

01174 6



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO FACULTAD DE INGENIERIA

NUEVO MODELO DE FLUJO PARA YACIMIENTOS NATURALMENTE
FRACTURADOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

**MAESTRO EN INGENIERIA
(PETROLERA)**

PRESENTA

JESUS GUERRA ABAD



DIRECTOR DE TESIS:
DR. HEBER CINCO LEY

MÉXICO, D. F.

2002

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Dedicatorias

A Dios quien me vive en mi corazón y siempre
se encuentra a mi lado.

En especial a mi mama:
Sra. Esther Abad Ramírez.
Por sus sabios consejos

A mi papa:
Cruz Juvenal Guerra M.
Por que siempre eh recibido un gran apoyo

A mis hermanos:
Luis y Liz Guerra A.
Con cariño

Julio-2002

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

~~CON~~ AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su sincera apreciación, admiración y respeto al profesor Dr. Héber Cinco Ley, de la Sección de Ingeniería Petrolera por su guía, entendimiento y estímulo en la asesoría de esta investigación, estoy agradecido al Dr. Fernando Rodríguez de la Garza por sus comentarios en la revisión de este trabajo, al comité sinodal: Dr. Fernando Samaniego Verduzco, Dr. Sergio Berumen y al M. en I. Néstor Martínez Romero por sus sugerencias y opiniones a esta tesis.

Expreso una apreciación especial al M en I. Héctor C. Pulido Bello por la amistad que hemos sembrado, por proporcionarme el programa de inversión numérica Sthefest versión Excel 2000 usado durante el desarrollo de esta investigación y por las enseñanzas básicas y discusiones que siempre tuvimos entorno a este trabajo.

Agradezco a la Universidad Nacional Autónoma de México y en especial a la División de Estudios de Posgrado por la formación académica que me ha brindado, al coordinador de la Maestría en Ingeniería Petrolera Dr. Daniel García Gavito por su apoyo invaluable en concluir esta investigación. Gracias sinceramente al Instituto Mexicano del Petróleo y a la Cía. ASPETROL por el apoyo económico recibido en esta investigación.

Deseo agradecer a la Sra. Araceli Márquez R. por el apoyo y los comentarios realizados en el desarrollo de este arduo pero valioso trabajo, ahora concluido.

Finalmente expreso un profundo agradecimiento a todos mis amigos, amigas, compañeros, colaboradores, profesores que aportaron esfuerzos incondicionales en el trayecto de esta investigación, un reconocimiento especial a los hombres que siempre creyeron en mi, gracias por todo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

	Pág.
RESUMEN	i
LISTA DE FIGURAS	iii
LISTA DE TABLAS	viii
CAPITULO I. INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO II. REVISIÓN DE LITERATURA	
II 1 Clasificación de Yacimientos Naturalmente Fracturados	
II.1.1 Definición	7
II.1.2 Streltsova	9
II.1.3 Cinco Ley	11
II 2 Modelos de Flujo Radial para Yacimientos Naturalmente Fracturados	
II 2.1 Flujo Interporoso Pseudo-estacionario	
II 2.1.1 Modelo de Barenblatt, Zheltov y Kochina (1960)	15
II 2.1.2 Modelo de Warren y Root (1963)	19
II 2.1.3 Modelo de Odeh (1965)	29
II 2.1.4 Modelo de Mavor y Cinco (1979)	31
II.2.2 Flujo Interporoso Transitorio	
II 2.2.1 Modelo de Kazemi (1969)	34
II 2.2.2 Modelo de Swaan (1976)	36
II 2.2.3 Modelo de Najurieta (1980)	39
II 2.2.4 Modelo de Kucuk y Sawyer (1980)	43
II 2.2.5 Modelo de Cinco y Samaniego (1982)	46
II 2.2.6 Modelo de Serra, Reynolds y Raghavan (1983)	57
II 2.2.7 Modelo de Streltsova (1983)	64
II 2.2.8 Modelo de Rodríguez N (2000)	70

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO III. MODELO PROPUESTO

III.1 Modelo	77
III.2 Formulación del Problema	78
III.2.1. Fractura paralelepipedada rodeada por matriz cúbica.	78
III.2.2 Fractura rodeada por bloque de matriz esférico.	81
III.3. Consideraciones del Modelo.	82
III.4. Modelo Propuesto.	82
III.5. Solución.	84
III.6. Modelo de flujo radial con flujo interporoso transitorio convolucionado en fracturas rodeadas por bloques de matriz finito.	
III.6.1 Flujo esférico transitorio en fractura rodeada por matriz finita	85
III.6.2 Flujo radial con flujo esférico interporoso transitorio en matriz finita	88
Comportamiento de presión a tiempos cortos	91
Comportamiento de presión a tiempos largos	91
III.7. Modelo de flujo radial con flujo interporoso transitorio convolucionado en fracturas rodeadas por bloques de matriz infinitos.	
III.7.1 Flujo esférico transitorio en fractura rodeada por bloque de matriz infinito	97
III.7.2 Flujo radial con flujo esférico interporoso transitorio en la matriz infinita	98

CAPITULO IV. ANALISIS DE RESULTADOS

IV.1 Resultados en matriz finita	103
Caso A: $\omega = \text{cte}$, $\eta_{\text{maD}} = \text{cte}$ y $R_D = \text{variable}$	106
Caso B: $\omega = \text{cte}$, $\eta_{\text{maD}} = \text{variable}$ y $R_D = \text{cte}$	112
Caso C: $\omega = \text{variable}$, $\eta_{\text{maD}} = \text{cte}$ y $R_D = \text{cte}$	120
III.2 Resultados en matriz infinita	129

CAPITULO V. CONCLUSIONES

134

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

NOMENCLATURA	137
REFERENCIAS	140
APÉNDICE A: MODELO DE DOBLE POROSIDAD CON FLUJO INTERPOROSO TRANSITORIO CONVOLUCIONADO. CINCO Y SAMANIEGO, 1982.	146
APÉNDICE B: FLUJO ESFÉRICO EN FACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ FINITO	152
APÉNDICE C: FLUJO ESFÉRICO EN FACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ INFINITO	159
APÉNDICE D: MODELO DE DOBLE POROSIDAD CON FLUJO INTERPOROSO TRANSITORIO CONVOLUCIONADO EN FRACURA RODEADA POR MATRIZ FINITA	163
APÉNDICE E: MODELO DE DOBLE POROSIDAD CON FLUJO INTERPOROSO TRANSITORIO CONVOLUCIONADO EN FRACURA RODEADA POR MATRIZ INFINITA	172
APÉNDICE F: RELACIÓN DEL GASTO ADIMENSIONAL EN LA FRACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ Y EL GRADIENTE DE PRESIÓN.	179
APÉNDICE G: RELACIÓN DEL TIEMPO ADIMENSIONAL EN LA MATRIZ Y LA FRACTURA RADIAL	181
APÉNDICE H: SOLUCIÓN DE CAIDA DE PRESIÓN ADIMENSIONAL EN FRACTURA PARALELEPIPEDA EN FUNCIÓN DE SERIE DE SENOS Y COSENOS.	182
APÉNDICE I: SOLUCIÓN DE CAIDA DE PRESIÓN ADIMENSIONAL EN FRACTURA PARALELEPIPEDA EN FUNCIÓN DE SERIES EXPONENCIALES.	187

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

RESUMEN

El presente trabajo es un nuevo estudio sobre la distribución de presión en sistema matriz-fractura aplicado en pruebas de variación de presión para formaciones naturalmente fracturadas. A la fecha todos los métodos de análisis existentes en la literatura consideran que la transferencia de fluido se realiza de la matriz hacia la fractura, con la conceptualización que la matriz está rodeada por fracturas, sin embargo, a través de la experiencia, se ha observado que esta idea es adecuada para procesos de inyección, pero en el caso de producción no siempre se puede justificar esta hipótesis.

En esta tesis se presenta un nuevo modelo de flujo para yacimientos naturalmente fracturados con una formulación geométrica diferente en la matriz, las soluciones analíticas obtenidas consideran flujo interporoso transitorio, la dirección de transferencia de fluido es de la matriz a la fractura, la fractura está rodeada por bloque de matriz de tamaño finito y el flujo en la matriz es esférico. Se presentan dos soluciones de gradiente de presión en la matriz: a) para fractura de forma paralelepípeda rodeada por matriz cúbica y b) fractura rodeada por matriz esférica. Estas soluciones son obtenidas aplicando el método de Transformada de Laplace.

Considerando lo anterior, el objetivo principal de la tesis consiste en obtener, analizar y validar el modelo de flujo analítico que representa el comportamiento del sistema matriz - fractura con las características antes señaladas.

Los objetivos específicos de esta tesis son: (**Capítulo II**) (i) Revisar los modelos de comportamiento de flujo para yacimientos naturalmente fracturados desarrollados en la literatura hasta nuestros días. (ii) Describir el problema físico, (iii) Plantear matemáticamente el modelo de flujo propuesto y Resolver la ecuación de difusión para obtener la solución general de respuesta de presión en el pozo (**Capítulo III**), en el mismo

capítulo se presentan soluciones de comportamiento aproximadas para tiempos largos y cortos. (iv) El problema se plantea y se resuelve para dos casos de tamaño de matriz esférica: finita e infinita. Los resultados obtenidos en el espacio de Laplace se invierten a espacio real utilizando el invertidor numérico de Sthefest³¹.

En el **Capítulo IV**, se muestra la solución general del nuevo modelo y 120 casos de análisis de comportamiento de yacimiento clasificados en caso A, B y C, los datos de respuesta de presión y respuesta de presión derivada de los análisis realizados se muestran en gráficas semilog y log-log respectivamente. En el mismo capítulo se compara en forma gráfica el modelo propuesto con el modelo de Warren y Root, finalmente en el **Capítulo V** se describen (v) las conclusiones y aportaciones del nuevo modelo al análisis de pruebas de presión.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Idealización del sistema matriz fractura en bloque de roca (L.H REISS ⁴)	7
Figura 2.2.	Idealización de un yacimiento naturalmente fracturado (W&R ⁷)	9
Figura 2.3.A	Yacimiento fracturado (Streltsova ²¹)	9
Figura 2.3.B	Yacimiento puramente fracturado (Streltsova ²¹)	10
Figura 2.3.C	Yacimiento de doble porosidad (Streltsova ²¹)	10
Figura 2.3.D	Yacimiento heterogéneo (Streltsova ²¹)	10
Figura 2.4.A y B	Modelo de yacimiento homogéneo (Cinco ^{5,9})	12
Figura 2.4.C	Modelo de yacimiento compuesto (Cinco ^{5,9})	12
Figura 2.4.D	Modelo de yacimiento anisotrópico (Cinco ^{5,9})	13
Figura 2.4.E	Modelo de fractura simple (Cinco ^{5,9})	13
Figura 2.4.F	Modelo de doble porosidad (Cinco ^{5,9})	13
Figura 2.5	Solución P_{wD} vs $\text{Log}(t_D)$ $\omega=10^{-3}$ y $\lambda=10^{-6}$ (Modelo de Warren y Root)	24
Figura 2.6	P_{wD} vs $\text{Log}(t_D)$ para λ constante, $N=10$ y $\omega=0$, $\omega=10^{-3}$, $\omega=0.1$, $\omega=0.5$ y $\omega=1.0$	25
Figura 2.7	P_{wD} vs $\text{Log}(t_D)$ para w constante, $N=10$ y $\lambda=10^{-3}$, $\lambda=10^{-6}$ y $\lambda=10^{-9}$	26
Figura 2.8	$\text{Log}(P_{wD})$ vs $\text{Log}(t_D)$ y $\text{Log}(P_{wD}')$ vs $\text{Log}(t_D)$ para $\lambda=10^{-6}$ constante, $N=10$ y $\omega=0.1$, $\omega=10^{-3}$, $\omega=0.5$	27
Figura 2.9	$\text{Log}(P_{wD})$ vs $\text{Log}(t_D)$ y $\text{Log}(P_{wD}')$ vs $\text{Log}(t_D)$ para $\omega=0.1$ constante, $N=10$ y $\lambda=10^{-3}$, $\lambda=10^{-6}$, $\lambda=10^{-9}$	28
Figura 2.10	Propagación de la presión en las fracturas durante la	

	Prueba de interferencia- decremento (M. de Najurieta)	40
Figura 2.11	Comparación de las curvas de decremento para los modelos de Warren & Root, Kazemi y Najuerieta	41
Figura 2.12	Comportamiento de presión para YNF caracterizado por tres parámetros: ω , η_{maD} y A_{ID} (Modelo de Cinco y Samaniego)	50
Figura 2.13	Solución analítica P_{wD} vs $\text{Log}(t_D)$ para $\omega=0,01$ (constante) y $\eta_{maD}=10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ y 10^{-10} (Modelo de Cinco y Samaniego)	51
Figura 2.14	Solución analítica P_{wD} vs $\text{Log}(t_D)$ para $\eta_{maD}=10^{-10}$ (constante) Y $\omega=10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ y 10^{-4} (Modelo de Cinco y Samaniego)	52
Figura 2.15	Comparación de solución general y las aproximaciones a tiempos Cortos, largos e intermedios (Modelo de Cinco y Samaniego)	53
Figura 2.16	Respuesta de presión derivada para ω constante y η_{maD} Variable (Modelo de Cinco y Samaniego)	54
Figura 2.17	Respuesta de presión derivada para η_{maD} constante y ω variable (Modelo de Cinco y Samaniego)	55
Figura 2.18	Comparación de respuesta de presión para dos formas diferentes de matriz: esfera y estrato. (Modelo de Cinco y Samaniego)	56
Figura 2.19	Comportamiento de presión de un YNF caracterizado por dos parámetros ω' y λ' (Modelo de Serra, Reynolds y Raghavan)	60
Figura 2.20	Solución P_{wD} vs t_D para ω' constante y λ' variable (Modelo de Serra, Reynolds y Raghavan)	61
Figura 2.21	Solución P_{wD} vs t_D para ω' variable y λ' constante (Modelo de Serra, Reynolds y Raghavan)	62
Figura 2.22	Comparación de solución general y las soluciones aproximadas A tiempos cortos, largos e intermedios (Modelo de Serra, Reynolds y Raghavan)	63
Figura 2.23	Presión adimensional $\Delta p_m(z^n)/\Delta p$ con variación del tamaño de bloque de matriz (Modelo de Streltsova)	67

Figura 2.24	Comparación de respuesta de presión adimensional $\Delta p_m(z^n)/\Delta p$ de Streltsova con el modelo de Warren & Root	68
Figura 2.25	Comportamiento característico de doble porosidad	69
Figura 2.26	Presión adimensional con distribución lineal en el tamaño del bloque de matriz, sin almacenamiento y sin daño (Modelo de Rodríguez Nieto)	74
Figura 2.27	Respuesta de presión derivada con distribución lineal en el tamaño del bloque de matriz, sin almacenamiento y sin daño (Modelo de Rodríguez Nieto)	75
Figura 2.28	Presión adimensional con distribución exponencial en el tamaño del bloque de matriz	75
Figura 2.29	Respuesta de presión derivada con distribución exponencial en el tamaño el bloque de matriz	76
Figura 3.1	Regiones de flujo en forma tridimensional para una fractura.	78
Figura 3.2	Representación esquemática de la formación naturalmente fracturada con fracturas rodeadas por bloques de matriz	79
Figura 3.3	Proceso de transferencia de flujo interporoso transitorio en forma tridimensional	80
Figura 3.4	Fractura paralelepípeda rodeada por bloques de matriz cúbico y fractura rodeada por bloque de matriz esférico	83
Figura 3.5	Regiones de flujo y planteamiento analítico del problema.	84
Figura 3.6	Fractura y matriz esférica finita.	85
Figura 3.7	Solución de respuesta de presión en YNF con flujo esférico transitorio en matriz esférica finita (Modelo propuesto)	93
Figura 3.8	Solución de respuesta de presión derivada en YNF con flujo esférico transitorio en matriz esférica finita.	94
Figura 3.9	Comportamiento de la función $f(s)$ matriz finita para valores grandes y pequeños de s .	95
Figura 3.10	Solución general de respuesta de presión y soluciones	

Figura 3 10	Solución general de respuesta de presión y soluciones Aproximadas a tiempos cortos y largos	96
Figura 3.11	Solución de respuesta de presión en YNF con flujo esférico transitorio en matriz esférica infinita (Modelo propuesto)	99
Figura 3.12	Solución de respuesta de presión derivada en YNF con flujo esférico transitorio en matriz esférica infinita.	100
Figura 3.13	Comportamiento de la función $f(s)$ matriz infinita para valores grandes y pequeños de s en yacimientos de matriz infinita	101
Figura 4 1	Respuesta de presión en gráfica semilog para seis casos, $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=10^{-8}$ y R_D variable.	108
Figura 4.2	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log para seis casos, $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=10^{-8}$ y R_D variable	109
Figura 4.3	Respuesta de presión en gráfica semilog para seis casos, $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=10^{-4}$ y R_D variable.	110
Figura 4.4	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log para seis casos, $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=10^{-4}$ y R_D variable.	111
Figura 4.5	Respuesta de presión en gráfica semilog para cinco casos, $\omega=10^{-4}$, η_{maD} = variable y $R_D = 2$	114
Figura 4 6	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log cinco casos, $\omega=10^{-4}$, η_{maD} = variable y $R_D = 2$	115
Figura 4.7	Respuesta de presión en gráfica semilog para cinco casos, $\omega=10^{-4}$, η_{maD} = variable y $R_D = 20$ 116	116
Figura 4.8	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log cinco casos, $\omega=10^{-4}$, η_{maD} = variable y $R_D = 20$	117
Figura 4.9	Respuesta de presión en gráfica semilog para seis casos, $\omega=10^{-4}$, η_{maD} = variable y $R_D = 100$	118
Figura 4.10	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log cinco casos, $\omega=10^{-4}$, η_{maD} = variable y $R_D = 100$	119
Figura 4 11	Respuesta de presión en gráfica semilog para cuatro casos,	

	ω =variable, $\eta_{maD} = 10^{-8}$ y $R_D = 2$.	122
Figura 4.12	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log para cuatro casos, ω =variable, $\eta_{maD} = 10^{-8}$ y $R_D = 2$	123
Figura 4.13	Respuesta de presión en gráfica semilog para cuatro casos, ω =variable, $\eta_{maD} = 10^{-8}$ y $R_D = 100$.	124
Figura 4.14	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log para cuatro casos, ω =variable, $\eta_{maD} = 10^{-8}$ y $R_D = 100$	125
Figura 4.15	Respuesta de presión en gráfica semilog para seis casos, ω =variable, $\eta_{maD} = 10^{-4}$ y $R_D = 100$.	126
Figura 4.16	Respuesta de presión derivada en gráfica log-log para seis casos, ω =variable, $\eta_{maD} = 10^{-4}$ y $R_D = 100$	127
Figura 4.17	Respuesta de presión en gráfica semilog para seis casos, $\omega = 10^{-4}$, $\eta_{maD} = 10^{-4}$ y R_D =variable y solución aproximada a tiempos cortos y largos.	128
Figura 4.18	Comportamiento de presión en yacimiento Naturalmente Fracturado Infinito para cinco casos de Área diferente y w constante, igual a 10^{-4}	131
Figura 4.19	Comportamiento de presión en yacimiento Naturalmente Fracturado Infinito para cinco casos de Área diferente y $w = 0$	132
Figura 4.20	Comportamiento de presión estabilizada en Yacimientos Naturalmente Fracturado matriz infinita	133

LISTA DE TABLAS

Tabla 4.1	Datos de análisis para 120 casos de comportamiento	105
Tabla 4.2	Tipos de comportamiento para el modelo propuesto	105

Capítulo

I

INTRODUCCIÓN

Debido a la gran importancia que actualmente tienen los hidrocarburos en el mundo como producto líder del mercado internacional y como base de la economía de algunos países como el nuestro, es necesario desarrollar e implementar técnicas encaminadas a mejorar la explotación y utilización de este recurso.

Los recursos petroleros se obtienen de formaciones de rocas homogéneas y naturalmente fracturadas, éstas últimas son estructuras formadas por dos elementos: fracturas y bloques de matriz con propiedades y características diferentes.

En México, un gran porcentaje de la producción de hidrocarburos proviene de yacimientos de rocas naturalmente fracturadas^{17,18}, estos yacimientos también son llamados de doble porosidad. Durante la vida productiva del campo, la optimización de la explotación de los yacimientos es una de las áreas de vital importancia en el desarrollo de los campos de hidrocarburos cuyo principal objetivo es maximizar el valor económico de las reservas de aceite y gas a través de la implantación de tecnologías^{1,2,3}.

Este proceso se basa en la simulación del comportamiento yacimiento – pozo – sistema de producción. Con la simulación se obtienen diferentes escenarios de explotación del campo y permite seleccionar el mejor proyecto de desarrollo. Los buenos resultados de una simulación dependen tanto del simulador mismo como del conocimiento del yacimiento en el sentido areal y vertical de las propiedades de la roca y de los fluidos, de los mecanismos de perforación, producción y recuperación, del flujo de fluidos, de la

terminación de pozos y de la historia de producción, es por ello que en los últimos años, optimizar³ los recursos petroleros es una de las tareas más importante que tenemos como nación.

La importancia de los estudios en yacimientos naturalmente fracturados radica en conocer las propiedades de la roca, el comportamiento de los fluidos almacenados en la matriz, la evaluación de la interacción matriz – fractura a través de la caracterización dinámica o estática del yacimiento.

La caracterización dinámica⁵ identifica, mide y evalúa las variables del sistema, como presión, temperatura, flujo o concentración bajo condiciones de explotación del yacimiento. Para caracterizar dinámicamente el yacimiento, se requiere de datos de producción de agua, aceite y gas, pruebas de presión, datos de molinete hidráulico, registros de temperatura, pruebas de trazadores, datos de comportamiento de yacimiento y datos de presión en cabeza.

De las mediciones señaladas, las **pruebas de presión** son la más utilizadas por su capacidad de análisis de los datos obtenidos del yacimiento.

Las pruebas de presión^{2,3} son utilizadas en la exploración, la producción primaria, la recuperación secundaria y durante la vida productiva del yacimiento. En la vida productiva, éstas pruebas contribuyen a identificar el comportamiento de los fluidos en el yacimiento, los regímenes de flujo, las heterogeneidades del medio y algunos parámetros del sistema yacimiento – pozo como la permeabilidad de matriz y fractura, la productividad y daño del pozo, la presión del yacimiento, también se puede estimar la presencia de fallas permeables o impermeables a sí como el espesor, conductividad y longitud de fracturas hidráulicas en pozos hidráulicamente fracturados.

Con las pruebas de presión también se puede determinar el espaciamiento adecuado de los pozos y evaluar las tendencias de permeabilidad para futuras exploraciones en el área. Todos estos parámetros, obtenido en su mayoría por pruebas de presión, son utilizados en

los simuladores de yacimientos para definir el escenario más óptimo² de explotación del campo y mejorar la administración de los recursos.

Las pruebas de presión también describen la presencia de fronteras externas en yacimientos, utilizadas para determinar el tamaño del yacimiento, reservas del campo y en algunos casos, el esquema propio del decaimiento de presión.

En yacimientos naturalmente fracturados, además de los atributos antes mencionados, las pruebas de presión se utilizan para evaluar el comportamiento del fluido en el sistema matriz – fractura y su interacción con el pozo productor. Las heterogeneidades de estos yacimientos han sido modelada por varios investigadores⁶⁻¹⁸ de manera que en la actualidad se cuenta con modelos para representar el comportamiento de este fenómeno bajo ciertas condiciones.

Los modelos desarrollados en el pasado hasta nuestros días consideran dos formas de transferencia de flujo entre la matriz y la fractura: transferencia interporosa pseudo-estacionaria⁶⁻⁸ y transitoria^{9,11-18}, la mayoría de éstos modelos consideran que la fractura rodea al bloque de matriz⁶⁻¹⁸, o bien que la matriz está rodeada por fracturas, el flujo se considera lineal y su dirección dentro de la formación ocurre de la matriz hacia la fractura, algunos autores consideran el flujo de la matriz como un término fuente cuya forma geométrica de matriz¹¹⁻¹⁴ influye en el comportamiento de presión del yacimiento, en estos modelos la dirección del flujo ocurre del centro de la matriz hacia el exterior del bloque (cara externa de la matriz) donde se evalúa el gradiente de presión en la superficie externa de un bloque esférico o de estrato^{11 y 14} con estas aportaciones, el desarrollo de modelos en formaciones fracturadas ha mejorado notablemente, sin embargo la complejidad de la naturaleza en los yacimientos naturalmente fracturados nos permite observar una estructura que poseen fracturas y huecos rodeados por matriz de roca y bajo éste concepto no siempre se puede presentar flujo lineal o radial en la transferencia matriz-fractura como se ha considerado en todos los modelos publicados hasta la fecha.

La motivación esencial de la presente tesis es demostrar que las fracturas rodeadas por bloques de matriz en los yacimientos naturalmente fracturados influyen en la respuesta de presión.

El comportamiento de yacimientos naturalmente fracturados se basa en la solución de la ecuación de difusión (Capítulo II). Algunos modelos transitorios como el de Abraham de Swaan¹¹ (1976), Najurieta¹² (1980), Cinco y Samaniego¹⁴ (1982) emplean soluciones analíticas desarrolladas en la teoría de conducción de calor presentadas por Carslaw y Jeager³⁶ (1959) para representar el comportamiento de presión en el bloque de matriz. Por otro lado Kucuk y Sawyer¹³ (1980) mencionan el efecto Klinkenberg en arenas de gas para formaciones naturalmente fracturadas y desarrollan la respuesta de presión en el bloque de matriz de forma esférica y cilíndrica.

Todos los modelos incluyendo el de Rodríguez Nieto¹⁷ (2001) consideran que el bloque de matriz se encuentra rodeado por fracturas, sin embargo esta hipótesis como se menciona anteriormente no siempre puede justificarse.

El objetivo central de esta tesis es obtener, analizar y validar un nuevo modelo para determinar el comportamiento de presión en Yacimientos Naturalmente Fracturados considerando los siguientes conceptos:

Físicamente el modelo de esta tesis difiere de los publicados por que en la interacción matriz-fractura: 1) considera que la fractura esta localizada dentro del bloque de roca de matriz (fractura rodeada por matriz), 2) la fractura es de forma esférica de radio r_f , 3) la matriz también es de forma esférica de radio r_e , este trabajo considera dos dimensiones de matriz: finita e infinita 4) Se considera flujo esférico transitorio²⁵ en la matriz 5) el modelo representa dos transferencias interporosas: matriz esférica – fractura esférica y fractura esférica – fractura radial, 6) flujo radial en la fractura que produce al pozo

En el presente trabajo (Capítulo III) se desarrollan y se presenta la solución de respuesta de presión en fracturas esféricas rodeada por bloque de matriz esférico finito e infinito utilizando el método de Transformada de Laplace y el algoritmo de Stehfest³¹ para obtener la solución de presión en espacio real, se presentan soluciones analíticas aproximadas de comportamiento a tiempos cortos, intermedios y largos.

En el Capítulo IV, "Análisis de resultados", se presentan los resultados de 120 casos analizados y obtenidos por el invertidor numérico.

En el Capítulo V, "Aplicaciones", se presenta la utilidad, comparación y mejoría con respecto a otros modelos.

En el Capítulo VI, "Conclusiones", se enlistan los logros obtenidos y consideraciones de practicas para su aplicación, así como las recomendaciones generales para efectuar análisis de comportamiento de yacimientos en formaciones fracturadas con características similares a las del modelo propuesto.

Se presentan nueve apéndices con desarrollos analíticos de la investigación. El Apéndice A, presenta la solución del Modelo de doble porosidad con flujo interporoso transitorio convolucionado. (Cinco y Samaniego¹⁴, 1982), base indispensable para desarrollar el modelo propuesto.

El Apéndice B y C, muestra la obtención de la función de transferencia matriz-fractura para matriz finita e infinita. Este desarrollo analítico se basó en el trabajo expuesto por Chatas²⁵ en 1966. El Apéndice D y E, muestra el desarrollo matemático del Modelo propuesto de doble porosidad con flujo interporoso transitorio convolucionado y flujo esférico en matriz esférica finita e infinita. En esta sección se presenta el desarrollo analítico de las aproximaciones analíticas a tiempos cortos, intermedios y largos.

En el Apéndice F se expresa la relación que existe entre el gradiente de presión en la frontera interna del sistema matriz fractura y el gasto que entra a la fractura esférica. El Apéndice G se presenta la relación que existe entre el tiempo adimensional de la matriz esférica y el tiempo adimensional de la fractura radial que conduce el fluido al pozo, esta relación se hace en el espacio de Laplace.

Finalmente, los apéndices H e I, muestran las soluciones de caída de presión adimensional en fractura paralelepípeda en función de series de senos y cosenos y funciones exponenciales.

Capítulo II

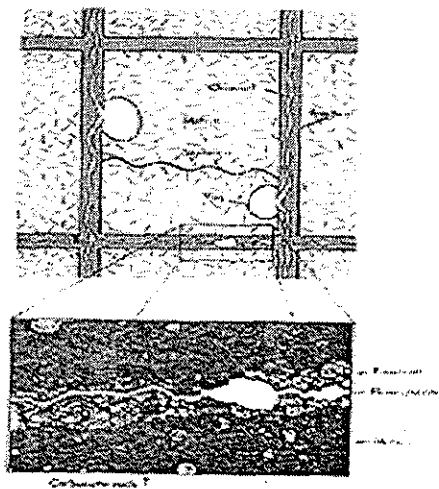
REVISIÓN DE LITERATURA

II.1. CLASIFICACIÓN DE YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

En este capítulo se presenta la definición, clasificación y principales características de los yacimientos naturalmente fracturados.

II.1.1 DEFINICIÓN

Un yacimiento fracturado es un sistema formado por poros y canales intercomunicados; los poros forman el “sistema de matriz” y los canales el “sistema de fractura”, ambos extendidos a través del yacimiento. El sistema fracturado desarrolla un contacto superficial considerable con el sistema de matriz. En la Figura 2-1, se muestra un esquema simple de los elementos de matriz separados por fracturas.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIG 2-1 IDEALIZACIÓN DEL SISTEMA MATRIZ FRACTURA EN UN BLOQUE DE ROCA (L. H. REISS ⁴)

Los Yacimientos Naturalmente Fracturados difieren de los Homogéneos, en varios aspectos: físico, geológico, sistema de explotación y producción entre otros. Durante la explotación y producción de campos con este tipo de formaciones, se ha observado que el comportamiento de los yacimientos varían en función de la distribución de los fluidos, las características de la formación productora y de la localización de las fracturas, en algunas ocasiones se observa que las fracturas tienen baja capacidad de almacenamiento y alta permeabilidad; en otros casos las fracturas solamente almacenan hidrocarburos y actúan como canales con alto flujo hacia el pozo productor. También se a observado que en algunas ocasiones la matriz no es muy permeable, debido a que la compactación de la roca porosa esta directamente relacionada a su rigidez y la tendencia a la fractura, sin embargo su porosidad varia de altos valores a muy bajos.

Por naturaleza, el sistema matriz – fractura tiene una forma y distribución irregular (Figura 2-2A), para poder evaluar las características de la formación productora y su distribución de fluidos en el medio poroso es necesario idealizarlo en estructura y funcionamiento con la finalidad de desarrollar modelos analíticos de comportamiento de flujo utilizados en la simulación numérica de yacimientos y generar de esta manera diferentes esquemas de explotación para elegir el escenario óptimo de desarrollo del campo

El modelo de flujo para yacimientos naturalmente fracturados frecuentemente considera una distribución regular uniforme⁷ (Figura 2-2B), tal que el yacimiento puede ser tratado como un grupo de elementos de bloque de matriz similares y de baja permeabilidad, separados por fracturas que pueden estar cerradas y/o llenas de cemento (mineralizadas), o bien actuar como canales de flujo.

La Figura 2-2A muestra una roca de un yacimiento naturalmente fracturado, formado por: fracturas, bloques de matriz y vùgulos, la Figura 2-2B es la misma roca con el sistema matriz – fractura idealizado.

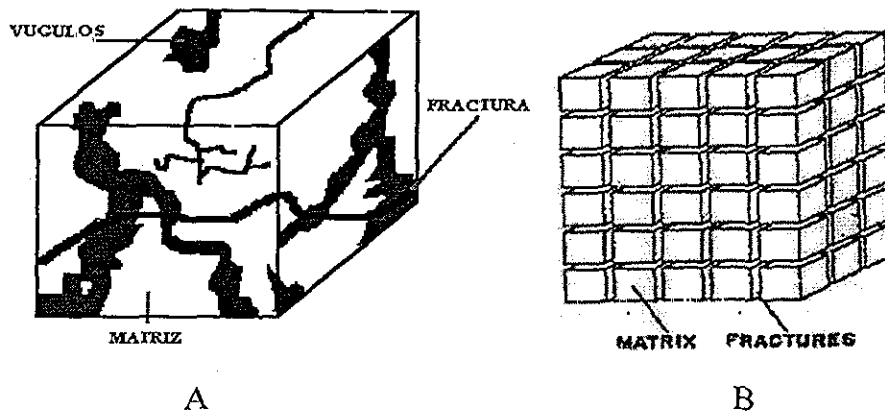


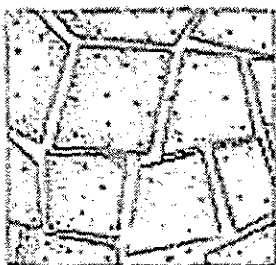
FIG 2-2 IDEALIZACIÓN DE UN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO

Los Yacimientos Naturalmente Fracturados pueden clasificarse desde varios puntos de vista: Geológicos, estructura del sistema matriz- fractura o por el comportamiento del fluido en el sistema poroso.

En este trabajo las referencias y clasificaciones se enfocan a la distribución del fluido en el medio poroso y su interacción con el comportamiento del yacimiento.

II.1.2 CLASIFICACIÓN DE STRELTSOVA

Streltsova²¹, clasificó los yacimientos naturalmente fracturados por la forma en que los fluidos se encuentran distribuidos en los dos medios del sistema matriz - fractura (Figura 2-3A-D):



Yacimiento Fracturado: En este medio, la porosidad de la matriz contiene la mayor cantidad de volumen de fluido almacenado y la porosidad de la fractura constituye la transmisibilidad de la zona. El fluido se produce solamente por las fracturas.

FIG 2-3A

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

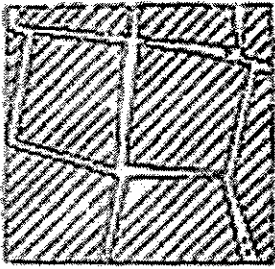
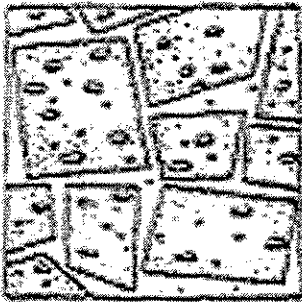


FIG 2-3B

Yacimiento Puramente Fracturado: En este medio la permeabilidad y porosidad de la matriz son despreciables ($k_m=0$, $\phi_m=0$), es decir que el almacenamiento de los fluidos en el yacimiento y la producción hacia el pozo se realiza solamente por las fracturas ($\phi_f=1$).



Yacimiento de Doble Porosidad: El volumen de fluido almacenado tanto en la matriz como en la fractura son del mismo orden de magnitud y la transmisibilidad del sistema es función de las fracturas ($\phi_m=1$)($\phi_f=0$). La respuesta de presión tiene un comportamiento característico de tres segmentos; dos son líneas rectas paralelas semilogarítmicas unidas por una curva transitoria. La respuesta inicial refleja características homogéneas de las fracturas y la respuesta a tiempos grandes refleja la producción del fluido solo por la matriz. La transferencia de flujo de la matriz a las fracturas se representa por la curva transitoria. Sin embargo; se debe considerar que en un análisis de presión no siempre se pueden observar los tres segmentos, debido a que la primera línea recta de respuesta se puede confundir con los efectos de almacenamiento o bien el tiempo de prueba no es suficientemente grande para registrar la respuesta de la matriz.



FIG 2-3D

Yacimiento Heterogéneo: La fractura esta llena de material cuya permeabilidad es mas baja que de la matriz.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Durante algunos años se ha reconocido que los modelos de doble porosidad describen en forma adecuada el comportamiento de los yacimientos naturalmente fracturados y en

algunas ocasiones también los yacimientos multicapas, con características contrastantes de alta permeabilidad.

Algunas características particulares sugieren clasificar los Yacimientos Naturalmente Fracturados en base al comportamiento del modelo de flujo que refleja el yacimiento durante el proceso de producción, casos como formaciones altamente heterogéneas limitados por fracturas laterales conductivas tienen una respuesta de presión con presencia de flujo lineal a tiempos cortos y a tiempos largos cuando la presión transitoria alcanza la distancia del grupo de fracturas, el comportamiento de presión refleja características de flujo radial, estas son características típicas de respuesta de presión en pozos interceptados por fracturas hidráulicas.

II.1.3 CLASIFICACIÓN DE CINCO


Cinco-Ley H.⁵, clasificó los Yacimientos Naturalmente Fracturados en función al comportamiento del modelo de flujo en el medio poroso:

- 1.- Modelo de Yacimientos Homogéneos.
- 2.- Modelo de Yacimiento Compuesto o Región Múltiple.
- 3.- Modelo de Yacimiento Anisotrópico.
- 4.- Modelo de Fractura Simple.
- 5.- Modelo de Doble Porosidad.
- 6.- Modelo de Doble Permeabilidad.


De la Figura 2-4A a 2-4F, se muestra la representación física que cada modelo tiene en el análisis de pruebas de presión considerados durante el proceso de caracterización de Yacimientos Naturalmente Fracturados.

La simbología utilizada, describe cada componente del yacimiento:

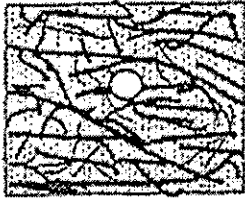
 Matriz

 Matriz de baja permeabilidad

 Pozo

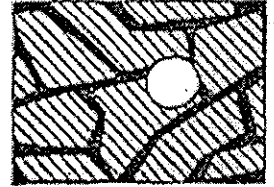
 Fracturas

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



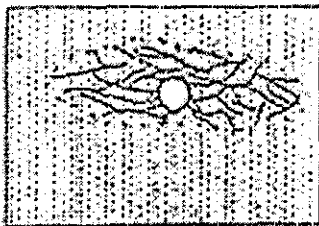
(a)

Modelo de Yacimiento Homogéneo: Este modelo considera que las propiedades del yacimiento son constantes y no varían a través de él. Las fracturas y el bloque de matriz actúan como un solo medio de tal manera que



(b)

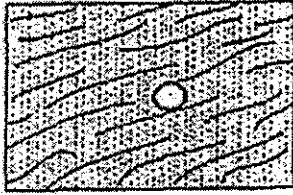
la producción de los fluidos se debe a la expansión simultánea de ambos elementos y a la transferencia de fluidos entre ellos. Este comportamiento se presenta en yacimientos sumamente fracturados con pequeños bloques de matriz (Figura 2-4A) o en yacimientos naturalmente fracturados donde los fluidos están contenidos principalmente en el sistema de fracturas (Figura 2-4B). El comportamiento de presión en estos yacimientos esta controlado por la capacidad de flujo de la formación, (kh) : por la porosidad de la roca (ϕ_m) , de la viscosidad del fluido, μ , y compresibilidad total del sistema c_t .



(c)

Modelo de Yacimiento Compuesto o Región Múltiple: Son yacimientos que están fracturados regionalmente (Figura 2-4C) y pueden considerarse como sistemas compuestos por dos regiones: una zona de alta transmisibilidad y otra de baja. En este caso el yacimiento tiene un comportamiento de un sistema radial compuesto y los pozos producen de la región fracturada con alta productividad que de la región no fracturada. El

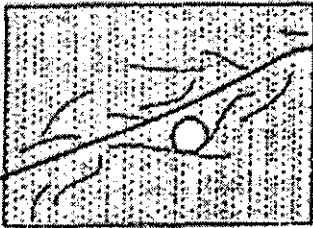
yacimiento esta caracterizado por la capacidad de flujo de cada región $(kh)_1$ y $(kh)_2$



(d)

Modelo de Yacimientos Anisotrópicos: Son Yacimientos Naturalmente Fracturados, que presentan planos paralelos de fracturas (Figura 2-4D), se le llama anisotrópico por que la permeabilidad equivalente en la dirección de las fracturas es mayor que la permeabilidad en la dirección normal de las fracturas. Este medio poroso tiene una permeabilidad máxima

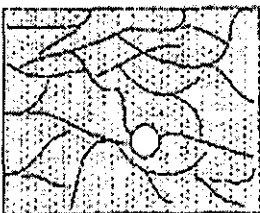
y una mínima. La caracterización de estos yacimientos puede realizarse utilizando las pruebas de interferencia y se recomienda correr mínimo tres pruebas en tres pozos de observación.



(e)

Modelo de Fractura Simple. Este comportamiento se presenta cuando un pozo produce cerca de una fractura grande y es posible obtener altos gastos de flujo. La fractura principal esta representada como una falla permeable que actúa como un canal de flujo que drena las regiones del yacimiento localizadas en las lejanías del pozo (Figura 2-4E). En estos yacimientos existe la posibilidad que la fractura este

comunicada con un acuífero, produciendo a un tiempo dado agua en lugar de hidrocarburo. Los parámetros de caracterización en este sistema comprenden la conductividad de la fractura, $k_f b_f$; la distancia media de la fractura, x_f ; la distancia entre el pozo y la fractura, d_f y la capacidad de flujo de la formación, kh .



(f)

Modelo de Doble Porosidad: Este modelo considera que el yacimiento está compuesto por dos medios: fracturas y bloques de matriz. Las fracturas son los canales de flujo en el yacimiento y los hidrocarburos están contenidos tanto en el bloque de matriz como en las fracturas (Figura 2-4F). Los modelos desarrollados consideran una forma regular de los bloques de matriz y la

transferencia de fluido entre la matriz y la fractura ocurre en condiciones pseudoestacionarias. Los bloques de matriz son representados por cubos, paralelepípedos,

cilindros o esferas. El comportamiento de la doble porosidad se caracteriza por variables adimensionales: difusividad adimensional de la matriz, η_{maD} ; área de interacción adimensional matriz/fractura, $A_{,D}$; daño adimensional, S_{maD} . Otras variables de caracterización común en sistemas de doble porosidad son ω y λ .

II.2 MODELOS DE FLUJO RADIAL PARA YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS

Uno de los puntos importante en el proceso de caracterización de yacimientos es conocer el modelo de flujo de la formación productora y la evaluación de parámetros del medio poroso, en este capítulo se presentan las principales contribuciones de los modelos de flujo que se han desarrollado hasta nuestros días para interpretar pruebas de presión en pozos perforados en yacimientos naturalmente fracturados.

Los modelos de flujo publicados en la literatura han sido desarrollados desde varios puntos de vista, sin embargo, el criterio más importante en la mayoría de ellos es el comportamiento del fluido entre la matriz y la fractura. En esta sección se describen en forma general los principales modelos de flujo radial en las fracturas y el comportamiento pseudo-estacionario y transitorio entre la matriz y la fractura.

II.2.1 FLUJO INTERPOROSÓ PSEUDO-ESTACIONARIO

II.2.1.1 MODELO DE BARENBLATT, ZHELTOV Y KOCHINA⁶ (1960)

Los modelos de flujo para yacimientos naturalmente fracturados se empezaron a formular desde 1960 con el trabajo de Barenblatt & Cols.⁶, considerando flujo pseudo – estacionario entre la matriz y la fractura, ellos fundamentaron los conceptos físicos de transferencia de fluidos en dos medios, derivaron bajo ciertas suposiciones la ecuación básica de transferencia de un líquido en una roca fracturada, también presentan la ecuación general de transferencia de un líquido en un medio poroso con doble porosidad. Un caso particular de estas ecuaciones, es considerar la transferencia de un líquido en un medio homogéneo. A continuación se mencionan los puntos relevantes de éste trabajo.

El modelo representa un sistema fracturado con dos medios porosos, el primero son las fracturas y el segundo los bloques de matriz, las fronteras son impermeables entre ambos medios. Los autores consideran dos presiones y dos gastos de líquido, una presión p_f y una velocidad v_f en las fracturas y una presión p_{ma} y una velocidad v_{ma} en la matriz. El coeficiente de fisuramiento de roca la definen como el volumen de fracturas entre el volumen total de roca.

Conceptos físicos

Consideran un volumen de fluido (V) de los poros de la roca (matriz) hacia las fracturas por unidad de tiempo y por unidad de volumen de roca:

$$q^* = V = \frac{k_{ma} \sigma^2}{\mu} [p_{ma} - p_f] \quad (2.1)$$

σ^2 , es la superficie de las fracturas por unidad de volumen de roca.

La cantidad de materia q , que fluye de los poros de la roca (matriz) hacia las fracturas por unidad de tiempo y por unidad de volumen de roca es:

$$q = \rho q^* = \frac{\rho k_{ma} \sigma^2}{\mu} [p_{ma} - p_f] \quad (2.2)$$

Ecuación de movimiento de un líquido en una roca fractura

Combinando la ley de conservación de masa para el líquido ligeramente compresible en las fracturas con la ley de Darcy y considerando que el volumen de las fracturas es pequeño, la permeabilidad de los bloques de matriz es baja se obtiene:

El comportamiento del fluido en un sistema fracturado:

$$k_f \nabla^2 p_f + k_{ma} \sigma^2 [p_{ma} - p_f] = 0 \quad (2.3)$$

El comportamiento del fluido en los bloques de matriz:

$$[cc_{ma} + c\phi_{ma0}] \frac{\partial p_{ma}}{\partial t} + \frac{k_{ma}\sigma^2}{\mu} [p_{ma} - p_f] = 0 \quad (2.4)$$

Igualando las presiones de la matriz (p_{ma}) de las ecuaciones 2.3 y 2.4, se obtiene la presión de líquido en las fracturas:

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} - \eta \frac{\partial \nabla^2 p_f}{\partial t} = x \nabla^2 p_f \quad (2.5)$$

$$x = \frac{k_f}{\mu [cc_{ma} + c\phi_{ma0}]} \quad (2.6)$$

$$\eta = \frac{k_f}{k_{ma}\sigma^2} \quad (2.7)$$

Ecuación de movimiento de un líquido en un medio con doble porosidad

$$\frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f = [cc_f + c\phi_{f0}] \frac{\partial p_f}{\partial t} - \frac{k_{ma}\sigma^2}{\mu} [p_{ma} - p_f] \quad (2.8)$$

$$\frac{k_{ma}}{\mu} \nabla^2 p_{ma} = [cc_{ma} + c\phi_{ma0}] \frac{\partial p_{ma}}{\partial t} + \frac{k_{ma}\sigma^2}{\mu} [p_{ma} - p_f] \quad (2.9)$$

Casos especiales de solución a la ecuación de flujo transitorio con valores en la frontera en rocas fracturadas

Caso 2.- Infiltración transitoria de un fluido en un pozo com producción a gasto constante

El yacimiento presenta estrato horizontal infinito, de espesor constante h , penetrado por un pozo vertical de radio despreciablemente pequeño, al inicio la presión del líquido en el estrato es constante e igual a P y el fluido empieza a fluir hacia el exterior a un gasto constante Q :

$$\frac{\partial p_f}{\partial t} - \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) \right) = x \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) \quad (2.10)$$

Condición inicial $p_f(r, 0) = 0$ (2.11)

Condición de frontera interna: $\left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=0} = -(1 - e^{-x/\eta})$ (2.12)

Aplicando el método de transformada de Laplace e invirtiendo a espacio real se obtiene:

$$p_f(r, t) = P + \frac{Q\mu}{2\pi k_f h} \int_0^\infty \frac{J_0(vr)}{v} \left[1 - \exp\left(-\frac{v^2 xt}{1 + v^2 \eta}\right) \right] dv \quad (2.13)$$

Para $\eta = 0$

$$p_f(r, t) = P - \frac{Q\mu}{4\pi k_f h} Ei\left(-\frac{r^2}{4xt}\right) \quad (2.14)$$

Los resultados muestran que cuando se incrementa xt/η , la solución 2.14 tiende asintóticamente a la solución 2.14

II.2.1.2 **MODELO DE WARREN Y ROOT⁷(1963)**

Este trabajo se basa en el modelo de Barenblatt y Col.⁶ Los autores definen dos tipos de porosidades en el yacimiento: porosidades primaria y secundaria.

1.-) El medio con porosidad primaria (matriz) es homogéneo e isotrópico y está localizado dentro de un arreglo de forma paralelepípedo rectangular.

2.-) La porosidad secundaria (fractura) es continua, uniforme y ortogonal con orientación paralela a los ejes principales de permeabilidad.

Las porosidades primaria y secundaria son homogéneas y anisotrópicas; el flujo ocurre de la matriz a la fractura, pero no entre matriz y matriz. La fractura rodea al bloque de matriz. La matriz contribuye al volumen de poro pero muy poco a la capacidad de flujo.

La saturación de agua congénita en la porosidad secundaria se considera despreciable.

El modelo considera ϕ_m es independiente de p_f , ϕ_f es independiente de p_m

La variación de ϕ_f con p_f es despreciable.

El flujo de un fluido ligeramente compresible en un yacimiento horizontal infinito, homogéneo y anisotrópico de espesor uniforme, está dado por la siguiente ecuación de flujo en las fracturas en coordenadas radiales:

$$\frac{\partial^2 p_f(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f(r,t)}{\partial r} - \frac{\phi_m \mu c_{im}}{k_f} \frac{\partial p_m(r,t)}{\partial t} = \frac{\phi_f \mu c_{of}}{k_f} \frac{\partial p_f(r,t)}{\partial t} \quad (2.15)$$

Condición inicial: $p_f(r,0) = p_i$ (2.16)

Frontera interna: gasto constante. $\frac{\partial p_f(r_w, t)}{\partial r} = -\frac{q\mu B_o}{2\pi r_w h k_f}$ (2.17)

Frontera externa: yacimiento infinito. $\lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r,t) = p_i$ (2.18)

Las compresibilidades totales están dadas por:

$$c_m \cong c_o + \frac{c_p + c_w s_{wc}}{1 - s_{wc}} \quad (2.19)$$

Existe flujo pseudo-estacionario en los bloques de matriz:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = \alpha \frac{k_m}{\phi_m \mu c_m} [p_f - p_m] \quad (2.20)$$

$$\alpha = 4n(n+2)/l^2 \quad (2.21)$$

donde:

α = Factor de forma, $1/L^2$

n = numero de grupo de fracturas = 1,2,3

l = Característica dimensional de la región heterogénea, L

El factor de forma indica la geometría de los bloques de matriz y controla el flujo entre las dos regiones porosas.

Variables adimensionales

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad r_{eD} = \frac{r_e}{r_w} \quad t_D = \frac{k_f t}{[\phi_m c_{im} + \phi_f c_{if}] \mu r_w^2};$$

$$p_{fD}(r_D, t_D) = \frac{2\pi h k_f}{q \mu B_o} [p_i - p_f(r, t)] \quad p_{mD}(r_D, t_D) = \frac{2\pi h k_f}{q \mu B_o} [p_i - p_m(r, t)]$$

$$p_{wD}(r_D, t_D) = \frac{2\pi h k_f}{q \mu B_o} [p_i - p_f(r_w, t)]$$

$$\lambda = \frac{\alpha k_m r_w^2}{k_f} \quad (2.22)$$

λ representa el flujo interporoso de transferencia matriz – fractura y la heterogeneidad del sistema.

$$\omega = \frac{\phi_f c_{if}}{\phi_m c_{im} + \phi_f c_{if}} \quad (2.23)$$

ω representa el almacenamiento del fluido en las fracturas, la expansión y capacidad de flujo en la fractura.

Almacenamiento de fluido en la matriz es:

$$1 - \omega = \frac{\phi_f c_{ff}}{\phi_m c_{im} + \phi_f c_{ff}} \quad (2.24)$$

Estos dos parámetros caracterizan la desviación de un yacimiento fracturado a uno homogéneo. El valor de $\omega=1$ ó $\lambda = \infty$ representa una distribución de porosidad homogénea o yacimiento homogéneo.

La ecuación de flujo radial en las fracturas en forma adimensional:

$$\frac{\partial^2 p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} - [1 - \omega] \frac{\partial p_{mD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2.25)$$

$$\text{Condición inicial:} \quad p_{fD}(r_D, 0) = 0 \quad (2.26)$$

$$p_{mD}(r_D, 0) = 0 \quad (2.27)$$

$$\text{Frontera interna: gasto constante.} \quad \frac{\partial p_{fD}(1, t_D)}{\partial r_D} = -1 \quad (2.28)$$

$$\text{Frontera externa: yacimiento infinito.} \quad \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0 \quad (2.29)$$

La solución de caída de presión en las fracturas en el espacio de Laplace para un yacimiento infinito con presión inicial uniforme y producción a gasto constante es:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{s\sqrt{sf(s)}K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (2.30)$$

donde:

$$f(s) = \frac{\omega[1 - \omega]s + \lambda}{[1 - \omega]s + \lambda} \quad (2.31)$$

La respuesta de presión en espacio real se muestran de la figura 2.5 a 2.9, estas graficas se obtienen utilizando el invertido numérico de Stehfest³¹,

Se presentan aproximaciones a tiempos cortos, intermedios y largos:

Solución aproximada a tiempos cortos en espacio real:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t_D}{\omega}\right) + 0.809071 \right] \quad (2.32)$$

Solución aproximada a tiempos intermedios en espacio real:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln(t_D) + 0.80908 + E_i\left(\frac{-\lambda t_D}{\omega[1-\omega]}\right) - E_i\left(\frac{-\lambda t_D}{[1-\omega]}\right) \right] \quad (2.33)$$

$$Ei(-x) \cong \ln(x) + 0.5772 \quad \text{para } x < 0.0025 \quad (2.34)$$

Solución aproximada a tiempos largos en espacio real:

$$p_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} [\ln(t_D) + 0.809071] \quad (2.35)$$

La Figura 2-5, muestra la solución de la ecuación 2.25 de caída de presión en las fracturas en espacio real con valores de $\omega = 10^{-3}$ y $\lambda = 10^{-6}$

CASO II

Solución para yacimiento finito

$$p_{fD}(t_D) = \left(\frac{2}{r_{eD}^2 - 1} \right) \left[\frac{1}{4} + t_D + \frac{(1-\omega)^2}{\lambda} \left[1 - e^{-\lambda t_D \omega(1-\omega)} \right] \right] - \frac{3r_{eD}^4 - 4r_{eD}^4 \ln(r_{eD}) - 2r_{eD}^2 - 1}{4[r_{eD}^2 - 1]^2} \quad (2.36)$$

En la solución grafica del modelo (Figura 2-5), se observan dos líneas rectas con la misma pendiente y la desviación del comportamiento respecto a una yacimiento homogéneo queda definida por los parámetros ω y λ . La presión es función del tiempo y ω y λ son propias para cada yacimiento.

La Figura 2-6 muestra el comportamiento del yacimiento naturalmente fracturado para valores de $0 \leq \omega \leq 1$; en el primer caso la porosidad de la matriz o su compresibilidad efectiva desaparece y el yacimiento contiene solamente la porosidad de la fractura presentando un comportamiento homogéneo. La característica más notable es la linealidad del segundo segmento y su desplazamiento vertical igual a $\ln(1/\sqrt{\omega})$, cuando $\lambda \rightarrow \infty$ (Figura 2-7) Se tiene un comportamiento similar.

En la Figura 2-8 se muestra la respuesta de presión adimensional con su derivada para un yacimiento infinito con variación de ω . La Figura 2-9 muestra la respuesta de presión con variación de λ .

COMENTARIOS

La ecuación 2.33 graficada con la solución general ($\omega=0.01$ y $\lambda=1E-5$), es una línea recta que se aproxima a la solución a tiempos cortos, con la aproximación de la integral exponencial definida por la ecuación 2.34.

MODELO DE WARREN Y ROOT

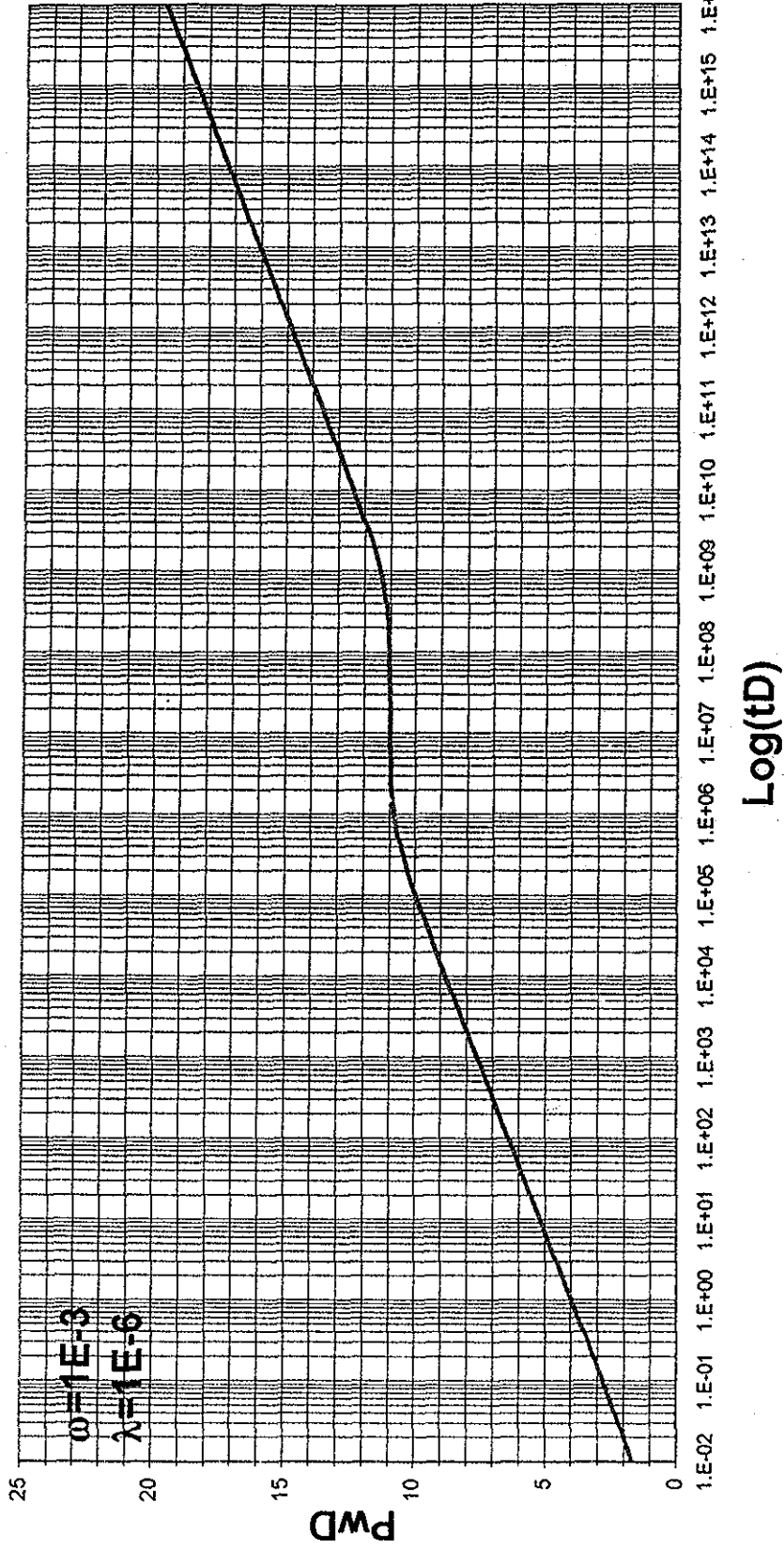


FIG.2-5. SOLUCIÓN PwD vs Log(tD) con $\omega=1E-3$ y $\lambda=1E-6$ PARA YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO.

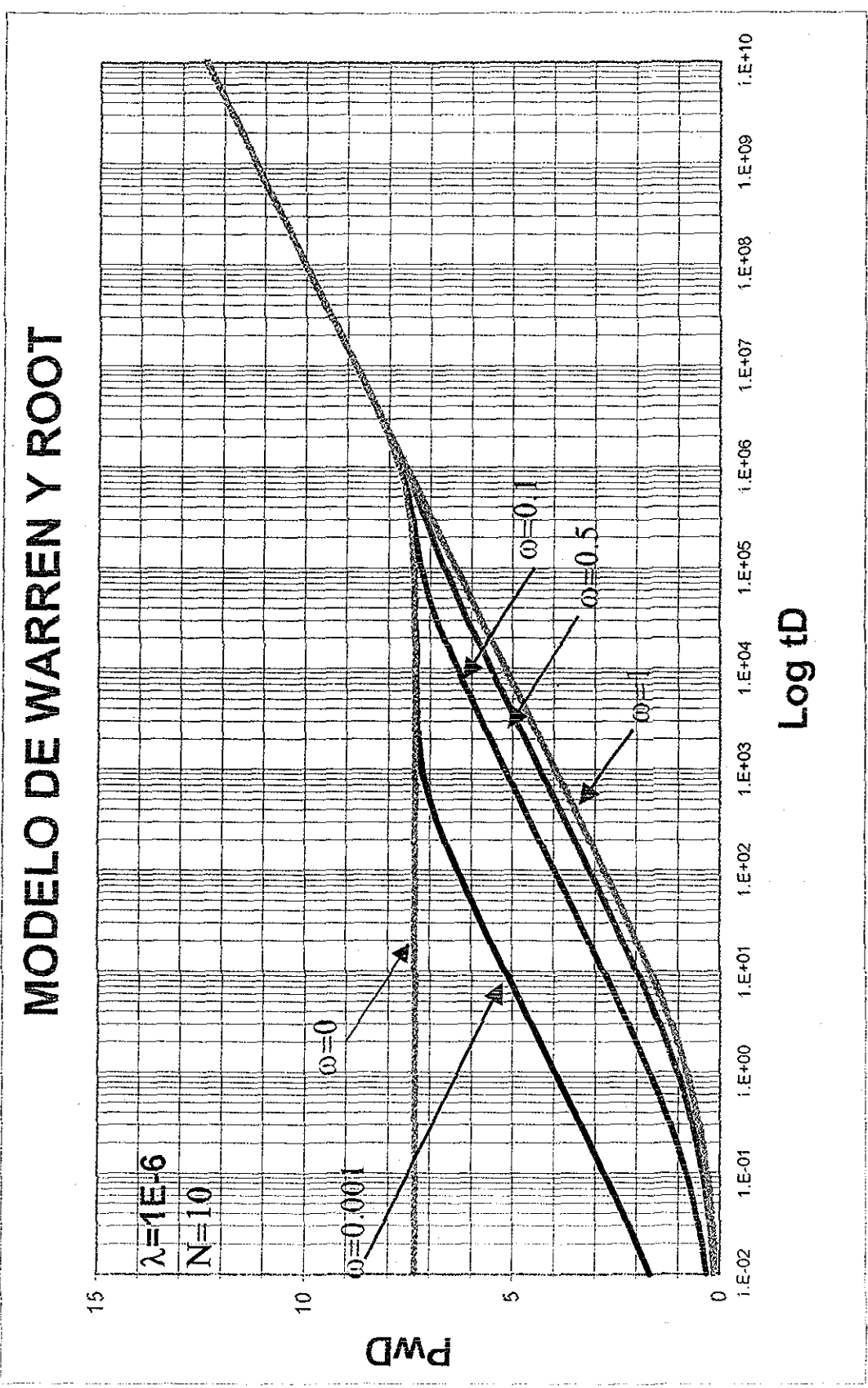
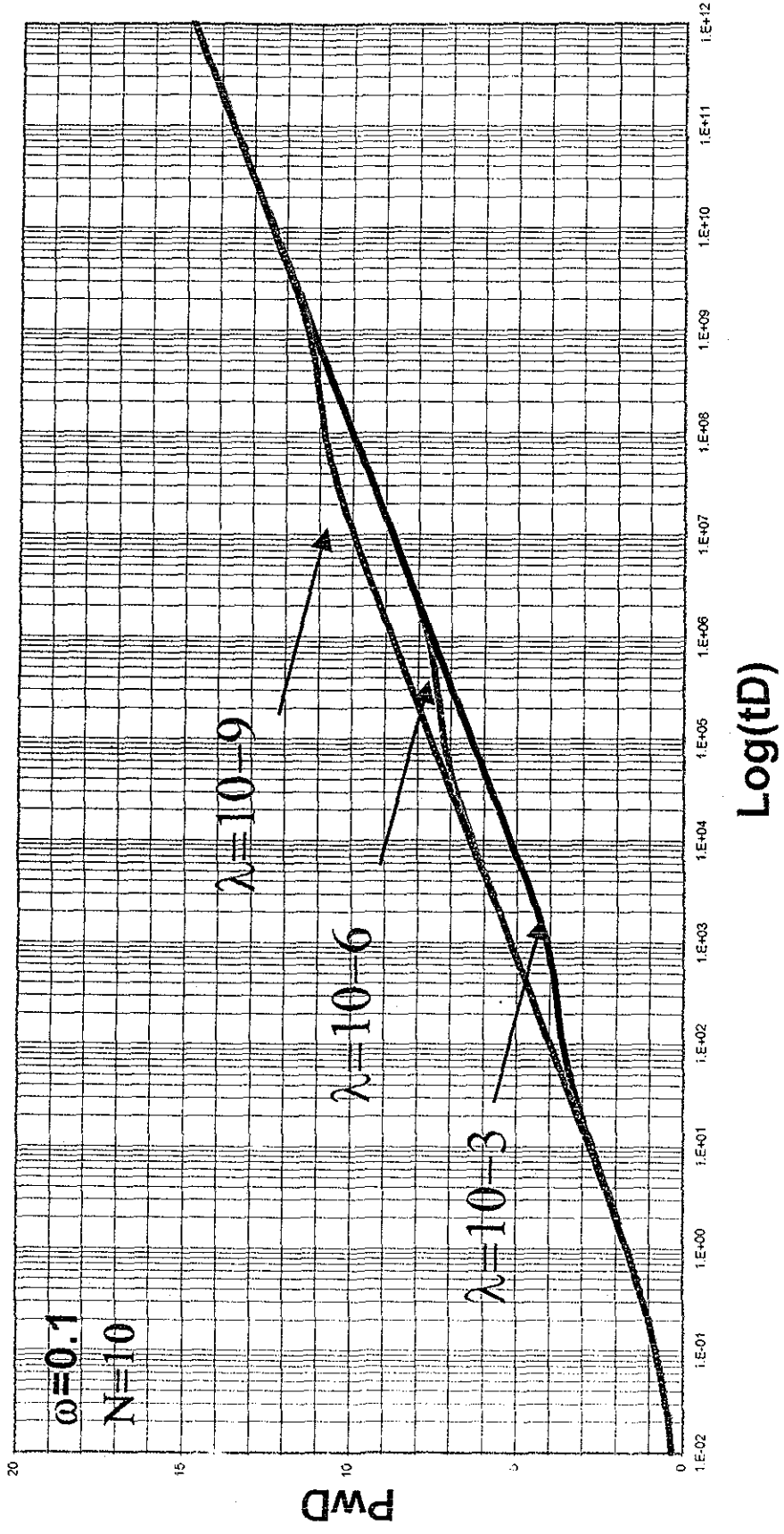


FIG.2-6.PwD vs tD, PARA λ, CONSTANTE Y ω VARIABLE

MODELO DE WARREN Y ROOT



ELABORÓ: ING. JESUS GUERRA ABAD

FIG.2-7 PWD vs tD, PARA ω CONSTANTE Y λ VARIABLE.

MODELO DE WARREN Y ROOT
PRESIÓN DERIVADA

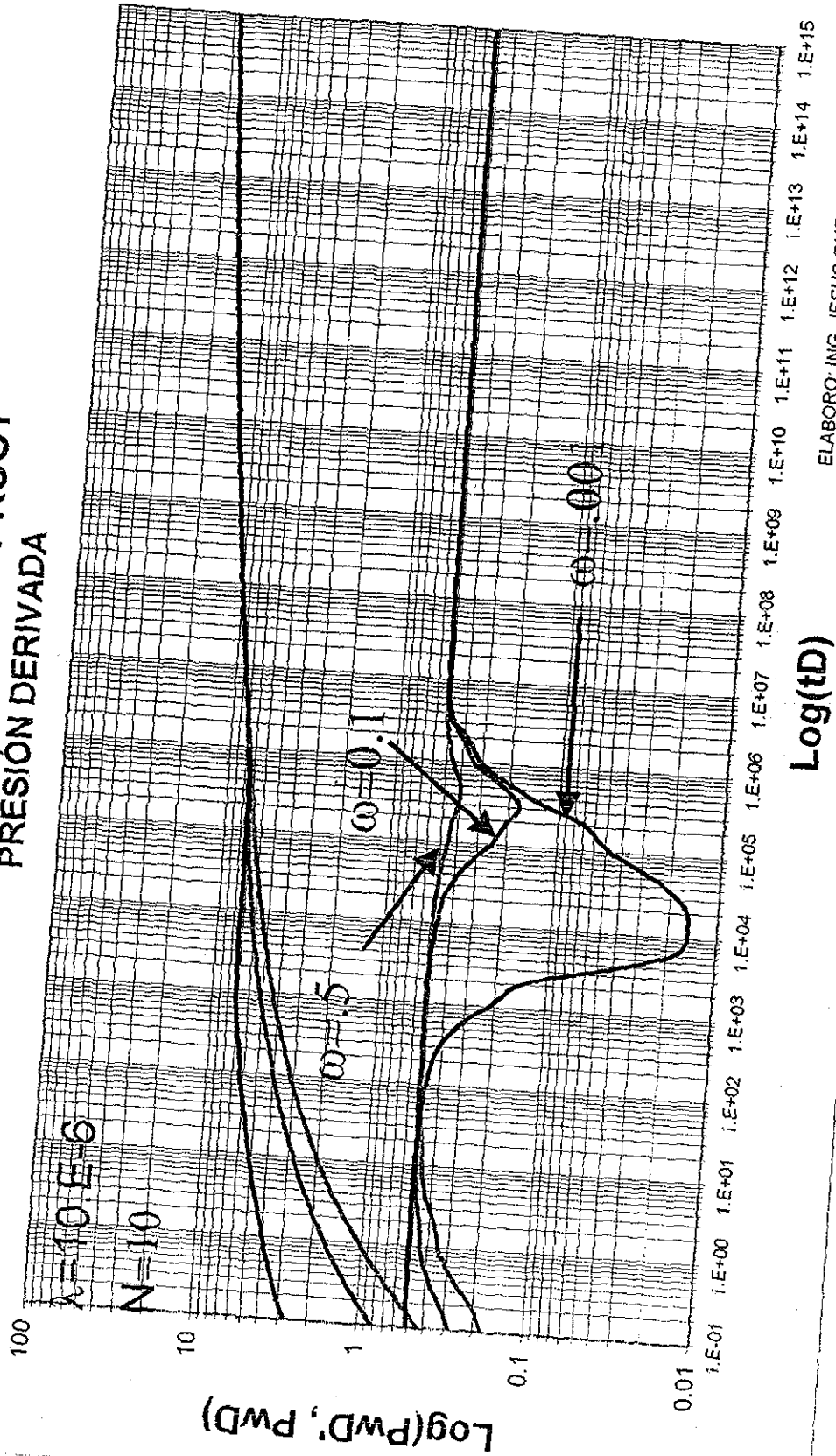
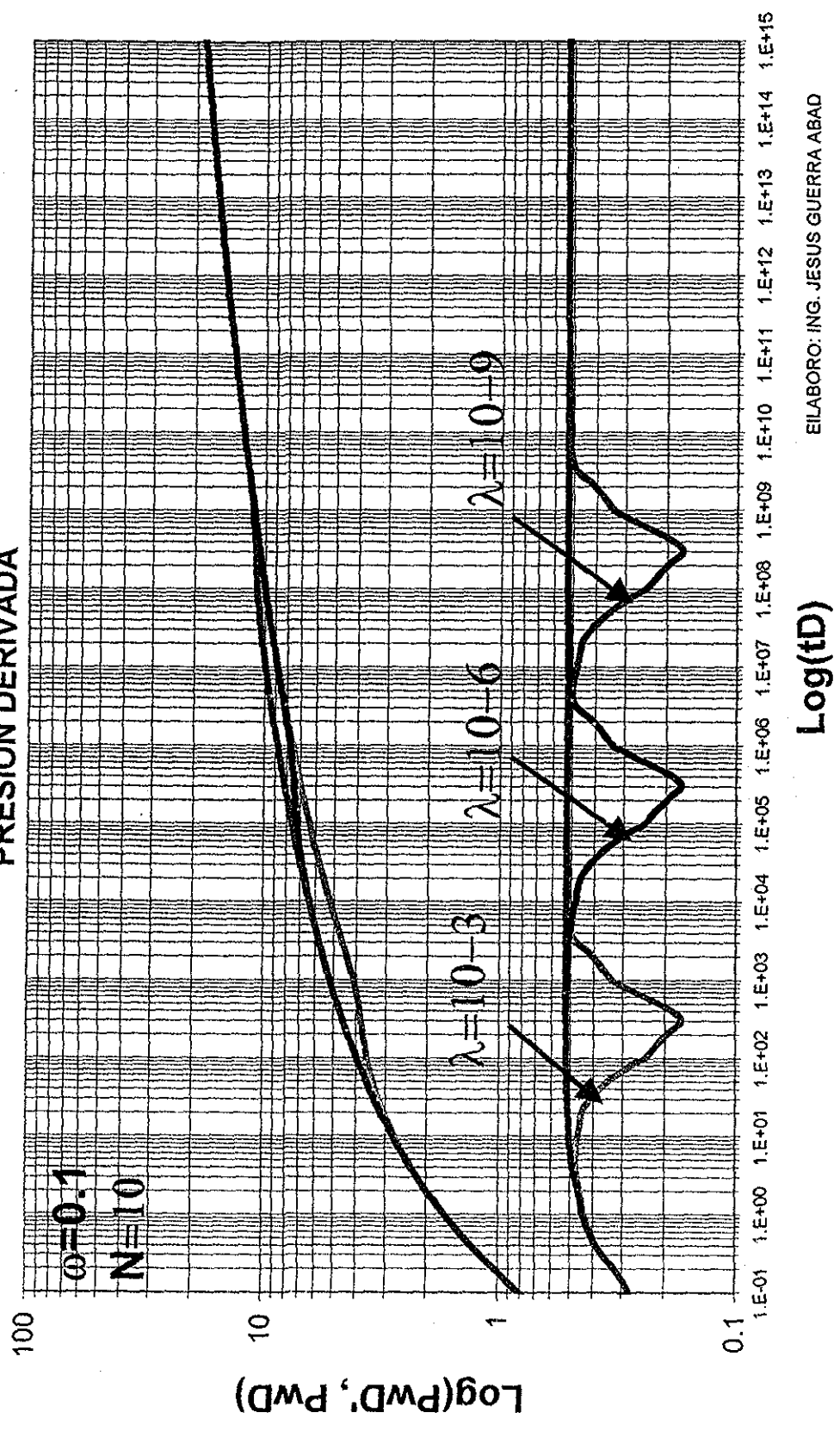


FIG.2-8 RESPUESTA DE PRESION(PwD) Y PRESION DERIVADA (PwD') PARA λ CONSTANTE Y ω VARIABLE

MODELO DE WARREN Y ROOT
PRESIÓN DERIVADA



EILABORO: ING. JESUS GUERRA ABAD

FIG.2-9 RESPUESTA DE PRESIÓN (PwD) Y PRESIÓN DERIVADA (PwD') PARA ω CONSTANTE Y λ VARIABLE

II.2.1.3 MODELO ODEH⁸ (1965)

Odeh considera lo siguiente para el desarrollo de su modelo:

Yacimiento infinito, dos regiones porosas: matriz y fractura, los bloques de matriz actúan como fuentes que alimentan las fracturas, el movimiento del fluido hacia el pozo es únicamente por las fracturas, la capacidad de flujo en la fracturas y el grado de fracturamiento en el yacimiento son constantes, el grado de fracturamiento es el volumen de roca fracturada por unidad de volumen de roca del yacimiento.

Ecuación de flujo radial transitorio de un fluido ligeramente compresible:

$$\frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{\phi_f \mu c_f}{k_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} + \frac{V_m c_m \phi_f \mu}{V_f k_f} \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (2.37)$$

Condición inicial: $p_m(r, 0) = p_i \quad r \geq r_w \quad (2.38)$

$$p_f(r, 0) = p_i \quad r \geq r_w \quad (2.39)$$

Frontera interna: gasto constante. $\frac{\partial p_f(r_w, t)}{\partial r} = \frac{q \mu_f}{2\pi h \beta_0 r_w k_f} \quad t > 0 \quad (2.40)$

Frontera externa: yacimiento infinito. $\lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r, t) = p_i \quad t > 0 \quad (2.41)$

El gasto de los bloques de matriz a las fracturas ocurre en forma pseudo-estacionario:

$$\frac{\partial p_m}{\partial t} = -\frac{\alpha k_m}{\phi_m \mu c_m} [p_m - p_f] \quad (2.42)$$

α Es el factor de forma de Warren y Root⁷.

Variables generales

$$\eta_f = \frac{\phi_f \mu c_f}{k_f}; \quad C = \frac{\alpha k_m}{c_m \phi_m \mu}; \quad \gamma = \frac{V_m c_m \phi_f \mu}{V_f k_f} \quad \lambda = \left[\eta_f s + \frac{\gamma C s}{s + C} \right]$$

Utilizando el método de transformada de Laplace la solución para yacimiento infinito con producción a gasto constante es:

$$\Delta \bar{p}_f(r, s) = \frac{Q K_o(r \sqrt{\lambda})}{s \sqrt{\lambda} K_1(r_w \sqrt{\lambda})} \quad (2.43)$$

donde:

$$Q = \frac{q\mu}{2\pi k_f h \beta_o r_w} \quad (2.44)$$

Invirtiendo la solución analítica a espacio real, se tiene la respuesta de presión para tiempos adimensionales mayores a 100:

$$\Delta p_f = \frac{q\mu}{4\pi k_f h \beta} \left[\ln \left(\frac{4tk_f V_f}{r^2 \mu \phi_f [c_f V_f + c_m V_m]} \right) - 0.5772 - E_i(-Ct) + E_i \left[-Ct \left[1 + \frac{V_m c_m}{V_f c_f} \right] \right] \right] \quad (2.45)$$

Para tiempos muy cortos de flujo, el valor numérico de los dos últimos términos son despreciables y la solución puede aproximarse por:

$$\Delta p = -\frac{q\mu}{4\pi k_f h \beta} E_i \left(\frac{-r^2 \mu (c_f \beta \phi_f + c_m [(1-\beta) \phi_m])}{4k_f \beta t} \right) \quad (2.46)$$

Si $\beta = 1$ en la ecuación anterior, se obtiene la solución de Horner para yacimientos homogéneos:

$$\Delta p = -\frac{q\mu}{4\pi k_f h \beta} E_i \left(\frac{-r^2 \phi \mu c}{4kt} \right) \quad (2.47)$$

Odeh analizó y comparó la solución de presión transitoria para yacimientos naturalmente fracturados (Ecu. 2.46) con la solución para yacimiento homogéneo (Ecu. 2.47) presentada por Horner; el autor al graficar estas ecuaciones no observa dos líneas rectas paralelas semilogarítmicas y de esto concluye que no hay diferencia entre las ecuaciones que describen el comportamiento de yacimientos homogéneos transitorio y los fracturados.

II.2.1.4 MODELO DE MAVOR Y CINCO⁹ (1979)

El modelo de Mavor y Cinco⁹, es una extensión del modelo de Warren y Root⁷; incluye almacenamiento y daño en el pozo, la producción es a presión constante en yacimiento infinito. El trabajo analiza también el yacimiento finito para definir el estado pseudoestacionario y el comportamiento del yacimiento a tiempos grandes.

El modelo considera un yacimiento compuesto por dos medios porosos: primario y secundario. El medio primario es la matriz y el secundario la fractura, éstas tienen una distribución homogénea, el yacimiento es radial horizontalmente con una presión inicial constante, las fronteras son impermeables, la matriz contiene la mayor cantidad de fluido almacenado del yacimiento y fluye al pozo a través de la red de fracturas. La permeabilidad de la fractura es mayor que la permeabilidad de la matriz. La compresibilidad de la roca es constante e independiente de la presión. El fluido fluye en una sola fase y esta descrito por la ley de Darcy. La viscosidad y compresibilidad del fluido son independientes de la presión. Los gradientes de presión y la compresibilidad de los fluidos son despreciables. La densidad del fluido tanto en la matriz como en la fractura se considera igual.

La siguiente ecuación diferencial adimensional describe el flujo radial transitorio:

$$\frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = [1 - \omega] \frac{\partial p_{mD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \omega \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (2.48)$$

Almacenamiento adimensional de la fractura (ω)

$$\omega = \frac{\phi_f c_f}{\phi_m c_m + \phi_f c_f} \quad (2.49)$$

La interacción matriz – fractura se lleva acabo en forma transitoria

$$[1 - \omega] \frac{\partial p_{mD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} = \lambda [p_{fD}(r_D, t_D) - p_{mD}(r_D, t_D)] \quad (2.50)$$

Relación de permeabilidades matriz – fractura (λ)

$$\lambda = \alpha \frac{k_m r_w^2}{k_f} \quad (2.51)$$

La respuesta de presión en el espacio de Laplace para un yacimiento infinito es:

$$\bar{p}_D(r_D, s) = \frac{K_0(r_D \sqrt{sf(s)})}{s \sqrt{sf(s)} K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (2.52)$$

$$f(s) = \frac{\omega(1-\omega)s + \lambda}{(1-\omega)s + \lambda} \quad (2.53)$$

Si $\omega = 1$, entonces $f(s) = 1$ y las ecuaciones 2.52 y 2.53 se reducen a la forma homogénea.

El trabajo analiza el comportamiento de tres casos para un yacimiento infinito:

Caso A - Producción a gasto constante con almacenamiento y daño en el pozo.

$$p_{pD} = \frac{1}{2} \left[\ln t_D + 0.80908 + Ei\left(\frac{-\lambda t_D}{\omega(1-\omega)}\right) - Ei\left(\frac{-\lambda t_D}{(1-\omega)}\right) + 2S \right] \quad (2.54)$$

A Tiempos cortos, la respuesta de presión a es similar al caso homogéneo y es función de t_D / ω :

$$p_{pD}(r_D, t_D) = \frac{1}{2} [\ln(t_D / \omega) + 0.80908 + 2S] \quad (2.55)$$

El daño se puede estimar extrapolando la línea recta de tiempos largos a $\Delta t = 1$ hora

$$S = 1.151 \left[\frac{p_i - p_{1hr}}{m} - \log \frac{k_f}{(\phi_f c_f + \phi_m c_m) \lambda r_w^2} + 3.2275 \right] \quad (2.56)$$

La solución 2.54 se comporta igual a la solución a tiempos cortos cuando $t_D < \frac{\omega(1-\omega)}{3.6\lambda}$

A tiempos largos, la respuesta de presión es similar al caso homogéneo y es función de t_D

$$p_{pD}(r_D, s) = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80908 + 2S] \quad (2.57)$$

La solución 2.54 se comporta igual a la solución a tiempos cortos cuando $t_D \geq \frac{(1-\omega)}{1.3\lambda}$.

Yacimiento Finito

Se considera producción a gasto constante y en estado pseudo estacionario, su análisis permite predecir las características de flujo a tiempos grandes. Los efectos de frontera son importantes antes del final de la línea recta inicial semilogarítmica.

Caso B - Producción a gasto constante en la superficie con almacenamiento y daño en el pozo.

A tiempos grandes, el flujo en la superficie y en la cara del pozo tienden a ser iguales.

El incremento de flujo en la cara del pozo de cero hasta el valor de flujo en la superficie, origina una respuesta de presión a la formación a tiempos cortos, menos que la respuesta que tiene el flujo en la cara del pozo. Después de que el efecto de almacenamiento a terminado la respuesta de presión es igual a la del pozo sin almacenamiento a tiempo cero.

En yacimientos naturalmente fracturados es necesario determinar los datos de presión a tiempos cortos para estimar los parámetros ω y λ .

Caso C - Producción a presión constante con daño en el pozo.

A tiempos cortos el gasto de flujo esta influenciado por el almacenamiento en la fractura y a tiempos grandes por el almacenamiento total del yacimiento infinito.

Para estimar el daño y la transmisibilidad de la formación se debe graficar $1/q$ vs. $\text{Log. } t_p$. Una de las ventajas de las pruebas a presión constante es la eliminación de los efectos de almacenamiento sobre los datos cuando hay flujo en una sola fase a través del tubo a la superficie.

II.2.2. FLUJO INTERPOROSO TRANSITORIO

El flujo interporoso es transitorio cuando la transferencia matriz – fractura se origina de gradientes de presión dentro de la matriz que varía con el tiempo.

II.2.2.1 MODELO DE KAZEMI¹⁰ (1969)

Kazemi representa el comportamiento de flujo en un yacimiento circular finito con pozo en el centro y dos regiones porosas homogéneas e isotrópicas: matriz y fractura, el flujo es en una sola fase, la matriz está rodeada por fracturas, la matriz produce hacia la fractura la fractura hacia el pozo. La matriz tiene baja capacidad de flujo y alto almacenamiento, mientras que las fracturas tienen alta capacidad de flujo y bajo almacenamiento. El flujo en todo el yacimiento es transitorio. Este modelo es un caso particular del modelo de Warren y Root⁷: considera dos distribuciones de fracturas en el yacimiento: 1) fracturas son horizontales y 2) grupo de fracturas horizontales que sustituyen al caso 1, se consideran fracturas en esta posición por que el flujo llega a ser radial y converge al pozo, los bloques de matriz también son horizontales separados por grupos de fracturas que dirigen el fluido al pozo. El modelo analiza la presión transitoria del yacimiento formado por capas horizontales de matriz espaciadas uniformemente por fracturas.

Considerando que las compresibilidades y los gradientes de potencial son pequeños, el flujo queda descrito de la siguiente forma:

Flujo en la matriz

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 p(r, z, t)}{\partial z^2} = \frac{\phi_m \mu c_m}{k_m} \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial t} \quad \text{en} \quad \frac{h_f}{2} < z < \frac{h}{2}; \quad r_w < r < r_e \quad (2.58)$$

$$\text{Condición de frontera interna:} \quad \frac{\partial p(r, 0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r_w < r < r_e \quad (2.59)$$

$$\text{Condición de frontera externa:} \quad \frac{\partial p(r, h/2, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad r_w < r < r_e \quad (2.60)$$

Flujo en la fractura

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_f r \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial r} \right) + \frac{k_m}{h_f / 2} \left(\frac{\partial p(r, h_f^+ / 2, t)}{\partial z} \right) = \phi_f \mu c_f \frac{\partial p(r, z, t)}{\partial t} \quad \text{en} \quad 0 < z < \frac{h_f}{2}; r_w < r < r_e \quad (2.61)$$

$$\text{Condición de frontera interna:} \quad \frac{\partial p(r_w, z, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{h_f}{2} < z < \frac{h_m}{2} \quad (2.62)$$

$$\text{Condición de frontera externa:} \quad \frac{\partial p(r_e, z, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{h_f}{2} < z < \frac{h_m}{2} \quad (2.63)$$

Condición en el pozo

$$\text{Gasto constante:} \quad \frac{\partial p(r_w, z, t)}{\partial r} = -\frac{\mu B}{\pi k_f h_f r_w} q \quad \text{en} \quad 0 < z < \frac{h_f}{2} \quad (2.64)$$

$$\text{Condición inicial:} \quad p(r, z, 0) = p_i \quad (2.65)$$

h_f y h_m representa el espesor de la fractura y la matriz respectivamente.

La solución numérica de la respuesta de presión se obtuvieron utilizando el método iterativo Alternating Direction Implicit (ADI)

El trabajo presenta tres casos de análisis, dos casos incluyen prueba de incremento y decremento, y un tercer caso sólo con prueba de decremento, del cual se concluye que:

1.- La caracterización de yacimientos naturalmente fracturados por el modelo de Warren y Root, se aplica en los casos donde las facturas tienen distribución uniforme y la diferencia de capacidad de flujo entre la matriz y la fractura es grande.

2.- Cuando la diferencia de capacidad de flujo entre la matriz y la fractura es pequeña, el periodo transitorio puede no ser distinguido y las línea paralelas características de doble porosidad pueden están tan cerca que se observa una sola línea de comportamiento de presión (Odhe⁸).

3.- El comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado se aproxima a una yacimiento homogéneo a tiempos largos.

II.2.2.2 MODELO DE SWAAN¹¹ (1976)

Es un modelo de flujo interporoso transitorio de un yacimiento naturalmente fracturado infinito que incluye propiedades de flujo, dimensiones de fractura y bloques de matriz, las fracturas son de alta permeabilidad y con tamaño de bloques de matriz. Este modelo evalúa a partir de pruebas de presión la permeabilidad de la fractura y la porosidad promedio de la matriz por una dimensión característica.

CONSIDERACIONES:

- a) A tiempos cortos el flujo toma lugar sólo en las fracturas.
- b) Los bloques de matriz actúan como fuentes distribuidas uniformemente en el medio fracturado. Este efecto se presenta después de cierto tiempo debido a que la respuesta de los bloques es lenta respecto a la del medio fracturado.
- c) Los bloques de matriz tienen básicamente dos formas de sólidos regulares: placas y esferas, cuya distribución interna de presión Δp_{uma} , y flujo a través de sus superficies esta en función de la pérdida de presión unitaria en la cara de la fractura expuesta al flujo. Algunas de estas funciones están desarrolladas en la teoría de calor en sólidos.
- d) El flujo de los bloques de matriz hacia las fracturas ($q_{ma}(\Delta p_f, t)$) esta descrito por la convolución, debido a que el flujo alrededor del bloque de matriz cambia por la variación de presión en las fracturas que rodean al bloque de matriz.

$$q_{ma}(\Delta p_f, t) = \frac{-2}{A_{ma} h_f} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f}{\partial \tau} q_{uma}(t - \tau) d\tau \quad (2.66)$$

$$q_{uma} = \frac{k_{ma}}{\mu} A_{ma} [-\nabla \Delta p_{uma}] \text{ en la superficie del bloque} \quad (2.67)$$

El autor introduce los parámetros de Área de los bloques de matriz (A_{ma}), flujo en la superficie de los bloques por pérdida unitaria de presión (q_{uma}) y distribución interna de

presión en los bloques cuando se tiene una presión inicial constante y una pérdida de presión unitaria en la superficie para $t > 0$ (Δp_{uma}).

La ecuación de continuidad para el sistema fracturado es:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial r} = \frac{1}{\eta_f} \frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial t} + \frac{2\mu}{k_f A_{ma} h_f} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial \tau} q_{uma}(t-\tau) d\tau \quad (2.68)$$

$$\text{Condición inicial:} \quad \Delta p_f(r,0) = 0 \quad (2.69)$$

$$\text{Condición de frontera interna:} \quad \frac{\partial \Delta p_f(r_w,t)}{\partial r} = \frac{q_w \mu}{2\pi r_w h_f k_f} \quad \text{en} \quad t \geq 0 \quad (2.70)$$

$$\text{Condición de frontera externa:} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta p_f(r,t) = 0 \quad (2.71)$$

La solución de la ecuación 2.68 en el espacio de Laplace es:

$$\overline{\Delta p_f}(r,s) = -\frac{q_w \mu}{2\pi k h} \frac{-1}{s} \ln \left[\frac{\gamma r_w}{2} s^{1/2} \sqrt{\frac{1}{\eta_f} + \frac{2\mu}{k_f A_{ma} h_f} q_{uma}(s)} \right] \quad (2.72)$$

Si la permeabilidad de la fractura es muy grande comparada con la permeabilidad de la matriz en un principio el flujo toma lugar en las fracturas, esto equivale a suponer que el flujo en el bloque de matriz vale cero y que la respuesta de presión en el pozo corresponde al comportamiento homogéneo para el medio fracturado.

Después de cierto tiempo, la presión en el pozo cambia por los efectos de flujo de matriz y la respuesta de presión depende ahora de la forma de matriz (η_v) y del flujo causado por la caída de presión unitaria en la superficie del bloque ($q_{uma}(s)$)

El autor considera que la difusividad hidráulica depende de la forma de la matriz.

Para estratos horizontales infinitos separados por fracturas la difusividad (η_v) y ($q_{uma}(s)$) es:

$$\eta_v = \frac{k_f h_f}{k_m h_m} \eta_m = \frac{k_f h_f}{\mu c \phi_m h_m} \quad (2.73)$$

$$\bar{q}_{uma}(s) = \frac{k_m}{\mu} A_m \frac{h_m}{2\eta_m} \quad (2.74)$$

Para bloques de matriz en forma de esferas:

$$\eta_{sp} = \frac{3k_f h_f}{2\mu c \phi_m r_m} \quad (2.75)$$

$$\bar{q}_{uma}(s) = \frac{2r_m}{\eta_m \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (2.76)$$

Para una distribución de bloques de diferentes formas, tamaños y porosidades se tiene:

$$\eta_{comp} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\eta_f} + \frac{\mu c x_m \phi_m}{k_f h_f} \right)} \quad (2.77)$$

El autor concluye que el modelo presentado no describe analíticamente el periodo transitorio entre las dos líneas, pero si permite calcular el producto kh de las fracturas y el gasto de producción, también considera que además de los parámetros de Warren y Root⁷, es necesario un tercero, el factor de forma.

El modelo caracteriza exclusivamente yacimientos fracturados a través de parámetros de flujos de fluidos.

En una gráfica semi -log de presión vs tiempo se observan dos líneas rectas paralelas, una representa el comportamiento a tiempos cortos y la otra a tiempos largos. A tiempos cortos el flujo toma lugar solo en la fracturas y a tiempos largos el flujo toma lugar en los bloques de matriz. Estas líneas puede ser usadas para calcular el producto kh en las fracturas y el valor promedio de la dimensión característica y su porosidad $\overline{x_{ma} \phi_{ma}}$.

El comportamiento a tiempos largos de un Yacimiento Naturalmente Fracturado es equivalente a un yacimiento homogéneo con difusividad hidráulica (η) constante que depende de las propiedades de las fracturas y de los bloques de matriz.

II.2.2.3 *MODELO DE NAJURIETA*¹² (1980)

Najurieta describe el comportamiento de presión en YNF basado en la solución aproximada por de Swaan¹¹; la idealización del modelo contempla básicamente las mismas suposiciones.

CONSIDERACIONES

El yacimiento esta formado por dos medios porosos: la matriz y la fractura, ambos medios son homogéneos e isotrópicos, el fracturamiento en la matriz es homogéneo (bloques de matriz con la misma geometría), los poros de la matriz y la fractura están llenos de fluido ligeramente compresible, los bloques de matriz actúan como fuentes y están distribuidos uniformemente en el medio fracturado, el fluido hacia el pozo se produce únicamente por las fracturas y el fluido en la matriz es transitorio.

El trabajo considera dos casos de estudios:

CASO 1

Yacimiento formado por estratos: La matriz esta dividida por un grupo de fractura paralelas N , horizontales e igualmente espaciadas.

CASO 2

Yacimiento formado por bloques: La matriz del caso 1 esta subdividida en bloques por una tercera fractura paralela, ortogonal e igualmente espaciada. Hay N fracturas horizontales.

La ecuación de difusión para este medio, considerando la teoría de Swaan¹¹ es:

$$\nabla^2 \Delta p_f = \frac{1}{\eta_f} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} - \frac{\mu}{k_f} Q \quad (2.78)$$

$Q =$ es el término fuente que cuantifica el flujo de la matriz hacia la fractura por unidad de volumen de fractura, depende de las características físicas y geométricas de los bloques de matriz y de los cambios de presión en las fracturas.

La solución a la ecuación 2.78 es la solución de línea fuente para yacimientos infinito uniformemente fracturado válida para $t \geq \tau$ y aproximada para $\tau > t > r^2 / 0.04\eta_{co}$:

$$\Delta p_f = \frac{q_w B_o}{4\pi NT_f} E_i \left(-\frac{r^2}{4\eta_{co} t} \right) \tag{2.79}$$

Las variables N representan el número de fracturas horizontales conectadas al pozo, la transmisibilidad de las fracturas (T_f) y la difusividad hidráulica (η_{co}) compuesta que depende del tiempo y de los parámetros de la matriz:

Estratos
$$\eta_{co} = \frac{T_f}{c_f + c_m \sqrt{\frac{t}{\tau}} \tanh \sqrt{\frac{t}{\tau}}} \tag{2.80}$$

Bloques
$$\eta_{co} = \frac{T_f}{c_f + c_m \left[\sqrt{\frac{t}{\tau}} \coth \sqrt{\frac{\tau}{t} - \frac{t}{\tau}} \right]} \tag{2.81}$$

$$\tau = \frac{h_m^2}{4\gamma\eta_m} \tag{2.82}$$

La Figura 2-10 muestra la gráfica de la ecuación 2.79 y se observa la propagación de la presión en las fracturas durante una prueba de interferencia.

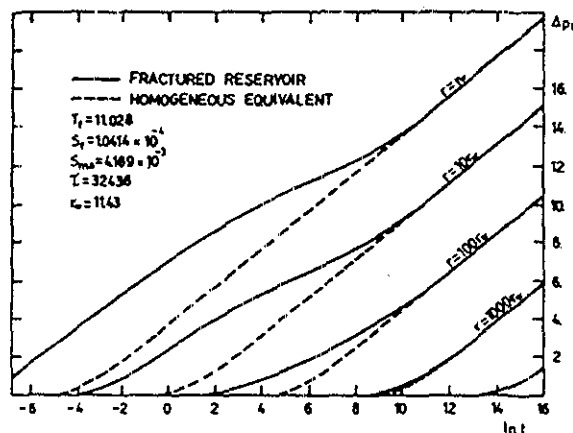


FIG 2-10 PROPAGACIÓN DE LA PRESIÓN EN LAS FRACTURAS DURANTE LA PRUEBA DE INTERFERENCIA-DECREMENTO

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Comportamiento a tiempos largos ($t > \tau$)

$$\Delta p_f = \frac{q_w B_0}{4\pi NT_f} E_i \left(-\frac{r^2}{4\eta_{co} t} \right) \tag{2.83}$$

Estrato $\eta_{co} = \frac{T_f}{c_f + c_m}$ (2.84)

Bloques $\eta_{co} = \frac{3T_f}{3c_f + c_m}$ (2.85)

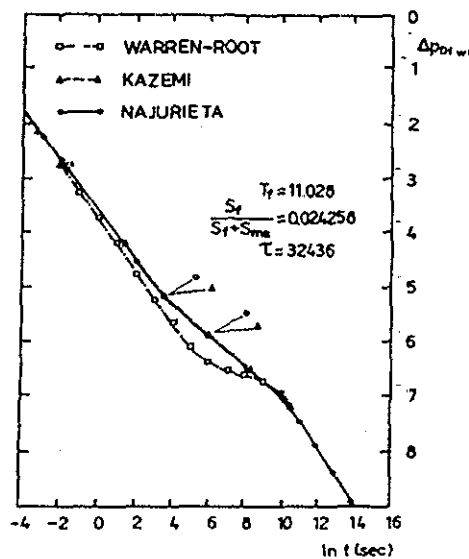
Comportamiento a tiempos cortos ($t \rightarrow 0$)

En este caso, η_{co} se aproxima a η_f y el yacimiento fracturado se comporta como un homogéneo. Este comportamiento es el obtenido por de Swaan y por Odeh.

Comportamiento a tiempos intermedios

A tiempos intermedios, la ecuación 2.83 describe el periodo transitorio entre ambos casos límite, los cálculos muestran que este periodo empieza a tiempos muy cortos.

La Figura 2-11 compara los resultados obtenidos por Warren y Root, Kazemi y el modelo de Najurieta en una prueba de decremento.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FIG 2-11 COMPARACION DE LAS CURVAS DE DECREMENTO PARA LOS MODELOS DE WARREN Y ROOT, KAZEMI Y NAJURIETA

Algunas conclusiones del autor establecen que:

1.- El comportamiento de presión de un yacimiento puede caracterizarse por cuatro parámetros y estos dependen de 10 básicos del mismo yacimiento. Aplicado éste modelo se puede obtener de un análisis de pruebas de presión: transmisibilidad y almacenamiento en la fractura, almacenamiento, tamaño y difusividad de los bloques de matriz.

II.2.2.4 *MODELO DE KUCUK Y SAWYER*¹³ (1980)

El modelo representa el comportamiento de flujo de gas en yacimientos con arcillas fracturadas y la productividad del pozo a partir de parámetros de porosidad y permeabilidad tanto de la matriz como de la fractura y del tamaño y forma de la matriz, flujo transitorio en la matriz. El autor menciona el efecto Klinkenberg en los bloques de matriz y la desorción en las paredes de los poros de la matriz, sin embargo, el modelo presentado no considera éstos efectos en la formulación

Los yacimientos de gas con formaciones Devonianos están formados por fracturas de bajo almacenamiento y alta capacidad de flujo (permeabilidad) y de bloques de matriz que tienen alto almacenamiento y baja capacidad de flujo.

CONSIDERACIONES

El transporte de gas ocurre solamente en las fracturas, la matriz actúa como fuentes distribuidas en el medio fracturado, la presión en la superficie de la matriz es igual a la presión en la fractura, yacimiento infinito isotrópico de espesor constante, todas las propiedades de la formación son independientes de la presión, no se considera efecto Klinkenberg, no se considera desorción dentro de la matriz, los elementos de matriz son cilíndricos de radio r_{ma} y altura h_{ma} o esféricos de radio r_{ma} y la producción del pozo es a gasto constante.

El flujo de gas a través de las fracturas está dado por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} \right) - \frac{\mu}{k_f} q_m(p_f, t) = \frac{1}{\eta_f} \left(\frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} \right) \quad (2.86)$$

Condición inicial: $\Delta p_f(r, 0) = 0 \quad r_w < r < \infty \quad (2.87)$

$$\text{Condición de frontera interna:} \quad \frac{\partial \Delta p_f(r_w, t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi r_w k_f h} \quad t > 0 \quad (2.88)$$

$$\text{Condición de frontera externa:} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Delta p_f(r, t) = 0 \quad t > 0 \quad (2.89)$$

$$\eta_f = \frac{k_f}{\phi_f \mu c_i} \quad (2.90)$$

q_m es el término fuente definido como flujo volumétrico en la cara de la matriz por volumen de matriz, se obtiene resolviendo la ecuación de flujo en la matriz:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p_m}{\partial r} \right) = \frac{1}{\eta_m} \left(\frac{\partial \Delta p_m}{\partial t} \right) \quad (2.91)$$

$$\text{Condición inicial:} \quad \Delta p_m(r, 0) = 0 \quad r_w < r < a \quad (2.92)$$

$$\text{Condición de frontera interna:} \quad \Delta p_m(0, t) = \text{finita} \quad (2.93)$$

$$\text{Condición de frontera externa:} \quad \Delta p_m(a, t) = \Delta p_f(a, t) \quad t > 0 \quad (2.94)$$

La solución de la ecuación 2.91 en el espacio de Laplace para la matriz de forma:

Cilíndrica:

$$\frac{1}{\eta(s)} = \frac{2k_m}{sr_m k_f} \lambda \frac{I_1(\lambda r_m)}{I_0(\lambda r_m)} + \frac{1}{\eta_f} \quad (2.95)$$

Esférica:

$$\frac{1}{\eta(s)} = \frac{3k_m}{sr_m k_f} \left[\lambda \coth(\lambda r_m) - \frac{1}{r_m} \right] + \frac{1}{\eta_f} \quad (2.96)$$

La respuesta de presión en la fractura en espacio de Laplace está dada por:

$$\bar{\Delta p}_f = \frac{q\mu}{2\pi r_w k_f h} \frac{\sqrt{\eta(s)} K_0(r\sqrt{s/\eta(s)})}{s^{3/2} K_1(r_w\sqrt{s/\eta(s)})} \quad (2.97)$$

Invirtiendo analíticamente a espacio real:

$$p_{fd} = \sqrt{\frac{e^{\gamma t} \eta(1/e^{\gamma t})}{r_w^2} \frac{K_0(r/\sqrt{e^{\gamma t}(1/e^{\gamma t})})}{K_1(r_w/\sqrt{e^{\gamma t}(1/e^{\gamma t})})}} \quad (2.98)$$

VARIABLES ADIMENSIONALES

$$p_{fD} = \frac{2\pi k_f h}{q\mu} [p_i - p_f] \quad r_D = \frac{r}{r_w} \quad \lambda_D = \frac{\alpha k_m r_w^2}{r_f}$$

$$k_{mD} = \frac{k_m}{r_m^2} \quad k_{fD} = \frac{k_f}{r_w^2} \quad \omega_f = (\phi\mu c)_f \quad \omega_m = (\phi\mu c)_m$$

La ecuación 2.98 se puede expresar en variables adimensionales:

$$p_{fD} = \sqrt{e^{\gamma} t \eta (I/e^{\gamma} t)} \frac{K_0 \left(r_D / \sqrt{e^{\gamma} t \eta (I/e^{\gamma} t)} \right)}{K_1 \left(I / \sqrt{e^{\gamma} t \eta (I/e^{\gamma} t)} \right)} \quad (2.99)$$

Las funciones de matriz están definidas de la siguiente manera:

Cilindros:

$$\frac{I}{\eta(I/e^{\gamma})} = \frac{2\sqrt{e^{\gamma} t k_{mD} \omega_m}}{k_{fD}} \frac{I_1(\omega_m / e^{\gamma} t k_{mD})}{I_0(\omega_m / e^{\gamma} t k_{mD})} + \frac{\omega_f}{k_{fD}} \quad (2.100)$$

Esferas:

$$\frac{I}{\eta(I/e^{\gamma})} = \frac{3e^{\gamma} t k_{mD}}{k_{fD}} \left[\sqrt{\omega_m / e^{\gamma} t k_{mD}} \coth \left(\sqrt{\omega_m / e^{\gamma} t k_{mD}} \right) - 1 \right] + \frac{\omega_f}{k_{fD}} \quad (2.101)$$

Los autores al final del trabajo concluyen que:

- 1.- El objetivo de este estudio es desarrollar un método de análisis para las arenas de gas Devonianos usando un análisis de presión y un simulador de yacimiento, con este estudio no se observó el comportamiento característico de yacimientos fracturados presentado por Warren y Root⁷.
- 2.- El modelo de Warren y Root⁷ es aplicable sólo para casos especiales.
- 3.- El parámetro de flujo interporoso (λ_D) no es el único para caracterizar la línea recta semilogarítmica.
- 4.- El yacimiento queda caracterizado por cuatro parámetros básicos: k_{mD} , k_{fD} , ω_m y ω_f .

II.2.2.5 MODELO DE CINCO Y SAMANIEGO ¹⁴ (1982)

Este modelo caracteriza los yacimientos naturalmente fracturados a partir de tres variables adimensionales $(\omega, A_{fD}, \eta_{maD})$. El modelo se basa en el flujo transitorio de la matriz – fractura y está representada por la convolución propuesta por de Swaan¹¹. Los resultados muestra que existe además de las dos líneas rectas paralelas una tercera línea recta semi logarítmica con pendiente igual a la mitad de líneas clásicas. Esta línea se presenta en el periodo transitorio siempre que haya flujo lineal en la matriz.

CONSIDERACIONES

Flujo radial transitorio de un fluido ligeramente compresible en un sistema de doble porosidad, el medio posee permeabilidad y porosidad de la matriz (k_{ma}, ϕ_{ma}) , permeabilidad y porosidad de las fracturas (k_{fb}, ϕ_{fb}) y compresibilidad total de la matriz c_{ma} y la fractura c_{f}

El Flujo en la matriz y la fractura es transitorio.

El flujo al pozo ocurre solamente a través de las fracturas.

Flujo radial en las fracturas con término fuente.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + q^* \frac{\mu}{k_{fb}} \tag{2.102}$$

q^* , es el gasto de la matriz a la fractura convolucionado por unidad de volumen de roca

El modelo de flujo radial en las fracturas con trasferencia matriz – fractura convolucionada:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{k_{ma}}{k_{fb}} A_{fb} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} [(\nabla p_{uma})_{sup}(t - \tau)]_{sup} d\tau \tag{2.103}$$

Condición inicial $p_f(r, 0) = p_i$ (2.104)

$$\text{Frontera interna: gasto constante} \quad \lim_{r \rightarrow r_w} \frac{\partial p_f(r, t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{kr_w} \quad (2.105)$$

$$\text{Frontera externa: yacimiento infinito} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r, t) = p_i \quad (2.106)$$

$(\nabla p_{uma})_{sup}$ = Gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura

A_{fb} = Área expuesta al flujo.

Variables adimensionales

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad t_D = \frac{k_{fb}t}{(\phi c_i)_i \mu r_w^2}; \quad \omega = \frac{\phi_{fb} c_{if}}{\phi_{fb} c_{if} + \phi_{mab} c_{imab}} = \frac{\phi_{fb} c_{if}}{(\phi c_i)_i};$$

$$p_{fD}(r_D, t_D) = \frac{k_{fb} r_w}{q\mu} [p_i - p_f(r, t)] = \frac{k_{fb} r_w}{q\mu} [\Delta p_f(r, t)]; \quad A_{fD} = \frac{A_{fb} h_{ma} V_b}{V_{ma}};$$

$$\eta_{maD} = \frac{\eta_{ma} r_w^2}{\eta_{fb} h_{ma}^2} = \frac{k_{ma} (\phi c_i)_i r_w^2}{k_{fb} (\phi c_i)_{ma} h_{ma}^2}$$

La ecuación de flujo en variables adimensionales:

$$\frac{\partial^2 p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + [1 - \omega] A_{fD} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} * F(\eta_{maD}, (t_D - \tau)) d\tau \quad (2.107)$$

$$\text{Condición inicial:} \quad p_{fD}(r_D, 0) = 0 \quad (2.108)$$

$$\text{Condición de frontera interna:} \quad \lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1 \quad (2.109)$$

$$\text{Condición de frontera externa:} \quad \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0 \quad (2.110)$$

$$\text{Estratos:} \quad F(\eta_{maD}, (t_D - \tau)) = 4\eta_{maD} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\eta_{maD})_{estrato} (2n+1)^2 \pi^2 t_D} (t_D - \tau) d\tau \quad (2.111)$$

$$\text{Esferas:} \quad F(\eta_{maD}, (t_D - \tau)) = 4\eta_{maD} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\eta_{maD})_{esfera} n^2 \pi^2 t_D} (t_D - \tau) d\tau \quad (2.112)$$

Aplicando el método de transformada de Laplace se obtiene la solución:

$$\bar{p}_{FD}(r_D, s) = \frac{I}{s^{3/2} \sqrt{\omega + [I - \omega] A_{FD} f(\eta_{maD}, s)}} \frac{K_0(r_D \sqrt{s[\omega + (I - \omega) A_{FD} f(\eta_{maD}, s)]})}{K_1(\sqrt{s[\omega + (I - \omega) A_{FD} f(\eta_{maD}, s)]})} \quad (2.113)$$

Donde:

Función de transferencia de fluido para estratos:

$$f(\eta_{maD}, s) = \sqrt{\frac{\eta_{maD}}{s}} \tanh\left(\frac{\sqrt{s/\eta_{maD}}}{2}\right) \quad (2.114)$$

Función de transferencia de fluido para esferas:

$$f(\eta_{maD}, s) = \sqrt{\frac{\eta_{maD}}{s}} \left[\coth\left(\frac{\sqrt{s/\eta_{maD}}}{2}\right) - 2\sqrt{\frac{\eta_{maD}}{s}} \right] \quad (2.115)$$

SOLUCIONES APROXIMADAS

Tiempos cortos

Espacio de Laplace $s \rightarrow \infty$

$$\bar{p}_{FD}(r_D, s) = -\frac{I}{s} \left[\ln \frac{(\omega s)^{1/2} r_D}{2} + \gamma \right] \quad (2.116)$$

Espacio real en $r_D = 1$ y $t \rightarrow 0$:

$$p_{FD}(r_D, t_D) = \frac{I}{2} \left[\ln \left(\frac{t_D}{\omega} \right) + 0.80907 \right] \quad (2.117)$$

Tiempos grandes

Espacio de Laplace $s \rightarrow 0$

$$\bar{p}_{FD}(r_D, s) = -\frac{I}{s} \left[\ln \frac{s^{1/2} r_D}{2} - \gamma \right] \quad (2.118)$$

Espacio real en $r_D = 1$ y $t \rightarrow \infty$

$$p_{FD}(r_D, t_D) = \frac{I}{2} [\ln(t_D) + 0.80907] \quad (2.119)$$

Tiempos intermedios

Espacio de Laplace

$$\bar{p}_{jD}(r_D, s) = \frac{1}{s} \frac{K_0 \left[\sqrt{(1-\omega)A_{jD} \sqrt{\eta_{maD} s}} \right]}{\left[\sqrt{(1-\omega)A_{jD} \sqrt{\eta_{maD} s}} \right] K_1 \left[\sqrt{(1-\omega)A_{jD} \sqrt{\eta_{maD} s}} \right]} \quad (2.120)$$

Espacio real

$$p_{jD}(r_D, t_D) = \frac{1}{4} \ln t_D - \frac{1}{2} \ln \left[(1-\omega)A_{jD} \sqrt{\eta_{maD}} \right] + 0.2602 \quad (2.121)$$

Esta última expresión define una línea recta semilogarítmica con pendiente igual a la mitad de la pendiente de la primera línea recta. La existencia de esta porción para el periodo de transición fue inicialmente propuesta por Bourdet y Gringarten.

Respuesta de presión con **almacenamiento y daño**

$$\bar{p}_{wD} = \frac{\bar{p}_{jD} + S/s}{1 + SsC_D + C_D s^2 \bar{p}_{jD}} \quad (2.122)$$

donde:

\bar{p}_{jD} = solución para $s=0$ y $C_D=0$.

S = daño adimensional en el pozo

Algunas conclusiones de este trabajo son:

- 1.- El comportamiento de un yacimiento naturalmente fracturado puede obtenerse por tres parámetros: almacenamiento en la fractura ω , difusividad hidráulica adimensional η_{maD} y Área adimensional de la fractura A_{fD} .
- 2.- El comportamiento de flujo transitorio en un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado puede mostrar tres periodos de flujo:
 - A) - Periodo de flujo dominado por el almacenamiento en la fractura.
 - B) - Periodo dominado por el flujo lineal transitorio en la matriz
 - C) - Periodo de flujo dominado por el flujo pseudo estacionario en la matriz.

MODELO DE CINCO Y SAMANIEGO

MATRIZ ESTRATO

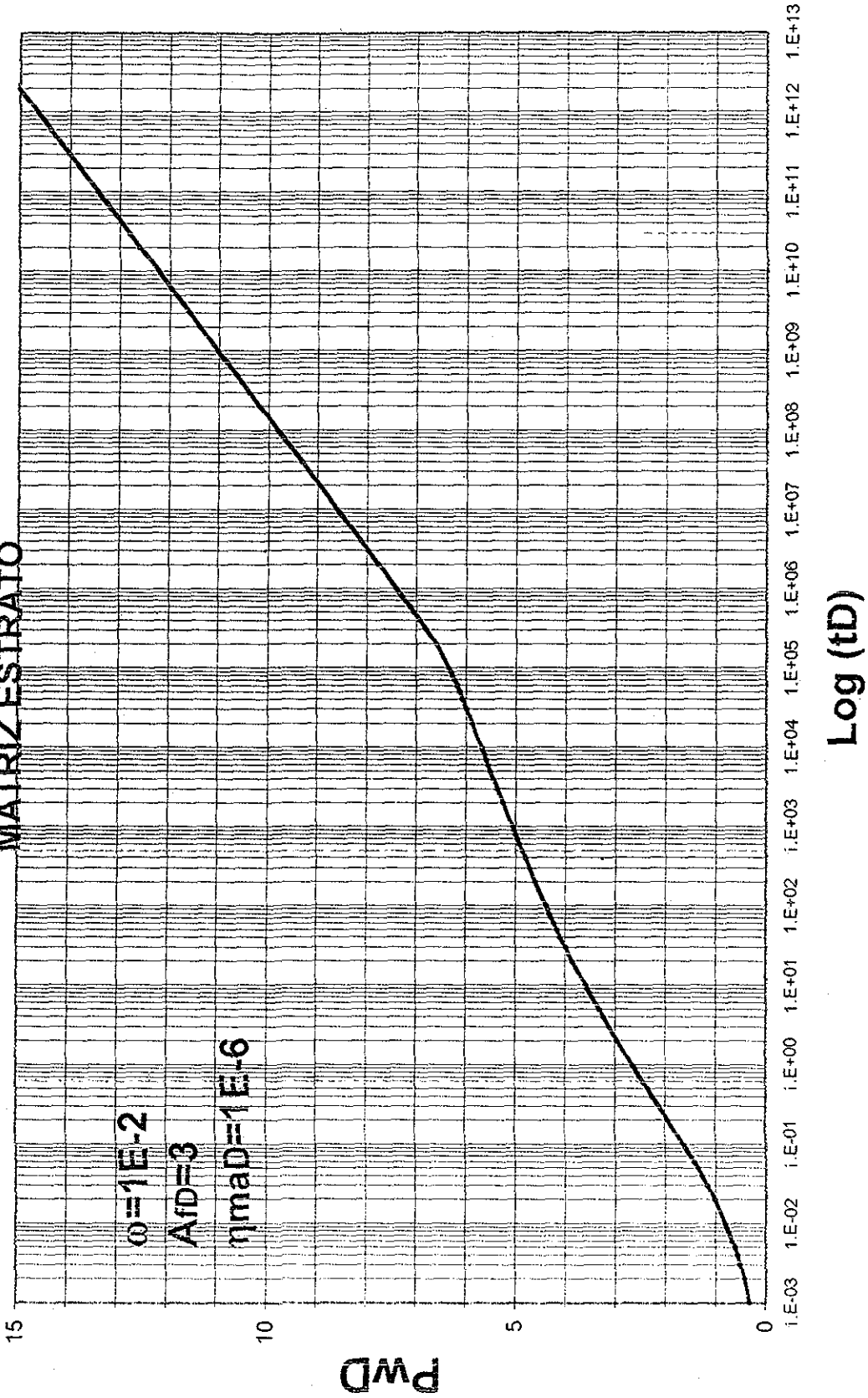
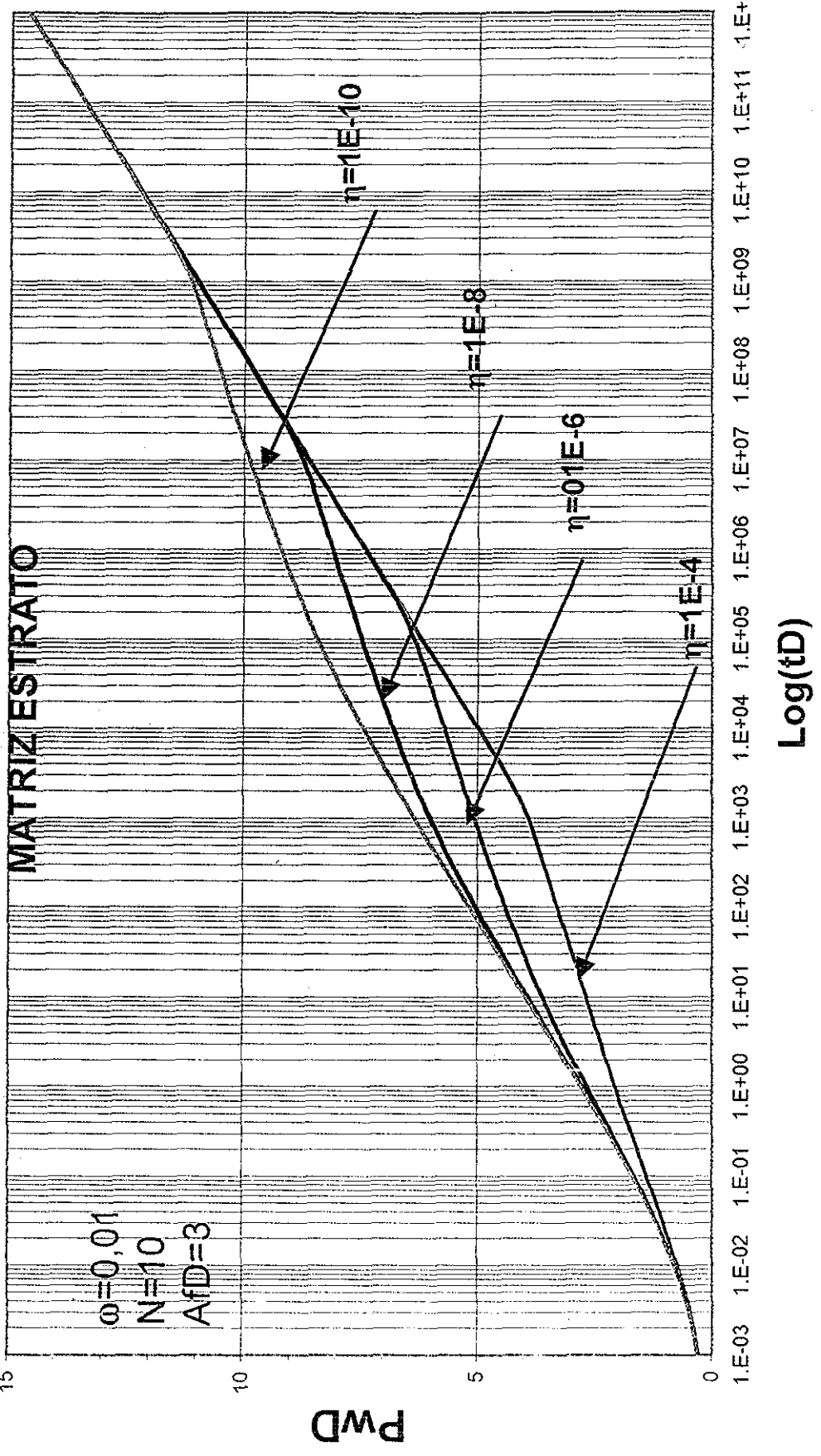


FIG. 2-12 COMPORTEAMIENTO DE PRESION PARA YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO CARACTERIZADO POR TRES PARAMETROS: ω, η_{maD} y A/D

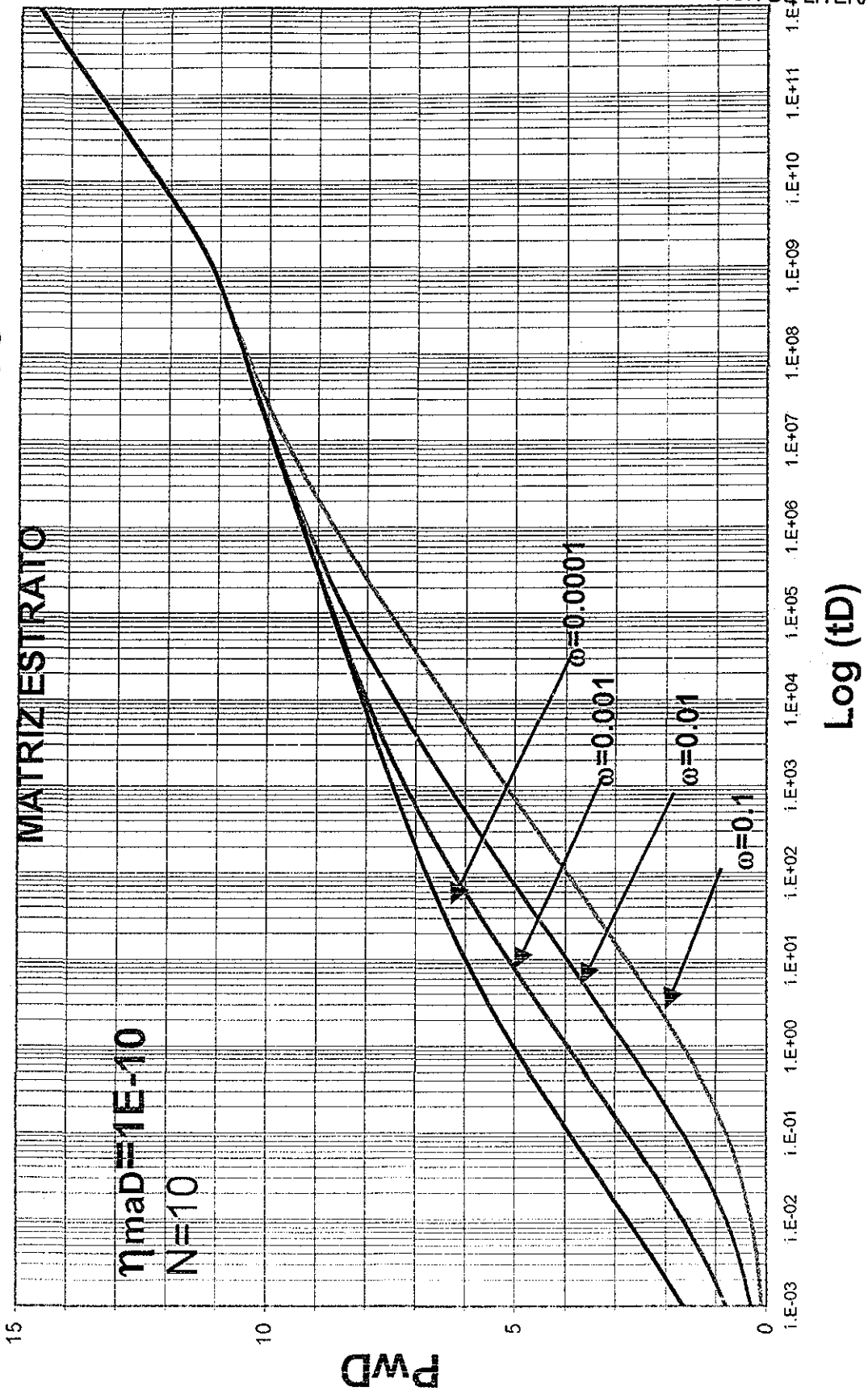
MODELO DE CINCO Y SAMANIEGO



ELABORACION: JESUS GUERRA A.

FIG. 2-13 SOLUCION PWD vs Log(tD), MATRIZ DE ESTRATO PARA ϕ CONSTANTE Y η VARIABLE

MODELO DE CINCO Y SAMANIEGO



ELABORO: ING. JESUS GUERRA A.

FIG.2-14 SOLUCIÓN PwD vs td, MATRIZ ESTRATO PARA η_{mD} CONSTANTE Y ω VARIABLE

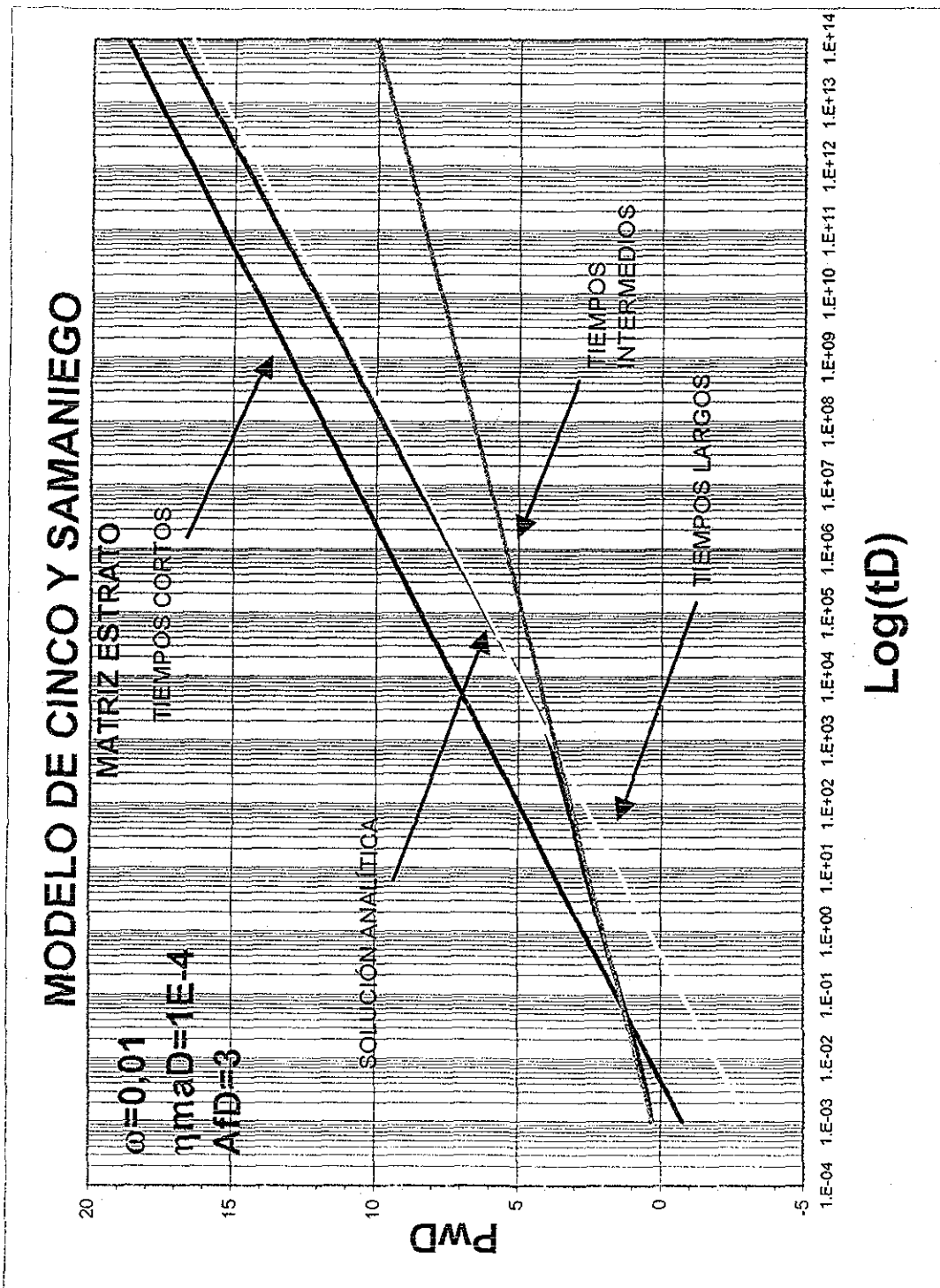
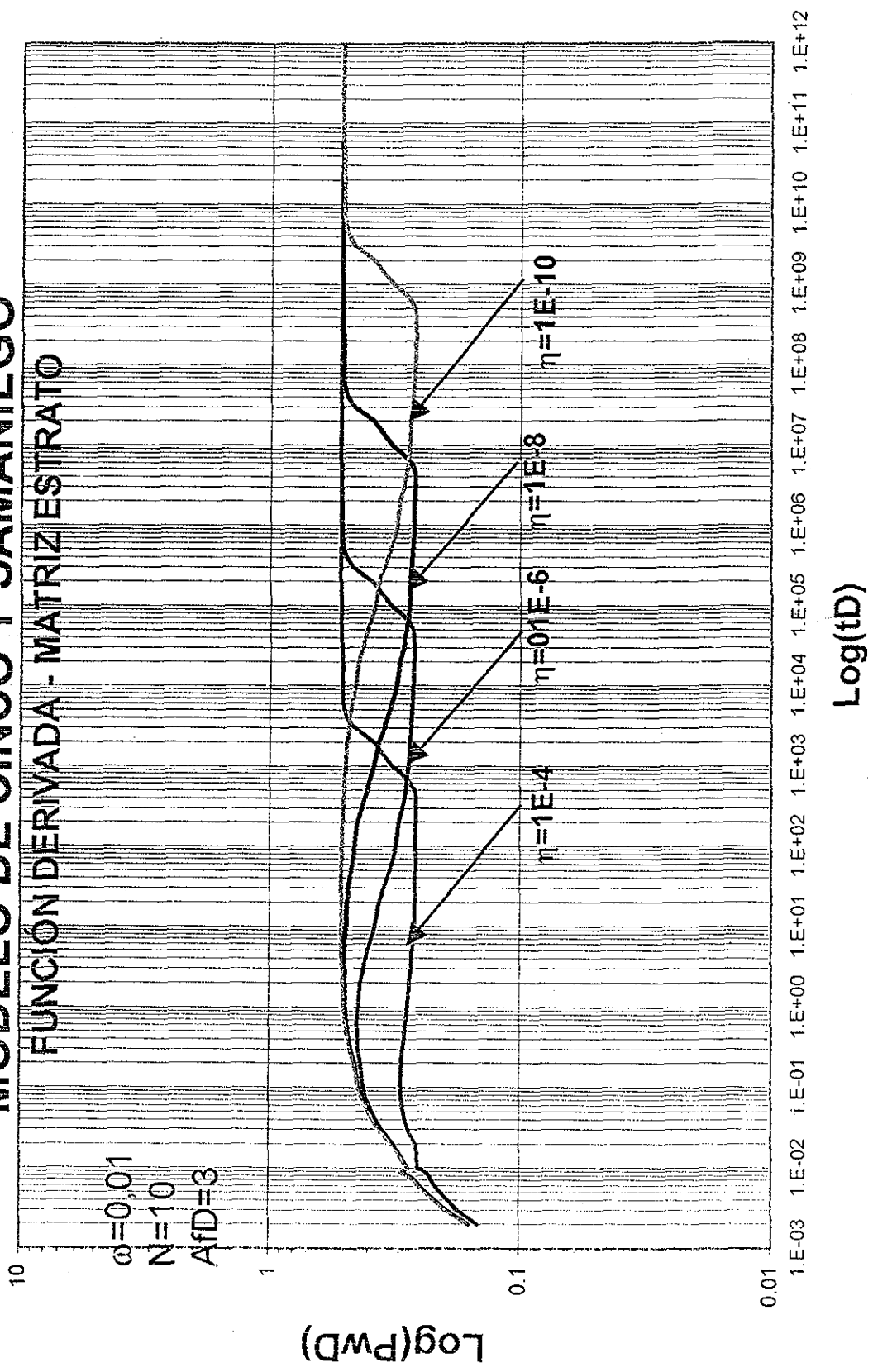


FIG.2-15 COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN GENERAL Y LAS APROXIMACIONES A TIEMPOS CORTOS, LARGOS E INTERMEDIOS

MODELO DE CINCO Y SAMANIEGO

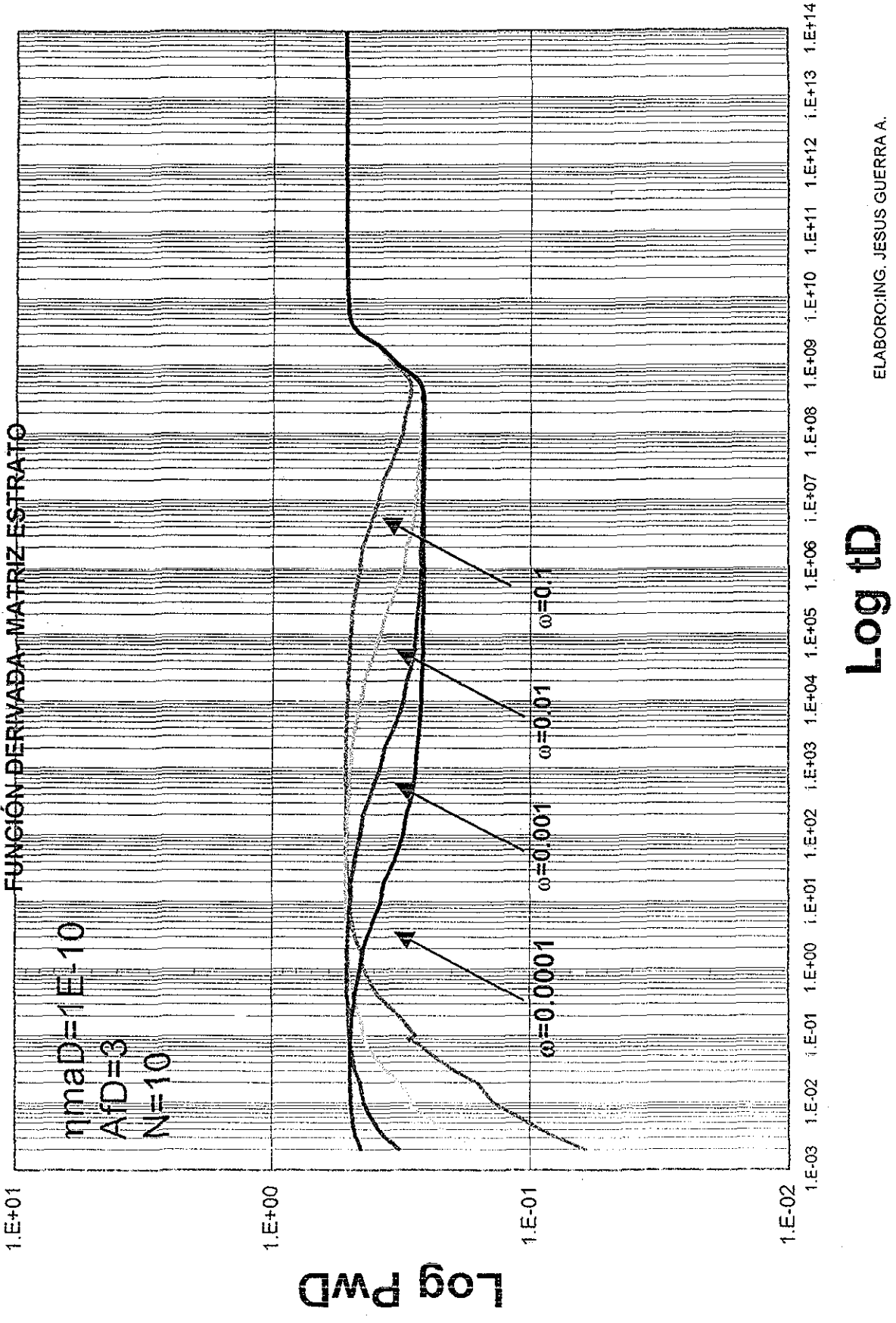
FUNCIÓN DERIVADA - MATRIZ ESTRATO



ELABORO: ING. JESUS GUERRA A.

FIG. 2-16 RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA PARA ω CONSTANTE Y η mA D VARIABLE

MODELO DE CINCO Y SAMANIEGO



ELABORO: ING. JESUS GUERRA A.

FIG. 2-17 RESPUESTA DE PRESION DERIVADA PARA η_{maD} CONSTANTE Y ω VARIABLE

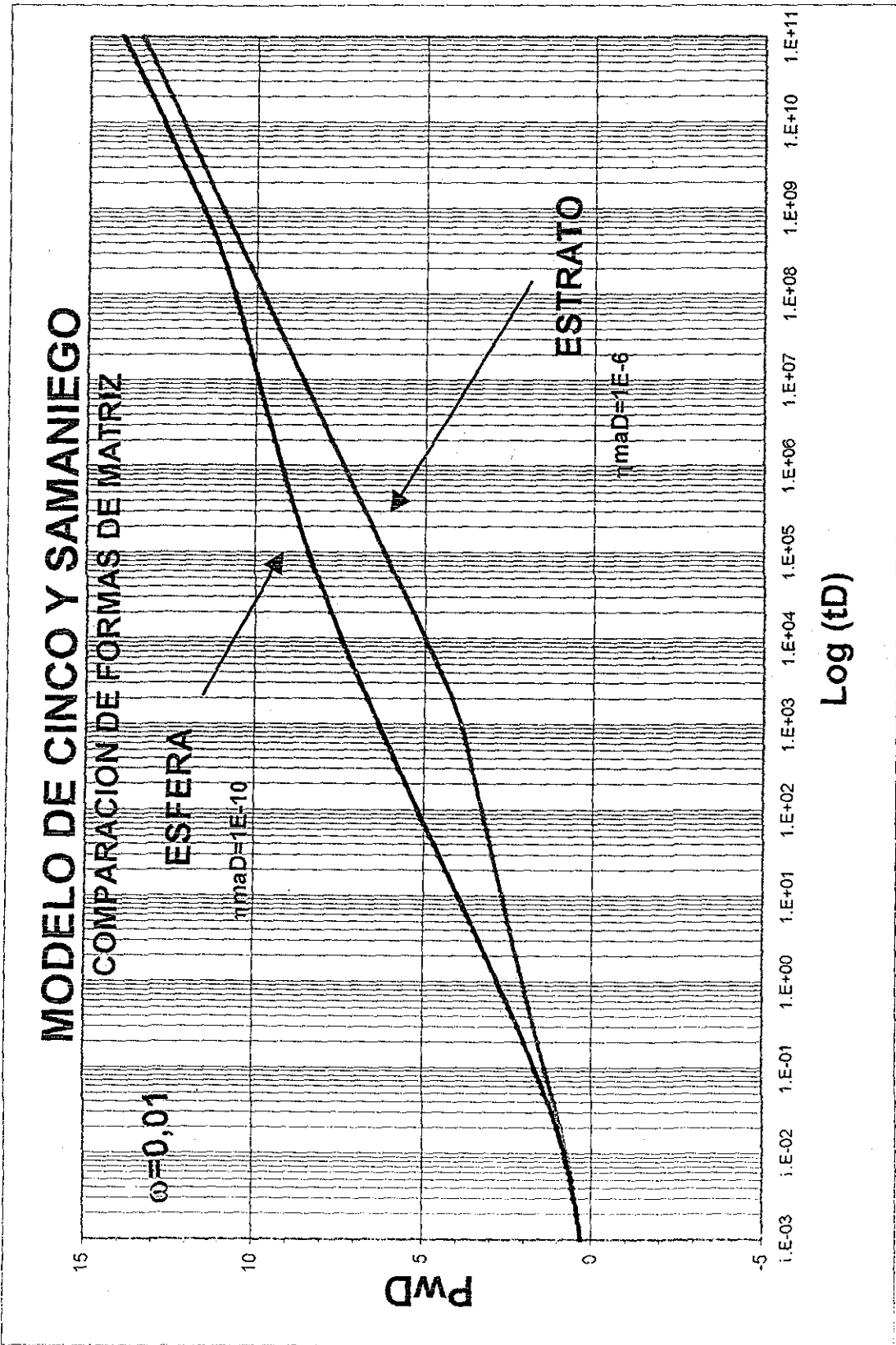


FIG. 2-18 COMPARACION DE RESPUESTA DE PRESION PARA DOS FORMAS DIFERENTES DE MATRIZ: ESTRATO Y ESFERA

II.2.2.6 MODELO DE SERRA, REYNOLDS Y RAGHAVAN¹⁵ (1983)

Este modelo considera flujo transitorio en la matriz, la matriz esta dividida por grupos de fracturas paralelas igualmente espaciadas horizontalmente (estructuras de placas rectangulares), la producción en el pozo es a gasto constante en un yacimiento infinito naturalmente fracturado isotrópico de espesor constante, el fluido es ligeramente compresible de viscosidad constante, las fronteras superiores e inferiores del yacimiento están cerradas y el radio de drene es infinito. La producción hacia el pozo es por las fracturas y en una sola dimensión (plano z), se considera una región con daño de espesor infinitesimal y efectos de almacenamiento despreciables.

Ecuación de flujo radial en las fracturas:

$$\frac{\partial p^2_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{\lambda'}{3} \frac{\partial p_{mD}(l, t_D)}{\partial z_D} = \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad 1 \leq r_D < \infty \quad (2.123)$$

Condición inicial: $p_{fD}(r_D, 0) = 0$ (2.124)

Condición de frontera interna: $\lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1$ (2.125)

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0$ (2.126)

Ecuación de flujo lineal en la matriz

$$\frac{\partial p^2_{mD}(z_D, t_D)}{\partial z_D^2} = \frac{3\omega'}{\lambda'} \frac{\partial p_{mD}(z_D, t_D)}{\partial t_D} \quad 1 \leq z_D < \infty \quad (2.127)$$

Condición inicial: $p_{mD}(z_D, 0) = 0$ (2.128)

Condición de frontera interna: $\frac{\partial p_{mD}(0, t_D)}{\partial z_D} = 0$ (2.129)

Condición de frontera externa: $p_{mD}(l, t_D) = p_{fD}(r_D, t_D)$ (2.130)

El eje de referencia está a la mitad del bloque de matriz:

Definiciones

$$\omega' = \frac{\phi_m c_m h_m}{\phi_f c_f h_f}; \quad \lambda' = 12 \frac{k_m h_m r_w^2}{k_f h_f h_m^2}; \quad 1 + \omega' = \frac{\phi_f c_f h_f + \phi_m c_m h_m}{\phi_f c_f h_f}; \quad h = n[h_f + H]$$

Variables adimensionales

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad z_D = \frac{z}{H} \quad t_D = \frac{k_f t}{\phi_f \mu c_f r_w^2}; \quad p_{pD}(r_D, t_D) = \frac{k_f h_f n}{q\mu} [p_i - p_f(r, t)]$$

$$p_{mD}(z_D, t_D) = \frac{k_f h_f n}{q\mu} [p_i - p_m(z, t)] \quad p_{wD}(t_D) = \frac{k_f h_f n}{q\mu} [p_i - p_f(r_w, t)]$$

La solución en el pozo en espacio de Laplace es:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s} \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{\sqrt{sf(s)} K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (2.131)$$

donde:

$$f(s) = 1 + \sqrt{\frac{\lambda' \omega'}{3s}} \tanh\left(\sqrt{\frac{3\omega' s}{\lambda'}}\right) \quad (2.132)$$

La variable ω de Warren y Root⁷ esta relacionada con la variable ω' de este modelo por la ecuación siguiente:

$$\omega' = \frac{(1 - \omega)}{\omega} \quad (2.133)$$

La aproximación a tiempos cortos es:

$$p_{wD} = 1.151 [\text{Log} t_D + 0.351] \quad (2.134)$$

La aproximación a tiempos intermedios es:

$$p_{wD} = \frac{1}{4} \left[\ln t_D + 1.0409 - \ln\left(\frac{\lambda' \omega'}{3}\right) \right] \quad (2.135)$$

La aproximación a tiempos cortos se puede determinar de las dos formas siguientes:

$$p_{wD} = 1.151 [\text{Log} t_D + 0.351 - \text{Log}(1 + \omega')] \quad (2.136)$$

$$p_{wD} = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.80907 - \ln(1 + \omega')] \quad (2.137)$$

La forma gráfica de la solución general y de las aproximaciones a tiempos cortos, intermedios y largos se presentan en las siguientes figuras:

La Figura 2.19 muestra el comportamiento de presión de un yacimiento naturalmente fracturado caracterizado por las variables w y l , propuestos por el modelo de Serra, Reynolds y Raghavan. En esta figura se observan las dos líneas rectas semilogarítmicas características del comportamiento de formaciones fracturadas (Warren y Root 7).

Con la finalidad de comparar la variación de los dos parámetros, se desarrollaron las Figuras 2.20 y 2.21. En la primera, se mantiene constante el valor de $\omega' = 1000$ y varía el valor de λ' , de 10^{-5} a 10^{-9} . En la segunda gráfica se observa el caso contrario, $\lambda' = 10^{-7}$ permanece constante y ω' toma tres valores 10, 100 y 10,000.

En la Figura 2.22 se muestra la gráfica de la solución general y las soluciones aproximadas a tiempos cortos, intermedios y largos de finidas por las ecuaciones 2.134, 2.135 y 2.136 respectivamente, se observa un ajuste adecuado para los valores de $\omega' = 10^4$ y $\lambda' = 10^{-7}$.

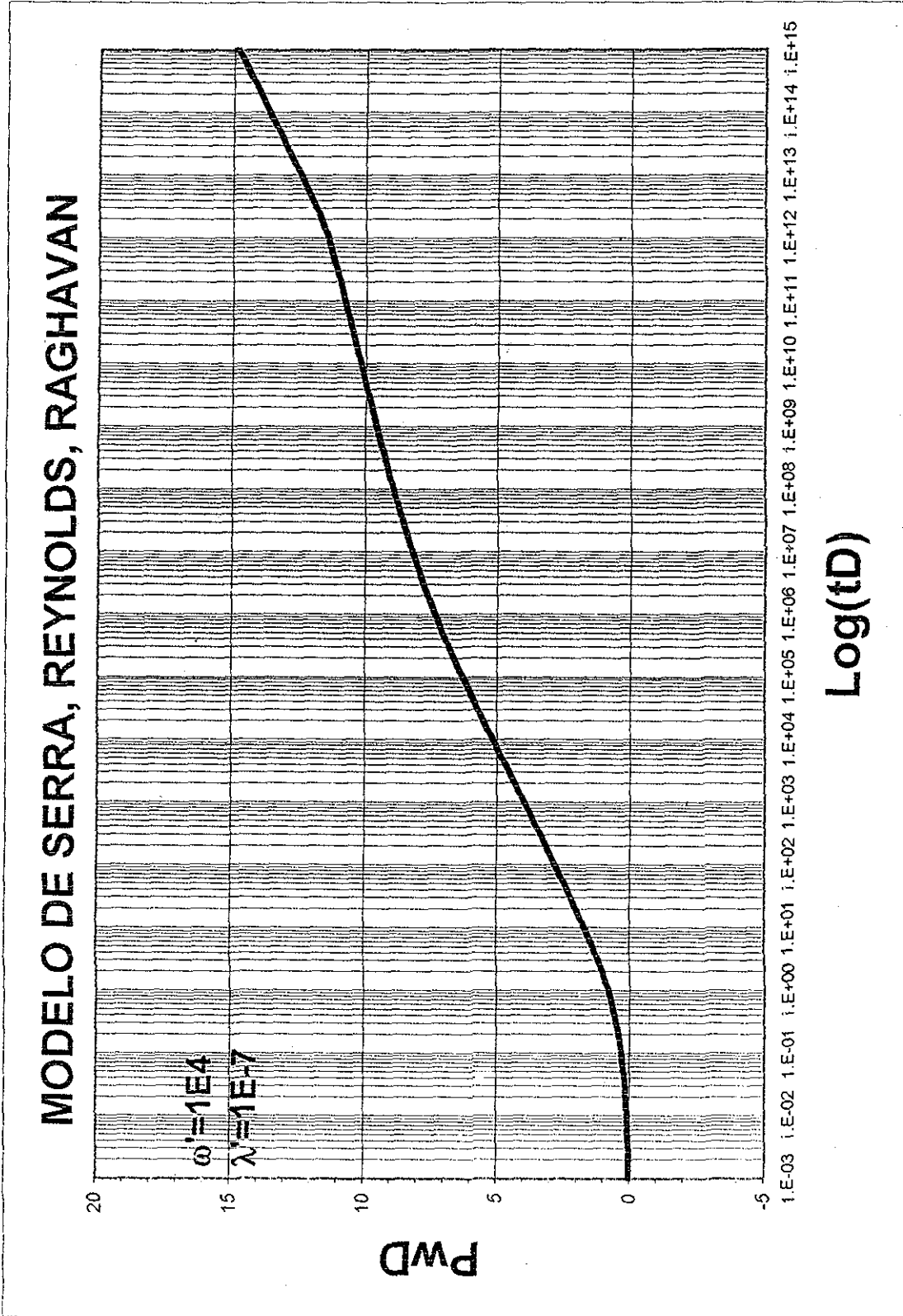


FIG.2.19 COMPORTAMIENTO DE PRESION DE UN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO, CARACTERIZADO POR LOS PARAMETROS ω' Y λ' PROPUESTOS POR SERRA, REYNOLDS Y RAGHAVAN

MODELO DE SERRA, REYNOLDS, RAGHAVAN

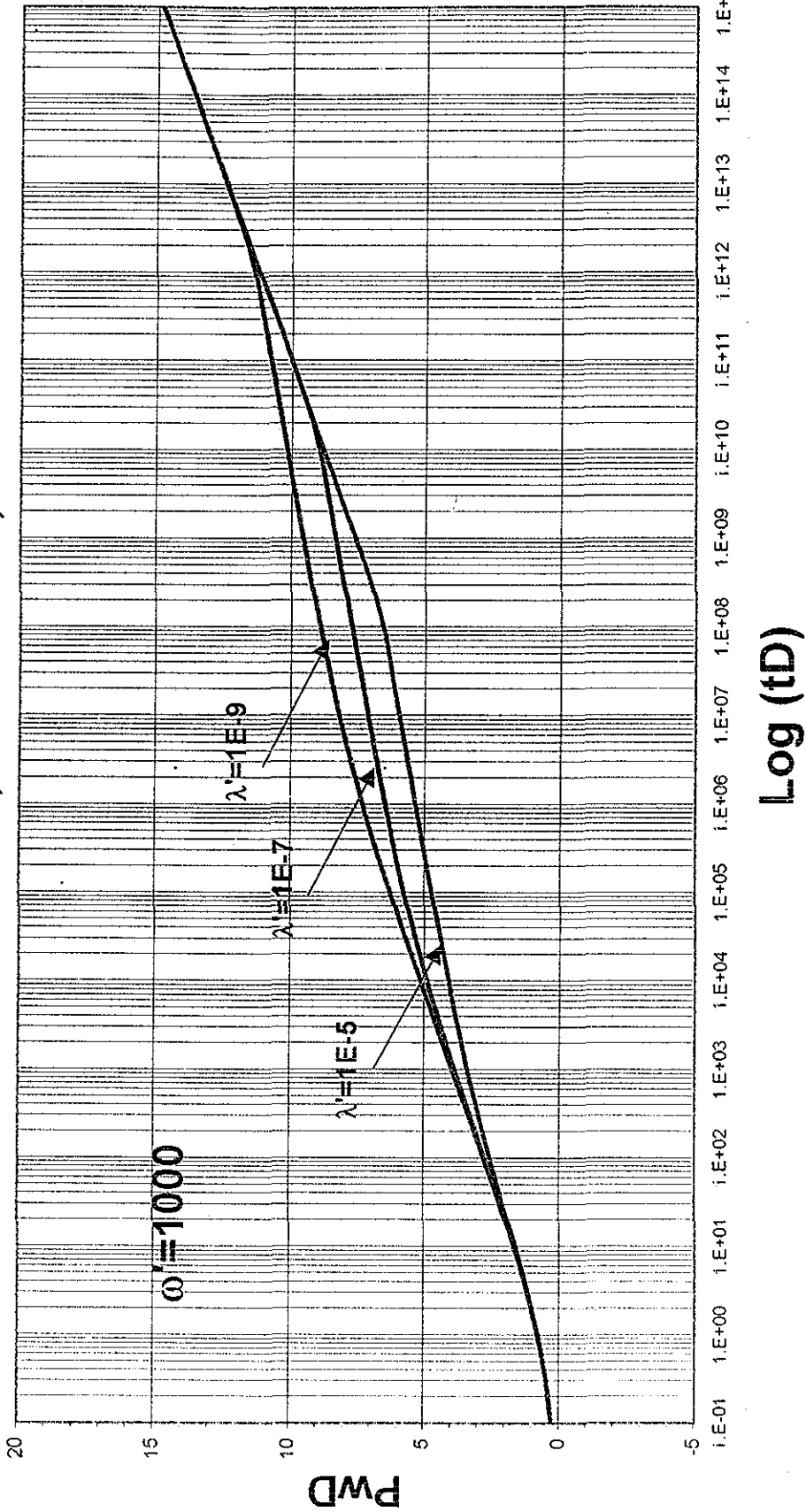


FIG.2.20 SOLUCIÓN PWD vs tD, PARA ω' CONSTANTE Y λ' VARIABLE. (MODELO DE S.R,R)

MODELO DE SERRA, REYNOLDS, RAGHAVAN

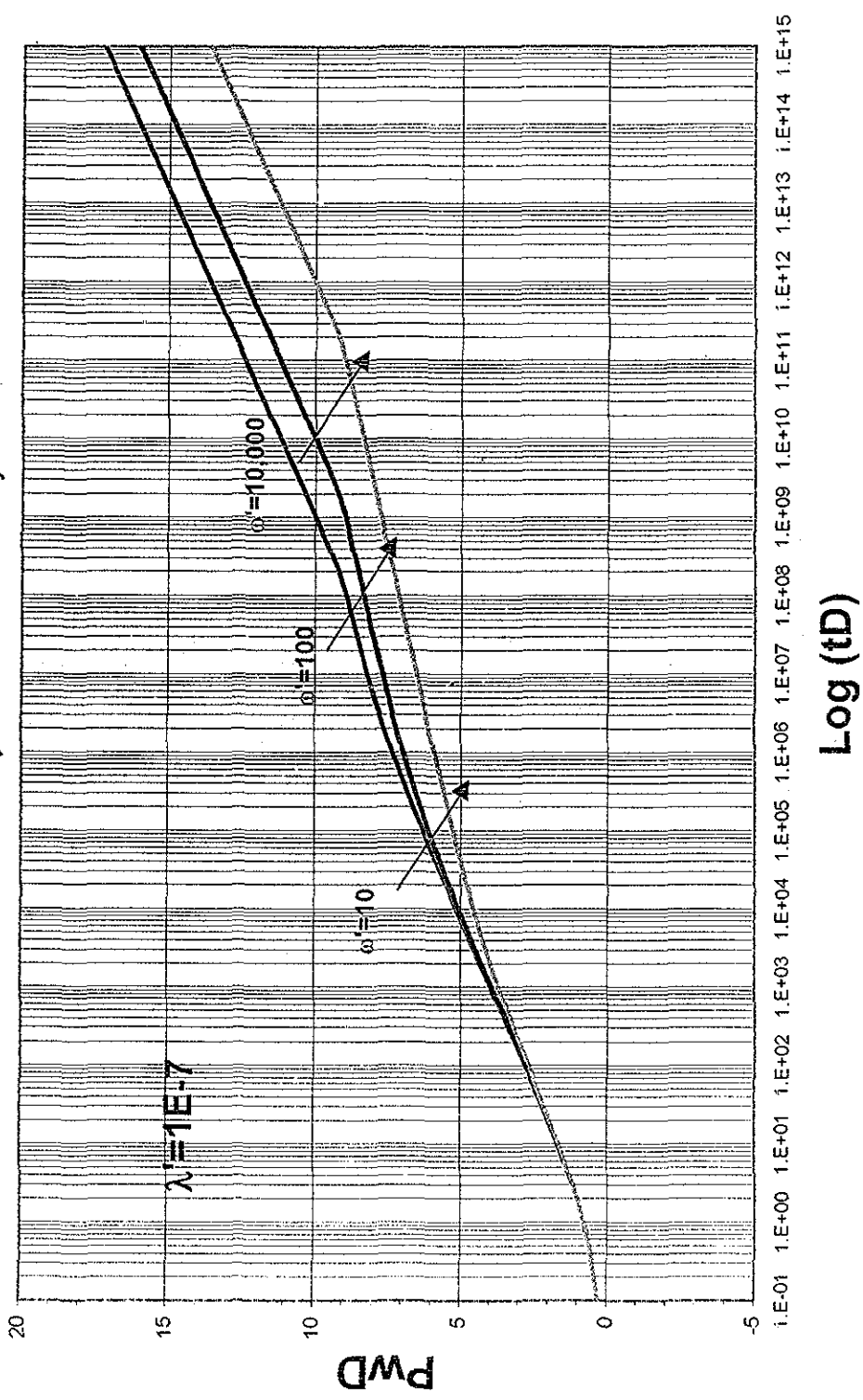


FIG. 2.21 SOLUCIÓN PWD vs tD, PARA λ' CONSTANTE Y ω' VARIABLE (MODELO DE S,R,R)

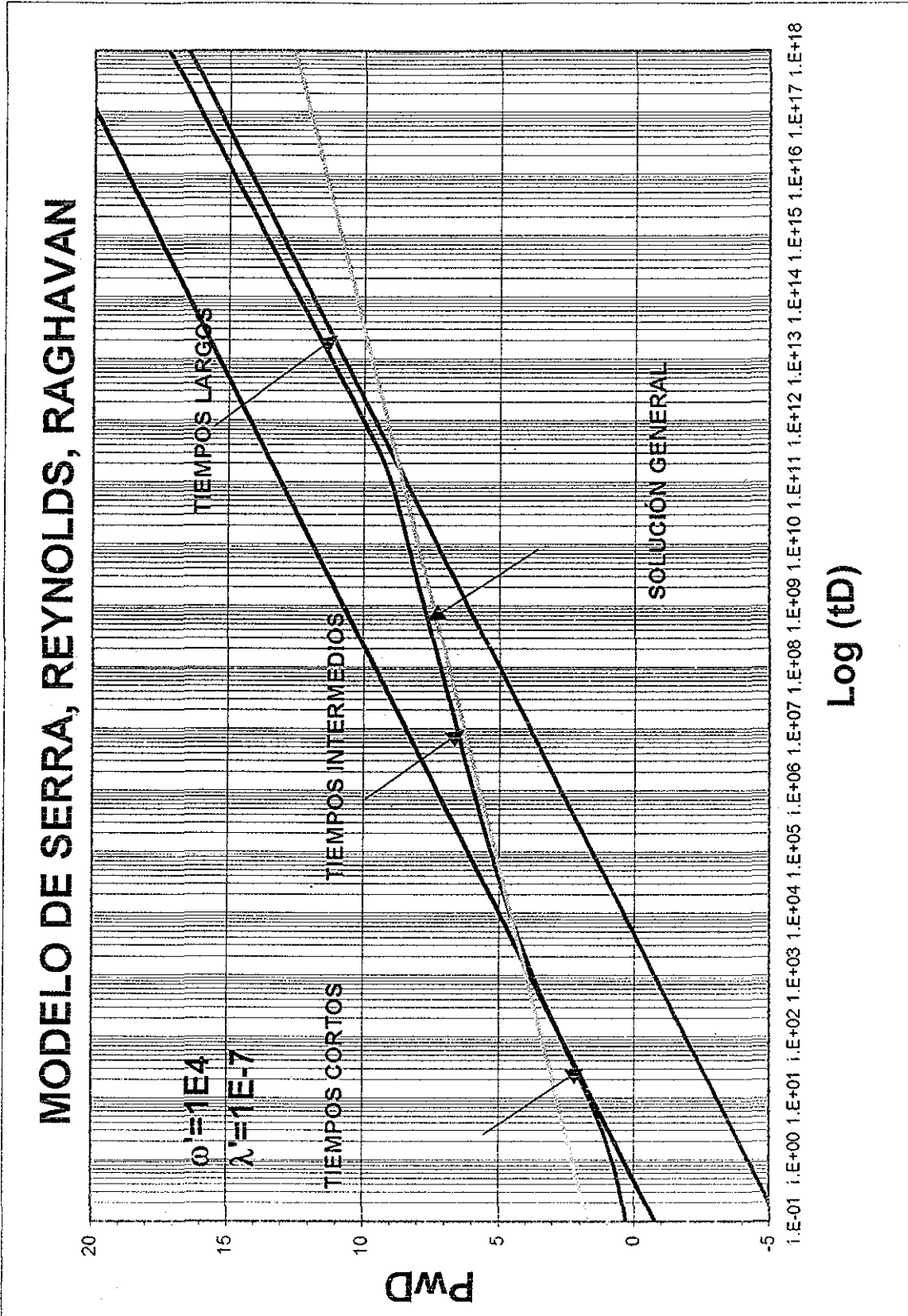


FIG. 2.22 COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN GENERAL Y LAS SOLUCIONES APROXIMADAS A TIEMPOS CORTOS, INTERMEDIO Y LARGOS (MODELO DE S,R,R)

II.2.2.7 *MODELO DE STRELTSOVA*¹⁶ (1983)

Este trabajo muestra que las suposiciones hechas por Barenblatt y cols⁶ y usadas por Warren y Root⁷ en la formulación del comportamiento de presión en formaciones naturalmente fracturadas simplifican el análisis matemático pero no el ajuste de presión en el periodo transitorio de la transferencia matriz fractura, el autor propone que el gradiente promedio de presión en el bloque de matriz describe mejor el proceso de equilibrio de presiones durante este periodo transitorio con la desventaja de complicar el análisis matemático.

El gradiente promedio se considera como un parámetro de distribución de flujo, debido a que la presión de la matriz y su flujo no están distribuidos linealmente a lo largo de la dirección normal del plano de fractura, el flujo de matriz es proporcional a los gradientes de presión y a la capacidad de almacenamiento que no son constantes pero dependen de la posición espacial y por tanto influyen en el tiempo de respuesta.

El parámetro de distribución o gradiente de flujo predice la presión transitoria en función del tiempo y representa un comportamiento lineal en una gráfica semilog P_{ws} vs t que une las curvas de comportamiento a tiempos largos y cortos en los puntos de inflexión.

A continuación se presentan las dos consideraciones sobre la respuesta de bloques de matriz a los cambios de presión en la interfase matriz – fractura:

1.- El flujo de la matriz a la fractura es proporcional a la diferencia de presión entre la matriz y la fractura, esta suposición la empleó Warren y Root⁷ después de ser propuesta por Barenblatt y cols⁶.

2.- El gasto de flujo, en el modelo del gradiente de flujo, es proporcional a los gradientes de presión y a la capacidad de almacenamiento.

Para ambos modelos, se analiza la distribución de presión en el bloque de matriz, el flujo matriz – fractura y el modelo característico de las formaciones naturalmente fracturadas:

Modelo de Warren y Root

Este modelo se basa en dos condiciones de frontera:

- 1.- El flujo en la interfase matriz – fractura es proporcional a la diferencia de presión entre la matriz y la fractura.
- 2.- El flujo se ajusta instantáneamente a los cambios de la diferencia de presión entre la matriz y la fractura.

La variación de presión en la matriz está definida por:

$$\Delta p_m = \Delta p [1 - e^{-\alpha t}] \tag{2.138}$$

donde:

$$\alpha = \frac{\eta_m}{H^2} = \frac{k_m}{\phi_m \mu c_m H^2} \tag{2.139}$$

El flujo de la matriz en la interfase es

$$q_m = \alpha S_m (\Delta p - \Delta p_m) = \alpha S_m \Delta p e^{-\alpha t} \tag{2.140}$$

Modelo del Gradiente de Flujo

Considera solamente flujo vertical hacia la fractura:

La distribución de presión para este caso está dado por:

$$\Delta p_m(z') = \Delta p \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{Sen} \left(\frac{n\pi}{2} z' \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{4}} \right] \tag{2.141}$$

Para comparar ambos modelos, la ecuación anterior se integra en z de 0 a H:

$$\Delta p_m = \Delta p \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{4}} \right] \tag{2.142}$$

El gasto de la matriz a la fractura es:

$$q_m = \frac{2 \Delta p_m k_m}{H} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \alpha t}{4}} \tag{2.143}$$

La Figura 2-23 representa la solución de la ecuación 2.141 y muestra los cambios de presión con respecto al espesor del bloque de matriz.

La Figura 2-24 compara la respuesta de presión en la matriz de Warren y Root⁷ y la del gradiente de presión formulada por Streltsova.

Distribución de Presión en Yacimientos Naturalmente Fracturados

La ecuación de difusión para flujo radial en la fractura con término fuente en la matriz, q_m es:

$$\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p}{\partial r} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \frac{q_m}{T} \quad (2.144)$$

q_m representa el flujo de la matriz a la fractura por área unitaria de la interfase matriz fractura y por unidad de tiempo:

$$q_m = \frac{k_m}{\mu} \frac{\partial \Delta p_w}{\partial z} \quad (2.145)$$

Aplicando la transformada de Laplace y la Henkel, la respuesta de presión en la fractura en el espacio de Laplace es:

$$\Delta \bar{p} = \frac{q}{2\pi T} \frac{1}{s} K_0 \left[\left[\bar{s} + r_D \sqrt{\bar{s} \phi_m c_m / \phi_f c_f} (H/h) \tanh \left(\sqrt{\bar{s} \phi_m c_m / \phi_f c_f} / r_D \right) \right]^{1/2} \right] \quad (2.146)$$

La Figura 2-25 muestra la gráfica de la presión para varios valores de r_D y $4t_D$ con una relación de almacenamiento matriz-fractura $s_m/s_f = 10$.

La presión en la matriz es:

$$\Delta \bar{p}_m = \Delta \bar{p} \left[\tanh \left(H \sqrt{\bar{s} / \eta_m} \right) \right] / H \sqrt{\bar{s} / \eta_m} \quad (2.147)$$

donde:

$$r_D = r \sqrt{k_m / k_f} / H \quad \bar{s} = s r^2 / \eta \quad T = \sum_{i=1}^n (k_f h / \mu)_i = 2n k_f h / \mu = kh / \mu$$

El autor utiliza la ecuación 2.146 para determinar la respuesta de presión en la fractura en pruebas de presión de un pozo y multipozos.

La Figura 2-25 muestra la gráfica de la ecuación 2.147, se observa que a tiempos cortos, se forma una línea recta que representa la respuesta de las fracturas compresibles, a

medida que el tiempo transcurre, la matriz de baja permeabilidad proporciona flujo a la fractura debido a los cambios de presión en ésta, en la gráfica esto representa el periodo transitorio donde la presión está afectada por la contribución de flujo del bloque de matriz, la curva de presión transitoria es lineal en toda su duración cuya pendiente es la mitad de la pendiente de la línea a tiempos cortos, como las presiones tanto de la matriz como de la fractura se igualan, el bloque de matriz influye en el desarrollo del tercer segmento, esta tercera curva está afectada por la capacidad de almacenamiento efectiva.

SOLUCIÓN APROXIMADA PARA TIEMPOS CORTOS E INTERMEDIOS

$$\Delta p_m(z') = \Delta p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\operatorname{erfc} \frac{(2n-1) - z'}{2\sqrt{\alpha t}} + \operatorname{erfc} \frac{(2n-1) + z'}{2\sqrt{\alpha t}} \right] \quad (2.148)$$

Para valores pequeños de αt la presión y flujo en la matriz son proporcionales a \sqrt{t} y la respuesta se reduce a:

$$\Delta p_m = 2\Delta p \sqrt{\alpha t / \pi} \quad (2.149)$$

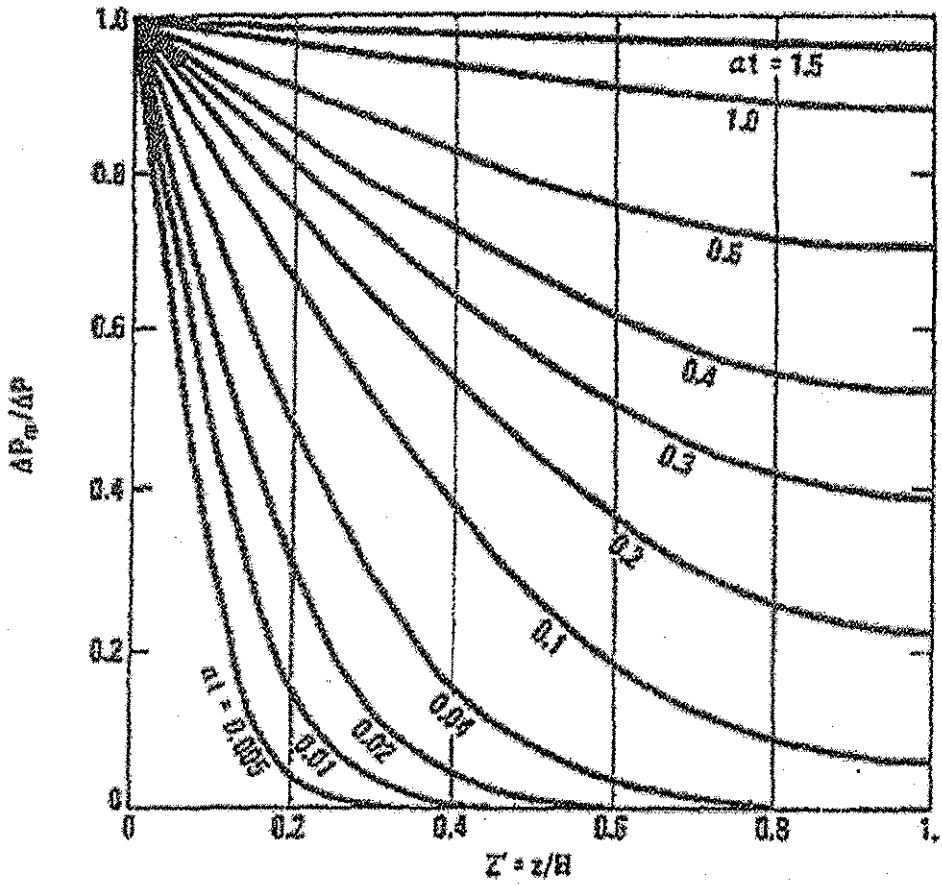
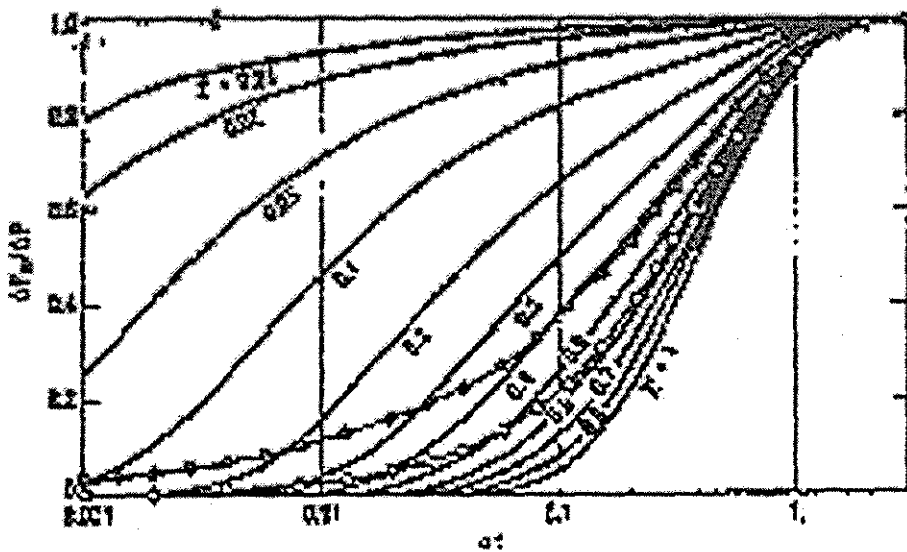


FIG. 2-23 COMPORTAMIENTO DE PRESIÓN ADIMENSIONAL $\Delta p_m(z'')/\Delta p$ CON VARIACIÓN DEL TAMAÑO DE BLOQUE DE MATRIZ



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIG. 2-24 COMPARACIÓN DE RESPUESTA DE PRESIÓN ADIMENSIONAL $\Delta p_m(z'')/\Delta p$ DE STRELTSOVA(●) CON EL MODELO DE WARREN Y ROOT (○)

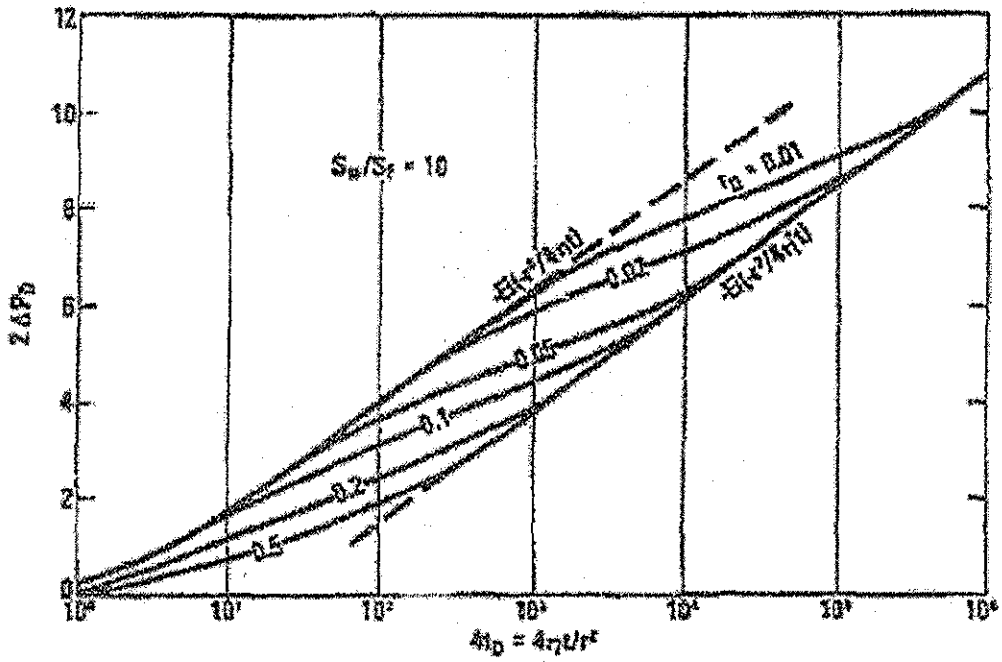


FIG. 2-25 COMPORTAMIENTO CARACTERÍSTICO DE DOBLE POROSIDAD.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

II.2.2.8 *MODELO DE RODRIGUEZ NIETO¹⁷ (2001)*

Este modelo estima la variabilidad y rango del tamaño de bloque de matriz en yacimientos naturalmente fracturados a partir de pruebas de presión (problema inverso).

El modelo determina la respuesta de presión y las funciones de primera y segunda derivada en yacimientos naturalmente fracturados con tamaño de bloque variable, presenta grupos logarítmicos que mejoran la caracterización, el modelo considera distribución discreta y continua en el tamaño de bloque para el caso lineal y exponencial con almacenamiento y daño en el pozo. Este modelo se validó con soluciones límite para yacimientos homogéneos y fracturados con un tamaño de bloque específico y se comparó con algunos resultados encontrados con el tamaño de bloque variable.

El yacimiento naturalmente fracturado tiene un número finito NB de tamaños de bloques de matriz $h_{ma1}, h_{ma2}, \dots, h_{maNB}$ o el tamaño de bloque puede tener una variación continua h_{ma} a partir del espesor de fractura h_f, h_D describe la forma en que varía el tamaño de bloque de matriz. La red de fracturas tiene permeabilidad k_{fb} , compresibilidad total c_{fj} y porosidad ϕ_{fb} , el subíndice b expresa el volumen de fracturas más el volumen de matriz del medio poroso fracturado. Los bloques de matriz tienen permeabilidad k_{ma} , porosidad ϕ_{ma} y compresibilidad total c_{ma} .

Área de fractura por unidad de volumen de roca

$$A_{fb} = 2 / (h_{ma} + h_f) = 2V_{ma} / h_{ma}V_b \quad (2.133)$$

Área de fractura por unidad de volumen de matriz

$$A_{fma} = 2 / h_{ma} \quad (2.134)$$

Consideraciones del modelo

El fluido se mueve hacia el pozo sólo a través de la red de fracturas, el flujo en las fracturas obedece a la ley de Darcy, efectos gravitacionales despreciables, la red de

fracturas se comporta como un medio poroso homogéneo e isotrópico, flujo radial en yacimiento infinito, los bloques de matriz actúan como una fuente que alimentan fluido a las fracturas, flujo transitorio entre la matriz y las fracturas, presión inicial constante y producción a gasto constante en el pozo.

La ecuación de flujo con número finito de tamaño de bloques es:

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) - \frac{k_{ma}}{k_{fb}} r_w^2 \sum_{i=1}^{NB} f_i A_{fbi} \frac{2\pi k_{fb} h}{q\mu} [\nabla \Delta p_{ma}(h_{mai})]_{surf} = \frac{\phi_{fb} c_f}{(\phi c_i)_i} \frac{\partial p_{fD}}{\partial t_D} \quad 1 \leq r_D < \infty, t_D > 0 \quad (2.135)$$

Condición inicial: $p_{fD}(r_D, 0) = 0 \quad 1 < r_D < \infty \quad (2.136)$

Frontera interna: Gasto constante $\lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1 \quad t_D > 0 \quad (2.137)$

Frontera externa: Yacimiento Infinito $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0 \quad t_D > 0 \quad (2.138)$

$[\nabla \Delta p_{ma}(h_{mai})]_{surf}$ es el gradiente de la diferencia de presiones en la cara de un bloque de tamaño h_{mai} .

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad p_{fD} = \frac{k_{fb} h \Delta p_f}{\alpha q \mu B} \quad t_D = \frac{\beta k_{fb} t}{(\phi c_i)_i \mu r_w^2} \quad f_D = h_{max} f \quad h_D = h_{mai} / h_{max}$$

La solución al problema en el espacio de Laplace es:

$$\bar{p}_{wD}(r_D, s) = \frac{K_0(x)}{sxK_1(x)} \quad (2.139)$$

$$x = s^{1/2} [\omega + (1 - \omega)g]^{1/2} \quad (2.140)$$

$$g(f_i, \eta_{maDi}, s) = 2 \sum_{i=1}^{NB} f_i \sqrt{\eta_{maDi} / s} \tanh \left(\frac{1}{2} \sqrt{s / \eta_{maDi}} \right) \quad (2.141)$$

$$\omega = \phi_{fb} c_{if} / (\phi c_i)_i \quad (2.142)$$

$$\eta_{maDi} = \frac{k_{ma}(\phi_{c_i})_i r_w^2}{k_{fb}(\phi_{c_i})_{ma} h_{mai}^2} \quad (2.143)$$

La solución $\bar{p}_{wDi}(r_D, s)$ con almacenamiento C_D y daño en el pozo S es:

$$\bar{p}_{wDi}(r_D, s) = \frac{K_0(x) + SxK_1(x)}{s[C_D[K_0(x) + SxK_1(x)] + xK_1(x)]} \quad (2.144)$$

Para una distribución continua del tamaño de bloque, la función “g” se define:

$$g(f_D, z) = \frac{2}{z_{max}} \int_{z_{min}}^{z_{max}} \frac{f_D \tanh\left(\frac{1}{2}z\right)}{z} dz \quad (2.145)$$

$$z = \sqrt{s / \eta_{maD}} \quad (2.146)$$

f_D = Es la función de probabilidad que define la existencia de bloques de tamaño h_{ma} o la distribución al azar de los bloques.

VALIDACIÓN DEL MODELO

Yacimientos Homogéneos

Evaluando la ecuación 2.158 en $\omega = 1$

$$x = s^{1/2} \quad (2.147)$$

Sustituyendo la ecuación 2.147 en 2.139:

$$\bar{p}_{wD}(r_D, s) = \frac{K_0(\sqrt{s})}{s^{3/2} K_1(\sqrt{s})} \quad (2.148)$$

Invirtiéndola a espacio real la solución anterior, evaluando para $t_D = 10^2$ a 10^8 y comparándola con la solución homogénea de Agarwall, R.G. y Cols se obtiene una buena aproximación de ambos modelos.

El trabajo presenta también la comparación de segunda derivada de Jiménez, AMA y de este modelo, presentando buena aproximación.

Yacimiento Naturalmente Fracturado

Se presentan tres casos, todos son comparados con el modelo de Cinco y Samaniego:

- 1.- El primer caso para NB=1 y $\omega=0.1$, ambos modelos tienen buena aproximación.

2.- El segundo caso se refiere a una distribución discreta en el tamaño de bloque con $NB=5$, $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0.2$ la comparación de los resultados presentan buena aproximación.

3.- El tercer caso, es una distribución continua exponencial del tamaño de bloque representado por la función probabilidad $f_D(h_D)$

$$f_D(h_D) = \frac{ae^{-ah_D}}{e^{-aF_h} - e^{-a}} \quad (2.149)$$

$$F_h = h_{min} / h_{max} \quad (2.150)$$

donde:

$a =$ constante exponencial, cuando $a=0$ se tiene distribución uniforme o rectangular, donde todos los tamaños de bloque tienen la misma posibilidad que existan.

El modelo de flujo con tamaño de bloque variable, representa la variación de los bloques por medio de dos tipos de funciones de probabilidad: funciones lineales y funciones exponenciales.

Las funciones lineales se definen de la siguiente manera:

$$f_D = mh_D + b_l \quad (2.151)$$

$$b_l = \frac{2 - m[1 - F_h^2]}{2[1 - F_h]} \quad (2.152)$$

donde:

m = pendiente de la recta, para $m > 0$ se presenta baja densidad de fractura y para $m < 0$ es alta densidad de fractura.

b_l = ordenada al origen

La solución de la respuesta de presión $p_{wD}(r_D, t_D)$ y su derivada $p'_{wD}(r_D, t_D)$ para un yacimiento naturalmente fracturado con distribución lineal, sin almacenamiento y sin daño en el pozo se muestra en las Figuras 2-26 y 2-27 respectivamente.

En ambas figuras se presentan tres casos:

- Caso A: Distribución constante o rectangular $m=0$; $b=10/9$
 Caso B: Distribución lineal decreciente con $m=-100/81$; $b=145/81$
 Caso C: Distribución lineal creciente con $m=100/81$; $b=35/81$

La funciones de distribución exponencial se representan por la ecuación 2.149 y la solución de la respuesta de presión $p_{wD}(r_D, t_D)$ y su derivada $p'_{wD}(r_D, t_D)$ para un yacimiento naturalmente fracturado con este tipo de distribución, se muestra en las Figuras 2-21 y 2-22 respectivamente.

En ambas figuras se presentan tres casos:

- Caso D: Distribución constante $a=0$, $F_h=0,1$ y $\omega=0,01$
 Caso E: Distribución exponencial decreciente con $a=5$, $F_h=0,1$ y $\omega=0,01$
 Caso F: Distribución exponencial creciente con $a=-5$, $F_h=0,1$ y $\omega=0,01$

FIG 2-26 SOLUCIÓN DE RESPUESTA DE PRESIÓN $p_{wD}(r_D, t_D)$ CON DISTRIBUCIÓN LINEAL SIN ALMACENAMIENTO Y SIN DAÑO

FIG. 2-27 RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA CON DISTRIBUCIÓN LINEAL EN EL TAMAÑO DE BLOQUE, SIN ALMACENAMIENTO Y SIN DAÑO

FIG. 2-28 PRESIÓN ADIMENSIONAL CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL EN TAMAÑO DE BLOQUE DE MATRIZ.

FIG. 2-29 RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA CON DISTRIBUCIÓN EXPONENCIAL EN EL TAMAÑO DE BLOQUE DE MATRIZ.

Capítulo III

MODELO PROPUESTO

III.1. MODELO

Las investigaciones en el campo de pruebas de presión para yacimientos naturalmente fracturados desarrolladas hasta nuestros días consideran que: *“la transferencia de fluido se realiza de la matriz a la fractura, los bloques de matriz están rodeados por fracturas⁷, el flujo ocurre solamente en el medio fracturado y los bloques de matriz son fuentes que liberan el fluido”*.

Sin embargo, a través del análisis de un gran número de pruebas de presión se ha observado que algunos de éstos conceptos no siempre se cumplen por la naturaleza propia del sistema fracturado, en este trabajo se presenta un nuevo modelo de flujo desarrollado para determinar la respuesta de presión en yacimientos naturalmente fracturados con una formulación geométrica diferente en la matriz, las soluciones analíticas que se presentan consideran flujo interporoso transitorio, la dirección de transferencia de fluido es de la matriz a la fractura, la fractura está rodeada por bloque de matriz esférico finito e infinito, el flujo en la matriz es esférico y la fractura puede estar parcialmente comunicada. En este trabajo, se considera que la fractura está totalmente comunicada, no tiene daño ($S=0$).

La respuesta de presión en la fractura rodeada por bloque de matriz se combina con la presión en la fractura radial que produce al pozo, de esta forma se determina el comportamiento del yacimiento naturalmente fracturado, la solución se obtiene por el método de Transformada de Laplace y los resultados en espacio real se presentan utilizando el invertidor numérico de Sthefest³¹

III.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

A continuación se presentan dos formas de visualizar la formulación del problema: La primera representa una fractura paralelepípeda rodeada por matriz cúbica y la segunda una fractura rodeada por bloque de matriz esférico finito e infinito.

III.2.1 FRACTURA PARALELEPIPEDA RODEADA POR MATRIZ CÚBICA.

El primer caso, es un yacimiento naturalmente fracturado formado por dos medios de interacción: matriz y fractura, la fractura es paralelepípeda dentro de un bloque de matriz cúbico, se presenta flujo lineal de la matriz a la fractura paralelepípeda, sin embargo se puede presentar flujo esférico durante la transferencia (Figura 3.1).

Durante el proceso de producción del fluido se consideran dos procesos de transferencia: la primera ocurre de la matriz cúbica a la fractura paralelepípeda en estado transitorio y la segunda de la fractura paralelepípeda a la fractura radial conectada al pozo en estado transitorio

La siguiente figura representa la fractura rodeada por el bloque de matriz.

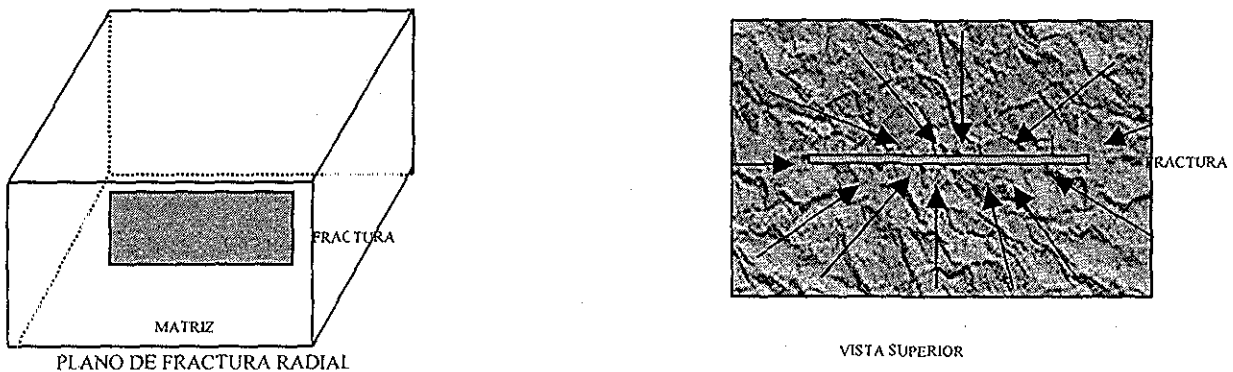


Fig 3.1 Regiones de flujo en forma tridimensional para una fractura.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

La siguiente figura muestra la producción del fluido y los dos medios de transferencia del modelo, se observa el flujo lineal en la matriz y el flujo radial en la red de fracturas del yacimiento, la fractura paralelepipedica es el término fuente que alimenta a la red de fracturas de todo el sistema.

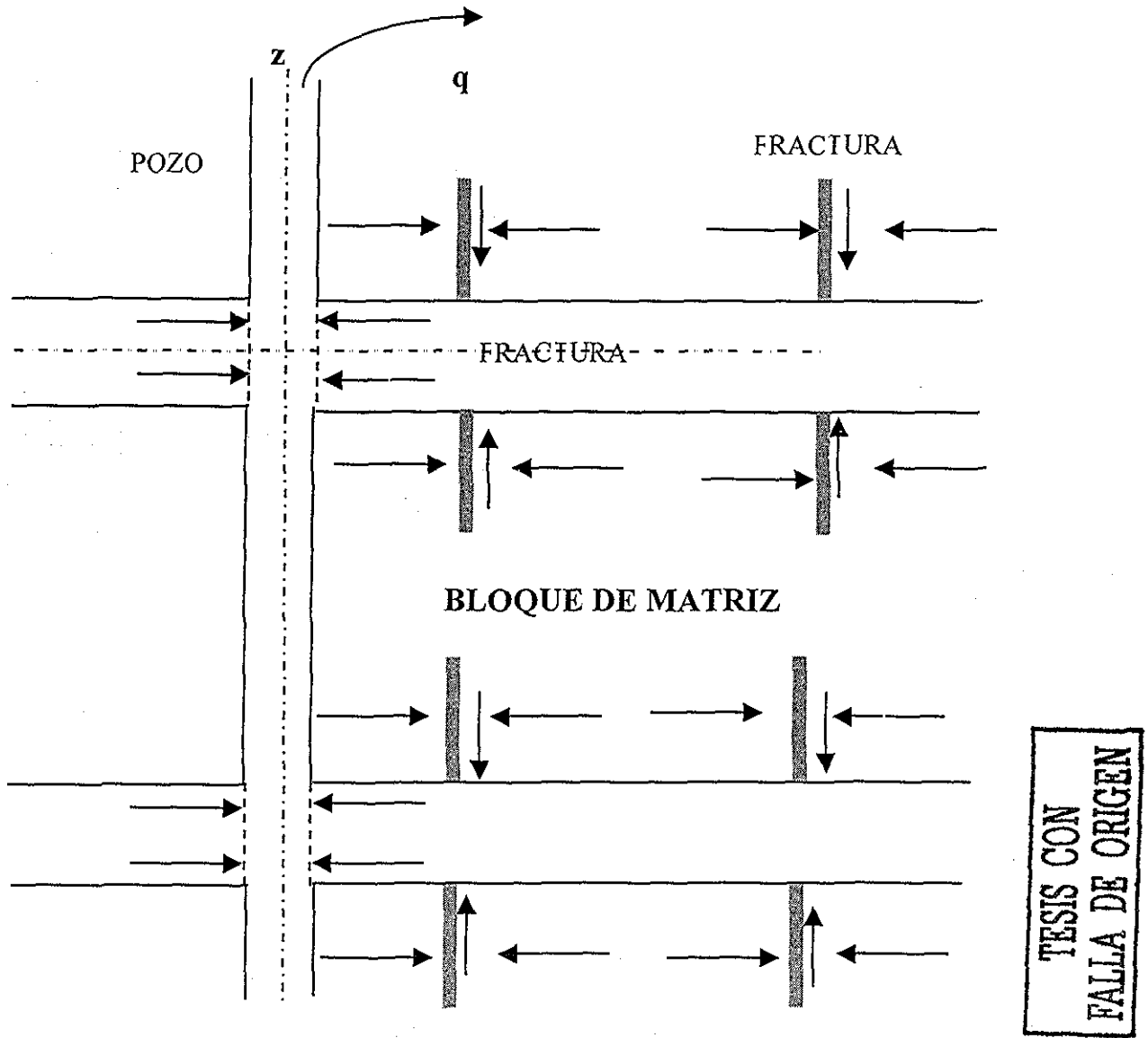


Fig. 3.2.- Representación esquemática de la formación naturalmente fracturada con fracturas rodeadas por bloques de matriz.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Las siguientes figuras muestran en forma tridimensional las dos regiones del modelo, en ella se observan varias fracturas rodeadas por bloque de matriz.

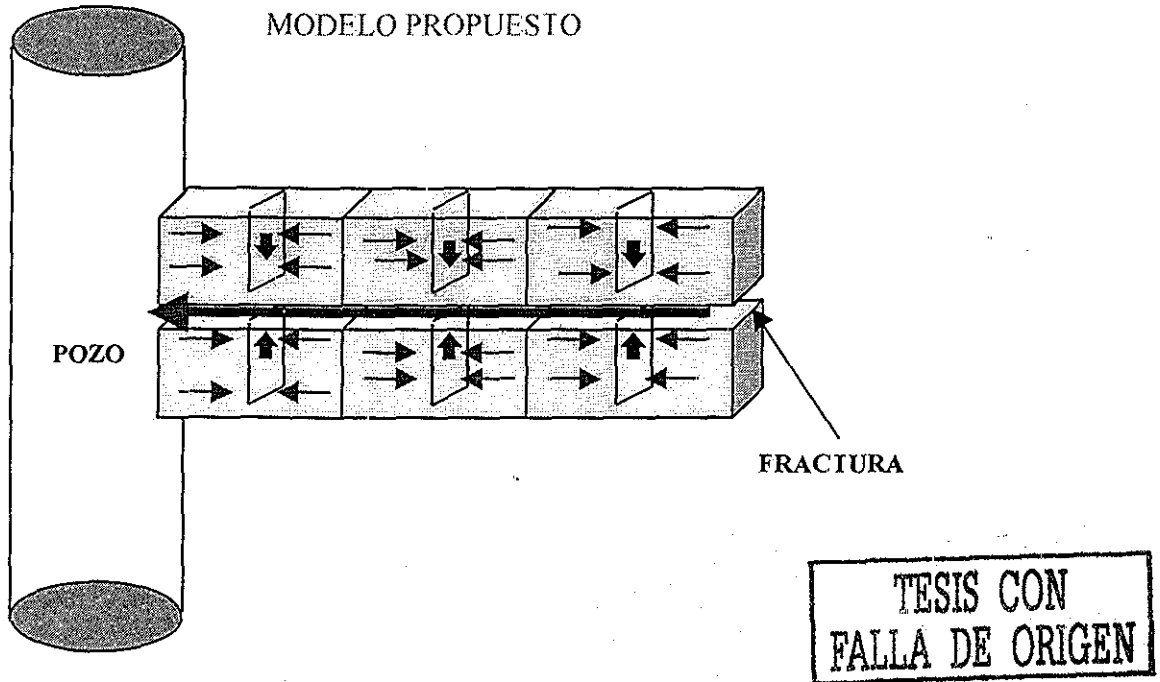


Fig 3.3 Procesos de transferencia de flujo interporoso transitorio en forma tridimensional.

El comportamiento de presión para este medio naturalmente fracturado, se obtiene por la solución de la ecuación de difusión, primero en la fractura paralelepípeda y después en la fractura radial que produce al pozo. La caída de presión en la fractura paralelepípeda se determina utilizando el Método del producto de Newman^{40,41} y la solución de planos fuente en funciones Green⁴¹. El comportamiento de presión para el yacimiento naturalmente fracturado se obtiene en forma similar a la solución obtenida por Cinco y Samaniego¹⁴.

La derivación de la caída de presión en la fractura paralelepípeda en función de series infinitas de senos y cosenos y en términos de funciones exponenciales se presenta en el Apéndice H. Los resultados de la inversión a espacio real de esta solución no se presentan

en este trabajo pero la solución muestra que converge lentamente y no generan valores exactos de caída de presión a tiempos cortos, cuando el número de términos usados en la sumatoria es muy grande.

Por esta razón se considera que la respuesta de presión en el modelo propuesto con fractura rodeada por bloque de matriz esférico y flujo esférico en la matriz es una aproximación al primer caso. Con esta segunda visualización, sólo cambia la forma geométrica del área de contacto entre la matriz que rodea a la fractura y la fractura. A continuación se desarrolla el modelo propuesto con esta aproximación.

III.2.2 FRACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ ESFERICO.

El modelo del yacimiento está formado por dos medios de interacción de flujo: El primero considera una fractura rodeada por un bloque de matriz esférico de dimensiones finitas, en este medio el fluido se desplaza de la matriz hacia la fractura como flujo esférico transitorio; el segundo medio lo constituyen la fractura y la fractura radial que interconecta el sistema de fracturas del yacimiento con el pozo, esta transferencia también es transitoria y el flujo se considera radial. Los medios se encuentran distribuidos de acuerdo a la forma en que ocurre la transferencia del fluido.

La Figura 3.4 muestra la equivalencia del bloque de matriz cúbico con fractura paralelepipedica y la fractura rodeada por el bloque de matriz esférico; en ambos casos, la fractura rodeada por matriz tiene continuidad con la red de fracturas radiales que transfieren el fluido del yacimiento al pozo.

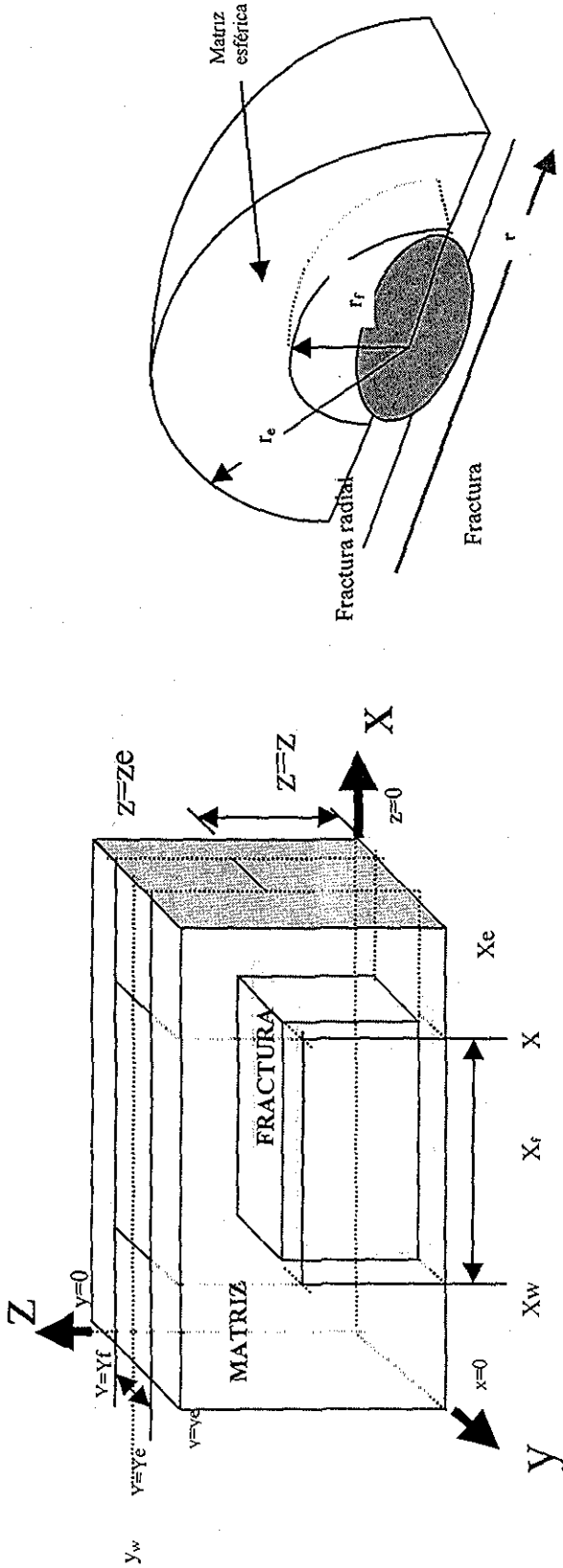
III.3. CONSIDERACIONES DEL MODELO.

El modelo de flujo en el yacimiento, se desarrolló en base a las siguientes consideraciones:

- Fluido ligeramente compresible
- Yacimiento infinito
- Alta permeabilidad en las fracturas
- Bloque de matriz finito e infinito de forma esférica
- Fractura rodeada por bloque de matriz esférico
- Flujo Radial en forma vectorial en la fractura principal
- Flujo esférico transitorio en la matriz finita e infinita
- Efectos gravitacionales despreciables
- Los bloques de matriz actúan como fuentes distribuidas uniformemente en el medio fracturado
- Los bloques de matriz se consideran aproximadamente sólidos regulares
- Hacia el pozo, el flujo toma lugar solo en las fracturas
- Fluye un solo fluido
- Flujo a presión constante en la matriz.
- Flujo a gasto constante en el pozo.
- No se considera almacenamiento y daño.

III.4. MODELO PROPUESTO

El modelo que se presenta en este trabajo, es similar a la solución de Cinco y Samaniego¹⁴. Considera flujo radial transitorio de un fluido ligeramente compresible en un sistema de doble porosidad. El medio posee permeabilidad k_b y porosidad ϕ_b de la fractura, la matriz tiene permeabilidad k_{ma} y porosidad ϕ_{ma} . La compresibilidad de la matriz y la fractura están definidas por c_{if} y c_{ima} respectivamente. Se considera flujo esférico transitorio en la fractura rodeada por bloque de matriz esférico de dimensiones



Área expuesta al flujo en fractura paralelepípeda en matriz cúbica = Área expuesta al flujo en la fractura rodeada por matriz esférica

FIG.3.4 FRACTURA PARALELEPÍPEDA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ CÚBICO Y FRACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ ESFÉRICO

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

finitas²⁵. El flujo hacia el pozo ocurre solamente a través de las fracturas radiales. La siguiente figura muestra el planteamiento analítico del problema propuesto.

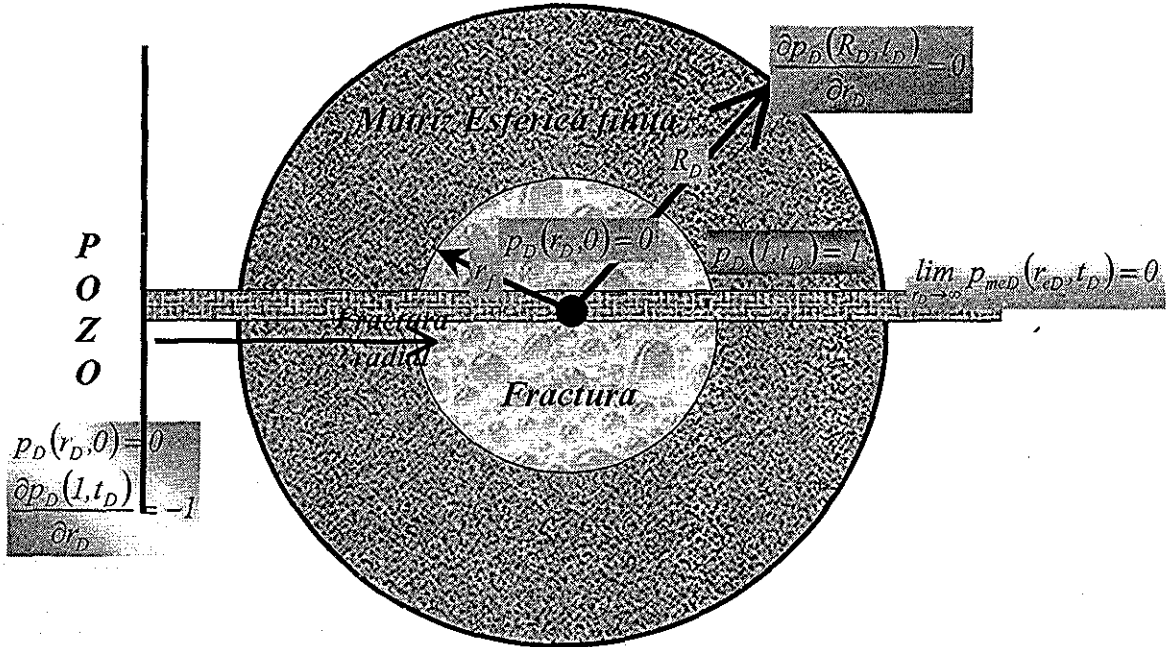


FIG. 3-5 REGIONES DE FLUJO Y PLANTEAMIENTO ANALÍTICO DEL PROBLEMA

III.5 SOLUCIÓN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

El comportamiento de presión para este medio naturalmente fracturado, se obtiene por la solución de la ecuación de difusión definida en cada una de las regiones que intervienen en la transferencia del fluido dentro del medio poroso. El modelo de flujo se resuelve en dos partes: primero se obtiene el gasto de fluido que entra a la fractura a presión constante (gradiente de presión unitario en la cara de la fractura por área de contacto), este gasto fluye de la frontera externa de la matriz esférica finita a la frontera interna (fractura); el gradiente obtenido se combina con la solución de la respuesta de presión en la fractura radial presentada por Cinco y Samaniego¹⁴. La solución se obtiene por método de Transformada de Laplace.

III.6 MODELO DE FLUJO RADIAL CON FLUJO INTERPOROSO TRANSITORIO CONVOLUCIONADO EN FRACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ ESFÉRICO FINITO

III.6.1 FLUJO ESFÉRICO TRANSITORIO EN FRACTURA RODEADA POR MATRIZ ESFERICA FINITA

El gradiente de presión originado en la cara de la fractura rodeada por bloque de matriz se obtiene resolviendo la ecuación de difusión aplicando el método de transformada de Laplace. La solución es a presión constante en yacimiento finito. (Apéndice B)

La fractura idealizada se visualiza como lo muestra la Figura 3.6, el fluido que procede de la matriz finita entra a la fractura a un gasto $q(r,t)$ por unidad de volumen de roca.

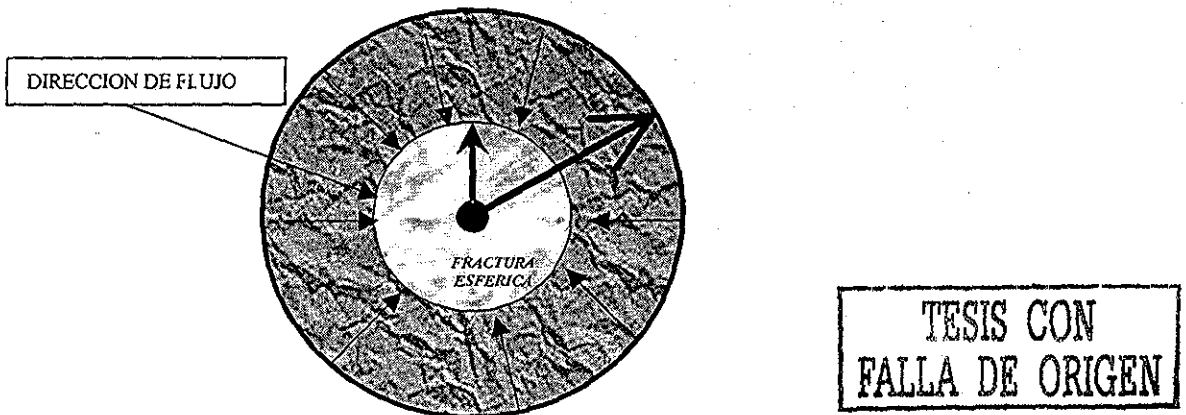


FIG. 3-6 FRACTURA Y MATRIZ ESFÉRICA FINITA

La ecuación de difusión en coordenadas esféricas se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p(r,t)}{\partial t} \quad r_w < r < \infty \text{ y } t > 0 \quad (3.1)$$

Condición inicial $p(r,0) = p_i \quad (3.2)$

Frontera interna: Presión constante $p(r_f, t) = p_f$ (3.3)

Frontera externa: Yacimiento Finito $\frac{\partial p(r_e, t)}{\partial r} = 0$ (3.4)

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad R_D = \frac{r_e}{r_f} \quad t_D = \frac{k_{ma} t}{(\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} = \eta_{ma} \frac{t}{r_w^2} \quad p_D(r_D, t_D) = \frac{p_i - p(r, t)}{p_i - p(r_f, t)}$$

La ecuación de flujo esférico en variables adimensionales:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (3.5)$$

Condición inicial: $p_D(r_D, 0) = 0$ (3.6)

Condición de frontera interna: $p_D(1, t_D) = 1$ (3.7)

Condición de frontera externa $\frac{\partial p_D(R_D, t_D)}{\partial r_D} = 0$ (3.8)

Transformando la ecuación de flujo esférico a una ecuación en forma de flujo lineal, utilizando la siguiente función:

$$B(r_D, t_D) = r_D p_D(r_D, t_D) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 B(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} = \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (3.10)$$

Transformando las condiciones del problema:

Condición Inicial: $B(r_D, 0) = 0$ (3.11)

Condición de frontera interna: $B(1, t_D) = 1$ (3.12)

Condición de frontera externa:
$$\frac{\partial B(R_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{1}{R_D} B(R_D, t_D) = 0 \quad (3.13)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo esférico en forma de flujo lineal y a las condiciones del problema:

$$\frac{d^2 \bar{B}(r_D, s)}{dr_D^2} = s \bar{B}(r_D, s) - B(r_D, 0) \quad (3.14)$$

Condición de frontera interna:
$$\bar{B}(1, s) = \frac{1}{s} \quad (3.15)$$

Condición de frontera externa:
$$\frac{\partial \bar{B}(R_D, s)}{\partial r_D} - \frac{1}{R_D} \bar{B}(R_D, t_D) = 0 \quad (3.16)$$

La respuesta de presión de flujo esférico en yacimiento finito en términos de la variable de transformación \bar{B} esta dado por:

$$\bar{B}(r_D, s) = \frac{\text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) - R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D])}{s [\text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) - R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1])]} \quad (3.17)$$

El gasto que entra a la fractura está definido de la siguiente manera:

$$\bar{q}_D = - \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_i = - \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial r_D} - \bar{B} \right)_i \quad (3.18)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\bar{q}_D = \frac{\sqrt{s_{ma}} [R_D - 1] + [R_D s_{ma} - 1] \text{Tanh}(\sqrt{s_{ma}} [R_D - 1])}{s_{ma} [R_D \sqrt{s_{ma}} - \text{Tanh}(\sqrt{s_{ma}} [R_D - 1])]} \quad (3.19)$$

s_{ma} es la variable de Laplace referida al tiempo adimensional de la matriz finita, la siguiente ecuación relaciona el tiempo de la fractura radial con el tiempo de la matriz (Apéndice G).

$$s_{ma} = \frac{1}{\eta_{maD}} s_f \quad (3.20)$$

s_f , es la variable de Laplace del tiempo adimensional en la fractura radial.

Difusividad hidráulica de la matriz adimensional:

$$\eta_{maD} = \frac{\eta_{ma} r_w^2}{\eta_{fb} r_f^2} = \frac{(\phi c_t)_i k_{ma} r_w^2}{(\phi c_t)_{ma} k_{fb} r_f^2} \quad (3.21)$$

Sustituyendo la relación de tiempos en la solución de flujo esférico, se obtiene la función de transferencia del sistema matriz-fractura:

$$\bar{q}_D = \frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - I]} + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - I \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - I]} \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - I]} \right) \right]} \quad (3.22)$$

III.6.2 FLUJO RADIAL CON FLUJO ESFÉRICO INTERPOROSO TRANSITORIO EN MATRIZ ESFÉRICA FINITA

El modelo considera flujo radial transitorio de un fluido ligeramente compresible, en sistema de doble porosidad que posee permeabilidad k_{ma} y porosidad ϕ_{ma} propias de la matriz, permeabilidad total k_{fb} y porosidad total ϕ_{fb} de las fracturas y compresibilidad total en las fracturas c_f y compresibilidad total en la matriz c_{ma} .

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + q^* \frac{\mu}{k_{fb}} \quad (3.23)$$

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} \frac{k_{ma}}{\mu} \frac{A_f}{V_b} (\nabla \Delta p_{uma})_{supunitaria} (t - \tau) d\tau \quad (3.24)$$

Donde:

q^* = Gasto total de la matriz a la fractura por unidad de volumen de roca.

A_f = Área de la fractura

V_b = Volumen de roca

$(\nabla \Delta p_{uma})_{supunitaria}$ = Es el gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura.

Sustituyendo 3.24 en 3.23, se obtiene el modelo de flujo radial en las fracturas con transferencia matriz – fractura convolucionada:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_{yf} \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{k_{ma} A_f}{k_{fb} V_b} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} [(\nabla \Delta p_{uma})_{supunitaria}(t - \tau)] d\tau \quad (3.25)$$

Condición inicial $p_f(r, 0) = p_i$ (3.26)

Frontera interna: gasto constante $\lim_{r \rightarrow r_w} \frac{\partial p_f(r, t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{kr_w}$ (3.27)

Frontera externa: yacimiento infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r, t) = p_i$ (3.28)

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad t_D = \frac{k_{fb}}{(\phi c_i)_i \mu r_w^2} t; \quad p_{fD}(r_D, t_D) = \frac{k_{fb} h}{\alpha q \beta \mu} [p_i - p_f(r, t)]$$

En términos de variables adimensionales la expresión (3.25) puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2 p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\phi_{fb} c_{yf}}{(\phi c_i)_i} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \frac{k_{ma} r_w^2}{k_{fb}} A_{fD} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} [\nabla p_{uma}(r, t - \tau)]_{sup} d\tau \quad (3.29)$$

Definiciones

Almacenamiento adimensional en la fractura: $\omega = \frac{\phi_{fb} c_{yf}}{\phi_{fb} c_{yf} + \phi_{ma} c_{tma}} = \frac{\phi_{fb} c_{yf}}{(\phi c_i)_i}$ (3.30)

Área adimensional de fractura: $A_{fD} = \frac{A_f}{V_b} = \frac{3}{R_D^3 - 1}$ (3.31)

El gradiente de presión está dado por (Apéndice F):

$$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup unitaria} = \frac{1}{r_f} [q_D(l, t_D)] \quad (3.32)$$

\bar{q}_D es el gasto adimensional que entra a la fractura rodeada por bloque de matriz esférico finito, también definida en este trabajo como “función de transferencia” entre la matriz y la fractura.

Sustituyendo las definiciones antes descritas:

$$\frac{\partial p^2_{jD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{mad} (1 - \omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} \bar{q}_D(1, t_D) d\tau \quad (3.33)$$

Condiciones de frontera en variables adimensionales

Condición inicial: $p_{jD}(r_D, 0) = 0$ (3.34)

Condición de frontera interna: $\lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1$ (3.35)

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{jD}(r_D, t_D) = 0$ (3.36)

Aplicando T. de Laplace a la ecuación de flujo radial en las fracturas (Ec.3.33):

$$\frac{d^2 \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D} = \omega [s \bar{p}_{jD}(r_D, s) - p_{jD}(r_D, 0)] + [1 - \omega] A_{jD} L \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} F(\eta_{mad}(t_D - \tau)) d\tau \right] \quad (3.37)$$

Condición de frontera interna: $\frac{d \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D} = -\frac{1}{s}$ (3.38)

Condición de frontera externa $\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{jD}(r_D, s) = 0$ (3.39)

La solución de la ecuación de respuesta de presión en el espacio de Laplace es:

$$\bar{p}_{wD}(r_D, s) = \frac{1}{s \sqrt{sf(s)}} \frac{Ko(r_D \sqrt{sf(s)})}{K_I(\sqrt{sf(s)})} \quad (3.40)$$

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \left[\frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \right] \quad (3.41)$$

K_0 y K_1 ; son funciones modificadas de Bessel de segunda especie y de orden 0 y 1 respectivamente.

La solución en espacio real se obtiene utilizando el invertidor numérico de Stehfest³¹. Los resultados obtenidos en espacio real son los presentados en las Figuras 3.7 y 3.8.

La Figura 3.7 muestran en forma semilogarítmica la respuesta de presión para un Yacimiento Naturalmente Fracturado de matriz esférica finita para valores de $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=10^{-4}$ y $R_D=100$. La Figura 3.8 muestra la presión derivada del caso anterior en una gráfica Log-Log.

Comportamiento de presión a tiempos cortos

Las variables s de Laplace y t_D están relacionadas inversamente, cuando $s \rightarrow \infty$, el tiempo $t_D \rightarrow 0$. Usando las formas asintóticas de las funciones Bessel, obtenemos el comportamiento de presión a tiempos cortos, $s \rightarrow \infty$.

La figura 3.9 muestra la gráfica de la función de transferencia en el espacio de Laplace, para valores pequeños de tiempo ($s \rightarrow \infty$) esta función es aproximadamente igual ω .

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \left[\frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \right] \approx \omega \quad (3.42)$$

por lo tanto, el comportamiento de presión en espacio real a tiempos cortos en el pozo es:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{t_D}{\omega} \right) + 0.8090701 \right] \quad (3.43)$$

Comportamiento de presión a tiempos largos

Las variables s de Laplace y t_D están relacionadas inversamente, cuando $s \rightarrow 0$, el tiempo $t_D \rightarrow \infty$. Usando las formas asintóticas de las funciones Bessel obtenemos el comportamiento de presión para valores grandes de tiempo $s \rightarrow 0$.

La Figura 3.9 muestra la gráfica de la función de transferencia en el espacio de Laplace. Para valores grandes de tiempo ($s \rightarrow 0$), esta función es aproximadamente igual a 1.

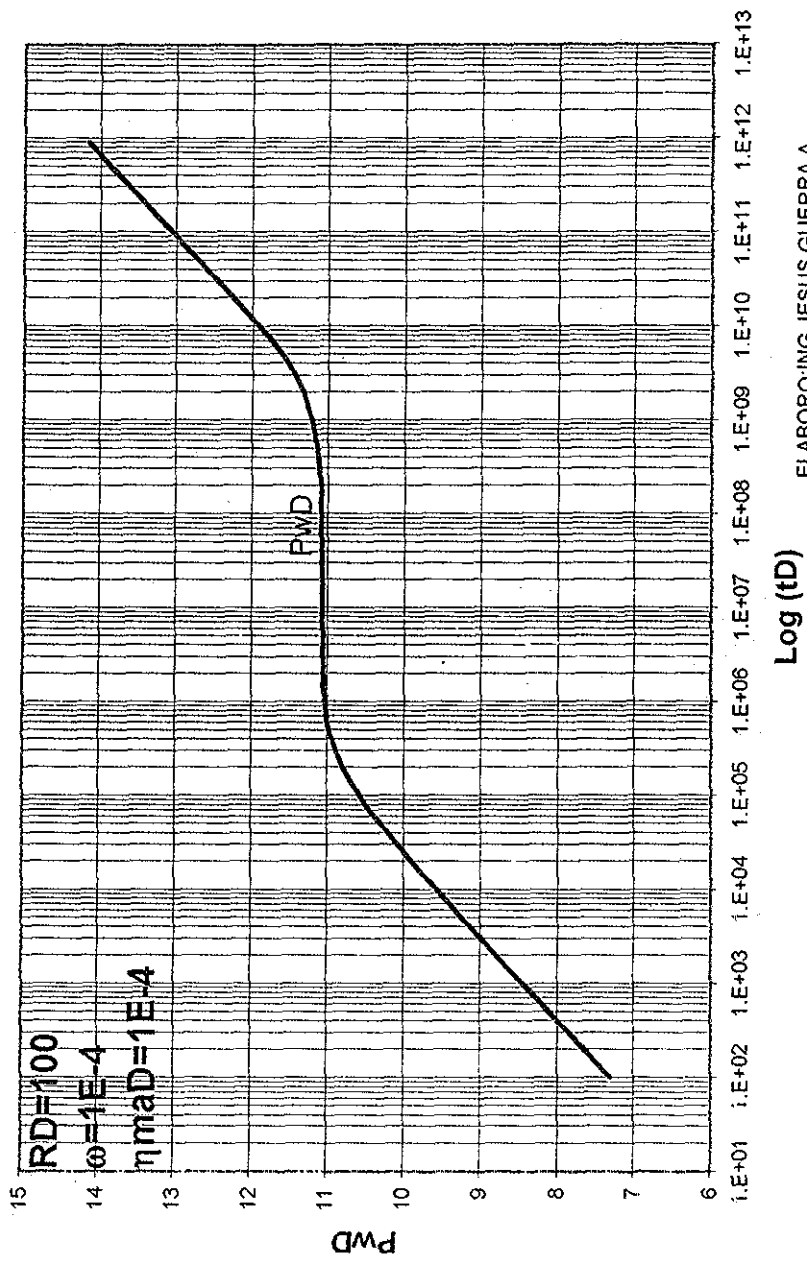
$$f(s) = \omega + (1 - \omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \left[\frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} [R_D - 1] + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} [R_D - 1] \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} [R_D - 1] \right) \right]} \right] \approx 1 \quad (3.44)$$

por lo tanto, el comportamiento de presión en espacio real a tiempos grandes en el pozo es:

$$p_{wD} = \frac{1}{2} [\ln t_D + 0.8090701] \quad (3.45)$$

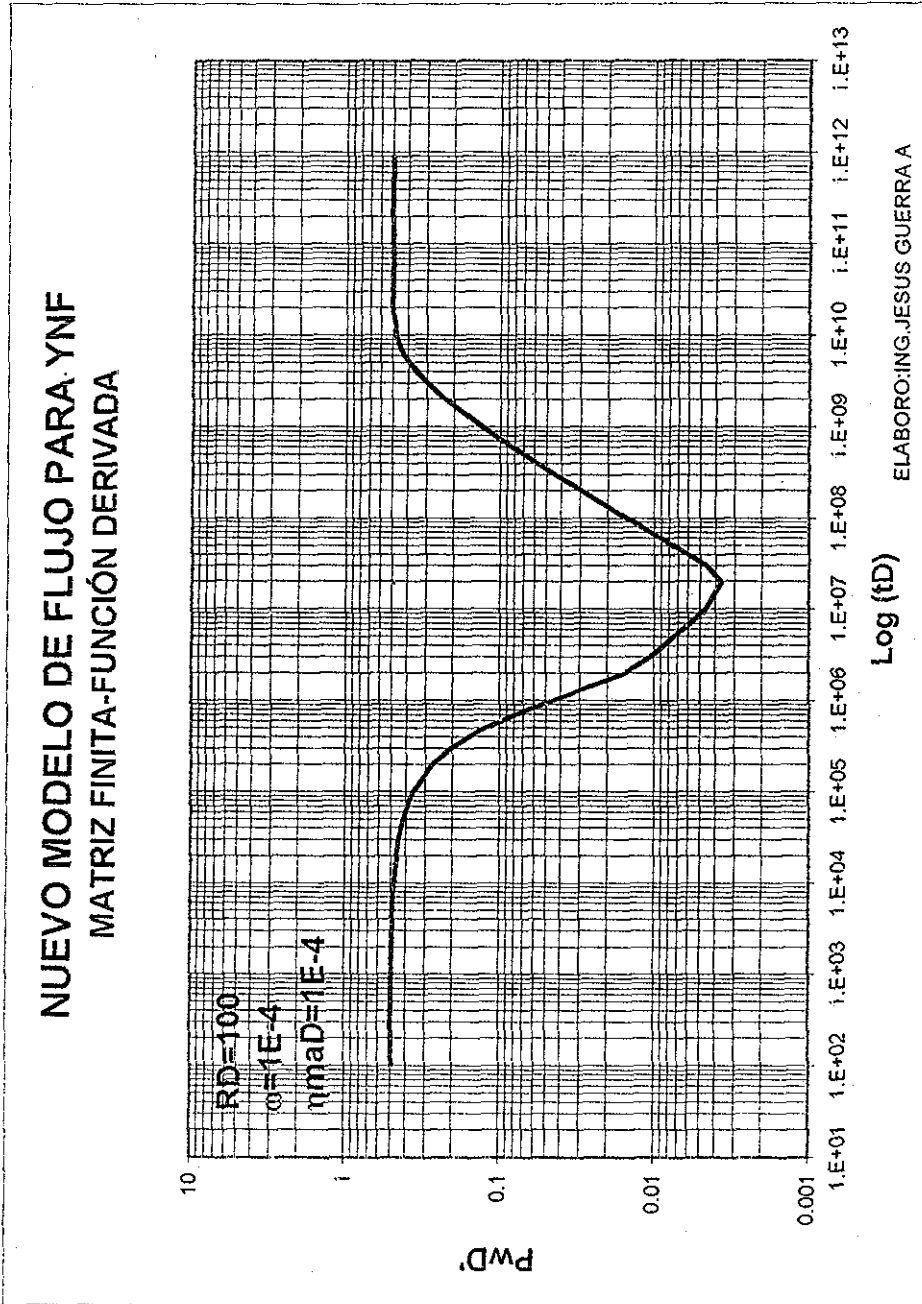
Las ecuaciones 3.43 y 3.45 son dos líneas rectas semilogarítmicas paralelas graficadas en la Figura 3.10, esta figura representan la doble porosidad de un yacimiento naturalmente fracturado y el comportamiento a tiempos cortos y largos del yacimiento.

NUEVO MODELO DE FLUJO PARA YNF
MATRIZ FINITA



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIG. 3.7 SOLUCIÓN DE RESPUESTA DE PRESION EN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO CON FLUJO ESFÉRICO TRANSITORIO EN MATRIZ ESFÉRICA FINITA (GRAFICA SEMILOG)



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

FIG.3.8 SOLUCIÓN DE PRESION DERIVADA EN YACIMIENTO NATURALMENTE FACTURADO CON FLUJO ESFÉRICO TRANSITORIO EN MATRIZ ESFÉRICA FINITA(GRÁFICA LOG-LOG)

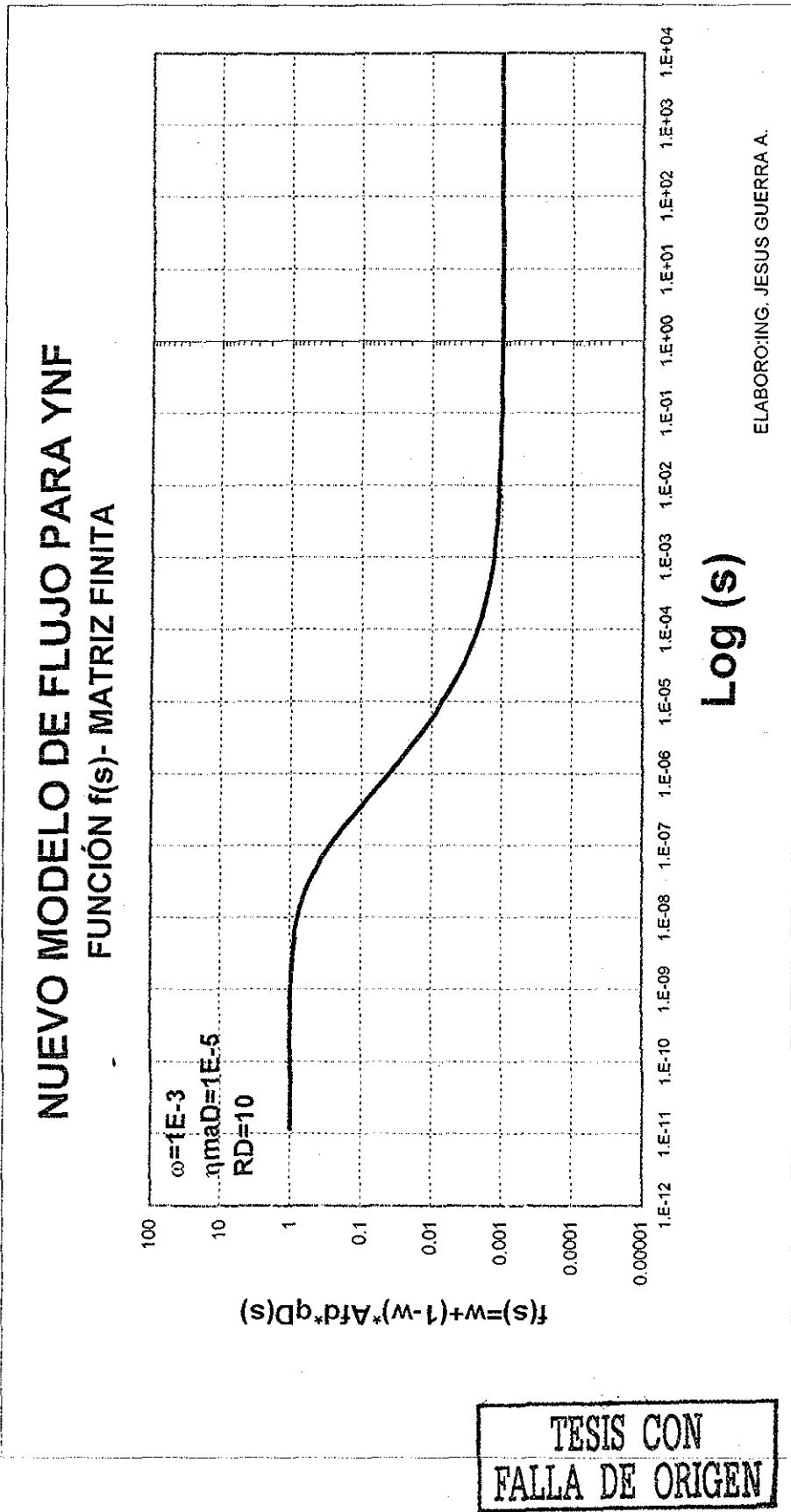


FIG. 3-9 COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION f(s) DE YACIMIENTO FINITO PARA VALORES GRANDES Y PEQUEÑOS DE S.

NUEVO MODELO DE FLUJO PARA YNF

RESPUESTA DE PRESIÓN, SOLUCIÓN A TIEMPOS CORTOS Y LARGOS

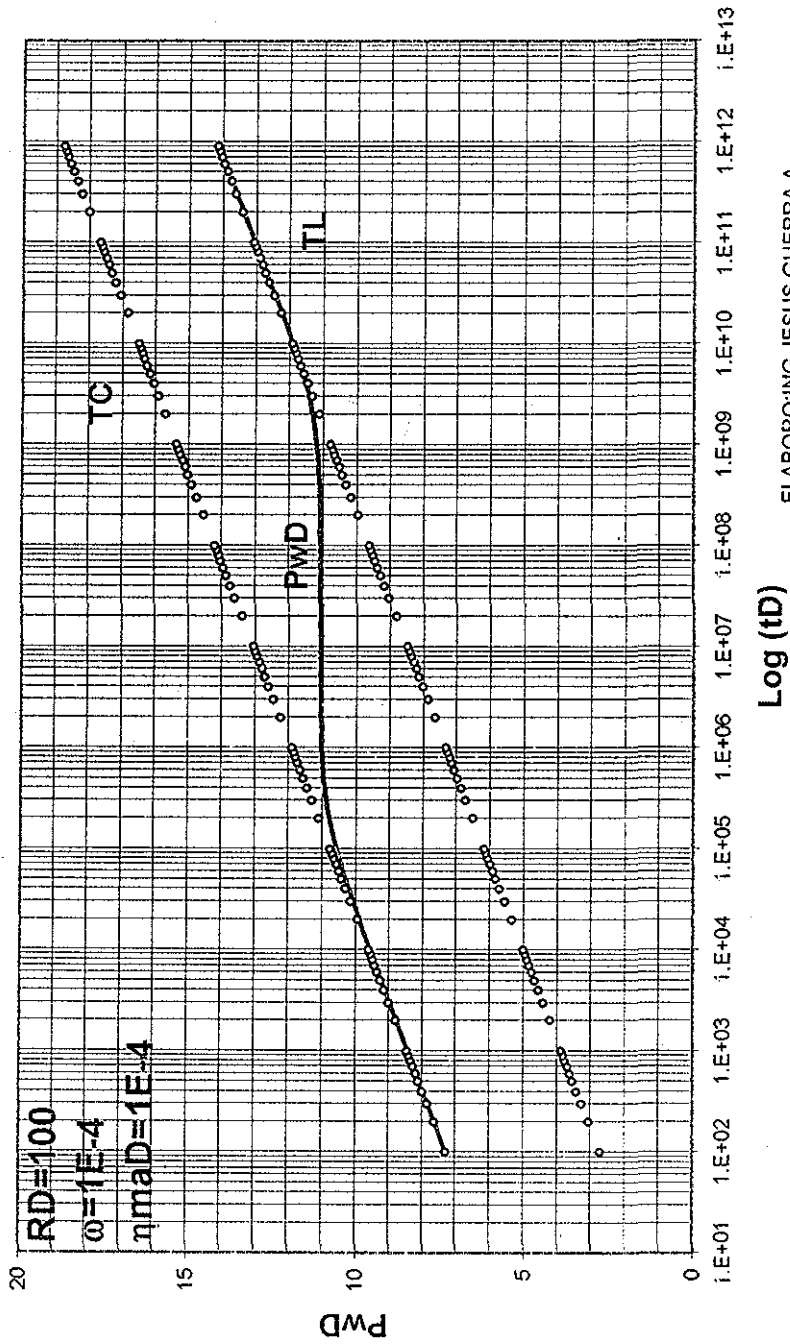


FIG. 3.10 SOLUCIÓN DE RESPUESTA DE PRESIÓN Y SOLUCIÓN APROXIMADA A TIEMPOS CORTOS Y LARGOS

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

III.7 MODELO DE FLUJO RADIAL INTERPOROSO TRANSITORIO CONVOLUCIONADO CON FRACTURA RODEADA POR BLOQUE DE MATRIZ ESFÉRICO INFINITO

III.7.1 FLUJO ESFÉRICO TRANSITORIO EN FRACTURA RODEADA POR MATRIZ ESFÉRICA INFINITA

La solución de este modelo es similar al expuesto en la formulación III.6.1, las variables adimensionales son las mismas, el fluido entra a la frontera interna a presión constante, la función de transformación a una ecuación en forma de flujo lineal es la misma y la diferencia es la dimensión infinita de la frontera externa, definida en variables reales de la siguiente manera:

Frontera externa: Yacimiento Infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r, t) = p_i$ (3.46)

En variables adimensionales: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0$ (3.47)

En términos de la variable de transformación B: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} B(r_D, t_D) = 0$ (3.48)

Aplicando T. de Laplace a la frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{B}(r_D, s) = 0$ (3.49)

Aplicando el método de T. de Laplace, se obtiene la respuesta de presión de flujo esférico en yacimiento infinito en términos de la variable de transformación \bar{B} dado por:

$$\bar{B}(r_D, s) = \frac{l}{s} e^{-\sqrt{s} [r_D - l]} \tag{3.50}$$

El gasto que entra a la fractura está definido por la ecuación 3.18, por lo tanto:

$$\bar{q}_D = \frac{l}{\sqrt{s_{ma}}} + \frac{l}{s_{ma}} \tag{3.51}$$

Sustituyendo la función que relaciona s_{ma} y s_f , se obtiene la función de transferencia del sistema matriz-fractura (Apéndice G):

$$\bar{q}_D = \frac{l}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{mat}}}} + \frac{l}{\frac{s_f}{\eta_{mat}}} \tag{3.52}$$

III.7.2 FLUJO RADIAL CON FLUJO ESFERICO INTERPOROSO TRANSITORIO EN MATRIZ ESFÉRICA INFINITA

La solución de este caso particular del modelo es similar al expuesto en la formulación III.6.2, las variables adimensionales son las mismas, la diferencia es la función de transferencia obtenida para una matriz de dimensión infinita. (Apéndice C)²⁵

La solución de la ecuación de respuesta de presión en el espacio de Laplace es:

$$\bar{p}_{FD}(r_D, s) = \frac{1}{s^{3/2}} \frac{K_0(r_D \sqrt{sf(s)})}{\sqrt{f(s)} K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (3.53)$$

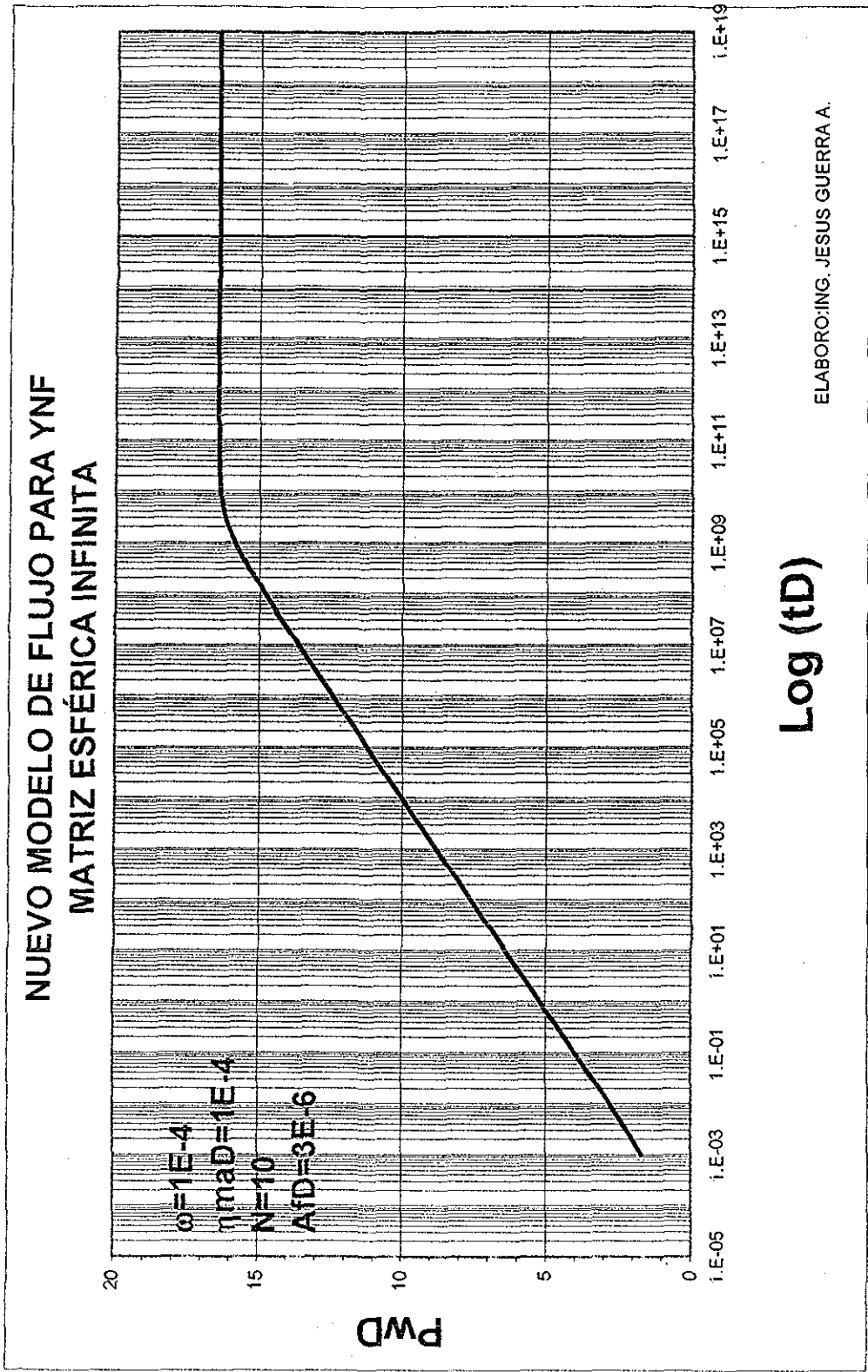
donde:

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) A_{FD} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} \right] \quad (3.54)$$

K_0 y K_1 ; son funciones modificadas de Bessel de segunda especie y de orden 0 y 1 respectivamente.

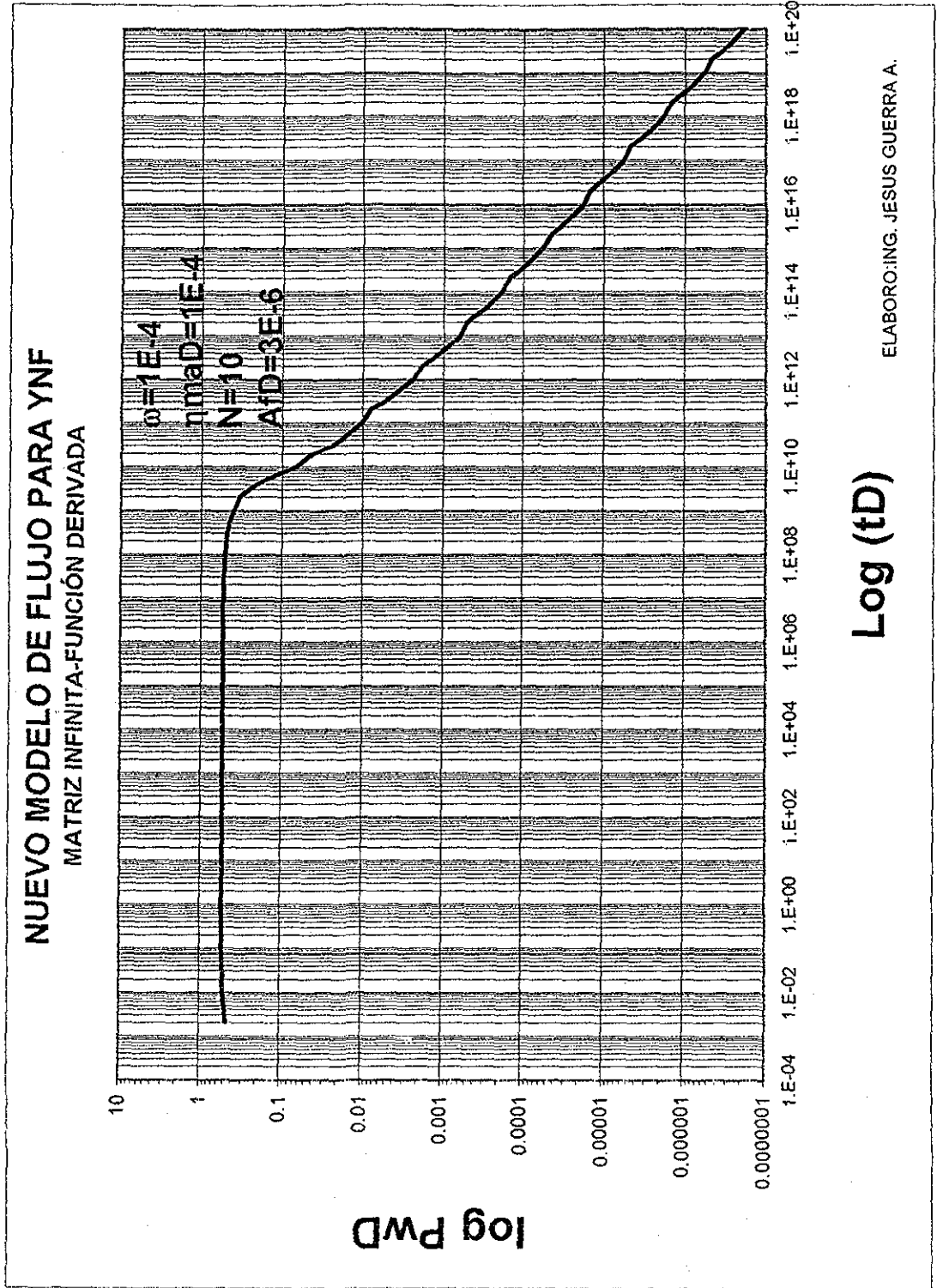
La solución en espacio real se obtiene utilizando el invertido numérico de Stehfest³¹. Los resultados obtenidos en espacio real son los presentados en la Figura 3.11 y 3.12.

La Figura 3.11 muestran en forma semilogaritmica la respuesta de presión para un Yacimiento Naturalmente Fracturado de matriz esférica infinita para valores de $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=10^{-4}$ y $A_{FD}=3E^{-6}$. La Figura 3.12 muestra la presión derivada del caso anterior en una gráfica Log-Log.



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

FIG. 3.11. SOLUCIÓN DE RESPUESTA DE PRESIÓN EN YNF CON FLUJO ESFÉRICO TRANSITORIO EN MATRIZ ESFÉRICA INFINITA. (GRAFICA SEMILOG)



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIG. 3-12 SOLUCIÓN DE RESPUESTA DE PRESIÓN EN YACIMIENTOS NATURALMENTE FRACTURADOS CON FLUJO ESFÉRICO TRANSITORIO EN MATRIZ INFINITA (GRAFICA LOG-LOG)

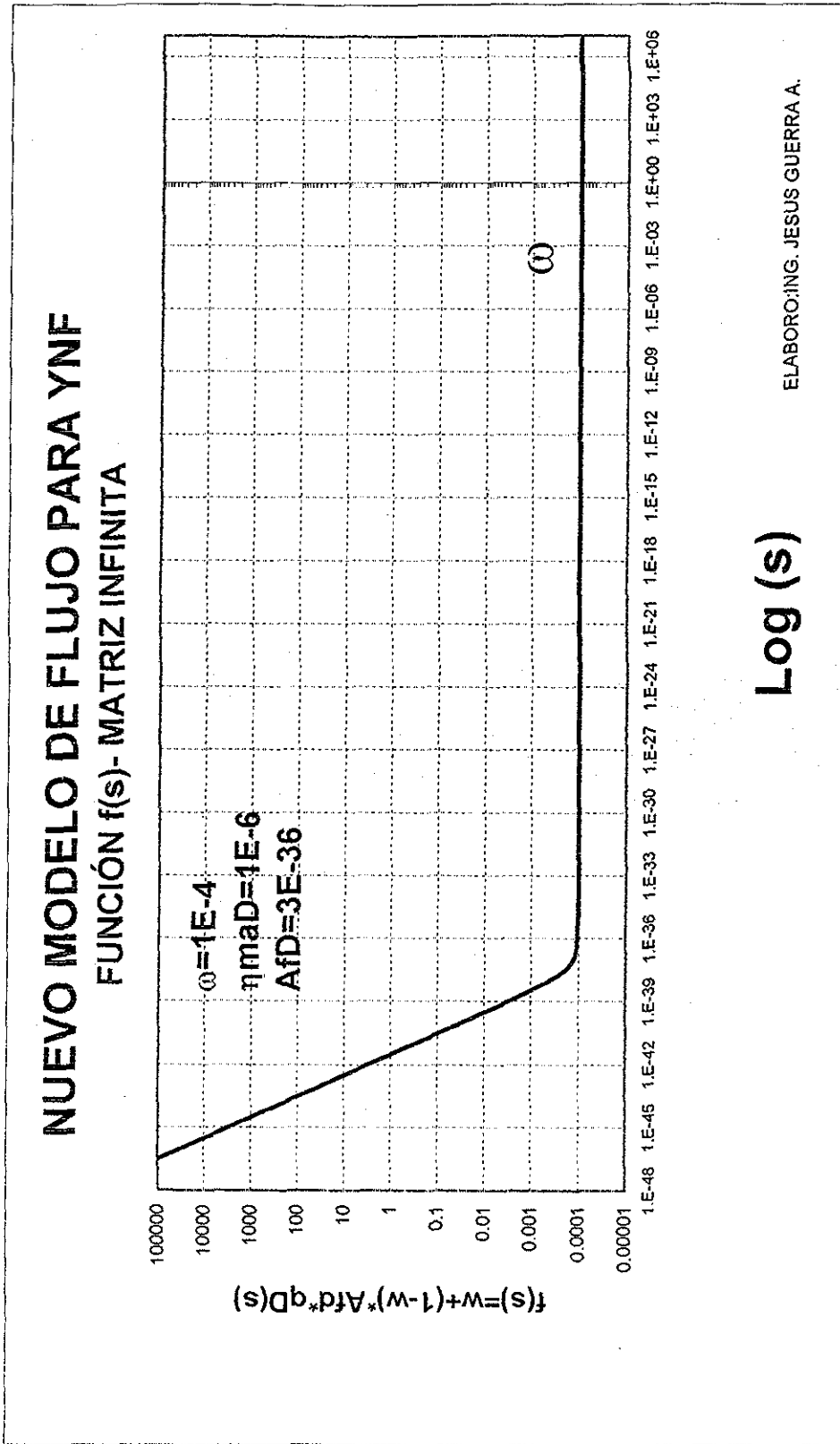


FIG. 3.13 COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN f(s) DE YACIMIENTO INFINITO PARA VALORES GRANDES Y PEQUEÑOS DE s.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Comportamiento de presión a tiempos cortos

Este comportamiento es igual al expresado en el caso de matriz finita: Usando las formas asintóticas de las funciones Bessel obtenemos la aproximación de la solución a tiempos cortos, $s \rightarrow \infty$:

La Figura 3.13 muestra la gráfica de la función de transferencia para el caso de matriz infinita cuando los valores de s son grandes ($s \rightarrow \infty$), en éstos casos la función $f(s)$ es aproximadamente igual a w :

Por lo tanto, la inversión analítica de la solución en espacio real en el pozo es:

$$P_{wD} = \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{t_D}{\omega} \right) + 0.8090701 \right] \quad (3.60)$$

Capítulo **IV**

ANÁLISIS DE RESULTADOS

Este capítulo tiene como objetivo analizar las soluciones analíticas obtenidas en el capítulo anterior, se menciona primeramente algunos resultados que se obtuvieron con la formulación de la fractura paralelepípeda rodeada por bloque de matriz cúbico (Fig. 3.1)

El gradiente de presión tanto en función de series de senos y cosenos como de términos exponenciales (Apéndice H) muestran convergencia lenta cuando se programa en espacio real y en espacio de Laplace. Estas ecuaciones representan el gasto que aporta el término fuente en la formación fracturada. El término fuente está definido como la fractura paralelepípeda rodeada por matriz cúbica.

Debido a que la convergencia de la solución de respuesta de presión en la fractura paralelepípeda, converge lentamente como se menciona en la sección III.2.1. del Capítulo 3 se propuso la aproximación de flujo esférico en un fractura rodeada por bloque de matriz esférico.

La solución en forma gráfica de la respuesta de presión y la presión derivada para este tipo de yacimiento naturalmente fracturado con flujo esférico transitorio en matriz esférica de dimensión finita e infinita se muestra a continuación.

Adicionalmente, se muestra también en forma gráfica las soluciones analíticas aproximadas de comportamiento para tiempos cortos y tiempos largos.

IV.1. RESULTADOS EN MATRIZ FINITA

La siguiente ecuación representa la distribución de presión en el pozo para yacimiento naturalmente fracturado con matriz esférica finita:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}} \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (4.1)$$

Donde:

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \left[\frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \right] \quad (4.2)$$

K_0 y K_1 ; son funciones modificadas de Bessel de segunda especie y de orden 0 y 1 respectivamente.

Las ecuaciones 4.1 y 4.2 son soluciones en espacio de Laplace y su comportamiento a tiempo real se obtiene utilizando el invertido numérico de Stehfest³¹ (1970).

Las soluciones invertidas fueron programadas en lenguaje Fortran y en hojas de cálculo Excel³². Durante los procesos de obtención de resultados por ambos programas, se observó que la programación de la función $\text{Tanh}(x)$, presenta problemas de aproximación para argumentos pequeños, esto influye en la obtención correcta de la línea de comportamiento para tiempos grandes del modelo propuesto, en repetidas ocasiones se analizaron ambos programas presentando el mismo problema, finalmente la solución adecuada fue programar de dos formas diferentes la función $\text{Tanh}(x)$ en el mismo programa de inversión. Se utilizó para un rango definido la aproximación de la $\text{Tanh}(x)$ en forma de serie términos³⁷ y para otro rango se utilizó directamente la función $\text{Tanh}(x)$ como lo exporta el programa Fortran o Excel.

El comportamiento del modelo propuesto depende de tres variables: difusividad hidráulica adimensional (η_{maD}), almacenamiento adimensional en la fractura (ω) y radio adimensional de la matriz (R_D). Los resultados que a continuación se presentan, corresponden a 120 casos analizados con los siguientes valores:

ω	η_{maD}	R_D
1E-4	1E-8	2
1E-3	1E-7	5
1E-2	1E-6	10
1E-1	1E-5	20
	1E-4	50
		100

TABLA 4.1 DATOS DE ANÁLISIS PARA 120 CASOS DE COMPORTAMIENTO

En forma general, se muestran gráficamente tres casos importantes tanto para la respuesta de presión del yacimiento como su comportamiento de función derivada:

CASO	ω	η_{maD}	R_D
A	Cte.	Cte.	Variable
B	Cte.	Variable	Cte.
C	Variable	Cte.	Cte.

TABLA 4.2. TIPOS DE COMPORTAMIENTO PARA EL MODELO PROPUESTO

Las siguientes figuras muestran los casos expuestos anteriormente.

La Figura 3.7, muestra la respuesta de presión de un yacimiento naturalmente fracturado con flujo esférico transitorio en la matriz esférica finita. Se observan las dos líneas rectas paralelas semilogarítmicas características de estas formaciones fracturadas⁷. Las dos líneas recta tienen una pendiente de $m=0.5$ y la tercera línea recta representa el periodo transitorio. La pendiente de esta tercera línea recta depende de los valores característicos sistema matriz fractura: ω y η_{maD} . Para este caso, las variables tienen los siguientes valores $\omega=10^{-4}$ y $\eta_{maD}=10^{-4}$.

La Figura 3.8, muestra la respuesta de presión derivada del yacimiento naturalmente fracturado anterior. En ésta Figura se observa una línea recta, un decaimiento de la presión derivada y nuevamente la línea recta, las líneas rectas que se observan representan el flujo radial primero en el medio más permeable que son las fracturas y después en el menos permeable como es la matriz. El decaimiento tiene una forma V, como lo explica Gringarten¹⁹, el cual corresponde a un flujo interporoso pseudo estacionario, obtenido por Warren y Root⁷, sin embargo este comportamiento se obtuvo con flujo interporoso transitorio en la matriz. El flujo interporoso transitorio representa la tendencia al equilibrio de presión entre los dos medios¹⁹.

La Figura 3.10 muestra en una gráfica semilogarítmica la solución general de comportamiento para yacimiento naturalmente fracturado y la solución aproximada a tiempos cortos y largos del mismo yacimiento. Ambas aproximaciones presentan buen ajuste con la solución general y estas líneas rectas siempre son constantes aún cuando el yacimiento tenga diferentes valores de R_D , η_{maD} o ω .

A continuación se muestran gráficamente los casos mencionados en la tabla 4.2. para diferentes condiciones de comportamiento.

CASO A

Este primer caso representado en la Figura 4.1, considera seis diferentes tamaños de bloque de matriz finita (R_D variable), desde $R_D=2$ hasta $R_D=100$, el almacenamiento en las fracturas $\omega=10^{-4}$ y la difusividad hidráulica, $\eta_{maD}=10^{-8}$, permanecen constantes.

Cuando $R_D=2$, la dimensión del tamaño de bloque de matriz es 2 veces el tamaño del radio de la fractura, con esta dimensión la matriz muestra flujo lineal en la matriz. A medida que el radio adimensional crece, la geometría de flujo cambia, pasa de flujo lineal a flujo radial y para dimensiones grandes de matriz se presenta flujo esférico.

La Figura 4.2, muestra la presión derivada para varios valores adimensionales de matriz (R_D variable), se observa que cuando $R_D=2$, la derivada de la presión representa comportamiento de flujo lineal, cuando R_D se incrementa cambia a flujo radial y finalmente a flujo esférico.

La Figura 4.3, muestra también la variación de R_D , con un valor de difusividad hidráulica adimensional mayor al comportamiento anterior, $\eta_{maD}=10^{-4}$, el comportamiento de presión para ambos casos presenta gráficas similares entre si, esta gráfica y la de presión derivada (Figura 4.4) son similares a las Figura 4.1 y 4.2, la diferencia entre ambos comportamientos, es el tiempo en que aparece la respuesta de presión, si $R_D=50$ con $\omega=10^{-4}$ para ambos casos y con difusividades adimensionales diferentes, se observa que cuando $\eta_{maD}=10^{-8}$ el tiempo de respuesta es a $t_D=10^5$ y cuando $\eta_{maD}=10^{-4}$ la respuesta de presión es a $t_D=10$, la diferencia son 3 ciclos logarítmicos de tiempo, físicamente podemos decir que medida que el producto $(\phi c)k_{ma}$ disminuye se requiere más tiempo para detectar la respuesta del yacimiento para un tamaño de matriz determinado. La respuesta de presión derivada también muestra un desplazamiento de 3 ciclos logarítmicos, y se presenta más rápido cuando la η_{maD} aumenta.

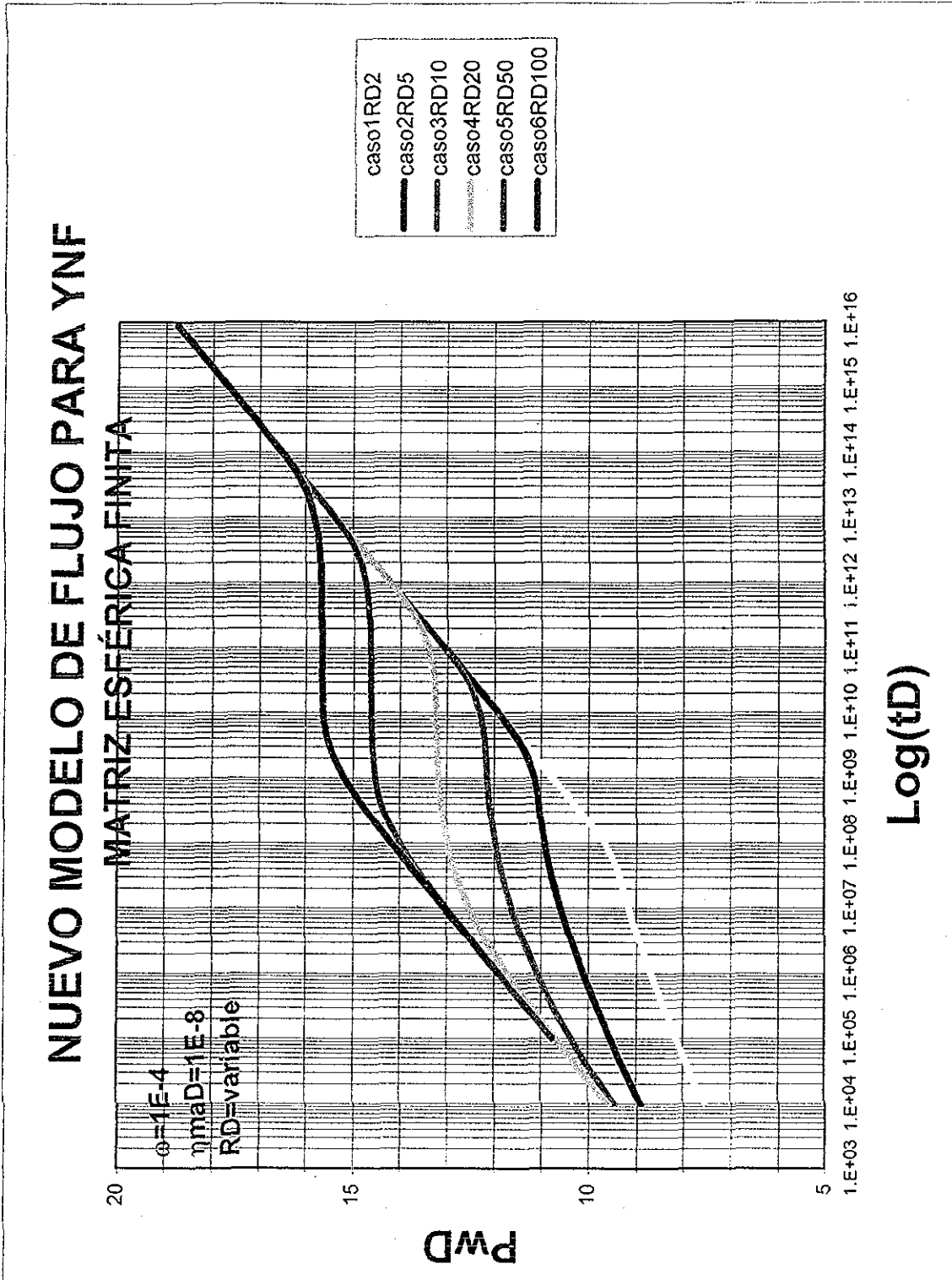


FIG.4.1-RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRÁFICA SEMILOG PARA SEIS CASOS. $\phi=1E-4$, $\eta_{maD}=1E-8$ y RD VARIABLE

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

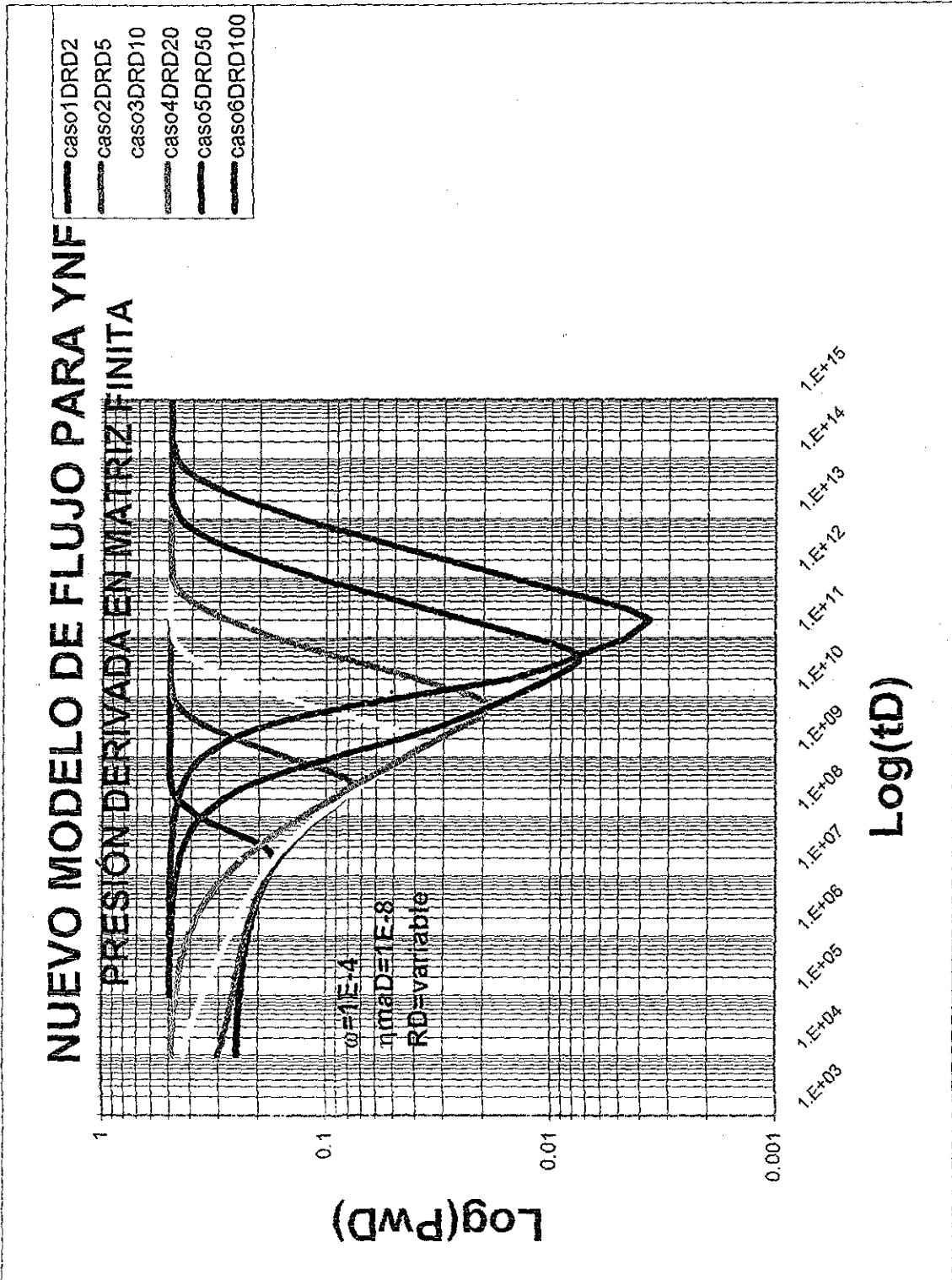


FIG.4.2-RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA SEIS CASOS, $\omega=1E-4, \eta_{maD}=1E-8$ y RD VARIABLE.

**TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN**

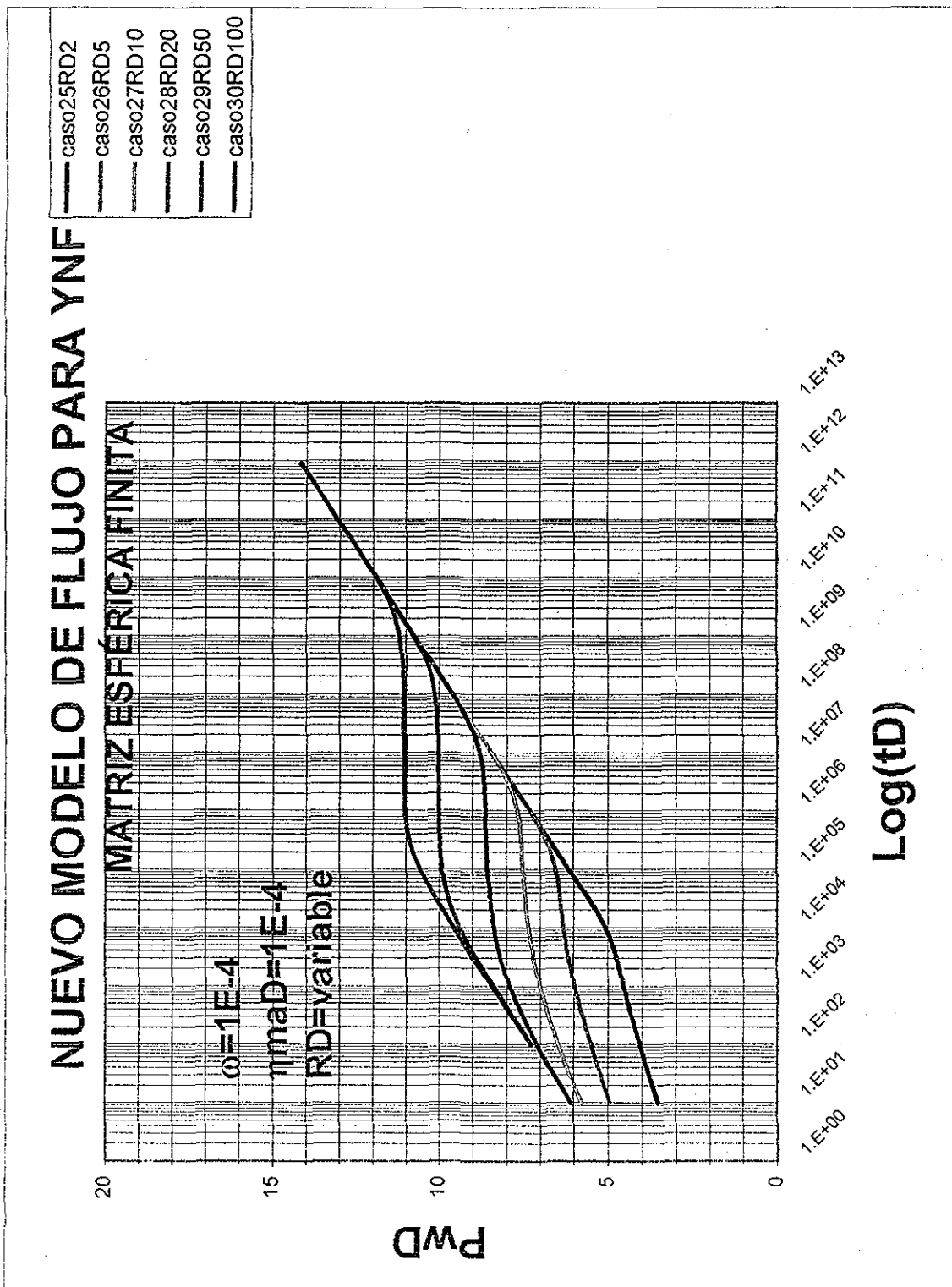


FIG.4.3- RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRÁFICA SEMILOG PARA SEIS CASOS, $\omega=1E-4$, $\eta_{maD}=1E-4$ y RD VARIABLE

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

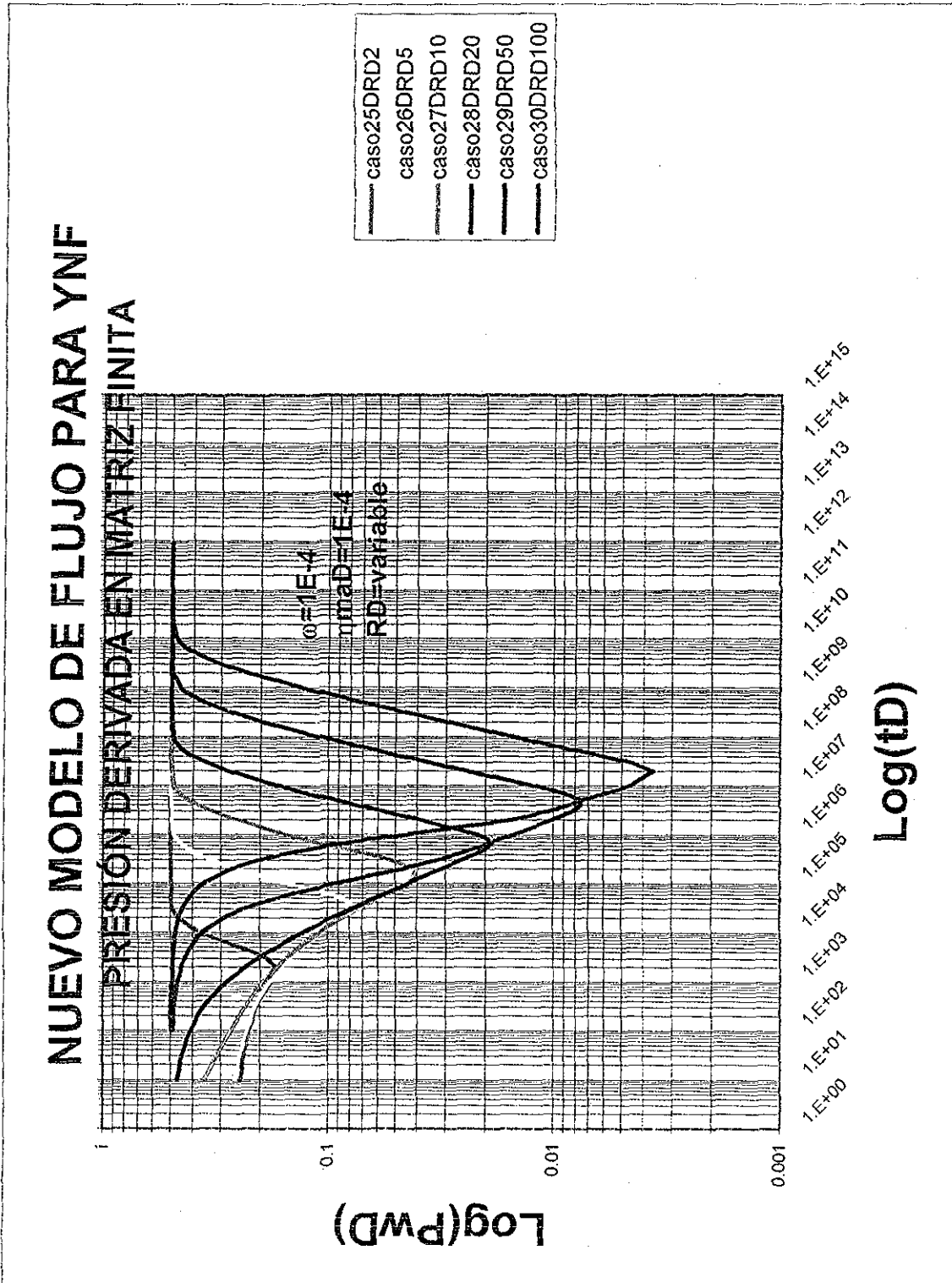


FIG.4.4-RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA SEIS CASOS, $\omega=1E-4$, $\eta_{maD}=1E-4$ y RD VARIABLE

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

CASO B

Este caso considera constantes los valores de ω y R_D , la variación de η_{maD} se encuentra entre 10^{-4} y 10^{-8} . El efecto de la difusividad hidráulica adimensional sobre la respuesta de presión del yacimiento se muestra en las Figuras 4.5, 4.7 y 4.9 para diferentes valores de R_D . También se realiza el análisis para diferentes tamaños de matriz con la finalidad de mostrar el comportamiento de flujo tanto en el frontera interna ($R_D=2$) como para valores grandes de tamaño de matriz ($R_D=20$ y $R_D=100$). La respuesta de presión derivada se muestra en las Figuras 4.6, 4.8 y 4.10, cada una de ellas corresponde a los diferentes valores de R_D . La Figura 4.5 muestra cinco casos de comportamiento de yacimiento, con variación de difusividad hidráulica adimensional, se observa que cuando la difusividad disminuye, la respuesta de presión tarda en presentarse y la presencia de flujo lineal es invariable con el cambio de difusividad.

Las Figuras 4.7 y 4.9 representan casos similares al anterior, la diferencia es el tamaño del bloque de matriz, para uno es $R_D=20$ y para otro es $R_D=100$ respectivamente, el efecto de η_{maD} para ambos casos es similar, una disminución de la difusividad, retrasa el tiempo de respuesta de presión del yacimiento.

Para $R_D=20$, se observa flujo esférico en la matriz y para $R_D=100$ el flujo cambia a radial. Para ambas figuras las dos líneas rectas paralelas semilogarítmicas se pueden observar gráficamente y su posición no cambia, cada curva de presión se desplaza a la derecha horizontalmente y hacia arriba verticalmente cuando η_{maD} disminuye. La respuesta de la presión derivada para estos casos se muestra en las Figuras 4.6, 4.8 y 4.10. La Figura 4.6, muestra un cambio brusco de dos periodos de flujo, Lineal y Radial para $R_D=2$, en este caso la duración del periodo transitorio es tan rápido que difícilmente puede ser observado, en cambio, la Figura 4.8 muestra flujo esférico en la matriz, el periodo transitorio es visible y el flujo radial a tiempos grandes es también notorio.

Otro caso es la Figura 4.10, aquí el tamaño de la matriz es 100 veces el tamaño de la fractura, $R_D=100$, el flujo en la matriz es radial, se observa claramente el periodo transitorio y finalmente el flujo nuevamente es radial.

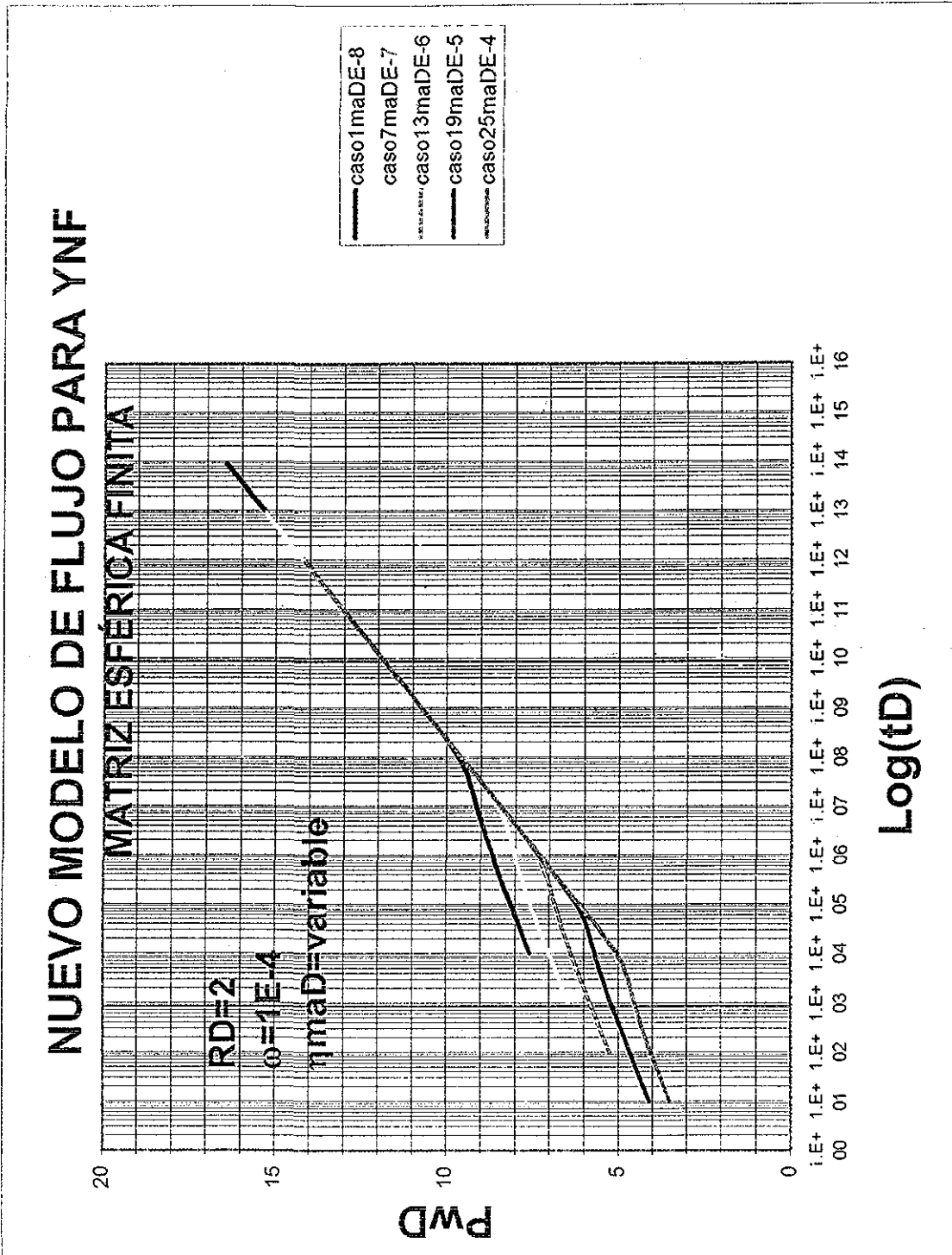


FIG. 4.5 RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRÁFICA SEMILOG PARA CINCO CASOS, $\omega=10^{-4}$, $\eta_{maD}=\text{VARIABLE}$ Y $RD=2$

**TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN**

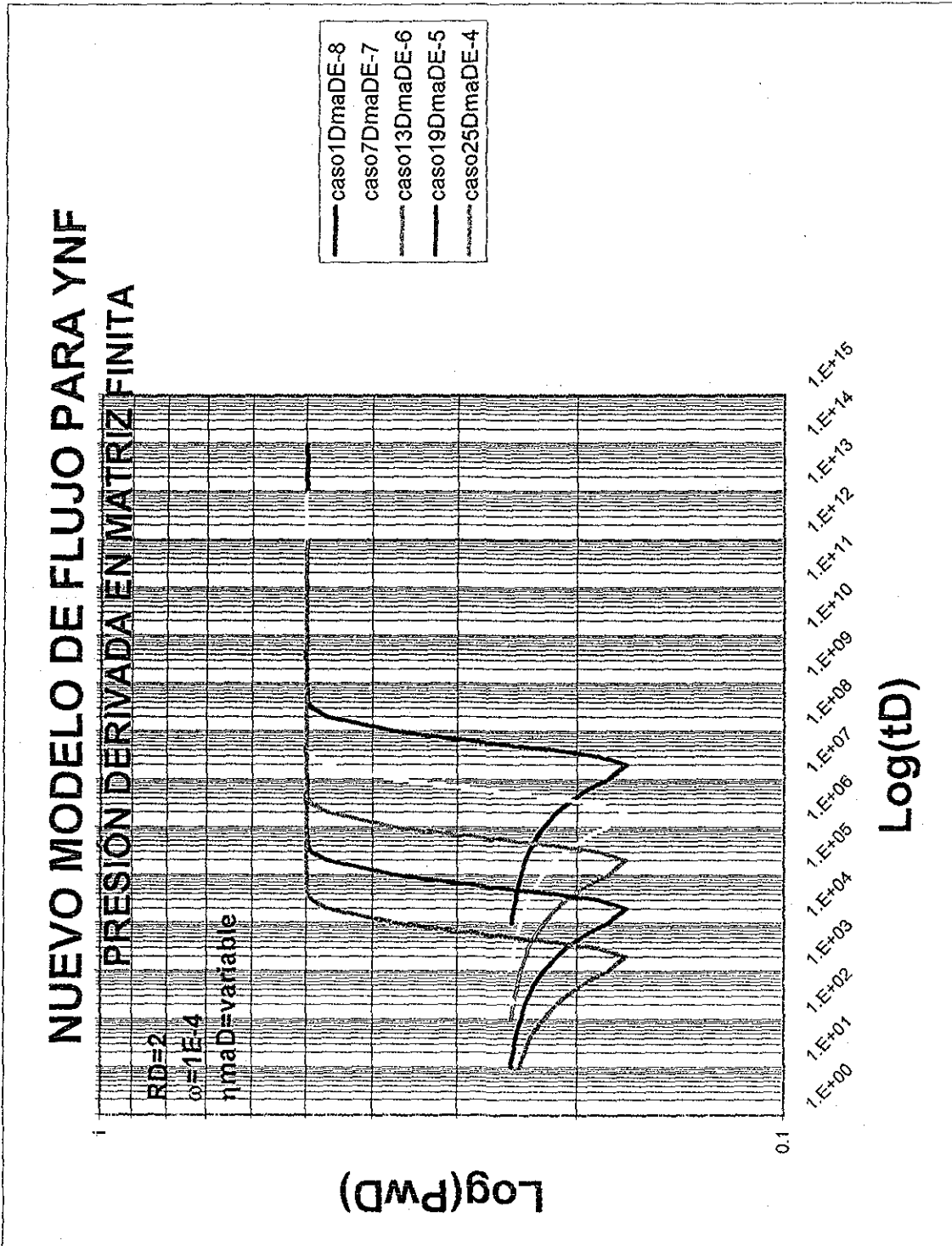


FIG. 4.6 RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA CINCO CASOS $\omega=10^{-4}$, $\eta_{ma} D= VARIABLE$ Y $RD=2$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

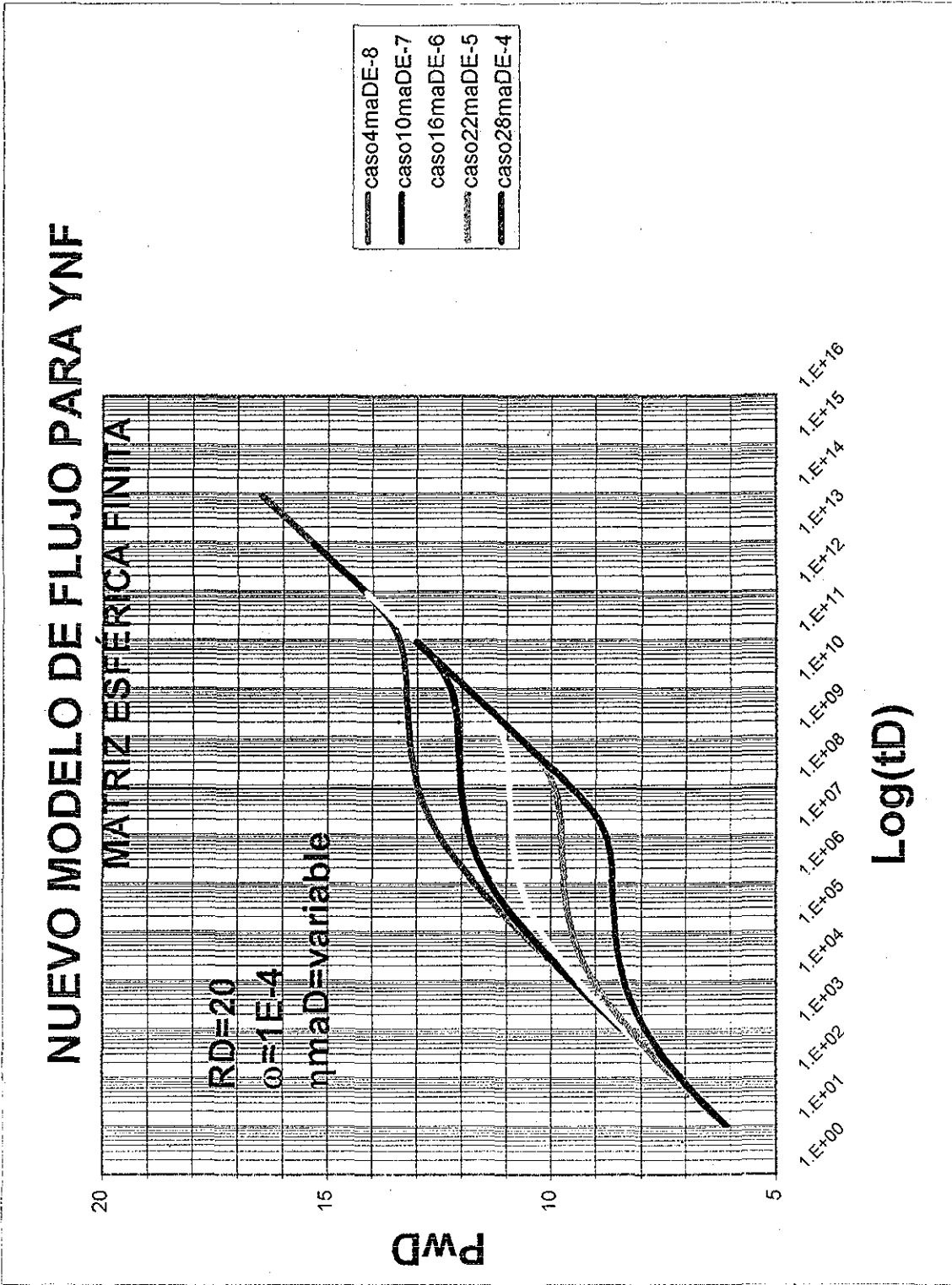


FIG.4.7- RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRAFICA SEMILOG PARA CINCO CASOS, $\omega=1E-4$, RD=20 y η_{maD} VARIABLE

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

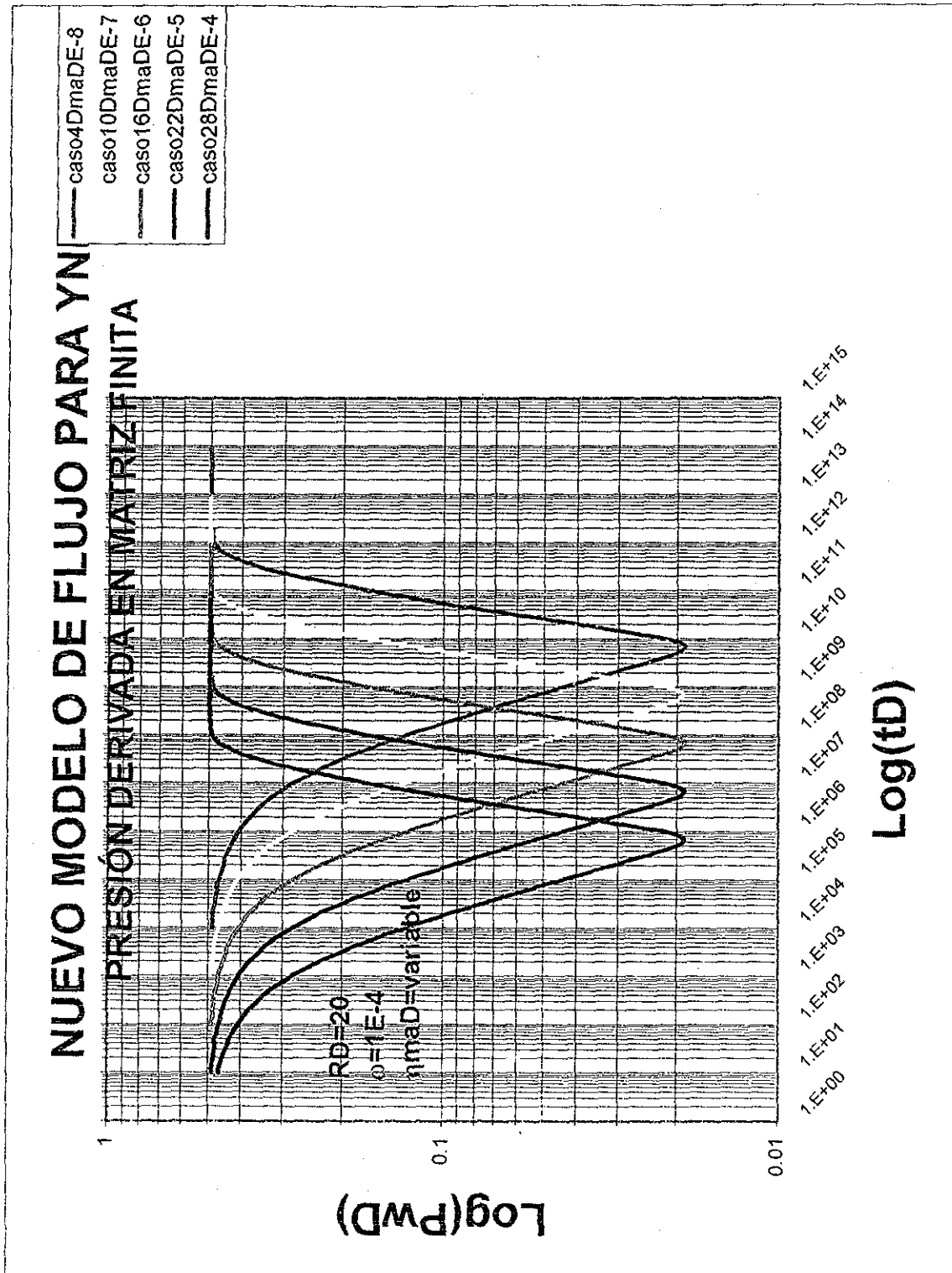


FIG. 4.8-RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA CINCO CASOS. $\phi=1E-4$, $RD=20$ y ηMaD VARIABLE

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

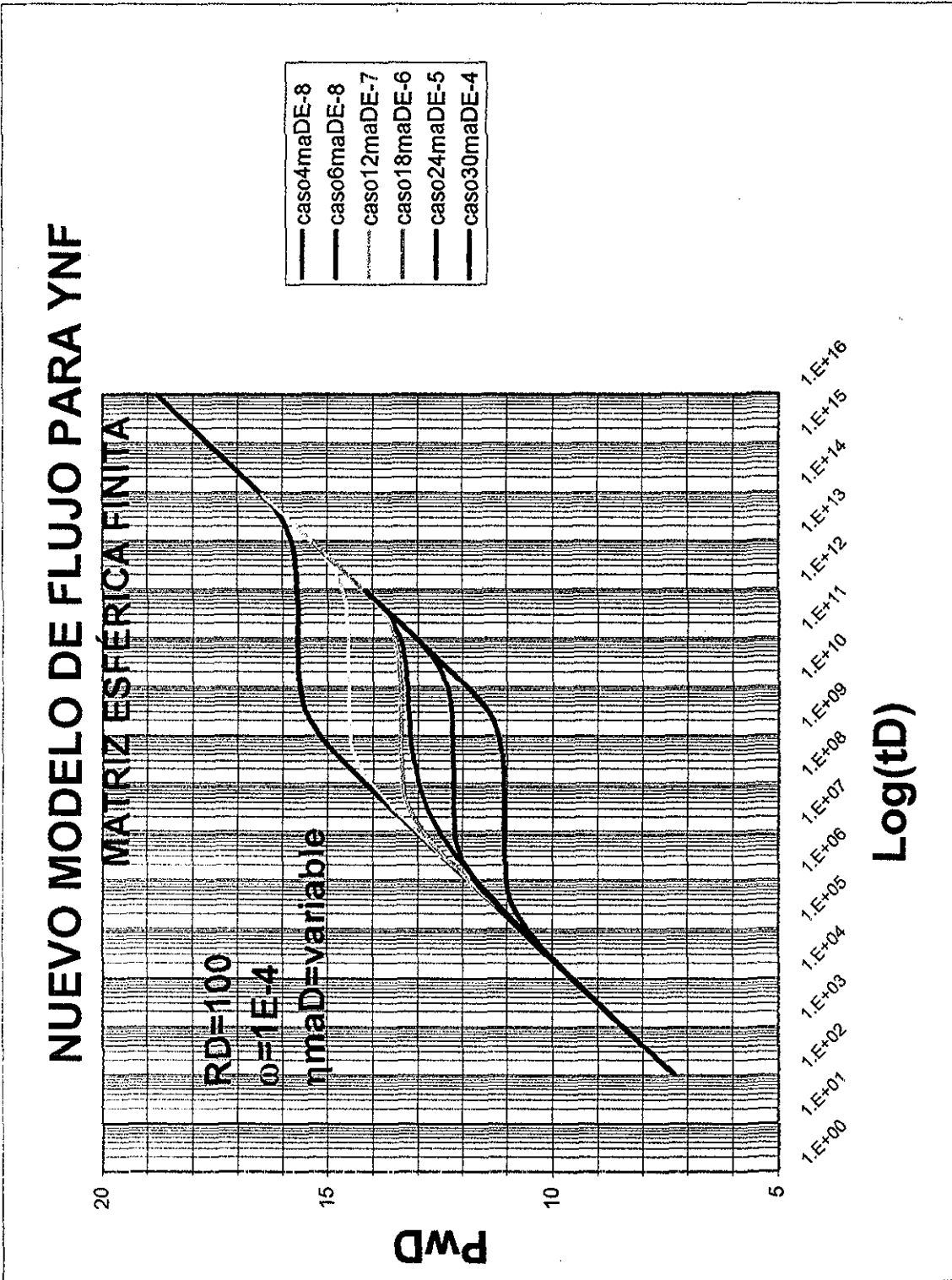


FIG 4.9- RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRÁFICA SEMILOG PARA SEIS CASOS, $\omega=1E-4$, RD=100 y η_{maD} VARIABLE

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

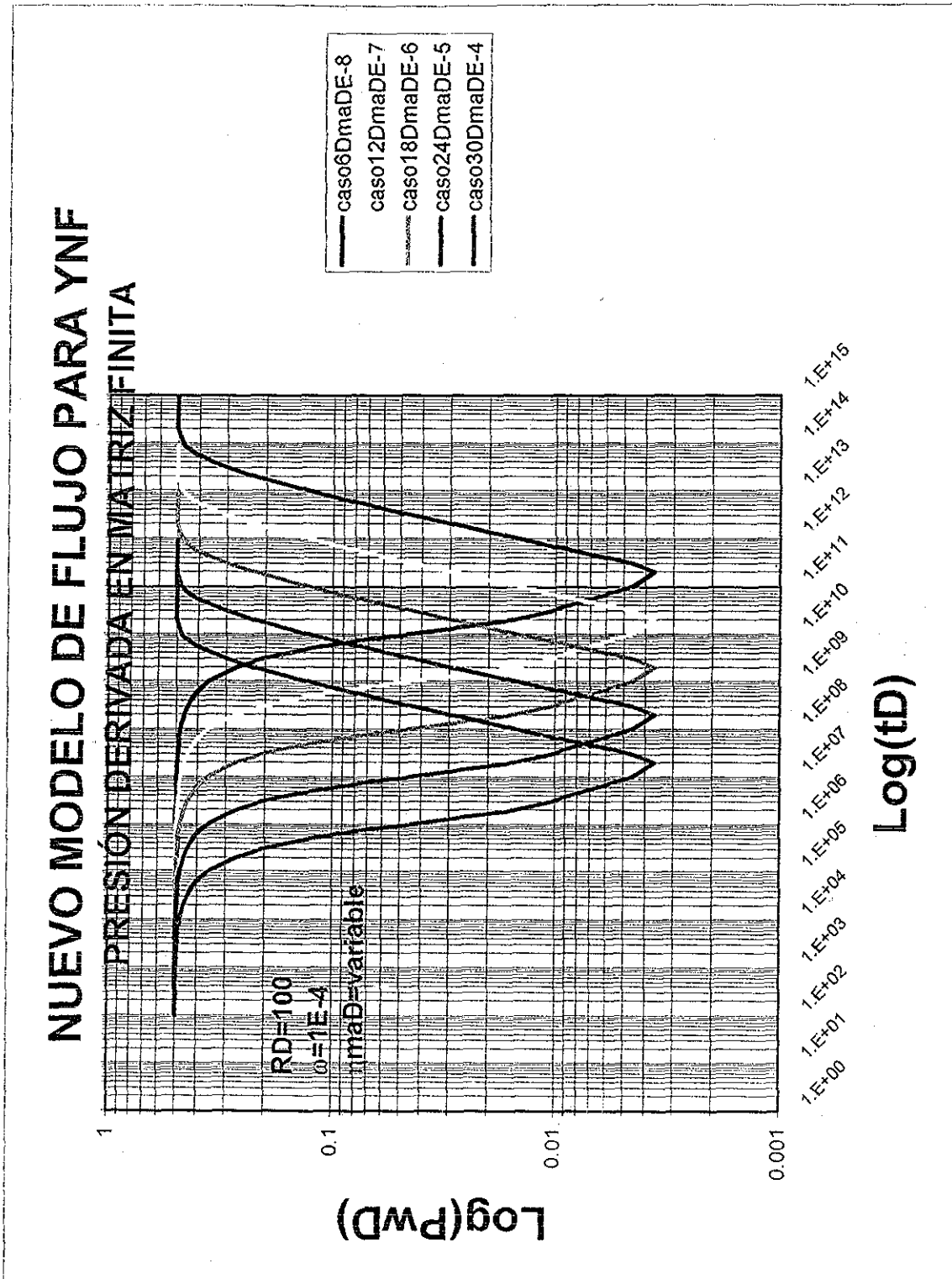


FIG. 4.10-RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA SEIS CASOS, $\omega=1E-4$, $RD=100$ y ηmaD VARIABLE

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

CASO C

El tercer caso de análisis considera constantes las variables η_{maD} y R_D , la variable ω varía entre 10^{-1} y 10^{-4} . El efecto del almacenamiento adimensional en la fractura (ω) sobre la respuesta de presión del yacimiento se muestra en las Figuras 4.11, 4.13 y 4.15 para dos valores diferentes de R_D , esto con la finalidad de mostrar el comportamiento de flujo cerca de la frontera interna ($R_D=2$) y para tamaños grandes de matriz ($R_D=100$). La respuesta de presión derivada se muestra en las Figuras 4.12, 4.14 y 4.16, cada una de ellas corresponde a los diferentes valores de R_D .

La Figura 4.11 muestra cuatro casos de comportamiento de yacimiento con variación de ω ; se observa que cuando ω se incrementa de 0.01 a 0.1, la gráfica de respuesta de presión tiende a ser una sola línea de comportamiento, en la Figura 4.15 se observa mejor este comportamiento, porque se muestra cuatro casos de análisis y se incluyen los valores límite de ω , cuando $\omega=1$, todo el fluido está almacenado en las fracturas y la respuesta de presión del yacimiento se aproxima al comportamiento homogéneo, similarmente al comportamiento definido por Warren y Root⁷ y cuando $\omega=0$ todo el fluido está contenido en la matriz.

Las Figuras 4.13 y 4.15 muestran el efecto de la variación de η_{maD} cuando R_D es fijo y ω varía de 10^{-1} a 10^{-4} , para la primera Figura la difusividad es $\eta_{\text{maD}}=10^{-8}$ y para la segunda $\eta_{\text{maD}}=10^{-4}$, la comparación entre ellas define que cuando η_{maD} disminuye, se requiere más tiempos para observar la respuesta de presión del yacimiento.

Cuando el tamaño de la matriz es $R_D=2$, el periodo transitorio es tan corto que difícilmente puede apreciarse con claridad (Figura 4.11) sin embargo cuando el tamaño de bloque de matriz es 100 veces el tamaño del radio de la fractura ($R_D=100$), este periodo se observa con mayor claridad en las Figuras 4.13 y 4.15.

Las Figuras 4.12, 4.14 y 4.16 muestran la respuesta de presión derivada para los casos anteriores.

La variación del almacenamiento en la fractura (ω) modifica el comportamiento de flujo en la matriz, el cambio de flujo es más drástico cuando $R_D=2$, descrito en la Figura

4.12, en esta gráfica se observa que el flujo es lineal cuando ω tiende a cero, pero se aproxima a esférico pasando por radial a medida que ω crece hacia uno.

La Figura 4.14 muestra el mismo caso C para un tamaño de matriz de $R_D=100$, los cambios de la pendiente también se observan en esta gráfica aunque es más notorio cuando ω se aproxima a uno. Los límites de ω se muestran en la Figura 4.16, en este gráfico se observa que cuando ω se aproxima a uno, el valor de la pendiente tiende a 0.5 y la presencia del periodo transitorio se hace menos notoria hasta que desaparece cuando ω es igual a 1, esto corresponde al comportamiento homogéneo definido por Warren y Root⁷. Cuando ω tiende a cero, el periodo transitorio es más notorio, debido a que los dos medios tiene un contraste fuerte de permeabilidades.

El ajuste de las soluciones aproximadas a tiempos cortos y largos se mostró primeramente en la Fig. 3.9 del Capítulo 3, en este gráfico se observa que las soluciones aproximadas presentan buen ajuste con el comportamiento de presión para una yacimiento de $R_D=100$, $\omega=10^{-4}$ y $\eta_{maD}=10^{-4}$, ahora se presenta la Figura 4.17 que muestra el comportamiento de presión para los seis casos expuestos en la Figura 4.7 y las soluciones aproximadas a tiempos cortos y largos, se observa un ajuste aceptable de estas aproximaciones con las soluciones analíticas generales de comportamiento del yacimiento, también se observa que la difusividad hidráulica afecta el tiempo de respuesta del yacimiento pero no al comportamiento de estas dos líneas rectas semilogarítmicas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

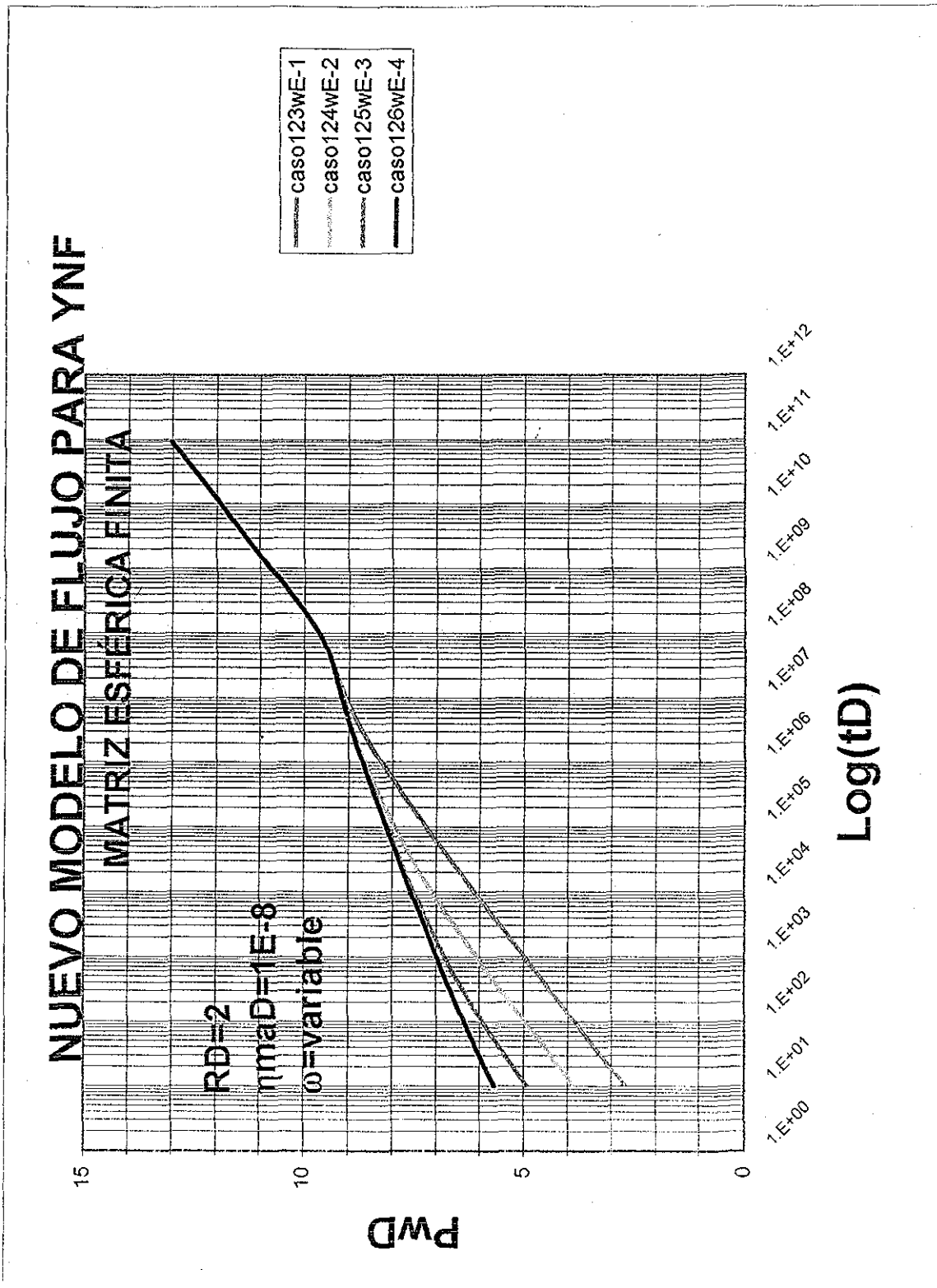


FIG. 4.11 RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRÁFICA SEMILOG PARA CUATRO CASOS CON $RD=2$, $\eta_{maD}=1E-8$ y $\omega=VARIABLE$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

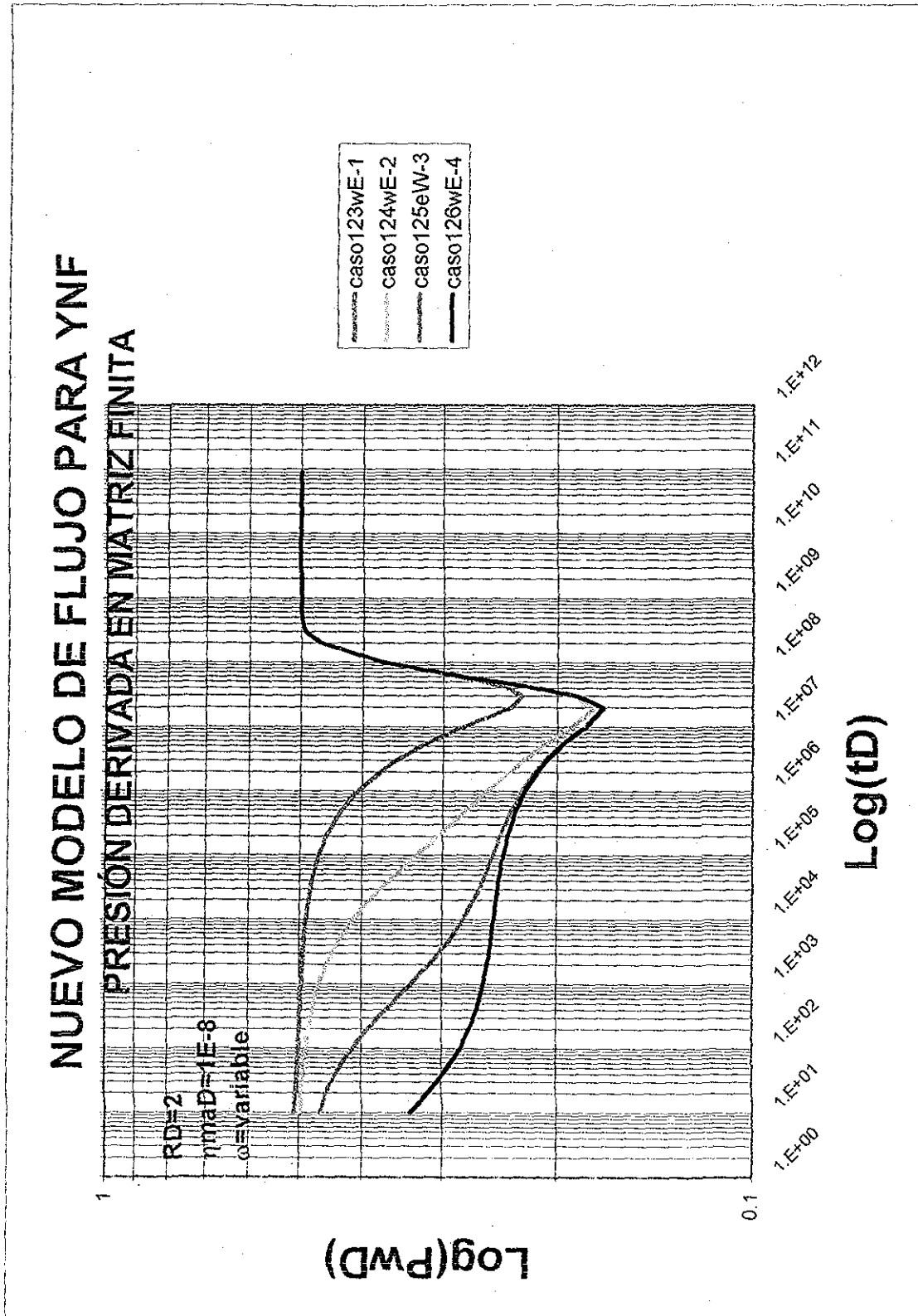


FIG.4.12 RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA CUETRO CASOS CON RD=2, $\eta_{maD}0\ 1E-8$ y ω VARIABLE

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

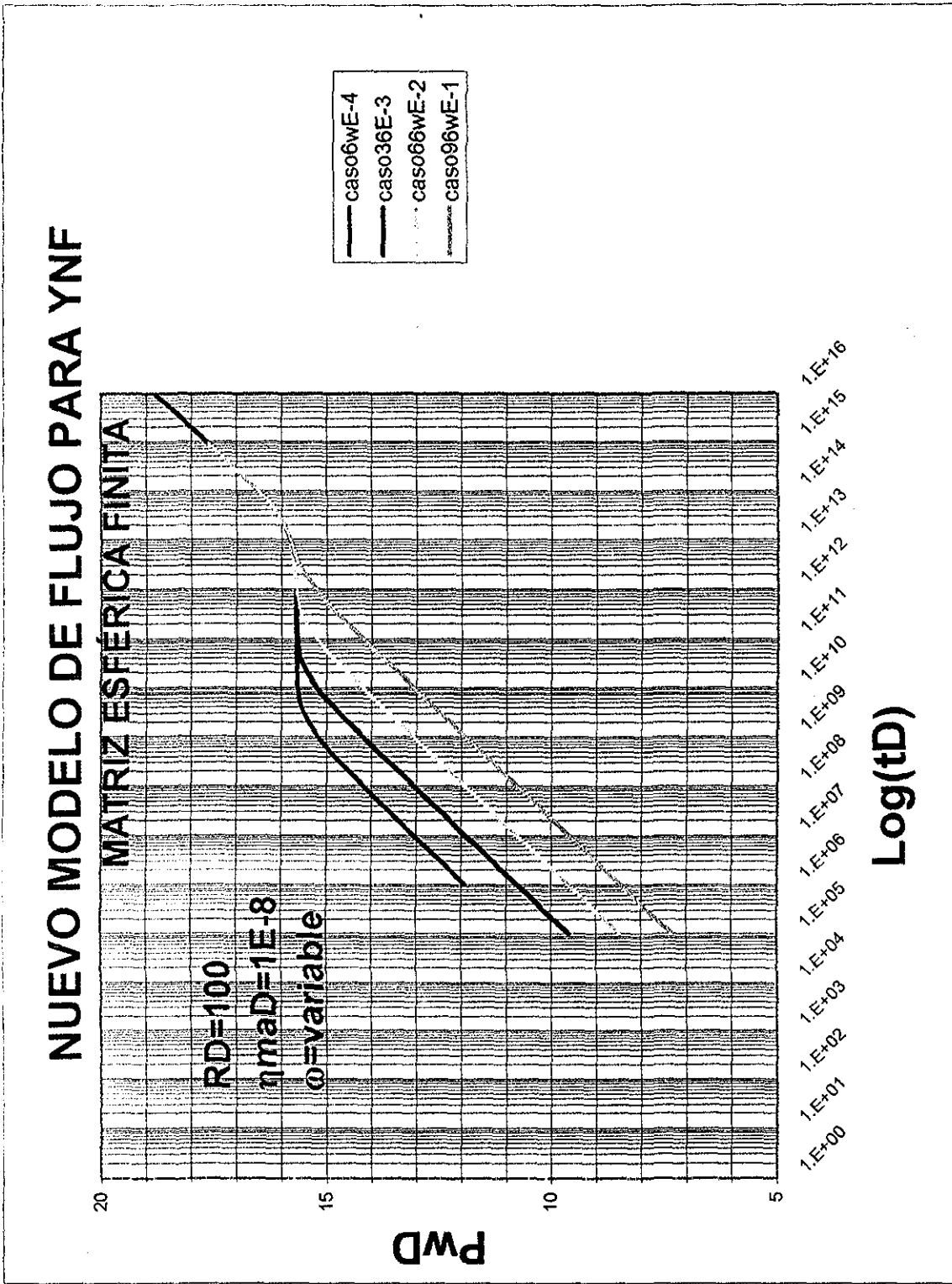
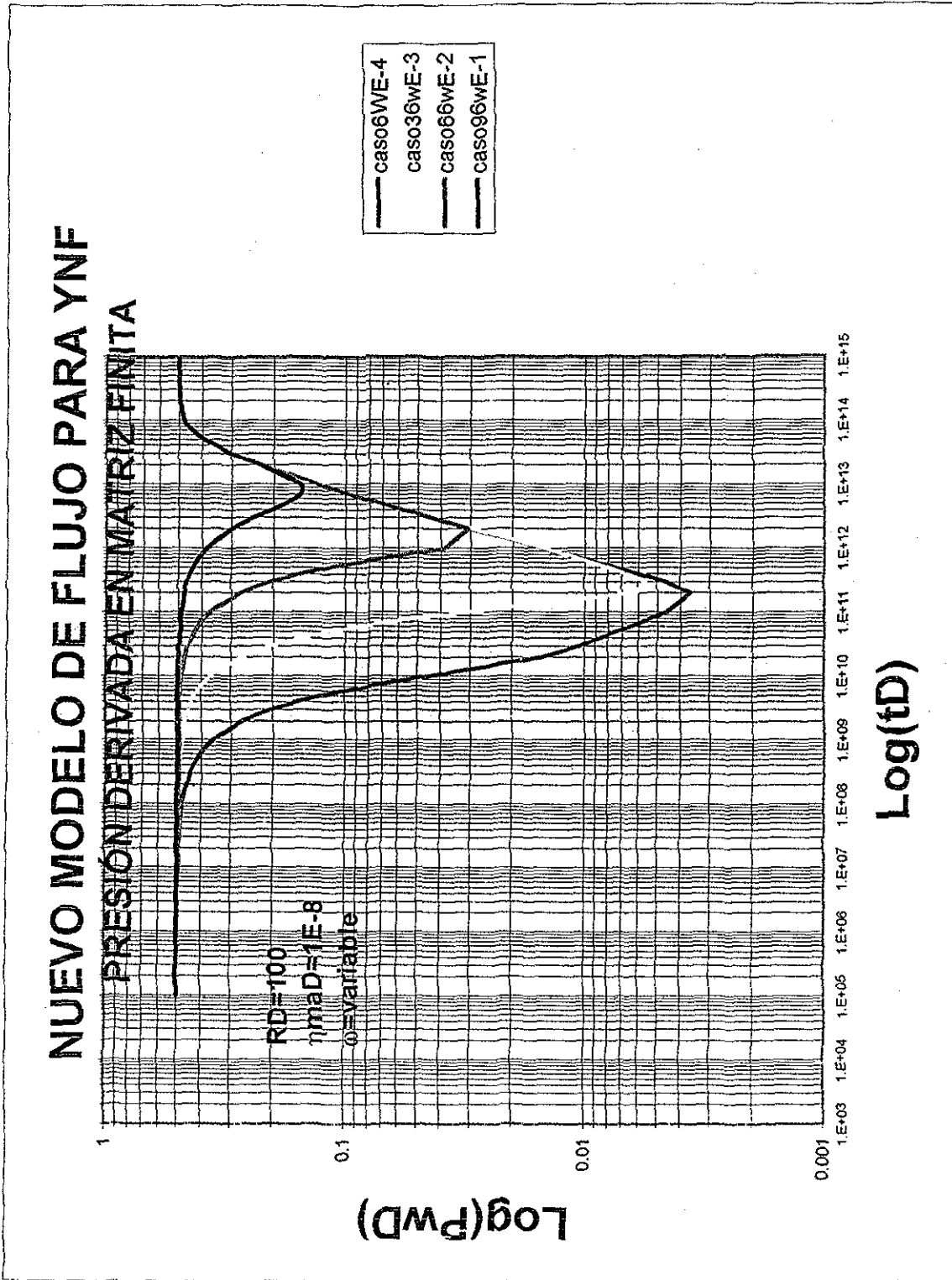


FIG.4.13-RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRFICA SEMILOG PARA CUATRO CASOS, RD=100, $\eta_{maD}=1E-8$ Y ω VARIABLE.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

FIG.4.14- RESPUESTA DE PRESION DERIVADA EN GRÁFICA LOG-LOG PARA CUATRO CASOS CON RD=100, $\eta_{maD}=1E-8$ Y ϕ VARIABLE

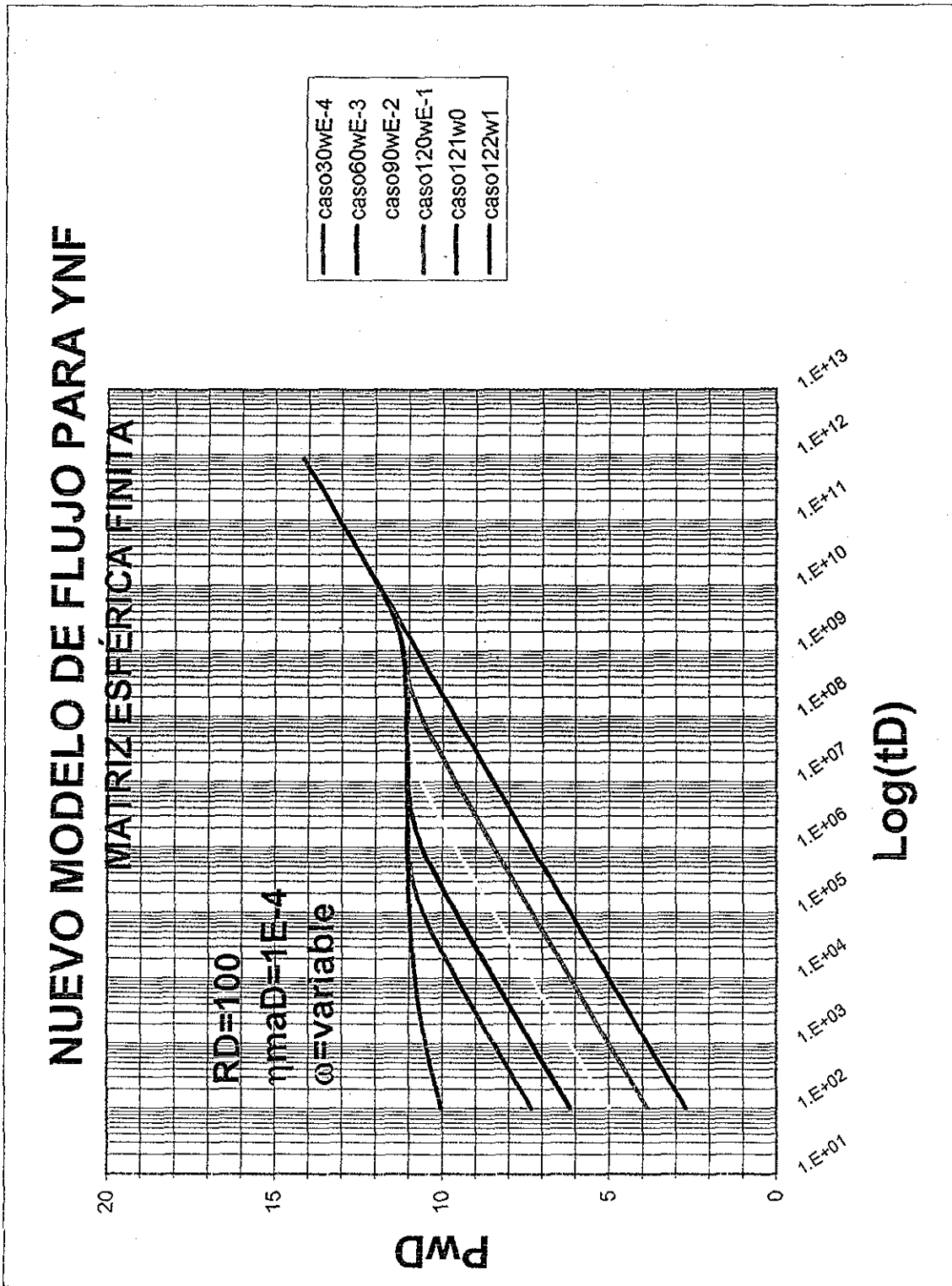
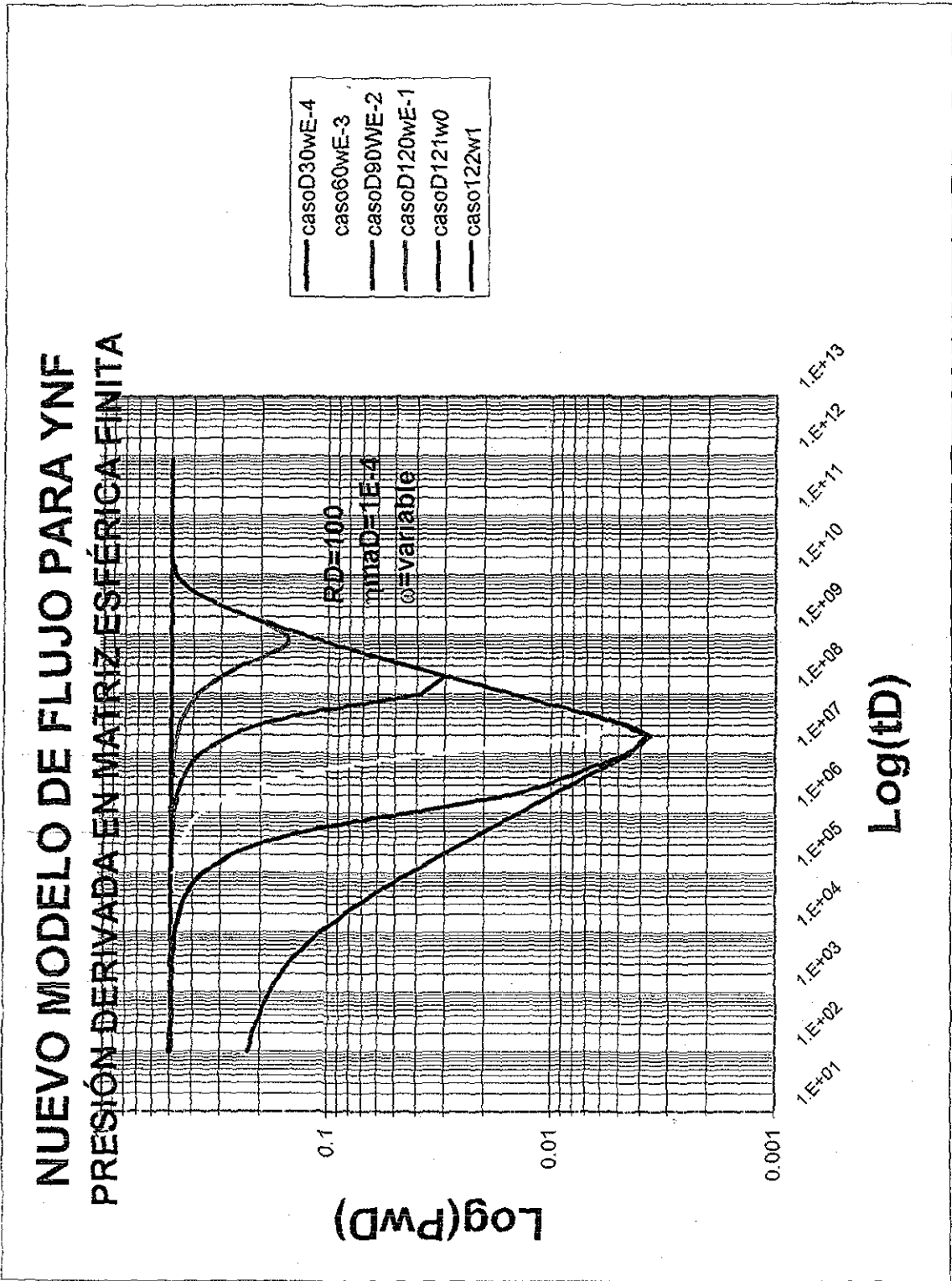


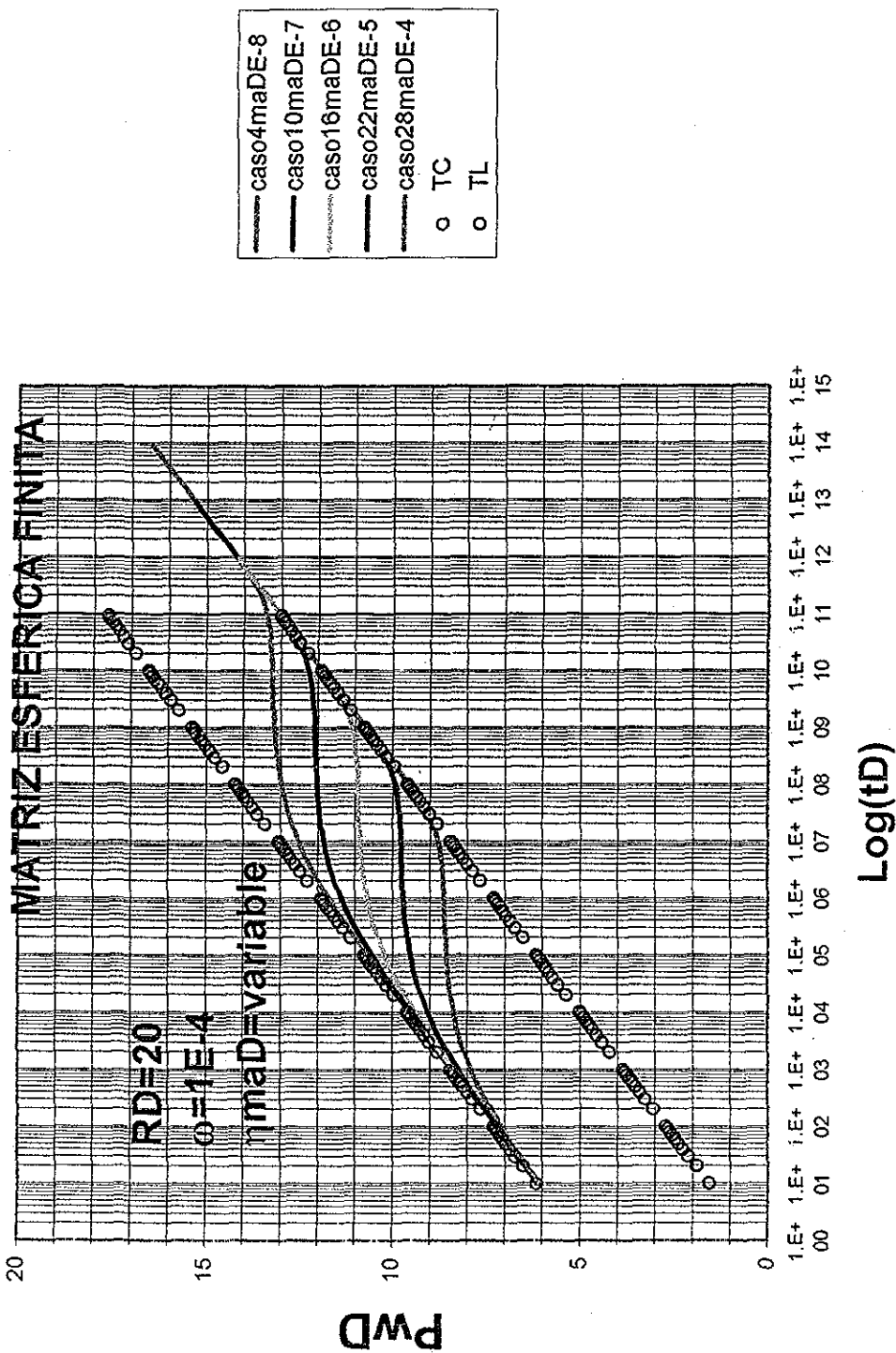
FIG.4.15- RESPUESTA DE PRESIÓN EN GRÁFICA SEMILOG PARA SEIS CASOS CON RD=100, $\eta_{maD}= 1E-4$ y ω VARIABLE

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

NUEVO MODELO DE FLUJO PARA YNF



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FIG. 4.17- RESPUESTA DE PRESIÓN DERIVADA EN GRÁFICA SEMILOG PARA SEIS CASOS, $w=1E-4$, $h_{maD}=1E-4$ Y RD VARIABLE, SE MUESTRA TAMBIÉN LA SOLUCIÓN APROXIMADA A TIEMPOS CORTOS Y LARGOS.

IV.2. RESULTADOS EN MATRIZ INFINITA

La solución de distribución de presión para yacimientos con matriz esférica infinita en el espacio de Laplace esta definida por la ecuación siguiente:

$$\bar{p}_{FD}(s) = \frac{I}{s\sqrt{s_f(s)}} \frac{Ko(\sqrt{s_f(s)})}{K_I(\sqrt{s_f(s)})} \quad (4.3)$$

donde:

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) A_{FD} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} \right] \quad (4.4)$$

La Figura 4.18 muestra la gráfica de la solución general (Ecuación 4.4) obtenida a partir del invertidor numérico de Sthefest³¹, en este gráfico se muestran cinco casos de comportamiento de yacimiento naturalmente fracturado para $\omega=10^{-4}$ $\eta_{maD}=10^{-8}$ y A_{FD} variable, el área varía de 10^{-3} hasta 10. En esta figura se observa flujo esférico en todos los casos y estabilización de la presión a un tiempo determinado.

Cuando $\omega=0$, la ecuación 4.4 puede escribirse de la siguiente forma:

$$f(s) = A_{FD} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} \right] \quad (4.5)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La gráfica de la ecuación anterior para cinco casos de comportamiento de yacimiento se muestra en la Figura 4.19, se observa de los resultados de inversión numérica que los comportamientos son iguales desplazados uno de otro por un valor de A_{FD} , en forma

similar a la Figura 4.18 se observa que a un tiempo adimensional de 10^5 los cinco casos de presión logran estabilizarse.

La ecuación de correlación que representa la presión estabilizada es:

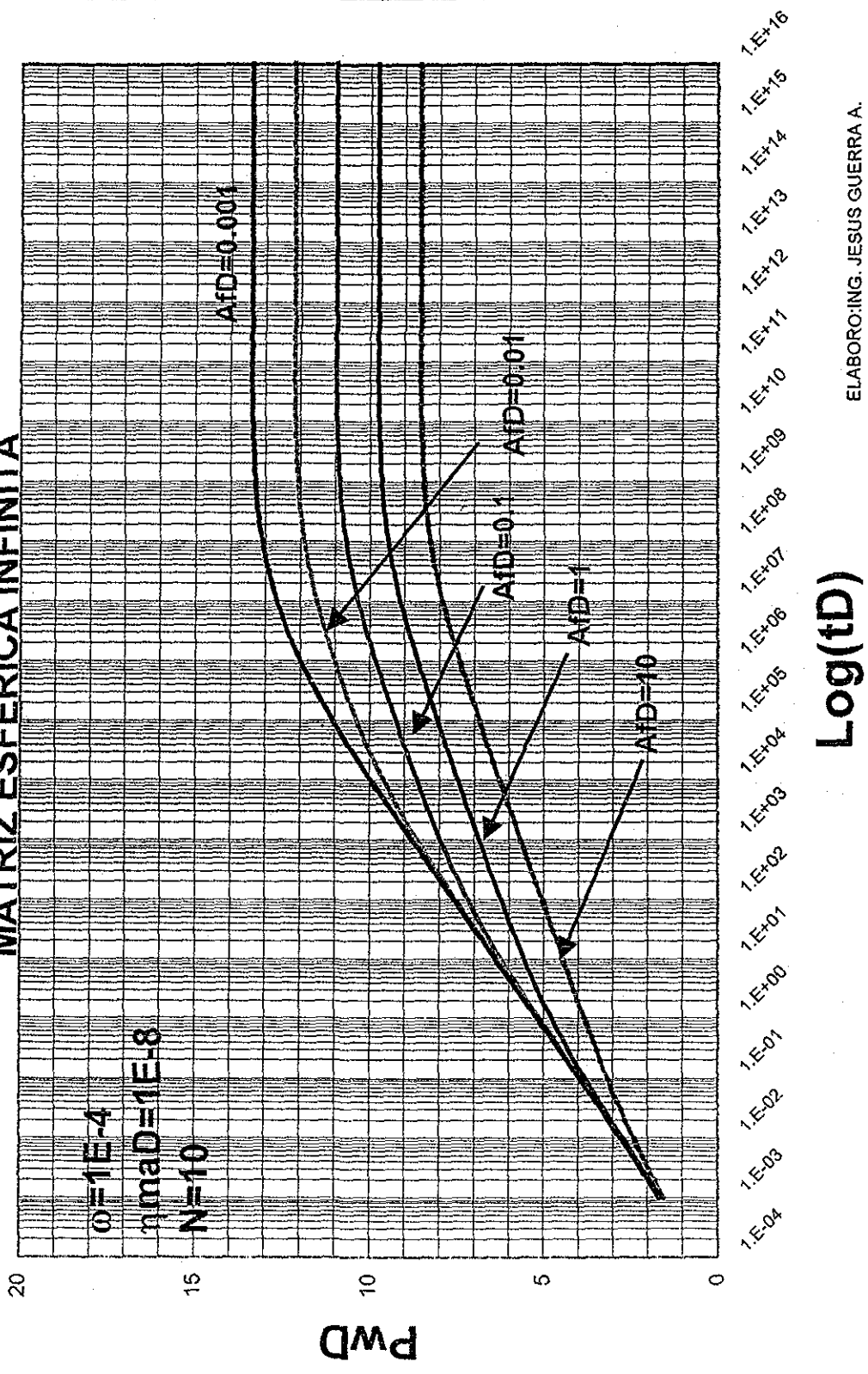
$$P_{wD} = \frac{1}{\sqrt{A_{fD}\eta_{maD}}} \frac{Ko(\sqrt{A_{fD}\eta_{maD}})}{K_1(\sqrt{A_{fD}\eta_{maD}})} \quad (4.6)$$

Sin embargo para valores pequeños del argumento $A_{fD}\eta_{maD}$, la ecuación anterior puede aproximarse por la siguiente ecuación:

$$P_{wDestabilizada} = \ln \left[\frac{2}{\sqrt{A_{fD}\eta_{maD}}} \right] - \gamma' \quad (4.7)$$

La gráfica de la Figura 4.20, representa la solución de la ecuación 4.7 y la aproximación de la ecuación 4.8 con buen ajuste hasta $A_{fD}\eta_{maD} = 10^{-2}$.

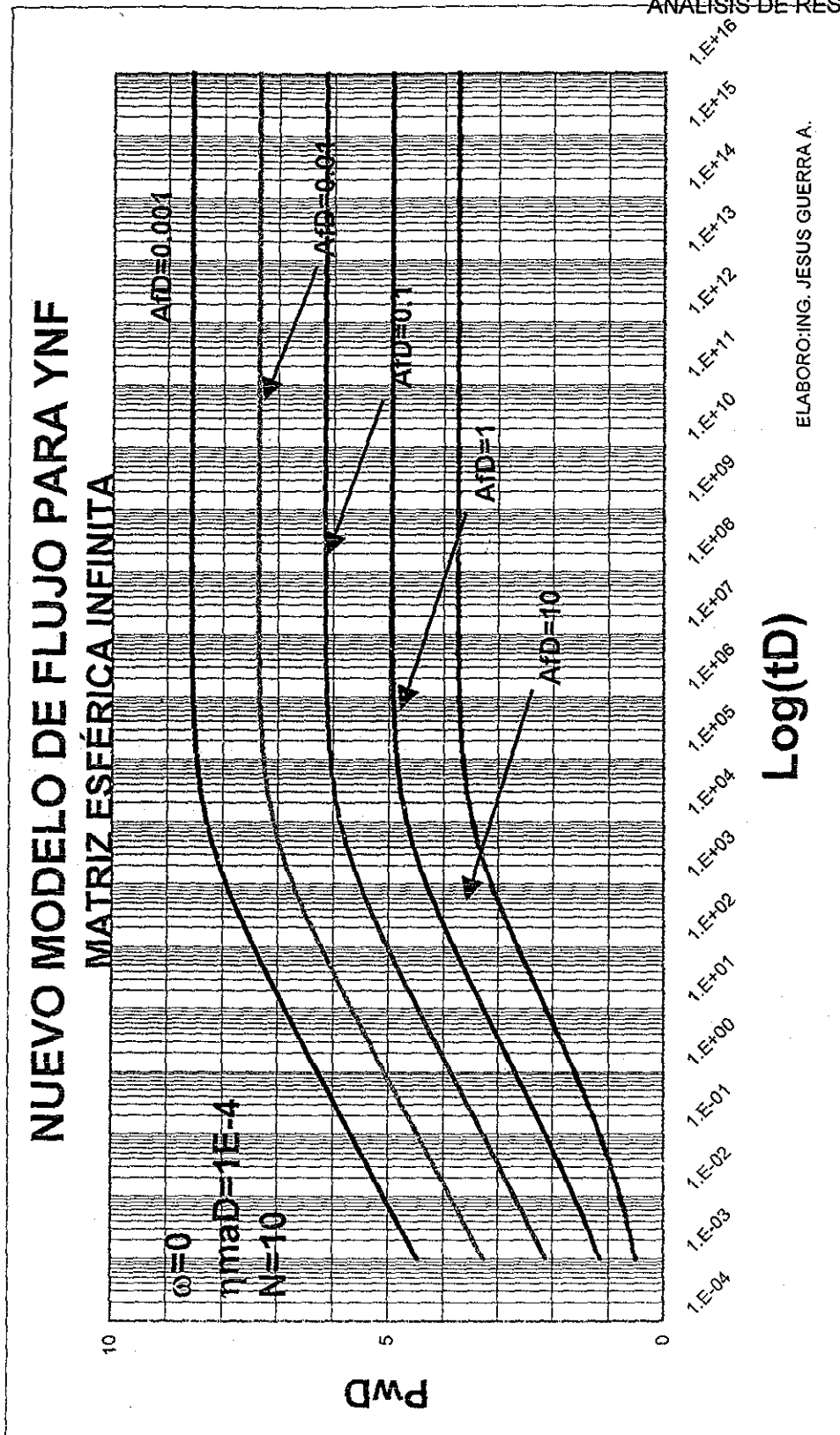
NUEVO MODELO DE FLUJO PARA YNF MATRIZ ESFÉRICA INFINITA



ELABORO: ING. JESUS GUERRA A.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIG. 4.18- COMPORTAMIENTO DE PRESIÓN EN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO INFINITO PARA CINCO CASOS DE ÁREA DE CONTACTO $Y_{\phi} = 1E-4$

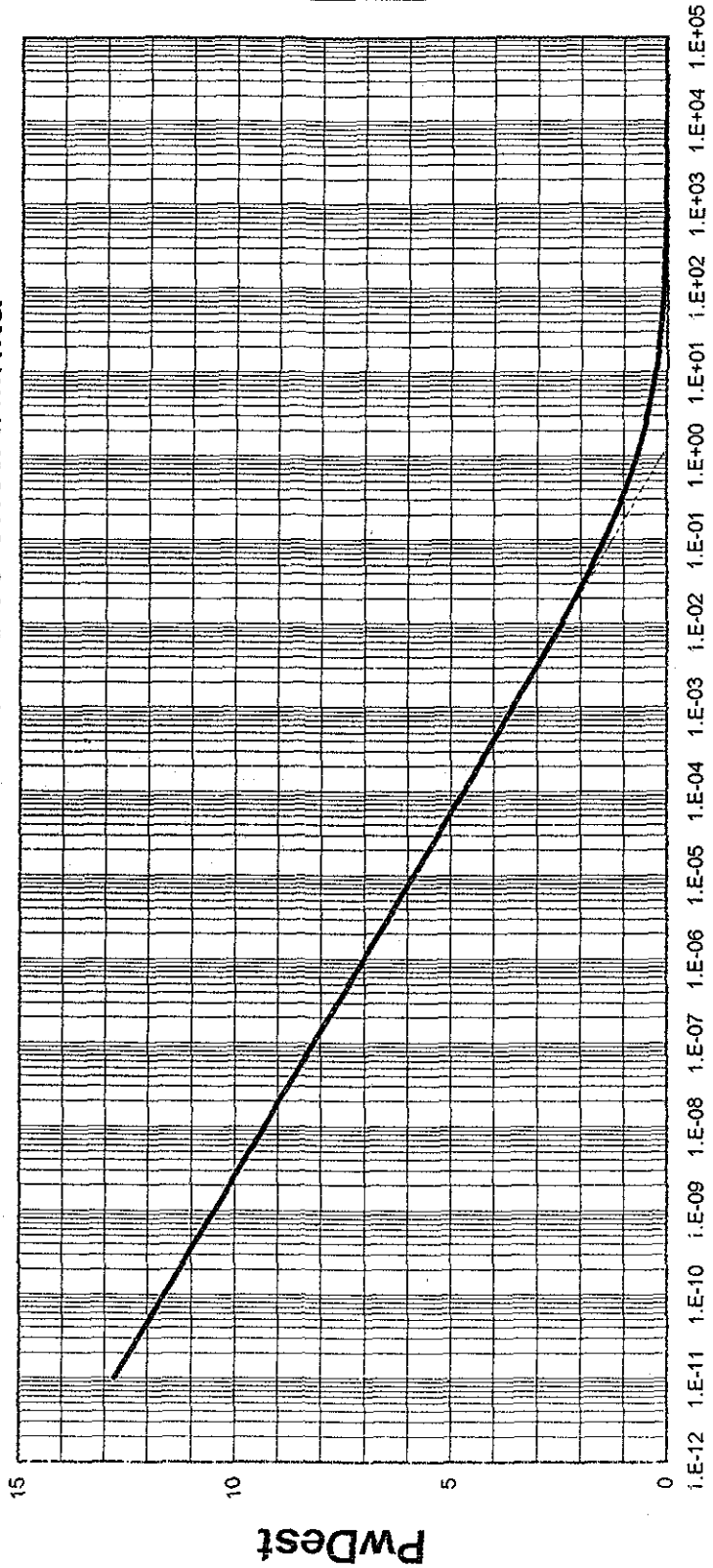


TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIG. 4.18- COMPORTAMIENTO DE PRESIÓN EN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO INFINITO PARA CINCO CASOS DE AREA DE CONTACTO $\omega = 0$

NUEVO MODELO DE FLUJO PARA YNF

Presión estabilizada en matriz esférica infinita



AfDηmaD

ELABORACION. JESUS GUERRA A.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FIG. 20 COMPORTAMIENTO DE PRESION ESTABILIZADA EN YACIMIENTO NATURALMENTE FRACTURADO MATRIZ INFINITA.

Capítulo V

CONCLUSIONES

Los trabajos previos⁶⁻¹⁸ han demostrado que el comportamiento de yacimientos naturalmente fracturados presenta dos líneas rectas paralelas semilogarítmicas, estos resultados consideran que la matriz está rodeada por fracturas, en esta investigación se presenta un nuevo modelo de flujo para yacimientos naturalmente fracturados con una nueva geometría de matriz y flujo esférico en ella, el modelo de flujo propuesto considera que la fractura está rodeada por bloque de matriz, con esta teoría se han obtenido las soluciones expuestas en este trabajo.

Como resultado de este estudio se concluye lo siguiente:

1.- El comportamiento de presión transitoria para un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado con doble porosidad puede ser descrito por tres parámetros adimensionales:

- a).- Almacenamiento adimensional de la fractura, ω .
- b).- Difusividad hidráulica adimensional del bloque de matriz, η_{maD} , y
- c).- Radio adimensional, R_D .

2.- Los cambios de ω en el yacimiento definen el comportamiento del sistema matriz-fractura, ω varía entre 0 y 1, y puede llegar a comportarse un yacimiento naturalmente fracturado como un yacimiento homogéneo.

3.-El modelo de Warren y Root formulado con flujo interporoso psudoestacionario, y matriz rodeado por fractura se reproduce con el modelo propuesto considerando flujo interporoso transitorio y fractura rodeada por matriz, otra diferencia es que éste modelo considera una dimensión del tamaño de matriz y el de Warren y Root no lo considera.

4.- Este modelo considera flujo esférico de la frontera externa a la frontera interna lo cual es una formulación distinta a los modelos presentados anteriormente.

5.- Con el modelo propuesto se puede obtener y analizar el comportamiento de presión transitoria de las pruebas de campo con área de contacto de flujo pequeño o relaciones de área de fractura por unidad de volumen de matriz (A_{FD}) PEQUEÑOS (huecos), esta característica del yacimiento se puede calcular si las propiedades de la matriz están disponibles (k_{ma} , $(\phi c_t)_{ma}$) o viceversa, adicionalmente se puede modelar el tamaño de la fractura.

6.- El comportamiento de flujo transitorio de un pozo en un yacimiento naturalmente fracturado puede mostrar cuatro periodos de flujo:

- a).- periodo de flujo dominado por almacenamiento en la fractura.
- b).- periodo dominado por el flujo lineal transitorio en la matriz.
- c) - periodo dominado por el flujo esférico transitorio en la matriz.
- d).- periodo dominado por flujo pseudo estacionario en la matriz.

7.- El comportamiento de flujo transitorio en la matriz en un yacimiento naturalmente fracturado puede mostrar tres formas de flujo dependiendo del tamaño de la matriz y del tiempo de respuesta del yacimiento:

- a).- flujo lineal, cerca de la frontera interna.
- b).- flujo esférico
- c).- flujo radial para valores grandes de R_D .

8.-Generalmente se espera que la línea recta dominada por almacenamiento en la fractura no pueda ser identificada para valores pequeños de ω , debido a que el almacenamiento en el pozo oculta la correspondiente línea recta semilogarítmica.

9.-En este estudio, después de realizar un análisis de sensibilidad de la variable N en el algoritmo de inversión numérica de Sthefest se concluyó que el mejor valor de ajuste es 10, sin embargo no siempre este valor es el adecuado para todos los problemas de inversión, en otros casos estos valores de N también deben ser analizados y sensibilizados, por que para cada función en el espacio de Laplace corresponde un valor de N que mejor ajusta la inversión numérica en espacio real. La importancia de encontrar el mejor ajuste de la función por la variable N , representa especialmente en yacimientos naturalmente fracturados la evaluación adecuada de la pendiente m en el comportamiento transitorio del yacimiento.

NOMENCLATURA

A_{fb}	Área de fractura por unidad de volumen de roca (área expuesta al flujo)
A_{fD}	Área Adimensional de fractura
A_{ma}	Área de los bloques de matriz
B	Variable de Transformación de Chatas
B_0	Factor de volumen
C	Almacenamiento en el pozo
C_D	Almacenamiento Adimensional en el pozo
c	Compresibilidad del fluido
c_{tf}	Compresibilidad total del sistema de fractura
cc_f	Coefficiente de compresibilidad de la fractura
cc_{ma}	Coefficiente de compresibilidad de la matriz
c_t	Compresibilidad total
c_o	Compresibilidad del líquido fluyendo
c_p	Compresibilidad del pozo
c_w	Compresibilidad del agua congénita
c_f	Compresibilidad de la fractura
c_w	Compresibilidad de la matriz
d_{ma}	Diámetro de la matriz esférica
h	Espesor de la formación o del yacimiento
h_{ma}	Altura del estrato de matriz
k_{ma}	Permeabilidad en la matriz
k_f	Permeabilidad en la fractura
l	Longitud característica del bloque de matriz
n	Numero de bloques de matriz
p	Presión
p_i	Presión inicial del yacimiento

Δp	Cambio de presión
p_f	Presión en la fractura radial
p_{fD}	Presión Adimensional en la fractura radial
p_{ma}	Presión en la matriz
p_{mD}	Presión Adimensional en la matriz esférica
Δp_{uma}	Función de transferencia o distribución presión en la cara de la fractura
p_{wD}	Respuesta de presión Adimensional en el pozo
q	Gasto
q_D	Gasto adimensional que entra a la fractura.
q^*	Gasto por unidad de volumen de roca
q_{uma}	Gasto de la matriz a la fractura por caída de presión unitaria
r	Distancia al pozo productor
r_e	Radio de la matriz esférica
r_f	Radio de la fractura esférica
r_w	Radio del pozo
r_D	Radio adimensional
R_D	Radio Adimensional de la matriz esférica
S	Factor de daño de van Everdingen y Hurst
s	Variable de la Transformada de Laplace
S_{wc}	Saturación del agua congénita
t	Tiempo
t_D	Tiempo adimensional
τ	Parámetro de integración de convolución
T_f	Transmisibilidad de las fracturas
v_f	Velocidad del fluido en las fracturas
v_m	Velocidad del fluido en la matriz
V	Volumen
α, β	Factor de unidades de conversión
γ	Constante de Euler (0.577216)
λ	Coeficiente de capacidad de flujo en la matriz y las fracturas

η	Difusividad hidráulica
η_{maD}	Difusividad hidráulica adimensional
σ^2	Superficie de las fracturas por unidad de volumen de roca
ρ	Densidad del fluido
μ	Viscosidad del fluido
ϕ	Porosidad
ϕ_{ma0}	Porosidad de la matriz a P de referencia
ϕ_{f0}	Porosidad de la fractura a P de referencia
ω	Almacenamiento fraccional de las fracturas
π	Constante numérica
∞	Infinito

Subíndice

w	pozo
b	Roca
D	Adimensional
f	Fractura
m	Matriz
t	Total
uma	Caída de presión unitaria en la cara de la fractura
x,y,z	componentes vectoriales

Funciones

J_0	Función de Bessel Modificada, de segunda clase, orden cero
K_0	Función de Bessel Modificada, de segunda clase, orden cero
K_1	Función de Bessel Modificada, de segunda clase, orden uno
Ei	Integral exponencial
∇^2	Operador de Laplace

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

REFERENCIAS

1. - Kamal, M. M., Freyder, D.G. y Murray, M.A.-"Use of Transient Testing in Reservoir Management"- SPE 28008 presented SPE U of Tulsa Centennial Petroleum Engineering Symposium held in Tulsa Oklahoma Aug. 20-31 1994
2. - Satter, A. y Thakur, G.C. "Integrated Petroleum Reservoir Management", Tulsa, Oklahoma, PennWell Books Publishing Company, 1994.
3. - Thakur, G.C. y Satter, A. "*Integreted Waterflood Asset Management*", Tulsa, Oklahoma PennWell Books Publishing Company, 1998.
4. - Reiss, L.H.-"*The Reservoir Engineering Aspects of Fractured Formations*", The publishing company. Institut Francais du Petrole. Editions Techip, Paris 1980.
5. - Cinco Ley H. -"Well Test Analysis for Naturally Fractured Reservoirs" *J. Pet. Tech.* January 1996 51-54 Distinguished Autors Series.
- 6.- Barenblatt, G.I., Zheltov, Iu P. y Kochina, I.N. - "Basics Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks (strata)." (in Russian), *Prikladnaya Mate, Mekh* (1960) Vol. 24, No. 5, 852-864 or *J Applied Math. Mechanics*(1960), 1286-1303.
7. - Warren, J.E. y Root, P.J.- "The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs"-*Soc. Pet. Eng. J.* (Sep. 1963) Vol 3, 245-255; *Trans.*, AIME, 228

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

- 8 - Odeh, A. S. - "Unsteady - State Behavior of Naturally Fractured Reservoirs"- *Soc. Pet. Eng. J.* (March 1965), 60-66; *Trans. AIME*, 234.
- 9 - Mavor, M.L. y Cinco Ley, H. - "Transient Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoirs"- paper SPE 7977 presented at the California Regional Meeting, Ventura, Ca. (April 18-20, 1979).
- 10 - Kazemi, H. - "Pressure Transient Analysis of Naturally Fractured Reservoirs with Uniform Fracture Distribution"- Paper SPE 2156A, *Soc. Pet. Eng. J.* (Dec 1969), p 451-462; *Trans.*, AIME, 246
- 11 - de Swaan, O.A. - "Analytic Solutions for Determining Naturally Fractured Reservoir properties by Well Testing."- Paper SPE 5346, presented at the SPE 45th Annual California Regional Meeting in Ventura, (April 2-4, 1975), 117-122 *Trans. AIME* 261.
- 12 - Najurieta, H. L. - "A Theory for Pressure Transient Analysis in Naturally Fractured Reservoir"- *J. Pet. Tech* (July 1980) 1241- 1250.
- 13 - Kucuk, F. y Sawyer, W.K. - "Transient Flow in Naturally Fractured Reservoirs and its Application to Devonian Gas Shales"- SPE 9397, presented at the 55th Annual Fall Technical Conference and Exhibition in Dallas, Tex, (Sep 21-24, 1980).
- 14 - Cinco L.H. y Samaniego V.F. - " Pressure Transient Analysis for Naturally Fractured Reservoirs " paper SPE 11026 Presented at the 57th Annual Fall Technical Conference and Exhibition in New Orleans L.A. (September 26-29, 1982).
- 15 - Serra, K., Reynolds, A., and Raghavan, R. - "New Pressure Transient Analysis Methods for Naturally Fractured Reservoirs," *J. Pet. Tech.* (Dec. 1983) 2271-2284

16. - Streltsova, T.D.: "Well Pressure Behavior of Naturally Fractured Reservoir", paper SPE 10782, presented at the California regional meeting San Francisco, Cal. (March 24-26, 1982)
17. - Rodríguez Nieto R. "Caracterización de Yacimientos de Doble Porosidad con Tamaño Múltiple de Bloques de Matriz" Tesis Doctoral. Director: Dr. Héber Cinco Ley, Cd. Universitaria, Febrero 2000.
18. - Cinco Ley H., Samaniego V.F y Kuchuk, F. -"The Pressure Transient Behavior for a Naturally Fractured Reservoirs with Multiple Block Size."- SPE 14168 (Sep. 1985)
19. - Gringarten, A.C.: "Interpretation of Test in Fissured Reservoirs and Multilayered with Double Porosity Behavior: Theory and Practice"- paper SPE 10044, presented at the SPE international Petroleum exhibition and technical symposium, Beijing, China, (March. 26-28, 1982).
20. - Bourdet, D., Ayoub, J.A., Whittle, T.M., Pirard, Y.M. y Kniazeff, V. -"Interpreting Well Tests in Fractured Reservoirs"- *World oil* (Oct. 1983).
21. - Streltsova, T.D.: "Well Hydraulics in Heterogeneous Aquifer Formations", Advances in Hydroscience Vol. II, New York: Academic Press, Inc. (1978)
22. - Crawford, G.E., Hagedorn, A.R. y Pierce, A.E. -"Analysis of Pressure Buildup Test in a Naturally Fractured Reservoir" *J. Pet. Tech.* (Nov 1976) 1295-1300
23. - Bourdet, D., Alogoa, A., Ayoub, J. A. y Pirard, Y.M. -"New Type Curves aid Analysis of Fissured Zone Well Tests"- *World oil* (April 1984)

- 24 - Pulido Bello H.- "Comunicación personal"- 2001.
- 25 - Chatas, A.T.-"Unsteady Spherical Flow in Petroleum Reservoirs,"-SPE 1305, *Soc. Pet. Eng. J.* (June 1966) 102-114.
- 26 - Culham, W.E.-"Pressure Buildup Equations for Spherical Flow Regimen Problems," SPE 4053, presented at the 47th Annual Fall Meeting, *Soc. Pet. Eng. J.* (Dec. 1974) 545-55.
- 27 - Ersaghi, I Rhee, Shie-Woo y Yang, Hsun-Tiao -"Analysis of Pressure Transient Data in Naturally Fractured Reservoirs with Spherical Flow",- paper SPE 6018, presented at the 51 Annual Fall Technical Conference and Exhibition of SPE of AIME, New Orleans (Oct. 3-6, 1976).
- 28 - Brigham, W.E., Peden, J.M., Ng, K.F. y O'Neill, N.-"The Analysis of Spherical Flow with Wellbore Storage,"-paper SPE 9294 presented at the SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition, Dallas, Texas, (Sept. 21-24, 1980).
- 29 - Kohlhaas, C. A. y Abbott, W.A.-"Application of Linear and Spherical Flow Analysis Techniques to Field Problems-Case Studies"- paper SPE 11088, presented at the SPE Annual Fall Technical Conference and Exhibition, New Orleans, LA. (Sept 26-29, 1982)
- 30 - Onyekonwu, M. O. and Horne, R.N.-"Pressure Response of a Reservoir with Spherical Discontinuous Properties", *J. Pet. Tech.* (Nov. 1983) 2127-2134.
- 31 - Sthefest, H. -"Algorithm 368: Numerical Inversion of Laplace Transforms[D5]," *Communications of the ACM* (Jan 1970) 13, 47-49

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- 32 - Pulido Bello H.-Version Excel del algoritmo 368: Sthefes, H "Numerical Inversion of Laplace Transforms [D5]," *Communications of the ACM* (Jan. 1970) **13**, 47-49.
- 33 - Van Everdingen, A F. and Hurst, W., " The Application of Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs", *Trans.*, AIME (1949) **186**, 305-324.
- 34 - Matthews, C.S. & Russell, D.G " *Pressure Buildup and Flow Tests in Wells* ", Henry Doherty Memorial Fund of AIME. Society of Petroleum Engineers New York 1967.
- 35 - Earlougher, Jr. R.C. " *Advances in Well Test Analysis* ", Henry Doherty Memorial Fund of AIME. Society of Petroleum Engineers New York . 1977.
- 36.- Carslaw, H.S. y Jeager, J.C, " *Conduction of Heat in Solids* ", second edition. Oxford University Press. Publishers to the University. London 1959.
- 37.- Abramowitz, M and Stegun, I. A. - " *Handbook of Mathematical Functions* ", U. S. Government Printing Office, Washington, D.C. (1964)
- 38.- I.S. Gradshteyin and I.M. Ryzhik - " *Table of Integrals, Series, and Products* ", fourth edition, translate from the Russian by Scripta Technica, Inc , and edited by Alan Jeffrey, Academic Press, Inc 1979.
- 39 - G.E. Roberts and H. Kaufman - " *Table of Laplace Transforms* ", W.B. SAUNDERS COMPANY, Philadelphia and London, 1966
40. - Gringarten A.C.: " The Use of Source and Green's Functions in the Solution of Unsteady Flow Problems in Reservoirs," Pub. ITTE 71-9, Dept of Civil Engineering, U. of California at Berkeley (Dec 1971)

- 41 - Gringarten, AC. y Ramey, HJ, Jr.: "The Use of Source and Green's Functions in Solving Unsteady-Flow Problems in Reservoirs " SPE 3818, Transactions Vol. 255, 285-296. Oct. 1973

Apéndice A

Modelo de doble porosidad con flujo interporoso transitorio convolucionado. Cinco y Samaniego, 1982.

Flujo radial en las fracturas con término fuente.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} \right) = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + q^* \frac{\mu}{k_{fb}} \quad (\text{A-1})$$

Gasto de fluido de la matriz a la fractura transferido por caída de presión unitaria en la fractura:

$$q_{uma} = \frac{k_{ma} A_{fb}}{\mu} (\nabla p_{uma})_{sup} \quad (\text{A-2})$$

Donde:

$$(\nabla p_{uma})_{sup} = \text{Gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura} \quad \left[\frac{M}{L^2 T^2} \right]$$

A_{fb} = Área expuesta al flujo, L^2 .

Gasto total de la matriz a la fractura

$$q = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} q_{uma}(t-\tau) d\tau \quad (\text{A-3})$$

Gasto de la matriz a la fractura por unidad de volumen de roca:

$$q^* = \frac{q}{V_{ma} + V_f} = \frac{q}{V_b} = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} \frac{q_{uma}}{V_b}(t-\tau) d\tau \quad (\text{A-4})$$

Gasto de fluido transferido por caída de presión unitaria en la fractura por unidad de volumen de roca:

$$q_{uma}^* = \frac{q_{uma}}{V_b} = \frac{k_{ma} A_{fb}}{\mu V_b} (\nabla p_{uma})_{sup} \quad (\text{A-5})$$

Sustituyendo la definición de q_{uma}^* en A-4:

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} \frac{k_{ma} A_{fb}}{\mu V_b} [\nabla p_{uma}(t-\tau)]_{sup} d\tau \quad (A-6)$$

Área de la fractura por unidad de volumen de roca, L^{-1}

$$A_{fb} = \frac{A_f}{V_b} = \frac{A_f}{V_{ma} + V_f} \quad (A-7)$$

Sustituyendo la ecuación de relación de forma A-7 en A-6:

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} \frac{k_{ma}}{\mu} A_{fb} [\nabla p_{uma}(t-\tau)]_{sup} d\tau \quad (A-8)$$

Sustituyendo A-8 en A-1, se obtiene el modelo de flujo radial en las fracturas con transferencia matriz – fractura convolucionada:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_{yf} \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{k_{ma}}{k_{fb}} A_{fb} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} [(\nabla p_{uma})_{sup}(t-\tau)]_{sup} d\tau \quad (A-9)$$

Condición inicial $p_f(r, 0) = p_i$ (A-10)

Frontera interna: gasto constante $\lim_{r \rightarrow r_w} \frac{\partial p_f(r, t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{kr_w}$ (A-11)

Frontera externa: yacimiento infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r, t) = p_i$ (A-12)

Transformación a variables adimensionales la ecuación de flujo radial en la fractura

Variables adimensionales y funciones:

$$\rho = \frac{r}{r_w}; \quad t_D = \frac{k_{fb} t}{(\phi c_t)_i \mu r_w^2}; \quad \omega = \frac{\phi_{fb} c_{yf}}{\phi_{fb} c_{yf} + \phi_{mab} c_{mab}} = \frac{\phi_{fb} c_{yf}}{(\phi c_t)_i};$$

$$v(r_D, t_D) = \frac{k_{fb} r_w}{q\mu} [p_i - p_f(r, t)] = \frac{k_{fb} r_w}{q\mu} [\Delta p_f(r, t)]; \quad A_{fD} = \frac{A_{fb} h_{ma} V_b}{V_{ma}};$$

$$\eta_D = \frac{\eta_{ma} r_w^2}{\eta_{fb} h_{ma}^2} = \frac{k_{ma} / (\phi c_t)_{ma} \mu r_w^2}{k_{fb} / (\phi c_t)_i \mu h_{ma}^2} = \frac{k_{ma} (\phi c_t)_i r_w^2}{k_{fb} (\phi c_t)_{ma} h_{ma}^2}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La primera derivada parcial con respecto a la distancia, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{k_{\beta} h r_w} \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \quad (A-13)$$

La segunda derivada parcial con respecto a la distancia, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f(r,t)}{\partial r^2} = \frac{q\mu}{k_{\beta} h r_w^2} \frac{\partial^2 p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \quad (A-14)$$

La derivada parcial con respecto al tiempo, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial t} = \frac{q\mu}{k_{\beta} h} \left[\frac{k_{\beta}}{(\phi c_t)_i \mu r_w^2} \right] \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (A-15)$$

La primera derivada con respecto a la variable muda τ de la convolución:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,\tau)}{\partial \tau} = \frac{q\mu}{k_{\beta} h} \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, \tau)}{\partial \tau} \quad (A-16)$$

Sustituyendo las ecuaciones A-13, A-14, A-15, ω , $A_{\beta D}$ y η_{maD} en la ecuación de flujo en la fractura y simplificando, se obtiene la ecuación general de flujo radial:

$$\frac{\partial^2 p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{maD} h_{ma} A_{\beta D} [1-\omega] \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, \tau)}{\partial \tau} [(\nabla p_{uma})_{sup}(t_D - \tau)] d\tau \quad (A-17)$$

ESTRATO

El término $(\nabla p_{uma})_{sup}$ para bloques de matriz en función de η_{maD} del estrato está dado por:

$$(\nabla p_{uma})_{estrato} = \frac{4}{h_{ma}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\eta_{maD})_{estrato} (2n+1)^2 \pi^2 t_D} \quad (A-18)$$

Sustituyendo la definición de $(\nabla p_{uma})_{estrato}$ en Ec. A-17 y simplificando se obtiene:

$$\frac{\partial^2 p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{maD} h_{ma} A_{\beta D} [1-\omega] \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{\beta D}(r_D, \tau)}{\partial \tau} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\eta_{maD})_{estrato} (2n+1)^2 \pi^2 t_D} (t_D - \tau) \right] d\tau \quad (A-19)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ESFÉRAS

El término $(\nabla p_{uma})_{sup}$ para bloques de matriz en función de η_{maD} de la esfera está dado por:

$$(\nabla p_{uma})_{sup} = \frac{4}{d_{ma}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4(\eta_{maD})_{esfera} n^2 \pi^2 t_D} \quad (A-21)$$

Sustituyendo la Ec. A-21 en Ec. A-17 y simplificando, se obtiene:

$$\frac{\partial p^2_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + 4(\eta_{maD})_{esfera} A_{pD} [1 - \omega] \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{pD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4(\eta_{maD})_{esfera} n^2 \pi^2 t_D} (t_D - \tau) \right]_{sup} d\tau \quad (A-22)$$

El modelo de flujo radial para matriz en forma de esferas o estratos se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p^2_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + [1 - \omega] A_{pD} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_{pD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} * F(\eta_{maD}, (t_D - \tau)) d\tau \quad (A-23)$$

donde:

$$\text{Estratos: } F(\eta_{maD}, (t_D - \tau)) = 4\eta_{maD} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(\eta_{maD})_{estrato} (2n+1)^2 \pi^2 t_D} (t_D - \tau) d\tau \quad (A-24)$$

$$\text{Esferas: } F(\eta_{maD}, (t_D - \tau)) = 4\eta_{maD} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4(\eta_{maD})_{esfera} n^2 \pi^2 t_D} (t_D - \tau) d\tau \quad (A-25)$$

Transformación a variables adimensionales las condiciones de frontera

$$\text{Condición inicial: } p_{pD}(r_D, 0) = 0 \quad (A-26)$$

$$\text{Condición de frontera interna: } \lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1 \quad (A-27)$$

$$\text{Condición de frontera externa: } \lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{pD}(r_D, t_D) = 0 \quad (A-28)$$

SOLUCIÓN

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación de flujo radial en las fracturas:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D} = \omega [s \bar{p}_{jD}(r_D, s) - p_{jD}(r_D, 0)] + [1 - \omega] A_{jD} L \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(r_D, \tau)}{\partial \tau} F(\eta_{maD}(t_D - \tau)) d\tau \right] \tag{A-29}$$

Condición de frontera interna: $\frac{d\bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D} = -\frac{1}{s}$ (A-30)

Condición de frontera externa $\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{jD}(r_D, s) = 0$ (A-31)

La transformada de Laplace del término fuente:

$$L \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial \tau} * F(\eta_{maD}(t_D)) d\tau \right] = [s \bar{p}_{jD}(r_D, s) - p_{jD}(r_D, 0)] \bar{F}(\eta_{maD}, s) \tag{A-32}$$

ESTRATO

$$\bar{F}(\eta_{maD}, s) = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\eta_{maD}}}} \left[\tanh \left(\frac{\sqrt{\frac{s}{\eta_{maD}}}}{2} \right) \right] \tag{A-33}$$

ESFÉRA

$$\bar{F}(\eta_{maD}, s) = \frac{1}{\sqrt{\frac{s}{\eta_{maD}}}} \left[\text{Coth} \left(\frac{\sqrt{\frac{s}{\eta_{maD}}}}{2} \right) - \frac{2}{\sqrt{\frac{s}{\eta_{maD}}}} \right] \tag{A-34}$$

Sustituyendo la transformada del término fuente, la condición inicial y factorizando, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{\partial r_D} - sf(s) \bar{p}_{jD}(r_D, s) = 0 \tag{A-35}$$

donde:

$$f(s) = \omega + [1 - \omega] A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)_{estrato} \tag{A-36}$$

$$f(s) = \omega + [1 - \omega] A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)_{esfera} \tag{A-37}$$

La solución general de la ecuación de flujo en las fracturas es:

$$\bar{p}_{jD}(r_D, s) = A I_0(r_D \sqrt{sf(s)}) + B K_0(r_D \sqrt{sf(s)}) \tag{A-38}$$

Sustituyendo la condición de frontera externa y simplificando:

$$\bar{p}_{jD}(r_D, s) = B K_0(r_D \sqrt{sf(s)}) \tag{A-39}$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a r_D :

$$\frac{\partial \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{\partial r_D} = -B \sqrt{sf(s)} K_1(r_D \sqrt{sf(s)})$$

Aplicando la condición de frontera interna y evaluando $r_D = 1$ el valor de la constante B:

$$B = \frac{1}{s \sqrt{sf(s)} K_1(\sqrt{sf(s)})} \tag{A-40}$$

Sustituyendo el valor de B y la función f(s) en la solución general (A-39)

$$\bar{p}_{jD}(r_D, s) = \frac{1}{s^{3/2} \sqrt{\omega + [1 - \omega] A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)}} \frac{K_0\left(r_D \sqrt{s[\omega + (1 - \omega) A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)]}\right)}{K_1\left(\sqrt{s[\omega + (1 - \omega) A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)]}\right)} \tag{A-41}$$

La solución en el pozo:

$$\bar{p}_{wD}(r_D, s) = \frac{1}{s^{3/2} \sqrt{\omega + [1 - \omega] A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)}} \frac{K_0\left(\sqrt{s[\omega + (1 - \omega) A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)]}\right)}{K_1\left(\sqrt{s[\omega + (1 - \omega) A_{jD} \bar{F}(\eta_{maD}, s)]}\right)} \tag{A-42}$$

Apéndice B

Flujo esférico en fractura rodeada por bloque de matriz finito

Ecuación de flujo esférico

$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p(r,t)}{\partial t} \quad r_w < r < r_e \text{ y } t > 0 \quad (\text{B-1})$$

Condición inicial $p(r,0) = p_i$ (B-2)

Frontera interna: presión constante $p(r_f,t) = p_f$ (B-3)

Frontera externa: yacimiento finito $\frac{\partial p(r_e,t)}{\partial r} = 0$ (B-4)

Transformación de la ecuación de flujo esférico a variables adimensionales.

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad R_D = \frac{r_e}{r_f} \quad t_D = \frac{k_{ma} t}{(\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} = \frac{\eta_{ma} t}{r_f^2} \quad p_D(r_D, t_D) = \frac{p_i - p(r,t)}{p_i - p(r_f,t)}$$

La derivada con respecto al tiempo Aplicando regla de la Cadena:

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial t} = \frac{dp(r,t)}{dp_D(r_D, t_D)} \left[\frac{dt_D}{dt} \right] \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} = -[p_i - p(r_f,t)] \frac{k_{ma}}{(\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (\text{B-5})$$

La primera derivada con respecto al radio. Aplicando regla de la Cadena:

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{dp(r,t)}{dp_D(r_D, t_D)} \left[\frac{dr_D}{dr} \right] \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = -[p_i - p(r_f,t)] \frac{1}{r_f} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \quad (\text{B-6})$$

La segunda derivada con respecto al radio, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial r^2} = -[p_i - p(r_f,t)] \frac{1}{r_f} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \right] \frac{dr_D}{dr} = -[p_i - p(r_f,t)] \frac{1}{r_f^2} \frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \quad (\text{B-7})$$

Sustituyendo las Ecs B-5, B-6, B-7 y multiplicando por $-\frac{r_f^2}{p_i - p_f}$, se obtiene una

ecuación de flujo esférico adimensional:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (\text{B-8})$$

Transformación a variables adimensionales las condiciones del problema.

Condición inicial: $p_D(r_D, 0) = 0$ (B-9)

Condición de frontera interna: $p_D(1, t_D) = 1$ (B-10)

Condición de frontera externa: $\frac{\partial p_D(R_D, t_D)}{\partial r_D} = 0$ (B-11)

Transformación de la ecuación de flujo esférico a una ecuación en forma de flujo lineal

$$B(r_D, t_D) = r_D p_D(r_D, t_D) \quad (\text{B-12})$$

La primera derivada con respecto al radio:

$$\frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{B(r_D, t_D)}{r_D^2} \quad (\text{B-13})$$

La segunda derivada con respecto al radio:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 B(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} - \frac{2}{r_D^2} \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial r_D} + \frac{2B(r_D, t_D)}{r_D^3} \quad (\text{B-14})$$

La derivada con respecto al tiempo adimensional:

$$\frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} = \frac{r_D \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} - B(r_D, t_D) \frac{\partial r_D}{\partial t_D}}{r_D^2} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (\text{B-15})$$

Sustituyendo las Ecuaciones B-13, B-14 y B-15 en la ecuación B-8 y simplificando se obtiene la ecuación de flujo esférico en forma de una ecuación en forma de flujo lineal:

$$\frac{\partial^2 B(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} = \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (\text{B-16})$$

Transformación de las condiciones del problema en términos de la variable B.

$$\text{Condición Inicial: } B(r_D, 0) = 0 \quad (\text{B-17})$$

$$\text{Condición de frontera interna: } B(1, t_D) = 1 \quad (\text{B-18})$$

$$\text{Condición de frontera externa: } \frac{\partial B(R_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{1}{R_D} B(R_D, t_D) = 0 \quad (\text{B-19})$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo esférico en forma de flujo lineal y a las condiciones del problema:

$$\frac{d^2 \bar{B}(r_D, s)}{dr_D^2} = s \bar{B}(r_D, s) - B(r_D, 0) \quad (\text{B-20})$$

$$\text{Condición de frontera interna: } \bar{B}(1, s) = \frac{1}{s} \quad (\text{B-21})$$

$$\text{Condición de frontera externa: } \frac{\partial \bar{B}(R_D, s)}{\partial r_D} - \frac{1}{R_D} \bar{B}(R_D, s) = 0 \quad (\text{B-22})$$

Aplicando la condición inicial en la ecuación de flujo lineal en el espacio de Laplace:

$$\frac{d^2 \bar{B}(r_D, s)}{dr_D^2} - sf(s) \bar{B}(r_D, s) = 0 \quad (\text{B-23})$$

$$f(s) = 1 \quad (\text{B-24})$$

La solución general a la ecuación de B-29 es:

$$\bar{B}(r_D, s) = A \text{Senh}(r_D \sqrt{s}) + B \text{Cosh}(r_D \sqrt{s}) \quad (\text{B-25})$$

La derivada de la solución general con respecto a r_D :

$$\frac{d \bar{B}(r_D, s)}{dr_D} = A \sqrt{s} \text{Cosh}(r_D \sqrt{s}) + B \sqrt{s} \text{Senh}(r_D \sqrt{s}) \quad (\text{B-26})$$

Evaluando las ecuaciones B-25 y B-26 en $r_D = R_D$ y aplicando la condición de frontera externa:

$$A \left[\sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) \right] + B \left[\sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \right] = 0 \quad (\text{B-27})$$

Evaluando la solución general en $r_D=1$ y aplicando la condición de frontera interna:

$$A \operatorname{Senh}(\sqrt{s}) + B \operatorname{Cosh}(\sqrt{s}) = \frac{1}{s} \quad (\text{B-28})$$

Las ecuaciones B-27 y B-28 se pueden expresar en forma de matriz:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) & \sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \\ \operatorname{Senh}(\sqrt{s}) & \operatorname{Cosh}(\sqrt{s}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{pmatrix} \quad (\text{B-29})$$

Aplicando regla de Crammer se obtiene el valor de las constantes A y B:

$$A = \frac{\sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s})}{s \left\{ \operatorname{Cosh}(\sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) \right] - \operatorname{Senh}(\sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \right] \right\}} \quad (\text{B-30})$$

$$B = \frac{\sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s})}{s \left\{ \operatorname{Cosh}(\sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) \right] - \operatorname{Senh}(\sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \right] \right\}} \quad (\text{B-31})$$

Sustituyendo las constantes A y B en la solución general:

$$\bar{B}(r_D, s) = \frac{\operatorname{Cosh}(r_D \sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) \right] - \operatorname{Senh}(r_D \sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \right]}{s \left\{ \operatorname{Cosh}(\sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) \right] - \operatorname{Senh}(\sqrt{s}) \left[\sqrt{s} \operatorname{Senh}(R_D \sqrt{s}) - \frac{1}{R_D} \operatorname{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \right] \right\}} \quad (\text{B-32})$$

Sustituyendo las siguientes igualdades hiperbólicas en el numerador de B-32:

$$\text{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \text{Cosh}(r_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D + r_D]) + \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) \quad (\text{B-33})$$

$$\text{Senh}(R_D \sqrt{s}) \text{Cosh}(r_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D + r_D]) + \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) \quad (\text{B-34})$$

$$\text{Senh}(R_D \sqrt{s}) \text{Senh}(r_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D + r_D]) - \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) \quad (\text{B-35})$$

$$\text{Cosh}(R_D \sqrt{s}) \text{Senh}(r_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D + r_D]) - \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) \quad (\text{B-36})$$

Y mutiplicando por R_D , se obtiene la simplificación del numerador:

$$= R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) - \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) \quad (\text{B-37})$$

Sustituyendo las siguientes igualdades hiperbólicas en el denominador de Ec. B-32:

$$\text{Cosh}(\sqrt{s}) \text{Cosh}(R_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D + 1]) + \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) \quad (\text{B-38})$$

$$\text{Cosh}(\sqrt{s}) \text{Senh}(R_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D + 1]) + \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) \quad (\text{B-39})$$

$$\text{Senh}(\sqrt{s}) \text{Senh}(R_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D + 1]) - \frac{1}{2} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) \quad (\text{B-40})$$

$$\text{Senh}(\sqrt{s}) \text{Cosh}(R_D \sqrt{s}) = \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D + 1]) - \frac{1}{2} \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) \quad (\text{B-41})$$

Y mutiplicando por R_D , se obtiene la simplificación del denominador:

$$= R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) - \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) \quad (\text{B-42})$$

Sustituyendo la ecuación B-37 y B-42 en la B-32, se obtiene el comportamiento de flujo esférico en yacimiento finito:

$$\bar{B}(r_D, s) = \frac{R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) - \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D])}{s [R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) - \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1])]} \quad (\text{B-43})$$

También se puede escribir como:

$$\bar{B}(r_D, s) = \frac{\text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) - R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D])}{s[\text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) - R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1])]} \quad (\text{B-44})$$

El gasto está definido en el espacio de Laplace de la siguiente manera:

$$\bar{e}_D = - \left(\frac{\partial \bar{p}_D}{\partial r_D} \right)_1 = - \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial r_D} - \bar{B} \right)_1 \quad (\text{B-45})$$

La derivada de la solución con respecto a r_D :

$$\frac{\partial \bar{B}(r_D, s)}{\partial r_D} = \frac{R_D s \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - r_D]) - \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - r_D])}{s[\text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) - R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1])]} \quad (\text{B-46})$$

Evaluando las ecuaciones B-44 y B-46 en $r_D=1$ y sustituyendo en B-45:

$$\bar{e}_D = \frac{\sqrt{s}[R_D - 1] \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) + [R_D s - 1] \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1])}{s[R_D \sqrt{s} \text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1]) - \text{Senh}(\sqrt{s}[R_D - 1])]} \quad (\text{B-47})$$

Dividiendo entre $\text{Cosh}(\sqrt{s}[R_D - 1])$:

$$\bar{e}_D = \frac{\sqrt{s}[R_D - 1] + [R_D s - 1] \text{Tanh}(\sqrt{s}[R_D - 1])}{s[R_D \sqrt{s} - \text{Tanh}(\sqrt{s}[R_D - 1])]} \quad (\text{B-48})$$

La relación que existe entre el tiempo adimensional de la matriz esférica finita y el tiempo adimensional de la fractura radial infinita (Apéndice G) en el espacio de Laplace es:

$$s_{ma} = \frac{s_f}{\eta_{maD}} \quad (\text{B-49})$$

Sustituyendo la ecuación anterior en B-48, se obtiene el gasto de matriz esférica finita al tiempo adimensional de la fractura radial:

$$e_D = \frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \quad (\text{B-50})$$

Apéndice C

Flujo esférico en fractura rodeada por bloque de matriz infinito

Ecuación de flujo esférico

$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{\phi \mu c_i}{k} \frac{\partial p(r,t)}{\partial t} \quad r_w < r < \infty \text{ y } t > 0 \quad (C-1)$$

Condición inicial $p(r,0) = p_i$ (C-2)

Frontera interna: presión constante $p(r_f,t) = p_{fj}$ (C-3)

Frontera externa: yacimiento infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} p(r,t) = 0$ (C-4)

Transformación de la ecuación de flujo esférico a variables adimensionales.

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w} \quad R_D = \frac{r_e}{r_f} \quad t_D = \frac{k_{ma} t}{(\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} = \frac{\eta_{ma} t}{r_f^2} \quad p_D(r_D, t_D) = \frac{p_i - p(r,t)}{p_i - p(r_f,t)}$$

La derivada con respecto al tiempo. Aplicando regla de la Cadena:

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial t} = \frac{dp(r,t)}{dp_D(r_D, t_D)} \left[\frac{dt_D}{dt} \right] \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} = -[p_i - p(r_f, t)] \frac{k_{ma}}{(\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (C-5)$$

La primera derivada con respecto al radio. Aplicando regla de la Cadena:

$$\frac{\partial p(r,t)}{\partial r} = \frac{dp(r,t)}{dp_D(r_D, t_D)} \left[\frac{dr_D}{dr} \right] \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = -[p_i - p(r_f, t)] \frac{1}{r_f} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \quad (C-6)$$

La segunda derivada con respecto al radio, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 p(r,t)}{\partial r^2} = -[p_i - p(r_f, t)] \frac{1}{r_f} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) \right] \frac{dr_D}{dr} = -[p_i - p(r_f, t)] \frac{1}{r_f^2} \frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \quad (C-7)$$

Sustituyendo las Ecs. C-5, C-6, C-7, multiplicando la ecuación por $-\frac{r_f^2}{p_i - p_f}$ y

simplificando, se obtiene una ecuación de flujo esférico adimensional:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{2}{r_D} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (C-8)$$

Transformación a variables adimensionales las condiciones del problema.

Condición inicial: $p_D(r_D, 0) = 0$ (C-9)

Condición de frontera interna: $p_D(1, t_D) = 1$ (C-10)

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0$ (C-11)

Transformación de la ecuación de flujo esférico a una ecuación en forma de flujo lineal

$$B(r_D, t_D) = r_D p_D(r_D, t_D) \quad (C-12)$$

$$p_D = \frac{B(r_D, t_D)}{r_D} \quad (C-13)$$

La primera derivada con respecto al radio:

$$\frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial r_D} - \frac{B(r_D, t_D)}{r_D^2} \quad (C-14)$$

La segunda derivada con respecto al radio:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial^2 B(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} - \frac{2}{r_D^2} \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial r_D} + \frac{2B(r_D, t_D)}{r_D^3} \quad (C-15)$$

La derivada con respecto al tiempo adimensional:

$$\frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} = \frac{r_D \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} - B(r_D, t_D) \frac{\partial r_D}{\partial t_D}}{r_D^2} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (C-16)$$

Sustituyendo las Ecuaciones C-14, C-15, C-16 en la ecuación C-8 y simplificando se obtiene la ecuación de flujo esférico en forma de una ecuación en forma de flujo lineal:

$$\frac{\partial^2 B(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} = \frac{\partial B(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (C-17)$$

Transformación de las condiciones del problema en términos de la variable B.

Condición Inicial: $B(r_D, 0) = 0$ (C-18)

Condición de frontera interna: $B(1, t_D) = 1$ (C-19)

Condición de frontera externa: $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r_D, t_D) = 0$ (C-20)

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación de flujo esférico en forma de flujo lineal y a las condiciones del problema:

$$\frac{d^2 \bar{B}(r_D, s)}{dr_D^2} = s\bar{B}(r_D, s) - B(r_D, 0) \tag{C-21}$$

Condición de frontera interna: $\bar{B}(1, s) = \frac{1}{s}$ (C-22)

Condición de frontera externa: $\lim_{r \rightarrow \infty} \bar{B}(r_D, s) = 0$ (C-23)

Aplicando la condición inicial en la ecuación de flujo lineal en el espacio de Laplace:

$$\frac{d^2 \bar{B}(r_D, s)}{dr_D^2} - sf(s)\bar{B}(r_D, s) = 0 \tag{C-24}$$

$f(s) = 1$ (C-25)

La solución general a la ecuación de C-24 es:

$$\bar{B}(r_D, s) = C_1 e^{-r_D \sqrt{f(s)}} + C_2 e^{r_D \sqrt{f(s)}} \tag{C-26}$$

Utilizando la condición de frontera externa en la solución general y evaluando se obtiene:

$$\bar{B}(r_D, s) = C_1 e^{-r_D \sqrt{f(s)}} \tag{C-27}$$

Aplicando la condición de frontera interna:

$$C_1 = \frac{1}{s e^{-\sqrt{f(s)}}} \tag{C-28}$$

Sustituyendo la constante C_1 en la ecuación C-27 y agrupando exponentes se obtiene la solución en el espacio de Laplace de la ecuación adimensional de flujo esférico en forma de flujo lineal:

$$\bar{B}(r_D, s) = \frac{1}{s} e^{-\sqrt{f(s)}[r_D-1]} \tag{C-29}$$

Sustituyendo la función de transformación, se obtiene la respuesta de presión $p_D(r_D, t_D)$ de flujo esférico

$$\overline{p_D}(r_D, s) = \frac{1}{sr_D} e^{-\sqrt{s}(r_D-1)} \quad (C-30)$$

El gasto de flujo adimensional que entra a la esfera:

$$e_D = e_D(1, t_D) = -\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D}\right)_1 \quad (C-31)$$

Evaluando la ecuación C-14 en $r_D=1$ y aplicando transformada de Laplace:

$$\frac{\partial \overline{p_D}(1, s)}{\partial r_D} = \frac{\partial \overline{B}(1, s)}{\partial r_D} - \overline{B}(1, s) \quad (C-32)$$

La primera derivada de la respuesta de presión con respecto r_D :

$$\frac{\partial \overline{B}(r_D, s)}{\partial r_D} = -\frac{\sqrt{s}}{s} e^{-\sqrt{s}(r_D-1)} \quad (C-33)$$

Evaluando C-29 y C-33 $r_D=1$ y sustituyendo en C-32:

$$\frac{\partial \overline{p_D}(1, s)}{\partial r_D} = -\frac{\sqrt{s}}{s} \frac{1}{s} \quad (C-34)$$

El gasto de flujo adimensional que entra a la esfera en el espacio de Laplace es:

$$\overline{e}_D = \overline{e}_D(1, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} + \frac{1}{s} \quad (C-35)$$

La relación entre el tiempo adimensional de la matriz esférica infinita y el tiempo adimensional de la fractura radial infinita (Apéndice G) en el espacio de Laplace es:

$$s_{ma} = \frac{1}{\eta_{maD}} s_f \quad (C-36)$$

Sustituyendo C-36 en C-35:

$$\overline{e}_D = \frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} \quad (C-37)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice D

Modelo de doble porosidad con flujo interporoso transitorio convolucionado en fractura rodeada por matriz finita.

Flujo radial en las fracturas de un fluido ligeramente compresible con término fuente.

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_{ff} \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + q^* \frac{\mu}{k_{fb}} \quad (D-1)$$

q^* es el gasto de la matriz a la fractura por unidad de volumen de roca

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} q^*_{uma}(t-\tau) d\tau \quad (D-2)$$

donde:

q^*_{uma} , es el gasto de fluido de la matriz a la fractura transferido por caída de presión unitaria en la fractura por unidad de volumen de roca:

$$q^*_{uma} = \frac{k_{ma} A_f}{\mu V_r} (\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria} \quad (D-3)$$

donde:

$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria}$ es el gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura

V_r es el volumen de la roca

A_f Área expuesta al flujo o área de la fractura

Sustituyendo D-3 en D-2:

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} \frac{k_{ma} A_f}{\mu V_r} [(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria}(t-\tau)] d\tau \quad (D-4)$$

Sustituyendo D-4 en D-1, se obtiene el modelo de flujo radial en las fracturas con transferencia matriz – fractura convolucionada:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_{gf} \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{k_{ma} A_f}{k_{fb} V_r} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} [(\nabla \Delta p_{uma})_{supunitaria}(t-\tau)] d\tau \quad (D-5)$$

Condición inicial $p_f(r,0) = p_i$ (D-6)

Frontera interna: gasto constante $\lim_{r \rightarrow r_w} \frac{\partial p_f(r,t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{kr_w}$ (D-7)

Frontera externa: yacimiento infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r,t) = p_i$ (D-8)

Transformación a variables adimensionales la ecuación de flujo radial en la fractura

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad t_D = \frac{k_{fb} t}{(\phi c_t)_i \mu r_w^2}; \quad p_{fD}(r_D, t_D) = \frac{2\pi k_{fb} h}{q\mu} [p_i - p_f(r,t)] = \frac{2\pi k_{fb} h}{q\mu} [\Delta p_f(r,t)];$$

$$R_D = \frac{r_e}{r_f}$$

Definición de funciones:

$$\omega = \frac{\phi_{fb} c_{gf}}{\phi_{fb} c_{gf} + \phi_{ma} c_{tma}} = \frac{\phi_{fb} c_{gf}}{(\phi c_t)_i} \quad (D-9)$$

$$1 - \omega = \frac{(\phi c_t)_{ma}}{(\phi c_t)_i} \quad (D-10)$$

$$\eta_{maD} = \frac{\eta_{ma} r_w^2}{\eta_{fb} r_f^2} = \frac{k_{ma} / (\phi c_t)_{ma} \mu r_w^2}{k_{fb} / (\phi c_t)_i \mu r_f^2} = \frac{k_{ma} (\phi c_t)_i r_w^2}{k_{fb} (\phi c_t)_{ma} r_f^2} \quad (D-11)$$

La primera derivada parcial con respecto a la distancia, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi k_{fb} h r_w} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \quad (D-12)$$

La segunda derivada parcial con respecto a la distancia, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f(r,t)}{\partial r^2} = \frac{q\mu}{2\pi k_{fb} h r_w^2} \frac{\partial p^2_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \quad (D-13)$$

La derivada parcial con respecto al tiempo, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial t} = \frac{q\mu}{2\pi k_{fb} h} \left[\frac{k_{fb}}{(\phi c_t)_t \mu r_w^2} \right] \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (D-14)$$

Sustituyendo las ecuaciones D-12, D-13 y D-14 en la ecuación de flujo radial en la fractura (Ec. D-5) y simplificando:

$$\frac{\partial p^2_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\phi_{fb} c_{ff}}{(\phi c_t)_t} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} + r_w^2 \frac{k_{ma}}{k_{fb}} \frac{A_f}{V_r} \int_0^t \frac{\partial p_D(\tau)}{\partial \tau} [\nabla \Delta p_{uma}(r, t - \tau)]_{sup\ unitaria} d\tau \quad (D-15)$$

$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria}$ es el gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura causado por una caída de presión unitaria, se considera una fractura rodeada por bloque de matriz esférico y se determina el gasto de fluido que entra a la fractura a presión constante en un bloque de matriz esférico finito.

La relación entre el gasto que entra a la fractura y la caída de presión en la cara de la fractura es (Apéndice F):

$$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria} = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_f} = \frac{1}{r_f} \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (D-16)$$

Si:

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = q_D(I, t_D) \quad (D-17)$$

Sustituyendo D-17 en D-16:



$$(\nabla \Delta p_{uma})_{supunitaria} = \frac{1}{r_f} q_D(l, t_D) \quad (D-18)$$

q_D es el gasto adimensional que entra a la fractura rodeada por bloque de matriz esférico finito, también definido como función de transferencia entre la matriz y la fractura

Sustituyendo D-18, ω , η_{maD} y $(1-\omega)$ y en D-15:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{maD} (1-\omega) \frac{A_f r_f^2}{V_r r_f} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_D(\tau)}{\partial \tau} q_D d\tau \quad (D-19)$$

A_{fD} , es el área de la fractura por unidad de volumen de roca, definido de la siguiente manera:

$$A_{fD} = \frac{A_f}{V_r} = \frac{2\pi r_f^2}{2/3\pi(r_e^3 - r_f^3)} \quad (D-20)$$

Sustituyendo D-20 en D-19:

$$\frac{\partial^2 p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{maD} (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \int_0^{t_D} \frac{\partial p_D(\tau)}{\partial \tau} q_D d\tau \quad (D-21)$$

Transformación a variables adimensionales las condiciones de frontera

Condición inicial: $p_D(r_D, 0) = 0 \quad (D-22)$

Condición de frontera interna: $\lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1 \quad (D-23)$

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_D(r_D, t_D) = 0 \quad (D-24)$

SOLUCIÓN

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación de flujo radial en las fracturas:

$$\frac{d^2 \overline{p_D}(r_D, s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \overline{p_D}(r_D, s)}{dr_D} = \omega [s \overline{p_D}(r_D, s) - p_D(r_D, 0)] +$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$[1-\omega] \frac{3}{R_D^3 - 1} L \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(\tau)}{\partial \tau} q_D(l, \eta_{maD}, t_D)(t_D - \tau) d\tau \right] \quad (D-25)$$

Condición de frontera interna:
$$\frac{d\bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D} = -\frac{1}{s} \quad (D-26)$$

Condición de frontera externa
$$\lim_{r_D \rightarrow \infty} \bar{p}_{jD}(r_D, s) = 0 \quad (D-27)$$

La transformada de Laplace del término fuente (convolución):

$$L \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(t_D)}{\partial \tau} * q_D(\eta_{maD}, (R_D, t_D)) d\tau \right] = f_1(s) \cdot f_2(s) \quad (D-28)$$

$$f_1(s) = L \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_{jD}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = [s\bar{p}_{jD}(r_D, s) - p_{jD}(r_D, 0)] \quad (D-29)$$

$$f_2(s) = \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) = \frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1] + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \quad (D-30)$$

Sustituyendo D-29 y D-30 en D-25:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d\bar{p}_{jD}(r_D, s)}{dr_D} = \omega [s\bar{p}_{jD}(r_D, s) - p_{jD}(r_D, 0)] +$$

$$[1-\omega] \frac{3}{R_D^3 - 1} [s\bar{p}_{jD}(r_D, s) - p_{jD}(r_D, 0)] \left[\frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1] + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \right] \quad (D-31)$$

Aplicando la condición inicial a la ecuación anterior:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{\partial r_D} - s \bar{p}_{pD}(r_D, s) f(s) = 0 \quad (D-32)$$

Donde:

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \left[\frac{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} + \left[R_D \frac{s_f}{\eta_{maD}} - 1 \right] \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right)}{\frac{s_f}{\eta_{maD}} \left[R_D \sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}} - \text{Tanh} \left(\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}} [R_D - 1]} \right) \right]} \right] \quad (D-33)$$

La solución general de la ecuación de flujo en las fracturas es:

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = A I_0(r_D \sqrt{sf(s)}) + B K_0(r_D \sqrt{sf(s)}) \quad (D-34)$$

Sustituyendo la condición de frontera externa y evaluando, se tiene:

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = B K_0(r_D \sqrt{sf(s)}) \quad (D-35)$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a r_D :

$$\frac{\partial \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{\partial r_D} = -B \sqrt{sf(s)} K_1(r_D \sqrt{sf(s)}) \quad (D-36)$$

Aplicando la condición de frontera interna y evaluando en $r_D = 1$, se obtiene el valor de la constante B:

$$B = \frac{1}{s \sqrt{sf(s)} K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (D-37)$$

Sustituyendo el valor de B en la solución general (D-34)

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = \frac{1}{s \sqrt{sf(s)}} \frac{K_0(r_D \sqrt{sf(s)})}{K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (D-38)$$

Sustituyendo la función $f(s)$

$$\bar{p}_D(r_D, s) = \frac{1}{s \sqrt{s \left[\omega + (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) \right]}} \frac{K_0 \left(r_D \sqrt{s \left[\omega + (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) \right]} \right)}{K_1 \left(\sqrt{s \left[\omega + (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) \right]} \right)} \quad (D-39)$$

La solución en el pozo:

$$\bar{p}_D(s) = \frac{1}{s \sqrt{s \left[\omega + (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) \right]}} \frac{K_0 \left(\sqrt{s \left[\omega + (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) \right]} \right)}{K_1 \left(\sqrt{s \left[\omega + (1-\omega) \frac{3}{R_D^3 - 1} \bar{q}_D(R_D, \eta_{maD}, s) \right]} \right)} \quad (D-40)$$

Solución analítica aproximada para tiempos cortos

$$t \rightarrow 0 \qquad s \rightarrow \infty$$

Escribiendo la ecuación D-38 en el pozo, $r_D=1$

$$\bar{p}_D(s) = \frac{1}{s \sqrt{sf(s)}} \frac{K_0(\sqrt{sf(s)})}{K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (D-41)$$

Cuando $s \rightarrow \infty$ o valores pequeños de t la función (Fig 3.9):

$$f(s) \cong \omega \quad (D-42)$$

Sustituyendo D-42 en D-41:

$$\bar{p}_D(s) = \frac{1}{s \sqrt{s\omega}} \frac{K_0(\sqrt{s\omega})}{K_1(\sqrt{s\omega})} \quad (D-43)$$

La aproximación de la funciones Bessel para argumentos grandes de s (Abramowitz)³⁷:

$$K_0(z) \approx -\ln \left(e^\gamma \frac{z}{2} \right) \quad (D-44)$$

$$K_1(z) \approx \frac{1}{z} \quad (D-45)$$

$$\text{Si } z = \sqrt{s\omega}$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$$(D-46)$$

$$K_0(\sqrt{s\omega}) \approx -\ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{s\omega}}{2}\right) \tag{D-47}$$

$$K_1(\sqrt{s\omega}) \approx \frac{1}{\sqrt{s\omega}} \tag{D-48}$$

Sustituyendo las funciones K_0 y K_1 en la solución en el pozo (D-43):

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{s\omega}} \frac{-\ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{s\omega}}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{s\omega}}} = \frac{1}{s} \left[-\ln e^\gamma \frac{\sqrt{s\omega}}{2} \right] \tag{D-49}$$

Simplificando:

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\frac{1}{s} \ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{\omega}}{2}\right) - \frac{1}{2s} \ln(s) \tag{D-50}$$

Invirtiendo a espacio real

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{\omega e^{2\gamma}}\right) + \frac{1}{2} [\gamma + \ln(t_D)] = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{4e^\gamma}{e^{2\gamma}}\right) + \ln\left(\frac{t_D}{\omega}\right) \right] \tag{D-51}$$

La solución a tiempos cortos es:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t_D}{\omega}\right) + 0.809071 \right] \tag{D-52}$$

Solución analítica aproximada para tiempos largos

$$t \rightarrow \infty \qquad s \rightarrow 0$$

Cuando $s \rightarrow 0$ o valores grandes de t la función (Fig 3.9):

$$f(s) \cong 1 \tag{D-53}$$

Sustituyendo D-53 en D-41:

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{s}} \frac{K_0(\sqrt{s})}{K_1(\sqrt{s})} \tag{D-54}$$

La aproximación de la funciones Bessel para argumentos grandes de s (Abramowitz)³⁷:

$$K_0(\sqrt{z}) \approx -\ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{z}}{2}\right) \tag{D-55}$$

$$K_1(\sqrt{z}) \approx \frac{1}{\sqrt{z}} \tag{D-56}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sustituyendo las funciones K_0 y K_1 en la solución en el pozo (D-54):

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{s}} \frac{-\ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{s}}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{s}}} = \frac{1}{s} \left[-\ln e^\gamma \frac{\sqrt{s}}{2} \right] \quad (\text{D-57})$$

Simplificando:

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\frac{1}{s} \ln\left(\frac{e^\gamma}{2}\right) - \frac{1}{2s} \ln(s) \quad (\text{D-58})$$

Invirtiendo a espacio real

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{e^{2\gamma}}\right) + \frac{1}{2} [\gamma + \ln(t_D)] = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{4e^\gamma}{e^{2\gamma}}\right) + \ln(t_D) \right] \quad (\text{D-59})$$

La solución a tiempos cortos es:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} [\ln(t_D) + 0.809071] \quad (\text{D-60})$$

Apéndice E

Modelo de doble porosidad con flujo interporoso transitorio convolucionado en fractura rodeada por matriz infinita.

Flujo radial en las fracturas de un fluido ligeramente compresible con término fuente.

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + q^* \frac{\mu}{k_{fb}} \quad (E-1)$$

q^* es el gasto de la matriz a la fractura por unidad de volumen de roca

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} q^*_{uma} (t - \tau) d\tau \quad (E-2)$$

donde:

q^*_{uma} , es el gasto de fluido de la matriz a la fractura transferido por caída de presión unitaria en la fractura por unidad de volumen de roca:

$$q^*_{uma} = \frac{k_{ma} A_f}{\mu V_r} (\nabla \Delta p_{uma})_{sup unitaria} \quad (E-3)$$

donde:

$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup unitaria}$ es el gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura

V_r es el volumen de la roca

A_f Área expuesta al flujo o área de la fractura.

Sustituyendo E-3 en E-2:

$$q^* = \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} \frac{k_{ma} A_f}{\mu V_r} [(\nabla \Delta p_{uma})_{sup unitaria} (t - \tau)] d\tau \quad (E-4)$$

Sustituyendo E-4 en E-1, se obtiene el modelo de flujo radial en las fracturas con transferencia matriz – fractura convolucionada:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial r} = \frac{\phi_{fb} c_f \mu}{k_{fb}} \frac{\partial \Delta p_f}{\partial t} + \frac{k_{ma} A_f}{k_{fb} V_r} \int_0^t \frac{\partial \Delta p_f(\tau)}{\partial \tau} [(\nabla \Delta p_{uma})_{sup unitaria} (t - \tau)] d\tau \quad (E-5)$$

Condición inicial $p_f(r,0) = p_i$ (E-6)

Frontera interna: gasto constante $\lim_{r \rightarrow r_w} \frac{\partial p_f(r,t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{kr_w}$ (E-7)

Frontera externa: yacimiento infinito $\lim_{r \rightarrow \infty} p_f(r,t) = p_i$ (E-8)

Transformación a variables adimensionales la ecuación de flujo radial en la fractura

Variables adimensionales:

$$r_D = \frac{r}{r_w}; \quad t_D = \frac{k_{fb}t}{(\phi c_t)_i \mu r_w^2}; \quad p_{jD}(r_D, t_D) = \frac{2\pi k_{fb}h}{q\mu} [p_i - p_f(r,t)] = \frac{2\pi k_{fb}h}{q\mu} [\Delta p_f(r,t)];$$

Definición de funciones:

$$\omega = \frac{\phi_{fb}c_{ff}}{\phi_{fb}c_{ff} + \phi_{ma}c_{ma}} = \frac{\phi_{fb}c_{ff}}{(\phi c_t)_i} \quad (E-9)$$

$$1 - \omega = \frac{(\phi c_t)_{ma}}{(\phi c_t)_i} \quad (E-10)$$

$$\eta_{maD} = \frac{\eta_{ma} r_w^2}{\eta_{fb} r_f^2} = \frac{k_{ma} / (\phi c_t)_{ma} \mu r_w^2}{k_{fb} / (\phi c_t)_i \mu r_f^2} = \frac{k_{ma} (\phi c_t)_i r_w^2}{k_{fb} (\phi c_t)_{ma} r_f^2} \quad (E-11)$$

La primera derivada parcial con respecto a la distancia, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial r} = \frac{q\mu}{2\pi k_{fb}hr_w} \frac{\partial p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \quad (E-12)$$

La segunda derivada parcial con respecto a la distancia, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial^2 \Delta p_f(r,t)}{\partial r^2} = \frac{q\mu}{2\pi k_{fb}hr_w^2} \frac{\partial^2 p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} \quad (E-13)$$

La derivada parcial con respecto al tiempo, utilizando regla de la cadena:

$$\frac{\partial \Delta p_f(r,t)}{\partial t} = \frac{q\mu}{2\pi k_{fb}h} \left[\frac{k_{fb}}{(\phi c_t)_i \mu r_w^2} \right] \frac{\partial p_{jD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} \quad (E-14)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Sustituyendo las ecuaciones E-12, E-13 y E-14 en la ecuación de flujo radial en la fractura (Ec. E-5) y simplificando:

$$\frac{\partial p^2_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \frac{\phi_{fb} c_{vf}}{(\phi c_i)_i} \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + r_w^2 \frac{k_{ma}}{k_{fb}} \frac{A_f}{V_r} \int_0^t \frac{\partial p_{pD}(\tau)}{\partial \tau} [\nabla \Delta p_{uma}(r, t - \tau)]_{sup\ unitaria} d\tau \quad (E-15)$$

$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria}$ es el gradiente de presión dentro de la matriz en la cara de la fractura causado por una caída de presión unitaria, se considera una fractura rodeada por bloque de matriz esférico y se determina el gasto de fluido que entra a la fractura a presión constante en un bloque de matriz esférico infinito (Apéndice C).

La relación entre el gasto que entra a la fractura y la caída de presión en la cara de la fractura es (Apéndice F):

$$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria} = \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_f} = \frac{1}{r_f} \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} \quad (E-16)$$

$$\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_{r_D=1} = q_D(l, t_D) \quad (E-17)$$

Sustituyendo E-17 en E-16:

$$(\nabla \Delta p_{uma})_{sup\ unitaria} = \frac{1}{r_f} q_D(l, t_D) \quad (E-18)$$

q_D es el gasto adimensional que entra a la fractura rodeada por bloque de matriz esférico infinito, también definido como función de transferencia entre la matriz y la fractura.

Sustituyendo E-18, ω , η_{maD} y $(1-\omega)$, en E-15:

$$\frac{\partial p^2_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{pD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{maD} (1-\omega) \frac{A_f}{V_r} \frac{r_f^2}{r_f} \int_0^t \frac{\partial p_{pD}(\tau)}{\partial \tau} q_D d\tau \quad (E-19)$$

A_{fD} , es el área de la fractura por unidad de volumen de roca, definido de la siguiente manera:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$A_{fD} = \frac{A_f r_f^2}{V_r r_f} \quad (\text{E-20})$$

Sustituyendo E-20 en E-19:

$$\frac{\partial^2 p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial t_D} + \eta_{maD} (1 - \omega) A_{fD} \int_0^{t_p} \frac{\partial p_{fD}(\tau)}{\partial \tau} q_D d\tau \quad (\text{E-21})$$

Transformación a variables adimensionales las condiciones de frontera

Condición inicial: $p_{fD}(r_D, 0) = 0$ (E-22)

Condición de frontera interna: $\lim_{r_D \rightarrow 1} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right) = -1$ (E-23)

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} p_{fD}(r_D, t_D) = 0$ (E-24)

SOLUCIÓN

Aplicando transformada de Laplace a la ecuación de flujo radial en las fracturas:

$$\frac{d^2 \overline{p_{fD}}(r_D, s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \overline{p_{fD}}(r_D, s)}{dr_D} = \omega [s \overline{p_{fD}}(r_D, s) - p_{fD}(r_D, 0)] + [1 - \omega] A_{fD} L \left[\int_0^{t_p} \frac{\partial p_{fD}(\tau)}{\partial \tau} q_D (1, \eta_{maD}, t_D) (t_D - \tau) d\tau \right] \quad (\text{E-25})$$

Condición de frontera interna: $\frac{d \overline{p_{fD}}(r_D, s)}{dr_D} = -\frac{1}{s}$ (E-26)

Condición de frontera externa: $\lim_{r_D \rightarrow \infty} \overline{p_{fD}}(r_D, s) = 0$ (E-27)

La transformada de Laplace del término fuente (convolución):

$$L \left[\int_0^{t_p} \frac{\partial p_{fD}(t_D)}{\partial \tau} * q_D (\eta_{maD}, (R_D, t_D)) d\tau \right] = f_1(s) \cdot f_s(s) \quad (\text{E-28})$$

$$f_1(s) = L \left[\int_0^{t_p} \frac{\partial p_{fD}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = [s \overline{p_{fD}}(r_D, s) - p_{fD}(r_D, 0)] \quad (\text{E-29})$$

$$f_2(s) = \bar{q}_D(\eta_{maD}, s) = \frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\eta_{maD}} \tag{E-30}$$

Sustituyendo E-29 y E-30 en E-25:

$$\frac{d^2 \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{dr_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{d \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{dr_D} = \omega [s \bar{p}_{pD}(r_D, s) - p_{pD}(r_D, 0)] + [1 - \omega] A_{pD} [s \bar{p}_{pD}(r_D, s) - p_{pD}(r_D, 0)] \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\eta_{maD}} \right] \tag{E-31}$$

Aplicando la condición inicial:

$$\frac{\partial^2 \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{\partial r_D^2} + \frac{1}{r_D} \frac{\partial \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{\partial r_D} - s \bar{p}_{pD}(r_D, s) f(s) = 0 \tag{E-32}$$

Donde:

$$f(s) = \omega + (1 - \omega) A_{pD} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{s_f}{\eta_{maD}}}} + \frac{1}{\eta_{maD}} \right] \tag{E-33}$$

La solución general de la ecuación de flujo en las fracturas es:

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = A I_0(r_D \sqrt{sf(s)}) + B K_0(r_D \sqrt{sf(s)}) \tag{E-34}$$

Sustituyendo la condición de frontera externa y evaluando:

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = B K_0(r_D \sqrt{sf(s)}) \tag{E-35}$$

Derivando la ecuación anterior con respecto a r_D :

$$\frac{\partial \bar{p}_{pD}(r_D, s)}{\partial r_D} = -B \sqrt{sf(s)} K_1(r_D \sqrt{sf(s)}) \tag{E-36}$$

Aplicando la condición de frontera interna y evaluando en $r_D = 1$, se obtiene el valor de la constante B:

$$B = \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (E-37)$$

Sustituyendo el valor de B en la solución general (E-34)

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}} \frac{Ko(r_D\sqrt{sf(s)})}{K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (E-38)$$

Sustituyendo la función $f(s)$

$$\bar{p}_{pD}(r_D, s) = \frac{1}{s\sqrt{s(\omega + (1-\omega)A_{pD}\bar{q}_D(\eta_{maD}, s))}} \frac{Ko\left(r_D\sqrt{s(\omega + (1-\omega)A_{pD}\bar{q}_D(\eta_{maD}, s))}\right)}{K_1\left(\sqrt{s(\omega + (1-\omega)A_{pD}\bar{q}_D(\eta_{maD}, s))}\right)} \quad (E-39)$$

La solución en el pozo:

$$\bar{p}_{pD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{s(\omega + (1-\omega)A_{pD}\bar{q}_D(\eta_{maD}, s))}} \frac{Ko\left(\sqrt{s(\omega + (1-\omega)A_{pD}\bar{q}_D(\eta_{maD}, s))}\right)}{K_1\left(\sqrt{s(\omega + (1-\omega)A_{pD}\bar{q}_D(\eta_{maD}, s))}\right)} \quad (E-40)$$

Solución analítica aproximada para tiempos cortos

$$t \rightarrow 0 \quad s \rightarrow \infty$$

Escribiendo la ecuación E-38 en el pozo, $r_D=1$

$$\bar{p}_{pD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{sf(s)}} \frac{Ko(\sqrt{sf(s)})}{K_1(\sqrt{sf(s)})} \quad (E-41)$$

Cuando $s \rightarrow \infty$ o valores pequeños de t la función (Fig 3.13):

$$f(s) \cong \omega \quad (E-42)$$

Sustituyendo E-42 en E-41:

$$\bar{p}_{pD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{s\omega}} \frac{Ko(\sqrt{s\omega})}{K_1(\sqrt{s\omega})} \quad (E-43)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La aproximación de la funciones Bessel para argumentos grandes de s (Abramowitz)³⁷:

$$K_0(\sqrt{s\omega}) \approx -\ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{s\omega}}{2}\right) \quad (\text{E-44})$$

$$K_1(\sqrt{s\omega}) \approx \frac{1}{\sqrt{s\omega}} \quad (\text{E-45})$$

Sustituyendo las funciones K_0 y K_1 en la solución en el pozo (E-43):

$$\bar{p}_{wD}(s) = \frac{1}{s\sqrt{s\omega}} \frac{-\ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{s\omega}}{2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{s\omega}}} = \frac{1}{s} \left[-\ln e^\gamma \frac{\sqrt{s\omega}}{2} \right] \quad (\text{E-46})$$

Simplificando:

$$\bar{p}_{wD}(s) = -\frac{1}{s} \ln\left(e^\gamma \frac{\sqrt{\omega}}{2}\right) - \frac{1}{2s} \ln(s) \quad (\text{E-47})$$

Invirtiendo a espacio real

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{4}{\omega e^{2\gamma}}\right) + \frac{1}{2} [\gamma + \ln(t_D)] = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{4e^\gamma}{e^{2\gamma}}\right) + \ln\left(\frac{t_D}{\omega}\right) \right] \quad (\text{E-48})$$

La solución a tiempos cortos es:

$$\bar{p}_{wD}(t_D) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{t_D}{\omega}\right) + 0.809071 \right] \quad (\text{E-49})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice F

Relación de gasto adimensional en la fractura rodeada por bloque de matriz y el gradiente de presión

De la solución de flujo esférico en yacimientos homogéneos (Chatas³⁵) tenemos lo siguiente:

$$e = 2\pi r_w^2 \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} \quad (F-1)$$

$$e = -2\pi r_w \frac{k}{\mu} \Delta p(r_w, t') \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_1 \quad (F-2)$$

Igualando F-1 y F-2:

$$2\pi r_w^2 \frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = -2\pi r_w \frac{k}{\mu} \Delta p(r_w, t') \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_1 \quad (F-3)$$

Simplificando:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = -\frac{1}{r_w} \Delta p(r_w, t') \left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_1 \quad (F-4)$$

q_D , es el gasto adimensional de producción a gasto constante, también recibe el nombre de "función de transferencia" del fluido que pasa de la matriz a la fractura, definido por:

$$q_D = (l, t_D) = -\left(\frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)_1 \quad (F-5)$$

De F-4 y F-5, tenemos:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r} \right)_{r=r_w} = \frac{1}{r_w} \Delta p(r_w, t') q_D(l, t_D) \quad (F-6)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para caída de presión unitaria, $\Delta p(r_w, t') = 1$, el gradiente queda:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r=r_w} = \frac{1}{r_w} q_D(l, t_D) \quad (\text{F-7})$$

En términos del radio de la fractura, el gradiente obtenido es:

$$(\nabla \Delta p_{uma}) = \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_{r_f} = \frac{1}{r_f} q_D(l, t_D) \quad (\text{F-8})$$

Apéndice G

Relación de tiempo adimensional de la matriz y la fractura radial

Los gastos adimensionales obtenidos con flujo esférico en la matriz finita e infinita (Apéndice B y C), son ecuaciones referidas a un tiempo adimensional de matriz, como el sistema esta unido a la fractura radial infinita que produce al pozo, ambos medios deben tener el mismo tiempo de referencia, por lo tanto se presenta lo siguiente:

La relación de tiempos se define de la siguiente manera:

$$t_{Dma} = \frac{k_{ma}}{(\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} t \frac{k_f (\phi c_i)_i \mu r_w^2}{(\phi c_i)_i \mu k_f r_w^2} \quad (G-1)$$

Re escribiendo:

$$t_{Dma} = \frac{k_{ma} (\phi c_i)_i \mu r_w^2}{k_{fb} (\phi c_i)_{ma} \mu r_f^2} \frac{k_{fb} t}{(\phi c_i)_i \mu r_w^2} \quad (G-2)$$

La difusividad hidráulica de la matriz:

$$\eta_{ma} = \frac{k_{ma}}{(\phi c_i)_{ma} \mu} \quad (G-3)$$

La difusividad hidráulica de la matriz:

$$\eta_f = \frac{k_f}{(\phi c_i)_f \mu} \quad (G-4)$$

El tiempo adimensional del sistema de fracturas (Cinco y Samaniego¹⁸):

$$t_{Df} = \frac{k_f}{(\phi c_i)_i \mu r_w^2} t \quad (G-5)$$

La difusividad hidráulica adimensional:

$$\eta_{maD} = \frac{\eta_{ma} r_w^2}{\eta_{fb} r_f^2} \quad (G-6)$$

Sustituyendo las ecuaciones G-5 y G-6 en G-2:

$$t_{Dma} = \eta_{maD} t_{Df} \quad (G-7)$$

Aplicando transformada de Laplace, se obtiene la relación de tiempos adimensionales

$$s_{ma} = \frac{1}{\eta_{maD}} s_f \quad (G-8)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice H

Solución de caída de presión adimensional en la fractura paralelepípeda en función de serie de senos y cosenos

La función de Green^{40,41} $G(M, M_s', t - \tau)$ representa la caída de presión en un punto en la fractura:

$$\frac{\Delta p(x, y, z, t)}{\frac{q}{\phi c}} = G(M, M_s', t - \tau) \quad (H-1)$$

La continuidad de la función H-1, representa la distribución de presión en toda la fractura y se determina por la integración en tiempo:

$$\Delta P(x, y, z, t) = \frac{1}{\phi c} \int_0^t q(\tau) G(M, M_s', (t - \tau)) d\tau \quad (H-2)$$

El Método de Newman^{40,41} "establece que la solución de un problema en tres dimensiones es igual al producto de la solución de tres problemas en una dimensión"; la función de Green se determina por el producto de tres funciones instantáneas fuente (ISF). Cada función fuente (Gringarten y Ramey⁴¹), representa la presión de cada plano que forma la fractura, la función de Green para la fractura esta dada por el producto de tres funciones instantáneas fuente por que son planos fuente que forman la fractura x,y,z:

$$G(M, M_s', t - \tau) = ISF_x ISF_y ISF_z \quad (H-3)$$

$$ISF_x = \frac{1}{x_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_x t}{x_e^2}\right) \cos n\pi \frac{x_w}{x_e} \cos n\pi \frac{x}{x_e} \right] \quad (H-4)$$

$$ISF_y = \frac{y_f}{y_e} \left[1 + \frac{4y_e}{\pi y_f} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_y t}{y_e^2}\right) \operatorname{Sen} n\pi \frac{y_f}{2y_e} \cos n\pi \frac{y_w}{y_e} \cos n\pi \frac{y}{y_e} \right] \quad (H-5)$$

$$ISF_z = \frac{1}{z_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_z t}{z_e^2}\right) \cos^2 n\pi \frac{z_w}{z_e} \right] \quad (H-6)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Variables Adimensionales:

$$\begin{aligned}
 X_D &= \frac{x}{x_e} & X_{wD} &= \frac{x_w}{x_e} & Z_D &= \frac{z}{z_e} & Z_{wD} &= \frac{z_w}{z_e} \\
 Y_D &= \frac{y}{y_e} & Y_{wD} &= \frac{y_w}{y_e} & Y_{fD} &= \frac{y_f}{y_e} & \eta_i &= \frac{k_i}{\phi\mu c}, \quad i = x, y \text{ o } z \\
 t_{DA} &= \frac{kt}{\phi\mu c} \left(\frac{y_f}{x_e y_e z_e} \right)
 \end{aligned}$$

La solución analítica de caída de presión adimensional en la fractura en términos de series de senos y cosenos está dada por la siguiente ecuación:

$$p_D(x_D, y_D, z_D, t_{DA}) = 2\pi \int_0^{t_{DA}} ISFx_D ISFy_D ISFz_D dt_{DA} \tag{H-7}$$

Las funciones fuentes adimensionales para cada plano son:

$$ISFx_D \frac{1}{x_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{z_e}{x_e Y_{fD}}\right) \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \right] \tag{H-8}$$

$$ISFy_D \frac{y_f}{y_e} \left[1 + \frac{4}{\pi Y_{fD}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \exp\left(-n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}}\right) \text{Sen}n\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}n\pi Y_{wD} \text{Cos}n\pi Y_D \right] \tag{H-9}$$

$$ISFz_D = \frac{1}{z_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}\right) \text{Cos}^2 n\pi Z_{wD} \right] \tag{H-10}$$

Sustituyendo las ecuaciones H-8, H-9 y H-10 en H-7 y cambiando el índice de las variables de la sumatoria se obtiene la caída de presión adimensional en la fractura:

$$\begin{aligned}
 p_D(x_D, y_D, z_D, t_{DA}) &= \int_0^{t_{DA}} \left[2\pi \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{z_e}{x_e Y_{fD}}\right) \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \right] \right. \\
 &\quad \left[1 + \frac{4}{\pi Y_{fD}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \exp\left(-m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}}\right) \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \right] \\
 &\quad \left. \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k=\infty} \exp\left(-k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}\right) \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \right] \right] dt_{DA} \tag{H-11}
 \end{aligned}$$

Integrando la ecuación anterior se obtiene la caída de presión adimensional en la fractura:

$$\begin{aligned}
 p_D(x_D, y_D, z_D, t_{DA}) = & [2\pi t_{DA}] + \left[\frac{8}{Y_{fD}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \left(\frac{y_e^2 Y_{fD}}{x_e z_e m^2 \pi^2} \right) \right. \\
 & \left. \left[1 - e^{-\left[m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} \right]} \right] \right] + \left[4\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \left(\frac{x_e Y_{fD}}{z_e n^2 \pi^2} \right) \left[1 - e^{-\left[n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} \right]} \right] \right] + \\
 & \left[\frac{16}{Y_{fD}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \right. \\
 & \left. \left(\frac{1}{n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}}} \right) \left[1 - e^{-\left[n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} \right]} \right] \right] + \left[4\pi \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \left(\frac{z_e Y_{fD}}{x_e k^2 \pi^2} \right) \right. \\
 & \left. \left[1 - e^{-\left[k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}} \right]} \right] \right] + \left[\frac{16}{Y_{fD}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \right. \\
 & \left. \left(\frac{1}{m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}} \right) \left[1 - e^{-\left[m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}} \right]} \right] \right] + \\
 & \left[8\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \right. \\
 & \left. \left(\frac{1}{n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}} \right) \left[1 - e^{-\left[n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}} \right]} \right] \right] + \\
 & \left[\frac{32}{Y_{fD}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \right. \\
 & \left. \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \left(\frac{1}{n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}} \right) \left[1 - e^{-\left[n^2 \pi^2 t_{DA} \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}} \right]} \right] \right]
 \end{aligned}$$

(H-13)

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Aplicando la transformada de Laplace a la Solución H-13 (serie de senos y cosenos)

$$\begin{aligned}
 \overline{P_D}(x_D, y_D, z_D, s) &= \left[\frac{2\pi}{s^2} \right] + \left[\frac{8}{Y_{jD}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{jD}}{2} \text{Cos}m\pi X_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \left(\frac{y_e^2 Y_{jD}}{x_e z_e} \frac{1}{m^2 \pi^2} \right) \right. \\
 &\left. \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{jD}}} \right] \right] + \left[4\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \left(\frac{x_e Y_{jD}}{z_e} \frac{1}{n^2 \pi^2} \right) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{jD}}} \right] \right] + \\
 &\left[\frac{16}{Y_{jD}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}m\pi X_D \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{jD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \right. \\
 &\left. \left[\frac{1}{n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{jD}} + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{jD}}} \right] \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \left[n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{jD}} + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{jD}} \right]} \right] \right] + \\
 &\left[4\pi \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \left(\frac{z_e Y_{jD}}{x_e} \frac{1}{k^2 \pi^2} \right) \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{jD}}} \right] \right] + \\
 &\left[\frac{16}{Y_{jD}} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{jD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \right. \\
 &\left. \left[\frac{1}{m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{jD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{jD}}} \right] \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \left[m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{jD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{jD}} \right]} \right] \right] + \\
 &\left[8\pi \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} \right. \\
 &\left. \left[\frac{1}{n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{jD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{jD}}} \right] \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \left[n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{jD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{jD}} \right]} \right] \right] + \\
 &\left[\frac{32}{Y_{jD}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}m\pi X_D \frac{1}{m} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{jD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Cos}m\pi Y_D \text{Cos}^2 k\pi Z_D \right.
 \end{aligned}$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$$\left(\frac{l}{n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}} \right) \left[\frac{l}{s + \left[n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}} \right]} \right] \quad (H-14)$$

El gradiente de presión en la cara de la fractura se obtiene derivando la solución H-14 con respecto al eje normal y_D del plano de fractura:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{p_D}(x_D, y_D, z_D, s)}{y_D} = & \frac{8\pi I}{Y_{fD}} \left[\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{s + \Omega_1} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi X_{wD} \text{Sen}m\pi Y_D + \right. \\ & 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{s + \Omega_2} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Sen}m\pi Y_D + \\ & 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{s + \Omega_3} \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Sen}m\pi Y_D \text{Cos}^2 k\pi Z_{wD} + \\ & \left. 4 \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{s + \Omega_4} \text{Cos}n\pi X_{wD} \text{Cos}n\pi X_D \text{Sen}m\pi \frac{Y_{fD}}{2} \text{Cos}m\pi Y_{wD} \text{Sen}m\pi Y_D \text{Cos}^2 k\pi Z_D \right] \quad (H-15) \end{aligned}$$

Donde:

$$\Omega_1 = m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}}$$

$$\Omega_2 = n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}}$$

$$\Omega_3 = m^2 \pi^2 \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}$$

$$\Omega_4 = n^2 \pi^2 \frac{z_e}{x_e Y_{fD}} + m^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e z_e}{y_e^2 Y_{fD}} + k^2 \pi^2 t_{DA} \frac{x_e}{z_e Y_{fD}}$$

Apéndice I

Solución de caída de presión adimensional en fractura paralelepípeda en función de serie exponenciales

Utilizando la sumatoria de Poisson's³⁶, se transforman las series infinitas de senos y cosenos a expresiones de términos exponenciales. Las funciones equivalentes de cada plano en términos exponenciales son:

$$ISF_x = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-x_w-2nx_e)^2}{4\eta_x t}} + e^{-\frac{(x+x_w-2nx_e)^2}{4\eta_x t}}}{2\sqrt{\pi\eta_x t}} = \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_x t}{x_e^2}\right) \cos n\pi \frac{x}{x_e} \cos n\pi \frac{x_w}{x_e} \right\} \quad (I-1)$$

$$ISF_y = \frac{\sqrt{\eta_y t}}{\sqrt{\pi}} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\frac{(y-y_w+\frac{y_f}{2}-2ny_e)^2}{4\eta_y t}} - e^{-\frac{(y-y_w+\frac{y_f}{2}+2ny_e)^2}{4\eta_y t}}}{(y-y_w-2ny_e)} + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\frac{(y+y_w+\frac{y_f}{2}-2ny_e)^2}{4\eta_y t}} - e^{-\frac{(y+y_w+\frac{y_f}{2}+2ny_e)^2}{4\eta_y t}}}{(y+y_w-2ny_e)} \right] =$$

$$\frac{y_f}{y_e} \left[1 + \frac{4y_e}{\pi y_f} \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_y t}{y_e^2}\right) \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\pi \frac{y_f}{2y_e} \cos n\pi \frac{y_w}{y_e} \cos n\pi \frac{y}{y_e} \right] \quad (I-2)$$

$$ISF_z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\frac{4n^2 z_e^2}{4\eta_z t}} + e^{-\frac{(2z_w-2nz_e)^2}{4\eta_z t}}}{2\sqrt{\pi\eta_z t}} = \frac{1}{z_e} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 \eta_z t}{z_e^2}\right) \cos^2 n\pi \frac{z_w}{z_e} \right\} \quad (I-3)$$

Variables adimensionales:

$$x_{wD} = \frac{x+x_w}{x_e} \quad x_D = \frac{x-x_w}{x_e} \quad x_D^2 = \frac{(x-x_w)^2}{x_e^2} \quad \eta_x = \frac{k_x}{\phi\mu c}$$

$$y_{wB} = \frac{y+y_w}{y_e} \quad y_D = \frac{y}{y_e} \quad y_{wD} = \frac{y-y_w}{y_e} \quad \eta_y = \frac{k_y}{\phi\mu c}$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 y_{wB}^2 &= \frac{(y + y_w)^2}{y_e^2} & y_{fD} &= \frac{y_f}{y_e} & y_{wD}^2 &= \frac{(y - y_w)^2}{y_e^2} \\
 z_{wD} &= \frac{z_w}{z_e} & z_{wD}^2 &= \frac{z_w^2}{z_e^2} & t_{DA} &= \frac{k_x t}{\phi \mu c x_e^2} & \eta_z &= \frac{k_z}{\phi \mu c}
 \end{aligned}$$

La solución analítica de caída de presión adimensional en la fractura en términos exponenciales se define como:

$$p_D(x_D, y_D, z_D, t_{DA}) = 2\pi x_e z_e \int_0^{t_{DA}} ISF_x_D ISF_y_D ISF_z_D dt_{DA} \tag{I-4}$$

Sustituyendo las ecuaciones I-1, I-2 y I-3 en I-4 en variables adimensionales y cambiando el índice de las variables de la sumatoria se obtiene la caída de presión adimensional en la fractura en términos exponenciales:

$$\begin{aligned}
 p_D(x_D, y_D, z_D, t_{DA}) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_{DA}} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{-\frac{(x_D-2n)^2}{4t_{DA}}} + e^{-\frac{(x_{wD}-2n)^2}{4t_{DA}}}}{\sqrt{t_{DA}}} \right] \\
 &\left[\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{e^{-\frac{\left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}+2k}{2}\right)^2\right]^2}{4t_{DA}}} - e^{-\frac{\left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}-2k}{2}\right)^2\right]^2}{4t_{DA}}}}{\left(y_{wD}y_{wB} - 4ky_D + 4k^2\right)} (y_{wB} - 2k) + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{e^{-\frac{\left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}-2k}{2}\right)^2\right]^2}{4t_{DA}}} - e^{-\frac{\left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}+2k}{2}\right)^2\right]^2}{4t_{DA}}}}{\left(y_{wD}y_{wB} - 4ky_D + 4k^2\right)} (y_{wD} - 2k) \right] \\
 &\left[\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{-\frac{4m^2}{4t_{DA}}} + e^{-\frac{4(z_{wD}-m)^2}{4t_{DA}}}}{\sqrt{t_{DA}}} \right] dt_{DA} \tag{I-5}
 \end{aligned}$$

Integrando la ecuación anterior, se obtiene la caída de presión adimensional en la fractura:

$$p_D(x_D, y_D, z_D, t_{DA}) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{y_{wB} - 2k}{y_{wD}y_{wB} - 4ky_D + 4k^2} \left[\frac{\sqrt{t_{DA}}}{\pi} \left\{ e^{-\frac{(x_D-2n)^2}{4t_{DA}}} + e^{-\frac{(x_{wD}-2n)^2}{4t_{DA}}} \right\} \right]$$

$$\left\{ e^{\frac{4m^2}{4t_{DA}}} + e^{\frac{4(z_{wD}-m)^2}{4t_{DA}}} \right\} \left\{ e^{\frac{\left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2}{4t_{DA}}} - e^{\frac{\left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2}{4t_{DA}}} + e^{\frac{\left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2}{4t_{DA}}} - e^{\frac{\left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2}{4t_{DA}}} \right\} +$$

$$\frac{I}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\beta} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \sqrt{\gamma_2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\gamma_2}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \sqrt{\gamma_4} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\gamma_4}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \sqrt{\gamma_6} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\gamma_6}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \right.$$

$$\sqrt{\beta_2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\beta_2}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \sqrt{\beta_4} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\beta_4}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \sqrt{\alpha_2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\alpha_2}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) + \sqrt{\alpha_4} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\alpha_4}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) -$$

$$\sqrt{\alpha} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) - \sqrt{\gamma_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\gamma_1}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) - \sqrt{\gamma_3} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\gamma_3}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) - \sqrt{\gamma_5} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\gamma_5}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) -$$

$$\left. \left. \sqrt{\beta_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\beta_1}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) - \sqrt{\beta_3} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\beta_3}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) - \sqrt{\alpha_1} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\alpha_1}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) - \sqrt{\alpha_3} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\alpha_3}}{2\sqrt{t_{DA}}} \right) \right\} \quad (I-6)$$

Donde los coeficientes exponenciales están definidos de la forma siguiente:

$$\alpha = \left[(x_D - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2$$

$$\beta = \left[(x_D - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2$$

$$\gamma_1 = \left[(x_D - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2$$

$$\gamma_2 = \left[(x_D - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2$$

$$\gamma_3 = \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2$$

$$\gamma_4 = \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_5 &= \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wD} - \left(\frac{y_{jD}}{2} + 2k \right) \right]^2 \\
 \gamma_6 &= \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wD} + \left(\frac{y_{jD}}{2} - 2k \right) \right]^2 \\
 \beta_1 &= \left[(x_D - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wB} + \left(\frac{y_{jD}}{2} - 2k \right) \right]^2 \\
 \beta_2 &= \left[(x_D - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wB} - \left(\frac{y_{jD}}{2} + 2k \right) \right]^2 \\
 \beta_3 &= \left[(x_D - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wB} + \left(\frac{y_{jD}}{2} - 2k \right) \right]^2 \\
 \beta_4 &= \left[(x_D - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wB} - \left(\frac{y_{jD}}{2} + 2k \right) \right]^2 \\
 \alpha_1 &= \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wB} + \left(\frac{y_{jD}}{2} - 2k \right) \right]^2 \\
 \alpha_2 &= \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4m^2 \right] + \left[y_{wB} - \left(\frac{y_{jD}}{2} + 2k \right) \right]^2 \\
 \alpha_3 &= \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wB} + \left(\frac{y_{jD}}{2} - 2k \right) \right]^2 \\
 \alpha_4 &= \left[(x_{wD} - 2n)^2 + 4(z_{wD} - m)^2 \right] + \left[y_{wB} - \left(\frac{y_{jD}}{2} + 2k \right) \right]^2
 \end{aligned} \tag{I-7}$$

Aplicando la transformada de Laplace a la solución I-6:

$$\begin{aligned}
 \bar{P}_D(x_D, y_D, z_D, s) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{y_{wB} - 2k}{y_{wD} y_{wB} - 4ky_D + 4k^2} \left\{ \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_1}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\beta_1}\sqrt{s}} \right] + \right. \\
 &\left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\gamma_1}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\gamma_2}\sqrt{s}} \right] + \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\gamma_3}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\gamma_4}\sqrt{s}} \right] + \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\gamma_5}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\gamma_6}\sqrt{s}} \right] + \\
 &\left. \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\beta_2}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\beta_3}\sqrt{s}} \right] + \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\beta_4}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\beta_5}\sqrt{s}} \right] + \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_2}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_3}\sqrt{s}} \right] + \right. \\
 &\left. \left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_4}\sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_5}\sqrt{s}} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\left[\frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_3} \sqrt{s}} - \frac{1}{s\sqrt{s}} e^{-\sqrt{\alpha_3} \sqrt{s}} \right] \quad (I-8)$$

Sustituyendo los coeficientes exponenciales de cada término y factorizando se obtiene la solución de caída de presión en la fractura rodeada por bloque de matriz en el espacio de Laplace:

$$\begin{aligned} \bar{P}_D(x_D, y_D, z_D, s) = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{y_{wB} - 2k}{y_{wD} y_{wB} - 4ky_D + 4k^2} \left\{ \frac{1}{s\sqrt{s}} \left[e^{-\sqrt{s}[x_D - 2n]^2} + e^{-\sqrt{s}[x_{wD} - 2n]^2} \right] \right. \\ & \left. \left[e^{-\sqrt{s}[4m^2]} + e^{-\sqrt{s}[4(z_{wD} - m)^2]} \right] \right. \\ & \left. \left[+ e^{-\sqrt{s} \left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2} - e^{-\sqrt{s} \left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2} + e^{-\sqrt{s} \left[y_{wB} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2} - e^{-\sqrt{s} \left[y_{wB} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (I-9)$$

El gradiente de presión en la cara de la fractura se obtiene derivando la ecuación 9 con respecto al eje normal y_D del plano de fractura:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{P}_D(x_D, y_D, z_D, s)}{y_D} = & \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s\sqrt{s}} \left[e^{-\sqrt{s}[x_D - 2n]^2} + e^{-\sqrt{s}[x_{wD} - 2n]^2} \right] \left[e^{-\sqrt{s}[4m^2]} + e^{-\sqrt{s}[4(z_{wD} - m)^2]} \right] \\ & \left[4k(y_{wB} - 2k) \left[e^{-\sqrt{s} \left[y_{wD} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2} - e^{-\sqrt{s} \left[y_{wD} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2} + e^{-\sqrt{s} \left[y_{wB} + \left(\frac{y_{fD}}{2} - 2k \right) \right]^2} - e^{-\sqrt{s} \left[y_{wB} - \left(\frac{y_{fD}}{2} + 2k \right) \right]^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (I-10)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN