43

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LAS GAVILLAS DE JEAN- PIERRE SERRE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FRANCISCO SANCHEZ GOMEZ JAUREGUI

FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

2002

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENTMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Las Gavillas de Jean-Pierre Serre".

realizado por Sánchez Gómez Jáuregui Francisco

con número de cuenta 9355156-6 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta	Javier Elizondo
Propietario	M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza	
Propietario	M. en C. Armando Paulino Preciado Babb	
Suplente	M. en C. Emigdio Martínez Ojeda	
Suplente	Mat. José de Jesús Malagón López	

Consejo Departamental de Matemáticas.

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Las Gavillas de Jean-Pierre Serre

Francisco Sánchez Gómez Jáuregui

a mi hijo,

Índice General

Capítulo 1

Introducción

Las matemáticas constituyen una de las aventuras más prodigiosas y nobles que el ser humano se haya jamás planteado a lo largo de su historia como habitante de este planeta. De esto no le cabe la menor duda a culaquiera que haya dedicado el tiempo y esfuerzo necesarios para echar siquiera un vistazo al imponente edificio levantado con la labor de siglos de devota entrega. Acaso los empeños más semejantes que conocemos sean las aventuras del arte y de la mística, con las que más de uno ha dicho que las matemáticas guardan una estrecha relación.

Uno de los rasgos distintivos de esta ciencia, que la distingue por completo de la mayoría de las disciplinas académicas que se enseñan en nuestros días en las universidades, es que su campo de estudio y acción se encuentra por entero en el dominio de lo abstracto. El objeto de estudio de las matemáticas es y será siempre una idea, un elemento que pertenece a un reino superior al mundo de las cosas tangibles y medibles que nos rodea, pero que no por eso carece de precisión, eficacia o existencia. No en balde mandó grabar Platón sobre las puertas de su Academia aquella leyenda que prohibía la entrada a quien no conociera los secretos de la geometría.

A pesar de su origen ajeno al mundo fenoménico uno de los hechos más sorprendentes que puedan conocerse es la cercana relación con éste que guardan las ideas matemáticas, como si al final de cuentas ambos proviniesen de la misma esencia. Esta idea sustenta la mística de los números y figuras que desarrolló Pitágoras hace ya más de dos milenios, y que comparte con la Kabbalah judía y su Árbol de la Vida; es la misma noción que sostenía Galileo cuando decía que las matemáticas son el lenguaje que usa Dios para escribir el universo, y que se verifica cada vez con mayor aplomo en nuestros días, cuando no sólo la física sino la química, la biología y las ciencias de la consciencia precisan de este código para elaborar modelos cada vez más exactos de la realidad, y que de hecho no pueden ser expresados de otro modo.

Otra cualidad que resalta en las matemáticas es la firmeza con la que se apoya sobre la lógica y el rigor de las demostraciones, lo que permite que la verdad brille en su ámbito con un fulgor desconocido en las demás áreas del pensamiento humano. Puede resultar sorprendente que a pesar de esta aparente rigidez en su estructura el estudio de las matemáticas haya llevado a la creación de una obra que anonada por la diversidad armoniosa de sus formas, y que necesariamente marca una profunda impresión en el sentido estético del alma humana, que al vislumbrar tal belleza alcanza tal vez a imaginar algo más grande que sí misma.

Así, no es extraño que una gran cantidad de hombres y mujeres se hayan dedicado a lo largo de las eras a la construcción de esta gran catedral, cada uno según su aptitud e inclinación personal. Incluso mientras la construcción continúa tenemos hoy a la vista un imponente monumento donde podemos deleitarnos a placer, de pie sobre los monolíticos cimientos de la lógica y la teoría de conjuntos, recorriendo las fastuosas naves del análisis, examinando con detalle la perfección de las columnas del álgebra, que sostienen a todo el edificio, o elevándonos a las impresionantes alturas góticas de la geometría. Es allí precisamente, entre los pináculos y torres de la geometría algebraica moderna, donde el vuelo de la creación humana se remonta más alto que las nubes, donde podemos encontrar una piedra angular de esta área, una de las joyas arquitectónicas erigida por uno de los maestros constructores de nuestros días, el matemático francés Jean-Pierre Serre.

En 1955 la revista Annals of Mathematics publicó un artículo intitulado Gavillas Algebraicas Coherentes y conocido bajo el apelativo de FAC por sus siglas en francés (Faisceaux Algébriques Cohérents). Este artículo permitió que la teoría de esquemas desarrollada simultáneamente por Grothendieck remontara el vuelo, revolucionando la forma de estudio de la geometría, de tal suerte que el desarrollo previo a este acontecimiento se conoce ahora como geometría algebraica clásica.

El presente trabajo no pretende otra cosa sino echar un vistazo al primero de los tres capítulos que componen el artículo de Serre, el que trata de la definición y propiedades de las gavillas, y que a casi medio siglo de distancia sigue sorprendiendo por su claridad y alcance.

Hemos seguido los pasos del autor, respetando la presentación y orden originales, deteniéndonos a cada paso, examinando cada afirmación con el detalle necesario para entender hacia dónde nos lleva el camino emprendido por Serre.

Podría decirse entonces que dos propósitos principales y complementarios animan este opúsculo; por un lado se trata de una introducción completa y precisa dirigida al estudiante intermedio de matemáticas interesado en familiarizarse con ese extraño objeto llamado gavilla y que se describe a menudo, y no sin cierta exactitud, como un "tapete con pelos". La definición y el enfoque de la exposición difieren considerablemente de los que se encuentran en la mayoría de los textos actuales, y precisa una expedición a través de una jungla topológica; sin embargo el viajero que alcance el otro lado se verá recompensado por un conocimiento íntimo de la naturaleza interna de la gavilla (es decir, el comportamiento al nivel de los tallos o fibras) a la vez que la definición usual (usando estructuras algebraicas construidas sobre vecindades del espacio topológico base) se desprenderá del trabajo realizado con naturalidad absoluta. El guía durante todo el recorrido es indudablemente el propio Serre, y nosotros nos limitamos a servir de intérpretes, haciendo más transparentes las palabras del maestro.

El otro motivo de esta exposición tiene más que ver con el puro placer de visitar nuevamente y con el debido cuidado un texto clásico que cambió el curso de la historia de la geometría, compuesto por uno de los artífices más exquisitos de esta ciencia. Con esta idea en mente nuestra intención ha sido que la interpretación del artículo original ayude a su lectura por cualquier matemático sin un nivel particular de especialización, sin opacar de ninguna forma el estilo particular de Serre.

1.1 Breve Historia de las Gavillas

A lo largo de su desrrollo en los siglos XIX y XX la geometría algebraica se caracterizó por la relación que ha establecido con muy diversas ramas de las matemáticas tales como el álgebra conmutativa, la aritmética y teoría de ecuaciones diofantinas, la geometría analítica y la topología. Normalmente estas relaciones han sido fructíferas en ambos sentidos, propiciando el desarrollo de nuevas tecnicas geométricas para resolver problemas en otras áreas y viceversa.

Las gavillas constituyen una de las principales herramientas para la geometría algebraica moderna y su aparición también fue debida a la interacción con otras áreas de estudio, en particular con la geometría analítica compleja.

En la década de los cincuentas Cartan y Leray introdujeron las gavillas como una herramienta para calcular cohomología en el estudio de variedades analíticas definidas por medio de funciones de una o más variables complejas. La idea esencial era construir un objeto algebraico a partir de anillos de funciones analíticas definidas sobre subespacios abiertos de la variedad. Poco tiempo después Kodaira y Spencer utilizaron el mismo método para demostrar una generalización del teorema de Riemann-Roch para superficies (de dimensión compleja uno). Este paso constituyó la entrada de la cohomología de gavillas al campo de la geometría algebraica.

A partir de estos resultados, Serre concibió la idea de desarrollar la teoría de gavillas y su cohomología correspondiente en abstracto, con el fin de aplicarlas al caso de variedades algebraicas definidas sobre cualquier campo, y no necesariamente el de los números complejos. Este intento dio sus primeros frutos en 1955 con la publicación de FAC en Annals of Mathematics.

Posteriormente el trabajo de Serre sería incorporado por Grothendieck en su teoría de esquemas. Un esquema es la generalización de una variedad algebraica clásica, y está formada por un espacio topológico conformado localmente por los ideales primos de un anillo, y una gavilla estructural construida sobre dicho espacio utilizando técnicas de álgebra conmutativa (específicamente la localización de anillos sobre abiertos de la topología de Zariski). Los esquemas constituyen la base fundamental de la geometría algebraica moderna.

1.2 Estructura de la Tesis

El presente trabajo sigue exactamente el orden del artículo original de Serre, y sus capítulos corresponden a las cuatro secciones de la primera parte del mismo. Así, este capítulo incluye a continuación una lista de prerrequisitos que son recomendables para la lectura del resto. El segundo capítulo contiene la definición de gavilla y sus propiedades y operaciones básicas.

En el tercer capítulo se define un tipo especial de gavillas, las gavillas coherentes, que son las que se utilizan en las aplicaciones a la teoría de esquemas de Grothendieck. Luego de la definición procedemos al estudio de las propiedades que se deducen a partir de la condición de coherencia, incluyendo el primer resultado fuerte (Teorema 1) donde se demuestra que si dos gavillas en una secuencia exacta corta son coherentes entonces la tercera también lo es.

El cuarto capítulo está dedicado a la construcción de una teoría de cohomología para gavillas. Dado que la topología del espacio base (topología de Zariski en el caso de una variedad algebraica abstracta o esquema) no satisface las condiciones de separabilidad usuales de la topología analítica de una variedad compleja, Serre sigue el método de Čech para construir un complejo de cocadenas, empleando el concepto de límite inductivo (ver sección 1.3). Este capítulo conforma el núcleo técnico de este trabajo y concluye con la construcción de una secuencia de cohomología para gavillas.

El quinto y último capítulo trata de la comparación de los grupos de cohomología obtenidos al utilizar diferentes cubiertas sobre un mismo espacio base, y de esta manera proporciona una herramienta práctica para calcular la cohomología de un espacio valuada en una gavilla.

1.3 Prerrequisitos

En general los conocimientos necesarios para aprovechar plenamente la lectura del presente trabajo no van más allá de los usuales en cualquier estudiante de primer año de posgrado. Además de nociones elementales de topología de conjuntos, se requiere cierta familiaridad con algunos conceptos de álgebra conmutativa (como el producto tensorial y el functor Hom, ver por ejemplo Atiyah y Macdonald [4]) así como una comprensión razonable de algunos temas básicos de topología algebraica y álgebra homológica, en particular en lo referente a un complejo de cocadenas (un texto adecuado es Rotman [6]).

En la demostración de la Proposición 21 en el cuarto capítulo se hace referencia específica a un resultado particular demostrado por Eilenberg y Steenrod [3]. En el quinto capítulo se utilizan algunos conceptos avanzados de álgebra homológica como el de complejo doble, sin embargo estos se definen explícitamente en el texto.

Una herramienta que se utiliza frecuentemente a lo largo del texto es el límite inductivo sobre un sistema filtrante de vecindades. Se puede encontrar una definición adecuada en diversos textos de topología (como por ejemplo Kowalsky [5]), que repetimos a continuación:

Sea X un espacio topológico y sea $x \in X$. Supongamos que para cada vecindad U de x tenemos definido un grupo G_U, y siempre que $V \subseteq U$ existe un homomorfismo $\varphi_V^U : G_U \to G_V$ tal que si $W \subseteq V \subseteq U$ entonces se tiene que $\varphi_W^V \circ \varphi_V^U = \varphi_W^U$.

Entonces definimos al *límite inductivo de los G_U* al tomar el orden filtrante de las vecindades de x como:

$$G_x = \{u \mid u \in G_U \text{ para alguna vecindad } U \text{ de } x\} / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada de la siguiente forma: sean $u \in G_U$ y $v \in G_V$, entonces $u \sim v$ si existe una vecindad W con $W \subseteq U$ y $W \subseteq V$ tal que $\varphi_W^U(u) = \varphi_W^V(v)$.

La reflexividad y simetría de $\sim$ son evidentes, y la transitividad se deduce a partir de la transitividad de los homomorfismos φ_V^U.

Asimismo se verifica directamente que las operaciones de grupo en los distintos G_U inducen una operación bien definida en el límite G_x, que tiene por lo tanto estructura natural de grupo. Finalmente observamos que existe un homomorfismo natural, $\varphi_x^U : G_U \to G_x$ que envía cada elemento de G_U a su clase de equivalencia bajo la operación $\sim$.

1.4 Agradecimientos

Este trabajo de tesis ha sido posible gracias a un gran número de personas, que de diferentes maneras me han brindado su apoyo a lo largo de los años transcurridos desde que inicié este proyecto. Es imposible enumerar a todos aquellos a quienes quisiera expresar mi gratitud, aunque espero que cada uno sepa que su contribución está plasmada de alguna manera en esta obra. De manera especial quisiera agradecer a mi maestro Javier Elizondo, quien ha permanecido dispuesto a apoyarme a través de largos años de duda. Agradezco también a mis sinodales por sus valiosos comentarios y correcciones. Entre todos aquellos maestros que me inspiraron a lo largo de la carrera quisiera destacar a Ana Irene Ramírez, Héctor Méndez y Luis Colavita. Otras personas que merecen mi gratitud de modo particular son Xavier Gómez-Mont, Javier Betancourt, Yogui Bhajan, Arturo Morales, Cristina García, Luis Fernández de Córdova, Adolfo Magaldi, Sergio González, Arelli Magdaleno, Sylvia Singer y Luz Adriana Sánchez. Por último quisiera agradecer a mis padres, sin cuyo apoyo y confianza jamás habría llegado hasta aquí.

Capítulo 2

Operaciones sobre Gavillas

Comenzaremos este capítulo con la definición de gavilla utilizada por Jean-Pierre Serre. Esencialmente la construcción consiste en asociar a cada punto de un espacio base una fibra con estructura algebraica, con una topología particular. Una vez hecho esto procederemos a definir las secciones sobre la gavilla, y observaremos la relación que guardan los grupos de secciones definidas sobre abiertos del espacio base con la estructura de las fibras; dicha relación está dada por el límite inductivo sobre el orden filtrante de vecindades del punto base del tallo. La comprensión de este hecho permite ver la equivalencia entre esta definición y la que se da en otros textos (por ejemplo Hartshorne [2]).

Después de analizar algunas propiedades básicas de las gavillas de grupos abelianos, como el pegado de gavillas mediante isomorfismos, su restricción y su extensión por cero, definiremos las gavillas de anillos y módulos (que no son sino una generalización de las gavillas de grupos) y estudiaremos los conceptos de subgavilla y homomorfismo de gavillas, que luego nos permitirán estudiar operaciones más complejas como la suma directa y producto tensorial de gavillas, así como el functor Hom aplicado a estas estructuras.

2.1 Definición de Gavilla

En esta sección comenzamos definiendo una gavilla de grupos abelianos como un espacio topológico construído sobre un espacio base. Vale la pena mencionar que tomando las precauciones adecuadas podemos sustituir los grupos abelianos por cualquier otra estructura algebraica. Asimismo observamos que en la mayor parte de la literatura contemporánea se utiliza una definición distinta que, sin embargo, resulta ser equivalente. Esto se verá con más detalle en una sección posterior (ver Sección 2.3).

Sea X un espacio topológico. Una *gavilla de grupos abelianos* comprende dos objetos:

1. Una función que asigna a cada $x \in X$ un grupo abeliano $\mathfrak{F}_x$, y
2. Una topología sobre el conjunto $\mathfrak{F}$, definido como la unión disjunta de los grupos abelianos, es decir $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{F}_x$.

En general nos referiremos a los grupos $\mathfrak{F}_x$ como las *fibras* de la gavilla, con *punto base* x.

Definimos ahora una aplicación, $\pi : \mathfrak{F} \to X$, llamada la *proyección de $\mathfrak{F}$ en X*, dada por la fórmula $\pi(f) = x$ para $f \in \mathfrak{F}_x$. También definimos el conjunto $\mathfrak{F} + \mathfrak{F} = \{ \ (f, g) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F} \mid \pi(f) = \pi(g)\}$.

Ahora, para que $\mathfrak{F}$ sea una gavilla requerimos que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1. Dado cualquier $f \in \mathfrak{F}$ existen V, vecindad de f, y U, vecindad de $\pi(f)$, tales que $\pi|_V$, es decir la restricción de π a V, es un homeomorfismo sobre U con la topología de $\mathfrak{F}$.
2. Las aplicaciones dadas por $f \mapsto -f$ y $(f, g) \mapsto f + g$ son continuas de $\mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}$ y de $\mathfrak{F} + \mathfrak{F}$ (como subespacio de $\mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$) en $\mathfrak{F}$ respectivamente.

Así, la construcción de una gavilla consiste en asociar una fibra con alguna estructura algebraica dada a cada punto de un espacio base cualquiera. Al nuevo espacio obtenido de esta manera le proporcionamos una topología localmente homeomorfa al espacio base, asegurándonos además de que las operaciones de la estructura algebraica (en este caso, grupo abeliano) resulten ser continuas fibra a fibra bajo esta topología.

Ejemplo 1 (Gavilla Constante). *Definimos $\mathfrak{F}_x = G$ para todo $x \in X$, con G un grupo abeliano fijo. Asignamos a $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{F}_x$ la topología producto de la topología de X por la topología discreta de G. Es claro que se cumplen las dos condiciones necesarias para que $\mathfrak{F}$ sea, en efecto, una gavilla.*

2.2 Secciones de una Gavilla

A partir de la definición básica de gavilla construimos ahora funciones que son inversos locales de la proyección de $\mathfrak{F}$ en X, π. Estas funciones se llaman secciones de la gavilla y veremos que tienen una estructura algebraica natural, heredada de la construcción del espacio $\mathfrak{F}$.

Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla (de grupos abelianos, tal como se definió en la sección anterior) sobre el espacio topológico X, y sea U un subconjunto abierto de X. Una ***sección de $\mathfrak{F}$ (tomada) sobre U*** es una aplicación continua $s : U \rightarrow \mathfrak{F}$ tal que $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ o, lo que es lo mismo, $s(x) \in \mathfrak{F}_x$ para todo $x \in X$.

Definimos $\Gamma(U, \mathfrak{F})$ como el conjunto de secciones de $\mathfrak{F}$ sobre U. Si $s, t \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ su suma, $(s + t)(x) = s(x) + t(x)$, está bien definida.

Queda claro que $\pi \circ (s + t)$ es la identidad en U, y la continuidad de la función está garantizada por la condición 2 de la definición de gavilla de la sección anterior. Resulta entonces que $s + t$ es también una sección de $\mathfrak{F}$ sobre U. La existencia de un neutro y de un inverso continuos son garantizadas por la misma definición de gavilla, y la asociatividad y conmutatividad de la suma se deducen trivialmente a partir de las propiedades de la operación de grupo abeliano de cada $\mathfrak{F}_x$, por lo que $\Gamma(U, \mathfrak{F})$ es un grupo abeliano.

Si $U \subseteq V$ y $s \in \Gamma(V, \mathfrak{F})$ entonces su restricción a U, $s|_U \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$, lo que da origen a un homomorfismo natural, llamado ***homomorfismo de restricción de V a U***, $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathfrak{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathfrak{F})$.

Como π y s son homeomorfismos locales, si U es abierto en X, entonces $s(U)$ es abierto en $\mathfrak{F}$, luego si U corre sobre una base (de abiertos) de la topología de X el conjunto de los $s(U)$ forma una base de la topología de $\mathfrak{F}$. Este enunciado es equivalente a la condición de continuidad sobre π, es decir la primera condición de la definición de gavilla. Finalmente observamos que como consecuencia de esta misma condición, para todo $f \in \mathfrak{F}_x$ existe una sección s tal que $s(x) = f$, y si $s(x) = s'(x)$ entonces $s = s'$ en una vecindad de f. Estas dos propiedades básicas serán utilizadas frecuentemente a lo largo del texto, sin mayor comentario.

En particular se deduce de ellas que al tomar el orden filtrante dado por las vecindades de x y las aplicaciones transitivas dadas por los homomorfismos de restricción, ρ_U^V, $\mathfrak{F}_x$ es el límite inductivo de los distintos $\Gamma(U, \mathfrak{F})$. Es decir, que las clases de equivalencia formadas por las imágenes de los posibles $s(x)$ bajo ρ_U^V, tomando vecindades arbitrariamente pequeñas de x, coinciden con los elementos de la fibra $\mathfrak{F}_x$ (ver sección 1.3 o Kowalsky [5]).

Después de las observaciones anteriores podemos concluir que existe una relación natural entre las estructuras algebraicas puntuales, es decir las fibras $\mathfrak{F}_x$ y las estructuras algebraicas locales dadas por los grupos de secciones de $\mathfrak{F}$ definidas sobre abiertos de X, es decir los grupos $\Gamma(U, \mathfrak{F})$.

2.3 Construcción de Gavillas

Una vez que hemos visto que las fibras de la gavilla $\mathfrak{F}$ pueden ser concebidas como el límite inductivo de los grupos de secciones $\Gamma(U, \mathfrak{F})$, vamos a definir un procedimiento para construir gavillas a partir de grupos asociados a cada abierto U de X. Este procedimiento se usará con frecuencia para construir gavillas a partir de otras gavillas más simples.

Sea $\mathfrak{F}_U$ un grupo abeliano asociado a cada abierto $U \subseteq X$; para cada pareja de abiertos $U \subseteq V$ sea $\varphi_U^V : \mathfrak{F}_V \to \mathfrak{F}_U$ un homomorfismo tal que se cumpla que $\varphi_U^W = \varphi_U^V \circ \varphi_V^W$ si W es abierto y $U \subseteq V \subseteq W$. A $(\mathfrak{F}_U, \varphi_U^V)$ en ocasiones se le llama un *sistema transitivo.*

Se dice que el sistema $(\mathfrak{F}_U, \varphi_U^V)$ *define* a la siguiente gavilla:

1. $\mathfrak{F}_x = \lim_{x \in U} \mathfrak{F}_U$, $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{F}_x$, junto con:

2. la topología en $\mathfrak{F}$ que tiene como base al conjunto de los $[t, U]$,

donde $\lim_{x \in U}$ es el límite inductivo de los $\mathfrak{F}_U$ al tomar el orden filtrante de las vecindades de x, y cada $[t, U] = \{\varphi_x^U(t) \mid x \in U\}$, con $U \subseteq X$ abierto, $t \in \mathfrak{F}_U$, y φ_x^U el homomorfismo canónico: $\mathfrak{F}_U \to \mathfrak{F}_x$ definido al tomar el límite inductivo (ver sección 1.3 o Kowalsky [5]).

De acuerdo con la topología que hemos definido para $\mathfrak{F}$ tenemos que la base de las vecindades de $f \in \mathfrak{F}_x$ es el conjunto de todos los $[t, U]$ tales que $\varphi_x^U(t) = f$.

Sea ahora $f \in \mathfrak{F}_x$ fijo y sea $t \in \mathfrak{F}_U$ un representante de la clase de equivalencia de f. Entonces la proyección π es evidentemente biyectiva en [t,U], puesto que hay un límite para cada fibra, que corresponde a cada $x \in U$. Además, para cada $V \subseteq U$ abierto con $x \in V$, la imagen bajo π de la vecindad abierta $[\varphi_V^U(t), V]$ es igual a V que es abierto en X. Así, π es un homeomorfismo local, y $\mathfrak{F}$ cumple la primera condición de la definición de gavilla (ver Sección 2.1).

Tomando vecindades suficientemente pequeñas se demuestra directamente que $f \mapsto -f$ y $(f,g) \mapsto f+g$ son funciones continuas. Tomemos por ejemplo el caso de la operación aditiva del grupo: tomemos un elemento de la base de vecindades abiertas de $\mathfrak{F}$, digamos el conjunto $[s,U]$ según la definición anterior, y denotemos por σ la operación: $(f,g) \mapsto f+g$. Para demostrar que σ es continua basta probar que $\sigma^{-1}([s,U])$ es un conjunto abierto en $\mathfrak{F}+\mathfrak{F}$ con la topología producto de $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}$. En particular veremos que:

$$\sigma^{-1}([s,U]) = \bigcup_{a+b=\varphi^U_W(s)} [a,W]+[b,W]$$

donde $W \subseteq U$ y la unión corre sobre todos los elementos $a,b \in \mathfrak{F}_W$ tales que $a+b=\varphi^U_W(s)$.

$\supseteq$] Sea $(\alpha,\beta) \in \bigcup_{a+b=\varphi^U_W(s)}[a,W]+[b,W]$, esto quiere decir que (α,β) pertenece a algún elemento de la unión, por lo que podemos tomar $a,b \in \mathfrak{F}_W$ fijos, tales que $(\alpha,\beta) \in [a,W]+[b,W]$. Entonces por definición $(\alpha,\beta) = (\varphi^W_x(a), \varphi^W_x(b))$ para algún $x \in U$ fijo. Al aplicar la operación del grupo $\mathfrak{F}_x$ tenemos que $\sigma(\alpha,\beta) = \varphi^W_x(a)+\varphi^W_x(b) = \varphi^W_x(a+b)$, pero $a+b = \varphi^U_W(s)$ por lo que $\sigma(\alpha,\beta) \in [s,U]$ y entonces $(\alpha,\beta) \in \sigma^{-1}([s,U])$.

$\subseteq$] Sea ahora $(\gamma,\delta) \in \mathfrak{F}+\mathfrak{F}$ tal que $(\gamma,\delta) \in \sigma^{-1}([s,U])$. Evidentemente $\sigma(\gamma,\delta) \in [s,U]$ por lo que $\gamma+\delta = \varphi^U_x(s)$ para algún $x \in U$. Restringiéndonos a una vecindad V de x lo suficientemente pequeña podemos elegir representantes $a,b \in \mathfrak{F}_U$ tales que $\varphi^V_x(a) = \gamma$, $\varphi^V_x(b) = \delta$. Entonces tenemos que $\varphi^V_x(a+b) = \gamma+\delta = \varphi^U_x(s)$. Por la definición de límite inductivo esto implica que existe una vecindad W de x con $W \subseteq V$ tal que $\varphi^V_W(a+b) = \varphi^U_W(s)$. Así, tenemos que $(\gamma,\delta) \in [\varphi^V_W(a),W]+[\varphi^V_W(b),W]$ lo cual demuestra la contención en vista de la igualdad anterior.

Utilizando un procedimiento análogo (aunque más simple) podemos verificar que la operación $f \mapsto -f$ también es continua por lo que $\mathfrak{F}$ satisface la segunda condición de la definición y es propiamente una gavilla.

Si tomamos $t \in \mathfrak{F}_U$, la aplicación continua $x \mapsto \varphi^U_x(t)$ es un inverso local de π y, por lo tanto, un elemento de $\Gamma(U,\mathfrak{F})$, es decir, una sección de la gavilla que hemos construido. Esta aplicación define un homomorfismo canónico $\iota : \mathfrak{F}_U \to \Gamma(U,\mathfrak{F})$ cuyas propiedades estudiaremos a continuación:

Proposición 1. *El homomorfismo canónico $\iota : \mathfrak{F}_U \to \Gamma(U,\mathfrak{F})$ es inyectivo si y sólo si se cumple la siguiente afirmación:*

Para todo $t \in \mathfrak{F}_U$ tal que exista una cubierta abierta de U, $\{U_i\}_{i\in I}$ que cumpla que $\varphi^U_{U_i}(t) = 0$ para todo $i \in I$, se tiene que $t = 0$.

Demostración. $\Rightarrow$] Sea $t \in \mathfrak{F}_U$ y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U tal que $\varphi^U_{U_i}(t) = 0$ para todo $i \in I$, entonces $\varphi^U_x(t) = \varphi^{U_i}_x \circ \varphi^U_{U_i}(t) = 0$ para todo $x \in U$. Por lo tanto $\varphi^U_x(t)$ es idénticamente cero en U y la sección $\iota(t)$ definida por $x \mapsto \varphi^U_x(t)$ también es cero. Finalmente usamos como hipótesis que ι es inyectiva y concluimos que $t = 0$.
$\Leftarrow$] Supongamos que $\iota(t) = 0$, con $t \in \mathfrak{F}_U$. Entonces $\varphi^U_x(t) = 0$ para todo $x \in U$. Por definición del límite inductivo, $t = 0$ en una vecindad de x que denotaremos U_x. Así tenemos que $\{U_x\}_{x\in X}$ es una cubierta abierta de U que cumple que $\varphi^U_{U_x}(t) = 0$ para todo x, así que $t = 0$ por hipótesis, y ι es inyectivo. □

Proposición 2. *Sea $U \subseteq X$ abierto, y supongamos que $\iota : \mathfrak{F}_V \to \Gamma(V, \mathfrak{F})$ es inyectivo para todo $V \subseteq U$ abierto. Entonces $\iota : \mathfrak{F}_U \to \Gamma(U, \mathfrak{F})$ es sobre si y sólo si se cumple la siguiente afirmación:*
Para toda cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y para todo sistema $\{t_i\}_{i\in I}$ con $t_i \in \mathfrak{F}_{U_i}$ tal que $\varphi^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i) = \varphi^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j)$ para todo $i, j \in I$, existe $t \in \mathfrak{F}_U$ tal que $\varphi^U_{U_i}(t) = t_i$ para todo $i \in I$.

Demostración. $\Rightarrow$] Consideremos un sistema $\{t_i\}$ como en el enunciado de la proposición. Cada t_i define una sección $s_i = \iota(t_i)$ sobre U_i, con $s_i = s_j$ sobre $U_i \cap U_j$ por definición de ι. Entonces podemos construir una sección s sobre todo U que coincide con las s_i localmente. Como $\iota : \mathfrak{F}_U \to \Gamma(U, \mathfrak{F})$ es sobre, existe $t \in \mathfrak{F}_U$ tal que $\iota(t) = s$. Si $\varphi^U_{U_i}(t) = t'_i$ la sección sobre U_i definida por t'_i tiene que ser s_i, puesto que coincide localmente con s, pero ι es inyectivo en U_i y entonces necesariamente $t_i = t'_i$.
$\Leftarrow$] Sea ahora $s \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$. Por las propiedades de las secciones de una gavilla (ver Sección 2.2) y por ser cada $\mathfrak{F}_x$ límite inductivo de los $\mathfrak{F}_U$, sabemos que existen una cubierta abierta de U, $\{U_i\}$, y elementos $t_i \in \mathfrak{F}_{U_i}$ con $\iota(t_i) = s|_{U_i}$. Evidentemente $\varphi^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i)$ y $\varphi^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j)$ definen la misma sección sobre $U_i \cap U_j$ puesto que ambas coinciden localmente con s. Entonces, por la inyectividad de ι, $\varphi^{U_i}_{U_i\cap U_j}(t_i) = \varphi^{U_j}_{U_i\cap U_j}(t_j)$. Por hipótesis existe $t \in \mathfrak{F}_U$ tal que $\varphi^U_{U_i}(t) = t_i$ para todo i, y por lo tanto $\iota(t)$ coincide con s en cada U_i y por ende en todo U; es decir que $\iota(t) = s$, lo que demuestra que ι es sobre. □

Podemos resumir estos resultados como sigue: dado un sistema $(\mathfrak{F}_U, \varphi^V_U)$ que define a una gavilla $\mathfrak{F}$, podemos hacernos dos preguntas. La primera consiste en determinar si un elemento $t \in \mathfrak{F}_U$ es idénticamente cero si se anula localmente en todas partes (Proposición 1). La segunda pregunta es averiguar si podemos construir un elemento global siempre que tengamos elementos locales que coinciden en las intersecciones de los abiertos donde están definidos (Proposición 2). Si la respuesta a ambas preguntas es afirmativa entonces existe una biyección canónica entre los grupos $\mathfrak{F}_U$ y $\Gamma(U,\mathfrak{F})$. En particular tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3. *Si $\mathfrak{F}$ es una gavilla de grupos abelianos sobre X, la gavilla definida por el sistema $(\Gamma(U,\mathfrak{F}),\rho_U^V)$ es canónicamente isomorfa a $\mathfrak{F}$.*

Demostración. Esto se deduce trivialmente a partir de las propiedades de las secciones de una gavilla (ver Sección 2.2) y de las dos proposiciones anteriores. □

Con base en lo anterior se deduce que aunque diferentes sistemas $(\mathfrak{F}_U,\varphi_U^V)$ puedan definir la misma gavilla, si requerimos que se satisfagan las condiciones de las Proposiciones 1 y 2 entonces todos los sistemas que definan a una gavilla $\mathfrak{F}$ serán necesariamente isomorfos al sistema $(\Gamma(U,\mathfrak{F}),\rho_U^V)$.

En este punto vale la pena hacer referencia a la definición de gavilla utilizada en la mayoría de los textos contemporáneos (ver Hartshorne [2]). Lo que se hace comúnmente es comenzar con un sistema transitivo y llamarle *pregavilla*. Si además el sistema transitivo cumple con las condiciones de las Proposiciones 1 y 2, entonces se le llama gavilla. Se deduce también que toda pregavilla tiene una gavilla asociada, y que la gavilla asociada a una gavilla es ella misma.

A partir de la construcción llevada a cabo en esta sección, y en particular de la Proposición 3 se comprende inmediatamente que las dos definiciones son equivalentes. Tenemos por un lado una colección de grupos definidos sobre los abiertos del espacio base, y homomorfismos transitivos que relacionan estos grupos; estos sistemas se pueden manipular fácilmente y serán utilizados frecuentemente para definir unas gavillas a partir de otras. Por el otro lado tenemos asociado a este sistema (de manera biunívoca, siempre y cuando se cumplan las dos condiciones anteriores) un espacio topológico con operaciones algebraicas continuas fibra a fibra que nos permitirá ir elaborando un aparato teórico bastante sofisticado.

Ejemplo 2. *Sea G un grupo abeliano y $\mathfrak{F}_U = \{f : U \to G\}$ para cada $U \subseteq X$ abierto. Definimos $\varphi_U^V : \mathfrak{F}_V \to \mathfrak{F}_U$ por la fórmula $\varphi_U^V(f) = f|_U$. Claramente tenemos un sistema transitivo $(\mathfrak{F}_U,\varphi_U^V)$ que define a una gavilla $\mathfrak{F}$. A $\mathfrak{F}$ se le llama* gavilla de gérmenes de funciones valuadas en G. *Por las propiedades básicas de funciones sabemos que si f se anula localmente en todas partes debe ser idénticamente cero, y si tenemos funciones definidas localmente que coinciden en las intersecciones podemos pegarlas y construir una función global. Esto quiere decir que se satisfacen las condiciones de las Proposiciones 1 y 2, y por lo tanto cada $\mathfrak{F}_U$ es isomorfo a $\Gamma(U,\mathfrak{F})$.*

2.4 Pegado de Gavillas

En esta sección estudiaremos el procedimiento para construir gavillas sobre un subespacio cerrado de X, o a partir de gavillas definidas sobre los elementos de una cubierta de X.

Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X, y sea $U \subseteq X$. El conjunto $\pi^{-1}(U) \subseteq \mathfrak{F}$ con la topología inducida por $\mathfrak{F}$ constituye una gavilla sobre U, ya que los requerimientos de continuidad para π y las operaciones de grupo se preservan bajo la topología inducida. Esta nueva gavilla se conoce como la *gavilla inducida por $\mathfrak{F}$ sobre U* y se denota por $\mathfrak{F}(U)$ o, cuando no hay posibilidad de confusión, simplemente por $\mathfrak{F}$.

De modo inverso se puede construir una gavilla sobre X a partir de gavillas sobre una cubierta abierta de X:

Proposición 4. *Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de X y, para cada $i \in I$ sea $\mathfrak{F}_i$ una gavilla sobre U_i; para cada $i, j \in I$ sea θ_{ij} un isomorfismo de $\mathfrak{F}_j(U_i \cap U_j)$ sobre $\mathfrak{F}_i(U_i \cap U_j)$. Supongamos además que $\theta_{ij} \circ \theta_{jk} = \theta_{ik}$ para todo $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ y para todo $i, j, k \in I$.*

Entonces existe una gavilla $\mathfrak{F}$ sobre X y para cada $i \in I$ existe un isomorfismo η_i de $\mathfrak{F}(U_i)$ sobre $\mathfrak{F}_i$ tal que $\theta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1}$ para todo $x \in U_i \cap U_j$. Además la gavilla $\mathfrak{F}$ y los isomorfismos η_i son únicos salvo isomorfismo.

Demostración. Si existen $\mathfrak{F}'$ y η_i' que satisfacen la condición anterior entonces $\mathfrak{F}(U_i)$ y $\mathfrak{F}'(U_i)$ son isomorfos como gavillas, es decir como espacios topológicos (en particular: $\mathfrak{F}(U_i) \overset{\eta_i}{\cong} \mathfrak{F}_i \overset{\eta_i'^{-1}}{\cong} \mathfrak{F}'(U_i)$). Pero $\mathfrak{U}$ es una cubierta de X por lo que al recorrer U_i tenemos que $\mathfrak{F}$ es isomorfo a $\mathfrak{F}'$, lo que establece la unicidad.

Para construir $\mathfrak{F}$ utilizaremos el siguiente sistema transitivo:

Si $U \subseteq X$ es abierto, $\mathfrak{F}_U$ es el grupo formado por conjuntos de la forma $\{s_k\}_{k\in I}$, con $s_k \in \Gamma(U \cap U_k, \mathfrak{F}_k)$, con $s_k = \theta_{kj}(s_j)$ en $U \cap U_j \cap U_k$. Es claro que $\mathfrak{F}_U$ es un grupo abeliano bajo las operaciones de los grupos de secciones de cada $\mathfrak{F}_k$, y están bien definido gracias a los isomorfismos θ_{ij}.

Si $U \subseteq V$ definimos los homomorfismos φ_U^V por restricción de las secciones que componen los $\{s_k\}$. Tenemos entonces un sistema transitivo que define a una gavilla $\mathfrak{F}$.

Si $U \subseteq U_i$ la aplicación $\{s_k\} \mapsto s_i$ es un isomorfismo de $\mathfrak{F}_U$ sobre $\Gamma(U, \mathfrak{F}_i)$. Al pasar al límite inductivo, esta aplicación induce el isomorfismo deseado, $\eta_i : \mathfrak{F}(U_i) \to \mathfrak{F}_i$, que por definición de los $\{s_k\}$ satisface que $\theta_{ij} = \eta_i \circ \eta_j^{-1}$ sobre $U_i \cap U_j$. $\square$

Se dice que obtenemos la gavilla $\mathfrak{F}$ por el *pegado* de las gavillas $\mathfrak{F}_i$ a través de los isomorfismos θ_{ij}.

2.5 Concentración y Extensión de una Gavilla

Antes de proceder a estudiar el comportamiento algebraico de las gavillas veremos en esta sección que es posible extender una gavilla fácilmente por medio de fibras nulas.

Sean X un espacio topológico, Y un subespacio cerrado de X y $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X. Se dice que $\mathfrak{F}$ está ***concentrada sobre*** Y o que es ***nula fuera de*** Y si $\mathfrak{F}_x = 0$ para todo $x \in X - Y$.

Proposición 5. *Si $\mathfrak{F}$ está concentrada sobre Y entonces el homomorfismo*

$$\rho_Y^X : \Gamma(X, \mathfrak{F}) \to \Gamma(Y, \mathfrak{F}(Y))$$

es biyectivo.

Demostración. Si una sección de $\mathfrak{F}$ tomada sobre todo X se anula en Y, entonces también se anula sobre $X - Y$ porque $\mathfrak{F}_x = 0$ para todo $x \in X - Y$; por lo tanto ρ_Y^X es inyectivo.

Sea ahora $s \in \Gamma(Y, \mathfrak{F}(Y))$. Podemos extender s a todo X definiendo $s(x) = 0$ para todo $x \in X - Y$. Evidentemente la aplicación $x \mapsto s(x)$ es continua en el abierto $X - Y$, puesto que es constante.

Si $x \in Y$, $s(x) \in \mathfrak{F}(Y)_x = \mathfrak{F}_x$, por lo que debe existir $s' \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ para alguna vecindad de x, U, tal que $s(x) = s'(x)$. Como además s es una sección sobre Y por hipótesis, sabemos que existe una vecindad de x, $V \subseteq U$, tal que $s(y) = s'(y)$ para todo $y \in V \cap Y$, pero como $\mathfrak{F}_y = 0$ si $y \notin Y$, tenemos que $s(y) = s'(y)$ para todo $y \in V$. Como $s = s'$ en V hemos probado que s es continua en V, por lo que es continua en todo Y, y por lo tanto en todo X. Es decir que $s \in \Gamma(X, \mathfrak{F})$ y ρ_Y^X es sobre, y por lo tanto biyectivo. □

A continuación veremos que la gavilla $\mathfrak{F}(Y)$ determina sin ambigüedad a la gavilla $\mathfrak{F}$:

Proposición 6. *Sea Y un subespacio cerrado de X, y sea $\mathfrak{G}$ una gavilla sobre Y. Definimos $\mathfrak{F}_x = \mathfrak{G}_x$ si $x \in Y$, y $\mathfrak{F}_x = 0$ si $x \in X - Y$. Sea $\mathfrak{F} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{F}_x$.*

Entonces existe una sola estructura de gavilla para $\mathfrak{F}$ tal que $\mathfrak{F}(Y) = \mathfrak{G}$.

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto. Si $s \in \Gamma(U \cap Y, \mathfrak{G})$ podemos extender s definiendo $s(x) = 0$ para todo $x \in U - Y$. De esta manera obtenemos un grupo de aplicaciones de U en $\mathfrak{F}$ que llamaremos $\mathfrak{F}_U$.

Supongamos ahora que $\mathfrak{F}$ tiene una estructura de gavilla tal que $\mathfrak{F}(Y) = \mathfrak{G}$, entonces por la Proposición 5 tenemos las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_U &= \Gamma(U \cap Y, \mathfrak{G}) && \text{(por construcción)}\\
&= \Gamma(U \cap Y, \mathfrak{F}(U \cap Y)) && \text{(por hipótesis)}\\
&= \Gamma(U, \mathfrak{F}) && \text{(Proposición 5)}
\end{aligned}$$

Esto se cumple para todo $U \subseteq X$ por lo que, por la Proposición 3, al poder expresar los grupos de secciones de $\mathfrak{F}$ de forma explícita garantizamos la unicidad de la estructura de gavilla.

Para mostrar la existencia de la estructura requerida, utilizamos la gavilla $\mathfrak{F}$ definida por el sistema $(\mathfrak{F}_U, \rho_U^V)$ con $\rho_U^V : \mathfrak{F}_V \to \mathfrak{F}_U$ definido como el homomorfismo usual de restricción, dados $U \subseteq V$. En este caso tenemos que por las Proposiciones 1 y 2 y por la construcción de los $\mathfrak{F}_U$, $\Gamma(U, \mathfrak{F}) \cong \mathfrak{F}_U \cong \Gamma(U \cap Y, \mathfrak{G})$, y por lo tanto $\mathfrak{F}(Y) = \mathfrak{G}$. $\square$

Se dice que $\mathfrak{F}$ es la gavilla obtenida al *extender $\mathfrak{G}$ por cero afuera de Y*. Esta gavilla se denota por $\mathfrak{G}^Y$, o incluso por $\mathfrak{G}$ cuando no hay posibilidad de confusión.

2.6 Gavillas de Anillos y de Módulos

Tras haber formulado las definiciones básicas para el caso de gavillas de grupos abelianos, ahora mostraremos cómo se puede seguir un procedimiento análogo para construir gavillas que tengan como fibras otras estructuras algebraicas tales como anillos o módulos.

Una *gavilla de anillos*, $\mathfrak{A}$, es una gavilla de grupos abelianos tal como se definió en la Sección 2.1, pero que además cumple que cada $\mathfrak{A}_x$ tiene estructura de anillo. Como condición adicional requeriremos que la función $(f, g) \mapsto fg$ sea continua de $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}$. Asimismo supondremos que cada $\mathfrak{A}_x$ tiene un neutro multiplicativo que varía continuamente con x. De aquí en adelante asumiremos que todos los anillos tienen unidad y que todos los homomorfismos de anillos son unitarios.

Si $\mathfrak{A}$ es una gavilla de anillos, entonces $\Gamma(U, \mathfrak{A})$ es también un anillo, y la operación de restricción $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathfrak{A}) \to \Gamma(U, \mathfrak{A})$ es un homomorfismo de anillos.

Procediendo a la inversa repetiremos el procedimiento de construcción de gavillas expuesto en la Sección 2.3: si tenemos anillos $\mathfrak{A}_U$ asociados a cada abierto U, y homomorfismos $\varphi_U^V : \mathfrak{A}_V \to \mathfrak{A}_U$ tales que $\varphi_U^V \circ \varphi_V^W = \varphi_U^W$ siempre que $U \subseteq V \subseteq W$, entonces la gavilla definida por el sistema transitivo $(\mathfrak{A}_U, \varphi_U^V)$ es una gavilla de anillos, ya que se cumplen las condiciones de la definición de gavilla, incluyendo la continuidad de la multiplicación del anillo según se definió al comienzo de esta sección. Continuando con la analogía con la Sección 2.3 tenemos que si A es un anillo, entonces la gavilla de gérmenes de funciones valuadas en A es una gavilla de anillos.

Sea $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos. Una gavilla $\mathfrak{F}$ es una *gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos* si cada $\mathfrak{F}_x$ tiene estructura de $\mathfrak{A}_x$-módulo (izquierdo y con unidad), y se cumple que la operación $(a, f) \mapsto (af)$ es continua de $\mathfrak{A} + \mathfrak{F}$ en $\mathfrak{F}$ (donde $\mathfrak{A} + \mathfrak{F}$ es el subconjunto de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{F}$ formado por las parejas (a, f) tales que $\pi(a) = \pi(f)$.)

Igual que antes tenemos que si $\mathfrak{F}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos entonces $\Gamma(U, \mathfrak{F})$ es un $\Gamma(U, \mathfrak{A})$-módulo. Inversamente se tiene que si $\mathfrak{A}$ está definida por el sistema transitivo $(\mathfrak{A}_U, \varphi_U^V)$ y $\mathfrak{F}$ es una gavilla de grupos abelianos definida por el sistema $(\mathfrak{F}_U, \psi_U^V)$ donde cada $\mathfrak{F}_U$ es un $\mathfrak{A}_U$-módulo y además $\psi_U^V(af) = \varphi_U^V(a)\psi_U^V(f)$, entonces $\mathfrak{F}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos.

Finalmente observamos que podemos considerar a toda gavilla de grupos abelianos como una gavilla de $\mathbb{Z}$-módulos, donde $\mathbb{Z}$ es la gavilla constante isomorfa en cada fibra al anillo de los números enteros.

De este modo se justifica que de aquí en adelante nos aboquemos casi por completo al estudio de las gavillas de módulos.

2.7 Subgavilla y Gavilla Cociente

Hasta el momento hemos discutido las propiedades topológicas esenciales de las gavillas, incluyendo el procedimiento para construirlas a partir de sistemas transitivos sencillos de describir, y hemos introducido la gavilla de módulos como nuestro objeto básico de estudio. Ahora comenzaremos a describir las propiedades algebraicas que una gavilla hereda a partir de la estructura de sus fibras.

Sean $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos y $\mathfrak{F}$ una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos. Si para todo $x \in X$ sucede que $\mathfrak{G}_x \subseteq \mathfrak{F}_x$ entonces diremos que el subespacio $\mathfrak{G} = \bigsqcup_{x\in X} \mathfrak{G}_x$ es una *subgavilla* de $\mathfrak{F}$ si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. $\mathfrak{G}_x$ es un sub-$\mathfrak{A}_x$-módulo de $\mathfrak{F}_x$ para todo $x \in X$, y

2. $\mathfrak{G}$ es un subconjunto abierto de $\mathfrak{F}$.

Hemos visto en la Sección 2.3 que los conjuntos de la forma $[t, U]$ con U abierto y $t \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ forman una base para la topología de $\mathfrak{F}$, por lo que la condición de que $\mathfrak{G}$ sea abierto en $\mathfrak{F}$ se puede expresar equivalentemente de la siguiente manera:

2'. Si $s \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ y $x \in U$ con $s(x) \in \mathfrak{G}$, entonces existe una vecindad de x, $V \subseteq U$, tal que $s(y) \in \mathfrak{G}$ para todo $y \in V$.

Claramente la proyección sobre X continúa siendo un homeomorfismo local, y las operaciones de suma, inverso y producto por elementos del anillo siguien siendo continuas en $\mathfrak{G}$, por lo que este subespacio es también una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos.

Sea $\mathfrak{G}$ una subgavilla de $\mathfrak{F}$. Definimos $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{F}_x/\mathfrak{G}_x$ para todo $x \in X$, y $\mathfrak{H} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{H}_x$ con la topología cociente de $\mathfrak{F}$.

Podemos definir una función $\theta : \mathfrak{H} \to \mathfrak{F}$ que asigne a cada elemento de $\mathfrak{H}_x$ un representante en $\mathfrak{F}_x$ de manera continua; es decir que si $\theta(\bar{f}) = s(x)$ con $s \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ y $x \in U$, entonces $\theta(\bar{g}) = s(y)$ para todo $\bar{g}$ en una vecindad de x, lo cual es posible por la topología de $\mathfrak{G}$ heredada de la de $\mathfrak{F}$. De este modo si nos restringimos a vecindades lo suficientemente pequeñas resulta que θ es un homeomorfismo.

Entonces la proyección $\bar{\pi} : \mathfrak{H} \to X$ es una composición de homeomorfismos locales, a saber: $\bar{\pi} = \pi \circ \theta$, con $\pi : \mathfrak{F} \to X$. Del mismo modo vemos que las operaciones de suma, inverso y producto en $\mathfrak{H}$ son composiciones de funciones continuas (el homeomorfismo θ y la operación correspondiente en $\mathfrak{F}$) por lo que $\mathfrak{H}$ cumple las condiciones para ser una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos, llamada la *gavilla cociente de* $\mathfrak{F}$ *por* $\mathfrak{G}$ y denotada por $\mathfrak{F}/\mathfrak{G}$.

A continuación utilizaremos el procedimiento de construcción expuesto en la Sección 2.3. Para cada U abierto en X definimos el $\Gamma(U, \mathfrak{A})$-módulo $\mathfrak{H}_U = \Gamma(U, \mathfrak{F})/\Gamma(U, \mathfrak{G})$; si $U \subseteq V$ definimos homomorfismos $\varphi_U^V : \mathfrak{H}_V \to \mathfrak{H}_U$ por medio de los homomorfismos inducidos en los módulos cociente por los homomorfismos de restricción usuales $\rho_U^V : \Gamma(V, \mathfrak{F}) \to \Gamma(U, \mathfrak{F})$. Si dos secciones son equivalentes módulo $\Gamma(U, \mathfrak{G})$, su equivalencia se preserva al tomar el límite inductivo, por lo que la gavilla definida por el sistema transitivo $(\mathfrak{H}_U, \varphi_U^V)$ es precisamente la gavilla cociente $\mathfrak{H}$ descrita anteriormente.

A partir de las definiciones anteriores, observamos que si s es una sección de $\mathfrak{H}$ sobre una vecindad de $x \in X$, entonces exise una sección, t, de $\mathfrak{F}$ sobre alguna vecindad suficientemente pequeña de x, tal que la clase de equivalencia de $t(y)$ módulo $\mathfrak{G}_y$ sea igual a $s(y)$ en esta vecindad de x. Sin embargo es evidente que este hecho no se puede garantizar para vecindades arbitrarias. Así, sólo tenemos la siguiente secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{G}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{F}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathfrak{H})$$

2.8 Homomorfismos

Después de mostrar en detalle los objetos de la categoría de gavillas de $\mathfrak{A}$–módulos que estamos definiendo, sólo nos resta mostrar ahora cuáles son los morfismos entre estos objetos, así como exhibir su comportamiento básico. Se verá que en gran medida los homomorfismos de gavillas heredan las propiedades de los homomorfismos de módulos que los componen.

Sea $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos, y sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ gavillas de $\mathfrak{A}$–módulos. Un *$\mathfrak{A}$-homomorfismo de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$* es la asignación para cada $x \in X$ de un $\mathfrak{A}_x$–homomorfismo, $\varphi_x : \mathfrak{F}_x \to \mathfrak{G}_x$, tal que la función $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ definida como la unión de todos los φ_x sea continua. Como sabemos que las secciones de una gavilla son homeomorfismos locales (ver Sección 2.2), la condición de continuidad sobre φ es equivalente a requerir que para todo $s \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$, la función $x \mapsto \varphi_x(s(x))$ sea una sección de $\mathfrak{G}$ sobre U, denotada por $\varphi(s)$ o por $\varphi \circ s$.

Si $\mathfrak{G}$ es una subgavilla de $\mathfrak{F}$, la inclusión $\mathfrak{G} \to \mathfrak{F}$ y la proyección $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}/\mathfrak{G}$ son ejemplos de homomorfismos, según se vio en la sección anterior.

Proposición 7. *Sea φ un $\mathfrak{A}$-homomorfismo de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$. Para cada $x \in X$ sean $\mathfrak{K}_x$ e $\mathfrak{I}_x$ el núcleo y la imagen del $\mathfrak{A}_x$-homomorfismo φ_x, respectivamente. Entonces $\mathfrak{K} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{K}_x$ e $\mathfrak{I} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{I}_x$ son subgavillas de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$, respectivamente, y φ define un isomorfismo de $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ sobre $\mathfrak{I}$.*

Demostración. Como φ_x es un $\mathfrak{A}_x$–homomorfismo, sabemos que $\mathfrak{K}_x$ e $\mathfrak{I}_x$ son sub–$\mathfrak{A}_x$–módulos de $\mathfrak{F}_x$ y $\mathfrak{G}_x$ respectivamente, y que φ_x induce un isomorfismo de $\mathfrak{F}_x/\mathfrak{K}_x$ sobre $\mathfrak{I}_x$.

Por otro lado tenemos que si s es una sección local de $\mathfrak{F}$ tal que $s(x) \in \mathfrak{K}_x$ entonces $\varphi \circ s(x) = 0$, pero $\varphi \circ s$ es una sección sobre $\mathfrak{G}$ por lo que $\varphi \circ s(y) = 0$ para todo y en una vecindad de x. Esto implica que $s(y) \in \mathfrak{K}_y$ en esta vecindad de x, lo que muestra que $\mathfrak{K}$ es abierto en $\mathfrak{F}$, y por lo tanto una subgavilla.

De forma similar tenemos que si t es una sección local de $\mathfrak{G}$ tal que $t(x) \in \mathfrak{I}_x$, entonces existe una sección local de $\mathfrak{F}$, s, tal que $\varphi \circ s(x) = t(x)$, por lo que $\varphi \circ s = t$ en una vecindad de x, es decir que $t(y) \in \mathfrak{I}_y$ en esta vecindad, lo que muestra que $\mathfrak{I}$ es una subgavilla de $\mathfrak{G}$, isomorfa a la gavilla cociente $\mathfrak{F}/\mathfrak{K}$ por el isomorfismo inducido por cada φ_x. □

La gavilla $\mathfrak{K}$ se llama el *núcleo* de φ y se denota por $\mathrm{Ker}(\varphi)$. La gavilla $\mathfrak{I}$ se llama la ***imagen*** de φ y se denota por $\mathrm{Im}(\varphi)$. La gavilla $\mathfrak{G}/\mathfrak{I}$ se llama el ***conúcleo*** de φ y se denota por $\mathrm{Coker}(\varphi)$.

Un homomorfismo φ es ***inyectivo*** si cada φ_x es inyectivo o, lo que es lo mismo, si $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$. φ es ***sobre*** si cada φ_x es sobre o, equivalentemente, si $\mathrm{Coker}(\varphi) = 0$. φ es ***biyectivo*** si es a la vez inyectivo y sobre, en cuyo caso sabemos por la proposición anterior que se trata de un isomorfismo de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathfrak{G}$, y que su inverso φ^{-1} también es un isomorfismo.

Todas las definiciones y resultados conocidos para homomorfismos de módulos tienen su equivalente en el caso de homomorfismos de gavillas de módulos. Por ejemplo una secuencia de homomorfismos es ***exacta*** si la imagen de cada homomorfismo es el núcleo del siguiente homomorfismo en la secuencia. Si $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ es un homomorfismo, entonces las siguientes secuencias son exactas:

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \quad \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \quad \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0. \end{array}$$

Si φ es un $\mathfrak{A}$–homomorfismo de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$, entonces la función $s \mapsto \varphi \circ s$ es evidentemente un $\Gamma(U, \mathfrak{A})$–homomorfismo de $\Gamma(U, \mathfrak{F})$ a $\Gamma(U, \mathfrak{G})$.

Inversamente, si $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ están definidas por los sistemas transitivos $(\mathfrak{A}_U, \eta_U^V)$, $(\mathfrak{F}_U, \psi_U^V)$ y $(\mathfrak{G}_U, \chi_U^V)$ respectivamente, y asignamos para cada $U \subseteq X$ abierto un $\mathfrak{A}_U$–homomorfismo $\varphi_U : \mathfrak{F}_U \to \mathfrak{G}_U$ tal que $\chi_U^V \circ \varphi_V = \varphi_U \circ \psi_U^V$ siempre que $U \subseteq V$, se tiene que al pasar al límite inductivo definido por el orden filtrante de las vecindades de X, los φ_U definen un $\mathfrak{A}$–homomorfismo, $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$. Para comprobar esta afirmación basta verificar dos cosas: en primer lugar la restricción de φ a una fibra $\mathfrak{F}_x$ está bien definida como $\mathfrak{A}_x$–homomorfismo gracias a la condición especial de transitividad que hemos requerido, y por otra parte si $[t, U]$ es una vecindad de $\mathfrak{G}$ como se definió en la Sección 2.3 entonces su imagen inversa bajo φ es precisamente $[\varphi_U^{-1}(t), U]$, que es abierto en $\mathfrak{F}$ lo que muestra que φ es continua.

2.9 Suma Directa de dos Gavillas

En esta sección continuamos extendiendo las propiedades conocidas de los módulos a las gavillas de módulos, comenzando por el caso de la suma directa, que no presenta ninguna complicación especial.

Sean $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos, y $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ gavillas de $\mathfrak{A}$–módulos. Para todo $x \in X$ está bien definido el $\mathfrak{A}_x$–módulo $\mathfrak{F}_x \oplus \mathfrak{G}_x$, es decir la suma directa de $\mathfrak{F}_x$ y $\mathfrak{G}_x$. Un elemento de $\mathfrak{F}_x \oplus \mathfrak{G}_x$ es una pareja (f, g) tal que $f \in \mathfrak{F}_x$ y $g \in \mathfrak{G}_x$.

Definimos ahora $\mathfrak{H} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{F}_x \oplus \mathfrak{G}_x$, y lo identificamos con el subconjunto del producto topológico $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ tal que $(f, g) \in \mathfrak{H}$ si y sólo si $\pi(f) = \pi(g)$ (comparar con la definición provisional de $\mathfrak{F}+\mathfrak{F}$ utilizada en la Sección 2.1). Al proporcionar a $\mathfrak{H}$ la topología inducida por la topología producto de $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ podemos verificar inmediatamente que posee una estructura natural de gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos. Si fijamos $f \in \mathfrak{F}$ y variamos g a lo largo de una vecindad de $\mathfrak{G}$ donde π sea homeomorfismo sobre X, y luego repetimos el procedimiento para g fija y f variable, vemos que para vecindades suficientemente pequeñas, la proyección π es un homeomorfismo de $\mathfrak{H}$ sobre X. La continuidad de las operaciones de módulo se preserva a partir de las operaciones en $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$.

A $\mathfrak{H}$ se le llama la *suma directa de* $\mathfrak{F}$ *y* $\mathfrak{G}$ y se denota por $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$.

Por definición de sección de una gavilla (ver Sección 2.2), toda sección de $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ tomada sobre un abierto $U \subseteq X$ tiene la forma $x \mapsto (s(x), t(x))$ donde s y t son secciones de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ tomadas sobre U, respectivamente (ya que sólo así se cumple que una sección de la suma directa sea un homeomorfismo local). Dicho de otro modo, $\Gamma(U, \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G})$ es isomorfo a $\Gamma(U, \mathfrak{F}) \oplus \Gamma(U, \mathfrak{G})$.

Esta definición se puede extender recursivamente a un número finito de gavillas de $\mathfrak{A}$–módulos. En particular $\mathfrak{F}^p$ denota la suma directa de p copias isomorfas de una misma gavilla $\mathfrak{F}$.

2.10 Producto Tensorial de dos Gavillas

Ahora tratamos de manera similar el producto tensorial de dos gavillas, definiéndolo a partir del functor ya conocido para otras estructuras, tales como los módulos. En efecto lo que estamos haciendo es definir functores para la categoría de gavillas de $\mathfrak{A}$–módulos.

Sean $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos, $\mathfrak{F}$ una gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos derechos y $\mathfrak{G}$ una gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos izquierdos. Para todo $x \in X$ definimos $\mathfrak{H}_x = \mathfrak{F}_x \otimes_{\mathfrak{A}_x} \mathfrak{G}_x$, es decir el producto tensorial de los módulos $\mathfrak{F}_x$ y $\mathfrak{G}_x$ tomado sobre el anillo $\mathfrak{A}_x$. Como de costumbre $\mathfrak{H} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{H}_x$.

Proposición 8. *Existe una única estructura de gavilla para $\mathfrak{H}$ tal que si s y t son secciones de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ respectivamente tomadas sobre un abierto $U \subseteq X$, entonces la función $x \mapsto s(x) \otimes t(x)$ es una sección de $\mathfrak{H}$ sobre U.*

La gavilla $\mathfrak{H}$ se llama el producto tensorial de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ sobre $\mathfrak{A}$ *y se denota por $\mathfrak{F} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$; si los anillos $\mathfrak{A}_x$ son conmutativos, entonces $\mathfrak{H}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos.*

Demostración. Si $\mathfrak{H}$ tiene una estructura de gavilla que satisface la condición del enunciado, y si s_i y t_i son secciones de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$, respectivamente, sobre un abierto $U \subseteq X$ para todo $i \in I$, entonces la función $x \mapsto \sum_{i \in I} s_i(x) \otimes t_i(x)$ es una sección de $\mathfrak{H}$ sobre U. Sabemos que todo $h \in \mathfrak{H}_x$ se puede escribir de la forma $h = \sum_{i \in I} f_i \otimes_{\mathfrak{A}_x} g_i$ con $f_i \in \mathfrak{F}_x$ y $g_i \in \mathfrak{G}_x$; luego $h = \sum_{i \in I} s_i(x) \otimes t_i(x)$ donde s_i y t_i son secciones de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ respectivamente sobre un abierto U tales que $s_i(x) = f_i$ y $t_i(x) = g_i$. Así, tenemos que toda sección de $\mathfrak{H}$ se puede escribir localmente de la forma anterior, es decir, que los grupos de secciones están determinados explícitamente y, por los resultados de la Sección 2.3, esto muestra la unicidad de la estructura.

Para mostrar su existencia supongamos que $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ están definidas por sistemas transitivos $(\mathfrak{A}_U, \varphi_U^V)$, $(\mathfrak{F}_U, \psi_U^V)$ y $(\mathfrak{G}_U, \chi_U^V)$ respectivamente, como en la Sección 2.6. Definimos $\mathfrak{H}_U = \mathfrak{F}_U \otimes_{\mathfrak{A}_U} \mathfrak{G}_U$. Al aplicar el producto tensorial los homomorfismos ψ_U^V y χ_U^V definen un homomorfismo $\eta_U^V : \mathfrak{H}_V \to \mathfrak{H}_U$ tal que $\eta_U^V(f \otimes g) = \psi_U^V(f) \otimes \chi_U^V(g)$. Al tomar el límite inductivo se tiene que $\lim_{x \in U} \mathfrak{H}_U = \lim_{x \in U} \mathfrak{F}_U \otimes \lim_{x \in U} \mathfrak{G}_U = \mathfrak{H}_x$. Ahora identificamos $\mathfrak{H}$ con la gavilla definida por el sistema $(\mathfrak{H}_U, \eta_U^V)$ que por construcción cumple con la condición del enunciado.

Finalmente si los anillos $\mathfrak{A}_x$ son conmutativos podemos suponer que los anillos $\mathfrak{A}_U$ también los son (tomando $\mathfrak{A}_U = \Gamma(U, \mathfrak{A})$), así que en este caso los $\mathfrak{H}_U$ son $\mathfrak{A}_U$–módulos y $\mathfrak{H}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos. □

Ahora sean $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}'$ y $\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ dos $\mathfrak{A}$–homomorfismos. Evidentemente $\varphi_x \otimes \psi_x$ es un homomorfismo (de grupos abelianos, o de $\mathfrak{A}_x$–módulos si los anillos $\mathfrak{A}_x$ son conmutativos). Si tomamos una sección local de la gavilla $\mathfrak{F} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$, $\sum_{i \in I} s_i \otimes t_i$, donde s_i y t_i son secciones locales de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ respectivamente, entonces la composición de esta sección con la aplicación

$\varphi\otimes\psi : \mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G} \to \mathfrak{F}'\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G}'$, dada por la colección de los homomorfismos $\varphi_x\otimes\psi_x$, es equivalente a $\sum_{i\in I}\varphi\circ s_i\otimes\psi\circ t_i$ que es una sección sobre $\mathfrak{F}'\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G}'$. Lo anterior muestra que $\varphi\otimes\psi$ es un homomorfismo de gavillas.

Las propiedades usuales del producto tensorial (ver por ejemplo Atiyah y Macdonald [4]) de módulos se pueden extender al producto tensorial de gavillas. Para demostrar esto basta con observar que localmente los $\Gamma(U,\mathfrak{A})$-módulos dados por $\Gamma(U,\mathfrak{F})$ satisfacen estas propiedades. Así, tenemos por ejemplo que toda secuencia exacta de la forma:

$$\mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F}' \longrightarrow \mathfrak{F}'' \longrightarrow 0$$

da origen a otra secuencia exacta:

$$\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{F}'\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{F}''\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G} \longrightarrow 0.$$

También tenemos los siguientes isomorfismos canónicos:

$$\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}_1\oplus\mathfrak{G}_2) \cong (\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G}_1)\oplus(\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G}_2)$$
$$\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A} \cong \mathfrak{F},$$

y si los anillos $\mathfrak{A}_x$ son conmutativos, también tenemos que:

$$\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{F}$$
$$\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{G}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}) \cong (\mathfrak{F}\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{G})\otimes_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}.$$

Hemos visto que hasta ahora todas las propiedades conocidas para los módulos locales que componen nuestras gavillas se pueden extender sin problema alguno al objeto global. A continuación encontraremos la primera excepción notable.

2.11 Gavilla de Gérmenes de $\mathfrak{A}$–Homomorfismos

Para concluir nuestra exposición sobre la forma como las gavillas heredan de forma natural las propiedades algebraicas de los módulos que las conforman, veremos como es posible extender el functor Hom a esta construcción.

Sean $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos, y $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ gavillas de $\mathfrak{A}$–módulos. Para cada $U\subseteq X$ abierto definimos $\mathfrak{H}_U$ como el grupo de homomorfismos de $\mathfrak{F}(U)$ a $\mathfrak{G}(U)$, donde $\mathfrak{F}(U)$ y $\mathfrak{G}(U)$ son las gavillas inducidas sobre U según se definió en la Sección 2.4. La restricción usual de homomorfismos de gavillas nos permite definir un homomorfismo de grupos, $\varphi_U^V : \mathfrak{H}_V \longrightarrow \mathfrak{H}_U$ para cada pareja de abiertos con $U \subseteq V$. La gavilla definida por el sistema transitivo $(\mathfrak{H}_U, \varphi_U^V)$ se llama la *gavilla de gérmenes de $\mathfrak{A}$-homomorfismos de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$* y se denota por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$. Si se da el caso que los anillos $\mathfrak{A}_x$ son conmutativos, entonces cada $\mathfrak{H}_U$ es un $\Gamma(U, \mathfrak{A})$-módulo y $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ tiene estructura de gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos.

Todo elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ es un germen de $\mathfrak{A}$-homomorfismo de $\mathfrak{F}$ a $\mathfrak{G}$ en una vecindad de $x \in X$, por lo que define un único homomorfismo de $\mathfrak{F}_x$ a $\mathfrak{G}_x$. Esta asignación da origen a un homomorfismo canónico:

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{G}_x),$$

sin embargo en general no podemos asegurar que ρ sea biyectivo.

A pesar de esta restricción se puede verificar directamente que es posible extender una serie de propiedades del functor Hom para módulos a su equivalente en gavillas (ver Atiyah y Macdonald [4]). Por ejemplo, si $\varphi : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}$ y $\psi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}'$ son $\mathfrak{A}$-homomorfismos, podemos definir un nuevo homomorfismo, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\varphi, \psi) : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}', \mathfrak{G}')$ dado por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\varphi, \psi)(\theta) = \psi \circ \theta \circ \varphi$.

Asimismo toda secuencia exacta de la forma:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{G}' \longrightarrow \mathfrak{G}''$$

da lugar a otra secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}'').$$

También tenemos los siguientes isomorfismos canónicos:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}, \mathfrak{G}) &\cong \mathfrak{G} \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}_2) \\
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{G}) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}_2, \mathfrak{G}).
\end{aligned}$$

La pregunta que surge naturalmente ante esta situación es en qué casos es posible asegurarnos de que el homomorfismo ρ sea un isomorfismo, es decir cuándo las fibras de la gavilla de gérmenes de homomorfismos, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$, son iguales a los homomorfismos de las fibras de las gavillas $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$. La respuesta a esta pregunta da origen a una clase particular de gavillas que estudiaremos con detalle en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Gavillas Coherentes de Módulos

Después de haber definido nuestro objeto básico de estudio y de haber analizado algunas de sus propiedades estamos listos para definir una clase especial de gavilla, las gavillas coherentes, que se caracterizan por ser localmente finitamente generadas en un sentido que se precisará a continuación. La coherencia de las gavillas resulta ser una propiedad natural muy fuerte que se preserva bajo diversas condiciones.

A lo largo de este capítulo X representa un espacio topológico y $\mathfrak{A}$ una gavilla de anillos definida sobre X, tal que $\mathfrak{A}_x$ es un anillo conmutativo, para todo $x \in X$. Además este anillo tiene un neutro multiplicativo que varía continuamente con x. En general nuestro objeto de estudio serán gavillas de $\mathfrak{A}$-módulos, y supondremos que todo homomorfismo es un $\mathfrak{A}$-homomorfismo.

3.1 Definiciones

Comenzamos este capítulo definiendo paso a paso una clase especial de gavilla que según veremos más adelante presenta una serie de características particulares que la hacen interesante. Comenzamos con un concepto preliminar antes de presentar a las gavillas coherentes de módulos propiamente dichas.

Sean $\mathfrak{F}$ una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos, $U \subseteq X$ abierto, y $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$. Si a cada familia de elementos $a_1, \ldots, a_p \in \mathfrak{A}_x$ le asignamos un nuevo elemento $\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot s_i(x) \in \mathfrak{F}_x$, obtenemos de esta manera un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{A}^p(U) \to \mathfrak{F}(U)$, bien definido para cada colección de p secciones de $\mathfrak{F}$ sobre U. El núcleo de este homomorfismo es una subgavilla de $\mathfrak{A}^p(U)$ llamada la *gavilla de relaciones entre los* s_i y denotada por $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. La imagen de φ, $\mathrm{Im}(\varphi)$, es la subgavilla de $\mathfrak{F}(U)$ generada por los $s_i(x)$ con $x \in U$.

Lo mismo se cumple a la inversa: todo homomorfismo $\varphi : \mathfrak{A}^p \to \mathfrak{F}$ define una familia de p secciones de $\mathfrak{F}$ de este modo:

$$s_1(x) = \varphi_x(1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, \ s_p(x) = \varphi_x(0, \ldots, 0, 1).$$

Después de este preámbulo donde se muestra la relación que existe entre colecciones de p secciones de $\mathfrak{F}$ y homomorfismos de $\mathfrak{A}^p$ a $\mathfrak{F}$, estamos listos para presentar nuestra primera definición.

Definición 1. *Una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos, $\mathfrak{F}$, es de* tipo finito *si localmente se puede generar a partir de un número finito de sus secciones.*

Dicho de otro modo, $\mathfrak{F}$ es de tipo finito si para todo $x \in X$ existen una vecindad abierta $U \subseteq X$ y una colección fínita de secciones, $s_1, \ldots, s_p \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ tales que para todo $y \in U$ y todo $f \in \mathfrak{F}_y$ se cumple que $f = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot s_i(y)$, con $a_i \in \mathfrak{A}_y$. Esto es equivalente a decir que $\mathfrak{F}(U)$ es isomorfo a una gavilla cociente de $\mathfrak{A}^p$, es decir que dada la colección $(s_1, \ldots, s_p)$ que genera a $\mathfrak{F}_y$ para todo $y \in U$, el homomorfismo $\varphi : \mathfrak{A}^p(U) \to \mathfrak{F}(U)$ descrito al comienzo es sobre, por lo que $\mathfrak{F}$ es isomorfo a $\mathfrak{A}^p(U)/\mathrm{Ker}(\varphi)$. Si este es el caso tenemos por definición de la gavilla de relaciones que localmente $\mathfrak{F}$ es isomorfo a $\mathfrak{A}^p/\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p)$.

Proposición 9. *Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla de tipo finito. Si $s_1, \ldots, s_p$ son secciones de $\mathfrak{F}$ sobre una vecindad de un punto $x \in X$ tales que generan a todo $\mathfrak{F}_x$, entonces generan a $\mathfrak{F}_y$ para todo y en una vecindad de x.*

Demostración. Como $\mathfrak{F}$ es de tipo finito sabemos que existen una vecindad abierta de x, $U \subseteq X$ y una colección $t_1, \ldots, t_q \in \Gamma(U, \mathfrak{F})$ tales que para todo $y \in U$ y para todo $f \in \mathfrak{F}_y$ se tiene que $f = \sum_{j=1}^{q} a_j \cdot t_j(y)$ con $a_1, \ldots, a_q \in \mathfrak{A}_y$.

Por hipótesis las secciones $s_1, \ldots, s_p$ generan a $\mathfrak{F}_x$, por lo tanto existen una vecindad de x, $V \subseteq X$, y secciones $b_{ij} \in \Gamma(V, \mathfrak{F})$ tales que para todo j, $t_j(x) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij}(x) \cdot s_i(x)$, y entonces por la unicidad local de las secciones sabemos que existe una vecindad de x, $W \subseteq U \cap V$, donde se cumple que $t_j(y) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij}(y) \cdot s_i(y)$ para todo $y \in W$. Entonces, como $t_1, \ldots, t_q$ generan a $\mathfrak{F}_y$, tenemos que $s_1, \ldots, s_p$ generan a $\mathfrak{F}_y$ para todo $y \in W$. $\square$

Después de presentar el concepto preliminar de gavilla de tipo finito pasamos ahora a nuestra definición principal:

Definición 2. *Una gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos, $\mathfrak{F}$, es* coherente *si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1. *$\mathfrak{F}$ es de tipo finito, y*

2. *Si $s_1, \ldots, s_p$ son secciones de $\mathfrak{F}$ sobre un abierto $U \subseteq X$, entonces la gavilla de relaciones entre las s_i, $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p)$, también es de tipo finito.*

Es importante destacar el carácter local de las definiciones de gavilla de tipo finito y gavilla coherente. Ahora comprobaremos algunas propiedades elementales de estas gavillas:

Proposición 10. *Toda gavilla coherente es localmente isomorfa al conúcleo de un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{A}^q \to \mathfrak{A}^p$.*

Demostración. Sabemos que si $\mathfrak{F}$ es coherente, entonces también es de tipo finito, por lo que existen secciones $s_1, \ldots, s_p$ de $\mathfrak{F}$ sobre una vecindad que generan localmente a la gavilla, es decir que $\mathfrak{F}$ es localmente isomorfa a $\mathfrak{A}^p/\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p)$.

Por otro lado tenemos por la definición de gavilla coherente que $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p) \subseteq \mathfrak{A}^p$ es de tipo finito, es decir que localmente podemos encontrar homomorfismos $\varphi : \mathfrak{A}^q \to \mathfrak{A}^p$ que son sobre $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p)$. Esto es lo mismo que decir que $\mathfrak{F}$ es localmente isomorfa a $\mathfrak{A}^p/\operatorname{Im}(\varphi) = \operatorname{Coker}(\varphi)$. □

Proposición 11. *Una subgavilla de tipo finito de una gavilla coherente es una gavilla coherente.*

Demostración. Sólo es necesario verificar la segunda condición de la Definición 2: si tomamos una colección finita de secciones de una subgavilla de una gavilla coherente, $\mathfrak{F}$, siguen siendo secciones de $\mathfrak{F}$, por lo que su gavilla de relaciones es de tipo finito. □

3.2 Propiedades Principales de las Gavillas Coherentes

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar el primer teorema fuerte de la teoría de gavillas. Básicamente veremos que la coherencia de las gavillas es una propiedad fuerte y natural, que se preserva bajo diversas condiciones. La primera de ellas, que luego emplearemos para deducir otras propiedades, es que siempre que tengamos una secuencia corta exacta de gavillas y dos de ellas sean coherentes, podemos garantizar la coherencia de la tercera gavilla.

Teorema 1. *Sea*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{H} \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta de homomorfismos de gavillas. Si cualesquiera dos de la tres gavillas $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ *o* $\mathfrak{H}$ *son coherentes, entonces la tercera también lo es.*

Demostración. Demostraremos la afirmación por casos. En primer lugar, sean $\mathfrak{G}$ y $\mathfrak{H}$ coherentes. Por la definición de tipo finito sabemos que existen homomorfismos locales sobre $\mathfrak{G}$, $\gamma : \mathfrak{A}^p(U) \to \mathfrak{G}(U)$. Como estamos tratando con propiedades de carácter local omitiremos la mención de la vecindad U de aquí en adelante. Sea $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{A}^p = \mathrm{Ker}(\beta \circ \gamma)$. Sabemos que existe una familia de p secciones de $\mathfrak{H}$ definidas por el homomorfismo $\beta \circ \gamma : \mathfrak{A}^p \to \mathfrak{H}$ y $\mathfrak{K}$ es precisamente la gavilla de relaciones de esta familia. Así, en vista de que $\mathfrak{H}$ es coherente, tenemos que por definición $\mathfrak{K}$ es una gavilla de tipo finito. Si una familia $a_1, \dots, a_q$ de secciones locales de $\mathfrak{A}^p$ generan a $\mathfrak{K}$, entonces las secciones $\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_q)$ generan localmente a $\gamma(\mathfrak{K})$. Esto implica que $\gamma(\mathfrak{K})$ es una subgavilla de tipo finito de la gavilla coherente $\mathfrak{G}$, así que por la Proposición 11 se tiene que $\gamma(\mathfrak{K})$ es coherente.

Sea $g \in \gamma(\mathfrak{K})$; entonces $g = \gamma(a)$ con $a \in \mathfrak{K}$ y luego $\beta \circ \gamma(a) = 0$, por lo que $g \in \mathrm{Ker}(\beta)$ y $\gamma(\mathfrak{K}) \subseteq \mathrm{Ker}(\beta)$. Inversamente sea $g \in \mathrm{Ker}(\beta)$; como γ es sobre, $g = \gamma(a)$ con $a \in \mathfrak{G}$, pero $\beta \circ \gamma(a) = 0$ por lo que $a \in \mathfrak{K}$ y $\mathrm{Ker}(\beta) \subseteq \gamma(\mathfrak{K})$. Esta doble contención muestra la igualdad $\gamma(\mathfrak{K}) = \mathrm{Ker}(\beta)$ así que por la exactitud de la secuencia de homomorfismos $\gamma(\mathfrak{K}) = \mathrm{Im}(\alpha)$. Pero α es inyectivo, entonces $\mathfrak{F}$ es isomorfa a $\mathrm{Im}(\alpha)$ y por lo tanto coherente.

Ahora sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ coherentes. Como $\mathfrak{G}$ es de tipo finito y β es sobre $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ es de tipo finito, así que sólo hace falta mostrar que $\mathfrak{H}$ cumple la segunda condición de la Definición 2. Sean $s_1, \dots, s_p$ secciones de $\mathfrak{H}$ en una vecindad de $x \in X$. Entonces existen secciones locales $s'_1, \dots, s'_p$ de $\mathfrak{G}$ tales que $s_i = \beta(s'_i)$ para todo i. Sean $t_1, \dots, t_q$ secciones locales de $\mathfrak{F}$ que generen a $\mathfrak{F}_y$ para todo y en una vecindad de x. Si $(a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{R}(s_1, \dots, s_p)_y \subseteq \mathfrak{A}^p$, significa que $\sum_{i=1}^p a_i \cdot s_i(y) = 0$, y por lo tanto $\sum_{i=1}^p a_i \cdot s'_i(y) \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$, es decir que existen $b_1, \dots, b_q \in \mathfrak{A}_y$ tales que $\sum_{i=1}^p a_i \cdot s'_i(y) = \sum_{j=1}^q b_j \cdot \alpha(t_j(y))$, o equivalentemente $\sum_{i=1}^p a_i \cdot s'_i(y) - \sum_{j=1}^q b_j \cdot \alpha(t_j(y)) = 0$.

Resumiendo tenemos que $(a_1, \dots, a_p) \in \mathfrak{R}(s_1, \dots, s_p)_y$ si y sólo si existen $b_1, \dots, b_q \in \mathfrak{A}_y$

tales que $(a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q) \in \mathfrak{R}(s'_1, \ldots, s'_p, \alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_q))_y$. Si únicamente observamos los coeficientes a_i tenemos que la gavilla de relaciones entre los s_i es la imagen de la gavilla de relaciones entre los s'_i y $\alpha(t_j)$ bajo la proyección canónica de $\mathfrak{A}^{p+q}$ sobre $\mathfrak{A}^p$. Ahora usamos el hecho de que $\mathfrak{G}$ es coherente para concluir que la gavilla $\mathfrak{R}(s'_1, \ldots, s'_p, \alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_q))$ es de tipo finito. Si tomamos únicamente la proyección de los generadores locales de esta gavilla sobre los p primeros componentes tenemos que $\mathfrak{R}(s_1, \ldots, s_p)$ también es necesariamente de tipo finito, lo que muestra que $\mathfrak{H}$ es coherente.

Comenzamos nuestro último caso suponiendo que $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{H}$ son coherentes, entonces existen secciones locales $t_1, \ldots, t_q$ que generan a $\mathfrak{F}$ y secciones locales $s_1, \ldots, s_p$ que generan a $\mathfrak{H}$. Además existen secciones $s'_1, \ldots, s'_p$ de $\mathfrak{G}$ tales que $\beta(s'_i) = s_i$ para todo i, ya que β es sobre, y por exactitud de la secuencia de homomorfismos tenemos que las secciones $\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_q), s'_1, \ldots, s'_p)$ generan localmente a $\mathfrak{G}$ que por lo tanto es de tipo finito.

Para demostrar que $\mathfrak{G}$ cumple la segunda condición de la Definición 2 tomemos una colección finita de secciones de $\mathfrak{G}$, $t_1, \ldots, t_r$. Como $\mathfrak{H}$ es coherente, existen s colecciones de r secciones de $\mathfrak{A}$ que generan a la gavilla de relaciones entre los $\beta(t_i)$, $\mathfrak{R}(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_r)) \subseteq \mathfrak{A}^r$; es decir, que las colecciones $(f_1^1, \ldots, f_1^r), \ldots, (f_s^1, \ldots, f_s^r)$ generan a $\mathfrak{R}(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_r))$. Definimos $u_j = f_j^1 \cdot t_1 + \cdots + f_j^r \cdot t_r = \sum_{i=1}^r f_j^i \cdot t_i$, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le s$. $u_1, \ldots, u_s$ son así, secciones locales de la gavilla $\mathfrak{G}$.

Tenemos que por definición de la gavilla de relaciones $\beta(u_j) = \sum_{i=1}^r f_j^i \cdot \beta(t_i) = 0$, por lo que $u_j \in \mathrm{Ker}(\beta) = \mathrm{Im}(\alpha)$ y podemos utilizar la coherencia de $\mathfrak{F}$, isomorfa a $\mathrm{Im}(\alpha)$, para deducir que $\mathfrak{R}(u_1, \ldots, u_s)$, la gavilla de relaciones entre los u_j, es de tipo finito y que existen t secciones locales de $\mathfrak{A}$ que generan a $\mathfrak{R}(u_1, \ldots, u_s) \subseteq \mathfrak{A}^s$. Denotaremos estas secciones por $(g_1^1, \ldots, g_1^s), \ldots, (g_t^1, \ldots, g_t^s)$.

Si sucede que para $f_1, \ldots, f_r \in \mathfrak{A}$ se tiene que $\sum_{i=1}^r f_i \cdot t_i = 0$, entonces $\sum_{i=1}^r f_i \cdot \beta(t_i) = 0$ y $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathfrak{R}(\beta(t_1), \ldots, \beta(t_r))$. Por la argumentación anterior sabemos que existen s secciones de $\mathfrak{A}$, g_j, tales que $(f_1, \ldots, f_r) = g_1 \cdot (f_1^1, \ldots, f_1^r) + \cdots + g_s \cdot (f_s^1, \ldots, f_s^r)$.

Como estamos suponiendo que $\sum_{i=1}^r f_i \cdot t_i = 0$, se tiene entonces que:

$$g_1 \cdot (f_1^1 \cdot t_1 + \cdots + f_1^r \cdot t_r) + \ldots\ g_s \cdot (f_s^1 \cdot t_1 + \cdots + f_s^r \cdot t_r) = 0,$$

es decir que:

$$g_1 \cdot \sum_{i=1}^r f_1^i \cdot t_i + \cdots + g_s \cdot \sum_{i=1}^r f_s^i \cdot t_i = g_1 \cdot u_1 + \cdots + g_s \cdot u_s = \sum_{j=1}^s g_j \cdot u_j = 0.$$

Por lo tanto $(g_1, \ldots, g_s) \in \mathfrak{R}(u_1, \ldots, u_s)$ que como vimos es una gavilla de relaciones de tipo finito y está generada localmente por las secciones $g_k^j \in \mathfrak{A}, 1 \leq j \leq s, 1 \leq k \leq t$. Así, tenemos que:

$$(g_1, \ldots, g_s) = h_1(g_1^1, \ldots, g_1^s) + \cdots + h_t(g_t^1, \ldots, g_t^s),$$

y finalmente agrupando coeficientes obtenemos que:

$$\begin{aligned} f_i &= g_1 f_1^i + \cdots + g_s f_s^i \\ &= (h_1 g_1^1 + \cdots + h_t g_t^1) f_1^i + \cdots + (h_1 g_1^s + \cdots + h_t g_t^s) f_s^i \\ &= h_1(g_1^1 f_1^i + \cdots + g_1^s f_s^i) + \cdots + h_t(g_t^1 f_1^i + \cdots + g_t^s f_s^i) \\ &= h_1 \sum_{j=1}^{s} g_1^j f_j^i + \cdots + h_t \sum_{j=1}^{s} g_t^j f_j^i. \end{aligned}$$

Es decir, que los f_i, los coeficientes que hacen que las sumas $\sum_{i=1}^{r} f_i \cdot t_i$ se anulen, resultan ser combinaciones lineales de secciones de $\mathfrak{A}$ de la forma $\sum_{i=1}^{s} g_k^j f_j^i$, de las que sólo existe un número finito (exactamente $r \times t$), por lo que $\mathfrak{R}(t_1, \ldots, t_r)$ es una gavilla de tipo finito y, por lo tanto, $\mathfrak{G}$ es coherente. □

La demostración del teorema anterior se puede resumir como una serie de cálculos directos y mecánicos llevados a cabo con el fin de comprobar que las gavillas de la secuencia exacta y las gavillas de relaciones de sus secciones son localmente finitamente generadas; esto es, la demostración del teorema se limita a verificar que la definición de coherencia se cumpla. Es inevitable observar que se trata de una prueba laboriosa y árida, sin embargo una vez que hemos establecido este resultado fundamental, lo usaremos fuertemente para demostrar de manera directa una serie de hechos sorprendentes en torno a la propiedad de coherencia, comenzando por el siguiente corolario:

Corolario 1. *La suma directa de una familia finita de gavillas coherentes es coherente.*

Demostración. Por resultados clásicos de álgebra aplicables a las secciones locales y en vista de lo señalado en la Sección 2.9, sabemos que la secuencia:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{F} \xrightarrow{\iota} \mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{G} \longrightarrow 0$$

es exacta, con ι y ρ denotando los homomorfismos de inclusión y proyección naturales respectivamente. Si suponemos que $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son coherentes y aplicamos el teorema directamente, tenemos que $\mathfrak{F} \oplus \mathfrak{G}$ también lo es. Aplicando el mismo procedimiento de forma inductiva tenemos que el resultado se cumple para un número finito de sumandos. □

Teorema 2. *Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ coherentes, y sea $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ un homomorfismo. El núcleo, la imagen y el conúcleo de φ son gavillas coherentes.*

Demostración. Como $\mathfrak{F}$ es coherente y en particular de tipo finito, tenemos que $\mathrm{Im}(\varphi)$ también es de tipo finito. Aplicando la Proposición 11 a $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathfrak{G}$ tenemos que además es coherente.

Para demostrar que el núcleo y el conúcleo de φ son coherentes basta aplicar el Teorema 1 a las siguientes secuencias exactas cortas:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\iota} \mathfrak{F} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Im}(\varphi) \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \xrightarrow{\iota} \mathfrak{G} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Coker}(\varphi) \longrightarrow 0$$

donde ι y ρ denotan a los homomorfismos naturales de inclusión y proyección, respectivamente. □

Corolario 2. *Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ subgavillas coherentes de otra gavilla coherente, $\mathfrak{H}$. Las gavillas $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ y $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$ son coherentes.*

Demostración. Resulta claro que cualquier elemento de $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ se puede obtener como una combinación lineal de los generadores de $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$, por lo que es de tipo finito y, aplicando la Proposición 11, coherente.

En cuanto a $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}$, basta considerar el homomorfismo $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{H}/\mathfrak{G}$ dado por la composición de la inclusión y la proyección naturales. Por nociones elementales de álgebra sabemos que $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G} = \mathrm{Ker}(\varphi)$, lo que nos da el resultado deseado. □

3.3 Operaciones con las Gavillas Coherentes

Después de demostrar que la suma directa de una familia finita de gavillas coherentes es coherente, ahora probaremos resultados análogos para los functores $\otimes$ y Hom. En general las demostraciones son relativamente sencillas, pues nos apoyaremos fuertemente en resultados anteriores.

Proposición 12. *Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son dos gavillas coherentes, entonces $\mathfrak{F} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$ también es coherente.*

Demostración. Por la Proposición 10 sabemos que $\mathfrak{F}$ es isomorfa a $\mathrm{Coker}(\varphi)$ con $\varphi : \mathfrak{A}^q \to \mathfrak{A}^p$. Si definimos un homomorfismo $\varphi \otimes 1 : \mathfrak{A}^q \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G} \to \mathfrak{A}^p \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$ por medio de la fórmula:

$$\varphi \otimes 1((a_1, \ldots, a_q) \otimes g) = \varphi(a_1, \ldots, a_q) \otimes g,$$

podemos verificar inmediatamente que $\mathrm{Im}(\varphi \otimes 1) = \mathrm{Im}(\varphi) \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$, así que entonces $\mathrm{Coker}(\varphi \otimes 1) = \mathrm{Coker}(\varphi) \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$. Resumiendo, tenemos que el producto tensorial $\mathfrak{F} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$ es isomorfo a $\mathrm{Coker}(\varphi \otimes 1)$.

Por otro lado tenemos que por la Sección 2.10 $\mathfrak{A}^q \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^q$ y $\mathfrak{A}^p \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}^p$, y por el Corolario 1, $\mathfrak{G}^n$ es una gavilla coherente para todo n. Finalmente por el Teorema 2 tenemos que $\mathfrak{F} \otimes_{\mathfrak{A}} \mathfrak{G}$ es isomorfo al conúcleo de un homomorfismo entre dos gavillas coherentes y, por lo tanto, también es coherente. $\square$

Proposición 13. *Sean $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ dos gavillas, con $\mathfrak{F}$ coherente. Para todo $x \in X$ el módulo puntual* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})_x$ *es isomorfo a* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{G}_x)$.

Demostración. En los mismos términos que la Sección 2.11 demostraremos que el homomorfismo natural $\rho : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})_x \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{G}_x)$ resulta ser biyectivo bajo las condiciones del enunciado.

En primer lugar, sea $\psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ un homomorfismo definido en una vecindad de x, con $\psi(f) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{F}_x$. Como $\mathfrak{F}$ es de tipo finito existen secciones locales $s_1, \ldots, s_p$ que generan a la gavilla en una vecindad de x, y como $\psi(s_i(x)) = 0$ para todo i, se tiene que $\psi(s_i(y)) = 0$ y por lo tanto $\psi(f) = 0$ para todo $f \in \mathfrak{F}_y$ con y suficientemente cercano a x. Esto es lo mismo que decir que la clase de equivalencia de ψ_x vista como germen de homomorfismo es cero, lo cual demuestra la inyectividad de ρ.

Para mostrar que ρ es sobre tenemos que verificar que si φ es un $\mathfrak{A}_x$-homomorfismo de $\mathfrak{F}_x$ a $\mathfrak{G}_x$, entonces existe un homomorfismo $\psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ definido en una vecindad de x, tal que $\psi_x = \varphi$. Sean $m_1, \ldots, m_p$ una familia finita de secciones locales de $\mathfrak{F}$ tales que generan a $\mathfrak{F}_y$ para todo y en una vecindad de x. Sean $(a_1^1, \ldots, a_1^p), \ldots, (a_q^1, \ldots, a_q^p)$ q secciones locales de $\mathfrak{A}^p$ tales que generan a $\mathfrak{R}(m_1, \ldots, m_p)$ en una vecindad de $\mathfrak{G}$. Ahora escogemos p secciones locales de $\mathfrak{G}$, $n_1, \ldots, n_p$, no necesariamene distintas, tales que $n_i(x) = \varphi(m_i(x))$.

A continuación definimos $p_j = \sum_{i=1}^{p} a_j^i \cdot n_i$, con $0 \leq i \leq p$, y $0 \leq j \leq q$. Las p_j son secciones locales de $\mathfrak{G}$ que por construcción se anulan en x, y por lo tanto en toda una vecindad de x que denotaremos por U. Esto implica que para todo $y \in U$ se tiene que si $\sum_{i=i}^{p} a_i \cdot m_i(y) = 0$, con $a_i \in \mathfrak{A}_y$, entonces se cumple que $\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot n_i(y) = 0$, ya que si se da la primera igualdad entonces $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathfrak{R}(m_1, \ldots, m_p)$, y entonces $\sum_{i=1}^{p} a_i \cdot n_i(y))$ es una combinación lineal de las secciones p_j y por lo tanto se anula en U.

Así, podemos definir un $\mathfrak{A}_y$–homomorfismo de la siguiente forma: dado $m \in \mathfrak{F}_y$ y $y \in U$, con $m = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot m_i(y)$, definimos $\psi_y(m) = \sum_{i=1}^{p} a_i \cdot n_i(y)$, que según vimos anteriormente está bien definido como $\mathfrak{A}_y$–homomorfismo. Como hemos realizado está construcción de forma explícita utilizando secciones de $\mathfrak{G}$ (ver Sección 2.8), tenemos que la colección de los ψ_y define un homomorfismo $\psi : \mathfrak{F}(U) \to \mathfrak{G}(U)$ que cumple que $\psi(x) = \varphi$. □

Proposición 14. *Si $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ son dos gavillas coherentes, entonces* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ *también es una gavilla coherente.*

Demostración. Por la Proposición 10 y los comentarios en torno a la definición de coherencia tenemos la siguiente secuencia exacta:

$$\mathfrak{A}^q \longrightarrow \mathfrak{A}^p \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow 0$$

y por la Proposición 13 podemos garantizar que todos los resultados conocidos para el functor Hom aplicado a los módulos puntuales son igualmente válidos para $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ cuando se cumple que $\mathfrak{F}$ es coherente (ver Sección 2.11), así que tenemos la siguiente secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^p, \mathfrak{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^q, \mathfrak{G}),$$

pero sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^p, \mathfrak{G})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}^q, \mathfrak{G})$ son isomorfos a $\mathfrak{G}^p$ y $\mathfrak{G}^q$ respectivamente, y por lo tanto son gavillas coherentes. Finalmente aplicando el Teorema 2 a la secuencia exacta anterior, tenemos que la gavilla $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{G})$ es coherente. □

3.4 Gavillas Coherentes de Anillos

En esta sección aplicaremos los resultados conocidos para gavillas de módulos a un caso particular: las gavillas de anillos. Continuaremos investigando el concepto de coherencia, y finalmente observaremos cómo más conceptos de álgebra conmutativa son aplicables a las gavillas.

En vista de que todo anillo es un módulo sobre sí mismo, una gavilla de anillos $\mathfrak{A}$ puede ser concebida como una gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos; si se trata de una gavilla coherente (de $\mathfrak{A}$–módulos) diremos que $\mathfrak{A}$ es una ***gavilla coherente de anillos.*** La sección de $\mathfrak{A}$ que toma como valor en un punto $x \in X$ el neutro multiplicativo del anillo $\mathfrak{A}_x$ genera a $\mathfrak{A}_y$ para todo y en una vecindad de x. Esto significa que $\mathfrak{A}$ siempre es de tipo finito, por lo que requerir que una gavilla de anillos sea coherente equivale a pedir que satisfaga la segunda condición de la Definición 2, es decir:

Definición 3. *La gavilla $\mathfrak{A}$ es una gavilla coherente de anillos si la gavilla de relaciones entre un número finito de secciones de $\mathfrak{A}$ sobre un abierto U es una gavilla de tipo finito.*

Dada una gavilla coherente de anillos $\mathfrak{A}$ podemos verificar inmediatamente los siguientes resultados:

Proposición 15. *Una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos es coherente si y sólo si es localmente isomorfa al conúcleo de un homomorfismo $\varphi : \mathfrak{A}^q \to \mathfrak{A}^p$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ La necesidad de la condición es exactamente el enunciado de la Proposición 10.

$\Leftarrow]$ Como $\mathfrak{A}$ es coherente, $\mathfrak{A}^q$ y $\mathfrak{A}^p$ son coherentes por el Corolario 1. El Teorema 2 nos dice que en este caso $\mathrm{Coker}(\varphi)$ es coherente, lo que concluye la prueba. □

Proposición 16. *Una subgavilla de $\mathfrak{A}^p$ es coherente si y sólo si es de tipo finito.*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{A}^p$ es coherente (por el Corolario 1) por lo que la Proposición 11 nos da el resultado directamente. □

Corolario 3. *La gavilla de relaciones entre un número finito de secciones de una gavilla coherente de $\mathfrak{A}$-módulos es una gavilla coherente.*

Demostración. La gavilla de relaciones es una subgavilla de $\mathfrak{A}^p$, y es de tipo finito por la definición misma de coherencia. □

Proposición 17. *Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla coherente de $\mathfrak{A}$-módulos. Para todo $x \in X$ sea $\mathfrak{I}_x$ el ideal de $\mathfrak{A}_x$ formado por los $a \in \mathfrak{A}_x$ tales que $a \cdot f = 0$ para todo $f \in \mathfrak{F}_x$. Los $\mathfrak{I}_x$ forman una gavilla coherente de ideales (como $\mathfrak{A}$-módulos) llamada el* aniquilador de $\mathfrak{F}$.

Demostración. Por la definición misma de módulo, para cada $a \in \mathfrak{A}_x$ podemos definir un $\mathfrak{A}_x$-homomorfismo, $\varphi_a : \mathfrak{F}_x \to \mathfrak{F}_x$, dado por la fórmula $\varphi_a(f) = a \cdot f$. En conjunto estas aplicaciones definen un nuevo homomorfismo, $\psi_x : \mathfrak{A}_x \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_x)$, y por la manera como se definió $\mathfrak{I}_x$ tenemos que $\mathfrak{I}_x = \mathrm{Ker}(\psi_x)$.

Como $\mathfrak{F}$ es coherente, tenemos por la Proposición 13 que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_x) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})_x$ así que los ψ_x definen un $\mathfrak{A}$-homomorfismo, $\psi : \mathfrak{A} \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$ ya que la continuidad queda garantizada por la definición de gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos. El dominio de ψ es coherente por hipótesis, y la Proposición 14 nos dice que el contradominio también lo es, así que por el Teorema 2, $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathfrak{I} = \bigsqcup_{x \in X} \mathfrak{I}_x$ es una gavilla coherente de $\mathfrak{A}$–módulos, o en este caso ideales. $\square$

De forma más general podemos definir el ***transportador*** de una gavilla coherente $\mathfrak{F}$ en una subgavilla coherente $\mathfrak{G}$, denotado por $\mathfrak{G} : \mathfrak{F}$. Se trata de la gavilla coherente de ideales dada por $\mathfrak{I}_x = \mathrm{Ker}(\psi_x)$, con $\psi_x : \mathfrak{A}_x \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}_x}(\mathfrak{F}_x, (\mathfrak{F}/\mathfrak{G})_x)$, en los mismos términos de la última demostración.

3.5 Cambio de Anillos

Los conceptos de gavilla de tipo finito y de gavilla coherente fueron definidos con relación a una gavilla de anillos dada, que denotamos por $\mathfrak{A}$. Sin embargo al igual que un módulo puede estar definido sobre distintos anillos, una gavilla de módulos puede serlo sobre varias gavillas de anillos. En esta sección estudiaremos este problema brevemente, utilizando los términos *de tipo finito sobre* $\mathfrak{A}$, y $\mathfrak{A}$*-coherente* para especificar que estamos hablando de una gavilla de $\mathfrak{A}$–módulos. El teorema que enunciamos a continuación nos da un criterio para decidir cuando la coherencia de una gavilla de módulos se preserva bajo un cambio de gavilla de anillos.

Teorema 3. *Sean $\mathfrak{A}$ una gavilla coherente de anillos e $\mathfrak{I}$ una subgavilla de ideales coherentes de $\mathfrak{A}$. Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla de $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$-módulos. Entonces $\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$–coherente si y sólo si es $\mathfrak{A}$–coherente. En particular $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ es una gavilla coherente de anillos.*

Demostración. Como $\mathfrak{F}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$–módulos, si $a - a' \in \mathfrak{I}_x$ entonces $a \cdot f = a' \cdot f$ para toda $f \in \mathfrak{F}_x$. Luego tenemos que las secciones $s_1, \ldots, s_p$ generan localmente a $\mathfrak{F}$ como combinaciones lineales con coeficientes en $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$ si y sólo si generan localmente tomando representantes de los coeficientes en $\mathfrak{A}$. Esto significa que $\mathfrak{F}$ es de tipo finito sobre $\mathfrak{A}$ si y sólo si es de tipo finito sobre $\mathfrak{A}/\mathfrak{I}$.

Ahora, si $\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{A}$-coherente y tomamos $s_1, \ldots, s_p$ secciones de $\mathfrak{F}$ sobre un abierto U, sabemos que la gavilla de relaciones entre $s_1, \ldots, s_p$ con coeficientes en $\mathfrak{A}$ es de tipo finito sobre $\mathfrak{A}$. La imagen de esta gavilla bajo el homomorfismo canónico de $\mathfrak{A}^p$ sobre $(\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^p$ es precisamente la gavilla de relaciones entre $s_1, \ldots, s_p$ con coeficientes en $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$, que por lo tanto es de tipo finito sobre $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$. Así, $\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$-coherente. En particular, sabemos que $\mathfrak{A}/\mathfrak{J} = \mathrm{Coker}(\varphi)$ donde φ es la inclusión: $\mathfrak{J} \to \mathfrak{A}$, así que por el Teorema 2, $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ es $\mathfrak{A}$-coherente, y por lo tanto $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$-coherente; es decir, es una gavilla coherente de anillos.

Finalmente procedemos a la inversa; supongamos que $\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$-coherente, entonces es isomorfa al conúcleo de algún homomorfismo, $\psi : (\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^q \to (\mathfrak{A}/\mathfrak{J})^p$ y como $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}$ es $\mathfrak{A}$-coherente podemos concluir por el Teorema 2 que $\mathfrak{F}$ también es $\mathfrak{A}$-coherente. □

3.6 Concentración y Extensión de una Gavilla Coherente

Concluiremos este capítulo observando como se comportan las gavillas coherentes bajo los conceptos de concentración y extensión de una gavilla, presentados en las Sección 2.5

Sea Y un subespacio cerrado de X. Si $\mathfrak{G}$ es una gavilla sobre Y entonces $\mathfrak{G}^X$ denota a la gavilla obtenida al extender $\mathfrak{G}$ por cero afuera de Y. Ésta es una gavilla sobre X según vimos anteriormente. Si $\mathfrak{A}$ es una gavilla de anillos sobre Y entonces $\mathfrak{A}^X$ es una gavilla de anillos sobre X, y si $\mathfrak{F}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos entonces $\mathfrak{F}^X$ es una gavilla de $\mathfrak{A}^X$-módulos.

Proposición 18. *$\mathfrak{F}$ es de tipo finito sobre $\mathfrak{A}$ si y sólo si $\mathfrak{F}^X$ es de tipo finito sobre $\mathfrak{A}^X$.*

Demostración. Sea $U \subseteq X$ abierto, y sea $V = U \cap Y$. Todo homomorfismo definido sobre V, $\varphi : \mathfrak{A}^p(V) \to \mathfrak{F}(V)$ induce un homomorfismo definido sobre U, $\varphi^X : (\mathfrak{A}^p)^X(U) \to \mathfrak{F}^X(U)$ obtenido mediante la añadidura de homomorfismos nulos fuera de Y. Es claro que φ es sobre si y sólo si φ^X también lo es, lo que concluye la prueba. □

Proposición 19. *$\mathfrak{F}$ es $\mathfrak{A}$-coherente si y sólo si $\mathfrak{F}^X$ es $\mathfrak{A}^X$-coherente.*

Demostración. Análogamente a la Proposición anterior, un homomorfismo $\psi : \mathfrak{A}^q(V) \to \mathfrak{A}^p(V)$ es sobre si y sólo si el homomorfismo correspondiente, $\psi^X : (\mathfrak{A}^q)^X(U) \to (\mathfrak{A}^p)^X(U)$ también lo es. □

Corolario 4. *$\mathfrak{A}$ es una gavilla coherente de anillos si y sólo si $\mathfrak{A}^X$ también lo es.*

Demostración. Esto es simplemente el enunciado de la Proposición con $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}$. □

Capítulo 4

Cohomología de Gavillas

El paso siguiente en nuestro estudio es la construcción de una teoría de cohomología para gavillas. Para llevar esto a cabo utilizaremos una cubierta abierta dada sobre el espacio base y procederemos a definir un complejo de cocadenas siguiendo el metodo de Čech. Siguiendo métodos usuales de topología algebraica definiremos los grupos de cohomología correspondientes y demostraremos algunos resultados de gran utilidad para calcular dicho grupos. Posteriormente veremos como es posible relacionar la cohomología obtenida al tomar dos cubiertas distintas, cuando una de ellas es un refinamiento de la otra, y utilizaremos esta relación para tomar el límite inductivo sobre el orden filtrante natural de las clases de cubiertas de un espacio y obtener grupos de cohomología que no dependan de la cubierta. Por último mostraremos cómo es posible construir una secuencia exacta larga de cohomología de gavillas, lo que probablemente es el resultado más importante de todo el trabajo.

En este capítulo X denota a un espacio topológico cualquiera. Por una *cubierta* de X entenderemos siempre que se trata de una cubierta abierta.

4.1 Cocadenas de una Cubierta

Con el fin de desarrollar una teoría de cohomología asociada a X y a una gavilla $\mathfrak{F}$ definida sobre ese espacio, comenzamos por definir el concepto de cocadenas. Una vez que hayamos construído un complejo con ellas procederemos siguiendo las técnicas usuales de topología algebraica para definir los grupos de cohomología correspondientes.

Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta (abierta) de X, y sea $s = (i_0, \ldots, i_p)$ una sucesión finita de elementos de I. Definimos al conjunto $U_s = \bigcap_{i=0}^{p} U_i$.

Sean $\mathfrak{F}$ una gavilla de grupos abelianos sobre X y $p \in \mathbb{Z}$ con $p \geq 0$. Una ***p*-cocadena de *U* valuada en $\mathfrak{F}$** es una función f que a cada sucesión de $p+1$ elementos de I, $s = (i_0, \ldots, i_p)$, le asigna una sección $f_s = f_{i_0,\ldots,i_p} \in \Gamma(U_s, \mathfrak{F}) = \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_p}, \mathfrak{F})$.

Las p-cocadenas forman un grupo abeliano (aditivo) denotado por $C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Es idéntico al grupo producto $\prod_s \Gamma(U_s, \mathfrak{F})$ obtenido al recorrer todas las sucesiones de $p+1$ elementos de I, y definiendo la operación aditiva del grupo coordenada a coordenada. La familia de todos los $C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ con $p \geq 0$ se denota por $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. A una p-cocadena también se le llama *cocadena de grado p*.

Se dice que una p-cocadena f es *alternante* si cumple estas dos condiciones:

1. $f_{i_0,\ldots,i_p} = 0$ siempre que dos índices sean iguales, $i_q = i_r$ con $q \neq r$.

2. $f_{i_{\sigma 0},\ldots,i_{\sigma p}} = \varepsilon_\sigma f_{i_0,\ldots,i_p}$, donde σ es una permutación del conjunto $\{0, \ldots, p\}$ y ε_σ es su signo.

Resulta evidente que 0 es alternante, y que si f es alternante entonces $-f$ también lo es. Si f y g son p-cocadenas alternantes tenemos que $(f+g)_{i_0,\ldots,i_p} = f_{i_0,\ldots,i_p} + g_{i_0,\ldots,i_p}$, y por lo tanto se cumple lo siguiente:

1. Si $i_q = i_r$ con $q \neq r$, entonces $(f+g)_{i_0,\ldots,i_p} = f_{i_0,\ldots,i_p} + g_{i_0,\ldots,i_p} = 0$.

2. $(f+g)_{i_{\sigma 0},\ldots,i_{\sigma p}} = f_{i_{\sigma 0},\ldots,i_{\sigma p}} + g_{i_{\sigma 0},\ldots,i_{\sigma p}} = \varepsilon_\sigma (f_{i_0,\ldots,i_p} + g_{i_0,\ldots,i_p}) = \varepsilon_\sigma (f+g)_{i_0,\ldots,i_p}$.

Lo anterior muestra que $f+g$ es alternante, por lo que las p-cocadenas alternantes forman un subgrupo de $C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, que se denota por $C'^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. El conjunto de todos los $C'^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ con $p \geq 0$ se denota por $C'(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

4.2 Operaciones Simpliciales

Una vez que hemos definido el concepto de cocadenas, y cocadenas alternantes, valuadas en una gavilla procedemos ahora a estudiar la relación que existe entre los grupos $C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ y $C'^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ por un lado, y por el otro los simplejos generados sobre el conjunto I de índices de la cubierta $\mathfrak{U}$, la cual hemos fijado desde la sección anterior. En particular veremos como los endomorfismos entre grupos de simplejos definen de manera natural homorfismos de los grupos de cocadenas, que utilizaremos de manera crucial posteriormente.

Sea $S(I)$ el complejo definido por el conjunto de vértices I; un *simplejo (ordenado)* de $S(I)$ es una sucesión $s = (i_0, \ldots, i_p)$ de elementos de I, y p es su *dimensión*; $|s|$ denota al conjunto de sus vértices $\{i_0, \ldots, i_p\}$. $K_p(I)$ es el grupo libre generado por todos los simplejos de $S(I)$ de dimensión p. $K(I) = \sum_{p=0}^{\infty} K_p(I)$ es el *complejo* definido por $S(I)$.

Una función $h : K_p(I) \to K_q(I)$ es un *endomorfismo simplicial* si cumple que:

1. h es un homomorfismo (de grupos abelianos), y

2. para todo simplejo, s, de $S(I)$, de dimensión p, se tiene que:

$$h(s) = \sum_{\acute{s}} c_s^{\acute{s}} \cdot \acute{s}$$

   con $c_s^{\acute{s}} \in \mathbb{Z}$, recorriendo la suma sobre todos los simplejos $\acute{s}$, de $S(I)$, de dimensión q tales que $|\acute{s}| \subseteq |s|$.

A primera vista el nombre de endomorfismo puede parecer algo extra;o para este endomorfismo entre dos grupos que en principio son distintos, sin embargo la nomenclatura se debe a que h actúa dentro del complejo $K(I)$.

Sea h un endomorfismo simplicial, y sea $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ una cocadena de grado q. Para todo simplejo s de dimensión p, definimos:

$$({}^t hf)_s = \sum_{\acute{s}} c_s^{\acute{s}} \cdot \rho_s^{\acute{s}}(f_{\acute{s}}),$$

donde los coeficientes $c_s^{\acute{s}} \in \mathbb{Z}$ están determinados por la definición del endomorfismo h, y $\rho_s^{\acute{s}}$ denota al homomorfismo de restricción: $\Gamma(U_{\acute{s}}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(U_s, \mathfrak{F})$, que está bien definido puesto que $|\acute{s}| \subseteq |s|$. La función $s \mapsto ({}^t hf)_s$, que a cada simplejo s asigna una sección de $\mathfrak{F}$ sobre U_s, es por lo tanto una p-cocadena denotada por ${}^t hf$.

Además tenemos que para cada simplejo s de dimensión p:

$$({}^t h(f+g))_s = \sum_{\acute{s}} c_s^{\acute{s}} \cdot \rho_s^{\acute{s}}(f_{\acute{s}} + g_{\acute{s}}) = \sum_{\acute{s}} c_s^{\acute{s}} \cdot \rho_s^{\acute{s}}(f_{\acute{s}}) + \sum_{\acute{s}} c_s^{\acute{s}} \cdot \rho_s^{\acute{s}}(g_{\acute{s}}) = ({}^t hf)_s + ({}^t hg)_s$$

para todo $f, g \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, por lo que la función $f \mapsto^t hf$ es un homomorfismo:

$$^t h : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}).$$

También verificamos los siguientes resultados:

1. Sean $h_1, h_2 : K_p(I) \to K_q(I)$ dos endomorfismos; entonces para toda q-cocadena f, y para todo simplejo s de dimensión p, se tiene que:
$$\begin{aligned}({}^t(h_1 + h_2)f)_s &= \sum_{\dot{s}} (c_s^{\dot{s}} + d_s^{\dot{s}}) \cdot \rho_s^{\dot{s}}(f_{\dot{s}}) \\ &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \rho_s^{\dot{s}}(f_{\dot{s}}) + \sum_{\dot{s}} d_s^{\dot{s}} \cdot \rho_s^{\dot{s}}(f_{\dot{s}}) \\ &= ({}^t h_1 f + {}^t h_2 f)_s\end{aligned}$$
Es decir, ${}^t(h_1 + h_2) = {}^t h_1 + {}^t h_2$.

2. Similarmente, sean $h_1 : K_q(I) \to K_r(I)$, $h_2 : K_p(I) \to K_q(I)$ dos endomorfismos simpliciales; entonces para toda r-cocadena f y todo simplejo s de dimensión p:
$$\begin{aligned} h_2(s) &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \dot{s} \qquad && \dot{s} \in K_q(I) \quad |\dot{s}| \subseteq |s|, \\ h_1(\dot{s}) &= \sum_{\ddot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \ddot{s} && \ddot{s} \in K_r(I) \quad |\ddot{s}| \subseteq |\dot{s}|, \end{aligned}$$
y luego:
$$\begin{aligned} h_1 \circ h_2(s) &= h_1(\sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \dot{s}) \\ &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot h_1(\dot{s}) \\ &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \sum_{\ddot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \ddot{s}, \quad |\ddot{s}| \subseteq |\dot{s}| \subseteq |s| \end{aligned}$$
y por definición:
$$({}^t(h_1 \circ h_2)f)_s = \sum_{\dot{s}} \sum_{\ddot{s}} c_s^{\dot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \rho_s^{\ddot{s}}(f_{\ddot{s}}).$$
Por otro lado si $\dot{s}$ es un simplejo de dimensión q y g es una q-cocadena, tenemos que:
$$\begin{aligned} ({}^t h_1 f)_{\dot{s}} &= \sum_{\ddot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \rho_{\dot{s}}^{\ddot{s}}(f_{\ddot{s}}), \qquad && \ddot{s} \in K_r(I) \quad |\ddot{s}| \subseteq |\dot{s}|, \\ ({}^t h_2 g)_s &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \rho_s^{\dot{s}}(g_{\dot{s}}), && \dot{s} \in K_q(I) \quad |\dot{s}| \subseteq |s|, \end{aligned}$$

y así:

$$\begin{aligned}({}^t h_2 \circ {}^t h_1 f)_s &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \rho_s^{\dot{s}}(\sum_{\ddot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \rho_{\dot{s}}^{\ddot{s}}(f_{\ddot{s}})) && |\ddot{s}| \subseteq |\dot{s}| \subseteq |s| \\ &= \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \sum_{\ddot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \rho_s^{\dot{s}} \circ \rho_{\dot{s}}^{\ddot{s}}(f_{\ddot{s}}) && |\ddot{s}| \subseteq |\dot{s}| \subseteq |s| \\ &= \sum_{\dot{s}} \sum_{\ddot{s}} c_s^{\dot{s}} c_{\dot{s}}^{\ddot{s}} \cdot \rho_s^{\ddot{s}}(f_{\ddot{s}}) && |\ddot{s}| \subseteq |\dot{s}| \subseteq |s|\end{aligned}$$

y así, hemos probado que:

$${}^t(h_1 \circ h_2) = {}^t h_2 \circ {}^t h_1.$$

3. Por último, para toda p-cocadena f y simplejo s de dimensión p se cumple que:

$$({}^t 1 f)_s = \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \rho_s^{\dot{s}}(f_{\dot{s}}), \quad \text{pero } 1(s) = \sum_{\dot{s}} c_s^{\dot{s}} \cdot \dot{s}, \quad |\dot{s}| \subseteq |s|$$

con $c_s^{\dot{s}} = 0$ si $\dot{s} \neq s$ y $c_s^s = 1$, por definición del endomorfismo identidad, luego:

$$({}^t 1 f)_s = f_s, \quad \text{por lo que } {}^t 1 = 1.$$

Resumiendo, hemos demostrado por un procedimiento directo, aunque engorroso, las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}{}^t h_1 + {}^t h_2 &= {}^t(h_1 + h_2), \\ {}^t(h_1 \circ h_2) &= {}^t h_2 \circ {}^t h_1, \\ {}^t 1 &= 1.\end{aligned}$$

En general cuando en lo sucesivo tratemos con endomorfismos simpliciales, omitiremos los homomorfismos de restricción, $\rho_s^{\dot{s}}$, para obtener una mayor claridad en el texto.

4.3 Complejos de Cocadenas

Después de haber estudiado en detalle las definiciones preliminares estamos listos para mostrar cómo un endomorfismo simplicial particular asociado al complejo $K(I)$, definido por el conjunto de índices de la cubierta $\mathfrak{U}$, induce una aplicación entre los grupos de cocadenas que les da una estructura de complejo ascendente. Esto nos permitirá aplicar las nociones clásicas de topología algebraica y definir cociclos, cofronteras y, nuestro objetivo primordial, grupos de cohomología. Por la forma como hemos procedido para construir el complejo de cocadenas, estos grupos de cohomología no dependen solamente del espacio X y de la gavilla $\mathfrak{F}$ donde las cocadenas toman sus valores, sino también de la cubierta $\mathfrak{U}$ que hemos elegido para construir el complejo simplicial utilizado en la sección precedente.

Consideremos la función $\partial : K_{p+1}(I) \to K_p(I)$ definida de la siguiente manera:

$$\partial(i_0, \ldots, i_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j(i_0, \ldots, \hat{\imath}_j, \ldots, i_{p+1})$$

donde $(i_0, \ldots, \hat{\imath}_j, \ldots, i_{p+1})$ es el simplejo de dimensión p obtenido a partir de los vértices del simplejo $(i_0, \ldots, i_{p+1})$, omitiendo el vértice i_j.

Resulta claro por la forma aditiva de la definición que ∂ es un homomorfismo, y como $|(i_0, \ldots, \hat{\imath}_j, \ldots, i_{p+1})| \subseteq |(i_0, \ldots, i_p)|$ además resulta ser un endomorfismo simplicial al que podemos aplicar las definiciones y resultados de la sección anterior. Así, por ejemplo tenemos un homomorfismo, ${}^t\partial : C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ al que denotaremos por d. Por definición:

$$(df)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j \rho_j(f_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_j,\ldots,i_{p+1}})$$

donde ρ_j es el homomorfismo natural de restricción: $\Gamma(U_{i_0,\ldots,\hat{\imath}_j,\ldots,i_{p+1}}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_{p+1}}, \mathfrak{F})$.

Ahora consideremos la composición $\partial \circ \partial$. Es claro que $\partial \circ \partial(i_0, \ldots, i_{p+1})$ es una combinación lineal de simplejos de la forma $(i_0, \ldots, \hat{\imath}_j, \ldots, \hat{\imath}_k, \ldots, i_{p+1})$ con $j < k$ y coeficientes ± 1. Además podemos constatar que cada uno de estos simplejos aparece exactamente dos veces en la suma, con coeficientes opuestos ($(-1)^{k+j}$ y $(-1)^{j+k-1}$); es decir que la suma necesariamente se anula para cualquier $(p+1)$-simplejo, por lo que $\partial \circ \partial = 0$, y así podemos concluir que $d \circ d = {}^t(\partial \circ \partial) = 0$.

Así, hemos llegado a que $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ tiene un operador de cofrontera y por lo tanto es un complejo (ascendente). Podemos aplicar todos los resultados conocidos de topología algebraica y en particular definir al *q-ésimo grupo de cohomología de $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$*, al que denotaremos por $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Esto es, si tenemos la siguiente secuencia de homomorfismos:

$$C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{d^{q-1}} C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{d^q} C^{q+1}(\mathfrak{U},\mathfrak{F}),$$

entonces por definición:

$$H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \frac{\mathrm{Ker}(d^q)}{\mathrm{Im}(d^{q-1})}.$$

Ahora estamos listos para demostrar el primer resultado acerca de la cohomología de gavillas, que nos permitirá comenzar a calcular algunos grupos de cohomología:

Proposición 20. $H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \Gamma(X,\mathfrak{F})$.

Demostración. Consideremos la secuencia de homomorfismos:

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \xrightarrow{d^0} C^1(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$$

Un elemento de $C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, es decir una 0–cocadena, es un sistema $(f_i)_{i\in I}$ tal que $f_i \in \Gamma(U_i,\mathfrak{F})$. Al aplicar el operador de cofrontera obtenemos la 1–cocadena:

$$(df)_{ij} = f_i - f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathfrak{F}).$$

Por lo tanto podemos ver que $(f_i) \in C^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ es un 0–cociclo, es decir un elemento de $\mathrm{Ker}(d^0)$, si y sólo si $f_i - f_j = 0$ en $U_i \cap U_j$, para todo $i,j \in I$. Por la estructura de gavilla (ver Sección 2.3) esto equivale a decir que existe una sección global $f \in \Gamma(X,\mathfrak{F})$ tal que f coincide con f_i sobre U_i para todo $i \in I$. Así pues tenemos que $\mathrm{Ker}(d^0) = \Gamma(X,\mathfrak{F})$. Tenemos por otra parte que $\mathrm{Im}(d^{-1}) = 0$, y entonces:

$$H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = \frac{\mathrm{Ker}(d^0)}{\mathrm{Im}(d^{-1})} = \frac{\Gamma(X,\mathfrak{F})}{0} = \Gamma(X,\mathfrak{F})$$

□

De esta forma podemos ver que el grupo $H^0(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ está bien determinado por el espacio X y la gavilla $\mathfrak{F}$, y es independiente de la cubierta $\mathfrak{U}$; esto no es necesariamente cierto para $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ con $q > 0$.

Ahora supongamos que $f \in C^p(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ es una p–cocadena alternante, y consideremos lo que ocurre al aplicar el operador de cofrontera:

$$(df)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i_j},\ldots,i_{p+1}}$$

Si $i_q = i_r$, con $q < r$, entonces todos los sumandos donde no se omita i_q ni i_r se anulan por definición de alternancia, por lo que:

$$\begin{aligned}(df)_{i_0,\ldots,i_{p+1}} &= (-1)^q f_{i_0,\ldots,\hat{i}_q,\ldots,i_{p+1}} + (-1)^r f_{i_0,\ldots,\hat{i}_r,\ldots,i_{p+1}} \\ &= ((-1)^q + (-1)^r(-1)^{r-q-1}) f_{i_0,\ldots,\hat{i}_q,\ldots,i_{p+1}} \\ &= ((-1)^q(1 + (-1)^{2r-2q-1})) f_{i_0,\ldots,\hat{i}_q,\ldots,i_{p+1}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora sea τ una transposición del conjunto $\{i_0, \ldots, i_{p+1}\}$, es decir $\tau(0, \ldots, q, q+1, \ldots, p+1) = (0, \ldots, q+1, 1, \ldots, p+1)$, por lo que claramente $\varepsilon_\tau = -1$. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}(df)_{i_{\tau 0},\ldots,i_{\tau p+1}} =& (df)_{i_0,\ldots,i_{q+1},i_q,\ldots,i_{p+1}} \\ =& \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1},i_q,\ldots,i_{p+1}} + (-1)^q f_{i_0,\ldots,\hat{i}_{q+1},\ldots,i_{p+1}} \\ &+ (-1)^{q+1} f_{i_0,\ldots,\hat{i}_q,\ldots,i_{p+1}} + \sum_{j=q+2}^{p+1} (-1)^j f_{i_0,\ldots,i_{q+1},i_q,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{p+1}}.\end{aligned}$$

Entonces, como f es alternante, resulta que:

$$\begin{aligned}(df)_{i_{\tau 0},\ldots,i_{\tau p+1}} =& \sum_{j=0}^{q-1} -(-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_q,i_{q+1},\ldots,i_{p+1}} - (-1)^q f_{i_0,\ldots,\hat{i}_q,\ldots,i_{p+1}} \\ &- (-1)^{q+1} f_{i_0,\ldots,\hat{i}_{q+1},\ldots,i_{p+1}} + \sum_{j=q+2}^{p+1} -(-1)^j f_{i_0,\ldots,i_q,i_{q+1},\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{p+1}} \\ =& -\sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{p+1}} \\ =& -(df)_{i_0,\ldots,i_{p+1}}.\end{aligned}$$

Sabemos que toda permutación σ es una composición de transposiciones, con orientación bien determinada, por lo que aplicando lo anterior recursivamente a esta composición, tenemos que:

$$(df)_{i_{\sigma 0},\ldots,i_{\sigma p+1}} = \varepsilon_\sigma (df)_{i_0,\ldots,i_{p+1}},$$

por lo que (df) es una $(p+1)$–cocadena alternante. Esto muestra que $C'(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ permanece estable bajo el operador d. Así pues, $C'(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ es un subcomlejo de $C(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, y su q–ésimo grupo de cohomología se denota por $H'^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$.

El siguiente resultado es de gran utilidad para la aplicación práctica de la teoría que estamos construyendo:

Proposición 21. *La inclusión de $C'(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ en $C(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ induce un isomorfismo de $H'^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ sobre $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, para todo $q \geq 0$.*

La siguiente demostración es sin duda la prueba más técnica del presente trabajo, en el sentido de que es necesario realizar toda una construcción, para la que emplearemos una serie de nociones y resultados más o menos complejos de topología algebraica. Seguiremos tan cerca como nos sea posible la demostración presentada originalmente por Serre, que a su vez está fundamentada en el texto clásico de topología publicado por Eilenberg y Steenrod [3], que era el compendio de la materia más completo existente al momento de escribirse el artículo de Serre; el resultado inevitable de esta elección es que algunos de los métodos, así como la terminología empleada pueden parecer algo extraños o anticuados al lector que esté familiarizado con textos más modernos al respecto de la materia. Sin embargo los puntos fundamentales de la demostración siguen siendo claros y reconocibles en vista de que, al final de cuentas, la teoría axiomática de la topología algebraica se originó precisamente con el libro de Eilenberg y Steenrod.

La demostración está basada en el Teorema 5.7, Capítulo VI de Eilenberg-Steenrod [3] que nos dice: si tenemos dos complejos simpliciales, K y K', dos *aplicaciones algebraicas* con *proyector* C, $f, g : K \to K'$ y un subcomplejo $L \subseteq K$, entonces una *homotopía algebraica* con proyector C entre $f\,|_L$ y $g\,|_L$ puede ser extendida a una homotopía algebraica con proyector C entre f y g.

Una *aplicación algebraica* se define como una aplicación de cadenas, $f : K \to K'$ tal que $|fs| = |s|$ para todo simplejo s de dimensión 0. Un *proyector* en K es una función, C, que a cada simplejo $s \in K$ le asigna un subcomplejo $C(s) \subseteq K'$ tal que si $\dot{s}$ es una cara de s, entonces $C(\dot{s})$ es un subcomplejo de $C(s)$. Si $f : K \to K'$ es una aplicación algebraica tal que $|t| \subseteq |s|$ implica que $ft \subseteq C(s)$, donde el símbolo de inclusión denota la relación de subcomplejo, entonces se dice que f tiene proyector C.

Un operador de homotopía entre dos aplicaciones algebraicas se define como una *homotopía algebraica.* Si g es un operador de homotopía y C es un proyector tales que $|t| \subseteq |s|$ implica que $gt \subseteq C(s)$, donde el símbolo de inclusión denota la relación de subcomplejo, entonces se dice que g tiene proyector C.

Con base en lo anterior la demostración de la proposición procede esquemáticamente de la siguiente manera:

1. Primeramente definimos una función $h : K(I) \to K(I)$ y comprobamos que se trata de un endomorfismo simplicial y una aplicación de cadenas.

2. Luego verificamos que h es una aplicación algebraica con proyector $\mathrm{id}_K(I)$.

3. Observamos que existe una homotopía algebraica entre h e $\mathrm{id}_{K(I)}$ restingiéndonos al subcomlejo $I \subseteq K(I)$. Dicha homotopía está dada precisamente por el operador $\mathrm{id}_{K(I)}$ que evidentemente tiene como proyector a sí mismo, por lo que se trata de una homotopía algebraica con proyector $\mathrm{id}_{K(I)}$.

4. Aplicamos el resultado de Eilenberg-Steenrod para conlcuir que existe una homotopía algebraica con proyector $\mathrm{id}_{K(I)}$ entre h e $\mathrm{id}_{K(I)}$ definida sobre todo $K(I)$. Además comprobamos que dicha homotopía está dada por un endomorfismo simplicial.

5. Ahora utilizamos los resultados demostrados previamente para los endomorfismos simpliciales para encontrar una homotopía entre las aplicaciones de cocadenas ${}^t h$ y 1 en el complejo $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Así, ${}^t h$ es una equivalencia homotópica.

6. Finalmente probamos que ${}^t h : C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C'(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ es sobre.

A continuación pasamos a la demostración en sí:

Demostración. Primeramente asignamos al conjunto de índices I una estructura de orden total. Una vez hecho esto, definimos una función, $f : K_p(I) \to K_p(I)$ determinada sobre los generadores del grupo libre por las siguientes ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
h(i_0, \ldots, i_p) =& 0, \text{ si dos de los índices son iguales,} \\
h(i_0, \ldots, i_p) =& \varepsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, \ldots, i_{\sigma p}), \text{ donde } \sigma \text{ es la permutación del conjunto } \{0, \ldots, p\} \text{ tal que} \\
& \sigma_0 < \cdots < \sigma_p \text{ en el orden dado anteriormente.}
\end{aligned}
$$

Para construir el isomorfismo mencionado en el enunciado de la proposición, seguiremos la notación presentada por Eilenberg y Steenrod en el Capítulo VI de su obra ([3]).

Como h está definido sobre los generadores, sabemos que es un homomorfismo, y además por construcción cumple las condiciones para ser un endomorfismo simplicial. Ahora es necesario verificar que se trata de una aplicación de cadenas, es decir, que conmuta con el operador ∂ del complejo (descendente) $K(I)$; esta demostración es completamente análoga a la prueba de que $C'(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ es estable bajo d, ya que no hemos hecho sino repetir la definición de cocadena alternante (ver Sección 4.3), así que la omitimos por brevedad.

Luego tenemos que si s es un simplejo de dimensión 0, es decir, si $s = i_0$, entonces $h(s) = s$. Si tenemos un elemento $t = \sum c_j s_j \in K_0(I)$, donde cada s_j es un simplejo de dimensión 0, entonces por linealidad de h se tiene que $h(t) = t$, por lo que concluimos que h es una *aplicación algebraica.*

Como claramente $|s| = |h(s)|$ para todo simplejo s de dimensión p, entonces tenemos que en particular $h(s) \subseteq s = \mathrm{id}_{K(I)}(s)$, donde la relación $h(s) \subseteq s$ está definida como $h(s) \in K_p(|s|)$, así que la identidad $\mathrm{id} : K(I) \to K(I)$ es un *proyector* de h.

Observamos que I, el conjunto de vértices de $K(I)$, es un subcomplejo de $K(I)$. Restringiéndonos a este subcomplejo se cumple que $h = \mathrm{id}_{K(I)}$, y entonces es cierto que $\mathrm{id}_{K(I)} - h = \partial \circ \mathrm{id}_{K(I)} + \mathrm{id}_{K(I)} \circ \partial = 0 + 0 = 0$; es decir que $\mathrm{id}_{K(I)}$ y h son dos aplicaciones algebraicas con proyector $\mathrm{id}_{K(I)}$, definidas sobre todo el complejo $K(I)$, tales que sobre el subcomplejo I existe una *homotopía algebraica con proyector* $\mathrm{id}_{K(I)}$ entre ellos, definida por el operador $\mathrm{id}_{K(I)} : K_p(I) \to K_{p+1}(I)$, que se tiene a sí mismo como proyector.

Ahora que tenemos estos resultados podemos aplicar un resultado conocido de topología algebraica (Eilenberg - Steenrod Cap VI, 5.7) y extender la homotopía definida sobre I a una homotopía algebraica, k, con proyector $\mathrm{id}_{K(I)}$, definida sobre todo $K(I)$. Sabemos que $k : K_p(I) \to K_{p+1}(I)$ es un homomorfismo, y como tiene proyector $\mathrm{id}_{K(I)}$ se cumple que $k(s) \subseteq s$, es decir que $k(s) \in K_{p+1}(|s|)$, por lo que k resulta ser un endomorfismo simplicial, que satisface la siguiente ecuación:

$$\mathrm{id}_{K(I)} - h = \partial \circ k + k \circ \partial.$$

Ahora aplicamos los resultados sobre endomorfismos simpliciales demostrados anteriormente (ver Sección 4.2) y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{K(I)} - {}^t h &= {}^t(\mathrm{id}_{K(I)} - h) \\
&= {}^t(\partial \circ k + k \circ \partial) \\
&= {}^t k \circ d + d \circ {}^t k
\end{aligned}$$

que tiene sentido en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, donde ${}^t h$ es por lo tanto una equivalencia homotópica.

Ahora, sean $s \in K_p(I)$ con $s = (i_0, \ldots, i_p)$, y $f \in C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Si dos índices de s son iguales entonces $h(s) = 0$ y luego $({}^t h f)_s = 0$. En el caso de que todos los índices sean distintos se cumple que $h(s) = h(i_0, \ldots, i_p) = \varepsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, \ldots, i_{\sigma p}) = \varepsilon_\sigma(\sigma s)$, así que por definición $({}^t h f)_s = \varepsilon_\sigma f_{\sigma s}$. Entonces, si π es una permutación del conjunto $\{i_0, \ldots, i_p\}$ resulta que $h(\pi s) = h(i_{\pi 0}, \ldots, i_{\pi p}) = \varepsilon_\pi \varepsilon_\sigma(i_{\sigma 0}, \ldots, i_{\sigma p}) = \varepsilon_\pi \varepsilon_\sigma(\sigma s)$, por lo que $({}^t h f)_{\pi s} = \varepsilon_\pi \varepsilon_\sigma f_{\sigma s} = \varepsilon_\pi({}^t h f)_s$. Lo anterior muestra que ${}^t h f$ es una p-cocadena alternante.

Además tenemos que si f es alternante, $({}^t h f)_s = f_s$, o $({}^t h f)_s = -f_s$, y en este segundo caso necesariamente $({}^t h(-f))_s = f_s$, por lo que podemos definir una p-cocadena, $\tilde{f}$, tal que $\tilde{f}_s = f_s$ o $-f_s$, y se cumpla que $({}^t h \tilde{f})_s = f_s$ para cada $s \in K_p(I)$; es decir, ${}^t h \tilde{f} = f$, y por lo tanto se tiene que ${}^t h : C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C'^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ es sobre.

Así, hemos visto que para cada p, los homomorfismos h definen una equivalencia homotópica en la categoría de complejos de cocadenas entre $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$y $C'(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, por lo que necesariamente $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \cong H'^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ para todo $q \geq 0$. □

El hecho que acabamos de demostrar tiene una gran importancia en términos prácticos. En general, mientras continuemos desarrollando la teoría cohomológica de gavillas, trabajaremos sobre los grupos $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$; sin embargo cuando se intenta calcular explícitamente tales grupos, resulta más sencillo trabajar con el complejo de cocadenas alternantes, $C'(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, que es mucho más pequeño que el complejo general, $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. La proposición anterior nos permite garantizar que los grupos de cohomología del complejo alternante son equivalentes a los grupos que nos interesaban originalmente. Utilizaremos ahora esta propiedad para llegar a la siguiente conclusión:

Corolario 5. $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = 0$ *para* $q > \dim(\mathfrak{U})$.

Demostración. La *dimensión* de una cubierta se define como el mayor número posible de índices distintos tales que la intersección de los abiertos correspondientes no sea vacía, es decir: $\dim(\mathfrak{U}) = \sup\{p \in \mathbb{Z} \mid \bigcap_{j=0}^p U_{i_j} \neq \emptyset,\ i_j \neq i_k \text{ para todo } j, k \leq p\}$.

Sea $q > \dim(\mathfrak{U})$ y $f \in C'^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Escojamos un simplejo $s \in K_q(I)$, $s = (i_0, \ldots, i_q)$. Si todos los índices de s difieren, entonces por definición de $\dim(\mathfrak{U})$ se tiene que $U_s = U_{i_0,\ldots,i_q} = \emptyset$, por lo que $\Gamma(U_s, \mathfrak{F}) = 0$, y entonces $f_s = 0$. Ahora supongamos que dos o más indices coinciden, entonces por definición de alternancia también se tiene que $f_s = 0$.

Lo anterior es cierto para cualquier simplejo de dimensión q por lo que la q-cocadena f es idénticamente cero, pero como f es arbitraria, $C'^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = 0$. Evidentemente esto implica que $H'^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = 0$, y aplicando la proposición tenemos que $H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = 0$. □

4.4 Refinamiento de la Cubierta

A continuación estudiaremos el comportamiento de los grupos de cohomología del complejo de cocadenas $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ cuando sustituimos la cubierta $\mathfrak{U}$ por otra más fina.

Se dice que una cubierta $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ es un *refinamiento* de otra cubierta $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ si existe una función $\tau : I \to J$ tal que $U_i \subseteq V_{\tau i}$ para toda $i \in I$.

Sea $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$; dados q elementos del conjunto de índices I definimos una nueva sección de $\mathfrak{F}$ de la siguiente forma:

$$(\tau f)_{i_0,\ldots,i_q} = \rho_U^V(f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q})$$

donde ρ_U^V es el homomorfismo natural de restricción: $\Gamma(V_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q}, \mathfrak{F}) \to \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q}, \mathfrak{F})$ definido por la inclusión $U_{i_0,\ldots,i_q} \subseteq V_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q}$ que existe por la definición del refinamiento de una cubierta. Así, τf es una q-cocadena, y además $\tau f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

A partir de esta definición queda claro que $\tau(f + g) = \tau f + \tau g$, así que la aplicación $f \mapsto \tau f$ es un homomorfismo de $C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ en $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. Además se tiene que si $g \in C^{q-1}(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$

entonces:

$$\begin{aligned}
(d\tau g)_{i_0,\dots,i_q} &= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j(\tau g)_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_q} \\
&= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \rho_U^V(g_{\tau i_0,\dots,\widehat{\tau i_j},\dots,\tau i_q}) \\
&= \rho_U^V \sum_{j=0}^{q}(-1)^j (g_{\tau i_0,\dots,\widehat{\tau i_j},\dots,\tau i_q}) \\
&= \rho_U^V(dg_{\tau i_0,\dots,\tau i_q}) \\
&= (\tau dg)_{i_0,\dots,i_q},
\end{aligned}$$

así que esta aplicación conmuta con el operador d y es, por lo tanto, una aplicación de cocadenas, que para cada $q \geq 0$ induce un homomorfismo:

$$\tau^* : H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}).$$

Proposición 22. *Los homomorfismos $\tau^* : H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ dependen solamente de las cubiertas $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$, y no de la función $\tau : I \to J$.*

Demostración. Sean $\tau, \dot{\tau} : I \to J$ dos funciones tales que $U_i \subseteq V_{\tau i}$ y $U_i \subseteq V_{\dot{\tau} i}$ para toda $i \in I$. Sea $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$; ahora definimos una $q-1$–cocadena de $\mathfrak{U}$ como sigue:

$$(kf)_{i_0,\dots,i_{q-1}} = \sum_{h=0}^{q-1}(-1)^h \rho_h(f_{\tau i_0,\dots,\tau i_h,\dot{\tau} i_h,\dots,\dot{\tau} i_{q-1}})$$

donde ρ_h es el homomorfismo natural de restricción de los grupos de secciones dado por la inclusión $U_{i_0,\dots,i_{q-1}} \subseteq V_{\tau i_0,\dots,\tau i_h,\dot{\tau} i_h,\dots,\dot{\tau} i_{q-1}}$, cuya mención omitiremos a lo largo del resto de la prueba, por claridad de la notación.

Mediante un cálculo directo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
(dkf)_{i_0,\dots,i_q} &= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j (kf)_{i_0,\dots,\hat{i}_j,\dots,i_q} \\
&= \sum_{j=0}^{q}(-1)^j \left(\sum_{h=0}^{j-1}(-1)^h f_{\tau i_0,\dots,\tau i_h,\dot{\tau} i_h,\dots,\widehat{\dot{\tau} i_j},\dots,\dot{\tau} i_q}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{h=j+1}^{q}(-1)^{h-1} f_{\tau i_0,\dots,\widehat{\tau i_j},\dots,\tau i_h,\dot{\tau} i_h,\dots,\dot{\tau} i_q}\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$
\begin{aligned}
(kdf)_{i_0,\ldots,i_q} &= \sum_{h=0}^{q}(-1)^h (df)_{\tau i_0,\ldots,\tau i_h,\dot\tau i_h,\ldots,\dot\tau i_q} \\
&= \sum_{h=0}^{q}(-1)^h \left(\sum_{j=0}^{h-1}(-1)^j f_{\tau i_0,\ldots,\tau \hat{i}_j,\ldots,\tau i_h,\dot\tau i_h,\ldots,\dot\tau i_q}\right. \\
&+(-1)^h f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_{h-1},\dot\tau i_h,\ldots,\dot\tau i_q} + (-1)^{h+1} f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_h,\dot\tau i_{h+1},\ldots,\dot\tau i_q} \\
&+ \left.\sum_{j=h+1}^{q}(-1)^{j+1} f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_h,\dot\tau i_h,\ldots,\dot\tau \hat{i}_j,\ldots,\dot\tau i_q}\right) \\
&= -(dkf)_{i_0,\ldots,i_q} + \sum_{h=0}^{q}\left(f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_{h-1},\dot\tau i_h,\ldots,\dot\tau i_q} - f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_h,\dot\tau i_{h+1},\ldots,\dot\tau i_q}\right) \\
&= -(dkf)_{i_0,\ldots,i_q} + f_{\dot\tau i_0,\ldots,\dot\tau i_q} - f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q}.
\end{aligned}
$$

Como esto se cumple para todo $s = \{i_0, \ldots, i_q\} \in K_q(I)$, tenemos la siguiente relación:

$$\dot\tau f - \tau f = kdf + dkf,$$

lo que significa que existe una homotopía de cocadenas entre las aplicaciones inducidas por τ y $\dot\tau$ de $C(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ y por lo tanto las aplicaciones de cohomología asociadas a cada función son en realidad la misma; $\tau^* = \dot\tau^* : H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$. □

Así, hemos visto que si $\mathfrak{U}$ es un refinamiento de $\mathfrak{V}$, entonces para todo $q \geq 0$ existe un homomorfismo canónico que en lo sucesivo denotaremos por $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) : H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

4.5 Grupos de Cohomología de X con Valores en $\mathfrak{F}$

En la sección anterior construimos homomorfismos canónicos que nos permiten relacionar los grupos de cohomología de dos complejos de cocadenas valuadas en la gavilla $\mathfrak{F}$, asociados a diferentes cubiertas del espacio X que están relacionadas entre sí por ser una refinamiento de la otra. Esta relación de refinamiento da origen a un orden filtrante sobre las cubiertas de X, por lo que procederemos ahora a demostrar la transitividad de los homomorfismos $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$, para luego aplicar el concepto de límite inductivo y definir un objeto de cohomología que dependa únicamente del espacio base, y no de la cubierta escogida.

La relación "$\mathfrak{U}$ *es un refinamiento de* $\mathfrak{V}$", que se denota por $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, es evidentemente un orden parcial entre la familia de cubiertas de X. Además se trata de una relación filtrante, ya que si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ son dos cubiertas, podemos construir una nueva cubierta, $\mathfrak{W} = \{W_{ij} = U_i \cap V_j\}_{(ij)\in I\times J}$ que es un refinamiento de $\mathfrak{U}$ y de $\mathfrak{V}$, puesto que $W_{ij} \subseteq U_i$ y $W_{ij} \subseteq V_j$.

Decimos que dos cubiertas, $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$, son *equivalentes* si sucede que $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ y $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$. No podemos garantizar que los índices de una cubierta formen un conjunto, sin embargo sí es posible asegurar que toda cubierta $\mathfrak{U}$ es equivalente a otra cubierta $\mathfrak{U}'$, cuyo conjunto de índices es un subconjunto del conjunto de potencias de X, $\mathcal{P}(X)$. Simplemente definimos a $\mathfrak{U}'$ como el conjunto de abiertos en X que pertenecen a $\mathfrak{U}$; $\mathfrak{U}'$ es claramente un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ y, además, es equivalente a $\mathfrak{U}$, así que podemos hablar del conjunto de clases de cubiertas de X (módulo la relación de equivalencia), que además posee un orden filtrante dado por la relación de refinamiento.

Ahora tomamos el homomorfismo canónico definido anteriormente para toda $q \geq 0$, $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) : H^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, cuando $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$. Tenemos que $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U})$ es la identidad (puesto que $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U}) = \mathrm{id}^*$, con $\mathrm{id} : I \to I$) y además cuando $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V} \prec \mathfrak{W}$ entonces $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) \circ \sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{W}) = \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{W})$ (ya que si tenemos $\tau : I \to J$, $\dot{\tau} : J \to K$ y $\ddot{\tau} : I \to K$ la Proposición 22 implica que $\ddot{\tau}^* = \tau^* \circ \dot{\tau}^*$).

Por lo tanto si sucede que $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ son equivalentes, entonces $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})\circ\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{U}) = \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{U}) = \mathrm{id}_{H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})}$, y $\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{U}) \circ \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{V}) = \mathrm{id}_{H^q(\mathfrak{V},\mathfrak{F})}$, es decir que $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ y $\sigma(\mathfrak{V},\mathfrak{U})$ son isomorfismos recíprocos, así que $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) = H^q(\mathfrak{U}',\mathfrak{F})$, y $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$ depende únicamente de la clase de la cubierta $\mathfrak{U}$ módulo la relación de equivalencia. Esto nos permite formular la siguiente definición:

Definición 4. *El q–ésimo grupo de cohomología de X valuado en la gavilla $\mathfrak{F}$, denotado por $H^q(X,\mathfrak{F})$, es el límite inductivo de los grupos $H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, siguiendo el orden filtrante de las clases de cubierta de X y los homomorfismos transitivos $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$.*

Explícitamente, un elemento de $H^q(X,\mathfrak{F})$ es la clase de equivalencia de un par ordenado $(\mathfrak{U},[f])$ con $[f] \in H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$, tal que las clases $\overline{(\mathfrak{U},[f])}$ y $\overline{(\mathfrak{V},[g])}$ son equivalentes si y sólo si existe una cubierta $\mathfrak{W}$, con $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{U}$ y $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{V}$, que cumple que $\sigma(\mathfrak{W},\mathfrak{U})[f] = \sigma(\mathfrak{W},\mathfrak{V})[g]$ en $H^q(\mathfrak{W},\mathfrak{F})$. De este modo podemos asociar a cada cubierta $\mathfrak{U}$ de X el homomorfismo canónico $\sigma(\mathfrak{U}) : H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to H^q(X,\mathfrak{F})$ dado por $f \mapsto \overline{(\mathfrak{U},[f])}$.

Proposición 23. $H^0(X,\mathfrak{F}) = \Gamma(X,\mathfrak{F})$.

Demostración. Por la Proposición 20 tenemos que $H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = \Gamma(X, \mathfrak{F})$ para toda cubierta $\mathfrak{U}$, por lo que al pasar al límite inductivo tenemos el resultado deseado. □

4.6 Homomorfismos de Gavillas

Una vez que hemos definido los grupos de cohomología de un espacio valuados en una gavilla, veremos como los homomorfismos de gavillas sobre un mismo espacio base inducen de manera natural homomorfismos correspondientes entre los objetos de cohomología.

Sea $\varphi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ un homomorfismo de gavillas definidas sobre X, y sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de X. Asignemos ahora a cada cocadena de orden q, $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, una nueva cocadena $\varphi^\# f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$ definida por la fórmula $(\varphi^\# f)_s = \varphi(f_s)$, con $s \in K_q(I)$. Por la definición de homomorfismo de gavillas (ver Sección 2.8) sabemos que $(\varphi^\# f)_s \in \Gamma(U_s, \mathfrak{G})$, así que $\varphi^\# f$ es efectivamente una q-cocadena valuada en la gavilla $\mathfrak{G}$.

Resulta claro que $\varphi^\#(f+g) = \varphi^\# f + \varphi^\# g$, por lo que la aplicación $\varphi^\#$ dada por $f \mapsto \varphi^\# f$ es un homomorfismo: $C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$. Además tenemos que la siguiente igualdad se cumple para todo simplejo $s \in K_{q+1}(I)$, con $s = (i_0, \ldots, i_{q+1})$:

$$\begin{aligned}
(\varphi^\# df)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} &= \varphi(df)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} \\
&= \varphi\left(\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j \varphi(f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}}) \\
&= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j (\varphi^\# f)_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}} \\
&= (d\varphi^\# f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}},
\end{aligned}$$

es decir, que este homomorfismo $\varphi^\#$ conmuta con los operadores de cofrontera de los complejos $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ y $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$. Esto implica, por resultados fundamentales de álgebra homológica, que el homomorfismo inducido en los grupos de cohomología,

$$\varphi^* : H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{G})$$

está bien definido.

Si $\mathfrak{U}$ es un refinamiento de una cubierta $\mathfrak{V}$, donde $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$, y tenemos $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ con $\tau : I \to J$, entonces se cumple que para todo $s = (i_0, \ldots, i_q) \in K_q(I)$: $(\varphi^{\#}\tau f)_{i_0,\ldots,i_q} = \varphi(\tau f)_{i_0,\ldots,i_q} = \varphi(f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q}) = (\varphi^{\#} f)_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q} = (\tau\varphi^{\#} f)_{i_0,\ldots,i_q}$, así que en particular $\varphi^*\tau^*[f] = \tau^*\varphi^*[f]$, donde $[f]$ es la clase de cohomología de f en $H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$, y entonces por la Proposición 22 tenemos que:

$$\varphi^* \circ \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \circ \varphi^*.$$

Al tomar el límite inductivo de las clases de cubiertas de X sobre el orden filtrante dado por la relación de refinamiento, con los homomorfismos transitivos $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$, podemos considerar la asignación de $H^q(X, \mathfrak{F})$ en $H^q(X, \mathfrak{G})$ dada por la fórmula $\overline{(\mathfrak{U}, [f])} \mapsto \overline{(\mathfrak{U}, \varphi^*[f])}$.

Es evidente que esta aplicación es un homomorfismo, y además está bien definido ya que si $\overline{(\mathfrak{U}, [f])} = \overline{(\mathfrak{V}, [g])}$ en $H^q(X, \mathfrak{F})$, entonces por la Definición 4 debe existir una cubierta $\mathfrak{W}$ tal que $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{U}$ y $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{V}$, que además cumple que $\sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})[f] = \sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})[g]$ en $H^q(\mathfrak{W}, \mathfrak{F})$, pero entonces:

$$\sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})\varphi^*[f] = \varphi^*\sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{U})[f] = \varphi^*\sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})[g] = \sigma(\mathfrak{W}, \mathfrak{V})\varphi^*[g],$$

por lo que $\overline{(\mathfrak{U}, \varphi^*[f])} = \overline{(\mathfrak{V}, \varphi^*[g])}$ en $H^q(X, \mathfrak{G})$. Por simplicidad, denotaremos este homomorfismo entre los grupos de cohomología de X valuados en $\mathfrak{F}$ y $\mathfrak{G}$ por el mismo símbolo utilizado anteriormente:

$$\varphi^* : H^q(X, \mathfrak{F}) \to H^q(X, \mathfrak{G}).$$

Cuando $q = 0$ tenemos por la Proposición 23 que $H^0(X, \mathfrak{F}) = \Gamma(X, \mathfrak{F})$, así que los elementos de $H^0(X, \mathfrak{F})$ son secciones globales de $\mathfrak{F}$, y $\varphi^*[f]$ se definió como $[\varphi \circ f]$, es decir que φ^* coincide con el homomorfismo de $\Gamma(X, \mathfrak{F})$ en $\Gamma(X, \mathfrak{G})$ inducido por φ.

Si $\varphi, \psi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ y $\chi : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ son homomorfismos, podemos verificar inmediatamente las siguientes propiedades:

1. $((\varphi^{\#} + \psi^{\#})f)_s = (\varphi^{\#} f + \psi^{\#} f)_s = (\varphi^{\#} f)_s + (\psi^{\#} f)_s$, así que:

$$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*.$$

2. $((\chi^{\#}\varphi^{\#})f)_s = (\chi^{\#}\varphi f^{\#})_s = \chi^{\#}(\varphi^{\#} f))_s$, y entonces:

$$(\chi \circ \varphi)^* = \chi^* \circ \varphi^*.$$

3. $(\mathrm{id}^{\#} f)_s = f_s$, por lo que:

$$1^* = 1.$$

Es decir que para todo $q \geq 0$, $H^q(X, \mathfrak{F})$ es un functor aditivo y covariante, de la categoría de gavillas de grupos abelianos sobre X en la categoría de grupos abelianos. En particular podemos desprender de este hecho la siguiente implicación: si $\mathfrak{F}$ es la suma directa de dos gavillas $\mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$, tenemos un isomorfismo natural $\pi_1 \oplus \pi_2 : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2$ donde π_1 y π_2 son las proyecciones correspondientes; ahora podemos afirmar que $(\pi_1 \oplus \pi_2)^* = \pi_1^* \oplus \pi_2^* : H^q(X, \mathfrak{F}) \to H^q(X, \mathfrak{G}_1) \oplus H^q(X, \mathfrak{G}_2)$ también es un isomorfismo, para todo $q \geq 0$.

Finalmente supongamos que $\mathfrak{F}$ es una gavilla de $\mathfrak{A}$-módulos, por lo que toda sección global, $a \in \Gamma(X, \mathfrak{A})$, define un endomorfismo de $\mathfrak{F}$, dado por $f \mapsto a \cdot f$, que a su vez induce otro endomorfismo, a^*, de $H^q(X, \mathfrak{F})$ en sí mismo, para todo $q \geq 0$; además tomando en cuenta las propiedades de functor aditivo covariante, si $a, b \in \Gamma(X, \mathfrak{A})$ y $z \in H^q(X, \mathfrak{F})$, tenemos que:

$$(a^* + b^*)z = a^* z + b^* z$$
$$(a^* b^*)z = a^*(b^* z)$$
$$1^* x = x,$$

así que $H^q(X, \mathfrak{F})$ tiene estructura de $\Gamma(X, \mathfrak{A})$–módulo, o lo que es lo mismo, de $H^0(X, \mathfrak{F})$–módulo.

4.7 Secuencia Exacta de Gavillas (Caso General)

Después de haber definido nuestros objetos de cohomología y los homomorfismos entre ellos, estamos listos para continuar con la construcción de nuestra teoría de cohomología. El siguiente paso, de acuerdo con la lógica propia del álgebra homológica, es buscar si a partir de una secuencia exacta corta de gavillas es posible construir una secuencia exacta larga de grupos de cohomología. Como veremos a continuación esto sólo es posible de manera parcial, sustituyendo algunos objetos por otros definidos específicamente para tal propósito.

Sea

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{B} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{C} \longrightarrow 0$$

una secuencia exacta de homomorfismos de gavillas definidas sobre un espacio X, y sea $\mathfrak{U}$ una cubierta de X. El homomorfismo inducido $\alpha^{\#} : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}) \to C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$ definido en la sección anterior es inyectivo, pues si $(\alpha^{\#} f)_s = (\alpha^{\#} \dot{f})_s$ para todo $s \in K_q(I)$ entonces $\alpha(f(x)) = \alpha(\dot{f}(x))$ para todo $x \in X$, y luego $f = \dot{f}$.

Asimismo, si $g \in \operatorname{Im}(\alpha^{\#}) \subseteq C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$ entonces debe existir una q-cocadena $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ tal que $g_s = (\alpha^{\#} f)_s$ para todo $s \in K_q(I)$, y por lo tanto $(\beta^{\#} g)_s = (\beta^{\#} \alpha^{\#} f)_s = 0$, así que $g \in \operatorname{Ker}(\beta^{\#})$.

Inversamente, si $g \in \operatorname{Ker}(\beta^{\#})$ entonces dada $s \in K_q(I)$ se cumple localmente que $g_s(x_i) \in \operatorname{Ker}(\beta) = \operatorname{Im}(\alpha)$ para cada $x_i \in U_s$, por lo que podemos encontrar vecindades V_{x_i} y secciones $f_{x_i} \in \Gamma(V_{x_i}, \mathfrak{A})$ tales que $\alpha \circ f_{x_i} = g_s|_{V_{x_i}}$. Para todo $y \in V_{x_j} \cap V_{x_k}$, se cumple que $\alpha \circ f_{x_j}(y) - \alpha \circ f_{x_k}(y) = 0$, y como α es inyectivo entonces $f_{x_j} = f_{x_k}$. Así, existe una sección $f_s \in \Gamma(U_s, \mathfrak{A})$ tal que $\alpha \circ f_s = g$. Esto a su vez nos permite definir una q-cocadena $f \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{A})$ que cumple que $\alpha^{\#} f = g$, por lo que $\operatorname{Ker}(\beta^{\#}) = \operatorname{Im}(\alpha^{\#})$.

Este razonamiento depende del hecho de que el homomorfismo α es inyectivo, y no puede ser aplicado al siguiente homomorfismo de la secuencia, por lo que únicamente tenemos la siguiente secuencia exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}) \xrightarrow{\alpha^{\#}} C(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) \xrightarrow{\beta^{\#}} C(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}).$$

Ahora definamos la imagen de $\beta^{\#}$ en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$ como $C_0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$. Así, si $h \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, entonces $h = \beta^{\#} g$, con $g \in C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$, por lo que $dh = d\beta^{\#} g = \beta^{\#} dg \in C_0^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, es decir que $C_0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$ permanece estable bajo el operador d y forma un subcomplejo de $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$. Queda entonces claro que tenemos la siguiente secuencia exacta de complejos:

$$0 \longrightarrow C(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}) \xrightarrow{\alpha^{\#}} C(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) \xrightarrow{\beta^{\#}} C_0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}) \longrightarrow 0$$

que por resultados clásicos de álgebra homológica da origen a la siguiente secuencia exacta de cohomología:

$$\cdots \longrightarrow H^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) \xrightarrow{\beta^{*}} H_0^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{A}) \xrightarrow{\alpha^{*}} H^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) \longrightarrow \cdots$$

donde los grupos $H_0^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$ son los grupos de cohomología del complejo $C_0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, y d es el operador de cofrontera definido por la formula usual: $d([g]) = [\alpha^{\#-1} \bar{d} \beta^{\#-1} g]$, con $\bar{d} : C^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{B}) \to C^{q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$ como en la sección 4.3.

Sean $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ dos cubiertas de X, con $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, y una función $\tau : I \to J$ tal que $U_i \subseteq V_{\tau i}$ para todo $i \in I$. Sabemos por la sección anterior que el siguiente diagrama con filas exactas es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C(\mathfrak{V},\mathfrak{A}) \arrow[r, "\alpha^{\#}"] \arrow[d, "\tau^{\#}"] & C(\mathfrak{V},\mathfrak{B}) \arrow[r, "\beta^{\#}"] \arrow[d, "\tau^{\#}"] & C(\mathfrak{V},\mathfrak{C}) \arrow[d, "\tau^{\#}"] \\
0 \arrow[r] & C(\mathfrak{U},\mathfrak{A}) \arrow[r, "\alpha^{\#}"] & C(\mathfrak{U},\mathfrak{B}) \arrow[r, "\beta^{\#}"] & C(\mathfrak{U},\mathfrak{C})
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\tau^{\#}(C_0(\mathfrak{V},\mathfrak{C})) &= \tau^{\#}(\mathrm{Im}(\beta^{\#})) \\
&= \tau^{\#}\beta^{\#}(C(\mathfrak{V},\mathfrak{B})) \\
&= \beta^{\#}\tau^{\#}(C(\mathfrak{V},\mathfrak{B})) \\
&\subseteq C_0(\mathfrak{U},\mathfrak{C}),
\end{aligned}$$

y luego τ define homomorfismos $\tau^{*} : H_0^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C}) \to H_0^q(\mathfrak{U},\mathfrak{C})$, por ser $\tau^{\#}$ una aplicación de cocadenas de los complejos $C_0(\mathfrak{V},\mathfrak{C})$ y $C_0(\mathfrak{U},\mathfrak{C})$.

En la demostración de la Proposición 22 construimos un homomorfismo $k : C^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C}) \to C^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{C})$ dado por $(kf)_{i_0,\ldots,i_{q-1}} = \sum_{j=0}^{q-1}(-1)^j \rho_j(f_{\tau i_0,\ldots,\tau i_{q-1},\dot{\tau} i_{q-1},\ldots,\dot{\tau} i_j})$ dadas dos funciones $\tau, \dot{\tau} : I \to J$. Resulta claro que si $f \in C_0^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C})$, es decir si $f = \beta^{\#}g$ para algún $g \in C^q(\mathfrak{V},\mathfrak{B})$, entonces $kf = \beta^{\#}kg \in C_0^{q-1}(\mathfrak{U},\mathfrak{C})$, por lo que el operador de homotopía se restringe apropiadamente al subcomplejo $C_0(\mathfrak{U},\mathfrak{C}) \subsetneq C(\mathfrak{U},\mathfrak{C})$ y la proposición se sigue cumpliendo: el homomorfismo $\tau^{*} : H_0^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C}) \to H_0^q(\mathfrak{U},\mathfrak{C})$ no depende de la función τ escogida. Denotaremos estos homomorfismos canónicos por $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$, y procediendo como en la sección 4.5 podemos definir a los grupos $H_0^q(X,\mathfrak{C})$ para todo $q \geq 0$ tomando el límite inductivo de los grupos $H_0^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C})$ siguiendo el orden filtrante de las clases de cubiertas de X.

Proposición 24. *La siguiente secuencia larga es exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(X,\mathfrak{B}) \xrightarrow{\beta^{\#}} H_0^q(X,\mathfrak{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X,\mathfrak{A}) \xrightarrow{\alpha^{\#}} H^{q+1}(X,\mathfrak{B}) \longrightarrow \cdots$$

donde d es el homomorfismo inducido por $d : H_0^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C}) \to H^{q+1}(\mathfrak{V},\mathfrak{A})$ al tomar el límite inductivo siguiendo el orden filtrante de las cubiertas de X.

Demostración. Consideremos el homomorfismo $d : H_0^q(X,\mathfrak{C}) \to H^{q+1}(X,\mathfrak{A})$ definido por $d(\overline{h}) = \overline{\alpha^{\#-1}\tilde{d}\beta^{\#-1}h}$, donde $\tilde{d} : C^q(\mathfrak{V},\mathfrak{B}) \to C^{q+1}(\mathfrak{V},\mathfrak{B})$ y $h \in C_0^q(\mathfrak{V},\mathfrak{C})$. Como sabemos que $\tau^{\#}$ conmuta con cada uno de estos operadores, se tiene que al pasar al límite inductivo, d está bien definido.

Una vez hecha esta verificación, es trivial comprobar que el límite inductivo de una secuencia exacta de homomorfismos es también una secuencia exacta, lo que nos da el resultado deseado. $\square$

Nuestro siguiente paso será comparar los grupos $H_0^q(X, \mathfrak{C})$ y $H^q(X, \mathfrak{C})$. La inclusión $j : C_0(\mathfrak{V}, \mathfrak{C}) \to C(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ conmuta con el operador de cofrontera, lo cual nos permite asegurar la existencia de homomorfismos $j^* : H_0^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{C}) \to H^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$. Es inmediato que $j^* \circ \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) = \sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}) \circ j^*$, por lo que al tomar el límite inductivo obtenemos un homomorfismo canónico $j^* : H_0^q(X, \mathfrak{C}) \to H^q(X, \mathfrak{C})$.

Comenzamos por demostrar un resultado preliminar:

Lema 1. *Sea $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ una cubierta de X, y sea $f \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$. Entonces existe una cubierta $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y una función $\tau : I \to J$ tales que $U_i \subseteq V_{\tau i}$ para toda $i \in I$, y además $\tau^{\#} f \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$.*

Demostración. Sea $x_k \in X$. Escojamos $j_k \in J$ tal que $x_k \in V_{j_k}$. Como $f_{j_k} \in \Gamma(V_{j_k}, \mathfrak{C})$, existe una vecindad abierta de x_k, $U_k \subseteq V_{j_k}$, y una sección $g_k \in \Gamma(U_k, \mathfrak{B})$ tal que $\beta g_k(y) = f_{j_k}(y)$ para todo $y \in U_k$.

Al recorrer x_k todo X, tenemos que las vecindades U_k forman una cubierta $\mathfrak{U}$, con $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, y $(g_k) \in C^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{B})$. Además $(\tau f)_k = (\beta g)_k$ para toda k, es decir que $\tau^{\#} f = \beta^{\#} g$, y entonces $\tau^{\#} f \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$. $\square$

Ahora podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 25. *El homomorfismo $j^* : H_0^q(X, \mathfrak{C}) \to H^q(X, \mathfrak{C})$ es biyectivo cuando $q = 0$, y es inyectivo cuando $q = 1$.*

Demostración. Sea $q = 1$. Escojamos como representante de un elemento cualquiera del núcleo de $j^* : H_0^1(X, \mathfrak{C}) \to H^1(X, \mathfrak{C})$ un 1–cociclo $z \in C_0^1(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ tal que exista una 0–cocadena $f \in C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ con $df = z$ (de modo que $z \in \mathrm{Im}(d)$ represente efectivamente a un elemento del núcleo de j^*).

Aplicando el lema anterior tenemos que existen una cubierta $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ y una función $\tau : I \to J$ tales que $\tau^{\#} f \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, así que $d\tau^{\#} f = \tau^{\#} df = \tau^{\#} z$, por lo que $\tau^{\#} z$ es imagen de $\tau^{\#} f$ y cohomólogo a 0 en $C_0^1(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, y su imagen en $H_0^1(X, \mathfrak{C})$ al tomar el límite inductivo es 0, lo que prueba la inyectividad de $j*$.

Ahora sea $q = 0$ y consideremos el homomorfismo $j^* : H_0^0(X, \mathfrak{C}) \to H^0(X, \mathfrak{C})$. Si z y $\dot{z}$ son representantes de dos elementos de $H_0^0(X, \mathfrak{C})$ que son enviados al mismo elemento de $H^0(X, \mathfrak{C})$ bajo j^*, entonces z y $\dot{z}$ son 0-cociclos en $C_0^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$ y $C_0^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ que coinciden para algún refinamiento de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$, es decir que en realidad representan al mismo elemento de $H_0^0(X, \mathfrak{C})$, por lo que j^* es inyectivo.

Por otra parte, sea z un 0-cociclo en $C^0(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$, es decir un representante de un elemento de $H^0(X, \mathfrak{C})$. Entonces por el lema anterior existe una cubierta $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ y una función $\tau : I \to J$ tal que $\tau^\# z \in C_0^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, pero entonces $j^*(\overline{\tau^\# z}) = \overline{z}$, así que j^* es sobre y por lo tanto biyectivo. □

Corolario 6. *La siguiente secuencia es exacta:*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{A}) \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{B}) \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{C}) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{A}) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{B}) \longrightarrow H^1(X, \mathfrak{C}).$$

Demostración. Esto se deduce inmediatamente de la Proposición 24 y de que $H^0(X, \mathfrak{C}) \cong H_0^0(X, \mathfrak{C})$, así como de que $j^* : H_0^1(X, \mathfrak{C}) \to H^1(X, \mathfrak{C})$ es inyectivo, por lo que $\mathrm{Ker}(\beta^*) = \mathrm{Ker}(j^*\beta^*)$. □

Corolario 7. *Si $H^1(X, \mathfrak{A}) = 0$, entonces $\Gamma(X, \mathfrak{B}) \to \Gamma(X, \mathfrak{C})$ es sobre.*

Demostración. Si $H^1(X, \mathfrak{A}) = 0$, tenemos por el corolario anterior la secuencia exacta:

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{A}) \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{B}) \longrightarrow H^0(X, \mathfrak{C}) \longrightarrow 0,$$

pero por la Proposición 23 y por la sección anterior sabemos que $\beta^* : H^0(X, \mathfrak{B}) \to H^0(X, \mathfrak{C})$ coincide con el homomorfismo $\beta : \Gamma(X, \mathfrak{B}) \to \Gamma(X, \mathfrak{C})$, lo cual nos da el resultado deseado. □

4.8 Secuencia Exacta de Gavillas (Con X Paracompacto)

A continuación exhibiremos bajo qué condiciones sobre el espacio base X es posible garantizar que el homomorfismo $j^* : H_0^q(X, \mathfrak{C}) \to H^q(X, \mathfrak{C})$ es biyectivo para todo $q \geq 0$ y, por lo tanto, podemos construir una secuencia exacta larga de los grupos de cohomología completos. En particular tenemos que la condición de *paracompacidad* es suficiente para garantizar la exactitud de la secuencia.

Se dice que un espacio X es *paracompacto* si es un espacio separado de tipo Hausdorff, y además sucede que para toda cubierta de X existe un refinamiento localmente finito; es decir que si $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ es dicho refinamiento, entonces para todo $x \in X$ existe una vecindad U_x tal que $U_x \subseteq V_{j_0} \cup \cdots \cup V_{j_k}$, con k finito. A continuación demostraremos un resultado preliminar para espacios paracompactos:

Lema 2. *Sean X un espacio paracompacto y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ una cubierta de X. Sea $f = (f_{j_0,\ldots,j_q}) \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$. Entonces existen una cubierta $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y una función $\tau : I \to J$ tales que $U_i \subseteq V_{\tau i}$ para todo $i \in I$, y además $\tau^\# f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$.*

Demostración. Como X es paracompacto podemos suponer que la cubierta $\mathfrak{V}$ es localmente finita, ya que si no lo fuera admitiría un refinamiento $\mathfrak{V}'$ que sí cumpliera esta propiedad, y si el lema se cumple para $\mathfrak{V}'$ entonces también se cumple para $\mathfrak{V}$.

Por ser X un espacio Hausdorff necesariamente existe una cubierta $\mathfrak{W} = \{W_j\}_{j\in J}$ tal que $\overline{W_j} \subseteq V_j$, donde $\overline{W_j}$ es la cerradura de W_j.

Ahora sea $x \in X$ y escojamos una vecindad S de x que pueda ser cubierta por un número finito de abiertos de $\mathfrak{V}$. Si $x \in V_{j_0,\ldots,j_q}$ entonces $f_{j_0,\ldots,j_q}(x) \in \mathfrak{C}_x$. Así, al ser el homomorfismo $\beta : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ sobre en cada uno de los tallos, existe una sección b de $\mathfrak{B}$ definida sobre una vecindad de x, $\tilde{U}_x$, tal que localmente $\beta(b) = f_{j_0,\ldots,j_q}$. Esto es cierto para cada abierto $V_{j_0,\ldots,j_q}$, y al recorrer todos los abiertos de $\mathfrak{V}$ que cubren a S obtenemos mediante la intersección de las vecindades $\tilde{U}_x$ una vecindad de x donde localmente existen secciones b tales que $\beta(b)$ es igual a las valuaciones de la q-cocadena f.

Restringiendo esta vecindad tanto como sea necesario podemos definir para cada $x \in X$ una nueva vecindad U_x tal que además de la condición previa, se cumpla que:

1. si $x \in V_j$, entonces $U_x \subseteq V_j$,

2. si $x \in W_j$, entonces $U_x \subseteq W_j$, y

3. si $U_x \cap W_J \neq \emptyset$, entonces $U_x \subseteq V_j$.

Todas estas condiciones son trivialmente realizables dadas las condiciones de separabilidad del espacio X, y la finitud local de la cubierta $\mathfrak{V}$.

La familia $\mathfrak{U} = \{U_x\}_{x\in X}$ es una cubierta de X. Para todo $x \in X$ escojamos $\tau x \in J$ tal que $x \in W_{\tau x}$. Es claro entonces que $U_x \subseteq W_{\tau x} \subseteq V_{\tau x}$, por lo que sólo resta demostrar que $\tau^{\#} f \in C_0^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{C})$, es decir, que necesitamos probar que $f_{\tau x_0,\ldots,\tau x_q}$ es la imagen bajo β de alguna sección de $\mathfrak{B}$ definida sobre $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q}$.

Si $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q} = \emptyset$ la afirmación se cumple trivialmente (pues $\beta = 0$); en caso contrario tenemos que $U_{x_0} \cap U_{x_k} \neq \emptyset$ para todo $0 \leq k \leq q$, y dado que $U_{x_k} \subseteq W_{\tau x_k}$, se tiene que $U_{x_0} \cap W_{\tau x_k} \neq \emptyset$, y entonces $U_{x_0} \subseteq V_{\tau x_k}$.

Así, $x_0 \in V_{\tau x_0} \cap \cdots \cap V_{\tau x_q} = V_{\tau x_0,\ldots,\tau x_q}$ y por construcción de U_{x_0} tenemos que debe existir una sección $b \in \Gamma(U_{x_0}, \mathfrak{B})$ tal que $\beta(b)_x = f_{\tau x_0,\ldots,\tau x_q}(x)$ sobre U_{x_0} y por ende sobre $U_{x_0} \cap \cdots \cap U_{x_q}$. □

Ahora estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección:

Proposición 26. *Si X es paracompacto, el homomorfismo canónico*

$$j^* : H_0^q(X, \mathfrak{C}) \to H^q(X, \mathfrak{C})$$

es biyectivo para todo $q \geq 0$.

Demostración. Si z y $\dot{z}$ representan a dos elementos en $H_0^q(X, \mathfrak{C})$ que j^* envía al mismo elemento de $H^q(X, \mathfrak{C})$, debe existir un refinamiento de las cubiertas respectivas donde z y $\dot{z}$ coinciden, pero entonces representan al mismo elemento, por lo que j^* es inyectivo.

Por otro lado, sea $f \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{C})$ un representante de un elemento en $H^q(X, \mathfrak{C})$. Por el Lema 2 sabemos que existe una cubierta $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$ tal que $\sigma(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})(f) \in H_0^q(X, \mathfrak{C})$, por lo que j^* es sobre y, por lo tanto, biyectivo. □

Corolario 8. *Si X es paracompacto la siguiente secuencia es exacta:*

$$\cdots \longrightarrow H^q(X, \mathfrak{B}) \xrightarrow{\beta^{\#}} H^q(X, \mathfrak{C}) \xrightarrow{d} H^{q+1}(X, \mathfrak{A}) \xrightarrow{\alpha^{\#}} H^{q+1}(X, \mathfrak{B}) \longrightarrow \cdots$$

donde el operador d es la composición del isomorfismo recíproco de $j^* : H_0^q(X, \mathfrak{C}) \to H^q(X, \mathfrak{C})$ con $d : H_0^q(X, \mathfrak{C}) \to H^{q+1}(X, \mathfrak{A})$.

Demostración. El resultado se deduce inmediatamente de las Proposiciones 24 y 26 . □

Esta secuencia se conoce como la *secuencia exacta de cohomología* definida por la secuencia exacta corta de gavillas:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{A} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{B} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{C} \longrightarrow 0,$$

y además resulta claro que esta secuencia existe cada vez que el homomorfismo $j^* : H_0^q(X,\mathfrak{C}) \to H^q(X,\mathfrak{C})$ es biyectivo para todo $q \geq 0$.

4.9 Cohomología de un Subespacio Cerrado

Para terminar este estudio de las propiedades cohomológicas del complejo de cocadenas valuadas en una gavilla, procederemos a analizar la relación entre los grupos de cohomología del complejo construido sobre el espacio base y sobre un subespacio cerrado del mismo. Como es de esperarse dada la naturalidad con la que se comporta la cohomología valuada en gavillas, veremos que esta relación es biunívoca siempre que la gavilla en cuestión esté concentrada sobre el subespacio cerrado.

Sea $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X, y sea Y un subespacio cerrado de X. $\mathfrak{F}(Y)$ es la gavilla sobre Y inducida por $\mathfrak{F}$ (ver sección 2.4).

Si $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta de X, entonces $\mathfrak{U}' = \{U_i' = U_i \cap Y\}_{i\in I}$ es una cubierta de Y. Si $f_{i_0,\ldots,i_q} \in \Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q},\mathfrak{F})$ entonces la restricción de $f_{i_0,\ldots,i_q}$ a $U'_{i_0,\ldots,i_q} = U_{i_0,\ldots,i_q} \cap Y$ es un elemento de $\Gamma(U'_{i_0,\ldots,i_q},\mathfrak{F}(Y))$.

Sea $\rho : C(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to C(\mathfrak{U}',\mathfrak{F}(Y))$ la operación de restricción descrita anteriormente; entonces tenemos que dada $f \in C^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F})$:

$$\begin{aligned}
(d\rho f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}} &= \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j(\rho f)_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}} \\
&= \rho\left(\sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j f_{i_0,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_{q+1}}\right) \\
&= (\rho d f)_{i_0,\ldots,i_{q+1}},
\end{aligned}$$

es decir que ρ conmuta con el operador de cofrontera, por lo que induce homomorfismos $\rho^* : H^q(\mathfrak{U},\mathfrak{F}) \to H^q(\mathfrak{U}',\mathfrak{F}(Y))$ para todo $q \geq 0$.

Si $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ son cubiertas de X tales que $\mathfrak{U} \prec \mathfrak{V}$, es decir, que $U_i \subseteq V_{\tau i}$ para todo $i \in I$, entonces $U_i' = U_i \cap Y \subseteq V_{\tau i} \cap Y = V'_{\tau i}$, y entonces $\mathfrak{U}' \prec \mathfrak{V}'$; además se cumple que:

$$(\tau\rho f)_{i_0,\ldots,i_q} = (\rho f)_{\tau i_0,\ldots,\tau i_q} = (\rho\tau f)_{i_0,\ldots,i_q}$$

por lo que $\sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V}) \circ \rho^* = \rho^* \circ \sigma(\mathfrak{U},\mathfrak{V})$ y, al pasar al límite inductivo sobre las clases de cubiertas de X, está bien definido un homomorfismo:

$$\rho^* : H^q(X, \mathfrak{F}) \to H^q(X, \mathfrak{F}(Y)),$$

para todo $q \geq 0$.

Proposición 27. *Sean Y un subespacio cerrado de X y $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X, nula fuera de Y. Entonces el homomorfismo*

$$\rho^* : H^q(X, \mathfrak{F}) \to H^q(X, \mathfrak{F}(Y))$$

es biyectivo para todo $q \geq 0$.

Demostración. Sea $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ una cubierta de Y. Como Y es cerrado en X, $U_i = W_i \cup (X - Y)$ es abierto en X, así que $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta de X, y entonces $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}'$. Es decir, que toda cubierta de Y es de la forma $\mathfrak{U}'$, donde $\mathfrak{U}$ es una cubierta de X.

Ahora, por la Proposición 5 de la sección 2.5 aplicada al espacio $U_{i_0,\ldots,i_q}$ y al subespacio cerrado $U'_{i_0,\ldots,i_q}$, tenemos que existe un isomorfismo entre $\Gamma(U_{i_0,\ldots,i_q}, \mathfrak{F})$ y $\Gamma(U'_{i_0,\ldots,i_q}, \mathfrak{F}(Y))$. Así, el homomorfismo:

$$\rho : C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C(\mathfrak{U}', \mathfrak{F}(Y))$$

es biyectivo, al igual que todos los homomorfismos inducidos por éste en los grupos de cohomología al tomar el límite inductivo sobre el orden filtrante de las clases de cubiertas de X. $\square$

Podríamos expresar esta última proposición de la siguiente manera: si $\mathfrak{G}$ es una gavilla sobre Y, y $\mathfrak{G}^X$ es la gavilla sobre X obtenida al extender $\mathfrak{G}$ por cero afuera de Y (ver sección 2.5), se tiene que $H^q(Y, \mathfrak{G}) = H^q(X, \mathfrak{G}^X)$ para todo $q \geq 0$; o lo que es lo mismo, la identificación de $\mathfrak{G}$ con $\mathfrak{G}^X$ es válida al tomar los grupos de cohomología correspondientes.

Capítulo 5

Grupos de Cohomología de Distintas Cubiertas

En este último capítulo nos disponemos a investigar la posibilidad de comparar la cohomología con valores en una gavilla definida mediante distintas cubiertas. Específicamente, nuestra intención es encontrar condiciones sobre una cubierta $\mathfrak{U}$ de X para que $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) = H^n(X, \mathfrak{F})$ para toda $n \geq 0$.

Esta pregunta reviste una gran importancia práctica, ya que proporciona un método para calcular $H^n(X, \mathfrak{F})$ sin necesidad de tomar el límite inductivo sobre las clases de cubiertas y enfrentar las dificultades técnicas que semejante intento plantearía.

A continuación desarrollaremos la herramienta técnica necesaria: el complejo doble de cocadenas valuadas en una gavilla, tras lo que procederemos a demostrar una serie de aplicaciones prácticas que culmina con un teorema que efectivamente responde a la pregunta planteada en un principio.

A lo largo de este capítulo X es un espacio topológico y $\mathfrak{F}$ es una gavilla definida sobre X.

5.1 Complejos Dobles

En esta sección presentamos la herramienta que utilizaremos posteriormente para comparar los grupos de cohomología de gavillas que se originan a partir de diferentes cubiertas de un espacio base. Tal herramienta la constituyen los complejos dobles, cuya notación y propiedades fundamentales exponemos a continuación:

Un *complejo doble* se define como un grupo abeliano bigraduado,

$$K = \sum_{p,q} K^{p,q} \ , p \geq 0 \ , q \geq 0$$

provisto de dos endomorfismos, $\dot{d}$ y $\ddot{d}$, que cumplen las siguientes propiedades:

1. $\dot{d} : K^{p,q} \to K^{p+1,q}$ y $\ddot{d} : K^{p,q} \to K^{p,q+1}$,

2. $\dot{d} \circ \dot{d} = 0$, $\dot{d} \circ \ddot{d} + \ddot{d} \circ \dot{d} = 0$, y $\ddot{d} \circ \ddot{d} = 0$.

Si $f \in K^{p,q}$ se dice que f es *bihomogéneo*, de *bigrado* (p, q) y de *grado total* $p + q$. Existe un endomorfismo $d = \dot{d} + \ddot{d}$ que cumple que

$$\begin{aligned} d \circ d &= (\dot{d} + \ddot{d}) \circ (\dot{d} + \ddot{d}) \\ &= \dot{d} \circ \dot{d} + \dot{d} \circ \ddot{d} + \ddot{d} \circ \dot{d} + \ddot{d} \circ \ddot{d} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo que d define un complejo en los términos usuales, así como grupos de cohomología de K que se denotan por $H^n(K)$, donde n es el grado total de los elementos de K correspondientes (ya que d es un homomorfismo de $K^{p,q}$ en $K^{p+1,q} \oplus K^{p,q+1}$, y todos los elementos de la imagen tienen grado total $p + q + 1$).

Podemos obtener otras estructuras de complejo sobre K utilizando los operadores $\dot{d}$ y $\ddot{d}$, en cuyo caso denotaremos los grupos de cohomología correspondientes por $H_1^{p,q}(K)$ y $H_2^{p,q}(K)$ respectivamente.

K_1^p denota al subgrupo de $K^{p,0}$ formado por los elementos f tales que $\ddot{d}(f) = 0$. $K_1 = \sum_{p=0}^{\infty} K_1^p$. Definimos análogamente a K_2^q y K_2.

Tenemos también que $H_1^{0,q}(K) = \mathrm{Ker}(\dot{d}) = K_2^q$, donde $\dot{d} : K^{0,q} \to K^{1,q}$, y análogamente $H_2^{p,0}(K) = K_1^p$. K_1 y K_2 son subcomplejos de K, y el operador d coincide sobre ellos con $\dot{d}$ y $\ddot{d}$ respectivamente.

Proposición 28. *Si $H_1^{p,q}(K) = 0$ para $p > 0$ y $q \geq 0$, entonces la inclusión $K_2 \to K$ define un isomorfismo de $H^n(K_2)$ sobre $H^n(K)$ para $n \geq 0$.*

Demostración. En primer término definimos los grupos $L^{p,q}$ de la siguiente manera: si $p = 0$, $L^{0,q} = K^{0,q}/K_2^q$; si $p > 0$, $L^{p,q} = K^{p,q}$. Observamos inmediatamente que $L = \sum_{p,q} L^{p,q}$ es un complejo doble, y que la secuencia de complejos

$$0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

es exacta. Por lo tanto tenemos una secuencia larga exacta de cohomología:

$$\cdots \longrightarrow H^n(K) \longrightarrow H^n(L) \longrightarrow H^{n+1}(K_2) \longrightarrow H^{n+1}(K) \longrightarrow \cdots$$

por lo que para obtener el isomorfismo deseado, $H^n(K_2) \cong H^n(K)$, basta mostrar que $H^n(L) = 0$ para todo $n \geq 0$.

Por nuestra definición del complejo L,

$$H_1^{p,q}(L) = \frac{\operatorname{Ker}(\dot{d} : L^{p,q} \to L^{p+1,q})}{\operatorname{Im}(\dot{d} : L^{p-1,q} \to L^{p,q})}$$

así que, si $p > 0$, entonces $H_1^{p,q}(L) = H_1^{p,q}(K) = 0$ por hipótesis. Si $p = 0$,

$$\begin{aligned} H_1^{0,q}(L) &= \operatorname{Ker}(\dot{d} : K^{0,q}/K_2^q \to K^{1,q}) \\ &= H_1^{0,q}(K)/K_2^q \\ &= K_2^q/K_2^q \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así, tenemos que $H_1^{p,q}(L) = 0$ para todo $p \geq 0$ y $q \geq 0$.

Ahora definimos $L_h = \sum_{q \geq h} L^{p,q}$, para $L = 0, 1, \ldots$. Observemos que los L_h son subcomplejos anidados de L, es decir que $L_{h+1} \subsetneq L_h$ para todo $h \geq 0$. Además L_h/L_{h+1} es precisamente el subcomplejo $\sum_{p=0}^{\infty} L^{p,h}$, con el operador de cofrontera $\dot{d}$. Así, $H^n(L_h/L_{h+1}) \cong H_1^{n-h,h}(L) = 0$.

Aplicando lo anterior a la secuencia exacta larga de cohomología:

$$\cdots \longrightarrow H^n(L_h) \longrightarrow H^n(L_h/L_{h+1}) \longrightarrow H^{n+1}(L_{h+1}) \longrightarrow H^{n+1}(L_h) \longrightarrow \cdots$$

se obtiene que $H^n(L_h) \cong H^n(L_{h+1})$ para todo $h \geq 0$ y $n \geq 0$.

Por definición de L_h se tiene que si $h > n$ entonces $H^n(L_h) = 0$, así que por recursividad descendente sobre h tenemos que $H^n(L_h) = 0$ para todo $h \geq 0$ y $n \geq 0$.

Finalmente observamos que $L_0 = L$, así que $H^n(L) = 0$ para todo $n \geq 0$ con lo que conluimos la demostración. □

Esta demostración fue realizada originalmente por Henri Cartan (ver [7]).

5.2 Complejo Doble Definido por dos Cubiertas

Tras definir las principales propiedades de un complejo doble en la sección anterior, ahora aplicaremos este concepto al complejo doble de cocadenas valuadas en una gavilla sobre un espacio base, que se obtiene al considerar dos cubiertas diferentes del espacio y los operadores de cofrontera correspondientes. Después de presentar la terminología que usaremos, procederemos a verificar algunas propiedades específicas de este complejo doble.

Sean $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ y $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j\in J}$ dos cubiertas de X. Sean s un simplejo de dimensión p de $S(I)$ y t un simplejo de dimensión q de $S(J)$. Entonces U_s denotará a la intersección de los abiertos U_i con $i \in |s|$, y V_t denotará a la intersección de los abiertos V_j con $j \in |t|$, como en las secciones 4.1 y 4.2. $\mathfrak{V}_s$ denotará a la cubierta de U_s dada por $\{V_j \cap U_s\}_{j\in J}$, y $\mathfrak{U}_t$ denotará a la cubierta de V_t dada por $\{U_i \cap V_t\}_{j\in J}$.

Ahora definiremos un complejo doble $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) = \sum_{p,q} C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ procediendo paso a paso de acuerdo con los resultados de la sección anterior:

En primer lugar, $C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) = \prod \Gamma(U_s \cap V_t)$ tomando el producto sobre todas las parejas (s,t) tales que s es un simplejo de $S(I)$ de dimensión p y t es un simplejo de $S(I)$ de dimensión q.

Así, un elemento $f \in C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es un sistema de secciones de $\mathfrak{F}$ sobre los diferentes abiertos $U_s \cap V_t$. Preservando la notación utilizada anteriormente, podemos escribir lo siguiente: $(f_{s,t}) = (f_{i_0,\dots,i_p,j_0,\dots,j_q})$, con $f_{i_0,\dots,i_p,j_0,\dots,j_q} \in \Gamma(U_{i_0,\dots,i_p} \cap V_{j_0,\dots,j_q}, \mathfrak{F})$. También es posible identificar a $C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ con el grupo producto $\prod_t C^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$.

Sabemos que para cada t está dado un operador de cofrontera, $d : C^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$, así que podemos definir un homomorfismo para todo el producto:

$$d_{\mathfrak{U}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) \to C^{p+1,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}),$$

que está dado explícitamente por la fórmula:

$$(d_{\mathfrak{U}} f)_{i_0,\dots,i_{p+1},j_0,\dots,j_q} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \rho_k (f_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1},j_0,\dots,j_q}),$$

donde ρ_k es el homomorfismo natural de restricción definido por la inclusión $(U_{i_0,\dots,i_{p+1}} \cap V_{j_0,\dots,j_q}) \subseteq (U_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{p+1}} \cap V_{j_0,\dots,j_q})$.

Procediendo análogamente definimos otro homomorfismo:

$$d_{\mathfrak{V}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) \to C^{p,q+1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$$

dado por la fórmula:

$$(d_{\mathfrak{V}}f)_{i_0,\dots,i_p,j_0,\dots,j_{q+1}} = \sum_{l=0}^{q+1}(-1)^l \rho_l(f_{i_0,\dots,i_p,j_0,\dots,\hat{j}_l,\dots,j_{q+1}}).$$

Como $d_{\mathfrak{U}}$ y $d_{\mathfrak{V}}$ operan de forma independiente sobre las dos familias de índices resulta claro que $d_{\mathfrak{U}} \circ d_{\mathfrak{U}} = 0$ y $d_{\mathfrak{V}} \circ d_{\mathfrak{V}} = 0$ (ver sección 4.3). Además y por la misma razón, $d_{\mathfrak{U}} \circ d_{\mathfrak{V}} = d_{\mathfrak{V}} \circ d_{\mathfrak{U}}$.

Si ahora definimos $\dot{d} = d_{\mathfrak{U}}$ y $\ddot{d} = (-1)^p d_{\mathfrak{V}}$ se tiene que $\dot{d} \circ \ddot{d} + \ddot{d} \circ \dot{d} = 0$ por lo que $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es, en efecto, un complejo doble de cocadenas como se definió en la sección anterior.

Los grupos de cohomología denotados en el caso general por $H^n(K)$, $H_1^{p,q}(K)$ y $H_2^{p,q}(K)$, se denotarán en el caso del complejo doble generado por las cubiertas $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$ por los símbolos $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$, $H_1^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ y $H_2^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ respectivamente; los subcomplejos K_1 y K_2 se representarán por $C_1(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ y $C_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ respectivamente.

Proposición 29. *$H_1^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es isomorfo a $\prod_t H^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$ tomando el producto sobre todos los simplejos de $S(J)$ de dimensión q.*

En particular $C_2^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) = H_1^{0,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es isomorfo a $\prod_t H^0(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F}) = C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$.

Demostración. Por definición $\dot{d} = d_{\mathfrak{U}} : C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) \to C^{p+1,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ y $C^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) = \prod_t C^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$. Recordemos que $d_{\mathfrak{U}}$ fue definido sobre el producto utilizando los operadores de cofrontera locales (es decir, para cada t). Así, el núcleo y la imagen del producto de los operadores no son sino los productos de los núcleos e imágenes locales; dicho de otro modo:

$$H_1^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) \cong \prod_t H^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$$

donde t corre sobre los simplejos de $S(J)$ de dimensión q.

En lo que respecta a la parte final del enunciado tenemos que por definición $C_2^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) = H_1^{0,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ (ver sección 5.1), que es isomorfo al producto $\prod_t H^0(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F}) = \prod_t \Gamma(V_t, \mathfrak{F}) = C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ (por la Proposición 20 en la sección 4.3 y la definición de cocadenas en la sección 4.1). □

i'' denotará al isomorfismo canónico de $C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ sobre $C_2^q(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$. Si $(f_{j_0,\dots,j_q}) \in C^q(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$, entonces se tiene que:

$$(i''f)_{i_0,j_0,\dots,j_q} = \rho_{i_0}(f_{j_0,\dots,j_q}),$$

donde ρ_{i_0} es el homomorfismo natural de restricción definido por la inclusión $U_{i_0} \cap V_{j_0,\dots,j_q} \subseteq V_{j_0,\dots,j_q}$.

Existe un resultado análogo a la Proposición 29 para el operador d'' que define un isomorfismo canónico

$$i' : C^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to C_1^p(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}).$$

5.3 Aplicaciones

Después de definir al complejo doble de cocadenas de una gavilla $\mathfrak{F}$ dado por las cubiertas $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$, y de estudiar la caracterización de los subcomplejos $C_1(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ y $C_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$, aplicaremos los resultados anteriores para obtener varias proposiciones, culminando con un teorema que nos permitirá alcanzar el objetivo enunciado al comienzo del capítulo: relacionar los grupos de cohomología de un complejo de cocadenas sobre una cubierta, $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, con la cohomología obtenida al tomar el límite inductivo sobre las clases de cubiertas del espacio, $H^n(X, \mathfrak{F})$.

Comenzamos por establecer un resultado que concierne la caracterización de la cohomología del complejo doble, dadas ciertas hipótesis de nulidad:

Proposición 30. *Si $H^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F}) = 0$ para todo t y para todo $p > 0$, entonces el homomorfismo $H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ definido por i'' es biyectivo para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Por la Proposición 29 se tiene que $H_1^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) \cong \prod_t H^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$, tomando el producto sobre todos los simplejos de $S(J)$ de dimensión q; luego, por hipótesis $H_1^{p,q}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) = 0$ para todo $p > 0$ y $q \geq 0$.

Aplicando la Proposición 28 tenemos que la inclusión $C_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}) \to C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ define un isomorfismo de $H^n(C_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F}))$ sobre $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ para todo $n \geq 0$.

Finalmente sabemos que i'' define un isomorfismo de $C_2(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ sobre $C(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$, así que $H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \cong H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ para todo $n \geq 0$. □

Este homomorfismo de $H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ sobre $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ se denotará igualmente por i''. A continuación se demuestra un resultado auxiliar:

Lema 3. *Sea $\mathfrak{W} = \{W_i\}_{i\in I}$ una cubierta de un espacio Y, y sea $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre Y. Si existe $i \in I$ tal que $W_i = Y$, entonces $H^p(\mathfrak{W}, \mathfrak{F}) = 0$ para todo $p > 0$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{W}'$ la cubierta de Y formada por el único abierto Y. Resulta claro que $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$ y además, por hipótesis tenemos que $\mathfrak{W}' \prec \mathfrak{W}$.

Como $\mathfrak{W}$ y $\mathfrak{W}'$ son cubiertas equivalentes $H^p(\mathfrak{W}, \mathfrak{F}) = H^p(\mathfrak{W}', \mathfrak{F})$ para todo $p \geq 0$ (ver sección 4.5), pero $\dim(\mathfrak{W}') = 0$, así que por el Corolario 5 de la sección 4.3 tenemos que $H^p(\mathfrak{W}', \mathfrak{F}) = 0$ si $p > 0$. □

Ahora pasaremos al resultado de mayor complejidad técnica del capítulo, en el que se demuestra que la relación de refinamiento entre dos cubiertas basta para caracterizar la cohomología del complejo doble, como se había hecho en las proposiciones anteriores.

Proposición 31. *Sea $\mathfrak{V}$ un refinamiento de una cubierta $\mathfrak{U}$. Entonces el homomorfismo $i'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$. Además el homomorfismo $i''^{-1} \circ i' : H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ coincide con el homomorfismo $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ definido en la sección 4.4.*

Demostración. Sean $Y = V_t$ y $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}_t$ donde t es un simplejo de $S(J)$. Si $\mathfrak{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, necesariamente existe $j \in J$ tal que $V_t \subseteq V_j$. Además $\mathfrak{V} \prec \mathfrak{U}$ así que existe $\tau : J \to I$ tal que $V_j \subseteq U_{\tau j}$. Así, $V_t = V_t \cap U_{\tau j}$, pero $V_t \cap U_{\tau j} \in \mathfrak{U}_t$, así que aplicando el Lema 3 se tiene que $H^p(\mathfrak{W}, \mathfrak{F}) = H^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F}) = 0$ para todo $p > 0$.

Tenemos entonces que $H^p(\mathfrak{U}_t, \mathfrak{F})$ se anula para todo simplejo t de $S(J)$ y para todo $p > 0$, por lo que podemos aplicar la Proposición 30, resultando que el homomorfismo:

$$i'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$$

es biyectivo para todo $n \geq 0$.

Ahora, para comprobar que $i''^{-1} \circ i' = \sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})$ es necesario verificar que si f es un n-cociclo de $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, y $\bar{f}$ es su clase de cohomología en $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$, entonces $i''^{-1} \circ i'(\bar{f}) = \sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U})(\bar{f}) = \bar{\tau f}$, o lo que es lo mismo, que los cociclos $i'(f)$ e $i''(\tau f)$ son cohomólogos en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$, ya que i'' es un isomorfismo.

Para $p \in \mathbb{Z}$ y $0 \leq p \leq n-1$ definimos $g^p \in C^{p,n-p-1}(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ de la siguiente manera:

$$g^p_{i_0,\ldots,i_p,j_0,\ldots,j_{n-p-1}} = \rho_p(f_{i_0,\ldots,i_p,\tau j_0,\ldots,\tau j_{n-p-1}})$$

donde ρ_p es el homomorfismo natural de restricción definido por la inclusión $U_{i_0,\ldots,i_p} \cap V_{j_0,\ldots,j_{n-p-1}} \subseteq U_{i_0,\ldots,i_p,\tau j_0,\ldots,\tau j_{n-p-1}}$. Estas cocadenas están bien definidas ya que $\mathfrak{V}$ es un refinamiento de $\mathfrak{U}$, y $f \in C^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.

Ahora observamos que por definición

$$(\ddot{d}g^0)_{i_0 j_0,\dots,j_n} = \sum_{l=0}^{n}(-1)^l \rho_l(f_{i_0,\tau j_0,\dots,\hat{\tau j_l},\dots,\tau j_n}),$$

pero como f es un cociclo y $df = 0$, tenemos que:

$$\rho_{i_0}(f_{\tau j_0,\dots,\tau j_n}) - \sum_{l=0}^{n}(-1)^l \rho_l(f_{i_0,\tau j_0,\dots,\hat{\tau j_l},\dots,\tau j_n}) = 0,$$

así que:

$$(\ddot{d}g^0)_{i_0 j_0,\dots,j_n} = \rho_{i_0}(f_{\tau j_0,\dots,\tau j_n}) = \rho_{i_0}(\tau f_{j_0,\dots,j_n}) = (i''\tau f)_{i_0 j_0,\dots,j_n}.$$

Por otro lado cuando $p > 0$:

$$(\ddot{d}g^p)_{i_0,\dots,i_p j_0,\dots,j_{n-p}} = (-1)^p\left(\sum_{l=0}^{n-p}(-1)^l \rho_l(f_{i_0,\dots,i_p,\tau j_0,\dots,\hat{\tau j_l},\dots,\tau j_{n-p}})\right)$$

y como $df = 0$ se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \rho_k(f_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_p,\tau j_0,\dots,\tau j_{n-p}}) - (-1)^p\left(\sum_{l=0}^{n-p}(-1)^l \rho_l(f_{i_0,\dots,i_p,\tau j_0,\dots,\hat{\tau j_l},\dots,\tau j_{n-p}})\right) = 0,$$

por lo que:

$$(\ddot{d}g^p)_{i_0,\dots,i_p j_0,\dots,j_{n-p}} = (\dot{d}g^{p-1})_{i_0,\dots,i_p j_0,\dots,j_{n-p}}.$$

Finalmente vemos que:

$$(\dot{d}g^{n-1})_{i_0,\dots,i_n j_0} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \rho_k(f_{i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_n,\tau j_0}),$$

pero como f es un n–cociclo tenemos que:

$$(\dot{d}g^{n-1})_{i_0,\dots,i_n j_0} = (-1)^n \rho_{j_0}(f_{i_0,\dots,i_n}) = (-1)^n(i' f_{i_0,\dots,i_n,j_0}).$$

Resumiendo, tenemos que $\ddot{d}g^0 = i''\tau f$, $\ddot{d}g^p = \dot{d}g^{p-1}$ si $p > 0$, y $\dot{d}g^{n-1} = (-1)^n i' f$.

Ahora definimos $g = \sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h g^h$, y observamos que:

$$\begin{aligned} dg &= (\dot{d} + \ddot{d})g \\ &= i''\tau f + \ddot{d}g^1 - \ddot{d}g^1 + \cdots + (-1)^{n-2}\ddot{d}g^{n-1} + (-1)^{n-1}\ddot{d}g_{n-1} + (-1)^{n-1}(-1)^n i' f \\ &= i''\tau f - i' f, \end{aligned}$$

lo que muestra que $i' f$ e $i''\tau f$ son cohomólogos en $C(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$, concluyendo la demostración.

$\square$

Proposición 32. *Sea $\mathfrak{V}$ un refinamiento de $\mathfrak{U}$ tal que $H^q(\mathfrak{V}_s, \mathfrak{F}) = 0$ para todo $s \in S(I)$ y $q > 0$. Entonces el homomorfismo $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$.*

Demostración. Primeramente aplicamos la Proposición 30, invirtiendo los roles de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{V}$; entonces tenemos que el homomorfismo $i' : H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$. Sabemos luego, por la Proposición 31, que $i'' : H^n(\mathfrak{V}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$ y que $\sigma(\mathfrak{V}, \mathfrak{U}) = i''^{-1} \circ i' : H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}; \mathfrak{F})$, por lo que este último homomorfismo también es biyectivo para todo $n \geq 0$. □

Ahora estamos listos para demostrar el resultado principal de este capítulo:

Teorema 4. *Sean X un espacio topológico, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de X, y $\mathfrak{F}$ una gavilla sobre X. Sea $\mathfrak{V}^\alpha$, $\alpha \in A$, una familia de cubiertas de X tal que se cumplen las dos condiciones siguientes:*

1. *Para toda cubierta $\mathfrak{W}$ de X existe $\alpha \in A$ tal que $\mathfrak{V}^\alpha \prec \mathfrak{W}$,*

2. *$H^q(\mathfrak{V}^\alpha_s, \mathfrak{F}) = 0$ para todo $\alpha \in A$, $s \in S(I)$ y $q > 0$.*

Entonces $\sigma(\mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^n(X, \mathfrak{F})$ es biyectivo para todo $n \geq 0$.

Demostración. Como las cubiertas $\mathfrak{V}^\alpha$ son arbitrariamente finas por la condición 1, podemos suponer que $\mathfrak{V}^\alpha \prec \mathfrak{U}$ para todo $\alpha \in A$. Entonces por la condición 2 y la Proposición 32 tenemos que el homomorfismo:

$$\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U}) : H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F}) \to H^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{F})$$

es biyectivo para todo $n \geq 0$. Como $\mathfrak{V}^\alpha$ es arbitrariamente fino, $H^n(X, \mathfrak{F})$ es el límite inductivo de los grupos $H^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{F})$.

Ahora, si $x \in H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ y $\sigma(\mathfrak{U})(x) = 0$, entonces $\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U})(x) = 0$ para algún $\alpha \in A$ y, por ser $\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U})$ biyectivo, $x = 0$, así que $\sigma(\mathfrak{U})$ es inyectivo.

Sea $y \in H^n(X, \mathfrak{F})$. Para algún $\alpha \in A$ existe $\bar{y} \in H^n(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{F})$ tal que $\sigma(\mathfrak{V}^\alpha)(\bar{y}) = y$ y luego existe $x \in H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ tal que $\sigma(\mathfrak{V}^\alpha, \mathfrak{U})(x) = \bar{y}$. Entonces $\sigma(\mathfrak{U})(x) = y$, así que $\sigma(\mathfrak{U})$ es sobre y por lo tanto biyectivo para todo $n \geq 0$. □

5.4 Conclusiones

Con este resultado termina la primera parte del artículo publicado por Jean-Pierre Serre en 1955. A lo largo del camino hemos construido paso a paso la teoría de gavillas con todo y su cohomología. Esta herramienta ha probado ser muy fructífera en diversos campos, en particular la geometría analítica compleja y la geometría algebraica abstracta. En ambos casos el espacio base es una variedad (analítica o algebraica) y las gavillas se construyen mediante anillos de funciones definidos sobre abiertos (funciones analíticas o regulares según sea el caso).

El estudio de dichas aplicaciones es demasiado rico y amplio para caer en el ámbito del presente trabajo; sin embargo existe una gran variedad de textos a propósito del tema (como el tratado de Hartshorne sobre geometría algebraica [2]). Baste decir que lo dicho hasta ahora comprende la estructura detallada de una maquinaria muy poderosa, que ha permitido obtener puntos de vista completamente nuevos y profundos al respecto de problemas clásicos en geometría, y que probablemente es una de las principales contribuciones de Serre a la gran revolución conceptual que se gestó en esta área a mediados del siglo XX, y que lleva el sello de personalidades de la talla de Weil, Cartan, Chow y Grothendieck.

Bibliografía

[1] Jean-Pierre Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents,* Annals of Mathematics Vol.61 No.2 AMS, 1955

[2] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry,* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977

[3] Samuel Eilenberg y Norman E. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology,* Princeton Mathematical Series, 1952

[4] Michael F. Atiyah y I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra,* Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969

[5] H. J. Kowalsky, *Topological Spaces,* Academic Press, 1965

[6] Joseph J. Rotman, *An Introduction to Algebraic Topology,* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag

[7] Henri Cartan, *Séminaire École Nationale Supérieure,* 1953-1954