecuación de Black-Scholes para valuar opciones, el modelo de bonos y un modelo para tasas de interés (modelo de Vasicek).

En el capítulo 4 se estudia el modelo binomial para precios de opciones y acciones.

Por último, en el capítulo 5, de construyen diferentes portafolios considerando la posibilidad invertir en instrumentos derivados de manera que nuestro portafolio sea más diversificable.

Capítulo 1

Sistemas de Pensiones en México

En este capítulo se presenta una descripción de los principales sistemas de pensiones en nuestro país como son el sistema de los trabajadores afiliados al Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) y el sistema de los trabajadores afiliados al Sistema de Seguridad Social para los Trabajadores al Servicio del Estado (ISSSTE). Es importante señalar que la mayor parte de la información que se presenta en este capítulo fue tomada de [1],[7] y [8].

1.1 Introducción

La pobreza en México, como en todos los países, tiene raíces histŕicas y estructurales muy afianzadas en características económicas, políticas, sociales y culturales, que no han favorecido el desarrollo de los factores productivos y, que además, han creado condiciones de exclusiń e inequidad en contra de amplios sectores de la población.

La mayoría de la gente pasa la vida adulta esperando los fondos de pensiones. Las circunstancias en las que esto sucede han cambiado con el tiempo, ya que probablemente ninguna de las opciones que propongan a los que actualmente cotizamos en el Seguro Social se ajustan a nuestras necesidades.

En los últimos años se ha dado una tendencia hacia la reforma de los fondos de pensiones incluyendo la creación de cuentas de fondos de pensiones administrados por el sector privado.

Una de las formas de controlar el desempeño de los fondos de pensiones es directamente a través de la regulación de los instrumentos y los porcentajes de las carteras en los que se puede invertir, con ello se puede controlar el riesgo asociado a los portafolios.

En todos los países de Latinoamérica donde operan los fondos privados de pensiones se regula la composición de sus carteras con el fin de defender los intereses de los afiliados, dichas regulaciones tienden a colocar límites estrictos en las inversiones permitidas y el rendimiento de las carteras, excluyendo inversiones con mejores rendimientos.

En 1999, en México existía la regulación más restrictiva de fondos privados de pensiones, donde los únicos instrumentos permitidos eran los valores de deuda emitidos por el Gobierno Federal o el Banco Central.

Los administradores de fondos de pensiones para evitar un bajo rendimiento tienden a evitar la volatilidad e invertir en carteras similares, reduciendo los incentivos de tomar mayores riesgos.

1.2 Características de los Sistemas de Pensiones

El objetivo de los planes de pensiones es proteger el flujo de ingresos de un trabajador y su familia, con el propósito que en el momento del retiro el trabajador tenga recursos que le permitan alcanzar cierto nivel de vida.

Los planes de pensiones se pueden caracterizar, según sus beneficios y formas de administración.

En México existen los sistemas de pensiones públicos y privados. Los sistemas públicos son ofrecidos por empresas públicas y por los sistemas de seguridad social a nivel federal y estatal. Mientras que los sistemas privados son ofrecidos por empresas públicas o privadas. También existen los planes de pensiones que son adquiridos de manera voluntaria por el trabajador a través de algún intermediario financiero.

Los principales planes en cobertura de población son los administrados por los sistemas de seguridad social federal, en primer lugar tenemos el de los trabajadores afiliados al Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) con casi 15 millones de trabajadores y el de los trabajadores afiliados al Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los trabajadores del Estado (ISSSTE) con 2 millones de trabajadores.

Utilizando el criterio de beneficio, podemos clasificar a los fondos de pensiones de la siguiente manera:

- Beneficio definido, el cual establece al momento del retiro, el derecho a una pensión y el monto de ésta en función del promedio del salario determinado en cierto número de años; los pagos de la pensión están garantizados hasta la muerte del trabajador.

- Contribuciones definidas, en este tipo de planes, solamente se establecen las contribuciones del trabajador y patrón. Al momento del retiro el trabajador puede recibir el monto acumulado o adquirir una renta vitalicia o un retiro programado.
- Sistemas mixtos, son una combinación de los dos sistemas anteriores.

Muchos países en el mundo han reformado sus sistemas. Por ejemplo, en Latinoamérica 11 países han realizado reformas muy importantes[1]. Estas reformas han sustituido el esquema de beneficio definido por esquemas mixtos, quedando como base la contribución definida con el fin de alcanzar la *tasa de reemplazo*[2].

1.3 Sistemas de Pensiones para los Trabajadores del IMSS

1.3.1 Historia

Los antecedentes sobre aseguramiento de los trabajadores y sus familiares, se encuentran en los últimos años de la época porfiriana, presentandose en la Ley de Accidentes de Trabajo del Estado de México (1904), y la Ley sobre Accidentes de Trabajo del Estado de Nuevo León (1906), en estas leyes se reconocía a sus trabajadores en caso de enfermedad, accidente o muerte, derivados del cumplimiento de su labores.

En 1915 se realizó un proyecto de Ley de Accidentes, que establecía las pensiones e indemnizaciones a cargo del empresario.

En la base constitucional del Seguro Social en México (1917) se declara el establecimiento de cajas de seguros populares, invalidez, vida, retiro voluntario y accidente.

A finales de 1925 se presentó la iniciativa de Ley sobre Accidentes de Trabajo y Enfermedades Profesionales en las que se proponía la creación de un Instituto Nacional de Seguros Sociales, cuya integración económica habría de corresponder exclusivamente al sector patronal.

[1] La primera reforma se realizó en Chile en 1981.

[2] La tasa de reemplazo se define como el porcentaje que representa la pensión del último salario del trabajador.

Fue hacia 1943 cuando se implanta en México el Seguro Social, aprobándose la iniciativa de ley con el fin de proteger a los trabajadores, asegurar su salario, su capacidad productiva y la tranquilidad de su familia, garantizando el derecho humano a la salud y a la asistencia médica. El Instituto Méxicano del Seguro Social es creado como un organismo público descentralizado con el objetivo de administrar y organizar el Seguro Social.

Durante los años cincuentas se diseñó un plan de inversiones que incluía la construcción de grandes hospitales, tal como el hospital de La Raza.

En los años siguientes continuó creciendo no sólo el número de asegurados sino también la cantidad de prestaciones a otorgar. A finales de los años ochentas existían 33 millones de afiliados.

1.3.2 La Nueva Reforma del IMSS

En julio de 1997, entró en vigor la nueva ley, modificando la operación de seguros y particularmente los relacionados a pensiones.

Esta nueva ley está constituida por tres pilares:

- un pilar básico de beneficio definido, a través de una pensión mínima garantizada.
- un pilar de contribución definida obligatoria.
- un pilar voluntario de contribución definida.

Todos los trabajadores afiliados al IMSS deben de contar con una cuenta individual, constituida por tres subcuentas:

1) retiro por cesantía en edad avanzada y vejez.

2) vivenda.

3) aportaciones voluntarias.

Los recursos provenientes de la subcuenta de retiro por cesantía en edad avanzada y vejez, y de aportaciones voluntarias son invertidos por las SIEFORES y operadas por las AFORES.(ver más adelante)

Los recursos de la subcuenta de vivienda se canalizan al INFONAVIT, con el objeto de otorgar créditos para la adquisición y construcción de vivienda.

1.3.3 Administradoras de Fondos para el Retiro (AFORES)

Para la prestación de los servicios de administración de las cuentas individuales, se crearon empresas denominadas Administradoras de Fondos para el Retiro (AFORES) y las Sociedades de Inversión Especializadas de Fondos para el Retiro (SIEFORES).

Las AFORES pueden operar varias SIEFORES, con carteras distintas atendiendo a diversos grados de riesgo. El trabajador tiene el derecho de elegir su AFORE.

La ley señala que las administradoras estarán obligadas a operar una *sociedad de inversión*[3] cuya cartera esté integrada por valores que preserven el valor adquisitivo del ahorro de los trabajadores.

El régimen de inversión de la sociedades de inversión sólo permiten invertir en instrumentos de deuda. Para los instrumentos de deuda privados se requieren, que estén calificados por empresas calificadoras autorizadas por la Comisión Nacional Bancaria y de Valores (CNBV).

1.3.4 Reglas de Inversión

La Junta de Gobierno de la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, en su sesión de fecha 18 de octubre de 2001, con fundamento en los artículos 5o. fracción II, 8o. fracción IV, 43 y 47 de la Ley de los Sistemas de Ahorro para el Retiro, y considerando: que es conveniente modificar el régimen de inversión de las Sociedades de Inversión Especializadas de Fondos para el Retiro a efecto de lograr una mayor diversificacińn de los instrumentos susceptibles de ser adquiridos por estas entidades; que la mayor diversificación propiciará la dilución de los riesgos asumidos, evitando concentraciones en determinados sectores o instrumentos; Que es conveniente abrir la inversión en instrumentos denominados en unidades de inversión, además de a las entidades de la Administración Pública Federal, a las emisiones de los estados, el Distrito Federal o los municipios, entre otros, y Que la administración de las Sociedades de Inversión Especializadas de Fondos para el Retiro debe controlar el riesgo de la cartera y no de cada instrumento en lo individual. Asi mismo, se propone que las operaciones con derivados se sujeten, además de a la autorización que corresponde otorgar al Banco de México, a la entrada

[3] Las sociedades de inversión son instituciones que tienen por objeto la adquisición de valores y documentos seleccionados de acuerdo a un criterio de diversificación de riesgos establecido previamente.

en vigor de las reglas prudenciales que en materia de administración integral de riesgos emita esta Comisión [1].

Los límites de inversión por los distintos tipos de instrumentos,emisor y plazo serán los siguientes:

POR TIPO DE INSTRUMENTO	% DEL ACTIVO
Instrumentos y títulos denominados en UDIS o avalados por el Gobierno Federal denominados en pesos, que paguen intereses al menos iguales a la variación de la UDI.	51%

POR TIPO DE EMISOR	% DEL ACTIVO
a) Instrumentos emitidos o avalados por el Gobierno Federal o Banco de México (excluyendo banca de desarrollo).	100%
b) Títulos emitidos por empresas privadas, títulos emitidos y avalados por instituciones de crédito y depósitos bancarios de dinero a la vista.	35%
c) Títulos emitidos, avalados o aceptados por instituciones de banca múltiple y títulos emitidos o aceptados por entidades financieras.	10%
d) Instrumentos emitidos o avalados por el Gobierno Federal o Banco de México denominados en dólares (inscritos en el Registro Nacional de Valores.	10%
e) Depósitos bancarios de dinero a la vista.	\$250,000. Max
f) Depósitos bancarios de dinero a la vista en dólares.	USD \$25,000. Max

POR PLAZO	% DEL ACTIVO
a) Títulos e instrumentos cuyo plazo por vencer o la revisión de su tasa de interés no se mayor de 183 días.	100%
b) Instrumentos o títulos emitidos o avalados por el Gobierno Federal o por el Banco de México, cuyo plazo por vencer no exceda los 90 días.	Porcentaje mínimo que establece la SIEFORE.

UDI: Unidades de cuenta de valor real constante, utilizadas para neutralizar el impacto de la inflación en operaciones financieras y comerciales. Su valor lo publica el Banco de México en el Diario Oficial de la Federación

Fuente: CIRCULAR CONSAR 15-5 relativa a las reglas generales que establece el régimen de inversión al que deberan sujetarse las SIEFORES (de acuerdo a necesidades y condiciones del mercado).

1.4 Sistema de Pensiones para Trabajadores del ISSSTE

El sistema del Seguro Social para los trabajadores al Servicio del Estado se originó en la reforma constitucional en el año 1959, donde la Ley del ISSSTE , establece que la institución ofrece los siguientes seguros:

- seguro de salud.
- seguro por jubilación y retiro.
- seguro por cesantía en edad avanzada.
- seguro por invalidez y muerte.
- seguro por riesgo de trabajo.

El sistema de pensiones del ISSSTE es considerado de beneficio definido, que opera como un sistema de reparto.

En 1992 se creó el Sistema de Ahorro para el Retiro (SAR), la cuál es un sistema de cuentas individuales con dos subcuentas:

- de retiro: se deposita una cuota patronal de 2% del salario. Los recursos de esta subcuenta son canalizados como créditos directos al Gobierno Federal.
- de vivienda: en ésta se deposita una cuota de 5% del salario. Los recursos de ésta, son canalizados al Fondo para la Vivienda de los trabajadores afiliados al ISSSTE (FOVISSSTE), estos recursos son utilizados para financiar la adquisición y construcción de vivienda.

Los recursos acumulados en las cuentas individuales son entregados en un solo pago al trabajador en el momento de su retiro, o a sus familiares en caso de muerte.

1.5 Cambio en los Sistemas de Pensiones

Considerando las deficiencias de los sistemas de pensiones se debe buscar un diseño óptimo para estos, con la finalidad de lograr un mejor desempeño.

Como ya sabemos, la regulación vigente en materia de inversión es muy restrictiva, no le permite a los administradores diversificar adecuadamente los riesgos, además de no permitir a los trabajadores escoger entre diferentes fondos de inversión, según su preferencia de riesgo-rendimiento.

1.5.1 Enfoques de la Regulación de Inversiones

Existen tres enfoques respecto a la regulación de inversiones para sistemas de pensiones y sociedades de inversión:

- Restricciones cuantitativas, en está, se prohibe la inversión en activos que se consideren muy riesgosos, ya sea por riesgo de mercado o riesgo crediticio. Se imponen límites máximos y/o mínimos de ciertos activos en los que se pueden invertir los fondos.

- La regla del hombre prudente, es la manera en que una persona prudente lleva a cabo las inversiones para determinada cartera según los propósitos en ésta. En comparación con las restricciones cuantitativas, esta regla no impone límites máximos o mínimos a los valores permitidos.

- La regla del inversionista prudente, aquí no se excluye ninguna clase de activos, aún cuando se consideren muy riesgosos. La razón es que de acuerdo a la teoría de portafolios de Markovitz, estos valores al incluirse en un portafolio de inversión pueden reducir el riesgo global de este.

Existen costos innecesarios al establecer restricciones cuantitativas, en vez de utilizar restricciones basadas en la regla del inversionista prudente pues todo inversionista busca maximizar sus rendimientos esperados, y minimizar el riesgo del portafolio.

Consideremos los portafolios con mayor rendimiento para cierto riesgo, llamemos frontera eficiente A, a las combinaciones de todos los tipos de activos sin ninguna restricción. Sea la frontera eficiente B la combinación de los activos con restricciones cuantitativas.

Ahora, con estas restricciones limitemos el riesgo máximo del portafolio al nivel σ_m.

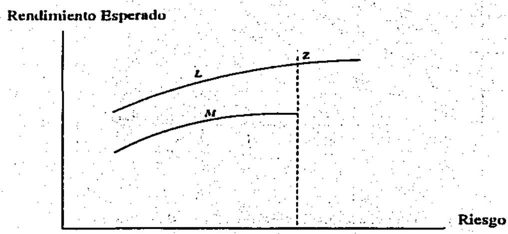


Figura 1.1: Frontera Eficiente.

Intuitivamente comparando las fronteras A y B para los portafolios permitidos a la izquierda de σ_m, podemos observar que el rendimiento esperado en la frontera eficiente A es mayor.

Por esta razón, con la regulación del inversionista prudente podemos alcanzar el mismo objetivo y con menos costos, sólo le restaría a las autoridades vigilar que los fondos no sean invertidos en portafolios a la derecha del portafolio z que se encuentra sobre la frontera eficiente A.(Fig 1.1)

Mientras más posibilidades se tengan para invertir, más probable es que encontremos un portafolio de inversión que se ajuste mejor a nuestras preferencias de riesgo-rendimiento.

Consideremos cuatro distintas preferencias de riesgo-rendimiento p_1, p_2, p_3, p_4

Dado que preferimos tener mayor rendimiento con menor riesgo, entonces escogemos al portafolio M.(fig 1.2)

Con la regulación de inversiones basada en el enfoque de restricciones cuantitativas, no se permite la inversión en algunos activos como son: acciones de empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y valores emitidos por empresas privadas mexicanas y extranjeras, y por títulos emitidos por gobiernos extranjeros. Esta regulación es ineficiente debido a que para el mismo nivel de riesgo establecido, se puede obtener mayor rendimiento y menor costo fiscal.

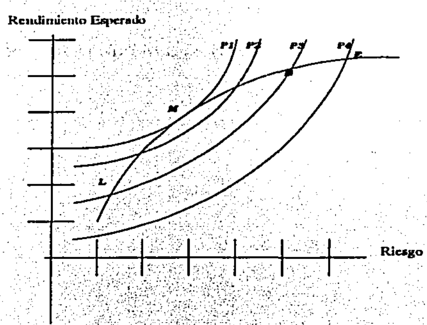


Figura 1.2: Preferencia en riesgo-rendimiento.

Es muy importante señalar la importancia que han tenido los productos derivados en la administración de riesgos, permitiendo que usuarios elijan los riesgos que pueden administrar y transferir los que no desean asumir, de este manera se podría aplicar la regulación del inversionista prudente.

Por esta razón en el siguiente capítulo se describen las características y las funciones de distintos instrumentos derivados.

Capítulo 2

Los Mercados de Derivados

En este capítulo se centra la atención en las características fundamentales de los diferentes tipos de derivados que son relevantes para cuantificar el valor del riesgo. Se desarrolla una breve historia de los mercados de derivados. Para la elaboración de este capítulo se utilizó como referencia [5] y [9]

2.1 Los Diferentes Tipos de Derivados

La consolidación del mercado mexicano de productos derivados puede contribuir a generar las condiciones de certidumbre, que requiere la inversión en proyectos de larga maduración. En particular, un mercado de productos derivados y orientado a la oferta de mecanismos de cobertura pueden jugar un papel muy importante en la asignación del riesgo.

En respuesta a la necesidad de administrar y cubrir los riesgos financieros, los mercados de derivados han experimentado un crecimiento explosivo. Actualmente se están creando bolsas de futuros y de opciones en todo el mundo. Los derivados hacen más completos a los mercados al incrementar las oportunidanes de que algunos agentes puedan transferir el riesgo a otros inversionistas.

Un derivado es definido como un contrato privado cuyo valor depende fundamentalmente de algún activo subyacente, tasa de referencia o índice, como puede ser una acción, un bono, una divisa o un producto.

Los derivados abarcan desde componentes estructurales simples, como los contratos lineales (forward, futuros, opciones y swaps) hasta productos más complejos como son las opciones exóticas o los bonos estructurados.

Los dos principales mercados donde se llevan a cabo operaciones con instrumentos derivados son:

- Bolsas
- Fuera del mostrador (*Over-the-Counter*)[1]

Los derivados intercambiados en bolsa cuentan con características predeterminadas, tales como la fecha de vencimiento, monto del subyacente amparado en el contrato, condiciones de entrega y precio. Los derivados intercambiados fuera del mostrador son diseñados por instituciones financieras de acuerdo con las necesidades específicas del cliente.

2.1.1 Participantes en los Mercados de Derivados

Los participantes en estos mercados corresponden a las siguientes categorías:

Administradores de riesgos (*hedgers*): son instituciones (rara vez son individuos) que compran y venden instrumentos derivados para compensar su exposición a las fluctuaciones. Dichas instituciones incluyen a empresas institucionales financieras tales como bancos comerciales, bancos de inversión, corredores de valores, compañías de seguros, bancos centrales y agencias gubernamentales.

Especuladores (*speculators*): la meta del especulador es maximizar su beneficio en el menor tiempo posible. Son todos aquellos participantes del mercado que operan en el piso de remate como los que operan fuera de éste, que compran y venden derivados precisamente para asumir riesgos, a cambio de posibles ganancias. Estos participantes dotan de liquidez a este mercado y además lo hacen más eficiente.

Oportunista (*arbitrageus*): el oportunista pretende ganar dinero sin tomar riesgo, aprovechando contradicciones entre distintos precios y variables observadas en el mercado, además se clasifican en intermediarios y corredores de pisos. Los intermediarios (*Commission Merchants*) se conocen simplemente como corredores, su función es servir como intermediarios fuera de piso y corredores en el piso de remate. Los corredores de piso compran y venden en los pisos de remate en representación de clientes fuera de piso.

[1] El mercado Over-The-Counter, OTC, es un sistema de cotización de valores donde los participantes negocian directamente entre ellos, sin la intermediación de una bolsa o de un piso de remate. Las operaciones se realizan a través de redes computalízadas o telefónicas que vinculan entre sí a los agentes de todo el mundo.

A continuación daremos una breve descripción de los diferentes tipos de instrumentos derivados.

2.2 Contratos Adelantados (*Forward*)

Los contratos adelantados (*forward*) y los futuros son los instrumentos de administración de riesgo más antiguos y mejor conocidos, disponibles en los mercados financieros internacionales. Los bancos mexicanos los utilizan para cubrirse contra movimientos del tipo de cambio y de las tasas de interés, o bien para especular.

Los contratos adelantados son contratos que establecen hoy la cantidad y el precio de una compra/venta de algún activo que se celebrará en el futuro.

Por ejemplo, el día de hoy 9 de julio, un inversionista compra 700 acciones TAMSA a 30 días. Si en el momento de celebrar el contrato cada acción vale \$42.00, el inversionista esta obligado a pagar \$29,400.00 por la compra de 700 acciones a \$42.00 cada acción.

El precio de este tipo de contrato se determina en el mercado por la libre interacción de la oferta y la demanda. Generalmente, el precio forward se fija de manera tal que el valor del contrato por sí mismo sea cero al inicio del acuerdo. Para realizar un análisis de la valuación de un contrato adelantado se necesita establecer las siguientes variables:

- precio actual (*spot*) del activo.
- precio adelantado (*forward*) del activo.
- tasa libre de riesgo.
- rendimiento del activo.
- plazo del vencimiento.

Cabe señalar que este tipo de contratos se negocian de manera extrabursátil en el mercado interbancario.

2.2.1 Los Contratos Adelantados de Tasas de Interés (*FRAs*)

Los contratos adelantados de tasas de interés, también conocidos como *forward* rate agreements (*FRAs*) es un contrato forward donde las partes convienen una cierta tasa de interés aplicada a una cierta cantidad principal durante un periodo de tiempo futuro específico. Este tipo de instrumentos se negocian de manera extrabursátil en el mercado interbancario.

2.3 Futuros

De forma muy general podemos decir que los contratos de futuros son contratos adelantados que se comercian en bolsa. Como tal, el contrato de futuros es uno de los instrumentos más revolucionarios y de mayor aceptación.

En México las empresas agroindustriales más avanzadas ya utilizan futuros para cubrir sus exportaciones de café, jugo de naranja y granos entre otros, a su vez, distintas instituciones financieras utilizan futuros para protegerse contra la volatilidad de los mercados internacionales de crédito.

Por ejemplo, supongamos que hoy es 5 de febrero, un inversionista A da instrucciones a su corredor para comprar 500 acciones de CEMEX CPO cuyo vencimiento es en julio del mismo año, a un precio de $25.00 por acción. A su vez otro corredor está interesado en dicha oferta pues tiene instrucciones del inversionista B de vender 500 acciones de CEMEX CPO a $25.00 cada acción; ambos corredores se ponen en contacto y cierran el trato.

2.3.1 Historia y Desarrollo de los Mercados de Futuros

Los primeros contratos forward fueron utilizados en Francia, en las ferias regionales. Después en Japón hacia el siglo XVII se dan a conocer los contratos de futuros organizados. Esto último repercutió en el desajuste de activos y pasivos entre las rentas y los gastos de los señores feudales japoneses. Los señores feudales recibían sus rentas en arroz , pero estas rentas estaban sujetas a fluctuaciones irregulares por factores ambientales, en los precios del arroz y del mercado. De esta forma se vieron obligados a enviar a los almacenes el arroz sobrante de las cosechas, quedando así disponible para tener liquidez a corto plazo, posteriormente se emitieron recibos contra arroz.

El primer contrato de grano se negoció en Chicago, que se había convertido en el centro del comercio de granos de los E.U.A. Comenzó la compra y venta de grano en mercados organizados en Chicago conforme crecían las redes ferroviarias. Los agricultores y procesadores de granos se enfrentaban al enorme riesgo de variaciones inesperadas en los precios. Ante la enorme necesidad de eliminar este riesgo de precios de compra y venta del grano, se establecieron el Chicago Board of Trade y el Chicago Mercantile Exchange cuyo propósito era manejar las transacciones al contado. Dichos contratos eran contratos adelantados donde se especificaba la cantidad de grano y su precio para entregar en una fecha futura.

Estas operaciones dieron lugar al incumplimiento de contratos y esto originó que se crearan bolsas de grano y una institución conocida como "cámara de compensación" cuya función era romper el vínculo entre el comprador y el vendedor de un contrato a futuro. Quedando como comprador legal frente a cada vendedor, y viceversa como vendedor legal ante todos los compradores, de esta manera la cámara de compensación asumió las responsabilidades anteriores.

Gracias a la integridad que la cámara de compensación proporcionó, ningún participante perdió dinero en su posición de futuros por incumplimiento de contratos.

Durante los años sesentas las bolsas de futuros comenzaron a extenderse. Muchas personas empezaron a considerar la posibilidad de negociar contratos de futuros de tasas de interés y de divisas. Mark J. Powers, en 1969 comenzó desarrollando un plan para la introducción de futuros financieros y más adelante en 1972 diseñó los primeros contratos de futuros de divisas. En 1975, en el Chicago Mercantile Exchange se introdujeron los primeros futuros de T-Bills.[2] En los años ochentas se abrieron numerosas bolsas de futuros, entre ellas está el London International Financial Futures Exchange (LIFFE), el Singapore International Monetary Exchange (SIMEX) entre otras.

2.3.2 Valuación de Futuros sobre Tasas de Interés

Los futuros de tasas de interés son uno de los instrumentos más importantes de cobertura contra el riesgo de tasas de interés tanto de corto plazo (mercado de dinero), como de largo plazo (mercado de capitales). La cobertura contra riesgos de tasa interés por medio de futuros es muy compleja, ésto se debe a la relación entre el precio del instrumento de deuda, su vencimiento y la tasa de interés.

A continuación se desarrolla la manera de realizar la valuación de estos instrumentos en términos de *tasas forward*.[3]

En un futuro sobre tasas de interés, el vendedor (posición corta) se compromete a entregar una cierta cantidad de títulos de deuda (por ejemplo Cetes, bonos, etc) que tenga un cierto periodo de vigencia (por ejemplo 90 días) a un precio pactado al momento de obtener el futuro, con una fecha de vencimiento del contrato. Por

[2] Los T-Bills son intrumentos de deuda del gobierno norteamericano con vencimiento a un año o menos, y son considerados libres de riesgo.

[3] En el capítulo 4 se desarrolla la construcción de las tasas spot y forward.

parte del comprador (posición larga) se compromete a recibir los títulos y pagar el precio pactado. Las ganancias de ambos, al vencimiento, surge porque existe una diferencia en tasas de interés entre la pactada y la que existe en el mercado al vencimiento del contrato.
Por ejemplo, supongamos que las partes entran a un contarto de futuros de un mes sobre una tasa de interés de CETES[4] a 28 días. La tasa pactada es de 20% al vencimiento del futuro, un mes después, la tasa de cetes a 28 días es de 40%, entonces el vendedor entrega el cete a una tasa de 20% y el comprador lo paga a ese precio. Con ésto el vendedor resulta ser el ganador, ya que está vendiendo un CETE a 28 días a un precio mayor que el precio que se está negociando en ese momento en el mercado.

Ahora, definamos a T como la fecha de vencimiento del futuro y a T^* como la fecha de vencimiento del instrumento de deuda, en este caso consideremos a CETES.

Sea $T^* - T \geq 0$, siendo esta diferencia el plazo de la tasa que se está negociando.

Supongamos que r y r^* son las tasas de interés *spots* para T y T^* respectivamente. Por otra parte tenemos que el valor nominal de un cete es de \$10.00 y el precio del cete es igual a:

$$P_t = 10e^{-r^*(T^*-t)}, \tag{2.1}$$

entonces el precio al que se pacta el futuro es el siguiente,

$$F_t = P_t e^{r(T-t)}, \tag{2.2}$$

donde,

F_t es el precio del futuro.

P_t es el precio actual al que se está negociando el valor subyacente.

r es la tasa de interés *spot* libre de riesgo para el periodo $T - t$.

$(T - t)$ es el periodo de vigencia del futuro.

Sustituyendo (2.1) en la ecuación (2.2) obtenemos:

$$F_t = 10e^{-r^*(T^*-t)}e^{r(T-t)}$$

[4]Certificados de la Tesorería de la Federación

$$= 10e^{rT-r^*T^*}$$

$$= 10e^{-\bar{r}(T^*-T)},$$

donde $\bar{r}$ es la tasa forward de T^* a T, la tasa formada, es simplemente el promedio de dos tasas spot.

2.4 Opciones

2.4.1 Introducción

Una opción es un derecho, mas no una obligación, de comprar o vender una cantidad determinada de un activo subyacente (una mercancía básica, una acción, divisa, instrumento financiero, etc.) a un precio preestablecido (*precio de ejercicio*) y durante un plazo previamente convenido. Por ese derecho el comprador paga una prima y se compromete a realizar la compra o venta del activo subyacente en las condiciones pactadas.

Las opciones son uno de los instrumentos más sencillos de cobertura y de inversión apalancada para administrar riesgos. Las opciones se negocian en bolsa y en el mercado de mostrador. Estas opciones son utilizadas para especular y cubrirse del riesgo.

Existen dos tipos de opciones de acuerdo con los derechos que otorgan:

- Opciones de compra (*opciones call*), denotada por $C(S,t)$.
- Opciones de venta (*opciones put*), denotada por $P(S,t)$.

En la siguiente sección definimos brevemente la historia de las opciones y posteriormente se mencionan las características de las opciones *put* y *call*.

2.4.2 Historia y Desarrollo de los Mercados de Opciones

El inicio de las opciones se dio en los países Bajos. Fué hasta fines del siglo pasado que se atacó desde el punto de vista matemático el problema de fijar el precio de una opción. Hacia 1900 en Francia, el matemático Louis Bachelier presenta la primera fórmula para calcular el precio de la opción. En 1968, cuando ya se conocía el Chicago Board of Trade por sus contratos de futuros, comenzó un estudio sobre la posibilidad de introducir contratos de futuros sobre acciones de bolsa, pero dicho estudio terminó recomendando opciones sobre acciones. De esta manera surgió en 1972 el Chigaco Board Options Exchange (CBOE) que comercializaba opciones sobre acciones en bolsa, teniendo un éxito espectacular. Cinco años después se comenzaron a negociar opciones tipo *put* en nuevas bolsas de valores como Amex, Philadelphia, Pacific y MidWest.

La creación de este mercado permitió que hubiera flexibilidad en estrategias de especulación y cobertura una de las características principales de las opciones.

A pesar del gran desarrollo de las opciones que existió en la década de los 70's, los mercados internacionales se enfrentaron al gran problema de las fluctuaciones en tipos de cambio y tasas de interés. Los mercados vieron la necesidad de introducir instrumentos para especular y cubrirse de dichos movimientos. Esto dio origen al mercado de contratos a futuros y a medida del éxito que tuvieron las bolsas comenzaron a ver la posibilidad de ofrecer opciones sobre contratos de futuros.

En octubre de 1982, el Chicago Board of Trade comenzó a negociar opciones sobre contratos de futuros sobre T-Bonds [5]. Tres años después se introdujeron las opciones sobre un contrato a futuro cuyo subyacente era el eurodólar.

2.4.3 Características Básicas de un Contrato de Opción

Cualquier contrato de opción, es decir, de compra (*call*) o de venta (*put*) debe tener establecidas las siguientes variables:

- El precio predeterminado que se pacta pagar por el activo se conoce como precio de ejercicio (X).
- El día en el cual se puede ejercer la opción se llama fecha de vencimiento (T).
- El activo sobre el cual se escribe la opción se conoce como el bien subyacente (S).

2.4.4 Opción de Compra (*call option*)

Un contrato de opción de compra es el derecho, mas no la obligación de comprar cierta cantidad de un bien a un determinado precio, para que sea ejercido en cierto tiempo. Este derecho se obtiene a cambio del pago de una prima.

[5] Los T-Bonds son los instrumentos que reflejan las tasas de interés de largo plazo en Estados Unidos.

Ahora bien si al tiempo T (fecha de vencimiento), S el activo subyacente vale más que el precio de ejercicio, se ejercerá la opción pues de esta manera se puede comprar el activo a un precio menor que el de mercado (y hacer una posible ganancia vendiéndolo mas caro); en caso de que el activo subyacente valga menos que el precio de ejercicio, la opción no se va a ejercer, porque es mas barato comprar el activo en el mercado que ejercer el cotrato call. Entonces en la fecha de vencimiento de la opción se cumple:

$$max(S_T - X, 0). \tag{2.3}$$

A (2.3) se conoce como función de pay-off.

Se dice que un Call está:
In the money cuando $S > X$.
At the money cuando $S = X$.
Out of the money cuando $S < X$.

2.4.5 Opción de Venta (*put option*)

Un contrato de opción de venta es el derecho, mas no la obligación de vender cierta cantidad de un bien a un determinado precio, para que sea ejercido en cierto tiempo. La persona que obtiene este tipo de opciones tiene que pagar una prima para obtener el derecho de vender cierto bien subyacente.

El poseedor de un Put quiere que el precio del activo subyacente baje, así puede venderlo a un precio mayor que su valor de mercado. La función de pay-off a tiempo T es la siguiente:

$$max(X - S_T, 0). \tag{2.4}$$

Se dice que un Put está:
In the money cuando $S < X$
At the money cuando $S = X$
Out of the money cuando $S > X$.

Calls y Puts son las dos formas más simples de opciones. Por esta razón son conocidas como vainillas.

2.4.6 Posiciones en los Mercados de Opciones

Existen cuatro tipos diferentes de posiciones en el mercado de opciones, a continuación se mencionaran sus caracteristicas.

- Posición larga sobre opciones *call*.
- Posición corta sobre opciones *call*.
- Posición larga sobre opciones *put*.
- Posición corta sobre opciones *put*.

Posición larga sobre opciones call: en esta posición los participantes son aquellas personas que compran opciones call. Observemos el perfil de ganancias de este tipo de participante.

Definamos al eje Y como las utilidades o pérdidas derivadas de un cierto movimiento en el precio del bien subyacente. Una vez comprada la opción, el eje X indica el precio del bien subyacente. Definimos al precio del ejercicio como PE.

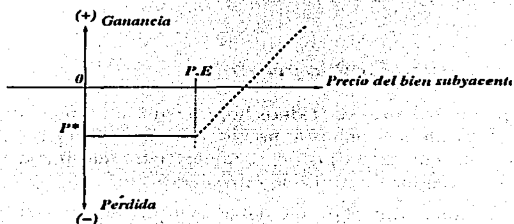


Figura 2.1: Perfil de ganancia para el comprador de opciones call.

Como ya se mencionó, el comprador paga una prima por el derecho de comprar, la cual de entrada es una pérdida neta que denotaremos por $P*$; observemos que si el precio del bien subyacente permanece por debajo del precio de ejercicio entonces el comprador tiene el derecho de no ejercer dicha opción, por lo tanto la opción expira sin tener ningun valor y el comprador solamente pierde la prima pagada por obtener el derecho de comprar. Sin embargo si consideramos que el precio del bien subyacente permanece igual o por arriba del precio del ejercicio entonces el comprador tiene el derecho de ejercerla y comprar el bien subyacente.

Observemos en la figura 2.1 que la línea punteada indica una pendiente positiva, esto se debe que mientras más alto sea el precio del mercado con relación al precio del ejercicio, entonces mayor será la utilidad neta. Lo anterior nos indica que el comprador de una opción *call* tiene un riesgo conocido y limitado y una ganancia desconocida e ilimitada.

Posición corta sobre opciones call: en esta posición están los participantes que venden opciones call.

Esta posición corta es la imagen inversa de la posición larga sobre opciones call. En este caso el vendedor recibe una prima $P*$. A medida de que el precio del bien subyacente permanece por debajo del precio del ejercicio (PE) la opción no se ejerce (por conveniencia del comprador) y el vendedor obtiene la ganancia de la prima. Otro escenario para este participante es el caso en que el precio del bien subyacente permanece igual o rebasa el precio del ejercicio, entonces si se ejerce y el vendedor esta obligado a vender el bien subyacente al precio de ejercicio y esto ocasiona que sean mayores las pérdidas del vendedor.

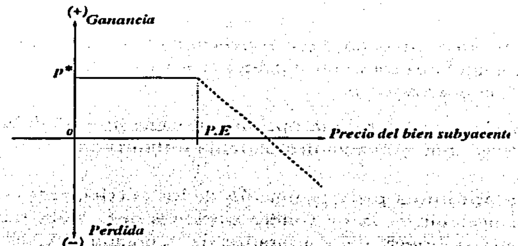


Figura 2.2: Perfil de ganancia para el vendedor de opciones call.

Por consiguiente, el vendedor de la opción call tiene una pérdida desconocida e ilimitada y tiene una ganancia conocida y limitada.

Posición larga sobre opciones put: el participante que se encuentra en esta posición se dedica a la compra de opciones put.

En el perfil de ganancias podemos observar que el comprador de opciones put paga una prima $P*$. Si el precio del bien subyacente se mantiene por encima del precio de ejercicio, entonces la opción expira sin ningún valor. Por consiguiente el comprador tiene una pérdida que es el pago de la prima $P*$ para obtener el derecho a vender. En cambio si el precio del bien subyacente cae hasta o por debajo del precio de ejercicio el tenedor de la opción put tiene el derecho de ejercerla y vender el bien subyacente al precio de ejercicio.

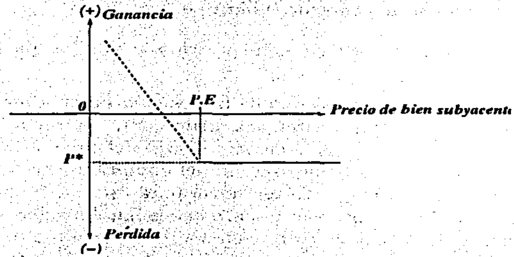


Figura 2.3: Perfil de ganancia para el comprador de opciones put.

Observemos que mientras mas bajo sea el precio del mercado con relación al precio de ejercicio, mayores seran las ganancias, esto se puede ver en la recta punteada con pendiente negativa.

Por consiguiente, el comprador de la opción put tiene una pérdida conocida y limitada pero tiene una ganancia desconocida e ilimitada.

Posición corta sobre opciones put: la función de los participantes que se encuentran en esta posición es la de vender opciones put. Este participante es la imagen inversa del perfil del comprador de la opción put. El vendedor recibe la prima $P*$ por parte del comprador.

Si el precio del bien subyacente permanece por arriba del precio de ejercicio, entonces la opción no se ejerce y el vendedor obtiene la ganancia de la prima $P*$ que fue pagada. Si el precio del bien subyacente permanece hasta o por debajo del precio de ejercicio, entonces la opción se ejerce, el vendedor de la misma esta obligado a comprar el bien subyacente.

En la línea punteada con pendiente positiva, podemos observar que mientras menor sea el precio de mercado respecto al precio de ejercicio, mayores serán las pérdidas netas del vendedor de la opción put.

De esta manera podemos decir que el vendedor de la opción put tiene una pérdida desconocida e ilimitada y tiene una ganancia desconocida y limitada.

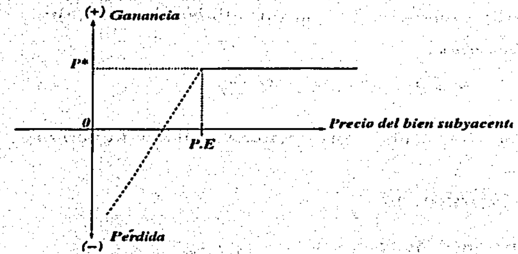


Figura 2.4: Perfil de ganancia para el vendedor de opciones de put.

2.4.7 Paridad Put-Call

Consideremos un portafolio con las siguientes características, supongamos que estamos en una posición larga en un activo, al igual que en una put y en una posición corta en una call, con la condición de que ambas opciones tienen la misma fecha de expiración (T) y el mismo precio de ejercicio (X) pactado. Entonces el valor de este portafolio es:

$$\Pi = S + P - C,$$

cuyo pago en la fecha de expiración es:

$$\Pi_T \;=\; S + max(X - S_T, 0) - max(S_T - X, 0),$$

es decir,

$$\Pi_T = \begin{cases} \mathrm{S + (X - S) - 0} & \text{si } S \leqslant X \\ \mathrm{S + 0 - (S - X)} & \text{si } S \geqslant X \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{X} & \text{si } S \leqslant X \\ \mathrm{X} & \text{si } S \geqslant X \end{cases}$$

¿Cuánto se pagaría por un portafolio que da un pago seguro X en la fecha de vencimiento?

La respuesta es $Xe^{-r(T-t)}$ (lo que obtendríamos en un depósito bancario con una tasa libre de riesgo) ya que si no habría posibilidad de arbitraje.

De esta manera obtenemos,

$$S + P - C = Xe^{-r(T-t)},$$

esta relación entre el subyacente y sus opciones es llamada paridad put-call.

2.4.8 Tipos de Opciones

Existen dos tipos de opciones, que son:

- Las opciones americanas.
- Las opciones europeas.

Estos dos estilos de opciones se comercian tanto en Europa como en Estados Unidos. Su única distinción es que las opciones americanas pueden ejercerse en cualquier momento durante la vigencia del periodo de la opción, tanto que las opciones europeas sólo pueden ser ejercidas hasta el vencimiento del contrato.

2.4.9 Opciones sobre Tasas de Interés

El término opciones de tasas de interés es sinónimo de opciones sobre instrumentos de deuda.

Existen dos tipos de opciones "over de counter" sobre tasas de interés:

- swaptions (opciones sobre el precio de swaps o bonos).
- caps o floors (opciones sobre el nivel de las tasas de interés a corto plazo).

Un swaption es una opción sobre una colección de flujos, en el cual el poseedor de este, tiene el derecho a efectuar un swap determinado (a una tasa fija y un plazo preestablecidos de los términos de la opción) con el vendedor.

Las opciones sobre bonos también son swaption ya que los bonos se valúan de la misma manera que los swaps.

Los swaptions se utilizan para proteger carteras contra movimientos adversos. Otro uso frecuente es en el financiamiento de proyectos. Si un proyecto a medio o largo plazo conlleva un fuerte riesgo de tasas de interés y cierta incertidumbre acerca de su costo, entonces es frecuente utilizar swaptions junto con swaps para cubrir sus riesgos de tasas de interés.

Un cap es una colección de opciones sobre flujos. Los caps y los floors se utilizan para cubrir el riesgo de movimientos en las tasas a corto plazo durante periodos de tiempo largos.

Un cap protege contra aumentos en las tasas a corto plazo y un floor protege contra bajas.

2.5 Los Swaps

Los swaps son acuerdos entre dos partes para intercambiar flujos de efectivo en el futuro, que son utilizados para cubrirse del riesgo cambiario.

Los primeros contratos swaps fueron negociados en 1981. Desde entonces, los mercados tuvieron gran crecimiento. Centenares de billones de dólares en contratos son actualmente negociados cada año. Los swaps se comercian en el mercado interbancario como empresas financieras, bancos, empresas industriales, etc. Los swaps a diferencia de los contratos adelantados y futuros son ejecutados en plazos y montos mayores.

Un contrato forward puede ser visto como un ejemplo simple de un swap. Supongamos que hoy es 1 de mayo de 2001 y una compañía compra un contrato de 100 onzas de oro, con un precio de ejercicio de \$300.00 por onza en un año. La compañia puede vender el oro en un año tan pronto éste es recibido. El contrato forward es equivalente a un contrato swap donde la compañia pagará \$300,000 el 1 de marzo de 2002 y recibirá un flujo efectivo igual a $100S$, donde S es el precio de mercado por cada onza de oro.

2.5.1 Diferentes Tipos de Intercambios

Existen diferentes tipos de intercambios financieros, entre los que se encuentran los swaps de tasas de interés, los swaps de divisas, los swaps sobre materias primas y los swaps de índices bursátiles.

2.5.2 Los Swaps de Tasas de Interés

Los swaps sobre tasas de interés generalmente proveen soluciones para asegurar rendimientos favorables en las inversiones.

Los swaps de tasas de interés es un acuerdo entre dos partes para intercambiar las obligaciones del interés pactado por un cierto periodo con respecto a la cantidad nocional principal. Este tipo de instrumentos son negociados con una gran variedad de vencimientos desde un año o menos o hasta 30 años o más.

Los participantes pueden ser un banco y un cliente, o dos bancos. Utilizando un swaps de tasas de interés de una misma moneda internacional, hay dos posibles combinaciones de obligaciones de interés que pueden ser intercambiadas:

- Una tasa fija en una moneda contra una tasa flotante en otra.
- Una tasa flotante en una moneda contra una tasa flotante, en otra, también conocido como swap base, que involucre el intercambio de dos diferentes tipos de tasas flotantes.
- Una tasa fija en una moneda contra una tasa fija en otra moneda. Por ejemplo pagar una tasa fija YEN y recibir una tasa fija USD.

2.5.3 Derivados más Complejos

Las opciones exóticas se caracterizan por ser más complejas, su función es cubrir riesgos más complicados. Entre las opciones exóticas más comunes y que dependen de la trayectoria que sigue el precio del activo subyacente, están las siguientes:

Opciones Asiáticas: estas opciones son generadas por el promedio de todos los valores del activo subyacente en un intervalo de tiempo.

Opciones Barrera: opciones que sólo llegan a existir, o dejan de existir si ocurre algún evento que las afecte.

Opciones Lookback: son opciones sobre el precio máximo o mínimo de un activo subyacente durante un periodo determinado.

Opciones Compound: opciones sobre opciones, este tipo de opciones se utilizan cuando no se está seguro de que haga falta una opción y no tener que desembolsar una prima fuerte.

Opciones Chooser: son opciones que dan el derecho de elegir entre un *put* o un *call*.

Opciones Binarias: opciones sobre más de un activo.

Opciones Combinadas: este tipo de opciones son sobre la suma, diferencia, producto u otras operaciones entre uno o más activos.

Capítulo 3

Modelos y Valuación de Bonos y Derivados

En este capítulo se establecen las principales herramientas matemáticas para posteriormente desarrollar modelos continuos como son el modelo de Black-Scholes (1973), el modelo para bonos y por último, el modelo de Vasicek (modelo para tasas de interés). Para la mayor parte de la realización de este capítulo se tomó como referencia [11],[10].

Preliminares

- Definimos a un proceso estocástico como una familia $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ de variables aleatorias, sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Aquí, Ω es un conjunto no vacío y sus elementos representan los resultados posibles de un experimento aleatorio. $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra, es decir es una familia de subconjuntos de Ω (llamados eventos), cerrada bajo uniones numerables y complementos, y P es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{F}$.

- Si observamos un fenómeno aleatorio que evoluciona con el tiempo, es necesario incluir en nuestro espacio de probabilidad una familia $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ de σ-álgebras contenidas en $\mathcal{F}$, tal que para cada $t \geqslant 0$, $\mathcal{F}_t$ incluya todos los eventos que pueden ocurrir hasta t. A esta familias se le llama filtración.

- X es un proceso adaptado a una filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ si X_t es $\mathcal{F}_t - medible$ [2].

3.1 Caminata Aleatoria

Consideremos a una partícula representada por una caminata aleatoria simétrica en un intervalo de tiempo $[0,T]$, es decir, un desplazamiento de magnitud Δx puede ser a la derecha (+Δx) con probalilidad $p = \frac{1}{2}$, ó a la izquierda (-Δx) con probabilidad $1 - p = \frac{1}{2}$, donde cada desplazamiento ocurre después de un intervalo de tiempo Δt.

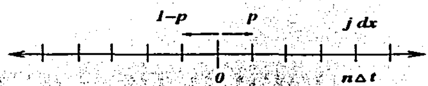


Figura 3.1: caminante aleatorio.

Si ahora aceleramos el proceso, de manera que $\Delta x \to 0$ y $\Delta t \to 0$, podemos obtener un proceso continuo no trivial con propiedades heredadas de la caminata aleatoria.

Esto se puede ver de la siguiente manera:

Definimos a $X(t)$ la variable aleatoria que denota la posición al tiempo t, esto es

$$X(t) = \Delta x(Z_1 + Z_2 + ... + Z_{[t/\Delta t]}), \tag{3.1}$$

donde

$$Z_j = \begin{cases} 1 & \text{si se desplaza hacia la derecha en el j-ésimo paso} \\ -1 & \text{si se desplaza hacia la izquierda en el j-ésimo paso} \end{cases},$$

donde las Z_j son consideradas variables aleatorias mutuamente independientes

Tenemos que

$$P(Z_j = 1) = \frac{1}{2} = P(Z_j = -1).$$

Además por ser Z_j una variable de Bernoulli tenemos:

$$\begin{aligned} E(Z_j) &= (1)P(Z_j = 1) + (-1)P(Z_j = -1) \\ &= \frac{1}{2}(1 + (-1)), \\ &= 0 \quad \forall\, t \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} V(Z_j) &= E(Z_j^2) \\ V(Z_j) &= (1)^2 P(Z_j = 1) + (-1)^2 P(Z_j = -1) \\ &= 1 \quad \forall\, t. \end{aligned}$$

Considerando la media y la varianza para $X(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(\Delta x(Z_1 + Z_2 + ... + Z_{[t/\Delta t]})) \\ &= \Delta x\, E\Big(\sum_j (Z_j)\Big) \\ &= \Delta x \sum_j E(Z_j) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X(t)) &= V(\Delta x(Z_1 + Z_2 + ... + Z_{[t/\Delta t]})) \\ &= (\Delta x)^2\, V\Big(\sum_j (Z_j)\Big) \\ &= (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right]. \end{aligned}$$

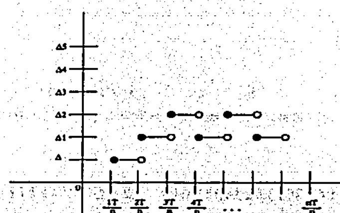


Figura 3.2: caminata aleatoria

$X(t)$ es un proceso bien definido para toda t, pero esencialmente sigue siendo el mismo proceso de tiempo discreto, ya que sólo varía en puntos múltiplos de Δt.

Podemos tener un proceso límite trivial, cuando consideramos a $\Delta t = \Delta x$, entonces tenemos que la esperanza y la varianza de $Z(t)$ tiende a cero.

De lo contrario si tomamos a $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$, con c una constante mayor que cero, cuando Δt tiende a cero, obtenemos que:

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= c\sqrt{\Delta t}\, E\Big(\sum(Z_j)\Big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$V(X(t)) = \rightarrow c^2 t, \quad \Delta t \rightarrow 0$$

Por el teorema de límite central se muestra que $X(t)$ se distribuye como una normal con media 0 y varianza c^2t.

Como los cambios en los valores que toma la caminata aleatoria en los intervalos $[t_k, t_{k+1}]$ no traslapados son independientes, se tiene que $X(t) : t \in [0, T]$ tiene incrementos independientes y además estacionarios ya que la distribución del cambio en la posición de la caminata aleatoria en cualquier intervalo de tiempo depende sólo de la longitud del intervalo.

En conclusión podemos observar que en el límite, el proceso continuo no trivial, hereda propiedades de la caminata aleatoria. Por lo tanto ahora podemos definir formalmente a un movimiento Browniano como sigue:

El proceso estocástico $\{X(t), t \geq 0\}$ es llamado proceso Wiener o movimiento Browniano si:

1. $P[X(0) = 0] = 1$.
2. $X(t) \sim N(0, c^2t)$.
3. Para $0 = t_0 < t_1 < t_3 < t_4 < ... < t_n < \infty$, los incrementos $(X(t_i) - X(t_{i-1}))$, $1 \leq i \leq n$ son variables aleatorias independientes y estacionarios.

3.2 Historia del Movimiento Browniano

Hacia 1827, el botánico inglés Robert Brown, fue el primero que reportó el fenómeno físico del movimiento errático de partículas suspendidas en un fluido. Albert Einstein, en 1905, desarrolló un modelo probabilístico para el fenómeno físico, mostrando que la teoría cinética que hay detrás del fenómeno indica que el movimiento de

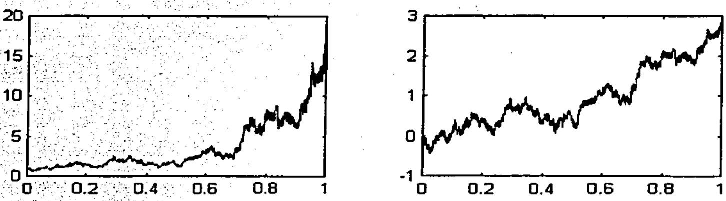


Figura 3.3: Simulación de un Movimiento Browniano

la partícula es una consecuencia del bombardeo continuo de las moléculas en el fluido hacia ella. Anteriormente a A. Einstein, Louis Bachelier en 1900 propuso en su tesis doctoral "Theorie de la spéculation" (ver [10]) un movimiento browniano como modelo asociado a los precios especulativos, dando inicio a la teoría del precio de las opciones y proponiendo un modelo matemático formal sobre el movimiento de los precios de activos financieros.

En 1960 el economista Paul Samuelson propagó al exponencial del movimiento browniano (llamado movimiento browniano geométrico) para modelar los precios que están sujetos a incertidumbre.

Si consideramos al movimiento Browniano $\{X(t), t \geqslant 0\}$ como el precio de algún activo, entonces por la propiedad (2) de la definición de $X(t)$ se muestra que los cambios del precio en el activo sobre cualquier intervalo se distribuye normalmente, esto implica que los cambios del precio en el activo pueden tomar valores negativos con probabilidad positiva. Este problema lo podemos eliminar definiendo a $X(t)$ como el logaritmo natural del precio $P(t)$, bajo esta definición $P(t) = e^{X(t)}$ es siempre positivo y es llamado *movimiento Browniano geométrico*.

3.3 Comportamiento de Activos Financieros

La suposición más común acerca de la dinámica de los precios de instrumentos financieros es que siguen un movimiento Browniano geométrico.

Definamos a $S(t)$[1] como el precio del activo subyacente en el tiempo t y consideremos pequeños intervalos de tiempo dt, en los cuales S cambia. A cada cambio

[1] Para falicitar la notación, $S(t)$ será expresada como S.

del precio se le asocia una ganancia, definida como dS/S. Para el cálculo de la ganancia definimos el siguiente modelo:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX(t) \tag{3.2}$$

ó

$$d(lnS) = \mu S dt + \sigma S dX(t),$$

lo cual es notación de

$$lnS(t) = S_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dX_s.$$

La primera integral es la clásica integral de Riemman y la segunda es una integral estocástica donde X es el movimiento Browniano.

dS/S representa el rendimiento del activo y se descompone en dos partes:

1a. Donde μ dt representa la parte determinística de la evolución de S, que corresponde a la tendencia general del movimiento de S; μ es conocida como tendencia o deriva, se considera constante ya que es la tasa promedio de rendimiento en el crecimiento del precio del activo.

2a. σdX representa la parte aleatoria y por lo tanto impredecible del movimiento de S, además σ es llamada volatilidad y mide la desviación estándar de los rendimientos del activo [2].

Si consideramos el caso cuando $\sigma = 0$, es decir, el activo subyacente está libre de riesgo, entonces (3.2) se reduce a una ecuación diferencial ordinaria,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Como μ es constante, podemos encontrar la solución explícita a la ecuación anterior utilizando el método de variables separables,

$S(t) = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$,

que es el crecimiento exponencial del valor del activo. Por lo tanto si $\sigma = 0$, el precio es determinístico y se puede predecir en un futuro con certeza.

Sin embargo si consideramos a $\sigma \neq 0$, la ecuación (3.2) es llamada ecuación diferencial estocástica (EDE), cuya solución es, a su vez, un proceso estocástico.

[2]Si σ dependiera del tiempo, $\{\sigma_t\}$ es conocida como el "proceso de difusión".

3.4 Ecuación de Black-Scholes

Supongamos que $V(S,t)$[3] representa el precio al tiempo t de una opción sobre una acción S, donde S es el precio del bien subyacente en el tiempo t.

Black, Merton y Scholes obtienen una formula explícita para V, considerando la relación que existe entre S, V y el rendimiento de un título de inversión libre de riesgo.

La derivación del modelo de Black-Scholes se basa en los siguientes supuestos:

1. El precio del activo subyacente S sigue un proceso estocástico (en tiempo continuo) denominado movimiento Browniano geométrico:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX(t)$$

2. La tasa de interés libre de riesgo r y la varianza σ (volatilidad del activo) son conocidas y constantes durante la vida de la opción.

   Esto es únicamente para simplificar el modelo. Existen modelos donde la tasa de interés debe cumplir con una ecuación diferencial estocástica.

3. Los mercados de capitales son perfectos, es decir, no existen costos de transacción y los mercados operan continuamente.

4. Se permiten las ventas en corto y los activos son divisibles. Este supuesto nos indica que podemos comprar y vender cualquier cantidad del activo subyacente (no necesariamente en unidades enteras) y que podemos vender activos que no poseemos.

5. El activo subyacente no paga dividendos durante la vida de la opción.

6. No hay oportunidad de arbitraje; esto quiere decir que no existe la posibilidad de obtener ganancia sin incurrrir en ningún riesgo y sin inversión inicial, por consecuencia, todos los portafolios libres de riesgo deben de ganar el mismo rendimiento.

Una vez descritos los supuestos que consideramos fijémonos en una opción cuyo valor depende solo de S y de t.

Para la deducción de la ecuación de Black-Scholes se utilizará el lema de Itô.

[3] Cuando sea necesario distinguir usaremos $C(S,t)$ para una opción call y $P(S,t)$ para una opción put.

Proceso de Itô

Definimos a un proceso estocástico $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ como un proceso de Itô si:

$\exists$ $\{\mu_t\}_{t\in[0,T]}$ adaptado, tal que $\int_0^t |\mu_s(w)|ds < \infty$ casi seguramente , para toda $t \in [0,T]$

Nos referimos a casi seguramente cuando $P[\{w\}| \int_0^t \mu_s(w)ds < \infty] = 1$

$\exists$ $\{\sigma_t\}_{t\in[0,T]}$ adaptado, tal que $\int_0^t |\sigma_s^2(w)|ds < \infty$ casi seguramente , para toda $t \in [0,T]$,

y $\exists$ $Z_0 \in \mathbb{R}$,

tal que $Z_t = Z_0 + \int_0^t \mu_s(w)ds + \int_0^t \sigma_s dX_s$, para toda $t \in [0,T]$.

En nuestra notación tenemos $dZ_t = \mu_t dt + \sigma_t dX(t)$. Entonces de nuestro primer supuesto observamos que :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dX(t),$$

es decir lnS es un proceso de Itô (ver [10]), donde podemos reescribirlo de la siguiente manera:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dX(t). \tag{3.3}$$

Lema de Itô

Sea $\{X_t : t \geqslant 0\}$ el movimiento Browniano, y $\{Z_t\}_{t\in[0,T]}$ como un proceso de Itô.

Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F \in C^2$, es decir F es una función real con segunda derivada continua, definimos a $Y_t := F(t, Z_t)$, donde Y_t es un proceso estocástico entonces,

$$dY = \frac{\partial F}{\partial Z}\sigma dX + \left[\mu\frac{\partial F}{\partial Z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}\sigma^2 + \frac{\partial F}{\partial t}\right]dt. \tag{3.4}$$

Aplicando el lema de Itô a nuestro caso, obtenemos:

$$dV(S,t) = \underbrace{\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX}_{\sigma_v V dX} + \underbrace{\left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt}_{\mu_v V dt}. \tag{3.5}$$

Utilizando (3.5), Merton plantea esta ecuación para el precio de una opción y construye un portafolio que contiene al subyacente y opciones sobre el subyacente. Dicho portafolio no requiere una inversión inicial, ni inversiones adicionales entre los tiempos $[0,T]$. Este tipo de portafolios son llamados autofinanciados.

Definimos Π como el portafolio, tal que

$$\Pi = V - \Delta S, \tag{3.6}$$

donde Δ no al cambio infinitesimal en S, es decir, es una cantidad del activo subyacente[4].

Entonces en un periodo de tiempo dt tenemos,

$$d\Pi = dV - \Delta dS.$$

Esto es cierto sólo si Δ es constante en ese periodo de tiempo, por (3.3) observamos que

$$\Delta dS = \Delta(\mu S dt + \sigma S dX(t))$$

y sustituyendo a dV y dS en la ecuación anterior obtenemos

$$d\Pi = (\mu_v V dt + \sigma_v V dX(t)) - (\mu S dt + \sigma S dX(t))\Delta$$

o

$$d\Pi = (\sigma_v V - \Delta\sigma S)dX(t) + (\mu_v V - \Delta\mu S)dt. \tag{3.7}$$

Es decir, $d\Pi$ está en términos de dt y $dX(t)$, donde dt es un incremento determinístico y $dX(t)$ es un incremento estocástico.

Haciendo a $\sigma_v V dX(t) - \sigma\Delta S dX(t) = 0$ obtenemos un portafolio libre de riesgo.

Si tomamos[5] a

$$\Delta = \partial V/\partial S, \tag{3.8}$$

[4]Para más detalle ver Ross.

[5]Notemos que Δ es el valor de $\Delta = \partial V/\partial S$ al inicio del periodo de tiempo dt.

llamada también razón de cobertura, eliminamos el término aleatorio en (3.7), obteniendo un portafolio cuyo incremento es completamente determinístico:

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left[\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt - \mu S\frac{\partial V}{\partial S}dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ahora bien, lo que obtendríamos de invertir una cantidad Π en activos sin riesgo, durante dt sería $r\Pi dt$, donde r la tasa de interés libre de riesgo. Si el lado derecho de (3.9) fuese mayor que $r\Pi dt$, entonces un especulador podría obtener una ganancia sin riesgo, simplemente pidiendo prestando una cantidad Π e invertirla en el portafolio. Lo que obtendría de esta estrategia sería mayor que el costo de pedir prestado. Ahora bien, si el lado izquierdo de es menor que $r\Pi dt$ entonces, el especulador haría una venta en corto del portafolio e invertiría Π en el banco. De cualquier manera el especulador obtendría una ganancia sin riesgo y sin costo.

De este análisis concluimos[6] que

$$r\Pi dt = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\right]dt.$$

Dividiendo esta expresión por dt llegamos a

$$r\Pi = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t},$$

ahora sustituyendo (3.6) tenemos

$$r(V - \Delta S) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}$$

y utilizando (3.8) obtenemos,

$$r(V - \frac{\partial V}{\partial S}S) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

[6]Es importante notar en este punto, el fuerte uso que se ha hecho de los supuestos de no arbitraje, de que hay costos de transacción y de que las ventas en corto son permitidas.

Por último, reordenando obtenemos:

$$\Big[\frac{\partial V}{\partial S}Sr + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}S^2\sigma^2 + \frac{\partial V}{\partial t}\Big]dt - rVdt = 0, \qquad (3.10)$$

la cual es la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes.

Podemos observar que en esta ecuación no aparece el parámetro μ, es decir, el valor de la opción es independiente de que tan rápido o lento crezca el activo. En cambio el precio de la opción depende de la volatilidad σ.

Una vez obtenida esta ecuación, quisiéramos encontrar el valor de la opción mediante la solución de ésta. En general, una ecuación diferencial parcial tiene muchas soluciones, pero nosotros deseamos que el valor de la opción sea único para evitar posibles problemas de arbitraje, en consecuencia, hay que imponer condiciones de frontera al problema, es decir, especificar como debe ser la solución en alguna parte del dominio de solución.

Ahora consideremos una opción *call* de tipo Europea con valor $C(S,t)$, precio de ejercicio E y fecha de vencimiento T.

Las condiciones son las siguientes:

- Se impone una condición final

$$C(S,t) = max\{S - E, 0\}$$

- Nuestras condiciones para S se harán para $S = 0$ y para $S \to \infty$. Observemos que si el precio del activo S es siempre cero, entonces dS también lo será y S no puede cambiar, y por lo tanto, en la fecha de vencimiento el pago es cero y en consecuencia la opción call no tiene valor; si consideramos que hay bastante tiempo para el vencimiento, entonces cuando $S = 0$ tenemos que

$$C(0,t) = 0.$$

Ahora si $S \to \infty$ se vuelve más probable que la opción sea ejercida y que la magnitud del precio de ejercicio cada vez será menos significativa. Entonces,

$$C(S,t) \sim S \quad cuando \quad S \to \infty.$$

Por otra parte si consideramos una opción put con valor $P(S,t)$ tenemos las siguientes condiciones:

- La condición final esta dada por

$$P(S,t) = max\{E - S, 0\},$$

- Ahora, claramente si S es siempre cero el pago final por una opción put será con certeza E y en consecuencia

$$P(0,t) = Ee^{-r(T-t)}.$$

Si $S \to \infty$ es muy poco probable que la opción sea ejercida y en consecuencia

$$P(S,t) = \longrightarrow 0 \quad cuando \quad S \to \infty.$$

De la ecuación (3.10), dadas las condiciones iniciales y tomando a $S = Ee^x$, $t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ y $C = Ev(x,\tau)$ se obtiene el valor de una opción call al tiempo t, dada por:

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2).$$

y el valor de una opción put al tiempo t es

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

donde,

$$d_1 \equiv \frac{ln(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

análogamente,

$$d_1 \equiv \frac{ln(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

N es la función de distribución acumulativa de la normal estándar y $(T - t)$ es el tiempo para el vencimiento de la opción.

3.5 Modelo para Bonos

A continuación enfocaremos nuestra atención en un modelo para el precio de un bono, siguiendo la misma estrategia que utilizamos para el precio de una opción.

En principio consideremos el precio de un bono $P(t,T)$ como una función que depende de $r(t)$ la tasa de interés *spot* y T la fecha de vencimiento.

Como la tasa de interés no es conocida en el futuro, se supone que r sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dX,$$

donde X es el movimiento browniano.

Utilizando (3.5) tenemos,

$$dP(t,T) = \underbrace{\sigma\frac{\partial P}{\partial r}dX}_{\sigma_p dX} + \underbrace{\left[\mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 + \frac{\partial P}{\partial t}\right]dt}_{\mu_p dt}. \tag{3.11}$$

Considerando dos bonos cupón cero con distinto vencimiento T_1 y T_2 respectivamente, podemos construir nuestro portafolio de la siguiente manera:

$$\Pi = P_1 - \Delta P_2 + C, \tag{3.12}$$

donde

$$P_1 = P(t,T_1) \quad y \quad P_2 = P(t,T_2)$$

y C es dinero en efectivo.

En un periodo de tiempo dt tenemos,

$$d\Pi = dP_1 - \Delta dP_2 + dC. \tag{3.13}$$

Pero

$$dP_1 = \underbrace{\sigma\frac{\partial P_1}{\partial r}dX(t)}_{\sigma_1 dX} + \underbrace{\left[\mu\frac{\partial P_1}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_1}{\partial r^2}\sigma^2 + \frac{\partial P_1}{\partial t}\right]dt}_{\mu_1 dt}.$$

y

$$dP_2 = \underbrace{\sigma\frac{\partial P_3}{\partial r}dX(t)}_{\sigma_1 dX} + \underbrace{\left[\mu\frac{\partial P_2}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2}\sigma^2 + \frac{\partial P_2}{\partial t}\right]dt}_{\mu_2 dt} \text{ y}$$

$dC = rCdt$

De este modo

$$\begin{aligned} d\Pi &= (\mu_1 dt + \sigma_1 dX) - \Delta(\mu_2 dt + \sigma_2 dX) + rCdt \\ &= (\mu_1 - \mu_2\Delta)dt + (\sigma_1 - \sigma_2\Delta)dX + rCdt. \end{aligned}$$

Si consideramos a

$$\Delta = \sigma_1/\sigma_2, \tag{3.14}$$

entonces logramos desaparecer la parte aleatoria y por consiguiente nos quedamos con un portafolio libre de riesgo,

$$d\Pi = (\mu_1 - \mu_2\Delta)dt + rCdt.$$

Despejando el valor de C de la ecuación (3.12), tenemos $C = \Pi - P_1 + P_2\Delta$, de donde

$$d\Pi = (\mu_1 - \mu_2\Delta)dt + r(\Pi - P_1 + P_2\Delta)dt. \tag{3.15}$$

Podemos observar que el término estocástico ha desaparecido y que ahora Π sólo varía como función del tiempo. Una vez eliminado el riesgo, por el principio de no arbitraje, el rendimiento debe de ser igual a la tasa libre de riesgo.

Esto implica que

$$r\Pi dt = d\Pi,$$

sustituyendo la ecuación (3.15) en la ecuación anterior

$$r\Pi dt = (\mu_1 - \mu_2\Delta)dt + r[\Pi - P_1 + P_2\Delta]dt,$$

sustituyendo (3.14)

$$r\Pi dt = (\mu_1 - \mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2})dt + r[\Pi - P_1 + P_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}]dt,$$

dividiendo la expresión anterior por dt,

$$r\Pi = (\mu_1 - \mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}) + r(\Pi - P_1 + P_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}),$$

reagrupando los términos de esta ecuación

$$0 = \left[\mu_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2\right] + r\left[-P_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}P_2\right] \quad (3.16)$$

$$0 = \mu_1 - rP_1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\left[\mu_2 - rP_2\right], \quad (3.17)$$

de tal manera que,

$$\underbrace{\frac{1}{\sigma_1}\left[\mu_1 - rP_1\right]}_{*} = \underbrace{\frac{1}{\sigma_2}\left[\mu_2 - rP_2\right]}_{**} = \lambda, \quad (3.18)$$

de donde (*) sólo depende de T_1 y (**) sólo depende de T_2.

Definimos a

$$\lambda(t,T) = \frac{\mu(t,T) - r(t,T)P(t,T)}{\sigma(t,T)}, \quad (3.19)$$

λ es llamado el precio del riesgo de cada bono (*market price of risk*).

Escribiendo a μ en términos de λ

$$\mu_p(t,T) = \sigma_p\lambda(t,T) + r(t,T)P(t,T)$$

Sustituyendo a μ_p y σ_p obtenemos:

$$\mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 + \frac{\partial P}{\partial t} = rP + \sigma\lambda\frac{\partial P}{\partial r},$$

reordenando obtenemos la ecuación para valuar bonos,

$$\frac{\partial P}{\partial r}(\mu - \sigma\lambda) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 + \frac{\partial P}{\partial t} - rP \;=\; 0 \qquad (3.20)$$

Obtenemos una ecuación diferencial que depende de λ, es decir no podemos eliminar el precio del riesgo.

Notemos que lo anterior es una generalización de la ecuación de Black - Scholes ya que μ y σ son funciones que dependen de t y no son constantes.

3.6 Modelo para Tasas de Interés (Modelo de Vasicek)

Para evitar un rendimiento negativo en el largo plazo se puede proporcionar un modelo alternativo para la tasa *spot*, en vez de suponer que r sigue un proceso browniano, Vasicek propone el siguiente proceso de regresión a la media (Mean Reverting Process)[8]. Donde $r = r(t,T)$ y $\sigma = \sigma(t,T)$, ademas, α y β son constantes en un periodo de tiempo.

$$dr = \alpha(\beta - r)dt + \sigma dX. \qquad (3.21)$$

El objetivo de este modelo es que la tasa *spot* fluctúe alrededor de la media. Por ejemplo, si el día de hoy la tasa r baja, entonces el término que multiplica a dt es positivo, por lo tanto es muy probable que la tasa de interés suba en un futuro.

El proceso de r se puede ver como un proceso estocástico en el que, eventualmente, la tasa de interés regresa a su media.

En (3.21), α define con que frecuencia la tasa de interés regresa a la media β. Si α es pequeña, la tasa no regresa muy rápido (o seguido)a la media, pero si α es grande, entonces la frecuencia de retorno es muy alta. La volatilidad es representada por σ.

Para trabajar con el modelo de Vasicek, vamos a suponer que el precio del riesgo (*"market price of risk"*) $\lambda(t,r)$ es una función lineal de r.

Retomando la ecuación diferencial parcial para el precio de un bono, tenemos,

$$\frac{\partial P}{\partial r}(\alpha(\hat{\beta} - r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sigma^2 + \frac{\partial P}{\partial t} - rp \;=\; 0 \qquad (3.22)$$

donde $\hat{\beta} = (\beta - \frac{\lambda}{\alpha}\sigma)$.

Para esta ecuación diferencial debemos encontrar una solución única, estableciendo una condición inicial que corresponde a $P(0,\tau) = 1$.

La solución que se propone para esta ecuación es,

$$P(r,\tau) = e^{A(\tau)+B(\tau)r}, \tag{3.23}$$

donde $\tau = T - t$.

La solución por definición debe satisfacer la ecuación diferencial parcial por lo que evaluaremos sus derivadas y sustituiremos en dicha ecuación.

Derivando obtenemos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial r} &= B(\tau)e^{A(\tau)+B(\tau)r}, \\
\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} &= (B(\tau))^2 e^{A(\tau)+B(\tau)r}, \\
&y \\
\frac{\partial P}{\partial t} &= -[B'(\tau)r + A'(\tau)]e^{A(\tau)+B(\tau)r}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (3.22) obtenemos,

$$e^{A(\tau)+B(\tau)r}\Big[B(\tau)\alpha(\hat{\beta} - r) + \frac{1}{2}(B(\tau))^2\sigma^2 - B'(\tau)r - A'(\tau) - r\Big] = 0. \tag{3.24}$$

Encontrando los parámetros

$$\begin{aligned}
B(\tau) &= -\frac{1 - e^{-\alpha\tau}}{\alpha}, \\
A(\tau) &= \Big[\frac{(-B(\tau) - (\tau))(\alpha^2\hat{\beta}) - \frac{1}{2}\sigma^2}{\alpha^2}\Big] - \frac{1}{4\alpha}\sigma^2(B(\tau))^2.
\end{aligned}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en (3.23) , podemos escribir el precio del bono como sigue,

$$P(r,\tau) = exp\Big[\frac{(-B-(\tau))(\alpha^2\hat{\beta})-\frac{1}{2}\sigma^2}{\alpha^2}\Big] - \frac{1}{4\alpha}\sigma^2 B^2 + \Big[-\frac{1-e^{-\alpha\tau}}{\alpha}\Big]r.$$

Capítulo 4

Curvas de Rendimiento y el Modelo Binomial.

En este capítulo se presenta una descripción de los instrumentos de renta fija y se muestran técnicas para la evaluación de instrumentos de deuda. Se presentan además los conceptos de la curva de rendimiento. En la parte final de este trabajo se estudia el modelo binomial para la valuación del precio de las acciones y las opciones.

4.1 Instrumentos de Renta Fija

Los instrumentos de deuda (*debt instruments*) proporcionan un rendimiento predeterminado sobre un valor y un plazo determinado. Estos instrumentos, también conocidos como instrumentos de renta fija, son un préstamo que el prestamista (inversionista) hace al emisor del instrumento.

Los bonos son instrumentos de renta fija, los cuales son definidos como un contrato de préstamo entre emisor y tenedor, en los que el capital y los intereses son estipulados de mutuo acuerdo. En general los bonos traen consigo cupones, a este tipo de bonos se le llama bono con cupón (*coupon-bearing bonds*) y son definidos como aquellos que tienen flujos de efectivo previos al vencimiento y pueden ser descompuestos en una serie de bonos con descuento puro.

También existen aquellos bonos que no tienen cupón, llamados bonos con descuento puro o bonos cupoń cero y son aquellos títulos que sólo tienen un flujo de efectivo de tamaño N en el tiempo T, donde N es llamado principal[11].

4.1.1 Valuación de un Bono

Denotamos por $P(t,T)$ el precio al tiempo t de un bono con descuento con vencimiento al tiempo T, a $Bnd(t,t_i,T)$ como el precio al tiempo t de un bono con cupones, pagando cupones en los tiempos t_i y la cantidad principal al tiempo T.

Si suponemos que el bono paga \$1 en T, la fecha de vencimiento, entonces tenemos que el precio del bono a tiempo t es:

$$P(t,T) = e^{-R(t,T)(T-t)} \quad , \tag{4.1}$$

donde $R(t,T)$ denota la tasa de rendimiento del bono (llamada también tasa de rendimiento *spot*, la cual vale:

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} ln[P(t,T)] \quad . \tag{4.2}$$

En ausencia de oportunidad de arbitraje, se puede pensar al bono con cupones como un portafolio de bonos cupón cero, es decir, tomamos un bono cupón cero en cada intervalo del tiempo que se paga cupones, el monto principal de este bono es igual al cupón y el valor de vencimiento es al final de cada periodo; de esta manera formamos el bono con cupones.

4.1.2 Tasa *Forward*

Se define una tasa *forward* como aquella tasa que es conocida en t, pero que se aplica entre los tiempos t_k y t_{k+1} , donde $t < t_k < t_{k+1}$.

La tasa forward ofrece una visión dinámica de los movimientos futuros en las tasas de interés y puede ser calculada tomando como base los actuales tipos de interés existentes en el mercado.

Consideremos invertir \$1 en el tiempo $t = 0$, introduciendo un contrato *forward* para cada intervalo $[t_k, t_{k+1}]$ y suponiendo que la tasa forward $[0, t_k]$ permanece constante en el k-ésimo intervalo, tenemos que el valor V para nuestro peso al tiempo T es:

$$\begin{aligned} V &= 1 \cdot e^{f(0,t_1)\Delta t_1} \cdot e^{f(0,t_2)\Delta t_2} \dots \cdot e^{f(0,t_N)\Delta t_N} \\ &= e^{[\sum_{k=1}^{N} f(0,t_k)\Delta t_k]} \end{aligned}$$

En el caso límite en el que $\Delta t_k \longrightarrow 0$, cuando $k \longrightarrow \infty$ tenemos

$$V = e^{\int_0^T f(0,s)ds}$$

y

$$P(0,T) = V^{-1} = e^{-\int_0^T f(0,s)ds}. \tag{4.3}$$

Tomando logaritmo y derivando con respecto a T obtenemos

$$f(0,T) = -\frac{dlnP(0,T)}{dT}.$$

Generalizando (4.3)

$$P(t,T) \;=\; e^{-\int_t^T f(t,s)ds}.$$

Para un intervalo Δt se tiene

$$P(t,T+\Delta t) = P(t,T)e^{-f(t,T_1)\Delta t},$$

donde $T \leq T_1 \leq T + \Delta t$.

Entonces denotamos a la tasa *forward* compuesta de rendimiento en el periodo $[T, T + \Delta t]$ como sigue:

$$\begin{aligned} e^{-f(t,T_1)\Delta t} &= \frac{P(t,T+\Delta t)}{P(t,T)}, \\ f(t,T_1)\Delta t &= -ln\Big(\frac{P(t,T+\Delta t)}{P(t,T)}\Big) \quad . \end{aligned}$$

Por lo tanto, la tasa *forwad* es igual a:

$$f(t,T_1) \;=\; \frac{-lnP(t,T+\Delta t) + lnP(t,T)}{\Delta t}.$$

Si se considera que $t \longrightarrow T$ y $\Delta t \longrightarrow 0$ entonces se define a (4.4) y (4.5) como la tasa corta instantánea $r(t)$ y la tasa *forward* instantánea $f(t,T)$ respectivamente:

$$r(t) = \lim_{t \to T} R(t,T) \tag{4.4}$$

y

$$f(t,T) = \lim_{t \to T} \frac{-lnP(t,T+\Delta t) + lnP(t,T)}{\Delta t}.$$

Nótese que es el producto de una constante por el límite del cociente incremental, es decir, la derivada del precio con respecto a t. Reordenando se obtiene la tasa instantanea forward:

$$f(t,T) = -\frac{dlnP(t,T)}{dT}. \tag{4.5}$$

De (4.5) se tiene

$$\begin{aligned} -\int_t^T f(t,s)ds &= \int_t^T \frac{dln}{ds} P(t,s)ds \\ &= lnP(t,T) - lnP(t,t). \end{aligned}$$

Pero $P(t,t) = 1$, por lo tanto

$$-\int_t^T f(t,s)ds = lnP(t,T).$$

Finalmente

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds},$$

donde se obtiene el precio del bono como un peso descontado por la suma de las tasas forward entre los tiempos t y T.

Al sustituir la ecuación anterior en (4.2) podemos expresar el rendimiento de un bono que vence en el tiempo T como un promedio de los rendimientos *forward* instántaneos.

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}\int_t^T f(t,s)ds.$$

Por ejemplo, supongamos que la tasa de interés a un año es de 8% y la tasa a 2 años es de 8.5%. Los que nos interesa es conocer la tasa forward en el segundo año denotada por $f(1,2)$.

Supongamos que invertimos \$100 en el primer año entonces al final de este periodo debemos tener $\$100e^{.08}$. Si reinvertimos este dinero en el segundo año tenemos:

$$\begin{aligned}
100e^{.08+f(1,2)} &= 100e^{.085(2)} \\
(ln100)[.08+f(1,2)] &= (ln100)[.085(2)] \\
0.08+f(1,2) &= 0.17 \\
f(1,2) &= 0.17-0.08 \\
f(1,2) &= 9\%.
\end{aligned}$$

4.2 Curvas de Rendimiento

Cuando las tasas cambian a lo largo del tiempo, la valuación del bono requiere calcular la estructura de tasas de interés para bonos del mismo nivel de riesgo.

Se conoce como curva de rendimiento de tasas de interés (*yield curve*), a la representación gráfica que describe la relación entre los diferentes rendimientos de bonos cupón cero para diferentes plazos.

Por ejemplo, consideremos las siguientes tasas de interés de CETES[1] en una fecha determinada:

PLAZO	TASA
1	6.50
28	7.23
91	7.31
181	7.78
364	8.12

Fuente: Banco de México. Subasta semanal de valores gubernamentales.

Esta gráfica se construye observando las diferentes tasas de rendimiento y plazos que operan en el mercado de dinero. Hay que destacar que estas curvas consideran rendimientos libres de riesgo. Para valuar instrumentos que tengan riesgo, es necesario descontar a valor presente con tasas libres de riesgo al plazo al que paga el cupón, más una diferencial (*spread*) que refleja el riesgo.

[1] Certificados de la Tesorería de la Federación.

Esta curva puede ser creciente cuando el mercado espera que las tasas suban y puede ser decreciente si se espera que las tasas bajen.

La evolución de las curvas de rendimiento pueden ser expresadas en términos de las tasas *forward* y las tasas *spot.*

A continuación enfocaremos nuestra atención en las tasas *forward* y vamos a considerar al siguiente conjunto finito de tasas, cada una válida durante un periodo determinado.

$F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, ... f_k\}$

Consideremos a estas tasas como variables aleatorias. El cambio en el tiempo de la tasa *forward* se modela mediante esta familia de variables aleatorias, es decir, podemos considerar a F como un proceso estocástico. Además f_i y f_j están imperfectamente correlacionadas ($\rho_{ij} < 1$). El grado de correlación [2] ρ_{ij}, normalmente decrece cuando el vencimiento va creciendo.

Para describir la dinámica de las curvas de rendimiento, construiremos un modelo, comenzando por considerar el caso para n variables aleatorias con $\rho_{ij} < 1$.

Sean g_i con $i = 1, 2, 3, ..., n$ las cuales supondremos representan el porcentaje de los incrementos en una tasa *forward.*

$$g_i = df_i = \mu_i dt + \sigma_i dZ_i, \tag{4.7}$$

donde,

Z_i es un movimiento browniano,

dt es la variación del tiempo,

μ_i es la tasa libre de riesgo
y σ_i es la desviación estándar de la tasa *forward.*

Considerando la misma variable g_i para distintos tiempos y como sabemos que los incrementos son independientes, tenemos

$$E[dZ_i(t)dZ_i(t + dt)] = 0.$$

[2] La correlación se define como el grado de relación lineal que existe entre diferentes factores de riesgo en un periodo de tiempo y está dada por:

$$\rho_{ij} = \frac{Cov[g_i g_j]}{\sigma_i \sigma_j}, \tag{4.6}$$

donde σ_i y σ_j son las desviaciones estandar de i y j. La $Cov[g_i g_j]$ es la covarianza entre las variables aleatorias g_i y g_j.

Dado que las g_i están correlacionadas imperfectamente entonces los incrementos $dZ_i(t)$ y $dZ_j(t)$ en el mismo tiempo pueden tener un grado de correlación, que está dado por:

$$E[dZ_i(t)dZ_j(t)] = \rho_{ij}(t)dt,$$

donde ρ_{ij} representa la correlación entre las variables i, j.

4.3 Modelo Binomial para un Periodo

Cox, Ross y Rubinstein desarrollaron este método de valuación de opciones. Con este modelo obtendremos el precio de derivados y así podremos describir el comportamiento de nuestra cartera de inversión. Para mostrar cómo funciona este método vamos a aplicarlo a la valuación de acciones, suponiendo que el precio de la acción sólo debe ser uno de los valores especificados en la fecha de vencimiento[3].

Consideremos los siguientes supuestos de mercado:

1. Existe un mercado eficiente.

2. Están permitidas las ventas en corto y uso total del dinero.

3. No existen restricciones de crédito.

4. La tasa de préstamo es igual a la tasa de inversión.

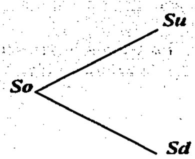
Comencemos por definir a S_0 como el valor actual (*spot*) al tiempo $t = 0$ de una acción, y V_0 el valor de una opción de venta de tipo europea al tiempo $t = 0$.

Supongamos que S_0 puede tomar dos valores dentro de cierto periodo τ.

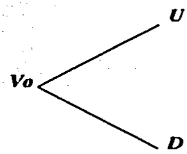
Para completar nuestro modelo binimial, introduciremos un concepto más: la tasa libre de riesgo, representada por r. Si consideramos invertir $1 en el mercado de dinero con una tasa r, entonces tendremos $(1 + r)$ en el siguiente periodo.

Supongamos que $d < (r + 1) < u$, de lo contrario nuestro modelo no tendría sentido. Por ejemplo si $(1 + r) > u$, entonces la tasa de rendimiento siempre sería mayor y no tendría sentido invertir en la acción. Por otra parte si $d > (1 + r)$, tendríamos que $r < 0$ y esto no puede suceder.

Con el precio actual del activo subyacente, consideremos una opción de compra de tipo europea con precio de ejercicio $k > 0$ y fecha de vencimiento $t = 1$, entonces el precio de la opción a la fecha de expiración está dada por



Movimiento del precio de la acción para un periodo



Movimiento del precio de la opción para un periodo

$$V_1 = (S_1(w) - k)^+ \quad , \tag{4.8}$$

donde

$$S_1(w) = \begin{cases} S_u \\ S_d \end{cases}$$

Si el activo S está en el estado S_u entonces la opción tiene un valor de U, si el activo está en el estado S_d , la opción tiene un valor de D.

Donde $U = max\{uSo - k, 0\}$ y $D = max\{dSo - k, 0\}$.

Construimos una cartera mediante la compra de un derivado a un valor V_0 y vendemos α acciones. Por lo tanto, el valor de nuestra cartera al tiempo $t = 0$ es:

$$\Pi_0 = V_0 - \alpha S_0, \tag{4.9}$$

a αS_0 lo podemos ver como α unidades de la acción S.

Para cubrirnos del riesgo, seleccionamos una combinación, que consiste en adquirir un número determinado de acciones al mismo tiempo que se emite una opción, de modo que Π no depende del desarrollo de la acción. Esta combinación es importante porque pase lo que pase con el precio de la acción, el valor de nuestra cartera será siempre el mismo. A dicha combinación se la denomina cartera de arbitraje, razón de cobertura o delta de la opción. Así pues, si α es el número de acciones que compramos por cada opción de compra emitida tendremos lo siguiente:

El costo final de nuestra cartera está dada por:

$$\Pi_1 = \begin{cases} \Pi_d = D - \alpha S_d & \text{si el precio de la acción baja} \\ \Pi_u = U - \alpha S_u & \text{si el precio de la acción sube} \end{cases}$$

Igualando Π_d y Π_u para que nuestro portafolio no dependa del cambio en el precio de la acción obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pi_d &= \Pi_u \\ D - \alpha S_d &= U - \alpha S_u.\end{aligned}$$

Despejando α,

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{U-D}{S_u - S_d} \\ &= \frac{\Delta V}{\Delta S},\end{aligned}$$

donde ésta es la razón de cobertura.

Tenemos que el costo inicial de nuestro portafolio es

$$\Pi_0 = V_0 - \alpha S_0,$$

y el costo final está dado por

$$\Pi_1 = U - \alpha S_u.$$

Puesto que nuestra cartera no tiene riesgo y la tasa de rendimiento es libre de riesgo, entonces de la ecuación (4.9) encontramos el valor de la opción al tiempo $t = 0$,

$$\begin{aligned}V_0 - \alpha S_0 &= \frac{1}{1+r}(U - \alpha S_u), \\ V_0 &= \frac{1}{1+r}(U - \alpha S_u) + \alpha S_0.\end{aligned}$$

Sustituyendo α en (4.10)

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\Big(U - \frac{U-D}{S_u - S_d}S_u\Big) + \frac{U-D}{S_u-S_d}S_0, \tag{4.10}$$

reagrupando en términos de U y D

$$
\begin{aligned}
V_0 &= U\left[\frac{S_0}{S_u - S_d} + \frac{1}{1+r} - \frac{S_u}{S_u - S_d}\frac{1}{1+r}\right] + D\left[-\frac{S_0}{S_u - S_d} + \frac{S_u}{S_u - S_d}\frac{1}{1+r}\right], \\
&= \frac{1}{1+r}U\underbrace{\left[\frac{(1+r)S_0}{S_u - S_d} - \frac{S_u}{S_u - S_d}\right]}_{p} + \frac{1}{1+r}D\underbrace{\left[-\frac{(1+r)S_0}{S_u - S_d} + \frac{S_u}{S_u - S_d}\right]}_{1-p} \quad ,
\end{aligned}
$$

donde (p) y $(1-p)$ representan la probabilidad implícita [3] de que el valor del activo subyacente suba o baje respectivamente.

Donde $0 \leq p \leq 1$, ya que si $p < 0$, entonces esta acción sería una gran compra, pues tendríamos $(1+r)S_0 < S_d$ y el peor valor de futuro de la acción sería S_d y superaría el rendimiento libre de riesgo.

Además $p + (1-p) = 1$.

De manera que el valor de nuestra opción al tiempo $t = 0$ es

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \frac{1}{1+r}\Big[Up + D(1-p)\Big], && (4.11) \\
&= \frac{1}{1+r}E_p[V_T], && (4.12)
\end{aligned}
$$

donde $E_p[V_T]$ denota el operador esperanza bajo la probabilidad p del precio de la opción al tiempo T. Se hace referencia a $1/1+r$ como el factor de descuento.

De esta manera podemos ver a V_0 como la esperanza del valor de la opción al final del periodo traído a valor presente.

Veamos un ejemplo. Consideremos una acción que tiene un valor actual de \$60, después de un anõ será de \$65 o de \$45. La tasa de interés anual es de 5%.

Deseamos saber cuál es el precio justo el día de hoy de una opción de compra de tipo europea, con un precio de ejercicio de \$55.

Primero obtenemos a p y $1-p$. Tenemos que $S_0(1+r) = pS_u + (1-p)S_d$.

Sustituyendo los valores de S_u y S_d obtenemos

$$
\begin{aligned}
60(1.05) &= p65 + 45 - p45 \\
63 - 45 &= p20.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $p = 9\%$ y $1 - p = 1\%$.

[3] Este tipo de probabilidad es neutral al riesgo, es decir, no tiene nada que ver con la adversión que el inversionista tenga al riesgo.

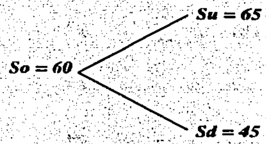


Figura 4.1: Movimiento del precio de la opción.

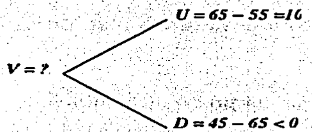


Figura 4.2: Movimiento del precio de la opción.

Por la ecuación (4.11) podemos encontrar el valor de V_0

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r}[(.9)(10) + (.1)(0)] \\ &= .95123(9) \\ &= 8.56. \end{aligned}$$

4.3.1 Modelo Binomial para Varios Periodos

Extendiendo los cálculos anteriores a un periodo múltiple podemos obtener posibles movimientos del precio de la acción.

Decimos que los movimientos al alza ocurren con probabilidad p y los movimientos a la baja ocurren con probabilidad $(1-p) = q$.

Observemos que el valor esperado del activo subyacente al final del primer periodo está dado por

$$\begin{aligned} E[S_1] &= p(uS_0) + q(dS_0) \\ &= (pu + qd)S_0, \end{aligned}$$

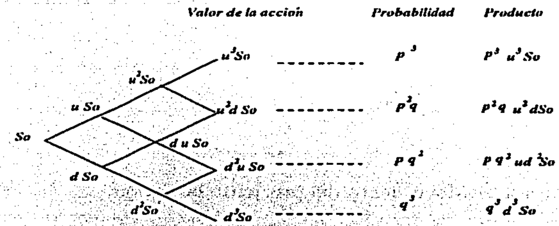


Figura 4.3: Movimiento de la acción para varios periodos

donde $(pu + qd)$ mide la tendencia del precio de la acción.

De manera análoga calcular al final del tercer periodo,

$$\begin{aligned} E[S_3] &= p(uS_0) + q(dS_0) \\ &= [(pu)^3 + 3qd(up)^2 + 3(qd)^2pu + (qd)^3]S_0 \\ &= (pu + qd)^3S_0, \end{aligned}$$

esto es igual a la suma del producto de la columna.

De manera general podemos calcular el valor esperado de la acción al final del k-ésimo periodo:

$$E[S_k] = (pu + qd)^kS_0, \tag{4.13}$$

Por lo tanto, podemos expresar al precio actual de la opción para n periodos de la siguiente manera:

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\sum\Big[\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}max(U^kS_0D^{n-k} - X), 0\Big]. \tag{4.14}$$

Todas las variables son conocidas a excepción de n, que indica el número de pasos en los que se descompone el proceso binomial.

4.3.2 Ajuste del Modelo Binomial a Datos Reales

Existen dos componentes importantes relacionados con la dinámica en los precios de las acciones, estos son la tendencia y la volatilidad.

Definimos al rendimiento relativo del precio de una acción S después de un periodo Δt como:

$$\frac{S}{So} - 1. \tag{4.15}$$

Denotamos a $\mu\Delta t$ como el cambio porcentual promedio del precio de la acción en Δt:

$$\mu\Delta t = E\Big[\frac{S}{So} - 1\Big].$$

Sea $\sigma\Delta t$ la volatilidad, la cual mide la aleatoriedad del rendimiento relativo:

$$\sigma\Delta t = E\Big[(\frac{S}{So} - 1 - \mu\Delta t)^2\Big].$$

Dado que el comportamiento del precio de la acción es una variable aleatoria que se distribuye como una Bernoulli[4], entonces tenemos

$$1 + \mu\Delta t = E\Big[\frac{S}{So}\Big] = pu + (1-p)d$$

y

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{E\Big[(\frac{S}{So} - 1 - \mu\Delta t)^2\Big]} = \sqrt{p(1-p)}(u-d).$$

Utilizaremos el algortimo de Hull-White, que consiste en fijar a $p = \frac{1}{2}$, para determinar los valos de u y d dadas μ , σ y Δt ,

$$1 + \mu\Delta t = \frac{u+d}{2} \quad y \quad 2\sigma\sqrt{\Delta t} = u - d. \tag{4.16}$$

[4]Sea X una variable aleatoria con distribución Bernoulli, entonces $E[X] = pa + (1-p)b$ y $Var[X] = E[(X-\mu)^2] = p(1-p)(a-b)^2$.

Supongamos que $S_1 = X_1 S_o$ y $S_k = X_k S_{k+1}$, donde $X_k = S_k/S_{k-1}$ son variables aleatorias independientes de Bernoulli con

$$Pr\Big[\frac{S_k}{S_{k-1}} = d\Big] = \frac{1}{2} = Pr\Big[\frac{S_k}{S_{k-1}} = u\Big].$$

Por la definición de varianza vemos que los estimadores razonables de $\mu\Delta t$ y $\sigma\Delta t$ son:

$\bar{U}$ como la media muestral determinada por las S_k con $k = 1, 2, .., n$,

$$\bar{U} = \frac{1}{n}\sum\Big(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1\Big),$$

y a s^2 la varianza muestral determinada por las S_k,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\Big[\sum(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1)^2 - n\bar{U}^2\Big], \tag{4.17}$$

donde,

$$\mu \approx \frac{\bar{U}}{\Delta t} \quad y \quad \sigma \approx \frac{s}{\sqrt{\Delta t}}.$$

Utilizando (4.16) y sustituyendo a μ y σ, encontramos el valor de u y d.

$$u = 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \tag{4.18}$$

y

$$d = 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}, \tag{4.19}$$

donde u y d son simétricas respecto a la tendencia de μ.

Capítulo 5

Diversificación en Portafolios de Inversión

El propósito de este capítulo es presentar los conceptos que están siendo utilizados en la elección de portafolios de inversión, de manera que puedan ser aplicados, por administradores de portafolios de renta fija y renta variable, como son las administradoras de fondos de pensiones (AFORES). Veremos diferentes portafolios, considerando la posibilidad de inver en dos instrumentos a la vez, formando distintos portafolios y aprovechando los beneficios de la diversificación, en la obtención ya sea de mayor rendimiento con el mismo nivel de riesgo o de un mismo rendimiento con riesgo menor, lo cual conllevaría de manera directa a una mejora en nuestros fondos de pensiones.

5.1 Introducción

Las última modificación al marco legal de las inversiones de las Administradoras de Fondos de Pensiones establece nuevos retos a sus administradores y ofrece nuevas posibilidades de crecimiento al sistema, al permitirles invertir en nuevos instrumentos como son las operaciones con derivados.

Como bien sabemos cada inversionista busca maximizar su utilidad, lograr la relación entre riesgo y rendimiento de manera más conveniente. El inversionista se enfrenta a un problema clásico de cómo repartir una suma de dinero entre diferentes opciones de inversión.

El escoger un grupo de instrumentos financieros, conforma lo que se conoce como portafolio de inversión. Esta elección permite al inversionista aprovechar los beneficios de la diversificación. La diversificación de un portafolio se refiere a la posibilidad de disminuir el riesgo asumido por el inversionista sin afectar negativamente su rendimiento esperado.

5.2 Estructura de la Cartera del Sistema de Pensiones

Una vez que ya hemos estudiado diferentes modelos, tanto continuos como discretos para valuar distintos instrumentos financieros, formaremos diferentes portafolios de inversión con instrumentos de renta fija, renta variable y alguna opción, utilizando distintas estrategias de inversión, como son:

1. Estrategia de inversión conservadora, la cual está inclinada hacia instrumentos de renta fija e inversiones de corto plazo. Ideal para inversionistas que desean asumir un bajo riesgo y mantener el valor de su inversión inicial.

2. Estrategia de inversión moderada: busca reducir la volatilidad con una combinación de instrumentos de renta fija y de renta variable.

3. Estrategia de inversion audaz, que permite al inversionista que tiene objetivos de largo plazo tomar ventajas de las fluctuaciones del mercado de corto plazo. Este portafolio mantiene el más alto nivel de ganacias (recompensa obtenido por mantener riesgo).

Entre los instrumentos de renta fija están los cetes, estos instrumentos contemplan un riesgo definido.

En cuanto a los instrumentos de renta variable, el rendimiento está en función del desempeño económico-financiero de la empresa que realizó la emisión del título y de las fluctuaciones en las variables económicas que presenta el mercado, ejemplo de éstas son las acciones.

Por otra parte tenemos a los productos derivados que son utilizado en la cobertura contra riesgos financieros.

Para la construcción de nuetros portafolios con diferentes estrategias de inversión definimos los siguientes instrumentos financieros:

Z_1 : cetes con un plazo de 28 días.

Z_2 : acción emitida por la empresa Walmex.

Z_3 : opción de compra sobre el IPC[1], con fecha de ejercicio $t = 7meses$.

De manera inmediata podemos decir que el rendimiento esperado de cetes a 28 días está establecido y es constante y esta dado por $\mu = .0724$ y por lo tanto tiene volatilidad cero[2].

De manera ilustrativa se presenta la curva de rendimiento de cetes a partir de 1995.

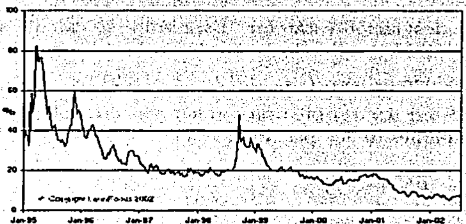


Figura 5.1: Tasas de rendimiento de Cetes a 28 días.

Para el cálculo de μ y σ para la acción Walmex usamos una hoja de cálculo (open office)con los siguientes pasos:

Tomando los precios diarios de cierre de la acción Walmex del 20 de marzo de 2000 al 10 de julio de 2002.

Consideramos intervalos de 360 días. Sea S_i el precio de la acción al final del i - ésimo intervalo.

Posteriormente calculamos las variaciones anuales en los precios de la acción de nuestra serie histórica, estos valores son denotados por U_i

$$U_i = \frac{S_{i+359}}{S_i} - 1.$$

[1]Es el indicador del desarrollo del mercado accionario en su conjunto, en función de las variaciones de precios de una selección de acciones

[2]Dato obtenido de la subasta del 18 de junio de 2002, publicada en el Banco de México.

Tomando el promedio de las variaciones,

$$\bar{U} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} U_i,$$

obtenemos el rendimiento anualizado del precio de la acción.

Calculando la varianza representada por s^2:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(U_i - \bar{U})^2.$$

Denotamos por s a la desviación estándar. Este valor se calcula simplemente escribiendo la fórmula =STDEV y seleccionando datos a analizar.

Las respuestas que obtenemos son: $\bar{U} = .2512 \quad s = .2211$

El siguiente paso es estimar μ y σ sobre una escala mensual, donde $\Delta t = 365/30$. Entonces, nuestras estimaciones de los parámetros son:

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{U}}{\Delta t} = .0209 \qquad y \qquad \hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\Delta t}} = .0638$$

Ahora consideremos una opción de compra tipo americana sobre el índice del IPC. De igual manera que la serie histórica para Walmex, consideraremos, los valores diarios de cierre del IPC del 20 de marzo de 2000 al 10 de julio de 2002. Para obtener μ y σ de ésta opción usamos el modelo de árbol que se estudió en el capítulo cuatro.

El primer paso es obtener $\hat{\mu}$ y $\hat{\sigma}$ para el índice del IPC. Se utiliza la misma estrategia que se empleo en el cálculo de μ y σ para la acción de Walmex, obteniendo así,

$$\hat{\mu} = .0152 \qquad y \qquad \hat{\sigma} = .0842.$$

Posteriormente utilizamos el algoritmo de Hull-White, fijando $p = 1/2$ para determinar u y d y así poder construir nuestro árbol de precios del IPC.

De manera que u y d están dados por:

$$\begin{array}{rcl} u & = & 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} = 1.0994 \\ d & = & 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t} = .9310 \end{array},$$

donde $S_0 = 6371.27$ (el precio al 10 de julio de 2002).

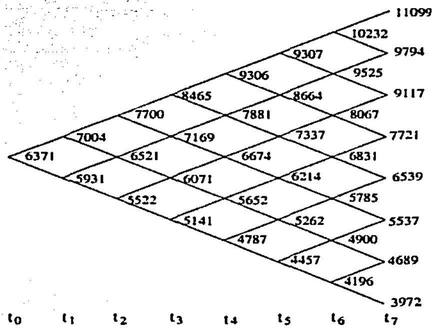


Figura 5.2: Árbol de valores del IPC para 7 periodos.

El árbol desarrollado aparece en la fig 5.2 .

Una vez obtenido el valor del IPC para cada periodo de tiempo, debemos encontrar el valor de nuestra opción en cada uno de nuestro siete periodos, ya que estamos considerando una opción tipo americana. Por lo tanto podemos ejercerla en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento.

Utilizamos la función de *pay-off* para una opción de compra, definida en el capítulo 2, para construir nuestro árbol de la opción sobre el IPC. En la fig 5.3 se muestra el desarrollo de este árbol.

El siguiente paso es calcular el promedio de los posibles precios que toma la opción en cada una de los periodos.

Definimos a $\bar{V}_i$ el promedio de los precios de la opción para el periodo i-ésimo.

Sean,

$\bar{V}_0 = 0, \quad \bar{V}_1 = 0, \quad \bar{V}_2 = 151.57 \quad \bar{V}_3 = 304.95, \quad \bar{V}_4 = 539.38, \quad \bar{V}_5 = 580.18,$
$\bar{V}_6 = 1014.74, \quad \bar{V}_7 = 815.86$.

Posteriormente se calculan las variaciones en cada periodo, de la siguiente manera:

$(\bar{V}_{i+1}/\bar{V}_i) - 1$

Como paso siguiente calculamos el rendimiento en el precio de la opción, dado por el promedio de las variaciones.

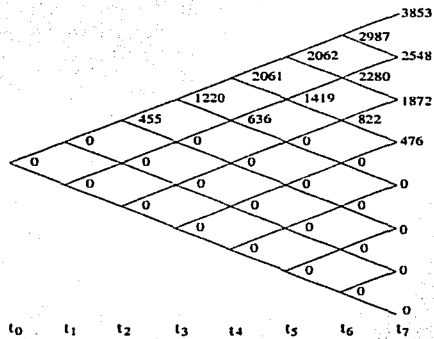


Figura 5.3: Árbol de la opción sobre el IPC .

Para encontrar la varianza sólo es necesario tomar las $\bar{V}_i$ y aplicar en nuestra hoja de calculo la función =VAR(). En la tabla siguiente presentamos el resumen de los resultados obtenidos.

Titulo	Rendimiento	Riesgo
Z_1	.06	0
Z_2	2.09	6.38
Z_3	2.51	4

Una vez obtenido los rendimientos y riesgo de cada instrumento podemos formar diferentes portafolios, con la condición de que la suma de las proprciones sea uno.

Definamos el rendimiento esperado del instrumento Z_i como el rendimiento que en promedio se espera del activo en determinado periodo. Entonces tenemos que el rendimiento esperado de un portafolio de inversión es la suma ponderada de los rendimientos esperados de los instrumentos individuales incluidos en el mismo, es decir,

$$E(R_p) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i E(R_i),$$

donde:

R_p es la variable aleatoria que determina las tasas de rendimiento del portafolio p.
$E[R_i]$ es el rendimiento esperado del instrumento i.
x_i es el porcentaje a invertir en el instrumento i.
$E[R_p]$ es el rendimiento esperado del portafolio p.
n es el número de instrumentos en un portafolio.

La varianza denotada por σ^2 de un portafolio depende tanto de las varianzas de cada uno de los instrumentos como de las covarianzas entre cada par de instrumentos. La covarianza mide la relación entre los rendimientos de dos instrumentos dados:

$$\begin{aligned}\sigma^2(R_p) &= Var(R_p)\\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n} x_i x_j \sigma_{ij},\end{aligned}$$

donde σ_i^2 es la varianza del activo i. Denotamos a σ_{ij}como la covarianza que existe entre los instrumentos i, j.

En primer lugar, consideremos un portafolio con base en la estrategia de inversión moderada, es decir, estará formado por Z_1 y Z_2:

$$\Pi_1 = x_1 Z_1 + x_2 Z_2,$$

Supongamos que la covarianza entre estos dos instrumentos es cero, es decir, son instrumentos no correlacionados, entonces tenemos que la varianza del portafolio está dada por:

$$\sigma^2(R_p) = x_2^2\sigma_2^2(R_2).$$

Observamos que el riesgo de nuestro portafolio está dado por el riego que tiene nuestro instrumento de renta variable, ya que la varianza de cetes, $\sigma_1^2(R_1)$ es igual a cero.

Se define a x_2 como la proporción a invertir en el instrumento Z_2.

Por otra parte tenemos que el rendimiento del portafolio es: $E(R_p) = x_1 E(R_1) + x_2 E(R_2)$

Considerando el criterio de mínimo riesgo como criterio de decisión, el inversionista optaría por invertir todo en Z_1. Por otra parte si el inversionista está dispuesto a correr algún riesgo, entonces invertiria en Z_2 seguń el riesgo. Esto se puede ver en la siguiente tabla, donde variamos las proporciones a invertir en cada instrumento.

CUADRO I

Portafolios	$X_1(\%)$	$X_2(\%)$	Rendimiento	Riesgo
A	1	0	.06	0
B	.8	.2	.46	.26
C	.5	.5	1.04	1.60.
D	.8	.2	1.68	4.08
E	0	1	2.09	6.38.

Considerando las reglas de inversión a las que deben sujetarse las SIEFORES, el inversionista tiene la posibilidad de invertir todo su capital en Z_1, obteniendo así el menor riesgo posible. Además tiene permitido invertir como maximo 35% en Z_2.

Si invertimos $x_1 = .65$ y $x_2 = .35$, entonces el rendimiento de nuestro portafolio es :

$E(R_p) = 1.12 \quad \text{y} \quad \sigma^2(R_p) = 0.78$

bservemos que estos sesulatdos en comparación con el portafolio C del cuadro I, nos muestran que al invertir el 50% en renta variable podemos obtener un rendimiento mayor que si se invirtiera el 35%.

Consideremos ahora, un portafolio formado por Z_2 y Z_3. En este caso nuestros instrumentos tienen una covarianza de 0.02.

$$\Pi_2 = x_2 Z_2 + x_3 Z_3.$$

La varianza de nuestro portafolio está dada por:

$$\sigma^2(R_p) = x_2^2\sigma_2^2 + x_3^2\sigma_3^2 + 2x_2x_3\sigma_{2,3},$$

donde σ_2^2 la varianza de acciones de Walmex y σ_3^2 es la varianza de la opción sobre el IPC.

El rendimiento está dado por,

$$E(R_p) = x_2E(R_2) + x_3E(R_3).$$

Como ya conocemos los rendimientos y las varianzas de cada uno de nuestros instrumentos, sólo nos falta determinar las proporciones a invertir en cada unos de ellos.

A continuación vamos a variar las proporciones, obteniendo en cada caso el rendimiento y varianza de nuestros portafolios.

Nuestra tabla está dada de la siguiente manera:

CUADRO II

Portafolios	$X_2(\%)$	$X_3(\%)$	Rendimiento	Riesgo
A	1	0	2.09	6.40
B	.8	.2	2.17	4.26
C	.5	.5	2.3	2.62
D	.2	.8	2.43	2.84
E	0	1	2.51	4.02

Como podemos observar de las tablas anteriores si construimos un portafolio donde el 100% de la inversión es en renta fija (Portafolio A cuadro I) obtenemos un rendimiento de .06 y un riesgo (volatilidad) de cero, pero si permitimos diversificar la inversión observamos (mismo cuadro I) que al incluir instrumentos de renta variable el rendimiento aumenta al igual que el riesgo; entonces si nosotros permitimos un nivel aceptable de riesgo claramente podemos elevar el rendimiento de los fondos de pensiones. La pregunta natural que surge es ¿que tanto podemos aumentar nuestro nivel de rendimiento con un nivel de riesgo similar, o en otros términos que tanto es posible obtener los mismos rendimientos con un nivel de riesgo menor mediante la diversificación de los instrumentos bursátiles utilizados en la composición de nuestro portafolios.

Observemos en nuestro cuadro II (comparando con el cuadro I) que es posible obtener portafolios donde el porcentaje invertido en instrumentos derivados es mayor al permitido por la ley y que sin embargo se obtiene un rendimiento mayor con un nivel menor o igual de riesgo, lo cual sustenta la principal conclusión de este trabajo. De igual manera, al analizar diferentes portafolios constituidos por instrumentos de renta fija y opciones (cuadro III) observamos que para porcentajes altos de inversión en el activo riesgoso es posible obtener rendimientos similares con riesgos equivalentes.

CUADRO III

Portafolios	$X_1(\%)$	$X_3(\%)$	Rendimiento	Riesgo
A	1	0	.06	0
B	.8	.2	.55	.16
C	.5	.5	1.29	1
D	.2	.8	2.02	2.56
E	0	1	2.51	4.02

En conclusión observamos, que aún cuando se escojen instrumentos con un riesgo mayor asociado, el concepto de diversificación nos permite no incrementar el riesgo total del portafolio y obtener niveles de rendimiento mayores que ofrecer a los fondos de pensiones.

En conclusión, aún cuando hay mucho trabajo que realizar en la mejora de la administración de los fondos de pensiones, este trabajo permite obtener una primera aproximación a una herramienta que permite manejar de manera más libre y conveniente (menos restrictiva) la manera de invertir los fondos de pensiones obteniendo un beneficio directo en el principal objetivo para lo que fueron creados (un nivel digno de vida para los pensionados).

Bibliografía

[1] Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro. www.consar.gob.mx

[2] Grabinsky Guillermo. *Teoria de la medida (Notas de curso).* Universidad Nacional Autonoma de México, 2000.

[3] Goodman Victor y Stampli Joseph. *The Mathematics of Finance.* Indiana University, 2001.

[4] Harry M. Markowitz.*Mean Varinace Analisys in Portfolio Choice and Capital Market* Cowly Road Oxford, 1990.

[5] Hull Jonh. *Introduction to futures and options markets.* Prentice Hall, 1995.

[6] Jorion Philippe. *Valor en Riesgo.* Limusa, 1998.

[7] Ley del Seguro Social. www.imss.gob.mx

[8] Ley del ISSSTE. www.issste.gob.mx

[9] Mansell Catherine. *Las Nuevas Finanzas en México.* Instituto Tecnológico Autónomo, 1995.

[10] Ross, Sheldon M. *Stochastic Processes.* John Wiley and Sons. 1983

[11] Wilmott Paul. *Option Pricing.* Oxford University and Imperial College, London, 1993.