



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

OSCILACIONES CUANTICAS ESTOCASTICAS EN TRAMPAS ATOMICAS.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
IGNACIO FRANCISCO GALLARDO GUERRA



DIRECTOR DE TESIS: ROCIO JAUREGUI RENAUD



2002

TESIS CON FALLA DE ORIGEN





Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Paginación Discontinua



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Oscilaciones cuánticas estocásticas en trampas atómicas"

realizado por GALLARDO GUERRA IGNACIO FRANCISCO

con número de cuenta 9757122-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario *Rocio Jauregui Renaud*  
DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD

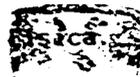
Propietario *Octavio Hecctor Castanos Garza*  
DR. OCTAVIO HECTOR CASTAÑOS GARZA

Propietario *Jose Francisco Becamier Angelini*  
DR. JOSE FRANCISCO BECAMIER ANGELINI

Suplente *Enrique Lopez Moreno*  
DR. ENRIQUE LOPEZ MORENO

Suplente *Ramon Lopez Peña*  
DR. RAMÓN LOPEZ PEÑA

Consejo Departamental de



*Patricia Goldstein Linares*  
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN LINARES  
Coordinadora de Licenciatura

*... a Ronald E. Gallardo Guerra*

## Agradecimientos

A: Miguel Gallardo Rodriguez, Graciela Alejandra Guerra de Gallardo, Miguel Gallardo Guerra, Maria Alejandra Gallardo Guerra; Rocío Jáuregui Renaud, Octavio C., José R., Ramón L., Enrique L.; Eduardo, Ita, Jorge, Manuela, Ezequiel, Margarita, Mago, Alfonso, Carla, Nacho, Maria Luisa, Raul, Monica, Fernando, Rafael, Humberto, Marina; Yako, Mimito; Angel, Enrique, Alejandro, Abraham, Judid, Rodrigo, Adrián, Adolfo, Ernesto, Marel, Monserat, Olivia, Anselmo, Ana, Marlen, Carlos, Luis, Adrian, Meche, Laura, Erika, Cesar, Agustín, Oziel, Elizabeth, Mario, Lidia, Rodolfo, Nadia, Juan, Marco, Miguel, Ruuses, Gustavo, Sheila, Katy, Horacio, Francisco, Fernando, Justino, Maria, Teresa, Josefina, Modesto, Alvaro, Sofia, Guillermo, Manuel, Yuridia, Octavio, Federico, Alberto, Jerónimo, Alexei, Cristina, Alfredo, Xitlali, Andrea, Gabriela, Nacho, Natalia, Niza, Lev, Rubén, Javier, Ricardo, Inés, Gonzalo, Iván, Gastón, Esteban.

## Disculpas

A: Los mismos que mencioné arriba y en especial a los que no.  
A: todos los que se preocuparon por mi, y a quienes dieron parte de su vida para que estemos aquí ahora; (en especial a los árboles que murieron para que estas hojas terminaran machadas de tinta).

# Índice General

<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
0.1 Oscilaciones cuánticas estocásticas en trampas atómicas	vi
<b>1 Trampas de Iones</b>	<b>1</b>
1.1 La trampa de Penning	1
1.2 La trampa de Paul	2
<b>2 Relación entre osciladores clásico y cuántico</b>	<b>5</b>
2.1 Posición de equilibrio dependiente del tiempo	5
2.2 Frecuencia dependiente del tiempo	6
<b>3 Elementos básicos en estocasticidad</b>	<b>10</b>
3.1 Definiciones básicas	11
3.2 Procesos de Markov	13
3.3 La ecuación de Chapman-Kolmogorov	13
3.4 La ecuación maestra	14
3.5 Ecuación de Fokker-Planck	15
3.6 Movimiento browniano	18
3.7 Ecuación de Langevin	18
<b>4 Ecuaciones diferenciales estocásticas</b>	<b>23</b>
4.1 Ecuaciones multiplicativas	24
4.2 Momentos superiores	26
<b>5 Calentamiento en trampas</b>	<b>28</b>
5.1 Variaciones Estocásticas de la Posición de Equilibrio	28
5.2 Variaciones Estocásticas en la frecuencia	29
5.3 Evolución de los productos $h_i h_j$	30
5.4 Esquema de interacción	31
5.5 Esquema de interacción para $(\varpi)$ independiente del tiempo	32
5.6 Esquema de interacción para $(\varpi(t))$ dependiente del tiempo	32
5.7 Solución perturbativa para describir el calentamiento	34
5.8 Calentamiento en trampas atómicas estáticas	36
5.9 Calentamiento en trampas atómicas de radiofrecuencia	37

<b>6</b>	<b>Discusión y conclusiones</b>	<b>40</b>
6.1	Discusión	40
6.2	Conclusión	43
6.3	Lo que puede hacerse en el futuro	43
<b>A</b>	<b>Densidades Espectrales</b>	<b>44</b>
<b>B</b>	<b>Atrapar iones en tres dimensiones</b>	<b>46</b>

# Índice de Figuras

1.1	Electrodos de las trampas de iones de Paul y de Penning . . . . .	1
1.2	Diagrama de estabilidad de la trampa de Paul . . . . .	3
6.1	Calentamiento lineal de una trampa de Paul de $^{40}\text{Ca}^+$ . . . . .	42

# Introducción

## 0.1 Oscilaciones cuánticas estocásticas en trampas atómicas

En los últimos cuarenta años, el desarrollo de las técnicas para manipular sistemas cuánticos ha sido impresionante. En particular, el confinamiento de sistemas atómicos en diversidad de dispositivos que involucran campos electromagnéticos ha permitido entre otras cosas establecer estándares de tiempo [24], medir propiedades de partículas elementales con la mayor precisión posible [5] y producir estados específicos de interés como sistemas tipo EPR [28, 10], gatos de Schrödinger [1], gases degenerados de Bose-Einstein [8] o Fermi-Dirac. Una dificultad técnica para mantener el control sobre estos sistemas es la presencia de ruido debido a fluctuaciones en los campos que actúan sobre las partículas confinadas y que son generadas por diversos factores. Es finalidad de esta tesis hacer un análisis cuántico de los efectos del ruido en el calentamiento de átomos en trampas atómicas, en particular trampas de iones.

Para atrapar partículas cargadas, se usan, entre otras, las trampas denominadas trampas de Paul y de Penning. En las trampas de Paul hay involucrados campos electromagnéticos cuadrupolares dependientes del tiempo, y aunque en análisis teóricos frecuentemente se considera a la intensidad del campo eléctrico sin fluctuaciones, sabemos que debido a las imperfecciones técnicas y mecánicas en su construcción esto nunca es así. Es probable que las pequeñas fluctuaciones causadas por estas variaciones en la intensidad del campo, provoquen fenómenos interesantes que aún no se explican del todo.

Para hacer un estudio sobre las fluctuaciones estocásticas en la intensidad de los campos magnéticos y eléctricos, aquí hemos recurrido a un método que permite relacionar la evolución de un oscilador cuántico en términos de la evolución de su simil clásico. En este tratamiento tomamos en cuenta conceptos y suposiciones tales como funciones estocásticas que simulan el ruido, tiempos de correlación muy cortos de las variables independientes y ecuaciones diferenciales estocásticas.

La mecánica cuántica de una partícula en una trampa de Paul convencional, es separable en tres movimientos independientes, los primeros en el plano X-Y y el segundo en la dirección Z. Ambos movimientos son descritos por un oscilador paramétrico, es decir, un oscilador armónico cuya frecuencia depende del tiempo.

El estudio de los sistemas cuánticos dependientes del tiempo es generalmente complicado, sin embargo, para este caso en particular en el que tenemos un sistema cuadrático en la posición y el momento, el formalismo desarrollado por V. V. Dondonov y V. I. Man'ko [15], puede ser usado. Es posible aplicar métodos algebraicos para expresar al operador de evolución con parámetros dependientes del tiempo. Este proceder algebraico ha sido muy satisfactorio al describir colisiones atómicas y moleculares, y esperamos que también aquí de buenos resultados.

Utilizando el teorema de Noether, se encuentran las constantes de movimiento del sistema; consecuentemente, estas quedan descritas en términos de los operadores de creación y aniquilación y al mismo tiempo en términos de las soluciones clásicas del oscilador paramétrico. Estos resultados se igualan a las constantes de movimiento que se obtienen mediante el proceso de aplicar el operador de evolución previamente propuesto. Estas dos maneras distintas de encontrar las constantes de movimiento dan unas relaciones entre las soluciones clásicas y las soluciones cuánticas del sistema. Usando estas relaciones

nosotros vamos entonces a resolver las ecuaciones clásicas del sistema y a partir de ellas caracterizaremos su evolución cuántica. Esto permite evaluar la dependencia temporal de diversas observables físicas como lo es la energía.

Dado que el sistema es una realización de un proceso estocástico, las observables físicas estarán representadas por operadores que involucran funciones estocásticas que dependerán en general en una forma no lineal de las soluciones a la ecuación de movimiento clásica y estocástica. Una de las novedades en esta tesis, es proponer el estudio de estas funciones estocásticas utilizando el método basado en cumulantes, de forma alternativa a la mayoría de las publicaciones. La forma general de las ecuaciones estocásticas que aquí se tratarán es

$$\dot{u} = \{A_0 + \alpha A_1(t)\}u. \quad (1)$$

Donde  $\alpha$  es un escalar que usualmente es mucho menor que uno ya que multiplica a la matriz que fluctúa,  $A_0$  es una matriz no estocástica y  $A_1$  es una matriz estocástica.  $u$  es el vector que cuyas componentes representan los momentos de la solución clásica con las condiciones de contorno adecuadas. Se tratará tanto el problema de oscilador armónico usual ( $A_0 = \text{constante}$ ) como el de oscilador paramétrico. En general proporcionaremos resultados analíticos.



# Capítulo 1

## Trampas de Iones

La trampa de Penning y la de Paul convencionales usan el mismo arreglo básico de electrodos, el cual se muestra en la figura 1.1. Este arreglo consiste en un electrodo en forma de anillo con una superficie interior semejante a una dona, y dos electrodos a manera de tapones en los dos extremos de la rosquilla, dichos tapones tienen forma de hemisféricos. De hecho, estos electrodos siguen el contorno de las superficies equipotenciales que corresponden a un cuadrupolo puro:

$$\phi(r, z) = -\frac{U_0}{R_0^2}(2z^2 - r^2) \quad (1.1)$$

donde  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $R_0^2 = r_0^2 + 2z_0^2$  es una constante geométrica que depende del tamaño de la trampa, y donde  $U_0$  es el potencial que hay entre el anillo y las tapas de la trampa. Si  $U_0$  es negativo se genera un pozo de potencial en la dirección axial  $Z$ . De esta forma se logran atrapar en una dimensión a iones cargados positivamente. Sin embargo, en este caso se genera una barrera cuadrática en la dirección radial que impide atrapar al ion en las tres dimensiones (ver apéndice B). Algo análogo ocurre si  $U_0$  es positivo pues se confinaría en la dirección radial pero se crearía una barrera en la dirección axial. Por ello se necesita de una particularidad extra para lograr una estabilidad tridimensional [32].

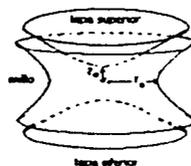
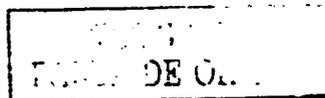


Figura 1.1: *Electrodos de las trampas de iones de Paul y de Penning*

### 1.1 La trampa de Penning

En la trampa de Penning, la particularidad adicional en el arreglo que logra el confinamiento en 3 dimensiones, está dada por un campo magnético estático adicional sobre el eje  $Z$ . Entonces el ion



atraído hacia afuera del electrodo en forma de anillo, es forzado a entrar en una combinación de órbitas circulares dentro del plano  $XY$  caracterizadas por una frecuencia de ciclotrón ( $\omega'_c$ ) y una frecuencia de magnetrón  $\omega_m$ . Los dos movimientos resultantes pueden ser vistos más fácilmente mediante una transformación de coordenadas al marco de referencia que rota a la mitad de la frecuencia de ciclotrón usual  $\omega_c = eB/m$ . En este marco de referencia el campo magnético es cancelado y los dos movimientos radiales son vistos como una rotación en el sentido positivo o negativo alrededor del centro de la trampa a una frecuencia  $\omega_1$  dada por

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_c^2/4 - \omega_z^2}/2 \quad (1.2)$$

donde la frecuencia de oscilación axial  $\omega_z$  está dada por

$$\omega_z^2 = 4e \left( -\frac{U_0}{mR_0^2} \right) \quad (1.3)$$

$U_0$  es negativa para iones positivos. Las dos frecuencias radiales serán entonces encontradas si hacemos la transformación inversa y regresamos a las coordenadas de laboratorio, y están dadas por

$$\omega'_c = \omega_c/2 + \omega_1 \quad (1.4)$$

$$\omega_m = \omega_c/2 - \omega_1 \quad (1.5)$$

La trampa de Penning es una trampa estática pero tiene la desventaja de que el movimiento de magnetrón es inestable. Por eso en la presencia de colisiones, la órbita del magnetrón siempre tenderá a crecer, necesitando entonces trabajar bajo condiciones de ultra-alto vacío, condiciones (UHV), digamos menos de  $10^{-9}$  mbar.

## 1.2 La trampa de Paul

La trampa de radiofrecuencia o trampa de Paul, usa un método alternativo para generar el potencial efectivo de atrapamiento tridimensional. En este caso se trata de una trampa dinámica que trabaja usando un potencial alterno (AC), además del directo (DC):  $U_0 + V_0 \cos \Omega t$ . Por cada mitad de ciclo esta trampa da un potencial estable, (tiene entonces un mínimo), en la dirección  $Z$ , pero es inestable, (tiene un máximo) en el plano  $XY$ . Para la otra mitad del ciclo las condiciones de máximo y mínimo se invierten. Lo genial de la trampa de Paul es que los parámetros pueden ser escogidos tales que el movimiento promedio pueda ser estable en todas las coordenadas. Para ver esto, necesitamos primero escribir las ecuaciones de movimiento del ion (digamos para el movimiento en  $Z$ ):

$$\ddot{z} = (U_0 + V_0 \cos \Omega t) (4z) (e/mR_0^2) \quad (1.6)$$

Esta puede ser escrita en su forma acostumbrada llamada ecuación de Mathieu

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + (a_z - 2q_z \cos 2\tau)z = 0 \quad (1.7)$$

donde  $\tau = \Omega t/2$  y  $a_z$  y  $q_z$  son

$$a_z = -\frac{16eU_0}{m\Omega^2 R_0^2} \quad (1.8)$$

$$q_z = -\frac{8eV_0}{m\Omega^2 R_0^2} \quad (1.9)$$

La ecuación tiene soluciones estables para ciertos rangos de valores de  $a_z$  y  $q_z$ . El movimiento final es muy complicado en general, pero consiste en un rápido movimiento de conducción (el micromovimiento) a una

frecuencia del orden de multiples enteros de  $\Omega$  y también un movimiento superpuesto a una frecuencia  $\mu$  mas baja (el macromovimiento o movimiento secular). Matemáticamente la solución general de la ecuación de Mathieu se puede escribir en la forma:

$$z(\tau) = AF_{\mu}(\tau) + BF_{\mu}(-\tau) \quad (1.10)$$

$$F_{\mu}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_{2k} e^{i(\mu+2k)\tau}. \quad (1.11)$$

Para valores pequeños de  $a_z$  y  $q_z$  podemos representar al movimiento lento como un resultado del potencial efectivo establecido por el movimiento de conducción. Este potencial efectivo existe porque el movimiento de conducción toma lugar en un campo inhomogéneo tal que la fuerza promedio en el ion no se hace cero dentro de un ciclo completo del campo. La energía potencial efectiva del ion (también llamado pseudopotencial) está dada por

$$V_{eff} = \frac{1}{8}m(a_z + \frac{1}{2}q_z^2)\Omega^2 z^2 \quad (1.12)$$

así que la frecuencia de oscilación en este potencial es

$$\mu_z = \frac{1}{2}\beta_z\Omega \quad (1.13)$$

donde

$$\beta_z^2 = a_z + \frac{1}{2}q_z^2 \quad (1.14)$$

De manera similar, podemos hacer el mismo análisis para el movimiento radial. Aquí encontraremos que los valores de  $a_r$  y  $q_r$  son  $(-1/2)$  veces los correspondientes valores del movimiento axial en  $Z$ . Por eso las condiciones de estabilidad para el movimiento radial son diferentes de aquellas del movimiento axial. La situación final está resumida en el diagrama de estabilidad que se muestra en la figura 1.2. Este diagrama muestra que hay regiones en el plano  $(a_z, q_z)$  donde ambos movimientos son simultáneamente estables. La región que se muestra es la que se encontraron grande y mas cercana al origen en ese espacio. Puede mostrarse que esta región queda delimitada por valores de  $q_z$  que van desde cero hasta alrededor de uno, mientras que  $a_z$  es típicamente mucho menor, y es común que sea cero (lo que significa que no hay potencial estático aplicado)

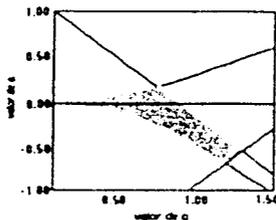


Figura 1.2: Diagrama de estabilidad de la trampa de Paul. El eje Y corresponde a los valores de  $a$ , y el eje X los de  $q$ . El movimiento es estable en la dirección axial y radial dentro del área gris

Como los parámetros  $a$  y  $q$  dependen de los radios de carga-masa de los iones, la trampa de Paul tiene el potencial de ser usada como un espectrómetro de masas. Es más, la trampa de Paul fué originalmente desarrollada por Paul en Bonn dentro de un trabajo de filtrado de masas. Si los parámetros de la trampa son escogidos tales que  $a = 0$ , entonces la trampa es estable para todas las masas por debajo de un valor particular (determinado por el valor máximo de  $q_x$  que es alrededor de 0.9). Por otra parte, los parámetros pueden ser escogidos de tal forma que estemos sobre una esquina de la región del diagrama de la figura 1.2 y que consecuentemente solo admitamos un pequeño espectro de masas dentro de la trampa. Así esto servirá como un selector de radios carga-masa. Mas aún, debido a que las frecuencias de oscilación dentro de la trampa son dependientes de las masas de los iones, entonces podemos ajustarlas para manipular iones específicos que se encuentren ya atrapados en el interior.

Es importante notar que si las temperaturas de los iones confinados son lo suficientemente bajas, la descripción de su movimiento requerirá de la mecánica cuántica. En el caso específico de iones en trampas de Paul, el límite inferior actual de temperatura corresponde a mantener a un átomo de berilio  ${}^9\text{Be}^+$  en su estado vibracional más bajo (lo que corresponde a temperaturas del orden de  $\mu\text{K}$ ), durante periodos que corresponden al 98% del tiempo observado que es del orden de milisegundos.

## Capítulo 2

# Oscilador armónico cuántico y su relación con el sistema clásico

Teniendo en mente las trampas de átomos vamos a estudiar como es que se comportan los sistemas descritos por potenciales armónicos con una dependencia temporal en la posición de equilibrio y (por separado) en la frecuencia. A lo anterior se le conoce como oscilador paramétrico.

En el caso que se tiene un potencial cuadrático en la posición y el momento, existen teoremas y cálculos teóricos, que relacionan las soluciones del potencial armónico cuántico, con las soluciones del potencial armónico clásico. Estos teoremas son independientes del carácter aleatorio o determinista de la dependencia temporal de la posición de equilibrio y de la frecuencia. Esto establece el marco de trabajo de esta tesis.

### 2.1 Posición de equilibrio dependiente del tiempo

Consideremos una dependencia en el tiempo de la posición de equilibrio de un oscilador armónico. El hamiltoniano entonces tiene la forma

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(q + \epsilon_q(t))^2 \quad (2.1)$$

Pero en términos de los operadores de aniquilación y creación

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a + a^\dagger) \quad (2.2)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega_0\hbar}{2}}(a - a^\dagger) \quad (2.3)$$

tenemos:

$$H = \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2) + \hbar f_q(t)(a + a^\dagger) + g_q(t)\hbar, \quad (2.4)$$

donde

$$f_q(t) = \frac{\omega_0}{2}\tilde{\epsilon}_q(t) \quad (2.5)$$

$$g_q(t) = \frac{\omega_0}{4}\tilde{\epsilon}_q^2(t)$$

y hemos introducido el ruido adimensional  $\tilde{\varepsilon}$  a través de la igualdad

$$\varepsilon_q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}} \tilde{\varepsilon}_q \quad (2.6)$$

Sabemos que el operador de evolución tiene que satisfacer la ecuación

$$i\hbar \frac{\partial U}{\partial t} = HU \quad (2.7)$$

Además  $U$  al tiempo inicial debe ser igual a la identidad.

Se observa que en el hamiltoniano sólo aparecen los operadores  $a^\dagger a$ ,  $a$ , y  $a^\dagger$  y estos operadores junto con la identidad  $\mathbf{1}$ , constituyen lo que se conoce como un *álgebra cerrada*, (y álgebra de Lie), ante la conmutación entre ellos. Es decir, un conmutador de cualquiera de los elementos en  $\{a^\dagger a, a, a^\dagger, \mathbf{1}\}$  es proporcional a alguno de los elementos de este conjunto. Se propone entonces un operador de evolución (utilizando la teoría de [21]), dado por una multiplicación de exponenciales que involucran a los elementos de esta álgebra:

$$U = e^{-\lambda_1 a^\dagger} e^{-i\lambda_2 a} e^{-i\lambda_3 a^\dagger a} e^{-i\lambda_4} \quad (2.8)$$

Esta forma del operador de evolución es fácil de aplicar a cualquier estado a diferencia de aquella que se obtiene directamente al expresar  $U$  como la exponencial de la integral temporal del hamiltoniano,

$$U(t) = \text{TexP}\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H(t') dt'\right) \quad (2.9)$$

Sustituyendo 2.8 en la ecuación diferencial 2.7 y usando las reglas de conmutación para  $a$ ,  $a^\dagger a$  y  $a^\dagger$ , se obtiene que las funciones  $\lambda$  satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -i\dot{\lambda}_3 \lambda_1 + f_q(t) \\ \dot{\lambda}_2 &= i\dot{\lambda}_3 \lambda_2 + f_q(t) \\ \dot{\lambda}_3 &= \omega_0 \\ \dot{\lambda}_4 &= \dot{\lambda}_3 \lambda_2 \lambda_1 = -i\dot{\lambda}_2 \lambda_1 + g_q(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Una vez calculada la forma explícita del operador de evolución podemos evaluar el comportamiento de cualquier observable. Si definimos al operador de energía como el hamiltoniano del oscilador sin fluctuaciones su evolución ante la variaciones estocásticas de la posición es entonces:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) &= \hbar\omega_0 U^{-1}(t)(a^\dagger a + 1/2)U(t) \\ &= \mathcal{E}(0) + \hbar\omega_0(i\lambda_2 a - i\lambda_1 a^\dagger + \lambda_1 \lambda_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

## 2.2 Frecuencia dependiente del tiempo

Si ahora consideramos a la frecuencia con dependencia en el tiempo, el tratamiento es análogo al caso anterior. El hamiltoniano es

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 (1 - \varepsilon(t)) q^2 \quad (2.12)$$

$$H = \hbar\omega_0 (a^\dagger a + 1/2) - \frac{\hbar\omega_0 \varepsilon(t)}{4} (a + a^\dagger)^2, \quad (2.13)$$

El operador de evolución entonces (basados en [21]) se propone como

$$U(t) = e^{c_0(a^\dagger a + 1/2)/2} e^{c_- \frac{a^2}{2}} e^{c_+ \frac{a^2}{2}} \quad (2.14)$$

aprovechando que  $\{a^\dagger a, a^{\dagger 2}, a^2, 1\}$  forman un álgebra cerrada ante conmutaciones. Las soluciones para las funciones  $\{c_0, c_+, c_-\}$  se obtienen de un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que resultan de sustituir el operador de evolución 2.14 anterior en su ecuación diferencial 2.7 con el hamiltoniano correspondiente 2.13:

$$\begin{aligned} i\dot{c}_0 - 2c_- \dot{c}_+ &= 2\omega_0[1 - 1/2\epsilon(t)] \\ i(\dot{c}_- - 2c_-^2 \dot{c}_+) e^{c_0} &= \frac{1}{2}\omega_0\epsilon(t) \\ i\dot{c}_+ e^{-c_0} &= \frac{1}{2}\omega_0\epsilon(t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

La solución de estas ecuaciones diferenciales no lineales acopladas se puede relacionar con la solución de la ecuación clásica de movimiento. Para ello haremos las siguientes consideraciones. A pesar de que el oscilador involucra una frecuencia que admite dependencia temporal, es posible identificar operadores que son constantes de movimiento,  $I(t)$  [16]:

$$I(t) = U^\dagger(t)I(0)U(t) \quad (2.16)$$

Lo que en términos de los operadores de creación y aniquilación dará

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\epsilon}{2}} & -e^{\frac{\epsilon}{2}} c_- \\ -e^{-\frac{\epsilon}{2}} c_+ & e^{\frac{\epsilon}{2}} (1 - c_- c_+) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Por otra parte estos invariantes también pueden calcularse utilizando el teorema de Noether. Este teorema establece que [19]:

*Si tenemos un lagrangiano y aplicamos una transformación de coordenadas y velocidades cuyo resultado neto es agregar al lagrangiano una derivada total en el tiempo (por ende no se alteran las ecuaciones de movimiento) entonces existen integrales de movimiento del sistema asociadas a dicha transformación.*

Adicionalmente este teorema indica cual es el método para calcular dichas integrales de movimiento. Este involucra identificar la función cuya derivada total con respecto al tiempo es igual a la diferencial del lagrangiano. En nuestro caso, para  $m = 1$  el lagrangiano tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega^2(t)q^2. \quad (2.18)$$

con  $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \epsilon(t))$ . Siguiendo el procedimiento del teorema de Noether usado en [14] proponemos que la variación en la coordenada este dada por

$$\delta q = h(t). \quad (2.19)$$

donde hemos usado una variación específica que depende solo de una función arbitraria dependiente del tiempo  $(h(t))$  y entonces la variación del lagrangiano es

$$\delta L = \dot{q}(\delta\dot{q}) - (\omega^2 q)\delta q = \dot{q}\dot{h}(t) - \omega^2 q h(t). \quad (2.20)$$

Esta variación puede ser escrita como una derivada total con respecto al tiempo, de la función  $\Omega = \dot{h}q$ , si y solo si la función  $h(t)$  satisface la ecuación idéntica a la ecuación de movimiento del sistema clásico:

$$\ddot{h} + \omega^2 h(t) = 0 \quad (2.21)$$

ya que

$$\frac{d\dot{h}q}{dt} = \ddot{h}q + \dot{h}\dot{q} = -\omega^2(t)h_1q + \dot{h}\dot{q} = \delta L \quad (2.22)$$

Entonces, las integrales de movimiento son

$$K(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \Omega = \dot{h}\dot{q} - \dot{h}q. \quad (2.23)$$

y dado que  $\dot{q} = p$ , la expresión 2.23 da las integrales de movimiento lineales dependientes del tiempo. Estas son dos, pues tenemos dos soluciones linealmente independientes para este sistema de oscilador armónico paramétrico.

La matriz que relaciona linealmente a los operadores  $q$  y  $p$  con las constantes de movimiento es una matriz de  $2 \times 2$  dada por

$$\begin{pmatrix} Q_{10}(t) \\ P_{10}(t) \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

En términos de los operadores de aniquilación y creación, tenemos

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(t) \\ \hat{A}^\dagger(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^* & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Donde  $M_1$  y  $M_2$  son

$$M_1 = \frac{1}{2}[(h_1 - ih_2) - \frac{1}{\omega_0}(h_2 + ih_1)], \quad (2.26)$$

$$M_2 = \frac{1}{2}[-(h_1 - ih_2) - \frac{1}{\omega_0}(h_2 + ih_1)]$$

y  $\{h_1, h_2\}$  son soluciones de la ecuación clásica con condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} h_1(0) &= 1 & \dot{h}_1(0) &= 0 \\ h_2(0) &= 0 & \dot{h}_2(0) &= -\omega_0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Así pues, si comparamos las ecuaciones 2.2 y 2.25, tenemos que igualando término a término, resulta

$$\begin{aligned} c_0 &= -2\ln(M_1) \\ c_+ &= M_2^*/M_1 \\ c_- &= -M_2/M_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

o a la inversa

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \operatorname{Re}(e^{-\omega t/2} + c_- e^{\omega t/2}), \\ h_2(t) &= -\operatorname{Im}(e^{-\omega t/2} - c_- e^{\omega t/2}). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Resumiendo, el operador de evolución 2.14 está determinado por las funciones  $c_0, c_+, c_-$  que a su vez a través de las ecuaciones 2.28 y 2.26 están determinadas por las soluciones de la ecuación clásica

2.21 con condiciones a la frontera 2.27. Conociendo estas funciones podemos evaluar, por ejemplo, la evolución de la energía del oscilador de referencia:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= \hbar\omega_0 U^{-1}(t)(\alpha^\dagger a + 1/2)U(t) \\ &= \hbar\omega_0((1 + 2|M_2|^2)(\alpha^\dagger a + 1/2) - M_1 M_2 a^{\dagger 2} - M_1^* M_2^* a^2). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Esta expresión resulta útil para describir, por ejemplo, la evolución temporal de la población de estados de número del oscilador de frecuencia  $\omega_0$  ante el hamiltoniano del oscilador paramétrico de frecuencia  $\omega(t)$ .

## Capítulo 3

# Algunos elementos básicos de fenómenos estocásticos

Para el establecimiento de una teoría del ruido, no existe una libertad completa de construcción. Dichas teorías deben de ser consistentes con las leyes preestablecidas en la física. Para esto tenemos que tomar en cuenta primeramente, el requerimiento de que nuestros resultados tendrán que ser compatibles con los ampliamente verificados resultados de la mecánica estadística, y en segundo lugar, nuestras teorías deben también satisfacer el requerimiento de que las relaciones canónicas de los conmutadores tienen que ser preservadas, (esto segundo, en caso de querer describir ruidos cuánticos). Para tratar el ruido hay muchos métodos, de los cuales, algunos son útiles para los casos clásicos y otros para los casos cuánticos.

Dentro del contexto de esta tesis, resulta de vital importancia hacer un reconocimiento de las diversas formas en que se ha atacado el problema del ruido para así contemplar un panorama más amplio del que trataremos aquí, y concluir sabiendo donde es que la teoría y cálculos de este trabajo están situados.

Según sean las necesidades y las herramientas que se tengan es que se escoge la teoría con la que trataremos el ruido. Por ejemplo, si en óptica cuántica se conoce bien el *kernel* de una función de probabilidad de transición ( $W$ ), tal como 3.27, entonces tal vez se quiera atacar el problema del ruido usando una ecuación maestra del tipo 3.31, en vez de usar la ecuación de Fokker-Planck 3.34, ya que para trabajar con ésta última, en vez del kernel, tendríamos que saber los dos primeros momentos de una función  $y$ . Como otro ejemplo en la diversidad de tratamientos para el ruido, está también la equivalencia de las ecuaciones de Langevin y de Fokker-Planck.

De manera análoga, en el caso cuántico, en lugar de tener una función de probabilidad, lo que se tiene es un operador de densidad de probabilidad. Y en vez de obtener una ecuación de Langevin clásica 3.50, tenemos una ecuación de Langevin con operadores, obtenida mediante el acoplamiento del sistema con un ensamble de osciladores armónicos que intenta modelar al ruido [3].

Por otra parte, es también necesario el recurrir a cálculos cuánticos del ruido, cuando las energías involucradas distingan claramente diversos estados cuánticos admisibles.

Curiosamente, en esta tesis que intenta describir el comportamiento del ruido en oscilaciones cuánticas vamos a enfocarnos en tratamientos para ruidos clásicos, debido a la relación que ya obtuvimos acerca de la equivalencia en resolver el problema del oscilador armónico clásico y el cuántico.

Además de la simplificación de nuestro trabajo, gracias a esta equivalencia en ambos osciladores, se tiene también la facilidad de que las ecuaciones que nos interesa resolver resultan ser lineales, 4.4, (a diferencia de las ecuaciones de ruido comunes que generalmente resultan ser no lineales). En este caso muy particular, resulta cómodo trabajar con las ideas expuestas en [29], y en 4.1

En este capítulo, mencionaremos algunos de los conceptos básicos asociados al tratamiento clásico

de fenómenos estocásticos.

### 3.1 Definiciones básicas

La definición de una *variable estocástica*  $X$  consiste en la especificación de un conjunto de valores posibles  $\{x\}$  (conocido como rango, espacio muestra o espacio fase) y una función de distribución sobre dicho conjunto  $P(x)$ . Por definición esta función es no negativa y está normalizada en el sentido de que

$$\int P(x)dx = 1 \quad (3.1)$$

donde la integral se extiende sobre todo el espacio muestra. El valor promedio de cualquier función  $f(X)$  definida en el mismo espacio muestra es

$$\langle f(X) \rangle = \int f(x)P(x)dx. \quad (3.2)$$

En particular  $\langle X^m \rangle = \mu_m$  se conoce como el *momento m-ésimo* de  $X$ . La *función característica* de una variable estocástica se define como

$$G(k) = \langle e^{ikX} \rangle = \int e^{ikx} P(x)dx \quad (3.3)$$

Esta función existe para toda  $k$  real y tiene las propiedades

$$G(0) = 1, \quad |G(k)| \leq 1. \quad (3.4)$$

Es además la *función generadora* de los momentos:

$$G(k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \mu_m. \quad (3.5)$$

También esta función permite generar los *cumulantes*  $\kappa_m$ , definidos por la serie de potencias

$$K(k) = \log G(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \kappa_m, \quad (3.6)$$

que son combinaciones de los momentos  $\mu_m$ , así por ejemplo,

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mu_1 \\ \kappa_2 &= \mu_2 - \mu_1^2 \\ \kappa_3 &= \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

De aquí, conviene resaltar, que una función que pudiera no escribirse explícita y analíticamente, puede, mediante una expansión infinita en momentos o en cumulantes, darse como una expresión con un grado de aproximación establecido por los términos de las series 3.5 y 3.6 se tengan.

Una vez que el concepto de variable estocástica  $X$  ha sido definido, infinidad de otras variables estocásticas se derivan de ella. Sean estas nuevas variables  $Y$ , las definidas como funciones de  $X$  bajo un mapeo  $f$ . Estas cantidades  $Y$  pueden ser cualquier objeto matemático, y en particular funciones también de la variable  $t$ ,

$$Y_X(t) = f(X, t). \quad (3.8)$$

$Y(t)$  es llamada *función aleatoria*, o, como en la mayoría de los casos  $t$  representa al tiempo, le llamamos entonces *proceso estocástico*. Un proceso estocástico es simplemente una función de dos tipos de variables, una de las cuales es el tiempo, y la otra es una variable estocástica  $X$ . Asignando para  $X$  uno de sus posibles valores  $x$ , una función ordinaria de  $t$  se transforma en:

$$Y_x(t) = f(x, t) \quad (3.9)$$

llamada una *función muestra* o *realización* del proceso. En el lenguaje físico se suele identificar al proceso estocástico con un ensamble de las funciones muestra.

Es sencillo formar promedios sobre la base de una densidad de probabilidad dada  $P_X(X)$  de  $X$ . Por ejemplo,

$$\langle Y(t) \rangle = \int Y_x(t) P_X(X) dx. \quad (3.10)$$

En general, si se toman  $n$  valores  $t_1, t_2, \dots, t_n$  para la variable temporal (no necesariamente todas distintas) se puede formar el  $n$ -ésimo momento.

$$\langle Y(t_1)Y(t_2) \cdots Y(t_n) \rangle = \int Y_x(t_1)Y_x(t_2) \cdots Y_x(t_n) P_X(X) dx. \quad (3.11)$$

De interés particular es la función de *auto-correlación*

$$\begin{aligned} \kappa(t_1, t_2) &\equiv \langle (Y(t_1)Y(t_2)) \rangle \\ &= \langle \{Y(t_1) - \langle Y(t_1) \rangle\} \{Y(t_2) - \langle Y(t_2) \rangle\} \rangle \\ &= \langle Y(t_1)Y(t_2) \rangle - \langle Y(t_1) \rangle \langle Y(t_2) \rangle \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para  $t_1 = t_2$  se reduce a la varianza dependiente del tiempo

$$\langle (Y(t)^2) \rangle = \sigma^2(t). \quad (3.13)$$

Un proceso estocástico es llamado *estacionario* cuando los momentos no son afectados por un cambio en el tiempo, es decir, cuando

$$\langle Y(t_1 + \tau)Y(t_2 + \tau) \cdots Y(t_n + \tau) \rangle = \langle Y(t_1)Y(t_2) \cdots Y(t_n) \rangle \quad (3.14)$$

para todo  $n$ , todo  $\tau$  y todo  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . En particular,  $\langle Y \rangle$  es independiente del tiempo. Suele resultar conveniente sustraer esta constante a  $Y(t)$  y tratar con procesos con valor promedio cero  $\tilde{Y}(t) = Y(t) - \langle Y \rangle$ . La función de auto-correlación  $\kappa(t_1, t_2)$  de un proceso estacionario depende de  $|t_1 - t_2|$  solamente, y no es afectada por esta resta de una constante. Los procesos estrictamente estacionarios no existen ni en la naturaleza ni en los laboratorios, pero pueden ser realizados aproximadamente cuando un proceso dura muchomas que el fenómeno en el que estamos interesados. Es común que exista una constante  $\tau_c$  tal que  $\kappa(t_1, t_2)$  es cero o despreciable para  $|t_1 - t_2| > \tau_c$ ; uno llama a  $\tau_c$  el *tiempo de auto-correlación*. Una condición para que un proceso sea aproximadamente estacionario es que la duración de este sea mucho mayor que el tiempo de auto-correlación. Procesos sin un  $\tau_c$  finito nunca olvidan que han sido cambiados en el pasado y por eso no pueden ser tratados como aproximadamente estacionarios.

La cantidad estocástica  $Y(t)$  puede consistir en diversos componentes  $Y_j(t)$ , donde, ( $j = 1, 2, \dots, r$ ), en cuyo caso es conveniente escribirla como un vector  $\mathbf{Y}(t)$ . La función de auto-correlación es entonces desplazada por la *matriz de correlación*

$$K_{ij}(t_1, t_2) \equiv \langle (Y_i(t_1)Y_j(t_2)) \rangle. \quad (3.15)$$

Los elementos diagonales representan las auto-correlaciones. En el caso de un proceso estacionario con promedio cero, estas ecuaciones se reducen a

$$K_{ij}(\tau) = \langle Y_i(t)Y_j(t + \tau) \rangle = \langle Y_i(0)Y_j(\tau) \rangle. \quad (3.16)$$

Hay que notar la propiedad obvia de los procesos estacionarios dada por

$$K_{ij}(\tau) = K_{ji}(-\tau). \quad (3.17)$$

Si  $Y(t)$  es un número complejo, (como por ejemplo la amplitud de una oscilación), puede ser tratado como un proceso de dos componentes, pero es frecuentemente más adecuado el mantener la notación compleja. Uno podría entonces definir la función compleja para la auto-correlación

$$\kappa(\tau) \equiv \langle (Y(0)^* Y(\tau)) \rangle = \kappa(-\tau)^*. \quad (3.18)$$

### 3.2 Procesos de Markov

Un *proceso de Markov* está definido como un proceso estocástico con la propiedad de que para cualquier conjunto de  $n$  tiempos sucesivos ( $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ) uno tiene

$$P_{1|n-1}(y_n, t_n | y_1, t_1; \dots; y_{n-1}, t_{n-1}) = P_{1|1}(y_n, t_n | y_{n-1}, t_{n-1}). \quad (3.19)$$

Esto es, la densidad de *probabilidad condicional* a  $t_n$ , dado el valor  $y_{n-1}$  en el tiempo  $t_{n-1}$ , está únicamente determinada y no es afectada por cualquier conocimiento de los valores a tiempos anteriores.  $P_{1|1}$  es llamada la *transición de probabilidad*.

Un proceso de Markov está totalmente determinado por las dos funciones  $P_1(y_1, t_1)$  y  $P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1)$ . En realidad, tomando  $t_1 < t_2 < t_3$ , tenemos

$$\begin{aligned} P_3(y_1, t_1; y_2, t_2; y_3, t_3) &= P_2(y_1, t_1; y_2, t_2) P_{1|2}(y_3, t_3 | y_1, t_1; y_2, t_2) \\ &= P_1(y_1, t_1) P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Continuando este algoritmo se encuentran sucesivamente todas las  $P_n$ . Esta propiedad hace manejable al proceso de Markov, razón por la cual es muy usado en muchas aplicaciones.

### 3.3 La ecuación de Chapman-Kolmogorov

Integrando la ecuación 3.20 sobre  $y_2$  uno obtiene para  $t_1 < t_2 < t_3$

$$P_2(y_1, t_1; y_3, t_3) = P_1(y_1, t_1) \int P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) dy_2 \quad (3.21)$$

Dividiendo ambos lados entre  $P_1(y_1, t_1)$ ,

$$P_{1|1}(y_3, t_3 | y_1, t_1) = \int P_{1|1}(y_3, t_3 | y_2, t_2) P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) dy_2 \quad (3.22)$$

Esta es llamada la *ecuación de Chapman-Kolmogorov*, (o ecuación de Smoluchowski). Es una identidad que debe ser obedecida por cualquier probabilidad de transición de un proceso Markoviano. El orden temporal es esencial,  $t_2$  cae entre  $t_1$  y  $t_3$ . Es claro que la ecuación también se mantiene cuando  $y$  es un vector con  $r$  componentes; o cuando  $y$  solo toma valores discretos tales que la integral se convierte en una suma.

Como ya se dijo, un proceso de Markov está totalmente determinado por  $P_1$  y  $P_{1|1}$  porque la total jerarquía  $P_n$  puede ser construida a partir de ellas. Estas dos funciones no pueden ser escogidas arbitrariamente, sino que deben obedecer:

1. la ecuación de Chapman-Kolmogorov y
2. la relación obvia

$$P_1(y_2, t_2) = \int P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) P_1(y_1, t_1) dy_1. \quad (3.23)$$

*Vice versa*, cualesquiera dos funciones no negativas  $P_1, P_{1|1}$  que obedecen estas condiciones, definen unívocamente a un proceso de Markov.

### 3.4 La ecuación maestra

La *ecuación maestra* es una forma equivalente de la ecuación de Chapman-Kolmogorov para procesos de Markov, pero es más fácil de manejar y está más directamente relacionada con conceptos físicos.

Para su derivación considere un proceso de Markov, que por conveniencia pedimos que dependa únicamente de la diferencia de tiempos:

$$P_{1|1}(y_2, t_2 | y_1, t_1) = T_\tau(y_2 | y_1) \quad \text{con} \quad \tau = t_2 - t_1. \quad (3.24)$$

en esta notación, la ecuación de Chapman-Kolmogorov se lee:

$$T_{\tau+\tau'}(y_3 | y_1) = \int T_\tau'(y_3 | y_2) T_\tau(y_2 | y_1) dy_2 \quad (3.25)$$

donde aparece la restricción  $\tau, \tau' > 0$ .

La ecuación maestra es una ecuación diferencial que se obtiene al ir al límite cuando la diferencia temporal  $\tau$  tiende a desaparecer en la ecuación 3.22. Para este propósito, es necesario, primero el decir como se comporta  $T_\tau$  cuando  $\tau$  tiende a cero. Si  $\tau$  es pequeño, supondremos que  $T_\tau(y_2 | y_1)$  tiene la forma

$$T_\tau(y_2 | y_1) = (1 - \alpha_0 \tau) \delta(y_2 - y_1) + \tau W(y_2 | y_1) + \vartheta(\tau). \quad (3.26)$$

Aquí,  $W(y_2 | y_1)$  es la *probabilidad de transición* por unidad de tiempo desde  $y_1$  a  $y_2$ , por lo que

$$W(y_2 | y_1) \geq 0, \quad (3.27)$$

y

$$\alpha_0(y_1) = \int W(y_2 | y_1) dy_2. \quad (3.28)$$

El coeficiente  $1 - \alpha_0 \tau$  en frente de la función delta, es la probabilidad de que no haya transición en el tiempo  $\tau$ .

Los pasos que siguen ahora son: insertar en la ecuación de Chapman-Kolmogorov a la expresión para  $T_\tau$ ,

$$T_{\tau+\tau'}(y_3 | y_1) = [1 - \alpha_0(y_3) \tau'] T_\tau(y_3 | y_1) + \tau' \int W(y_3 | y_2) T_\tau(y_2 | y_1) dy_2 \quad (3.29)$$

dividir entre  $\tau'$ , irse al límite cuando  $\tau' \rightarrow 0$ , y usar 3.28:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau(y_3 | y_1) = \int \{W(y_3 | y_2) T_\tau(y_2 | y_1) - W(y_2 | y_3) T_\tau(y_3 | y_1)\} dy_2. \quad (3.30)$$

Esta versión diferencial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, válida para la probabilidad de transición de cualquier proceso estacionario de Markov que obedezca 3.26 es llamada la *ecuación maestra*. Es útil moldear la ecuación hacia una formamas intuitiva. Primero notemos que  $T_\tau(y_2, y_1)$  es idéntica

con la función de distribución  $P_1^*(y_2)$  del ensamble determinado por el valor inicial  $y_1$ . Entonces podemos escribir, suprimiendo los índices redundantes,

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial \tau} = \int \{W(y|y')P(y', t) - W(y'|y)P(y, t)\} dy' \quad (3.31)$$

Esta es la forma estándar de la ecuación maestra. No es necesario que  $P(y, t)$  se refiera a un ensamble definido por un valor inicial, pues será también definido por una distribución inicial  $P(y, 0)$ .

Si el rango de  $Y$  es un conjunto discreto de estados con  $n$  etiquetas, la ecuación se reduce a

$$\frac{dp_n(t)}{d\tau} = \sum_{n'} \{W_{nn'}p_{n'}(t) - W_{n'n}p_n(t)\} \quad (3.32)$$

En esta forma el significado se hace particularmente claro: la ecuación maestra es otra vez una ecuación para la probabilidad de cada estado  $n$ ; el primer término es la ganancia debido a las transiciones desde  $n$  a otros estados  $n'$ , y el segundo término es la pérdida debido a las transiciones desde  $n$  hacia otros estados. Hay que recordar que  $W_{nn'} \geq 0$  para  $n' \neq n$ , y el término con  $n' = n$  debe ser omitido en la sumatoria. Se enfatiza el uso del nombre "ecuación maestra" solo en este sentido original, es decir, la forma diferencial de la ecuación de Chapman-Kolmogorov, y no para alguna modificación no lineal o no Markoviana.

Hay que advertir también que la ecuación maestra es una ecuación para la probabilidad de transición de  $Y(t)$  y no para la densidad de probabilidad  $P_1(y, t)$ . Una ecuación cuya solución coincida con la  $P_1$  del proceso estocástico, no es una ecuación maestra.

La ecuación maestra no es tan conveniente que la de Chapman-Kolmogorov, tan solo debido a bondades matemáticas, sino que también se tiene, (como ya se dijo), una interpretación más directa. Las cantidades  $W(y|y')\Delta t$  o  $W_{nn'}\Delta t$  son las probabilidades para una transición durante un corto periodo  $\Delta t$ . Por esta razón pueden ser calculadas, para un sistema determinado, usando cualquier método de aproximaciones disponible que sea válido para tiempos cortos. El mejor método conocido es la teoría de perturbaciones dependiente del tiempo de Dirac, la cual dio pie a la "Regla de oro de Fermi"

$$W_{nn'} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{nn'}|^2 \rho(E_n) \quad (3.33)$$

( $n, n'$  son eigenestados del Hamiltoniano no perturbado,  $H'_{nn'}$  es el elemento de matriz del término de perturbación en el Hamiltoniano, y  $\rho$  es la densidad de los niveles no perturbados). La ecuación maestra, sirve entonces para determinar la evolución del sistema resultante a tiempos largos. De esta forma las escalas de tiempo pueden ser tratadas por separado; siempre y cuando se asuma la propiedad markoviana.

Esta interpretación de la ecuación maestra da un rol totalmente distinto del presentado con la ecuación de Chapman-Kolmogorov. Esta última es una ecuación no lineal, que expresa el carácter de Markov, pero que no contiene información específica acerca de ningún proceso de Markov en particular. En la ecuación maestra, sin embargo, uno considera las probabilidades de transición como dadas por el propio sistema específico, y se llega a una ecuación lineal para las probabilidades que determinan el estado macroscópico del sistema.

### 3.5 Ecuación de Fokker-Planck

Como expresiones simplificadas para las ecuaciones maestras 3.31, se usan frecuentemente la de Fokker-Planck y la ecuación de Langevin 3.50. En la primera ecuación, lo que queremos encontrar es la función distribución de probabilidad  $P(y, t)$ . La ecuación de Fokker-Planck tiene la forma

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} A(y)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} B(y)P. \quad (3.34)$$

donde  $y$  es necesariamente continua y los coeficientes pueden ser cualquier función real diferenciable, con la única restricción de que  $B(y) > 0$ .

Sea  $P(y, t|y_1, t_1)$ , la solución para  $t > t_1$  de esta ecuación y que se reduce a  $\delta(y - y_1)$  a  $t = t_1$ . Entonces se puede construir un proceso de Markov, tal que la probabilidad de que pasemos al punto  $y_2$  en el tiempo  $t_2$  siguiendo del paso  $y_1$  con  $t_1$  es  $P(y_2, t_2|y_1, t_1)$  y cuya distribución en el paso uno dada por  $P_1(y_1, t_1)$  pueda ser escogida arbitrariamente para un tiempo inicial  $t_0$ . Entonces, si uno escoge como solución para el paso  $P_1$  a

$$P^*(y) = \frac{\text{const.}}{B(y)} \exp\left[2 \int_0^y \frac{A(y')}{B(y')} dy'\right] \quad (3.35)$$

obtenemos un proceso de Markov estacionario. Siempre y cuando  $P_*$  sea integrable y pueda ser normalizado a 1. Un proceso de Markov, cuya ecuación maestra tenga la forma de la ecuación 3.34, es llamado continuo. A su vez, una ecuación de Fokker-Planck es llamada lineal, si  $A$  es una función lineal en  $y$ , y  $B$  es constante. Si  $A_1 < 0$  la solución estacionaria 3.35 es gaussiana.

Para encontrar las constantes  $A$  y  $B$  de la ecuación de Fokker-Planck, se puede demostrar que si  $P(y, t|y_0, t_0)$  es una solución para la ecuación 3.34 y  $t = t_0 + \Delta t$  entonces, si se calculan los momentos de  $y - y_0 = \Delta y$  para  $\Delta t \rightarrow 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\langle \Delta y \rangle}{\Delta t} &= A(y_0), \\ \frac{\langle (\Delta y)^2 \rangle}{\Delta t} &= B(y_0), \\ \frac{\langle (\Delta y)^n \rangle}{\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

La ecuación de Fokker-Planck fue introducida entonces como un tipo de ecuación maestra. Sin embargo, es una descripción aproximada para cualquier proceso de Markov  $Y(t)$  el cual tiene pasos individuales muy pequeños. Como aproximación, esta ecuación tiene dos grandes ventajas sobre la ecuación maestra. La primera consiste en que es una ecuación diferencial y no una ecuación integro-diferencial y por tanto es un poco más fácil de ser tratada. La segunda, y más importante ventaja, es que para ser resuelta, no se necesita saber todo el kernel  $W(y|y')$ , sino solo las dos funciones  $A(y)$  y  $B(y)$ , las cuales pueden ser determinadas sabiendo tan solo un mínimo de los detalles del problema. Si suponemos que una cantidad  $y$  va a estar dada por un proceso de Markov, entonces tomamos un intervalo de tiempo  $\Delta t$  el cual es muy pequeño para que los cambios en  $y$  no sean notorios, pero es muy grande comparado con el tiempo del proceso de Markov. Una vez hecho esto, se calculan los dos primeros momentos de la variable  $y$ , lo cual, según la ecuación 3.36 nos va a permitir calcular cuanto valen las funciones  $A$  y  $B$ . De esta forma, la ecuación de Fokker-Planck, puede ser determinada, y enseguida, las ecuaciones de movimiento, se resuelven durante un tiempo  $\Delta t$  usando algún método de perturbaciones. De esta forma, la ecuación de Fokker-Planck sirve para predecir el comportamiento de  $y$  a tiempos largos. La distinción entre tiempos largos y cortos queda definida por la suposición de Markov.

Hay otra forma más fenomenológica de encontrar cuanto valen las funciones  $A(y)$  y  $B(y)$ , la cual consiste en partir de la ecuación 3.34

$$\partial_t \langle y \rangle = \langle A(y) \rangle \quad (3.37)$$

si se desprecian las fluctuaciones entonces se tiene que  $\langle A(y) \rangle = A(\langle y \rangle)$  y nos queda solo la ecuación para  $\langle y \rangle$

$$\partial_t \langle y \rangle = A(\langle y \rangle) \quad (3.38)$$

Así, podemos identificar esta última ecuación con la ecuación macroscópica que es supuestamente conocida. De esta forma identificamos por analogía entre las dos funciones, cuanto es lo que vale  $A$ . Por otro lado,  $B$  se obtiene haciendo una analogía entre la ecuación 3.35 y la distribución de equilibrio, que puede ser obtenida para sistemas cerrados utilizando principios de mecánica estadística. Esta última forma de encontrar los valores para las funciones de la ecuación de Fokker-Planck, fue muy utilizada por Einstein y otros, pero sólo para el caso en el que dicha ecuación es lineal. Si la ley macroscópica del problema es no lineal, entonces el argumento para encontrar las funciones falla en el hecho de que no se pueden identificar los coeficientes  $A(y)$  con dicha ley. Dicha comparación podría diferir en un término del mismo orden de las fluctuaciones, pero una vez que hemos despreciado las fluctuaciones, ese término es despreciable.

Para derivar la ecuación de Fokker-Planck desde la ecuación maestra, vamos a usar el mismo método que uso Planck. Primero se expresa la probabilidad de transición  $W$  en función de el tamaño del paso  $r$  y en términos de el punto de partida  $y'$

$$W(y|y') = W(y';r), \quad r = y - y' \quad (3.39)$$

entonces la ecuación maestra general se escribe como

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \int W(y-r;r)P(y-r,t)dr - P(y,t) \int W(y;-r)dr. \quad (3.40)$$

La suposición básica es que solo se permiten saltos pequeños, es decir,  $W(y';r)$  es una función "picuda" en  $r$  pero varía lentamente en  $y'$ . De alguna forma, decimos que existe una  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} W(y';r) &= 0 & |r| > \delta \\ W(y' + \Delta y;r) &\approx W(y';r) & |\Delta y| < \delta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

La segunda suposición es que la solución que queremos  $P(y,t)$  también varía poco en  $y$ . Es entonces posible tratar con un cambio de  $y$  a  $y-r$  en la primera integral de 3.40, usando la expansión de Taylor a segundo orden.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} \\ &= \int W(y;r)P(y,t)dr - \int r \frac{\partial}{\partial y} [W(y;r)P(y,t)]dr \\ &+ \frac{1}{2} \int r^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [W(y;r)P(y,t)]dr - P(y,t) \int W(y;-r)dr. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Hay que notar que la dependencia de  $W(y;r)$  en el segundo argumento  $r$  se mantiene totalmente, ya que no se puede expandir sobre esta debido a que  $W$  varía rápidamente con  $r$ . Se ve que el cuarto y primer término se cancelan y que los otros dos pueden ser escritos con la ayuda de los momentos de orden  $\nu$ .

$$a_\nu(y) = \int_{-\infty}^{\infty} r^\nu W(y;r)dr \quad (3.43)$$

por lo que el resultado es

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} a_1(y)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} a_2(y)P. \quad (3.44)$$

### 3.6 Movimiento browniano

Para visualizar como es que se resuelven algunos problemas estocásticos vamos a considerar uno de los mas comúnmente tratados en la literatura [29]. En el movimiento browniano unidimensional, se tiene una partícula que hace pequeños saltos estocásticos hacia adelante y hacia atrás sobre el eje  $X$ . Los saltos pueden tener cualquier longitud, sin embargo la probabilidad de dar saltos largos decae rápidamente. Mas aún, la probabilidad es simétrica e independiente al punto de partida. Por lo tanto,

$$a_1 = \frac{\langle \Delta X \rangle_x}{\Delta t} = 0, \quad a_2 = \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle_x}{\Delta t} = cte \quad (3.45)$$

Entonces, comparando los términos de 3.45 con los de la definición 3.36 la ecuación de Fokker-Planck para la transición es

$$\frac{\partial P(X, t)}{\partial t} = \frac{a_2}{2} \frac{\partial^2 P(X, t)}{\partial X^2}. \quad (3.46)$$

Se observa pues, que es la ecuación de difusión de una partícula browniana en un fluido, por lo tanto, el factor  $a_2/2$  es idéntico a la constante fenomenológica de difusión  $D$  [29]:

$$D = \frac{\langle (\Delta X)^2 \rangle_x}{2\Delta t}, \quad (3.47)$$

lo que se conoce como la relación de Einstein, la cual conecta la constante macroscópica  $D$  con los saltos microscópicos de la partícula.

Si ahora consideramos un ensamble de partículas brownianas que a  $t = 0$  están en  $X = 0$ , entonces sus posiciones a  $t > 0$  constituyen un proceso estocástico  $X(t)$ , el cual es markoviano y su transición esta dada por la solución de la ecuación de Fokker-Planck. Así, si la condición inicial es  $P(X, 0) = \delta(X)$  entonces

$$P(X, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{X^2}{4Dt}\right]. \quad (3.48)$$

lo que indica que la distribución de la partícula browniana está dada en el el espacio y en el tiempo por una gaussiana con un máximo en el origen y cuyo grosor aumenta con la raíz cuadrada del tiempo.

$$\sqrt{\langle X^2(t) \rangle} = \sqrt{2Dt}. \quad (3.49)$$

### 3.7 Ecuación de Langevin

Una forma alternativa para tratar al movimiento Browniano, fue la que propuso Langevin. El afirmó que una partícula brwniana obedece la ecuación

$$\dot{V} = -\gamma V + L(t). \quad (3.50)$$

El lado derecho es la fuerza ejercida por el fluido (dividida entre la masa de la partícula). En este proceder, se hacen diversas suposiciones básicas

1. La fuerza consiste en un término lineal en  $V$ , el cual es de fricción, mas un término  $L(t)$  independiente del estado  $V$  de la partícula.

2. El término de fricción es también la fuerza promedio, por lo que esto nos conduce a que

$$\langle L(t) \rangle = 0. \quad (3.51)$$

Donde el promedio está tomado sobre un ensamble de muchos sistemas, cada uno consistiendo en una partícula sumergida en un fluido. En la práctica significa promediar sobre un número de partículas en el mismo fluido, o lo que es equivalente, observar sucesivamente a la misma partícula, de tal forma que no hay interacción entre dos partículas o entre un instante y otro, es decir, se asume la suposición de Markov.

3. La fuerza  $L$  varía en el tiempo tal y como lo indica la ecuación

$$\langle L(t)L(t') \rangle = \Gamma \delta(t - t'), \quad (3.52)$$

donde  $\Gamma$  es una constante. La idea es pues, que cada colisión es prácticamente instantánea y que las colisiones sucesivas están no correlacionadas.

Una fuerza que tiene las propiedades 1, 2 y 3 es llamada fuerza de Langevin, y la ecuación 3.50 es llamada ecuación de Langevin. Hay que notar que las propiedades 3.51 y 3.52 no especifican completamente el proceso estocástico  $L(t)$ , pero sí a los primeros dos momentos.

La ecuación de Langevin es un simple ejemplo de una ecuación diferencial estocástica, es decir, una ecuación diferencial cuyos coeficientes son aleatorios y tienen propiedades estocásticas dadas.

Para visualizar más a la ecuación de Langevin, tomemos un ensamble de partículas brownianas moviéndose en un fluido, estas van a tener una velocidad inicial  $V(0)$ . La velocidad va a ser un proceso aleatorio para tiempos  $t > 0$ . Si usamos la ecuación 3.50 obtendremos

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{-\gamma t'} L(t') dt'. \quad (3.53)$$

Si promediamos sobre el ensamble y usamos 3.51, tenemos

$$\langle V(t) \rangle_{V_0} = V_0 e^{-\gamma t}. \quad (3.54)$$

Más aún, si elevamos al cuadrado 3.53 y promediamos, obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \{V(t)\}^2 \rangle_{V_0} &= V_0^2 e^{-2\gamma t} \int_0^t dt' \int_0^t dt'' e^{+\gamma(t'+t'')} \\ &= \langle L(t')L(t'') \rangle \\ &= V_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{\Gamma}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma t}). \end{aligned} \quad (3.55)$$

La constante  $\Gamma$ , puede ahora ser identificada empleando el hecho de que cuando  $t \gg 1/\gamma$  la velocidad inicial ha desaparecido y la velocidad cuadrática media debe tener el mismo valor que el valor de equilibrio térmico

$$\langle \{V(\infty)\}^2 \rangle_{V_0} = \frac{\Gamma}{2\gamma} \frac{kT}{M}. \quad (3.56)$$

esta ecuación relaciona la constante  $\Gamma$ , la cual mide el tamaño de las fluctuaciones en 3.50, con la constante de fricción  $\gamma$ . Tal y como las relaciones de Einstein, esta es obtenida mediante la confrontación del resultado de la ecuación para las fluctuaciones dependientes del tiempo, con los valores de equilibrio conocidos utilizando la mecánica estadística. La distribución de equilibrio para  $V$  es a la que se llega

mediante los saltos aleatorios de la partícula  $y$ , por otra parte, la fuerza de fricción que intenta reducir  $V$  a cero.

Para encontrar la relación con la ecuación de Fokker-Planck, se toma por  $t$  un tiempo corto  $\Delta t \gg 1/\gamma$ . Entonces la ecuación dice que

$$\langle \Delta V \rangle_{v_0} = \langle V(t) \rangle_{v_0} - V_0 = -\gamma V_0 \Delta t + \theta(\Delta t)^2. \quad (3.57)$$

Análogamente, de 3.55 uno obtiene

$$\langle (\Delta V)^2 \rangle_{v_0} = \Gamma \Delta t + \theta(\Delta t)^2 \quad (3.58)$$

Una vez obtenidas 3.57 y 3.58 dada 3.36 se puede escribir la ecuación de Fokker-Planck para  $V$ :

$$\frac{\partial P(v, t)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial V} V P + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V^2}. \quad (3.59)$$

Pese a que la ecuación de Fokker-Planck y la de Langevin, dan los mismos valores para los dos primeros momentos de  $V$ , no se puede decir que son iguales porque los demás órdenes superiores no siempre son iguales, ya que los momentos mayores para  $L(t)$  no están especificados. Es por esto último que además de las tres condiciones anteriores, se pide alternativamente que todos los momentos mayores a dos se vayan a cero. Esto especifica todas las propiedades de  $L(t)$  única y exclusivamente en términos del parámetro  $\Gamma$ . La  $L(t)$  definida de esta manera se le conoce como ruido blanco gaussiano. Dicho modelo es de mucha utilidad para tratar a fuerzas que fluctúan rápidamente. Es por todo esto, que la similitud entre las ecuaciones de Langevin y la de Fokker-Planck puede ser mostrada como sigue. De acuerdo con 3.53 el valor de  $V(t)$  es una combinación lineal de los valores que toma  $L$  en tiempos previos  $t'(0 \leq t' \leq t)$ . Como la distribución conjunta de todas las  $L(t')$  es gaussiana, entonces  $V(t)$  es gaussiana, y por el mismo argumento la distribución conjunta de todas las  $V(t_1), V(t_2), \dots$  es gaussiana. Entonces el proceso  $V(t)$ , determinado con 3.50 con condiciones iniciales  $V_0$ , es gaussiano. Por el otro lado, sabemos que la solución de 3.59 es gaussiana. Mas aún, hemos escogido que los primeros dos momentos de las gaussianas sean los mismos; por lo tanto estas son idénticas.

Ahora consideremos la ecuación

$$\dot{y} = A(y) + L(t). \quad (3.60)$$

supongamos que  $A(y)$  es no lineal, pero la llamamos cuasilineal para expresar que el coeficiente  $L(t)$  es una constante. Aunque su solución general no puede ser dada explícitamente, podemos decir que es equivalente con la ecuación de Fokker-Planck cuasilineal.

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} A(y) P + \frac{\Gamma}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}. \quad (3.61)$$

Es claro que para una función  $L$  la ecuación 3.60 determina unívocamente a  $y(t)$  cuando  $y(0)$  esta dada. Debido a que los valores de  $L$  a tiempos diferentes son estocásticamente independientes, se sigue que  $y$  es markoviana. Al obtener sus dos primeros momentos nos da

$$\Delta y = \int_t^{t+\Delta t} A(y(t')) dt' + \int_t^{t+\Delta t} L(t') dt'. \quad (3.62)$$

Entonces el promedio para una  $y(t)$  dada es

$$\langle \Delta y \rangle = A(y(t)) \Delta t + \theta(\Delta t)^2. \quad (3.63)$$

además,

$$\begin{aligned} \langle (\Delta y)^2 \rangle = & \left\langle \left\{ \int_t^{t+\Delta t} A(y(t'))^2 dt' \right\} \right\rangle + \\ & + 2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle A(y(t')) L(t'') \rangle + \\ & + \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle L(t') L(t'') \rangle. \end{aligned} \quad (3.64)$$

El primer término de la derecha es de orden  $(\Delta t)^2$  por lo tanto no contribuye a  $a_2$ . El último término es igual a  $\Gamma \Delta t$  como antes, lo que concuerda con 3.61. Para el segundo término, si expandimos  $A(y(t'))$ :

$$\begin{aligned} & 2A(y(t)) \Delta t \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle L(t'') \rangle + \\ & + 2A'(y(t)) \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t+\Delta t} dt'' \langle \{y(t') - y(t)\} L(t'') \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.65)$$

El primer término desaparece y el segundo representa un error  $\theta(\Delta t)$ , porque es una doble integral y  $\{y(t') - y(t)\}$  no contiene funciones delta. Por un argumento similar uno puede ver que los momentos más altos en 3.65 son  $\theta(\Delta t)$ , y también que  $\langle (\Delta y)^\nu \rangle = \theta(\Delta t)$  para  $\nu > 0$ . Esto prueba la equivalencia entre 3.60 y 3.61

Ahora nos gustaría ver que la ecuación de Langevin genuina<sup>1</sup>

$$\dot{y} = A(y) + C(y)L(t) \quad (3.66)$$

es equivalente a

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} A(y)P + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} C(y)^2 P. \quad (3.67)$$

sin embargo, tal y como está la ecuación 3.66, no tiene un significado, ya que hay que especificar que es lo que vale la  $C(y)$  lo cuál no es trivial debido a que los saltos en  $L(t)$  causan saltos en  $y(t)$ , y ninguna de las ecuaciones de movimiento nos dice como depende  $y(t)$  de  $C(y)$ , es decir, no sabemos si es que solo depende del paso  $y$  anterior o si depende de un promedio de anterior y el posterior. Para seguir intentando resolver el problema, se han tratado dos vertientes por separado. Primeramente la de Ito, quien propone que  $C(y)$  solo depende del salto anterior dado, es decir,

$$y(t + \Delta t) - y(t) = A(y(t))\Delta t + C(y(t)) \int_t^{t+\Delta t} L(t') dt' \quad (3.68)$$

y se puede probar que usando esta interpretación llegamos a la ecuación 3.66.

Por el otro lado, Stratonovich dice que  $C(y)$  depende del promedio entre el paso anterior y el paso siguiente. Con esta suposición, se llega a la ecuación

$$\frac{\partial P(y, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} A(y)P + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} C(y) \frac{\partial}{\partial y} C(y)P. \quad (3.69)$$

Pese a este cambio, la interpretación de Stratonovich puede ser utilizada en otros casos, tales como el que se muestra. Si intercambiamos  $L(t)$  de la ecuación 3.66 por una función estocástica  $\varepsilon(t)$ , la cual

<sup>1</sup> la ecuación 3.66 es también conocida en la literatura matemática como la ecuación de Ito

no sea ruido blanco, pero que tenga un tiempo de auto-correlación pequeño  $\tau_c$ , entonces la ecuación es una ecuación diferencial estocástica bien definida. Uno puede aplicar entonces una transformación para obtener un análogo a la ecuación 3.60,

$$\dot{y} = A'(y) + \varepsilon(t). \quad (3.70)$$

Haciendo que varíe  $\varepsilon(t)$  de tal forma que  $\tau_c \rightarrow 0$  se llega a una ecuación del tipo 3.59 para una nueva  $P$ . Haciendo la transformación inversa uno llega a 3.69. Esto prueba que la interpretación de Stratonovich es el límite correcto para un tiempo de correlación que tiende a cero. Esto siempre y cuando tenga sentido que  $\varepsilon(t)$  vaya a este límite mientras que  $A(t)$  y  $B(t)$  permanecen inalterados.

## Capítulo 4

# Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación diferencial cuyos coeficientes son números aleatorios o funciones estocásticas de variables independientes. Al igual que en las ecuaciones diferenciales ordinarias, el rango de los coeficientes así como sus propiedades estocásticas se consideran determinados de antemano, independientemente de la solución que se quiera encontrar.

Una ecuación diferencial estocástica sirve para describir sistemas con fluctuaciones causadas por un agente externo. Como por ejemplo, la partícula browniana 3.6 con su ecuación de Langevin 3.50, o cualquier otro pequeño sistema que interactúa con un gran baño térmico, o ondas electromagnéticas en una atmósfera turbulenta, o el crecimiento de una población en un clima cambiante.

La forma común de una ecuación diferencial estocástica es

$$\dot{u} = f(u, t; Y(t)), \quad (4.1)$$

donde  $u$  y  $F$  pueden ser vectores, y  $Y(t)$  denota una o más funciones aleatorias cuyas propiedades estocásticas se conocen. Esta ecuación, conjuntamente con la condición inicial  $u(t_0) = a$  determina, para cada realización  $y(t)$ , una función  $U(t; [y], a)$ , que es una funcional de  $y(t)$ , por lo que depende de todos los valores de  $y(t')$  para  $0 \leq t' \leq t$ . El ensamble de soluciones  $U(t; [y], a)$  para todos los posibles valores  $y(t')$  constituye un proceso estocástico. La ecuación 4.1 es resuelta cuando las propiedades estocásticas de este proceso han sido encontradas. En ocasiones, el valor  $a$  es también una cantidad (o vector) aleatoria(o). El resultado, es un proceso  $U(t; [y], a)$  que es una función de las variables aleatorias  $a$  y  $y$ . Como esta es solo una generalización trivial del problema con condiciones iniciales  $a$ , no hay necesidad de tratar a las condiciones aleatorias por separado.

La ecuación de Langevin, 3.50 y la ecuación más general de Itô, (ver 3.66), son ejemplos de ecuaciones diferenciales estocásticas. De hecho, en gran parte de la literatura matemática, el término de ecuación diferencial estocástica se reduce a ellas. Sin embargo, en la vida real, el ruido blanco puede ser un modelo muy burdo para describir un fenómeno, en cuyo caso no tiene mucho sentido el referirnos a la ecuación de Itô 3.66. Las dificultades de la aproximación de ruido blanco desaparecen cuando uno toma en cuenta que una fuerza aleatoria en la física, nunca es realmente ruido blanco, sino que a su vez tiene un muy pequeño tiempo de autocorrelación. Es por eso mejor comenzar estudiando una variedad de ecuaciones del tipo 4.1 que son más generales y subsecuentemente estudiar, como un caso especial, las aproximaciones que son válidas cuando el tiempo de correlación es muy corto. Otro ejemplo de una ecuación diferencial estocástica 4.1, es

$$\dot{u} = -i\omega(t)u, \quad (4.2)$$

donde  $u$  es complejo y  $\omega(t)$  es una función del tiempo. Este ejemplo puede ser resuelto explícitamente y ha sido usado, por ejemplo, para ilustrar resonancia paramagnética [17]. Hay que notar, que la ecuación 4.2 se distingue de la ecuación de Langevin en el hecho de que el coeficiente aleatorio multiplica a  $u$ .

Un ejemplo importante que no puede ser resuelto explícitamente, (sino que tiene que expresarse como serie de momentos 3.5), es precisamente

$$\ddot{x} + w^2(t)x = 0 \quad (4.3)$$

que describe a un oscilador armónico cuya frecuencia es una función aleatoria en el tiempo. En términos generales, se puede hacer una categoría de las ecuaciones, como sigue.

- Ecuación diferencial lineal en donde solo el término inhomogéneo es una función aleatoria, tal y como la ecuación de Langevin. dichas ecuaciones han sido llamadas aditivas, y en principio pueden ser resueltas.
- Ecuaciones diferenciales lineales en las cuales uno o mas términos de los coeficientes que multiplican a  $u$  son funciones aleatorias. Estas han sido llamadas multiplicativas y pueden ser resueltas solo en casos especiales.
- En las ecuaciones no lineales la diferencia entre las aditivas y las multiplicativas se desvanece, pero en ocasiones pueden transformarse en ecuaciones multiplicativas.

Una diferencia entre estas ecuaciones y las ecuaciones diferenciales ordinarias es la que consiste en que todas las soluciones de una ecuación no estocástica, son obtenidas mediante la imposición de una  $t_0$  arbitraria y una condición inicial  $u(t_0) = a$ , y entonces se consideran todos los posibles valores de  $a$ . Para una ecuación diferencial estocástica, sin embargo, uno obtiene, mediante esta forma, solo una subclase de soluciones, las cuales son las que no tienen una dispersión al tiempo  $t_0$ .

Para ser mas precisos, considere un conjunto  $S$  de funciones estocásticas  $U(t) = a$ . Sea  $S_0$  la unión de todos los  $S_0(a)$ , obtenidos mediante varios posibles valores de  $a$ . Entonces  $S_0 \subset S$  es el conjunto de todas las funciones estocásticas que son solución de 4.1 y que tienen varianza cero al tiempo  $t_0$ . Ahora, tomemos  $t_1 \neq t_0$  y formemos el correspondiente  $S_1$ . Para una ecuación no estocástica  $S_0 = S_1 = S$ , pero para el caso estocástico  $S_1 \neq S_0$ . En general,  $S_0$  y  $S_1$  ni siquiera se cruzan, es decir,  $S_0 \cap S_1 = 0$ . Es importante notar, que estamos hablando del proceso estocástico  $U$ , y no acerca de sus realizaciones individuales ( $u$ ). Cualquier realización individual  $u$  de una  $U \in S_0$  es una solución de  $\dot{u} = F(u, t; y(t))$  para alguna  $y(t)$  y es por eso también una realización de alguna  $U$  dentro de  $S_1$ .

## 4.1 Ecuaciones multiplicativas

Considere una ecuación lineal del tipo [29]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= A(t)u \\ &= \{A_0 + \alpha A_1(t)\}u, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde  $u$  es un vector,  $A_0$  es una matriz constante,  $A_1(t)$  una matriz aleatoria y  $\alpha$  un parámetro que mide la magnitud de las fluctuaciones en los coeficientes. Además,  $A_1(t)$  tiene por hipótesis un tiempo de autocorrelación finito  $\tau_c$ , en el sentido de que para cualesquiera dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  tales que  $|t_1 - t_2| > \tau_c$  se puede tratar a todos los elementos de la matriz  $A_1(t_2)$  como estadísticamente independientes a los elementos de  $A_1(t_1)$ . La cantidad  $\alpha\tau_c$  es el llamado número de Kubo y es, por hipótesis, muy pequeño. Nuestro resultado será una aproximación a 4.4 en el sentido de que haremos una expansión en potencias de  $\alpha\tau_c$ .

Aunque no es estrictamente necesario, es conveniente el asumir que  $A_1(t)$  es una matriz que representa un proceso estacionario. Entonces  $\langle A_1(t) \rangle$  es independiente del tiempo y puede ser incorporado en  $A_0$  mediante la definición de

$$A'_0 = A_0 + \alpha \langle A_1(t) \rangle, \quad \alpha A'_1(t) = \alpha \{A_1(t) - \langle A_1(t) \rangle\} \quad (4.5)$$

tal que  $\langle A_1'(t) \rangle = 0$ . Ahora supondremos que ya se ha hecho la transformación y así nos olvidaremos de las primas. El desarrollo resultante en potencias de  $\alpha$  solo se refiere a la  $\alpha$  frente a la  $A'(t)$ . Por consecuencia, estamos tratando a 4.4 con  $\langle A_1(t) \rangle = 0$ .

Primeramente eliminamos  $A_0$  trabajando en la llamada representación de interacción:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{U}(t_0, t)\nu(t) \\ \dot{\nu} &= \alpha \mathcal{U}^{-1}(t_0, t)A_1(t)\mathcal{U}(t_0, t)\nu \\ &\equiv \alpha V(t)\nu \end{aligned} \quad (4.6)$$

con

$$\dot{\mathcal{U}} = A_0\mathcal{U}, \quad \mathcal{U}(t_0, t_0) = 1 \quad (4.7)$$

La solución a segundo orden en  $\alpha$  con condiciones iniciales  $\nu(0) = u(0) = a$  es

$$\nu(t) = a + \alpha \int_0^t dt_1 V(t_1)a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V(t_1)V(t_2)a + \dots \quad (4.8)$$

Ahora, tomando el promedio para una  $a$  fija,

$$\langle \nu(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1' \int_0^{t_1'} dt_1 \langle V(t_1)V(t_2) \rangle a. \quad (4.9)$$

o en términos de  $u$

$$\langle u \rangle = \mathcal{U}(t)a + \mathcal{U}(t)\alpha^2 \int_0^t dt_1' \int_0^{t_1'} dt_1 \langle V(t_1)V(t_2) \rangle a. \quad (4.10)$$

Esta aproximación de segundo orden solo puede ser usada siempre y cuando los momentos de orden superior sean pequeños. Mientras que cada término sucesivo, envuelve una integración mas sobre el tiempo, esta restricción es aplicada a  $\alpha t \ll 1$ . Por otra parte, queremos usarla para periodos largos comparados con  $\tau_c$ ; entonces debemos suponer adicionalmente  $\alpha\tau_c \ll 1$ . Así, encontramos para  $t \ll \alpha^{-1}$

$$\langle \nu(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle V(t_1)V(t_2) \rangle a. \quad (4.11)$$

además, para  $\tau_c \ll t \ll \alpha^{-1}$

$$\langle \nu(t) \rangle = a + \alpha^2 \int_0^t dt_1 \int_0^\infty dt_2 \langle V(t_1)V(t_2) \rangle a. \quad (4.12)$$

Esta última ecuación, es además, la solución a orden  $\alpha^2$  de la ecuación diferencial lineal

$$\partial_t \langle \nu(t) \rangle = \alpha^2 \left[ \int_0^\infty \langle V(t)V(t-\tau) \rangle d\tau \right] \langle \nu(t) \rangle. \quad (4.13)$$

La conclusión es que la evolución de  $\langle \nu(t) \rangle$  puede ser descrita por esta última ecuación, que en términos de la representación original es <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u(t) \rangle &= [A_0 + \alpha \langle A_1 \rangle + \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty d\tau \langle \langle A_1(t)\mathcal{U}(t)\mathcal{U}^{-1}(t-\tau)A_1(t-\tau)\mathcal{U}(t-\tau) \rangle \rangle] \cdot \\ &\cdot \mathcal{U}^{-1}(t) \langle u(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.14)$$

<sup>1</sup>En esta expresión retomamos un valor arbitrario para  $\langle A_1 \rangle$

Es importante recordar que la derivación anterior puede ser aplicada solo en un intervalo  $\Delta t \ll \alpha^{-1}$  después de un tiempo inicial  $t_0$ , el cual hemos tomado como cero. Este tiempo inicial es especial porque a dicho tiempo, el valor de  $u$  dado es igual a un vector no estocástico  $\alpha$ . Es simple demostrar que el resultado es igualmente válido cuando el valor inicial  $\alpha$  es estocástico, dado que es estadísticamente independiente de  $A_1$ . Este hecho nos permite aplicar otra vez la misma ecuación 4.14 al siguiente intervalo  $\Delta t$ . Los valores de  $A_1$  en el siguiente intervalo, están no correlacionados con los valores del intervalo previo, debido a la pequeñez de  $\tau_c$ . Entonces, la ecuación 4.14 es aproximadamente válida para todo tiempo, dado que  $\alpha\tau_c \ll 1$  y el promedio de  $u(t)$  obedece la ecuación diferencial ordinaria 4.14. Ahora, si suponemos además de  $\alpha\tau_c \ll 1$ , también

$$\tau_c |A_0| \ll 1, \quad (4.15)$$

esta condición adicional, dice que el movimiento libre de  $u$  es comparable con las fluctuaciones de  $A_1$ , entonces 4.14 se reduce a

$$\begin{aligned} \partial_t \langle u(t) \rangle &= [A_0 + \alpha \langle A_1 \rangle + \\ &+ \alpha^2 \int_0^\infty \langle\langle A_1(t) A_1(t-\tau) \rangle\rangle d\tau] \langle u(t) \rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Debido a que la integral anterior, no depende del tiempo, se observa que el efecto de las fluctuaciones es el de renormalizar  $A_0$  mediante la adición de un término constante de orden  $\alpha^2$  a ella misma. El término adherido es la función de autocorrelación integrada de  $A_1$ . En particular, si uno tiene un sistema no disipativo descrito por  $A_0$ , el término adicional debido a las fluctuaciones es usualmente disipativo.

## 4.2 Momentos superiores

Para calcular momentos más altos de los componentes de  $u$ , dejamos ser a  $u = \{u_\nu\}$  un vector con  $n$  componentes reales el cual obedece 4.1 y más explícitamente la ecuación

$$\partial_t u_\nu = \sum_{\lambda=1}^n A_{\nu\lambda}(t) u_\lambda \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \quad (4.17)$$

Entonces los productos  $u_\nu u_\lambda$  obedecen otra vez una ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} \partial_t (u_\nu u_\mu) &= \sum_{\lambda} A_{\nu\lambda}(u_\lambda u_\mu) + \sum_{\lambda} A_{\mu\lambda}(u_\nu u_\lambda) \\ &\equiv \sum_{\lambda\theta} A_{\nu\mu;\lambda\theta}(u_\lambda u_\theta), \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$A_{\nu\mu;\lambda\theta}(t) = A_{\nu\lambda}(t)\delta_{\mu\theta} + A_{\mu\theta}(t)\delta_{\nu\lambda}$$

Entonces sus promedios obedecen ecuaciones de movimiento similares a 4.14. Para escribirla explícitamente vamos a considerar los  $\frac{1}{2}n(n+1) = N$  productos  $u_\nu u_\mu$  como componentes de un vector  $u_a$  por lo que 4.19 toma la forma

$$\partial_t u_a = \sum_{b=1}^N A_{ab}(t) u_b \quad (a = 1, 2, \dots, N) \quad (4.19)$$

Finalmente, haciendo  $A(t) = A_0 + \alpha A_1(t)$ , obtenemos

$$\partial_t \langle u_\alpha \rangle = [A_0 + \alpha \langle A_1(t) \rangle +$$
(4.20)

$$\alpha^2 \int_0^\infty \langle \langle A_1(t) \mathcal{U}(t) \mathcal{U}^{-1}(t-\tau) A_1(t-\tau) \rangle \rangle \mathcal{U}(t-\tau) d\tau] \mathcal{U}^{-1}(t) \langle u_\alpha \rangle .$$

De donde se observa que 4.21 es una extensión a momentos superiores de la ecuación 4.14

## Capítulo 5

# Calentamiento inducido por ruido en trampas atómicas

En el Capítulo 2 se demostró que la evolución de un oscilador paramétrico cuántico puede obtenerse en términos de la solución de las ecuaciones clásicas correspondientes. En el capítulo anterior vimos algunas técnicas para estudiar el comportamiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales estocásticas. Ahora utilizaremos estos resultados para analizar el comportamiento esperado para un oscilador armónico cuántico y estocástico.

### 5.1 Variaciones Estocásticas de la Posición de Equilibrio.

Las ecuaciones 2.10 relacionan a las funciones  $\lambda$  que definen al operador de evolución 2.8 con la función  $\varepsilon_q(t)$  que especifica la posición de equilibrio de un oscilador armónico en el tiempo. Una vez obtenido el operador de evolución, éste se puede aplicar de la forma acostumbrada a cualquier estado u operador, para así obtener la evolución de cualquier cantidad física. Si la forma de la función dependiente del tiempo,  $\varepsilon_q(t)$ , es estocástica, estaremos interesados en calcular el comportamiento de promedios sobre las diferentes realizaciones de estas variables. Los tiempos de evolución  $T$  se considerarán grandes comparados con los tiempos de correlación. Si estamos en un regimen en que el ruido  $\varepsilon_q$  pueda considerarse estacionario

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_q(t)\varepsilon_q(t+\sigma) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T dt' \varepsilon_q(t')\varepsilon_q(t'+\sigma) \\ &= \eta_q(|\sigma|) \end{aligned} \quad (5.1)$$

y de promedio cero,

$$\langle \varepsilon_q(t) \rangle = 0, \quad (5.2)$$

al calcular el valor promedio para la energía, encontramos

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \varepsilon(0) + \pi m \omega_0^4 S_q(w_0), \quad (5.3)$$

donde se introdujo el espectro de fluctuaciones en la posición de la posición de equilibrio dentro de la trampa dado por

$$S_q(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\sigma \cos(w\sigma) \eta_q(|\sigma|), \quad (5.4)$$

[7] Esta expresión coincide por la encontrada por Savard *et al.* [27].

## 5.2 Variaciones Estocásticas en la frecuencia

En el capítulo 2 se mostró que para un oscilador con frecuencia dependiente del tiempo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2(1 - \varepsilon(t))q^2, \quad (5.5)$$

la evolución del operador de energía definido como

$$\hat{E}(t) = \hbar\omega_0 \hat{U}^{-1}(t_0, t) [a^\dagger a + 1/2] \hat{U}(t_0, t), \quad (5.6)$$

estaba dada por

$$\mathcal{E}(t) = \hbar\omega_0 \{ (1 + 2|M_2|^2)(a^\dagger a + 1/2) - M_1 M_2 a^{\dagger 2} - M_1^* M_2^* a^2 \}. \quad (5.7)$$

Aquí, 2.26 es:

$$M_1 = \frac{1}{2}[(h_1 - ih_2) - (\dot{h}_2 + ih_1)], \quad (5.8)$$

$$M_2 = \frac{1}{2}[-(h_1 - ih_2) - (\dot{h}_2 + ih_1)]$$

y  $\{h_1, h_2\}$  son soluciones de la ecuación clásica

$$\ddot{h}_i = -(1 - \varepsilon(t))h_i, \quad i = 1, 2 \quad (5.9)$$

con condiciones a la frontera:

$$\begin{aligned} h_1(0) &= 1, & \dot{h}_1(0) &= 0 \\ h_2(0) &= 0, & \dot{h}_2(0) &= -1 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Para simplificar el aspecto de las ecuaciones, en esta sección y las subsecciones siguientes reemplazamos derivaciones con respecto al tiempo por derivaciones respecto a la variable adimensional  $\omega_0 t$  de tal suerte que

$$j \equiv \frac{df}{d(\omega_0 t)}. \quad (5.11)$$

La expresión para la evolución cuántica de la energía en términos de las soluciones clásicas es válida para cualquier realización de la frecuencia  $\varepsilon(t)$ . Esto es, nuestras expresiones admiten la posibilidad de que

$$\begin{aligned} \varpi_T &= (1 + \varepsilon(t)) \\ &= (\varpi(t) + \lambda(t)) \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $\varpi^2$  es considerado no aleatoria y  $\lambda(t)$  es estocástica. Para evaluar el calentamiento producido por fluctuaciones en la frecuencia de un oscilador armónico cuántico necesitaremos entonces conocer la evolución temporal de los productos clásicos  $h_1 h_2$  en presencia de dichas fluctuaciones. Esta evolución se encuentra descrita por ecuaciones lineales con ruido multiplicativo por lo que procederemos a aplicar el formalismo presentado en la sección 4.2

### 5.3 Evolución de los productos $h_i h_j$

En el caso de los productos de funciones con distinta condición inicial, definiremos el vector  $u$  de componentes:

$$\begin{aligned} u_1 &= h_1 h_2 \\ u_2 &= \dot{h}_1 h_2 \\ u_3 &= h_1 \dot{h}_2 \\ u_4 &= \dot{h}_1 \dot{h}_2 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Utilizando las ecuaciones 2.21 y 4.18 se obtiene que,

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2 + u_3 \\ \dot{u}_2 &= -\omega_T^2 u_1 + u_4 \\ \dot{u}_3 &= -\omega_T^2 u_1 + u_4 \\ \dot{u}_4 &= -\omega_T^2 u_3 - \omega_T^2 u_2 \end{aligned} \quad (5.14)$$

De este último arreglo se deduce que

$$\dot{u} = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1)u \quad (5.15)$$

donde la matriz no estocástica  $\mathbf{A}_0$  es

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega^2 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

que puede descomponerse en la forma

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{a}_0 - \omega^2 \mathbf{a}_0^\dagger, \quad (5.17)$$

donde

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Mientras que la matriz estocástica  $\mathbf{A}_1$  tiene la forma

$$\mathbf{A}_1 = \lambda \mathbf{a}_0^\dagger. \quad (5.19)$$

Observamos que para cerrar el álgebra que se establece por la conmutación de  $\mathbf{a}_0$  y  $\mathbf{a}_0^\dagger$  hay que introducir a la matriz  $\mathbf{a}_z$

$$\mathbf{a}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

ya que con ella

$$[\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0^\dagger] = 2\mathbf{a}_z, \quad [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_z] = -\mathbf{a}_0, \quad [\mathbf{a}_0^\dagger, \mathbf{a}_z] = \mathbf{a}_0^\dagger. \quad (5.21)$$

Para el caso de productos de funciones  $h_i h_j$  que involucran la misma condición inicial definimos al vector  $u$  como

$$\begin{aligned} u_1 &= h_i h_i \\ u_2 &= \dot{h}_i h_i \\ u_3 &= \dot{h}_i \dot{h}_i \end{aligned} \quad (5.22)$$

con  $i = 1, 2$  y

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= 2u_2 \\ \dot{u}_2 &= -\omega^2 u_1 + u_3 \\ \dot{u}_3 &= -2\omega^2 u_2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Es decir, la matriz determinista es

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

es decir,

$$B_0 = b_0 - \omega^2 b_1 \quad (5.25)$$

donde el álgebra cerrada está dada ahora por

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.26)$$

ya que

$$[b_0, b_1] = 2b_2, \quad [b_2, b_0] = b_0, \quad [b_1, b_2] = b_1 \quad (5.27)$$

La matriz estocástica se escribe

$$B_1 = \lambda b_1 \quad (5.28)$$

Notamos que el álgebra que satisfacen  $\{a_0, a_0^\dagger, a_x, 1\}$  y  $\{b_0, b_1, b_2, 1\}$  es la misma. Siendo las expresiones de  $A_0$  y  $A_1$  y de  $B_0$  y  $B_1$  completamente análogas el tratamiento algebraico que apliquemos a cualquiera de los problemas  $h_i h_j$ ,  $i \neq j$  e  $i = j$  es equivalente.

## 5.4 Esquema de interacción

Según los resultados presentados en el capítulo anterior, el paso a seguir para resolver en forma aproximada la evolución del promedio estadístico de las funciones  $h_i h_j$  corresponde a plantear el problema en el esquema de interacción. Esto es, encontrar a la matriz  $\mathcal{U}(t_0, t)$  que satisface la ecuación

$$\dot{\mathcal{U}} = A_0 \mathcal{U} \quad \mathcal{U}(t_0, t_0) = 1 \quad (5.29)$$

Lo cual nos permitirá obtener una ecuación de evolución para el vector  $v$  definido por

$$u(t) = \mathcal{U}(t_0, t)v(t) \quad (5.30)$$

en la que no aparece  $A_0$ :

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \mathcal{U}^{-1}(t_0, t) A_1(t) \mathcal{U}(t_0, t) v \\ &\equiv \alpha V(t) v. \end{aligned} \quad (5.31)$$

### 5.5 Esquema de interacción para ( $\omega$ ) independiente del tiempo

Para el caso particular donde la frecuencia  $\omega = 1$ , es decir, la frecuencia no aleatoria es independiente del tiempo obtenemos directamente

$$\mathcal{U} = e^{A_0 \omega_0 t} \quad (5.32)$$

y el potencial  $V$  esta dado por [11]

$$\begin{aligned} V &= \mathcal{U}^{-1} A_1 \mathcal{U} \\ &= A_1 + \frac{(-\omega_0 t)}{1!} [A_0, A_1] + \frac{(-\omega_0 t)^2}{2!} [A_0, [A_0, A_1]] + \dots \end{aligned} \quad (5.33)$$

lo que resulta en

$$\begin{aligned} V &= \lambda \{ a_0^\dagger + \frac{(-\omega_0 t)}{1!} [2a_x] + \frac{(-\omega_0 t)^2}{2!} (2)[-a_0 - \omega^2 a_0^\dagger] \\ &+ \frac{(-\omega_0 t)^3}{3!} (-2)^3 \omega^2 a_x + \frac{(-\omega_0 t)^4}{4!} (-2)^3 \omega^2 [-a_0 - \omega^2 a_0^\dagger] + \dots \} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Usando  $\omega = 1$  se llega a

$$\begin{aligned} V &= \lambda \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\omega_0 t)^{2n-1} (-1)^n}{(2n-1)!} a_x + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\omega_0 t)^{2n}}{(2n)!} [a_0 + \omega^2 a_0^\dagger] + a_0^\dagger \right\} \\ &= \lambda \{ a_0^\dagger - \text{sen}(2\omega_0 t) a_x + \frac{1}{2} [\cos(2\omega_0 t) - 1] [a_0 + \omega^2 a_0^\dagger] \} \\ &= \lambda \{ a_0^\dagger - \text{sen}(2\omega_0 t) a_x - \text{sen}^2 \omega_0 t [a_0 + a_0^\dagger] \} \end{aligned} \quad (5.35)$$

### 5.6 Esquema de interacción para ( $\omega(t)$ ) dependiente del tiempo

Para el caso donde la frecuencia  $\omega(t)$  es dependiente del tiempo, se propone una solución

$$\mathcal{U} = e^{-\zeta_1 a_0^\dagger} e^{-\zeta_0 a_0} e^{-\zeta_x a_x} \quad (5.36)$$

cuya condición inicial tiene que ser

$$\mathcal{U}(t_0, t_0) = 1 \quad (5.37)$$

o lo que es lo mismo

$$\zeta_0(t_0) = \zeta_1(t_0) = \zeta_x(t_0) = 0. \quad (5.38)$$

Así, para encontrar  $\zeta_0$ ,  $\zeta_1$  y  $\zeta_x$ , sustituimos al operador 5.36 en 5.29 y resolvemos el sistema de ecuaciones restante. Al resolver este sistema usamos la identidad 5.33, para obtener

$$\begin{aligned} e^{-\zeta_1 a_0^\dagger} a_0 e^{\zeta_1 a_0^\dagger} &= a_0 + 2\zeta_1 a_x - \zeta_1^2 a_0^\dagger \\ e^{-\zeta_x a_x} a_0 e^{\zeta_x a_x} &= e^{-\zeta_x a_x} a_0 \\ e^{-\zeta_0 a_0} a_0^\dagger e^{\zeta_0 a_0} &= a_0^\dagger - 2\zeta_0 a_x - \zeta_0^2 a_0 \\ e^{-\zeta_x a_x} a_0^\dagger e^{\zeta_x a_x} &= e^{\zeta_x a_x} a_0^\dagger \\ e^{-\zeta_0 a_0} a_x e^{\zeta_0 a_0} &= a_x + \zeta_0 a_0 \\ e^{-\zeta_1 a_0^\dagger} a_x e^{\zeta_1 a_0^\dagger} &= a_x - \zeta_1 a_0^\dagger \end{aligned} \quad (5.39)$$

Ecuaciones en todo análogas se obtienen para el caso  $h_i h_s$  simplemente reemplazando  $a_i$  por  $b_i$ . En ambos casos,

$$\begin{aligned} -\dot{\zeta}_0 - \dot{\zeta}_s \zeta_0 &= 1 \\ -\dot{\zeta}_0 - \dot{\zeta}_1^2 + \dot{\zeta}_s \zeta_1 &= -\omega^2 \\ 2\zeta_1 - \dot{\zeta}_s &= 0 \end{aligned} \quad (5.40)$$

y llegamos a

$$\begin{aligned} -\dot{\zeta}_0 - 2\zeta_1 \zeta_0 &= 1 \\ -\dot{\zeta}_1 + \dot{\zeta}_1^2 &= -\omega^2 \\ 2\zeta_1 &= \dot{\zeta}_s \end{aligned} \quad (5.41)$$

De donde vemos que la ecuación diferencial para  $\zeta_1$  tiene la forma de Ricatti. De hecho al escribir

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= -\frac{\ln g_1}{d\omega_0 t} \\ &= -\frac{\dot{g}_1}{g_1} \end{aligned} \quad (5.42)$$

resulta que

$$\ddot{g}_1 + \omega^2 g_1 = 0. \quad (5.43)$$

Esto es  $g_1$  satisface la ecuación clásica del oscilador armónico en ausencia de fluctuaciones. La condición a la frontera adecuada es

$$\dot{g}_1(t_0) = 0 \quad (5.44)$$

Adicionalmente de 5.41 se cumple que

$$\zeta_s = -2\ln \frac{g_1}{g_1(t_0)} \quad (5.45)$$

La ecuación restante para  $\zeta_0$  puede llevarse a la forma

$$\dot{\zeta}_0 + 2\frac{\dot{g}_1}{g_1} \zeta_0 = 1, \quad \zeta_0(t_0) = 0 \quad (5.46)$$

que tiene como solución

$$\zeta_0 = g_1 g_2 \quad (5.47)$$

con  $g_2$  también solución de la ecuación 5.43 pero condiciones a la frontera

$$g_2(t_0) = 0, \quad \dot{g}_2(t_0) = -1 \quad (5.48)$$

siempre y cuando

$$g_1(t_0) = 1. \quad (5.49)$$

Para mostrar la validez de esto hay que tomar en cuenta que siendo  $g_1$  y  $g_2$  soluciones de la ecuación 5.43, su wronskiano es constante y con estas condiciones a la frontera

$$\dot{g}_1 g_2 - g_1 \dot{g}_2 = 1. \quad (5.50)$$

Observamos que  $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_s$  tienen una forma muy semejante a la dada por las ecuaciones 2.28. A continuación se obtendrán los operadores de evolución  $\mathcal{U}_{3 \times 3}$  y  $\mathcal{U}_{4 \times 4}$  donde el  $3 \times 3$  involucra solamente a

los términos  $h_i h_i$  y el  $4 \times 4$  solo términos  $h_i h_j$ . Estos operadores se resultan de desarrollar en potencias de las matrices  $a_i$  y  $b_i$ , las cuales cumplen operaciones semejantes dadas por

$$b_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

$$b_x^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_x^{2n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

dado que  $b_0^n = 0$  y  $b_1^n = 0$  para  $n \geq 3$ .

Consecuentemente, expandiendo en series las exponenciales de 5.29 y sustituyendo las ecuaciones anteriores, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{3 \times 3} &= (1 - \zeta_1 b_1 + \frac{\zeta_1^2}{2} b_1^2)(1 - \zeta_0 b_0 + \frac{\zeta_0^2}{2} b_0^2) \cdot \\ &\cdot ((\cosh \zeta_x - 1) b_x^{2n} - \operatorname{senh} \zeta_x b_x^{2n-1} + 1). \end{aligned} \quad (5.53)$$

explícitamente,

$$\mathcal{U}_{3 \times 3}(t) = \begin{pmatrix} g_1^2 & -2g_1 g_2 & g_2^2 \\ g_1 \dot{g}_1 & -g_1 \dot{g}_2 - g_2 \dot{g}_1 & \dot{g}_2 g_2 \\ \dot{g}_1^2 & -2\dot{g}_1 \dot{g}_2 & \dot{g}_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.54)$$

mientras que

$$\mathcal{U}_{4 \times 4}(t) = \begin{pmatrix} g_1^2 & -g_1 g_2 & -g_1 g_2 & g_2^2 \\ g_1 \dot{g}_1 & -g_1 \dot{g}_2 & -g_2 \dot{g}_1 & \dot{g}_2 g_2 \\ g_1 \dot{g}_1 & -g_2 \dot{g}_1 & -g_1 \dot{g}_2 & \dot{g}_2 g_2 \\ \dot{g}_1^2 & -\dot{g}_1 \dot{g}_2 & -\dot{g}_1 \dot{g}_2 & \dot{g}_2^2 \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

Estas expresiones para  $\mathcal{U}_{4 \times 4}$  y  $\mathcal{U}_{3 \times 3}$  podrían haberse obtenido directamente al recordar que deben conectar a la solución general de un sistema de ecuaciones lineales de segundo orden con sus dos soluciones particulares. Sin embargo, tanto para facilitar desarrollos algebraicos posteriores, como para resaltar la semejanza de los resultados del capítulo 2 con los de este capítulo hemos escrito  $\mathcal{U}$  en términos de productos de exponenciales de los elementos del álgebra.

Estas expresiones para las matrices  $\mathcal{U}$  permiten encontrar a la matriz de interacción  $\mathbf{V}$  en el esquema de interacción. Explícitamente, para los términos  $h_i h_i$ ,

$$\mathbf{V}_{3 \times 3} = \lambda(t)[g_1^2 b_1 + g_1 g_2 b_x - g_1^2 b_0] \quad (5.56)$$

y para los  $h_i h_j$ ,

$$\mathbf{V}_{4 \times 4} = \lambda(t)[g_1^2 a_1 + g_1 g_2 a_x - g_1^2 a_0] \quad (5.57)$$

## 5.7 Solución perturbativa para describir el calentamiento

Una vez conocido el operador  $\mathcal{U}$  que lleva a la representación de interacción aplicando directamente el formalismo de la sección 4.1 obtenemos la expresión perturbativa. Regresando de la representación de interacción a la variable  $u$ , tenemos

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \mathcal{U}(t)a + \mathcal{U}(t)\alpha \int_{t_0}^t dt_1 \langle \lambda(t_1) \rangle \mathbf{V}(t_1)\alpha \\ &+ \mathcal{U}(t)\alpha^2 \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt_1 \langle \langle \lambda(t_1)\lambda(t_2) \rangle \rangle \mathbf{V}(t_1)\mathbf{V}(t_2)\alpha. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Si ahora definimos la integral:

$$I_{lk}^{mn}(t) = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \langle \lambda(t_1) \lambda(t_2) \rangle g_l(t_1) g_k(t_1) g_m(t_2) g_n(t_2). \quad (5.59)$$

donde los cuatro índices  $l, k, m, n$  pueden valer 1 o 2, (números que denotan las dos soluciones independientes de la ecuación de Mathieu).

En forma explícita resulta

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt_1 \langle \lambda(t_1) \lambda(t_2) \rangle \mathbf{V}(t_1) \mathbf{V}(t_2) \mathbf{a} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 - 2I_{22}^{11} + 4I_{12}^{12} & -4I_{12}^{22} & 2I_{22}^{22} \\ 2I_{11}^{22} & 1 - 2(I_{11}^{22} + I_{22}^{11}) & 2I_{22}^{12} \\ 2I_{11}^{11} & -4I_{12}^{11} & 1 - 2I_{11}^{22} + 4I_{12}^{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.60)$$

para el caso tridimensional y

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_2 \int_0^{t_1} dt_1 \langle \lambda(t_1) \lambda(t_2) \rangle \mathbf{V}(t_1) \mathbf{V}(t_2) \mathbf{a} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 - 2I_{22}^{11} + 4I_{12}^{12} & -2I_{12}^{22} & -2I_{12}^{22} & 2I_{22}^{22} \\ 2I_{11}^{22} & 1 - I_{11}^{22} - I_{12}^{11} & -I_{11}^{22} - I_{22}^{11} & 2I_{22}^{12} \\ 2I_{11}^{12} & -I_{11}^{22} - I_{22}^{11} & 1 - I_{11}^{22} - I_{22}^{11} & 2I_{22}^{12} \\ 2I_{11}^{11} & -2I_{12}^{11} & -2I_{12}^{11} & 1 - 2I_{11}^{22} + 4I_{12}^{12} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.61)$$

en el caso cuadrimensional. Si suponemos que el promedio estadístico del ruido es cero

$$\langle \lambda(t) \rangle = 0 \quad (5.62)$$

obtenemos la expresión para la energía promedio

$$\bar{\mathcal{E}}(t) = \hbar \omega_0 \{ (1 + 2|M_2|^2)(a^\dagger a + 1/2) - M_1 M_2 a^{12} - M_1^* M_2^* a^2 \} \quad (5.63)$$

con

$$\begin{aligned} |M_2|^2 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} [g_1^2 + \dot{g}_1^2 + g_2^2 + \dot{g}_2^2] + \\ &- 2 [g_1^2 + \dot{g}_1^2] [I_{22}^{11} - 2I_{12}^{12} - I_{22}^{22}] + \\ &- 4 [g_1 g_2 + \dot{g}_1 \dot{g}_2] [I_{11}^{12} + I_{22}^{12}] + \\ &- 2 [g_2^2 + \dot{g}_2^2] [I_{11}^{22} - 2I_{12}^{12} - I_{11}^{11}] \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} M_1 M_2 &= \frac{1}{4} \left[ (g_1^2 + \dot{g}_1^2) (-1 + 2I_{22}^{11} - 4I_{12}^{12} + 2I_{22}^{22}) + \right. \\ &+ (g_2^2 + \dot{g}_2^2) (1 - 2I_{11}^{11} + 4I_{12}^{12} - 2I_{11}^{22}) + \\ &+ 4 (\dot{g}_1 \dot{g}_2 + g_1 g_2) (I_{11}^{12} - I_{22}^{12}) + \\ &\left. - 4i \left( (g_1^2 + \dot{g}_1^2) I_{12}^{22} + (g_2^2 + \dot{g}_2^2) I_{12}^{11} + \frac{1}{2} (\dot{g}_1 \dot{g}_2 + g_1 g_2) (1 - 2I_{11}^{22} - 2I_{22}^{11}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.65)$$

## 5.8 Calentamiento en trampas atómicas estáticas

En el caso de trampas atómicas como la de Penning el movimiento del centro de masa de los átomos es descrito en una primera aproximación por un potencial de oscilador armónico con frecuencia constante. En este caso tendremos

$$g_1 = \cos \omega_0 t, \quad \text{y} \quad g_2 = -\text{sen} \omega_0 t. \quad (5.66)$$

La expresión para la energía en función del tiempo toma una forma muy sencilla pues las ecuaciones 5.64 y 5.65 se simplifican a

$$\begin{aligned} |M_2|^2 &= \frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 < \lambda(t_1) \lambda(t_2) > [\cos(2\omega_0(t_2 - t_1))] \\ M_1 M_2 &= -\frac{1}{2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 < \lambda(t_1) \lambda(t_2) > e^{-2i\omega_0 t_1} \end{aligned} \quad (5.67)$$

Por simplicidad hemos elegido  $t_0 = 0$ . Nos restringimos por el momento al caso en que el ruido es estacionario

$$< \lambda(t_1) \lambda(t_2) > = \lambda_0 \Lambda(|t_1 - t_2|). \quad (5.68)$$

El factor  $\lambda_0$  nos da el orden de magnitud del ruido y denotaremos por  $\tau_c$  al tiempo de correlación. Utilizando los resultados del apéndice A obtenemos que en el caso  $\tau_c \ll t \ll \lambda_0^{-1}$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}(t) = \hbar \omega_0 & \left[ \begin{aligned} & (\alpha^\dagger \alpha + 1/2)(1 + t S_\lambda(2\omega_0)) \\ & + \alpha^{\dagger 2} \left( t S_\lambda(2\omega_0) - i \frac{\partial S_\lambda(2\omega_0)}{\partial 2\omega_0} \right) \\ & + \alpha^2 \left( t S_\lambda(2\omega_0) + i \frac{\partial S_\lambda(2\omega_0)}{\partial 2\omega_0} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

donde

$$S_\lambda(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\tau \cos(\omega\tau) \langle \lambda(t) \lambda(t - \tau) \rangle \quad (5.70)$$

El tiempo  $t$  debe satisfacer que  $t \ll \lambda_0^{-1}$  para garantizar la validez del régimen perturbativo en el que estamos trabajando. La expresión anterior se reduce a lo que se obtiene aplicando teoría de perturbaciones sobre eigenestados del oscilador armónico en presencia de ruido [23] así como con otros cálculos previos [4, 1]. El haberlo obtenido en términos de la evolución del operador de energía nos permite aplicarlo directamente a otros estados. Por ejemplo, para un estado coherente

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{\mathcal{E}}(t) | \alpha \rangle = \hbar \omega_0 & \left[ \begin{aligned} & (|\alpha|^2 + 1/2)(1 + t S_\lambda(2\omega_0)) \\ & + \alpha^{*2} \left( t S_\lambda(2\omega_0) - i \frac{\partial S_\lambda(2\omega_0)}{\partial 2\omega_0} \right) \\ & + \alpha^2 \left( t S_\lambda(2\omega_0) + i \frac{\partial S_\lambda(2\omega_0)}{\partial 2\omega_0} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (5.71)$$

Observamos que el calentamiento para estos estados depende no solo de la densidad espectral sino de su derivada temporal. Otro estado de interés corresponde a los estados de gato, para ellos la expresión del calentamiento coincide con la del estado coherente  $\alpha$  de tal suerte que aumenta al aumentar  $|\alpha|$  y con este la separación en espacio fase de los estados coherentes que están siendo superpuestos.

## 5.9 Calentamiento en trampas atómicas de radiofrecuencia

En este caso habíamos visto que la ecuación clásica de movimiento es

$$\ddot{z} = (U_0 + V_0 \cos \Omega t) (4z) (e/mR_0^2)$$

donde  $U_0$  y  $V_0$  representan los potenciales directo y alterno,  $R_0$  está determinado por las dimensiones de la trampa y,  $e$  y  $m$  corresponden al valor absoluto de la carga y a la masa del ion confinado. Al definir

$$a_z = -\frac{16eU_0}{m\Omega^2 R_0^2}$$

$$q_z = -\frac{8eV_0}{m\Omega^2 R_0^2}$$

podemos identificar a la frecuencia normalizada como:

$$\varpi^2(t) = \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} (a - 2b \cos(\Omega t)).$$

Las funciones  $g_i$  satisfacen entonces la ecuación de Mathieu y admiten ser expresadas en términos de funciones de Floquet:

$$g_1(t) = A_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n \cos(\mu + k\Omega t)$$

$$g_2(t) = A_2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n \sin(\mu + k\Omega t) \quad (5.72)$$

donde  $\mu$  es la frecuencia secular del sistema y las constantes  $A_1$  y  $A_2$  se eligen para satisfacer las condiciones de contorno de  $g_1$  y  $g_2$ , es decir,

$$A_1^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$$

$$A_2^{-1} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{\mu + k\Omega}{\omega_0} \quad (5.73)$$

Elegiremos la escala de frecuencias  $\omega_0$  tal que  $|A_1| = |A_2|$ , es decir

$$\omega_0 = \frac{|\sum c_k (\mu + k\Omega)|}{|\sum c_k|} \quad (5.74)$$

esto es,  $\omega_0$  se elige como el promedio de las frecuencias involucradas en las funciones de Mathieu con el peso específico  $c_k$  determinado por las mismas funciones.

Los cálculos son engorrosos pero directos. En ellos están involucrados dos clases de términos, aquellos presentes aún en ausencia de ruido  $\tilde{\mathcal{E}}_o(t)$  y los debidos directamente al ruido  $\tilde{\mathcal{E}}_\lambda(t)$ ,

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \dot{\mathcal{E}}_o(t) + \dot{\mathcal{E}}_\lambda(t). \quad (5.75)$$

El primero resulta estar dado por:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_0 &= \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2) \left( \frac{A_1^2}{2} \sum_{k,k'} c_k c_{k'} \cos(k-k')\Omega t \left[ 1 + \frac{\mu+k\Omega}{\omega_0} \frac{\mu+k'\Omega}{\omega_0} \right] \right) + \\
&+ \hbar\omega_0 \left( \frac{a^2 A_1^2}{4} \right) \left[ \left( \sum_k c_k e^{i(\mu+k\Omega)t} \right)^2 - \left( \sum_k c_k \frac{\mu+k\Omega}{\omega_0} e^{i(\mu+k\Omega)t} \right)^2 \right] + \\
&+ \hbar\omega_0 \left( \frac{a^2 A_1^2}{4} \right) \left[ \left( \sum_k c_k e^{-i(\mu+k\Omega)t} \right)^2 - \left( \sum_k c_k \frac{\mu+k\Omega}{\omega_0} e^{-i(\mu+k\Omega)t} \right)^2 \right]. \quad (5.76)
\end{aligned}$$

Su estructura refleja el hecho de que al tratarse de un oscilador paramétrico, la energía de éste va a cambiar con el tiempo. Recordemos que  $\hat{E}(t)$  fue evaluado como la evolución temporal del operador  $\hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2)$ .

El segundo término de la energía involucra a series infinitas de las densidades espectrales generalizadas  $\Sigma_\lambda(\omega, t)$  y sus derivadas. En el caso  $\tau_c \ll t \ll \lambda_0^{-1}$ , habrá términos oscilantes y términos crecientes en  $t$  asociados a resonancias (ver Apéndice A). Esperamos que estos últimos dominen sobre los primeros cuando los tiempos de medición  $t$  sean superiores al inverso de las frecuencias involucradas. Para una trampa de radiofrecuencia convencional esto corresponde a tiempos que superen la escala de microsegundos. En estas condiciones tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{E}_\lambda(t) &= \hbar\omega_0 \{ [g_1^2 + \dot{g}_1^2 + g_2^2 + \dot{g}_2^2] |\mathcal{M}_2|^2 \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \\
&+ [g_1^2 + \dot{g}_1^2 - g_2^2 - \dot{g}_2^2] \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 (a^{\dagger 2}) + \\
&+ [g_1^2 + \dot{g}_1^2 - g_2^2 - \dot{g}_2^2] \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2^* (a^2) \} \quad (5.77)
\end{aligned}$$

donde, el factor asociado al operador de número en la energía para tiempos largos comparados con el tiempo de correlación y los inversos de las frecuencias es,

$$|\mathcal{M}_2|^2(t) = \frac{1}{4} t \left\{ \sum_{l,m,r,k} C_{lmrk} \pi^2 \{ \mathcal{S}_\lambda(-2\mu - l - k) + \mathcal{S}_\lambda(2\mu + l + k) \} \delta_{+-+}^{lmrk} \right\} \quad (5.78)$$

mientras que el asociado a los operador  $a^{\dagger 2}$  es

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l,m,r,k} C_{lmrk} \left[ \frac{\pi^2}{4} \{ t \mathcal{S}_\lambda((l-m)\Omega) + \right. \right. \\
&+ t \mathcal{S}_\lambda(2\mu + (l+m)\Omega) \} (\delta_{---}^{lmrk} + \delta_{--+}^{lmrk}) - \mathcal{S}'_\lambda(2\mu + (l+m)\Omega) \delta_{+-+}^{lmrk} \right] + \\
&- t \sum_{l,m,r,k} C_{lmrk} \left( \frac{i}{2} \right) [2\mathcal{S}_\lambda((l+m)\Omega) (\delta_{---}^{lmrk} + \delta_{--+}^{lmrk}) - \mathcal{S}_\lambda(2\mu + (l+m)\Omega) \delta_{+-+}^{lmrk}] \} \quad (5.79)
\end{aligned}$$

aquí  $C_{lmrk} = c_l c_m c_r c_k$  y por ejemplo

$$\delta_{+-+}^{lmrk} = \delta((l+m) - (r+k))$$

Para las condiciones experimentales usuales el factor  $q$  que aparece en la ecuación de Mathieu par  $g_1$  y  $g_2$  es mucho menor que uno de tal suerte que

$$\begin{aligned}
g_1(t) &\approx A_1 \left[ \cos(\mu t) - \frac{q\Omega}{4} \left( \frac{\cos(\mu + \Omega t)}{2\mu + \Omega} \right) + \frac{q\Omega}{4} \left( \frac{\cos(\mu - \Omega t)}{2\mu - \Omega} \right) \right] \\
g_2(t) &\approx A_1 \left[ \sin(\mu t) - \frac{q\Omega}{4} \left( \frac{\sin(\mu + \Omega t)}{2\mu + \Omega} \right) + \frac{q\Omega}{4} \left( \frac{\sin(\mu - \Omega t)}{2\mu - \Omega} \right) \right] \quad (5.80)
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \mu &\approx \frac{|q|\Omega}{2\sqrt{2}} \\ \omega_0 &\approx \mu \left[ 1 + \frac{2q}{2-q} \right] \\ A_1 &\approx \frac{1}{\sqrt{\omega_0}} \left[ 1 - \frac{2q}{2-q} \right] \end{aligned} \quad (5.81)$$

La expresión para el calentamiento por ruido a este orden de aproximación es similar a la expresión clásica encontrada por Dehmelt [4], donde

$$|\mathcal{M}_2|^2 \sim \pi t \left( \frac{2-3q}{2-q} \right)^4 \Re \left\{ \Sigma_\lambda(t; 2\mu) + \frac{2\mu^2}{\Omega^2} [\Sigma_\lambda(t; \Omega + 2\mu) + \Sigma_\lambda(t; \Omega - 2\mu)] \right\} \quad (5.82)$$

donde en realidad, las densidades espectrales definidas en el apéndice A dejan de depender en el tiempo cuando los tiempos de medición son muy grandes comparados con el tiempo de correlación, y así, la densidad espectral es obtenida mediante una integración al infinito, en lugar de integrar solo hasta  $t$ . Las expresiones para los otros términos aproximados se obtienen directamente.

## Capítulo 6

# Discusión y conclusiones

En esta tesis hemos mostrado como calcular para un oscilador cuántico los efectos de calentamiento por presencia de fluctuaciones estocásticas tanto en la posición de equilibrio como en la frecuencia. La utilidad de resolver ecuaciones clásicas estocásticas para obtener predicciones cuánticas ha sido explícitamente mostrada.

### 6.1 Discusión

Conforme esta tesis se fue desarrollando, fueron expuestos algunos puntos que aún no quedan claros en la literatura acerca de la manipulación contemporánea de átomos en trampas de Paul. Uno de dichos malentendidos, es el hecho de que no han sido definidos aquí, (ni en la bibliografía usual) que debemos entender por estado base, (estado de vacío) para un potencial que depende del tiempo. Esto es importante puesto que, como se refiere en la citas [2, 6], existen reportes de haber logrado mantener un cierto número de átomos, (en particular mercurio, calcio y berilio), en su estado base mas del 95% del tiempo. Esto se torna confuso, puesto que si el potencial de atrapamiento, esta cambiando en el tiempo, es seguro que el estado base también. Para desenmarañar este asunto, lo que procede es resolver directamente la ecuación de Schrödinger

$$\hat{H}\Phi = i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (6.1)$$

con un Hamiltoniano  $\hat{H}$  dependiente del tiempo a través de algunos parámetros, (la frecuencia en nuestro caso) y un estado inicial dado. Este estado inicial puede ser elegido como la eigenfunción de algún hamiltoniano de referencia que se obtiene sustituyendo por constantes a los parámetros originalmente dependientes del tiempo, en nuestro caso

$$\hat{H}_{ref} = \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2). \quad (6.2)$$

Una opción natural en las trampas de Paul podría ser escoger a la frecuencia  $\omega_0$  como la frecuencia secular,  $\omega_0 = \mu$ . En este trabajo hemos elegido  $\omega_0$  como la frecuencia promedio del desarrollo de Floquet. De esta forma existen al menos dos opciones para el concepto de estado base. Una es el estado base del hamiltoniano de referencia la otra el estado que surge de la evolución temporal de este con el hamiltoniano dependiente del tiempo. Cabe señalar que el estado dependiente del tiempo  $\Phi$  será un estado comprimido del oscilador original 6.2. Estas ideas pueden extenderse directamente a otros estados de número.

Una vez aclarado este concepto cabe preguntarse como afectan, al sistema, las perturbaciones al estado base debidas al propio ruido. Una opción es trabajar en un esquema de interacción definido por el

hamiltoniano paramétrico sin ruido y el potencial estocástico. Avances en esta dirección fueron estudiados en [23]. La estrategia en esta tesis, correspondió a encontrar la forma del operador de evolución asociado al hamiltoniano dependiente del tiempo (Sección 5.6) admitiendo la opción de términos estocásticos en función de ecuaciones clásicas. La presencia de ruido convierte a estas en ecuaciones diferenciales estocásticas. Antes de calcular promedios, evaluamos explícitamente la evolución del hamiltoniano de referencia ante este operador de evolución estocástico. Después tomamos los promedios y el operador resultante nos permite evaluar el calentamiento definido en términos de los estados asociados al sistema de referencia. El problema algebraicamente más complicado surgió porque estos promedios involucraban a productos de funciones estocásticas.

La relevancia de este trabajo radica en la posibilidad de relacionar nuestros resultados con medidas experimentales. El mecanismo que se usa experimentalmente para caracterizar la fenomenología dentro de las trampas, consiste en manipular los estados internos y de vibración de los átomos confinados acoplándolos. Los estados resultantes son de la forma:  $\sum c_{int}^{(n)} |\phi\rangle_{int} |n\rangle$ . Consideremos el caso particular de átomos cuyos estados internos pueden considerarse con dos opciones viables que denotamos por  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . Por ejemplo, tomemos como punto de partida el estado  $|1\rangle \sum c_1^n |n\rangle$ . Se busca entonces conocer la población de cada estado vibracional  $|n\rangle$ . Al aplicar durante un tiempo  $\tau$  radiación a una frecuencia sobrada en  $\omega_0$  para realizar una transición resonante al estado interno de energía más alta  $|2\rangle$  (primera banda azul) el átomo realiza emisiones y absorciones inducidas en forma periódica (oscilaciones de Rabi) que involucran cambios entre los estados vibracionales  $n$  y  $n+1$ . Se mide entonces la probabilidad  $P_1(\tau)$  de estar en el estado interno  $|1\rangle$  al tiempo  $\tau$ . Para ello se usa un tercer estado conectado radiativamente con el estado  $|1\rangle$ . Mediante un láser adecuadamente polarizado se excita desde el primer nivel hacia el tercero. La desexcitación desde este tercer nivel solo se produce cuando el primer nivel está poblado originándose luminiscencia. De esta forma sabemos en que tiempo  $\tau$  está poblado el primer nivel. El experimento se repite varias veces para distintas  $\tau$ . Con esto, se obtiene experimentalmente la probabilidad  $P_1(\tau)$ , que se compara con la obtenida teóricamente dada por:

$$P_1(\tau) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} P_n e^{-\gamma_n \tau} \cos(2\Omega_{n+1,n} \tau) \right]. \quad (6.3)$$

Aquí  $P_n = |C_{1,n}|^2$  es la probabilidad de encontrar al ion en el estado  $|1\rangle |n\rangle$ . La constante fenomenológica de decaimiento  $\gamma_n$  se introduce para modelar la decoherencia que ocurre durante la aplicación de la frecuencia sobre la primera banda azul. La señal medida  $P_1(\tau)$  puede ser invertida (transformación coseno de Fourier), permitiéndonos extraer la distribución de probabilidad de vibración  $P_n$  para la ocupación.

En este trabajo, notamos que la dependencia en  $q$  conlleva a una dependencia inversamente proporcional de los efectos de ruido en la masa del átomo confinado. De tal forma que a mayor masa se espera un menor ruido. Esto podría justificar hasta cierto punto, los datos experimentales mostrados en la Tabla 1. Se observa que el calentamiento normalizado<sup>1</sup> es mucho menor en el calcio que en el berilio, lo que podría apoyar la idea de la dependencia en la masa. El calentamiento se mide a partir del tiempo en el que se apagan los láseres de confinamiento, y se deja evolucionar el sistema que está en este punto en su estado base. El número de estado vibracional comienza a elevarse linealmente, desde el estado base, según lo observado por mediciones hechas de los estados internos del átomo, los cuales fueron previamente enredados con los estados vibracionales. El ruido o interacción con el medio ambiente, al que son expuestos dichos átomos, va entonces calentando al sistema.

Por otra parte, la aproximación secular conlleva que los términos del desarrollo de Floquet dependientes de  $q$  5.80 se eliminen. Las correcciones que pueden escribirse como desarrollo en potencias de

<sup>1</sup> Este tipo de escalamiento se efectúa para poder comparar trampas esféricas y lineales, de berilio y de calcio. Se escala la razón de calentamiento con la frecuencia de la trampa  $\omega_T^{-1}$  y se calcula  $\dot{N}$  (calentamiento) a 1 MHz.

$q$  para la energía quedan excluidas. No así en el presente estudio. Esto en principio nos acerca más a la comparación experimental. Teniendo esto en mente, se intentó calcular los valores de  $q$  para algunas de las trampas mostradas en la Tabla 1. Desgraciadamente existen algunas inconsistencias en los reportes experimentales que impiden especificar cuales fueron los parámetros utilizados para el voltaje de radiofrecuencia y las frecuencias seculares. Por ejemplo, en algunos casos estas tienen un factor de  $2\pi$  intrínseco y en otros no [2, 6]. Por otra parte, los reportes experimentales mencionan que los efectos del ruido en las trampas parecieran depender de la cuarta potencia de la distancia característica ( $d$ ) desde el centro de la trampa hasta uno de sus lados (en dirección radial). En la Tabla 1 también se aprecia que para cambios considerables en la  $d$  no corresponden cambios considerables en el ruido normalizado. Es más, el ruido varía de manera aparentemente independiente, de trampa a trampa y no parece estar relacionado con  $d$ . En nuestros cálculos se muestra que además de la dependencia explícita en  $q$ , los efectos de ruido están sujetos a variaciones debidas a cambios en las densidades espectrales  $S_\lambda(\omega)$ . La cual depende no sólo de la trampa en si misma sino de los arreglos que se hayan realizado al hacer el montaje experimental global. Desafortunadamente los valores y escalas de la densidad espectral no esta siendo reportado en la mayor parte de los artículos. Una excepción es el trabajo [18] en que se menciona que las densidades espectrales pueden variar desde 3dB entre 9 MHz y 11.5 MHz producto de ruido en la amplitud del campo eléctrico, hasta entre 1kHz y 100kHz debido a fluctuaciones en la frecuencia de oscilación del campo. Sin embargo, esta información es insuficiente para extraer conclusiones claras respecto a la comparación detallada de nuestros resultados con los experimentos.

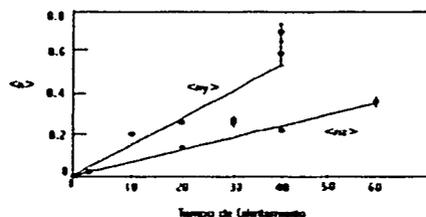


Figura 6.1: Medidas experimentales de calentamiento para modos radiales y vibratoriales a 4 y 2 MHz, respectivamente. Se observa 1 fonón en 190 ms para el modo axial, y 1 fonón cada 70 ms en el modo radial. (ver [6])

Ion y Trampa	distancia $d$ ( $\mu$ m)	Modo	frecuencia (MHz)	Calentamiento (fonones/s)	Calentamiento normalizado (para 1 MHz)
$^{40}\text{Ca}^+$ , lineal	1180	radial	1.9	25(19)	47(20)
$^{40}\text{Ca}^+$ , esférica	700	radial	1.9	14	27
$^9\text{Be}^+$ , esf. #2	175	c.o.m. (x)	8.6	$19000^{+40000}_{-13000}$	$160000^{+340000}_{-111000}$
$^9\text{Be}^+$ , esf. #3	395	c.o.m.	1.4-3.4	varia	5000
$^9\text{Be}^+$ , lin. #4	280	c.o.m.	3-17	varia	23000
$^9\text{Be}^+$ , lin. #6	280	c.o.m.	3-10	varia	35000
$^9\text{Be}^+$ , lin. #5	365	c.o.m.	3.5-10	varia	11000
$^{198}\text{Hg}^+$ , esf.	450	c.o.m.	3	6	18

Tabla: Parámetros de funcionamiento de diversas trampas y modos (ver [6])



## 6.2 Conclusión

Se han resuelto dos tipos de ruido, ruido en la posición de equilibrio (ruido aditivo anteriormente tratado) y ruido en la frecuencia de oscilación del campo. Al resolver la parte de ruido en la frecuencia, se está resolviendo un tipo de ruido al que se le llama multiplicativo, ya que multiplica a la función incógnita de la ecuación diferencial. A diferencia de lo comúnmente tratado en la bibliografía, (ruido aditivo o ruido que se suma como un término independiente dentro de la ecuación diferencial), el ruido que fue más profundamente tratado en esta tesis, es de una complejidad mayor y por lo tanto resuelve casos que han sido poco inspeccionados hasta ahora. Las nuevas expresiones para el calentamiento, aquí encontradas son las que corresponden a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_{\lambda}(t) = & \hbar\omega_0 \{ [g_1^2 + \dot{g}_1^2 + g_2^2 + \dot{g}_2^2] |\mathcal{M}_2|^2 \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \\ & + [g_1^2 + \dot{g}_1^2 - g_2^2 - \dot{g}_2^2] \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_2 (a^{\dagger 2}) + \\ & + [g_1^2 + \dot{g}_1^2 - g_2^2 - \dot{g}_2^2] \mathcal{M}_1^* \mathcal{M}_2^* (a^2) \} \end{aligned}$$

Ecuación que expresa la dependencia del calentamiento con los operadores cuánticos y que fue obtenida con razonamientos clásicos.

Un punto a resaltar es que los experimentos citados, son congruentes con la idea de quedarnos solo con los términos de ruido que tienen resonancia, (en la ecuación 5.78), ya que el calentamiento es medido en escalas de milisegundos (dependiendo de la trampa). En nuestros cálculos, para esas trampas los términos no resonantes ya comienzan a ser despreciables en la escala de microsegundos. Experimentalmente el calentamiento aumenta en forma aproximadamente lineal con el tiempo (ver figura 6.1 y referencia [33]).

Observamos que los resultados de este trabajo de tesis, extienden las predicciones teóricas de Dehmelt al marco cuántico a través de los factores de la energía dependientes de  $a^2$  y  $a^{\dagger 2}$  cuya apariencia puede ser vista en la ecuación 5.78 donde se incluyen solo los términos de resonancia, mismos que serán notorios para tiempos largos.

## 6.3 Lo que puede hacerse en el futuro

Para un futuro análisis del ruido, utilizando por ejemplo ecuaciones del tipo de Langevin para las correlaciones, hay que tomar en cuenta factores que podrían llevarnos a un abuso de utilidad de dicha ecuación ya previsto por [29]. Dado un ruido externo, (como en este caso), no todas las fuerzas que actúan sobre un sistema, pueden ser separadas en dos partes independientes una estocástica y otra determinista. Para estar seguro si la fuerza que actúa sobre un sistema con ruido interno, puede ser dividida en fuerza aleatoria y fuerza determinista, hay que garantizar que el problema tenga una ley fenomenológica lineal. Como aquí ya lo hemos mencionado, este problema en particular es lineal debido a el álgebra peculiar en la que intervienen  $a$  y  $a^\dagger$ . La solución numérica en términos del desarrollo de cumulantes debe ser realizada lo antes posible para comparar con los cálculos perturbativos analíticos aquí expuestos.

Se propone asimismo trabajar en detalle la solución en cumulantes y su comparación con la solución perturbativa que aquí trabajamos en detalle. La primera involucra en general un tratamiento numérico mientras que la segunda admitió una solución analítica para los casos de nuestro interés.

Así como se tratan las fluctuaciones que se presentan en la frecuencia de oscilación del campo eléctrico y en la posición de equilibrio de los iones, es también recomendable extender los análisis de ruido a otros factores tales como aspectos aleatorios en la fase de los láseres que confinan, ya que en acuerdo con [2], estos podrían también ser notorios.

## Apéndice A

# Densidades Espectrales

Dada la función de autocorrelación de una función estocástica  $\lambda(t)$ , definamos la densidad espectral generalizada mediante la igualdad

$$\Sigma_{\lambda}(t; \omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\tau e^{i\omega\tau} \langle \lambda(t') \lambda(t' - \tau) \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Para el caso estacionario

$$\langle \lambda(t') \lambda(t' - \tau) \rangle = \lambda_0 \Lambda(\tau) \quad (\text{A.2})$$

se satisface la condición  $\Sigma_{\lambda}^*(t; \omega) = \Sigma_{\lambda}(t; -\omega)$  para  $\Lambda(\tau)$  real. La constante  $\lambda_0$  establece el orden de magnitud del ruido. Tenemos además que  $\Lambda(\tau) = \Lambda(|\tau|)$ ,

$$\Re \Sigma_{\lambda}(t; \omega) = \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_{-t}^t d\tau e^{i\omega\tau} \Lambda(\tau). \quad (\text{A.3})$$

En nuestro caso, la variable estocástica tiene unidades de frecuencia. Llamemos  $\tau_{\lambda}$  al tiempo de correlación de  $\lambda(t)$  y restrinjámonos al caso en que el factor de Kubo  $\lambda_0 \tau_c \ll 1$ . Si  $\tau_{\lambda} \ll t$  podemos hacer la siguiente identificación

$$\Sigma_{\lambda}(t; \omega) \rightarrow S_{\lambda}(\omega) - \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{S_{\lambda}(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (\text{A.4})$$

donde  $S_{\lambda}(\omega)$  es la densidad espectral ordinaria dada por

$$S_{\lambda}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau) \langle \lambda(t) \lambda(t - \tau) \rangle \quad (\text{A.5})$$

Con el fin de evaluar la evolución temporal de las correlaciones de las funciones  $h_i h_j$  del capítulo 5, es necesario conocer el comportamiento de las integrales  $I_{ik}^{mn}$  5.59.

Tanto para trampas estáticas como para trampas de radiofrecuencia, las soluciones  $g_i$  asociadas al problema clásico sin ruido involucran desarrollos en funciones trigonométricas de tal suerte que  $I_{ik}^{mn}$  es una combinación de integrales  $\mathcal{I}(\alpha, \beta; t)$  definidas por

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta; t) = \frac{\lambda_0}{\pi} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' \Lambda(|t' - t''|) e^{i\alpha t'} e^{i\beta t''}. \quad (\text{A.6})$$

Cambiando la variable de integración  $t''$  por  $\tau = t' - t''$ , se sigue que

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta; t) = \frac{\lambda_0}{\pi} \int_0^t dt' e^{i(\alpha+\beta)t'} \int_0^{t'} d\tau e^{-i\beta\tau} \Lambda(\tau). \quad (\text{A.7})$$

Realizando una integral por partes resulta

$$\mathcal{I}(\alpha, \beta; t) = \frac{e^{i(\alpha+\beta)t}}{i(\alpha+\beta)} \Sigma_\lambda(t; -\beta) - \frac{1}{i(\alpha+\beta)} \Sigma_\lambda(t; \alpha) \quad (\text{A.8})$$

para  $\alpha + \beta \neq 0$ . Mientras que en el caso  $\alpha + \beta = 0$ , correspondiente a una resonancia, se obtiene el resultado

$$\mathcal{I}(-\beta, \beta; t) = \pi t \Sigma_\lambda(t; -\beta) - i\pi \frac{\partial}{\partial \beta} \Sigma_\lambda(t; \beta) \quad (\text{A.9})$$

Esto lleva a que en el límite  $\tau_c \ll t$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\alpha, \beta; t) &\rightarrow \frac{e^{i(\alpha+\beta)t}}{i(\alpha+\beta)} \mathcal{S}_\lambda(\beta) - \frac{1}{i(\alpha+\beta)} \mathcal{S}_\lambda(\alpha) \\ \mathcal{I}(-\beta, \beta; t) &\rightarrow t \mathcal{S}_\lambda(\beta) - i \frac{\partial}{\partial \beta} \mathcal{S}_\lambda(\beta) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

## Apéndice B

# Atrapar iones en tres dimensiones

En un campo eléctrico cuadrupolar el potencial es cuadrático en coordenadas cartesianas en analogía con 1.1 .

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) \quad (\text{B.1})$$

Por otra parte, la ecuación de Laplace dice que  $\Delta\phi = 0$ , por lo que se concluye que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ . Para satisfacer esta condición se tienen dos caminos.

- $\alpha = 1 = -\gamma$ ,  $\beta = 0$  resulta en un campo bidimensional dado por

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2r_0^2} (x^2 - z^2) \quad (\text{B.2})$$

- $\alpha = \beta$ ,  $\gamma = -2$  lo que genera una configuración tridimensional que en coordenadas cilíndricas se ve así

$$\Phi = \frac{\Phi_0 (r^2 - 2z^2)}{r_0^2 + 2z_0^2} \quad (\text{B.3})$$

con  $r_0^2 = 2z_0^2$ .

# Bibliografía

- [1] B. W. King, D. J. Wineland, C. R. Monroe, D. M. Meekhof, *Science*, **272**:1131, 1996.
- [2] H. Rohde, Ch. Roos, Th. Zeiger, *Phys. Rev. Lett.*, **83**(23): 4713, 1999.
- [3] C. W. Gardiner, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Alemania, 1991.
- [4] H. G. Dehmelt, *Adv. At. Mol. Phys.*, **3**: 53, (primera y segunda parte), 1967.
- [5] G. Gabrielse, *Phys. Rev. Lett.*, **82**:3198, 1999.
- [6] C. F. Roos, H. Rohe, S. T. Gulde, *arXiv:quant-Ph/0009031-1*, pp 15, 2000.
- [7] R. Jáuregui, *Phys. Rev. A*, **64**(5):3408-1, 2001.
- [8] A. J. Leggett, *Rev. of Mod. Phys.*, **73**:307, 2001.
- [9] L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York, segunda edición , pp 21-25, 1956.
- [10] V. Mayer, M. A. Rowe. D. Kielpinski, et al , *Nature*, **409**: 791, 2001.
- [11] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, pp 39, tercera edición, 1998.
- [12] L. Chuang, M. Nielsen. *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, primera edición , pp 386, 2001.
- [13] F. Moss, *Noise in nonlinear dynamical systems*, Cambridge University Press, primera edición, 1989.
- [14] R. Lopez-Peña, O. Castaños, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25**:6685, 1992.
- [15] V. Man'ko, O. Castaños, R. Lopez-Peña, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **27**: 1751, 1994.
- [16] R. Lopez- Peña, J. Requier, V. I. Man'ko, O. Castaños, R Jáuregui, *Phys. Rev. A*, **55**(2): 1208, 1997.
- [17] P. R. Weiss, P. W. Anderson, *Rev. of Mod. Phys.*, **25**: 269, 1953.
- [18] Q. A. Turchette, et al , *Phys Rev. A*, **62**(5):3807, 2000.
- [19] V. I. Arnold *Mathematical Methods of Classical Mechanics* Segunda Edición pp 88 1991
- [20] P. A. Quinto, *Gatos de Schrodinger en Trampas de Paul*, Tesis de licenciatura, UNAM , Directora: R. Jáuregui, 1999.
- [21] J. Wei y E. Norman, *Proc. Am. Math. Soc.* **15**, 327K 1964

- [22] R. Thompson, *AIP Conference Proceedings* **464**, *Latin American School of Physics XXXI ELAF*, editado por S. Hacyan, R. Jáuregui, R. Lopez-Peña, pp. 111, 1999.
- [23] S. Hacyan, R. Jáuregui, (enviado a publicación).
- [24] K. R. Vogel, S. A. Diddams, T. H. Udem, *Science*, **293**: 825, 2001.
- [25] H. Sakaguchi, *arXiv:cond-mat/0108998*, 2001.
- [26] J. Plata, S. Brouard, *Phys. Rev. A*, **63**(4):3402, 2001.
- [27] J. E. Thomas, T. A. Savard, K. M. O'Hara, *Phys. Rev. A*, **56**:R1095, 1997.
- [28] D. Kielpinski, V. Mayer, M. A. Rowe, et al, *Phys. Rev. Lett.*, **28**:58, 2001.
- [29] N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, Amsterdam, 1981.
- [30] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag .
- [31] M. Muñoz, W. Genovese, *arXiv: cond-mat/9812200*, 1999.
- [32] W. Paul, *Rev. Mod. Phys.*, **62**(3):531, 1990.
- [33] F. Diedrich, J. C. Bergquist, Wayne M. Itano, and D. J. Wineland, *Phys. Rev. Lett.*, **62**(4):403, 1989.