88

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

MODELOS DE RIESGO DE CREDITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

ANA BERTHA PALACIOS PAZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. PABLO PADILLA LONGORIA

2002

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

UNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Modelos de Riesgo de Crédito.

realizado por Palacios Paz Ana Bertha

con número de cuenta 9025873-0 , quién cubrió los créditos de la carrera de:
Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L.
Propietario	M.E. Rafael Enrique Gómez-Tagle Morales	
Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes	
Suplente	M. en C. José Antonio Flores Díaz	
Suplente	Act. Marisa Miranda Tirado	Marisa Miranda Tirado

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A ti, mi hermana, Angélica J.
sin ti esta tesis no sería lo que es y
yo no sería feliz por tenerte... Te amo.

A ti, Marco Antonio Martínez Campos que sin tu apoyo incondicional estariamos solas.

A ustedes Pablo Padilla, Rafael Gómez-Tagle, Beatriz, Miguel, David Salas y Mayra por apoyarme cuando más lo necesite.

A ti, Héctor Mendez Lango que fuiste un gran estimulo para acabar mi carrera.

Y a todos aquéllos que no estan mencionados, pero que fueron importantes para este trabajo.

Índice General

Agradecimientos.

Agradezco al *Dr. Pablo Padilla Longoria y M. en E. Rafael Enrique Gómez-Tagle Morales* por su paciencia y apoyo en el desarrollo de mi tesis.

A *Beatriz Cuevas Cuevas, Miguel Mejia Aguilar, David Salas y Mayra, Gerardo Juarez Flores, Cesar Eduardo Sousa, Violeta Arroyo Gutiérrez, Lucia Doval Montes* por todo su cariño y comprensión, por su compañía cuando más lo necesitaba y porque estuvieron conmigo en las buenas y en las malas. Sin ustedes hubiera sido más dificil mi estancia en la Universidad.

A mis padres, a mis hermanos que siempre estuvieron a mi lado y en mi mente.

A ti Baraquiel que fuiste un amigo cuando lo necesite.

A *Pilar Alonso Martínez* y a *José Antonio Flores* por su comprensión y apoyo en el transcurso de mi carrera.

Agradezco profundamente al Departamento de Matemáticas y Mecánica (IIMAS-UNAM), al apoyo computacional de *Ana Cecilia Arteaga*, al apoyo secretarial de *Alma* y *Lourdes.*

Agradezco el financiamiento otorgado por los proyectos CoNaCyT No.G25427-E, Matemáticas Nolineales en la Física y la Ingeniería.

Introducción

Este trabajo revisa el riesgo de crédito desde el punto de vista clásico aunque para el mercado actual es insuficiente. Se estudian los modelos actuales para el cálculo de riesgo de crédito como la metodología estructural y de contingencia.

En el primer capitulo se expone el funcionamiento de los más importantes productos derivados tales como: *forward*, futuros, opciones, *swaps* y contratos garantizados (*warrants*). Con lo antes mencionado se explica el porqué el riesgo de crédito se ha empezado a cálcular con otros métodos.

En el segundo capitulo se mencionan las principales herramientas para el desarrollo de este trabajo, entre ellas se encuentran el movimiento browniano, la ecuación de Black-Scholes (usando para resolverla algunos conocimientos de ecuaciones diferenciales), además del proceso Poisson. Para poder calcular el riesgo de cédito con base al modelo de Merton y de Jarrow-Turnbull es necesario estudiar las matrices de transición de acuerdo a una compañía calificadora (Moody's) y a un banco latinoamericano, también las tasas de recuperación desde un enfoque estadístico.

En el tercer capitulo se explica a fondo el modelo de Merton y Jarrow-Turnbull, se hacen ejemplos para una comparación de los resultados que arrojan sus respectivos modelos. También se hace un breve estudio en las matrices de transición con base a los datos de un banco latinoamericano.

En el cuarto capitulo se ve el riesgo de crédito enfocado a la concentración bancaria de un portafolio de deuda, tanto en uno como en varios sectores. Se realizan dos estudios, el primero considera que las empresas no tienen relación alguna, el segundo caso considera la correlación existente entre los sectores, además de que su análisis es trasladado al caso univariado, es decir, una manera mas sencilla de realizar los cálculos.

El tercer y cuarto capitulo tienen sus conclusiones correspondientes.

Capítulo 1

Dinámica de mercados y riesgo de crédito.

Los mercados de derivados son muy importantes en las finanzas del mundo entero. Sin embargo el riesgo de incumplimiento y, en particular, el riesgo de crédito es un factor que había sido prácticamente ignorado hasta hasta hace relativamente poco. El efecto del riesgo de crédito (riesgo de incumplimiento en créditos) no se había tomado en cuenta sistemáticamente. En la actualidad este tipo de riesgo toma una importancia fundamental en el mercado, lo que hace necesario calcularlo adecuadamente para evitar pérdidas severas. La importancia en modelarlo se debe a que se podrá tener más confianza al invertir y habrá una estimación más cercana a la realidad de lo que se puede perder. En el primer capítulo se exponen las características principales de los productos derivados más usados. Además, se discute el concepto de riesgo de crédito, sus aplicaciones y algunos de los modelos que se usan para calcularlo. Este material se basa principalmente en los siguientes de John C. Hull[1], Manuel Ammann[3] y de L. C. G. Rogers.[8]

1.1 Mercado de derivados

Los productos derivados son un conjunto de instrumentos financieros cuya principal característica es que están vinculados a un valor subyacente o de referencia. Los principales productos derivados son los *forwards* (contratos adelantados), futuros, opciones, opciones sobre futuros, además de los *warrants* y los *swaps*.

1.1.1 Contratos adelantados (*Forwards*)

Son acuerdos de compra-venta de un bien subyacente que es entregado en una fecha futura, a un determinado precio. Estos acuerdos son realizados en el mercado fuera de mostrador (*over the counter market*), en estos no existen autoridades ni leyes específicas que regulen las transacciones; son entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y un cliente corporativo. Por esta razón no están sujetos a las compensaciones por diferencias diarias (*mark to market*).

El contrato forward implica dos posiciones.

Posición larga: es la que adquiere la persona[1] que compra el *forward*, es decir, decide tomar una posición larga en la fecha de vencimiento.

Posición corta: es la que adquiere la persona que vender el *forward* en la fecha pactada y a un precio prestablecido.

Los términos que se manejan en el contrato son:

1. *Precio* forward: es el precio que se paga por adquirir el bien subyacente. Es el valor presente del precio del bien subyacente en la fecha de entrega. Cambia día con día.
2. *Precio de entrega*: es el precio que se pacta en el contrato para pagar en la fecha de entrega del bien subyacente. Este precio es el mismo que el precio *forward* al inicio del contrato. Después se mantiene durante toda la vigencia del contrato.
3. *Fecha de entrega*: es la fecha de vencimiento del contrato y la entrega del bien subyacente; es un día específico.
4. *Precio del contrato*: es cero para ambas partes, no lleva ningún costo adicional el adquirir cualquier posición de las ya especificadas.
5. *Precio* spot: es el precio del bien subyacente en el mercado para su compra-venta inmediata.

Ejemplo.

El 5 de abril de un año X una compañía sabe que en tres meses (5 de julio) le llegará un millón de libras esterlinas, se toma la decisión de contratar un *forward*

[1] Persona moral o física

al banco con fecha de entrega al 5 de julio, su precio *forward* y precio de entrega es de $1.6 millones (la tasa de cambio a tres meses se encuentra en $1.600 por libra). En este caso la compañía tiene la posición corta con respecto al bien subyacente y el banco la larga. Con respecto a la compra de *forwards* la compañía tiene la posición larga y el banco la corta. El costo de la transacción es cero como se había definido en el precio del contrato.

Ganancias (Payoffs)

Las ganancias por unidad del bien subyacente están dadas en términos de las posiciones antes mencionadas.

Posición larga: $S_T - K$ Posición corta: $K - S_T$

donde:

S_T: es el precio del bien subyacente al tiempo T. K: es el precio de entrega.

Los contratos forward sobre productos financieros se dividen en tres modalidades:

a. Instrumentos que no generan utilidades.

b. Instrumentos que generan utilidades o rendimientos fijos.

c. Instrumentos que generan utilidades que se reinvierten.

En la actualidad se tienen *forwards* sobre divisas que representan un instrumento que genera utilidades y se reinvierten continuamente.

Hay algunos mercados *forwards* de mercancías cuyas negociaciones se realizan bajo la vigilancia de autoridades o intermediarios competentes. Tal es el caso de ciertas bolsas de productos agropecuarios y materias primas que operan en algunos países de Latinoamérica, Europa y Asia. La finalidad general de esos mercados es realizar una compra-venta física de los productos a futuro. La mayoría de estas transacciones están respaldadas por el producto depositado en bodegas o almacenes especiales, o bien con base en cosechas o producciones futuras. Con este tipo de mercados los gobiernos pretenden regular el abasto y ayudar a los trabajadores a comercializar sus productos.[7]

1.1.2 Futuros

Este mercado nace con la finalidad de que todas las operaciones se celebren dentro de un lugar establecido, vigilado por autoridades competentes y a través de contratos estándarizados para proveer un mecanismo de garantía de la solvencia del contrato.

El contrato de futuro es un arreglo entre dos partes para comprar y vender un activo subyacente en una fecha futura a un precio predeterminado.

Usualmente en estos contratos en la fecha de vencimiento hay un intercambio del bien subyacente, aunque se puede especificar que se desea el pago por diferencias, es decir, se paga la resta del precio pactado y el precio del bien subyacente en la fecha de entrega, no hay la necesidad de tener contacto con el bien.

Entre los más importantes mercados de futuros (intercambio) está la CBOT(Chicago Board of Trade) y el CME(Chicago Mercantile Exchange) en los cuales se comercian contratos de azúcar, aluminio, oro, ganado vacuno vivo, madera, cobre, estaño y activos financieros.

Breve historia

En un principio sólo se manejaban futuros sobre mercancías. La bolsa de Chicago Board of Trade (CBOT) inició sus contratos de futuros durante la década de los sesenta. La bolsa Chicago Mercantile Exchange se formó en 1974 y sus principales transacciones fueron los productos perecederos. El mercado sobre productos financieros se inició con el establecimiento del International Monetary Market (IMM) que se dedicó a operar futuros sobre divisas. En México, a partir del 15 de diciembre de 1998 se inician las operaciones del Mercado Mexicano de Derivados (MexDer) con el propósito de incorporar a los participantes nacionales en la creciente industria global de derivados, especialmente los vinculados con valores subyacentes mexicanos. En este momento se cotizan futuros sobre activos subyacentes como: índices, tasas, monedas extranjeras y todo tipo de acciones.

En la actualidad los futuros dejaron de ser simples especulaciones académicas convirtiéndose en mercados de grandes proporciones y liquidez.

Características

En los futuros se mantienen las dos posiciones del contrato *forward*, **(posición corta y posición larga)**, con las mismas características. En este contrato se manejan los siguientes términos[2]:

> *Activo*: es el bien subyacente que se desea comerciar. En contratos largos con activos financieros se especifica una fórmula para ajustar el precio recibido acorde al talón y a la fecha de ven-

cimiento. Cuando son mercancías se especifica la calidad y si hay alguna variación en ésta a la fecha de entrega se establece la forma para ajustar el precio.

Cantidad del activo: especifica el total del activo subyacente que respalda el contrato.

Lugar de entrega del activo: se especifica dónde se entrega el bien, el costo se incluye en el precio del activo cuando es necesario el transporte del bien subyacente.

*Fecha de vencimiento o entrega (*delivery month*)*: es el periodo definido por el día de inicio y fin, en el cual se entrega el activo. En algunas ocasiones puede ser todo un mes.

Costo del contrato: como en el caso de *forwards*, no hay ningún costo adicional al precio del bien.

Límites de la variación del precio diario: se estipula un límite superior e inferior en el cual varía el precio del activo; surge como protección de los efectos de las actividades de los especuladores en el mercado.

Límites en la posición adoptada: hay un límite en el número de contratos que se pueden comprar o vender.

Depósito de garantía (margen inicial) y depósitos mínimos de garantía (margen de mantenimiento): se exige una cantidad mínima que avale la liquidez del contrato (margen inicial), después se fija una cantidad de la que no se puede bajar (margen de mantenimiento). Estos dan seguridad a los inversionistas porque disminuye el riesgo de incumplimiento. Además con esto se logra la estandarización de los contratos en cualquier momento y se tiene que durante toda la vigencia del contrato el precio de éste sea siempre cero. Se exige una cantidad mínima que avale la liquidez del contrato (margen inicial), después se fija una cantidad de la que no se puede bajar (margen de mantenimiento).

Ejemplos de lectura de reportes de futuros.

En la figura 1.1 se muestra el reporte de la bolsa New York Board of Trade de la cocoa; el día 12 de julio del 2001. Los reportes publicados siempre se refieren al día anterior. (en este caso el día analizado es el 11 de Julio del 2001).

ANOTHER DATE FOR COCOA	ANOTHER FUTURE FOR 07/12/2001	OPTION FOR COCOA	MAIN PAGE

New York Board of Trade

COCOA (CC)

Thursday, July 12, 2001

FOUR WORLD TRADE CENTER, NEW YORK, NEW YORK 10048
TEL. - (212)742-6100 FAX - (212)742-5026

CONTRACT SIZE: 10 metric tons

CONTRACT	DAILY PRICE RANGE				SETTLE		TOTALS AS OF 7/11/01				CONTRACT	
MONTH	OPEN	HIGH	LOW	CLOSE	PRICE	CHANGE	VOLUME	OI	CHANGE	EFP's	HIGH	LOW
Jul 2001	916 0	916	887	881 0	881	-21	9	45	-131	0	1245	753
Sep 2001	914 916	916	879	899 902	901	-21	2719	25840	-38	71	1246	776
Dec 2001	908 0	909	883	895 897	896	-19	680	20124	+44	0	1237	805
Mar 2002	910 912	910	882	896 0	896	-18	442	16157	-104	0	1257	835
May 2002	920 928	918	901	912 0	912	-17	2	6453	-49	0	1267	835
Jul 2002	933 942	937	920	928 0	928	-16	10	6384	0	0	1242	875
Sep 2002	955 0	955	938	943 0	943	-15	5	6820	0	0	1186	907
Dec 2002	975 983	970	963	970 0	970	-14	0	10910	0	0	1264	936
Mar 2003	0 0	0	0	985 0	985	-13	110	9105	+35	0	1195	1008
May 2003	0 0	0	0	999 0	999	-15	0	1550	0	0	0	0
Totals							3971	103828	-243	71		

NOTE: The information contained in this report is compiled for the convenience of subscribers and is furnished without responsibility for accuracy and is accepted by the subscriber on the condition that errors or omissions shall not be made the basis for any claim, demand or cause of action.

ANOTHER DATE FOR COCOA	ANOTHER FUTURE FOR 07/12/2001	OPTION FOR COCOA	MAIN PAGE

Figura 1.1: Futuros sobre la cocoa.

Se describen a continuación las columnas de mayor interés para conocer los datos más importantes concernientes a los futuros.

1) La cantidad del activo: 10 toneladas.

2) La primera columna, *contract*: son las fechas de vencimiento de los contratos que se pactaron ese día: Julio 2001, Septiembre 2001, Diciembre 2001, Marzo 2002, Mayo 2002, Julio 2002, Septiembre 2002, Diciembre 2002, Marzo 2003

y Mayo 2003.

3) La columna *daily price range*: contiene los rangos del precio del día 11 de julio del 2001. Lo que sigue es la descripción de *open*, *high*, *low* y *close*.

   a) *open*: es el precio con el que se inician las operaciones ese día. Se tienen dos precios de acuerdo a las posturas: compra o venta.

      El 11 de julio se inició con los precios de compra en 910 y en la postura de venta en 912 por tonelada, para contratos de futuro con vigencia a marzo 2002.

   b) *contract high*: es el precio más alto de ese día en que se cotizó el contrato del futuro con la vigencia que se señala. Cuando aparece cero indica que en ese día no se realizaron operaciones.

      El precio más alto durante el día en los futuros a marzo 2002 es de 910 por tonelada.

   c) *contract low*: es el precio más bajo en que se cotizó ese día el contrato con determinada fecha de expiración. Cuando aparece cero indica que en ese día no se realizaron operaciones para ambas posturas.

      El precio más bajo durante el día en los futuros con expiración a marzo 2002 fue de 882 por tonelada.

   d) *close*: es el precio del cierre de operaciones de ese día y a diferente fecha de vencimiento. Se tienen dos posturas: compra y venta. Cuando no se realizan operaciones en el día, se dan los precios de cierre del día anterior.

      Al cierre de la bolsa el precio del futuro en la postura de compra para marzo 2002 fue de 896 por tonelada. No se tuvo precio en la postura de venta.

4) La columna *settle*: ésta contiene *price* y *change*

   a) *price*: es el promedio de los precios de cierre en el que estuvieron los contratos de futuros por fecha de vencimiento.

      El promedio del precio de cierre para marzo del 2002 estuvo en 896 por tonelada.

   b) *change*: es el cambio que hubo entre el promedio del precio del día evaluado y el anterior.

      En comparación con el día anterior, el promedio bajó 18 por tonelada.

5) La columna *totals as of 7/11/01*: son los datos de cantidad total de futuros de ese día. Se tienen las columnas: *volume,OI (open interest)* y *change*.

a) *volume*: es el volumen estimado de transacciones de contratos con la fecha de vencimiento por cada renglón.

   Para marzo 2002 se tienen 442 contratos para esa fecha de vencimiento.

b) *OI(open interest)*: es la suma de los contratos de las posiciones largas o cortas con esa vigencia.

   El OI para marzo 2002 es de 16197 contratos.

c) *change*: es el cambio entre el OI del día anterior y el evaluado.

   Entre el 10 y 11 de mayo del 2001 hubo un cambio de -104 contratos con vigencia a marzo 2002.

6) Al final (en el último renglón) se presentan los totales de volumen (total de contratos), OI (el total de todas las posiciones largas o cortas) y el cambio en las posiciones con respecto al día anterior. Esta información contempla todas las fechas de expiración.

En las figuras 1.2 y 1.3 se muestran otros ejemplos de reporte de contratos de futuros, la lectura es similar a la antes expuesta.

1.1.3 Cámara de compensación

Un contrato de futuro existe en el momento en que dos corredores se ponen de acuerdo en el precio de un producto; uno para comprar, otro para vender. Una vez que ambas partes realizan la operación, la cámara de compensación rompe esa relación entre los dos y ambos tienen la posidad de mantener el contrato y cumplir sus obligaciones en forma independiente.

Todas las bolsas se encuentran afiliadas a una cámara de compensación que puede estar integrada o ser independiente. Todos los corredores tienen que reportar sus negocios a través de la cámara de compensación, para eso es necesario ser miembro o hacerlo por medio de uno. Los miembros son personas físicas o morales que tienen solidez y solvencia financiera.

La cámara de compensación es el corazón de las bolsas y su función es el llevar el registro de todas las operaciones que se efectúan diariamente en el mercado de futuros. Calcula las posiciones totales de cada uno de sus miembros, asegurándose de que cada uno de ellos cuente con la solvencia financiera necesaria para que siga realizando operaciones y pueda responder a las obligaciones que se le requieran.

La cámara de compensación funciona de la siguiente manera: al efectuarse una operación, adopta el papel de comprador ante cada vendedor y viceversa. De esta manera da mayor seguridad a los participantes sobre sus operaciones y permite

ANOTHER DATE FOR Euro - Canadian Dollar	ANOTHER FUTURE FOR 07/12/2001	OPTION FOR Euro - Canadian Dollar	MAIN PAGE

New York Board of Trade

Euro – Canadian Dollar (EP)

Thursday, July 12, 2001

FOUR WORLD TRADE CENTER, NEW YORK, NEW YORK 10048
TEL. - (212)742-6100 FAX - (212)742-5026

CONTRACT SIZE: 100,000 Euro

CONTRACT	DAILY PRICE RANGE						SETTLE		TOTALS AS OF 7/11/01				CONTRACT	
MONTH	OPEN		HIGH	LOW	CLOSE		PRICE	CHANGE	VOLUME	OI	CHANGE	EFP's	HIGH	LOW
Sep 2001	13077	13083	0	0	13033	13039	13036	-58	28	1255	+14	14	13066	13066
Dec 2001	13074	13080	0	0	13030	13036	13033	-59	0	0	0	0	0	0
Mar 2002	13082	13088	0	0	13038	13044	13041	-59	0	0	0	0	0	0
Jun 2002	13097	13103	0	0	13054	13060	13057	-59	0	0	0	0	0	0
Totals									28	1255	+14	14		

NOTE: The information contained in this report is compiled for the convenience of subscribers and is furnished without responsibility for accuracy and is accepted by the subscriber on the condition that errors or omissions shall not be made the basis for any claim, demand or cause of action.

ANOTHER DATE FOR Euro - Canadian Dollar	ANOTHER FUTURE FOR 07/12/2001	OPTION FOR Euro - Canadian Dollar	MAIN PAGE

Figura 1.2: Futuros sobre el dolar euro-canadiense.

liquidar sus posiciones en el momento en que cada parte lo desee, esto quiere decir que la cámara funge como intermediario.[7] En la cámara la suma total de contratos siempre es cero ya que siempre hay un comprador para cada vendedor.[1]

La cámara de compensación exige a sus miembros un depósito llamado margen inicial que asegure el pago de la deuda en las operaciones realizadas, al final de cada día ese margen es ajustado para reflejar la pérdida o ganancia del inversionista (pasa a ser llamado margen a cuenta). Para esto utiliza el precio del cierre del día y los precios a los que han sido adquiridas las posiciones que se mantienen abiertas al final de la jornada.

Cuando hay ganancia el cliente puede retirar el excedente hasta el valor del margen inicial. Cuando hay pérdida y el margen a cuenta cae por debajo del valor del margen inicial (aproximadamente el 15%) se hace una llamada de margen, es decir, se pide un depósito por la cantidad que es necesaria para reponer el depósito inicial.

The Chicago Board of Trade
The World's Leading Futures Exchange

July 13, 2001 04:10 PM CDT – Open Outcry

Corn

	01Sep	01Nov	01Dec	02Jan	02Mar	02May	02Jul	02Sep
Opening	2300 2294 9:32 am	2374 9:49 am	2430 2420 9:31 am		2510 2514 9:31 am	2560 2540 9:36 am	2604 9:34 am	2524 10:06 am
High	2310 9:35 am	2374 9:48 am	2430 9:30 am		2526 9:35 am	2560 9:35 am	2626 9:36 am	2524 10:06 am
Low	2230 1:23 pm	2314 1:23 pm	2350 1:15 pm		2456 1:26 pm	2494 1:25 pm	2514 1:25 pm	2520 10:08 am
Close1	2254	2314	2388	2400	2456	2504	2540	2520
Close2	2230	2324	2350		2470	2494	2514	
Close-Time	1:23 pm	1:23 pm	1:24 pm	1:24 pm	1:26 pm	1:25 pm	1:25 pm	1:25 pm
Settle	2242	2320	2364	2400	2464	2500	2526	2520
Net Chg	-100	-94	-94	-94	-92	-96	-130	-84
Prv Setl	2342	2414	2460	2494	2556	2596	2656	2604
High Limits	2442	2520	2564	2600	2664	2700	2726	2720
Low Limits	2042	2120	2164	2200	2264	2300	2326	2320
	01Sep	01Nov	01Dec	02Jan	02Mar	02May	02Jul	02Sep

	02Dec	03Jul	03Dec
Opening	2584 9:35 am		2580 11:22 am
High	2600 9:37 am		2624 1:26 pm
Low	2520 10:57 am		2580 11:22 am
Close1	2530	2614	2624
Close2	2520		
Close-Time	1:25 pm	1:26 pm	1:26 pm
Settle	2524	2614	2624
Net Chg	-96	-84	-44
Prv Setl	2622	2700	2670
High Limits	2724	2814	2824
Low Limits	2324	2414	2424
	02Dec	03Jul	03Dec

Figura 1.3: Futuro sobre maíz.

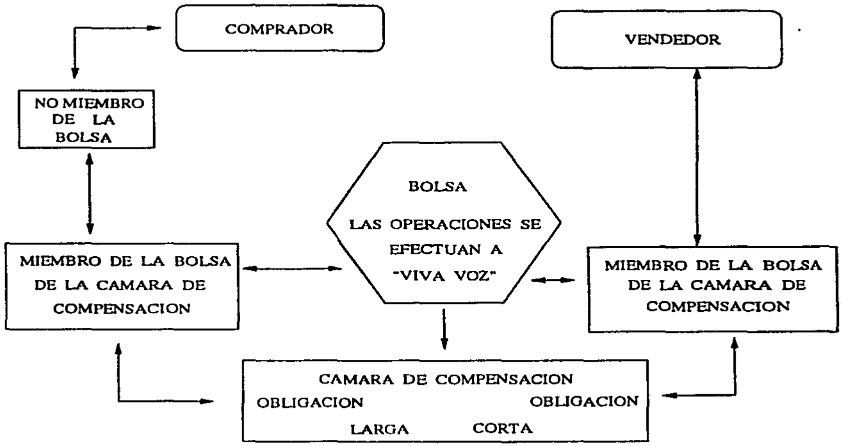


Figura 1.4: Cámara de compensación.

La cámara de compensación recibe una comisión por cada contrato que realiza. Además establece un límite respecto al número máximo de contratos que un miembro puede reportar, o bien, impone una cantidad mayor de margen inicial si se excede en el número de contratos que se reporten. Esto con el fin de que todos los miembros cuenten con la suficiente capacidad financiera.

Otra función que tiene la cámara de compensación es la de efectuar auditorías periódicas a todos sus miembros.

Ejemplo de operaciones de márgenes.

La transacción es un futuro sobre el oro con vigencia del 3 de junio al 24 de junio, el precio por onza es de \$400, la cantidad avalada es 100 onzas por contrato. El inversionista desea dos contratos y le exigen de *margen inicial* \$2,000 por contrato, es decir \$4,000 en total. El valor para el *mantenimiento del margen* es de \$1,500 por contrato, es decir, \$3,000 por los dos contratos.

En la figura 1.5 se observa el reporte de las operaciones de márgenes, en éste se

OPERACION DE MARGENES PARA UNA POSICION EN DOS CONTRATOS DE FUTUROS SOBRE ONZAS DE ORO.					
Day	Futures Price	Daily Gain (Loss)	Cumulative Gain (Loss)	Margin Account Balance	Margin Call
	400			4,000	
Junio 3	397.00	(600)	(600)	3,400	
Junio 4	396.10	(180)	(780)	3,200	
Junio 5	398.20	420	(360)	3,600	
Junio 6	397.10	(220)	(580)	3,420	
Junio 7	396.70	(80)	(660)	3,340	
Junio 10	397.40	(260)	(9200)	3,080	
Junio 11	393.30	(420)	(1,340)	2,660	1,340
Junio 12	393.60	60	(1,280)	4,060	
Junio 13	391.80	(360)	(1,640)	3,700	
Junio 14	392.70	180	(1,460)	3,880	
Junio 17	387.00	(1,140)	(2,600)	2,740	1,260
Junio 18	387.00	0	(2,600)	4,000	
Junio 19	388.10	220	(2,380)	4,220	
Junio 20	388.70	120	(2,260)	4,340	
Junio 21	391.00	460	(1,800)	4,800	
Junio 24	392.30	260	(1,540)	5,060	

Figura 1.5: Operación de márgenes.

tienen seis columnas que se describen a continuación:

Day **(Días):** son todos los días de la vigencia del contrato, excepto sábados y domingos.

Futures Price **(precio del futuro):** son los precios diarios del futuro sobre la onza de oro. Esto ayuda a tener una actualización del contrato.

Daily Gain (Loss) **[Ganancia (pérdida) diaria]:** son las ganancias diarias que se tienen por las diferencias entre el día evaluado y el día anterior multiplicado por el total del bien subyacente de los contratos (en este caso son 200 onzas). Si la cantidad es negativa se pone entre paréntesis. Ejemplo: el 3 de junio el precio es de \$397 y el anterior es de \$400, entonces la ganancia unitaria es: 397-400=-3. La transacción es de 200 onzas (dos contratos de 100 cada uno), entonces la ganancia total es de: -3x200=-600=(600)

Cumulative Gain(Loss) **[ganancia (pérdida) acumulada]:** es la ganancia o pérdida acumulada hasta el día evaluado. Ejemplo: desde el inicio del contrato hasta el día 6 de junio se tiene una pérdida de \$580.

***Margin Account Balance* (balance del margen a cuenta):** es el control del margen inicial. Se restan las pérdidas o se suman las ganancias obtenidas por el comportamiento del mercado diario. Ejemplo: se tiene un margen de $3,080 el día 10 de junio, pero el 11 de junio se pierden $420 entonces el margen queda en: $3080-$420=$2660.

***Margin Call Balance* balance de la llamada de margen:** con esta columna es posible darse cuenta del momento necesario para la llamada de margen, la cual sucede cuando el balance del margen cae por debajo del valor del mantenimiento de margen (en este caso es de $3,000), cuando se hace el llamado se tiene que depositar la cantidad faltante para tener en el balance el margen inicial. Ejemplo: El 11 de junio se observa que el balance del margen está en $2660, que está por debajo de los $3,000, así que se hace un llamado de margen de $1,340 para completar el margen inicial que es de $4,000.

1.1.4 Opciones

La opción es un contrato en el que el comprador, mediante una prima, adquiere del vendedor el derecho, mas no la obligación de comprar o vender un activo subyacente a un precio pactado(precio de ejercicio) en una fecha futura (fecha de vencimiento) y el vendedor se obliga a vender o comprar, según sea el caso, el activo subyacente al precio convenido.

Historia

A partir de 1972 se comenzó a desarrollar los instrumentos derivados financieros cuyos activos de referencia son títulos representativos de capital o de deuda, índices, tasas y otros instrumentos financieros.

Los primeros contratos se realizaron en el mercado fuera de mostrador(*over the counter(OTC)*) hasta que en 1973 el Chicago Board of Trade abrió el mercado Chicago Board Option Exchange. En 1975 empezaron a funcionar el American Stock Exchange (AMEX) y el Philadelphia Stock Exchange (PHLX) y en 1976 el Pacific Stock Exchange (PSE). En los años ochentas se desarrolló el mercado sobre opciones en divisas, sobre índices bursátiles y sobre contratos de futuros. El International Monetary Market ofrece transacción sobre futuros en divisas. El mercado de opciones más importante actualmente sobre divisas es el Philadelphia Stock Exchange (PHLX).

Características

Hay dos tipos de opción.

- **Opción de compra (*call*).** Da al poseedor el derecho, mas no la obligación para comprar un activo subyacente en una fecha próxima y a un cierto precio.
- **Opción de venta (*put*).** Da al poseedor el derecho, mas no la obligación de vender un activo subyacente en una cierta fecha a un cierto precio.

En cada tipo de opciones hay dos posiciones que son:

- *Posición larga*: es la que adquiere la persona que compra la opción y tiene el derecho de ejercerla o no.
- *Posición corta*: es la que adquiere la persona que vende o suscribe la opción y tiene la obligación de llevarla a cabo cuando la contraparte decida ejercer.

En el contrato se manejan los siguientes términos:

a) *Precio del ejercicio (precio* strike): es el precio que se pagará por el bien subyacente al finalizar el contrato.

b) *Fecha de expiración o vencimiento*: es la fecha en la que se entregará el bien subyacente o el pago por diferencias.

c) *Costo del contrato*: se especifica el valor de la prima para que se tenga el derecho, mas no la obligación de ejercer la opción.

d) *Cantidad del activo*: se especifica la cantidad avalada por el contrato.

Ganancias (*Payoffs*)

Se tienen ganancias por cada tipo de opción y para cada posición (no se considera el costo de la opción):

Opción de compra (*call*)

Posición larga: $\max(S_T - X, 0)$

Posición corta: $\min(X - S_T, 0)$ o $-\max(S_T - X, 0)$

Opción de venta (*put*)

Posición larga:

$$\text{máx}(X - S_T, 0)$$

Posición corta:

$$\text{mín}(S_T - X, 0) \quad \text{o} \quad \text{-máx}(X - S_T, 0)$$

donde:

S_T: es el precio del bien subyacente al tiempo T.

X : es el precio de ejercicio.

Ejemplos.

Opción de compra:

Una compañía desea una opción de compra (*call*) europea (sólo hay un día para ejercer) sobre acciones IBM. El precio de ejercicio es de \$100 por acción (el contrato contempla 100 acciones), el precio de la acción es de \$98, el precio de la opción es de \$5 por acción y la fecha de vencimiento es a dos meses.

Como es de compra conviene que el precio de la acción al término de los dos meses esté por arriba del precio de ejercicio.

Suponga que el precio de la acción a dos meses es de \$115, se ejerce y la ganancia obtenida es de \$15 por acción. La ganancia total en el contrato es de \$1,500, al considerar el costo de la opción se tiene un total de \$1,000.

Suponga que el precio de la acción a dos meses es de \$98 (por debajo del precio de ejercicio). No se ejerce y la pérdida es de \$500 (sólo el costo total del contrato por las opciones).

En este ejemplo la compañía que compra la opción tiene la posición larga y la organización IBM tiene la posición corta.

Opción de venta:

Una compañía desea una opción de venta (*put*) europea (sólo hay un día para ejercer) sobre acciones Exxon. El precio de ejercicio es de \$70 por cada una (el contrato contempla 100), el precio *spot* es de \$66, el precio de la opción es de \$7 por cada una y la fecha de vencimiento es a tres meses.

Como es de venta conviene que el precio de la acción al término de los tres meses este por abajo del precio de ejercicio.

Si el precio de la acción a tres meses es de $50, se ejerce y la ganancia obtenida es de $20 por acción. La ganancia total por el contrato es de $2,000. La ganancia considerando el costo de la opción es de $1,300.

Si el precio de la acción a tres meses fuera de $103. No se ejerce la opción y la pérdida es de $700 (el costo total por el contrato).

Clasificación de opciones por tiempo de ejercicio.

a) Opciones europeas: sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

b) Opciones americanas: pueden ejercerse durante la vida de la opción, es decir, en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento.

c) Opciones exóticas: éstas han sido diseñadas para cubrir riesgos más complicados, algunos ejemplos:

  i) opciones asiáticas: en éstas no importa el valor del activo en un momento determinado, lo que importa es el promedio de los valores del bien subyacente o precio de ejercicio en un periodo de tiempo.

  ii) opciones barrera: son aquellas que sólo llegan o dejan de existir si ocurre algún evento definido en el contrato. *Ejemplo: la opción desaparece si el precio* spot *del bien subyacente.* atraviesa una cota superior k.

1.1.5 *Swaps*

Es un acuerdo contractual, evidenciado por un documento sencillo, en el que dos partes acuerdan hacerse pagos entre sí (intercambio de flujo de efectivo).

El acuerdo *swaps* contiene la especificación acerca de los tipos de monedas que se intercambian (pueden ser los mismos), la tasa de interés que puede ser fija o flotante. También el calendario de pagos y cualquier otro tipo de disposición orientado a normar la relación entre las partes.

Historia

Los tipos de cambio [2] llegaron a ser extremadamente volátiles a principios del siglo pasado, siguientes al colapso del Acuerdo de Bretton Woods [3].

[2] Es la cantidad de una moneda con las que se puede comprar una unidad de otra.

[3] Es un sistema monetario internacional que se estableció en 1944. Este estipula que el precio del dolar americano es fijo en términos del oro y que todas las monedas estan aseguradas en

Los *swaps* eran una extensión natural de los préstamos llamados paralelos o ***back-to-back***, que tuvieron su origen en el Reino Unido como medios para evitar la rigidez del cambio de divisas, que buscaban prevenir una salida de capital británico. Durante los años setenta, el gobierno británico gravó con impuestos las transacciones en divisas, incluyendo a su propia moneda. La intención era encarecer la salida del capital, creyendo que esto alentaría la inversión doméstica haciendo que la del exterior fuese menos atractiva. El préstamo paralelo llegó a ser el vehículo aceptado para evitar estos impuestos. El *swap* de divisas fue una extensión de los préstamos *back-to-back*, a su vez fueron una modificación sencilla del préstamo paralelo.

Los flujos de efectivo de los *swaps* iniciales de divisas eran idénticos a aquéllos asociados con los préstamos *back-to-back*. Por esta razón, los *swaps* iniciales de divisas fueron llamados **intercambios de préstamos**. Sin embargo los *swaps* involucran un acuerdo sencillo, especifican todos los flujos de efectivo y estipula que la primera contraparte puede quedar relevada de sus obligaciones con la segunda, si ésta no cumple sus obligaciones con la primera.

El primer *swap* de divisas se cree que fue suscrito en Londres en 1979. Sin embargo, el verdadero *swap* inicial de divisas involucró al Banco Mundial y a IBM como contrapartes. El *swap* lo realizó Salomon Brothers y permitió al Banco Mundial obtener francos suizos y marcos alemanes para financiar sus operaciones en Suiza y Alemania del Oeste, sin necesidad de acudir directamente a los mercados suizos y oeste-alemanes de capital. El tamaño de las partes involucradas en esta operación le confirió credibilidad de largo plazo a los *swaps* de divisas.

El primer *swap* de tasa de interés se cree que se celebró en Londres en 1981, aunque se introdujo en los Estados Unidos poco tiempo después cuando en 1982 la Student Loan Marketing Association (Sallie Mae) realizó un *swap* de tasa de interés fija a flotante.

El concepto de *swap* se difundió en 1986, cuando el Chase Manhattan Bank introdujo el *swap* de materias primas. Inmediatamente después de la introducción de los *swaps* de materias primas, la Commodity Futures Trading Commission (CFTC) cuestionó la legalidad de los contratos. En 1989 la CFTC rectificó y otorgó contratos para este tipo de instrumento. La actividad con los *swaps* de materias primas creció rápidamente a partir de entonces. También en 1989, Bankers Trust introdujo el primer *swap* conocido y denominado como de acciones y valores. fue un éxito inmediato y muy pronto se copió. Los volumenes y la cantidad tan grande de capitales circulando en los *swaps* tipo acciones y valores continúan creciendo rápidamente.[11]

---

dolares. El acuerdo consistía en regular las tasas de cambio fijas, la eliminación de las restricciones de intercambio, convertibilidad de monedas y el desarrollo del sistema multilateral de pagos internacionales.[12]

Características

Hay dos importantes modalidades en los *swaps*, las cuales son:

1.- *Swaps* de tipo de interés: es un contrato entre dos partes que intercambian o permutan las obligaciones de pago de interés. Puede considerarse como una posición larga en una obligación combinada con una corta en otro compromiso o como cartera de contrato a plazo. Aquí hay dos modalidades:

a) aquellos que intercambian un tipo de interés fijo por uno variable (*coupon swaps*).

b) aquellos que intercambian dos tipos de interés variables calculados sobre bases distintas (*basis swaps*).

2.- *Swaps* de divisas: éstos implican intercambios de pagos de principal[4] e interés de tipo fijo sobre un préstamo en una divisa, por pagos de principal e interés de tipo fijo sobre otro préstamo, más o menos equivalente en otra divisa.

Ejemplo.

Las compañías A y B arreglan entrar el 1o de marzo de 1999 en un contrato *swap* a tres años. La compañía B paga a A la tasa de interés fija al 5% por año, con un principal nocional de $100 millones de dólares. La compañía A paga a B cada seis meses la tasa LIBOR[5] que se le otorga en el mismo principal.

FECHA	Tasa *LIBOR*	Flujo flotante de efectivo recibido	Flujo fijo de efectivo pagado	Flujo de efectivo total
marzo 1,1999	4.20			
septiembre 1,1999	4.80	+2.10	-2.50	-0.40
marzo 1,2000	5.30	+2.40	-2.50	-0.10
septiembre 1,2000	5.50	+2.65	-2.50	+0.15
marzo 1,2001	5.60	+2.75	-2.50	+0.25
septiembre 1,2001	5.90	+2.80	-2.50	+0.30
marzo 1, 2002	6.40	+2.95	-2.50	+0.45

Flujo de efectivo (en millones de dólares) de la compañía B en el principal nocional evaluado ($100 millones) a una tasa de interés a tres años. B paga la tasa fija del 5% anual y recibe la tasa LIBOR de la compañía A.

[4]es el instrumento que usan para calcular el pago en una tasa de interés *swap*. El principal es "nocional" cuando no se recibe el pago de éste.

[5]Es el *London Interbank Offer Rate* que es el tipo de interés ganado sobre los eurodólares depositados por un banco en otro banco. Es una tasa interbancaria que se ofrece en Londres.

El flujo de efectivo flotante recibido el 1o de septiembre de 1999 es: 0.5 x 0.042 x \$100 = \$2.1 millones de dólares. La tasa LIBOR es semestral y se considera la tasa de marzo 1 de 1999. Para septiembre 1 de 1999 el flujo fijo de efectivo recibido es: 0.5 x 0.05 x \$100 = \$2.5 millones de dólares. Entonces el flujo de dinero total es \$-0.40 millones, es decir, que la compañía B tiene que pagar a la compañía A la cantidad de \$0.40 millones de dólares.

Dos puntos importantes en los *swaps*

Los *swaps* son transacciones **fuera de balance** de la empresa. Esto es, no se muestran en el lado de los activos y tampoco el de los pasivos de un balance contable. Este tratamiento contable de los *swaps* ha sido una característica muy atractiva, tanto para los usuarios corporativos de *swaps* como para los agentes de *swaps*. Estos últimos han encontrado que esta actividad es un camino fácil para alentar los retornos bancarios sobre inversiones en el mercado de valores por la naturaleza del balance, y por ende la no adecuación de la actividad con *swaps* a esta situación, normalmente condujo a los reguladores a preocuparse acerca de la seguridad del banco. Los reguladores propusieron endurecer los requisitos de capital para dichos bancos.

El segundo punto es la documentación de los *swaps*. La falta de estandarización limitó la capacidad de los bancos para suscribir *swaps* e hizo más lento el desarrollo del mercado secundario de contratos de *swaps*. En junio de 1985, la International Swap Dealers Association (ISDA), con sede en Nueva York, estableció una lista de términos estándar para los *swaps* de tasa de interés. Poco después la British Bankers Association ofreció su propio conjunto de pautas para la documentación (British Bankers Association Interest Rate Swap o BBAIRS). Estas terminologías fueron revisadas posteriormente y finalmente condujeron a la introducción de los acuerdos o contratos de forma estandarizada.

Los esfuerzos parece ser que se han abandonado y de cualquier forma la creación de una casa de intercambio para *swaps* haría que estos instrumentos se parecieran mucho a los futuros. Esto ocasionaría serios problemas regulatorios para la industria. Sin embargo, la preocupación reciente acerca del riesgo en el crédito nuevamente ha generado el interés por contar con casa de intercambio de *swaps* y otras formas para mejorar del crédito.[11]

1.1.6 Contratos garantizados (*Warrants*)

Son títulos opcionales de compra emitidos por intermediarios bursátiles o empresas. Se pide el pago de una prima y el tenedor adquiere el derecho opcional de *comprar al emisor un determinado número de valores, los que se encuentran referidos en el contrato, a un precio de ejercicio y dentro de un plazo que se estipula en el documento.*

Historia

A partir de octubre de 1992 se comenzaron a operar en la bolsa mexicana de valores los contratos garantizados (*warrants*) sobre acciones individuales, canasta e índices accionarios. Entre 1992 y 1994 se listaron diversos *warrants* sobre acciones e índices accionarios mexicanos en la bolsa de Luxemburgo y la de Londres,

Características

Los *warrants* son opciones, pero fuera de mostrador, con fechas de vencimiento generalmente mayores que las opciones de compra normales negociadas en los mercados de cambio. Los *warrants* de compra frecuentemente son emitidos por empresas sobre sus propias acciones. Por ejemplo: en una emisión de deuda una empresa puede ofrecer a los inversionistas un paquete que consiste en obligaciones más *warrants* de compra sobre sus acciones. Si los *warrants* se ejercen, la empresa emite nuevas acciones para los propietarios de éstos a cambio del precio de ejercicio especificado en el contrato.

Los *warrants* de compra y venta son también emitidos por instituciones financieras para satisfacer la demanda del mercado. El activo subyacente normalmente es un índice, una divisa o un producto. Una vez emitido la institución financiera debe cubrir su riesgo.

Los *warrants* se compran y venden en la mayoría de los casos de la misma manera que las acciones y no hay necesidad de involucrar a la Cámara de compensación de opciones.[1]

1.1.7 Tipos de inversionistas

El mercado de derivados atrae a tres tipos de agentes: los cubridores (*hedgers*), los especuladores (*speculators*) y los oportunistas (*arbitrageurs*).[2]

1. **Cubridores (*Hedgers*)**: son las personas que desean reducir su exposición al riesgo de pérdida financiera a causa de la variación del precio del bien subyacente.

En el contrato *forward*: se neutraliza el riesgo debido a las fluctuaciones del movimiento en el precio que se tiene que pagar por el bien subyacente.

En el contrato de opción: se provee seguridad. Los cubridores se protegen de los movimientos desfavorables del precio y se benefician cuando pasa lo opuesto. La pérdida más alta es el costo del contrato.

Ejemplos [6]:

En futuros:
Considere un productor agrícola que espera cosechar por lo menos 1,000 toneladas de frijol durante septiembre. El quiere vender su mercancía al precio *spot* de ese mes, más teme que pierda valor en esa fecha. Para cubrir ese riesgo toma una posición corta en 200 contratos (5 toneladas por contrato), el precio *spot* actual es de $6.00 por kilogramo, con un precio futuro de $6.25 por kilogramo en septiembre.

Si no se cubre y el precio *spot* en septiembre es de $5.75, tiene una pérdida de $0.25 por kg., en total se tiene una pérdida de $250,000; pero si se cubre tendría una ganancia de $0.50 por kg., en total una ganancia del $500,000.

En opciones
Si un inversionista en el mes de agosto es propietario de 500 acciones de IBM con un precio de $52 cada una. Al inversionista le preocupa un desplome en el precio de venta en los próximos dos meses y está interesado en protegerse. El inversionista puede comprar en el CBOT opciones de venta, 500 acciones para octubre, con un precio de ejercicio de $50 cada una. El precio del contrato es $4 por acción, la cantidad respaldada por un contrato es de 100 acciones (el costo total del contrato es de $400), para cubrir todas las acciones tiene que comprar 5 contratos, así que el costo por la cobertura es de $2,000.

Si se ejerce la opción (el precio de ejercicio está por arriba del precio de octubre), el inversionista obtendrá por sus acciones $25,000-$2,000 =$23,000 (si considera el costo total por la cobertura.)

Si no se ejerce la opción (el precio de ejercicio está por abajo del precio de octubre), supónga que hay un precio de $65 por acción. El inversionista obtiene $32,500-$2,000=$30,500 por sus acciones (considera el costo del contrato).

Hay que aclarar que la mayor pérdida que tiene el inversionista es el costo total por la cobertura (el costo de los contratos de opción).

[6] En estos ejemplos no se toman en cuentan los gastos de transacción, impuestos, entre otros.

2. **Especuladores (*Speculators*)**: son aquellos agentes del mercado que obtienen ganancias debido a las diferencias estimadas en los precios del activo. Toman posiciones según las tendencias esperadas.

   En términos generales se pueden dividir en:

   a) Aquéllos que esperan hacer ganancia a través de ciertas suposiciones, información privilegiada o el haber detectado alguna tendencia. Estos logran colocarse en una buena posición en el mercado.

   b) En contraposición a los anteriores, son aquéllos que practican la especulación activa o dinámica (maximizan sus beneficios en el menor tiempo posible, minimizando la aportación de fondos propios sin utilizar información adicional sobre el comportamiento del mercado), la especulación pasiva o estática (cuando no han adoptado una estrategia de cobertura específica).

   En futuros:
   Un inversionista prevé que en febrero la libra esterlina estará a la alza en los próximos dos meses frente al dolar americano y desea obtener una posición especulativa. El precio *spot* es de $1.6470 y el precio del futuro para abril es de $1.6410 por cada una.
   Toma una posición larga [7] en 4 contratos de futuros sobre libras para abril.
   El precio para abril es de $1.7000 por libra, la ganancia del inversionista es de $13,250.

   En opciones:
   Un especulador tiene la alternativa de comprar acciones u opciones sobre las acciones de Exxon en septiembre. El precio *spot* es de $78 cada una, pero el precio de la opción a diciembre es de $80 y el costo de contrato es de $3 por acción. Si en este momento compra necesita desembolsar $7,800, pero si compra 2,600 opciones *call* sobre acciones de Exxon (cada contrato respalda 26 acciones) le cuesta lo mismo. Si las acciones suben a $90 cada una, el especulador tendrá una ganancia de $1,200 si hubiera comprado las acciones, pero si compró las opciones tendrá una ganancia de $26,000.

[7] Tiene en realidad dos opciones: una es comprar las libras en este momento y depositarlas en el banco, sólo que para eso es necesario que tenga $411,750, la ventaja de usar futuros es que no es necesario contar con todo ese dinero en este momento ya que lo único que se pide es el margen inicial.

Es más rentable la compra de opciones. Además el inversionista esta seguro de que las acciones van en aumento y que va a tener una ganancia muy buena.

3. **Oportunistas (*Arbitrageurs*)**: son los agentes que buscan oportunidades en los mercados de obtener una ganancia segura. No toman riesgo y no hacen ningún desembolso inicial. El arbitraje involucra ganancias simultáneas en transacciones de dos o más mercados, esto puede deberse a que los precios de un mismo activio son diferentes en los distintos mercados. Hay que tomar en cuenta que es sin contar los gastos de administración de cada uno de los mercados.

   Ejemplo:

   En la bolsa de New York Stock Exchange se vende una accion y en Londres también. En la primera bolsa se tiene un precio de \$172 y en la segunda un valor de £100. La tasa de cambio se encuentra en \$1.75 por libra esterlina. El oportunista puede comprar en New York Stock Exchange 100 acciones y venderlas al mismo tiempo en la bolsa de Londres obteniendo una ganancia de:

   $100\ [(\$1.75)(100)\ \text{-}\ \$172] = \$300$

   el individuo no tiene que hacer ningún desembolso para obtener su ganancia.

   Hay que considerar que estas oportunidades, si es que se presentan, son en intervalos muy cortos. Por la ley de la oferta y la demanda esas diferencias tienden a desaparecer rápidamente.[1] Al considerar los costos de transacción suele quedar el mismo precio en todos los mercados.

1.2 Riesgo de crédito

RIESGO es la posibilidad de pérdida financiera debida a la componente aleatoria en la variabilidad del mercado.

El riesgo se puede dividir en dos tipos:

1. Riesgo específico o no-sistemático: es la componente asociada a un activo por separado (por ejemplo un sector del mercado: químicos).

2. Riesgo no específico o sistemático: es el asociado con factores que afectan a todo el mercado como un todo (también llamado riesgo de mercado).

Una compañía al tener una dirección inestable se afecta a sí misma pero no a todo el mercado y su riesgo específico es representado por una elevada volatilidad en el precio de sus acciones. Por otro lado, el cambio en las tasas de interés es un riesgo no específico ya que este cambio afecta a todo el mercado.

El tener una mayor ganancia esperada implica manejar activos de alto riesgo, estos últimos poseen una gran volatilidad y la ganancia real (al término del contrato) no es segura. Hay activos que son de menor riesgo, en la práctica se consideran libres de riesgo, estos son los que dan una ganancia garantizada y a corto plazo no tienen volatilidad, por ejemplo, los bonos emitidos por el gobierno (CETE).

Cuando un agente usa portafolios grandes es importante separar tales componentes. Así es posible diversificar [8] el riesgo específico y realizar cobertura [9] en el riesgo no específico. Hay que recordar que entre mayor ganancia esperada se tiene, habrá un mayor riesgo en el bien subyacente.[6]

Se tienen dos tipos de pérdidas:

- Pérdidas esperadas: son aquellas que son posibles de estimar usando modelos matemáticos.
- Pérdidas no esperadas: son las pérdidas que no pueden ser estimadas por ser determinadas por variables exógenas.

De aquí en adelante se estudiará un riesgo importante en los productos derivados: ***el riesgo de crédito.***

Definición de crédito:
"Es el término utilizado para referirse a las transacciones que implican una transferencia de dinero que debe devolverse transcurrido cierto tiempo. Por tanto, el que transfiere el dinero se convierte en acreedor y el que lo recibe en deudor; los términos crédito y deuda reflejan pues una misma transaccin desde dos puntos de vista contrapuestos".[13]

Hay créditos a corto (menos de un año) y a largo (superior a un año) plazo. El crédito es un complemento del capital de la empresa para:

a) capital de trabajo: dinero en efectivo, ventas a crédito, inventarios, deudas a proveedores.

[8] Diversificar puede parecer tener inversiones desorganizadas y en un sentido es así. Al realizarla se busca eliminar el riesgo encontrando en aquellos activos que tienen correlación negativa (si alguno baja se compensa con el aumento de otro). En los portafolios diversificados se tienen una gran variedad de activos.

[9] Es encontrar el instrumento financiero, de tal manera que si hay cambios en el mercado que afecten al activo, éste se encuentre protegido de tal manera que no se gane ni se pierda al vencimiento de la transacción.

b) adquisición de bienes muebles e inmuebles: equipo de transporte, maquinaria, equipos y herramientas, gastos de instalación, terrenos y edificios.

c) eventualidades de tesorería: es cuando no hay liquidez en la empresa.

d) consolidación [10] y/o reestructuración [11] de pasivos.

Los siguientes son créditos a corto plazo.

i) Crédito a descuento: cuando el dueño de un negocio le firma a la institución de crédito un pagaré a cambio de un pedido. Es posible vender el documento al banco antes de la fecha de vencimiento.

ii) Crédito con garantía colateral: ayuda a tener liquidez, los intereses se cobran por adelantado, requiere de aval y garantía, adicional o complementario. El banco acepta los documentos como garantía del crédito pedido.

iii) Crédito prendario: es útil para empresas que quieren comprar inventarios o recuperar el dinero invertido. Si ya hay inventarios el banco puede prestar un porcentaje del costo total.

iv) Crédito quirografario: este sólo requiere aval. Al recibir el dinero se firma uno o varios pagarés o documentos de cobro. Hay que recordar que gran parte de la cartera vencida de los bancos es de este tipo.

v) Crédito comercial irrevocable "Carta de crédito": se usa para compra y venta de maquinaria o materias primas, nacionales o estranjeras. Si el vendedor paga el importe de la carta se utiliza como garantía, por el contrario, si el comprador lo prefiere el banco paga al vendedor y la deuda es con el banco.

Los siguientes son créditos a largo plazo.

i) Crédito simple: se usa sólo una vez por operación. Este crédito se garantiza con bienes muebles o inmuebles.

ii) Crédito de habilitación o avío: cubre gastos de operación de la empresa. Apoya el capital de trabajo, permanentemente, y gastos directos de empresas de transformación. Ayuda a pagar gastos durante el tiempo en que la empresa no recibe ingresos.

[10] Es juntar las deudas en una sola y si se puede a plazos más grandes (Largo Plazo).

[11] Es mejorar las condiciones de pago de la deuda, ya sea el plazo, la tasa de interés, las garantías o cualquier otra condición de prestamo.

iii) Crédito refraccionario: ayuda en la compra de maquinaria, equipo de transporte, ampliaciones a la edificación de la empresa o pago de deudas de proveedores. Es para ayudar al crecimiento de la empresa.

iv) Crédito hipotecario: apoya cualquier actividad de la empresa y su garantía son todos sus activos.

Definición de Riesgo de Crédito:

El riesgo de crédito es el asociado a la posibilidad de que la contraparte sea incapaz de cumplir los créditos pactados en el contrato [12] *. Esto debido a situacciones financieras extremas que llevan a no tener solvencia causando así una gran pérdida económica.*

El riesgo de crédito por incumplimiento, ya sea en un contrato en general o en un crédito, se considera como un factor crucial para la valuación de instrumentos de deuda (débito), sin embargo se ha descuidado frecuentemente. Las siguientes son algunas razones:

a) En los grandes intercambios (de futuros y opciones) se tuvo un pequeño riesgo de crédito y las organizaciones de productos derivados reducen sustancialmente este riesgo. Se piden márgenes para eliminar el riesgo de incumplimiento de la contraparte. Además el intercambio en todas las posiciones de opciones está regulado y existe un marco legal que los controla.

b) Durante mucho tiempo el volumen que se manejó en el mercado fuera de mostrador fue relativamente pequeño. Al desarrollarse los *swaps* que manejan un riesgo de crédito "menor", se pacta el pago de diferencias de intereses, por lo que no posee el riesgo de crédito, ya que no se intercambia el capital mismo.

c) Los modelos que toman en cuenta el riesgo de crédito son muy complejos y pocos los aprovechan, además sus adelantos no se conocen por la falta de difusión que se tiene del tema. Por otro lado los métodos tradicionales son más fáciles de emplear.

Con el desarrollo de los mercados de derivados, lo anterior resulta obsoleto, así que en lo siguiente se exponen algunas razones para considerar el riesgo de crédito de una manera más estricta.

a) El manejo del riesgo de crédito en los bancos y otras instituciones [13] empieza a

[12] Hay diferencia entre el riesgo de incumplimiento y el riesgo de crédito. El riesgo de incumplimiento es el riesgo que considera la posibilidad de que la contraparte falle con el compromiso (lo tienen los productos llamados vulnerables). El riesgo de crédito tiene que ver con el incumplimiento del bien subyacente (créditos, o algún bien subyacente que se comporte parecido).

[13] Los reguladores les especifican el capital mínimo (reserva mínima) para cubrirse del riesgo.

ser inapropiado entre los años 70 y 80 por el cambio en la política monetaria. Por lo que se desarrollan productos derivados para cubrirse de la inestabilidad económica como los *swaps* y las opciones, que contienen una gran parte de riesgo de crédito.

b) El mercado fuera de mostrador ha crecido rápidamente desde mediados de los años 80 y ahora constituye la mayor parte del total de contratos de productos derivados. Ahora la suposición de no incumplimiento del bien subyacente es más cuestionable. La emisión de instrumentos fuera de mostrador se realiza usualmente sin garantía y en la mayoría de los casos es insegura la reclamación. La cámara de compensación del mercado fuera de mostrador ha hecho intentos para reducir el riesgo de crédito utilizando la colaterización [14]. También se ha usado la clasificación de crédito pero sus resultados son deficientes, ya que la actualización debe de ser mucho más frecuente para mostrar el riesgo de crédito real al que se expone. Bhasin [3] en 1996 reporta un deterioro en las clasificaciones desde 1991.

c) Históricamente las tasas de incumplimiento (1970-1997) indican un elevado incremento. Las probabilidades tan altas en este riesgo, las inversiones en productos derivados exigen tomar en cuenta el riesgo de crédito.

La base de los modelos de riesgo de crédito lo realizó Merton (al realizar cálculos para valuar una opción en 1974). Merton utiliza el trabajo de Black y Scholes para proponer una estructura analítica. En la actualidad hay una gran cantidad de investigadores que prosigen con el trabajo de Black, Merton y Scholes.

Mundo neutral y mundo real

Cuando se hace el análisis hay que considerar dos mundos: el real y el neutral (libre de riesgo).

Al considerar el mundo de riesgo neutral todos los individuos son indiferentes al riesgo. La tasa de ganancia supuesta en todas las acciones es la libre de riesgo (r). Ésta es sin duda la más simple de las suposiciones para el análisis de derivados y ayuda en la obtención de la solución de la ecuación diferencial de Black-Scholes. Además, se considera que todos los portafolios libres de riesgo valen lo mismo (no hay oportunidad de arbitraje).

Por lo anterior, es comprensible que haya una discrepancia en la probabilidad de incumplimiento, en los dos mundos. En el mundo real esta obtenida con base en da-

[14] Estar cubiertos de tal manera que alguien más absorba el riesgo.

tos históricos, lo que lleva a un resultado que proporciona distintas probabilidades de incumplimiento, además, no se tiene una razón de incumplimiento.

La pregunta que surge es ¿Cuándo usar el mundo real o el mundo libre de riesgo para calcular las probabilidades de incumplimiento en el análisis de riesgo de crédito? Cuando se valúan derivados en los que el subyacente es el crédito o se estima el impacto del riesgo de incumplimiento, comúnmente en el precio de los derivados, se debe usar la probabilidad de incumplimiento neutral, esto es porque implícitamente se usa la valuación del riesgo neutral en el análisis. Cuando se quieran calcular las pérdidas futuras de incumplimiento se debería usar la probabilidad del mundo real.

1.2.1 Aplicaciones de los modelos de riesgo de crédito y de valuación de derivados vulnerables

Los riesgos que afectan o contienen cualquier instrumento se pueden dividir en tres tipos:

1) los que consideran el incumplimiento de la contraparte (derivados vulnerables).

2) los que consideran incumplimiento del bien subyacente (derivados de crédito).

3) los que consideran el incumplimiento de la contraparte y del bien subyacente (derivados de crédito vulnerables).

Los modelos que se estudian más adelante no sólo se emplean para la valuación del riesgo de incumplimiento del bien subyacente "crédito" en los productos derivados, hay otras aplicaciones.

Ejemplos:

1) La valuación de derivados de crédito.

Recientemente se han introducido derivados con ganancias que dependen del riesgo de crédito en una o un grupo de firmas en particular, es decir, el crédito es la variable subyacente de los derivados, se les denomina "***Derivados de Crédito***". El precio de estos derivados requieren un modelo que contemple el comportamiento del riesgo de crédito en el tiempo, así como el precio de la opción sobre las acciones requieren el comportamiento de éstas a través del tiempo. Aunque los derivados de crédito analizados han sido en la mayoría de los casos de forma simple como el seguro de préstamo y deudas, el rápido incremento en el interés de estos derivados han dado a los modelos de riesgo de crédito una nueva área de aplicación.

algunos casos particulares de los derivados de crédito son:

a) Los derivados en los que la contraparte se suponen libre de cualquier riesgo de incumplimiento, pero el bien subyacente está sujeto al riesgo.

   El precio de una opción sobre bonos con riesgo de incumplimiento son tratados como si fuesen bonos sin riesgo. Al hacer esto se crea un sesgo, ya que al calcular la distribución del bono, el riesgo de incumplimiento del bien cambia el comportamiento de este y puede ser significativo. Los modelos de riesgo de crédito ayudan a corregir tales sesgos, ya que el bono tiene un comportamiento del "crédito".

b) La valuación de derivados sobre bienes subyacentes que están sujetos a riesgo de incumplimiento de la contraparte.

   Cuando la contraparte no está dispuesta o no es capaz de cumplir con el contrato, el precio del instrumento tiende a bajar, este decremento es cuantificado con un derivado idéntico que considera el riesgo de incumplimiento en el bien subyacente, un derivado de crédito, éste da el precio correcto.

3) Valuación de opciones sobre bonos con riesgo de incumplimiento.

   Los bonos en los que el emisor puede incumplir provocan una grán pérdida. En su lugar se manejan bonos sin riesgo considerando el más bajo precio *forward*, al hacer esto se deja de contemplar la influencia que tienen en las opciones. Usando un modelo de bonos con comportamiento parecido a los derivados de crédito es posible corregir estas alteraciones.

1.2.2 Modelos de riesgo de crédito

En el riesgo de crédito el incumplimiento afecta de muchas formas, como consecuencia surgen las siguientes preguntas que se tratarán de responder:

- ¿cuál es la probabilidad de que la firma incumpla en los próximos cinco años?
- ¿cuál es la pérdida esperada por incumplimiento, si éste ocurre?
- ¿cuál es la pérdida esperada de los incumplimientos de todos los "deudores" en los próximos cinco años?

Para poder responderlas sólo se necesita contestar una de ellas, después hay que hacer pequeñas alteraciones para contestar las otras preguntas.

Para calcular el riesgo de crédito existen diversos modelos que se pueden dividir en cuatro categorías.

1.- Los modelos tradicionales.

2.- Los modelos estructurales (los que consideran el valor de la firma).

3.- Los modelos de primer tiempo de paso.

4.- Los modelos contingentes (tasa de intensidad o de riesgo).

1. Modelos tradicionales

Estos modelos tienen un cálculo muy sencillo y por su facilidad son los más comunes que consideran el riesgo de crédito, aunque empiezan a proporcionar una estimación insuficiente.

a) Con base en datos históricos.

Aquí se consideran las experiencias de las pérdidas en bonos por incumplimiento en el transcurso del tiempo. A cada compañía se les asignan clasificaciones de crédito [16] y aquellas con la misma clasificación se les considera con probabilidades de incumplimiento iguales.

En la siguiente tabla se muestran por periodos las probabilidades de incumplimiento por clasificación, proporcionada por la compañía S&P's.

Años	1	2	3	4	5	7	10	15
Clasificación								
AAA	0.00	0.00	0.07	0.15	0.24	0.66	1.40	1.40
AA	0.00	0.02	0.12	0.25	0.43	0.89	1.29	1.48
A	0.06	0.16	0.27	0.44	0.67	1.12	2.17	3.00
BBB	0.18	0.44	0.72	1.27	1.78	2.99	4.34	4.70
BB	1.06	3.48	6.12	8.68	10.97	14.46	17.73	19.91
B	5.20	11.00	15.95	19.40	21.88	25.14	29.02	30.65
CCC	19.79	26.92	31.63	35.97	40.15	42.64	45.10	45.10

Source:S&P's CreditWeek, April 15,1996

PROMEDIO ACUMULATIVO DE LAS TASAS DE INCUMPLIMIENTO (%)

En el cuadro se observa que una emisión de bonos de una clasificación BBB tiene 0.18% y 0.44% de probabilidad de incumplimiento al final del primer y

[16] Son dos las compañías más importantes que se dedican a otorgar calificaciones de probabilidad de incumplimiento en deudas: Moody's y S&P's. S&P da las clasificaciones como AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC; donde AAA es la mejor clasificación y CCC la peor. Moody's proporciona las clasificaciones como Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca, C; donde Aaa es la mejor y C es la peor.

segundo año respectivamente. Si se quiere la probabilidad de incumplimiento en el segundo año para el bono BBB, sólo se calcula la diferencia de las probabilidades antes mencionadas, es decir, la resta de $0.44\% - 0.18\% = 0.26\%$, teniendo un 0.26% de probabilidad de incumplimiento entre el primero y el segundo año.

Hay que mencionar que la probabilidad de incumplimiento de un bono con una buena clasificación de crédito en un año determinado, tiende a incrementarse en función del tiempo y los bonos con peores rangos de crédito les sucede lo contrario.

El defecto en este modelo es que las compañías que se dedican a clasificar y calcular las probabilidades de incumplimiento no actualizan la información como el mercado lo exige. Al usar ésta información ocasiona un margen de error ya que el rendimiento *spread*[17] sobre los bonos corporativos refleja únicamente la pérdida esperada empírica por incumplimiento con riesgo de incumplimeiento en la contraparte.[3]

b) Usando precios de bonos.

En este método los corredores reunen datos del mercado de bonos para calcular curvas de rendimiento [18] en cada clasificación de crédito. Después se usan para estimar el porcentaje de pérdida esperada por incumplimiento en bonos.

Para poder realizar los cálculos se definen los siguientes términos:

$h(T_1, T_2)$: la proporción esperada de pérdida en los bonos que sí son cumplidos debido a los bonos incumplidos entre el tiempo T_1 y T_2.

Y_T: la tasa de rendimiento del bono corporativo sin cupones al tiempo T.

Y_T^*: la tasa de rendimiento del bono libre de riesgo sin cupones al tiempo T.

$P(T)$: el precio del bono corporativo sin cupón al tiempo T con un principal de \$1.

$P^*(T)$: el precio del bono libre de riesgo sin cupón al tiempo T con un principal de \$1.

El promedio esperado de pérdidas en los bonos que sí son satisfactorios debido a los bonos incumplidos entre el inicio y el tiempo T es:

[17] Es la diferencia porcentual entre las tasas de los bonos libre de riesgo y el corporativo.
[18] En este trabajo se consideran ya obtenidas.

$$\begin{aligned} h(0,T) &= \frac{P^{*}(T) - P(T)}{P^{*}(T)} \\ &= 1 - \frac{P(T)}{P^{*}(T)}. \end{aligned}$$

donde

$$P^{*}(T) = e^{-(Y_T^{*})T} \qquad \text{y} \qquad P(T) = e^{-(Y_T)T}.$$

Si se usa el *spread* [19] , es decir, $Y_T^{*} - Y_T$, la fórmula para la pérdida esperada entre 0 y T es:

$$h(0,T) = 1 - e^{(Y_T^{*} - Y_T)T}.$$

Para saber cuál es la pérdida esperada por incumplimiento (PEI) entre T_1 y T_2, se usa lo siguiente:

$$PEI = h(T_1, T_2) = h(0, T_2) - h(0, T_1).$$

Ejemplo con tasas de rendimiento: en la siguiente tabla se muestran la tasa libre de riesgo y las del bono corporativo, en la última columna se dan las pérdidas esperadas por incumplimiento con un principal de \$100.

Vencimiento Años (T)	Tasa libre de riesgo cero	Tasa del bono corporativo cero	Proporción esperada por incumplimiento($h(0,T)$)
1	5.00	5.25	.2497
2	5.00	5.50	.9950
3	5.00	5.70	2.0781
4	5.00	5.85	3.3428
5	5.00	5.95	4.6390

Rendimiento en bonos sin cupones libre de riesgo y emisión de bonos corporativos sin cupones.

Las operaciones para calcular la PEI de un bono con vencimiento a cinco años y un principal de \$100, usando los valores de la tabla, es:

$$P^{*}(5) = 100e^{-(0.05)(5)} = 77.8801,$$

[19] El *spread* explica el riesgo de crédito ya que entre mayor diferencia hay mayor riesgo y si el *spread* es cero, entonces se afirma que el bono no tienen riesgo.

$$P(5) = 100e^{-(0.0595)(5)} = 74.2672,$$
$$P^*(5) - P(5) = 77.8801 - 74.2672 = 3.6128,$$
$$\text{y } PEI = h(0,5) = 3.6128 \div 77.8801 = 0.046390.$$

Por lo tanto, la pérdida esperada del valor de los bonos que se incumplieron y que afectan a los que fueron cumplidos es del 4.6390% en el quinto año.

Ejemplo con *spreads*:
Supóngase que el *spread* sobre el bono libre de riesgo y el bono corporativo con clasificación BBB a cinco y diez años son 130 y 170 puntos (los puntos están por millar) respectivamente. Entonces:

$$h(0,5) = 1 - e^{-(0.013)(5)} = 0.0629,$$
$$h(0,10) = 1 - e^{-(0.017)(10)} = 0.1563.$$

de donde

$$PEI = h(5,10) = 0.1563 - 0.0629 = 0.0934.$$

Es decir, la pérdida esperada por incumplimiento del valor de los bonos que se incumplieron y que afectan a los que fueron cumplidos es del 9.34% entre el quinto y décimo año.

c) Usando el Valor en Riesgo (VaR)

El valor asociado al riesgo de crédito (VaR) responde a la pregunta ¿Cuál es la pérdida crediticia que se tiene antes del tiempo T, con una confianza del α%?, es decir, proporcionan la máxima probabilidad de que se incumpla una determinada transacción.

Las pérdidas por causa del incumplimiento dentro de los productos derivados no sólo reflejan el incumplimiento de la contraparte, también si hay cambio en la clasificación de crédito. Cuando una contraparte cambia de clasificación, ésta refleja las pérdidas posibles por incumplimiento. Para esto se consideran dos alternativas para tomar en cuenta el riesgo de crédito [20].

1a) Encontrar la distribución de pérdidas esperadas considerando únicamente el incumplimiento de la contraparte.

2a) Encontrar la distribución si se consideran los cambios en la clasificación y el incumplimiento de la contraparte.

[20] Se considera que el bien subyacente no tiene probabilidad de incumplimiento.

Nótese que las probabilidades del mundo real son usadas para el cálculo del crédito VaR. Aquí es apropiado basar la probabilidad de incumplimiento en datos históricos ya que son las pérdidas esperadas futuras, además, las tasas de incumplimiento varian significativamente a través del tiempo.

1a) Distribución de pérdidas del VaR de crédito basado únicamente en incumplimiento.

Esta aproximación está basada en la metodología propuesta en "*Credit Risk Management Framework.*"[1] en octubre de 1997. La aproximación se basa en ideas de la industria del seguro.

La distribución de probabilidad de pérdidas por incumplimiento es difícil de obtener exactamente, pero se usa la herramienta del VaR.

La institución financiera tiene N contrapartes y una probabilidad P_i de incumplimiento para cada una de ellas en el tiempo T. Los incumplimientos entre ellas son independientes y el número esperado de incumplimientos en todo el portafolio sería: $\gamma = \sum_{i=1}^{N} P_i$.

Cada uno de los P_i tiene su propia distribución, el crédito VaR ayuda a combinar todas las P_i, obteniendo una distribución de probabilidad total de las pérdidas por incumplimiento ajustado con las tasas de recuperación históricas. La probabilidad de n incumplimientos está dada por la función de densidad de probabilidad Poisson:

$$\frac{e^{-\gamma}\gamma^n}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

La distribución de las tasas de incumplimiento está basada en datos históricos, y la razón de cambio es igual, es decir, en todas la probabilidades P_i y por sector.

Para obtener una estimación del VaR se usa la simulación Monte Carlo [21] de la siguiente manera:

1) Se obtiene una tasa de incumplimiento esperada por cada sector.

2) Se sustituyen diversos números de incumplimiento aleatoriamente para cada sector.

3) Se obtienen las pérdidas por cada incumplimiento.

4) Se realiza el cálculo total de pérdidas.

[21] Ver apendice B) simulación Montecarlo.

Al considerar la distribución de todas las tasas de incumplimiento se tienen correlaciones entre las diferentes contrapartes. Esto hace un modelo más realista y que el total de pérdidas es positivo.

2a) El VaR de crédito basado en incumplimiento y el cambio de clasificación.

Lo primero que se necesita es la matriz de probabilidad de transición por clasificación en un año, es decir, la probabilidad de que la compañia cambie a cualquier otra clasificación al término del año (periodo en estudio). La matriz proporciona también la probabilidad de incumplimiento al final del año para cada clasificación.

PROBABILIDADES DE LA MATRIZ DE TRANSICION DE UN AÑO EN PORCENTAJES								
Rango	RANGO AL TERMINO DEL AÑO							
Inicial	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Incumplimiento
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0.00	0.00	0.00
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0.00
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.30	1.17	0.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0.00	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0.22	0.00	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79
Incumplimiento	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	100.00

Figura 1.6: Matriz de transición.

Por ejemplo, la compañia que al principio del año se encuentra en la clasificación AAA, tiene un 90.81% de probabilidad de mantenerse en esa clasificación al término del año y se tiene un 8.33% de términar el año en AA.

La distribución de probabilidad de las pérdidas crediticias se estima en una simulación del cambio en la clasificación de crédito para una muestra de contrapartes (se usa el programa *CreditMetrics*). Es posible llevar un seguimiento en la distribución de probabilidad en las pérdidas de cada año.

En cada simulación, la muestra determina el cambio de clasificación de crédito en todas las contrapartes de cada año. La muestra contiene las variables del mercado más relevantes. Los contratos sobresalientes se revalúan para determinar el total de pérdida crediticia por incumplimiento y el cambio de clasificación de crédito.

Las pérdidas por el cambio de clasificación de crédito al final del año estan dadas por la diferencia porcentual de las probabilidades de crédito entre el comienzo y término del año.

La ventaja en esta alternativa es que las características de los contratos vigentes con mejores clasificaciones son tomados en cuenta. Por ejemplo, un contrato con la clasificación A de la contraparte se cancela cuando la clasificación de ésta cae por debajo de BBB. En la simulación se puede observar el cambio de clasificación de crédito mes a mes tomando lo anterior en cuenta. Además, se agrega la condición de que la pérdida ocurrirá si la clasificación A cambia a incumplimiento. El muestreo determina las pérdidas crediticias, el cambio de clasificación en las contrapartes asumiendo que no son independientes. *CreditMetrics* sugiere una esquema donde la relación entre el cambio de clasificación de dos contrapartes es determinada por la correlación entre los valores de las *equities*[22].

2. Modelos estructurales (modelos del valor de la firma)

Son aquéllos que toman en cuenta al valor de la firma en sus modelos. El incumplimiento ocurre cuando el valor alcanza un límite en una barrera ya determinada que depende del tiempo. El problema en estos modelos es que la experiencia dice que los *spread* no decrecen a cero cuando la fecha de vencimiento se acerca. Además no consideran que aunque este tan cercana la fecha de vencimiento hay posibilidad de un desastre en el mercado antes de la fecha de vencimiento(se puede tener el incumplimiento antes de la fecha de pago de la deuda).

Entre éstos se encuentran los siguientes modelos.

a) El modelo de Merton, usando el precio de *equities*(1974).

Merton diseña en 1974 un modelo para la valuación de opciones. Usando este desarrolla el modelo para el riesgo de incumplimiento. En el modelo de riesgo de crédito usa la teoría de la valuación de opciones *call* para calcular el precio de las *equities*. Merton asegura que las *equities* se aproximan más al valor de la compañia y la probabilidad de riesgo de crédito.

[22] Una parte de capital saldado de la compañía y otros fondos de accionistas, posiblemente incluyen deudas subordinadas a lo largo del plazo.

En términos generales se evalúa si es posible pagar las deudas o la compañía se declarará en quiebra en la fecha de vencimiento.

En el modelo las *equities* se comportan como una opción de compra (*call*) donde el precio de ejercicio es igual al valor de las deudas. Las *equities* al tiempo T existen sólo si el valor de los activos es superior a las deudas contraídas. Con ayuda de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se obtiene el precio de las *equities* al tiempo T. La metodología considera la probabilidad de que se incumplan las deudas y se obtiene una estimación de la pérdida que puede tener la compañía si hay incumplimiento.

Uno de los problemas que se tienen es que se considera que todas las deudas son pagaderas al mismo día, en la realidad esto no sucede y crea un error en la estimación.

b) El modelo de Leland y Toft (1996).

Considera el impacto del vencimiento de las deudas en el ejercicio óptimo de la opción incumplida por los accionistas.

Este modelo se basa en en el modelo de Merton considerando el valor de las acciones de la firma, el valor presente neto de todos los reembolsos de los impuestos y el valor presente neto de las pérdidas por incumplimiento.

c) El método KMV del precio de deudas riesgosas basandose en una aproximación estructural.

El valor de las acciones de la firma es modelado por un movimiento browniano geométrico y considera también la probabilidad de no poder cubrir las obligaciones con una distribución normal y cuantil llamado "la distancia al incumplimiento."

Se utilizan datos empíricos para determinar la probabilidad y la distancia al incumplimiento [23]. Además la metodología detallada no es del dominio público.

3. Modelos de primer tiempo de paso.

Este tipo de modelos permiten considerar que el incumplimiento y/o bancarrota puede suceder antes de la fecha de vencimiento de la deudas contraídas. Se basa fundamentalmente en el modelo de Merton que considera que el incumplimiento y/o bancarrota sucede hasta la fecha de vencimiento.

[23] Teniendo la probabilidad de incumplimiento se puede obtener el cuantil a partir del cual ya habría incumplimiento, y la distancia es la longitud que se tiene a ese cuantil.

Los modelos de primer tiempo de paso tienen una cota (función determinística del tiempo) que si es cruzada (desde la primera vez) la compañía va a tener problemas para cumplir con sus obligaciones, tiene que hacer restructuración y en el peor de los casos se declarará en bancarrota.

El primer modelo fue desarrollado por Black y Cox en 1976 al modificar el modelo de Merton. En el trabajo introducen un convenio de seguridad provisional, el acreedor tiene el derecho de declarar la cantidad de la deuda como vencida, para que así, pueda rescatarla si el deudor es incapaz de satisfacer todas sus obligaciones. Esto es una medida de protección para el acreedor de más devaluaciones posteriores de la firma.

Algunos modelos de este tipo son:

a)**Black-Cox** (1976).

El modelo considera que si las "*equities*" de una compañia atraviesan una cota por primera vez, ésta es obligada a restructurarse o declararse en bancarrota. La cota usada tiene una función de densidad exponencial con parámetros k y γ, variables exógenas, dependiente del tiempo. La función es:

$$V^d(t) = Ke^{-\gamma(T-t)}$$

Una ventaja es que evita que los accionistas transfieran el capital de la compañía a ellos mismos, si ocurre lo anterior, ocasionaría un incremento en la volatilidad de los activos de la firma. Al hacer la suposición de que el costo de restructuración bajo el incumplimiento es cero, el convenio de seguridad muestra que el riesgo de crédito se reduce sustancialmente y depende de la elección de la cota exógena, que es independiente del valor de la firma.

b)**Brenan-Schwartz(1980)** (1980).

La aproximación para el incumplimiento es similar al modelo de Black y Cox (1976). Aunque la cota de incumplimiento es constante en la valuación para bonos convertibles. La explicación del resultado esta dado por ecuaciones diferenciales parciales numéricamente.

c)**Mason-Bhattacharya** (1981).

En éste vincula los modelos de primer tiempo de paso con un poceso de saltos que contiene un tiempo de incumplimiento aleatorio para modelar el valor de la firma. A diferencia del trabajo de Black-Cox que es determinista porque sus hipótesis provienen de una función exponencial, el proceso de salto considera al tiempo de incumplimiento como aleatorio. Mason y Bhattacharya muestran que estos efectos pueden influenciar grandemente al precio de los bonos riesgosos. Zhou en 1997 generaliza esta aproximación usando un proceso de difusión con salto.

d)Nielsen, Saa-Requejo y Santa-Clara (1993).

Este modelo contiene todo lo anterior, la aproximación del primer tiempo de paso usa una cota estocástica, el incumplimiento sucede si es tocada. La tasa de recuperación se desarrolla de acuerdo al modelo de Vasicek [24] con parámetros de variación de tiempo como especifica Hull y White [25].

e)Kim, Ramaswamy y Sundareson (1993).

Extiende la aproximación del primer tiempo de paso introduciendo una tasa de interés estocástica. Usan el proceso de raíz cuadrada propuesto por Cox, Ingersoll y Ross en 1985. Ellos suponen que la cota de incumplimiento es una constante dependiente del tiempo

$$V^d(t) = K.$$

El nivel de la cota depende del valor del cupón que se debe a los acreedores del bono. Si no es tocada durante la vigencia, el pago final es el $min(V, F)$ donde V es el valor de la firma y F el valor nominal de la deuda en papel. Si la cota es tocada, se supone que el incumplimiento y la tasa de recuperación es: $min(w(t)P(t,T), V)$ donde $w(t)$ es el factor del bono corporativo.

Kim, Ramaswamy y Sundareson (1993) resuelven numéricamente las ecuaciones diferenciales parciales y encuentran que el *spread* de crédito es más alto si se introducen tasas de interés estocásticas en lugar de las estándares.

f)Longstaff-Schwartz (1995 y 1996).

Es una adaptación más realista de Black-Cox. El modelo usa la tasa de interés estocástica, modelando con la *spot* como un proceso Vasicek correlacionada con el proceso log-normal. La cota de incumplimiento es exógena y constante denotada por $V^d(t) = K$. Longstaff y Schwartz usan su modelo para calcular el precio del bono cupón cero de crédito como:

$$P^d(t,T) = P(t,T)(1 - wQ(X, r, t, T))$$

donde:

[24] Vasicek desarrolló en 1977 un proceso llamado regreso a la media.

[25] Hull y White en 1990 obtienen la solución acotada para el bono cupón-cero (un bono sin cupones) si se tiene un comportamiento Vasicek.

- $P(t,T)$: es el precio del bono libre de incumplimiento dado por una expresión derivada por Vasicek.
- w: es la tasa de recuperación y no es igual a un valor acotado arriba del primer tiempo de paso. Es un porcentaje sobre el valor nominal de la deuda en caso de incumplimiento, el valor es exógeno.
- $X = VK^{-1}$: es la razón entre el valor de la firma y la cota de incumplimiento.
- Q: es la probabilidad de riesgo neutral al ocurrir el incumplimiento, es decir, el riesgo neutral en la distribución del primer tiempo de paso. Para calcularlo Longstaff y Schwartz(1995) dan una aproximación a la solución de la integral de primer tiempo de paso usando un algoritmo recursivo. Usan un resultado de Buoncuore, Nobile y Ricciardi (1987) ya que el proceso del valor de la firma es un proceso continuo sin saltos aleatorios discretos. Aunque Buoncuore, Nobile y Ricciardi (1987) consideran que la distribución de primer tiempo de paso es un proceso de difusión en una dimensión del logaritmo de la firma discontinua, pero no es así.

Resumiendo: el precio de bonos corporativos (con riesgo) es el precio del bono libre de riesgo multiplicado por la probabilidad de no incumplimiento (*probability-weighted*) y con la tasa de recuperación bajo la medida de riesgo neutral.

g)Briys y de Varene (1997).

Sugieren que la cota del primer tiempo de paso y la tasa de recuperación están dados, por lo que el valor de la firma no es considerada en los cálculos. La cota de incumplimiento es:

$$v(t) = kFP(t,T)$$

donde

- k es una constante exógena.
- F es el valor nominal del bono.
- $P(t,T)$ es el bono libre de riesgo.

En este modelo, se contempla el incumplimiento antes y en la fecha de vencimiento. Si ocurre en el vencimiento, es decir, el valor de los activos de la firma es menor que sus responsabilidades (obligaciones), entonces una fracción w_1 del valor de los activos se pagará. Si la cota de incumplimiento es tocada antes del vencimiento se pagará la fracción w_2 del valor de la cota $v(t)$. Las fracciones w_1 y w_2 son valores exógenos.

4.- Modelos contingentes

También conocidos como modelos de tasa de riesgo o intensidad. Aquí el incumplimiento ocurre de forma fortuita, da un salto en los valores y pasa lo no deseado. Estos modelos se basan en la dependencia entre los incumplimientos de varias compañías. En principio, como se usa la tasa de riesgo, ésta depende de varios factores que se pueden incorporar de manera artificial. Para este modelo es indispensable entender aquéllos de los que afecten a la tasa de riesgo.

La herramienta principal en estos modelos es el proceso Poisson, éste es definido como un proceso de un sólo salto, que puede pasar de solvencia a incumplimiento. La probabilidad de salto está dada en función de la intensidad de incumplimiento (tasa de riesgo), denotada por λ. En particular al caso $\lambda = 1$ se le conoce como un proceso Poisson estándar independiente. El modelo trata de encontrar la densidad del incumplimiento, que es la expresión de los precios de varios instrumentos sensibles al crédito (supone una aplicación lineal del principio de precio-arbitraje).

Los componentes más importantes son: la tasa de interés de riesgo, el tiempo de incumplimiento y el proceso de recuperación.

Entre los modelos contingentes se encuentran los siguientes trabajos:

a) El modelo de Jarrow-Turnbull (1995).

Es posible ver el modelo en tiempo discreto y en continuo.

- Tiempo discreto:

  Este modelo usa la tasa libre de riesgo, modelándola como un árbol binomial combinado. En el inicio hay dos alternativas: salto hacia arriba (sube el activo con probabilidad π_t) o salto hacia abajo (baja el activo con probabilidad $(1-\pi_t)$), en cada periodo hay que considerar también que puede ocurrir o no el incumplimiento con probabilidades λ_t y $1-\lambda_t$ respectivamente. Entonces se obtiene un árbol con cuatro alternativas iniciales. El bono con riesgo de crédito puede ser valuado recursivamente en el árbol, como si fuera un árbol estándar, siempre que se conozcan las probabilidades del riesgo neutral.

  En el vencimiento únicamente se consideran dos casos, incumplimiento y pago de la deuda. Si hay incumplimiento se tiene una tasa de recuperación $0 < \delta < 1$. Si la firma no tuvo problemas, el pago se realiza al 100%.

- Tiempo continuo:

En este modelo se supone que el tiempo de incumplimiento o bancarrota (denotado por τ) tiene una distribución exponencial con un parámetro que es la tasa de riesgo o intensidad de incumplimiento (denotada por λ) considerada constante (es una variable exógena bajo la probabilidad de riesgo neutral y empírica que tiene como consecuencia que durante la vida del bono exista la misma probabilidad de incumplimiento, es decir, es independiente de cualquier variable de estado como la tasa de interés). Además el modelo se basa en la teoría de Heat-Jarrow-Morton(1992) [26]. Se considera a la tasa de recuperación como una variable constante y exógena (denotada por δ).

El precio del bono está dado por un sistema de ecuaciones diferenciales que contempla a la tasa y al movimiento browniano. Al considerar el incumplimiento en el mundo neutral la condición de arbitraje indica que la tasa de volatilidad inducida por el salto es igual a la tasa de ganancia de salto multiplicada por la probabilidad instantánea de salto (λ). Este modelo obtiene el vector del precio de riesgo (denotado γ_t que es el factor de proporcionalidad entre la tendencia y la volatilidad) que se considera constante ($\gamma^d(t)=\gamma^d$). Con lo anterior, el tiempo de incumplimiento (τ) como medida de riesgo neutral tiene una función de densidad exponencial con parámetro $\lambda\gamma^d$.

b) El modelo de Jarrow, Lando-Turnbull (1997).

Jarrow, Lando-Turnbull proponen un modelo que relaciona la probabilidad de incumplimiento con las clasificaciones de créditos. Usan cadenas de Markov con espacios de estados finitos de tiempos homógeneos con una matriz generadora, además usan la medida de martingalas (*martingale*).

Se usa la matriz generadora de transición, cada entrada corresponde a las probabilidades del cambio de clasificación. Cada entrada se supone exponencial con parámetro que corresponde a la probabilidad de transición. Jarrow-Lando-Turnbull (1997) separa la matriz generadora de transición dentro de la parte empírica y ajustan el riesgo. La tasa de recuperación es estimada de los datos históricos.

[26] La teoría de Heat-Jarrow-Morton relaciona la valuación de las reclamaciones contingentes con la teoría estructural estocástica de la tasa de interés (tasa *forward*). Su metodología se basa en técnicas de martingalas (*martingale*) tomando inicialmente la curva de la tasa *forward* y una familia de posibles procesos estocásticos para los movimientos subsecuentes. Al suponer no arbitraje se restringe a la familia de dichos procesos.

Este modelo es una extensión del trabajo de Jarrow-Turnbull (1995) que elimina el supuesto de que la intensidad de incumplimiento es constante todo el tiempo, aunque el supuesto de independencia y que la tasa de recuperación es constante y exógena, se mantienen.

Un problema en la matriz de transición es que se supone que las compañías con la misma clasificación tienen el mismo rendimiento *spread*. Además, el *spread* de crédito sólo se altera cuando hay transición. Lo anterior no se reflejaen el precio de mercado, pero, afecta más tarde a la clasificación.

c) El modelo de Jarrow-Turnbull (1998).

Éste es un trabajo más reciente. En el usan el proceso Vasicek (ignorando los valores negativos) y la función de riesgo parecida a una función lineal con movimiento browniano, que puede estar correlacionado con el proceso de tasa de interés. La libertad de escoger los tres parámetros (por la función lineal) da al modelo una gran flexibilidad, además de involucrar la tasa *spot*, y el movimiento browniano. Aquí el riesgo de crédito tiene dependencia con fundamentos económicos.

d) El modelo de Duffie-Singleton (1995).

El trabajo es muy parecido al de Jarrow-Turnbull (el de 1995), el caso continuo. La tasa de intensidad es denotada por h_t y el valor del bono antes del incumplimiento es S_t. El modelo involucra al proceso tasa-incumplimiento y el valor del bono al tiempo T (fecha de vencimiento). Aquí se puede adecuar un *spread* al rendimiento.

La diferencia con Jarrow-Turnbull es que suponen que en el momento de incumplimiento (τ), el bono corporativo pierde un tanto por ciento de su valor, denotado por L_τ.

Suponen que si el incumplimiento pasa en el tiempo $t < \tau$, entonces el valor del bono empieza a decrecer con probabilidad L_t, pero con probabilidad $(1 - L_t)$ el valor del bono se mantiene intacto. Aquí consideran dos tipos de incumplimiento, el inofensivo con tasa de intensidad $h_t(1 - L_t)$ y el peligroso con tasa de intensidad $h_t L_t$. Cuando se considera el incumplimiento peligroso simplifica la situación, ya que se puede resolver las ecuaciones evitando el uso de la fórmula de Itô.

e) El modelo de bonos.

Cuando se trata con los bonos, el riesgo de crédito se puede calcular si se consideran las dos opciones posibles.

- Cuando el proceso de recuperación es cero.

Al tener un bono corporativo se puede transformar en un bono sin cupones haciendo un cambio de variable de la tasa *spot* $r + h$ [27]. Por ejemplo el problema de bonos emitidos en moneda extranjera (*index-linked*).

- Cuando el proceso de recuperación es δ constante.

  Como se mencionó la tasa de recuperación se considera constante, también la tasa de riesgo (en este caso es μ). Se calcula el *spread* de crédito, obteniéndolo de una función decreciente que depende de la diferencia de tiempos (fechas de vencimiento y de evaluación), pero si se considera la tasa de recuperación cero, entonces se tiene un *spread* constante.

[27] h es precisamente la función de densidad de probabilidad de la tasa de riesgo o intensidad del incumplimiento

Capítulo 2

Modelos de Valuación de derivados y otras herramientas.

En este capítulo se proporcionan las herramientas básicas para la construcción de los modelos de riesgo de crédito más importantes. Además, son necesarios para la comprensión de las aplicaciones que se verán más adelante.

Se revisa la teoría de árboles, el movimiento browniano, el proceso Poisson y lo necesario para la comprensión de las matrices de transición, además, se exponen el uso de las tasas de recuperación para este trabajo.

2.1 Definiciones principales.

Definición: Proceso estocástico

Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es una familia de variables aleatorias, tal que para cada t contenido en T, $X(t)$ es una variable aleatoria. La variable t ,en general, representa al tiempo y $X(t)$ denota, por ejemplo, el número de gente en un banco al tiempo t, el valor de una acción al tiempo t o la posición de una partícula al tiempo t.

T es llamado el conjunto de indices del proceso estocástico. Si T es un conjunto contable se dice que es un proceso discreto. Si T es un intervalo abierto o cerrado de los $\mathbf{R}$, se dice que es un proceso continuo.

El conjunto de los posibles valores de la variable aleatoria $X(t)$ con $t \in T$ se llama *espacio de estados del proceso.*

Un proceso estocástico de tiempo continuo $\{X(t), t \in T\}$ se dice que tiene incrementos independientes si para todos $t_0 < t_1 < ... < t_n$, las n variables aleatorias siguientes:

$$X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$$

son independientes. Se dice que el proceso tiene incrementos independientes estacionarios si la variable $X(t_2 + s) - X(t_1 + s)$ tiene la misma distribución de $X(t_2) - X(t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T$ y $s > 0$.

Definición: cadena de Markov.

Es el proceso que al estar en el estado i tiene una probabilidad fija P_{ij} para llegar al estado j (probabilidad de transición), es decir:

$$P\{X(n+1)/X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{ij}.$$

Para todos los estados $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j$ con $n \geq 0$, se tienen las siguientes características:

$$P_{ij} \geq 0 \qquad i, j \geq 0; \qquad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1 \qquad i = 0, 1, \ldots$$

La matriz de transición $\mathbf{P}$ es aquella que tiene por entradas las probabilidades de cambio, donde los renglones son los estados en los cuales se encuentra el fenómeno y las columnas son los estados a donde se pueden pasar (j).

Ejemplo:

Una clasificadora de compañías tiene tres tipos de deudor, 1, 2 y 3. Las compañía X, Y y Z tienen la siguiente matriz de transición para pasar de su clasificación a otra al término de un año:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Es decir, la compañía X tiene el 20% de probabilidad de pasar de su clasificación a la 1, tiene el 60% de pasar de su clasificación a la 2 y tiene un 20% de probabilidad de pasar de su clase a la número 3. Las siguientes se leen de la misma manera.

Las cadenas de Markov tiene las siguientes propiedades que son útiles cuando se desea evaluar la matriz de transición después de n-periodos (n-pasos), es decir:

i) $\mathbf{P}^{n+m} = \mathbf{P}^n \mathbf{P}^m$.

Nótese que la siguientes propiedades son casos particulares del inciso (i).

1) $\mathbf{P}^2 = \mathbf{PP}$.
2) $\mathbf{P}^n = \mathbf{P}^{n-1+1} = \mathbf{P}^{n-1}\mathbf{P}$.

Las entradas de la matriz $\mathbf{P}^n$ son:

$$P_{ij}^n = P\{X_{n+m} = j | X_m = i\} \qquad n \geq 0, \quad i, j \geq 0$$

Definición: proceso Markov.

Es un proceso estocástico con la propiedad de que dado un valor $X(t)$, la probabilidad de $X(t+s)$, donde $s > 0$, es independiente de los valores $X(u)$, con $u < t$. La distribución condicional del futuro $X(t+s)$ dado $X(t)$ y el pasado $X(u)$, $u < t$, son independientes del pasado.

El proceso Markov $\{X(t), t \in T\}$ cumple con la característica

$$\begin{aligned} P\{X(t_{n+1}) \leq x | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, ..., X(t_n) = x_n\} \\ = P\{X(t_{n+1}) \leq x | X(t_n) = x_n\}. \end{aligned}$$

Únicamente el valor presente de la variable es relevante para predecir el futuro.

Ejemplo: El precio de una acción es de $100. Si el precio sigue un proceso Markov, la predicción para el futuro no es afectado por los precios de hace una semana, un mes o un año. Sólo es afectado por el precio actual, $100.

2.2 Herramientas para modelos discretos: árboles.

El árbol ayuda a representar las diferentes trayectorias que puede seguir el precio de un activo y también es usado para poder encontrar el precio de una opción. Uno de los principales supuestos es que no haya oportunidad de arbitraje (la ganancia es igual en todos los portafolios libres de riesgo, no se tiene posibilidad de obtener una ganancia de la nada).

Se establece una portafolio con los valores de las acciones y de la opción de tal manera que no haya incertidumbre sobre su valor al final del periodo estudiado.

2.2.1 Métodos para valuar opciones.

Este modelo considera que el comportamiento del activo sólo sube o baja de su precio en cada periodo de tiempo. Se puede valuar una opción siguiendo tres métodos diferentes.[10]

1) Teoría de juegos.

Se construye un portafolio que consta de una unidad de opción y a unidades de activos. Se pueden tener valores positivos o negativos, si a es negativo indica que se está vendiendo en corto las unidades de acciones. En la figura (2.1) se ve el comportamiento del activo (sube o baja) y la opción (el precio se encuentra arriba o abajo). Se definira la siguiente terminología:

a) S_0 el precio del activo en la fecha inicial.

b) $S_u = S_\uparrow$ es el precio del activo cuando sube al final del periodo (se especifica más adelante).

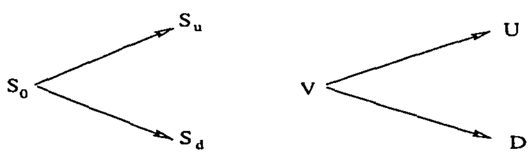
c) $S_d = S_\downarrow$ es el precio del activo cuando baja al final del periodo (se especifica más adelante).

d) E es el precio de ejercicio de la opción.

e) V es el precio de la opción en la fecha de inicio.

f) $U = V_\uparrow$ es dependiendo si es una opción *call* o *put*.
$U = máx(S_u - E, 0)$ si es una opción *call*
$U = máx(E - S_u, 0)$ si es una opción *put*.

g) $D = V_\downarrow$ es dependiendo si es una opción *call* o *put*.
$U = máx(S_d - E, 0)$ si es una opción *call*
$U = máx(E - S_d, 0)$ si es una opción *put*.



U=máx{Su−E,0} si es opción call U=máx{E−Su,0} si es opción put
D=máx{Sd−E,0} si es opción call D=máx{E−Sd,0} si es opción put

Figura 2.1: Comportamiento de una acción y una opción (en un periodo).

Lo que se desea es que $U - aS_u = D - aS_d$, ya que se tiene un portafolio libre de riesgo y por lo tanto usando el principio de no arbitraje debe de valer lo mismo que la inversión correspondiente a la tasa libre de riesgo. Entonces las unidades de activos que se deben comprar son:

$$a = \frac{U - D}{S_u - S_d} = \frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{V_\uparrow - V_\downarrow}{S_\uparrow - S_\downarrow}. \quad (2.1)$$

El precio de la opción en forma general (τ es el número de periodos del árbol) es:

$$V_0 = aS_0 + (V_\uparrow - aS_\uparrow)e^{-r\tau}, \quad (2.2)$$

donde el término $e^{-r\tau}$ es el valor presente de la ganancia en la fecha de vencimiento de la opción. El término τ es el tiempo evaluado (número de periodos del árbol).

Ejemplo: Se tiene una opción call con un precio de ejercicio de 105, y se tiene un precio de $S_u = 120$ y $S_d = 90$. Entonces $V_\uparrow =$máx $(120 - 105, 0) = 15$, $V_\downarrow =$ máx $(90 - 105, 0) = 0$, $r = 0.04879$ y $\tau = 1$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{V_\uparrow - V_\downarrow}{S_\uparrow - S_\downarrow} \\ &= \frac{15 - 0}{120 - 90} = 0.5 \end{aligned}$$

y el valor justo de la opción es:

$$\begin{aligned} V_0 &= aS_0 + (V_\uparrow - aS_\uparrow)e^{-r\tau} \\ &= 0.5(100) + (15 - (0.5)120)e^{-0.04879} \\ &= 7.14. \end{aligned}$$

El precio de la opción en este momento es: $V_0 = 7.14$

2) Método de duplicación de portafolios.

Se considera que el portafolio π tiene b unidades de bono [1] suponiendo que el precio de éste es de \$1 y con a unidades de activos. El precio del bono al tiempo t es e^{rt}.

En este método se modela con base en el comportamiento del bono en un futuro, es decir:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= aS_0 + b \qquad \text{al tiempo } t = \tau \\ \pi_\uparrow &= aS_\uparrow + be^{r\tau} = U \\ \pi_\downarrow &= aS_\downarrow + be^{r\tau} = D. \end{aligned}$$

[1] En su forma básica el bono es una deuda y refleja la promesa de una persona de pagar una cantidad prestada en un tiempo específico. Hay dos tipos: bonos de descuento o cupón-cero (son los bonos que pagan al tenedor únicamente el valor nominal del bono a la fecha de vencimiento) y bonos con cupones (paga el valor nominal en el vencimiento y a lo largo de la vigencia del bono genera pagos periódicos o fijos conocidos como cupones).

Es decir, se desea que el portafolio valuado sea idéntico al valor del derivado al tiempo τ.

$$\begin{aligned} V_0 &= aS_0 + b \qquad \text{los valores de } a \text{ y } b \text{ son:} \\ a &= \frac{U - D}{S_u - S_d} \\ b &= \left[U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u\right] e^{-r\tau}. \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de a y b en la ecuación de V_0 y factorizando U y D, se obtiene:

$$V_0 = e^{-r\tau}[qU + zD] \tag{2.3}$$

donde q y z son:

$$\begin{aligned} q &= \frac{e^{r\tau} S_0 - S_d}{S_u - S_d} \\ z &= \frac{S_u - e^{r\tau} S_0}{S_u - S_d}. \end{aligned}$$

La ecuación 2.3 muestra que el portafolio se obtiene al traerlo a valor presente ($e^{-r\tau}$) de un promedio ponderado del valor de la opción al tiempo de ejercicio.

El valor q (la posibilidad de subir el activo suponiendo no tener oportunidad de arbitraje) puede ser tomado por una probabilidad, también $z = 1 - q$. Al observar la fórmula de V_0 se advierte que puede ser tomado como la esperanza de la función de densidad del comportamiento de la opción.

$$V_0 = e^{-r\tau}[qU + (1 - q)D] = e^{-r\tau} E_q[V_1].$$

Un importante principio general en la valuación de opciones es conocido como *valuación neutral al riesgo*. Éste establece que para valuar opciones se puede, suponer que el mundo es neutral al riesgo. La rentabilidad esperada de todas las acciones en un mundo neutral al riesgo es el tipo de interés libre de riesgo. Además, una opción puede ser valuada en un mundo neutral al riesgo traida a valor presente con la tasa de interés libre de riesgo.

Ejemplo: se tiene un activo tal que $S_0 = 50$, $S_u = 55$, $S_d = 40$, $r = 0.04$ y la opción *call* tiene precio de ejercicio de $E = 48$. ¿Cuál es el precio de la opción call en este momento?.

Usando la fórmula del valor esperado se tiene:

$$q = \frac{1.04(50) - 40}{55 - 40} = 0.8.$$

y

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-r\tau}[qU + (1-q)D] = \frac{1}{1.04}[0.8(7) + 0.2(0)] \\ &= \frac{5.6}{1.04} = 5.38. \end{aligned}$$

El precio sin oportunidad de arbitraje de la opción es: \$5.38.

3) Enfoque probabilístico.

En este modelo el inversionista es neutral al riesgo y se deben tener los precios superiores e inferiores de la acción.

Se desea obtener el valor esperado del portafolio después de un año $E(\pi_T)$. Lo anterior debe ser igual con lo que obtendría con la tasa libre de riesgo. Entonces $p = 0.05$ [2] que es el rendimiento esperado sobre la acción.

En la opción de compra el valor esperado es:

$$E(Call) = p(maxS_u - X, 0) + (1-p)(maxS_d - X, 0).$$

esto es lo que se tiene en un año, así que el valor esperado en valor presente (descuento con interés compuesto) da lo mismo con los otros métodos

$$V_0 = \frac{E(Call)}{e^{r\tau}}.$$

2.2.2 Modelación del precio de acciones (más de un periodo) usando árboles.

Para explicar este modelo hay que definir lo siguiente:

* S_0 es el precio del activo al tiempo $t = 0$.

* u es la cantidad que al ser multiplicada por S_0 proporciona el valor del activo al tiempo t_1 si el activo subió de precio. $S_1 = uS_0$.

* d es la cantidad que al ser multiplicada por S_0 se obtiene el valor del activo al tiempo t_1 si el activo bajó de precio. $S_1 = dS_0$.

* p : es la probabilidad de que el activo suba de precio al tiempo t_1.

[2] p es la probabilidad que produce un rendimiento de la acción equivalente (en sentido hipotético del valor) al rendimiento sin riesgo

* q : es la probabilidad de que el activo suba al considerar que se tiene riesgo neutral (tener la tasa libre de riesgo) y la ausencia de arbitraje [10], es decir, el método de duplicación.

$$q = \frac{e^{r\tau} S_0 - S_d}{S_u - S_d} \quad S_u = uS_0 \text{ y } S_d = dS_0. \tag{2.4}$$

Si se desea modelar el comportamiento del activo al tiempo t_1, entonces sólo se consideran dos casos: el activo sube de precio (uS_0) o el activo baja de precio (dS_0). Pero si se desea el comportamiento al tiempo t_2 se tienen cuatro casos en t_2. Al considerar en t_1, el activo que ya subió (uS_0), tiene dos alternativas más, que suba dado que ya subió o que baje dado que ya subió (es decir uuS_0 o udS_0 respectivamente). Al considerar en t_1 el activo que bajó (dS_0) se tienen dos casos más, que suba dado que bajó o que baje dado que bajó el precio (es decir duS_0 o ddS_0 respectivamente). Como se ve, se tendran 2^k casos en el tiempo t_k evaluado. En la figura siguiente se detalla el proceso de tres periodos mostrando las probabilidades correspondientes a cada rama del árbol y el valor del activo en cada caso al tiempo $t = 3$.

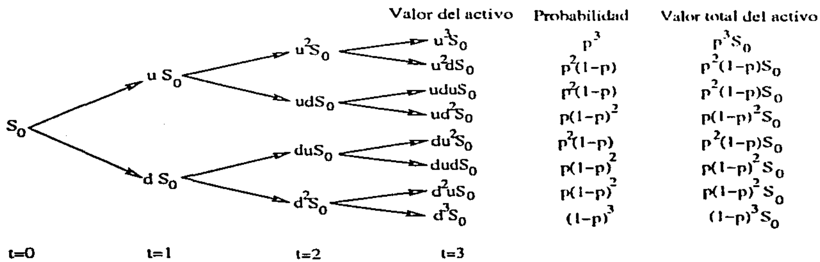


Figura 2.2: Comportamiento del activo usando árboles.

Se considera que los "parámetros del árbol" p, u y d son conocidos. Con la ayuda de éste modelo se calculará el precio de una opción call europea, una opción call americana y una opción exótica (opción barrera.)

2.2.3 Cálculo de u y d con datos reales. *Algoritmo de Hull-White.*

Al tener el modelo binomial del comportamiento de un activo S a un tiempo de evaluación Δt (ambas variables aleatorias), un dato que es de interés es el rendimiento relativo del activo, es decir:

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \frac{S}{S_0} - 1.$$

Para poder estimar a u y a d es necesario estimar antes a $\mu\Delta t$ (el cambio porcentual de promedio del precio de la acción en el tiempo Δt) y $\sigma\Delta t$ (la aleatoriedad del rendimiento relativo en un tiempo Δt). Recordando el comportamiento del activo (figura 2.1) con función de densidad Bernouilli [3] se tiene:

$$\mu\Delta t = E\Big[\frac{S - S_0}{S_0}\Big] = E\Big[\frac{S}{S_0} - 1\Big] = pu + (1-p)d$$

y

$$\sigma^2\Delta t = E\Big[\Big(\frac{S - S_0}{S_0} - \mu\Delta t\Big)^2\Big] = p(1-p)(u-d)^2.$$

Despejando se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{u+d}{2} = 1 + \mu\Delta t \qquad\qquad u - d = 2\sigma\sqrt{\Delta t}. \tag{2.5}$$

Esto permite calcular el valor de u y d conociendo los valores de μ, σ, Δt y la probabilidad de subir o bajar es $p = \frac{1}{2}$. Entonces considerando la posición del activo en el árbol, se obtiene:

$$P\Big[\frac{S_k}{S_{k-1}} = u\Big] = P\Big[\frac{S_k}{S_{k-1}} = d\Big] = \frac{1}{2}.$$

donde $S_1 = x_1 S_0$ y $S_{k+1} = x_{k+1}S_k$ con x variable aleatoria independiente bernouilli. Los mejores estimadores considerando la muestra son:

$$\overline{U} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_k - 1)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1)}{n} \qquad\qquad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1)^2 - n\overline{U}^2}{n-1} \tag{2.6}$$

[3]Se sabe que la esperanza de esta variable, denotada por Blli, es $E(x) = p(a) + (1-p)b$ y la varianza $Var(x) = p(1-p)(a-b)^2$ con $x \sim Blli(p)$.

con $\overline{U}$ y S^2 la media y la varianza muestral de $S_0, S_1, \ldots, S_n$, entonces las estimaciones son:

$$\mu \approx \frac{\overline{U}}{\Delta t} \qquad \text{y} \qquad \sigma \approx \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \tag{2.7}$$

Al tener estas estimaciones se despejan los valores en 2.5 y se obtiene las estimaciones de u y d.

$$u = 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \qquad \text{y} \qquad d = 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}. \tag{2.8}$$

2.2.4 Otra manera de calcular u y d con datos reales.

Los parámetros p, u y d deben dar valores correctos para la media y la varianza del precio durante un intervalo de tiempo Δt. Si se considera que se trabaja en un mundo neutral al riesgo, la rentabilidad esperada de las acciones es el tipo de interés libre de riesgo, r. De ahí que el valor esperado del precio de las acciones al final del intervalo de tiempo Δt es $Se^{r\Delta t}$, donde S es el precio de las acciones al principio del intervalo de tiempo. De esto se sigue que:

$$Se^{r\Delta t} = pSu + (1-p)Sd.$$

o

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d. \tag{2.9}$$

Considere que la desviación estándar de la variación proporcional al precio de las acciones en un pequeño intervalo Δt es $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Esto significa que la varianza de la variación real en Δt es $S^2\sigma^2\Delta t$. Si se sustituye la varianza entonces se obtiene:

$$Var(Q) \;=\; E(Q^2) - E^2(Q).$$

o

$$S^2\sigma^2\Delta t \;=\; pS^2u^2 + (1-p)^2S^2d^2 - S^2[pu + (1-p)d]^2,$$

de donde

$$\sigma^2\Delta t = pu^2 + (1-p)^2d^2 - [pu + (1-p)d]^2. \tag{2.10}$$

Las ecuaciones (2.9) y (2.10) imponen dos condiciones sobre p, u y d. Una tercera condición que se utiliza normalmente es:

$$u = \frac{1}{d}. \tag{2.11}$$

Puede demostrarse que si Δt es pequeño, las tres condiciones implican:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{2.12}$$

La ecuación (2.12) es correcta con los supuestos de no arbitraje y de valuación neutral al riesgo.

2.2.5 Ejemplos de valuación de opciones.

Opción *call* europea.

Ejemplo: se tienen los siguientes datos:

$S_0 = 100$, $X = 105$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 0.05$ y el tiempo periodos es $\tau = 1$.

La opción tiene tres periodos, el árbol de precios de activos y del valor de la opción se describen en la siguiente figura.

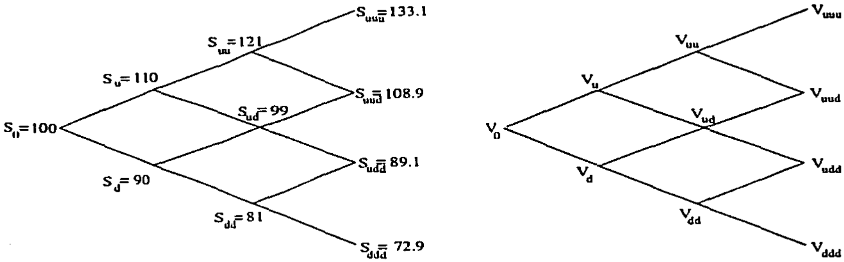


Figura 2.3: Árboles binomiales de activo y opción.

donde $S_u = uS_0$, $S_{uu} = uuS_0$ y $S_{uud} = u^2dS_0$. Usando las ramas finales del árbol y la ecuación (2.4) de la probabilidad de subir o bajar el precio al considerar el mundo neutral (libre de riesgo y sin oportunidad de arbitraje) se calculará el precio correspondiente de la opción.

$$q = \frac{S_0 e^{r\tau} - uS_0}{uS_0 - dS_0}$$

o

$$q = \frac{e^{r\tau} - u}{u - d} = \frac{e^{0.05} - 9}{1.1 - 0.9} = 0.7564.$$

Y para el árbol:

$$\begin{aligned} V_{uuu} &= \text{máx}(133.1 - 105, 0) = 28.1 \\ V_{uud} &= \text{máx}(108.9 - 105, 0) = 3.9 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V_{udd} &= \text{máx}(89.1 - 105, 0) = 0 \\
V_{ddd} &= \text{máx}(72.9 - 105, 0) = 0 \\
V_{uu} &= e^{-r\tau}[qV_{uuu} + (1-q)V_{uud}] = e^{-0.05}[0.7564(28.1) + 0.2436(3.9)] = 21.12 \\
V_{ud} &= e^{-r\tau}[qV_{uud} + (1-q)V_{udd}] = e^{-0.05}[0.7564(3.9) + 0.2436(0)] = 2.81 \\
V_{dd} &= e^{-r\tau}[qV_{uuu} + (1-q)V_{uud}] = e^{-0.05}[0.7564(0) + 0.2436(0)] = 0 \\
V_{u} &= e^{-r\tau}[qV_{uu} + (1-q)V_{ud}] = e^{-0.05}[0.7564(21.12) + 0.2436(2.84)] = 15.85 \\
V_{d} &= e^{-r\tau}[qV_{ud} + (1-q)V_{dd}] = e^{-0.05}[0.7564(2.81) + 0.2436(0)] = 2.02 \\
V_{0} &= e^{-r\tau}[qV_{u} + (1-q)V_{d}] = e^{-0.05}[0.7564(15.85) + 0.2436(2.02)] = 11.87
\end{aligned}
$$

Así el valor justo de la opción con vencimiento a tres periodos es: $V_0 = 11.87$.

Opción *put* americana.

La opción americana puede ser ejercida en cualquier momento antes de la expiración. Esto lleva a considerar el caso de ejercer la opción en cada periodo.

Ejemplo: se tienen los siguientes datos para calcular el valor justo de una opción put con vencimiento a tres periodos:

$S_0 = 100$, $X = 100$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 0.05$, $q = 0.7564$, $(1-q) = .2436$ y el tiempo interperiodos es $\tau = 1$.

Al observar de nuevo la (figura 2.3), hay que encontrar de nuevo los precios de la opción en el tiempo $t = 3$.

$$
\begin{aligned}
V_{uuu} &= \text{máx}(100 - 133.1, 0) = 0 \\
V_{uud} &= \text{máx}(100 - 108.9, 0) = 0 \\
V_{udd} &= \text{máx}(100 - 89.1, 0) = 10.9 \\
V_{ddd} &= \text{máx}(100 - 72.9, 0) = 27.1
\end{aligned}
$$

Para calcular los valores de V_{uu}, V_{ud} y V_{dd} hay que considerar dos casos, que no se ejerza, V_{uu}^N, o que sí, V_{uu}^S.

$$
\begin{aligned}
V_{uu}^N &= e^{-r\tau}[qV_{uuu} + (1-q)V_{uud}] = e^{-0.05}[0.7564(0) + 0.2436(0)] = 0 \\
V_{uu}^S &= \text{máx}(100 - 121, 0) = 0 \\
V_{uu} &= \text{máx}(V_{uu}^N, V_{uu}^S) = 0 \\
V_{ud}^N &= e^{-r\tau}[qV_{uud} + (1-q)V_{udd}] = e^{-0.05}[0.7564(0) + 0.2436(10.9)] = 2.53 \\
V_{ud}^S &= \text{máx}(100 - 99, 0) = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{ud} &= \text{máx}(V_{ud}^N, V_{ud}^S) = 2.53 \\
V_{dd}^N &= e^{-r\tau}[qV_{uuu} + (1-q)V_{uud}] = e^{-0.05}[0.7564(10.9) + 0.2436(27.1)] = 14.12 \\
V_{dd}^S &= \text{máx}(100 - 81, 0) = 19 \\
V_{dd} &= \text{máx}(V_{dd}^N, V_{dd}^S) = 19 \\
V_u^N &= e^{-r\tau}[qV_{uu} + (1-q)V_{ud}] = e^{-0.05}[0.7564(0) + 0.2436(2.53)] = 0.59 \\
V_u^S &= \text{máx}(100 - 110, 0) = 0 \\
V_u &= \text{máx}(V_u^N, V_u^S) = 0.59 \\
V_d^N &= e^{-r\tau}[qV_{ud} + (1-q)V_{dd}] = e^{-0.05}[0.7564(2.53) + 0.2436(19)] = 6.22 \\
V_d^S &= \text{máx}(100 - 90, 0) = 10 \\
V_d &= \text{máx}(V_d^N, V_d^S) = 10 \\
V_0^N &= e^{-r\tau}[qV_u + (1-q)V_d] = e^{-0.05}[0.7564(0.59) + 0.2436(10)] = 2.74 \\
V_0^S &= \text{máx}(100 - 100, 0) = 0 \\
V_0 &= \text{máx}(V_0^N, V_0^S) = 2.74
\end{aligned}
$$

Gráficamente se ve en la (figura 2.4.)

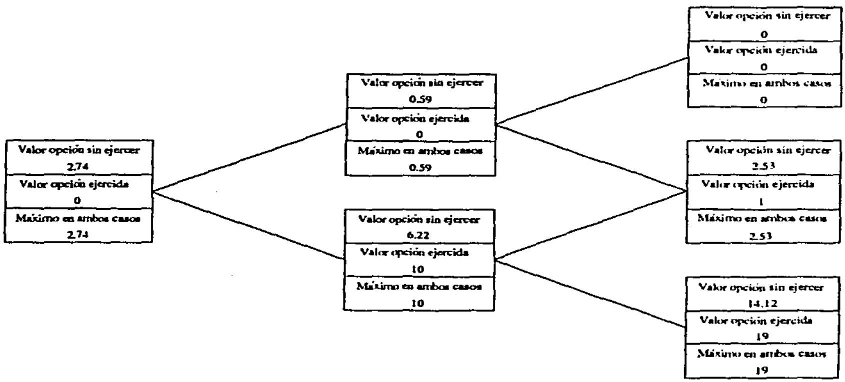


Figura 2.4: Opción *put* americana.

El valor de la opción *put* americana a tres periodos es: $V_0 = 2.74$.

Opción exótica (barrera).

Para este ejemplo se usan los siguientes datos:

$S_0 = 100$, $X = 105$, $u = 1.1$, $d = 0.9$, $r = 0.05$ y el tiempo interperiodos es $\tau = 1$.

La opción es una *call* europea con expiración a tres periodos, con un precio *strike* de 105. Ésta opción es *knock-out* [4] con una barrera de 95. El precio *stock* será considerado arriba de 95. Primero se presenta el precio de los activos en el árbol con una barrera con línea punteada. Todos los valores que se encuentren arriba de la barrera serán usados para calcular el precio de la opción.

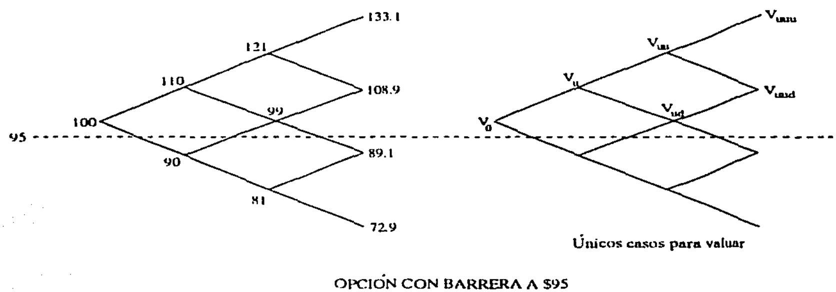


Figura 2.5: Árbol para una opción barrera.

Para calcular el valor V_0 hay que considerar los caminos por los que pasó para llegar a las dos únicas posibilidades para ejercer en el tiempo $t = 3$, es decir, V_{uuu} o V_{uud} o V_{udu}. Para ello se tienen tres caminos:

$$\begin{aligned} V_{uuu} &= \text{máx}(S_0 - E, 0) = \text{máx}(133.1 - 105, 0) = 28.1 \\ V_{uud} = V_{udu} &= \text{máx}(108.9 - 105, 0) = 3.9 \\ P[V_{uuu} \text{ llegue }] &= q^3 = (0.7564)^3 = 0.4328 \\ P[V_{uud} \quad o \quad V_{udu} \text{ llegue }] &= 2q^2(1-q) = 0.2787 \end{aligned}$$

[4]Hay varios tipos de opción barrera, por ejemplo la opción *Knock-out*, ésta se comporta de manera similar a las opciones estándar, pero se cancelan automáticamente si el precio del subyacente alcanza la barrera. El inversor recibe en ese caso una parte de la prima que pagó por la opción: estas opciones permiten cubrirse ante las pérdidas que se originarían si sus expectativas no fuesen correctas. Opciones *Knock-in*: éstas opciones se activan cuando el valor del bien subyacente alcanza la barrera.

entonces el valor esperado para la opción barrera se obtiene considerando todas las rutas posibles en $t = 3$.

$$V_0 = e^{-0.05(3)}E[\text{rutas}] = e^{-0.015}[0.4328(28.1) + 0.2787(3.9)] = 11.40$$

El precio para la opción barrera a 95 es: $V_0^{b=95} = 11.40$.

La opción barrera es de menor costo que las opciones estándares europeas, como se puede comparar, ya que hay menos alternativas a considerar.

2.3 Herramientas de modelos estructurales: movimento browniano.

El estudio del movimento browniano se inició con el botánico inglés Robert Brown. El observó en 1826 que las partículas suspendidas en un líquido estaban sujetas a un movimiento en zigzag. Einstein y Smoluchovski encontraron que el movimiento irregular de las partículas pueden ser analizados por leyes de probabilidad, en efecto, el desplazamiento sobre un periodo de tiempo sigue una distribución normal. Einstein en 1906 presentó una teoría cuantitativa correcta del movimiento browniano.

El estudio del movimiento browniano como un "proceso estocástico" lo introdujo Wiener en 1923. Aunque el primero en estudiarlo fue el matemático y actuario francés Louis Bachelier que propone un modelo matemático del comportamiento de los activos financieros (1900), establece que el movimiento de los precios siguen una "caminata aleatoria" [2], aunque en su época le criticaron fuertemente el que los activos podían tomar valores negativos de acuerdo a su modelo matemático. Suponga que la descripción de tal movimiento es como el que sigue.

Caminata aleatoria.

Se se observa el movimiento de una partícula browniana, la cual tiene movimiento sobre una recta. Puede moverse de su posición hacia la derecha o hacia la izquierda con probabilidades p y $q = 1 - p$. Su posición, $X_{(t)}$, al tiempo $t = n$ puede tener distintas posiciones todo depende del experimento o realización que se analice.

Al usar la variable independiente $\mathcal{E}$, el tamaño del desplazamiento, en caso de tomar desplazacimientos unitarios

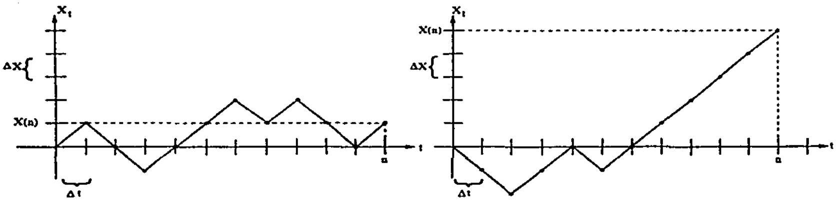


Figura 2.6: Primer y segundo ensayo.

$$\mathcal{E} = \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } p \\ -1 & \text{con probabilidad } q = 1 - p, \end{cases}$$

o en caso de tomar desplazamientos de tamaño Δ

$$\mathcal{E} = \begin{cases} +\Delta & \text{con probabilidad } p \\ -\Delta & \text{con probabilidad } q = 1 - p. \end{cases}$$

La caminata aleatoria se representa por una sucesión de variables aleatorias $\{X_n, n > 0\}$, que constituyen un proceso estocástico discreto. En efecto, $X_n - X_0$ es la suma de variables independientes con distribución Bernoulli, es decir, una binomial con parámetros n y p.

Sean $y_1, y_2, ...$ una sucesión de variables aleatorias independientes distribuidas idénticamente, y sea $X_n = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Al proceso estocástico $\{X_(n), n = 0, 1, 2, ...\}$ se le conoce como caminata aleatoria.

Definición: proceso Wiener

Un proceso estocástico $\{X(t), t > 0\}$ se dice que es de Wiener si:

i) $\{X(t), t > 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes.

ii) $\forall\ t > 0$, $X(t) \sim N(0, t)$.

iii) $X_0 = 0$ con probabilidad 1.

2.3.1 Modelo para el precio del activo.

Los precios de los activos pueden ser modelados usando el movimiento browniano que puede ser afectado por aspectos económicos del mercado.

El modelo con una variable estocástica $X(t)$, que representa el valor de un activo o bien subyacente se compone de un movimiento browniano y una parte determinística.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB \tag{2.13}$$

Si se toma a σ (volatilidad) como cero en la ecuación anterior, se obtiene la parte determinista del modelo, una ecuación diferencial ordinaria

$$dS = \mu S dt$$

cuya solución es:

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)}$$

que es precisamente el precio del activo al tiempo T traído a valor presente con un interés compuesto.

2.3.2 Lema de Itô

Es una de las herramientas más importante en el estudio y aplicación de los procesos estocásticos. Fue desarrollado por el matemático K. Itô en 1951. Este lema está basado en la expansión de la serie de Taylor, para variables aleatorias.

Sea una función $f(x)$ que depende de una variable real x. La expansión de Taylor a segundo orden es:

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)(dx) + \frac{f''(x_0)(dx)^2}{2} + t.o.s,$$

[5] si se denota $dx = x - x_0$, se tiene

$$f(x_0 + dx) - f(x_0) = f'(x_0)(dx) + \frac{f''(x_0)(dx)^2}{2} + t.o.s.$$

Sea $df = f(x) - f(x_0)$, se obtiene entonces la siguiente expresión:

$$df = f'(x_0)dx + \frac{f''(x_0)dx^2}{2} + t.o.s.$$

[5] t.o.s. Son términos de orden superior que son despreciables ya que teniendo el término lineal es una muy buena aproximación.

Y si se tiene una función que depende de las variables reales x y t, la expansión de Taylor es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dxdt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2\Big] + t.o.s.$$

pero si se considera sólo una aproximación lineal, entonces el resultado es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial t}dt.$$

Sin embargo si se considera a $f(S,t)$ una función que depende del comportamiento de una variable aleatoria y del tiempo, la expansión de Taylor a segundo orden es:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}dS + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dS^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial S \partial t}dSdt + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}dt^2\Big]. \tag{2.14}$$

Hay que ver que cuando se eleva al cuadrado a dS se obtienen valores que estén aportando términos lineales, así que

$$(dS)^2 = (\mu S dt + \sigma S dB)^2 = \mu^2 S^2 dt^2 + \sigma^2 S^2 dB^2 + 2S^2 \mu\sigma dB dt. \tag{2.15}$$

Esto puede resumirse formalmente con las reglas de multiplicación para diferenciales estocásticas [2]:

*	dB	dt
dB	dt	0
dt	0	0

Entonces

$$(dS)^2 = \sigma^2 S^2 dt, \qquad \text{pues } (dB)^2 \to dt \quad \text{cuando} \quad dt \to 0.$$

Sustituyendo (2.15) y (2.13) en (2.14) se obtiene:

$$df = \frac{\partial f}{\partial S}(\mu S dt + \sigma S dB) + \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}S^2\sigma^2 dt\Big] \tag{2.16}$$

y al factorizar términos comunes se obtiene el ***Lema de Itô*** para funciones de S y t

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial S}S\mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}S^2\sigma^2\Big)dt + \frac{\partial f}{\partial S}S\sigma dB. \tag{2.17}$$

2.3.3 Construcción de un portafolio libre de riesgo.

Se necesitan algunos supuestos para construir el portafolio.

1) El precio del activo sigue una movimiento browniano geométrico.

2) La tasa de interés r libre de riesgo y la volatilidad σ del bien subyacente son conocidas y constantes.

3) No hay costos de transacción.

4) Las transacciones del bien subyacente pueden ser en cualquier instante (son continuas).

5) Todos los portafolios libres de riesgo valen lo mismo, es decir no hay posibilidad de arbitraje.

Sea:

a) $V(S,t)$: una función que depende del valor del bien subyacente S al tiempo t (que denota al precio de la opción).

b) E : el precio de ejercicio.

c) T : la fecha de ejercicio.

El portafolio se construye con una cantidad de opciones (producto derivado) y una cantidad del bien subyacente, para poder tener el equilibrio deseado. El valor del portafolio es:

$$\pi = V - \Delta S$$

donde Δ es un valor que representa el número de unidades de acción vendidas por cada unidad de opción. Cuando transcurre el tiempo lo que se desea es que las diferencias mantengan la igualdad

$$d\pi = dV - \Delta dS.$$

Al usar el Lema de Itô (ecuación 2.17) y la definición de dS (ecuación 2.13), se obtiene:

$$\begin{aligned} d\pi &= \left[\left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S dB\frac{\partial V}{\partial S}\right] - \Delta(\mu S dt + \sigma S dB) \\ &= \left[\left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S\Delta\right)dt\right] + \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S} - \sigma S\Delta\right)dB. \end{aligned}$$

Es necesario eliminar la componente aleatoria, es decir dB, para obtener un portafolio libre de riesgo. Entonces:

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S},$$

que es la razón de cobertura. Al sustituir la razón en la ecuación anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} d\pi &= \left[\left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt\right] + \left(\sigma S\frac{\partial V}{\partial S} - \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dB \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt. \end{aligned}$$

El portafolio debe valer como si se invirtiera en el banco, es decir

$$\begin{aligned} d\pi &= \pi r dt \\ &= \left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) r dt, \end{aligned}$$

por principio de no arbitraje.

Igualando las dos expresiones para $d\pi$ en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt &= \left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right) r dt \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= rV - rS\frac{\partial V}{\partial S}. \end{aligned}$$

Reordenando términos se obtiene la ecuación de ***Black-Scholes***

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \tag{2.18}$$

2.3.4 De Black-Scholes a la ecuación de calor.

Si se resuelve la ecuación de Black-Scholes se encuentra el precio de la opción (producto derivado). Para encontrar la solución se debe transformar en una ecuación que se pueda resolver fácilmente. La ecuación de calor (también llamada ecuación de difusión) tiene soluciones sencillas y aplicando cambios de variables a la ecuación de Black-Scholes se puede llegar a ésta.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t). \tag{2.19}$$

Los cambios de variable necesarios son:

$$S = Ee^x \; ; \quad t = T - \frac{\tau}{(\frac{1}{2})\sigma^2} \; ; \quad V = Ev(x,\tau).$$

Despejando se obtiene lo siguiente:

$$\tau = (T-t)\tfrac{1}{2}\sigma^2 \; ; \quad x = lnS - lnE; \quad v(x,\tau) = \frac{V(S(x,\tau),t(x,\tau))}{E}.$$

Hay que realizar los cambios de variable en la ecuación de Black-Scholes (2.18). Se inician los cambios de variable con $v = V(S(x,\tau), t(x,\tau))$

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial S} \quad = \quad \frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} \quad = \quad -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau}$$

por lo que

$$\frac{\partial V^2}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial S} \quad = \quad -\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Si se sustituye lo anterior en la ecuación 2.18

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Big(-\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big) + rS\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x} - rv,\\
0 &= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + r\frac{\partial v}{\partial x} - rv,\\
0 &= -\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial \tau} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv(x,\tau),
\end{aligned}$$

y finalmente

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} \quad = \quad \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - r\frac{v(x,\tau)}{\frac{1}{2}\sigma^2}.$$

Sea $k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$, esto implica que:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = (k_1 - 1)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - k_1 v(x,\tau). \tag{2.20}$$

Si se considera $v(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$ entonces las derivadas quedan como sigue

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \tau} &= \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial \tau}\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x}\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la ecuación 2.20

$$\beta u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial \tau} = (k_1 - 1)\Big[\alpha u(x,\tau) + \frac{\partial u}{\partial x}\Big] + \Big[\alpha^2 u(x,\tau) + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big] - k_1 u(x,\tau).$$

Al realizar la factorización

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (\alpha^2 + (k_1-1)\alpha - k_1 - \beta)u(x,\tau) + (2\alpha + (k_1-1))\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si se hace que $\beta = \alpha^2 + (k_1-1)\alpha - k_1$ y $2\alpha + (k_1 - 1) = 0$
se llega a la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.21}$$

con la condición inicial $u(x,0) = u_0(x) = \text{máx}\{e^{\frac{(k_1+1)}{2}x} - e^{\frac{(k_1-1)}{2}x}, 0\}$.

2.3.5 Solución de la ecuación de Black-Scholes.

Para encontrar la solución a la ecuación de Black-Scholes es necesario resolver la ecuación de calor.

2.3.5.1 Solución de la ecuación de calor.

La ecuación de calor homogénea sujeta a condiciones iniciales y en la frontera es:

$$u_\tau - \Delta u = 0.$$

Considere $t > 0$ y $x \in U$ donde $U \in R$ y es abierto.

La ecuación de calor también conocida como de difusión describe la evolución en el tiempo de la densidad $u(x,t)$, tal como el calor, la concentración química, etc.

Por ejemplo: la distribución de una gota de tinta en un recipiente. Si el tiempo es muy cercano al instante en que cayó la gota de tinta, la concentración se encuentra en sólo una región muy pequeña, la distribución se localiza en el cero. Conforme pasa el tiempo la tinta se distribuirá más y más logrando expanderse. Cuando $t \to \infty$ la concentración de tinta será uniforme en todo el recipiente.

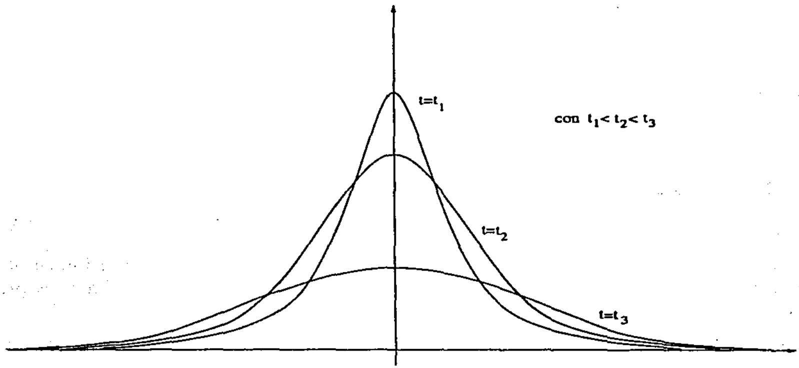


Figura 2.7: Distribución de tinta.

Definición: La función

$$\Phi = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{si } x \in R^n, t > 0 \\ 0 & \text{si } x \in R^n, t < 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

es llamada la solución fundamental de la ecuación de calor.

La solución Φ tiene un punto singular en $(0,0) \in \mathbf{R}$. Algunas veces se escribe $\Phi(x,t) = \Phi(|x|,t)$ para enfatizar que la solución fundamental es radial en la variable x. La constante de normalización $(4\pi)^{-\frac{n}{2}}$ se escoge para que

$$\int_{R^n} \Phi(x,t) \quad dx = 1.$$

Si se tiene que formar la solución del problema con valor inicial (problema de Cauchy) hay que emplear la función Φ.

Nótese que la función $(x,t) \longrightarrow \Phi(x,t)$ resuelve la ecuación de calor fuera de la singularidad $(0,0)$. Si Φ_1 y Φ_2 son soluciones linealmente independientes y continuas, entonces cualquier combinación lineal también, es decir, $a\Phi_1 + b\Phi_2$ es solución. Así que $(x,t) \longrightarrow \Phi(x-y,t)$ para cada $y \in R^n$ fijo, usando la integral de convolución, la solución al problema con valor inicial en g(y) es:

$$u(x,t) = \int_{R^n} \Phi(x-y,t)g(y) \quad dx,$$

es decir,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{R^n} e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}} g(y) \quad dy \tag{2.23}$$

con $x \in R^n, t > 0$. Con esto la función $u(x,t)$ no sólo satisface la ecuación diferencial, sino que también satisface automáticamente las condiciones iniciales. Aquí se muestra la relación que hay entre la entrada $g(x)$ y la salida $u(x,t)$

La solución explícita a la ecuación de calor con valores iniciales $u(x,0)$:

Como el problema a resolver es $x \in R$ y τ el tiempo, con la condición inicial $u(x,0) = u_0(x) = \text{máx}\{e^{\frac{(k_1+1)}{2}} - e^{\frac{(k_1-1)}{2}}, 0\}$, las ecuaciones 2.22 y 2.23 se reducen a:

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-s)^2}{4t}} u_0(s) \quad ds \qquad \text{con } x \in R, \tau > 0. \tag{2.24}$$

donde $u_0(s) = \text{máx}\ \{e^{\frac{(k_1+1)}{2}x} - e^{\frac{(k_1-1)}{2}x}, 0\}$.

2.3.5.2 Solución de la ecuación de Black-Scholes.

Para poder resolver la ecuación de Black-Scholes hay que sustituir los cambios de variables que se realizaron.

En la ecuación (2.24) se hace el siguiente cambio $x' = \frac{(x-s)}{\sqrt{2\tau}}$, la expresión que se obtiene es:

$$u(x,\tau) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x')^2}{2}} u_0(x'\sqrt{2\tau} + x) \quad dx'$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(k_1+1)}{2}(x+x'\sqrt{2\tau})}e^{\frac{-(x')^2}{2}} \quad dx' - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(k_1-1)}{2}(x+x'\sqrt{2\tau})}e^{\frac{-(x')^2}{2}} \quad dx' \\ &= I_1 - I_2. \end{aligned}$$

Solución de la integral I_1.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(k_1+1)}{2}(x+x'\sqrt{2\tau})(\frac{-(x')^2}{2})} \quad dx' \\ &= \frac{e^{\frac{(k_1+1)x}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{(k_1+1)^2\tau}{4}}e^{-\frac{1}{2}(x'-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau})^2}dx' \\ &= \frac{e^{\frac{(k_1+1)x}{2}+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho \\ &= e^{\frac{(k_1+1)x}{2}+\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}N(d_1), \end{aligned}$$

con

$$d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}.$$

$N(d_1)$ es la función de densidad acumulativa de una distribución $N(0,1)$. El cálculo de la integral I_2 es similar, lo único que cambia es $k-1$ en vez de $k+1$.

Al tener resuelta la función $u(x,\tau) = N(d_1) - N(d_2)$ hay que hacer los cambios de variable pertinentes.

$$x = ln\left(\frac{S}{E}\right), \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \qquad V = Ev(x,\tau), \qquad k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2},$$

donde $v(x,\tau)$ es:

$$v(x,\tau) = e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x-\frac{1}{4}(k_1-1)^2}u(x,\tau).$$

Teniendo así la solución a la ecuación de Black-Scholes:

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2), \tag{2.25}$$

donde

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

y

$$d_2 = \frac{ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}.$$

2.4 Herramientas para los modelos contingentes.

Se describen a continuación algunos procesos estocásticos necesarios para la teoría de los modelos contingentes como son: la distribución exponencial, el proceso Poisson (*Poisson process*) y martingalas (*martingales*).

2.4.1 Distribución exponencial.

La razón por la que es útil esta distribución es porque con el tiempo no se deteriora, es decir, sigue teniendo el mismo comportamiento (si ahora es exponencial, después es de la misma manera). Esta distribución no tiene memoria.

Definición:

Una variable aleatoria X continua, se dice que tiene una función de distribución exponencial con parámetro λ positivo, si la función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

o también con la función acumulativa:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aplicaciones de la distribución exponencial.

a) Para calcular la probabilidad sólo es necesario el tiempo presente y el pasado no influye en nada. Matemáticamente quiere decir:

$$P[X > s + t/X > t] = \frac{P[X > s + t, X > t]}{P[X > t]} = P[X > s]$$

X es una variable aleatoria sin memoria.

Ejemplo: Supóngase que la cantidad de tiempo que uno tarda en el banco se distribuye exponencialmente con media $\lambda = \frac{1}{10}$. ¿Cuál es la probabilidad de que un cliente se tarde 5 minutos dado que ya estuvo esperando 10 minutos?

$$P[X > 5/X > 10] = P[X > 5] = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.604$$

b) Una aplicación que es más interesante es la llamada *función tasa de bancarrota (o la tasa de riesgo)* $r(t)$ que tiene como definición:

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \tag{2.26}$$

Otra manera de encontrar a la función acumulativa al tiempo t es usando la tasa de riesgo $(r(t))$ de la siguiente manera:

$$F(t) = 1 - exp\left\{ - \int_0^t r(t)dt \right\} \tag{2.27}$$

2.4.2 Martingalas.

Sea $\{X_t\}$ un proceso estocástico de valores reales. Se dice que $\{X_t\}$ es una martingala si $\forall n \geq 0$, se tiene $E(M_n) < \infty$ y para todo $t_1, t_2, \ldots, t_n$, el valor $E(X_{t_{n+1}}/X_{t_1} = a_1, \ldots, X_{t_n} = a_n) = a_n$ para todo $a_1, \ldots, a_n$. La primera condición es necesaria para asegurar que la esperanza condicional tiene sentido.

La martingala puede ser considerada apropiada para modelar "juegos justos", en el sentido en que X_t significa la cantidad de dinero que un jugador tiene al tiempo t. La propiedad principal del martingala asegura que el valor esperado que tendrá un jugador al tiempo t_{n+1}, dado que cuenta con la cantidad de a_n al tiempo t_n es igual a a_n, es decir, no importa la cantidad que tuvo en el pasado, sólo la de este momento es necesario para calcular la cantidad de un futuro inmediato.

Ejemplos:

a) Sea $\zeta_1, \ldots, \zeta n$ variables aleatorias independientes positivas con esperanza finita. Considere $X_n = X_0\zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_n$, con ζ_n como el cambio en el valor de tiempo fijo (un día, una semana) como fracción de los valores actuales. Esta fórmula garantiza que el precio de los activos son no negativos y sugiere evidencia empírica de que las fluctuaciones en el valor del activo son proporcionales a su precio.

Modelo de Black-Scholes discreto: Sea $\zeta_i = e^{\eta_i}$ donde $\eta_i \sim N(\mu, \sigma)$.

Modelo Binomial: Sea $\zeta_i = (1+a)e^r$ con probabilidad p y $(1+a)^{-1}e^r$ con probabilidad $(1-p)$ donde r es la tasa de interés que proporciona las ganancias futuras. Cuando se usa $(1+a)$ y $(1+a)^{-1}$ garantiza que el precio, al tiempo n es de la forma: $X_0(1+a)^k e^{nr}$.

b) Sea un evento A que esta determinado por $X_0, \ldots, X_{n-1}$ y para cada valor posible i de X_n se tiene:

$$E\{X_{n+1}/A; X_n = i\} = i$$

entonces el proceso $\{X_n, n \geq 0\}$ es llamado una martingala. Una martingala se dice de tendencia cero si la variable θ, se comporta como martingala y el proceso es de la forma: $d\theta = \sigma dz$, donde dz es un proceso Wiener y σ es una variable que puede ser por si misma estocástica. Para entender mejor el resultado nótese que sobre un intervalo de tiempo muy pequeño el cambio de θ es normal con media cero, entonces el valor esperado de θ es el valor actual.

2.4.3 Proceso poisson.

Definición: **(Proceso de Conteo).**

Ejemplo: Considere una variable aleatoria $N(t)$ igual al número de acciones incumplibles. Entonces $\{N(t), t \geq 0\}$ es un proceso de conteo cuando $N(t)$ es igual al total de acciones que se incumplen hasta el tiempo t.

Este proceso satisface cuatro propiedades:

i) $N(t) \geq 0$

ii) $N(t)$ es un valor entero.

iii) Si $s < t \Rightarrow N(s) \leq N(t)$

iv) para $s < t$, $N(t) - N(s)$ es el número de eventos que han ocurrido en el intervalo (s, t).

Además posee las siguientes características:

Incrementos independientes: el número de eventos que ocurren en intervalos separados son independientes. Es decir los que suceden en $N(10)$ son independiente de los que sucedieron en $N(15) - N(10)$.

Incrementos estacionarios: la distribución del número de eventos que ocurren en cualquier intervalo de tiempo sólo depende del tamaño del intervalo de tiempo. en otras palabras, el número de eventos en $N(t_1+s, t_2+s)$ dependen del tamaño del intervalo (t_1+s, t_2+s) y es independiente de $N(t_2)-N(t_1)$ con el intervalo de tiempo (t_1, t_2). Hay que notar que son del mismo tamaño aunque es movido s distancia.

Ordinalidad: se requiere para expresar la imposibilidad de que ocurran dos o más eventos durante un intervalo de tiempo pequeño Δt.

Definición: **Proceso Poisson**

Una familia de variables aleatorias N_t, que están relacionadas con una variable aleatoria t con dominio $[0,\infty)$ es llamada Proceso Poisson *con parámetro α (la media) sí y sólo sí satisface las siguientes propiedades:*

i) $N(0)=0$

ii) $\forall \quad 0 \le s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2 \le \ldots \le s_n \le t_n$ *las variables aleatorias $X_i = N(t_i) - N(s_i)$ son independientes y la distribución de cada X_i depende únicamente del tamaño del intervalo de tiempo $(t_i - s_i)$.*

iii) *para todo $t \ge 0$, $N(t) - N(t-1)$ es cero o uno.*

iv) *el número de eventos en un intervalo t es Poisson con media λt, entonces $P\{N(t+s)-N(s)=n\} = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$.*

Cuando el parámetro del proceso es λ igual a 1 se tiene el proceso Poisson estándar.

El proceso Poisson es estocástico de tiempo continuo ($T=[0,\infty)$). En otras palabras, $N(t)$ es una función que cuenta el número de veces que ocurre un evento específico durante el periodo de tiempo $[0,t]$. Cada posible $N(t)$ representa una función escalón no-decreciente.

Algunos ejemplos de este proceso son: el número de *rayos* $-x$ emitidos por una sustancia que sufre un decaimiento radioactivo, el número de llamadas telefónicas originadas en una localidad y el número de incumplimientos en un portafolio de deuda.

Distribución del tiempo entre los eventos y el tiempo de espera.

Considere un proceso Poisson de la siguiente manera: T_1 es el tiempo entre los eventos cero y uno (es decir, el primer evento) y T_n denota el tiempo entre los eventos $n-1$ y n.

A $\{T(i), i = 1, 2, \ldots\}$ es llamada la secuencia de tiempo entre eventos. Por ejemplo: $T(1) = 5$ y $T(2) = 10$, esto quiere decir que el primer evento sucede al tiempo 5 y el tiempo que pasa entre el primer y segundo evento son 10, el segundo evento sucede al tiempo 15.

Para obtener la distribución de $T(i)$ es necesario darse cuenta de que $\{T(1) > t_1\}$ sólo pasa si no ocurre ningún evento en el proceso Poisson dentro del intervalo $[0, t]$, es decir,

$$P\{T(1) > t\} = P\{N(T) = 0\} = e^{-\lambda t_1}$$

y sucede lo mismo para $T(2)$, es decir,

$$\begin{aligned} P\{T(2) > t | T(1) = s\} &= P\{0 \text{ eventos en } (s, s+t] | T(1) = s\} \\ &= P\{0 \text{ eventos en } (s, s+t]\} \\ &= e^{-\lambda t_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\{T(i), i = 1, 2, \ldots\}$ son variables aleatorias idénticamente independientes con distribución exponencial con media $\frac{1}{\lambda}$.

La distribución conjunta de las $T(j)$ está dada por:

$$\begin{aligned} P[T(1) > t_1, T(2) > t_2, \ldots, T(n) > t_n] &= P[T(1) > t_1] P[T(2) > t_2] \ldots P[T(n) > t_n] \\ &= e^{-\lambda(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)}. \end{aligned}$$

Estas variables pueden ser el tiempo de inter-llegada entre los vehículos en el flujo de tráfico. También pueden ser la duración de las llamadas telefónicas sucesivas, o el tiempo de permanencia del átomo en un nivel de energía específico. Hay que resaltar que el parámetro λ, es conocido como "la intensidad de flujo". En el problema del tráfico, entre más pesado es el tráfico hay mayor "intensidad de flujo".

Considere una nueva variable S_n la cual tiene las siguientes características:

a) $S_0 = 0$.

b) para $n \geq 1$, $S_n = T(1) + T(2) + \ldots + T(n)$.

Sea la variable aleatoria S_n que es el tiempo de espera total que hay hasta la llegada n-ésima, y el evento $\{S_n \leq t\}$ significa que hay n arribos antes de, o en el tiempo t.

La función de densidad de S_n es $\Gamma(n, \lambda)$, es decir

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Si se construye la variable aleatoria: $\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}$, al menos n llegadas sucedieron. Pero el interés se concentra en calcular las probabilidades de que haya exáctamente n arribos en el intervalo $[0, t]$, esto sucede si el n-ésimo arribo ocurrió antes de t y el $(n+1)$-ésima llegada sucede después del tiempo t, es decir: $\{N_t = n\} = \{S_{n+1} \leq t\} - \{S_n \leq t\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$

Esta variable aleatoria es la que sigue un *proceso Poisson*, y su función de distribución tiene parámetro (λt):

$$P[N_t = n] = P[S_{n+1} \leq t] - P[S_n \leq t]; \qquad n \in N^0.$$

Proceso Poisson no homogéneo.

Se dice que $\{N(s), s \geq 0\}$ es un proceso Poisson no homogéneo con tasa $h(s)$ si:

- **i)** $N(0) = 0$
- **ii)** $N(t)$ tiene incrementos independientes.
- **iii)** $N(t+s) - N(s)$ es Poisson con media $\int_s^t h(s)ds$.

y la función $h(s)$ es conocida como la función de intensidad.

Ejemplo:

Considere un proceso Poisson que describe el número de partículas radioactivas que llegan a un contador *Geiger*. En un principio se cuentan las partículas a una distancia definida, después de un minuto la distancia se reduce a la mitad. Físicamente la intensidad del conteo sería multiplicado por 4. ¿Cuánto se podría modelar del problema?.

Si se toma en cuenta que el problema se modela como: $N_t^* = N(H_t)$ donde la función de intensidad (H_t) es:

$$H_t = \lambda(t + 3(t-1)^+) = \int_s^t h(s)ds \tag{2.28}$$

y $h(s) = \lambda(I_{\{s<1\}} + 4I_{\{s\geq 1\}})$. La función h es la *tasa de intensidad o tasa de riesgo* del proceso Poisson N^*. Esta manera de ver el problema es poderosa, ya que permite una generalización inmediata, la función de intensidad es estocástica, se usa al modelar el riesgo de crédito. En más detalle, el modelo al tiempo τ de incumplimiento es el primer tiempo en que N^* salta, así que se tiene

$$H(\tau) = T(1) \tag{2.29}$$

En el modelo de riesgo de crédito se considera como la siguiente relación (2.26),(2.27):

$$\begin{aligned} P(\tau > t) &= P(T(1) > H(t)) \\ &= E\Big[exp\Big(- \int_0^t h(s)ds\Big)\Big] \end{aligned}$$

Al diferenciar la ecuación anterior se obtiene:

$$P(\tau \in dt) = E\Big[h(t)exp\Big(- \int_0^t h(s)ds\Big)\Big]dt$$

Una vez entendida la expresión derivada de los precios de los instrumentos sensibles al crédito conviene una aplicación lineal del principio de no-arbitraje. Por ejemplo, si se desea encontrar el precio al tiempo t de un bono corporado con fecha de vencimiento T que entrega la cantidad de \$1 al tiempo T. Si no, hay incumplimiento antes del tiempo T se entrega δ_t al tiempo T, si ocurre el incumplimiento en el tiempo $\tau \leq T$, entonces:

$$\begin{aligned} P_C(t,T) &= E_t\Big[e^{-R_{tT}}(I_{\{\tau > T\}} + \delta_\tau I_{\{\delta \leq T\}})\Big] \\ &= P(t,T) - E_t\Big[e^{-R_{tT}}(1-\delta_\tau)I_{\{\tau \leq T\}}\Big] \\ &= P(t,T) - E_t\Big[e^{-R_{tT}}\int_t^T (1-\delta_s)h(s)e^{H_{ts}}ds\Big] \end{aligned}$$

donde $P(t,T)$ es el precio al tiempo t de un bono cupón-cero libre de riesgo, $R_{st} = \int_s^t r_u du$ y $H_{st} = \int_s^t h(u)du$ (r es la tasa *spot* libre de riesgo).

La expresión para el precio de un bono sin cupones libre de riesgo aparece en varios lugares y niveles de generalidad de acuerdo a las hipótesis acerca de lo que sucede cuando hay incumplimiento.

2.5 Compañía calificadora.[14]

Hay muchas compañías que se dedican a analizar y darles una calificación de crédito a distintas empresas. Para este trabajo se consideran las características de *Moody's Investors Service (Global Credit Research)*[6]

[6] John Moody fundó *Moody's Investors Service* en el año de 1900. Sus primeras calificaciones fueron de más de 250 bonos de ferrocarriles en los Estados Unidos en 1909, utilizó las escalas de Aaa hasta C que desde entonces se han convertido en una norma mundial. En 1914 se extendió cuando empezó a calificar bonos de las principales empresas industriales y de servicios públicos y en 1920 los bonos emitidos por ciudades y otras municipalidades de Estados Unidos.

El papel de *Moody's* en los mercados globales de capital es tener una medición de riesgo de crédito de manera independiente, creíble y objetiva; una cobertura comprensible y consistencia global; una transparencia crediticia y un aumento de la eficiencia y de la liquidez.

La calificación que otorga *Moody's* es:

a) "La opinión de incurrir en incumplimiento."

b) "Evaluación de la capacidad y compromiso jurídico de un emisor para efectuar los pagos de intereses y amortización del principal, en el plazo determinado en las condiciones de emisión del título de renta fija específico."

c) "Mide la probabilidad de que un emisor incurra en incumplimiento (*default*) con respecto al valor o el título durante la duración del mismo. La duración depende del instrumento, puede ser de unos cuantos días o, hasta 30 años o más. Así mismo, las calificaciones a largo plazo incorporan una evaluación de cuál es la pérdida monetaria en caso de incumplimiento."

d) "Una medida comparable, globalmente, del riesgo de incumplimiento (*default*) entre un amplio espectro de emisores."

e) "Pronóstico del grado relativo de protección que un inversionista tiene si un emisor enfrenta una adversidad económica."

La calificación que declara *Moody's* no es:

a) "Una recomendación para comprar o vender."

b) "Un juicio individual de la calidad de la administración."

c) "Sólo es resultado de aspectos o razones (*ratios*) financieros."

d) "Es una garantía en contra de pérdidas."

e) "Es importante advertir que las calificaciones de *Moody's* se enfocan específicamente en el riesgo de pérdida crediticia debido a un pago que no se realiza o que se retrasa. Las calificaciones no están destinadas a medir otros riesgos que pueden estar asociados con las inversiones de renta fija, tales como el riesgo

Actualmente abarca más de 5,000 emisiones de títulos de deuda tributables entre ellos más de 100 naciones soberanas, incluidas agencias supranacionales, bancos, compañías de seguros, empresas industriales, fondos de inversión, empresas de servicios públicos de mayor embergadura a nivel mundial.

de pérdida en el valor de mercado de un instrumento debido a fluctuaciones en las tasas de cambio de divisas, en las tasas de interés, o debido al reintegro del capital de un préstamo antes de su vencimiento. Así mismo, a diferencia de las calificaciones de acciones, las calificaciones de deuda no están destinadas a medir el potencial de apreciación de un valor."

Cuando se emiten las calificaciones, se tienen beneficios por parte de los emisores e inversionistas, los cuales son:

- Emisores:
  - incrementa el acceso a los mercados de capital.
  - las calificaciones afectan a la liquidez (estabiliza el acceso al mercado).
  - aumenta la flexibilidad de financiamiento.
- Inversionistas:
  - reduce la incertidumbre.
    - fomenta el crecimiento del mercado de capital.
    - aumenta la eficiencia del mercado y la liquidez.
  - amplia los horizontes de inversión ya que es una evaluación independiente y objetiva del futuro riesgo crediticio de un título a largo plazo, de acuerdo con una norma comparable a escala mundial.
    - permite la diversificación del portafolio.
    - es consistente de manera global y con estándares creíbles.
  - utilizan las calificaciones como un elemento clave para establecer las primas de riesgo en función del riesgo crediticio para los títulos que compran. En otras palabras, las calificaciones se utilizan para medir el rendimiento adicional que debe exigir el inversionista para poder ser compensado por la posible pérdida crediticia estimada sobre el título que se está comprando.

Moody's tiene las siguientes escalas para deudas a corto y largo plazo.

Con respecto a la precisión de las calificaciones, tiene una excelente trayectoria cuando se trata de deudas a corto plazo. En los 27 años desde que *Moody's* comenzó a asignar calificaciones a corto plazo, han existido un total de 44 incumplimientos de papel comercial, la mayoría en los mercados de papel comercial más nuevos fuera de los Estados Unidos. Durante el mismo periodo, sólo ocho emisores con

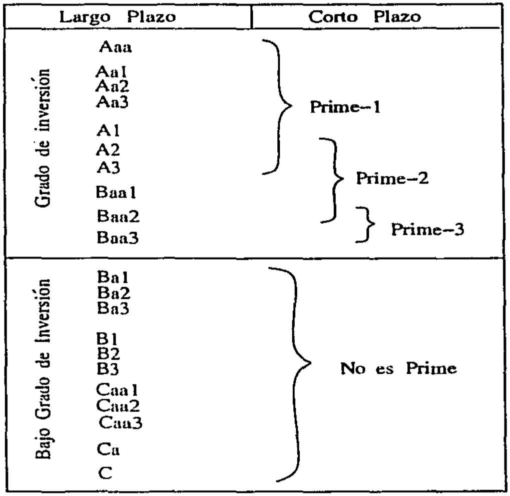


Figura 2.8: Escala de calificación de *Moody's*.

calificación **Prime** de *Moody's* incurrieron en incumplimiento con respecto a papel comercial.

La probabilidades de incumplimiento según la compañía Moody's se observa en la (figura 2.9).

La matriz anterior es actual, pero en la siguiente tabla se despliega un resumen de los promedios de las tasas de incumplimiento entre 1983 y el 2000 para diferentes años.

Años	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
Aaa	0.00%	0.00%	0.03%	0.07%	0.11%	0.22%	0.28%	0.41%	0.43%	0.46%
Aa1	0.00%	0.00%	0.00%	0.18%	0.43%	0.45%	0.48%	0.52%	0.56%	0.60%
Aa2	0.00%	0.00%	0.01%	0.05%	0.14%	0.25%	0.36%	0.49%	0.63%	0.73%
Aa3	0.02%	0.07%	0.28%	0.47%	0.69%	1.06%	1.30%	1.46%	1.63%	1.75%
A1	0.02%	0.02%	0.13%	0.37%	0.57%	0.77%	0.99%	1.23%	1.48%	1.69%
A2	0.01%	0.09%	0.17%	0.29%	0.53%	0.75%	0.99%	1.30%	1.62%	1.80%
A3	0.06%	0.22%	0.47%	0.71%	1.06%	1.44%	1.94%	2.45%	2.93%	3.28%
Baa1	0.17%	0.39%	0.78%	1.21%	1.62%	2.24%	2.70%	3.18%	3.58%	3.97%
Baa2	0.27%	0.57%	0.85%	1.40%	1.95%	2.42%	2.88%	3.43%	3.98%	4.50%
Baa3	0.30%	0.68%	1.36%	2.74%	4.23%	6.01%	7.34%	8.23%	9.11%	9.80%
Ba1	0.67%	1.75%	3.56%	5.51%	7.08%	9.23%	10.93%	11.86%	13.12%	14.46%
Ba2	1.05%	3.21%	6.07%	8.20%	10.34%	12.65%	14.41%	16.55%	18.22%	19.34%
Ba3	1.45%	5.03%	9.11%	13.25%	16.35%	20.21%	22.89%	25.36%	27.86%	29.28%
B1	2.96%	8.13%	13.97%	18.91%	22.70%	25.85%	29.13%	31.98%	34.18%	36.27%
B2	10.05%	18.86%	25.26%	29.47%	32.85%	35.91%	38.49%	40.81%	43.66%	45.44%
B3	11.76%	22.56%	29.25%	34.62%	38.44%	41.30%	45.13%	47.24%	49.75%	51.56%
Caa	22.60%	32.09%	38.26%	43.95%	48.64%	51.53%	53.73%	55.25%	57.48%	58.98%

Tasas de incumplimiento de Moody, entre 1983 y 2000.

2.6 Metodología para datos de un banco.

De acuerdo a la información de un banco Latinoamericano se tiene una escala de clasificación desde 1 hasta 11.

La metodología usada en este trabajo tiene relación con la transición de la clasificación de cada deudor. Es necesario considerar los siguientes pasos:

1) Por deudor, se siguen sus cambios de clasificación a través del tiempo.

2) Se considera por falta de información que es una muestra aleatoria (los datos entre sí son independientes).

2.6.1 Metodología de la matriz de transición.

Se consideran 6386 deudores. En el banco se usa una sistema de categorías de R=11 clasificaciones.

$A_1 =$ 1 (mínimo riesgo de incumplimiento).

...

$A_{10} =$ 10 (alto riesgo en incumplimiento).

$A_{11} =$ 11 (incumplimiento de la deuda).

Por deudor, en determinados periodos ($T = \Delta t = t_1 - t_0, 2\Delta t, \ldots$), se da seguimiento en el movimiento de la calidad de crédito de A_j a otra, que es A_k.

Se denotará a X_i^n a la clasificación del deudor i al tiempo $n\Delta t$, $n \in N$. La matriz de transición esta dada por la probabilidad de que cada deudor cambie de clasificación o se mantenga en ella. Hay que considerar las siguientes hipótesis:

i) Todos los deudores tienen características homogeneas sin considerar la misma clasificación.

ii) La probabilidad de transición de cada uno de los deudores depende sólo de la clasificación del deudor al tiempo inicial.

iii) Las probabilidades de transición son estacionarias, es decir, no dependen del tiempo.

Estas hipótesis implican:

i) $X_i^n = X_j^n \Rightarrow P[X_i^n = A_k] = P[X_j^n = A_k] \quad \forall \quad i, j, k$

ii) $P[X_i^{n+1} = A_{k_{n+1}}/X_i^n = A_{k_n}] = P[X_i^{n+1} = A_{k_{n+1}}/X_i^n = A_k, \ldots, X_i^0 = A_{k_0}]$.

iii) $P[X_i^{n+1} = A_{k_{n+1}}/X_i^n = A_{k_n}] = P[X_i^n = A_{k_{n+1}}/X_i^{n-1} = A_{k_n}]$.

La matriz de transición (migración) es una herramienta que permite modelar el cambio en la calidad de crédito, desde que se despliegan las probabilidades en la calidad de migración. Con la matriz de transición es posible generar los diferentes escenarios en la calidad de un portafolio entre un periodo a otro de tiempo.

2.7 Tasas de recuperación según Standard & Poor's.

La recopilación de las tasas de recuperación en las deudas es difícil relacionarlas con los modelos que cuantifican las pérdidas crediticias, además, se tiene un gran atraso con respecto al incumplimiento y la migración de las deudas. Los modelos para la estimación de ganancias, valor en riesgo, etcétera, se han vuelto más sofisticados cada día y el análisis de incumplimiento se ha relacionado con las suposición de pérdidas estadísticas. En el análisis estadístico se hace un promedio simple de las deudas seguras y otro de las deudas inseguras (posible incumplimiento), obteniendo una alta desviación estándar. Los resultados muestran, sin sorpresa, que la suposición de las pérdidas por incumplimiento son mal estimadas por una excesiva desconcentración alrededor de la media en la distribución. Desafortunadamente el resultado de la alta desviación estándar es inservible para *spread* bien portados, asignación de capital y las clasificaciones basadas en datos históricos con experiencia en pérdidas.

Portfolio Management Data LLC (PMD) trabaja con Standard-Poor's, ellos han creado una base de datos de pérdidas crediticias empíricas que engloba las hipótesis de pérdidas y compacta la desviación estándar. Esto permite improvisar la asignación del capital, mejor dicho, el precio y el mejor manejo del portafolio.[15]

2.7.1 Metodología

Se analizan las recuperaciones de 829 instrumentos de deuda que contienen a 210 de los más altos incumplimientos. Todos los tipos de incumplimiento (bancarrota, restructuración, estar en angustia, e incumplimiento y remedio) fueron incluidos. Las tasas de recuperación son calculadas usando tres métodos por separado que se explican en la siguiente tabla.

	Recuperación (%)	Desviación estándar(%)	95% de confianza(%)	Total
Banco	84.5	24.9	43.4	258
Segura *senior*	65.7	28.4	18.8	97
Insegura *senior*	49.3	35.8	0.0	127
Subordinada *senior*	36.8	31.0	0.0	144
Subordinada	26.1	30.3	0.0	179
Subordinada *junior*	13.6	24.4	0.0	24

Tabla 1: TASAS DE RECUPERACIÓN.

Todas las recuperaciones están dadas en términos del valor presente, descontado desde la fecha de emergencia o liquidación de las últimas fechas de interés para pagar cada instrumento con la tasa contractual de preincumplimiento del instrumento. Mientras la base de datos permite ser dividido entre una docena de maneras; para propósito del trabajo se divide en cinco grupos:

- todos los activos y los activos corrientes.
- la mayoría de los activos.
- activos no corrientes, tales como bienes raices y planta industrial, propiedad y equipo (PP&E), y otros, activos inespecíficos.

- el acervo de capital (*capital stock*).
- segundas obligaciones.

Si las deudas son listadas "sin peligro" o son colocados en todos los intereses de deudas y con incumplimiento subsecuentes, entonces el descuento de la recuperación es asumido a 100 centavos de dólar porque todo el interés y pago fue hecho finalmente en base contractual y porque desde unas prespectiva del capital, la pérdida no ocurrio.

2.8 Tasas de recuperación por industría y región.

En los modelos estándares basados en clasificaciones para el análisis de portafolios de créditos y precios de derivados de crédito, este asume que el incumplimiento y la recuperación son estadísticamente independientes. Pero no es así, en el trabajo de Yen-Ting Hu y William Perraudin [16] muestran una fuerte evidencia de que la colección trimestral de tasas de incumplimiento y las tasas de recuperación son, efectivamente, correlacionadas negativamente. Ellos usan las técnicas de la teoría del valor extremo para mostrar que la dependencia afecta el extremo de la distribución del comportamiento de las pérdidas creditícias y con lleva a una alta medida del VaR.

En la siguiente tabla se encuentran desglosados los promedios de las tasas de recuperación por industria y por región.

	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2
Aaa	98.5%	0.7%	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Aa1	0.0%	79.5%	17.1%	0.9%	0.0%	1.7%	0.0%	0.0%	0.0%
Aa2	1.6%	7.6%	76.2%	8.1%	0.5%	5.4%	0.5%	0.0%	0.0%
Aa3	0.0%	4.4%	6.8%	82.7%	3.8%	0.3%	0.3%	0.3%	0.8%
A1	0.0%	0.0%	90.0%	8.2%	77.3%	7.6%	5.2%	0.0%	0.9%
A2	0.4%	0.0%	0.2%	0.0%	4.6%	77.1%	10.9%	3.1%	2.4%
A3	0.5%	0.0%	0.0%	0.2%	0.7%	5.1%	77.4%	9.0%	4.9%
Baa1	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	0.3%	1.1%	4.5%	76.3%	11.2%
Baa2	0.5%	0.3%	0.0%	0.0%	0.3%	0.3%	2.7%	3.8%	76.2%
Baa3	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.6%	1.0%	1.0%	10.9%
Ba1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	60.0%	0.6%	1.1%
Ba2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.7%
Ba3	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.6%	0.0%	0.0%	1.8%
B1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.3%	0.0%
B2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.9%	0.6%
B3	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Caa-C	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%

	Baa3	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa-C	Default
Aaa	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Aa1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Aa2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
Aa3	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A2	0.0%	0.0%	0.0%	0.7%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
A3	0.7%	0.5%	0.0%	0.0%	0.5%	0.2%	0.2%	0.0%	0.0%
Baa1	3.4%	0.3%	2.0%	0.0%	0.3%	0.0%	0.0%	0.3%	0.3%
Baa2	11.4%	2.2%	0.8%	0.5%	0.3%	0.0%	0.0%	0.3%	0.5%
Baa3	72.2%	6.1%	1.9%	3.5%	1.0%	0.0%	1.0%	0.3%	0.3%
Ba1	11.0%	72.4%	3.3%	5.5%	2.2%	1.7%	0.6%	0.0%	0.6%
Ba2	2.1%	18.6%	53.6%	9.3%	7.9%	4.3%	2.1%	0.0%	1.4%
Ba3	0.0%	1.8%	9.7%	64.2%	9.7%	7.3%	0.6%	1.8%	1.2%
B1	0.3%	1.5%	8.4%	5.3%	53.9%	11.5%	3.7%	11.1%	3.7%
B2	0.3%	0.0%	0.0%	1.9%	5.9%	64.1%	4.7%	15.0%	6.6%
B3	0.0%	0.0%	0.5%	0.0%	1.0%	3.5%	61.4%	24.8%	8.9%
Caa-C	0.0%	0.0%	0.0%	0.5%	2.0%	1.5%	3.0%	67.0%	26.0%

Figura 2.9: Tasas de migración de clasificación de 12 meses al término de febrero del 2002.

Industrías	Promedio	Volatilidad	Número de incumplimientos
Transporte	38.60%	27.40%	72
Industría	40.50%	24.40%	728
Seguros	39.80%	21.40%	12
Bancos	22.60%	16.60%	25
Servicios Públicos	69.60%	21.80%	57
Fondos (finance)	45.60%	31.20%	11
Económicos	25.60%	26.30%	20
Bonos (Securities)	15.40%	2.00%	2
Bienes raices	25.70%	17.20%	8
Otros (no bancarios)	24.80%	15.40%	15
Soverano	56.80%	27.40%	8
Regiones	**Promedio**	**Volatilidad**	**Número de incumplimientos**
Mercados emergentes	44.10%	22.10%	22
Non-US OECD	39.30%	27.20%	23
Offshore banking ctr.	46.20%	25.00%	3
US.	41.00%	25.70%	910

Figura 2.10: Tasas de recuperación por industria emisora y región.

Capítulo 3

Matrices de transición y modelos de riesgo de crédito.

3.1 Matrices de transición de un banco latinoamericano.

La base de datos que se estudia esta compuesta por 6378 compañías, en el periodo de octubre de 1997 a septiembre de 2000, la informacón de las compañías está desglosada por mes. De acuerdo a la información que se tiene, el promedio durante los tres años es del 82% de compañías que incumplieron en cada mes, además el resto de las empresas tienen un 11.34% de las que se encuentran en las clasificaciones 5, 6 y 7, éstas contemplan un 63% de aquellas que tienen la deuda vigente, es decir, el 18%. Se realizó un análisis anual y se obtienen las siguientes matrices de transición, además de tener la tabla de incumplimientos en esos tres años. Para poder analizar mejor los datos, se colocan en la siguiente tabla sólo los incumplimientos por clasificación y por cada año. Como se puede observar la mayoía de los incumplimiento se realizan en las clasificaciones 6 al 10, aunque se tienen las excepciones de la clasificación 2 y 1 del año 1998 a 1999 y 1999 al 2000. Para poder explicar este evento, se necesita de una mayor información, ésta no fue posible conseguir.

Otro análisis que se hizó fue usar la matriz mensual para estimar la matriz semestral, es decir, se tiene la matriz de transición de marzo a abril del 2000 para poder estimar la matriz de abril a septiembre del 2000. En la siguiente figura se muestran los resultados.

Aunque se observa que tienen una gran diferencia, pero es posible usarlo como una simple estimación, pero alejada de la realidad. Esto es debido a que en el

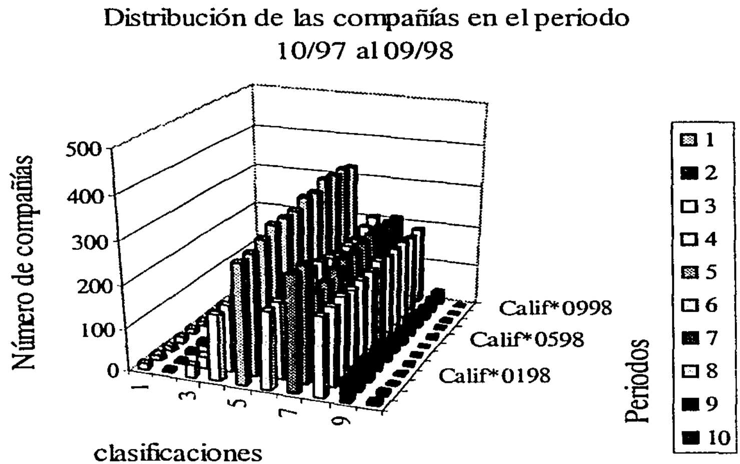


Figura 3.1: Comportamiento entre octubre 1997 a septimbre 1998.

mercado se tienen muchos factores exógenos que afectan al comportamiento y eso no es contado con la teoría markoviana.

3.2 Modelos de riesgo de crédito.

Para analizar el riesgo de crédito se usan las matrices de transición, pero son poco confiables por todo lo antes expuesto, por eso si es un análisis por periodos pequeños, por ejemplo mensual, puede suceder algo que afecte totalmente a la estimación.

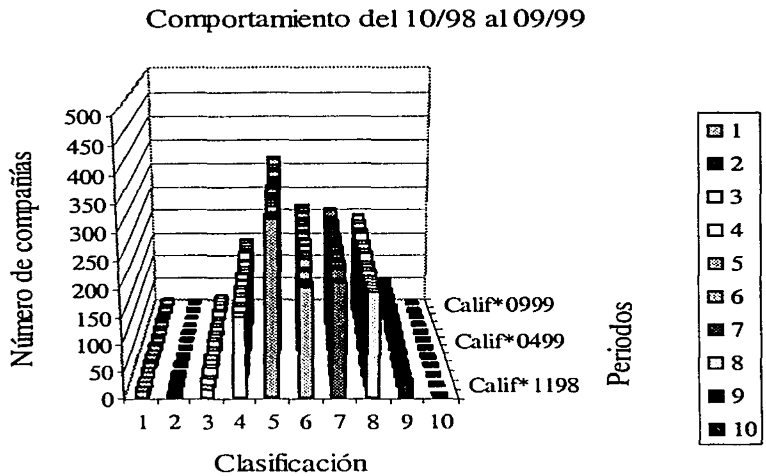


Figura 3.2: Comportamiento entre octubre 1998 a septimbre 1999.

Se examinarán los siguientes modelos que nos proporcionan una estimación del análisis de crédito más real.

3.2.1 Modelo estructural. Modelo de Merton.

El modelo de Merton, usando precios de *equities.*

En 1974 Merton diseñó un modelo donde las *equitis* de las empresas se comportan como una opción con respecto a sus activos. El precio de las *equitis* provee una mayor estimación a la probabilidad de incumplimiento.

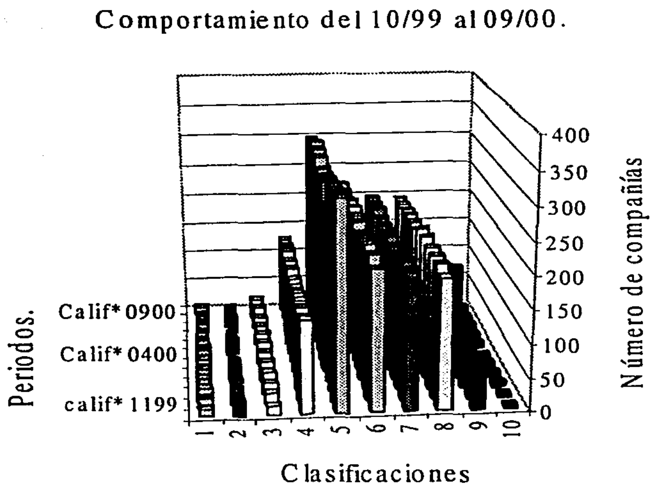


Figura 3.3: Comportamiento entre octubre 1999 a septimbre 2000.

Para poder ilustrar el modelo hay que definir los siguientes términos:

V_0: valor de los activos de la compañía hoy en día.

V_T: valor de los activos de la compañía al tiempo T.

E_0: valor de las equities de la compañía hoy en día.

E_T: valor de los equities de la compañía al tiempo T.

D: valor nominal de intereses de la deuda pagadero al tiempo T.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	26.6667	6.6667	26.6667	13.3333	6.6667	0.0000	20.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	14.2857	0.0000	14.2857	42.8571	28.5714	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	7.1429	0.0000	17.8571	53.5714	17.8571	0.0000	3.5714	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.6329	1.2658	1.8987	49.3671	31.0127	5.0633	4.4304	1.8987	0.0000	0.0000	4.4304
5	0.0000	0.3534	0.3534	10.2473	57.2438	13.4276	9.8940	0.3534	0.7067	0.0000	7.4205
6	1.1050	0.5525	1.6575	6.0773	21.5470	38.6740	12.1547	3.8674	0.0000	0.0000	14.3646
7	0.0000	0.3690	0.0000	1.8450	12.9151	18.4502	34.6863	14.7601	0.7380	0.0000	16.2362
8	0.0000	0.0000	0.5376	2.6882	4.8387	8.6022	11.2903	51.6129	3.2258	0.0000	17.2043
9	0.0000	1.9231	0.0000	5.7692	3.8462	5.7692	17.3077	25.0000	9.6154	0.0000	30.7692
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	10.0000	40.0000	0.0000	10.0000	0.0000	0.0000	40.0000

Matriz de Transición (Probabilidad de pasar de una clasificación a otra, entre oct97 y sep98).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	63.6364	18.1818	0.0000	0.0000	9.0909	9.0909	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	11.1111	33.3333	44.4444	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	11.1111
3	0.0000	0.0000	57.1429	28.5714	7.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	7.1429
4	1.3245	0.0000	1.3245	72.8477	13.9073	4.6358	0.6623	0.0000	0.6623	0.0000	4.6358
5	0.3106	0.0000	0.3106	4.0373	76.0870	9.6273	3.4161	0.9317	0.9317	0.0000	4.3478
6	0.0000	0.0000	0.0000	2.9703	9.9010	66.3366	9.9010	4.9505	0.4950	0.0000	5.4455
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.4739	5.6872	7.5829	65.8768	10.4265	2.3697	0.0000	7.5829
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.1250	5.2083	7.2917	69.7917	3.1250	0.5208	10.9375
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.7037	3.7037	3.7037	62.9630	0.0000	25.9259
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	100.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Matriz de Transición (Probabilidad de pasar de una clasificación a otra, entre oct98 y sep99)

Figura 3.4: Matrices de octubre 1997 a septiembre 1999.

σ_V: la volatilidad del activo.

σ_E: la volatilidad de las *equitis*.

El modelo da el precio de las *equitis* al tiempo T:

$$E_T = \text{máx}\ (V_T - D, 0)$$

Si $V_T < D$ entonces la compañía incumple la deuda y el valor de las *equitis* es cero, pero si $V_T > D$ entonces el valor de las *equitis* es $V_T - D$. Este es el comportamiento de una opción de compra donde el precio de ejercicio es igual a la cantidad necesaria para liquidar la deuda.

Con la ayuda de la fórmula de Black-Scholes (1973)[1] se obtiene el valor de las *equitis*

[1] ver capitulo 2

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10	1	70.0000	0.0000	0.0000	0.0000	10.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	20.0000
7	2	0.0000	71.4286	0.0000	28.5714	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
14	3	0.0000	0.0000	64.2857	14.2857	7.1429	7.1429	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	7.1429
143	4	0.0000	0.0000	6.9930	72.7273	13.2867	3.4965	1.3986	0.0000	0.6993	0.0000	1.3986
317	5	0.0000	0.0000	0.3155	3.4700	77.6025	10.4101	1.5773	0.6309	0.0000	0.0000	5.9937
213	6	0.0000	0.0000	0.0000	1.4085	5.6338	76.5258	2.3474	2.3474	0.0000	0.0000	11.7371
209	7	0.4785	0.0000	0.0000	1.4354	1.9139	3.3493	76.5550	3.8278	0.4785	0.0000	11.9617
198	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0101	2.5253	4.0404	77.2727	3.5354	0.0000	11.6162
59	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.6949	1.6949	3.3898	72.8814	0.0000	20.3390
5	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	100.0000	0.0000
5211	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0576	0.2111	0.1343	0.3070	0.4414	0.5949	1.2666	96.9871

Matriz de Transición de oct99 a sep/00 (Probabilidad de pasar de una clasificación a otra.)

	Incumplidas	Cumplidas	Clasif 5, 6 y 7
oct97-sep00	0.82	0.18	0.63

Comportamiento en promedio durante los tres años est

	Inicio del periodo	Fin del
oct97-sep98	1190	11
oct98-sep99	1140	11
oct99-sep00	1175	12

Número de compañías en cada año (que tienen clasificac

Figura 3.5: Matriz de octubre 1999 a septiembre 2000.

hoy en día (E_0), esto para poder estimar el valor de la deuda en este momento y la recuperación estimada en caso del incumplimiento.

$$E_0 = V_0 N(d_1) - De^{-rT} N(d_2) = e^{-rT}[e^{rT} V_0 N(d_1) - DN(d_2)]. \qquad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}} \\ d_2 &= \frac{ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V \sqrt{T}}. \end{aligned}$$

El valor de la deuda hoy en día es: $V_0 - E_0$.

Para poder calcular este valor es necesario conocer V_0 y σ_V, así que hay que estimarlos. Para esto la ecuación 3.1 provee una condición y la razón de cobertura la

	oct97–sep98	oct98–sep99	oct99–sep00
1	0.0000	0.0000	20.0000
2	0.0000	11.1111	0.0000
3	0.0000	7.1429	7.1429
4	4.4304	4.6358	1.3986
5	7.4205	4.3478	5.9937
6	14.3646	5.4455	11.7371
7	15.2362	7.5829	11.9617
8	17.2043	10.9375	11.6162
9	30.7692	25.9259	20.3390
10	40.0000	0.0000	0.0000

Probabilidad de incumplimiento anual (%).

Figura 3.6: Matrices de transición por año.

otra, es decir:

$$\Delta = \frac{\partial E}{\partial V}.$$

una buena estimación para el valor anterior es:

$$\Delta = \frac{\sigma_E E_0}{\sigma_V V_0} \qquad \text{razón de cobertura.}$$

así que la segunda condición es:

$$\sigma_E E_0 = \frac{\partial E}{\partial V} \sigma_V V_0 \tag{3.2}$$

$N(d_1)$ es en cualquier posición de la opción de compra, la cantidad de activos que se deben cubrir, así que sea $\frac{\partial E}{\partial V} = N(d_1)$ y al sustituir en la ecuación 3.3 resulta:

$$\sigma_E E_0 = N(d_1) \sigma_V V_0 \tag{3.3}$$

y al resolver las ecuaciones 3.1 y 3.4 se encuentran las estimaciones para σ_V y V_0.

La expresión $N(d_2)$ es la probabilidad de que la opción sea ejercida en el mundo de riesgo neutral, así que $DN(d_2)$ es la deuda considerando la probabilidad de que ésta sea pagada. Entonces la probabilidad de incumplimiento de la compañía en el mundo de riesgo neutral es:

$$\text{Probabilidad de incumplimiento:} \quad 1 - N(d_2) = N(-d_2)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	75.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	25.0000
2	0.0000	83.3333	0.0000	16.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	88.8889	0.0000	5.5556	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	5.5556
4	0.0000	0.0000	2.4390	86.1749	6.5041	1.6260	1.6260	0.0000	0.0000	0.0000	1.6260
5	0.0000	0.0000	0.0000	2.7027	90.5405	3.3784	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.3784
6	0.0000	0.0000	0.0000	1.3575	2.2624	90.0452	0.4525	0.0000	0.0000	0.0000	5.8824
7	0.5155	0.0000	0.0000	0.0000	1.0309	1.0309	91.7526	0.0000	0.0000	0.0000	5.6701
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0152	0.5076	0.0000	92.3858	0.0000	0.0000	6.0914
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.2346	1.2346	81.4815	0.0000	16.0494
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	88.8889	11.1111
11	0.0191	0.0000	0.0191	0.1911	0.1911	0.1529	0.2866	0.1911	0.3249	1.2039	97.4202

Matriz de Transición de abril/00 a sep/00 (Probabilidad de pasar de una clasificación a otra)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0000	0.0000	0.0000	90.6400	0.0000	0.0100	0.0000	0.0100	0.0200	0.0000	9.3100
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	96.0200	0.0100	0.0000	0.0000	0.0100	0.0000	3.9600
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0100	0.0100	87.3000	0.0100	0.0100	0.0200	0.0000	12.6400
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0200	0.0100	0.0200	80.7600	0.0100	0.0300	2.7500	16.3900
8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0300	2.4000	0.0500	0.0200	66.0000	0.0600	0.0000	31.4400
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0100	0.0100	0.0200	0.0100	0.0100	63.7700	24.1700	12.0000
10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.2200	0.1200	0.3200	0.0100	0.1900	0.3800	0.0500	98.6100

Estimación de la matriz de transición entre abril/00 y sep/00 (Probabilidad de pasar de una clasificación a otra)
(Usando la propiedad markoviana).

Figura 3.7: Estimación de Matrices de transición.

por propiedades de la normal.

Para poder encontrar la pérdida esperada por incumplimiento del valor de las deudas incumplidas que afectan a las no-incumplidas (parecida al método de bonos), hay que hacer lo siguiente:

$$PEI = \frac{VPD - (V_0 - E_0)}{VPD} \qquad \text{aquellos que afectan a las deudas cumplidas.}$$

Comparando con la probabilidad de incumplimiento, se obtiene la recuperación esperada en el evento de incumplimiento (si sucede) es:

$$RE = \frac{N(-d_2) - PEI}{N(-d_2)} \tag{3.4}$$

Ejemplo: Considere los siguientes datos:
E_0 = 3millones, $r = 5\% = 0.05$, $\sigma_E = 80\% = 0.8$, $T = 1$ año y $D = 10$ millones.
Al sustituir y resolver las ecuaciones 3.1 y 3.4 se obtiene que $V_0 = 12.40$, $\sigma_V = 0.2123$ y $d_2 = 1.1408$ y la probabilidad de incumplimiento es $N(-d_2) = 0.127$, es decir se tiene un 12.7% de incumplimiento.

El valor de la deuda hoy es: $V_0 - E_0 = 9.40$
Valor presente de la deuda: $VPD = 10e^{-0.05x1} = 9.51$
Pérdida esperada por incumplimiento: $PEI = \frac{9.51-9.40}{9.51}$, aproximadamente el 1.12%
Recuperación esperada: $RE = \frac{12.7-1.2}{12.7} = 0.9055 \approx 0.91$, aproximadamnete el 91% de las deudas son recuperadas.

Con este modelo se tiene el problema de que se supone que todas las deudas son pagaderas en la misma fecha pero en la realidad esto no sucede.

3.2.2 Modelo contingente. Modelo Jarrow-Turnbull.

Considere el incumplimiento de una obligación con tasa libre de riesgo (corta) con la propiedad Markov que puede ser modelado por un árbol. Para cada nodo se tienen dos posibles resultados; la tasa sube o la tasa baja en el tiempo t con probabilidades π_t y $(1 - \pi_t)$ respectivamente. Al considerar el incumplimiento o no (λ_t y $(1 - \lambda_t)$, recuerde que es la probabilidad de riesgo neutral de incumplimiento del contrato) se crea una segunda variable de estado, obteniendo así por ejemplo en la figura (3.1) cuatro posibles resultados en el primer tiempo y en el segundo se tienen 12 casos, al final se tienen solo dos opciones, se cumple con la obligación o se tienen incumplimiento con una tasa de recuperación δ.

En la figura (3.1) analizando el primer periodo de tiempo, es decir, de I a t_1 se tiene las siguientes probabilidades:

u/n: se tiene probabilidad $\pi_0(1 - \lambda_0)$, que significa que se tiene probabilidad π_0 de que el precio suba y con una probabilidad $(1 - \lambda_0)$ de cumplir con la obligación.

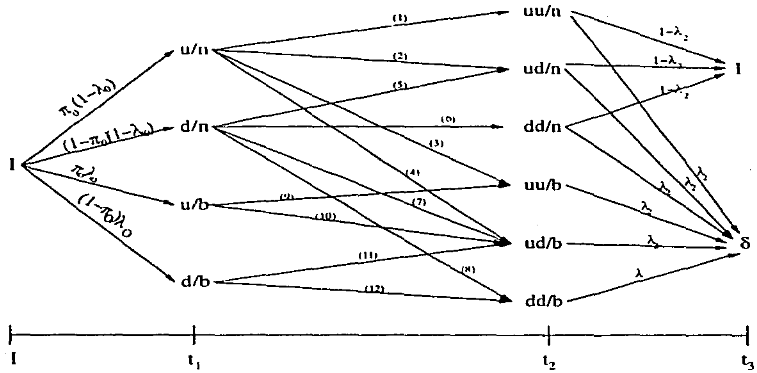


Figura 3.8: Árbol de los activos.

d/n: se tiene probabilidad $(1-\pi_0)(1-\lambda_0)$, que significa que se tiene probabilidad $1-\pi_0$ de que el precio baje y con una probabilidad $(1-\lambda_0)$ de cumplir con la obligación.

u/b: se tiene probabilidad $\pi_0\lambda_0$, que significa que se tiene

u/n: en se tiene probabilidad $\pi_0(1-\lambda_0)$, que significa que se tiene probabilidad π_0 de que el precio baje y con una probabilidad $(1-\lambda_0)$ de cumplir con la obligación.probabilidad π_0 de que el precio suba y que se incumpla la obligación con probabilidad λ_0. con la obligación.

d/b: se tiene probabilidad $(1-\pi_0)\lambda_0$, que significa que se tiene probabilidad $1-\pi_0$ de que el precio baje y se incumpla la obligación con probabilidad λ_0.

Para el segundo periodo se considera que ya pasó el primero y las probabilidades serán únicamente dependiente del periodo entre el tiempo t_1 a t_2. En éste se tendrán doce caminos; cuando no se incumple (suba o baje) se tienen cuatro rutas en cada uno y cuando se incumplen sólo se tienen dos en cada uno.

(1)u/n a uu/n: se tiene probabilidad $\pi_1(1-\lambda_1)$, que significa que se tiene probabilidad π_1 de que el precio suba y con una probabilidad $(1-\lambda_1)$ de cumplir con la obligación.

(2)u/n a ud/n: se tiene probabilidad $(1-\pi_1)(1-\lambda_1)$, que significa que se tiene probabilidad $(1-\pi_1)$ de que el precio baje y con una probabilidad $(1-\lambda_1)$ de cumplir con la obligación.

(3)u/n a uu/b: se tiene probabilidad $\pi_1\lambda_1$, que significa que se tiene probabilidad π_1 de que el precio suba y con una probabilidad λ_1 de incumplir con la obligación.

(4)u/n a ud/b: se tiene probabilidad $(1-\pi_1)\lambda_1$, que significa que se tiene probabilidad $1-\pi_1$ de que el precio baje y con una probabilidad λ_1 de incumplir con la obligación.

(5)d/n a ud/n: se tiene probabilidad $\pi_1(1-\lambda_1)$, que significa que se tiene probabilidad π_1 de que el precio suba y con una probabilidad $(1-\lambda_1)$ de cumplir con la obligación.

(6)d/n a ud/n: se tiene probabilidad $(1-\pi_1)(1-\lambda_1)$, que significa que se tiene probabilidad $(1-\pi_1)$ de que el precio baje y con una probabilidad $(1-\lambda_1)$ de cumplir con la obligación.

(7)d/n a ud/b: se tiene probabilidad $\pi_1\lambda_1$, que significa que se tiene probabilidad π_1 de que el precio suba y con una probabilidad λ_1 de incumplir con la obligación.

(8)d/n a ud/b: se tiene probabilidad $(1-\pi_1)\lambda_1$, que significa que se tiene probabilidad $1-\pi_1$ de que el precio baje y con una probabilidad λ_1 de incumplir con la obligación.

(9)u/b a uu/b: se tiene probabilidad π_1, que significa que se tiene probabilidad π_1 de que el precio suba ya que se incumplio con la obligación.

(10)u/b a ud/b: se tiene probabilidad $(1-\pi_1)$, que significa que se tiene probabilidad $1-\pi_1$ de que el precio baje ya que se incumplio con la obligación.

(11)d/b a ud/b: se tiene probabilidad π_1, que significa que se tiene probabilidad π_1 de que el precio suba ya que se incumplio con la obligación.

(12)d/b a dd/b: se tiene probabilidad $(1-\pi_1)$, que significa que se tiene probabilidad $1-\pi_1$ de que el precio baje ya que se incumplio con la obligación.

y en el tercer periodo sólo se tiene el caso de cumplir la obligación (solo si en el periodo pasado sucedió uu/n, ud/n y dd/n) con probabilidad $1-\lambda_2$ y se obtiene la cantidad establecida, y si hay incumplimiento (considerando todas las opciones del tiempo t_1) con probabilidad λ_2 con una tasa de recuperación δ.

Ejemplo.

El ejemplo es el descrito en la sección 3.2.1, es decir:

i) la probabilidad de incumplimiento es: $\lambda = 0.127$,

ii) la volatilidad de los activos es: $\sigma_V = 0.2123$,

iii) el cálculo de u y d esta basado en la ecuación 2.12 de la sección 2.2.4 (esto porque la ecuación (2.8) de la sección 2.2.3 necesita la tendencia μ), y el valor de $\Delta t = \frac{1}{2}$, los valores son: $u = 1.0545$ y $d = 0.9483$,

la tasa de recuperación δ es el 91% y $1 - \delta$ es del 9

i) Aquellos que se incumplen en el primer periodo: sólo se tienen dos casos, cuando sube el activo o cuando baja el activo, es decir, u/b y d/b, después hay que llevarlo a valor futuro un semestre.

$$\begin{aligned} u/b &= (1.0545)(0.127)e^{(0.025)}(0.91) = 0.1250 \\ d/b &= (0.9483)(0.127)e^{(0.025)}(0.91) = 0.1124. \end{aligned}$$

ii) Aquéllos que se incumplen entre el primer y segundo periodo: sólo se tienen cuatro casos, es decir, uu/b, ud/b, du/b, dd/b.

$$\begin{aligned} uu/b &= (1.0545)^2(0.873)(0.127)(0.91) = 0.1122 \\ ud/b &= (1.0545)(0.9483)(0.873)(0.127)(0.91) = 0.1010 \\ du/b &= (0.9483)(1.0545)(0.873)(0.127)(0.91) = 0.1010 \\ dd/b &= (0.9483)^2(0.873)(0.127)(0.91) = 0.0907 \end{aligned}$$

iii) Lo que incumplieron exactamente en al año:

Se tiene en este 4 casos, son uu/n, ud/n, du/n y dd/n.

$$\begin{aligned} uu/n &= (1.0545)^2(0.873)^2(0.91) = 0.7712 \\ ud/n &= (1.0545)(0.9483)(0.873)^2(0.91) = 0.6935 \\ du/n &= (0.9483)(1.0545)(0.873)^2(0.91) = 0.6935 \\ dd/n &= (0.9483)^2(0.873)^2(0.91) = 0.6237 \end{aligned}$$

iv) Los que si cumplieron en el año:

$$\begin{aligned}
uu/n &= (1.0545)^2(0.873)^2 = 0.8475 \\
ud/n &= (1.0545)(0.9483)(0.873)^2 = 0.7621 \\
du/n &= (0.9483)(1.0545)(0.873)^2 = 0.7621 \\
dd/n &= (0.9483)^2(0.873)^2 = 0.6854
\end{aligned}$$

Ahora hay que calcular el precio del bono considerando el incumplimiento:

$$\begin{aligned}
E[S_T^I] &= \frac{1}{14}((0.1250 + 0.1124 + 0.1122 + 0.0907 + 0.7712 + 0.6237 + 0.8475 + 0.6854) \\
&+ \frac{2}{14}(0.1010 + 0.6935 + 0.7621) = 0.2405 + 0.2238 = 0.4629
\end{aligned}$$

y el precio del bono libre de riesgo:

$$E[S_T] = e^{2 \bullet 0.025} = 1.0513$$

Usando *spreads*

$$PEI = \frac{E[S_T] - E[S_T^I]}{E[S_T]} = \frac{0.5852}{1.0513} = 0.5566$$

es decir el 55.66% de pérdida al término del año.

Como puede apreciar hay una gran diferencia en las dos pérdidas esperadas por incumplimiento:

Merton $PEI = 1.12\%$

Jarrow-Turnbull $PEI = 55.66\%$

esto se atribuye a que el modelo de Jarrow-Turnbull considera el incumplimiento en cualquier momento, mientras que el modelo de Merton sólo considera el incumplimiento hasta la fecha de vencimiento de la deuda.

3.3 Cálculo de riesgo de crédito en la compañía del Grupo BIMBO.

Bimbo es el productor más grande de productos de panificación en México, así como el participante significativo en la producción de botanas dulces y saladas.

Bimbo vende y distribuye más de 750 productos y tiene cerca de 90 marcas. La empresa tiene una participación de mercado de alrededor del 20% del mercado total de pan. Una importante ventaja competitiva es el extenso sistema de distribución de la compañía, que le ayuda a atender más de 550,000 puntos de venta con más de 21,000 rutas (antes de la reciente adquisición), lo que le pérmite mantener un extensivo control sobre la calidad de sus productos así como realizar la mayoría de sus ventas en efectivo. En los últimos años, la compañía ha diversificado sus operaciones en otros países utilizando básicamente su propio flujo de efectivo para financiar su expansión, excepto en los Estados Unidos donde la mayoría de las inversiones han sido financiadas mediante el uso de deuda. Actualmente, la empresa tiene operaciones en Estados Unidos, Latinoamérica y en Europa.

Bimbo ha seguido incrementando sus volúmenes y ventas, manteniendo un margén de EBITDA de alrededor de 14% en los últimos tres años. En el 2002 los márgenes operativos se espera que decrezcan ligeramente como resultado de la integración de las nuevas operaciones. Se espera que la generación de efectivo de la empresa permanezca fuerte como efecto de las medidas de reducción de costos implementadas para la modernización de sus plantas, así como una mayor eficiencia en los sistemas de información y de distribución, entre otros. Se espera que Bimbo reduzca su nivel de deuda y que continue fondeando sus inversiones a través de generación de efectivo. Hasta este momento toda la deuda de la compañía se encuentra denominada en dólares, sin embargo el aumento de los ingresos en dicha moneda así como la intención de la compañía para refinanciar parcialmente su deuda a corto plazo a través del mercado de deuda local, podrá contribuir para disminuir el riesgo de las fluctuaciones del tipo de cambio. Durante el año 2002 se espera que la deuda total a EBITDA y la cobertura de intereses por EBITDA disminuyan a niveles de alrededor de 2.0 veces (x) y entre 6.5x y 7.5x, respectivamente y que mejoren gradualmente como resultado del incremento en la generación de flujo de efectivo así como por la reducción de deuda. A pesar de que la compañia continuará evaluando posibles adquisiciones para continuar con plan de crecimiento, no se esperan aumentos adicionales en el nivel de deuda.

Los datos que se usan son los del tercer trimestre del 2001.[17]

Balance General (Millones de pesos constantesal 30 de septiembre del 2001)	2000	2001	%
Activo total	24,983	22,204	(11.1)
México	18,020	14,996	(16.8)
Estados Unidos	4,683	4,240	(9.5)
Latinoamérica	2,280	2,968	30.2
Activo circulante	7,385	4,784	(35.2)
Inmuebles Planta y equipo (Neto)	13,779	13,585	(1.4)
Pasivo total	9,889	9,909	0.2
Créditos Bancarios a corto plazo	1,340	3,120	132.8
Créditos Bancarios a largo plazo	2,945	1,622	(44.9)
Capital contable	15,095	12,296	(18.5)

Balance general del grupo Bimbo al tercer trimestre del 2001.

En cuestión de la clasificación de crédito la compañía Moody's le confirma la clasificación de Baa2 para la deuda prioritaria no garantizada, y reduce su clasificación en la escala nacional de México a Aa1.mx con tendencia negativa.

3.3.1 Usando el modelo de Jarrow-Turnbull.

Para poder usar este método es necesaria la siguiente información:

a) la probabilidad de incumplimiento. Según la clasificación que tiene la empresa y la figura 2.9, ésta tiene 0.5% de probabilidad de incumplimiento.

b) las cantidades que sube o baja el activo son: $u = 1.1392$ y $d = 0.9082$

c) la tasa de interes libre de riesgo es: $e^{r\tau} = 1.0839$ con $\tau = \frac{1}{2}$, entonces el valor de la tasa de interes es: $r = 0.0403$.

El análisis se considera como en el ejemplo visto en la seccin 3.2.3, la tasa de recuperación a considerar es $\delta = 40.05\%$, tomada de la figura 2.10, industria. Aunque lo que interesa es calcular lo que se perdería en caso de incumplimiento, $(1 - \delta) = 0.9595$. Para calcular el riesgo de crédito es necesario considerar lo que sigue.

i) Aquellos que se incumplen en el primer periodo: sólo se tienen dos casos, cuando sube el activo o cuando baja el activo, es decir, u/b y d/b, después hay que llevarlo a valor futuro un semestre.

$$\begin{aligned}
u/b &= (1.1392)(0.005)e^{(0.0403)}(0.405) = (1.1392)(0.005)(1.04112)(0.405) = 0.00240 \\
d/b &= (0.9082)(0.005)e^{(0.0403)}(0.405) = (0.9082)(0.005)(1.04112)(0.405) = 0.0019
\end{aligned}$$

ii) Aquéllos que se incumplen entre el primer y segundo periodo: sólo se tienen cuatro casos, es decir, uu/b, ud/b, du/b, dd/b.

$$\begin{aligned}
uu/b &= (1.1392)^2(0.995)(0.005)(0.405) = 0.0026 \\
ud/b &= (1.1392)(0.9082)(0.995)(0.005)(0.405) = 0.00208 \\
du/b &= (0.9082)(1.1392)(0.995)(0.005)(0.405) = 0.00208 \\
dd/b &= (0.9082)^2(0.995)(0.005)(0.405) = 0.00166
\end{aligned}$$

iii) Lo que incumplieron exactamente en al año (último momento):

Se tiene en este 4 casos, son uu/n, ud/n, du/n y dd/n.

$$\begin{aligned}
uu/n - b &= (1.1392)^2(0.995)^2(0.005)(0.405) = 0.0026 \\
ud/n - b &= (1.1392)(0.9082)(0.995)^2(0.005)(0.405) = 0.0021 \\
du/n - b &= (0.9082)(1.1392)(0.995)^2(0.005)(0.405) = 0.0021 \\
dd/n - b &= (0.9082)^2(0.995)^2(0.005)(0.405) = 0.0024
\end{aligned}$$

iv) Los que si cumplieron en el año:

$$\begin{aligned}
uu/n &= (1.1392)^2(0.995)^2 = 1.2848 \\
ud/n &= (1.1392)(0.9082)(0.995)^2 = 1.0243 \\
du/n &= (0.9082)(1.1392)(0.995)^2 = 1.0243 \\
dd/n &= (0.9082)^2(0.995)^2 = 0.8166
\end{aligned}$$

Ahora hay que calcular el precio del bono considerando el incumplimiento:

$$\begin{aligned}
E[S_T^I] &= \frac{1}{14}((0.0024 + 0.0019 + 0.0026 + 0.00166 + 0.0026 + 0.0024 + 1.2848 + 0.8166) \\
&+ \frac{2}{14}(0.00208 + 0.0021 + 1.0243) = 0.1511 + 0.1505 = 0.3016
\end{aligned}$$

y el precio del bono libre de riesgo:

$$E[S_T] = e^{2*0.00592431} = 1.01192$$

Usando *spreads*

$$PEI = \frac{E[S_T] - E[S_T^I]}{E[S_T]} = \frac{0.7103}{1.01192} = 0.7019$$

es decir el 70.19% de pérdida al término del año.

Se mencionó antes que la tasa de recuperación es de: 40.5% y lo que se pierde es el 59.5%, por lo tanto el porcentaje que esta en riesgo de las deudas es: de las deudas.

Es decir:

a) Créditos bancarios a corto plazo: \$ 3120 (70.19%) que es: \$2,189.92 millones de pesos.

b) Créditos bancarios a largo plazo: \$1622 (70.19%) que es: \$1,138.48 millones de pesos.

104

105

Capítulo 4

Concentración de riesgo en portafolios de préstamo bancario: Medidas, límite de un sólo deudor y el nivel de capitalización.

En este capitulo se analizará el riesgo de crédito de un portafolio de deuda al considerar el riesgo de concentración que se tiene, tanto en el portafolio como en subdivisiones de éste, el estudio se basa en el trabajo de Javier Márquez Diez-Canedo y Calixto López Castañon.[4]

4.1 Introducción.

De acuerdo a la literatura el tema del riesgo de crédito esta ligado concentración en el portafolio de deuda. Se debe hacer una buena estimación para mantener la liquidez y la estabilidad de la institución financiera. La teoría de Markowitz (1959) es compatible con portafolios de transacciones de renta fija que puede ser obtenido en el modo de costo efectivo. Otra aproximación interesante es la teoría moderna de portafolio de Altman y Saunders (1998). Es importante señalar que la teoría tradicional de portafolios enfoca a la transacción con el problema de concentración indirectamente. Más una medida clara de concentración y su relación con el riesgo no ha sido desarrollada explícitamente.

Cuando se trata con portafolios de préstamo (deudas) bancario tradicional es incompatible con la metodología que al parecer ha surgido. Altman y Saunders (1998) mencionan que el problema de la medida de concentración ha sido trata-

102

do con análisis subjetivo. Fecuentemente los bancos y otros agentes aplican una técnica de puntos basados en la opinión subjetiva de un grupo de expertos, respecto al grado de concentración observado en las diferentes componentes de un portafolio, también la que requieren algunos criterios de clasificación, todo esto para obtener un indicador de la concentración de préstamo. En general, el número obtenido es de más valor en términos cardinales o jerárquico, en vez de una medida de riesgo que no puede ser rápidamente traducido en pérdidas potenciales o Valor en Riesgo (VaR). Por lo menos, el resultado del ejercicio provee los elementos principales para estabilizar los límites en préstamos como una proporción de capital que puede ser localizado en diferentes áreas donde la concentración puede ocurrir.

Las siguientes razones exponen la dificultad para encontrar una buena medida de concentración.

a) Uno debe identificar o decidir las clases o tipos de concentración que son relevantes en situaciones particulares (por ejemplo: por región geográfica, industria, mercado, producto, individuo, estratos sociales, etc.).

   Aún si todos los préstamos de las concentraciones por clase son relativamente pequeñas individualmente una concentración excesiva en cualquier clase puede ser riesgosa bajo circunstancias económicas adversas si las probabilidades de incumplimiento están altamente correlacionadas.

b) Se debe decidir la jerarquía adecuada sin una clasificación determinada, por ejemplo hay que definir que es más importante: que se trate de un producto hipotecario o la zona particular de residencia del deudor o ambos.

Otra dificultad es el tradicionalismo en los analistas de crédito, que en su mayoría son altamente especializados. Es difícil percibir la realidad de concentración del riesgo, porque cada estudio se dedica a una sola variable de concentración. Algunas diferencias se ven en los analistas que deciden en un crédito hipotecario y el de una planta metalúrgica, en principio son distintos además de que usan distintos lenguajes y técnicas. Para el análisis de crédito: el primer analista se concentra en la estabilidad laboral del cliente, ingreso familiar descontando flujos de cajas; el segundo analista discute el crédito en términos de volatilidades, correlaciónes, sensibilidades, perfiles de riesgo y el Valor en Riesgo (VaR). Esto muestra que entre analistas hay un gran hueco conceptual y de comunicación que debe ser llenado, esto para establecer un conjunto común en las medidas de riesgo para poder dirigir el problema de concentración.

El enfoque adoptado en el siguiente análisis no resuelve todos los problemas ya mencionados, pero provee un trabajo teórico que podría dejar eventualmente una definición de concentración de riesgo en un portafolio. A su vez, estas medidas deberían de ser directamente relacionadas a la concentración de riesgo usando conceptos afines a los administradores de riesgo, además, y se podría también incorporar el análisis tradicional a este trabajo.

El caso más simple es el que asume que todos los préstamos pertenecen a un sólo sector de concentración.

4.2 Valor en riesgo, concentración y límite de un sólo deudor.

Es común que los bancos coloquen un límite a la cantidad que puede ser prestada a un sólo deudor cuando se trate la concentración del riesgo. Además, consideran que la concentración ocurre en un sólo sector (por industria, región geográfica, producto, país, etc.) y que la probabilidad de incumplimiento ("p") de cualquier préstamo es igual para todos e independientes.

Es natural que el límite de un sólo acreedor sea expresado como una proporción "δ"del capital "k"del banco, ya que lo máximo que se puede prestar es "k".

La siguiente notación es necesaria para una generalización. Además se considera sin pérdida de generalidad que θ y *delta* están relacionados linealmente, sin que el resultado se altere.

- p: es la probabilidad de incumplimiento en todos los préstamos, son independientes entre ellas.
- δ: el límite de la obligación de un sólo deudor. Es una proporción del capital del banco.
- k: es el capital total del banco.
- V: es el valor del portafolio.
- N: es el total de préstamos que se tienen.
- f_k: es el valor del k-ésimo préstamo de un total N.
- ψ: es el razón de capitalización.
- θ: es una proporción del valor total del portafolio en préstamo. Se supone un comportamiento linealque definido como: $\theta = \delta\psi$.

El problema a resolver es determinar el límite de un sólo deudor. Es claro que el k-ésimo préstamo es menor o igual al límite de un sólo deudor multiplicado por el capital del banco, es decir:

$$f_k \leq \delta k = \delta \frac{k}{V} V = \delta \psi V = \theta V \tag{4.1}$$

$f_k \quad \leq \quad \theta V$ logrando una cota para el k-ésimo préstamo.

Si la concentración se tiene en un número de deudores que tienen mayor crédito, bajo el límite de un sólo deudor, la máxima concentración sobre esos "n"[1] deudores individuales es:

$$f_k = \begin{cases} \theta V & k = 1, 2, ..., n \\ 0 & k = n+1, n+2, ..., N \end{cases} \tag{4.2}$$

Si $n \in Z^+$ entonces $n\theta V = V$, claro que la suposición es que se tienen sólo los "n" préstamos, entonces sucede:

$$\begin{aligned} n\theta V &= V \quad \text{entonces } n\theta = 1 \\ n &= \frac{1}{\theta}. \end{aligned}$$

Lo que importa es encontrar la probabilidad de incumplimiento si se supone que "m" de "n" deudores incumplirán, la probabilidad de que esto suceda se obtiene al considerar una distribución binomial (ya que cada préstamo se asocia con una Bernoulli y son independientes.)

$$B(n, m) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}.$$

se sabe por el teorema de límite central [2] que para "n" muy grande la función de densidad binomial se puede aproximar con una función de densidad normal con media y varianza las de la binomial, es decir:

$$B(n, m) \sim N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right).$$

Al tener lo anterior, es posible encontrar con ayuda de las herramientas estadísticas un intervalo de confianza para el valor esperado de los incumplimientos (el promedio

[1] Si consideran que en éstos se encuentra la concentración existente.

[2] El Teorema del límite central dice:
Sea $x_1, x_2, \ldots, x_n$ variables aleatorias idénticamente independientes $\forall n$ tenemos $E(x_i) = \mu$ y $Var(x_i) = \sigma^2$ entonces la distribución $\frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i) - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge a una función $N(0, 1)$ cuando $n \to \infty$.

de los incumplimientos históricos). El intervalo de confianza con una significancia de $\alpha^{*}\%$ es:

$$n_{\alpha^{*}} \in (np \pm z_{\alpha^{*}} \sqrt{np(1-p)}).$$

pero lo que se desea es encontrar el punto en la distribución normal que tenga una probabilidad α de que se tengan n_α incumplimientos en los préstamos y se puede asegurar que es el punto: $n_\alpha = np + z_\alpha \sqrt{np(1-p)}$.

Si θV es el límite de un sólo deudor entonces VaR_α[3] $= n_\alpha \theta V \leq k$, ya que no puede exceder la cantidad con la que cuenta el banco. Se había tomado a $n\theta = 1$ y con n_α, se puede sustituir lo antes mencionado, es decir:

$$\begin{aligned}
VaR_\alpha = n_\alpha \theta V \leq k \quad &\text{sustituyendo } n_\alpha \\
VaR_\alpha = \theta V[np + z_\alpha \sqrt{np(1-p)}] &\leq k \quad \text{sustituyendo } n = \tfrac{1}{\theta} \\
VaR_\alpha = \frac{1}{\theta} p\theta V + z_\alpha \theta V \sqrt{\frac{1}{\theta} p(1-p)} &\leq k \\
pV + z_\alpha V \sqrt{\theta p(1-p)} &\leq k \\
\theta p(1-p) &\leq \left(\frac{k - pV}{z_\alpha V}\right)^2 \\
\theta &\leq \frac{\left(\frac{k-pV}{z_\alpha V}\right)^2}{p(1-p)} \\
\frac{\left(\frac{k-pV}{z_\alpha V}\right)^2}{p(1-p)} = \frac{\left(\frac{k}{z_\alpha V} - \frac{p}{z_\alpha}\right)^2}{p(1-p)} = \frac{\left(\frac{k}{V} - p\right)^2}{z_\alpha^2 p(1-p)} &= \frac{(\psi - p)^2}{z_\alpha^2 p(1-p)} = \Theta(p, \psi, \alpha)
\end{aligned}$$

entonces se llega al valor que acota el límite de un sólo deudor, que es:

$$\theta \leq \frac{(\psi - p)^2}{z_\alpha^2 p(1-p)} = \Theta(p, \psi, \alpha) \tag{4.3}$$

La expresión 4.3 es atractiva ya que la cota depende del razón de capitalización ψ del banco, la probabilidad de incumplimiento p y el nivel de confianza VaR a través de z_α. Esta cota puede ser tomada como límite de concentración del portafolio.

[3]El VaR resume la pérdida máxima esperada (o peor pérdida) a lo largo de un horizonte de tiempo objetivo dentro de un intervalo de confianza dado.[5]

4.3 Una primera generalización.

No siempre se tiene la máxima concentración en exactamente "n" préstamos. Puede suceder que se tenga a cualquier número de los "N" préstamos, con una distribución para contar los préstamos del banco. Supóngase que el vector columna $F = (f_i) \in \mathbf{R}^N$ es arbitrario y representa a las "N" cantidades de préstamos en el portafolio. Es decir:

$$F^T = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_N) \qquad \text{donde:}$$

f_i es el monto del i-ésimo préstamo en el portafolio, $i = 1, 2, \ldots, N$.

p es la probabilidad de incumplimiento, hay independencia.

x_i es la variable aleatoria que mide si hay incumplimiento o no.

Entonces:

$$x_i = \begin{cases} f_i & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

como se ve, ésta es la función de densidad de probabilidad Bernoulli con $E(x_i) = pf_i$ y $Var(x_i) = E((x_i)^2) - (E(x_i))^2 = f_i^2 p - p^2 f_i^2 = f_i^2(p - p^2) = f_i^2 p(1-p)$. La función de densidad de la suma de la muestra es la función binomial con media y varianza:

$$\begin{aligned} \mu &= E(\Sigma x_i) = \Sigma p f_i = p \Sigma f_i = pV \qquad \text{donde } V = \Sigma f_i \\ \sigma^2 &= Var(\Sigma x_i) = \Sigma Var(x_i) = \Sigma p(1-p) f_i^2 = p(1-p)\Sigma f_i^2 \end{aligned}$$

Como F es totalmente arbitrario se dificulta conocer la distribución exacta de la Σx_i, pero si se considera a N muy grande se aproxima a una distribución normal. De aquí se puede obtener la aproximación del VaR, es decir:

$$VaR_\alpha = \mu + z_\alpha \sigma = pV + z_\alpha \sqrt{p(1-p) \sum_{i=1}^{N} f_i^2}.$$

De antemano al VaR se le acota superiormente por k, ya que no puede exceder el capital del banco. Al desarrollar todos los pasos se tiene:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha &\leq \cdot\, k \\ pV + z_\alpha \frac{V}{\sum f_i} \sqrt{p(1-p) \sum f_i^2} &\leq k \qquad \text{donde } V = \sum f_i \Rightarrow 1 = \tfrac{V}{\sum f_i} \end{aligned}$$

si se multiplica por $\sum f_i$, se obtiene:

$$pV \sum f_i + z_\alpha V \sqrt{p(1-p) \sum f_i^2} \;\leq\; k \sum f_i$$

$$\begin{aligned}
z_\alpha V\sqrt{p(1-p)\sum f_i^2} &\leq k\sum f_i - pV\sum f_i \\
\sqrt{p(1-p)\sum f_i^2} &\leq \left(\frac{k-pV}{z_\alpha V}\right)\sum f_i \\
\frac{\sum f_i^2}{(\sum f_i)^2} &\leq \frac{\left(\frac{k-pV}{z_\alpha V}\right)^2}{p(1-p)}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\sum f_i^2}{(\sum f_i)^2} \leq \frac{(\psi - p)^2}{z_\alpha^2 p(1-p)} = \Theta(p, \psi, \alpha) \tag{4.4}$$

el límite de un sólo deudor es: $\theta = \frac{\sum f_i^2}{(\sum f_i)^2}$.

Donde el límite de un sólo deudor es el índice de concentración "Herfindahl-Hirshman"

$$\text{Concentración} = H(F) = \frac{\sum f_i^2}{(\sum f_i)^2} \tag{4.5}$$

4.4 Análisis de la desigualdad VaR y el nivel de capitalización.

El riesgo de concentración de un portafolio puede ser manejado al usar una medida más general de concentración (además del límite de un sólo deudor). Todos los conceptos son totalmente familiares para cualquier banquero; el razón de capitalización y/o la tasa de incumplimiento estimada excepto el índice de Herfindahl.

Hay que darse cuenta de que el nivel de capitalización está relacionado con la razón de capitalización ψ requerido, es decir:

$$\psi \geq p + z_\alpha\sqrt{p(1-p)H(F)} \qquad \text{donde } \psi = \tfrac{k}{V} \geq \tfrac{VaR_\alpha}{V}$$

La desigualdad anterior relaciona el nivel de capitalización con la probabilidad de incumplimiento, el nivel de confianza para el VaR y el índice de concentración. Además muestra que hay una relación directa entre el índice Herfindahl y la varianza del incumplimiento con la probabilidad del incumplimiento p. Hay que notar que el índice toma un valor aproximado al cero cuando se tienen portafolios altamente diversificados, y a uno cuando hay una alta concentración; la varianza de la probabilidad de incumplimiento varía entre cero y $\sqrt{p(1-p)}$, dependiendo del grado de concentración del portafolio medido por $H(F)$.

4.5 Una visión del índice Herfindahl.

Los resultados anteriores proveen un trabajo analítico para evaluar el riesgo de concentración de las deudas, así como la relación que hay entre la razón de capitalización y las tasas de incumplimiento del banco. Bajo ciertas suposiciones el límite de un sólo deudor y el índice de Herfindahl son medidas de concentración del portafolio que tienen en común la misma cota, si se toma el valor en riesgo en lugar del capital del banco en riesgo.

Para desarrollar el modelo general conviene cambiar la notación. El índice de Herfindahl será representado por:

$$H(F) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i^2}{(\sum_{i=1}^{N} f_i)^2} = \frac{||F||^2}{(\mathbf{1}^T F)^2}$$

donde $||F|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} f_i^2}$, que es la norma euclidiana de un vector columna $F \in \mathbf{R}^N$

Note que $\mathbf{1}^T F = V$ [4] es considerado como una constante normalizada, esto es, que la diferencia de concentración en un portafolio de préstamo es de factor $||F||$. Entre más créditos estén en pocos deudores significa mayor concentración. La máxima concentración ocurre cuando todos los créditos están en un sólo deudor y la mínima cuando todos los deudores tienen la misma cantidad de crédito.

Al formalizar:

a) La máxima concentración ocurre para algún i:

$$f_i = \begin{cases} V & \forall\, j = i. \\ 0 & \text{para } j \neq i,\ j = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

es decir, $F^* = \text{máx}\{f_i\} = Ve^i$ donde $e^i \in \mathbf{R}^N$.[5]

b) La mínima concentración ocurre cuando:

$$f_i = \frac{V}{N} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

Hay que señalar, intuitivamente, que la cota $\Theta(p, \psi, \alpha)$ es la máxima concentración posible bajo el límite de un sólo deudor, que sucede cuando el mínimo número posible de obligaciones son deudores por arriba del límite dado. Esto muestra que el índice es consistente con el valor maximizado bajo el límite de un sólo deudor

[4] Se refiere al vector columna de unos cuando se escribe $\mathbf{1}$.
[5] e^i es parte de la base para formar espacio E^N.

cuando todos los créditos están concentrados en el número mínimo de obligaciones y cada deudor tiene el crédito arriba del límite.

Teorema 1: Si el portafolio de deudas F cumple con el límite de un sólo deudor $F < \theta 1V$, entonces $H(F) \leq \theta$ y la máxima de concentración ocurre sí y sólo sí F es alguna derivación de la distribución de deudas (4.2).

Este resultado tiene un importante significado para el manejo y regulación de riesgo. Si el límite de un sólo deudor se conoce (al usar θ), éste puede ser tomado como el índice de Herfindahl. Lo anterior ayuda a estimar el capital adecuado, con θ en la ecuación 4.3. Es decir, se obtiene:

$$\psi \geq p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)H(F)} = p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)\theta} \tag{4.6}$$

Lo anterior provee una manera simple para estimar el capital adecuado sin complicaciones.

Pero esta condición es suficiente, mas no necesaria. En el siguiente teorema, si uno obliga al portafolio a satisfacer $H(F) < \theta$, esto es posible teniendo una deuda específica como una proporción del valor total del portafolio que representa una cantidad más grande que θ.

Teorema 2: Si $H(F) \leq \theta$ entonces:

$$f_i \leq \frac{1}{N}(1 + \sqrt{(N\theta - 1)(N-1)})V < \sqrt{\theta}V \qquad \text{para i=1,2,...,N.} \tag{4.7}$$

Corolario: Considere αV, la más grande de las deudas posibles individuales bajo el supuesto $||\alpha||^2 \leq \theta$. Entonces:

i) $\alpha^* = \frac{1}{N}(1 + \sqrt{(N\theta - 1)(N-1)})$.

ii) $\theta < \alpha^* < \sqrt{\theta}$.

iii) $H(F) \leq \theta V \implies f_k^* < \sqrt{\theta}V \ \forall k$.

El resultado muestra que si se toma, para estimar la concentración de la deuda, a θ en lugar de $H(F)$ para deudas opuestas individuales, automáticamente por iii) se limita a la máxima deuda posible por la raíz cuadrada, un número más grande (ya que θ es menor que uno). La diferencia es que el inversionista que maneja el portafolio concentra la máxima deuda posible en el caso del único deudor, esto a costa de la cantidad que podría prestar a los otros deudores, ésta tiende a cero cuando el número total de deudas se incrementan.

4.6 Generalización.

Las hipótesis usadas anteriormente son:

a) las probabilidades de incumplimiento son homogéneas e independientes entre sí, en la dimensión donde la concentración puede suceder.

b) sólo hay una dimensión en la posible concentración de la deuda.

c) nada se recupera de las deudas incumplidas.

Esta generalización usa la hipótesis de homogeneidad para considerar el caso donde se tengan diferentes probabilidades de incumplimiento y esten correlacionadas.

Intuitivamente no hay razón para suponer que en diferentes tipos de deudas, diferentes zonas geográficas, diferentes industrias, diferentes paises o diferentes individuos con diferentes estratos sociales, tengan la misma probabilidad de incumplimiento y suponer que la probabilidad de incumplimiento entre diferentes grupos sea incorrelacionada (independiente).

4.6.1 Un modelo general.

El modelo general considera diferentes probabilidades de incumplimiento, en todas las deudas, y que hay correlación entre ellas. De aquí en adelante se manejan matrices y vectores, es decir, π es el vector columna de las probabilidades de incumplimiento y M es la matriz de varianzas-covarianzas de las probabilidades de incumplimiento.

El valor en riesgo, en forma matricial, es:

$$VaR_\alpha = \pi^T F + z_\alpha \sqrt{F^T M F} \leq k \tag{4.8}$$

La matriz M tiene la característica de ser definida positiva y simétrica [6], además, existe una matriz ortogonal Q [7] tal que:

$$M = Q^T \Lambda Q.$$

donde Λ tiene los valores característicos de M en la diagonal y cero en todas las demas entradas. Si se toma $S = \sqrt{\Lambda} Q$, la matriz es $M = S^T S$. Al realizar un

[6] Una matriz es definida positiva si $m_{i,j} = m_{i,j} > 0 \; \forall \; i, j$. Una matriz es simétrica si $M = M^T$

[7] Si la matriz Q es ortogonal de nxn cumple con que $C^T C = I$ (I es la matriz identidad) entonces es una matriz ortogonal con $C^T = C^{-1}$

cambio de variable, $G = SF$ y el valor en riesgo es dividido por $\mathbf{1}^T G$. El resultado es:

$$H(G) = \frac{G^T G}{(\mathbf{1}^T G)^2} \leq \left(\frac{k - \pi^T F}{z_\alpha \mathbf{1}^T G}\right)^2 \tag{4.9}$$

Si al numerador y denominador se les divide por V, finalmente la expresión del índice Herfindahl para la matriz $G = SF$ es:

$$H(G) = \frac{G^T G}{(\mathbf{1}^T G)^2} \leq \left(\frac{\psi - \overline{p}}{z_\alpha \sigma}\right)^2 \tag{4.10}$$

Al tomar la media de las probabilidades de incumplimiento en las deudas del portafolio.

$$\overline{p} = \frac{\pi^T F}{V}.$$

y la desviación estándar del incumplimiento de las deudas del portafolio.

$$\sigma = \frac{\mathbf{1}^T G}{V} = \frac{\mathbf{1}^T G}{\mathbf{1}^T F}.$$

Lo antes visto se reduce a un simple caso unidimensional con probabilidades de incumplimiento iguales e independientes [8].

El cambio de variable reescala a F en términos de la matriz S, que representa a la raíz cuadrada de los valores propios de la matriz de varianzas-covarianzas M. En términos de riesgo, significa que las deudas del portafolio son redireccionadas a las covarianzas de las probabilidades de incumplimiento de todas las deudas. Es decir, las deudas que son más correlacionadas y/o tienen una gran variabilidad en la tasa de incumplimiento serán amplificadas en comparación a las que son menos correlacionadas o tienen la variabilidad más pequeña.

En un momento dado el portafolio grande, numéricamente, y altamente diversificado con pequeñas deudas que tienen varianzas grandes, altamente correlacionadas, pueden ser más riesgosos que en un portafolio pequeño, numéricamente, en deudas grandes que son incorrelacionadas y tienen baja probabilidad de incumplimiento. Al reescalar a F con S se da una nueva dirección al problema.

4.6.2 El límite del único deudor en deudas individuales y capital adecuado.

La concentración de riesgo usualmente se manejaba límitando la cantidad de crédito para un acreedor, las implicaciones se analizan en el límite de un solo

[8] Caso simple: $\pi = p\ \mathbf{1}$ y $M = p(1-p)I$.

deudor. Aunque el Teorema 1 aporta $G \leq \theta 1(1^T G)$ que implica que $H(G) \leq \theta$, es difícil de aplicar en la práctica. Para propósitos prácticos se usará la cota que tiene expresada para límite de F.[9]

Lo que proporciona el teorema 1 de la sección anterior es:

$$H(G) \leq \theta \frac{H(G)}{H(F)} \leq \left(\frac{\psi - \overline{p}}{z_\alpha \sigma}\right)^2.$$

despejando a θ

$$\theta \leq \frac{H(F)}{H(G)} \left(\frac{\psi - \overline{p}}{z_\alpha \sigma}\right)^2. \tag{4.11}$$

además la cantidad $\left(\frac{\|G\|}{\|F\|}\right)^2$ es una "Rayleighs quotient"y se sabe que $\lambda_{min} \leq \left(\frac{\|G\|}{\|F\|}\right)^2 \leq \lambda_{max}$ donde λ_{min} y λ_{max} son los valores propios máximo y mínimo de la matriz M. Al sustituir en la ecuación 4.11 se obtiene una cota para el límite de un sólo deudor, aunque más estricta.

$$\theta \leq \frac{1}{\lambda_{max}} \left(\frac{1^T G}{1^T F}\right)^2 \left(\frac{\psi - \overline{p}}{z_\alpha \sigma}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_{max}} \left(\frac{\psi - \overline{p}}{z_\alpha}\right)^2 \tag{4.12}$$

Hay que escoger a θ que satisfaga las ecuaciones 4.11 y 4.12 que garantiza que $F \leq \theta 1 V$, lo anterior implica que la ecuación 4.9 se satisface. Si el límite de la deuda con relación al capital, en la práctica se usa $\delta = \frac{\theta}{\psi}$ que proporciona la ecuación 4.1.

Finalmente, puede verificarse, se ajusta la transformación de F a través de S, todos los resultados del teorema 1 de la sección 4 son todavía verdaderos bajo esta generalización, con las condiciones de regulación y manejo de riesgo. Específicamente, la desigualdad generalizada del capital adecuado es:

$$\psi \geq \overline{p} + z_\alpha \sigma \sqrt{H(G)} \tag{4.13}$$

sin embargo la ecuación 4.12 permite una analogía con la ecuación 4.6 donde el capital adecuado puede relacionarse con el límite de un sólo deudor como:

$$\psi \geq \overline{p} + z_\alpha \sqrt{\lambda_{max} \theta}. \tag{4.14}$$

Es interesante notar que la única diferencia entre las ecuaciones 4.14 y 4.6 es el uso del valor propio de M en las expresiones correspondientes. Esto puede ser mostrado por $\lambda_{max}\theta \geq \sigma H(G)$ y con el factor incrementado con las correlaciones positivas, que son consistentes con la noción del incremento de correlación del capital requerido.

[9]Una complicación para el cambio de variable es que la desigualdad no necesariamente se cumple para un valor arbitrario S

4.6.3 La relación con diferentes dimensiones de concentración.

Al establecer una partición del portafolio de deuda en subportafolios o "*buckets*" de acuerdo al mismo criterio de clasificación, se tiene la suposición implícita de que el comportamiento del incumplimiento es similar, de algún modo, para cada préstamo en el grupo. A no ser que las condiciones macroeconómicas que cambian drásticamente, suponen que hay una cierta independencia entre las características del incumplimiento en las diferentes divisiones. Si se particiona el portafolio en segmentos donde las tasas de incumplimiento y la estructura de covarianzas fuera homogénea en cada grupo, pero diferentes e independiente de los otros, se puede obtener un criterio de clasificación deseable para las deudas con relación al manejo de riesgo. De aquí en adelante se usa segmento y dimensión de concentración como sinónimos.

Para poder ejemplificar lo anterior, considere la posibilidad de identificar grupos de deudas donde el comportamiento del incumplimiento de todas las deudas en cada grupo son similares y diferentes en otros. Formalmente, supóngase que F es particionado en h segmentos, esto es, $F^T = (F_1, \ldots, F_h)$, donde F_i es un vector de las cantidades sobresalientes de las deudas en el grupo. Suponga que la probabilidad de incumplimiento para todas las deudas en un particular segmento son los mismos y tienen correlaciones similares, y que las probabilidades de incumplimiento son independientes entre las clases. En otras palabras, que el vector de las tasas esperadas de incumplimiento y la matriz de covarianzas pueden ser particionadas como:

a) $\pi = (\pi_i)$; $\pi_i = p_i 1_i$ para cada clase $i = 1, \ldots, h$; donde p_i es la probabilidad de incumplimiento para cada grupo i, y 1_i es la suma de vectores de tamaño N_i correspondiente al número de deudas en cada grupo.

b) $M = (\sigma_{j,k})$, tal que

$$\sigma_{j,k} = \begin{cases} > 0 & \text{si } j,k \in \text{grupo } i \\ = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La matriz de varianzas-covarianzas M es una "diagonal por bloques"("*block diagonal*"). Cada bloque M_i es de dimensión $(N_i \text{x} N_i)$ y definida positiva como la matriz total M. Por eso, cada submatriz puede ser factorizada de acuerdo al correspondiente submatriz S_i.

4.6.4 Análisis de segmentos individuales.

Para este análisis se definirá lo siguiente:

a) $V_i = \sum_{j \in F_i} f_i$: es el valor del portafolio asociado al grupo i.

b) $\sum_{i=1}^{h} V_i = V$.

c) $\gamma_i = \frac{V_i}{V}$: es el porcentaje del grupo i con respecto al portafolio completo.

d) $k_i = \gamma_i k$: es el porcentaje del capital del banco que le corresponde al clase i.

La desigualdad del valor en riesgo para el grupo i-ésimo es:

$$VaR_\alpha^i = p_i V_i + z_\alpha \sqrt{F_i^T M_i F_i} \leq k_i = \psi V_i \qquad \text{para } i = 1, \ldots, h. \tag{4.15}$$

Después de realizar varios cálculos, como dividir entre V_i, hacer el cambio de variable $G_i = S_i F_i$ y dividir $\mathbf{1}_i^T G_i$ en ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$H(G) \leq \left(\frac{\psi - p_i}{z_\alpha \sigma_i}\right)^2 = \Theta_i \qquad \text{donde} \qquad \sigma_i = \frac{\mathbf{1}_i^T G_i}{V_i}. \tag{4.16}$$

Es interesante notar que la cota de concentración depende de la razón de capitalización total y no de la razón de capitalización de la clase como se pudo llegar a pensar. Al tener la misma cota significa que todos los resultados funcionan para los casos particulares y se puede obtener el límite de un sólo deudor θ_i de la deuda por cada grupo, que es:

$$F_i \leq \theta_i \mathbf{1}_i^T V_i \qquad \Rightarrow \qquad H(G_i) \leq \Theta_i. \tag{4.17}$$

y θ_i satisface las ecuaciones 4.11 y 4.12 en cada clase.

4.6.5 Análisis del portafolio en su totalidad.

Al considerar lo antes visto, la desigualdad del valor en riesgo toma la siguiente forma para el portafolio en su totalidad:

$$VaR_\alpha = \sum_{i=1}^{h} p_i V_i + z_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{h} G_i^T G_i} \leq k. \tag{4.18}$$

si se despeja usando la cota del capital del banco (k):

$$z_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^{h} ||G_i||^2} \leq k - \sum_{i=1}^{h} p_i V_i. \qquad (4.19)$$

si V divide en ambos lados, se despeja $\sum ||G_i||^2$ y se usa la ecuación 4.9, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{h} ||G_i||^2 = \sum_{i=1}^{h} (1_i^T G_i)^2 H(G_i) \leq \frac{\left(\psi - \sum_{i=1}^{h} \gamma_i p_i\right)^2}{\frac{z_\alpha^2}{V^2}}. \qquad (4.20)$$

si $\sum_{i=1}^{h} (1_i^T G_i)^2$ divide en ambos lados de la desigualdad

$$\overline{H}(G) = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i H(G_i) \leq \left(\frac{\psi - \sum_{i=1}^{h} \gamma_i p_i}{z_\alpha \sigma}\right)^2. \qquad (4.21)$$

$$\text{donde} \qquad \lambda_i = \frac{(1_i^T G_i)^2}{\sum_j (1_j^T G_j)^2} \qquad \sigma = \frac{\sqrt{\sum_j (1_j^T G_j)^2}}{V}.$$

que es como antes se vio, así que $\overline{H}(G)$ es una medida de concentración del portafolio en su totalidad, un promedio de los índices individuales $H(G_i)$. El siguiente resultado muestra una condición suficiente para los límites individuales en cada clase.

Proposición 1: Bajo las hipótesis hechas se supone $p_i \leq \psi$ para $i = 1, \ldots, h$ entonces:

$$H(G_i) \leq \left(\frac{\psi - p_i}{z_\alpha \sigma_i}\right)^2 \forall i = 1, \ldots, h \qquad \Rightarrow \qquad \overline{H}(G) \leq \left(\frac{\psi - \sum_{i=1}^{h} \gamma_i p_i}{z_\alpha \sigma}\right)^2. \quad (4.22)$$

El resultado significa que los límites en las deudas por clase pueden estar relacionados con $F_i \leq \theta_i 1_i V_i$ y θ_i que satisface las ecuaciones 4.11 y 4.12 para cada grupo y mantener el capital adecuado. El cálculo para el capital adecuado puede ser obtenido por $\overline{H}(G)$ y con la cota de la ecuación 4.21.

4.6.6 Las condiciones alternativas para el capital adecuado.

Un análisis de las desigualdades 4.11 y 4.12 proporcionan reglas sencillas para el capital adecuado. La ecuación 4.12 proporciona la siguiente condición por clase:

$$\psi \geq p_i + z_\alpha \sqrt{\lambda^i_{m\acute{a}x} \theta_i} \text{para } i = 1, \ldots, h. \qquad (4.23)$$

pero esto es para cada uno, se puede encontrar una cota inferior que es más grande que todas las demás, es decir:

$$\psi \geq máx_i\left\{p_i + z_\alpha\sqrt{\lambda^i_{máx}\theta_i}\right\}. \tag{4.24}$$

si se calcula la cota para cada uno de los segmentos del portafolio, entonces la ecuación 4.24 indica que la razón de capitalización ψ es al menos el valor más grande de las cotas de todos los segmentos, entonces es estable.

Otra posibilidad es realizar la suma en ambos lados, es decir:

$$h\psi \geq \sum_{i=1}^{h}\left\{p_i + z_\alpha\sqrt{\lambda^i_{máx}\theta_i}\right\}.$$

$$\psi \geq \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h}\left\{p_i + z_\alpha\sqrt{\lambda^i_{máx}\theta_i}\right\}. \tag{4.25}$$

Lo que significa es que al menos ψ debe alcanzar una cota, el promedio aritmético de las h clases.

Ahora, las alternativas considerando la medida de concentración $H(G_i)$ para cada grupo del portafolio son:

$$\psi \geq máx_i\left\{p_i + z_\alpha\sigma_i\sqrt{H(G_i)}\right\} \tag{4.26}$$

y sumando en ambos lados de la desigualdad se tiene:

$$\psi \geq \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h}\left\{p_i + z_\alpha\sigma_i\sqrt{H(G_i)}\right\}. \tag{4.27}$$

Sin embargo las ecuaciones 4.24, 4.25, 4.26 y 4.27 pueden ser usadas como instrumentos políticos para determinar el límite de un sólo deudor, al cambiar la composición del portafolio y/o ajustando el capital para mantener el capital adecuado se consideran los cambios en el comportamiento de las probabilidades de incumplimiento a través de las diferentes dimensiones de concentración.

4.6.7 Considerando tasas de recuperación.

Básicamente hay dos maneras de tomar en cuenta las tasas de recuperación. La primera es definir a F como el vector de "*pérdidas por incumplimiento (* loss given default, *LGD)*", opuesto al balance, donde se supone que no se recupera nada de las deudas incumplidas. La otra alternativa es incluir las tasas de recuperación *explícitamente* en el análisis, esto permite ver el impacto que tiene en la concentración del riesgo, y facilita la evaluación a través de suposiciones que compensen las deficiencias de la información.

Si se considera el trabajo anterior, es decir, dividir al portafolio en grupos, entonces "ρ_i"es la tasa de recuperación para deudas incumplidas en el grupo i-ésimo. Entonces la desigualdad queda así:

$$\sum_{i=1}^{h}(1-\rho_i)\lambda_i H(G_i) \leq \left[\frac{\psi - \sum(1-\rho_i)\gamma_i p_i}{z_\alpha \sigma}\right]^2. \tag{4.28}$$

Esta expresión muestra que cualquier cambio en la tasa de recuperación tiene un doble impacto. Se incrementa (decrementa) la tasa de recuperación de cualquier clase se reduce (aumenta) la contribución de la clase en la concentración del lado izquierdo de la desigualdad, $1-\rho_i\lambda_i^2$ decrece (incrementa) como la tasa de recuperación se aumenta. Además, su contribución a la pérdida esperada también decrece (incrementa) en el numerador del lado derecho, incrementa (decrementa) la estabilidad de la cota de concentración.

4.7 Aplicación en un portafolio.

Los datos que se usan para esta aplicación fueron proporcionados por el mismo banco latinoamericano del que se hace referencia en el capitulo 2 (matrices de transición). Precisamente la matriz que se usa es la de octubre de 1999 a septiembre del 2000.

El portafolio esta dividido en: cuatro regiones, cuatro franquicias y treinta y cuatro industrias. A los datos se les aplica la cota de θ, el límite de un sólo deudor, el índice de Herfindahl (nivel de concentración por región franquicia, industria y del portafolio en su totalidad), la cantidad de acreditados en los que se encuentra la concentración, además, se calcula la cota inferior de la razón de capitalización. Para aplicar lo antes mencionado se supone que todos tienen la misma probabilidad de incumplimiento, así que se utiliza la media ponderada de la probabilidad de incumplimiento de la matriz de transición antes mencionada.

4.7.1 Caso univariado.

Hay que mencionar que la cantidad de acreditados en los que se encuentra la concentración tiene que ser grande para que este diversificado (el índice debe de ser casi cero) y no se pierda mucho cuando estos lleguen a incumplir. En la figura (4.1) se observan los resultados obtenidos tanto en el índice Herfindahl y la cota para el límite de un sólo deudor. En la figura (4.3) y (4.4) se despliegan los resultados para la cota de un s'olo deudor.

Media ponderada de probabilidad: 0.0928

Totales	V	Subportafolios	H(F)	1/H(F)	"Regla de dedo"	ψ>=
1953	14,093,036,601.77	Portafolio	0.04	23	23	0.0958
		Región				
456	525,823,553.78	Región 1	0.17	6	3	0.0988
1443	8,630,090,785.35	Región 2	0.02	52	35	0.0948
50	4,937,122,262.64	Región 3	0.29	3	2	0.1005
4	0.00	Región 4	0.00	0	0	0.0928
		Franquicia				
1180	5,966,978,493.10	Corporativo	0.02	62	39	0.0946
701	2,352,627,271.03	Empresarial	0.11	9	4	0.0977
55	4,937,122,262.64	Gov–C	0.29	3	2	0.1005
17	836,308,575.00	Gov–E	0.37	3	2	0.1016
		Industria				
13	765,202.00	0	0.58	2	1	0.1038
287	580,379,345.94	1	0.08	13	9	0.0968
72	311,562,995.15	2	0.08	12	6	0.0970
55	75,109,989.20	4	0.18	5	3	0.0990
22	2,500,462,315.58	5	0.97	1	1	0.1071
63	198,176,128.02	6	0.18	6	3	0.0989
28	2,807,070.61	8	0.47	2	1	0.1027
125	264,931,365.14	9	0.09	11	6	0.0971
34	72,036,230.00	10	0.37	3	2	0.1016
49	180,084,464.08	11	0.18	6	3	0.0989
14	0.00	12	0.00	0	0	0.0928
170	373,898,739.25	13	0.17	6	3	0.0987
11	25,272,603.00	14	0.33	3	2	0.1011
2	7,413,424.85	15	0.56	2	1	0.1037
107	459,073,628.74	16	0.16	6	3	0.0987
13	100,786,287.55	17	0.36	3	2	0.1014
36	747,297,307.97	18	0.21	5	2	0.0994
45	71,694,37.00	19	0.43	2	2	0.1023

Figura 4.1: Resultados de la concentración de riesgo.

Media ponderada de probabilidad: 0.0928

Totales	V	Subportafolios Industria	H(F)	1/H(F)	"Regla de dedo"	ψ>=
14	287,612.00	20	0.38	3	2	0.1017
29	2,790,135.56	21	0.28	4	2	0.1005
32	369,828,868.50	22	0.44	2	2	0.1023
37	9,976,241.00	23	0.28	4	2	0.1004
33	155,789,951.19	25	0.42	2	1	0.1022
35	2,458,840,449.06	26	0.15	6	3	0.0985
8	0.00	27	0.00	0	0	0.0928
52	438,738,006.52	28	0.09	11	6	0.0971
159	600,941,628.12	29	0.13	8	5	0.0980
89	342,358,894.14	31	0.13	8	4	0.0980
9	79,439,680.00	32	0.53	2	1	0.1033
38	2,448,006,762.20	34	0.13	8	4	0.0980
215	716,929,345.95	36	0.45	2	1	0.1025
30	43,937,374.46	37	0.51	2	1	0.1031
14	0.00	38	0.00	0	0	0.0928
13	453,420,186.00	39	0.34	3	2	0.1013

Figura 4.2: Resultados del la concentración de riesgo.

4.7.2 Caso multivariado; matriz de varianzas-covarianzas.

Aquí se considera que los sectores que conforman el portafolio estan correlacionados, es decir, que cualquiera de ellos sufre algún disturbio de mercado todos se afectan, matriz de varianzas-covarianzas. La matriz de covarianzas es:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.6 & 0.1 \\ 0.5 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.6 & 0.8 & 1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 & 1 \end{pmatrix}$$

y como su determinante en distinto de cero, $det(M) = 0.1229$. para llevar esta información al caso más sencillo se tiene que hacer lo siguiente:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.0096 & 0.7477 & 0.5847 & -0.31.46 \\ 0.6844 & -0.2589 & -0.5421 & 0.4131 \\ -0.5796 & 0.1574 & -0.2216 & 0.7682 \\ 0.4422 & 0.5908 & 0.5614 & 0.3745 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.1284 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3960 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.9610 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.5146 \end{pmatrix}.$$

Además a $M = S^T S$ y la matriz S es:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0.0035 & 0.2680 & 0.6 & 0.1 \\ 0.4307 & -0.1629 & -0.3411 & 0.26 \\ -0.5682 & 0.1543 & -.2172 & 0.7531 \\ 0.7012 & 0.9369 & 0.8903 & 0.5938 \end{pmatrix}$$

y el la matriz de F es:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 4,937,122,262.64 \\ 836,308,575.00 \\ 5,966,978,493.10 \\ 2,353,627,271.03 \end{pmatrix}.$$

Para obtener el índice se necesita de la matriz G, ésta es:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -0.1274 \\ 0.0566 \\ -0.2201 \\ 1.0954 \end{pmatrix},$$

y el índice de Herfindalhl es: $H(G) = \frac{G^T G}{(\mathbf{1}^T G)^2} = 0.5106$.

Se usa el índice de Herfindahl para poder estimar el valor mínimo de la la razón de capitalización, ecuación (4.13), el valor que se tiene es de $0.0963 \geq \psi$. La razón de capitalización es considerada igual a su cota mínima para estimar la cota superior del límite de un sólo deudor, ecuación (4.10), el límite no puede sobrepasar el valor 0.5107 del capital del banco.

4.7.3 Conclusiones

Lo que se puede concluir es que el portafolio en su totalidad no se encuentra diversificado, su concentración en base al índice de Herfindahl es del 0.04 H, es decir, la concentración esta distribuida en 25 de 1953 acreditados ($\frac{1}{H(F)}$). Si se subdivide en regiones, la menos riesgosa es la región dos ya que tiene una concentración de 0.02 H, es decir, se encuentra distribuido en 52 de 1443 acreditados. Con respecto a franquicias, se prefiere la corporativa ya que se tiene una concentración del 0.02 H, el valor del subportafolio esta en 62 de 1180 acreedores. En el análisis por industria el riesgo de concentración es menor a esta en la industria 1 y 3 dado que se tiene sólo el 0.08 (ambas). Esto es que 13 de 287 y 12 de 72 acreeditados se encuentra la mayoría de los créditos en dicho subportafolio.

Al considerar subportafolios, los más riesgosos son por industria, la 5, ya que la concentración sólo se encuentra en un solo deudor, se tiene el 0.97 del índice de concentración de Herfindahl y en las industrias 0, 15, 32 y 37 ya que el riesgo de concentración es superior al 0.5.

En la práctica se usa como una medida de concentración al 60% del monto del portafolio (llamado "la regla de dedo"). En los resultados se puede percibir que la "regla de dedo"es una buena aproximación del índice de Herfindhal, en la tabla se ven casi el mismo número de acreedores donde se localiza la concentración, excepto en la región 2 y en la franquicia de préstamo corporativo, que se podría decir que la regla subestima el número de acreeditados en los que se distribuye la mayor parte de la deuda.

En conclusión es preferible como riesgo de concentración al índice de Herfindahl, ya que es más exacto en la estimación del riesgo de concentración que se tiene en cada subportafolio o el portafolio total.

En 1988 se toma como razón de capitalización al 8% [12], pero en este capitulo se vio como obtener una cota inferior para ésta razón. En los resultados se puede observar que todas las cotas inferiores son superiores a esta regla, así que se puede considerar una excelente aproximación a la razón de capitalización que necesita el banco.

Con respecto al límite de un sólo deudor en las figura 4.3 y la figura 4.4 esta descrito el valor mínimo que puede tener cada deudor por subportafolios.

Considerando matriz de varianzas-covarianzas.

Análizando los resultados que se obtuvieron antes, uno se da cuenta de que la concentración, considerando la covarianza entre franquicias, es muy alta. El valor del portafolio en su mayoría se encuentra en dos deudores. Es un portafolio altamente concentrado. En este caso particular el banco no esta en un riesgo tan grande, ya que tienen buenos colaterales, es decir, la severidad de pérdida[10] no es tanta. Ahora, si se revisa la razón de capitalización estimada, nos dice que al

[10] Es lo que el banco puede recuperar en caso de incumplimiento.

menos el banco debe tener en reserva el 9.63% del valor del portafolio para cubrir cualquier contiengencia. Si se analiza el límite de un sólo deudor, que es estimado con índice de Herfindahls, señala que a lo mas hay que prestar el 4% del valor del portafolio, ya que si se presta más, el banco requerira una inyección adicional de capital.

También se observó que no hay mucha diferencia entre el índice de Herfindahl y la "regla de dedo", que antes se usaba, pero el primero es mucho mejor ya que la fórmula considera los casos más importantes del la concentración, es decir, cuando se tiene todo el valor del portafolio en un sólo deudor y cuando se tiene un portafolio completamente diversificado. La "regla de dedo" no evalua lo anterior, sólo considera el 60% de la concentación (de acuerdo al criterio de expertos), además de que es facil de usar y por eso lo prefieren.

Media ponderada de probabilidad: 0.0928

Totales	V	Subportafolios	θ<=	Limite
1953	14,093,036,601.77	Portafolio	0.042618	600,622,746.29
		Región		
456	525,823,553.78	Región 1	0.173295	91,122,353,.55
1443	8,630,090,785.35	Región 2	0.019104	164,869,846.45
50	4,937,122,262.64	Región 3	0.286925	1,416,583,118.43
4	0.00	Región 4	0.000000	0.00
		Franquicia		
1180	5,966,978,493.10	Corporativo	0.016156	96,402,808.51
701	2,352,627,271.03	Empresarial	0.114712	269,874,555.13
55	4,937,122,262.64	Gov-C	0.286925	1,416,583,118.43
17	836,308,575.00	Gov-E	0.372608	311,615,330.69
		Industria		
13	765,202.00	0	0.575668	440,502.18
287	580,379,345.94	1	0.079131	45,926,256.16
72	311,562,995.15	2	0.083959	26,158,394.31
55	75,109,989.20	4	0.182742	13,725,736.26
22	2,500,462,315.58	5	0.970322	2,426,253,125.89
63	198,176,128.02	6	0.176532	34,984,390.72
28	2,807,070.61	8	0.470293	1,320,144.79
125	264,931,365.14	9	0.089431	23,693,067.41
34	72,036,230.00	10	0.368530	26,547,505.48
49	180,084,464.08	11	0.180568	32,517,501.16
14	0.00	12	0.00000	0.00
170	373,898,739.25	13	0.165047	61,710,796.68
11	25,272,603.00	14	0.331301	8,372,829.79
2	7,413,424.85	15	0.564703	4,186,379.82
107	459,073,628.74	16	0.164616	75,570,809.00
13	100,786,287.55	17	0.357369	36,017,849.68
36	747,297,307.97	18	0.206838	154,569,292.86
45	71,694,37.00	19	0.434838	31,175,444.26

Figura 4.3: El límite de un sólo deudor (1).

Media ponderada de probabilidad: 0.0928

Totales	V	Subportafolios Industria	θ<=	Limite
14	287,612.00	20	0.376412	108,260.54
29	2,790,135.56	21	0.282501	788,215.86
32	369,828,868.50	22	0.435911	161,212,383.54
37	9,976,241.00	23	0.276528	2,758,707.81
33	155,789,951.19	25	0.420423	65,497,615.33
35	2,458,840,449.06	26	0.154626	380,200,115.81
8	0.00	27	0.00000	0.00
52	438,738,006.52	28	0.087445	38,365,399.44
159	600,941,628.12	29	0.128335	77,121,817.29
89	342,358,894.14	31	0.128167	43,878,969.20
9	79,439,680.00	32	0.531070	42,188,019.42
38	2,448,006,762.20	34	0.128558	314,710,452.30
215	716,929,345.95	36	0.453715	325,281,682.92
30	43,937,374.46	37	0.507049	22,278,411.87
14	0.00	38	0.00000	0.00
13	453,420,186.00	39	0.344319	156,121,391.56

Figura 4.4: El límite de un sólo deudor (2).

Símbolos de orden asintótico.

En esencia los símbolos de orden asintótico, "$O[\cdot]$", "$o[\cdot]$" y "$\sim$", son usados para describir el comportamiento de la función $\Psi(h)$ relativa a la función $\lambda(h)$ para valores de h cercanos a h_0.

Sean $\Psi(h)$ y $\lambda(h)$ funciones de h.

1) $\Psi(h) = O[\lambda(h)]$ si:

$$\lim_{h \to h_0} \left[\frac{\Psi(h)}{\lambda(h)}\right] = c \qquad \text{(el límite es acotado).}$$

2) $\Psi(h) = o[\lambda(h)]$ si:

$$\lim_{h \to h_0} \left[\frac{\Psi(h)}{\lambda(h)}\right] = 0$$

es decir

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Psi(h)}{\lambda(h)} - c\right| &< \epsilon \quad \text{si} \quad |h - h_0| < \delta. \\ \frac{\Psi(h)}{\lambda(h)} &< \epsilon + c < c' \\ \Rightarrow \quad \Psi(h) &< c'\lambda(h) \end{aligned}$$

3) $\Psi(h) \sim \lambda(h)$, $\Psi(h)$ "es asintóticamente proporcional a" $\lambda(h)$ cuando $h \to h_0$, si:

$$\Psi(h) = O[\lambda(h)] \quad \text{y} \quad \Psi(h) \neq o[\lambda(h)]$$

Ejemplos:

a) Sea $\Psi(h) = ch^{\frac{1}{2}}e^h$ y $\lambda(h) = h^\gamma$, al calcular el límite cuando $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{ch^{\frac{1}{2}}e^h}{h^\gamma}\right] = \lim_{h\to 0}\left[ch^{\frac{1}{2}-\gamma}e^h\right]$$

el límite es acotado cuando $\gamma \leq \frac{1}{2}$ y es igual a cero cuando $\gamma < \frac{1}{2}$.

Por lo tanto:

1) $\Psi(h) = O[h^\gamma]$ si $\gamma \leq \frac{1}{2}$.
2) $\Psi(h) = o[h^\gamma]$ si $\gamma < \frac{1}{2}$.
3) $\Psi(h) \sim h^\gamma$ si $\gamma = \frac{1}{2}$

b) Sea $\Psi(x) = x^5$ y $\lambda(x) = x^\alpha$, al calcular el límite cuando $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^5}{x^\alpha}\right] = \lim_{h\to 0}\left[x^{5-\alpha}\right]$$

el límite es acotado cuando $0 \leq \alpha \leq 5$ y es igual a cero cuando $0 \leq \alpha < 5$.

Por lo tanto:

1) $\Psi(x) = O[x^\alpha]$ si $0 \leq \alpha \leq 5$.
2) $\Psi(x) = o[x^\alpha]$ si $0 \leq \alpha < 5$.
3) $\Psi(x) \sim x^\alpha$ si $\alpha = 5$

c) Sea $\Psi(x) = lnx$ y $\lambda(x) = x^m$, al calcular el límite cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{lnx}{x^m}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{1}{x}}{mx^{m-1}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{mx^m}\right]$$

el límite es acotado cuando $0 \leq m < \infty$.

Por lo tanto:

1) $\Psi(x) = O[x^m]$ si $0 \leq m < \infty$.
2) $\Psi(x) = o[x^\alpha]$ si $0 < m < \infty$.
3) $\Psi(x) \sim x^\alpha$ si $m = 0$

d) Sea $\Psi(x) = e^x$ y $\lambda(x) = x^m$, calculando el límite cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to -\infty}\left[\frac{e^x}{x^m}\right] = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{e^x}{m!}\right] = \lim_{x\to -\infty}\left[\frac{1}{m!}e^x\right]$$

el límite es acotado cuando $-\infty < m \leq 0$.

Por lo tanto:

1) $\Psi(x) = O[x^m]$ si $-\infty < m \leq 0$.
2) $\Psi(x) = o[x^\alpha]$ si $-\infty < m \leq 0$.
3) $\Psi(x) \sim x^\alpha$

13C

Simulación Monte Carlo.[1]

A.1 Ejemplo del uso de la simulación Monte Carlo.

La simulación de un proceso estocástico es un procedimiento de muestra aleatoria resultado del proceso. Se usa la naturaleza del desarrollo del proceso para el precio del activo: $\frac{dS}{s} = \mu dt + \sigma dB$.

Al suponer que la ganancia esperada del activo es del 14% y la desviación estándar de las ganancias (volatilidad) es del 20% por año, es decir, $\mu = 0.14$ y $\sigma = 0.20$. Al suponer que $\Delta t = 0.01$ y que se considera un cambio en el precio del activo en un intervalo de tamaño 0.01 año.

$$\begin{aligned} \Delta S &= \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon \sqrt{\Delta t} \\ \Delta S &= 0.14(0.01)S + 0.2\sqrt{0.01} S \epsilon \end{aligned}$$

$$\Delta S = 0.0014S + 0.02S\epsilon \qquad \text{(A.29)}$$

La variable del precio de la acción puede ser simulado por repetidas muestras de ϵ de $N(0,1)$ y substituir en la ecuación A.29. La tabla muestra un particular conjunto de resultados.

Precio *stock* en el periodo de evaluación	Muestra aleatoria para ϵ	Cambio del precio *stock* durante el periodo
20.000	0.52	0.236
20.236	1.44	0.611
20.847	-.86	-0.329
20.518	1.46	0.628
21.146	-0.69	-0.262
20.883	-0.74	-0.280
20.603	0.21	0.115
20.719	-1.10	-0.427
20.292	0.73	0.325
20.617	1.16	0.507
21.124	2.56	1.111

Simulación del precio *stock* cuando $\mu = 0.14$ y $\sigma = 0.20$ durante periodos de tamao 0.01 años.

El precio inicial del activo se asume a \$20. Para el 1er periodo es:

$$\Delta S = 0.0014X20 + 0.02X20X0.52 = 0.236$$

En el comienzo del segundo periodo el precio del activo es: \$20.236. El valor ϵ muestreado para el siguiente periodo es 1.44. El cambio para el segundo periodo es:

$$\Delta S = 0.0014X20.236 + 0.02X20.236X1.44 = 0.611$$

En el comienzo del siguiente periodo es: \$20.847. Así sucesivamente. Note que la simulación cumple conm las propiedades del proceso Markov, la muestra de ϵ puede tomarse independiente entre ellas.

La tabla asume que el precio de acciones son medidas muy cercanas a 0.001. Es importante que la tabla muestre un posible comportamiento del movimiento del precio del activo. El movimiento del precio depende de la muestra analizada, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ es una descripción del proceso estocástico obtenido. El precio final de 21.124 en la tabla puede ser visto como una muestra aleatoria de una distribución del precio del activo al terminar 10 intervalos de tiempo, es decir $\frac{1}{10}$ del año.

A.2 PARÁMETROS.

μ : es la esperanza continua compuesta de ganancia recuperada por un inversionista por año. Los inversionistas requieren mayor ganancia para tener un mayor riesgo. Depende del riesgo de la ganancia del activo (depende de la parte del riesgo que no puede ser diversificado por el accionista), depende del tipo de activo y también de las tasas en la economía. Una estimación se obtiene con las curvas de interés (ganancia).

σ : es la volatilidad del del precio del activo. Es un determinante muy importante en el valor del activo, su estimación es en base a datos historicos.

Sea:

$n+1 =$ el número de observaciones.

$s_i =$ el precio del activo en el i-ésimo intervalo.

$\tau =$ tamaño de los intervalos.

considerese

$$u_i = ln\frac{s_i}{s_{i-1}} \qquad \text{para i=1,2,...,n.}$$

ya que $s_i = s_{i-1}e^{u_i}$ (es el comportamiento de las ganancias anualizadas), entonces:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \overline{u})^2} \qquad \text{ó}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}u_i^2 - \frac{1}{n(n-1)}(\sum_{i=1}^{n}u_i)^2}$$

entonces

$$\sigma^* = \frac{S}{\sqrt{\tau}}$$

y su error estándar es aproximadamente $\frac{\sigma^*}{\sqrt{2n}}$.

Bibliografía

[1] John C. Hull. *Option,Futures, and other Derivatives.* Fourth Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.

[2] Martha Trejo González y Maribel González González. *Estrategias de cobertura utilizando productos derivados.* Tesis para Licenciatura. Octubre 2000.

[3] Manuel Ammann Springer. *Lecture Notes in Economics and Matematical Systems.*
"Pricing Derivative Credit Risk". Springer.

[4] Diez-Canedo, Javier Márquez y Castañon, Calixto López.
Concentration Risk in Bank Loan Portafolio's:
Measurement, Single Obligor Limits, and Capital Adequacy.
September 1999

[5] Jorion, Philippe. *El nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados. "Valor en Riesgo".*

[6] Wilmott Paul, *Introduction to futures and option markets.* Prentice Hall. 1995.

[7] Carmen Diaz. *Futuros y Opciones.*

[8] L.C.G. Rogers. *Modelling Credit Risk.* University of Bath.

[9] Roos, Sheldon H. *Applied probability models with optimization application.*

[10] Joseph, Stampfli y Victor, Goodman. *The mathematics of finance. Modeling an Hedging.*

[11] Marshall, John F. y Kapner, Kenneth R. *Cómo entender los swaps.*

[12] Ong, Michael K. *Internal Credit Risk Models.*

[13] "Crdito", Enciclopedia Microsoft(R) Encarta(R) 99.

[14] "Introducción a las calificaciones de Moody's", Moody's Investors Service, Enero 2000.

[15] Standard & Poor's CreditWeek *"Recovering Your Money: Insights Into Losses From Default."*, June 16 1999.

[16] Yen-Ting Hu y William, Perraudin *"The Dependence of Recovery Rates and Defaults"*, February 2002.

[17] www.grupobimbo.com