



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

## SIMULACIONES DE LOS EFECTOS INSTRUMENTALES DEL SCIDAR GENERALIZADO

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
**F I S I C O**  
P R E S E N T A :  
SERGIO ISRAEL / GONZALEZ ALONSO



DIRECTOR DE TESIS:  
DR. LEONARDO SANCHEZ PENICHE



2002

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**

**Tesis Digitales**

**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**

**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Paginación Discontinua



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
VENEZUELA

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:  
"Simulaciones de los efectos instrumentales del SCIDAR generalizado"

realizado por GONZALEZ ALONSO SERGIO ISRAEL

con número de cuenta 8907818-9 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. LEONARDO JAVIER SANCHEZ PENICHE

Propietario

DR. ENRIQUE LOPEZ MORENO

Propietario

DRA. MARTHA ROSETE AGUILAR

Suplente

DR. REMY FERNAND AVILA FOUCAT

Suplente

DR. ROBERTO ORTEGA MARTINEZ

*Leonardo Sánchez P*

*Enrique López Moreno*

*Martha Rosete Aguilar*

*Remy Foucat*

*Roberto Ortega M.*

Consejo Departamental de Física

*Patricia Goldstein-Menaché*

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura

A:

*Alicia Alonso Fonseca*

*A la mujer, a la amiga, a la madre que fué*

*No quiero convencer a nadie de nada.  
Tratar de convencer a otra persona es indecoroso.  
es atentar contra su libertad de pensar o de creer o de hacer lo que le dé la gana.  
Yo quiero sólo enseñar, dar a conocer, mostrar, no demostrar.  
Que cada uno llegue a la verdad por sus propios pasos,  
y que nadie le llame equivocado o limitado.  
¿Quién es quién para decir "esto es así", si la historia de la humanidad  
no es más que una historia de contradicciones y de tanteos y de búsquedas?*

*Jaime Sabines*

# Agradecimientos

*A Remy Avila F. por su esencial colaboración en la co-dirección de esta tesis, y por haberme propuesto el tema de la misma, así como el tema de mi servicio social en el Instituto de Astronomía. Además del apoyo académico en cuanto a múltiples seminarios que fueron fundamentales para mí en el proceso de comprensión del tema que se expone en este trabajo. Y además por haberme facilitado los medios físicos para la elaboración de la tesis, como el equipo de cómputo y el trámite de la beca de CONACYT. Gracias sinceramente por todo.*

*A mi director de tesis, Leonardo Sánchez P., no sólo por su exhaustiva supervisión del presente trabajo desde sus inicios hasta su conclusión, y por sus valiosas sugerencias en cuanto a contenido teórico y de programación del simulador de SCIDAR, sino también por su amistad y su apoyo en momentos difíciles para mí tanto en el sentido académico como en el personal, sobre todo cuando inicié el trabajo de tesis. Es un gran alivio saber que aún existen personas humanas en un ambiente tan frío como a veces es el científico.*

*Gracias a los dos, Leonardo y Remy, por haberme dado con el tema de esta tesis algo que verdaderamente he disfrutado de principio a fin, a pesar de su complejidad, y de lo cual me siento orgulloso y satisfecho. Gracias también por su admirable paciencia y por la tolerancia que demostraron hacia mí para que pudiera ingresar y dedicarle el tiempo suficiente al Plan de Becarios en Cómputo de Alto Rendimiento en DGSCA.*

*Al Dr. Weiss del Max-Planck Institut für Astronomie, por haber permitido la utilización de su simulador de turbulencia atmosférica Turbulenz.*

*Al Dr. Elfego Ruiz, a la Ing. Ericka Sohn, y al Dr. Salvador Cuevas por su valiosa información acerca de las aberraciones de la óptica del telescopio de 2.1m del OAN-SPM.*

*Deseo agradecer de manera muy especial a la mejor amiga que jamás tendré, mi madre, Sra. Alicia Alonso Fonseca. Por ser mi guía y apoyo en todo momento de mi vida, por alentarme siempre a mantener con firmeza mis decisiones sin importar su naturaleza, por su ejemplo de fortaleza inamovible hasta el final, por recordarme que siempre es bueno guardar algo de optimismo hasta en los peores momentos, por estar siempre presente cuando más necesitaba de ella, y por demostrarme que vale la pena enfrentar los grandes obstáculos que la vida nos impone si con ello logramos nuestros objetivos. Definitivamente sin ella, nada de esto hubiese sido posible.*

*A mi hermana Lilia González A., por su incondicional apoyo moral y económico siempre que ha sido necesario. También a mi hermano Arturo González A., por haberme iniciado a muy temprana edad en el mundo de la ciencia. A mi padre, Sr. Joel González León, por su apoyo económico durante todos estos años.*

*A mi gran super amiga del alma, Mónica Ibonne Morales de la Cruz, por tu invaluable amistad, tan psicodélica y llena de locuras, por tus irreverencias, por tu franqueza, por tu originalidad, por toda la música que disfrutamos, bailamos y cantamos juntos, por tu fascinación por la literatura. Pero lo más importante, gracias por haberme descubierto todo un mundo del que me estaba perdiendo, por compartir tus sueños, alegrías y tristezas conmigo y por aceptarme tal cual soy.*

*A mis mejores amigas que son el tesoro más preciado que tengo, Julia Zárate R., Adriana López G., Mónica Jiménez P., y Xóchitl Cruz L., porque aunque nos veamos con poca frecuencia, cada una de ustedes es una pieza esencial en mi vida. Gracias por todos los inigualables momentos, tanto buenos como malos, por su confianza y apoyo. Gracias por compartir conmigo tanto risas como lágrimas.*

*A los amigos y compañeros de la Facultad y del Instituto de Astronomía: Isidro Ramírez, Oswaldo Toledano, Guillermo Herrera, Ricardo González, Mario Rodríguez, Alejandro Carrillo, Fausto Cervantes, Vicente Forero, Ignacio Cabrera, Sinhué Haro, Manuel Trujillo, Juan Segura, Alfredo Juárez y Eduardo de la Fuente. A toda esa "bola de astrónomos", muchas gracias por haber hecho de mi estancia en el IA algo sumamente placentero. Y en especial, Isidro, Oswaldo y Guillermo, gracias por su sincera amistad.*

*A la Facultad de Ciencias por haberme formado profesionalmente.*

*Al Instituto de Astronomía, por haberme dado las facilidades de infraestructura académica necesarias para el buen desarrollo de este trabajo.*

# Índice

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                          | <b>1</b>  |
| <b>CAPÍTULO 1: Hacia la alta resolución en Astronomía</b>                    | <b>3</b>  |
| 1.1. Los telescopios de nueva tecnología                                     |           |
| Evolución Del Telescopio                                                     | 3         |
| Los Primeros Telescopios De Grán Tamaño                                      | 4         |
| Superficies Reflectoras Segmentadas                                          | 4         |
| El Proyecto VLT: Hacia La Nueva Generación De Telescopios                    | 5         |
| 1.2. Óptica Adaptativa en Astronomía                                         |           |
| Causas De Deformación De La Imagen En Astronomía Óptica Terrestre            | 5         |
| Óptica Adaptativa                                                            | 6         |
| Ángulo De Isoplanatismo                                                      | 7         |
| Estrellas Guía Artificiales                                                  | 7         |
| Anisoplanatismo Focal                                                        | 8         |
| Caracterización De La Turbulencia Atmosférica                                | 9         |
| 1.3. El SCIDAR generalizado                                                  |           |
| Centelleo                                                                    | 9         |
| Concepto Del SCIDAR Clásico Y Del Generalizado                               | 9         |
| El SCIDAR Generalizado Mexicano                                              | 10        |
| <b>CAPÍTULO 2: Turbulencia atmosférica, alta resolución y el SCIDAR</b>      | <b>11</b> |
| 2.1. Modelo físico-matemático de la turbulencia atmosférica                  |           |
| Modelo De Kolmogorov                                                         | 11        |
| Espectro De Potencias                                                        | 12        |
| Fluctuaciones De Temperatura Y Humedad                                       | 12        |
| Funciones De Estructura                                                      | 13        |
| Función De Estructura Del Índice De Refracción                               | 14        |
| 2.2. Perturbaciones de la atmósfera turbulenta sobre un frente de onda plano |           |
| Perturbaciones De La Fase                                                    | 15        |
| Función De Coherencia                                                        | 15        |
| Relación Entre Las Funciones De Coherencia Y De Estructura                   | 16        |
| La Onda A Nivel Del Suelo                                                    | 16        |
| Generalización Para El Caso De Una Distribución Continua De Turbulencia      | 17        |

|                                                                                                               |        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <b>2.3. Alta resolución espacial</b>                                                                          |        |
| Resolución De Un Telescopio                                                                                   | 18     |
| Tiempo De Coherencia                                                                                          | 18     |
| Parámetro De Fried                                                                                            | 18     |
| Imágenes De Largo Tiempo De Exposición                                                                        | 19     |
| Imágenes De Corto Tiempo De Exposición                                                                        | 20     |
| El Centelleo En La Pupila Del Telescopio                                                                      | 21     |
| Evolución Temporal Del Centelleo                                                                              | 21     |
| <b>2.4. SCIDAR clásico</b>                                                                                    |        |
| Determinación De $C_n^2(h)$ y $\Gamma_v(h)$ Con El SCIDAR Clásico                                             | 22     |
| Función De Autocorrelación Para Una Estrella Doble                                                            | 23     |
| <b>2.5. SCIDAR generalizado</b>                                                                               |        |
| Ventajas Del SCIDAR Generalizado                                                                              | 24     |
| Intercorrelación Con Estrellas Sencillas                                                                      | 25     |
| Intercorrelación Con Estrellas Dobles                                                                         | 25     |
| Sistema Óptico Del SCIDAR Generalizado                                                                        | 27     |
| Implicaciones De La Simulación Computacional del SCIDAR                                                       | 27     |
| <br><b>CAPÍTULO 3: TurbuLenz: Simulaciones de los efectos de la atmósfera turbulenta</b>                      | <br>29 |
| <b>3.1. Descripción del programa TurbuLenz</b>                                                                |        |
| Características Generales                                                                                     | 29     |
| Evolución Temporal                                                                                            | 30     |
| Limitaciones de cálculo                                                                                       | 30     |
| Muestreo En El Plano Pupila                                                                                   | 30     |
| Muestreo En El Plano Imagen                                                                                   | 31     |
| Archivos De Salida                                                                                            | 32     |
| <b>3.2. Análisis detallado del funcionamiento de TurbuLenz</b>                                                |        |
| Estructura De Los Parámetros De Entrada                                                                       | 32     |
| Propagación A Través De La Turbulencia                                                                        | 34     |
| <b>3.3. Pruebas realizadas con TrubuLenz previas a su utilización con el simulador de SCIDAR Generalizado</b> |        |
| Función De Estructura                                                                                         | 35     |
| Speckles En El Plano Imagen                                                                                   | 36     |
| Speckles En El Plano De La Pupila                                                                             | 36     |
| Speckles En El Plano De Análisis                                                                              | 38     |
| <br><b>CAPÍTULO 4: Simulador de SCIDAR generalizado</b>                                                       | <br>40 |
| <b>4.1. Funcionamiento del simulador de SCIDAR generalizado</b>                                               |        |
| Descripción General                                                                                           | 40     |
| Parámetros de Entrada                                                                                         | 41     |
| Traslado De Las Imágenes Al Plano Pupila                                                                      | 43     |
| Máscara De La Pupila                                                                                          | 43     |
| Aberraciones De La Óptica Del Telescopio                                                                      | 44     |
| Propagación, Estrella Fuera De Eje                                                                            | 44     |
| Cálculo De Las Intensidades En El Plano De Análisis                                                           | 45     |
| Cálculo De Autocorrelaciones                                                                                  | 46     |
| Cálculo De Intercorrelaciones                                                                                 | 47     |

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Archivos De Salida                                                                                                           | 48 |
| <b>4.2. Cuantificación de resultados del simulador de SCIDAR Generalizado</b>                                                |    |
| Separación De Imágenes De Centelleo                                                                                          | 50 |
| Separación De Los Picos Laterales                                                                                            | 51 |
| Variación De La Intensidad Con Respecto A La Altura                                                                          | 52 |
| Variación del FWHM con respecto a la altura                                                                                  | 53 |
| Variación De La Intensidad Con Respecto Al Parámetro De Fried                                                                | 54 |
| Detección Del Vector Velocidad Del Viento                                                                                    | 55 |
| <b>CAPÍTULO 5: Efectos de las aberraciones de la óptica del telescopio</b>                                                   | 58 |
| 5.1. Óptica Activa                                                                                                           | 58 |
| 5.2. Aberraciones ópticas y polinomios de Zernike                                                                            | 59 |
| 5.3. Aberraciones ópticas con el simulador de SCIDAR clásico                                                                 | 63 |
| 5.4. Aberraciones ópticas con el simulador de SCIDAR generalizado                                                            | 64 |
| <b>CAPÍTULO 6: Conclusiones</b>                                                                                              | 67 |
| 6.1. Evaluación del simulador de SCIDAR generalizado                                                                         | 67 |
| 6.2. Perspectivas                                                                                                            | 68 |
| <b>APÉNDICE A: Difracción y límite de resolución de un telescopio</b>                                                        | 69 |
| A.1. Difracción por aberturas cuadradas o rectangulares                                                                      | 69 |
| A.2. Difracción por aberturas circulares o anulares                                                                          | 72 |
| <b>APÉNDICE B: Teorema de Nyquist del muestreo</b>                                                                           | 76 |
| <b>APÉNDICE C: Diagramas de flujo de TurbuLenz</b>                                                                           | 78 |
| <b>APÉNDICE D: Diagramas de flujo del simulador de SCIDAR Generalizado</b>                                                   | 85 |
| <b>APÉNDICE E: Reducción de datos de perfiles de viento y turbulencia obtenidos con el SCIDAR generalizado en el OAN-SPM</b> | 96 |
| E.1. Resumen                                                                                                                 | 96 |
| E.2. Análisis de datos                                                                                                       | 96 |
| E.3. Interpretación gráfica                                                                                                  | 98 |

# Introducción

Los astrónomos necesitan de telescopios cada vez más grandes debido a que el poder colector de fotones (sensibilidad) se incrementa directamente con el tamaño del instrumento. Sin embargo la turbulencia atmosférica causa una notable degradación de las imágenes adquiridas con los grandes telescopios que se utilizan actualmente en la investigación astronómica, lo que se traduce en una pérdida de resolución equivalente a la de un telescopio de 10 cm de diámetro o incluso menor.

Existen varias técnicas instrumentales dedicadas a la medición y eliminación de estos efectos de degradación, lo que en general se conoce como Óptica Adaptativa. En particular, se aplican diversos métodos para la caracterización de las propiedades espacio-temporales de la turbulencia atmosférica para su posterior aplicación al control de la superficie de espejos deformables para así contrarrestar los efectos de la turbulencia. Pero estos no aportan información relacionada con la distribución vertical de la misma.

Existe, sin embargo, un método con el cual es posible caracterizar la estructura vertical de la turbulencia. Utilizando imágenes de centelleo de estrellas simples o dobles, es posible conocer la intensidad de la turbulencia  $C_n^2(h)$  y el vector velocidad del viento  $\vec{V}(h)$  para capas turbulentas independientes en la atmósfera, así como la altura  $h$  de cada una de ellas. Este método se conoce con el nombre de SCIDAR generalizado, por sus siglas en inglés de *Scintillation Detection And Ranging*, y en los últimos años se ha convertido en una herramienta imprescindible para la caracterización de los sitios de observación astronómica.

El principal objetivo de la presente tesis es la presentación de un modelo computacional del SCIDAR generalizado, para su posterior aplicación en la calibración y optimización del instrumento real, que actualmente se encuentra en proceso de desarrollo en el Instituto de Astronomía de la UNAM, y que se instalará en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, B.C.. Al realizar simulaciones por computadora del SCIDAR generalizado, es posible identificar problemas en el funcionamiento del instrumento real y corregirlos antes de la utilización de datos reales, lo que convierte al simulador de SCIDAR en una útil herramienta para el estudio de sus efectos instrumentales.

En el primer capítulo se plantea el contexto de las investigaciones relacionadas con el SCIDAR generalizado, comenzando por definir el concepto de Óptica Adaptativa y una muy breve historia del desarrollo de los grandes telescopios de alta tecnología que en la actualidad se utilizan en los observatorios astronómicos. Se plantea la necesidad de caracterizar el frente de onda deformado para su posterior corrección (óptica de alta resolución), y se dan posibles soluciones para esa caracterización. Se expone de esta manera la necesidad de contar con métodos efectivos de caracterización de los sitios de observación astronómica. Se describe el SCIDAR generalizado como una herramienta útil para determinar el perfil de estructura de las variaciones del índice de refracción y el vector velocidad del viento para las distintas capas turbulentas.

Para entender los datos de entrada y los resultados del simulador de SCIDAR, se hace necesario dar una introducción al estudio de la turbulencia atmosférica y la óptica de alta resolución. Este es el propósito del segundo capítulo, en donde se expone el modelo de turbulencia de Kolmogorov y se describen matemáticamente las deformaciones que sufre una onda electromagnética que atraviesa la atmósfera turbulenta. En las secciones 2.1 a 2.3, se resume la teoría expuesta por Roddier [30]. Las secciones 2.4 y 2.5

incluyen una síntesis de información publicada por Avila [3-7]. Aquí se definen los conceptos de *espectro de potencias*, *función de estructura* y *función de coherencia*, con lo que es posible definir la función  $C_n^2(h)$ .

Posteriormente se define la resolución espacial de un telescopio y se introducen los conceptos de *tiempo de coherencia* y *parámetro de Fried*, utilizados en óptica de alta resolución. Se exponen las diferencias fundamentales entre las imágenes de corto y largo tiempo de exposición y la información que se puede obtener de cada una de ellas, en particular, se describe la morfología de las imágenes de centelleo, y se definen los conceptos de *speckles* y *disco de seeing*. Adicionalmente se dan expresiones para la varianza del centelleo y su evolución temporal. Con lo anterior es posible describir el funcionamiento del SCIDAR y los resultados que se obtienen al observar una estrella sencilla o una estrella doble, se exponen las limitaciones del instrumento y se presenta al SCIDAR generalizado como una técnica más avanzada que cubre estas limitaciones. Aquí se exponen las ecuaciones que rigen el funcionamiento del instrumento, la *función de autocorrelación*, la *función de intercorrelación*

# Hacia la Alta Resolución en Astronomía

## 1.1. Los telescopios de nueva tecnología

### EVOLUCIÓN DEL TELESCOPIO

La búsqueda del entendimiento del cosmos es una de las tareas más antiguas en la historia de la humanidad. La investigación en Astronomía ha ocupado siempre un lugar especial en la ciencia. Este campo de investigación, como tantos otros, depende invariablemente de los instrumentos de observación utilizados. Desde su invención, hace 400 años, el telescopio ha evolucionado desde un dispositivo pequeño que se manejaba manualmente, hasta un enorme instrumento controlado por computadoras y con una salida completamente digital. Las actividades en la Astronomía observacional actual dependen de los desarrollos de tecnologías altamente sofisticadas como son sistemas ópticos y fotosensores de muy alta eficiencia, estructuras mecánicas capaces de soportar grandes masas con poca o nula vibración, dispositivos electromecánicos capaces de mover esas estructuras con gran precisión, y equipos de cómputo capaces de procesar grandes cantidades de información. Existen dos características esenciales del telescopio, que han dictado su evolución: El poder colector de luz y la resolución angular. Ambos dependen del diámetro del espejo primario del telescopio. Entre mayor sea el área de dicho espejo, mayor será el número de fotones colectados por unidad de tiempo y, en consecuencia, se podrán observar objetos más débiles y lejanos. El tamaño angular de los objetos observables, por otra parte, es inversamente proporcional al diámetro del espejo primario de acuerdo con el criterio de Rayleigh, que nos dice qué tan cerca pueden estar dos objetos para que nuestro instrumento, en este caso el telescopio, los pueda diferenciar.

Un frente de onda plano proveniente de una estrella, que se considera situada en el infinito, será convertido por el instrumento en un frente de onda perfectamente esférico, formando la imagen. Si dicho frente de onda recibido por el instrumento no atraviesa ningún tipo de medio turbulento, como es el caso de un telescopio espacial, el poder de resolución angular estará limitado solamente por la difracción de la luz (ver apéndice A). Decimos en este caso que la óptica está *limitada por la difracción*, y se habla de un *límite de resolución*  $\Delta\theta$  del telescopio. Este ángulo  $\Delta\theta$  corresponde al primer cero en el patrón de difracción de Airy [8],[36] y por lo tanto dos objetos que se encuentren separados entre sí por una distancia menor que  $\Delta\theta$  no podrán ser diferenciados por el instrumento. El lector puede encontrar información más detallada en el apéndice A.

Sin embargo, para observaciones realizadas desde el suelo, la atmósfera terrestre se vuelve parte del sistema óptico. Veremos más adelante que en longitudes de onda visibles, la resolución del sistema completo está limitada por la turbulencia atmosférica, y no por el tamaño del telescopio.

## LOS PRIMEROS TELESCOPIOS DE GRÁN TAMAÑO

Hacia finales del siglo XIX y principios del XX se hicieron enormes esfuerzos para construir telescopios cada vez más grandes. El telescopio refractor de mayor tamaño que se llegó a construir medía 1 m de diámetro, pertenecía a la universidad de Chicago y fue puesto en operación en 1897. Fue entonces que se demostró la imposibilidad de construir telescopios refractores de mayor dimensión, pues fabricar una lente refractora de estas características enfrenta serios problemas técnicos que producen defectos que afectan la calidad de las observaciones.

Se decidió entonces adoptar a los telescopios reflectores como una alternativa viable para la construcción de superficies colectoras cada vez mayores. Al principio se construyeron espejos primarios monolíticos y rígidos. El primer telescopio de gran tamaño con estas características, cuyo primario medía 6 m de diámetro, se comenzó a construir en 1960 en la entonces Unión de Repúblicas Soviéticas Socialistas, e inició su operación en 1976. Otro ejemplo de telescopio con un espejo primario monolítico y rígido es el telescopio de 2.1 m de diámetro perteneciente al Observatorio Astronómico Nacional, que está situado en la sierra de San Pedro Mártir, en Baja California Norte (fig. 1.1).

### SUPERFICIES REFLECTORAS SEGMENTADAS

Después de la construcción del telescopio soviético, se puso en evidencia que un espejo primario monolítico de aproximadamente 8 m de diámetro, constituiría un límite infranqueable. Existen dos opciones posibles para salvar esta limitante, la primera consiste en la construcción de espejos delgados y flexibles, soportados por actuadores electromecánicos que controlan la forma de su superficie. La otra opción es utilizar espejos segmentados que forman una sola superficie reflectora. Tal es el caso del telescopio doble Keck, con primarios de 10 m de diámetro cada uno, formados por componentes hexagonales. En el Instituto de Astronomía de la UNAM, se trabaja en el proyecto de un telescopio con espejo primario segmentado, con una capacidad colectora total equivalente a 6.5 m de diámetro. El Telescopio Infrarrojo-Óptico Mexicano (TIM) (fig. 1.2), constituye un esfuerzo para que la investigación nacional en Astronomía continúe a niveles de vanguardia internacional.

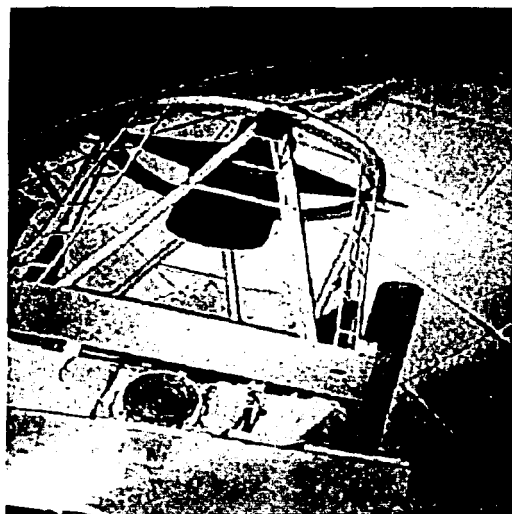


Figura 1.1:

El telescopio  
de 2.1 m del  
Observatorio  
Astronómico  
Nacional San  
Pedro Mártir.

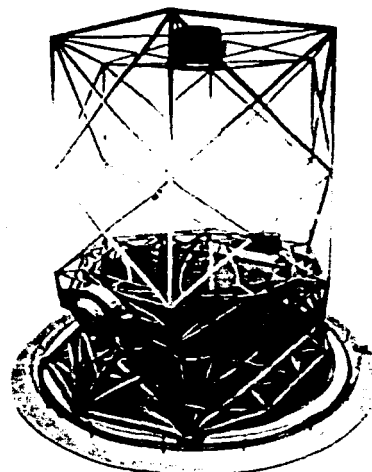


Figura 1.2:

Proyecto  
para la  
construcción  
del TIM  
(Telescopio  
Infrarrojo-  
Óptico  
Mexicano)

## EL PROYECTO VLT: LA NUEVA GENERACIÓN DE TELESCOPIOS

Uno de los proyectos más novedosos es el VLT (Very Large Telescope), del European Southern Observatory, que consiste en un arreglo de cuatro telescopios de 8.2 m cada uno y tres telescopios auxiliares de 1m. Cada componente puede trabajar de manera independiente o en conjunto, en cuyo caso se tendría una superficie reflectora equivalente a un solo telescopio de 16 m de diámetro, el mayor en el mundo.

El ANTU, primer telescopio del arreglo VLT, comenzó a funcionar en mayo de 1998, el segundo, KUEYEN, en marzo de 1999, el tercero, MELIPAL, en enero del 2000. Y finalmente, el 21 de julio de 2001 fue instalado en su estructura mecánica el cuarto componente, el YEPUI. Hasta el momento de la redacción del presente trabajo, el YEPUI continúa en la etapa de pruebas ópticas y mecánicas.

Sin embargo, el tamaño de la superficie colectora de fotones de un telescopio, no es el único factor determinante para obtener imágenes de alta calidad. La turbulencia atmosférica degrada significativamente las imágenes astronómicas. Resulta necesario un sistema de corrección óptica en tiempo real, que nos permita la optimización de los grandes telescopios actuales.

## 1.2. Óptica Adaptativa en Astronomía

### CAUSAS DE DEGRADACIÓN DE LA IMAGEN EN ASTRONOMÍA ÓPTICA TERRESTRE

El frente de onda proveniente de los objetos astronómicos, se deforma principalmente por la turbulencia atmosférica. Las deformaciones varían muy rápidamente. Un sistema de detección de estas variaciones trabaja en una banda de frecuencias comprendida entre 10 Hz y 1 KHz. El frente de onda se ve degradado también por las aberraciones en la óptica del telescopio, que varían mucho más lentamente. Un instrumento que mida estas deformaciones trabaja a una frecuencia menor a 1 Hz [9]. Las deformaciones del frente de onda debidas a la óptica del telescopio son de particular importancia, regresaremos al tema en el capítulo 5. Finalmente, la calidad de imagen puede verse degradada por los instrumentos utilizados en el telescopio.

Incluso en los mejores sitios astronómicos, los telescopios terrestres que operan en la banda del visible no pueden alcanzar una resolución angular mejor que la obtenida con telescopios de 10 ó 20 cm de diámetro. Para un telescopio de 4 m de diámetro, la turbulencia atmosférica degrada su resolución espacial por más de un orden de magnitud comparada con el límite de difracción (límite de resolución teórica del telescopio, apéndice A). Como resultado, la intensidad en el centro de la imagen de una estrella se ve disminuida por un factor de 100 o más. Esto es ocasionado por perturbaciones espaciales y temporales del frente de onda inducidas por la turbulencia en varias capas de la atmósfera (fig. 1.3). Una de las principales razones por las cuales se ha puesto en operación el telescopio espacial Hubble, es precisamente para evitar estos problemas, pues en el espacio los efectos de la atmósfera son nulos. El problema de los telescopios espaciales es su elevado costo de construcción, puesta en órbita y mantenimiento. Por otra parte, la observación astronómica desde la superficie terrestre ofrece costos más bajos en cuanto a tecnología, acceso y posibilidad de construir telescopios de diámetro mayor [27]. En este caso, necesariamente se tiene que enfrentar el complejo problema de caracterizar la turbulencia atmosférica, y así ser capaces de corregir las deformaciones que ésta introduce al frente de onda proveniente de los objetos astronómicos.

El índice de refracción del aire es función de su temperatura, por lo tanto, cuando un frente de onda plano, como puede ser el caso de la luz proveniente de una estrella que se considera situada al infinito, atraviesa un medio térmicamente inhomogéneo como la atmósfera terrestre, las fluctuaciones del índice de refracción provocan avances o retrasos en el camino óptico que se traducen en deformaciones de la fase del frente de onda. Algunos de los principales efectos ópticos provocados por la turbulencia atmosférica son, por ejemplo, el desplazamiento aleatorio de la imagen en torno a su centroide, con la consiguiente pérdida de resolución.

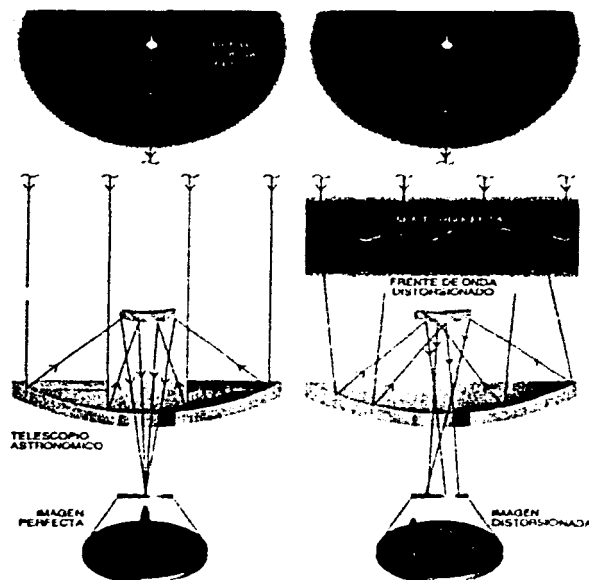


Figura 1.3:

Deformaciones del frente de onda debidas a la turbulencia atmosférica. Un frente de onda esférico proveniente de una estrella, al infinito se puede considerar plano. En ausencia de turbulencia atmosférica el frente de onda no se deforma y se tiene una imagen perfecta, limitada por la difracción del instrumento (figura de Airy); por el contrario, al pasar por las capas turbulentas, el frente de onda se deforma y se produce una imagen aberrada.

Esquema: Sergio Alejandro Matias Hernandez.

## ÓPTICA ADAPTATIVA

El concepto de óptica adaptativa consiste en remover las distorsiones del frente de onda mediante métodos opto-mecánicos [9]. Básicamente estos métodos consisten en adaptar de manera continua la superficie de un espejo deformable (conjugado al espejo primario de un telescopio). Para hacerlo la superficie del espejo se debe modificar de tal manera que compense las deformaciones del frente de onda (fig. 1.4). La aplicación de la óptica adaptativa en astronomía requiere entonces del desarrollo de sofisticados instrumentos opto-mecánicos, así como de sus respectivos dispositivos electrónicos de control en tiempo real.

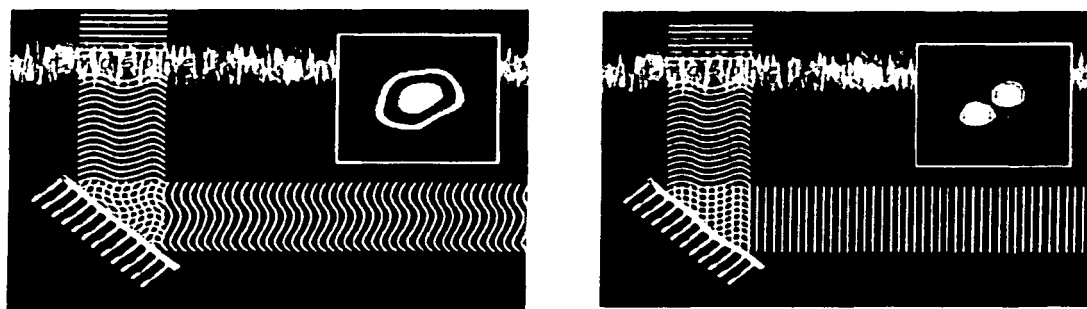


Figura 1.4 Principio de la óptica adaptativa. Un espejo deformable compensa las aberraciones del frente de onda.

A Babcock (1953) se debe el diseño del primer sistema de corrección en tiempo real, el cual empleó para disminuir las deformaciones de las imágenes de gránulos solares. Durante los años 70 la investigación en óptica adaptativa fue campo de estudio exclusivamente militar, en tanto que el interés científico de los astrónomos observacionales de esa época se orientaba primordialmente hacia los telescopios espaciales como la única alternativa viable para la puesta en operación de nuevos observatorios [37]. Posteriormente, a principios de los años 80, los astrónomos lograron obtener algo de esa información militar. Este hecho marcó el nacimiento de la siguiente generación de telescopios terrestres, con espejos primarios de ocho o diez metros y equipados con sistemas de óptica adaptativa, consistente en un sistema retroalimentado capaz de medir las deformaciones del frente de onda en tiempo real y controlar un sistema de corrección que modifica el frente de onda de manera que se recupere la resolución espacial en el detector científico (fig. 1.5).

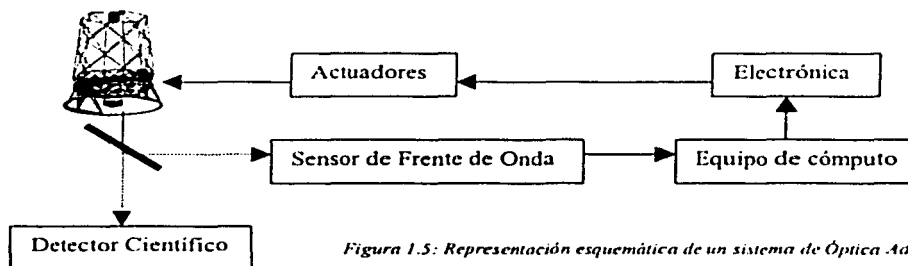


Figura 1.5: Representación esquemática de un sistema de Óptica Adaptativa.

Algunas de las aplicaciones inmediatas de la óptica adaptativa en astronomía son, por ejemplo: La resolución de configuraciones complejas, como las regiones centrales de cúmulos globulares, la región central de nuestra galaxia y una gran variedad de componentes en otras galaxias, la detección de fuentes puntuales muy débiles, la observación de "compañeros" débiles, con técnicas como: Coronografía, espectroscopia de objetos puntuales e interferometría.

## ÁNGULO DE ISOPLANATISMO

El buen funcionamiento de un sistema de óptica adaptativa depende en gran medida de que se disponga de un número de fotones suficiente para medir el frente de onda perturbado. El sensor de frente de onda debe determinar a cada instante el valor de la diferencia de fase, avance o retardo, introducido por la turbulencia atmosférica. Para un objeto astronómico no puntual y poco brillante, usualmente se monitorea la luz proveniente de una *estrella guía*, que se encuentre suficientemente cercana para que exista una buena correlación entre los dos frentes de onda. Esta región define el *ángulo de isoplanatismo*, la distancia dada en segundos de arco en la cual se puede considerar que todos los frentes de onda están correlados. Este ángulo de isoplanatismo depende de la longitud de onda, las condiciones de turbulencia y varía inversamente con la altura de las capas turbulentas, entre más alta esté una capa, menor será el ángulo de isoplanatismo. Típicamente el ángulo de isoplanatismo tiene un valor de unos 4 segundos de arco en el visible.

## ESTRELLAS GUÍA ARTIFICIALES

Para el estudio de objetos poco brillantes, es deseable contar con alguna estrella brillante dentro del ángulo de isoplanatismo. Desafortunadamente esto no siempre es posible. Sin embargo se puede crear una estrella artificial por medio de la técnica de *dispersión del sodio*. Se utiliza un haz laser de gran poder para excitar los átomos de sodio presentes en abundancia en la mesosfera [37], aproximadamente a 95 km de altura sobre el nivel del mar (fig. 1.6).



Figura 1.6:

Generación de una estrella guía artificial utilizando un rayo laser para excitar los átomos de sodio presentes en las capas altas de la atmósfera.

### ANISOPLANATISMO FOCAL

Existen varios problemas que se derivan inmediatamente de la utilización de estrellas artificiales para correcciones de óptica adaptativa. Uno de ellos es el elevado costo de un cañón laser lo suficientemente potente como para alcanzar las capas altas de la atmósfera. Otro problema de suma importancia es el hecho de que un sistema de este tipo produce un frente de onda que proviene de una altura finita en la atmósfera terrestre, lo cual provoca un efecto llamado *anisoplanatismo focal* (fig. 1.7) [37]. Es posible considerar que el frente de onda de la estrella guía está dentro del ángulo de isoplanatismo, y que por lo tanto es afectado por la turbulencia atmosférica de la misma manera que el frente de onda del objeto de estudio. Sin embargo, dado que la estrella artificial se encuentra a una distancia finita, el haz de luz es cónico a diferencia del haz proveniente del objeto astronómico, que es cilíndrico. Ello provoca que los haces crucen zonas de tamaño distinto en capas turbulentas altas, induciendo una diferencia entre el frente de onda medido con la estrella artificial y el frente de onda del objeto astronómico que se quiere corregir.

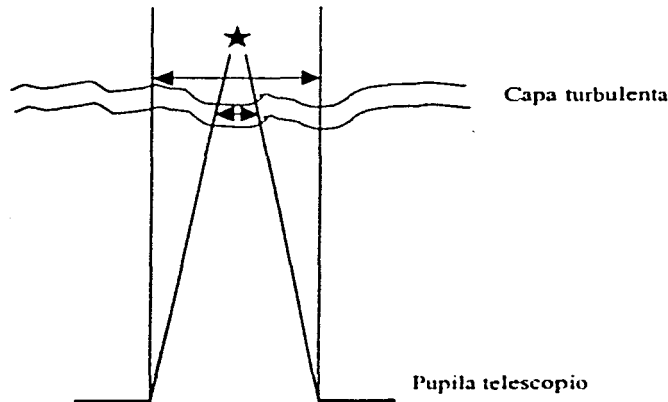


Figura 1.7. El fenómeno de anisoplanatismo focal (ver texto)

Otro problema derivado directamente del fenómeno de anisoplanatismo focal, es la caracterización matemática del frente de onda. Al tener una envolvente esférica, las ecuaciones que describen el fenómeno se complican, provocando un grave problema en el diseño de sistemas de óptica adaptativa en tiempo real, pues se necesita mayor tiempo de cálculo en la computadora de control.

## CARACTERIZACIÓN DE LA TURBULENCIA ATMOSFÉRICA

La caracterización experimental de la turbulencia atmosférica permite conocer la distribución típica de la misma, lo cual a su vez, permite definir el diseño de sistemas de óptica adaptativa. Existen diversos métodos para alcanzar este objetivo y uno de ellos consiste en el análisis de imágenes de centelleo, con una técnica conocida como SCIDAR (Scintillation Detection And Ranging) generalizado, con el cual es posible monitorear de manera continua el perfil de turbulencia en un observatorio y en función de lo anterior, decidir el tipo de observaciones astronómicas a realizar.

Los parámetros fundamentales para caracterizar la turbulencia atmosférica son los perfiles de estructura del índice de refracción  $C_n^2(h)$  y la velocidad del viento  $\vec{v}(h)$ . A partir de éstos, es posible calcular algunos otros parámetros igualmente importantes para la caracterización de la turbulencia atmosférica. Dichos perfiles pueden ser medidos experimentalmente empleando globos sonda, sin embargo este método no da acceso a la evolución temporal de  $C_n^2(h)$  y  $\vec{v}(h)$ , ya que en una noche sólo se pueden lanzar unos cuantos globos. Por este motivo, el método más conveniente para obtener  $C_n^2(h)$  y de  $\vec{v}(h)$  es medirlos remotamente utilizando medios ópticos, lo que puede ser realizado aplicando la técnica SCIDAR.

### 1.3. El SCIDAR generalizado

#### CENTELLEO

La atmósfera afecta a las observaciones astronómicas de varias maneras distintas. Las masas de aire nunca están estáticas y existen capas a distintas temperaturas y densidades, lo que causa fenómenos de convección y turbulencia. Cuando realizamos observaciones astronómicas, incluso a simple vista, existe un fenómeno que es fácil de percibir. El brillo de las estrellas parece fluctuar y decimos que la estrella "titila", este fenómeno conocido como *centelleo* y consiste en la concentración o dispersión de la energía total del frente de onda proveniente del objeto astronómico. El centelleo es provocado por los rápidos cambios del índice de refracción.

#### CONCEPTO DEL SCIDAR CLÁSICO Y DEL GENERALIZADO

El SCIDAR es un instrumento que acoplado a un telescopio, permite medir el  $C_n^2(h)$  y el vector  $\vec{v}(h)$  sobre el observatorio. Su funcionamiento se basa en la detección de centelleo en la pupila del telescopio [38]. La turbulencia en las capas bajas de la atmósfera resulta indetectable con éste método (a veces también llamado SCIDAR clásico), pues el centelleo que se produce es muy débil. Como veremos en el capítulo 2, lo anterior se debe a que el centelleo producido por una capa dada es proporcional a  $h^{-6}$ , donde  $h$  es la distancia entre el plano de medición y la capa en cuestión. Esto se traduce en un problema esencial, pues la turbulencia cercana a la superficie del observatorio y la turbulencia dentro del domo del telescopio representan grandes contribuciones a la perturbación total de la fase del frente de onda. Para evitar ese problema, se observan las imágenes de centelleo en un plano que se encuentra algunos kilómetros por debajo de la pupila. Este método ha sido probado y altamente explotado, y se conoce con el nombre de SCIDAR generalizado (fig. 1.8). Sus ventajas sobre el SCIDAR clásico son evidentes, pues nos permite caracterizar la turbulencia atmosférica aún en las capas cercanas al observatorio y dentro del domo del telescopio.

En astronomía, el SCIDAR generalizado tiende a convertirse en el método estándar para caracterizar sitios astronómicos. En particular, los instrumentos de óptica adaptativa son los directamente beneficiados de los datos que dicho instrumento puede aportar en tiempo real. Por otra parte, el costo de operación de los grandes telescopios de la actualidad es tal que los observatorios necesitan optimizar la utilización del tiempo de telescopio, para lo cual conocer la estructura turbulenta de la atmósfera en tiempo real resulta de una ayuda

invaluable. De hecho, el ideal de cualquier observatorio moderno es contar con predicciones de las características de la turbulencia atmosférica para poder adaptar el tipo de observaciones a realizar. En el Instituto de Astronomía de la UNAM, se trabaja en esa dirección mediante un modelo de simulación numérica [26]. Las mediciones realizadas con el SCIDAR generalizado son indispensables para el desarrollo de dicho modelo.



*Figura 1.8: El SCIDAR generalizado (abajo, centro) perteneciente a la universidad de Niza, instalado en el telescopio de 2.1 m del Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, B.C.*

## EL SCIDAR GENERALIZADO MEXICANO

En el mundo, hasta el momento, solo existen dos ejemplares operacionales del SCIDAR generalizado, desarrollados en la universidad de Niza, Francia, y en el Imperial College, Reino Unido. Varios grupos internacionales están desarrollando actualmente instrumentos similares.

En el Instituto de Astronomía de la UNAM, se ha iniciado la construcción de un SCIDAR Generalizado Mexicano (SGM), para lo cual se requiere de un amplio conocimiento sobre el mismo y sus efectos instrumentales así como experiencia en su manejo. El modelo computacional del SCIDAR generalizado que se presenta en esta tesis, se perfila entonces como una herramienta fundamental para comprender a fondo el funcionamiento del instrumento real, sus capacidades y limitaciones, y por otra parte como herramienta de calibración. La programación de un simulador completo y bien calibrado del SCIDAR generalizado y de sus efectos instrumentales representa una poderosa herramienta que facilitará en un futuro el trabajo con el SGM.

Con el SGM se caracterizarán tanto el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, B.C., como el observatorio de Cananea y de cerro "La Negra" operados por el Instituto Nacional de Astrofísica Óptica y Electrónica (INAOE), así como otros observatorios de la comunidad astronómica internacional (Hawaii, Chile, etc.).

El simulador de SCIDAR utiliza imágenes de centelleo de estrellas dobles. El centelleo es un fenómeno provocado por la turbulencia atmosférica, por lo que antes de describir el funcionamiento del simulador es necesario definir los conceptos relacionados con el estudio y caracterización de la turbulencia atmosférica, así como definir las bases de la óptica de alta resolución.

# Turbulencia atmosférica, alta resolución y el SCIDAR

## 2.1. Modelo físico-matemático de la turbulencia atmosférica

### MODELO DE KOLMOGOROV

La resolución de un telescopio está limitada por la difracción de la pupila, sin embargo las limitaciones que tienen origen en los efectos de las fluctuaciones del índice de refracción, causadas por la atmósfera turbulenta, son aún más significativas. Estas fluctuaciones aleatorias tanto en el espacio como en el tiempo, provocan las perturbaciones en fase y amplitud de una onda que llega a la pupila del telescopio, de tal manera que para las imágenes tomadas con un tiempo de exposición largo (p.e. algunos segundos), la resolución es inferior al límite de difracción [27].

Los tres artículos publicados por A.N. Kolmogorov en 1941 sientan las bases para la descripción de la turbulencia atmosférica y es el modelo matemático actualmente aceptado. Tatarskii desarrolló la teoría de la propagación de las ondas electromagnéticas en un medio turbulento, basado en los trabajos de Kolmogorov principalmente [31]. De acuerdo con Tatarskii, una inestabilidad dinámica provoca la mezcla de masas de aire con distintas densidades y por lo tanto distintos índices de refracción. Estas inestabilidades tienen su origen en un espesor típico de algunos cientos de metros de atmósfera, específicamente en la troposfera ( $z \leq 12$  Km) y eventualmente en la parte baja de la estratosfera ( $12 \leq z \leq 20$  Km). El modelo de Kolmogorov representa las fluctuaciones de velocidad en un fluido turbulento, la atmósfera por ejemplo, como una estructura semi-fractal de masas de aire de escalas decrecientes es decir, existe una escala superior en la que se presentan los fenómenos macroscópicos más grandes y a partir de la misma pueden definirse escalas más pequeñas hasta llegar a una escala mínima, después de la cual la energía se disipa en forma de calor.

La turbulencia se presenta en un fluido cuando un parámetro adimensional llamado *número de Reynolds*, ecuación (2.1), sobrepasa cierto valor crítico que depende de la estructura geométrica del flujo [25].

$$Re = \frac{V_0 L_0}{\nu_0} \quad (2.1)$$

Aquí,  $V_0$  es la velocidad característica del flujo,  $\nu_0$  es la viscosidad cinemática del fluido y  $L_0$  se refiere a un tamaño característico del flujo, que puede ser por ejemplo el diámetro de un tubo por el que pasa el fluido o el área de un obstáculo normal al fluido. La viscosidad cinemática del aire es del orden de

$v_0 = 15 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , y si tomamos  $V_0 = 1 \text{ m/s}$  y  $L_0 = 15 \text{ m}$  ( $L_0$  en el caso de la turbulencia atmosférica puede variar de 10 hasta 100 m a nivel del mar), se obtiene  $Re_{\text{ave}} = 10^6$ , que es mucho mayor que el valor crítico  $Re \approx 2000$  correspondiente a la transición de un flujo laminar a uno turbulento. Para valores tan grandes como  $Re_{\text{ave}}$  la turbulencia está completamente desarrollada y esta es una de las condiciones para aplicar la teoría de Kolmogorov.

La *escala externa*, es la escala en la que se producen los movimientos de mayor dimensión de la coherencia de un frente de onda que se propaga en la atmósfera. La energía cinética de las fluctuaciones de velocidad se transfiere gradualmente a escalas menores de movimiento por medio de vórtices. Identificamos con  $L_0$  a esta escala, que es donde se producen los vórtices más grandes. Dicha energía se transfiere gradualmente a vórtices de menor escala, con una tasa de transferencia que es independiente de la escala. A esta transferencia de energía se le llama la *cascada de Kolmogorov*. La cascada se detiene en la *escala interna*  $l_0$ , donde la energía se disipa en forma de calor por frotamiento viscoso, esta escala es muy pequeña y por lo regular se ignora.

## ESPECTRO DE POTENCIAS

La velocidad local de un fluido turbulento se puede describir como la suma de una velocidad promedio y una velocidad fluctuante que es una variable aleatoria  $V(r, t_0)$ , donde  $r$  es la posición y  $t$  es el tiempo. Para cada instante  $t_0$ , la velocidad  $V(r, t_0)$  se puede descomponer en armónicos del vector de onda  $k$ , introduciendo una variable aleatoria  $\vartheta(k)$ .

$$V(r) = \iiint \vartheta(k) e^{2\pi i k \cdot r} dk \quad (2.2)$$

La energía cinética media  $dE(k)$  en el intervalo  $k, k+dk$ , es proporcional a  $\langle |\vartheta(k)|^2 \rangle$ , que es el espectro de potencias de la velocidad fluctuante  $V(r)$ . Si  $\epsilon_0$  es la tasa de producción o disipación de energía turbulenta, y  $R$  es la escala bajo consideración ( $R=1/k$ ), el orden de magnitud de las fluctuaciones de velocidad es:

$$V \propto (\epsilon_0 R)^{1/3} \quad \therefore \quad dE(k) \propto \epsilon^{2/3} k^{-5/3} dk \quad (2.3)$$

Esto último se debe a que para escalas  $R$  mucho mayores que  $l_0$  la velocidad de la turbulencia  $V$  es independiente de la viscosidad. De hecho depende solamente del índice de producción de energía turbulenta  $\epsilon$ , la escala  $R$  y la densidad de masa  $\rho$  del fluido. Si integramos se obtiene el espectro de energía cinética que también se conoce como *espectro de Kolmogorov en una dimensión*.

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad (2.4)$$

Siempre y cuando  $k$  se encuentre en el *intervalo inercial*  $L_0^{-1} \ll k \ll l_0^{-1}$ . La turbulencia que se puede describir con un espectro de potencias monodimensional  $k^{-5/3}$  se dice que es *homogénea e isotrópica*. Fuera del intervalo inercial el espectro está regido por procesos de disipación y generación.

## FLUCTUACIONES DE TEMPERATURA Y HUMEDAD

La temperatura y la humedad son funciones de la altura en la atmósfera, por lo tanto también ocasionan inhomogeneidades en la estructura atmosférica. Cuando se tiene una capa con un gradiente de temperatura distinto del adiabático, se mezcla aire a distintas temperaturas y a la misma altura, produciéndose entonces fluctuaciones de temperatura. Es posible demostrar que las ecuaciones que describen las fluctuaciones de velocidad son análogas a las ecuaciones correspondientes para las fluctuaciones de temperatura y humedad. Por lo tanto, el espectro de potencias de las fluctuaciones de temperatura  $\Phi_\theta(k)$  y de humedad  $\Phi_\eta(k)$  en una dimensión, son respectivamente:

$$\Phi_\theta(k) \propto k^{-5/3} \quad \Phi_\eta(k) \propto k^{-5/3} \quad (2.5)$$

Donde:

$$\Phi_\theta(k) = 4\pi k^2 \left| \iiint \Theta(r) e^{-2i\pi r \cdot k} dr \right|^2 \quad (2.6)$$

Y  $\Theta(r)$  es la fluctuación de temperatura en torno al promedio  $\langle T(r) \rangle$  (todo el desarrollo siguiente es análogo para las fluctuaciones de humedad), esto es:

$$\Theta(r) = T(r) - \langle T(r) \rangle \quad (2.7)$$

Sin embargo, en lo sucesivo se tratará con espectros tridimensionales; en éste caso  $\Phi(k) = \Phi(k_x, k_y, k_z)$ , y el espectro de potencias tridimensional es:

$$\Phi_T(k) \propto k^{-11/3} \quad (2.8)$$

La covarianza de las fluctuaciones de temperatura se define por:

$$B_T(\rho) = \langle \Theta(r) \Theta(r + \rho) \rangle \quad (2.9)$$

Que de acuerdo con el teorema de Wiener-Khinchine [29], es la transformada triple de Fourier de la función  $\Phi_T(k)$  definida por:

$$B_T(\rho) = \iiint \Phi_T(k) e^{-2i\pi k \cdot \rho} dk \quad (2.10)$$

## FUNCIONES DE ESTRUCTURA

Sin embargo no se puede deducir a partir de (2.8) porque la integral diverge en el origen. El comportamiento estadístico de un medio turbulento puede describirse más fácilmente con la ayuda de *funciones de estructura*. Sea  $x$  un vector que define un punto en el espacio y  $\phi(x)$  un campo escalar homogéneo, es decir, donde las propiedades estadísticas no dependen de  $x$ . La función de estructura de  $\phi$  está definida por:

$$D_\phi(r) = \langle [\phi(x+r) - \phi(x)]^2 \rangle \quad (2.11)$$

Donde  $\langle \rangle$  representa un promedio sobre  $x$ . La función de estructura representa entonces la varianza de las separaciones entre los valores de  $\phi$  tomados en dos puntos del espacio separados por  $r$ . Si  $\phi$  es también función temporal, y si las propiedades estadísticas permanecen invariantes en el tiempo, es posible calcular el promedio temporal (ergodicidad).

Si por ejemplo  $\phi(x) = \Theta(x)$  es la función temperatura en la ecuación (2.11),  $D_\theta(r) = D_1(\rho)$  representa el promedio cuadrático de la variación de temperatura entre dos puntos separados una distancia  $\rho$ .  $D_1(\rho)$  está definida para todos los valores de  $\rho$ , siempre que  $|\rho|$  sea finita. La función de estructura está relacionada con la covarianza por medio de:

$$D_T(\rho) = 2[B_T(0) - B_T(\rho)] \quad (2.12)$$

Definimos  $C_1^2$  como la *constante de estructura de las fluctuaciones de temperatura* para turbulencia homogénea; el valor numérico de  $C_1^2$  caracteriza la intensidad de la turbulencia [4], es posible demostrar (ley de Obukhov) [25] que:

$$D_r(\rho) = C_r^2 \rho^{2/3} \quad (2.13)$$

Y el espectro de potencias (2.8) lo podemos escribir como:

$$\Phi_r(k) = \frac{\Gamma(8/3) \sin(\pi/3)}{4\pi^2} C_r^2 k^{-11/3} = 0.033 C_r^2 k^{-11/3} \quad (2.14)$$

### FUNCIÓN DE ESTRUCTURA DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

El índice de refracción  $n$  del aire es una función  $n(T, C_{H_2O})$  de la temperatura  $T$  y de la concentración de vapor de agua  $C_{H_2O}$ , dicha dependencia la podemos expresar como:

$$n = n_0(T, C_{H_2O}) + ik(C_{H_2O}) \quad (2.15)$$

Donde la parte imaginaria corresponde a la absorción por  $H_2O$  y es importante en las regiones del milimétrico e infrarrojo. Las fluctuaciones  $\Delta n = n_0 - \langle n_0 \rangle$  de la parte real, se pueden escribir como:

$$\Delta n = \frac{\partial n_0}{\partial T} \Theta + \frac{\partial n_0}{\partial C} c \quad (2.16)$$

Donde  $c = C - \langle C \rangle$  es la fluctuación de la concentración de humedad, y  $\Theta$  las fluctuaciones de temperatura (2.7). Para concentraciones pequeñas de humedad, como puede ser el caso de los sitios de observación astronómica, se puede despreciar el segundo término y escribir:

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \left( \frac{\partial n_0}{\partial T} \right)^2 \langle \Theta^2 \rangle \quad (2.17)$$

Dado que las fluctuaciones son isobáricas, de la *relación de Gladstone* [19] se obtiene:

$$\frac{\partial n_0}{\partial T} = \frac{80 \times 10^{-6} P}{T^2} \quad (2.18)$$

Para  $P$  dado en milibares y  $T$  en Kelvin. La función de estructura para el índice de refracción se puede escribir entonces como:

$$D_n(\rho) = C_n^2 \rho^{2/3} \quad (2.19)$$

Con una constante de estructura  $C_n$  relacionada con  $C_r$  por:

$$C_n = \frac{80 \times 10^{-6} P}{T^2} C_r \quad (2.20)$$

De forma análoga, el espectro de potencias de las fluctuaciones en el índice de refracción está dado por:

$$\Phi_n(k) = 0.033 C_n^2 k^{-11/3} \quad (2.21)$$

## 2.2. Perturbaciones de la atmósfera turbulenta sobre un frente de onda plano

### PERTURBACIONES DE LA FASE

Supongamos que la atmósfera terrestre es estática y homogénea en todo su volumen a excepción de una capa situada a una altura  $h$  y de espesor  $\delta h$ , con fluctuaciones aleatorias del índice de refracción que son función del camino óptico y de la altura,  $n = n(x, h)$ . El espesor de esta capa se escoge de tal manera que sea grande comparado con la escala de las inhomogeneidades de la turbulencia, y lo suficientemente pequeño para poder ignorar los efectos de difracción a lo largo de la distancia  $\delta h$ . Considérese una onda plana monocromática  $V_0 = 1$  que atraviesa esta capa. A la salida, la onda se puede describir mediante [1]:

$$V_h(x) = e^{i\varphi(x)} \quad (2.22)$$

Donde  $\varphi(x)$  es la perturbación de la fase introducida por las fluctuaciones del índice de refracción a lo largo del camino óptico  $x$ , y es una variable aleatoria que está en función de  $n(x, h)$ . Si tomamos el número de onda  $k = 2\pi/\lambda$ , se puede escribir como [8]:

$$\varphi_h(x) = k \int_h^{h+\delta h} n(x, z) dz \quad (2.23)$$

### FUNCIÓN DE COHERENCIA

La función de coherencia a la salida de la capa está determinada por el momento de segundo orden de  $V_h(h)$  [32]:

$$B_h(\xi) = \langle V_h(x)_h V_h^*(x + \xi)_h \rangle \quad (2.24)$$

Sustituyendo (2.22) en esta última expresión se obtiene:

$$B_h(\xi) = \left\langle e^{i[k\varphi(x) - \varphi(x+\xi)]} \right\rangle \quad (2.25)$$

Donde los promedios están tomados en el espacio. La función  $\varphi_h(x)$  se puede ver como la resultante de un gran número de perturbaciones, que son independientes de la fase siempre que se cumpla  $\delta h \gg L_0$ , con  $L_0$  la escala externa. Por el teorema del límite central,  $\varphi(x)$  tiene una distribución gaussiana cuyo promedio es nulo. Por otra parte, si  $u$  es una variable aleatoria con una distribución gaussiana, se puede demostrar que:

$$\langle e^{iu} \rangle = e^{-\frac{1}{2}\langle u^2 \rangle} \quad (2.26)$$

Que transforma (2.25) en:

$$B_h(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle [\varphi(x) - \varphi(x+\xi)]^2 \rangle} \quad (2.27)$$

O bien, utilizando la función de estructura (2.11):

$$B_h(\xi) = e^{-\frac{1}{2}D_\varphi(\xi)} \quad (2.28)$$

## RELACIÓN ENTRE LAS FUNCIONES DE COHERENCIA Y DE ESTRUCTURA

La función de estructura  $D_\varphi(\xi)$  debe estar relacionada con la estadística de las fluctuaciones del índice de refracción. Si  $B_\varphi(\xi)$  es la covarianza de  $\varphi(x)$ :

$$B_\varphi(\xi) = \langle \varphi(x) \varphi(x + \xi) \rangle \quad (2.29)$$

Sustituyendo la expresión para la fase a la salida de la capa turbulenta (2.23) en (2.29), simplificando y aplicando un cambio de variables, es posible demostrar que:

$$B_\varphi(\xi) = k^2 \delta h \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi, \zeta) d\zeta \quad (2.30)$$

Donde  $B_n(\xi, \zeta)$  es la covarianza tridimensional de las fluctuaciones del índice de refracción. Con (2.30) podemos relacionar la función de estructura  $D_\varphi(\xi)$  con su covarianza mediante [32]:

$$D_\varphi(\xi) = 2[B_\varphi(0) - B_\varphi(\xi)] = 2k^2 \delta h \int [B_n(0, \zeta) - B_n(\xi, \zeta)] d\zeta \quad (2.31)$$

Si utilizamos el equivalente de la ecuación (2.12) para la función de estructura del índice de refracción  $D_n(\xi, \zeta)$ , la ecuación (2.31) se puede escribir como [25]:

$$D_\varphi(\xi) = k^2 \delta h \int [D_n(\xi, \zeta) - D_n(0, \zeta)] d\zeta \quad (2.32)$$

Y usando la expresión de la ley de Obukhov (2.13):

$$D_n(\xi, \zeta) = C_n^2 (\xi^2 + \zeta^2)^{5/2} \quad (2.33)$$

De tal manera que (2.32) se transforma en:

$$D_\varphi(\xi) = k^2 C_n^2 \delta h \int \left[ (\xi^2 + \zeta^2)^{5/2} - \zeta^5 \right] d\zeta = 2.91 k^2 C_n^2 \delta h \xi^{5/2} \quad (2.34)$$

Y entonces la correlación espacial o función de coherencia para la amplitud compleja de la onda que sale de la capa turbulenta (2.28) es:

$$B_k(\xi) = e^{-\frac{1}{2} \left( 2.91 k^2 C_n^2 \delta h \xi^{5/2} \right)} \quad (2.35)$$

## LA ONDA A NIVEL DEL SUELO

El campo complejo  $\Psi_0(x)$  a nivel del suelo ( $h=0$ ) es el campo difractado por la capa y por lo tanto se puede obtener mediante una transformación de Fresnel, que consiste en la convolución de la ecuación de onda (2.22) con el propagador de Fresnel:

$$\Psi_0(x) = \Psi_k(x) * \frac{1}{i\lambda h} e^{i\pi \frac{x^2}{\lambda h}} \quad (2.36)$$

Las funciones de coherencia son invariantes ante difracción de Fresnel, de tal manera que si desarrollamos la ecuación (2.24) usando (2.36), se puede demostrar que la función de coherencia a nivel del suelo es exactamente igual a la función de coherencia a la salida de la capa,  $B_0(\xi) = B_h(\xi)$ .

### GENERALIZACIÓN PARA EL CASO DE UNA DISTRIBUCIÓN CONTÍNUA DE TURBULENCIA

Cuando una onda electromagnética proveniente de un objeto astronómico atraviesa una capa turbulenta, sufre fluctuaciones de fase debidas a las inhomogeneidades del índice de refracción. A la salida de la capa se puede considerar que la amplitud de la onda no es afectada puesto que los efectos de difracción son despreciables. Sin embargo, cuando la onda llega al suelo ha pasado por varias capas turbulentas, y presenta perturbaciones tanto de amplitud como de fase. Cuando se hacen observaciones cerca del cenit, es decir, a ángulos menores de  $60^\circ$  con respecto a la vertical, es posible considerar que las perturbaciones de la fase son pequeñas. En este caso, el espectro de potencias de las fluctuaciones espaciales de la amplitud compleja de la onda  $W(r)$  a nivel del suelo se puede escribir como:

$$W_\Psi(f) = W_\phi(f) + W_\chi(f) \quad (2.37)$$

Donde  $f$  es una frecuencia espacial en el plano del frente de onda y  $W_\phi(f)$  y  $W_\chi(f)$  son los espectros de potencias de las fluctuaciones de fase y del logaritmo de la amplitud de la onda respectivamente. Las expresiones de estos tres espectros de potencias como función de la longitud de onda son:

$$\begin{aligned} W_\Psi(f) &= 0.38\lambda^{-2} f^{-1/2} \int C_n^2(h) dh \\ W_\phi(f) &= 0.38\lambda^{-2} f^{-1/2} \int C_n^2(h) \cos^2(\pi\lambda h f^2) dh \\ W_\chi(f) &= 0.38\lambda^{-2} f^{-1/2} \int C_n^2(h) \sin^2(\pi\lambda h f^2) dh \end{aligned} \quad (2.38)$$

La función de coherencia para observaciones cercanas al cenit cuando el frente de onda atraviesa una distribución continua de turbulencia es una generalización de la ecuación (2.35). Para observaciones fuera del cenit, el módulo de la proyección se ve reducido en un factor  $\cos(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es el ángulo de observación medido desde el cenit:

$$B_0(\xi) = e^{-\frac{1}{2} \left( 2.914^2 (\cos \gamma)^{-1} \xi^2 \int C_n^2(h) dh \right)} \quad (2.39)$$

La amplitud compleja  $A(\alpha)$  difractada a un ángulo  $\alpha$  en el plano focal del telescopio es proporcional a:

$$A(\alpha) \propto \int \Psi_0(x) P_0(x) e^{\left( -2i\pi u \frac{x}{\lambda} \right)} dx \quad (2.40)$$

Donde  $P_0(x)$  es la función de transmisión de la abertura del telescopio. En el caso de óptica perfecta y ausencia de turbulencia (ver apéndice A),  $P_0(x) = 1$  dentro de la pupila y 0 fuera de ella. En el caso de aberraciones ópticas, los errores del frente de onda se introducen mediante un argumento adicional en la transmisión compleja  $P_0(x)$ . Definimos entonces la variable  $u = x/\lambda$ , para escribir  $\Psi(u) = \Psi_0(\lambda u)$  y  $P(u) = P_0(\lambda u)$ . Usando este cambio de variables, (2.40) se transforma en:

$$A(\alpha) \propto \mathfrak{F}[\Psi(u) \cdot P(u)] \quad (2.41)$$

Donde  $\mathfrak{F}$  denota la transformada compleja de Fourier. La PSF o *point spread function* (ver apéndice A) es la irradiancia difractada en la dirección  $\alpha$ :

$$S(\alpha) = |A(\alpha)|^2 \propto |\Im[\Psi(u)P(u)]|^2 \quad (2.42)$$

## 2.3. Alta resolución espacial

### RESOLUCIÓN DE UN TELESCOPIO

Definimos la resolución como:

$$R = \int B(f)T(f)df \quad (2.43)$$

Donde B es la función de coherencia, ecuación (2.35), y T es la función de transferencia óptica del telescopio. La resolución de un telescopio puede estar limitada entonces por la atmósfera o por el tamaño del instrumento dependiendo de cual de las dos funciones, B o T, sea la dominante [32].

Para un telescopio pequeño de diámetro D, los efectos de la turbulencia son despreciables, por lo que  $B(f) \approx 0$  y la ecuación (2.43) se reduce a:

$$R \approx \int T(f)df = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{D}{\lambda}\right)^2 \quad (2.44)$$

Para un telescopio de grandes dimensiones, el poder de resolución depende solamente de la turbulencia, por lo que  $T(f) \approx 0$ . Utilizando la letra K para simplificar la ecuación (2.39) y así poder escribir  $B(f) = B_0(\lambda f) = \exp(-Kf^{5/3})$  se tiene:

$$R \approx \int B(f)df = \frac{6}{5}\pi K^{-5/6} \Gamma\left(\frac{6}{5}\right) \quad (2.45)$$

### TIEMPO DE COHERENCIA

La luz proveniente de una fuente puntual al infinito, una estrella por ejemplo, se dispersa por toda la superficie del detector. Al estudiar este fenómeno se encuentra que existen diferencias fundamentales entre una imagen tomada con un tiempo de exposición muy corto y otra con un tiempo mayor, pero es necesario definir antes estos dos casos.

Denotamos por  $\tau_c$  el tiempo característico de correlación en el medio turbulento, es decir que para una observación realizada en un tiempo corto relativo a  $\tau_c$  se tiene una imagen "congelada" de la turbulencia, esto es a lo que llamamos una *imagen de corto tiempo de exposición*, mientras que dos observaciones separadas entre sí por un intervalo de tiempo mucho más grande que  $\tau_c$  se toman como independientes, este es el caso de la denominada *imagen de largo tiempo de exposición*. El periodo de las oscilaciones de una onda electromagnética cualquiera es completamente despreciable con respecto a  $\tau_c$ . Al tiempo de correlación también se le llama *tiempo de coherencia* y generalmente es del orden de milisegundos.

### PARÁMETRO DE FRIED

En 1966, Fried introduce un parámetro muy útil para medir la calidad de las observaciones astronómicas. El diámetro crítico  $r_0$  de un telescopio, para cuyo valor se cumple:

$$\int B(f)df = \int T(f)df \quad (2.46)$$

Se trata de un parámetro que define completamente la calidad de las imágenes para largo tiempo de exposición y es conocido como *parámetro de Fried*, que puede ser interpretado como el diámetro de un telescopio que en ausencia de turbulencia, tiene la misma resolución que un telescopio de tamaño infinito en presencia de turbulencia, o bien, como el diámetro de una región del frente de onda para el cual la separación tipo de la variación de la fase es de 1 radián. A partir de la ecuación (2.39), es posible obtener una expresión que nos servirá como definición del parámetro de Fried en términos de  $C_n^2$ , recordemos que  $\gamma$  denota el ángulo de observación medido a partir del cenit.

$$r_0 = \left[ 0.423 k^2 (\cos \gamma)^{-1} \int C_n^2(h) dh \right]^{-1/5} \quad (2.47)$$

El parámetro de Fried  $r_0$ , también es llamado *radio del área de coherencia espacial*. Nótese que  $r_0$  es altamente cromático, es decir, es directamente proporcional a la longitud de onda siguiendo una dependencia de  $\lambda^{6/5}$ , por ejemplo si se tiene un valor  $r_0(\lambda=0.5\mu\text{m}) = 10\text{cm}$ , implicará que  $r_0(\lambda=20\mu\text{m}) = 8.4\text{m}$  bajo las mismas condiciones de observación, por lo tanto para observaciones en el infrarrojo se tendrán imágenes más cercanas al límite de difracción del telescopio que en observaciones en el visible incluso para telescopios de mayor diámetro. Los valores típicos de  $r_0$  en el visible varían de 2cm hasta 20cm, lo que demuestra que la resolución siempre está limitada por la atmósfera. Es posible demostrar que [35]:

$$r_0(\lambda) = r_0(\lambda_v) \left[ \frac{\lambda}{\lambda_v} \right]^{6/5} \quad (2.48)$$

Donde  $\lambda_v=0.5\mu\text{m}$  es el punto medio en la banda del visible. Esta dependencia conduce a pupilas coherentes en el infrarrojo, aún en presencia de turbulencia. Para el caso del visible y el cercano infrarrojo,  $r_0$  es:

$$r_0(\lambda) = r_0(0.5\mu\text{m}) \left[ \frac{\lambda}{0.5\mu\text{m}} \right]^{6/5} \quad (2.49)$$

Fried propuso también una relación análoga a las ecuaciones (2.13) y (2.19) para las funciones de estructura de fase en la aproximación del *campo cercano*, cuya expresión simplificada es:

$$D_\Phi(r) = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3} \quad (2.50)$$

Esta expresión, válida en el dominio inercial ( $l_0 \ll r \ll L_0$ ) caracteriza las deformaciones introducidas por la propagación del frente de onda a través de la turbulencia atmosférica.

Para un sistema de óptica adaptativa, el número de elementos independientes que se deben controlar para corregir la óptica de un espejo deformable de diámetro  $D$  es del orden de  $(D/r_0)^2$  [32]. Por ejemplo, para un diámetro  $D = 8\text{ m}$  y  $r_0 = 10\text{ cm}$ , el número de elementos que se deben controlar para una corrección perfecta es 6400.

## IMÁGENES DE LARGO TIEMPO DE EXPOSICIÓN

La imagen de larga exposición obtenida en el foco de un telescopio, es una combinación de la difracción de la onda por la pupila de entrada (generalmente anular), las aberraciones propias de la óptica del instrumento y las perturbaciones de la atmósfera. Cuando el tiempo de integración es mucho mayor que  $\tau_0$ , la intensidad observada en la pupila es el promedio de la intensidad instantánea, esto es:

$$I(O) = \langle I_0(O) * T(O, t) \rangle \quad (2.51)$$

Donde T es la función de transferencia óptica del telescopio, es decir, es una función de transferencia de una abertura anular. El valor promedio de T está dado por la función de coherencia a nivel de la pupila,  $h=0$  en la ecuación (2.35). Si se está observando una fuente puntual, la respuesta del instrumento será la transformada de Fourier de  $\langle T \rangle$ , cuya dimensión angular ya no es proporcional a  $\lambda/D$  (como sería el caso de un telescopio limitado por la difracción), sino a  $\lambda/r_0$ . La imagen se "embarra" en el plano pupila debido a la pérdida de coherencia espacial. Entonces, al incrementar el diámetro D del telescopio no se obtiene una mejor resolución que la de un instrumento de diámetro  $r_0$ , lo que significa unos cuantos centímetros en longitudes de onda del visible.

Recordemos (apéndice A) que el límite de difracción, o bien, la resolución espacial para la longitud de onda  $\lambda$  sobre un diámetro D viene dado por el ancho a media altura (FWHM) de la figura de Airy:

$$R_D = \frac{\lambda}{D} \quad (2.52)$$

La intensidad en el plano imagen de un telescopio que observa una fuente puntual, en el caso de imágenes de largo tiempo de exposición tiene una longitud angular proporcional a  $\lambda/r_0$ . Y la longitud angular de las imágenes recibe el nombre de *seeing* astronómico, que caracteriza las condiciones medias de observación:

$$R_{seeing} = \frac{\lambda}{r_0} \quad (2.53)$$

## IMÁGENES DE CORTO TIEMPO DE EXPOSICIÓN

Considérese la adquisición de imágenes cuyo tiempo de exposición, o tiempo de integración, es menor o es del orden de  $\tau_0$ , ahora no se tiene un promedio de la intensidad como en la ecuación (2.51), sino una intensidad instantánea dada por:

$$I(O) = I_0(O) * T(O) \quad (2.54)$$

La morfología de las imágenes individuales resultantes consiste en manchas de luz que se distribuyen por la pupila (fig. 2.1), llamadas comúnmente en inglés *speckles*.

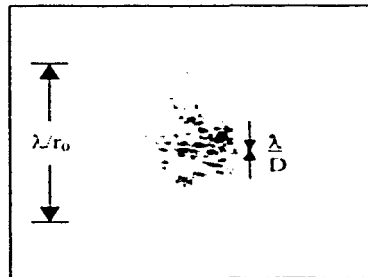


Fig 2.1: Imagen de speckles en el plano imagen de un telescopio

El tamaño de los speckles es del orden del límite de difracción del telescopio, es decir  $\lambda/D$ , mientras que el tamaño total de la imagen de speckles es del orden de  $\lambda/r_0$  [31]. Las imágenes que se obtienen a partir de la observación a través de un telescopio son el resultado de vibraciones de estos speckles, produciéndose así, en una imagen de largo tiempo de exposición, el *disco de seeing*, cuyo diámetro es también  $\lambda/r_0$ .

## EL CENTELLEO EN LA PUPILA DEL TELESCOPIO

Una onda electromagnética que se propaga a través de un medio turbulento como la atmósfera terrestre, experimenta fluctuaciones de irradiancia, fenómeno que se conoce comúnmente con el nombre de *centelleo*, que se debe básicamente a la concentración o dispersión aleatoria de la energía del frente de onda. Tanto el *seeing* como el centelleo contribuyen a eliminar los "detalles finos" cuando se observa a través de un telescopio.

A diferencia del ojo humano, un telescopio colecta fotones en una superficie mucho más grande, provocando un efecto de "amortiguamiento" de esos cambios rápidos del índice de refracción. Como consecuencia, el centelleo es menor para un telescopio que para el ojo humano.

La cantidad de centelleo se puede medir mediante la varianza de las fluctuaciones relativas de la intensidad:

$$\sigma_I^2 = 19.12 \lambda^{-7/6} \int h^{5/6} C_n^2 dh \quad (2.55)$$

Dada la dependencia en función de  $h^{5/6}$ , se deduce que  $\sigma_I^2$  es menor cuando la turbulencia se produce cerca de la superficie del observatorio, además el centelleo decrece cuando se incrementa  $\lambda$ . Si  $\langle I \rangle$  es la intensidad promedio, podemos definir la tasa de centelleo mediante  $\sigma_I^2/\langle I \rangle^2$ . Esta tasa de centelleo puede ser medida mediante el valor al origen de la función de correlación temporal o bien la integral de su transformada de Fourier (el espectro de potencias). Su valor típico en los sitios de observación astronómica es de 10%.

Por otra parte, el espectro de potencia  $W_I(f)$  de las fluctuaciones espaciales de la intensidad  $I$ , se puede poner en términos del espectro de potencias del logaritmo de la amplitud  $W_\lambda(f)$ , ecuación (2.38), de manera que:

$$W_I(f) = 4W_\lambda(f) \quad (2.56)$$

Las propiedades espaciales de las imágenes de centelleo pueden ser medidas directamente mediante la función de autocovarianza de la intensidad, es decir, el patrón de autocorrelaciones espaciales de las desviaciones respecto al promedio. Esta autocorrelación es la transformada de Fourier del espectro de potencias unidimensional.

## EVOLUCIÓN TEMPORAL DEL CENTELLEO

En el dominio temporal, el centelleo también depende del vector velocidad del viento. Cuando se realizan observaciones en el cenit, un cierto módulo  $v_0$  del vector velocidad del viento para una capa turbulenta en particular, provocará el desplazamiento del patrón de sombras observado en la imagen de centelleo a lo largo de la abertura del telescopio a una velocidad efectiva  $v_0$ . Al igual que en la ecuación (2.47), para observaciones fuera del cenit, el módulo de la proyección del vector velocidad se ve reducido por un factor  $\cos(\gamma)$ , donde  $\gamma$  es el ángulo de observación medido desde el cenit.

El parámetro de Fried  $r_0$ , caracteriza la turbulencia de manera espacial. Sin embargo para caracterizar la evolución temporal debemos utilizar  $\tau_0$ . En este punto podemos dar una expresión para  $\tau_0$  en términos del parámetro de Fried para el caso particular de una sola capa turbulenta:

$$\tau_0 \approx \frac{r_0}{v_0} \quad (2.57)$$

Donde  $v_0$  es la velocidad de desplazamiento de la capa, que puede variar desde 5 hasta 20 m/s; de manera que podemos establecer un cierto intervalo para  $\tau_0$ , aproximadamente desde  $\tau_0=2.5\text{ms}$  ( $r_0=5\text{cm}$ ,  $v_0=20\text{m/s}$ ), hasta  $\tau_0=70\text{ms}$  ( $r_0=35\text{cm}$ ,  $v_0=5\text{m/s}$ ).

La evolución temporal de cada pantalla de fase puede ser aproximada por un modelo de *flujo congelado* (hipótesis de Taylor). En el cual se considera que la capa se traslada íntegramente junto con la velocidad del viento siempre y cuando el tiempo de integración no exceda al tiempo de coherencia. Esta hipótesis se verifica en la atmósfera por las inhomogeneidades de la velocidad y de temperatura cuando el tamaño es más pequeño que  $L_0$  y si el flujo tiene suficiente velocidad.

## 2.4. SCIDAR CLÁSICO

### DETERMINACIÓN DE $C_n^2(h)$ Y $\vec{v}(h)$ CON EL SCIDAR CLÁSICO

Conocer los perfiles de estructura del índice de refracción, así como el vector velocidad del viento, es esencial para el desarrollo y optimización de sistemas de óptica adaptativa en astronomía, así como para la caracterización de sitios de observación astronómica. Estos datos permiten calcular los principales parámetros atmosféricos que son útiles para la obtención de imágenes de alta resolución angular. Los parámetros espacio-angulares están relacionados con  $C_n^2(h)$ , mientras que los parámetros temporales se relacionan con  $\vec{v}(h)$ .

La medición de  $C_n^2(h)$  y  $\vec{v}(h)$  se puede realizar remotamente mediante métodos ópticos, uno de los cuales es el SCIDAR, cuyo concepto original fue introducido por Rocca et al. 1974. La técnica del SCIDAR consiste en calcular la función de autocorrelación espacial de patrones de centelleo de corto tiempo de exposición de estrellas dobles [5]. El principio de detección de la velocidad del viento en las capas turbulentas a partir de la correlación espacio temporal de patrones de centelleo fue introducido por Rocca et al. en 1974 [30]. Sin embargo este grupo estudió el centelleo de una estrella sencilla, y por lo tanto no pudo determinar simultáneamente la altura de la capa y la intensidad de la turbulencia. Estudios posteriores llevados a cabo por Caccia et al. en 1987 [11] demostraron que al utilizar una estrella doble sí es posible determinar simultáneamente  $C_n^2(h)$  y  $\vec{v}(h)$ .

Supongamos una única capa atmosférica a una altura  $h$  y con intensidad turbulenta  $C_n^2(h)$ . Una estrella doble, con sus componentes  $a$  y  $b$  separados algunos segundos de arco  $\rho$  (fig. 2.2), proyecta sobre la superficie de observación dos distribuciones de intensidad aleatorias e idénticas  $a'$  y  $b'$  desplazadas una de la otra una distancia  $d=\rho h$ .

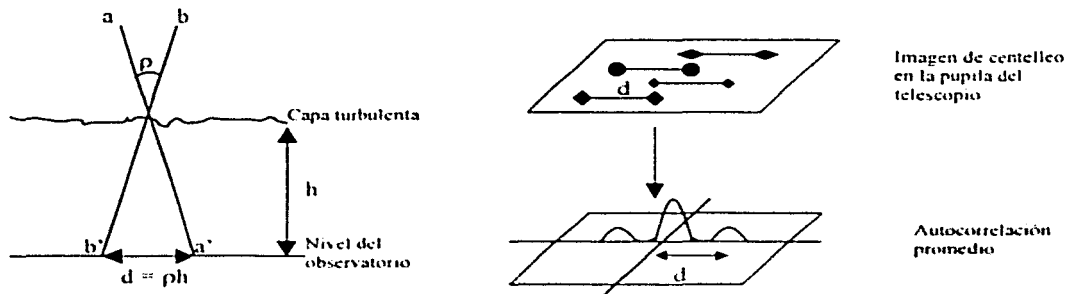


Fig. 2.2 Determinación de  $\vec{v}(h)$  y  $C_n^2(h)$  utilizando el SCIDAR clásico

La función de la autocorrelación promedio de la imagen de centelleo en la pupila del telescopio, consiste en un pico central y dos laterales situados a una distancia  $r_1 = \rho h$  y  $r_2 = -\rho h$  respectivamente, cuyo máximo es proporcional a  $C_n^2(h)$ . Es posible entonces determinar  $h$  y  $C_n^2(h)$  midiendo la posición de los picos laterales así como su máximo. Para el caso general de varias capas turbulentas a alturas  $h_i$ , la autocorrelación contiene un par de picos laterales para cada capa separados una distancia  $r_i = \pm \rho h_i$ , con  $h_i$  proporcional a  $C_n^2(h_i)$ .

Extrapolando resultados se pensaría que una capa turbulenta cercana a la superficie del observatorio resultaría en un sólo máximo en el centro, confundido entre los máximos centrales correspondientes a otras capas turbulentas a mayor altura. Sin embargo la varianza del centelleo es proporcional a  $h^{5/6}$ , lo que implica que con una capa turbulenta de muy baja altura resulta imposible observar centelleo y por lo tanto es indetectable.

## FUNCIÓN DE AUTOCORRELACIÓN PARA UNA ESTRELLA DOBLE

Es posible demostrar que la función de autocorrelación del centelleo o simplemente *autocorrelación*, para el caso de una estrella doble cuyos componentes están separados un ángulo  $\rho$ , está dada [3] por la ecuación:

$$C^{**}(\vec{r}) = \int_0^\infty C_n^2(h) \{ aC(\vec{r}, h) + b[C(\vec{r} - \vec{\rho}h, h) + C(\vec{r} + \vec{\rho}h, h)] \} dh \quad (2.58)$$

Donde  $C(\vec{r}, h)$  representa la autocorrelación del centelleo provocado por una capa a una altura  $h$  con  $C_n^2$  unitario, y:

$$a = \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \quad b = \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad \alpha = 10^{-0.4\Delta m} \quad (2.59)$$

Donde  $\Delta m$  es la diferencia de magnitud entre los componentes de la estrella doble.  $C(\vec{r}, h)$  se puede calcular teóricamente mediante la transformada de Fourier de la ecuación (2.56). Ahora bien, si  $I(\vec{r}, t)$  es la intensidad a nivel del observatorio al tiempo  $t$  y  $\bar{O}$  representa un promedio temporal, buscamos calcular  $C^{**}(\vec{r})$  mediante [4]:

$$C^{**}(\vec{r}) = \frac{\langle I(\vec{r}_1, t) I(\vec{r}_1 + \vec{r}, t) \rangle - \langle I(\vec{r}, t) \rangle^2}{\langle I(\vec{r}, t) \rangle^2} \quad (2.60)$$

Definimos  $P(\vec{r})$  como la transmisión de intensidad de la pupila del telescopio [29], para escribir la imagen instantánea  $I_d(\vec{r}, t)$  sobre el detector:

$$I_d(\vec{r}, t) = I(\vec{r}, t) P(\vec{r}) \quad (2.61)$$

Es posible demostrar [19][29] que la autocorrelación promedio de las imágenes detectadas  $AC(\vec{r})$  se escribe como:

$$AC(\vec{r}) = \overline{I_d(\vec{r}, t) \otimes I_d(\vec{r}, t)} = \overline{I(\vec{r}_1, t) I(\vec{r}_1 + \vec{r}, t)} [P(\vec{r}) \otimes P(\vec{r})] \quad (2.62)$$

Donde el operador  $\otimes$  denota la correlación espacial, y la barra superior un promedio temporal. Asimismo, la autocorrelación de la imagen promedio se escribe:

$$ACIM(\vec{r}) = \overline{I_d(\vec{r}, t) \otimes I_d(\vec{r}, t)} = \overline{I(\vec{r}, t)^2} [P(\vec{r}) \otimes P(\vec{r})] \quad (2.63)$$

Y ahora podemos calcular una estimación de  $C^{**}(\vec{r})$  de acuerdo con la ecuación (2.60):

$$C^{**}(\vec{r}) = \frac{AC(\vec{r}) - ACIM(\vec{r})}{ACIM(\vec{r})} = \frac{\overline{I(\vec{r}_1, t)I(\vec{r}_1 + \vec{r}, t)} - \overline{I(\vec{r}, t)}^2}{\overline{I(\vec{r}, t)}^2} \quad (2.64)$$

De este último cálculo se deduce que el efecto de la pupila se elimina, de tal manera que el SCIDAR es insensible a las aberraciones del telescopio (ver capítulo 5, sección 4). La información necesaria para determinar  $C_n^2(h)$  está contenida en la altura y posición de los picos laterales de autocorrelación, el método específico para calcularlo está más allá de los objetivos del presente trabajo.

## 2.5. SCIDAR GENERALIZADO

### VENTAJAS DEL SCIDAR GENERALIZADO

Durante más de diez años el SCIDAR clásico mostró su gran utilidad para fines astronómicos, sin embargo, como se discutió en el apartado anterior, el centelleo es cada vez más tenue cuando la pantalla de fase (capas turbulentas) está muy próxima a la superficie del observatorio, y como consecuencia la turbulencia en el primer kilómetro de altitud es indetectable. De lo anterior es evidente que el SCIDAR clásico no es útil para caracterizar la turbulencia en las capas bajas ni en la cúpula del telescopio, donde ésta puede ser dominante.

Fuchs, Tallon y Vernin demostraron en 1994 [4] que si el plano de análisis se encuentra desplazado una distancia  $h_s$  algunos kilómetros por debajo de la pupila del telescopio ( $h_{SG} < 0$ ), la turbulencia a baja altura produce centelleo detectable, pues la distancia que se toma en cuenta para el centelleo es  $|h - h_{SG}|$ , y la autocorrelación presenta picos laterales separados del central una distancia  $r_{\pm} = \pm \rho|h - h_{SG}|$ . Por lo tanto se puede detectar la totalidad del perfil de turbulencia sobre todo el camino óptico. Esto es el principio fundamental del SCIDAR generalizado (fig. 2.3). Si por el contrario, el plano de análisis se encuentra por encima del nivel de la pupila del telescopio ( $h_{SG} > 0$ ) y coincide con una capa turbulenta a una altura  $h_s$ , el centelleo es nulo, puesto que  $|h_s - h_{SG}| = 0$ .

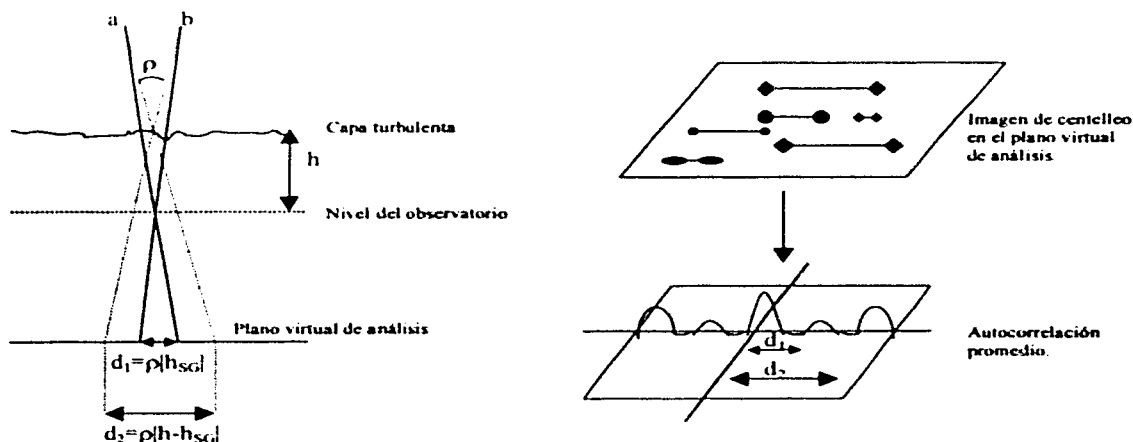


Fig. 2.3: Determinación de  $\bar{v}(h)$  y  $C_n^2(h)$  utilizando el SCIDAR generalizado

Para una estrella doble, los patrones de centelleo individuales de cada estrella producido por una capa a una altura  $h$ , están separados entre sí una distancia  $|h-h_{SG}| \bar{\rho}$ . De manera que los picos de autocorrelación laterales están desplazados del centro una distancia igual a  $\pm |h-h_{SG}| \bar{\rho}$ . La autocorrelación se escribe entonces como:

$$C_{SG}^{**}(\bar{r}) = \int_0^{\infty} C_n^2(h) \left\{ aC(\bar{r}, |h-h_{SG}|) + b \left[ C(\bar{r} - \bar{\rho} |h-h_{SG}|, |h-h_{SG}|) + C(\bar{r} + \bar{\rho} |h-h_{SG}|, |h-h_{SG}|) \right] \right\} dh \quad (2.65)$$

## INTERCORRELACIÓN CON ESTRELLAS SENCILLAS

Consideremos el problema de medir la velocidad del viento observando patrones de centelleo de una estrella sencilla. Consideramos una capa turbulenta a una altura  $h$  que se desplaza con una velocidad  $\bar{v}(h)$ . Suponiendo que durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  la estructura de la turbulencia no sufre cambios significativos y por lo tanto es transportada junto con la capa (hipótesis de Taylor), los patrones de centelleo para los instantes  $t$  y  $t+\Delta t$  son idénticos pero desplazados entre sí una distancia  $\bar{v}(h)\Delta t$ . La *intercorrelación*, para el caso de una estrella simple, es igual a la autocorrelación del centelleo desplazada una distancia  $\bar{v}(h)\Delta t$ . En el caso general de varias capas separadas entre sí por un intervalo temporal  $\Delta t$ , podemos escribir la intercorrelación como [4]:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}C(\bar{r}, \Delta t) &= \frac{\langle I(\bar{r}_1, t) I(\bar{r}_1 + \bar{r}, t + \Delta t) \rangle - \langle I(\bar{r}, t) \rangle^2}{\langle I(\bar{r}, t) \rangle^2} \\ &= \int_0^{\infty} C_n^2(h) C(\bar{r} - \bar{v}(h)\Delta t, |h-h_{SG}|) dh \end{aligned} \quad (2.66)$$

Midiendo la posición de los diferentes picos de intercorrelación es posible determinar la velocidad del viento para cada capa. Para las capas de baja altura, el vector  $\bar{v}(h)$  sólo se puede determinar con el SCIDAR generalizado, en cuyo caso, la ecuación (2.66) se transforma en:

$$\mathbb{I}C_{SG}(\bar{r}, \Delta t) = \int_0^{\infty} C_n^2(h) C(\bar{r} - \bar{v}(h)\Delta t, |h-h_{SG}|) dh \quad (2.67)$$

Sin embargo, los picos de intercorrelación no contienen información relativa a la altura de las capas, lo que se traduce en la imposibilidad de medir simultáneamente  $\bar{v}(h)$  y  $C_n^2(h)$ , que es de vital importancia para calcular el tiempo de coherencia  $\tau_0$  para su utilización en técnicas de alta resolución angular.

## INTERCORRELACION CON ESTRELLAS DOBLES

El problema de la medición simultánea de  $\bar{v}(h)$  y  $C_n^2(h)$ , puede ser solucionado si estudiamos los patrones de centelleo de estrellas dobles, en cuyo caso, la intercorrelación para SCIDAR generalizado es:

(2.68)

$$\begin{aligned} \mathbb{I}C_{SG}^{**}(\bar{r}, \Delta t) &= \int_0^{\infty} C_n^2(h) \{ aC(\bar{r} - \bar{v}(h)\Delta t, |h-h_{SG}|) + b[C(\bar{r} - \bar{v}(h)\Delta t - \bar{\rho} |h-h_{SG}|, |h-h_{SG}|) \\ &\quad + C(\bar{r} - \bar{v}(h)\Delta t + \bar{\rho} |h-h_{SG}|, |h-h_{SG}|)] \} dh \end{aligned}$$

Esto implica que para una capa turbulenta a una altura  $h$  con velocidad  $\vec{v}(h)$  y una estrella doble, su intercorrelación dada por el SCIDAR generalizado contiene tres picos alineados. El pico central se encuentra en una posición  $\vec{r} = \vec{v}(h)\Delta t$ , de donde se puede deducir  $\vec{v}(h)$  conociendo  $\Delta t$ , mientras que los picos laterales se encuentran en  $\vec{r} = \vec{v}(h)\Delta t \pm \rho[h-h_{sg}]$ , donde  $h$  se puede calcular si se tiene  $\vec{v}(h)$ . Esto se muestra en la figura (2.4). En el Apéndice E se lleva a la práctica el cálculo del vector  $\vec{v}(h)$ , a partir del perfil de  $C_a^2(h)$  y las imágenes de intercorrelación para una campaña de observación realizada en el Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir, B.C.

En la práctica, se detectan imágenes  $I_d(\vec{r}, t)$  de centelleo de una estrella doble sobre un plano situado algunos kilómetros por debajo de la pupila. Calculando las autocorrelaciones, ecuaciones (2.62), (2.63) y (2.64), se obtiene el perfil de turbulencia  $C_a^2$ , mientras que calculando las intercorrelaciones entre pares de imágenes tomadas a intervalos de tiempo  $\Delta t$  se obtiene  $\vec{v}(h)$ . Una buena estimación de  $IC_{SG}^{**}(\vec{r}, \Delta t)$  está dada por:

$$IC_{SG}^{**}(\vec{r}, \Delta t) = \frac{IC(\vec{r}, \Delta t) - ACIM(\vec{r})}{ACIM(\vec{r})} \quad (2.69)$$

Donde  $ACIM(\vec{r})$  está definida por la ecuación (2.63) y:

$$IC(\vec{r}, \Delta t) = \overline{I_d(\vec{r}, t) \otimes I_d(\vec{r}, t + \Delta t)} \quad (2.70)$$

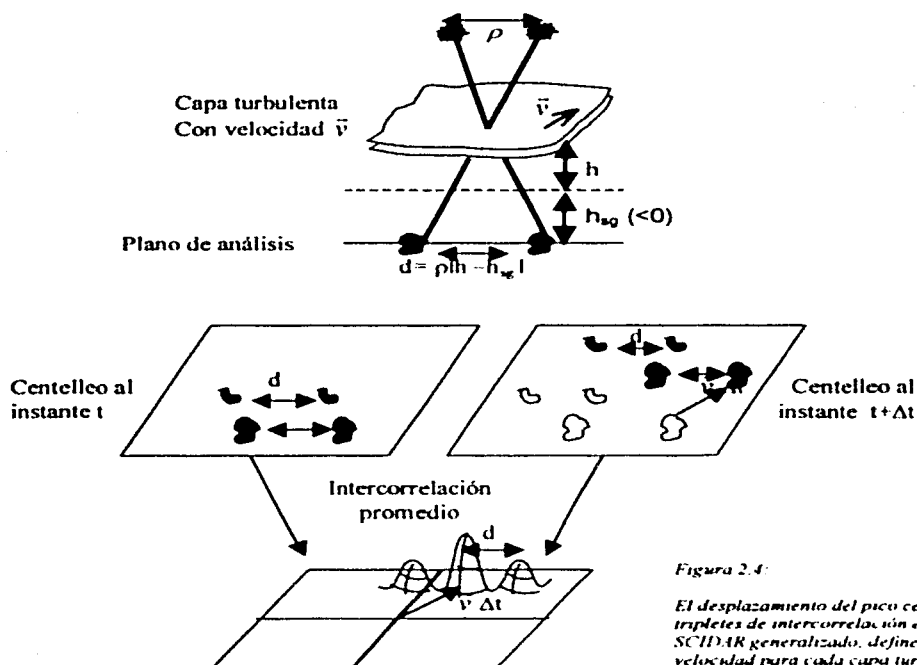


Figura 2.4:

El desplazamiento del pico central de los tripletes de intercorrelación en el caso del SCIDAR generalizado, define el vector velocidad para cada capa turbulenta

Las ecuaciones (2.62), (2.63), (2.64), (2.69) y (2.70) constituyen el modelo físico-matemático del SCIDAR generalizado, por lo tanto un programa de simulación del instrumento, como se verá en el siguiente capítulo, deberá incluir estas ecuaciones en su código como parte fundamental. Hay que recalcar que en el caso del SCIDAR Generalizado, el término de la pupila no se elimina de las ecuaciones, por lo que la presencia de aberraciones puede afectar las medidas. Esto se estudiará en detalle en el capítulo 5.

## SISTEMA ÓPTICO DEL SCIDAR GENERALIZADO

El sistema óptico del SCIDAR generalizado se representa esquemáticamente en la figura 2.5. El haz proveniente del telescopio de diámetro  $D$  y distancia focal  $f_{tel}$ , se colima por la lente  $L_{col}$  de distancia focal  $f_{col}$ , formando un sistema afocal. Los semiespacios conjugados correspondientes a  $h_{SG} < 0$  y  $h_{SG} > 0$  respectivamente, se encuentran a uno y otro lado del plano imagen de la pupila  $P'$ . Una lente de campo  $L_{campo}$  se puede instalar en el foco del telescopio con el fin de desplazar el plano  $P'$ , de manera que el plano virtual de análisis se pueda colocar en cualquiera de los dos espacios conjugados.

El aumento óptico  $G = f_{tel}/f_{col}$  determina el cociente  $dx_{pup}/dx_{det}$  entre el tamaño de los píxeles proyectados sobre la pupila  $dx_{pup}$  y el tamaño de los píxeles en el detector  $dx_{det}$ . Si  $G$  es muy pequeño,  $dx_{pup}$  también es pequeño, lo que conduce a la necesidad de un muestreo muy "cerrado" (de alta frecuencia) del patrón de centelleo (ver Apéndice B) sin embargo, el detector completo solo cubrirá una pequeña parte de la pupila, lo que implica un límite a la altitud de detección de la turbulencia y al área colectora que se utiliza, y por lo tanto al cociente señal a ruido. Si por el contrario  $G$  es demasiado grande, es posible determinar la turbulencia a una altura elevada y la señal será fuerte, pero el muestreo en la pupila tiene que ser muy espaciado (baja frecuencia). Es preferible entonces que el aumento  $G$  sea ligeramente por exceso que por defecto.

## IMPLICACIONES DE LA SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DEL SCIDAR

El SCIDAR analiza imágenes de centelleo en la pupila de un telescopio, o en un plano virtual de análisis, mismas que son producidas por la luz de una fuente que atraviesa la turbulencia atmosférica según se describió en la sección 2.3. Entonces, para la puesta en marcha de un simulador de SCIDAR, necesitamos archivos que contengan cientos o miles de imágenes de centelleo.

Una posible solución es la realización de campañas de observación de centelleo *in situ*. En este caso nos enfrentamos al problema inmediato de conseguir tiempo de telescopio en algún observatorio, aunado al problema del desconocimiento de las características de la turbulencia atmosférica, lo que impediría la calibración numérica del simulador de SCIDAR.

La situación ideal para implementar el simulador del instrumento sería el poder controlar las propiedades de la turbulencia atmosférica. Tanto las observaciones como las simulaciones del comportamiento de la atmósfera turbulenta son de vital importancia para el estudio de su influencia en las observaciones astronómicas. Las simulaciones numéricas por computadora, en el caso particular de la turbulencia atmosférica, proveen al investigador control total de los principales parámetros que la describen, y por lo tanto son muy útiles para diseñar y optimizar los sistemas de óptica adaptativa para aplicaciones astronómicas. De ahí la necesidad de utilizar un simulador de turbulencia atmosférica para la caracterización del simulador de SCIDAR. El principio de funcionamiento de este simulador se describe en el capítulo siguiente.



## **TurbuLenz: Simulaciones de los efectos de la atmósfera turbulenta**

### **3.1. Descripción del programa TurbuLenz**

#### **CARACTERÍSTICAS GENERALES**

El doctor Robert Weiss, del Instituto de Astronomía Max Planck (Heidelberg), desarrolla actualmente una aplicación de software llamada TurbuLenz cuyo objetivo es simular la propagación de la luz a través de la atmósfera turbulenta [40]. Consiste en una colección de rutinas escritas en lenguaje IDL (Interactive Data Language) y se basa en un código previo desarrollado en C por Thomas Berkefeld, Andreas Glindemann y Richard Lane. El programa lee como única entrada un archivo numérico con la extensión ".inp" que tiene la estructura que se muestra en la tabla 3.2.

En las diversas pruebas aplicadas al simulador de turbulencia atmosférica, análisis del código de programación y caracterización de las pantallas de amplitud y fase generadas, se utilizó la versión 0.4 de TurbuLenz. Aunque actualmente se encuentra disponible la versión 1.0 del mismo programa, dado que se publicó cuando el presente trabajo ya estaba en su fase final, no se retomó la versión más actual debido a que esto hubiese implicado el repetir nuevamente la mayoría de las pruebas realizadas además de la revisión completa del nuevo código.

TurbuLenz puede modelar la propagación de la luz a través de múltiples capas atmosféricas turbulentas caracterizadas por su altura, el parámetro de Fried, velocidad y dirección del viento y escala externa de la turbulencia. Para todas las pruebas aplicadas a este programa así como los archivos que se obtuvieron con TurbuLenz y que se utilizaron con el simulador de SCIDAR generalizado, se modelaron una o dos capas turbulentas. Además este simulador de turbulencia atmosférica permite la utilización de más de un telescopio como pupila de entrada, y más de una fuente (estrella). El simulador de SCIDAR generalizado fue diseñado para trabajar con estrellas dobles en el visible y un sólo telescopio, como se verá en detalle en el siguiente capítulo. Por lo tanto en los parámetros de todos los archivos de entrada para TurbuLenz que se utilizaron, se fijaron valores iguales a 1 para el número de telescopios, 2 para el número de estrellas y  $\lambda=0.5\mu\text{m}$  que es el valor medio de longitud de onda en la banda del visible.

Después de que el frente de onda atraviesa una capa turbulenta dada, TurbuLenz mide una distancia igual a la especificada en la séptima entrada numérica del archivo de entrada y en ese punto aplica al frente de onda una transformada de Fourier de acuerdo con la teoría de difracción de Fresnel, con el objetivo de modelar los efectos de propagación, lo que naturalmente introduce el centelleo a nivel del plano de análisis.

## EVOLUCIÓN TEMPORAL

Con el propósito de modelar la evolución temporal, TurbuLenz utiliza dos parámetros relacionados estrechamente entre sí, los *pasos de tiempo* y la *velocidad de la capa turbulenta*. Supongamos por ejemplo una capa atmosférica turbulenta que se desplaza a  $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  y un detector calibrado para tomar una imagen cada 25 ms. Esto define el "tamaño" de cada paso de tiempo; reescribiendo este tiempo en segundos:  $25\text{ms}=0.025\text{s}$ . Llamemos TS (del inglés *time step*) al paso de tiempo. Se tiene entonces que:

$$17S = 0.025s \Rightarrow 1s = \frac{1}{0.025} TS \quad (3.1)$$

La velocidad de la capa en el archivo de entrada se tiene que escribir en  $\text{m}\cdot\text{TS}^{-1}$ , entonces:

$$10 \text{ m/s} = \frac{10}{\frac{1}{0.025}} \frac{\text{m}}{TS} = (10)(0.025) \text{ m/TS} = 0.25 \text{ m/TS} \quad (3.2)$$

Con el simulador del SCIDAR generalizado, que se describe en el siguiente capítulo, se analizaron intercorrelaciones a 20 y 40 ms. Entonces para modelar una capa turbulenta que se desplace a  $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  tomando imágenes cada 20 ms (tamaño del paso de tiempo) tenemos que la velocidad  $v$  de la capa, expresada en metros por paso de tiempo es:

$$v = (20)(0.02) \text{ m/TS} = 0.4 \text{ m/TS} \quad (3.3)$$

## LIMITACIONES DE CÁLCULO

Al modelar más de una capa turbulenta utilizando TurbuLenz, el sistema de cómputo utilizado (PC con procesador pentium III a 500 Mhz, 256 Mb RAM, Windows 98) se bloqueaba si en el archivo de entrada se especificaba un número grande de pasos de tiempo, aproximadamente mayor a 70; por lo tanto se decidió hacer archivos de entrada que no rebasaran los 50 pasos de tiempo, y para modelar cientos o miles de pasos fue necesario hacer varios archivos de entrada con numeración continua en la salida. Por ejemplo, para una realización con 300 pasos de tiempo se tendrían seis archivos de entrada para TurbuLenz con extensión ".inp", el primero generaría archivos con numeración de 1 a 50, el segundo de 51 a 100, el tercero de 101 a 150 y así sucesivamente.

El tiempo de procesamiento también constituye una limitante que conviene tomar en cuenta, pues dependiendo del equipo de cómputo se procesan de 20 a 40 pasos de tiempo por hora. En el equipo de cómputo especificado en el párrafo anterior, un paso de tiempo se procesa en 3 minutos, esto es 20 pasos de tiempo en una hora. Lo que significa que si se necesitan 1000 pasos de tiempo para el análisis de imágenes de centelleo con el simulador de SCIDAR, el tiempo de proceso únicamente para generar los speckles en la pupila es de 50 horas.

Por otra parte, TurbuLenz está optimizado para su desempeño en plataforma Windows y no es un programa portable. Se intentó instalarlo y correrlo sin éxito en una computadora Ultra Sparc Station 60 con 2 procesadores a 450 Mhz con 512 Mb de RAM y sistema Solaris 8 (UNIX). No se realizaron pruebas de portabilidad en plataforma Linux.

## MUESTREO EN EL PLANO PUPILA

El simulador de SCIDAR generalizado está diseñado específicamente para adaptarse a las condiciones ópticas del telescopio de 2.1m, ubicado en San Pedro Mártir, B.C., perteneciente al Observatorio Astronómico Nacional, para el cual se escogió inicialmente un tamaño de 80 pixeles de diámetro para la pupila. Sin embargo, TurbuLenz necesita un número impar como diámetro de la pupila, de manera que si se definía un diámetro de 80 pixeles, el programa agrega automáticamente un pixel extra para efectos de cálculo

del pixel central; las imágenes de fase y amplitud que se obtienen al final tienen entonces un diámetro de 81 pixeles.

Por el teorema de muestreo de Nyquist (ver apéndice B), para tener un buen muestreo de la pupila debemos escoger el tamaño del plano de análisis mayor a 2 veces el tamaño de la pupila. Para evitar problemas posteriores se decidió sobre muestrear, haciendo el tamaño del plano pupila aproximadamente tres veces mayor que el tamaño de la pupila, esto nos conduciría a un valor de  $80\text{pix} \times 3 = 240\text{pix}$  para la longitud lateral en pixeles. Aquí no se ha tomado en cuenta el pixel adicional que utiliza TurbuLenz para calcular el centro. Pero más específicamente y por razones de simplicidad en los cálculos, tomamos la potencia de dos que más se aproxima a esta longitud, es decir,  $2^8\text{pix} = 256\text{pix}$  (ver fig. 3.1), por lo tanto la escala de pixel en el plano pupila expresada en pixeles por metro es:

$$\frac{80\text{pix}}{2.1\text{m}} = 38.095\text{pix/m} ; 38.1\text{pix/m} \quad (3.4)$$

Este último valor es el que aparece en los archivos de entrada para TurbuLenz. Conociendo el tamaño del plano pupila en pixeles, si utilizamos esta escala de pixel, tenemos una longitud lateral del plano de análisis medida en metros igual a:

$$\frac{256\text{pix}}{38.1\text{pix/m}} = 6.7\text{m} \quad (3.5)$$

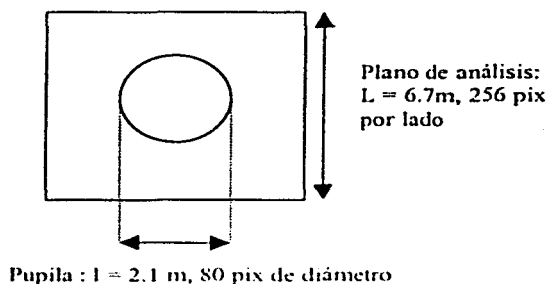


Figura 3.1: Diagrama esquemático del plano pupila y la pupila del telescopio. Se indica su correspondiente longitud lateral en metros y pixeles respectivamente

## MUESTREO EN EL PLANO IMAGEN

Permite calcular el tamaño real de las imágenes en el detector científico, y se obtiene del cociente de la longitud de onda, que en nuestro caso es una longitud de onda media en la banda del visible ( $\lambda = 0.5\mu\text{m}$ ), entre la longitud lateral del plano que acabamos de calcular ( $L = 6.7\text{m}$ ). Tanto  $\lambda$  como  $L$  tienen dimensiones de longitud, y como consecuencia su cociente es un resultado en radianes. En los archivos de entrada de TurbuLenz, como se puede apreciar en la tabla 3.2 en la sección "telescopios", es necesario dar este valor en segundos de arco por pixel. Sabemos que  $360^\circ = 2\pi\text{ rad}$ , y que  $360^\circ = 60'' \times 60' \times 360^\circ$  segundos de arco, de donde se deduce que el factor de conversión de radianes a grados o viceversa es  $(60 \times 60 \times 360) 2\pi = 206264.8 \approx 206265$ , que es el factor por el que se debe de multiplicar el resultado para obtener segundos de arco por pixel.

$$\frac{\lambda}{(L)(\text{pix})} = \frac{0.5\mu\text{m}}{6.7\text{m} \cdot \text{pix}} = 7.46 \times 10^{-8} \text{ rad/pix} = (7.46 \times 10^{-8}) (206265) \text{ } \text{''/pix} = 0.015 \text{ } \text{''/pix} \quad (3.6)$$

Si tenemos un plano imagen de 256 pixeles por lado, el campo total en el plano imagen en segundos de arco es:  $(0.015''/\text{pix})(256\text{pix}) = 3.84''$ .

Conviene aclarar aquí, que la escala de pixel en el plano imagen como parámetro de entrada para TurbuLenz solo se utiliza por razones de completéz para el simulador de turbulencia atmosférica y por razones de congruencia o compatibilidad con los archivos del simulador de SCIDAR, pues éste último no utiliza en absoluto los resultados de TurbuLenz en el plano imagen.

Dependiendo de los parámetros de entrada, TurbuLenz genera varios tipos de archivos de salida, además de un archivo con extensión ".log" que contiene los valores de las variables que son calculadas a lo largo de la simulación (ver tabla 3.1). Estos son calculados por una subrutina llamada "calculate\_other\_parameters", que se describe más adelante.

## ARCHIVOS DE SALIDA

|                                                                                                   |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Número de píxeles usados para la n-ésima pantalla de fase                                         |
| Número de las frecuencias media y alta usada para la n-ésima pantalla de fase                     |
| Espectro plano (píxeles) de la n-ésima pantalla de fase                                           |
| Coordenada (en píxeles) de la j-ésima estrella a través del k-ésimo telescopio en la n-ésima capa |
| Número de píxeles en la apertura del k-ésimo telescopio                                           |
| Número de píxeles usados para difracción de Fresnel en el k-ésimo telescopio                      |
| Número de píxeles usados para construir la imagen en el k-ésimo telescopio                        |
| Factor de expansión de la fase al formarse la imagen en el k-ésimo telescopio                     |

Tabla 3.1:

Información  
contenida en el  
archivo de salida  
con extensión  
".log" de  
TurbuLenz.

Considérese en lo sucesivo la palabra "name", como un nombre genérico para un archivo de entrada para TurbuLenz. Así, pueden obtenerse como salida archivos que tengan la forma: "name1XXnoYYphase.tif", en este caso se trata de una pantalla de fase para la capa XX y el paso de tiempo YY. Archivos de la forma "name1XXtYYsZZnoUUimage.tif" contienen la distribución de speckles en el plano imagen para el telescopio YY, la estrella YY y el paso de tiempo UU; en general XX indica el número de la capa comenzando desde la capa más alta, pero si XX=0, se trata de una imagen de speckles total, es decir, a través de todas las capas.

Los archivos de la forma "name1XXtYYsZZ" contienen información en forma de una tabla ASCII, relativa al centelleo y centroides para la capa XX, el telescopio YY y la estrella ZZ. Las primeras dos columnas son las posiciones "x" y "y" del centro de masas, la tercera columna es la intensidad relativa a la intensidad en el paso de tiempo inicial (paso de tiempo 0), y las líneas corresponden a los pasos de tiempo.

Archivos de la forma "name1XXtYYsZZnoUUphase.tif" o bien "name1XXtYYsZZnoUUampl.tif", se refieren a imágenes de fase y amplitud respectivamente, en el plano de la pupila, los valores denotados por XX, YY, ZZ y UU son análogos al caso de speckles en el plano imagen. El Dr. Weiss advierte que en la versión 0.4 de TurbuLenz, los speckles en el plano imagen no son correctas, por lo tanto el programa de simulación de SCIDAR generalizado solamente utiliza las imágenes de speckle en el plano pupila, y posee su propio algoritmo para calcular la distribución de intensidad en el plano imagen.

## 3.2. Análisis detallado del funcionamiento de Turbulenz

### ESTRUCTURA DE LOS PARÁMETROS DE ENTRADA

El módulo principal del simulador de turbulencia atmosférica se llama "turbulence", su descripción a través de un diagrama de flujo de sus principales subrutinas se puede consultar en el Apéndice C.

Una vez que se ha escrito el archivo de entrada con extensión ".inp" y se ha compilado el código de TurbuLenz, el primer paso consiste en leer este archivo de entrada, y construir una estructura que contendrá todos los parámetros de entrada que se enlistan en la tabla 3.2, más otros que se generarán a lo largo del proceso completo.

| VALOR                                              | PARAMETROS GENERALES                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2                                                  | Número de capas turbulentas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 1                                                  | Número de telescopios                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 2                                                  | Número de estrellas                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 50                                                 | Número de pasos de tiempo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 38.1                                               | Escala del pixel en el plano de la apertura (pixeles por metro)                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 0.0000005                                          | Longitud de onda (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 500                                                | Diferencia de altura (metros) a partir de la cual se aplicará difracción de Fresnel para propagar el frente de onda.                                                                                                                                                                                                                                         |
| PARAMETROS DE ALMACENAMIENTO                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 0                                                  | 1: Guarda las pantallas de fase totales, 0: No las guarda                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 4                                                  | bit 0=1: Guarda los centroides e intensidades<br>bit 1=1: Guarda la distribución de intensidad en el plano pupila (speckles)<br>bit 2=1: Guarda las pantallas de fase y de amplitud de los telescopios                                                                                                                                                       |
| 0                                                  | Análogo al anterior pero individualmente para cada capa turbulenta                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 101                                                | Número del primer archivo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 2                                                  | Si =0: Usa la pantalla de fase almacenada en el disco duro para el primer paso de tiempo. Usa el disco duro para archivos temporales.<br>Si =1: Inicializa la pantalla de fase al primer paso de tiempo. Usa el disco duro para archivos temporales.<br>Si =2: Inicializa la pantalla de fase al primer paso de tiempo. Usa la RAM para archivos temporales. |
| PARAMETROS DE LAS CAPAS TURBULENTAS                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 1                                                  | Factor de decorrelación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 100                                                | Escala externa de la turbulencia (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 0.4                                                | Velocidad del viento (metros sobre paso de tiempo)                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 0                                                  | Dirección del viento (grados en dirección opuesta a las manecillas del reloj, 0 grados indica que la pantalla de fase se mueva hacia la derecha.                                                                                                                                                                                                             |
| 0.15                                               | R <sub>0</sub> (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 0                                                  | Altura de la capa (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| (siguiente capa)                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 1                                                  | Factor de decorrelación                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 100                                                | Escala externa de la turbulencia (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 0.4                                                | Velocidad del viento (metros sobre paso de tiempo)                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 45                                                 | Dirección del viento (grados en dirección opuesta a las manecillas del reloj, 0 grados indica que la pantalla de fase se mueva hacia la derecha.                                                                                                                                                                                                             |
| 0.15                                               | R <sub>0</sub> (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 15000                                              | Altura de la capa (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| (siguiente capa)                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| TELESCOPIOS                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 2.1                                                | Abertura (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 0.015                                              | Escala del pixel en el plano pupila (segundos de arco por pixel)                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 256                                                | Tamaño de las imágenes en el plano pupila (pixeles)                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 0                                                  | Posición relativa x del telescopio (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 0                                                  | Posición relativa y del telescopio (metros)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| (siguiente telescopio)                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| DIRECCIONES RELATIVAS DE VISION PARA CADA ESTRELLA |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 0                                                  | Dirección x (segundos de arco), para la primera estrella.                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 0                                                  | Dirección y , para la primera estrella.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 10                                                 | Dirección x , para la segunda estrella.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 0                                                  | Dirección y , para la segunda estrella.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| (siguiente dirección de la estrella)               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 123456789                                          | Indica que se ha llegado al final del archivo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

Tabla 3.2. Estructura general de un archivo de entrada para el Turbulenz. La columna de la izquierda es un ejemplo específico de un archivo, las líneas en blanco no afectan la lectura de datos. La columna derecha describe el significado de cada entrada

La estructura con los parámetros de entrada ya almacenados regresa entonces al programa principal, "turbulence" la manda a una subrutina llamada "calculate\_other\_parameters" que se encarga de calcular algunos parámetros dependientes, como el tamaño en píxeles para representar cada una de las capas turbulentas y el número de píxeles necesario para construir el espacio de Fourier. Además inicializa los frentes de onda (estrellas) y genera arreglos bidimensionales que representarán a las capas turbulentas. La estructura así modificada es regresada al programa principal y entonces se llama a la subrutina "write\_log\_file" que se encarga de escribir el archivo con extensión ".log" que contiene los datos de la tabla 3.1.

Si se trata del primer paso de tiempo se genera la pantalla de fase inicial para cada capa turbulenta por medio de la subrutina "calculate\_phase", siempre y cuando sea especificado por el usuario en los parámetros de entrada. Puede suceder también que se desee iniciar la simulación con una pantalla de fase que ya se tenga almacenada o bien con la última pantalla de fase que generó TurbuLenz. En el presente trabajo, para cada serie de archivos de entrada se generó una nueva pantalla de fase para el paso de tiempo inicial.

Si no es el primer paso de tiempo se llamará nuevamente a "calculate\_phase" para generar las pantallas de fase simulando la evolución temporal. En este punto el autor necesita introducir una función que genere números al azar para modelar la variación aleatoria del índice de refracción. En varias de las pruebas realizadas (sección 3.3) se encontró un problema con esta función.

Dado que el sistema de cómputo era incapaz de procesar un archivo de entrada con un número muy grande de pasos de tiempo, según se vio en el apartado anterior, fue necesario realizar procesos "secuenciales", es decir, se generaban más de un archivo de entrada completamente independientes pero con los mismos parámetros de inicialización, las pantallas de fase para cada uno de los archivos resultaban idénticas para el mismo paso de tiempo en cada uno de los archivos, por ejemplo, la pantalla de fase del paso de tiempo 1 y del archivo 1 era idéntica a la pantalla de fase del paso de tiempo 1 y de los archivos 2, 3, etc.. Fue necesario revisar el código de TurbuLenz para encontrar el problema y se encontró un error en la definición de la función generadora de números aleatorios. Una vez inicializada la primera pantalla de fase, para la cual se utilizaba una "semilla"  $s$ , generadora de una secuencia de números aleatorios, se seguía utilizando la misma "semilla" para los archivos siguientes. El problema se corrigió aumentando una línea más al código de la subrutina "calculate\_phase" que define a  $s$  como el reloj del sistema, de tal manera que siempre se tiene una "semilla" distinta para archivos distintos.

## PROPAGACIÓN A TRAVÉS DE LA TURBULENCIA

La subrutina fundamental del simulador de turbulencia atmosférica es "calculate\_phase", que se encarga de calcular la propagación del frente de onda a través de las distintas capas turbulentas que se definieron en los parámetros de entrada. Además a partir de la altura de cada una de las capas turbulentas, se mide la longitud de camino óptico que recorre el frente de onda y se compara con la distancia para propagación de Fresnel que también se especificó por el usuario en los parámetros de entrada. Si el camino óptico que recorre el frente de onda es igual o mayor que la distancia de Fresnel definida y no se ha encontrado aún la siguiente capa turbulenta o bien la superficie del observatorio, se aplicará un algoritmo para propagación de Fresnel al frente de onda. La subrutina "calculate\_phase" es llamada varias veces por el programa principal, se trata de una repetición secuencial para cada paso de tiempo, para cada telescopio (si hay más de uno), para cada estrella y para cada capa.

En esta misma subrutina se corrigió un problema en el cálculo del ángulo de incidencia. Al inicio de "calculate\_phase" se genera una matriz que contiene información del desplazamiento de la fase debido al ángulo de incidencia tip/tilt. El problema se encontró en una división por el factor constante 10.0, que no tiene ningún significado físico, en las líneas que calculan el tip/tilt. El problema se solucionó modificando las líneas de la siguiente manera:

```
tipfac = 2*Dpi*(p.star_direction)[star,0]/p.wavelength/p.pixelscale_phase
tiltfac = 2*Dpi*(p.star_direction)[star,1]/p.wavelength/p.pixelscale_phase
```

Dado que la información del tip/tilt de la fase se refiere a la totalidad de la pantalla de fase, y la parte observable de esta inclinación debe de estar contenida en la apertura del telescopio, entonces tipfac y tiltfac deben de ser funciones de la escala de pixel en el plano de la pupila, esto es el cuarto parámetro que aparece en la tabla 3.2, y que se almacena en la variable de estructura "p.pixelscale\_phase".

El almacenamiento de los datos depende de las especificaciones que se han dado en el archivo ".inp", si se ha decidido guardar los resultados para todas las capas, la misma subrutina "propagate\_phase" se encarga, mediante la utilización de una variable auxiliar, de salvar en disco los resultados para cada una de las capas turbulentas o bien, guardar los resultados en forma de archivos temporales y salvar solamente el resultado final, el frente de onda que ha pasado por todas las capas. Este fue el caso de todas las pruebas que se realizaron con el simulador.

### 3.3. Pruebas realizadas con TurbuLenz previas a su utilización con el simulador de SCIDAR generalizado

#### FUNCIÓN DE ESTRUCTURA

Se diseñó un algoritmo en IDL para el análisis de la función de estructura de acuerdo con la ecuación (2.11). La figura (3.2) nos permite comparar el comportamiento de la función de estructura calculada teóricamente (línea segmentada) con la función de estructura que se obtiene como resultado de las pantallas de fase obtenidas directamente de TurbuLenz (línea continua).

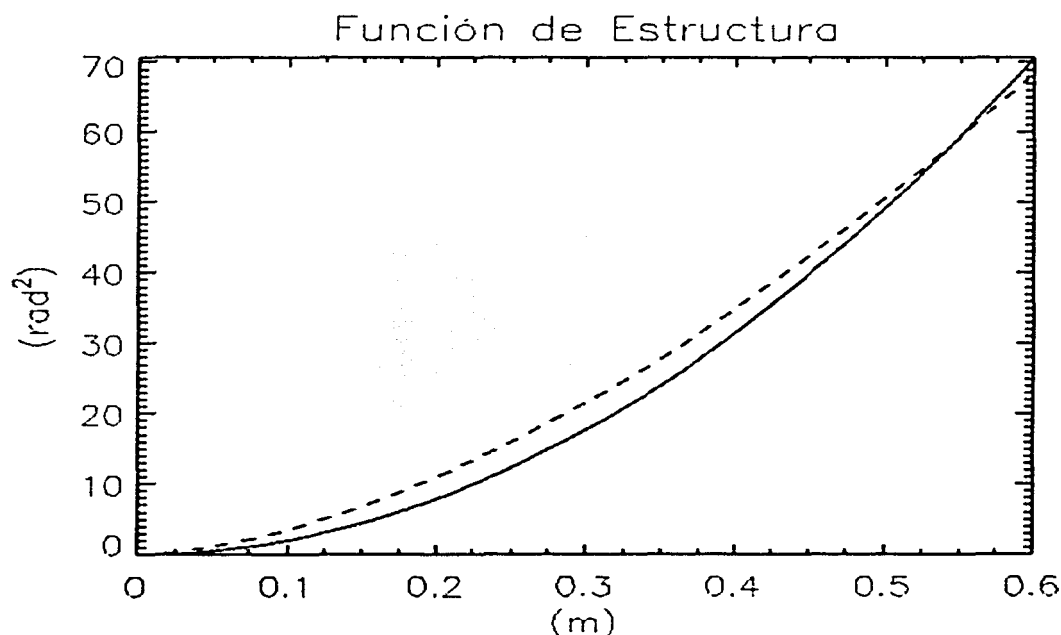


Figura 3.2: Función de estructura teórica (línea segmentada) comparada con la función de estructura calculada (línea continua) a partir de las pantallas de fase obtenidas con TurbuLenz

## SPECKLES EN EL PLANO IMAGEN

TurbuLenz posee una opción para generar la intensidad en el plano imagen, esto se realiza mediante una transformación de Fourier que tiene la forma:

$$I_{img}(x, y) = \left| \mathcal{F} \left[ A(\xi, \eta) e^{i\Phi(\xi, \eta)} \right] \right|^2 \quad (3.7)$$

Donde  $(x, y)$  son las coordenadas en el plano imagen,  $(\xi, \eta)$  son las coordenadas en el plano pupila,  $A(\xi, \eta)$  y  $\Phi(\xi, \eta)$  son la amplitud y la fase de la onda  $\Psi(\xi, \eta)$  en el plano de la pupila.

Para evaluar esta parte, se generaron archivos para simulación de una sola capa atmosférica a 10 km, y se compararon resultados en el plano imagen para un  $r_0 = 0.5$  m., figura (3.3.a) y un  $r_0 = \infty$ , figura (3.3.b) que corresponde a la ausencia de turbulencia. La intensidad en el plano  $(x, y)$  será una imagen de corto tiempo de exposición, que de acuerdo a lo expuesto en el capítulo 2, será una distribución de speckles.

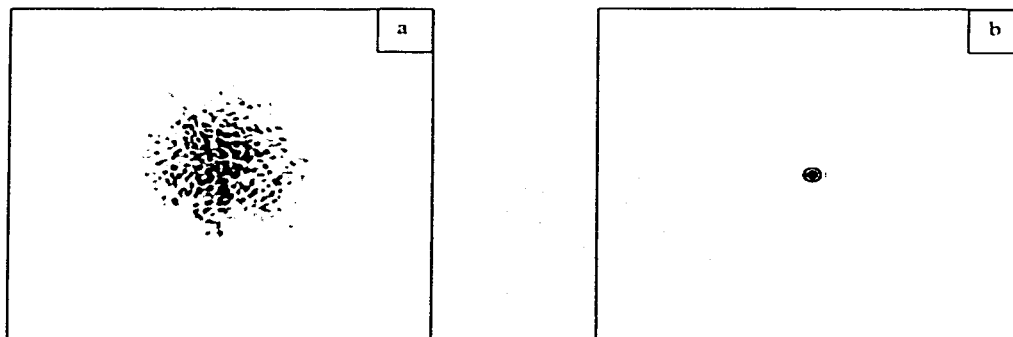


Figura 3.3: Speckles en el plano imagen obtenidos con TurbuLenz, correspondientes a una capa a 10 km. En (a) se muestra el caso para  $r_0 = 0.5$  m., mientras que en (b) no hay turbulencia ( $r_0 = \infty$ ), en este último caso se tiene un solo speckle, la figura de Airy.

## SPECKLES EN EL PLANO DE LA PUPILA

Las imágenes anteriores corresponden a la propagación del frente de onda desde la pupila del telescopio hasta el detector científico, pasando por la óptica del instrumento. Este es el caso de la difracción de campo lejano o difracción al infinito que se describe en el apéndice A. Sin embargo, lo que necesitamos para el SCIDAR generalizado, ya sea en el instrumento real o en el simulador, son las imágenes de centelleo o los speckles en la pupila.

Para ello se programó en IDL un código que permite formar la imagen en el plano de la pupila y analizarla con cortes transversales. Dicho código también se utiliza para propagar la imagen desde el plano pupila hasta el plano de análisis, paso esencial en el simulador de SCIDAR generalizado. Varias secciones del código de este programa auxiliar de análisis, se incluyeron posteriormente en el simulador de SCIDAR generalizado.

Se supone la existencia de dos estrellas separadas entre sí algunos segundos de arco. Una subrutina se encarga de la lectura de los archivos de amplitud  $A(\xi, \eta)$  y fase  $\Phi(\xi, \eta)$  para cada estrella y se calcula la onda compleja  $\Psi(\xi, \eta) = A(\xi, \eta)e^{i\Phi(\xi, \eta)}$ . La intensidad en la pupila para una sola estrella está dada por:

$$I_i(\xi, \eta) = (\Psi_i(\xi, \eta) \cdot \Psi_i^*(\xi, \eta)) \cdot \Pi(\xi, \eta) \quad (3.8)$$

Donde  $\Pi(\xi, \eta)$  es la máscara de la pupila (ver capítulo siguiente) que colima la imagen de especúles a una zona circular del tamaño de la pupila, y que incluye la obstrucción central debida al espejo secundario y su soporte. La intensidad total es la suma de las intensidades de ambas estrellas en el plano pupila:

$$I_{pup}(\xi, \eta) = I_1(\xi, \eta) + I_2(\xi, \eta) \quad (3.9)$$

Un ejemplo de lo anterior se puede observar en la figura (3.4). En (a) y (b) se muestran la amplitud y fase obtenidas con TurbuLenz para el caso de dos capas situadas a 5 y 20 Km, con un  $r_0 = 15$  cm y para el caso particular del paso de tiempo  $\text{timestep} = 10$ , recuerdese que se han definido pasos de tiempo distanciados por 20 ms uno de otro. En (c) se muestra la intensidad en el plano de la pupila obtenida con el programa auxiliar, y en (d) se muestra una imagen similar a la del apartado anterior, se trata de la intensidad en el plano imagen, pero esta vez obtenida mediante la utilización del programa auxiliar de análisis.

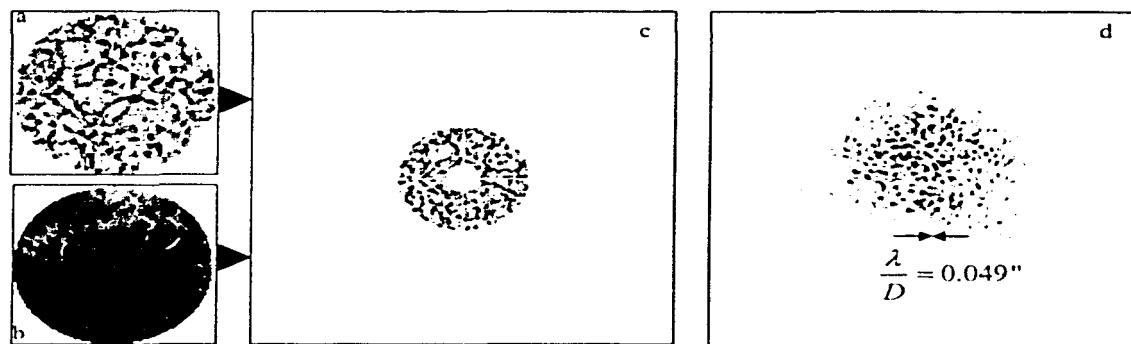


Figura 3.4. Formación de la intensidad en el plano pupila (c) a partir de la amplitud (a) y fase (b) generadas por TurbuLenz. En (d) se muestra la intensidad en el plano imagen obtenida a partir de la amplitud y fase (a) y (b). (d) es equivalente a las imágenes de intensidad generadas por TurbuLenz.

Tanto la amplitud como la fase son imágenes de 81 píxeles de diámetro, al igual que la pupila en la fig. (3.4.c), pero ésta última se coloca en un plano de análisis de 256 píxeles de lado, (ver apartado "muestreo en la pupila" en este mismo capítulo).

Como se estudió en el capítulo anterior, es necesario comprobar que el tamaño de cada speckle es del orden del límite de difracción del telescopio ( $\lambda/D$ ), mientras que el tamaño total de la imagen es del orden de  $\lambda/r_0$ . En el caso de ausencia de turbulencia, como en la figura (3.3.b), se tiene un solo speckle que es el pico central de la figura de Airy (ver apéndice A).

Graficando cortes transversales de la intensidad, se calculó el promedio del tamaño de los speckles en el plano imagen (fig. 4.4.d), y se obtuvo un promedio de 3.3 píxeles de diámetro por speckle. Para una longitud de onda  $\lambda = 0.5 \mu\text{m}$  y un diámetro de la pupila de  $D = 2.1\text{m}$ , la teoría nos dice que el tamaño de los speckles en el plano imagen debe ser:

$$\frac{\lambda}{D} = \frac{0.5 \mu m}{2.1 m} = 2.38 \times 10^{-7} \text{ rad} \cdot (206265''/\text{rad}) = 0.049'' \quad (3.10)$$

En éste mismo capítulo se ha visto que la escala del pixel en el plano imagen es:  $\lambda/L=0.015''/\text{pix}$ . Por lo tanto, el diámetro de los speckles en el plano imagen expresado en segundos de arco, de acuerdo con el promedio calculado de 3.3 pixeles por speckle es:

$$\left(\frac{\lambda}{L}\right)(3.3 \text{ pix}) = (0.015''/\text{pix})(3.3 \text{ pix}) = 0.049'' \quad (3.11)$$

Que corresponde precisamente al resultado predicho por la teoría (fig. 3.4.d).

### SPECKLES EN EL PLANO DE ANÁLISIS

Como se ha expuesto en el capítulo anterior, en el SCIDAR generalizado se observa el centelleo en un plano que se encuentra algunos kilómetros por debajo de la pupila. Para ello es necesario propagar el frente de onda desde el plano pupila hasta este plano de análisis. La intensidad estará dada entonces por:

$$I_{ana}(\xi', \eta') = \left| \left( \mathcal{F} \left[ A(\xi, \eta) e^{i\Phi(\xi, \eta)} \right] \right) \cdot \left( \mathcal{F} \left[ A(\xi, \eta) e^{i\Phi(\xi, \eta)} \right] \right)^* \right|^2 \quad (3.12)$$

Donde  $\Psi(\xi, \eta) = A(\xi, \eta) e^{i\Phi(\xi, \eta)}$  es la onda compleja en el plano de la pupila, con coordenadas  $(\xi, \eta)$ . El plano de análisis tiene coordenadas  $(\xi', \eta')$  y el símbolo \* denota el complejo conjugado. En el caso del SCIDAR clásico, la distancia de propagación es nula, y el plano de análisis coincide con el plano pupila.

Como se verá en detalle en el capítulo siguiente, al observar dos estrellas, una en el eje óptico y la otra a una distancia de algunos segundos de arco, el frente de onda de esta última adquiere una cierta inclinación o tip-tilt. Esto provoca que la intensidad de la imagen de speckles en el plano de análisis se desplace una distancia proporcional a la separación de las estrellas y a la distancia entre el plano pupila y el de análisis.

En la sección 4.2 se demostrará que las imágenes de centelleo en el SCIDAR generalizado, para el caso de dos estrellas separadas  $10''$  y un plano de análisis situado 3 km por debajo de la pupila, deben tener una separación de 5.5 pixeles entre sí.

La intensidad total en la pupila o en el plano de análisis no es un resultado directo del simulador de turbulencia atmosférica. Sin embargo TurbuLenz añade una inclinación tip-tilt al frente de onda proveniente de la estrella fuera de eje, el objetivo aquí es verificar que el tip-tilt que TurbuLenz agrega a la fase se traduce en un desplazamiento numéricamente adecuado de la imagen de speckles en el plano de análisis para el caso del SCIDAR generalizado.

Se utilizó el programa auxiliar antes mencionado, para medir el desplazamiento en pixeles de las imágenes de centelleo en un plano de análisis a 3 km por debajo del plano pupila. Mismas que se construyen a partir de pantallas de amplitud y fase generadas por TurbuLenz, correspondientes a una estrella situada en el eje óptico y otra a  $10''$  en sentido positivo al eje x (fig. 3.5). Se encontró que al utilizar el tip-tilt añadido por TurbuLenz aparecen desplazamientos en ambos ejes y en particular en el eje x, este desplazamiento es de 2 pixeles (fig. 3.5.b).

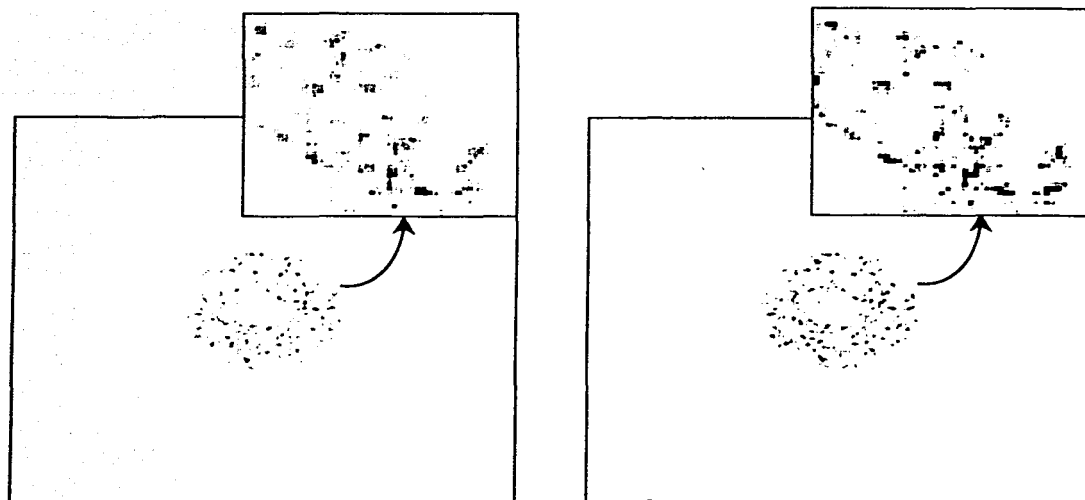


*Figura 3.5: Observación de los speckles en el plano de la pupila (a) y en un plano de análisis situado a 3km por debajo (b). De acuerdo con la teoría, el desplazamiento de la pupila para la estrella fuera de eje debe de ser de 5.5 pix solamente en el eje de las x. En (b) se muestra un desplazamiento de 2 pixeles en la horizontal, además de un desplazamiento adicional sobre el eje y.*

Por lo anterior se decidió eliminar la inclinación de la fase introducida por Turbulenz y propagar los frentes de onda planos de ambas estrellas, para luego aplicar un desplazamiento equivalente al que introduciría el tip-tilt de la fase de la estrella fuera de eje. Esto es posible mediante un método de interpolación en el espacio de Fourier que será explicado en detalle en el siguiente capítulo.

## Simulador de SCIDAR generalizado

### 4.1. Funcionamiento del simulador de SCIDAR generalizado

#### DESCRIPCIÓN GENERAL

Se utiliza IDL (Interactive Data Language) para programar un simulador completo del SCIDAR generalizado, con la capacidad de modelar también el SCIDAR clásico y la posibilidad de modelar algunos efectos instrumentales. El simulador consta de 21 subrutinas acopladas de manera modular. El programa principal, SCIDARv0, es el encargado de controlar el proceso y llama a cada subrutina. Su descripción en forma de diagrama de flujo se puede consultar en el apéndice D.

El simulador procesa cientos o miles de pantallas de amplitud y fase, generadas por el simulador de turbulencia atmosférica Turbulenz. Se ha optimizado para analizar una estrella doble, dado que de esta manera será posible cuantificar simultáneamente  $\bar{V}(h)$  y  $C_n^2(h)$ . Por lo tanto se generan únicamente archivos de entrada para dos estrellas, la primera en el centro del campo de visión y la segunda desplazada 10 segundos de arco en la dirección positiva del eje x. El programa de simulación permite variar este parámetro. Sin embargo, en los análisis subsiguientes se toma como constante para efectos de mediciones y comparaciones cuantitativas. Este es el mismo caso de la distancia de propagación virtual bajo la pupila para simular el SCIDAR generalizado. Si bien el simulador admite una distancia arbitraria de propagación desde la pupila del telescopio hasta el plano virtual de análisis, se ha elegido trabajar con una distancia constante de propagación para el SCIDAR generalizado igual a 3 kilómetros; este parámetro se mantuvo constante solamente para efectos de calibración, para poder evaluar la salida del simulador. En general, la distancia a la que se encuentra el plano virtual de análisis con respecto a la pupila del telescopio, la puede definir el usuario.

Como se expuso en el capítulo anterior, Turbulenz simula pantallas de fase y amplitud de corto tiempo de exposición (algunos milisegundos), separadas entre sí por un intervalo de tiempo de 20 milisegundos, lo que llamamos *pasos de tiempo*. Para cada uno de estos pasos se tiene como entrada un cuarteto de pantallas de amplitud y fase para la estrella en el eje óptico y amplitud y fase para la estrella fuera de eje respectivamente. El simulador de SCIDAR procesa el cuarteto de imágenes de un paso de tiempo aproximadamente en 3 segundos en una computadora con procesador Pentium III a 500 MHz, 256 Mb RAM. De tal manera que 1000 pasos de tiempo se procesan en 50 minutos aproximadamente. En todos los cálculos que se evalúan en el simulador de SCIDAR se utiliza doble precisión en punto flotante para disminuir los errores de cálculo debidos a redondeo por exceso o defecto.

El código de simulación construye la onda compleja  $\Psi$  de cada estrella, y para cada paso de tiempo a partir de la amplitud  $A$  y la fase  $\Phi$  correspondientes, lo que se hace de acuerdo con la ecuación (4.1).

$$\Psi = Ae^{i\Phi} = A(\cos \Phi + i \sin \Phi) \quad (4.1)$$

Después se calcula la intensidad de la onda en la pupila del telescopio (SCIDAR clásico), de acuerdo con (4.2).

$$I = |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* \quad (4.2)$$

Posteriormente, a la amplitud y la fase de la onda se aplica una propagación de Fresnel correspondiente a tres kilómetros por debajo del nivel del observatorio de acuerdo con la ecuación (2.36), donde el símbolo  $*$  denota la convolución de la onda con el propagador de Fresnel:

$$\Psi_o(x) = \Psi_h(x) * \frac{1}{i\lambda h} e^{i\pi \frac{x^2}{\lambda h}} \quad (4.3)$$

Finalmente se calculan imágenes promedio de autocorrelación normalizada, intercorrelación a 20 ms e intercorrelación a 40 ms, esto se verá en detalle más adelante en este capítulo. A partir del análisis de estas imágenes, se puede obtener una caracterización de las distintas capas turbulentas de la atmósfera: altura, intensidad de la turbulencia  $C_n^2(h)$  así como el vector velocidad del viento  $\vec{V}(h)$  asociado a esa capa.

## PARÁMETROS DE ENTRADA

La subrutina "StartVars" se encarga de inicializar las variables principales de la simulación, que se describen en la tabla 4.1. Usualmente también es necesario modificar las rutas de acceso para los archivos de entrada/salida en esta misma subrutina. Varios de los elementos que se definen en StartVars serán utilizados por una o varias subrutinas a lo largo de la simulación, por lo que todas estas variables forman parte de una "estructura" o conjunto predefinido de variables, lo que hace más fácil y rápida su utilización individual en subrutinas posteriores. La estructura tiene el nombre "param" tanto en StartVars como en el programa principal, SCIDARv0, y en todas las demás subrutinas es llamado "prm", de tal manera que "param.lambda", por ejemplo, es la variable que contiene la longitud de onda durante toda la simulación.

Los valores de las variables restantes permanecen, por lo general, sin modificaciones; aunque es posible para el usuario modificar las dimensiones de la pupila (dimpup) y el plano pupila (dimitab), el tamaño de la obstrucción central (radioob), la separación de las estrellas (starsep), la longitud de onda (lambda), y la distancia para la propagación de Fresnel después de la pupila en el caso del SCIDAR generalizado (distfresnel).

Es importante definir el número total de imágenes de entrada, amplitud y fase, que se procesarán para el cálculo de autocorrelaciones e intercorrelaciones, este número se almacena en la variable (param.timestep). Es importante utilizar muchas imágenes de entrada, del orden de 1000 o más, para disminuir el ruido, puesto que la relación que existe entre el número total de imágenes  $N$  y el ruido de cálculo  $R$  es inversamente proporcional:

$$R \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.4)$$

Por ejemplo, para exactamente 1000 imágenes se tiene  $R \propto 1000^{-1/2} \approx 0.032 \approx 3\%$  de ruido de cálculo. El número total de imágenes que se define en el simulador de SCIDAR, debe ser menor o igual al número de pasos de tiempo generados por Turbulenz.

| NOMBRE      | DESCRIPCION                                                                    |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| Dimtab      | Dimensión del plano pupila (pix)                                               |
| Dimpup      | Diámetro de la pupila (pix)                                                    |
| Radiopup    | Radio de la pupila (pix)                                                       |
| radioobt    | Diámetro de la obstrucción central (pix)                                       |
| offset      | Parámetro para integrar las pantallas de fase y amplitud al plano pupila (pix) |
| s           | Escala en el plano de análisis (m/pix)                                         |
| lambda      | Longitud de onda (m)                                                           |
| distfresnel | Distancia en la que se propagará el frente de onda después de la pupila (m)    |
| starsep     | Separación de las estrellas (arcsec)                                           |
| timestep    | Número total de pasos de tiempo                                                |
| partial     | Se guardarán resultados parciales cada "partial" pasos de tiempo               |
| pupilmask   | Matriz para almacenar la máscara de la pupila                                  |
| ampl_1tab   | Matriz para almacenar la amplitud de la estrella 1 integrada al plano pupila   |
| ampl_2tab   | Matriz para almacenar la amplitud de la estrella 2 integrada al plano pupila   |
| phase_1tab  | Matriz para almacenar la fase de la estrella 1 integrada al plano pupila       |
| phase_2tab  | Matriz para almacenar la fase de la estrella 2 integrada al plano pupila       |
| aberrated   | Matriz para almacenar las aberraciones fijas de la pupila                      |
| autocorsum  | Para almacenar la suma de las autocorrelaciones                                |
| Acimagprom  | Para almacenar la autocorrelación de la imagen promedio                        |
| acor        | Para almacenar la autocorrelación en cada paso de tiempo                       |
| ttphase     | Para almacenar el tip/tilt de la fase (estrella fuera de eje)                  |
| phasdespl   | Para almacenar el corrimiento de la fase de la estrella                        |
| xksi1       | Matriz auxiliar para propagación de Fresnel                                    |
| xksi1       | Matriz auxiliar para propagación de Fresnel                                    |
| Result      | Matriz auxiliar                                                                |
| Gi          | Matriz auxiliar para propagación de Fresnel                                    |
| Path        | Ruta de acceso para archivos de entrada                                        |
| Writepath   | Ruta de acceso para archivos de salida                                         |

Tabla 4.1: Parámetros generales de entrada inicializados en la subrutina "StartVars".

Antes de iniciar la simulación se inicializan los arreglos en los que se guardará la información de las imágenes de salida, al igual que la subrutina StartVars, esto se hace mediante una estructura que contiene los parámetros que se describen en la tabla 4.2.

| NOMBRE        | DESCRIPCION                                                  |
|---------------|--------------------------------------------------------------|
| Autocorpup    | Autocorrelación en la pupila para el paso de tiempo en curso |
| Sumautocor    | Suma de las autocorrelaciones                                |
| Imagtot       | Imagen                                                       |
| Imagsum       | Suma de las imágenes                                         |
| Imagprom      | Promedio de las imágenes                                     |
| Intercor20    | Intercorrelación a 20ms                                      |
| Intercor40    | Intercorrelación a 40ms                                      |
| Intercor20sum | Suma de las intercorrelaciones a 20 ms                       |
| Intercor40sum | Suma de las intercorrelaciones a 40 ms                       |
| Intercor20av  | Promedio de las intercorrelaciones a 20 ms                   |
| Intercor40av  | Promedio de las intercorrelaciones a 40 ms                   |
| icor20        | Intercorrelación a 20ms normalizada                          |
| icor40        | Intercorrelación a 40ms normalizada                          |

Tabla 4.2: Relación de las matrices para almacenamiento de autocorrelaciones e intercorrelaciones definidas en la subrutina InitImageArrays

## TRASLADO DE LAS IMÁGENES AL PLANO PUPILA

Al iniciar el proceso de las imágenes, se establece un *bucle* o secuencia que se repite tantas veces como el número total de pasos de tiempo. La subrutina "ReadAmplPhase" se encarga de leer los cuatro archivos correspondientes a la amplitud y fase de las dos estrellas en el plano pupila. Es necesario, para cálculos posteriores, trasladar estas pantallas a una matriz del tamaño del plano pupila. El objetivo de todo el proceso es obtener imágenes de intensidad en el plano pupila con un muestreo correcto, correspondiente a un diámetro del espejo primario de 2.1 m, que es el caso del telescopio principal del Observatorio Astronómico Nacional en San Pedro Mártir, B. C..

Supongamos, como es el caso, una pupila de 81 píxeles y un plano pupila de 256 píxeles por lado según se muestra en la figura 4.1 (ver el apartado "muestreo de la pupila" en la sección 3.1). Para incorporar una pantalla de fase o amplitud a una matriz del tamaño del plano pupila, es necesario sumar una cierta constante *offset* a las coordenadas de cada píxel, para que la pantalla de fase o amplitud quede centrada en el plano pupila. Tomando en cuenta las dimensiones que tenemos, la variable *offset* tiene un valor de 87 píxeles. Este cálculo es efectuado por la función "AddToTab" y luego regresada a "ReadAmplPhase", de tal manera que la subrutina devuelva al programa principal las cuatro imágenes de amplitud y fase integradas a una matriz de 256×256 píxeles.

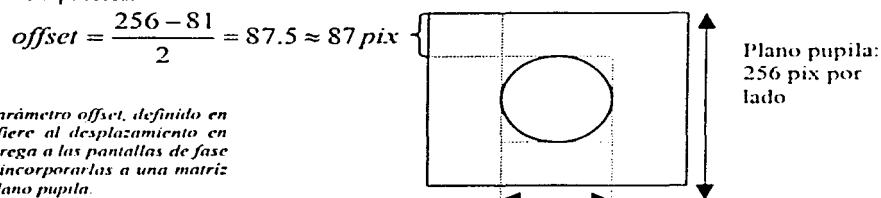


Figura 4.1: El parámetro *offset*, definido en *StartVars*, se refiere al desplazamiento en píxeles que se agrega a las pantallas de fase y amplitud para incorporarlas a una matriz del tamaño del plano pupila.

## MÁSCARA DE LA PUPILA

A continuación, en el programa principal se define la máscara de la pupila, esto es la abertura de diámetro "dimpup", la obstrucción central de radio "radioobt" y la "araña", que es el sistema de suspensión del espejo secundario en el telescopio y consiste en dos barras metálicas transversales que soportan el secundario, mismas que se representan en el simulador por dos líneas nulas perpendiculares entre sí y con ancho igual a 1 píxel. Esto se efectúa mediante la utilización de las funciones "ExternMask" y "GenMask". La función *ExternMask* genera una máscara externa a la pupila, se utiliza en varias secciones a lo largo del programa de simulación con el propósito de eliminar efectos de borde. La función *ExternMask* genera la obstrucción central y el soporte del secundario, para después llamar a *ExternMask* y construir la obstrucción completa en el plano de la pupila (fig. 4.2)

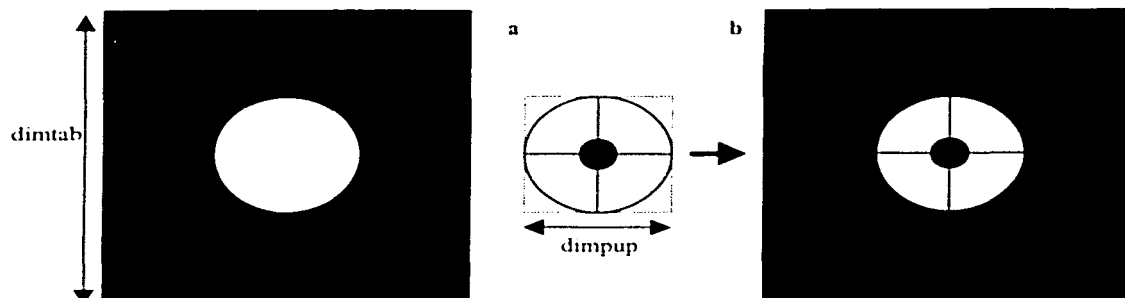


Figura 4.2: Generación de la máscara de la pupila. En (a) se muestra el resultado de la función *ExternMask*. En (b), la función *GenMask* añade la obstrucción central y el soporte del secundario, después utiliza *ExternMask* para construir la obstrucción completa en el plano de la pupila.

## ABERRACIONES DE LA ÓPTICA DEL TELESCOPIO

Se define una matriz (\*param.aberrated) que contiene las aberraciones intrínsecas de la óptica del telescopio (ver capítulo 5). La función "zernikes" define los polinomios hasta el orden 15 y posteriormente la función "Aberrations" multiplica los polinomios por sus correspondientes coeficientes y construye una pantalla que contiene las deformaciones estáticas de la óptica del telescopio de 2.1 m de San Pedro Mártir [13].

La subrutina "AddStaticAber" suma a la fase de cada estrella la información calculada previamente mediante "Aberrations". Basta con suprimir esta línea de código para simular el comportamiento de una óptica perfecta.

### PROPAGACIÓN, ESTRELLA FUERA DE EJE

Cuando se observa la estrella fuera de eje, el frente de onda tiene cierta inclinación o tip-tilt, lo que debe provocar un desplazamiento de la imagen sobre el plano pupila. Al realizar las primeras pruebas con el programa TurbuLenz y una versión preliminar del programa simulando el SCIDAR generalizado, no se encontró desplazamiento alguno de la fase de la estrella fuera de eje. Se decidió entonces eliminar la información de tip-tilt dada por TurbuLenz, propagar la onda plana hasta el plano de análisis y posteriormente aplicar un desplazamiento equivalente sobre el plano imagen.

La función "TipTilt" se encarga de calcular el ángulo de llegada de la fase para su posterior eliminación mediante:

$$TT = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{\rho s}{206265} \right) \quad (4.5)$$

Donde  $\rho$  es la separación entre los componentes de la estrella doble,  $s$  es la escala de la pupila en m/pix, y 206265 es el factor de conversión de segundos de arco a radianes. La fase corregida por el término TT corresponde entonces a la de un frente de onda plano.

Inmediatamente después, la función "PhaseDisplacement" utiliza la ecuación (4.5), y la distancia que se propagará el frente de onda después de la pupila para construir la imagen de fase de una onda plana, con un desplazamiento equivalente (fig. 4.3). El desplazamiento equivalente corresponde a  $D = h_{SG} * (-TT)$ . Donde  $h_{SG}$  es la distancia de propagación después de la pupila, que se aplica en el caso del SCIDAR generalizado, y TT es la ecuación (4.5).

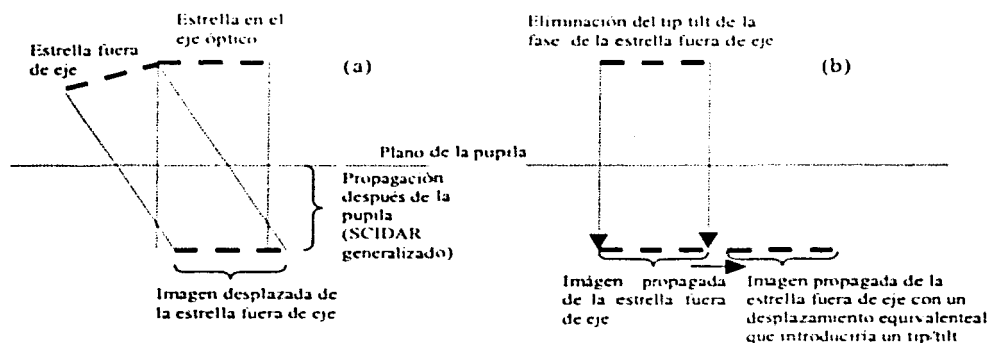


Figura. 4.3: (a) En el SCIDAR generalizado, la imagen fuera de eje se observa desplazada debido al tip tilt de la fase, la separación de las estrellas y la distancia de propagación después de la pupila. Para modelar este desplazamiento en el programa (b), se elimina el tip/tilt de la fase de la estrella fuera de eje, se propaga el frente de onda y se desplaza una distancia equivalente a la que induciría el tip tilt original.

La intensidad de la estrella fuera de eje en el plano de análisis se calcula en el simulador de SCIDAR por medio de la convolución de la intensidad con un desplazamiento  $\delta$ , que es función de las coordenadas espaciales  $x, y$ . Esto constituye una interpolación en el espacio de Fourier:

$$i_d(x, y) = i(x, y) * \delta(x - d, y) \quad (4.6)$$

Donde  $d$  está dado en pixeles fraccionarios. Llamemos  $u$  al parámetro que define las dimensiones del plano de análisis:

$$u = \frac{i(x, y) - \frac{\dim(x)}{2} + 1}{\dim(x)} \quad (4.7)$$

Con  $\dim(x)$  la dimensión de la pupila en el plano de análisis. El simulador de SCIDAR construye la intensidad desplazada mediante:

$$i_d(x, y) = FFT^{-1}[FFT(i(x, y)) \times \cos(2\pi du) + jFFT(i(x, y)) \times \sin(2\pi du)] \quad (4.8)$$

Aquí,  $j$  representa la componente imaginaria. Al tener como argumento de la transformación al desplazamiento equivalente, estamos haciendo una interpolación en el espacio de Fourier, que nos permite definir corrimientos fraccionarios para la fase de la estrella fuera de eje.

## CÁLCULO DE LAS INTENSIDADES EN EL PLANO DE ANÁLISIS

Existe una sola subrutina que se encarga de calcular las intensidades en el plano de análisis para cada estrella, ya se trate del SCIDAR clásico o del generalizado. La función CalculateIntensity realiza este cálculo mediante el uso de un indicador de entrada o *flag*. Son posibles tres casos distintos para la variable *flag*:

*flag* = 0: SCIDAR clásico (no generalizado): En este caso el frente de onda no se propaga después de la pupila, por lo que CalculateIntensity simplemente construye la onda compleja a partir de la amplitud y la fase y calcula la intensidad en la pupila. Para ello se utiliza la función auxiliar "CalculateWave", que con la información de las pantallas de amplitud y fase, construye la onda compleja  $\Psi = Ae^{\phi}$ . Donde  $A$  es la amplitud, y  $\phi$  es la fase de la onda. La intensidad se calcula entonces como:

$$I = \Psi \Psi^* \quad (4.9)$$

Donde  $\Psi^*$  denota el complejo conjugado de la onda  $\Psi$ .

*flag* = 1: SCIDAR generalizado y estrella en el eje óptico: Se aplica una propagación de Fresnel [28] de acuerdo con la ecuación (2.36), que es posible hacerlo mediante [39]:

$$\mathcal{T}^{-1}[\mathcal{T}(\Psi) \times F] \quad (4.10)$$

Donde  $\Psi = Ae^{\phi}$  es la onda compleja,  $\mathcal{T}$  denota la transformada de Fourier,  $\mathcal{T}^{-1}$  la transformada de Fourier inversa y  $F = (i\lambda h)^{-1} \exp(i\pi x^2 / \lambda h)$  es el propagador de Fresnel de la ecuación (2.36).

El módulo de la transformación (4.10) será la amplitud propagada  $A_{prop}$ , mientras que su argumento será la propagación de la fase  $\Phi$ . Finalmente se construye la onda compleja propagada  $\Psi_{prop} = A_{prop} e^{\Phi}$  y la intensidad propagada  $I_{prop} = \Psi_{prop} \Psi_{prop}^*$ .

*flag* = 2: SCIDAR generalizado y estrella fuera del eje óptico: Utiliza el resultado calculado en la función TipTilt para obtener una fase plana (fig. 4.3.b) y a continuación se procede de manera análoga al caso *flag*=1. Se utiliza la información calculada en PhaseDisplacement para trasladar la imagen de intensidad propagada.

Una vez calculadas ambas intensidades en el plano de análisis, se suman para obtener la intensidad total de la estrella doble y se guarda en un archivo de imagen "fits".



Figura 4.4:

*Ejemplo de una imagen de centelleo en el plano de análisis.*

*Centelleo para una capa al nivel del observatorio y otra situada a 15 km.*

## CÁLCULO DE AUTOCORRELACIONES

Ahora se puede calcular la autocorrelación para el paso de tiempo en curso y la suma de las autocorrelaciones (a partir del segundo paso de tiempo). La función de autocorrelación, ecuación (2.62), se calcula en la función "CurrentAutocor" a partir de la intensidad  $I(\vec{\rho})$  mediante [28], [39]:

$$AC_I(\vec{\rho}) = \Im \left[ \left| \Im^{-1} [I(\vec{\rho})] \right|^2 \right] \quad (4.11)$$

Si en los parámetros de entrada se ha especificado guardar resultados parciales para el paso de tiempo en curso, se llamará a la subrutina NormAverAutocor que se encargará de calcular el promedio de las autocorrelaciones, la autocorrelación de la imagen promedio, ecuación (2.63), y la autocorrelación normalizada, ecuación (2.64). La autocorrelación de la imagen promedio se calcula mediante:

$$ACIM_I(\vec{\rho}) = \Im \left[ \left| \Im^{-1} \left[ \overline{I(\vec{\rho})} \right] \right|^2 \right] \quad (4.12)$$

Donde la barra sobre  $I(\vec{\rho})$  denota el promedio de las intensidades. Teniendo  $AC_I(\vec{\rho})$  y  $ACIM_I(\vec{\rho})$ , es fácil calcular la autocorrelación normalizada, de acuerdo con la ecuación (2.64):

$$C^{**}(\vec{\rho}) = \frac{AC_I(\vec{\rho}) - ACIM_I(\vec{\rho})}{ACIM_I(\vec{\rho})} = \frac{AC_I(\vec{\rho})}{ACIM_I(\vec{\rho})} - 1 \quad (4.13)$$

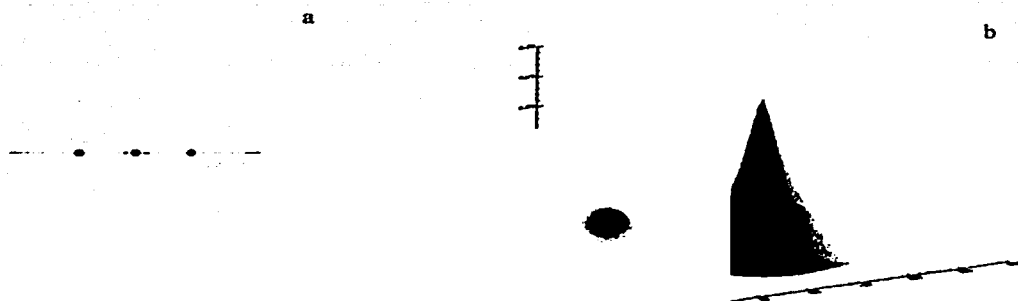


Figura 4.5: (a) Ejemplo de una imagen de autocorrelación para el caso de una capa a nivel del observatorio y otra capa a 15 km. En (b) se observa la gráfica de la autocorrelación de la imagen promedio. Si las auto e intercorrelaciones no se normalizan con una función como (b), la información que se pueda obtener de imágenes como (a) o como la fig. 4.6 queda superpuesta al "ruido" generado por la función (b).

### CÁLCULO DE INTERCORRELACIONES

Las subrutinas CalculateIntercor20 y CalculateIntercor40, se encargan de calcular las intercorrelaciones a 20ms y a 40ms respectivamente mediante la aplicación de las ecuaciones (2.69) y (2.70).

La intercorrelación promedio para N pasos de tiempo se calcula mediante:

$$AC_I(\vec{\rho}) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} \Im \left[ \Im^{-1}[I_i(\vec{\rho})] (\Im^{-1}[I_j(\vec{\rho})])^* \right] \quad (4.14)$$

Donde de nuevo,  $\Im$  y  $\Im^{-1}$  denotan las transformadas de Fourier directa e inversa respectivamente, y  $*$  denota el complejo conjugado. Dado que la separación temporal entre imágenes es de 20ms,  $j=i+1$  para la intercorrelación a 20 ms, mientras que  $j=i+2$  en el caso de las intercorrelaciones a 40ms. Por lo tanto, las intercorrelaciones a 20 ms se calculan a partir del segundo paso de tiempo, mientras que las intercorrelaciones a 40 ms se calculan a partir del tercer paso de tiempo.



Figura 4.6: Intercorrelaciones a 20ms (a) y a 40 ms (b), para el caso de una capa al nivel del observatorio y otra capa a 15 km.

La intercorrelación normalizada, ecuación (2.69), se puede calcular mediante:

$$IC_i^{**}(\bar{\rho}) = \frac{IC(\bar{\rho}) - ACIM_i(\bar{\rho})}{ACIM_i(\bar{\rho})} = \frac{IC(\bar{\rho})}{ACIM_i(\bar{\rho})} - 1 \quad (4.15)$$

Donde  $ACIM_i(\bar{\rho})$  está dado por la ecuación (4.12).

## ARCHIVOS DE SALIDA

Como salida principal se tienen la imagen de autocorrelación y las intercorrelaciones a 20 y 40 ms. Como salidas secundarias se tienen las imágenes de intensidad en la pupila para cada paso de tiempo, el promedio de las autocorrelaciones y la autocorrelación de la imagen promedio. Todas las imágenes que serán utilizadas posteriormente para efectos de mediciones se guardan en formato "fits", como por ejemplo, las intensidades y las imágenes de autocorrelación e intercorrelación en dos dimensiones, mientras que las imágenes que no se utilizan para medición, como las autocorrelaciones e intercorrelaciones en 3 dimensiones, se guardan en formato "tiff".

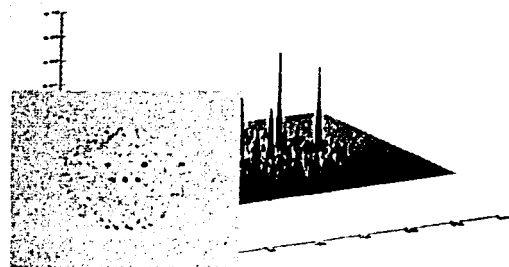
El programa permite almacenar resultados parciales cada N pasos de tiempo, este número se almacena en la variable (param.partial). Hasta el momento es necesario tener en cuenta que (param.timestep) debe ser divisible entre (param.partial) para que el simulador guarde resultados totales, de lo contrario se perderán los resultados de la última serie de pasos de tiempo. Esto se corregirá en versiones posteriores. Hasta ahora se ha probado su funcionamiento hasta con 1000 pasos de tiempo y se guardaron resultados parciales cada 50 o 100 pasos.

La función SeeAndSave permite la visualización y el almacenamiento de los resultados; mediante la utilización de la variable auxiliar *visual*, que se describe en la tabla 4.3, es posible visualizar en pantalla los resultados, guardarlos en disco o ambos a la vez.

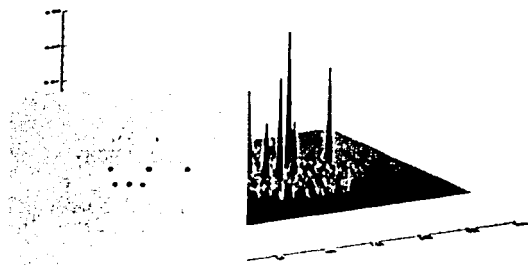
| <b>visual =</b> | <b>PROCEDIMIENTO EFECTUADO POR LA FUNCION SeeAndSave</b>                               |
|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| 0               | Escribe los resultados en formato "fits" (2 dimensiones)                               |
| 1               | Escribe los resultados en formato "fits" y los muestra en pantalla (2 dimensiones)     |
| 2               | Muestra en pantalla los resultados en 2 dimensiones                                    |
| 3               | Escribe los resultados en formato "tiff" y los muestra en pantalla (3 dimensiones)     |
| 4               | Muestra en pantalla los resultados en 3 dimensiones                                    |
| 5               | Escribe los resultados en formato "tiff" y los muestra en pantalla (2 y 3 dimensiones) |
| 6               | Muestra en pantalla los resultados en 2 y 3 dimensiones                                |

Tabla 4.3 Todas las combinaciones posibles para la obtención de resultados con la función SeeAndSave mediante la asignación de distintos valores a la variable auxiliar "visual"

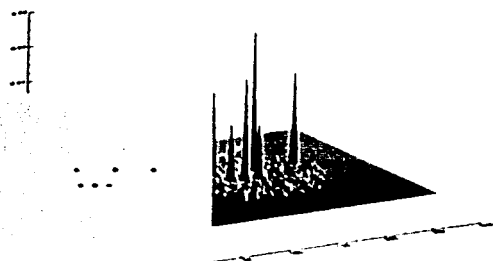
La figura 4.7 es un ejemplo de la salida del simulador de SCIDAR. Se presentan imágenes de intercorrelación a 40ms, para el caso de dos capas turbulentas a 5 y 20 Km respectivamente, con  $r_0=15\text{cm}$ . En las columnas se ordena la salida de la subrutina SeeAndSave para el caso de la variable "visual" = 1 (izquierda) y 5 (derecha). Asimismo se muestran ejemplos de resultados parciales a 100 y 500 pasos de tiempo, además del resultado total a 1000 pasos de tiempo. Nótese que el nivel de ruido de cálculo disminuye, y los picos de intercorrelación son más definidos a medida que se procesa un mayor número de pasos de tiempo.



(a)



(b)



(c)



Figura 4.7: Ejemplo de la salida del simulador de SCIDAR generalizado. Se muestran las intercorrelaciones a 40 ms para dos capas turbulentas a 5 y 20 Km, para 100 pasos de tiempo (a), 500 pasos de tiempo (b) y 1000 pasos (c). En la columna de la izquierda se utiliza la función SecAndSave con la variable visual=5, mientras que en la derecha se utiliza visual=1.

El ruido numérico disminuye a medida que se incrementa el número de imágenes consideradas para las intercorrelaciones o autocorrelaciones de acuerdo con:

$$R \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.16)$$

De tal manera que en la figura 4.7 (a), el ruido es proporcional a 0.1, en (b) a 0.04 y en (c) a 0.03. El patrón de franjas que se aprecia en las intercorrelaciones a 40 ms se deben al "aliasing", un error por defecto en el muestreo de la pupila. Esto será corregido en versiones posteriores del simulador.

## 4.2. Cuantificación de resultados del simulador de SCIDAR generalizado

### SEPARACIÓN DE IMÁGENES DE CENTELLEO

Una diferencia inmediata entre el SCIDAR clásico y el generalizado se puede ver en las imágenes de intensidad del centelleo. La formación de la imagen de speckles total, en el caso del SCIDAR clásico es a nivel de la pupila y por lo tanto es la suma de las intensidades de ambas estrellas en la pupila (fig. 4.8.a). En el caso del SCIDAR generalizado la imagen de intensidad total se forma por debajo del nivel de la pupila, de manera que la imagen de speckles de la estrella fuera de eje se desplaza una distancia  $d=\rho h$ , donde  $\rho$  es la separación de los componentes de la estrella y  $h$  es la distancia que hay desde el plano de la pupila del telescopio hasta el plano virtual de observación. En la figura 4.8.b se muestra el resultado para el caso particular  $\rho=10''$  y  $h=3\text{Km}$ , se observa que en (b) la componente vertical de la araña del secundario se pierde debido al desplazamiento de la imagen de intensidad. Recordando que hemos definido una escala de pixel de 38.1 pix/m de acuerdo con la ecuación (3.4), tenemos una separación de:

$$d = \rho h = (10'')(3\text{Km}) = (4.85 \times 10^{-5} \text{ rad})(3 \times 10^3 \text{ m}) = 0.145 \text{ m} \quad (4.17)$$

$$d_{\text{pix}} = (\text{escala})(d) = (38.1 \text{ pix/m})(0.145 \text{ m}) = 5.5 \text{ pix}$$

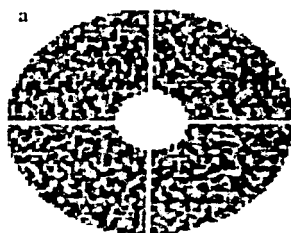


Figura 4.8:

Formación de la imagen de intensidad total (centelleo) en el caso del SCIDAR clásico (a) y el generalizado (b)

En (a) la imagen se forma en la pupila, en (b) la imagen de centelleo de la estrella en el eje se forma en el centro, al igual que en (a), mientras que la intensidad de la estrella fuera de eje se encuentra desplazada 6 pixeles a la izquierda

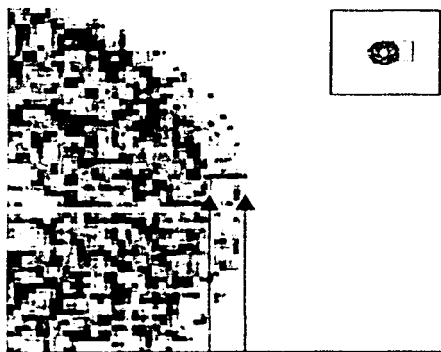


Figura 4.9:

Detalle de la figura 4.8 b. Aquí resulta evidente el desplazamiento de 6 pixeles a la izquierda de la imagen de centelleo de la estrella fuera de eje.

## SEPARACIÓN DE LOS PICOS LATERALES

La distancia de separación de los picos laterales es proporcional a la distancia de propagación  $h$  de acuerdo con:

$$d_{sep} = \rho(h + h_{SG}) \quad (4.18)$$

Donde  $h$  es la distancia de propagación desde la altura de la capa hasta el nivel de la pupila,  $h_{SG}$  es la propagación adicional después de la pupila, que se aplica en el caso del SCIDAR generalizado y  $\rho$  es la separación angular entre los componentes de la estrella doble. De manera que la separación de los picos laterales es mayor en el caso del SCIDAR generalizado que con el SCIDAR clásico. Lo anterior se demuestra en las figuras (4.10) y (4.11), comparando la separación de los picos laterales en la imagen de autocorrelación de 20ms para el caso de una capa turbulenta a 20km y  $r_0=20$  cm, con el SCIDAR clásico y el generalizado respectivamente. En analogía de las ecuaciones (4.17), para el caso del SCIDAR clásico tenemos una separación de:

$$\begin{aligned} d_{sep} &= \rho h = (10'')(20Km) = (4.85 \times 10^{-5} rad)(20 \times 10^3 m) = 0.97m \\ d_{pix} &= (escala)(d) = (38.1 pix / m)(0.97m) = 36.95 \approx 37 pix \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mientras que para el SCIDAR generalizado tenemos:

$$\begin{aligned} d_{sep} &= \rho(h + h_{SG}) = (10'')(20Km + 3Km) = (4.85 \times 10^{-5} rad)(23 \times 10^3 m) = 1.12m \\ d_{pix} &= (escala)(d_{sep}) = (38.1 pix / m)(1.12m) = 42.7 pix \approx 43 pix \end{aligned} \quad (4.20)$$

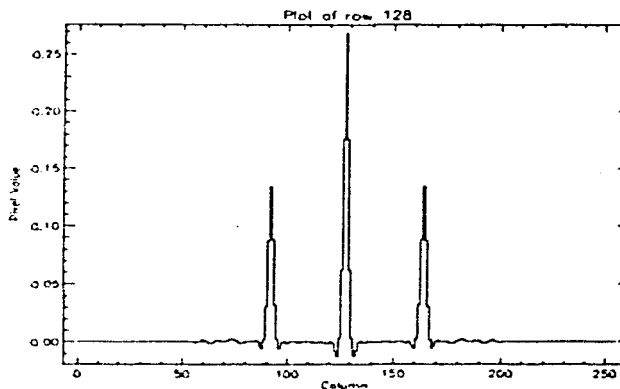
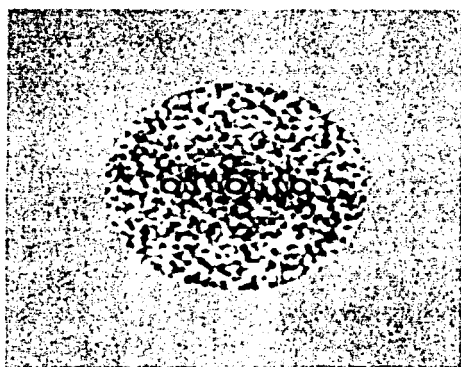


Figura 4.10. Separación de los picos laterales para el caso de una autocorrelación en SCIDAR clásico. La separación es de 37 pixeles con respecto al pico central

La diferencia de separación de los picos laterales de correlación del SCIDAR generalizado con respecto al clásico, debe de ser igual a la diferencia de distancia de propagación, en este caso 3 km, que de acuerdo con la ecuación (4.17) son 6 pixeles de diferencia. La figura 4.7 muestra que el pico central está en el pixel 128, mientras que los picos laterales están en los pixeles 91 y 165 respectivamente, lo que da una separación de los picos laterales de 37 pixeles, de acuerdo con la ecuación (4.19). Por otra parte, en la figura (4.11) se observa que el pico central se encuentra en el pixel 128, mientras que los laterales están en 85 y 171 respectivamente, dando una separación de 43 pixeles, de acuerdo con la ecuación (4.20). La diferencia de separación,  $43 - 37 = 6$  pixeles está de acuerdo con las ecuaciones (4.17).

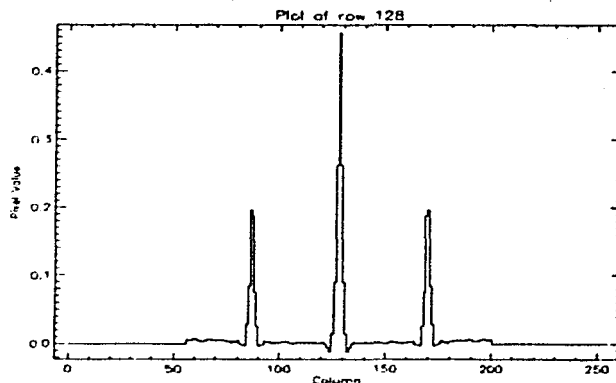
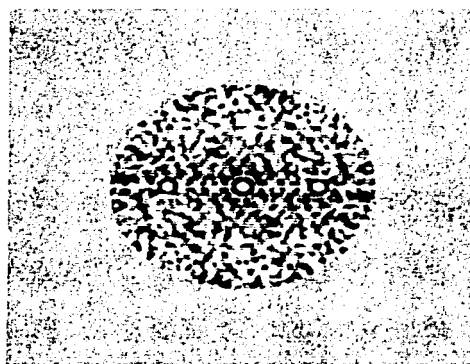


Figura 4.11: Separación de los picos laterales para el caso de una autocorrelación en SCIDAR generalizado. La separación es de 43 pixeles con respecto al pico central.

## VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD CON RESPECTO A LA ALTURA

Para comprobar la variación de la intensidad del centelleo con respecto a la potencia  $5/3$  de la altura  $h$ , ecuación (2.55), se graficaron cortes de las imágenes de autocorrelación e intercorrelación para 1000 pasos de tiempo, como los que aparecen en la parte derecha de las figuras (4.10) y (4.11). Se toma un valor fijo del parámetro de Fried  $r_0=15\text{cm}$  y una sola capa a diversas alturas,  $h=5, 10, 15$ , y  $20\text{ km}$ . Los resultados se muestran en la tabla (4.4). Dado que estamos propagando  $h_{SG}=3\text{ km}$  por debajo de la pupila, la altura  $H$  que se tabula es  $H=h+h_{SG}$ .

| <b>H</b><br><b>(altura)</b> | <b>I</b><br><b>(autocorrelación)</b> | <b>I</b><br><b>(intercorrelación 20 ms)</b> | <b>I</b><br><b>(intercorrelación 40 ms)</b> |
|-----------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 8 km                        | 0.28                                 | 0.125                                       | 0.06                                        |
| 13 km                       | 0.34                                 | 0.18                                        | 0.105                                       |
| 18 km                       | 0.42                                 | 0.21                                        | 0.125                                       |
| 23 km                       | 0.46                                 | 0.26                                        | 0.16                                        |

Tabla 4.4. Intensidad del centelleo para distintas alturas,  $r_0=15\text{ cm}$

Se utilizó el programa Maple V, para hacer una regresión de los datos anteriores. En el caso de las autocorrelaciones se obtuvo la siguiente ecuación para la curva de ajuste:

$$I_{AC}(H) = 0.148 + 0.0233H^{5/6} \quad (4.21)$$

La gráfica de dispersión, así como la curva de ajuste para el caso de las autocorrelaciones con 1000 pasos de tiempo se presenta en la figura (4.12). Las barras de error tienen un valor igual a la variación máxima de los datos con respecto a la curva de ajuste, en este caso  $\delta = |0.42 - I_{AC}(18\text{Km})| = 0.01$ , de tal manera que en la gráfica de la figura (4.12) las barras de error corresponden a  $\pm \delta$ .

Análogamente, para el caso de las intercorrelaciones a 20 y 40 ms, se obtuvieron las siguientes curvas de ajuste:

$$I_{IC20}(H) = 0.0346 + 0.0164H^{5/6} \quad (4.22)$$

$$I_{IC40}(H) = -0.005 + 0.012H^{5/6} \quad (4.23)$$

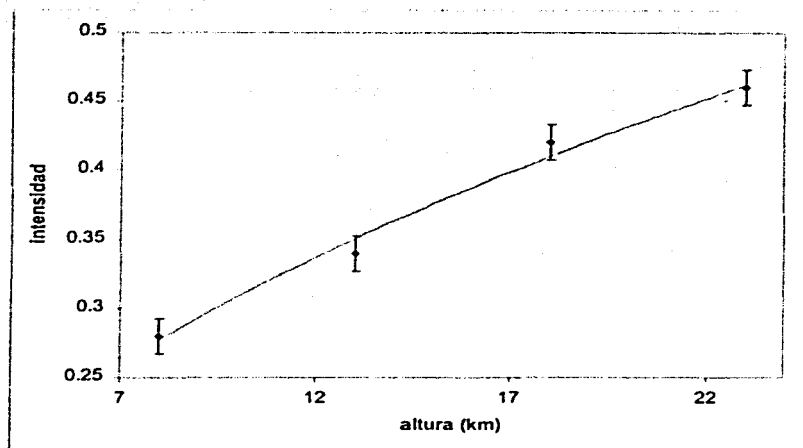


Figura 4.12:

Gráfico de dispersión y curva de ajuste de intensidad del pico central con respecto a la altura para el caso de las autocorrelaciones.

#### VARIACIÓN DEL FWHM CON RESPECTO A LA ALTURA

Teóricamente, el ancho a media altura debe variar proporcionalmente a la raíz de la altura [4]. Calculando el ancho a media altura para el pico central de las imágenes de autocorrelación e intercorrelación, con las mismas capas del apartado anterior, se obtuvieron los siguientes resultados:

| H<br>(altura) | FWHM<br>(autocorrelación) | FWHM<br>(intercorrelación 20 ms) | FWHM<br>(intercorrelación 40 ms) |
|---------------|---------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 8 km          | 1.63                      | 1.85                             | 1.97                             |
| 13 km         | 1.93                      | 2.61                             | 2.46                             |
| 18 km         | 2.00                      | 2.98                             | 2.87                             |
| 23 km         | 2.31                      | 2.94                             | 3.55                             |

Tabla 4.5. Altura de la capa contra ancho a media altura de los picos centrales de autocorrelación e intercorrelación.

Las curvas de ajuste correspondientes son, para las autocorrelaciones:

$$FWHM_{AC}(H) = 0.725 + 0.321H^{1/2} \quad (4.24)$$

Para las intercorrelaciones a 20 ms:

$$FWHM_{IC20}(H) = 0.374 + 0.574H^{1/2} \quad (4.25)$$

Y para las intercorrelaciones a 40 ms:

$$FWHM_{IC40}(H) = -0.298 + 0.7784H^{1/2} \quad (4.26)$$

En la figura (4.13) se muestra el gráfico de dispersión y la curva de ajuste para el caso de las autocorrelaciones. De nuevo, las barras de error se escogen de acuerdo a la máxima variación de los puntos con respecto a la curva de ajuste, en este caso  $\delta [2 \cdot FWHM_{AC}(18\text{km})] = 0.09$ .

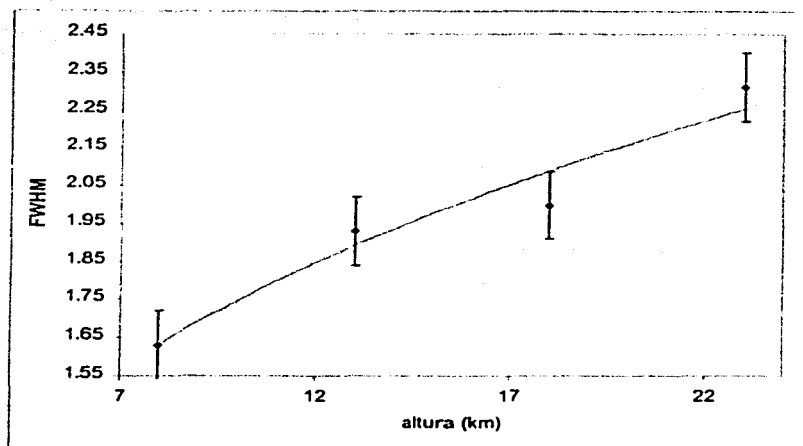


Figura 4.13:

Gráfico de dispersión y curva de ajuste del ancho a media altura del pico central con respecto a la altura, para el caso de las autocorrelaciones.

#### VARIACIÓN DE LA INTENSIDAD CON RESPECTO AL PARÁMETRO DE FRIED

Para analizar este caso fijamos la altura de la capa en 10 km y variamos el parámetro de Fried  $r_0$ . Se debe comprobar que la intensidad varía con la potencia  $-5/3$  de  $r_0$  [4].

| $r_0$<br>(cm) | I<br>(autocorrelación) | I<br>(intercorrelación 20 ms) | I<br>(intercorrelación 40 ms) |
|---------------|------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 7             | 0.7                    | 0.29                          | 0.145                         |
| 15            | 0.35                   | 0.145                         | 0.105                         |
| 20            | 0.22                   | 0.125                         | 0.075                         |

Tabla 4.6: Intensidad del centelleo para diversos valores del parámetro de Fried

Las correspondientes ecuaciones de las curvas de ajuste encontradas son:

$$I_{AC}(r_0) = 0.158 + 14.003r_0^{-5/3} \quad (4.27)$$

$$I_{IC20}(r_0) = 0.089 + 5.133r_0^{-5/3} \quad (4.28)$$

$$I_{IC40}(r_0) = 0.072 + 1.899r_0^{-5/3} \quad (4.29)$$

La gráfica correspondiente a la curva de ajuste a los puntos de la tabla (4.6) en el caso de las autocorrelaciones se presenta en la figura (4.14). Las barras de error tienen una semilongitud  $\delta = |0.35 - I_{AC}(15)| = 0.04$ .

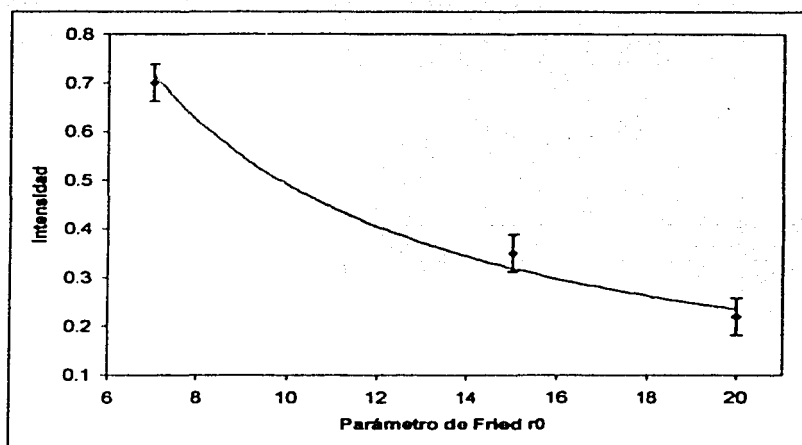


Figura 4.14:

Gráfico de dispersión y curva de ajuste de la variación de intensidad del pico central con respecto al parámetro de Fried, para el caso de las autocorrelaciones.

En todas las dependencias funcionales anteriores, la aparición de un factor constante en las curvas de ajuste se atribuye a la escasez de puntos para la regresión. Se espera que al agregar más datos de las dependencias de  $I$  vs.  $h$ , FWHM vs.  $h$ , e  $I$  vs.  $r_0$ , el factor constante en las curvas de ajuste tienda a cero. Por lo pronto este factor constante se considera suficientemente pequeño como para afirmar que el simulador se comporta de acuerdo con la teoría.

#### DETECCIÓN DEL VECTOR VELOCIDAD DEL VIENTO

De acuerdo a lo expuesto en el capítulo 2, se debe comprobar que la magnitud del vector velocidad del viento es  $\bar{v} \Delta t$ . Donde  $\Delta t$  es un paso diferencial de tiempo entre imágenes de intercorrelación. Para nuestro caso tenemos dos valores distintos:  $\Delta t = 20 \text{ ms}$  y  $40 \text{ ms}$ . Para los cálculos que se presentan a continuación, conviene escribir estos intervalos de tiempo en segundos:

$$\Delta t_1 = 20 \text{ ms} = 0.02 \text{ s} \quad \Delta t_2 = 40 \text{ ms} = 0.04 \text{ s} \quad (4.30)$$

En todas las pruebas realizadas con el simulador de SCIDAR generalizado en donde se simulan capas turbulentas con velocidad de desplazamiento no nula, se definió un mismo valor igual a  $20 \text{ m/s}$  para facilitar los cálculos de resultados al comparar con archivos correspondientes a capas turbulentas de distintas alturas. En el capítulo 3, vimos la forma de definir esa velocidad en los parámetros de entrada de Turbulenz.

Consideramos dos archivos particulares para comprobar el desplazamiento de los tripletes en las imágenes de intercorrelación del simulador de SCIDAR generalizado. El primero corresponde a dos capas, a  $0$  y  $15 \text{ km}$  respectivamente, con un parámetro de Fried  $r_0 = 15 \text{ cm}$ . La capa a nivel del suelo se mueve horizontalmente de derecha a izquierda, mientras que la capa a  $15 \text{ km}$  se mueve en la dirección positiva de ambos ejes  $x, y$ , a un ángulo igual a  $45^\circ$  con respecto al semieje positivo  $x$ . El módulo de ambas velocidades tiene un valor de  $20 \text{ m/s}$ . Entonces, el valor esperado para el módulo del vector velocidad del viento en las intercorrelaciones a  $\Delta t_1$  y  $\Delta t_2$  es:

$$\begin{aligned} v \Delta t_1 &= (20 \text{ m/s})(0.02 \text{ s}) = 0.4 \text{ m} \\ v \Delta t_2 &= (20 \text{ m/s})(0.04 \text{ s}) = 0.8 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.31)$$

La figura (4.15) muestra las intercorrelaciones obtenidas con el simulador de SCIDAR generalizado para  $\Delta t_1$  y  $\Delta t_2$  respectivamente, estas imágenes son matrices de  $256 \times 256$  píxeles, lo que implica que el centro de la imagen tiene coordenadas (128,128). Las coordenadas de los picos centrales de los tripletes de intercorrelación a  $\Delta t_1=0.02s$  son (143,128) para la capa a 0 km y (139,139) para la capa a 15 km. Mientras que para  $\Delta t_2=0.04s$ , las coordenadas del pico central son (159,128) para la capa a 0 km y (150,150) para la capa a 15 km. De estas coordenadas se deduce que el ángulo del vector velocidad es el correcto, es decir  $0^\circ$  para la capa a 0 km, y  $45^\circ$  para la capa a 15 km. Calculamos el módulo medido en píxeles ( $M_{pix}$ ) de estos vectores con respecto al centro mediante:

$$M_{pix} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (4.32)$$

Donde (x,y) son las coordenadas del pico central de las intercorrelaciones y  $(x_0,y_0) = (128,128)$  son las coordenadas del centro. M entonces tiene dimensiones de píxeles; para calcular su valor en metros es necesario dividir entre la escala del pixel:

$$M_m = \frac{M_{pix}}{38.1 \text{ }_{pix}_m} \quad (4.33)$$

| $\Delta t$ (segundos) | Altura en Km | Módulo (píxeles) | Módulo (metros) |
|-----------------------|--------------|------------------|-----------------|
| 0.02                  | 0            | 15.00            | 0.39            |
| 0.02                  | 15           | 15.55            | 0.40            |
| 0.04                  | 0            | 31.00            | 0.81            |
| 0.04                  | 15           | 31.11            | 0.82            |

Tabla 4.7: Módulo del vector velocidad del viento para intercorrelaciones a  $\Delta t = 20ms$  y  $\Delta t = 40ms$  obtenidas con el simulador de SCIDAR Generalizado en el caso de capas a 0 y 15 Km

El resultado de la última columna de la tabla (4.7) demuestra que se obtiene el resultado calculado con las ecuaciones (4.31).

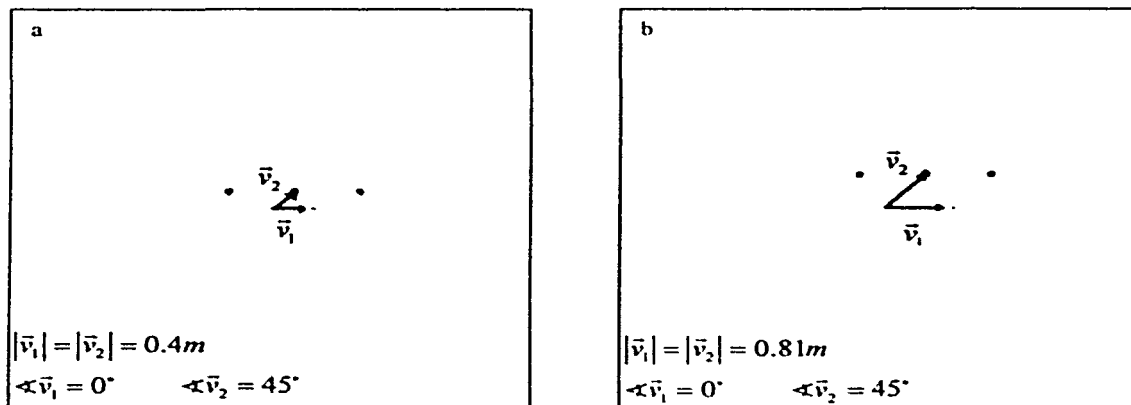


Figura 4.15: Vectores velocidad para intercorrelaciones a 20ms (a) y 40 ms (b) obtenidas con el simulador de SCIDAR Generalizado para capas a 5 Km y 20 Km respectivamente.

El segundo archivo que se analiza corresponde a una capa turbulenta a 5 Km y velocidad nula y otra capa a 20 Km que se desplaza con un vector  $\vec{v}$  de módulo 20 m/s, orientado a  $45^\circ$  con respecto a la parte positiva del eje x. Para la capa con velocidad cero, de acuerdo a la teoría, se tendría un triplete en el origen, mientras que para la capa con velocidad no nula se tiene el mismo resultado de las ecuaciones (4.31) puesto que es el mismo valor de la velocidad para los mismos intervalos de tiempo  $\Delta t_1=0.02s$  y  $\Delta t_2=0.04s$  para las intercorrelaciones. El módulo del vector velocidad se mide sobre las imágenes de intercorrelación de la misma manera que en el caso anterior en unidades de píxeles y se divide entre la escala del pixel para transformarlo a metros.

La figura (4.16) muestra las intercorrelaciones para  $\Delta t_1=0.02s$  y  $\Delta t_2=0.04s$ . Las coordenadas de los picos centrales de las intercorrelaciones son (128,128) para la capa a 5 Km tanto en  $\Delta t_1$  como en  $\Delta t_2$ . Para la capa a 20 Km, el pico central tiene coordenadas (149,149) para  $\Delta t_1$ , y (139,139) para  $\Delta t_2$ .

| $\Delta t$ (segundos) | Altura en Km | Módulo (píxeles) | Módulo (metros) |
|-----------------------|--------------|------------------|-----------------|
| 0.02                  | 5            | 0                | 0               |
| 0.02                  | 20           | 15.5             | 0.40            |
| 0.04                  | 5            | 0                | 0               |
| 0.04                  | 20           | 29.7             | 0.78            |

Tabla 4.8: Módulo del vector velocidad del viento para intercorrelaciones a  $\Delta t=20ms$  y  $\Delta t=40ms$  obtenidas con el simulador de SCIDAR generalizado en el caso de capas a 5 y 20 Km.

De nuevo, el resultado de la última columna de la tabla (4.8) está de acuerdo con lo que se calculó con las ecuaciones (4.31).

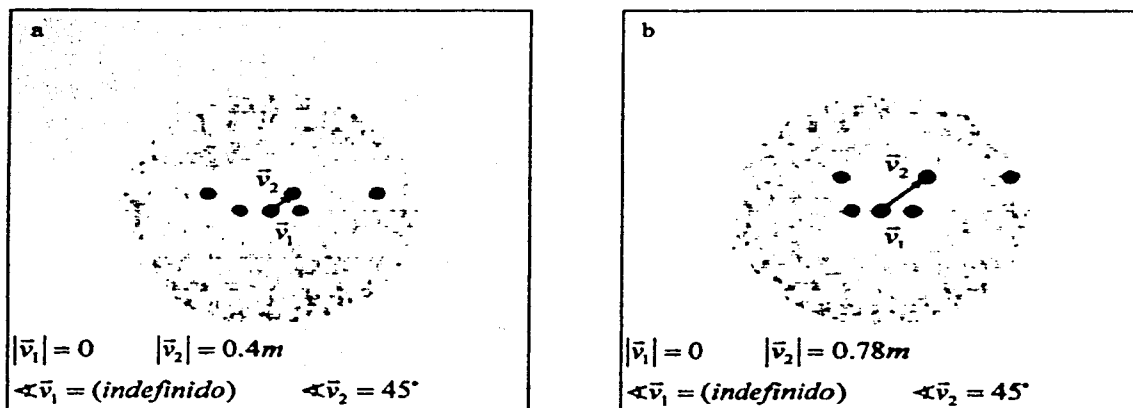


Figura 4.16: Vectores velocidad para intercorrelaciones a 20ms (a) y 40 ms (b) obtenidas con el simulador de SCIDAR Generalizado para capas a 5 Km y 20 Km respectivamente

De los análisis anteriores, y a reserva de futuras pruebas, se puede concluir que el simulador de SCIDAR generalizado arroja resultados cuantitativamente confiables.

## Efectos de las aberraciones de la óptica del telescopio

### 5.1. Óptica Activa

Es necesario distinguir los conceptos de *óptica adaptativa* y *óptica activa*. La *óptica adaptativa* se ha descrito en el capítulo I y hace referencia a la corrección de las deformaciones del frente de onda provocadas por la turbulencia atmosférica. La *óptica activa*, se refiere a los métodos utilizados para corregir las deformaciones del frente de onda introducidos por efectos mecánicos, térmicos y ópticos en el telescopio solamente [9]. Un espejo de telescopio se puede deformar bajo la acción de su propio peso, o bien debido a los cambios de temperatura, o bien por errores de pulido, provocando aberraciones ópticas. La formación de la imagen puede ser optimizada modificando convenientemente la superficie mediante un sistema de actuadores que son controlados en tiempo real con dispositivos electrónicos y una computadora [27]. Estos actuadores operan normalmente a bajas frecuencias, típicamente a 0.05 Hz o menos. El primer telescopio que utilizó un sistema de corrección de óptica activa fue el New Technology Telescope (NTT), perteneciente al European Southern Observatory (fig. 5.1). El NTT, de 3.5 m de diámetro, entró en operación en La Silla, Chile, en 1989; y desde entonces todos los nuevos telescopios incorporan un sistema de óptica activa.

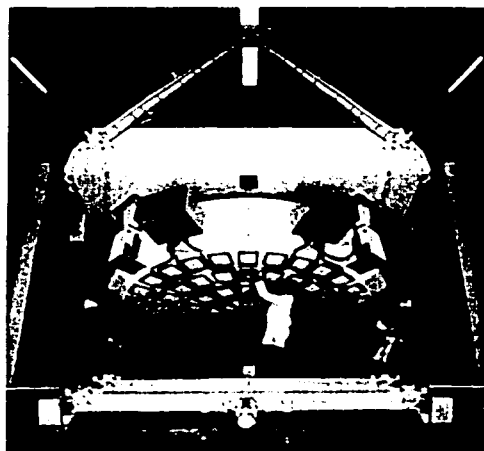


Fig 5.1: Sistema de actuadores para óptica activa en el NTT. Observatorio de La Silla, Chile

## 5.2. Aberraciones ópticas y polinomios de Zernike.

Considérese un conjunto de rayos de luz provenientes de un objeto astronómico  $A$  y que pasan por la óptica del telescopio (fig. 5.2). Los rayos se distribuirán en torno a algún punto  $A'$  en el plano focal del instrumento. Suponiendo que la superficie del espejo primario esté libre de cualquier defecto óptico y en ausencia de turbulencia atmosférica,  $A'$  será la imagen del objeto. La dispersión de un rayo dado proveniente de  $A$  en torno al punto  $A'$  es básicamente una función de dos variables [24]. La primera es la distancia angular  $\theta$  entre  $A$  y el eje óptico, entre más grande sea  $\theta$  se tendrá una dispersión mayor y su valor máximo  $\theta_{\max}$  define el campo del instrumento. La segunda variable es la distancia  $r$  entre el punto de impacto del rayo en la pupila y el centro de la misma, nuevamente la dispersión en torno de  $A'$  crece proporcionalmente a  $r$ . Su valor máximo  $r_{\max}$  define el diámetro  $D$  de la pupila. En el diseño de un telescopio,  $D$  y  $\theta_{\max}$  están definidas y podemos decir que el objetivo de la óptica activa es mantener la totalidad de las posibles imágenes  $A'$  dentro del ángulo  $\theta_{\max}$ .

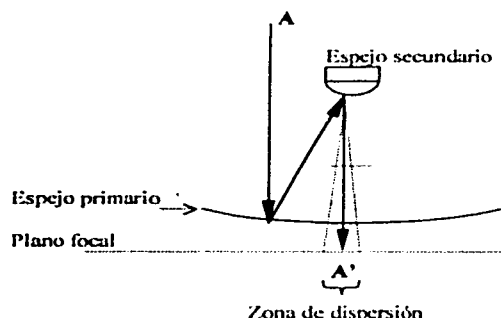


Figura 5.2:

*Dispersión de un haz de luz por efecto de las aberraciones estáticas de la óptica del telescopio.*

Las deformaciones del frente de onda que son dependientes del telescopio reciben el nombre de *aberraciones ópticas*. Las principales se pueden clasificar en: esfericidad, coma, astigmatismo, curvatura de campo y distorsión [27]. Existen además otros dos aspectos que no son propiamente aberraciones ópticas de la superficie del espejo, sino que dependen de la posición física del mismo, éstos son pistón y tip-tilt [8].

Si a medida que crece  $r$  el rayo reflejado pasa por el eje óptico pero a una distancia cada vez menor con respecto a la distancia focal  $f$ , decimos que el espejo posee aberración esférica. La aberración de esfericidad sólo depende de la variable  $r$ , es decir, del diámetro de la pupila. Más específicamente, depende de la distancia focal  $f/D$  y es más pequeña en tanto que éste cociente sea más grande.

Supongamos un objeto astronómico puntual que no se observa en el eje óptico. En el caso de una óptica perfecta, en el plano imagen se debería observar el objeto en un punto  $P$  a una cierta distancia del centro. Si se tiene un espejo con aberración de coma, la dispersión de la luz en torno a  $P$  tiene una dirección preferencial, la imagen tendrá la forma de una pequeña gota. La aberración de coma depende solo de  $\theta$  y ocurre incluso para valores muy pequeños de  $D$ .

También puede suceder que exista una dirección preferencial que sea simétrica a la superficie de la pupila. Si  $\vec{r}$  define un vector de posición que va desde el centro de la pupila hasta cualquier punto de la superficie, decimos que existe astigmatismo tangencial si la dirección preferencial es ortogonal a  $\vec{r}$ . En este caso, la imagen de un objeto puntual al infinito es una elipse que tiene su eje mayor en la dirección perpendicular a  $\vec{r}$ . Por el contrario, decimos que existe astigmatismo sagital si la dirección preferencial es paralela a  $\vec{r}$  y la imagen del objeto es una elipse que tiene su eje mayor paralelo a  $\vec{r}$ . Suponiendo que no existan aberraciones de esfericidad, coma o astigmatismo, puede suceder que la imagen del objeto no esté en la posición correcta. Si el desplazamiento del punto es en la dirección paralela al eje óptico, el resultado es que los puntos imagen están sobre una superficie curva, generalmente esférica, esto se conoce como curvatura de campo. En un telescopio con aberración de curvatura de campo es posible enfocar el objeto en el centro del

campo o en la periferia, pero no en ambos al mismo tiempo. El astigmatismo y la curvatura de campo no son independientes, ambos involucran los valores de 0 y  $\pi/2$ .

La distorsión destruye la similitud geométrica entre objeto e imagen, deformando ésta última de su posición ideal  $A'$  en una dirección perpendicular al eje óptico.

Ya sean las deformaciones de una superficie óptica, o bien las perturbaciones del frente de onda que se obtiene como respuesta, pueden ser representados matemáticamente por medio de una suma de funciones ortogonales, es decir linealmente independientes. Estas funciones ortogonales forman una base para construir las deformaciones en la pupila, es decir que para una configuración dada de la superficie de la pupila es posible representarla mediante una suma finita de estas funciones, también llamadas *modos*, esto es [8]:

$$W = \sum_{j=1}^N a_j M_j(r, \theta) \quad (5.1)$$

Donde  $M_j$  es el modo de orden  $j$ ,  $a_j$  es el coeficiente correspondiente al modo  $j$  y  $W$  es la configuración final de la superficie. Existen varios conjuntos de funciones ortogonales que cumplen estas condiciones. Dos de los más utilizados son los polinomios de Zernike y los de Karhunen-Loeve [29]. Los polinomios de Zernike están definidos por [8]:

$$\begin{aligned} Z_{i,pm} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \cos(m\theta), & m \neq 0 \\ Z_{i,mp} &= \sqrt{n+1} R_n^m(r) \sqrt{2} \sin(m\theta), & m \neq 0 \\ Z_i &= \sqrt{n+1} R_n^0(r), & m = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donde  $m$  es la frecuencia azimutal,  $n$  es el grado radial y  $R_n^m$  se define como:

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!}{s! [(n+m)/2-s]! [(n-m)/2-s]!} r^{n-2s} \quad (5.3)$$

En la tabla 5.1 se muestran los primeros 15 modos de Zernike junto con el nombre de la aberración óptica a la que están asociados [12], mientras que la figura 5.3 se muestran gráficamente algunos de estos modos [29].

| Grado radial<br>(n) | Frecuencia azimutal (m)                              |                                                                                              |                                                                                                              |                                                                           |                                                                                |
|---------------------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
|                     | 0                                                    | 1                                                                                            | 2                                                                                                            | 3                                                                         | 4                                                                              |
| 0                   | $Z_0 = 1$<br>Pistón                                  |                                                                                              |                                                                                                              |                                                                           |                                                                                |
| 1                   |                                                      | $Z_1 = 2r \cos \theta$<br>$Z_2 = 2r \sin \theta$<br>Tip / tilt                               |                                                                                                              |                                                                           |                                                                                |
| 2                   | $Z_4 = \sqrt{3} (2r^2 - 1)$<br>Desenfoque            |                                                                                              | $Z_5 = \sqrt{6} r^2 \sin 2\theta$<br>$Z_6 = \sqrt{6} r^2 \cos 2\theta$<br>Astigmatismo (3 <sup>er</sup> ord) |                                                                           |                                                                                |
| 3                   |                                                      | $Z_7 = \sqrt{8} (3r^3 - 2r) \sin \theta$<br>$Z_8 = \sqrt{8} (3r^3 - 2r) \cos \theta$<br>Coma |                                                                                                              | $Z_9 = \sqrt{8} r^3 \sin 3\theta$<br>$Z_{10} = \sqrt{8} r^3 \cos 3\theta$ |                                                                                |
| 4                   | $Z_{11} = \sqrt{5} (6r^4 - 6r^2 + 1)$<br>Esfericidad |                                                                                              | $Z_{12} = \sqrt{10} (10r^4 - 3r^2) \cos 2\theta$<br>$Z_{13} = \sqrt{10} (10r^4 - 3r^2) \sin 2\theta$         |                                                                           | $Z_{14} = \sqrt{10} r^4 \cos 4\theta$<br>$Z_{15} = \sqrt{10} r^4 \sin 4\theta$ |

Tabla 5.1. Los primeros 15 modos de Zernike

Todos los sistemas de óptica activa incorporan un número finito de actuadores electromecánicos, por lo tanto pueden corregir un número finito  $N$  de modos de Zernike [29]. El costo de un sistema de óptica activa crece proporcionalmente al número de actuadores, es deseable entonces la optimización de estos sistemas de tal manera que utilicen el menor número posible de elementos correctores. Por otra parte, al minimizar el número de actuadores también se maximiza la velocidad de operación (eso es válido tanto para sistemas de óptica activa como adaptativa).

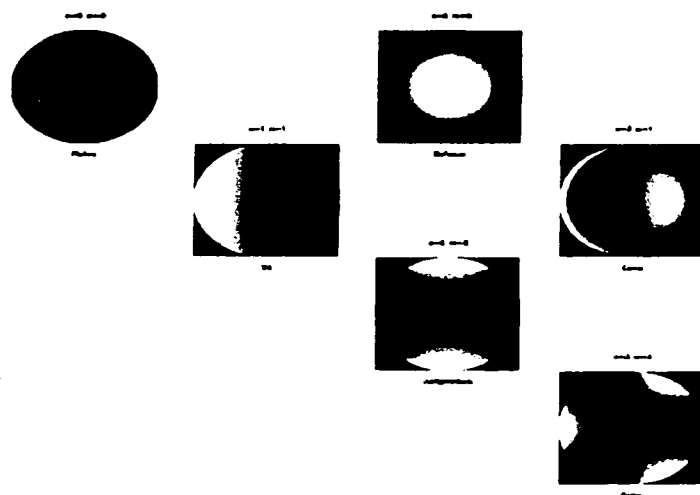


Fig. 5.3:

Representación  
gráfica de algunos  
modos de Zernike

En el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, B.C. (OAN-SPM) se incorporó en septiembre de 1995 un sistema de óptica activa para corregir las deformaciones intrínsecas del sistema óptico completo, espejos primario y secundario, del telescopio de 2.1 m. Este trabajo tuvo como consecuencia un incremento de la eficiencia del telescopio por un factor de 4 en cuanto a concentración de luz en el primario, y un factor 2 en cuanto a resolución [12]; lo que significa una ganancia de 1.5 magnitudes en sensibilidad. Se han logrado obtener imágenes de hasta 0.6 segundos de arco.

En la sede de CU del Instituto de Astronomía de la UNAM, se han desarrollado programas para resolver la ecuación de curvatura y así utilizar el *método de curvatura local* para caracterizar las aberraciones en el telescopio de 2.1 m y así evaluar los coeficientes de Zernike correspondientes al mismo instrumento [13]. El método de curvatura local fue desarrollado 1993 por François y Claude Roddier de la Universidad de Hawaii y por ello se conoce también con el nombre de *Método de Roddier* [13]. Con éste método es posible conocer las aberraciones intrínsecas del frente de onda a partir de dos imágenes desenfocadas, una intrafocal y la otra extrafocal, a distancias iguales del plano focal del sistema óptico. El método de Roddier ha sido utilizado en la mayoría de los telescopios más importantes del mundo y se aplica en sistemas tanto de Óptica Activa como de Óptica Adaptativa.

La principal aberración del primario del 2.1 m era astigmatismo, produciendo un deterioro de la imagen del orden de 1.8 segundos de arco. Otro problema antes de la adaptación del sistema de óptica activa, eran las fallas de la suspensión neumática original del espejo basada en reguladores de presión, lo que causaba desalineamientos y aberraciones de coma descentrada [31]. Por otra parte, el promedio de las deformaciones son debidas a los soportes sobre los cuales descansa el espejo, además de los esfuerzos cortantes producidos en los puntos de apoyo de estos soportes. Esto último puede causar un incremento de un factor 2 sobre la deformación de las imágenes; no obstante se puede reducir substancialmente cuando el tamaño de los soportes se aumenta.

Se decidió utilizar 18 bolsas de aire de 33 cm cada una como actuadores (fig. 5.4). Estos 18 actuadores fueron acomodados en dos anillos concéntricos, seis en el anillo interior y 12 en el exterior [32]. Estos últimos permiten corregir deformaciones de frecuencia azimutal, tales como astigmatismo y coma triangular, de acuerdo con la expansión de Zernike. En la dirección radial, dos actuadores son suficientes para corregir aberraciones de orden superior, tales como esfericidad.

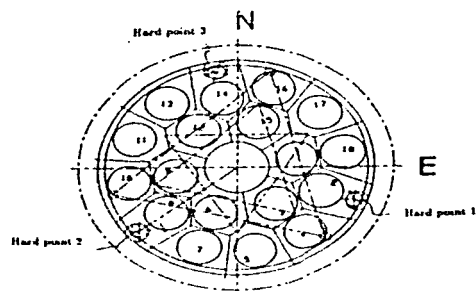


Fig. 5.4:

Distribución de los actuadores para corrección de óptica activa en el telescopio de 2.1m

En la figura 5.5 se muestran gráficamente los resultados de la instalación del sistema de óptica activa [32]. En la parte superior se grafica la *point spread function* (ver apéndice A). Se pueden observar tres picos en la figura 5.5.a, que no aparecen después de la corrección por óptica activa en la figura 5.5.d. En las figuras 5.5.c y e se muestran las gráficas de contorno (curvas de nivel) para las mismas PSF antes y después del sistema de óptica activa. Finalmente, en las figuras 5.5.e y f se muestra la integral de flujo, es decir, la cantidad total de energía como función del radio. Obsérvese que antes de la introducción de óptica activa se tiene una resolución no mayor a 0.9 segundos de arco, mientras que en el segundo caso, con óptica activa, se logró reducir éste radio de tal manera que la mayor parte de la energía está comprendida en un radio de 0.6".

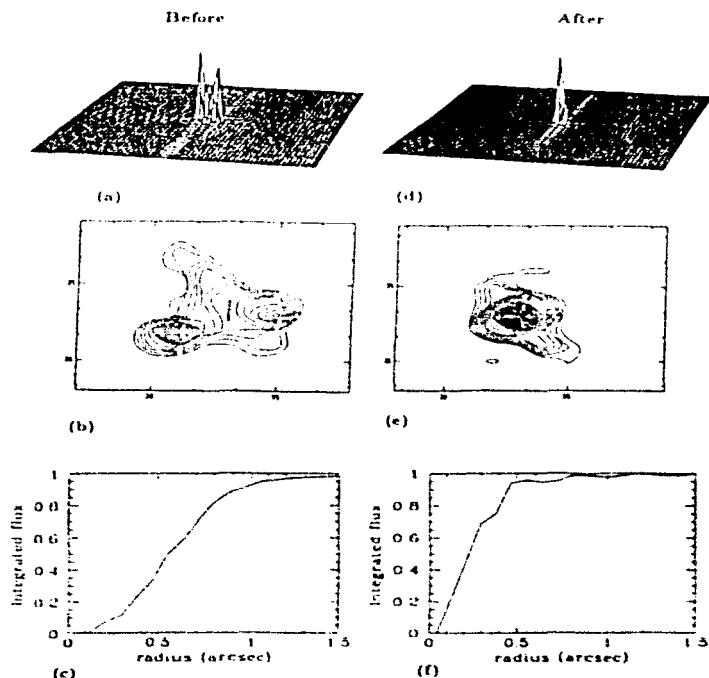


Fig. 5.5:

Respuesta del telescopio antes (a, b, c) y después (d, e, f) de la instalación del sistema

### 5.3. Aberraciones ópticas con el simulador de SCIDAR clásico

En la tabla 5.2 se listan los coeficientes de los polinomios de Zernike que caracterizan las aberraciones del telescopio de 2.1 m de San Pedro Mártir. Estos polinomios se obtienen al transformar a coordenadas rectangulares los modos de Zernike de la tabla 5.1. El simulador de SCIDAR generalizado incluye estos polinomios mediante la subrutina "zernikes" (ver apéndice E y capítulo 4). La columna de coeficientes se refiere a los términos  $a_j$  de la ecuación (5.1).

| ORDEN | COEFICIENTE      | POLINOMIO DE ZERNIKE                    |
|-------|------------------|-----------------------------------------|
| 1     | 1                | 1                                       |
| 2     | 2                | $x$                                     |
| 3     | 2                | $y$                                     |
| 4     | 1.73205080756888 | $2x^2 + 2y^2 - 1$                       |
| 5     | 4.89897948556636 | $xy$                                    |
| 6     | 2.44948974278318 | $x^2 - y^2$                             |
| 7     | 2.82842712474619 | $3x^2y + 3y^3 - 2y$                     |
| 8     | 2.82842712474619 | $3x^3 + 3xy^2 - 2x$                     |
| 9     | 2.82842712474619 | $3x^2y - y^3$                           |
| 10    | 2.82842712474619 | $x^3 - 3xy^2$                           |
| 11    | 13.4164078649987 | $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 - y^2 + 1/6$ |
| 12    | 3.16227766016838 | $4x^4 - 3x^2 - 4y^4 + 3y^2$             |
| 13    | 6.32455532033676 | $4x^3y + 4xy^3 - 3xy$                   |
| 14    | 3.16227766016838 | $x^4 - 6x^2y^2 + y^4$                   |
| 15    | 12.6491106406735 | $x^3y - xy^3$                           |

Tabla 5.2: Polinomios y coeficientes de Zernike utilizados para la simulación de las aberraciones fijas de la óptica del 2.1 m

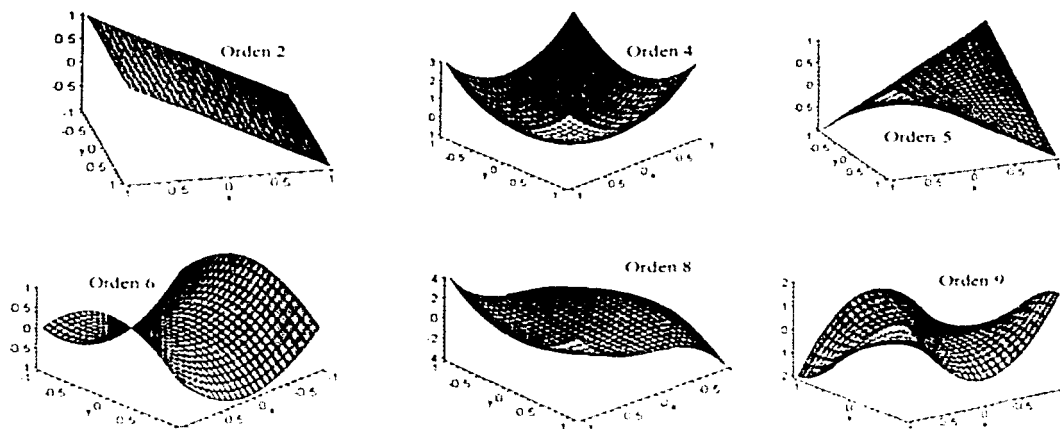


Fig. 5.6: Algunos modos de Zernike para el telescopio de 2.1 m. El orden corresponde a la tabla 5.2. Estas graficas fueron obtenidas mediante un programa en Maple V.

Recordémos que la ecuación (2.63) demuestra que los efectos estáticos de la pupila se anulan para las autocorrelaciones, y que por lo tanto el SCIDAR clásico es insensible a las aberraciones propias de la óptica del telescopio. Para cuantificar el efecto de las aberraciones, simulamos el caso de dos capas turbulentas a 5 y 20 km respectivamente como archivos separados y comparamos los resultados de autocorrelación e intercorrelaciones a 20 y 40 ms obtenidos con aberraciones y sin aberraciones. Lo anterior es posible si graficamos un corte horizontal de las autocorrelaciones o intercorrelaciones, que pase por el centro del triplete. Para cada una de las capas se compararon imágenes de autorrelación, intercorrelación a 20 ms e intercorrelación a 40 ms. En todos los casos las correspondientes imágenes con y sin aberraciones ópticas del telescopio son idénticas. En la figura (5.7) se muestra la comparación en el caso de la autocorrelación para la capa a 20 km, y se pone en evidencia que en ambos casos se obtiene el mismo resultado.

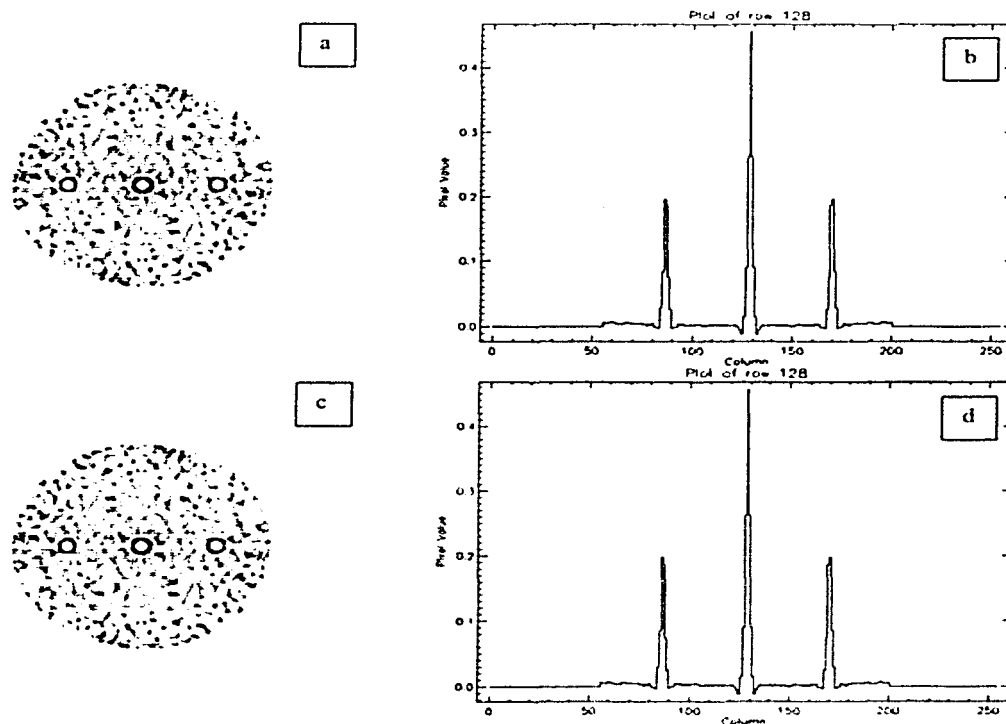


Fig. 5.7: Comparación de resultados de la autocorrelación para una capa a 20 km. (a) y (c) son las imágenes de autocorrelación, mientras que (b) y (d) son cortes horizontales que pasan por el máximo. En (a) y (b) se han eliminado las aberraciones del telescopio, mientras que en (c) y (d) se incluyen las aberraciones. Ambos resultados son idénticos.

#### 5.4. Aberraciones ópticas con el simulador de SCIDAR generalizado

En el caso del SCIDAR generalizado, no es posible demostrar analíticamente que las aberraciones estáticas se eliminan de las autocorrelaciones. Para demostrarlo definimos un número entero  $Z$  que se multiplique por el vector que contiene los coeficientes de los polinomios de Zernike de la tabla (5.2). El

objetivo es identificar el valor máximo para el cual el SCIDAR generalizado, al igual que el SCIDAR clásico, es insensible a las aberraciones estáticas de la óptica. El entero  $Z$  actúa como un "coeficiente de afectación" de las aberraciones estáticas.

Tomamos el ejemplo específico de la capa a 20 km y calculamos las autocorrelaciones en SCIDAR generalizado para distintos valores de  $Z$ . Se observa que tanto el pico central de intensidad como los laterales decrecen a medida que  $Z$  se incrementa.

| $Z$ | central | lateral |
|-----|---------|---------|
| 0   | 0.455   | 0.19    |
| 2   | 0.45    | 0.19    |
| 4   | 0.45    | 0.19    |
| 6   | 0.45    | 0.19    |
| 8   | 0.45    | 0.19    |
| 10  | 0.45    | 0.185   |
| 12  | 0.45    | 0.185   |
| 14  | 0.445   | 0.185   |
| 16  | 0.445   | 0.185   |
| 18  | 0.445   | 0.18    |
| 20  | 0.445   | 0.18    |
| 22  | 0.445   | 0.18    |
| 24  | 0.44    | 0.18    |
| 26  | 0.44    | 0.18    |
| 28  | 0.44    | 0.18    |
| 30  | 0.44    | 0.18    |
| 40  | 0.43    | 0.165   |
| 50  | 0.425   | 0.16    |
| 60  | 0.42    | 0.152   |
| 70  | 0.415   | 0.145   |
| 80  | 0.41    | 0.14    |
| 90  | 0.405   | 0.135   |
| 100 | 0.40    | 0.13    |

Tabla 5.3:

A medida que se incrementa  $Z$ , la intensidad del pico central y de los dos laterales decrece uniformemente.

La tabla muestra resultados particulares para una capa a 20 km.

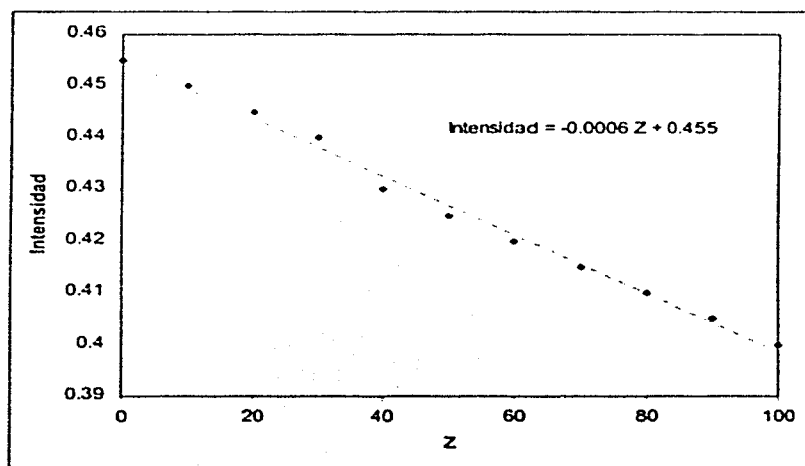


Figura 5.8

Gráfica de la intensidad del pico central contra el parámetro  $Z$ . Se observa un comportamiento lineal

En la tabla (5.3) se demuestra que las variaciones de intensidad son mínimas cuando Z se aumenta de 2 en 2 desde 0 (óptica perfecta) hasta 30. Con los métodos utilizados, es posible dar un resultado con precisión de centésimas para la intensidad de los picos central y laterales. La tercera cifra significativa que aparece en algunos casos en la tabla es "apreciada".

En la figura (5.8) se grafica la intensidad del pico central de las autocorrelaciones para la capa a 20 km con respecto al parámetro Z. El decremento es claramente decreciente y lineal. Ajustando una recta con el método de mínimos cuadrados se obtiene:

$$I = -0.0006 \cdot Z + 0.455 \quad (5.4)$$

El mismo comportamiento lineal decremental se observa para la intensidad de los picos laterales, conservándose el mismo valor para la pendiente de la recta de ajuste por mínimos cuadrados correspondiente a este último caso:

$$I = -0.0006 \cdot Z + 0.1903 \quad (5.5)$$

Dado que es necesario un valor muy grande de Z para que se observen los efectos de las aberraciones estáticas en el SCIDAR generalizado, se concluye que este último no se ve afectado por las aberraciones no corregidas por la óptica activa, o *aberraciones residuales*.

## Conclusiones

### 6.1. Evaluación del simulador de SCIDAR generalizado

En la serie de análisis que se detallaron en el capítulo 4, se demostró que la separación de los picos laterales, en el caso de las autocorrelaciones e intercorrelaciones, se ajustan perfectamente a los resultados teóricos para estrellas dobles cuyos componentes se encuentran separados  $\rho$  segundos de arco y para capas turbulentas situadas a una altura  $h$  sobre el observatorio. De igual manera se confirmó la precisión de los resultados para el desplazamiento de la imagen de speckles debido al tip-tilt en el caso de la estrella fuera de eje.

Asimismo se caracterizó la forma y comportamiento de las imágenes de autocorrelación e intercorrelación del simulador de SCIDAR generalizado. Los análisis de la dependencia funcional de la altura, el parámetro de Fried y el ancho a media altura (seeing) del pico central se ajustan apreciablemente a la teoría. En el primer caso, la curva de ajuste de  $I$  vs.  $h$  evidencia la relación  $I \propto h^0$ , la bondad del ajuste es muy cercana a 1. En el segundo caso también es posible advertir la dependencia  $\text{FWHM} \propto h^{1/2}$ . Esto sería posible confirmarlo mediante el empleo de una mayor cantidad de puntos para el cálculo de la regresión. En este caso las constantes que aparecen en las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18) tenderán a cero si el simulador de SCIDAR es eficiente.

Una situación similar aparece en la dependencia funcional de la intensidad y el parámetro de Fried, si bien es posible ajustar una curva de la forma  $I = A + Br, r^{1/3}$ , la falta de más puntos para la regresión impide la demostración  $I \propto r_0^{-5/3}$ . Hay que recordar que cada punto que interviene en las gráficas de regresión se obtiene después de la aplicación de dos etapas que consumen mucho tiempo de procesamiento en un equipo de cómputo. La primera parte es la generación de los archivos de amplitud y fase de la onda que atraviesa las capas turbulentas para cada estrella. Si se pretenden analizar 1000 imágenes de centelleo, se aplica el simulador de turbulencia atmosférica Turbulenz para generar 4000 imágenes, 1000 de amplitud y 1000 de fase para la estrella en el eje óptico y otras tantas para la estrella fuera de eje. Este proceso puede emplear de uno a dos días de procesamiento dependiendo del equipo de cómputo disponible y de la complejidad de las condiciones de simulación. El tiempo de procesamiento aumenta, por ejemplo, si se pretenden simular más capas turbulentas. Posteriormente es necesario renombrar gran parte de los archivos para que sean procesados fácilmente por el simulador de SCIDAR, esta tarea implica aproximadamente una hora. Cuando los archivos de entrada están listos, el proceso de obtención de las autocorrelaciones e intercorrelaciones es mucho más rápido, para el mismo caso de 1000 imágenes de centelleo, estas se generan en el simulador de SCIDAR para luego calcular las intercorrelaciones y autocorrelaciones en un tiempo total de dos horas aproximadamente.

De lo anterior se deduce inmediatamente el problema que supone obtener una mayor cantidad de puntos para calcular la curva de ajuste por regresión y de esa manera comprobar definitivamente la validez de

los resultados que arroja el programa. Por otra parte es necesario tener en cuenta que aún faltan otros módulos de simulación de efectos instrumentales, que necesariamente modificarán los resultados finales que se puedan deducir de las intercorrelaciones y autocorrelaciones. Es por ello que hay que considerar la necesidad de repetir todo el proceso de datos para la obtención de los puntos una vez que se cuente con estos nuevos módulos.

En algunas de las imágenes de correlación aparecen franjas horizontales sobre la pupila. Estas se deben al aliasing, fenómeno provocado por un error por defecto en el muestreo de la pupila. En versiones posteriores del simulador de SCIDAR, los archivos de entrada se tendrán que recopiar en una imagen más grande para evitar el error por defecto en el muestreo y así eliminar el fenómeno de aliasing.

## 6.2. Perspectivas

El primer paso en el desarrollo posterior del simulador de SCIDAR generalizado consistirá en la programación de módulos para simular los efectos de un mal guiado del telescopio (tracking), distorsión de la pupila, difracción de borde, ruido de video, ruido de fotón y aberraciones dinámicas. El diseño de cada uno de estos módulos de código en IDL presupone la aplicación de diversos conceptos provenientes de varias ramas de la Física.

Se analizaron con detalle el tipo de imágenes de centelleo en la pupila que se utilizan como archivos de entrada para el simulador. Sin embargo, una vez incorporados todos los módulos de efectos instrumentales y después de concluir una segunda fase de pruebas de los resultados, se hace necesaria la utilización de datos de observación reales como archivos de entrada para el simulador de SCIDAR.

En el momento de la redacción de esta tesis el Max Planck Institut für Astronomie, cuenta ya con un programa de simulación capaz de calcular autocorrelaciones e intercorrelaciones. Sin embargo no constituye un simulador completo del SCIDAR generalizado. El proyecto de la programación del simulador del SCIDAR mexicano, una vez llegada su conclusión definitiva, se presentará posteriormente en un artículo en el que se resumirá el presente trabajo, con resultados que incluyan todos los efectos instrumentales.

Finalmente, el simulador de SCIDAR será incorporado a los telescopios del Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir, B. C., en una fase previa a la instalación del instrumento real para calibrarlo y optimizar su funcionamiento. De esta manera se hace posible la investigación de primer nivel en México en el campo de la óptica de alta resolución.

## A

## Difracción y límite de resolución de un telescopio

### A.1. Difracción por aberturas cuadradas o rectangulares

En el postulado de Huygens, que inicialmente tenía el propósito de explicar la reflexión, refracción y propagación de la luz, se asume que cada punto de un frente de onda  $\Sigma$  generado por una fuente  $S$ , se comporta como una fuente de ondas secundarias  $S'$ . En general este postulado fue suficiente para explicar con claridad los fenómenos de reflexión, refracción. Bajo ciertas condiciones de aproximación puede incluso explicar la propagación rectilínea de la luz. Sin embargo, falla al explicar la difracción, o bien, la desviación del camino óptico rectilíneo cuando la luz se hace pasar a través de aberturas o cuando se interpone un obstáculo. Fresnel extendió el principio de Huygens diciendo que las ondas secundarias  $S'$  interfieren una con otra de acuerdo con el principio de superposición. El principio de Huygens-Fresnel postula que cada punto no obstruido del frente de onda  $\Sigma$  proveniente de la fuente  $S$ , es una fuente de ondas secundarias esféricas  $S'$ , y que la amplitud de la onda en todo punto más allá de  $\Sigma$  es la superposición de los frentes de onda secundarios  $\Sigma'$ . Al sumar estas contribuciones al frente de onda, es necesario incluir la amplitud y fase de cada onda secundaria.

Sin embargo, Kirchhoff demostró que las leyes que gobiernan las contribuciones de los distintos elementos del frente de onda son más complicados de lo que asumió Fresnel. El teorema de la difracción de Kirchhoff proporciona una expresión explícita para el factor de inclinación que permanecía indeterminado en la teoría de Fresnel, y en muchos casos puede ser reducido a una forma más simple que es esencialmente equivalente al principio de Huygens-Fresnel.

Sea  $P_0$  la fuente puntual de una onda monocromática que se propaga esféricamente hacia una abertura  $W$  practicada en una pantalla opaca (fig. A.1).  $\Sigma$  es el frente de onda esférico de radio  $R$ , que se propaga después de la abertura, y tiene centro en el punto  $P$ . Si  $Q$  es un punto cualquiera en el área de la abertura, definimos las distancias  $r$  y  $s$  como:

$$r = \overline{P_0Q} \qquad s = \overline{QP} \qquad (A.1)$$

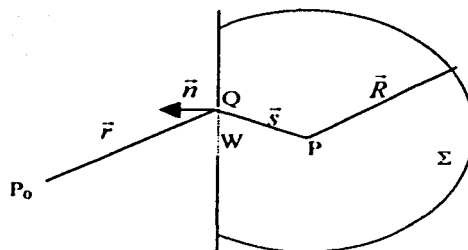


Figura A.1:

Ilustración esquemática de la integral de difracción de Kirchhoff.

La contribución total al campo electromagnético de todos los elementos de área  $dS$  de  $W$  al frente de onda  $\Sigma$  se escribe entonces como [8]:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_W \frac{e^{ik(r+s)}}{rs} [\cos(\vec{n}, \vec{r}) - \cos(\vec{n}, \vec{s})] dS \quad (A.2)$$

Donde  $\vec{n}$  es un vector normal al área  $W$  con dirección opuesta a la propagación;  $(\vec{n}, \vec{r})$  y  $(\vec{n}, \vec{s})$  son los ángulos que se forman entre el vector  $\vec{n}$  y los vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{s}$  respectivamente.  $A$  es una constante proporcional a  $W$  (amplitud),  $\lambda$  es la longitud de onda,  $r = |\vec{r}|$  es la distancia de  $P_0$  a  $Q$ ,  $s = |\vec{s}|$  es la distancia de  $Q$  a  $P$ , y  $k$  es el número de onda  $k = 2\pi/\lambda$ .

Consideremos ahora el caso particular en el que la fuente emisora, así como el punto del campo que se analiza está en el infinito con respecto a la abertura. Esto es difracción de campo lejano o *Difracción de Fraunhofer* y describe la situación que se tiene al observar los frentes de onda de las estrellas utilizando un telescopio.

Primero analicemos lo que sucede en una abertura rectangular (fig. A.2). Sea  $W$  un frente de onda esférico de radio de curvatura  $R$  que emerge de una abertura de dimensiones  $2a \times 2b$ . Un punto arbitrario  $Q$  del frente de onda tiene coordenadas  $(\xi, \eta, \zeta)$ , con el origen de este sistema de coordenadas en el centro del rectángulo. Un punto arbitrario  $P$  del campo tiene coordenadas  $(x, y, z)$  con el origen  $O$  de este sistema a una distancia  $R$  a lo largo del eje  $\zeta$ . La amplitud compleja de la onda  $U$  en el punto  $P$  es la suma de todas las contribuciones de amplitud de cada elemento de área  $dS$  del frente de onda. Si asumimos que las dimensiones del rectángulo y la distancia del punto  $P$  al origen de su sistema de coordenadas es pequeña en comparación con  $R$ , la suma de las contribuciones de cada elemento  $dS$  está dada por una expresión simplificada de la ecuación de difracción de Fraunhofer [36]:

$$U(P) = C \int_W e^{ik(\xi x + \eta y + \zeta z)} dS \quad (A.3)$$

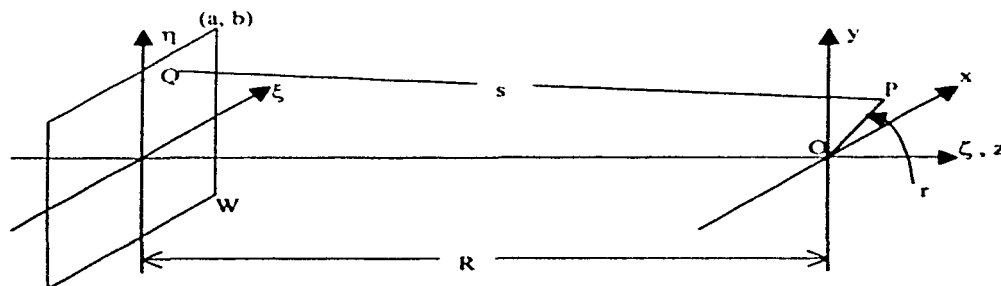


Figura A.2.: Difracción de Fraunhofer para una abertura rectangular.

Donde  $C$  es una constante proporcional a la amplitud en  $Q$  y la integración se hace sobre el área total del frente de onda no obstruido. Nótese que para el punto  $O$ , tenemos  $s = R$  para todos los puntos  $Q$  en el frente de onda, por lo tanto, todas las ondas están en fase en  $O$ . En este caso, el argumento de la exponencial en la expresión anterior es cero y la integral es el área del rectángulo. Por otra parte, la amplitud  $U$  en el origen es máxima, puesto que todas las ondas están en fase en  $O$ . Para cualquier otro punto  $P$ , la diferencia de camino óptico y la diferencia de fase son  $(s-R)$  y  $k(s-R)$  respectivamente, y la amplitud en  $P$  es menor que en  $O$ . Expresando  $s$  en términos de las coordenadas de  $Q$  y  $P$ , relativa al origen, tenemos:

$$s^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = R^2 - 2(x\xi + y\eta + z\zeta) \quad (A.4)$$

De aquí podemos eliminar los términos cuadráticos de  $x, y, z$ . Y tomando en cuenta, según la consideración anterior, que  $s \approx R$ , tenemos:  $s^2 - R^2 = (s - R)(s + R) \approx 2R(s - R)$ . Substituyendo este resultado en la ecuación anterior:

$$s - R = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{R} = -\frac{x\xi + y\eta}{R} + z\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R^2}\right) \quad (A.5)$$

Definimos  $p=x/R, q=y/R$  donde  $p, q$  son los cosenos directores de la recta que va desde el centro del rectángulo hasta el punto  $P$ . Hacemos la aproximación paraxial considerando  $z=0$  y reescribimos la integral  $U(P)$  como:

$$U(P) = C \int_a^a \int_b^b e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta = C \int_a^a e^{-ikp\xi} d\xi \int_b^b e^{-ikq\eta} d\eta \quad (A.6)$$

Evaluando la integral, tenemos:

$$U(P) = CA \left( \frac{\sin kpa}{kpa} \right) \left( \frac{\sin kqb}{kqb} \right) = CA \left( \frac{\sin v_x}{v_x} \right) \left( \frac{\sin v_y}{v_y} \right) \quad (A.7)$$

Donde  $A=4ab$  es el área de la abertura rectangular y  $v_x, v_y$  son variables adimensionales.

La intensidad en el punto  $P$  de una imagen es el módulo cuadrado del promedio temporal de la amplitud de la onda en  $P$ , mientras que la *point spread function* (PSF) en  $P$ , es la intensidad normalizada a la unidad en el punto donde la intensidad es máxima. Si  $I_0$  es la intensidad en el centro e  $i(P)$  es la PSF para la intensidad  $I(P)$ , tenemos que:

$$i(P) = \frac{I(P)}{I_0} = \left( \frac{\sin v_x}{v_x} \right)^2 \left( \frac{\sin v_y}{v_y} \right)^2 \quad (A.8)$$

Donde  $I_0 = C^2 A^2$ . La función  $y = (\sin(x)/x)^2$  que se muestra en la figura A.3, tiene sus mínimos en los puntos  $\pm n\pi$ , donde  $n$  es un entero no nulo. Las tres gráficas de la figura A.3 fueron generadas con un programa realizado en Maple V.

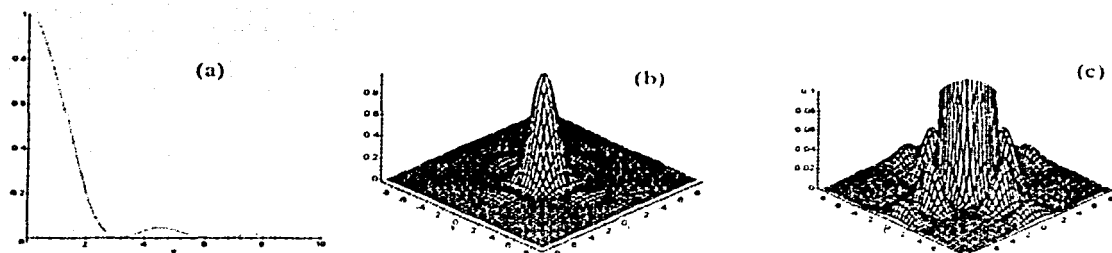


Figura A.3.: Difracción de Fraunhofer en una abertura rectangular. (a) función  $y = (\sin x / x)^2$ . (b) y (c) muestran la PSF para una abertura cuadrada (ecuación A.8), en (b) se muestra la superficie completa y en (c) se ha definido un máximo de graficación para el eje  $z$  igual a 0.1, para evidenciar el comportamiento de la función

Es de especial interés el primer cero de la función, cuando  $n=1$  se tiene que  $x_1 = \pi = (2\pi/\lambda)pa$ , de donde  $p_1 = x_1/R = \lambda/2a$  y de aquí se deduce que la distancia entre mínimos a ambos lados del pico central es  $2x_1 = \lambda R/a$ . Por otra parte, el ancho a media altura, o en inglés *full width at half maximum* (FWHM) del pico principal, es aproximadamente  $0.9x_1$ . Las correspondientes distancias angulares son  $2p_1$  y  $0.9p_1$ , donde este último es el ángulo subtendido por el FWHM en la abertura. De aquí se concluye entonces que para una fuente puntual, el FWHM angular en una dirección dada es aproximadamente la longitud de onda entre el ancho de la abertura en esa dirección. La única diferencia entre aberturas de distintas formas es el factor que multiplica al cociente  $\lambda/D$ , con  $D$  = ancho de la abertura.

## A.2. Difracción por aberturas circulares o anulares

Ahora veremos como aplicar la integral de difracción de Fresnel-Kirchhoff a una abertura circular de radio  $a$  con una obstrucción central de radio  $ae$  ( $0 \leq e \leq 1$ ), que es el caso de la mayoría de los telescopios. Considérese entonces una pupila circular de radio  $a$ , con un frente de onda esférico  $W$  de radio de curvatura  $R$  que emerge de la pupila y una obstrucción central de radio  $ea$  con  $e$  en el intervalo  $[0,1]$  (fig. A.4).

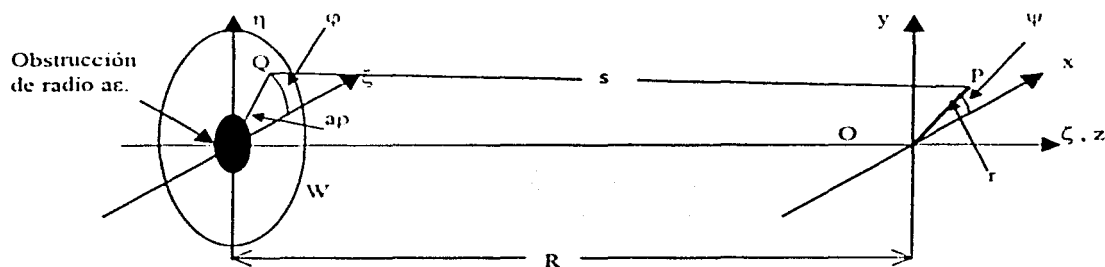


Figura A.4.: Difracción de Fraunhofer para una abertura circular.

Como en el caso anterior, un punto arbitrario  $Q$  en el frente de onda tiene coordenadas  $(\xi, \eta, \zeta)$  y está a una distancia  $ap$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) del eje  $z$  en un ángulo  $\phi$  con respecto al eje  $\xi$ . Un punto arbitrario  $P$  del campo está a una distancia  $r$  del eje  $z$  y a un ángulo  $\psi$  con el eje  $x$ . Las coordenadas relativas al origen de los puntos  $P$  y  $Q$  son :

$$\begin{aligned}\xi &= a\rho \cos \varphi & x &= r \cos \psi \\ \eta &= a\rho \sin \varphi & y &= r \sin \psi \\ \zeta &= -(R^2 - a^2\rho^2)^{1/2}\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

Suponemos que las distancias  $z, r, a$  son muy pequeñas comparadas con  $R$ . Entonces la suma de las contribuciones de los elementos de área del frente de onda tiene exactamente la misma expresión que la ecuación (A.3), la integral simplificada de la difracción de Fraunhofer que encontramos para la abertura rectangular, además se sigue cumpliendo la condición de la ecuación (A.4). Ahora sustituiremos las ecuaciones (A.9) en (A.4), utilizando el teorema del binomio para expandir  $\zeta$ .

$$s - R = -\frac{a\rho r}{R} \cos(\varphi - \psi) + z \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{a\rho}{R} \right)^2 \right] \quad (\text{A.10})$$

Definimos  $u, v$  variables adimensionales como:

$$u = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a}{R} \right)^2 z \quad v = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a}{R} \right) r \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo este último resultado en (A.10) se obtiene:

$$k(s - R) = -v\rho \cos(\varphi - \psi) - \frac{u\rho^2}{2} + u \left( \frac{R}{a} \right)^2 \quad (\text{A.12})$$

Ahora hacemos  $u=0$  y evaluamos  $U(P)$  en el plano focal paraxial tomando un elemento diferencial de área  $dS=a^2\rho d\rho d\varphi$ , entonces:

$$U(P) = Ca^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{-iv\rho \cos(\varphi - \psi)} \rho d\rho d\varphi \quad (\text{A.13})$$

Dado que el sistema es simétrico con respecto al eje  $z$ ,  $U(P)$  es independiente de  $\psi$ , y entonces podemos tomar un valor arbitrario de  $\psi$  para calcular la integral. Tomamos entonces  $\psi=\pi$  y usamos la función de Bessel de primer orden,  $J_1(x)$  para escribir (utilizando relaciones de recurrencia para simplificar):

$$U(P) = 2\pi a^2 C \int_0^1 J_0(v\rho) \rho d\rho = \frac{2\pi a^2 C}{v^2} \int_0^1 d[v\rho J_1(v\rho)] \quad (\text{A.14})$$

Integrando la expresión anterior se obtiene:

$$U(P) = \pi a^2 C \left[ \frac{2J_1(v)}{v} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(\varepsilon v)}{\varepsilon v} \right] \quad (\text{A.15})$$

Ahora bien, el cociente  $2J_1(x)/x$  tiende a 1 cuando  $x$  tiende a 0, por lo tanto  $U(0)=\pi a^2 C(1-\varepsilon^2)$ , y podemos escribir la PSF para la abertura anular como:

$$i(P) = \frac{I(P)}{I_0} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2} \left[ \frac{2J_1(v)}{v} - \varepsilon^2 \frac{2J_1(\varepsilon v)}{\varepsilon v} \right]^2 \quad (\text{A.16})$$

La PSF de la ecuación 16 se muestra en la figura (A.5), se encuentra en el plano focal paraxial y también es llamada *figura ó patrón de Airy*. La intensidad es máxima en el punto  $v = 0$  y consiste en un círculo brillante central que llamaremos *disco de Airy*, rodeado sucesivamente de anillos oscuros y brillantes.

En una abertura circular, la intensidad máxima de los anillos brillantes decrece monótonamente a medida que se incrementa  $v$ . Para una abertura anular con una obstrucción central de radio  $\epsilon a$ , la intensidad máxima de los sucesivos anillos brillantes decrece de manera cíclica, dependiendo del valor específico de  $\epsilon$  [34]. Esto se muestra en la figura (A.6) en donde se ha graficado el logaritmo de la PSF para una abertura circular ( $\epsilon=0$ ) y para una abertura anular que corresponde al telescopio de 2.1 m del Observatorio Astronómico Nacional, en San Pedro Mártir B. C., cuya obstrucción central tiene un diámetro de 0.51 m, lo que significa  $\epsilon a = 0.255$  m, es decir  $\epsilon=0.12$ . Al igual que en el caso anterior, las gráficas de las figuras (A.5) y (A.6) se obtuvieron mediante un programa realizado en Maple V.

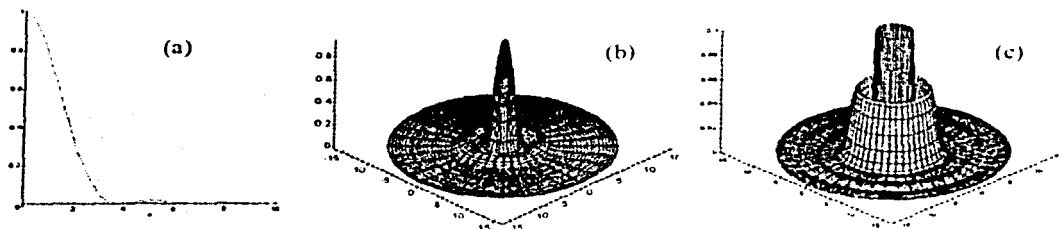


Figura A.5.: Difracción de Fraunhofer por una abertura circular o anular: (a) función  $y = (J_1(x)/x)^2$  (b) y (c) muestran la PSF para una abertura anular (ecuación A.16), con  $\epsilon=0.33$ , en (b) se muestra la superficie completa y en (c) se ha definido un máximo de graficación para el eje  $z$  igual a 0.1, para evidenciar el comportamiento de la función.

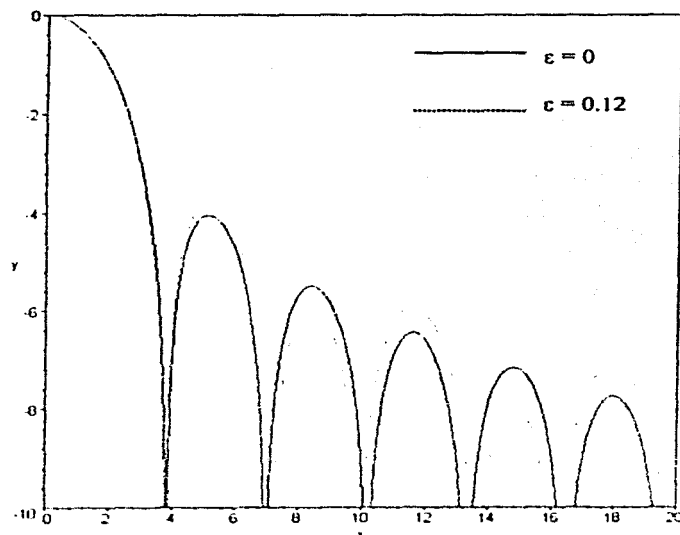


Figura A.5.

Logaritmo de la PSF para una abertura circular  $\epsilon=0$  (línea continua), y para una abertura anular  $\epsilon=0.12$  (línea segmentada), que corresponde a la abertura central del espejo primario del telescopio de 2.1 m del Observatorio Astronómico Nacional, en San Pedro Mártir.

Los máximos de intensidad en la abertura anular decrecen de manera cíclica.

Los radios de los anillos de oscuridad en la figura de Airy los encontramos haciendo  $i(P) = 0$ ; una lista de los radios de los tres primeros anillos de oscuridad en la figura de Airy para distintos valores de  $\epsilon$  aparece en la tabla A.1. El radio del primer anillo oscuro en torno al disco de Airy decrece a medida que  $\epsilon$  se incrementa, mientras que el radio del segundo disco de oscuridad es máximo cerca de  $\epsilon=0.3$  y luego decrece a medida que se incrementa la obstrucción central.

| $\epsilon$ | w1    | w2    | w3    |
|------------|-------|-------|-------|
| 0.00       | 1.220 | 2.233 | 3.238 |
| 0.10       | 1.205 | 2.269 | 3.182 |
| 0.20       | 1.167 | 2.357 | 3.087 |
| 0.33       | 1.098 | 2.424 | 3.137 |
| 0.40       | 1.058 | 2.388 | 3.000 |
| 0.50       | 1.000 | 2.286 | 3.491 |
| 0.60       | 0.947 | 2.170 | 3.389 |

Tabla A.1:

Radio de los tres primeros anillos de oscuridad,  $w1$ ,  $w2$ ,  $w3$ , en la figura de Airy para distintos valores de  $\epsilon$  ( $w=v/\pi$ ).

De nuevo, es de especial interés la distancia al primer cero de la función. Para una abertura circular ( $\epsilon=0$ ), la PSF tiene su primer valor nulo a una distancia de  $w_1=1.22$  (ver Tabla A.1), sustituyendo este valor como  $v_1=w_1\pi$  en las ecuaciones (A.11), podemos escribir:

$$1.22\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{a}{R} \right) r_1 \quad \Rightarrow \quad r_1 = 1.22\lambda \left( \frac{R}{2a} \right) \quad (\text{A.17})$$

Donde  $r_1$  es el radio lineal del disco de Airy. Recordemos la definición de *radio focal*,  $F=f/D$ , donde  $f$  es la distancia focal y  $D$  el diámetro de nuestro instrumento óptico; asumimos que la fuente puntual está situada al infinito, de manera que  $R/2a=f/D=F$ . Si  $\alpha_1$  es el radio angular del disco de Airy, podemos escribir:

$$r_1 = 1.22\lambda F \quad (\text{A.18})$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{f} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (\text{A.19})$$

Esta última expresión es esencial para nuestro estudio, es el valor del FWHM del patrón de Airy para una abertura circular, y define la resolución de un telescopio ideal, es decir, con óptica perfecta y en total ausencia de turbulencia atmosférica, también es llamado el *límite de difracción* o *límite de resolución angular* de un telescopio.

En el caso de tener dos frentes de onda correspondientes a dos objetos separados entre sí por una distancia angular  $\theta$ , el patrón de difracción para una abertura circular o anular, será la suma de dos discos de Airy para cada objeto de estudio, como se observa en la figura (A.6). El criterio de la resolución de Rayleigh nos dice que podremos diferenciar las imágenes separadas de ambos objetos, si y solo si  $\theta \geq \alpha_1$ .

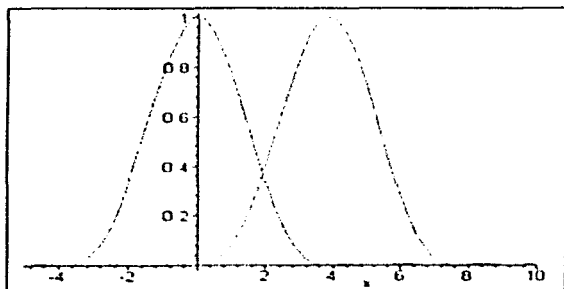


Figura A.6

Interpretación gráfica del criterio de Rayleigh. Dos objetos separados entre sí una distancia angular  $\theta$ , podrán ser resueltos siempre que  $\theta$  sea mayor o igual que el límite de resolución del instrumento.

## Teorema de Nyquist del muestreo

Sean  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  funciones de clase  $C_1$  para valores reales, es decir, son continuas y derivables. Recordemos el teorema de convolución [29]:

$$\mathfrak{I}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)] \quad (\text{B.1})$$

donde:

$$F_1(\omega) = \mathfrak{I}[f_1(t)] \quad F_2(\omega) = \mathfrak{I}[f_2(t)] \quad (\text{B.2})$$

Ahora bien,  $f(t)$  no tiene componentes frecuenciales superiores a un cierto valor máximo  $f_M$ , es decir, es una función acotada o bien una *función de banda limitada* (ver fig. 1a). Por lo tanto [21]:

$$F(\omega) = \mathfrak{I}[f(t)] = 0 \quad \text{para} \quad |\omega| > \omega_M = 2\pi f_M \quad (\text{B.3})$$

Considérese ahora la función  $f_S(t)$ , la función muestreada que se representa en la figura 1b. Esta es la función  $f(t)$  multiplicada por el *peine de Dirac*  $\delta_T(t)$  y es una sucesión de impulsos localizados a  $T$  intervalos regulares, cuyos valores son iguales a los de  $f(t)$  en los puntos del muestreo.

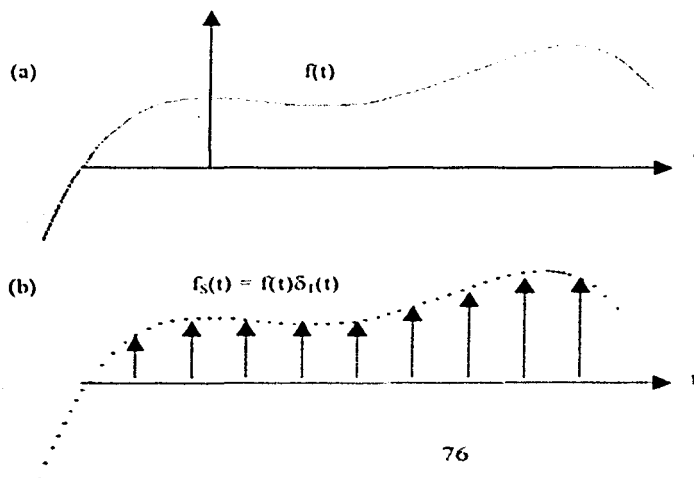


Figura 1. (a) ejemplo de función de banda limitada  $f(t)$  (b) la función  $f(t)$  multiplicada por el peine de Dirac  $\delta_T(t)$

Usamos entonces las propiedades del *peine de Dirac* para reescribir la función  $f_s(t)$  como [25]:

$$f_s(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (\text{B.4})$$

Sabemos que la transformada de Fourier del *peine de Dirac*,  $F[\delta_T(t)] = \delta_\omega(\omega)$ , es otro *peine de Dirac* en la frecuencia [29]:

$$\mathfrak{F}[\delta_T(t)] = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega) = \omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{B.5})$$

De acuerdo con el teorema de convolución en la frecuencia se tiene:

$$\mathfrak{F}[f_s(t)] = F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} [F(\omega) * \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)] \quad (\text{B.6})$$

Sustituyendo  $\omega_0 = 2\pi/T$ :

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} [F(\omega) * \delta_{\omega_0}(\omega)] = \frac{1}{T} \left[ F(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) \right] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0) \quad (\text{B.7})$$

Usamos ahora las propiedades del *peine de Dirac*:

$$\begin{aligned} f(t) * \delta(t) &= f(t) \\ f(t) * \delta(t - T) &= f(t - T) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Para escribir  $F_s(\omega)$  como:

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_0) \quad (\text{B.9})$$

Lo que demuestra que la transformada de Fourier de  $f_s(t)$  se repite cada  $\omega_0$  rad/seg. Obsérvese que  $F(\omega)$  se repite periódicamente sin empalmarse siempre y cuando se cumpla que  $\omega_0 > 2\omega_M$ , es decir  $2\pi/T > 2(2\pi f_M)$ , esto es [21]:

$$T < \frac{1}{2f_M} \quad (\text{B.10})$$

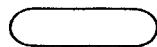
Por lo tanto, mientras se tomen muestras de  $f(t)$  a intervalos regulares menores a  $1/(2f_M)$ , el espectro de Fourier de  $f_s(t)$  será una réplica periódica de  $F(\omega)$  y contendrá toda la información de  $f(t)$ . El intervalo máximo de muestreo  $T = 1/(2f_M)$  se denomina *intervalo de Nyquist*.

## Diagramas de flujo de TurbuLenz

Se presentan los diagramas de flujo del simulador de turbulencia atmosférica TurbuLenz, perteneciente al Max Planck Institut Für Astronomie, Heidelberg.

Se incluye el diagrama del programa principal, así como de tres de sus subrutinas más importantes.

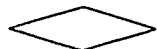
Dado que se trata de una presentación resumida del programa completo, se ha decidido utilizar un número de símbolos limitado, pero congruente con el conjunto de símbolos utilizados en el Apéndice D para el diagrama de flujo del simulador de SCIDAR:



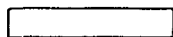
Inicio / fin del programa o subrutina.



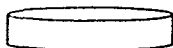
Proceso externo (ejecutado por una subrutina).



Bifurcador de decisión binaria.



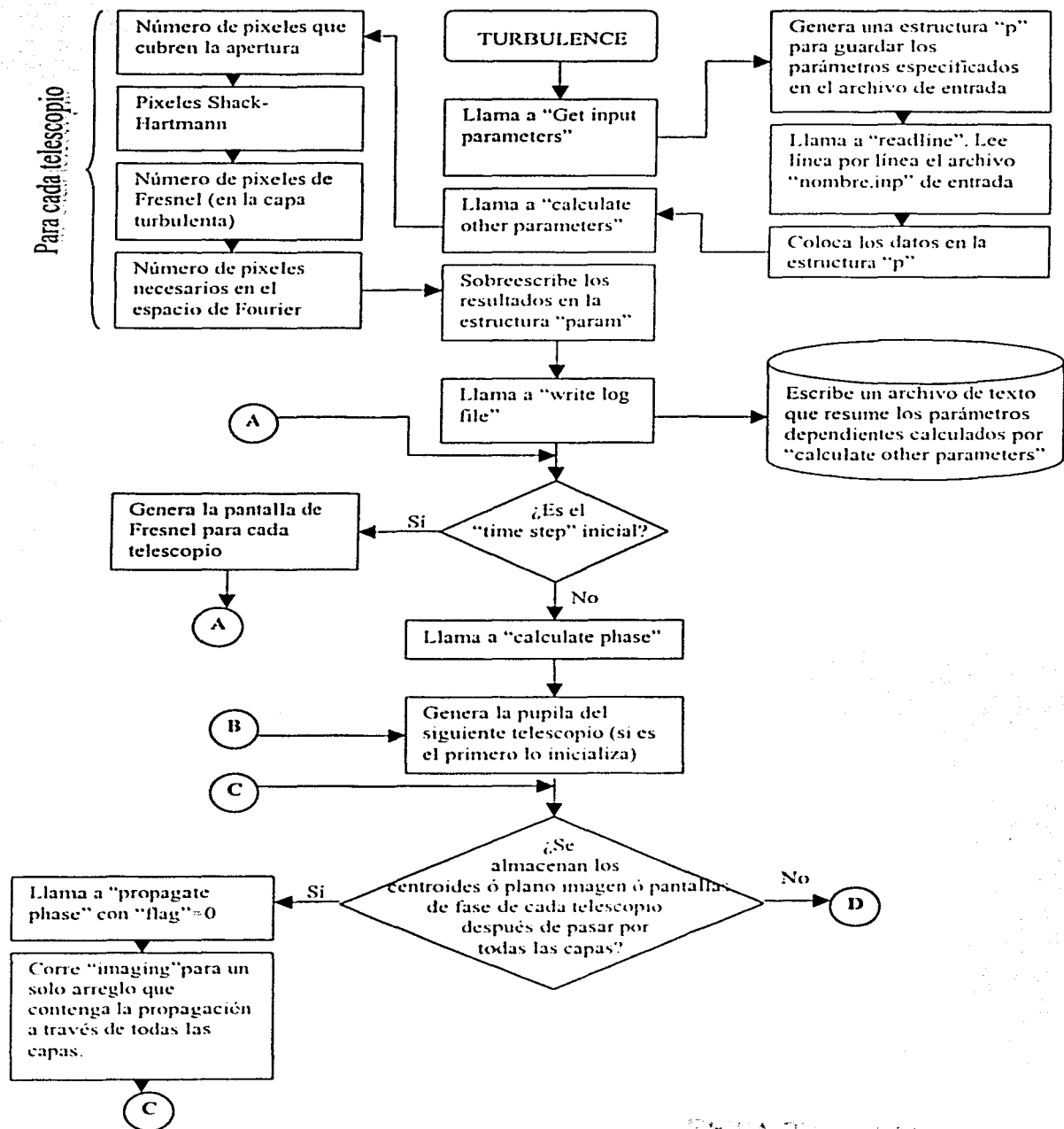
Proceso.



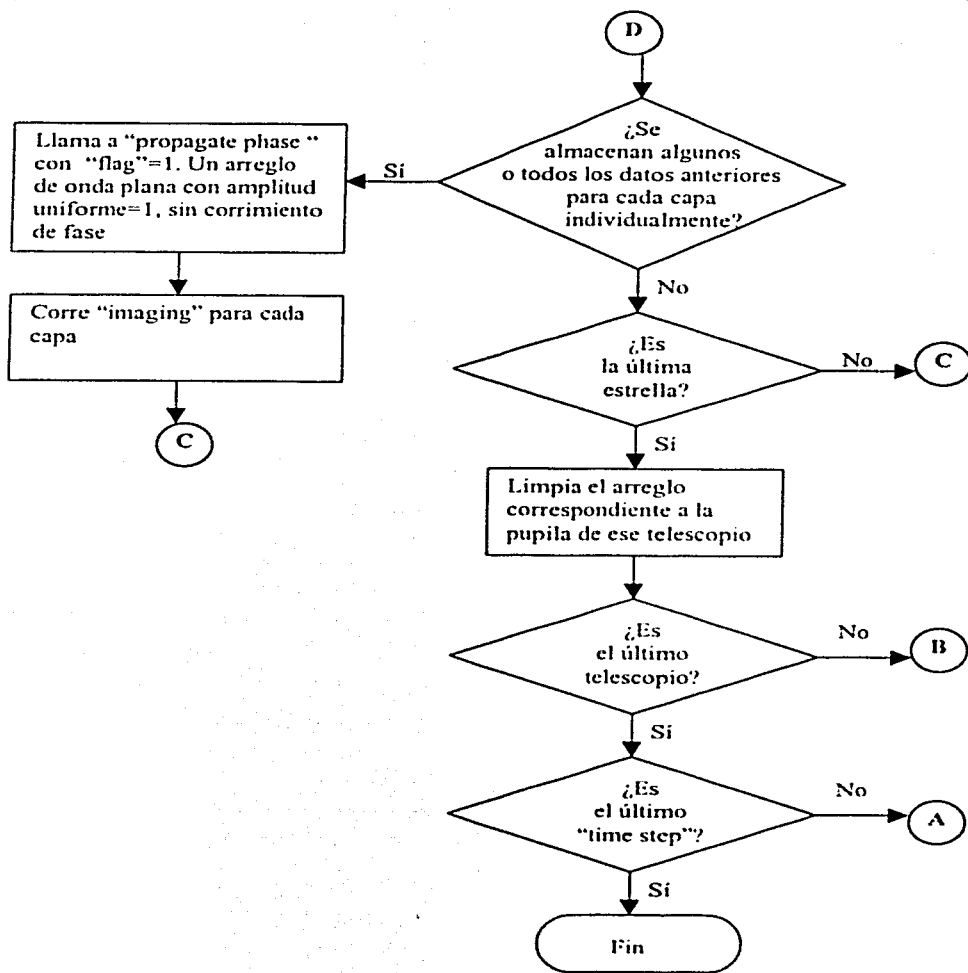
Almacenamiento en disco.

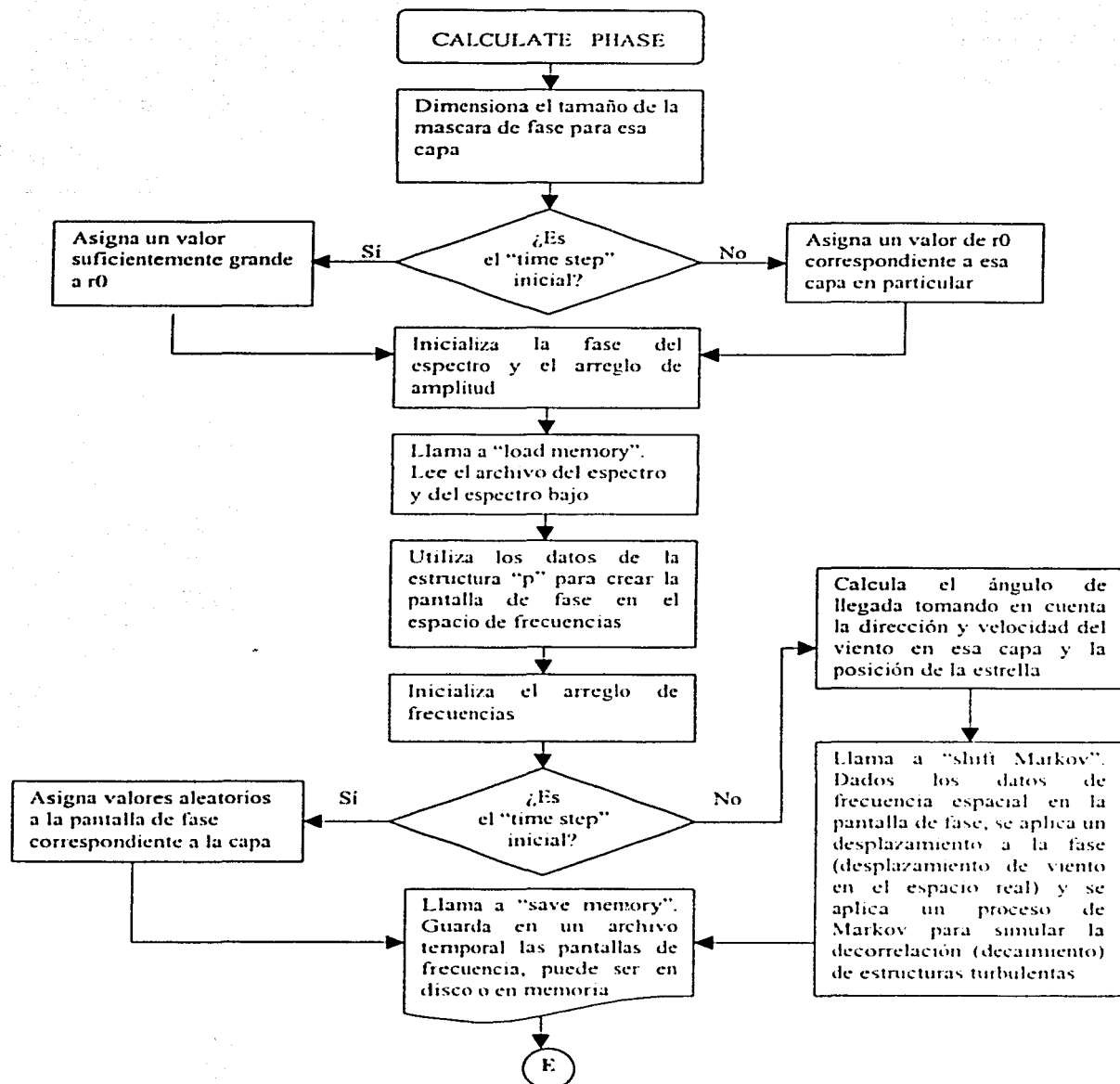


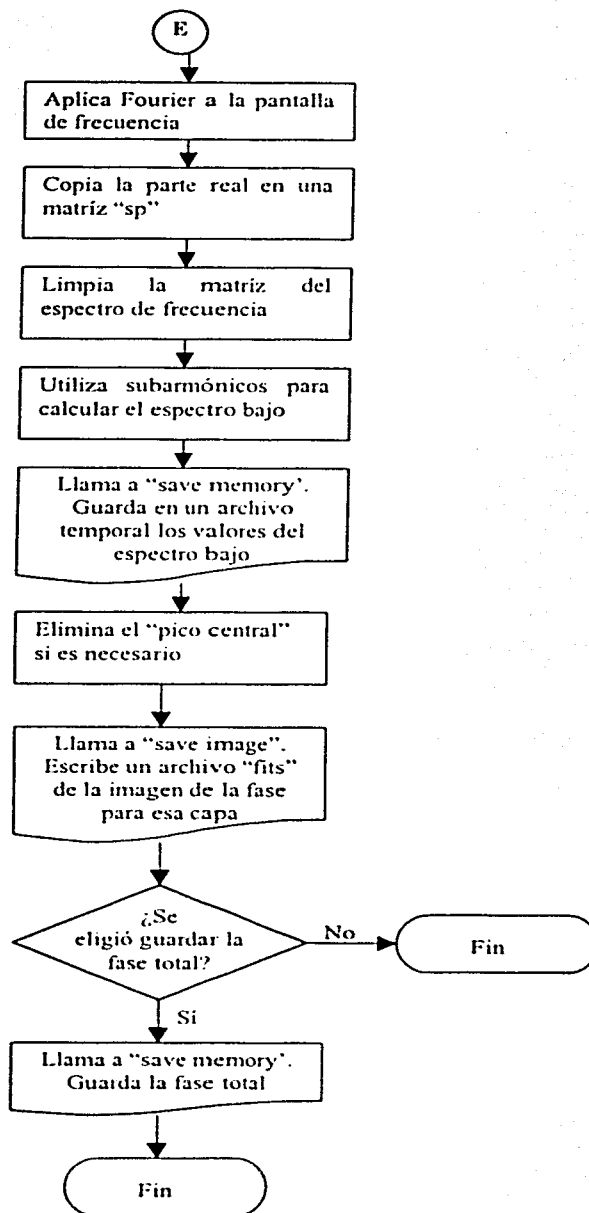
Conector.

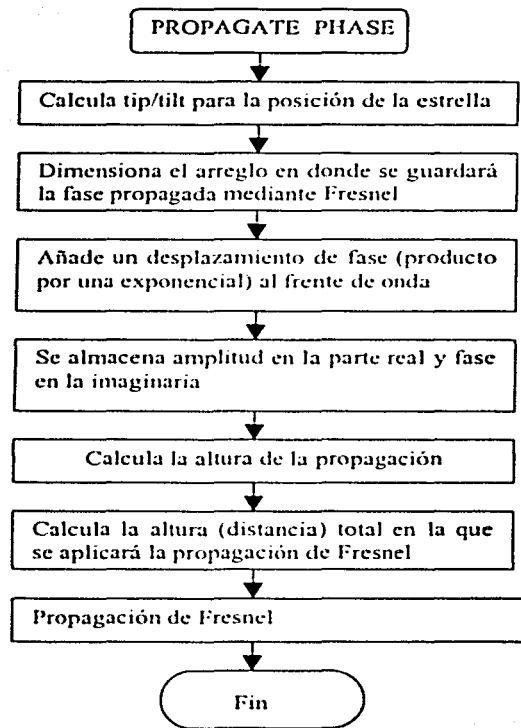


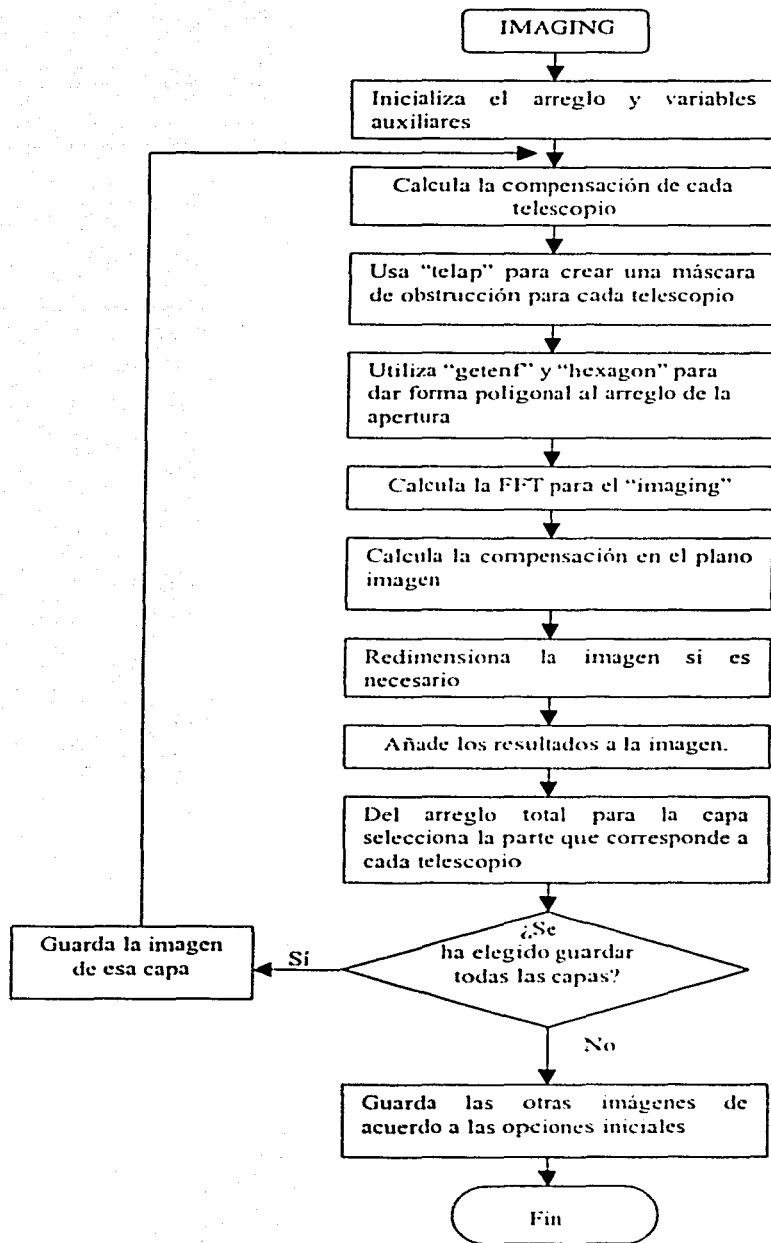
ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA







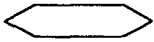
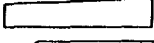
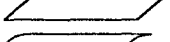
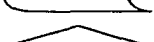
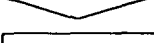
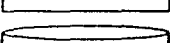
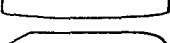


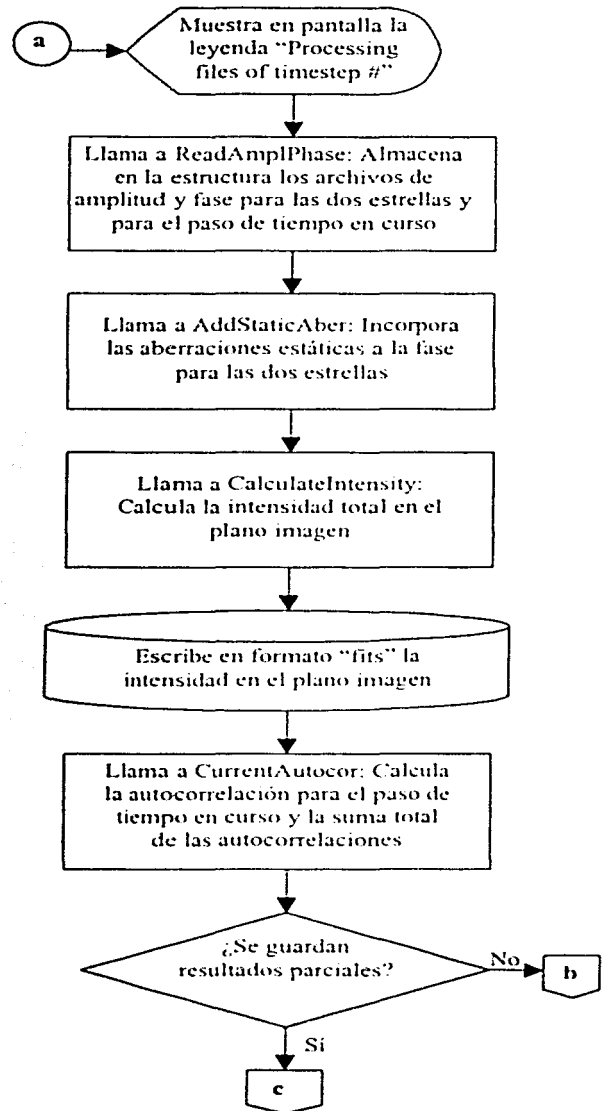
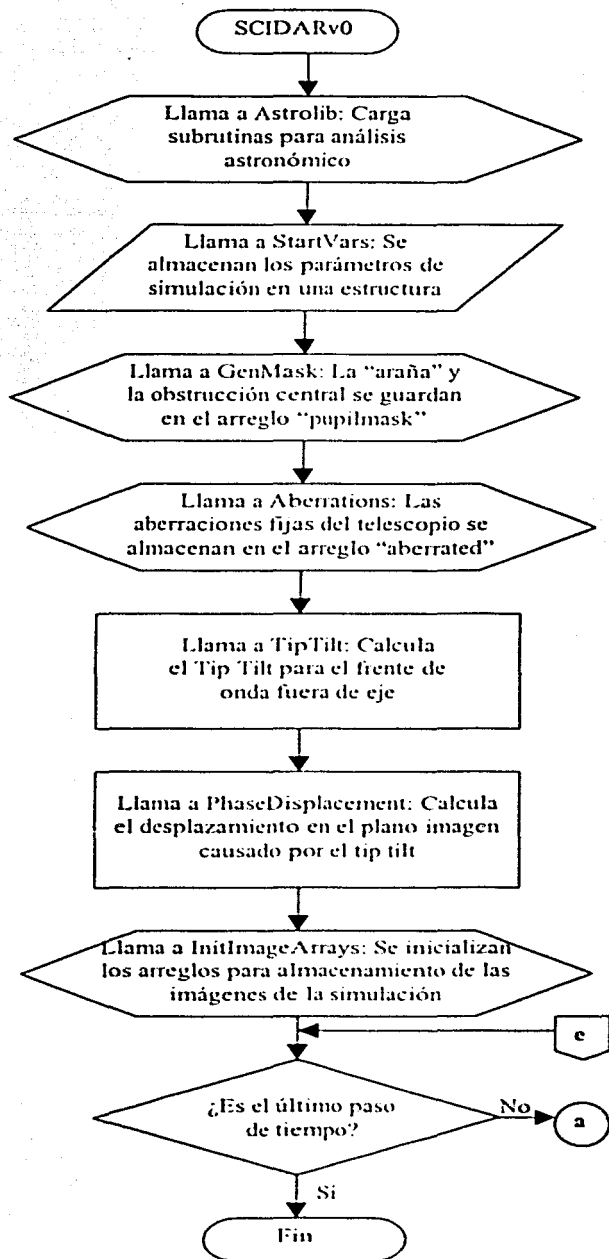


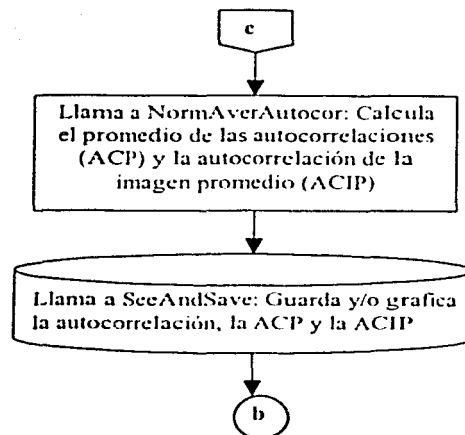
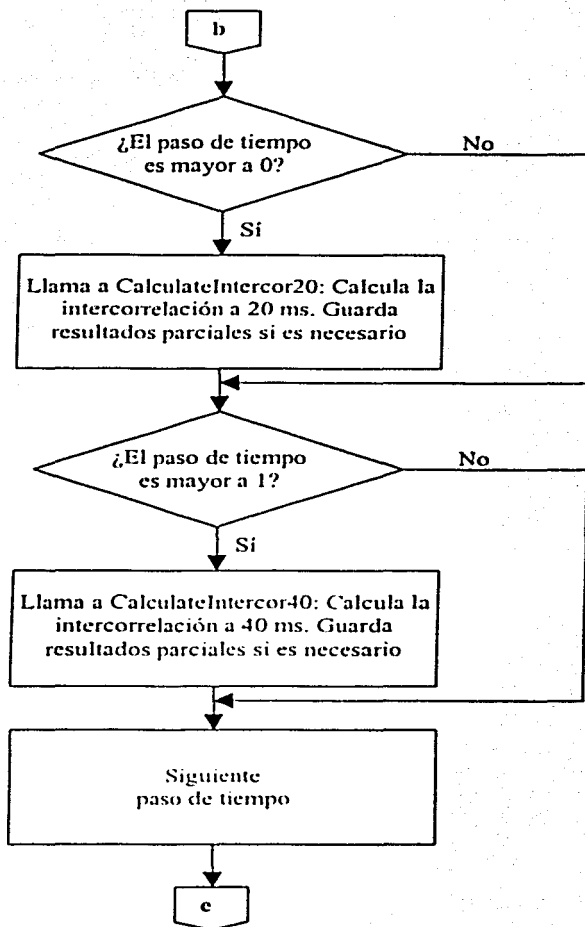
## Diagramas de flujo del simulador de SCIDAR Generalizado

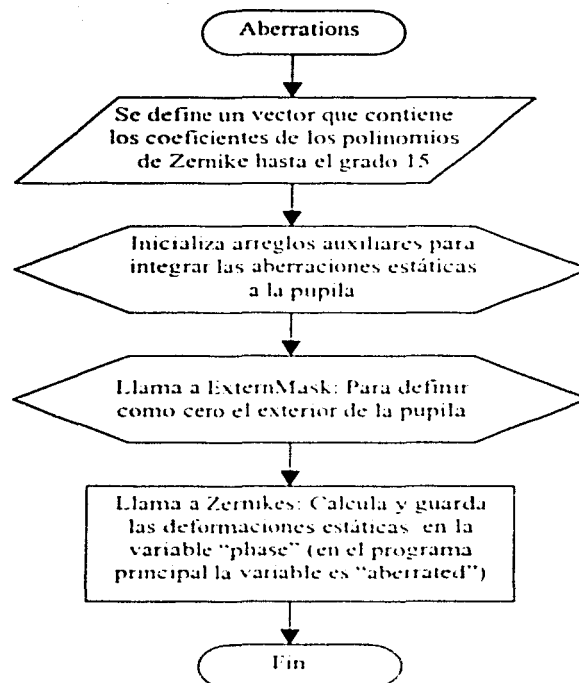
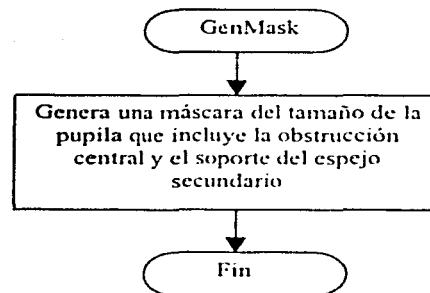
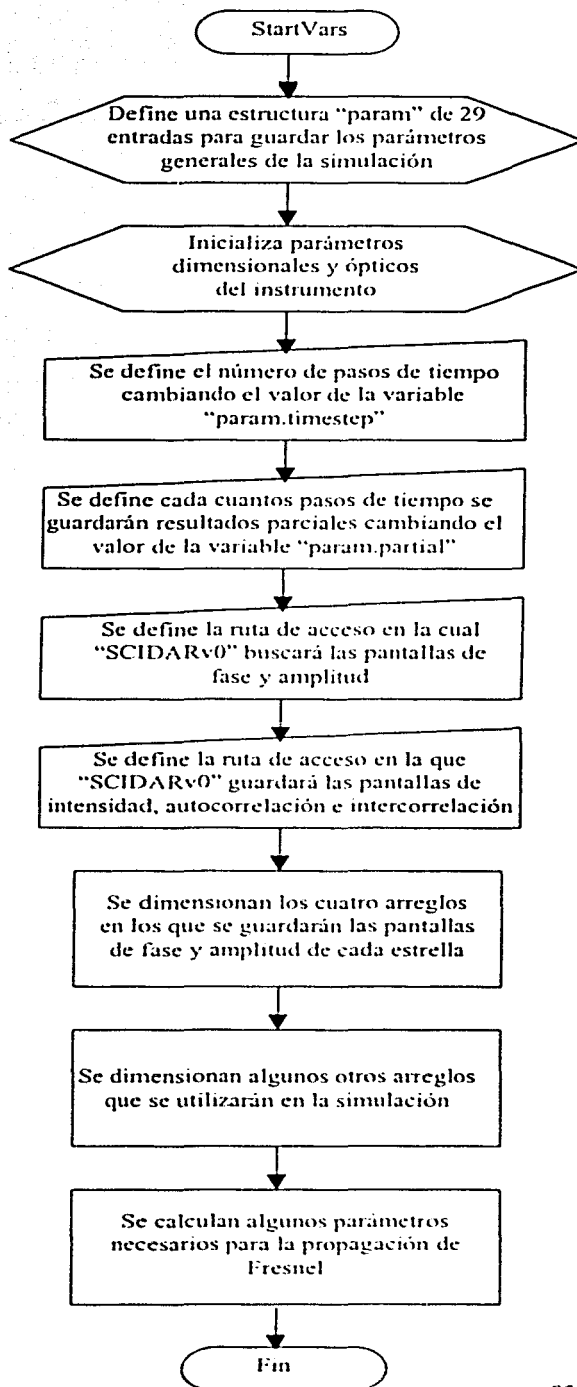
Se describe la estructura de programación del simulador de SCIDAR Generalizado por medio de los diagramas de flujo del programa principal, así como de todas sus subrutinas.

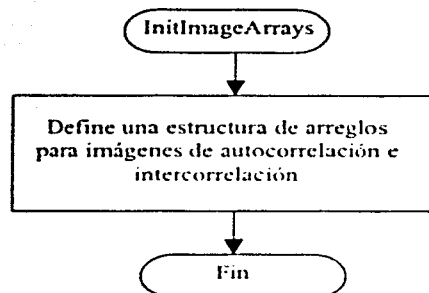
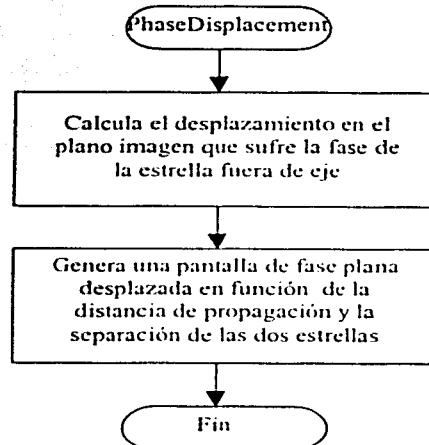
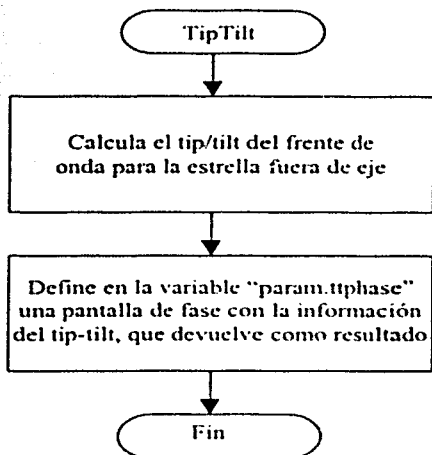
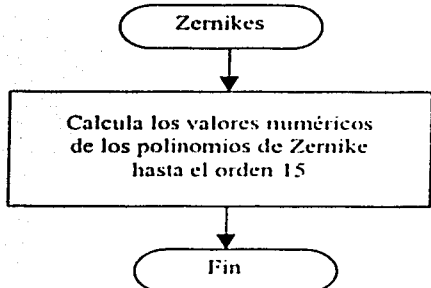
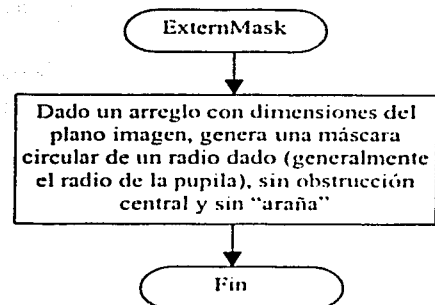
La utilización de los símbolos se realizó mediante el siguiente código:

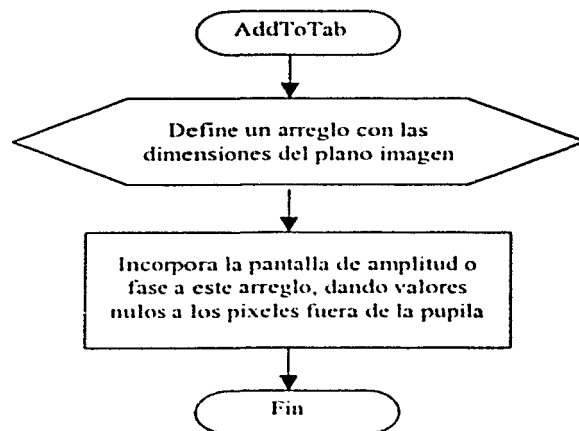
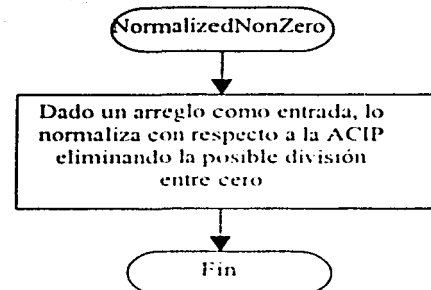
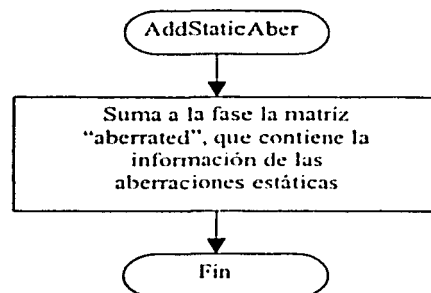
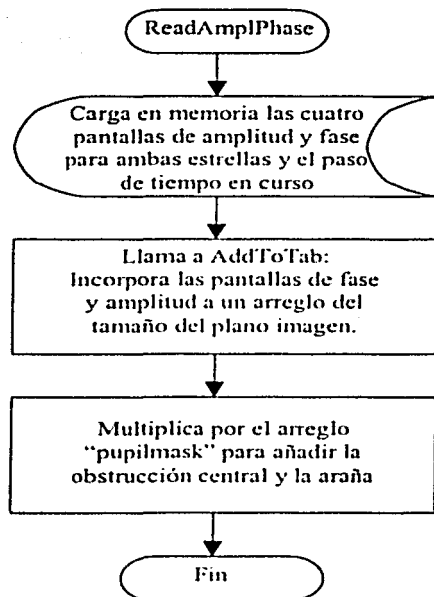
|                                                                                     |                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
|    | Inicio / fin del programa o subrutina.                        |
|    | Proceso preliminar, preparación previa para un cálculo.       |
|    | Entrada de datos / variables definidos(as) por el usuario.    |
|    | Entrada de datos / variables no definidos(as) por el usuario. |
|  | Utilización de datos almacenados previamente.                 |
|  | Bifurcador de decisión binaria.                               |
|  | Proceso.                                                      |
|  | Almacenamiento en disco.                                      |
|  | Salida a pantalla.                                            |
|  | Conector a la misma página.                                   |
|  | Conector a página distinta.                                   |



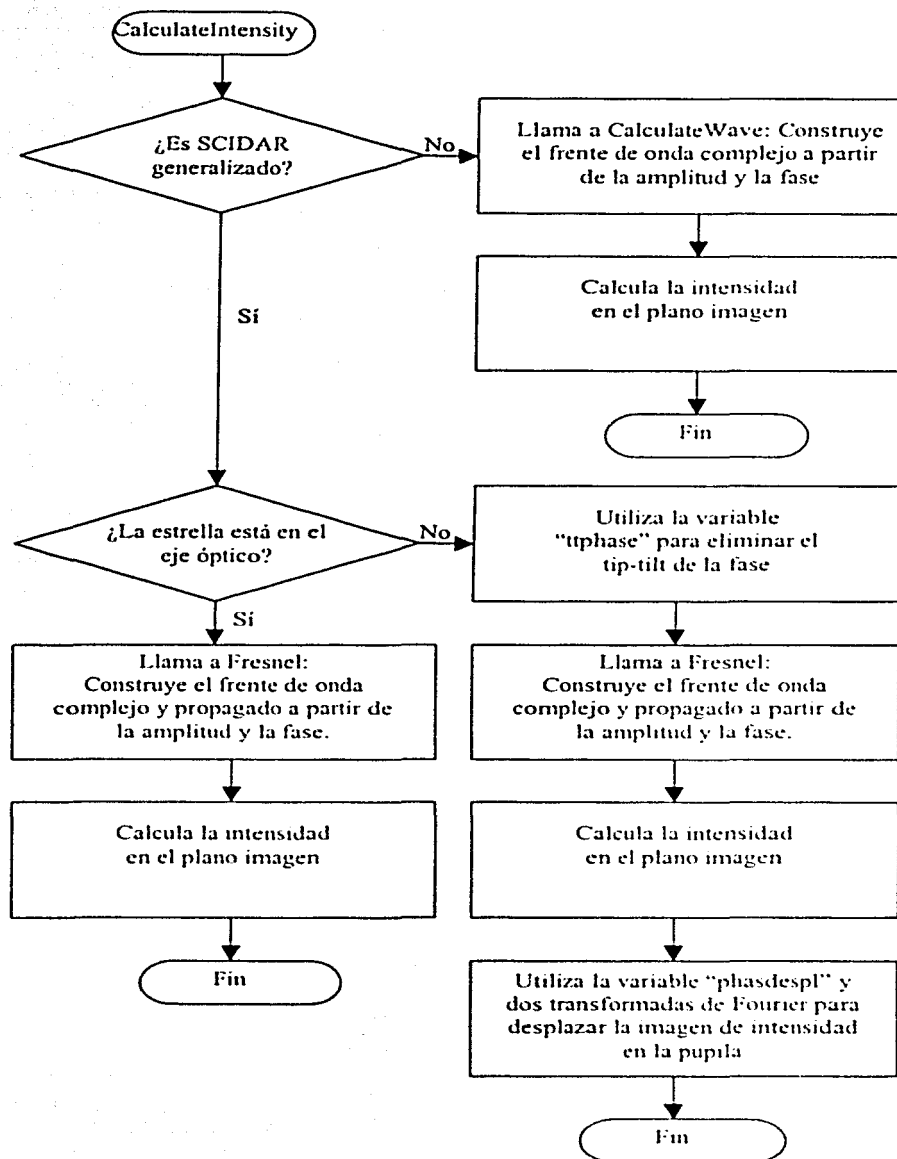


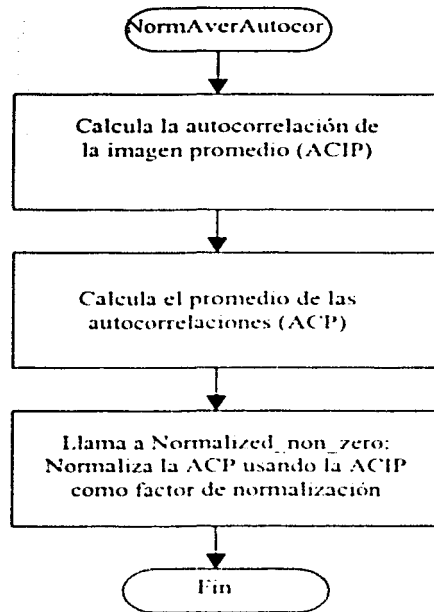
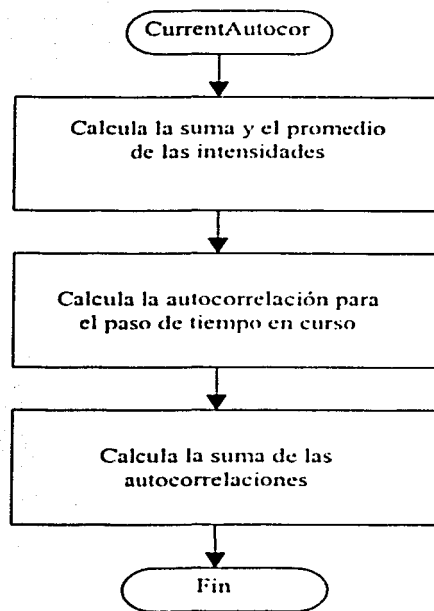
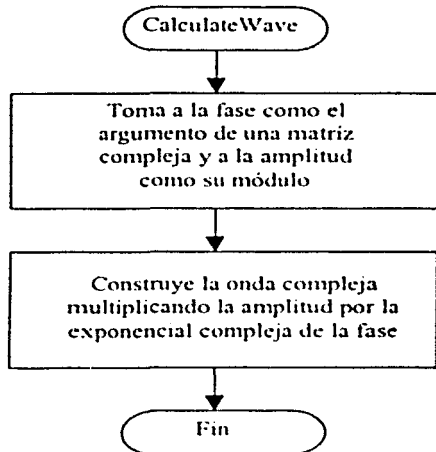
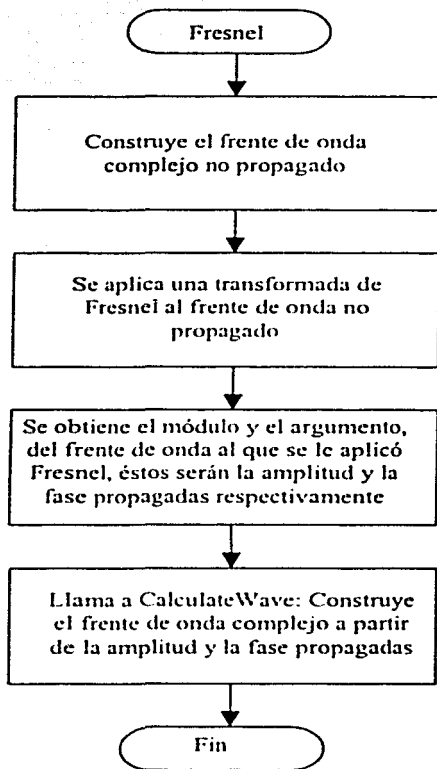


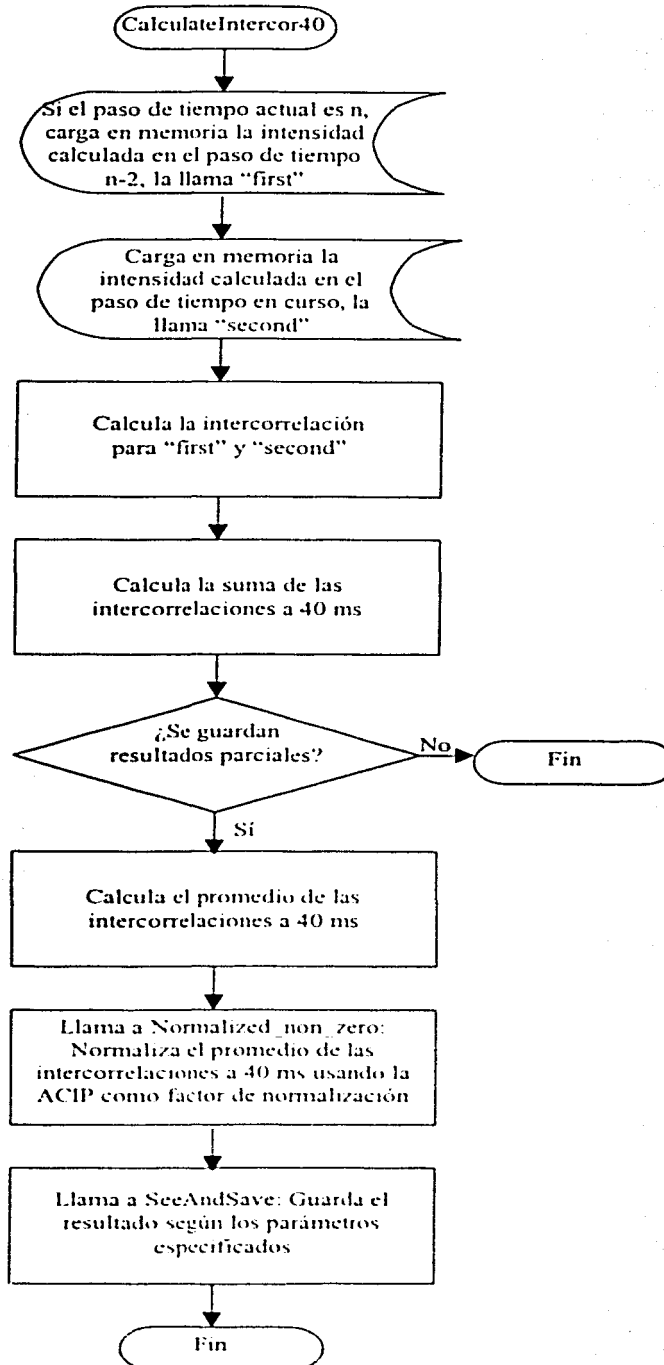
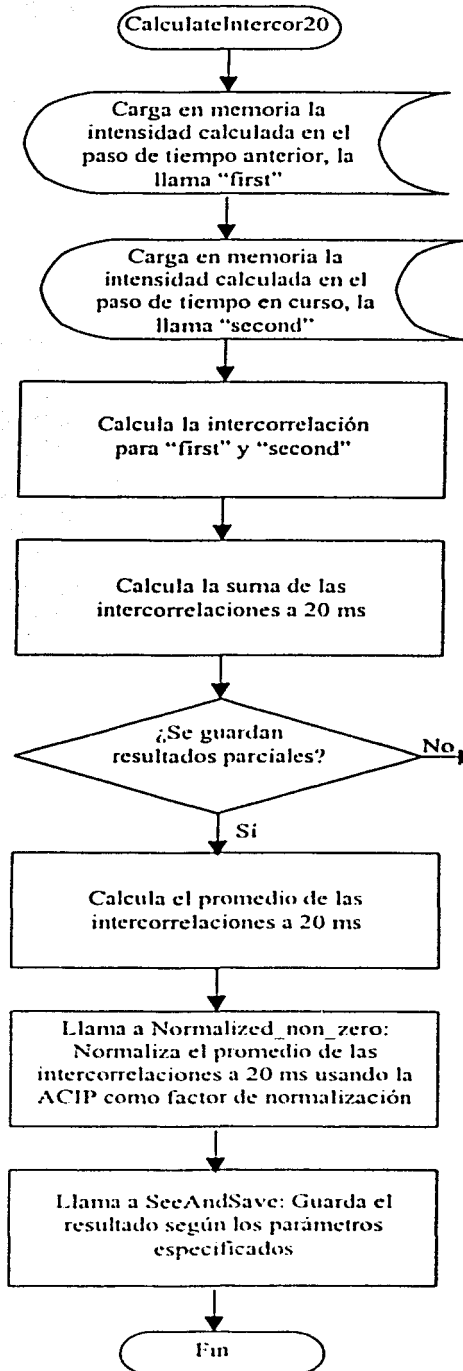


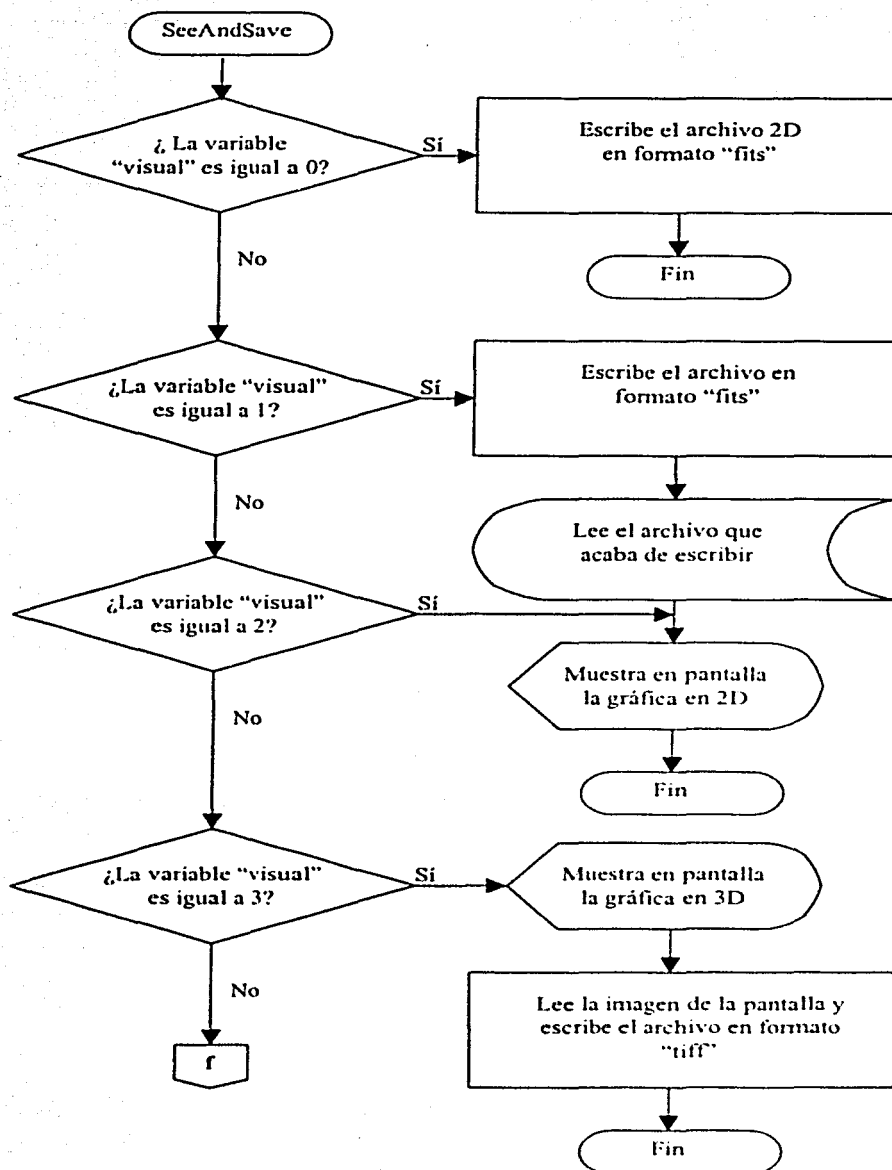


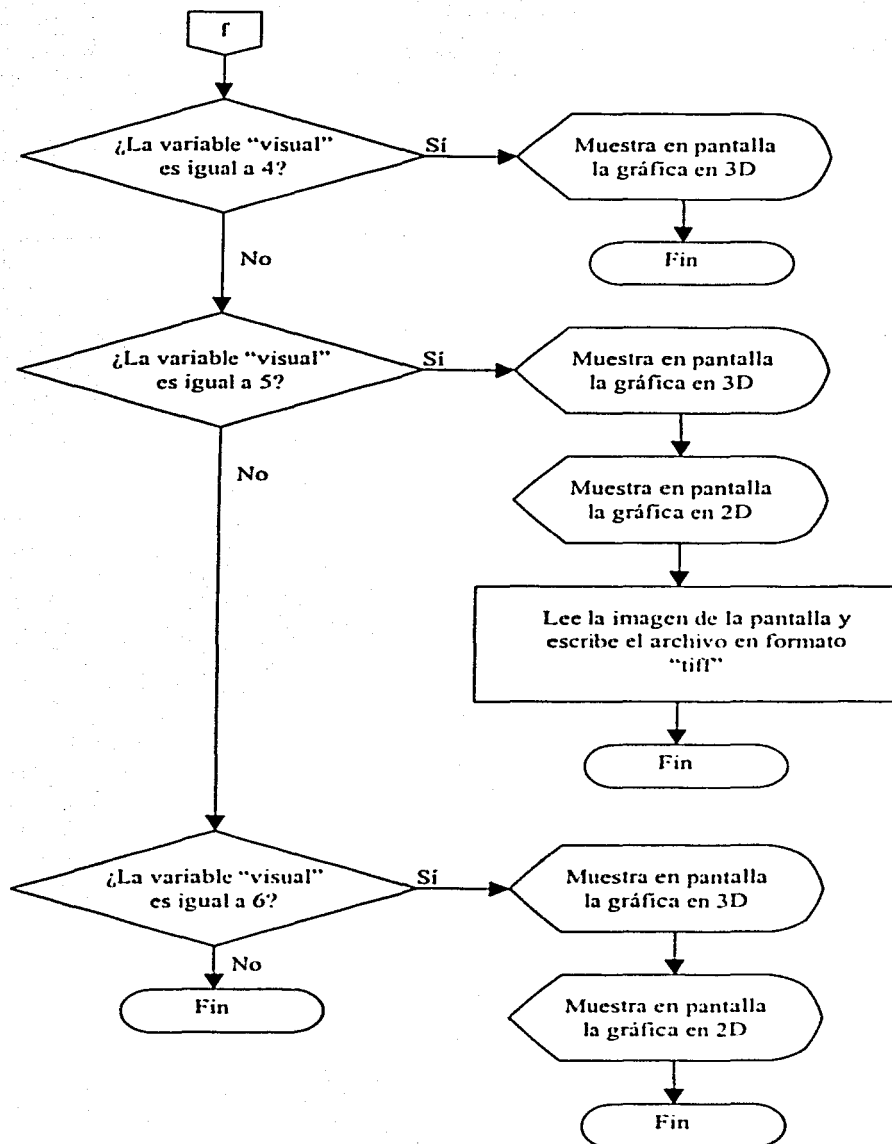
*Nota: "Normalized\_Non\_Zero" será utilizada más adelante por las subrutinas "NormAverAutocor", "CalculateIntercor20" y "CalculateIntercor40"*











## **Reducción de datos de perfiles de viento y turbulencia obtenidos con el SCIDAR generalizado en el OAN-SPM**

**Reporte de Servicio Social realizado en el Instituto de Astronomía de la UNAM, y dirigido por el Dr. Remy Ávila F. y el Dr. Leonardo Sánchez P.**

### **E.1. RESUMEN**

El presente constituye el trabajo de servicio social realizado en el Instituto de Astronomía de la UNAM en el año 2000. Se realiza la reducción de datos de perfiles de viento y turbulencia obtenidos con el SCIDAR generalizado en el Observatorio Astronómico Nacional de San Pedro Mártir (OAN-SPM) durante la campaña de 1997 mediante un algoritmo de análisis. Posteriormente se utilizan éstos resultados para obtener la caracterización gráfica del módulo y dirección del vector velocidad del viento para cada una de las capas turbulentas sobre el observatorio mediante la programación y uso de un software en IDL.

### **E.2. ANÁLISIS DE DATOS**

Los resultados obtenidos en San Pedro Mártir en 1997, fueron analizados mediante un programa en Fortran 90 desarrollado por Remy Ávila [3]. Se compararon perfiles de varianza del centelleo  $\sigma_I(h)$  (fig. E.1) calculado a partir del  $C_n(h, t)$ , con las imágenes de las intercorrelaciones espacio-temporales obtenidas con el SCIDAR Generalizado (fig. E.2) y el telescopio de 2.1 m del OAN-SPM y se caracterizó el vector velocidad del viento para las distintas capas turbulentas.

Se compara el perfil de  $\sigma_I(h)$  con la imagen de intercorrelación, la altura de la capa turbulenta es proporcional a la separación de los tripletes. El proceso de análisis consiste en marcar el punto central de algún triplete sobre la imagen de intercorrelación y alguno de sus extremos. El desplazamiento del punto central con respecto al origen determina el vector  $V$ , la separación entre cada punto lateral y su centro se utiliza para calcular la altura de la capa [4]. Una vez que se ha analizado un triplete el programa lo elimina de la imagen de intercorrelación (fig. E.3), el proceso continúa hasta que no sea identificable ningún triplete, entonces se procede a la siguiente adquisición. Así sucesivamente hasta agotar todos los archivos de la noche.

La figura (E.1) muestra un perfil de  $\sigma_1(h)$  correspondiente a la noche del 19 de abril, la estrella es 95 Herculis. Se destacan claramente tres capas a 2.8, 4 y 12.7 km respectivamente; la capa a 2.8 km se encuentra a la misma altura del observatorio [6] (2800 m) y le corresponde una velocidad nula. En casi todos los casos, al analizar los tripletes que a primera vista resultan evidentes aparecen otros más débiles que corresponden a otras capas de la atmósfera.

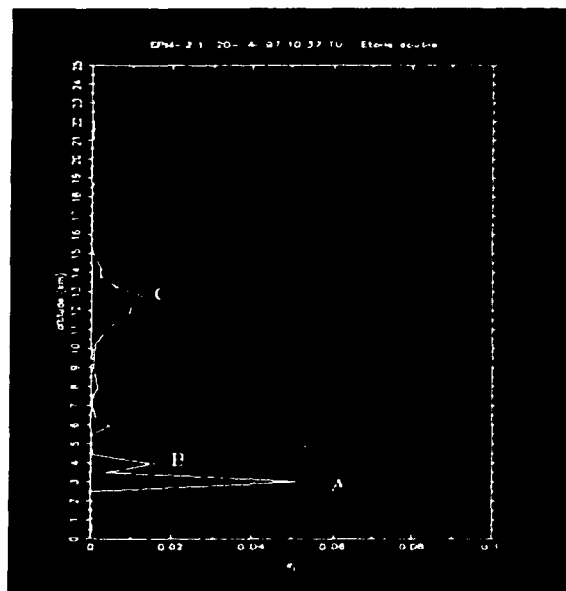


Figura E.1.

Ejemplo de perfil de  $\sigma_1^2(h)$   
Se destacan claramente tres capas a  
2.8, 4 y 12.7 km que corresponden a los  
tripletes que se observan en la Fig. E.2.

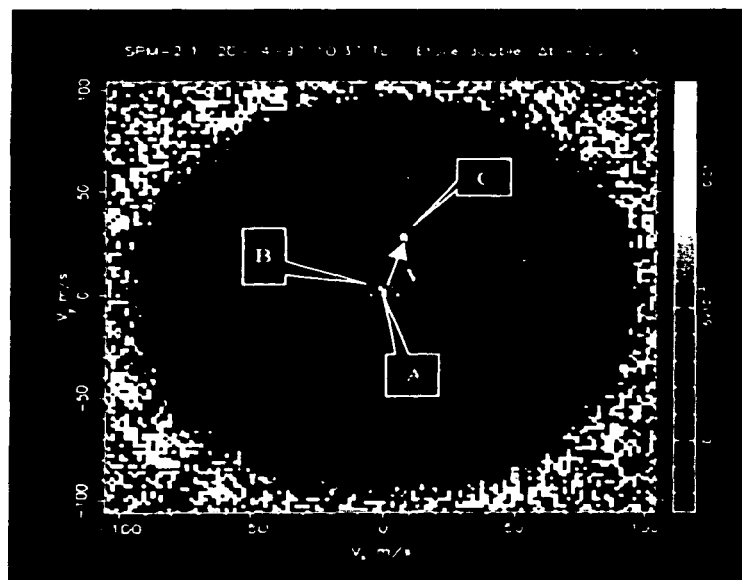


Figura E.2.

Ejemplo de imagen de  
intercorrelación a  $\Delta t = 20$  ms  
Estrella 95 Herculis  
Se observan tres tripletes  
A y B están muy próximos entre sí, a  
2.8 y 4 km respectivamente  
C está a 12.7 km  
Se ha dibujado el vector velocidad de  
la capa

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Las tres capas que se identificaron en el perfil de  $\sigma_t(h)$  de la Figura (E.1) corresponden a cada uno de los tres tripletes que se observan en la imagen de intercorrelación de la Figura (E.2). En éste caso el intervalo temporal de separación entre las imágenes del patrón de centelleo, con las que se calcula la intercorrelación, es de  $\Delta t=20$  ms. La capa con velocidad nula a la altura del observatorio corresponde al punto A y se encuentra en el origen del sistema de coordenadas, B corresponde a la capa a 4 km, muy próxima a la altura del observatorio, tiene una velocidad promedio de 6 m/s (Tabla E.1) y C es el triplete más alejado, que corresponde a la capa a 12.7 km, con una velocidad promedio de 26 m/s. Para este último triplete se ha dibujado la dirección de la velocidad del viento en esa capa.

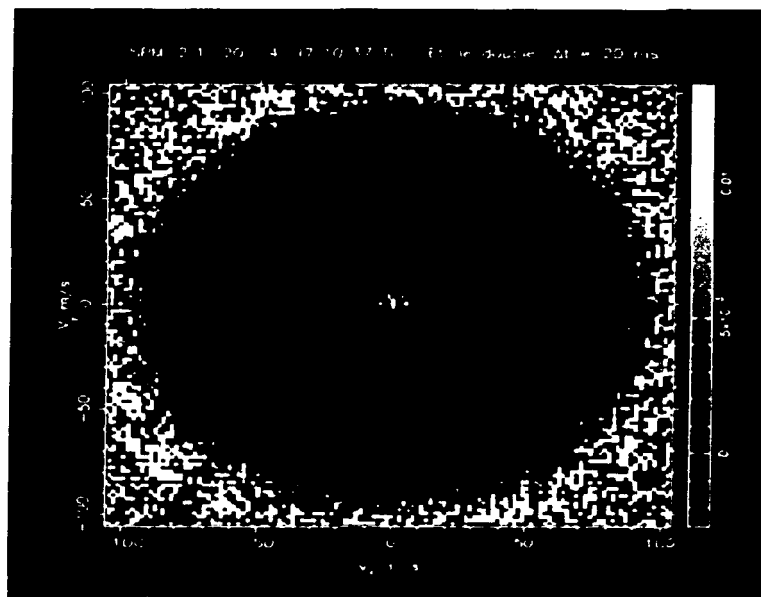


Figura E.3. Imagen de intercorrelación después del análisis del triplete a 12.7 Km. Aparecen otros dos tripletes menos definidos.

### E.3. INTERPRETACIÓN GRÁFICA

Se desarrolló un programa en IDL con el objetivo de interpretar gráficamente los resultados. El programa lee un archivo de texto en el que se ordenan por noche los archivos obtenidos con el programa en Fortran. Se hace una lectura de las componentes del vector velocidad, el ángulo de posición, la altura de la capa y el tiempo universal que corresponde a cada muestra. Con estos datos, el programa asigna un código de color a cada velocidad y a cada ángulo, entonces realiza una gráfica del módulo de la velocidad del viento en m/s y otra del ángulo de posición en grados, ambas en un sistema de referencia altura (en km) contra tiempo universal y local, de manera que se obtienen dos gráficas que comprenden la noche completa. La capa más baja que se observa en las gráficas corresponde al nivel del observatorio (2.8 km) y siempre tiene velocidad nula dentro del domo que cubre al telescopio; si aparece una capa a la misma altura del observatorio pero con

un vector velocidad no nulo, se ha detectado el seeing en el domo. Se distingue la altura de las distintas capas turbulentas para cada noche (Tabla E.1).

| NOCHE<br>(fecha de abril, 1997) | ALTURA DE LA CAPA<br>(en km) | VELOCIDAD<br>PROMEDIO<br>(en m/s) | ANGULO PROMEDIO<br>DE POSICIÓN<br>(en grados) |
|---------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------|
| 19                              | 4                            | 3                                 | 140                                           |
| 19                              | 7.5                          | 10                                | 130                                           |
| 19                              | 9.5                          | 15                                | 125                                           |
| 19                              | 12.7                         | 26                                | 80                                            |
| 19                              | 16                           | 24                                | 120                                           |
| 20                              | 3                            | 8                                 | 90                                            |
| 20                              | 8.1                          | 15.8                              | 100                                           |
| 20                              | 11.7                         | 16.9                              | 130                                           |
| 20                              | 13                           | 18.7                              | 150                                           |
| 20                              | 15.1                         | 15                                | 140                                           |
| 21                              | 3                            | 7                                 | 135                                           |
| 21                              | 4.8                          | 6                                 | 180                                           |
| 21                              | 11.5                         | 23                                | 170                                           |
| 21                              | 13.5                         | 16                                | 140                                           |
| 21                              | 16.5                         | 9                                 | 160                                           |

Tabla E.1: Capas turbulentas detectadas y sus correspondientes módulos del vector velocidad y ángulo de posición

En el eje vertical de las figuras (E.4) a (E.9) se grafica la altura de la capa en Km, mientras que en el eje horizontal se grafica el tiempo dado en horas, minutos y segundos. El eje horizontal inferior corresponde al horario universal, mientras que el superior corresponde a la hora local en el observatorio de San Pedro Mártir. En las figuras (E.4), (E.6) y (E.8), la escala de grises muestra el módulo del vector velocidad en  $\text{ms}^{-1}$ , y en las figuras (E.5), (E.7) y (E.9), la escala de grises representa el ángulo del vector velocidad del viento.

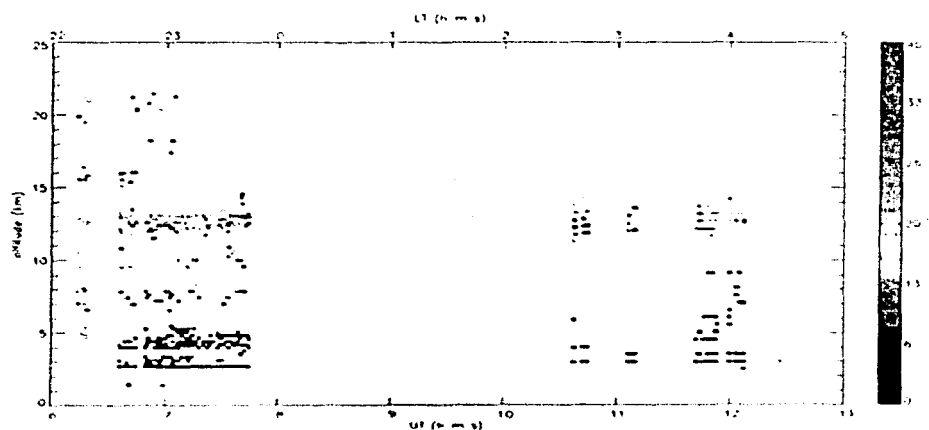


Figura E.4: Módulo del vector velocidad del viento. San Pedro Mártir, 19 de abril, 1997

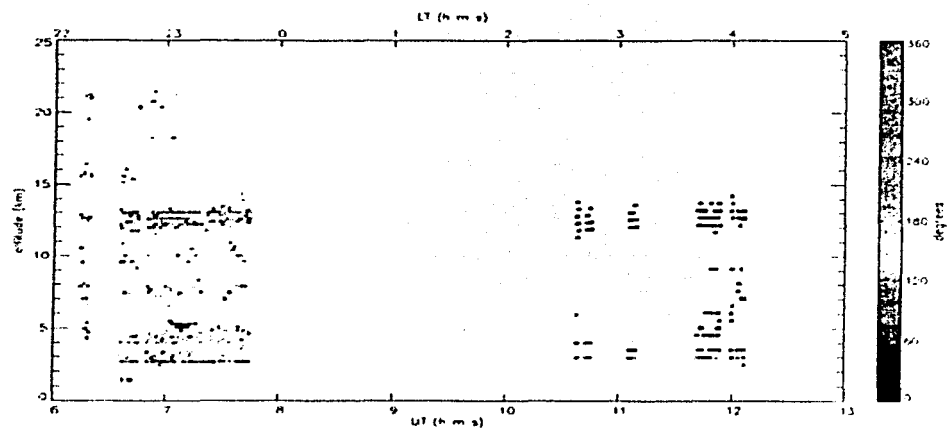


Figura E.5:  
Ángulo del vector  
velocidad del viento.  
San Pedro Mártir, 19 de  
abril, 1997.

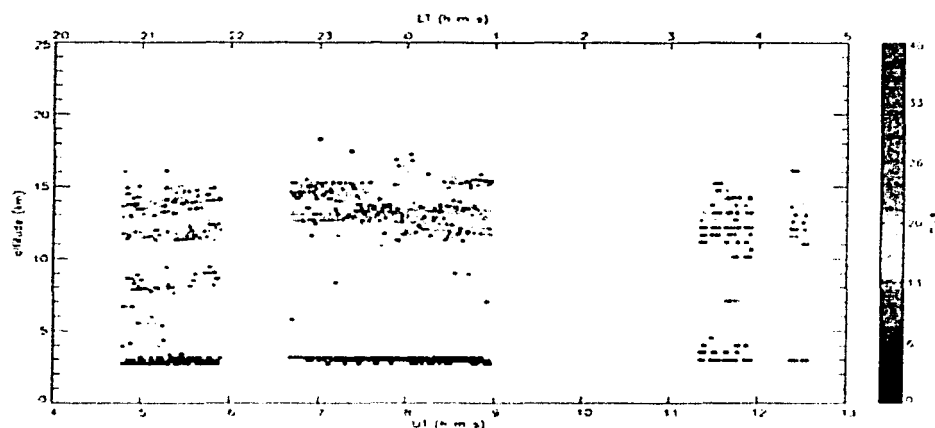


Figura E.6:  
Módulo del vector  
velocidad del viento.  
San Pedro Mártir, 20 de  
abril, 1997

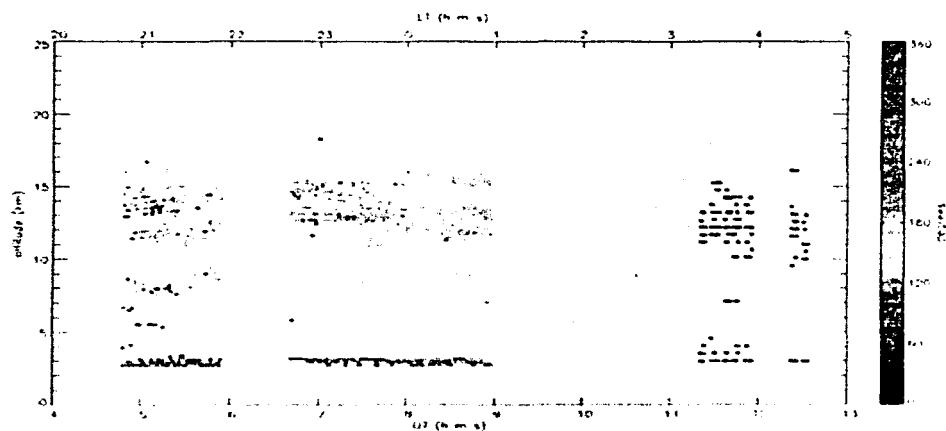


Figura E.7:  
Ángulo del vector  
velocidad del viento  
San Pedro Mártir, 20 de  
abril, 1997

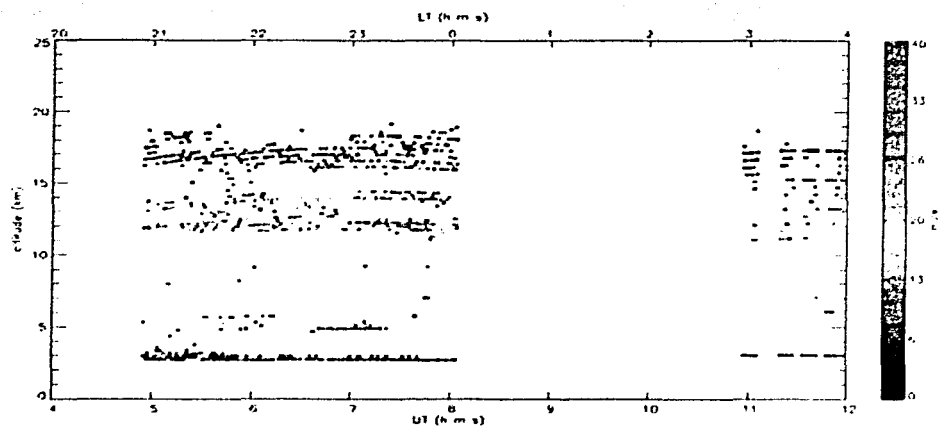


Figura E.8: Módulo del vector velocidad del viento. San Pedro Mártir, 21 de abril, 1997.

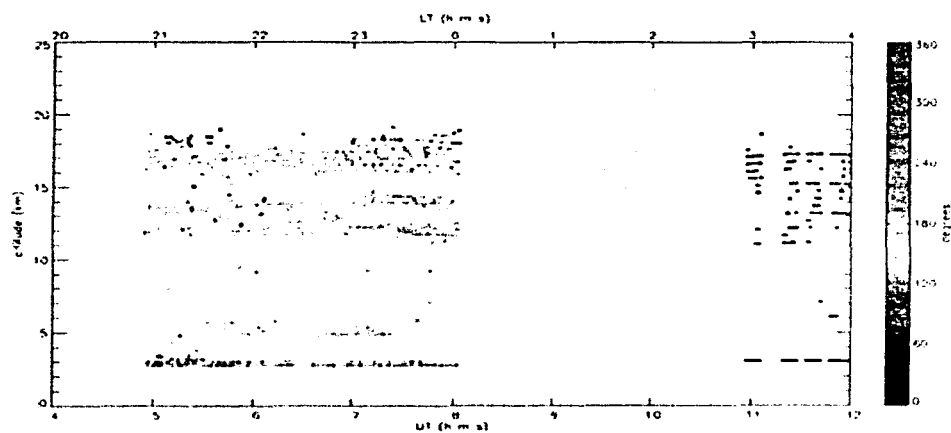
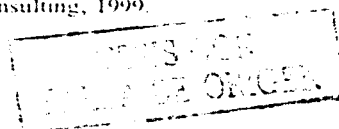


Figura E.9: Ángulo del vector velocidad del viento. San Pedro Mártir, 21 de abril, 1997

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Bibliografía

- [1] ADCOCK, M., Jones, N. *Simulated 3D wave propagation through turbulent media: Atmospheric Propagation Simulation*. <http://op.ph.ic.ac.uk/users/miles/sec/sec.html>
- [2] ANDREWS, L.C., R. L. Phillips, C. Y. Hopen, M. A. Al-Habash. *Theory of optical scintillation*. J. Opt. Soc. Am. A, v. 16, no. 6, 1417-1429, 1999.
- [3] AVILA, R., J. Vernin, L. J. Sánchez. *Atmospheric Turbulence and Wind Profiles Monitoring with Generalized SCIDAR: Methods and Tests*. Astron. Astrophys., no. 369, 364-372, 2001.
- [4] AVILA, R. *Caracterisation de la Turbulence Atmosphérique pour la Haute Résolution Angulaire en Astronomie: Mise en Œuvre et exploitation du Scidar Généralisé et du Grating Scale Monitor*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1998.
- [5] AVILA, R., J. Vernin, M. R. Chun, L. J. Sánchez. *Turbulence and Wind Profiling with Generalized SCIDAR at Cerro Pachón*. Proc. SPIE Conf. "Astronomical Telescopes and Instrumentation 2000", Munich, Germany, March 27-31, 2000.
- [6] AVILA, R., J. Vernin, S. Cuevas. *Turbulence profiles with generalized SCIDAR at San Pedro Mártir Observatory and isoplanatism studies*. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, no. 110, 1106-1116, 1998.
- [7] AVILA, R., J. Vernin, E. Masciadri. *Whole atmospheric-turbulence profiling with generalized SCIDAR*. Applied Optics, v. 36, no. 30, p.7898-7905, 1997.
- [8] BORN, M., E. Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge, Cambridge University Press, seventh edition, 1999.
- [9] BECKERS, J. M. *Adaptive optics for astronomy: Principles, Performance and Applications*. Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics, v. 31, 1993.
- [10] BERAN, M., J. Oz-Vogt. *Imaging Through Turbulence in the Atmosphere*. Chapter V in E. Wolf's Progress in Optics XXXIII, North Holland, 1994.
- [11] CACCIA, J. L. & J. Vernin. *Wind fluctuation measurements in the buoyancy range by stellar scintillation analysis*. J. Geoph. Res. 95, 13683, 1990.
- [12] COULMAN, C.E., J. Vernin, A. Fuchs. *Optical Seeing – Mechanism of Formation of Thin Turbulent Laminae in the Atmosphere*. Applied Optics, v. 34, no. 24, 5461-5473, 1995.
- [13] CUEVAS, S., A. Iriarte, F. Cobos, O. Harris, et al. *Sobre la Calidad Intrínseca de la Óptica del Telescopio de 2.1 m de SPM*. Reporte técnico del Instituto de Astronomía. Abril, 1996.
- [14] DEMAILLY, L. *L'optique Adaptative en Astronomie*. <http://www.demilly.com/~dl/inioa/node3.html>
- [15] DRAVINS, D., L. Lindegren, E. Mezey, A. T. Young. *Atmospheric Intensity Scintillation of Stars I: Statistical Distributions and Temporal Properties*. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, no. 109, 173-207, 1997.
- [16] FANNING, D.W. *Coyote's Guide to IDL Programming*. <http://www.dfanning.com>
- [17] FANNING, D.W. *IDL Programming Techniques*. Fanning Software Consulting, 1999.



- [18] FRIED, D.L. *Optical Resolution Through a Randomly Inhomogeneous Medium for Very Long and Very Short Exposures*. J. Opt. Soc. Am., v. 56, 1372-1379, 1996.
- [19] GOODMAN, J. W. *Statistical Optics*. New York, John Wiley & sons, 1985.
- [20] HECHT, E. *Optica*. Madrid, Addison Wesley, tercera edición, 2000.
- [21] HSU, H. *Análisis de Fourier*. México, Fondo Educativo Interamericano, 1973.
- [22] KLUCKERS, V.A., N.J. Wooder, T.W. Nicholls, M.J. Adcock, et al. *Profiling of Atmospheric Turbulence Strength and Velocity Using a Generalised SCIDAR Technique*. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 130, 141-155, 1998.
- [23] LABEYRIE, A. *Attainment of Diffraction Limited Resolution in Large Telescopes by Fourier Analysing Speckle Patterns in Star Images*. Astron. Astrophys. 6, 85-87, 1970.
- [24] LABEYRIE, A. *High-Resolution Techniques in Optical Astronomy*. Chapter II in E. Wolf's Progress in Optics XIV, North Holland, 1976.
- [25] LÉNA, P., F. Mignard, F. Lebrun. *Astrophysique: Méthodes Physiques de l'Observation*. Paris, éditions du CNRS, collection "Savoirs Actuels", deuxième édition, 1996.
- [26] MASCIADRI, E., J. Vernin, P. Bougeault. *3D Mapping of Optical Turbulence Using an Atmospheric Numerical Model I: A Useful Tool for the Ground-Based Astronomy*. Astron. Astrophys. Suppl., ser. 137, 185-202, 1999.
- [27] NICHOLS, T. *Astronomical Imaging Through Turbulence: An Overview*. <http://op.ph.ic.ac.uk/ao/overview.html>
- [28] PEREZ, J. P. *Optique Géométrique et Ondulatoire*. Paris, Masson, 1994.
- [29] RABBIA, Y. *Transformée de Fourier et Optique de Fourier*. Notes du cours de D.E.A., Imagerie et Sciences de l'Univers, Université de Nice, 1994.
- [30] ROCCA, A., F. Roddier & J. Vernin. *Detection of atmospheric turbulent layers by spatiotemporal and spatioangular correlation measurements of stellar-light scintillation*. J. Opt. Soc. Am. 64, 1000, 1974.
- [31] RODDIER, F. *A simple Low-Order Adaptive Optics System for Near-Infrared Applications*. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, no. 103, 131-149, 1991.
- [32] RODDIER, F. *The Effects of Atmospheric Turbulence in Optical Astronomy*. Chapter V in E. Wolf's Progress in Optics XIX, North Holland, 1981.
- [33] SALAS, L., L. Gutierrez, M. Pedrayes, J. Valdez, et al. *Performance of the Active M1-Cell for the 2.1-m Telescope of the Observatorio Astronómico Nacional de México*. SPIE v. 3352, 344-347, 1998.
- [34] SALAS, L., L. Gutierrez, M. Pedrayes, J. Valdez, et al. *Active Primary Mirror Support for the 2.1-m Telescope at the San Pedro Mártir Observatory*. Appl. Opt. 36, 3708-3716, 1997.
- [35] SANCHEZ, L. *Simulation Numérique de Fronts d'Onde et Correction Partielle par Optique Adaptive*. Rapport de Stage de D.E.A., Imagerie et Sciences de l'Univers, Université de Nice, 1992.
- [36] SCHROEDER, D. *Astronomical Optics*. San Diego, Academic Press, 2000.
- [37] THOMSON, I. *Adaptive Optics in Astronomy*. Physics Today, 24-31, dec. 1994.

- [38] VERNIN, J. *Turbulence Atmosphérique*. Techniques Astronomiques, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série II b, 103-108, 1997.
- [39] WEISS, R., S. Hippler, M. E. Kasper. *Simultaneous Measurements of the Fried Parameter  $r_0$  and the Isoplanatic Angle  $\theta_0$  Using SCIDAR and Adaptive Optics - First Results*. <http://www.mpia.de/ALFA/PAPERS/MarrakechlPaper.pdf>
- [40] WEISS, R. *The ALFA TurbuLenZ homepage*. <http://www.mpia-hd.mpg.de/ALFA/MENU/tlz.html>
- [41] WILSON, R. *Fourier Series and Optical Transform Techniques in Contemporary Optics, an Introduction*. New York, John Wiley & Sons, 1995.
- [42] WOODER, N. *SCIDAR and scintillation for vertical turbulence measurements*. <http://op.ph.ic.ac.uk/scidar/scidar.html>

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN