10

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LOS INICIOS DEL AXIOMA DE ELECCION"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

FERNANDO DE JESUS FIGUEROA TABOADA

DIRECTOR:

M. EN F. DE LA C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

MEXICO, D. F. 2002

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Los Inicios del Axioma de Elección"

realizado por Fernando de Jesus Figueroa Taboada

con número de cuenta 7006102-8, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M.en F.de la C. Rafael Rojas Barbachano

Propietario M.en C. Agustin Ontiveros Pineda

Propietario Mat.Guillermo Zambrana Castañeda

Suplente M.en C Fernando Rene Martinez Ortiz

Suplente Mat.Alberto Manuel Aldama Garisoain

Consejo Departamental

M.en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMEINTOS

Agradezco de antemano a todas las personas que contribuyeron para lograr que el presente trabajo se realizara.

En especial quisiera expresar mí mas sincero y profundo agradecimiento a Rafael Rojas Barbachano, por la excelente dirección y la paciencia mostrada ya que sin su ayuda este trabajo no se hubiera realizado.

También agradezco el trabajo de revisión realizado por: Agustín Ontiveros, Guillermo Zambrana, Fernando Rene Martínez y Alberto Aldama, el cual fue de gran ayuda para la terminación de esta tesis.

INDICE

PREFACIO

El objetivo del presente trabajo es el de presentar de manera somera los inicios del Axioma de Elección, no se pretende brindar una historia detallada de su inicio, lo cual seria casi imposible ya que los primeros usos de elecciones arbitrarias pudieron haberse dado en la época de Euclides y tal vez antes.

Es importante señalar que al aparecer el axioma tal como lo planteo Zermelo se generaron fuertes controversias entre los matemáticos de la época, aun cuando en su trabajo diario lo utilizarán aunque fuera de una manera implícita en distintas ramas de las matemáticas (Análisis, Teoría de los Números, Conjuntos, etc.), no es mi intención exponer todas las controversias que se suscitaron, solo algunas de las que considero desde mi punto de vista (tal vez limitado) las mas importantes.

Es posible distinguir cuatro etapas en el uso de elecciones arbitrarias que llevaron a la formulación del Axioma como se conoce en la actualidad, a saber el Teorema de la Unión Numerable, el Principio de Partición, la frontera entre lo Finito y lo Infinito y finalmente la linea entre los problemas del Principio del Buen Orden y la llamada Tricotomia de los Cardinales.

Esperando que le presente trabajo sirva para dar una idea de los inicios del axioma y de los problemas que se plantearon cuando Zermelo lo enuncio.

1. - INTRODUCCION

En 1908 Zermelo propuso una versión del Axioma de Elección el cual era útil para especificar proposiciones más débiles, y que en su versión final establece:

(1.1).-Dada una familia T de conjuntos no vacíos existe una función f la cual asigna a cada miembro A de T un elemento $f(A)$ de A. f será llamada función de elección de T.

El caso no trivial más débil que ocurre es cuando T es numerable. Este caso se conoce como el Axioma de Elección Numerable y se abreviara de aquí en adelante como el Axioma Numerable. En la época que Zermelo estableció el Axioma de Elección, el cual había deducido de una suposición que un gran número de matemáticos había usado implícitamente [1908,113]. La naturaleza de tal uso era diferente durante el periodo anterior a la formulación de Zermelo. Al uso implícito del Axioma de Numerabilidad lo denominaremos como SN. Después de 1904, los matemáticos estaban consientes de que al hacer infinitas elecciones arbitrarias era necesario usar el Axioma. Las únicas excepciones fueron de tres matemáticos italianos que evitaron intencionalmente tales elecciones durante el periodo 1890-1902. El primero de los cuales fue Peano.

El contraste del uso implícito de la Suposición se daba cuando ocurrían infinitas elecciones. Algunas veces esas elecciones sucedían explícitamente. En ocasiones un matemático podía emplear una proposición que había sido previamente demostrada, usando una infinidad de elecciones arbitrarias y para las cuales no se conocía otra prueba. Sin embargo podía no reconocer que había hecho tales elecciones arbitrarias indirectamente, este caso se ha usado como la suposición SN. Desde luego, el hecho de que un uso de SN pudiera evitarse no implica de ninguna manera que el matemático involucrado haya revisado su demostración. A menudo se usaba el Axioma de manera inevitable ya que la proposición en cuestión no se podía demostrar en la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) pero se podía deducir en ZF agregándole el Axioma de Elección (ZFC). A veces nos referiremos a un uso inevitable diciendo que la proposición P requiere del Axioma. Al decir que P es equivalente al Axioma significa que tal equivalencia es demostrable en ZF. Se puede ver que el Axioma se ha usado implícitamente para demostrar una proposición P si y solo si P es equivalente al Axioma. A pesar de que el Axioma justifica infinitas elecciones mientras sean independientes unas de otras, los matemáticos algunas veces hicieron una infinidad de selecciones, de tal manera que una elección dada dependía de aquéllas previamente hechas. Ése era el caso, por ejemplo, de los primeros intentos por bien-ordenar un conjunto infinito M, tomando un elemento después de otro de M. Más tarde se reconoció que el Axioma podía justificar también las elecciones dependientes. Comúnmente las elecciones dependientes sucedían cuando un matemático seleccionaba una sucesión $a_1, a_2, \ldots$ tal que la elección de a_{n+1}, dependía de a_n. En general tales elecciones no pueden hacerse usando el Axioma de Numerabilidad, aun en la recta real. A pesar de lo cual, la existencia de tal sucesión puede justificarse por una proposición que se derivaba del Axioma de Elección, la cual propuso Paul Bernays en 1942 como la forma más débil del Axioma, útil en análisis. Esta forma se conoce como el Principio de Elecciones Dependientes:

(1.2).- Si S es una relación binaria en un conjunto A tal que para cada x en A existe algún y en A con $x\ S\ y$, entonces hay una sucesión $a_1,\ a_2,\ \ldots$ tal que para cada entero $n>0$, a_n está en A y $a_n\ S\ a_{n+1}$ es verdadero.

Para obtener otras proposiciones que se derivaran del Axioma pero que fueran más débiles, se debía de buscar una proposición alternativa. Tal proposición puede ser la forma restrictiva del Axioma, digamos el Axioma de Numerabilidad, o el Principio de Elecciones Dependientes, pero además puede haber otro tipo de proposiciones. Por otro lado, no se puede olvidar el intento de L. J. Brouwer y sus seguidores, en 1907, de reformular todo en términos Intuicionistas.

A partir del Conjunto Infinito de Cantor los Intuicionistas formularon una ideología más coherente con un trabajo constructivista más general. Dicho constructivismo era suspicaz del infinito actual (O al menos de los cardinales no numerables de Cantor), de la existencia de pruebas las cuales no exhibían un objeto definido únicamente, y del Principio de Exclusión Media, aplicado a conjuntos infinitos.Dentro de la tradición cantoriana, se puede ver la Axiomatizacion de Zermelo como la respuesta a la pregunta:

"¿Qué es un conjunto?"

Esta pregunta ha servido como tema para el desarrollo de la Teoría de Conjuntos. A pesar de lo anterior, desde 1908 han quedado implícitos, todos los intentos para modificar los Axiomas de Zermelo, o para remplazarlos por otros, en las polémicas de sus críticos constructivistas franceses. En 1913 Michelle Cipola argumentó que el Axioma restringía el concepto general de conjunto. Desde que surgió el Axioma, éste apareció de una manera velada en muchas pruebas y dado que era fácil soslayarlo, se examinaron algunos teoremas fundamentales cuyos argumentos habían sido dados antes de Zermelo y los cuales involucraban implícita e inevitablemente su uso. Anteriormente a 1904 algunos de los usos implícitos ocurrían en: Análisis Real, Teoría de Números Algebraicos, Topología y Teoría de Conjuntos. La primera proposición a considerar cuando habían empezado las investigaciones de Cantor en 1870, era: el Teorema de la Unión Numerable, el cual fue empleado en la Teoría de Conjuntos y el Análisis:

(1.3) La unión de una familia numerable de conjuntos numerables es numerable.

Para entender el papel de Axioma en la demostración del Teorema de la Unión Numerable, supongamos primero que cada conjunto $A_1, A_2, \ldots$ es numerable. Donde los elementos a_{11},

a_{i2},... están en A_i entonces sea B la unión de todos los A_i que contienen elementos $a_{i,j}$ donde i,j pertenecen a los naturales. Se observa que B es un conjunto numerable usando el argumento de Cantor que mostraba la numerabilidad de los racionales.

De donde la unión numerable de conjuntos numerables es un subconjunto de un conjunto numerable y por lo tanto es numerable. A pesar de que el uso del Axioma no se ve a primera vista, se utiliza cuando enumeramos todos los A_i. Existen infinitos A_i, para cada uno de los cuales existen muchas posibles biyecciones sobre el conjunto de los naturales.

Por el Axioma de Numerabilidad asociamos a cada A_i una única biyección a_i por lo que los $a_{i,j}$ están bien definidos. El segundo ejemplo se encuentra en la frontera entre lo finito y lo infinito, frontera que podía ser muy nebulosa con la ausencia del Axioma

(1.4) Cada conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

Cantor 1895, Borel 1898 y Russell 1902 demostraron este Teorema usando la Suposición de Numerabilidad implícitamente: Un conjunto A es finito si:

i) A es vacío o sí

ii) para algún n, existe una biyección de A sobre $\{1,2,..., n\}$. De otra forma A es infinito.

La prueba de Russell muestra cómo es utilizado el Axioma.

Dado que A es infinito, existen subconjuntos $A_1, A_2,...,$ de A tales que para cada n, A_n tiene exactamente n elementos y es un subconjunto de A_{n+1}. El subconjunto numerable A deseado es la unión de todos los A_n. Aparentemente Russell no se percató de que para formar A_{n+1} una vez que A_n se había obtenido, uno debe seleccionar algún elemento de $A - A_n$. En virtud de la Numerabilidad, muchas elecciones son necesarias y puesto que no existe regla disponible en general, la prueba requiere del Axioma de Numerabilidad.

El tercer ejemplo es la proposición denominada Principio de Partición:

(1.5) Si un conjunto M se parte en una familia S de conjuntos ajenos no vacíos, entonces S

es equipotente a un subconjunto de M.

Durante 1880 Cantor utilizó un caso especial del Principio de Partición en una investigación sobre la topología de la recta real. Sin embargo la formulación explícita del Principio de Partición se debe a Cesare Burali - Forti (1896).

En el presente no es posible precisar cuando el Principio de Partición es más débil que el Axioma o es equivalente a él. Como ejemplo final consideremos la Tricotomía de los Cardinales, un Teorema relacionado estrechamente a la Proposición que establece que cada conjunto puede ser bien ordenando.

(1.6) Para cada par de cardinales m, n se tiene que $m < n$ o $m = n$ o $m > n$.

Cuando se formula en términos de conjuntos en lugar de cardinales, (1.6) afirma que dos conjuntos cualesquiera A y B son comparables *i.e.* uno de ellos es equipotente a un subconjunto del otro o equivalentemente que existe una función inyectiva de uno en el otro.

En 1895 Cantor asumió la Tricotomía de los Cardinales sin prueba. Años mas tarde escribió a Dedekind que la tricotomía se derivaba de la proposición de que todo conjunto puede ser bien ordenando (Cartas del 28 de Julio). Su equivalencia permaneció sin demostrar hasta que en 1915 Fiedrich Hartogs la hizo. Estos cuatro temas, el Teorema de la Unión Numerable, el Principio de Partición, la frontera entre lo Finito y lo Infinito y finalmente la línea entre los problemas del Principio del Buen Orden y la Tricotomía de los Cardinales formaron la corteza bajo la cual el Axioma de Elección y su historia comenzarían.

2. - LOS ORÍGENES DE LA SUPOSICIÓN

Ahora podemos señalar los niveles a través de los cuales el uso de elecciones arbitrarias pasó a la formulación explícita del Axioma por Zermelo. En particular los esquemas de las cuatro etapas, haciendo visibles sus fronteras históricas. La primera etapa, tomando un elemento no especificado de cada conjunto, puede encontrarse en los *"Elementos de*

Euclides", y tal vez antes. Tales elecciones formaron una base del método antiguo para probar una generalización considerando un objeto arbitrario pero definido, y después ejecutando el argumento para tal objeto. Esta primera etapa también incluía una elección arbitraria de un elemento de cada uno de los conjuntos de manera finita. Es importante entender que el Axioma no se necesitaba para una elección arbitraria de un solo conjunto aun sí el conjunto contenía infinitos elementos. Para un sistema formal una elección arbitraria única podía eliminar por medio del uso de la generalización universal o por simples reglas de inferencia. Por inducción en los números naturales, dicho procedimiento puede extenderse a cualquier familia finita de conjuntos. La segunda etapa comienza cuando un matemático hace un número infinito de elecciones determinando una regla. Dado que esta etapa presupone la existencia de infinitas familias de conjuntos, dos candidatos para esta situación son el Análisis del siglo XIX y la Teoría de los Números. En el caso del Análisis había analistas que arbitrariamente elegían términos de una sucesión infinita y en el segundo, los teóricos-numéricos seleccionaban representantes para una infinidad de clases de equivalencia. Cuando algunos matemáticos, probablemente Cauchy, hicieron tal infinidad de elecciones, y no mencionaron la regla la tercera etapa se inicio. Este descuido – el error para establecer una regla para seleccionar infinitos elementos– motivó el desarrollo de la cuarta etapa. Así en 1871, como se describirá mas adelante, Cantor realizó una sucesión infinita de elecciones arbitrarias para las cuales no había regla posible y consecuentemente se necesitó el Axioma de Numerabilidad por primera vez. Sin embargo Cantor no reconoció la imposibilidad de especificar dicha regla. Después de esta fecha analistas y algebristas incrementaron el uso de tales elecciones arbitrarias sin darse cuenta de que una suposición importante, pero velada, estaba involucrada. De la cuarta etapa surgió la solución de Zermelo al problema del Buen Orden y la formulación explícita del Axioma de Elección. De cualquier forma durante los primeros años del siglo XIX permaneció la idea de las matemáticas como un proceso de construcción. Si uno deseaba probar que un determinado tipo de objeto matemático existía, entonces uno debería de construir dicho objeto de aquéllos para los que previamente se había demostrado su existencia. Por otro lado, dado que las técnicas permitidas en la construcción de dichos objetos no estaban delimitadas precisamente, fue así como se hicieron infinitas elecciones arbitrarias. Estas tendencias opuestas eran visibles en la mayor parte del trabajo de la Teoría de los Números que apareció durante el periodo "*Disquisitiones Arithmeticae*" que publicó Gauss en 1801. Durante la discusión de las formas cuadráticas binarias $ax^2+2bxy+cy^2$, Gauss demostró que para aquellas formas con un discriminante dado $d=b^2-ac$ existía un entero único n tal que se podía partir en n clases mediante una relación de equivalencia. Puesto que reconoció que había muchas formas de seleccionar un representante para cada clase de equivalencia, cuidadosamente estableció un método por el cual había solo un numero finito de ellas para cada valor de d. Gauss remarcó él limite entre la primera y la segunda etapa. Su acercamiento algorítmico a la Teoría de los Números hizo poco probable que se acercara a la tercera etapa. En la tercera, etapa en donde infinitas selecciones se hacían sin método establecido, tuvieron posiblemente su origen en Análisis antes que en la Teoría de Los Números. Esta etapa era ya evidente en 1821 cuando Cauchy estableció una versión del Teorema del Valor Medio:

(2.1). - Dada una función f real en un intervalo $[a,b]$ se dice que f tiene una raíz en el intervalo, suponiendo que $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos contrarios.

Dado un entero $m>0$ Cauchy se percató que la sucesión finita

$$f(a),\ f(a+(b-a)/m),\ f(a+2(b-a)/m),\ \ldots\ldots,\ f(b)$$

debería contener algún par de valores consecutivos con signos contrarios.

Entonces escogió $f(a_1)$, $f(b_1)$ como dicho par con $a_1<b_1$ y $b_1-a_1=(b-a)/m$. Enseguida consideró la sucesión de puntos que dividen $[a_1,b_1]$ en m partes iguales y como antes escogió un par $f(a_2)$, $f(b_2)$ con signos opuestos y tal que $a_2 < b_2$ y $b_2 - a_2 = (b-a)/m^2$. Continuando de esta forma Cauchy seleccionó sucesiones $a_1, a_2, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ que convergieran al mismo punto digamos p, y dado que f era continua en $[a,b]$ para cada n, los valores $f(a_n)$ y $f(b_n)$ tenían signos opuestos y por lo tanto $f(a_n) - f(b_n) = f(p) - f(p) = 0$ como se deseaba.

Mientras Cauchy usó infinitas elecciones para obtener un par de valores a_n, b_n para cada n pudo de esa manera dar fácilmente un método para especificar dicho par únicamente. En particular, él pudo seleccionar para cada n, el par restante cuyos valores tuvieran signo contrario en una sucesión finita apropiada. Consecuentemente la prueba de Cauchy se localiza en la tercera etapa. El proceso de subdivisión repetida de intervalos utilizada por Cauchy, que había sido usado tradicionalmente por Bolzano y Weierstrass, pudo haberse originado en 1821. De hecho Bolzano lo utilizo en su primera prueba de 1817 de (2.1), en contra de lo afirmado por varios historiadores. Cuando Bolzano utilizó dicho método fue para dar un algoritmo para aproximar la mínima cota superior de un conjunto acotado de R mediante la suma de potencias de 2. De acuerdo a Cantor, el método de Bolzano-Weierstrass de subdivisión de intervalos había surgido de una investigación de Teoría de los Números de Lagrange, Legendre y Dirichlet. En un escrito de 1857 de Richard Dedekind sobre Teoría de Números Algebraicos empleó elecciones arbitrarias de manera que permaneciera en la primera etapa pero aproximándose a la segunda y tercera. Dedekind consideró polinomios formales con coeficientes enteros módulo un entero primo p, y se percató que se puede seleccionar un representante para cada clase. Sin embargo, no consideró mas de dos representantes al mismo tiempo, y por lo tanto sólo hizo un número finito de elecciones arbitrarias en una prueba dada [1857,7-8].En efecto, dado que el conjunto de tales polinomios es numerable, él podía fácilmente obtener un método que especificara un representante para cada clase. Cuando publico la segunda edición de las lecturas de *"Dificulte"* sobre Teoría de Números en 1871, Dedekind se baso en las *"Disquisitiones Arithmeticae"* para la partición de esas formas cuadráticas binarias con un discriminante dado en clases de congruencias. Por otro lado se abstuvo de establecer el método, dado en las *"Disquisitiones"*, para seleccionar representantes para esas clases. En vez de eso trató con las propiedades de cualquier conjunto arbitrario de representantes.

La cuarta etapa, en donde los matemáticos hacen infinitas elecciones arbitrariamente para los cuales no hay regla posible y para los cuales consecuentemente el Axioma de Elección es esencial, comienza en Octubre de 1871 cuando Eduard Heine escribe un articulo de Análisis Real que se imprimió al año siguiente; dicho artículo tenía como base una investigación que no se había publicado de Weierstrass. Es probable que Heine haya conocido el trabajo de Weierstrass por George Cantor, quien había estudiado bajo la tutela de Weierstrass en Berlín y que había sido colega de Heine en la Universidad de Halle en 1869. Uno de los Teoremas que se encontraban en el artículo de Heine que involucraba elecciones arbitrarias, se acreditaba a Cantor:

(2.2) Una función es continua en $p \Leftrightarrow f$ es continua por sucesiones en p [Heine 1872,83].

En efecto, el Teorema de Cantor establecía que las dos caracterizaciones de continuidad son equivalentes. La primera era la definición usual dada por Cauchy y Weierstrass:

Una función f es continua en un punto p si para $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\eta > 0$ tal que para cada x, $/x-p/ < \eta$ $\Rightarrow$ $/f(x) - f(p)/ < \varepsilon$.

La segunda caracterización por medio de sucesiones en vez de intervalos, resulta ser lo que se ha mencionado anteriormente como continuidad por sucesiones:

Una función real es continua por sucesiones en p si para cada sucesión $x_1, x_2, \ldots$ que converge a p, la sucesión $f(x_1), f(x_2), \ldots$ converge a $f(p)$[1] .

La demostración de Heine había sido tomada de la que Cantor había hecho, usando implícitamente la Suposición para mostrar que la continuidad por sucesiones en p implicaba la continuidad en ese punto. Supongamos, comenzaba Heine que f no es continua en p, entonces existe ε tal que sin importar que tan pequeño sea n_0 siempre hay un n positivo tal que $n < n_0$ y tal que $/f(p+n) - f(p)\ / > \varepsilon$. Por lo que para cualquier valor de n_0, sea n (menor que n_0) para la cual la diferencia $n_1 = (\ /f(p+n) - f(p)\ /\ ) > \varepsilon$. para $n_0/2$ la diferencia para $n = n_2$ no puede ser menor que ε; para un $n_2 = n_0/4$ sucede para $n = n_3$ y así sucesivamente [1872,183]. Dado que las sucesiones $n_i, n_{ii}, \ldots$ convergen a cero, entonces $p+ n, p+ n_1, \ldots$ converge a p; pero $f(p+ n_1), f(p+ n_2), \ldots$ no converge a $f(p)$ contrario a la hipótesis. Los trabajos de Cantor y Heine no dieron muestras que permitieran sospechar que una nueva y fundamental aseveración se necesitaba para esa prueba.

No fue sino hasta una década después de que el axioma se formulo, que Michelle Cipolla en Italia y Waclaw Sierpinski en Polonia de manera independiente reconocieron que (2.1) necesitaba inevitablemente el Axioma. Con la publicación del artículo de Heine la Suposición de Numerabilidad se utilizo en las matemáticas. A primera vista el argumento por el cual Cantor establece (2.1) parecía no diferir del argumento usado por Cauchy para demostrar (2.2) medio siglo antes. Cuando en 1886 Jules Tannery uso el argumento de Cantor para probar (2.2) en un libro de texto de introducción a la Teoría de Funciones, Tannery no se percato de que algo inusual o sospechoso hubiera ocurrido [1886,108-109]. De hecho el uso implícito de la Suposición que había hecho Cantor cuando probo (2.2), no

---

[1] Se define a la propiedad continuidad por sucesiones para enfatizar que es paralela a la continuidad. Esta noción se conoce también como continuidad de Heine.

conducían directamente a la formulación del Axioma de Numerabilidad, sin embargo este teorema dio la primera de varias rutas por las que el uso de la Suposición se generalizo en las matemáticas. Dedekind continuó con esa ruta. En 1871 publico el décimo suplemento a las lecturas de Dirichlet sobre la Teoría de Números. En ese suplemento investigo métodos para extender la factorización única en primos, descomposición que se conocía para enteros, y la extendió a números algebraicos. En contraste, Dedekind utilizo elecciones arbitrarias de un modo inevitable, en 1877 cuando publico un articulo descriptivo en francés sobre su Teoría de Ideales y módulos. En 1871 había definido un módulo como un conjunto A de números complejos cerrado bajo la adición y sustracción e hizo $a \equiv b \pmod{A}$ significara $(a - b) \in A$. La noción de modulo (la cual para los matemáticos en un tiempo era extremadamente general y la cual incluía su concepto de ideal como caso especial) originado de una analogía con la congruencia $a \equiv b \pmod{m}$ introducida por Gauss para enteros *a*, *b*, *m* [Dedekind 1877,70-71]. Después de argumentar sobre algunas propiedades de sus módulos en su artículo Dedekind estableció el siguiente teorema:

(2.3) Sean A, B módulos, entonces $\exists C \subset B$ tal que $\forall\, b \in B$, $\exists\, b_1 \in B$ con $b_1 \equiv b \pmod{A}$.

Dedekind llamo a tal conjunto *B*, como un sistema completo de representantes para él modulo A^2. Para establecer (2.3) Dedekind simplemente hizo una partición de B en clases de congruencias *mod A* y selecciono un elemento de cada clase. Este procedimiento no se parecía esencialmente al que había usado para obtener el conjunto de representantes de una clase de congruencia *mod m*, o de formas binarias.(Legendre, Dirichlet y Dedekind en 1871). Sin embargo había una diferencia esencial. Mientras que la elección de representantes en los primeros casos se podía realizar por medio de una regla la prueba de (2.3) no podía hacerse de la misma manera. Además, si *A* era el conjunto de todos los números racionales y si B era el conjunto de los reales entonces B constituía un conjunto no numerable. Esto es en el (2.3) Dedekind fue el primero en usar una forma de la Suposición más fuerte que en el caso de Numerabilidad sobre la que Cantor había utilizado para obtener (2.2). Esta afirmación se considero verdadera aun cuando dio un argumento similar en su libro "*Was send und was sellen die Zahlen?*" de 1888. En dicho libro fue más lejos haciendo particiones de todos los conjuntos en clases de equivalencia, y entonces seleccionaba un representante de cada clase. En la práctica solamente necesitaba un conjunto finito de representantes para sus investigaciones de campos de números algebraicos, por lo que no necesitaba el Axioma[3] .

A pesar de que en 1897 en un reporte sobre tales campos Hilbert enfatizó que Dedekind había usado sus investigaciones sobre la noción de modulo, Hilbert mismo [1897,245] empleó solamente esos módulos generados por combinaciones lineales finitas de elementos base. Del mismo modo cuando Heinrich Weber introdujo un concepto más general sobre campo en 1893, se restringió a campos extendidos obtenidos agregando nuevas indeterminaciones finitas, y por lo tanto no necesito de la Suposición [1893,528].

Solamente y debido a un desarrollo posterior en la Teoría de Campos hecha por Steinitz y de espacios vectoriales de dimensión finita hechos por Hamel y Hausdorff fue que se determinó completamente el papel del Axioma en esos temas. Por lo que (2.2) determinó una equivalencia de dos nociones:

La continuidad basada en intervalos o vecindades y la continuidad por sucesiones.

En un espacio euclidiano n - dimensional en el que los analistas del siglo XIX realizaban sus investigaciones, un punto p es punto límite si en cada vecindad A de p $\exists$ q en $A - \{p\}$.

---

[2] Este teorema reaparece en las investigaciones de Legendre , Dirichlet y Dedekind.

[3] Sin embargo, en esa investigación Dedekind restringió su discusión de teorías generales como una concesión a otros matemáticos. Carta de 10 de junio de 1876 a Rudolph Lipschitz..

Por otro lado, si hay una sucesión a_1, a_2, ... de elementos de A - $\{p\}$ que converjan a p, entonces p es un punto límite de A. Esencialmente, el Axioma evita la dicotomía originada por la obtención de la sucesión deseada de un modo análogo a la prueba de Cantor de que la continuidad por sucesiones en un punto implica la continuidad. Aunque la noción de punto limite y de punto limite por sucesiones llevaban a definiciones diferentes de conjunto cerrado, conjunto perfecto, etc., estas definiciones se consideraron equivalentes en R_n por muchos analistas del siglo XIX. Para aquellas definiciones basadas en intervalos o vecindades, el Axioma se hizo inevitable en muchos casos. Un ejemplo importante fue el Teorema de Bolzano-Weierstrass que en la actualidad se acredita solo a Weierstrass:

Cada subconjunto infinito acotado A de Rn tiene un punto límite. Durante 1865 Weierstrass escribió una serie de artículos, en los cuales estableció el Teorema para $n = 2$. En 1874 Weierstrass en un escrito, demostró el Teorema de la siguiente manera:

Si una función real f tiene infinitos valores entre 2 números c y d, entonces el conjunto de valores en $[c, d]$ tiene un punto limite b. Para un entero dado $m > 1$, Weierstrass representó tal punto limite como $k+ (k+1)/m, k+2/m^2, k+3/m^3+$....., donde $k1$ esta en $\{0, 1, ..., m-1\}$. Donde k es el entero menor, mayor o igual a c, tal que el intervalo $[k, k+1]$ contiene infinitos valores de f. Además, k es el entero menor tal que $[k+k1/m, k+k+1/m]$ contiene infinitos valores de f y también para m^2, m^3,.... Por lo que Weierstrass aproximaba sucesivamente su punto limite b, y entonces extendía su teorema a R_n, sin usar elecciones arbitrarias en cada caso.

Esta prueba parece haber circulado informalmente hasta que Salvatore Pincharle, quien asistió a los cursos dados por Weierstrass en Berlín en 1878 publicó finalmente la prueba [1880,237]. Por lo que si se reemplaza el punto límite:

(2.4) Cada subconjunto infinito de A de R_n tiene un punto límite por sucesiones.

Nadie se percató de la importancia de distinguir entre estas dos versiones del teorema hasta que Sierpinski investigó el tema décadas mas tarde [1918,122]. Sin embargo Camile Jordan en 1892 usó elecciones arbitrarias para probar (2.4). Jordan propuso dar un tratamiento riguroso a la integración múltiple de Riemman a lo largo línea que Gaston Darboux había introducido para funciones de una variable usando integrales inferiores y superiores. Con esta idea Jordan introdujo lo que se conoce como medida de Jordan de un conjunto en R_n [1892,76]. Definió la noción de punto limite de la manera siguiente , sea la distancia $d(p_1, p_2)$, entre dos puntos $p_1 = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ y $p_2 = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ dada por $\Sigma / b_i-a_i /$ posteriormente demostró (2.4) para el caso de $n = 2$. Efectivamente, escribió que la integral definida de una función f en Rn con dominio acotado se obtiene mediante la descomposición del *"dominio en infinitésimos elementos";* uno multiplica la medida (*entendue*) de cada uno de esos elementos por el valor de f en un punto arbitrariamente elegido en el elemento; y se encuentra el limite de la suma Σfds formada de esta manera [1892,269]. La demostración de Jordan, se parecía bastante a la prueba de Cauchy de (2.1): Para Jordan, sea v y V dos reales con $v < V$ tal que el conjunto A está acotado por el cuadrado que tiene vértices (v,v) (v,V), (V,v) y (V,V). Para un m dado tal que $m > 1$ este cuadrado puede dividirse en m^2 cuadrados cada uno de longitud $(V-v)/m$. Puesto que al menos uno de estos cuadrados menores contiene infinitamente muchos puntos de A, escogió tal cuadrado y lo llamó E_1. Repitió este proceso, escogió una sucesión de cuadrados E_n, cada uno de los cuales de longitud $(V-v)/mn$ y que contienen infinitos puntos de A. Escogiendo un punto p_n para cada en intersección a, obtuvo una sucesión $p_1, p_2,\ldots$ en A que convergiera a algún punto p como se deseaba [1892,73-74]. Aquí Jordan hizo uso de la Suposición. Donde los E_n podían especificarse por una regla, los p_n no. De hecho generó la sucesión $p_1, p_2,\ldots,$ mediante infinitas elecciones dependientes, aun cuando ese argumento podía modificarse para usar el Axioma de Numerabilidad. Es indudable que su uso de arbitrarias elecciones pertenece a la cuarta etapa. El artículo de Jordan usaba implícitamente la Suposición de Numerabilidad en otros dos casos. El primero se presentó en su prueba de que la frontera de un conjunto era cerrada. La segunda concerniente a la noción de distancia de $d(A,B)$ entre dos subconjuntos A y B de Rn. Después de definir $d(A,B) = \inf\{pq \,/\, p \in A \vee q \in B\}$ decía que si $A \cap B = \varnothing$ y cerrados y acotados $\exists\, p \in A$ y $q \in B$ tal que $pq = d(A,B)$.

Puesto que este resultado podía establecerse sin el Axioma, usando el Teorema que decía que una función real continua en un cerrado y acotado alcanzaba su mínimo, su argumento no se basaba en la Suposición de Numerabilidad para obtener dos sucesiones $p_1, p_2, \ldots$ y $q_1, q_2, \ldots$, que la primera estaba en A y la segunda en B y las distancias p_1q_1, p_2q_2, ... convergen a $d(a,B)$ [1892,73-74]. En 1893 cuando Jordan publico la segunda edición del *"Curso de Análisis"*, lo reservó para introducir muchos de los conceptos y resultados encontrados en su artículo. Ahí se había desviado de las investigaciones de Cantor usando puntos límites por sucesiones en vez de puntos límites y su noción fundamental. De esta manera definió al conjunto derivado por sucesiones $s(E)$ de E como el conjunto de todos los puntos limites de E. Similarmente E es por sucesiones cerrado si $s(E)$ era un subconjunto de E, y era perfecto si $E = s(E)$. También, un punto p era sucesivamente aislado de E si $p \in E$ pero $p \notin s(E)$. Si se remplazaban los términos "punto límite por sucesiones" por "punto límite" en cada definición, se obtienen las nociones correspondientes a conjunto derivado, cerrado, perfecto y punto aislado que Cantor había introducido por medio de vecindades.

Jordan consideraba los conceptos de punto límite y punto límite por sucesiones como equivalentes y hacía evidente la prueba de los siguientes resultados:

(2.5) Para cada subconjunto E de R_n, el conjunto derivado por sucesiones $s(E)$ es cerrado por sucesiones.

Para establecer que $s(E)$ era cerrado por sucesiones, se necesitaba una sucesión $p_1, p_2, \ldots$ de puntos en $E - \{p\}$ que convergiera a p, por lo que utilizaba la Suposición de Numerabilidad. De igual forma usaba dicha Suposición para enunciar un par de Teoremas que consideraba muy elementales para demostrarlo:

i) En R_m si p es un punto aislado por sucesiones de E entonces p es un punto aislado de E;

ii) Un conjunto E de números reales, acotado por arriba y cerrado por sucesiones, contiene un supremo.

Para concluir con la Topología de Conjuntos, Jordan argumentó sobre conjuntos conexos. Un subconjunto E de R_n era Jordan-conexo (d'un seule tenant) si era acotado, por sucesiones cerrado, y no podía descomponerse en dos conjuntos cerrados por sucesiones A, B tales que $d(A,B)>0$.

(2.6) Si un conjunto Jordan-conexo E contiene dos puntos entonces E es perfecto por sucesiones.

Dado que E es cerrado por sucesiones, decía, sólo restaba mostrar que cada punto p era punto límite de sucesión de E y para hacerlo usaba infinitas elecciones dependientes.

El método para la prueba y el uso implícito de la Suposición eran análogos en su Teorema final:

Si p y $q \in E$ Jordan - conexo $\subset R_n \Rightarrow$ cada r tal que $p < r < q \Rightarrow r \in E$ [1893,24-25]

Lo que distinguía al artículo de Jordan de 1892 y del libro de 1893 era la aproximación sucesiva con las nociones Topológicas Cantorianas de modo que el Axioma de Numerabilidad se necesita, pero que no aparecía inmediatamente. En este contexto el trabajo de Jordan se significó por otra razón: su influencia sobre Henri Lebesgue. Esta influencia fue evidente en las primeras investigaciones de Lebesgue sobre medida e integración y también se hizo presente en su uso de sucesiones de elecciones arbitrarias.

He aquí un ejemplo, el cual se encontraba en el apéndice de sus escritos sobre integración, dados durante 1902-1903, en el College de France, donde expuso el Teorema atribuido a Cantor:

Si todos los conjuntos derivados *E(1)* ,*E(2)* ,.....*E(n)*,... de un conjunto acotado *E* de números reales distinto del vacío son no vacíos entonces su intersección es no vacía.

Para probar su teorema Lebesgue eligió arbitrariamente un punto en cada *E(n)* [1904,131].A pesar del hecho de que posteriormente se volvió un crítico severo del Axioma, frecuentemente se negó a reconocer que lo había usado en su propia investigación. Sorprendentemente ni Lebesgue ni ninguno de sus críticos colegas franceses señalaron el uso extensivo de Jordan de elecciones arbitrarias, a pesar del hecho de que dichos críticos estaban familiarizados con su libro. En resumen, para finales del siglo XIX, los analistas a menudo realizaban una sucesión infinita de elecciones arbitrarias como una reminiscencia al trabajo de Cauchy realizado siete años antes. Tales analistas, que aceptaron la noción general de función (propuesta por Dirichlet en 1829) como una correspondencia en vez de una expresión analítica, no se percataron que una cantidad de sus resultados necesitaba fundamentalmente del Axioma de Elección.

3.- LA FRONTERA ENTRE LO FINITO Y LO INFINITO.

El infinito actual, el cual Aristóteles había defendido a favor del infinito potencial, volvió a entrar a las matemáticas a través de la Teoría de Conjuntos de Cantor. Antes de Cantor, Bernard Bolzano había explorado los caprichos de los conjuntos infinitos en su libro "*Las Paradojas del Infinito*" publicado póstumamente en 1851. A pesar de que Bolzano no había definido adecuadamente las nociones de conjuntos finitos e infinitos, conocía dos propiedades que podían servir para ese propósito. Una de ellas aportaba la definición:

(3.1) Un conjunto $A \neq \varnothing$ es finito si para algún $n > 0$, A es equivalente a $\{1,2,...,n\}$ de otra forma A es infinito.

La segunda propiedad se conoce actualmente como de Dedekind.

(3.2) Un conjunto A es Dedekind-finito si para algún $B \subset A$ es equivalente a

A, de otra forma A es Dedekind-infinito.

Para determinar la equivalencia de (3.1) y de (3.2) esos matemáticos usaban la noción de numerabilidad implícitamente. En resumen, Bolzano trató el tema de la frontera entre los conjuntos finitos e infinitos de una forma en que provocaba la confusión. Para definir la noción de conjunto finito, presuponía los enteros positivos los cuales entonces obtenía de esa noción. La circularidad viciaba su definición. La ambigüedad ocurría también en su definición de conjunto infinito:

Un conjunto A es infinito si cada conjunto finito es solamente una parte (Theil) de A.

No estaba claro cuando aseguraba que: Cada conjunto infinito $A \subset B$, equivalente ó solamente algunos conjuntos infinitos tienen tal subconjunto.

No se sabe a ciencia cierta qué puntos de vista de Bolzano influenciaron a Cantor, el cual discutió sobre el infinito en "*Las Paradojas del Infinito*" solamente en 1883. En esa ocasión se refirió al libro de Bolzano para asegurar que el infinito actual existía, pero criticaba el hecho de establecer un concepto de número infinito ó el concepto de potencia basado en equivalencia. Sin embargo adoptó los términos *Menge* (conjunto) y *Vieheit* (multitud ó multiplicidad) de Bolzano. En 1866 Cantor completó su trabajo doctoral en Berlín, sobre Teoría de Números, desarrollada por Legendre y Gauss. En un artículo publicado en 1878, Cantor establecía que R y R_n tienen la misma potencia, y definía a un conjunto finito como aquél cuya potencia es un entero positivo. Para tal conjunto aseguraba, que cada subconjunto propio tenía una potencia menor, mientras que un conjunto infinito tiene la misma potencia que un subconjunto propio de *A*. Habiendo establecido claramente las propiedades (3.1) y (3.2), se pudo introducir alguna de ellas como definición de conjunto finito o infinito. Pero no lo hizo. Aseguró sin probarlo que dichas suposiciones eran equivalentes, usando la suposición de Numerabilidad implícitamente. Aún no había huella explícita de que elecciones arbitrarias ocurrieran, circunstancia que habría de cambiar. En 1882 Cantor continuaba sin creer que una simple definición de conjunto finito fuera necesaria o al menos posible. Por lo que se sorprendió cuando Dedekind hizo pública su propia definición (3.2), la primera definición de conjunto finito que no presuponía los números naturales. Cinco años después Cantor finalmente dio a conocer su propia y vaga definición alternativa: *"Por conjunto finito entendemos al conjunto M que se genera de un elemento original a través de la suma sucesiva de nuevos elementos de tal manera que el elemento original puede obtenerse de M removiendo sucesivamente los elementos en orden inverso". [1887, 266].*

Cantor aplicó una versión del Principio de Inducción Matemática, para mostrar que cada conjunto finito de acuerdo a su definición era también un conjunto Dedekind-finito. Sin probarlo estableció el recíproco, que cada conjunto infinito era Dedekind-infinito y por lo tanto se apoyaba implícitamente en la Suposición una vez más. Este proceso era característico de los primeros usos de Cantor de la Suposición, por lo que frecuentemente lo presuponía en proposiciones cuyas pruebas consideraba demasiado obvias para afirmarlo. En su *"Grundlagen"* de 1883, antes de publicar una definición de finito, Cantor afirmaba que la diferencia entre conjuntos finitos e infinitos era esencial. Mientras que un conjunto finito siempre conserva el mismo ordinal sin importar cómo son acomodados sus elementos, un conjunto infinito puede rearreglarse para tener más de un ordinal [1883a, 549-550]. Ocultaba en esta caracterización su creencia de que cada conjunto puede ser bien-ordenado. Si se observa la caracterización de Cantor como definición de conjunto finito y si se hace la suposición plausible que esta definición es equivalente a la usual, entonces de esta equivalencia se deriva el Principio de Buen - Orden y por lo tanto el Axioma de Elección. Como Cantor el lógico americano Pierce consideraba las proposiciones (3.1) y (3.2) como equivalentes. Pero su interés para definir la noción de conjunto finito, no la tomó de Cantor, algunos de cuyos artículos había leído en 1884, sino de un deseo de justificar el silogismo del lógico inglés August de Morgan que afirmaba:

Algún X es Y;

Para todo X algo no es Y ni Z;

Por lo tanto, algo no es X ni Z.

En 1885 después de hacer notar que el silogismo de De Morgan es válido si y solo si la clase de todos los X son finitos, Pierce estableció una definición de conjunto finito bastante parecida a (3.2) Ahora para decir que una cantidad de objetos es finita, de la misma forma como decimos que pasamos de una clase a otra, debemos necesariamente venir alrededor de alguno de los individuos pasando anteriormente; esto es, si cada una de las cantidades es una relación uno a uno con una cantidad, entonces para cada una de las cantidades ésta es la misma cantidad. Parecía en efecto, que Pierce intentaba la siguiente definición:

Un conjunto A es Pierce- finito, si cada $f: A$ en A uno a uno es sobre.

Además en el Diccionario del Siglo en 1889, estableció una definición de conjunto finito que era esencialmente (3.1). "*Si aplicamos una clase o numero entero, capaz de ser completamente contado*".[1889-21]. Dado que Pierce presumiblemente veía sus dos definiciones como equivalentes, también hizo uso implícito de la Suposición de Numerabilidad. Sin embargo hasta 1888, cuando Dedekind publico su libro "***Was sind und*** *sollen die Zahlen?"* Cuando la Teoría de Conjuntos finitos se desarrolló completa y rigurosamente. Usando su definición, demostró que cada conjunto equipotente a un subconjunto de un conjunto de Dedekind finito era Dedekind finito. Como consecuencia de sus axiomas para enteros positivos, dedujo que cada conjunto Dedekind-infinito, contenía un subconjunto numerable. De hecho fue su demostración del recíproco en donde demostró que era la forma significativa del punto de vista del Axioma.

(3.3) Todo conjunto Dedekind-finito es finito.

Ni Bolzano, ni Cantor habían dado argumentos detallados para este recíproco. Dedekind en particular, dedujo el recíproco de la proposición: Si para cada n el conjunto $Z_n = \{1,2,\ldots,n\}$ es equipotente a algún subconjunto dado S, entonces S es Dedekind-infinito. El uso de elecciones arbitrarias apareció en la demostración cuando aseguró que para cada n existe una función definida uno a uno a_n fuera del conjunto vacío de tales mapeos. Aquí se encontraba inequívocamente el primer uso de elecciones arbitrarias para caracterizar la frontera entre lo finito y lo infinito. Dicha prueba motivó a otros matemáticos a cuestionarse sobre la legitimidad del uso de elecciones arbitrarias. Dicho matemático fue Rodolfo Bettazzi, quien desde 1892, enseñaba en la Academia Militar de Turín. En febrero de 1896 presentó dos trabajos [1896,1896[a]] en la Academia de Ciencias de Turín, sobre el tema de Dedekind, "*Was sind und was sollen die Zahlen?*" En el segundo de ellos, Bettazzi rehusaba seleccionar todos los a_n arbitrariamente. Fue Peano, uno de los colegas de Bettazzi en la Academia Militar, el que había objetado con anterioridad el uso de infinitas elecciones arbitrarias, sin mencionar sin embargo cualquiera que los hubiera usado. Así a finales del siglo XIX varios matemáticos, influenciados por Cantor y Dedekind, habían empleado elecciones arbitrarias (explícitas en mayor o menor grado). Después de que Zermelo formulara el Axioma de Elección, Zermelo estableció la equivalencia de varios de los resultados anteriores como una importante aplicación del Axioma, en lo cual muchos matemáticos no estuvieron de acuerdo. Sin embargo antes de Zermelo todas las ideas de lo finito y lo infinito permanecían en la obscuridad.

4.- EL LEGADO DE CANTOR EN LOS USOS IMPLICITOS

Cuando se publicaron los trabajos de Cantor, Zermelo señaló que se había utilizado el Axioma de Elección como una suposición la cual: "*Cantor usó inconsciente e intuitivamente pero sin formularlo explícitamente*". Sin embargo Cantor hizo más que eso. Como otros investigadores de su tiempo no se percató del nuevo principio matemático que estaba oculto en los usos de la suposición. Pero fue a través de sus descubrimientos, que muchos matemáticos (incluyendo los críticos del Axioma como Borel y Lebesgue) usaron la suposición implícitamente. El hecho de que Zermelo deseara probar que cada conjunto puede ser bien ordenado lo condujeron a formular el Axioma de Elección y después de que se incrementó el uso directo e indirecto de elecciones arbitrarias. Cantor, que en 1871 había iniciado la cuarta etapa del desarrollo de dichas elecciones, usándolas en análisis real, sólo las usó en teoría de conjuntos siete años después. Las siguientes dos décadas la Suposición se utilizó constantemente en resultados básicos tales como el Teorema de Unión Numerable. El primero de esos resultados se originó en 1877. Previamente Cantor demostró que el conjunto de los números algebraicos reales era numerable a pesar de que R no lo fuera [1874]. Para establecer la prueba de que R_n tiene la misma potencia que R quiso probar que $[0,1]$ tiene la misma potencia que R. Fue así como comenzó la demostración del siguiente lema en su carta del 29 de Junio de 1877.

(4.1) Si A_k es equipotente a B_k y $A_k \cap B_k = 0$ y $A_k \cap A_m = B_k \cap B_m = 0$ $\forall$ $k=1,2,\ldots \Rightarrow \cup_{k=1} A_k = \cup_{k=1} B_k$. Cantor eligió los A_k y $B_k \subset R_n$ [1878,249,253-254].

Cuando la suposición fue usada implícitamente en la prueba en 1895 hizo una demostración diferente que no se basaba en elecciones arbitrarias y notó que

$$2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$$

Aun cuando (4.1) requería el uso del Axioma, Cantor no reveló como empleó elecciones arbitrarias en la demostración, su carta a Dedekind y sus artículos de 1878 y 1880, no proporcionaron mayores detalles. Después de terminar su trabajo (1878) sobre la equipotencia de R_n, Cantor centró su atención en conjuntos derivados. Definió el conjunto derivado $P^{(1)}$ de P como el conjunto de todos los puntos límites de P. Para cada ordinal α sea $P^{(\alpha+1)}$ el conjunto derivado de $P^{(\alpha)}$.. Finalmente si β es un ordinal límite entonces $P^{(\beta)}$ se define como la intersección de todos los $P^{(\alpha)}$ tales que $0 < \alpha < \beta$.

Cuando Cantor desarrolló sus ideas finales sobre conjuntos derivados, la Suposición apareció de manera mas sofisticada. Dichas ideas las expresó en una extensa carta del 20 de octubre de 1884 al matemático sueco Gösta Mittag-Leffler, el cual era el editor de una nueva revista matemática llamada *"Acta Mathematica"*. Durante 1885 Cantor mando al *"Acta Mathematica"* un artículo en el cual exponía nuevos conceptos, pero no fueron publicados en su forma original durante su vida. Mittag-Leffler le pidió a Cantor que no hiciera públicos sus resultados hasta que pudiera demostrar con certeza la Hipótesis del Continuo. Según Mittag-Leffler, la abundante terminología y el tono predominantemente filosófico de su artículo podría dañar su reputación entre los matemáticos. Indignado Cantor dejó de mandar sus trabajos a las revistas matemáticas y por varios años los mandó a los filósofos. En uno de los artículos sin publicar se usaba la Suposición implícitamente.

En su trabajo llamado *"Beiträge"* de 1895 Cantor finalmente develó su Teoría de los Números Cardinales Infinitos y de Números Ordinales a una audiencia matemática, y propuso una definición diferente para el producto de dos cardinales. Fue la definición que se generalizó eventualmente. El producto $\mu\cdot\eta$ con $\mu = \#A$ y $\eta = \#B$ es el cardinal de todos los pares ordenados *(a,b)* con $a \in A$ y $b \in B$ [1895, 485-486]. Generalizando esta aproximación definió la potenciación de cardinales finitos e infinitos: μ^{η} es la potencia del conjunto de todas las funciones de B en A [1895, 486-487]. A pesar de que su nueva definición para el producto no involucraba infinitas elecciones arbitrarias, Cantor afirmó que esa definición era producto de una nueva. En un trabajo posterior de Whitehead y Russell la equivalencia de esas definiciones se transformó en el teorema que afirma que el producto $\mu\cdot\eta$ era igual a la suma de μ conjuntos cada uno de potencia η aun cuando μ fuera infinito. $A\cdot B = \sum_{a \in A} B$. Cuando Cantor publicó la segunda parte de su trabajo *"Bieträge"* en 1897, el uso de elecciones arbitrarias apareció indirectamente una vez más. Aquí se encontraba involucrada la estructura de números de segunda clase. De 1877 hasta 1897, al final de sus investigaciones publicadas, Cantor usó la Suposición implícitamente una y otra vez para establecer teoremas fundamentales en teoría de conjuntos y en topología. A pesar de los repetidos usos implícitos de la Suposición, Cantor no reconoció que para hacer infinitas elecciones requería de un nuevo principio matemático. Esencialmente el significado de la Suposición en el trabajo de Cantor se dio en dos vertientes. Primero, Cantor postuló un cuerpo de importantes teoremas en los cuales la Suposición era inevitable. Y el segundo aspecto se daba en la transformación que se daba para probar que un objeto *"existía"*. Desde los tiempos de Euclides, la existencia de un objeto matemático con una propiedad dada se establecía con una particular construcción. Por otro lado Euclides también utilizó demostraciones indirectas para comprobar la existencia de un objeto matemático del mismo modo que Cantor. Esta diferencia significativa estaba presente en los teoremas que requerían el Axioma de Elección, y era en esos casos donde una demostración indirecta no podía ser sustituida por la construcción. De esta forma el Axioma representó un avance fundamental en el significado de la *"existencia"* matemática.

5.- EL BUEN ORDEN Y LA HIPOTESIS DEL CONTINUO

A pesar de que muchas proposiciones son lógicamente equivalentes al Axioma de Elección en la Teoría Axiomática de Conjuntos, dos de ellas que surgieron antes de que Zermelo formulara el Axioma son: El principio del Buen Orden de Cantor (Todo conjunto puede bien ordenarse) y la Tricotomía de los Cardinales $(m < n,\ m = n, m > n)$. El problema del buen orden surgió en 1882 cuando Cantor escribió una carta a Dedekind el 5 de noviembre, lo que motivó el deseo de extender los naturales de una forma natural. Cantor previamente había introducido "los símbolos del infinito",

$$\infty, \infty+1, \infty+2, \ldots.$$

en sus trabajos sobre conjuntos derivados P^{a} [1880]. Así que en su carta de noviembre a Dedekind insistió en la legitimidad de esos *"números"*. En lugar de ∞ introdujo el ordinal ω, como el limite de la sucesión $1,2,\ldots.$ Cantor se dio cuenta en su carta de 1882 que la relación entre sus nuevos números ordinales y el continuo R era de particular importancia. Así a la conjetura que había hecho cuatro años antes en la conclusión de su artículo que afirmaba que R y Rn eran equipotentes y la nombró *"Teorema de Segunda Clase"*.

(5.1) Cada conjunto infinito de R es numerable o tiene la potencia del continuo [1878,257].

Esta era la forma original de la Hipótesis del Continuo. Su carta también contenía un nuevo teorema, que afirmaba que cada subconjunto infinito de segunda clase es numerable o tiene la potencia de la clase, así surgió una versión más fuerte de la Hipótesis del Continuo.

(5.2) R tiene la potencia de segunda clase.

En su notación de aleph de 1895 la Hipótesis del Continuo se estableció como

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Después de 1882 su interés en la Hipótesis del Continuo saltó del Teorema de Segunda Clase a la forma (5.2) involucrando el buen orden, que repetidamente y sin éxito trató de demostrar. La diferencia entre estas dos formas son relevantes para el Axioma de Elección Cantor entendía bien que (5.2) implicaba que los reales pueden bien ordenarse y (5.1) implicaba que no podían bien ordenarse. En su carta de 1882 a Dedekind, Cantor afirmo que podía demostrar la Hipótesis del Continuo (5.2) rigurosamente. También extendió la Hipótesis del Continuo al afirmar que:

El conjunto de todas las funciones reales tiene la potencia de tercera clase [1895a, 590].

i.e. $2^{\aleph_1} = \aleph_2.$

Esto es, afirmaba que el conjunto de todas las funciones reales puede ser bien ordenadas y que tienen la potencia $\aleph_2$. En contraste a la Hipótesis del Continuo, el principio del Buen Orden siguió jugando un papel importante en las investigaciones publicadas por Cantor en las que relacionaba cardinales con ordinales, dicha relación había aparecido en "*Grundlagen*". En su notación de aleph de 1895 su proposición aseguraba que un cardinal infinito era un aleph (llamado Teorema Aleph)

(5.3) Los números cardinales están bien ordenados por magnitud.

Otra de las principales inquietudes de Cantor en su "*Beiträge*" era la Tricotomía de los Cardinales", la cual presentó en 1895 de la siguiente manera:

$\forall \mu, \eta$ *cardinales* $\mu = \eta$ ó $\mu < \eta$ ó $\mu > \eta$.

Sin embargo dicha afirmación quedó sin demostrar. En su "*Beiträge*" Cantor dejó sin resolver varias de sus proposiciones mas interesantes y fundamentales como: La

Tricotomía de los Cardinales, El Teorema de Equivalencia, el Principio del Buen Orden y la Hipótesis del Continuo. Cuando Cantor en 1896, poco tiempo después de haber escrito su artículo sobre los conjuntos Dedekind - finitos, Burralli - Forti presentó un trabajo sobre la Tricotomía de los Cardinales en la Academia de Ciencias en Turín. En dicho trabajo cambiaba la nueva forma de la Tricotomía de Cantor en el Teorema de Equivalencia:

(5.5) Para cualesquiera dos clases A y B ó A es equipotente a una subclase de B ó B es equipotente a una subclase de A.

Burralli - Forti demostró el Teorema de Equivalencia en el caso de que A ó B fueran numerables, pero no lo hizo en general. Por otro lado de ese teorema (5.5) dedujo dos nuevos postulados, uno de los cuales fue su versión del Principio de Partición y el otro fue:

(5.6) Si A y B son no - numerables entonces $\exists\ f: A \rightarrow B$ que es uno a uno ó sobre.

En su trabajo Burralli - Forti no investigó el Problema del Buen - Orden. De hecho el problema del Buen - Orden no interesó a otros matemáticos (excepto Cantor) hasta que Hilbert enfatizó su importancia en 1900. Mientras que Burralli - Forti atacó los problemas de la Tricotomía y el Teorema de Equivalencia con la lógica simbólica de Peano, Ernst Schröder, se aproximó de una manera diferente. Lo hizo usando las herramientas de la lógica algebraica debida a George Boole y C.S. Pierce. Schröder escribió un articulo acerca de esos temas en 1896, el cual fue publicado dos años más tarde, dicho artículo es más conocido porque en el se dio la primera prueba del Teorema de Equivalencia. Sin embargo en su impresión dicha demostración fue estropeada por un error irreparable de imprenta. [189, 336 - 344]. Mientras que Cantor y Peano tomaron dicha prueba como verdadera, Alvin Korsett notificó a Schröder sobre el error el 8 de mayo de 1902. A finales de mayo de 1902, Korsett envió su propia demostración a "*Mathematische Annalen*" para su publicación, pero por razones desconocidas ésta no apareció sino hasta 1911.

Independientemente de Schröder, C.S. Pierce analizó la Tricotomía y el problema de que cada colección puede ser ordenada. En 1893 Pierce concluyó que no existe contradicción si se supone que algunas colecciones pueden ser ordenadas [1993, 70 -71]. Estableció que para mostrar la validez de la Tricotomía, dadas dos colecciones A y B, ó A es equipotente a una subcolección de B ó B es equipotente a una subcolección de A. Pierce empezaba por introducir una colección de todas las relaciones con dominio en A y rango en B. Para cada relación consideraba cada posible subrelación S que era una función con dominio en A. Por lo que ó existía una subrelación S que fuera uno a uno con dominio A (en cuyo caso A era equipotente a un subconjuto de B) ó S misma tenía rango B. En el último caso, la relación inversa a S era uno a uno $f: B \rightarrow A$, por lo tanto B era equpotente a A como se deseaba [Pierce 1933, 149 -152]. El argumento de Pierce contenía dos suposiciones, que posteriormente se mostró eran equivalentes al Axioma:

Cada relación incluye una función con el mismo dominio; cada función incluye una función (con el mismo dominio) que es uno a uno ó sobre.

Pierce no estaba seguro que sus demostraciones fueran correctas. Mientras tanto en Francia, Emile Borel al leer el *"Beiträge"* cuestionaba la validez de la Tricotomía. En el Primer Congreso Internacional de Matemáticos en Zurich en 1897, Borel cuestionó a Cantor sobre los cardinales. Fue ahí donde Borel se enteró de que Félix Bernstein, quien trabajaba con Cantor en Halle había demostrado exitosamente el Teorema de Equivalencia. La demostración de Bernstein se apoyaba en (1.4) y por lo tanto indirectamente en la Suposición de Numerabilidad de un modo inevitable. A finales del siglo XIX, Cantor dejó en la Teoría de Conjuntos problemas fundamentales interrelacionados : La Hipótesis del Continuo, el Principio del Buen Orden, la Tricotomía de los Cardinales y el Teorema de Equivalencia, en los cuales estaban involucradas elecciones arbitrarias. A pesar de que

Cantor no pudo resolver ninguno de esos problemas definitivamente, estableció casos especiales para cada uno de ellos. El teorema de Equivalencia, la única proposición que no usaba elecciones arbitrarias de un modo explícito, fue la primera en demostrarse completamente. La Hipótesis del Continuo, permaneció casi intacta. Influenciados por el "*Bieträge*" muchos matemáticos analizaron la Tricotomía de los Cardinales. Sin embargo la solución de la Tricotomía dentro de un marco axiomático tuvo que esperar a Zermelo.

Es particularmente interesante la actitud cambiante de Cantor hacia la Tricotomía y el Principio del Buen Orden, los cuales habían surgido como simples "*consecuencias*" de la definición de "$<$" de los cardinales y como "*leyes del pensamiento*" respectivamente.

Es posible que el cambio de actitud de Cantor se debiera al escepticismo que el principio del Buen Orden generó en los matemáticos.

6.-LA RECEPCION DEL PROBLEMA DEL BUEN ORDEN.

En 1895 cuando Cantor se convenció de que el Principio del Buen Orden era un teorema, no una ley del pensamiento, buscó insistentemente una demostración, la cual creyó haber encontrado en 1897. Sin embargo, ya que no estaba convencido de dicha demostración no la publicó. En 1897 Cantor envió una carta a Hilbert donde supuestamente se encontraba la demostración, pero dicha carta se perdió. Afortunadamente, Cantor escribió otras dos cartas a Dedekind que contenían también dicha demostración. En la primera de ellas, fechada el 28 de julio de 1899, Cantor escribió: "*El problema principal es saber si existen otras potencias de conjuntos infinitos, además de los alephs*".

En la segunda carta del 3 de agosto de 1899, y en la cual anexaba su demostración, distinguía cuidadosamente entre dos tipos de clases o multitudes (*Vielheirtein*). La primera no podía ser considerada como una colección (*Zusammesein*) de todos sus elementos sin conducir hacia una contradicción, por lo cual no podía considerarse terminada o completa.

A tales multitudes las llamó absolutamente infinitas (*absolut unendliche*) ó inconsistentes (*inkonsistent*). El segundo tipo podía considerarse como unidad (*Einheit*), un solo objeto, sin contradicción. Cada una de las cuales podía llamarse multitud consistente.(*konsistentent Vielheit*) o conjunto (*mege*). [1932-444]. Después Cantor relacionaba estas dos clases de multitudes a su noción de número cardinal y de tipo de orden. Cada conjunto, o multitud consistente, poseía un número cardinal, y cada conjunto ordenado tenía un tipo de orden. Por otro lado no asignaba cardinales o tipos de orden a las multitudes inconsistentes. Mientras que a cada multitud bien ordenada la denominaba sucesión (*Folge*), reservaba el término de número ordinal para los tipos de orden de un conjunto bien ordenado. Utilizando estas definiciones, establecía que la multitud Ω de todos los números ordinales en su orden natural, estaban bien ordenados. En la segunda parte de su "*Beiträge*" ya había demostrado que los ordinales estaban bien ordenados por su magnitud [1897, 216]. Por otro lado si Ω era una multitud consistente, entonces existiría un ordinal δ mayor que cada ordinal en Ω (lo cual representaba una contradicción ya que $\delta \in \Omega$). Por lo tanto Ω era absolutamente infinito como se deseaba. El sistema $\aleph$, de todos los alephs, era del mismo modo absolutamente infinito, dado que es isomorfo a Ω. [Cantor 1932 444-447].

En ese punto de su carta Cantor planteó un problema fundamental: ¿La multitud $\aleph$ contiene todos los cardinales infinitos, ó por el contrario existe un conjunto infinito cuyo cardinal no es un aleph?. Cantor aseguraba que no existía dicho conjunto infinito:

"Supongamos que hay una multitud definida V que no es equipotente a un aleph."Decía "entonces bajo la hipótesis el sistema completo Ω *podía mapearse uno-a-uno en la multitud V", i.e.,"debe existir una submultitud V' de V la cual es equipotente al sistema* Ω" [Cantor 1932, 447] (Implícitamente tomaba a V como infinito). Por lo tanto V' era

inconsistente, dado que Ω lo era, y consecuentemente V lo era. Pero puesto que los números cardinales estaban definidos sólo para clases consistentes, entonces cada cardinal infinito era un aleph, como se deseaba. De ese modo demostraba el Teorema Aleph, así como el Principio del Buen Orden. Además dado que $\alpha < \beta$ ó $\alpha = \beta$ ó $\alpha > \beta$ para cualquier ordinal α y β, planteó que $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ ó $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$ ó $\aleph_\alpha > \aleph_\beta$.

Por el Teorema Aleph concluía que la Tricotomía era válida para todos los cardinales. Cuando Zermelo publicó los trabajos de Cantor en 1932, puso especial atención en la demostración del Teorema de Aleph y encontró que la demostración fallaba por la pretensión de un mapeo uno a uno entre Ω y V:

"*Evidentemente Cantor concibe los números ordinales en O como una correspondencia de elementos arbitrarios y sucesivos de V de tal modo que a cada elemento de V se le asigna una sola vez.... Es decir la intuición de la época se aplicaba aquí a un proceso que sobrepaso toda intuición; un hecho velado que podía llevar a elecciones arbitrarias sucesivas y por lo tanto definir un subconjunto arbitrario V' de V, el cual no puede definirse por las condiciones dadas. Sólo usando el "Axioma de Elección" que postula la posibilidad de elecciones simultáneas y el cual Cantor inconsiente e instintivamente usaba si formularlo explícitamente, se podía definir V' como un subconjunto de V [Zermelo, Cantor 1932, 451]".* El segundo problema planteado por Zermelo, era el papel de las clases inconsistentes, y del cual hizo un análisis más detallado. En 1890 Schröder había planteado la noción de clases consistentes e inconsistentes en su trabajo llamado "*Algebra der Logik*" , antes del descubrimiento de las paradojas en Teoría de Conjuntos y Lógica, y había utilizado las clases inconsistentes bajo ciertas condiciones [Schröder 1890, 213-343]. La carta de Cantor merecía una escrupulosa lectura en ese punto, en virtud de que las opiniones posteriores fueron influenciadas fuertemente por la traumática perspectiva de las paradojas de Russell planteada en su *"Principia Mathematicae"* [1903]. Por un lado se observaba, en primer lugar, que Cantor no parecía preocupado por el estado de la Teoría de Conjuntos (en contraste con el desaliento de Gottlob Frege, al saber de las paradojas de Russell en 1902). Cantor puntualizaba que ciertas multitudes, en efecto, pueden ser demasiado largas para considerarlas unidades (ó conjunto), por lo cual se definirían como absolutamente infinitas, y utilizaba dichos multitudes infinitas, ó inconsistentes, en su demostración del Teorema de Aleph que había mandado a Dedekind. De esa manera Cantor utilizó las dificultades aparentes, como las paradojas y contradicciones, como herramientas para plantear los nuevos descubrimientos matemáticos. El problema de las multitudes absolutamente infinitas llevó a Cantor a examinar cada uno de sus alephs, lo cual quedó de manifiesto en su carta a Dedekind fechada el 28 de agosto de 1899, ahí Cantor mencionó que no se podía demostrar la consistencia de cada conjunto finito. Dicha consistencia era *"una verdad simple no- demostrable"* que definió como *"Axioma de la Aritmética"* [1932, 447-448]. De manera similar consideraba la consistencia de cada aleph como verdades no demostrables y las definió como *"Axioma de la Aritmética Trasfinita Extendida"*. Sin embrago en las décadas siguientes varios matemáticos, incluyendo a Henri Poincaré [1906a, 315] y Arthur Schoenflies [1905,182] cuestionaron la validez de los alephs de Cantor. El único axioma meta - matemático introducido por Cantor en la Teoría de Conjuntos era el *"Axioma de la Aritmética Trasfinita Extendida"*, ya que el Principio del Buen Orden, lo había planteado como ley del pensamiento (y por lo tanto como un principio lógico) en vez de una suposición especifica de la Teoría de Conjuntos. Cantor, quien tenía un marco conceptual platónico, buscó descubrir verdades en vez de plantear las suposiciones mínimas necesarias para establecer un sistema deductivo. Por otro lado, su carta fechada el 28 de agosto de 1899 contenía postulados (planteados como verdades en vez de axiomas) que se parecían bastante a los posteriores *"Axiomas de Unión y Separación"* de Zermelo y el *"Axioma de Reemplazo"* de Fraenkel. En otras palabras, Cantor aseguraba que la unión de un conjunto de conjuntos era un conjunto, que una submultitud de un conjunto era un conjunto, y que dos multitudes equipotentes eran ó ambos conjuntos ó ambas eran absolutamente infinitas. [1932, 444]. El 30 de agosto de 1899, Cantor, que había recibido de Dedekind una nueva demostración del Teorema de Equivalencia, le formuló la siguiente pregunta: *"Sería muy valioso que pudieras demostrar el Teorema A (la Tricotomía de los Cardinales) por los mismos métodos"*. Por lo tanto Cantor esperaba que las técnicas utilizadas por Dedekind en su trabajo *"¿Was sind und was sollen die Zahlen?"*, En particular la noción de cadena, permitiera una demostración directa de la Tricotomía. (Sí $B \subset A$ y $f: A \rightarrow A$ es uno a uno pero no sobre, $\Rightarrow$ *la f - cadena de B* es la $\cap^{n}_{i=1} C$ tal que $B \subseteq C$, y $\forall x \in C \Rightarrow f(x) \in C$). Cuando Hilbert recibió el intento de demostración que Cantor había hecho en 1896 del Principio de Buen Orden aparentemente lo encontró inconsistente. A medida que el siglo veinte comenzaba Hilbert puso gran atención al problema de buen ordenamiento de los reales. Así durante su célebre ponencia realizada en París, en el Segundo Congreso Internacional de Matemáticas planteo el Problema del Continuo -junto con el buen ordenamiento de los reales- como el primero de los veintitrés problemas centrales del desarrollo de las matemáticas del siglo veinte. [1900, 263-264]. Hilbert consideró razonable que cada subconjunto infinito de R fuera numerable ó tuviera la potencia del continuo. Si fuera cierto, añadía, la proposición (1.5) implicaría que la potencia del continuo sería el siguiente aleph después de aleph cero. Hilbert establecía que la potencia del continuo debería ser aleph-uno, dado que Cantor había demostrado previamente que no existían cardinales entre aleph-cero y aleph-uno. Por lo anterior, si la potencia del continuo era aleph-uno debería existir un subconjunto de R con potencia aleph-uno ó equivalentemente R y aleph-uno deberían ser comparables. (Dos conjuntos A y B son comparables, si uno es equipotente a un subconjunto del otro, *i.e.* si $\#A < \#B$ ó $\#B < \#A$). Lo cual no se había establecido. A pesar de no haber aceptado la demostración de Cantor de que cada conjunto puede bien ordenarse, Hilbert aceptó los cardinales infinitos de Cantor. El segundo problema de su ponencia de Paris, era el de establecer la consistencia de los reales. Dado que para Hilbert, la consistencia de un conjunto de axiomas implicaba la existencia de objetos matemáticos que satisficieran dichos axiomas, establecía la existencia de cada aleph. Por otra parte, Hilbert insistía que no se podía dar un sistema axiomático no consistente para la colección de todos los números cardinales o para todos los aleph. Por lo que concluía que la colección de todos los aleph no existía. [1900, 264-265]. Una vez que Hilbert planteó los problemas de la Hipótesis del Continuo y del buen - ordenamiento de los reales, muchos matemáticos se abocaron a investigarlos, tanto en Alemania como en Inglaterra. La Hipótesis del Continuo había permanecido casi intacta aun cuando Cantor demostró que cada subconjunto cerrado de R era numerable ó tenía la potencia del continuo. Por tal motivo la búsqueda de la demostración del Principio del Buen Orden y de la Tricotomía de los Cardinales continuó. Aunado a estas investigaciones surgió el problema que eventualmente llevaría a Zermelo a la solución del Problema del Buen Orden: infinitas elecciones arbitrarias. Tales elecciones ocurrieron repetidamente en el extenso informe de Schoenflies, aparecido en el "*Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung*" en 1900, en el desarrollo de la Teoría de Conjuntos. La Tricotomía de los Cardinales fue un tema importante en la tesis doctoral de Felix Bernstein, la cual contó con la supervisión de Hilbert y se realizo en

Gottingen en 1901. Bernstein mencionó dos problemas que él consideró centrales en la Teoría de Conjuntos. El primero de los cuales era el llamado problema del continuo de Cantor: "*¿Cuántas potencias distintas puede tener un subconjunto de los reales?*". [Bernstein 1901,13]. La respuesta a esa pregunta, Cantor la había dado para dos familias de conjuntos cerrados. Bernstein agregó que Cantor se había aproximado al problema por medio de los alephs y de ahí que la relación de $\aleph_1$ con $2^{\aleph_0}$ la potencia del continuo, era fundamental. De ese modo Bernstein estableció que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Finalmente, Bernstein aseguró que Cantor tenía una demostración no publicada de la proposición siguiente:

(6.1) Cada conjunto no numerable tiene un subconjunto de potencia $\aleph_1$ [1900,33].

El segundo problema que Bernstein consideraba como central en la Teoría de Conjuntos era el relativo a sus orígenes. Aquí no hacía referencia a contradicción o paradoja alguna, sin embargo mencionaba que los conjuntos recientemente descubiertos - tales como el conjunto de todos los cardinales- tenían propiedades que no coincidían en lo esencial respecto a los conjuntos conocidos previamente. Esto motivó a los matemáticos a determinar leyes que cumplieran todos los conjuntos. Asimismo planteó la necesidad de sistematizar y unificar teoremas en la Teoría de Conjuntos, sin mencionar la posibilidad de una aproximación axiomática. [1901,15]. Fue en este contexto que Bernstein presentó su demostración al Teorema de Equivalencia junto a una investigación de las condiciones bajo las cuales dos conjuntos A y B son comparables. Reconoció también que la Tricotomía de los Cardinales representaba un problema de gran dificultad, y sólo dio una solución parcial:

(6.2) Si $\#A + \#B = \#A \cdot \#B$, entonces A y B son comparables.

(6.3) Si una familia S de conjuntos es cerrada bajo uniones finitas y si $\#A^2 = \# A$ siempre que $A \in S$ entonces dos conjuntos cualesquiera en S, son comparables.

En su demostración Bernstein utilizó elecciones arbitrarias [1901,29]. Posteriormente Tarski demostró sin utilizar el Axioma de Elección que si $\mu + \eta = \mu \cdot \eta$ *(ó si* $\mu^2 = \mu$*)* para todos los cardinales infinitos, entonces la Tricotomía de los Cardinales y el Axioma de Elección se cumplían.[1924]. Fuera de Alemania, los problemas relacionados con la Tricotomía de los Cardinales tuvieron eco entre algunos matemáticos ingleses (todos relacionados con Cambridge) quienes se habían impresionado con las investigaciones de Cantor: Bertrand Russell, G.H. Hardy y Philip Jourdain. Fue en 1896 cuando Russell revisó el libro del filósofo kantiano francés Arthur Hannequin, cuando supo de Cantor. [Carta del 11 de septiembre de 1917 de Russell a Jourdain]. El libro de Hannequin. [1895] se dedicaba a criticar el uso de axiomas en matemáticas y física, tachándolos de contradictorios en sí mismos. En ese contexto Hannequin argumentaba que él número ordinal de Cantor ω, debía de ser rechazado, dado que la sucesión *1,2,3,....*, de números naturales no tiene límite, y que el tratamiento de Cantor al continuo como un conjunto de puntos llevaba a una contradicción: *"La división de lo indivisible"* [1895,67-71]. Similarmente, Russell acepto la objeción de Hannequin a los ordinales infinitos. Influenciado directamente por Hannequin e indirectamente por Kant, Russell llego a creer que la Teoría de Conjuntos encubría muchas contradicciones. En un ensayo no publicado de 1896 *"On Some Difficulties of Continous Quantity"*, Russell intentó demostrar que *"los matemáticos están en peligro de olvidar que las antinomias filosóficas encuentran su contraparte en falacias matemáticas"*. Cuando leyó el trabajo de Peano en agosto de 1900, Russell estaba predispuesto a encontrar paradojas o contradicciones en la Teoría de Conjuntos. Lo que obtuvo de Peano fue la maquinaria simbólica que le permitió saber lo que era correcto de lo que no era del trabajo de Cantor. El resultado se dio menos de un año después: la Paradoja de Russell. Es probable, por otro lado, que la influencia de Peano haya conducido a Russell a aceptar la teoría de Cantor sobre ordinales infinitos y números cardinales. Sin embargo Russell concluyó que la clase de todos los ordinales no estaba bien ordenada por magnitud y que *"No hay razón para creer, hasta donde conozco, que cada clase puede bien ordenarse"*.[1902,33,43]. De esa manera Russell creó lo que ahora se conoce como la Paradoja de Burralli - Forti. Posteriormente (1906) Burralli - Forti insistió en que su articulo de 1897 no contenía ninguna paradoja. Por lo tanto, Russell no tenía razón para creer que el Principio del Buen Orden fuera cierto y permaneció igualmente escéptico respecto al Teorema de Aleph, la Tricotomía de los Cardinales y la proposición: $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ G.H. Hardy, amigo y colega de Russell no rechazaba la proposición: $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. En 1903 Hardy se propuso demostrarla y también su consiguiente generalización:

(6.4) $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$ para cada ordinal α.

Esta proposición era el corolario de Hardy a un resultado mas fuerte:

(6.5) Cada cardinal infinito ó es un aleph ó es mayor que todos los alephs.

Su argumento contenía una infinidad de elecciones arbitrarias sucesivas y mostraba que lejos de lo obvio que era para los matemáticos de 1903, que dichas elecciones implicaran el Teorema de Aleph y el Principio del Buen Orden. Su argumento permitía, por otro lado, la posibilidad de que un cardinal pudiera ser mayor que cualquiera de los alephs. Hardy planteó esa proposición por la generalización de la demostración de Cantor del teorema: Cada conjunto infinito contiene un subconjunto numerable. Finalmente Hardy aportó lo que él denominó *"la construcción de un conjunto de puntos de cardinal $\aleph_1$"*.[1903,88]. Dicha construcción mostró el ambiguo criterio en el uso de elecciones arbitrarias. Hardy asignaba a cada ordinal numerable distinto de cero una sucesión creciente de naturales. Entonces a cada sucesión se le podía relacionar fácilmente un único decimal binario. El ordinal 1 le correspondía a la sucesión $1,2,3,.....$ Si β le correspondía a $b_1, b_2, ...$ entonces $\beta + 1$ le corresponde a $b_2, b_3, ...$ Para definir la sucesión correspondiente al ordinal límite γ diagonalizaba las sucesiones correspondientes a la sucesión de ordinales cuyo límite fuera γ. *"Tenemos aquí una libertad infinita de elecciones"* decía *"siempre que deseemos definir la sucesión correspondiente a cada número que no tenga predecesor inmediato"*. [1903,90]. Tales elecciones aseguraban que si $\beta < \gamma$, entonces la sucesión correspondiente a γ era eventualmente mayor que la correspondiente a β. Ahora se sabe que las elecciones arbitrarias ó una suposición equivalentes eran necesarias para demostrar que $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. Influenciado por los artículos de Hardy, Philip Jourdain intentó modificar la demostración de (6.5) para utilizar el resultado en el Teorema de Aleph y en el Principio del Buen Orden. El 29 de octubre de 1903 Jourdain, envió una carta a Cantor (con el cual había llevado una relación epistolar desde dos años antes) su nuevo argumento, que cada ordinal infinito es un aleph: *"En otras palabras: cada forma consistente [conjunto] puede ser puesto como una forma bien ordenada"*. La respuesta de Cantor fechada el 4 de noviembre debe haber sorprendido a Jourdain. En ella Cantor revelaba que había mandado esencialmente la misma prueba a Hilbert siete años antes y a Dedekind en 1899. Es factible que Cantor se haya dado cuenta que su demostración contenía ambigüedades y que no quería exponerse a la censura pública. La principal ambigüedad era la noción de multitudes consistentes e inconsistentes (*Vielheiten*) de las cuales sólo las consistentes se definían como conjunto (*Menghein*). *"¿Cómo puede uno determinar cuando una multitud dada es consistente?"*.

En su carta de noviembre a Jourdain, Cantor daba una respuesta a esa pregunta, que había formulado a Dedekind cuatro años antes: *"Una multitud consistente es aquélla en que la* *colección de todos sus elementos en un solo objeto no conduce a una contradicción".*

Por recomendación de Cantor, Jourdain preparó su demostración del Principio del Buen Orden para su publicación basándose en el Teorema de Aleph. El resultado apareció publicado en un artículo de la *"Philosophical Magazine"* en enero de 1904. Para distinguir clases consistentes de inconsistentes, Jourdain estableció un criterio formal:

"Una clase es inconsistente si tiene una subclase equipotente a la clase W de todos los ordinales". [1904, 67]. Para evitar la Paradoja de Burralli - Forti basada en la clase de W, Jourdain sólo asignaba a las clases consistentes un tipo de orden ó numero cardinal -restricción similar a la de Cantor-. A pesar de que el criterio de Jourdain para clases inconsistentes era más convincente que el de Cantor, tuvo pocos adeptos. Lo que se necesitaba era la condición por la cual cada clase inconsistente debía ser equipotente a la clase de todos los conjuntos, condición que Von - Neumann introdujo dos décadas después.

La demostración de Jourdain al Teorema de Aleph empezaba aceptando la proposición de Hardy de que cada cardinal infinito es un aleph ó es mayor que cualquier aleph. Entonces Jourdain aseguraba que la clase W era bien ordenada. Su argumento se basaba en el Teorema:

(6.6) Si una clase ordenada M no tiene subconjuntos de tipo $^*\omega$ entonces M es bien ordenada.

Para mostrar (6.6.), Jourdain escogía arbitrariamente una sucesión descendente de elementos de un subconjunto M' de M sin elemento minimal, apoyándose necesariamente en la Suposición Dependiente. Suponiendo (6.6) el Teorema de Aleph se demostraba fácilmente: Si hay un cardinal M mayor que cada aleph, entonces la clase M tiene una subclase equipotente a W; consecuentemente, M es inconsistente y por lo tanto falta un cardinal. Por lo tanto, por el resultado de Hardy (6.5), cada cardinal infinito es un aleph.

[Jourdain 1904,6]. De hecho el argumento de Jourdain mostraba solamente que bajo la hipótesis dada existe, para cada ordinal β, una subclase de M equipotente a β. Lo que necesitaba era obtener una subclase de M equipotente a la clase W de todos los ordinales. Para hacerlo, necesitaba hacer tantas elecciones arbitrarias sucesivas como ordinales. Esta suposición era aun más fuerte que el Principio del Buen Orden (ó el Axioma de Elección) y de hecho, era equivalente a asegurar que la clase de todos los conjuntos puede bien ordenarse. Al final de su artículo Jourdain enlistó varias consecuencias importantes de su Teorema de Aleph en Aritmética Cardinal. En principio la potencia del continuo era un aleph. Además era una solución positiva al problema que A.N. Whitehead había planteado sin demostrar en 1902:

(6.7) Si μ es infinito y sí $\eta < \mu$ entonces $\mu + \eta = \mu$.

Meses después Jourdain escribió otro artículo con varios corolarios al Teorema de Aleph, uno de ellos era también un problema propuesto por Whitehead en 1902:

(6.8) Si μ es infinito y sí $\eta \leq \mu$ entonces $\mu \cdot \eta = \mu$. En particular $\mu^2 = \mu$ para todo μ infinito.

De lo anterior Jourdain dedujo la siguiente proposición que Schóenflies había planteado sin demostrar en 1900.

(6.9) Si m es infinito entonces $\mu^{\mu} = 2^{\mu}$.

El artículo concluía con el deseo de Jourdain de investigar a profundidad la Hipótesis del Continuo [1904a, 301 -303]. El éxito de Jourdain se vio rápidamente opacado. En un artículo fechado el 6 de septiembre de 1904, rechazó su hipótesis de que los números reales pueden bien ordenarse. Argumentaba que su prueba del Teorema de Aleph justificaba tal conclusión sólo si se demostraba primero que ningún subconjunto de R es equipotente a la clase W de todos los ordinales: "*Es importante demostrar que $2^{\aleph_0}$ es igual a algún aleph para estar seguros de que continuo - numérico se convierte en lo que llamo agregado inconsistente*". [1905, 42]. Es decir a pesar de todos sus esfuerzos, y a pesar de su convicción de que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ era probablemente cierta, Jourdain no pudo demostrar que existía un buen orden en R. Aun cuando Zermelo cristalizó en ese mismo mes su propia demostración de que los números reales pueden bien ordenarse. En resumen, a medida que el siglo veinte avanzaba, no existía consenso entre los matemáticos respecto al Problema del Buen Orden. Mientras Hilbert señalaba la necesidad de obtener un Buen Orden particular para R, Russell y Schoenflies tenían dudas acerca de la veracidad del Principio del Buen Orden. Por otro lado, Hardy creía haber demostrado una proposición más débil de que cada cardinal infinito ó es un aleph ó es mayor que todos los alephs, y en particular $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Influenciado por Hardy, Jourdain descubrió un argumento para el Teorema del Aleph y para el Principio del Buen Orden, que Cantor había utilizado siete años antes. Sin embargo Cantor tenía sus reservas acerca de dicho argumento, en parte quizá por que éste se basaba en la clase inconsistente de todos los ordinales y se rehusaba a que Jourdain lo publicara. Cuando la versión de Jourdain apareció, fue recibida con indiferencia y descrédito. Oculta en los argumentos de Cantor y de Jourdain estaba la potente nueva suposición basada en elecciones infinitas sucesivas arbitrarias y dependientes. Sin embargo ninguno de los dos se percató de que esa nueva suposición estaba involucrada. En relación a su demostración Jourdain mas tarde señaló:

"Simplemente asumí la validez del proceso de hacer series infinitas de selecciones arbitrarias como consecuencia del trabajo de Hardy.[1903], sin embargo igual que otros matemáticos no estaba consciente en ese momento del hecho de que había utilizado una suposición no demostrada, admitiendo el principio de selección (Axioma de Elección)."

Sólo quedaba a Zermelo reconocer que el uso de infinitas elecciones arbitrarias se tenía que establecer como un postulado y que tales elecciones se podían hacer independientemente unas de otras para evitar contaminar el proceso con la intuición de ese tiempo.

7.-USOS IMPLICITOS POSTERIORES

Resulta una ironía histórica que muchos matemáticos que utilizaron el Axioma de Elección implícitamente en sus investigaciones más tarde se opusieron a él. Esto sucedió principalmente en aquellos que continuaron con la teoría de conjuntos de Cantor y en aquéllos que utilizaron esa teoría en el análisis real. Dichos analistas de principios de siglo incluían a René Baire, Emile Borel, y a Henri Lebesgue en Francia, así como a W.H. Young en Alemania. En Inglaterra, por otra parte Bertrand Russell, y Alfred North Whitehead investigaban los ordinales y cardinales trasfinitos como parte de sus investigaciones sobre los fundamentos de las matemáticas. A veces algunos matemáticos usaban la Suposición para infinitas selecciones arbitrarias, y a veces la Suposición se presentaba indirectamente en el Teorema de Unión Numerable. Ciertamente el uso indirecto no indicaba una adopción consciente. Aun cuando los trabajos de algunos matemáticos como Borel usaran infinitas elecciones arbitrarias, dichos usos mostraban ambivalencia hacia los métodos permisibles. Esta ambivalencia metodológica estaba presente en los trabajos de Baire, Borel y de Lebesgue. La demostración presentada por Zermelo en 1904 del Teorema del Buen Orden los llevó a desarrollar su filosofía constructivista de las matemáticas y a volverse mas intolerantes de los métodos no - constructivistas. En su tesis doctoral publicada en 1895, Borel se apoyaba en los métodos no- constructivistas. Influenciado por Poincaré, la tesis de Borel trataba sobre la continuidad analítica de las funciones complejas a lo largo de una curva que contenía un conjunto denso de singularidades. En la demostración de Borel la Suposición servía para justificar la selección de un intervalo (a_α, b_α) para cada ordinal numerable α. Tres años más tarde Borel presentó una segunda demostración de su teorema en su libro de funciones complejas empleando el método de Bolzano - Weierstrass para la subdivisión de intervalos; del mismo modo no hubiera sido difícil para él especificar una regla para sus elecciones, si lo hubiera deseado. Por otra parte, el libro de Borel contenía varios teoremas, todos concernientes a la cardinalidad, para los cuales el uso de la Suposición era inevitable. El primero de ellos era su prueba del resultado de Cantor de que cada conjunto infinito tiene un subconjunto numerable. [1898, 12-13]. El segundo era una generalización del Teorema de Unión Numerable:

(7.1).- La unión numerable de conjuntos $A_1, A_2, \ldots\ldots$ cada uno con la potencia del continuo, tiene también la potencia del continuo.

Para demostrarlo Borel señalaba que para cada n, A_n tenía la potencia del intervalo abierto $(n-1, n)$ en R, y por lo tanto la unión de todos los A_n, tiene la potencia del continuo. [1898, 16]. En efecto Borel elegía arbitrariamente una biyección f_n de A_n sobre $(n-1, n)$ para cada n para obtener una función uno a uno de $\cup A_n$, en R como se quería. Estos dos teoremas dependían solamente del Axioma Numerable. Su tercera proposición generalizaba el Teorema de la unión numerable:

(7.2) Sea A una familia de conjuntos donde A y todos sus elementos tienen la potencia del continuo; entonces la unión de la familia tiene la potencia del continuo. [1898, 16 - 17].

Finalmente, en la recta real introdujo sus conjuntos Borel- medibles, posteriormente conocidos como conjuntos de Borel, los cuales comenzaba con intervalos y cerrándolos bajo las operaciones de complementos y uniones numerables. Aun cuando no usó la Suposición implícitamente en ese caso, parecía sugerir que algunos subconjuntos de R no eran Borel- medibles suposición que requería del Axioma. [1898, 46-49]. Posteriormente muchas de las propiedades de los conjuntos de Borel resultaron ligadas al Axioma.

René Baire obtuvo su doctorado en la *Ecole Normale Superieure,* igual que Borel. La tesis de Baire de 1899 contenía resultados importantes en la teoría de las funciones reales. En particular, clasificaba las funciones discontinuas como límites de ciertas sucesiones de funciones. En el marco de su clasificación, aceptaba la definición de Dirichlet de función real como la correspondencia $x \rightarrow f(x)$ entre números reales. Baire señalaba:

"*En esta definición hay que preguntarse aparte del punto, cómo se puede establecer una correspondencia efectivamente, ó cuándo es posible establecerla efectivamente.*" [1899, 1].

En esa época asumió una postura más tolerante de los métodos no - constructivos que la que asumió después de la demostración de Zermelo. Esa misma tolerancia era aparente cuando Baire generalizó los resultados de Cantor que derivaron en el teorema:

(7.3).- Para cada ordinal numerable α, sea P_α un subconjunto cerrado y acotado de R. Supóngase que:

(i).- si $\beta < \alpha$ entonces $P_\alpha \subseteq P_\beta$ y si

(ii).- $\beta < \alpha$ y si P_β es finito entonces P_α es vacío. Por lo que para algún γ numerable, $P_\gamma = P_{\gamma+1}$.

La Suposición Numerable apareció en la demostración de Baire a través del Teorema de Cantor: el límite de una sucesión de ordinales numerables es un ordinal numerable. Además Baire suponía que cada subconjunto cerrado por sucesiones de R era cerrado [1899, 51, 52]. La tesis de Baire se enfocaba en la clasificación de las funciones reales y en las nociones de primera y segunda categoría. Los principios de su clasificación: un número de sus resultados habían aparecido en un trabajo presentado en la Academia de Ciencias de París el 6 de junio de 1898. Ahí, Baire definió la clase cero de todas las funciones reales continuas. Para cualquier α numerable, la clase α de Baire era el conjunto de todas las funciones reales f que no están en una clase previa, tal que $f(x) = \lim f_n(x)$ para cada real x, y donde $f_1, f_2, \ldots$ es una sucesión de funciones reales en una clase previa. Su clasificación no abarcó todas las funciones reales, lo cual notó, dado que la unión de todas sus clases solamente tenía la potencia del continuo, mientras que el conjunto de las funciones discontinuas tenía una potencia mayor. [1898, 1623]. Fue ahí que utilizo indirectamente la Suposición, en su teorema. Dentro de su tesis Baire usó el resultado (7.3) y por lo tanto la Suposición Numerable, para caracterizar las funciones $f: R \to \{0,1\}$ en la clase uno [1899, 53]. En general aseguró, pero no demostró la siguiente caracterización de sus clases con índices finitos:

(7.4).- Para cualquier entero positivo n, y cada función real f de clase n, y para cada real x,

$$f(x) = \Sigma_{\alpha 1} \; \Sigma_{\alpha 2} \cdots\cdots \Sigma_{\alpha n} P_{\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n}(x)$$

Donde cada $P_{\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha n}(x)$ es un polinomio de x con coeficientes reales. [1899, 69].

Como Sierpinski señalara, posteriormente [1918, 135], este teorema requería del uso del Axioma siempre que $n > 1$. Para $n = 1$, el resultado se convertía en el Teorema de la Aproximación de Weierstrass: Cada función real continua es el límite de una sucesión de polinomios. Sabiendo que cada función f de clase dos se construye a partir de alguna sucesión de funciones de clase uno, Baire elegía dicha sucesión de manera arbitraria para cada f, y por lo tanto obtenía una doble sucesión de polinomios. Entonces generalizaba su procedimiento para la clase n por inducción. Finalmente argumentaba que ninguna nueva función podía obtenerse extendiendo su clasificación a ordinales no - numerables. Él limite de una sucesión de funciones, cada una de las cuales se construye a partir de una clase de

Baire numerable, era una función en una clase de Baire numerable, resultado que se apoyaba nuevamente en la Suposición Numerable. [1899, 70]. Las preguntas planteadas acerca de la clasificación de Baire fueron objeto de controversia después de la demostración de Zermelo. En particular, se reconoció posteriormente que la clasificación de Baire para funciones reales era esencialmente equivalente a la de los conjuntos de Borel para R, y que la existencia de una función que no estuviera en la clasificación de Baire estaba íntimamente relacionada a la existencia de un conjunto que no fuera Borel medible. Otra contribución importante en la tesis de Baire era la noción, después planteada en la topología general de conjuntos, de primera y de segunda categoría. Un subconjunto A de R era de primera categoría si era la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte; si no, A era de segunda categoría. De gran importancia entre sus resultados era el Teorema de Baire de las Categorías (R era de segunda categoría), el que posteriormente los matemáticos extendieron a espacios topológicos más generales. Actualmente el Teorema de Baire de las Categorías puede demostrarse sin el Axioma, su demostración se basa en la selección de un punto con cierta propiedad de cada intervalo encajado y entonces en la utilización de la Suposición Numerable. En contraste el uso del Axioma no se podía evitar en el siguiente teorema:

(7.5).- En R la unión numerable de conjuntos, cada uno de primera categoría, es también de primera categoría.

A pesar de que Baire consideraba a esta proposición como consecuencia inmediata de su definición de primera categoría, al parecer basaba esa conclusión en el Teorema de la Unión Numerable e indirectamente en la Suposición. [1899, 66]. Baire expresaba ciertas dudas acerca de la relación de los métodos no - constructivos y sus investigaciones. En una carta enviada a Vito Volterra el 25 de octubre de 1898, el cual había mostrado gran interés sobre su trabajo, Baire expresó sus dudas respecto a la existencia de la clase de Baire para α para $\alpha \geq 3$. Además se cuestionaba sobre la definición real que no estuviera en su clasificación. En cierto modo las dudas de Baire eran justificables. Cuando planteaba la hipótesis de que R pudiera partirse en dos conjuntos, cada uno de segunda categoría en cada intervalo abierto, obtenía un conjunto que no tenía valor, lo que después se conoció como la propiedad de Baire. Sin embargo, en la existencia de un subconjunto de R sin valor, la propiedad de Baire dependía del Axioma, dado que existía una función real que no estaba en la clasificación de Baire. Esas preguntas relativas a las definiciones que planteaba en su carta fueron importantes para determinar la relación del Axioma con los métodos matemáticos constructivos. Influenciado por Baire y Borel entre otros, Henri Lebesgue retomo sus primeras investigaciones sobre teoría de funciones reales. Ese trabajo lo llevo a importantes descubrimientos. Ahí planteó su bien conocido Problema de la Medida , donde existe una función m para cada subconjunto acotado A de R_n, $m(A)$ es un número real no - negativo que satisface las siguientes condiciones:

i) .- $m(A)$ es positivo para cada algún conjunto A.

ii).- Conjuntos congruentes tienen igual medida

iii).- La medida numerable de conjuntos ajenos es la suma de las medidas de esos conjuntos (aditividad numerable).

Para resolver este problema, Lebesgue introdujo los conjuntos medibles, los cuales extendían la familia de conjuntos de Borel y le permitían definir la integral de Lebesgue. Al mismo tiempo se percato de que los conjuntos medibles podían no contener a todos los subconjuntos acotados de R_n, por lo tanto no se podía resolver el Problema de la Medida. [1902, 236]. Poco después, el descubrimiento de conjuntos acotados no - medibles probó ser una de las consecuencias más controvertidas del Axioma. En vista de la oposición posterior de Lebesgue al axioma, vale la pena examinar como las elecciones arbitrarias sucedían en el centro mismo de sus investigaciones: su prueba de que los subconjuntos medibles de R eran numerablemente aditivos. Para empezar, necesitaba establecer que la unión numerable de conjuntos medibles era medible . Primero suponía que A_1, A_2,.... era una sucesión de subconjuntos medibles ajenos de R y que $[a,b]$ era un intervalo que incluía a todos lo A_i. Entonces encerraba cada A_i en la unión de alguna familia numerable $\mathcal{J}_i$ de intervalos abiertos, y cada $[a,b]-Ai$ en la unión de otra familia numerable $\wp_i$ de intervalos abiertos, tal que cada conjunto $(\cup \mathcal{J}_i) \cap (\cup \wp_i)$ tuviera una longitud total de d_i . Aquí la suma de todos los d_i se tomaba como un número positivo arbitrariamente pequeño. [1902, 237-239]. Sin embargo Lebesgue no proporcionaba la regla para escoger a las familias $\mathcal{J}_i$ y $\wp_i$ y no lo hubiera hecho evitando usar elecciones arbitrarias, dado que el Axioma Numerable se necesitaba para asegurar la aditividad numerable de la Medida de Lebesgue. Este hecho fue reconocido sin demostración por Sierpinski. [1916, 690] . Por lo que Lebesgue enfrentaba el dilema de aceptar el Axioma Numerable ó restringir su teoría a la integración de la manera esencial. En Göttingen el matemático ingles W.H. Young que posteriormente estaría en contra del Axioma, buscaba en el análisis real un modo similar al de Baire, Borel y Lebesgue. Como ellos, Young usaba elecciones arbitrarias infinitas. En 1902 utilizó la Suposición de manera implícita para demostrar el Teorema Topológico de Cantor que afirmaba que cada familia ajena de intervalos abiertos en R era numerable. Este teorema no requería la Suposición puesto que cada intervalo tal contenía únicamente números racionales, al menos en el buen ordenamiento de Cantor de los racionales. Sin embargo la demostración de Young usaba la Suposición indirectamente al usar la siguiente proposición:

(7.6).- La unión numerable de conjuntos finitos es numerable. [1902, 248].

Sin el Axioma, como Russell mencionó en 1906, aun esta forma débil del Teorema de la Unión Numerable podía fallar. Por otra parte, Young no podía evitar la Suposición Numerable en la demostración publicada en 1903, de un teorema que había planteado independientemente pero que a menudo se le atribuye a Ernst Lindelöf.

(7.7).- Cada familia S de intervalos abiertos que cubran a un subconjunto M de R tiene una subfamilia numerable que cubre a M.

El uso indiscriminado de elecciones arbitrarias sucesivas en la demostración de Young se parecía bastante a la que Baire había dado en 1895, para el teorema de Heine - Borel.

Comenzando con un intervalo fijo d en S, Young seleccionaba un intervalo d_1, el cual encimaba a d por la izquierda, y entonces encimaba un intervalo d_2 a d_1, por la izquierda y así sucesivamente. Este proceso podía terminar según afirmaba, por exahusión sobre todos los puntos de M a la izquierda de d ó por los puntos finales de d_1, d_2 ,..... aproximandose a un punto límite por sucesión p, Algún intervalo e contendría a p y entonces se podía eliminar a d_{i+1}, d_{i+2},.... (Donde d_i era el intervalo de menor índice que cubriera e). Entonces este procedimiento se repetía comenzando con e. Escogiendo también los intervalos que de esta forma cubrieran por la derecha a d, Young concluía haber obtenido intervalos que cubrieran a M en una cantidad numerable. [1903, 384 - 386]. Es así que en Alemania como en Francia, los futuros críticos del Axioma estaban usando libremente sucesiones de elecciones arbitrarias en análisis real antes de la aparición de la demostración de Zermelo. En Inglaterra, Russell y Whitehead (que igual que Young tenían vínculos estrechos con Cambridge) usaban la Suposición implícitamente en sus críticas investigaciones de los fundamentos de las matemáticas. En el Primer Congreso de Filosofía, realizado en París en agosto de 1900, Peano había causado gran impresión sobre Russell y Whitehead, y poco tiempo después adoptaron el sistema de lógica simbólica. En octubre de ese mismo año Russell comenzó a extender la lógica de Peano a la teoría de relaciones, que habían desarrollado Pierce y Schroeder anteriormente. Subsecuentemente Russell publicó dos artículos sobre relaciones [1901, 1902] en la revista de Peano llamada *"Rivista di matematica"*. Ambos artículos usaban de manera velada elecciones arbitrarias. En el primero de ellos, Russell planteaba y demostraba la siguiente proposición, la cual definía como la suma finita e infinita de números cardinales:

(7.8).- Si A y B son clases de clases ajenas y no vacías y sí $f:A \rightarrow B$ es una biyección tal que $f(a) = b$ implica que $\#a = \#b$ siempre que $a \in A$ y $b \in B$, entonces $\#\cup A = \#\cup B$.

Para demostrar esa proposición Russell seleccionaba una biyección de a sobre $f(a)$ para cada $a \in A$. Debido a la forma simbólica de la demostración de Russell, conciliaba esas elecciones arbitrarias. [1902, 19]. En su segundo artículo usaba (7.8), donde A y B eran conjuntos de relaciones de orden, para definir la suma de infinitos tipos de orden. [1902, 19]. Había una relación estrecha de su teorema con que cada clase ordenada densa A tuviera una subclase de tipo ω entre cualesquiera dos elementos a y b de A. También aquí las elecciones arbitrarias no eran aparentes a primera vista.[1901, 143- 144]. En contraste, en 1901 Russell creía que una nueva suposición se necesitaba para deducir que una clase era Dedekind - finita si y solo si era finita. Por lo cual introdujo un postulado similar al Teorema de Burali - Forti, que afirmaba que la clase Dedekind - finita satisfacía cierto tipo de inducción matemática. Dado que introdujo quince nuevos postulados en ese artículo, sería un error darle mucho énfasis a éste. Alrededor de 1902, Russell llegó a creer que había demostrado este postulado al mostrar la proposición de Cantor que afirmaba que cada conjunto infinito tiene un subconjunto numerable. La demostración de Russell que contenía elecciones arbitrarias, apareció en un artículo de Whitehead [1902] como una contribución. Estimulado por su demostración, Russell propuso tentativamente otro postulado:

(7.9).- Cada clase infinita u es la unión de alguna familia v de clases numerables ajenas.

Algún argumento heurístico de Russell en favor de esta proposición llevó a Hardy a establecer su argumento para la proposición de que cada cardinal infinito es un aleph ó es mayor que todos los alephs. Sobre la base de (7.8) dedujo de (7.9) que para cada μ infinito existe un η tal que $\mu = \aleph_0\eta$. De ahí concluyó que:

(7.10).- Si μ es infinito, entonces $\mu = \mu + \mu$.

Además dedujo la siguiente proposición: Si μ es infinito y $\eta \leq \mu$ entonces $\mu + \eta = \mu$.

Todas esas proposiciones dependían del Axioma, como se reconoció posteriormente.

El tema principal del articulo de Whitehead, el cual aportó un tratamiento general de la aritmética de los cardinales, era el de extender la multiplicación de cardinales hecha por Cantor a infinitos factores. Con esa meta en mente, Whitehead definió una clase multiplicativa A^{α} para cada familia A de clases ajenas no vacías. A A^{α} la tomó como la clase de todas las subclases M de $\cup A$ tal que para cada S en A, $M \cap S$ tiene exactamente un elemento. [1902, 383]. Así se aproximaba bastante al Axioma de Elección, en la forma que Russell posteriormente llamaría Axioma Multiplicativo. En consecuencia los usos implícitos de la Suposición no se presentaron como elecciones arbitrarias sino como el Axioma Multiplicativo: A^{α} es no vacío para cada familia A de clases no vacías. Es probable que esta proposición pareciera tan obvia para él, que sintió que no necesitaba mencionarla. Whitehead demostró varios teoremas que podían ser tomados como equivalentes al Axioma Multiplicativo, tales como el siguiente:

(7.11).- Para cada familia de clases A ajena, no vacía, $\cup(A^{\alpha}) = \cup A$.

(7.12).- Para todas las familias ajenas A y B, si $A^{\alpha} = B^{\alpha}$, entonces $A = B$.

Otro teorema, se asemejaba al principio maximal del Lemma de Zorn y al Principio Maximal de Hausdorff, y el cual tuvo gran impacto en álgebra y análisis décadas después:

(7.13).- Sea A una familia de clases ajenas, no vacías. Si $S \subseteq \cup A$ y si no hay un elemento de A que contenga mas de un elemento de S, entonces $S \subseteq M$ para algún M en A^{α}. En otras palabras, bajo la hipótesis dada una clase S podía extenderse a elemento de A^{α}. Para deducir estos tres teoremas, Whitehead presuponía implícitamente que algunas clases multiplicativas eran no vacías. [1902, 383- 384]. Después de establecer esos teoremas Whitehead usó su nueva noción de clase multiplicativa para definir la multiplicación cardinal, para una infinidad arbitraria de factores, y la relacionó tanto a la adición como a la exponenciación. Para una familia A ajena de clases, definió $\sum_{a\in A}\#a$ como $\#\cup A$, y $\Pi_{a\in A}\#a$ como $\# A^{\alpha}$. Whitehead también demostró que: Si hay una biyección de A sobre B, donde A y B son familias de clases no vacias ajenas, y si para cada $a\in A$ y $b\in B$, $f(a) = b \Rightarrow \#a = \#b$, entonces $\cup A$ es equipotente a $\cup B$, y A^{α} es equipotente a B. Como los intentos más limitados hechos por Cantor para tratar de la suma infinita de cardinales como productos finitos, la Suposición se usaba implícitamente de una manera inevitable. Ni Russell ni Whitehead entendieron la fuerza deductiva que estaba oculta en los teoremas de Whitehead. Cada uno de ellos implicaba dos proposiciones que Whitehead consideraba como no demostradas en general : $\mu^2 = \mu$ y $\mu^{\mu} = 2^{\mu}$ para cada μ infinito. Cada uno de esos tres teoremas resultaría ser equivalente al Axioma de Elección. Cuando Whitehead retomó los problemas de cardinalidad en un articulo escrito en 1903 y publicado al año siguiente, asumió la Tricotomía de los Cardinales como hipótesis para deducir la proposición: Si $m_1 < n_1$ y $m_2 < n_2$, entonces $m_1 + m_2 < n_1 + n_2$ [1903, 31-32]. Posteriormente se demostró que esa proposición era también equivalente al Axioma. Sin embargo bajo la óptica de la demostración de Zermelo no quedaba claro el papel que las elecciones arbitrarias y las suposiciones relacionadas jugaban en la aritmética cardinal. A medida que el siglo veinte avanzaba, la Suposición se comenzaba a usar de manera implícita - como sucedía con las elecciones arbitrarias, así como con los resultados indirectos del Teorema de Unión Numerable- aun por matemáticos que no simpatizaban fundamentalmente con los métodos no constructivos. En análisis sucedía específicamente en la teoría de funciones reales. La aditividad numerable de la medida de Lebesgue, el comportamiento de los conjuntos de primera categoría, la estructura de la clasificación de Baire para funciones reales, y para los conjuntos de Borel, todos dependían del Axioma. Mientras que el Axioma Numerable ó el Principio de Elecciones Dependientes fueran suficientes para tales aplicaciones en análisis real, la aritmética cardinal se manejaba con proposiciones que resultaron ser equivalentes al mismo Axioma. Es decir, Russell y Whitehead, más que otros matemáticos se encontraron implícitamente usando la fuerza completa de la Suposición. Cuando la demostración de Zermelo, apareció cada uno de los matemáticos enlistados en esta sección rechazaron el Axioma de Elección que servía de base para dicha demostración. La posición de esos críticos era delicada, puesto que el Axioma estaba ligado estrechamente a sus propias investigaciones. Posteriormente sus reacciones variaron de individuo a individuo. En su obra magistral *"Principia Matematica"*, Russell y Whitehead cuidadosamente hicieron del Axioma Multiplicativo una hipótesis explícita para los teoremas que dependían de él, pero tenían dudas de su veracidad. Young desechó el Axioma de Elección en favor de un procedimiento nebuloso, hecho por Bernstein, el cual tenía la incertidumbre de una prueba de la cardinalidad hecha con elecciones arbitrarias. En algunas ocasiones Borel señalaba al Axioma como absurdo y en otras se inclinaba a aceptar el Axioma Numerable, mientras que Baire repudiaba el Axioma inequívocamente. Lebesgue por otro lado repudiaba el Axioma de manera equivocada. No se sabe cuál es la razón por la que estos críticos no detectaron la Suposición la cual estaba escondida en sus propias investigaciones. Además durante 1904, Russell escondió la presuposición implícita de Whitehead de que la clase multiplicativa de una familia de clases no vacías debería ser no vacía. Después de la demostración de Zermelo muchos de esos matemáticos tuvieron que reiniciar sus investigaciones, algunos más consistentemente que otros.

8.- OBJECIONES ITALIANAS A LAS ELECCIONES ARBITRARIAS

A pesar del hecho de que las elecciones arbitrarias fueron ampliamente usadas en análisis alrededor de 1900, su uso explícito atrajo poca atención. Antes de la demostración de Zermelo, las únicas objeciones para hacer infinitas elecciones vinieron de tres matemáticos italianos: Peano [1890, 1902], Bettazzi [1892, 1896a], y Beppo Levi [1902]. Los tres se localizaban en Turín, razón por la cual existen fuertes razones para creer que el punto de vista de Peano se impuso a la de los otros, para rechazar las elecciones arbitrarias. Sin embargo algunos historiadores afirman que Peano ó Levi formularon el Axioma de Elección antes que Zermelo. En 1886 Peano publicó una nueva demostración del teorema, de Cauchy, de que la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ tiene solución única. Aquí Peano debilitó la hipótesis de Cauchy, la cual sólo requería que $f(x,y)$ fuera continua. Cuatro años más tarde Peano regresó a su teorema y generalizó su demostración a sistemas finitos de ecuaciones de primer orden. Cuando llego al paso que requería elegir un elemento único de cada sucesión $A_1, A_2, \ldots$ de subconjuntos de R, señaló cuidadosamente:

"Puesto que uno no puede aplicar infinitas veces una regla arbitraria para asignar a la clase A un individuo de su clase, una regla determinada se requiere, que bajo una hipótesis dada uno asigne a cada clase A un miembro de su clase. [1890, 210]"

Para obtener dicha regla usaba la mínima cota superior. Fue así que se convirtió en el primer matemático que, aceptando infinitas clases, categóricamente negaba el uso de infinitas elecciones arbitrarias. A pesar de conocer las investigaciones de Cantor, aparentemente no se le ocurrió a él ó a otros matemáticos de su época que Cantor había usado frecuentemente tales elecciones arbitrarias. Después de la demostración de Zermelo, surgieron las dudas de Peano quien criticó vigorosamente el Axioma de Elección así como a los resultados que dependían implícitamente del mismo. En 1892 Bettazzi, quien se había convertido en colega de Peano en la Academia Militar de Turín, publicó un artículo sobre discontinuidades en funciones reales. En ese contexto Bettazzi distinguió entre punto límite y punto límite por sucesiones. Por otra parte Bettazzi discutió el problema de las elecciones arbitrarias más detalladamente que Peano:

"Un punto puede tomarse arbitrariamente de un conjunto de puntos [en R], ó de sus subconjuntos, ó de un numero finito de sus subconjunto. Pero cuando uno tiene que considerar subconjuntos infinitamente y construir un subconjunto formado por la elección en cada uno de esos subconjuntos de cualquier punto, no es suficiente afirmar que uno forma ese conjunto tomando un punto arbitrariamente en cada uno de esos subconjuntos. Uno no puede determinar un número infinito de objetos todos elegidos arbitrariamente en clases dadas. Por lo cual claramente uno ve que darlos arbitrariamente equivale a definirlos separadamente uno a la vez. [1892, 176]."

Bettazzi añadía que uno podía seleccionar arbitrariamente un punto de subconjuntos de manera finita de un conjunto infinito de números reales, mientras que se definiera una *"regla"* suficiente para *"determinar"* un punto en cada subconjunto restante. Es decir, estaba de acuerdo con Peano en que el uso de infinitas elecciones arbitrarias debería rechazarse categóricamente. Dado que tales elecciones no podían usarse, Bettazzi deseaba investigar las condiciones bajo las cuales una regla de elección existía. A pesar de que no se conocía una regla de elección para *R*, se dio cuenta de que tal regla sí estaba disponible para cualquier conjunto numerable, por lo cual consideró que solamente existía para dichos conjuntos. Por otra parte había ciertos subconjuntos de *R* para los cuales había una regla de elección en casos especiales. Esto es, para un conjunto cerrado *S*, se podía determinar un punto en cualquier subconjunto cerrado *T* de *S* que estuviera en un intervalo cerrado y acotado dado, al cual se le llamaba la mínima cota superior de *T*. Bettazzi estudió la existencia de reglas de elección porque deseaba conocer las condiciones bajo las cuales un punto límite era también un punto límite por sucesiones. Dicho problema surgió cuando se consideraban los puntos límites por la derecha de una función arbitraria $y = f(x)$ a lo largo de la línea $x = a$. Su primer teorema era el que, dada una función $y = f(x)$ con dominio *G*, si p era un punto límite de f por la derecha - puesto que hay un intervalo $(a,a+\varepsilon)$ y una regla de elección para el dominio de f restringido a ese intervalo. [1892, 181]. Entonces generalizaba el resultado a un segundo teorema: Bajo la misma hipótesis, hay un subconjunto numerable *C* del dominio de f tal que el conjunto de todos los puntos límites de C por la derecha a lo largo de la línea $x = a$ es igual al subconjunto *A* dado del conjunto *B* de todos los puntos límites de f a lo largo de $x = a$ por la derecha. Dado que *B* es cerrado, el teorema se aplicaba, en particular si *A* y *B* eran iguales.[1892, 184-186]. Irónicamente el segundo teorema de Bettazzi utilizaba el Axioma de Elección indirectamente, bajo la forma del Teorema de la Unión Numerable, en una de sus primeras versiones:

(8.1).- Cada subconjunto cerrado *A* de *R* puede partirse en un conjunto numerable *C* y en otro conjunto *E* que consiste de todos los puntos límite de *C* y no en *C* mismo.

Igualmente aplicó el Teorema de la Unión Numerable cuando intentó dar una versión restringida de su segundo teorema, la cual no necesitaba una ley de elección. [1892, 187].

Cuatro años más tarde, en la lectura de un trabajo en la Academia de Ciencias de Turín, habló nuevamente de las elecciones arbitrarias. Ahí cuestionó la demostración de Dedekind de 1888, de que cada conjunto infinito S es Dedekind - infinito, precisamente porque utilizaba elecciones arbitrarias de una función uno a uno $fn:\{1,2,...,n\} \rightarrow S$ para cada n. A pesar de que Bettazzi sostenía la hipótesis que postulaba tales elecciones, inmediatamente rechazó la idea.[1896,a, 512]. El tercer matemático que se opuso al uso de infinitas elecciones arbitrarias fue Beppo Levi. En 1900 Levi, que había recibido su doctorado en Turín cuatro años antes, publicó un articulo inspirado en la tesis de Baire de 1899. Levi quería obtener las propiedades que cada función real satisficiera, puesto que creía que no había propiedades no triviales aun conocidas. Sin demostración tomó una de esas propiedades como un teorema: Cada subconjunto A de R es igual a $(B \cup C) - D$, donde B es un conjunto cerrado y C y D son densos en ninguna parte.1 En efecto, asumía que cada subconjunto de R tenía la propiedad de Baire .2 Además Levi, insistía en que el teorema implicaba una de las formas de la Hipótesis del Continuo de Cantor; Cada subconjunto no numerable de R tiene la potencia del continuo. [1900, 75]. La relación entre el Axioma de Elección y los resultados de Levi son intrigantes. En particular, la proposición de que cada subconjunto de R tiene la propiedad de Baire contradice el Axioma de Elección, dado que el conjunto no medible, posteriormente dado por Vitali [1905] y cuya existencia se demostró con el Axioma, se encima a la propiedad de Baire. Por otra parte, no está claro por qué la proposición de Levi debe implicar la forma anteriormente citada de la Hipótesis del Continuo. A pesar de haber afirmado que un artículo titulado *"Investigaciones sobre el Continuo y su Potencia"*, pronto aparecería con la demostración de su proposición y de sus corolarios, por razones desconocidas dicho artículo no fue publicado. Sin embargo, se percató de que R y las clases de segunda podían no ser comparables. Es así como Levi se distanció de los usos repetidos de Cantor en su Tricotomía de los Cardinales. En la tesis de 1901, Felix Bernstein estableció que el conjunto de todos los subconjuntos cerrados de R tenían la potencia del continuo. En páginas posteriores señaló que el resultado que Levi [1900] había deducido de que cada subconjunto de R tenia la propiedad de Baire era erróneo. Como respuesta Levi publicó un análisis de la tesis de Bernstein.[1902]. Levi comenzaba con una crítica a la teoría de conjuntos. Antes que nada insistía que Cantor y sus seguidores habían hecho frecuentemente proposiciones dudosas de que ciertas propiedades conocidas para conjuntos finitos se aplicaban también para conjuntos infinitos. En ese sentido Cantor aseguraba que cada conjunto podía ser bien ordenado. Además, continuaba Levi, varios autores han llegado a dudar del buen orden en general. Aun el discípulo de Cantor, Bernstein, ha abandonado evidentemente el Principio del Buen Orden, en virtud de que en su tesis ha investigado las condiciones bajo las cuales dos conjuntos pueden ser comparados- propiedad que satisfacen cualesquiera dos conjuntos bien ordenados--.[Levi 1902, 863]. Sin embargo, Levi agregó, Bernstein ha hecho una suposición que "aparece obscurecida para derivar en esencia al mismo postulado de (buena) ordenación de tal forma que uno puede pensar por un momento tratar de negar esta nueva suposición es de por sí evidente".[1902, 863]. Esa suposición que Levi veía como una consecuencia del Principio del Buen Orden, era el Principio de Partición: Si un conjunto se parte en una familia S de conjuntos ajenos no vacíos s, entonces $\#S < \# A$. Después de demostrar que el Principio de Partición se cumple siempre que A fuera finito, Levi añadió que "esta demostración es aplicable sin cambios a cualquier caso donde s sea bien ordenado ó más generalmente, donde podamos distinguir un único elemento en cada s.[1902, 864].

Al final de su artículo Levi dio una nueva demostración del teorema de Bernstein de que la familia de subconjuntos cerrados de *R* tiene la potencia del continuo. Así lo hizo porque creía que la demostración de Bernstein estaba viciada por el uso del Principio de Partición en el establecimiento del teorema:

(8.2).-El conjunto de todos los subconjuntos numerables de *R* tienen potencia menor ó igual a todas las sucesiones infinitas de números reales.

En su nueva demostración Levi evitó cuidadosamente el uso de elecciones arbitrarias y procedió a definir reglas. Por lo cual estaba lejos de proponer el Axioma de Elección en su artículo. Lo que hizo fue reconocer que el Principio de Partición puede ser demostrado en los casos en que una regla permita distinguir un elemento único de cada *s* en *S*.6. Consecuentemente, rechazamos la idea de algunos historiadores que afirman que con base en los artículos de Peano y Levi, alguno de ellos había formulado el Axioma de Elección antes que Zermelo.7 Se puede afirmar que Peano fue el primero en rechazar el uso de infinitas elecciones arbitrarias, Levi probablemente influenciado por Peano, evitó las demostraciones que emplearan tales elecciones arbitrarias. Es más difícil evaluar cual era la prioridad de Levi respecto al Axioma. En 1958 Abraham Fraenkel escribió:

"De acuerdo a una carta, alrededor de 1901 G. Cantor y F Bernstein trataron de construir una correspondencia uno a uno entre el continuo(R) y el conjunto de todos los tipos numerable.... Cuando se encontraron con una dificultad insuperable, B Levi propuso resolver la dificultad introduciendo un principio de elección, el cual formuló de una forma general..". [Fraenkel y Bar- Hillet 1958, 48].

No se sabe qué quiso decir Fraenkel con *"dificultad insalvable"*. Dado que en 1901 Cantor y Bernstein habían tenido éxito en establecer la existencia de tal correspondencia. Aunque ellos nunca se refirieron a una hipótesis que justificara las elecciones arbitrarias. Puede ser que el recuerdo de Brenstein o Fraenkel, décadas después de tal evento, haya acreditado a Levi algo que no era precisamente de su propiedad. Aun cuando había propuesto alguna versión del Axioma de Elección a Bernstein o a Cantor en1901, Levi evitó cualquier tipo de elección en su artículo fechado en octubre de 1902. Solamente en 1918 regresó a tal cuestión al proponer una forma extremadamente restringida del Axioma Numerable como sustituto del Axioma de Elección de Zermelo, el cual Levi todavía no aceptaba. Se debe enfatizar que la falsa creencia de que las elecciones arbitrarias fueron difundidas por Peano y sus asociados, no eran típicas de los matemáticos italianos. Sin embargo, un uso particularmente interesante de las elecciones arbitrarias ocurrían en el análisis generalizado que se desarrolló en Italia a finales del siglo diecinueve y que eventualmente condujo al análisis funcional. Una de las fuentes para este análisis generalizado fue el trabajo de Weierstrass. Es interesante el resultado después conocido como el Teorema de Ascoli, que extendió el Teorema de Bolzano - Weirstrass a familias de funciones reales. En 1884, inspirado en parte por el cálculo de variaciones, que Giulio Ascoli, busco las condiciones bajo las cuales una curva límite podía existir para una familia de curvas dada. Así introdujo el concepto de equicontinuidad. Una familia F de funciones reales, definida en un intervalo cerrado $[a,b]$, se dice que es equicontinua si, dada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta$ implica que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ para cada f en F y para cada x, y en $[a,b]$. Entonces Ascoli afirmaba que una sucesión equicontinua de funciones uniformemente acotada $\{f_n\}$, todas definidas en $[a,b]$ tienen una subsucesión convergente.[1884, 549]. Para demostrar su teorema Ascoli se percató de que $\{f_n\}$ tenia una subsucesión $\{g^{(1)}_n\}$ tal que $g^{(1)}_1(a)$, $g^{(1)}_2(a)$,..... convergía al mismo punto $x = a$. Entonces $\{g^{(1)}_n\}$ tenia una subsucesión $\{g^{(2)}_n\}$ tal que $g^{(2)}_1(b)$, $g^{(2)}_2(b)$,..... convergía al mismo punto $x = b$. enseguida escogía una subsucesión $\{g^{(3)}_n\}$ de $\{g^{(2)}_n\}$ tal que $g^{(3)}_1(a+b)/2$, $g^{(3)}_2(a+b)/2$,..... convergiera a algún punto $x = (a+b)/2$.

Procediendo de esta manera, escogía sucesiones $\{g^{(4)}{}_n\}$, $\{g^{(5)}{}_n\}$ ......, cada una de las cuales convergiendo puntualmente a los puntos previamente dados $x = a$, $x = b$, $x = (a+b)/2$, así como a los puntos que agregaba $x = (3a+b)/4$, $x = (a+3b)/4$,, y así sucesivamente. Dado que las abscisas del conjunto de puntos era denso en $[a,b]$ entonces la sucesión diagonal $\{g^{(1)}{}_1\}$, $\{g^{(2)}{}_2\}$, $\{g^{(3)}{}_n\}$,..... era una subsucesión convergente de $\{f_n\}$ como se deseaba.[1884, 545-549]. Ascoli uso infinitas elecciones arbitrarias cuando seleccionó una subsucesión $\{g^{(m)}{}_1\}$, en cada etapa de m. Tal uso era inevitable dado que para cualquier sucesión $g^{(m)}{}_1(c)$, $g^{(m)}{}_2(c)$,.....,el Teorema de Bolzano - Weierstrass daba solamente un punto límite especificado, el cual podía usarse para definir una subsucesión. Sin embargo, Ascoli no hizo ningún intento para establecer una regla. Posteriormente los matemáticos generalizaron el teorema de Ascoli, lo que hizo más difícil evitar el Axioma, aun si alguno se lo hubiera propuesto. En 1889 Cesare Arzela, que había impartido clases en la Universidad de Bologna, hizo la primera de dichas generalizaciones: Si F es un conjunto infinito de funciones reales definidas en $[a,b]$ uniformemente acotadas y equicontinua, entonces F tiene una función limite. Aquí f era la función limite de F si para cada $\varepsilon > 0$ y para todo x en $[a,b]$ existían una infinidad de funciones g en F tales que

$$f(x) - \varepsilon < g(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Arzela comenzaba su demostración seleccionando una sucesión $\{f_n\}$ en F, y por lo tanto se basaba en el teorema de Cantor de que cada conjunto infinito tiene un subconjunto numerable. El que se pudiera dar una demostración alternativa del teorema de Arzela sin el uso del Axioma, no fue posible sino hasta 1906.

9.- PERSPECTIVA Y RETROSPECTIVA

El que las matemáticas consistan de construcciones es un punto de vista cuyos orígenes pueden remontarse al menos hasta Euclides. En el siglo diecinueve, los matemáticos expandieron y restringieron lo que era permisible en tales construcciones. Cuál de los procedimientos válidos para cualquier número finito de pasos, se preguntaban, ¿puede extenderse a un número infinito? Entre los procedimientos considerados estaba la elección de un elemento de un conjunto. Cuando incluso Euclides había seleccionado un elemento de cada conjunto de manera finita, parecía que la segunda y tercera etapa de las elecciones arbitrarias no se habían presentado sino hasta el siglo diecinueve: se podían hacer elecciones arbitrarias con una regla establecida, ó con una regla no establecida respectivamente. Ciertamente la tercera etapa era evidente en la demostración de Cauchy de 1821 de que una función real f, continua en un intervalo cerrado, tenía una raíz siempre que el valor de f tuviera signos contrarios en sus extremos. Cauchy seleccionaba arbitrariamente los términos de dos sucesiones convergentes de tal manera que cada término dependiera de los seleccionados previamente. Sus elecciones arbitrarias servían solamente como un atajo para una regla que podía suplir si lo hubiera deseado. El momento decisivo se alcanzó en 1871 cuando Cantor hizo infinitas elecciones arbitrarias para las cuales no había una regla posible, y por lo tanto se inició la cuarta etapa. Esto sucedió en la demostración de su teorema que afirmaba que una función real f es continua en un punto si y solo si f es continua por sucesiones. Es decir, la tercera y la cuarta etapa tuvieron su origen en el análisis. En 1877 Dedekind extendió las elecciones arbitrarias a la teoría de los números algebraicos cuando realizó un número no numerable de ellas para obtener representantes de una clase de congruencia. Poco tiempo después Dedekind y Cantor usaron la Suposición implícitamente para caracterizar la frontera entre los conjuntos finitos e infinitos. Es por eso que las investigaciones de Cantor fueron especialmente significativas ya que sirvieron como principio conductor de los usos directos e indirectos de la Suposición. Mientras

Cantor introducía sus conceptos topológicos - tales como punto límite, conjunto derivado y conjunto perfecto- en términos de vecindades, una década después Jordan definió varias de estas nociones en términos de sucesiones. Al dar un tratamiento paralelo de estas nociones como equivalentes, puso en juego a la Suposición Numerable, como sucedió cuando Cantor dio la equivalencia entre continuidad y continuidad por sucesiones. Además el Teorema de la Unión Numerable de Cantor y su uso del Principio de Partición, jugaron un papel central en la teoría de conjuntos derivados. En análisis real Baire, Borel y Lebesgue usaron la Suposición Numerable implícitamente de manera directa como elecciones arbitrarias e indirectamente como el Teorema de la Unión Numerable a pesar de que posteriormente criticaron al Axioma cuando aparecieron de manera explícita. En la teoría de conjuntos, Borel y Russell utilizaron elecciones arbitrarias en sus respectivas demostraciones del teorema de Cantor: Todo conjunto infinito tiene un subconjunto numerable.

Finalmente, Whitehead dedujo un número de teoremas que más tarde se reconocieron como equivalentes al Axioma, por el hecho de que implícitamente se asumiera que una clase multiplicativa era no vacía lo cual originó posteriormente el Axioma Multiplicativo de Russell. Independientemente del uso que Cantor hizo de las elecciones arbitrarias, propuso el Principio del Buen Orden en 1883 como una ley fundamental del pensamiento. Al mismo tiempo publicó la forma de la Hipótesis del Continuo la cual implicaba que los números reales podía bien - ordenarse. De hecho la correspondencia de Cantor lo condujo al Principio del Buen Orden, así como a un caso especial del Teorema de Equivalencia. Sin embargo, alrededor de 1895, se convenció de que tanto el Principio del Buen Orden, como su consecuencia, la Tricotomía de los Cardinales, requerían de una demostración. En un lapso de dos años obtuvo tales demostraciones (basadas en elecciones sucesivas arbitrarias), las cuales fueron redescubiertas por Jourdain en 1903. A pesar de que Cantor confiaba ciegamente en sus demostraciones, motivó a Jourdain a publicar la versión que éste había obtenido independientemente de la suya. En 1896 Buralli - Forti hizo una aproximación importante para deducir la Tricotomía de los Cardinales sin el conocimiento de Cantor y Jourdain. Uno de los postulados de Burralli - Forti era el Principio de la Partición, y el otro resultó ser un equivalente del Axioma de Elección. En los inicios del siglo veinte los matemáticos no habían alcanzado un consenso respecto al Problema del Buen Orden. Borel y Russell permanecían escépticos tanto del Principio del Buen Orden como de la Tricotomía de los Cardinales, mientras que Schöenflies y Schröder creían en el primero pero dudaban del segundo. Hilbert se inclinaba a creer que al menos R podía ser bien ordenada. Como un paso hacia el establecimiento o rechazo del Principio del Buen Orden, Hardy usaba elecciones arbitrarias sucesivas para deducir que $\aleph_1 < \aleph_0{}^2$, y que cada cardinal infinito ó es un aleph ó es mayor que todos los aleph. De un teorema posterior surgió el intento de demostración de Jourdain del Principio del Buen Orden.

¿Por qué los críticos posteriores como Borel y Russell no se percataron de la utilización de elecciones arbitrarias en sus propias investigaciones? La respuesta se da en parte debido a que no se percataron (como nadie en esa época) de la fuerza deductiva de tales elecciones arbitrarias. Además la frontera entre los métodos constructivos y no constructivos era muy vaga. Cuando la noción de la construcción apareció gradualmente para incluir procesos infinitos, la unicidad de los objetos construidos no aparecía inmediatamente como una consideración importante. Sin embargo, tres matemáticos italianos- Peano, Bettazzi y Levi- afirmaron que las elecciones arbitrarias infinitas no eran permisibles en las matemáticas, sino que, por el contrario, una regla se debía de dar para especificar las elecciones. Posteriormente Peano y Levi expresaron su oposición al Axioma. Es decir, en virtud de la demostración de Zermelo de que cada conjunto puede bien ordenarse fue que se extendió el uso de elecciones arbitrarias pero igualmente se extendió la ignorancia respecto a su verdadera fuerza deductiva. Nadie había sugerido la propiedad de justificar tales elecciones por medio de un Axioma. Como un rayo de luz, la demostración de Zermelo iluminó de repente el escenario e hizo que los matemáticos escudriñaran la suposición, la cual habían ignorado.

10.-CONCLUSION

La historia del Axioma de Elección, es la historia de cómo el estatus de una suposición puede cambiar. En un momento dado, una suposición en matemáticas forma parte de los nexos que tenga ésta con la variedad de grados que se requieren para hacerla explícita. A través de la historia, los matemáticos han trabajado dentro del marco conceptual en el cual ciertas suposiciones son formuladas, pero en el cual, por otro lado, ciertas suposiciones están dadas de manera tácita ó aun inconsciente. Euclides, entre otros, presuponía propiedades del continuo que no fueron reconocidas explícitamente como necesarias para la geometría sino hasta el siglo diecinueve. Durante el siglo diecinueve, Frege enfatizó la necesidad de hacer todas las suposiciones explícitas, y la Axiomatizacion de la geometría hecha por Hilbert empujo ese proceso, usando un método axiomático formal de manera distinta al de Euclides. El Axioma de Elección de Zermelo es visto como un intento posterior al formular una suposición implícita de manera explícita. Es un hecho que hay más cosas que añadir. Hay muchos marcos conceptuales posibles, pero no hay certeza de que el desarrollo histórico se hizo de la forma antes citada. Aunque una suposición dada llevara a una suposición matemática explícita y dado el reconocimiento de que los conjuntos infinitos deberían estudiarse para un desarrollo de las matemáticas, el surgimiento del Axioma ó de sus equivalentes era inevitable. En 1908 Zermelo argumentó que el Axioma se había aplicado implícitamente por muchos investigadores en las distintas ramas de las matemáticas antes de formularse de manera explícita en 1904. Sus observaciones eran de hecho esencialmente correctas. En su libro había buscado la evolución entre las elecciones arbitrarias usadas un número finito de veces y las usadas un número infinito de veces, las cuales se habían realizado con ó sin regla establecida, y finalmente a un número infinito de elecciones arbitrarias para las cuales no era posible establecer una regla. La demostración de Zermelo del Teorema del Buen Orden generó muchas controversias, pero dos merecen especial mención. Para los alemanes seguidores de Cantor, la prueba perdió validez por la paradoja de Burali - Forti. Zermelo hábilmente evadió estas críticas al rechazar la afirmación de que la colección W de todos los ordinales era un conjunto. Sin embargo una crítica más problemática provino de Baire, Borel, Lebesgue, Peano y Russell: El Axioma no proporcionaba una *"regla"* que determinara las elecciones. Es decir, si uno podía establecer la existencia de un objeto matemático con una propiedad dada P, solamente definiendo tal objeto particular, entonces el Axioma era falso. De esa forma muchos matemáticos rechazaron el Axioma. Por otra parte, desde el punto de vista constructivo expuesto por Richard, el Axioma era precisamente verdadero, porque la noción de conjunto se restringía a la contención de un elemento definible. Las dificultades percibidas por Baire, Borel y Lebesgue frenaron el intento de mezclar la creciente forma abstracta del análisis, que incorporaban en sus propias investigaciones, con una filosofía constructiva de las matemáticas. De hecho Borel y Lebesgue usaron el Axioma implícitamente una y otra vez, aun después de haberse opuesto a él de manera vigorosa. Muchas de sus investigaciones, incluyendo la teoría de los conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue, se hubieran derrumbado sin el Axioma Numerable. No era solamente la sutileza de las formas del Axioma lo que cautivo a Borel y Lebesgue, sino su propia ambivalencia hacia el Axioma, hacia la teoría cantoriana de conjuntos, y aun hacia las nociones generales de las funciones reales. La historia del Axioma se encuentra en la encrucijada en la que las matemáticas y la filosofía se unen. De manera intermitente, los matemáticos como Borel (que tenía una mala opinión de los filósofos) se vieron obligados a realizar juicios cuasi - filosóficos acerca de la naturaleza de las matemáticas. Tres décadas después de que la controversia comenzara, Lebesgue siguió insistiendo en que la filosofía de las matemáticas debería ser creada por los matemáticos, y no por los filósofos. De hecho uno de los aspectos mas lamentables de la controversia era, que después del debate inicial, los matemáticos no profundizaron significativamente su filosofía de las matemáticas. El inmenso cuerpo de los resultados matemáticos concernientes a la fuerza deductiva del Axioma y sus relaciones con otras proposiciones -desarrolladas principalmente por la escuela de Varsovia- no condujeron a una idea filosófica. El Axioma puntualizaba la *"existencia"* de una función elección, no de su *"construcción"*. Si uno deseaba restringir la existencia a las construcciones, entonces había poco que agregar, y no se planteaba ninguna discusión. Solamente aquellos que adoptaron una posición mas ambivalente hacia las matemáticas modernas, y hacia las restricciones constructivas, tales como Borel y Lebesgue, sintieron la necesidad de continuar con el debate. El Axioma resumió la transformación fundamental que tuvo lugar a finales del siglo diecinueve y a principios del siglo veinte. El uso del infinito actual a través de las matemáticas, producto de la teoría de conjuntos, hizo evidente que la existencia y la construcción eran conceptos matemáticos ampliamente diferentes. En la controversia sobre el Axioma tanto Hadamard y Lebesgue establecieron dos puntos de vista diametralmente opuestos. Por un lado lo que se llamo la restricción constructivista de las matemáticas, y por otro lado el punto de vista expuesto por Hadamard y Zermelo se convirtió en la posición establecida y se le llamo: matemática moderna. Merece especial énfasis la controversia sobre la demostración de 1904, y en particular sobre el Axioma de Elección, que llevó a Zermelo a axiomatizar la teoría de conjuntos. Este fue el primer paso en el tratamiento de la teoría de conjuntos como un sistema formal. De hecho se vio la necesidad de especificar, también, la lógica que estaba detrás de ese sistema. En las décadas posteriores a la Axiomatizacion de Zermelo, el desarrollo de la teoría de conjuntos de manera creciente involucró *modelos* de teoría de conjuntos correspondientes a la *lógica de primer orden.* Es decir, hubo un pronunciado salto hacia la meta-matemática de primer orden y hacia el estudio de la semántica de la teoría de conjuntos - que culminaron con los resultados de Cohen, sobre fragmentación de los fundamentos de la teoría de conjuntos. El planteamiento de Dana Scott, hace eco de las inquietudes de muchos matemáticos en el pasado y en le presente: El Axioma es ciertamente necesario, solo si existiera un modo de hacerlo evidente por sí mismo también.....

BIBLIOGRAFIA

Ascoli Giulio
1884.- "*Le curve limite di una varieta data di curve*" Boletín de la Academia Italiana de Ciencia No. 18

Baire René
1898.- "*Sur le fonctions discontinues qui se rattachent aux fonctions continues*". Comptes Rendu Hebdomadaires Séances de l´Académie des Sciences, Paris.
1899.- "*Sur les fonctions de variable réelles*". *Annali di matemat*ica pura ed applicata

Bernstein Félix
1901.- "*Untersuchungen aus der Mengenlehere*" (Tesis de Doctorado: Göttingen, impreso en Halle), reimpreso con algunos cambios en 1905.

Bettazzi Rodolfo
1892.-"*Sui punti di discontinuita delle funzioni di variable reale*". Circolo Matematico di Palermo, Rendiconti No. 6
1896.-"*Sulla Catena di un ente in un gruppo*".Accademia delle Scienze di Torino, Clase di Scienze Fisiche, Matematiche, e Naturale No. 31
1896(a).-"*Gruppi finiti ed infiniti di enti*". Accademia delle Scienze di Torino, Clase di Scienze Fisiche, Matematiche, e Naturale No. 31

Borel Emile
1895.- "*Sur quelques points de la théorie des fonctions*". Annales Scientifiques de l´Ecole Normale Supérieure No. 12

Cantor Georg
1874.-"*Über eine Eigenschaft des inbergiffes aller reelle algebraischen Zahlen*". Journal für die reine und angewandte Mathematik # 77.
1878.- "*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* ". Journal für die reine und angewandte Mathematik # 84.
1880.- .-"*Über unendliche, lieare Punkmannichfaltigkeiten II*". Mathematische Annalen #17.
1884(a).- "*De la puissance des ensembles parfaits de points*".
1887.- "*Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten*".Zeitshrigt für Pholosophie und philosophische Kritik # 91.
1895.-"*Beiträge zür Begründung der transfiniten Mengenlehre I*".Mathematische Annalen #46.
1897.- .-"*Beiträge zür Begründung der transfiniten Mengenlehre II*".Mathematische Annalen #49.Traducido en 1915.
1932.-"*Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalits*".Editado por Zermelo (Berlin; Springer); reimpreso (Hildesheim: Olms,1962).

Peano Giuseppe
1890.- *"Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires"*. Mathematische Annalen No.37.

Russell Bertrand
1901.- *"Sur la logique des relations... "*. Rivista di matematica No.7.
1902.- *"Théorie génerale des séries bien ordonnées"*. Rivista di matematica No.8.
1903.- *"The Principles of Mathematics"* (Cambridge: Cambridge University Press).

Schröder Ernst
1890.- *"Vorlesungen über die Algebra der Logik"* (Leipzig: Teubner), vo. 1; reimpreso (New York: Chelsea, 1966).

Sierpinski Waclaw
1916.- *"Sur le rôle de l'axiome de M. Zermelo dans l'analyse moderne"*. Comptes Rendu Hebdomadaires Séances de l'Académie des Sciences, Paris.
1918.- *"L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse"*. Boletin de la Academia de Ciencias de Cracovia No. 163.

Tarski Alfred
1924.- *"Sur quelques théorèmes qui équivalent á l'axiome du choix"*. Fundamenta Mathematicae No. 5.

Weber Heinrich
1893.- *"Die Allgemeinen Grundlangen der Galois schen Gleichungstheorie"*. Mathematische annalen No. 43.

Whitehead Alfred North
1902.- *"On Cardinal Numbers"*. American Journal of Mathematicas No. 24.

Young William H.
1902.- *"Sets of Intervals on the straight Line"*. Procedimientos de la Sociedad Matematica de Londres No. 35.
1903.- *"Overlapping Intervals"*. Procedimientos de la Sociedad Matematica de Londres No. 36.

Dedekind Richard
1857.-"*Abriss einer Theorie der höhern Congruenzen in Bezug auf einen reellen Primzahl - Modulus*". Journal für die reine und angewandte Mathematik No 54.

Fraenkel Abraham; Bar – Hillel, Yehoshua; y Levy Azriel
1973.- "*Fraenkel y Bar – Hillel.* Segunda edicion

Hardy G.H.
1903.- "*A Theorem Concernig The Infinite Cardinal Numbers*".Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics No. 35 reimpreso en 1979.

Heine Eduard
1872.- "*Die Elemente der Functionenlehre*". Journal für die reine und Angewandte *Mathematik No. 74.*

Hilbert David
1897.- "*Die Theorie der algebraischen Zahlköper*". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker – Vereingingung No. 4
1900.- "*Mathematikesche Probleme.*"Ponencia presentada en el Congreso Internacional de Paris en 1900.
1932 -1935.- "*Gesammelte Abhanddlungen*".3 volumenes (Berlin – Springer).

Jordan Camile
1892.-"*Remarques sur les integrals définies*". Journal de mathématiques pures et appliqués No 8.
1893.- "*Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique : Tome premier, Calcul différentiel*". Segunda edición (Paris : Gauthier – Villars).

Jourdain Philip
1904.- "*On the Transfinite Cardinal Numbers of Well – Ordered Aggregates*".Philosophical Magazine No. 6.
1904(a).- "*On the Transfinite Cardinal Numbers – Classes in General*". Philosophical Magazine No. 7.
1905.- "*On the Transfinite Cardinal Numbers of Exponential Form*". Philosophical Magazine No. 9.

Lebesgue Henri
1902.-"*Intégrale, longeur, aire*". Annali di matematica pura ed applicata No. 7.
1904.- "*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*". (Paris : Gauthier – Villars).

Levi Beppo
1902.- "*Intorno alla teoria degli aggregati*". Instituto Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti.