52

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LOGICA MEDIEVAL EXPLICADA POR EULER, ANTECEDENTE DE LA LOGICA FORMAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

JOSE VILLANUEVA LEDESMA

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2002

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNOMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Lógica Medieval explicada por Euler, antecedente de la lógica formal.

realizado por José Villanueva Ledesma

con número de cuenta 05909936-3, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Rafael Rojas Barbachano	RRB.
Propietario	Dr. Oscar Falcón Vega	
Propietario	Dr. Carlos Torres Alcaráz	
Suplente	M. en C. Alejandro Bravo Mojica	A Bravo
Suplente	Mat. Guillermo Zambrana Castañeda	

Consejo Departamental de

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Dedico esta tesis a

ANA MARÍA EGAN GÓMEZ

cuyo bienhechor amor me ha dado alientos durante

más de medio siglo.

LÓGICA MEDIEVAL EXPLICADA POR EULER ANTECEDENTE DE LA LÓGICA FORMAL

ÍNDICE

LÓGICA MEDIEVAL EULERIANA 2

RELACIONES ENTRE LOS JUICIOS 5

SILOGISMOS CATEGÓRICOS 7

ANÁLISIS DE VALIDEZ DE LA

PRIMERA FIGURA 9

SEGUNDA FIGURA 12

TERCERA FIGURA 15

CUARTA FIGURA 17

RESUMEN DE LOS SILOGISMOS VÁLIDOS 21

CONCEPTOS GENERALES 38

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA BOOLEANA 41

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS BÁSICOS DE UN ÁLGEBRA BOOLEANA 44

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS 54

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA FORMAL 60

CONSECUENCIAS 78

CARDINALIDAD 83

LAS PARADOJAS 96

ESBOZO HISTÓRICO 101

BIBLIOGRAFÍA 110

Introducción

En los apuntes biográficos de la excelente obrita, Leonhard Euler: Reflexiones sobre el espacio y la materia, publicada por Alianza Editorial Mexicana y la Secretaría de Educación Pública, la brillante comentarista y traductora Ana Rioja nos informa que Friederich Heinrich Von Brandenburg-Shwedt, padre de Friederike Charlotte Ludovica Luise, futura princesa de Anhalt-Dessau y sobrina del rey de Prusia, atentamente le solicita a Leonhard Euler que se encargue de la instrucción de su hija de 15 años. Benevolente el gran maestro condesciende y desde Berlín, le escribe en francés 234 cartas a su joven alumna. La finalidad de esas cartas es instruir a una princesa de la Casa Real con poquísimos conocimientos, por lo cual se debe capacitar para intervenir con cierto grado de lucimiento en las reuniones de personajes de la corte, donde se discutian temas científicos y filosóficos. Consecuentemente, además de ser variadísimos los temas, había que exponerlos con excepcional sencillez y simplicidad, por lo cual destaca la extraordinaria capacidad didáctica de tan egregio preceptor.

Las cartas que Euler le envía a la princesa entre abril y noviembre de 1760 se refieren a temas de acústica, óptica y mecánica. Durante algunos meses interrumpe la exposición de asuntos de la física para ocuparse de cuestiones filosóficas entre las que se considera la obligada teoría del silogismo, materia que no podría faltar porque aún en los días que corren la lógica tradicional, es factible punto de impulso natural en las investigaciones de la lógica actual, además de que ha sido fundamento intelectual en gran parte del pensamiento científico y filosófico europeo.

Indudablemente, la indiscutible gloria de Aristóteles radica en el asombroso descubrimiento de poder inferir la verdad de la afirmación A a partir de otras afirmaciones H1, H2,..., Hn, que conducen NECESARIAMENTE a la afirmación A sin ninguna clase de asistencia ni consideración empírica. Magna conquista del pensamiento humano es el hallazgo de la VERDAD NECESARIA, procediendo mediante una sucesión de enunciados de modo que cada uno de ellos es enunciado primitivo, o bien, directamente derivable de uno o más enunciados que lo preceden en la sucesión.

Es la revelación de una de las más íntimas características del ser humano: el razonamiento deductivo que consiste en serie de pasos intelectuales enlazados entre sí de modo que el último deriva NECESARIAMENTE del primero, es un ordenado encadenamiento de evidencias sin necesidad de efectuar observaciones del comportamiento del mundo, ni realizar experimentación alguna.

Esta es la herencia que dejó el descubrimiento (o invención) del extraordinario talento del gran Aristóteles, herencia para todos los hombres y para todos los tiempos. Tesoro que recibió la humanidad del gran Estagirita y que ningún otro filósofo ha podido igualar. Nace la lógica en Grecia y años más tarde culmina en Alejandría como refulgente joya, a la cual ahora le damos el nombre de Geometría Euclidiana, despuntando así la primeras luces del método axiomático.

No se ha publicado en toda su plenitud la teoría del silogismo desde el punto de vista de Leonhard Euler. La maestra L. Susan Stebbin en su INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA MODERNA, publicada por le FONDO DE CULTURA ECONÓMICA ofrece una pista de la cual se infiere esta TESIS, con el objetivo de mostrar el magnífico nivel didáctico de la forma mediante la cual expone Euler la teoría medieval del silogismo categórico, con el propósito de geometrizar la lógica aristotélica para transformarla de lógica de términos en LÓGICA DE CLASES, preludio de su FORMALIZACIÓN.

LÓGICA MEDIEVAL EULERIANA

- Objeto es todo lo que puede aceptar un predicado cualquiera, lo que puede ser SUJETO de un juicio, sin importar que lo nombrado exista o no, basta que se pueda afirmar algo de ello, por esto PEGASO es un objeto.
- Predicado es lo que se dice del sujeto.
- El juicio consiste en la atribución de un predicado a un sujeto. Todo juicio es una afirmación positiva si afirma: S es P, o negativa si niega: S no es P. El juicio es la estructura lógica fundamental en la lógica tradicional.
- El razonamiento es una sucesión ordenada de juicios de acuerdo con ciertas reglas que dan lugar a la conclusión.

Los elementos del juicio son:

1. El término sujeto, se indica con la letra S y representa al objeto a que el juicio se refiere.
2. El término predicado, se indica con la letra P y representa lo que el juicio afirma de S.
3. La cópula que atribuye el predicado P al sujeto S; además de su función enlazadora asevera positivamente; S es P, o negativamente: S no es P.

Tradicionalmente se reconocen cuatro formas de ser del juicio, de las que dependen sus posibles operaciones, estas formas son:

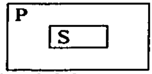
1. LA CUALIDAD: Juicios afirmativos S es P y juicios NEGATIVOS S no es P.
2. LA CANTIDAD: de acuerdo con su extensión los juicios son UNIVERSALES, todo S es P y juicios PARTICULARES, algunos S son P.
3. LA RELACIÓN: juicios CATEGÓRICOS, HIPOTÉTICOS Y DISYUNTIVOS.
   Los categóricos son independientes de toda condición.
   Los hipotéticos están sujetos a una condición previa externa al juicio: Si S, entonces P es un paradigma no puede dividirse.
   Los disyuntivos son juicios condicionados donde la condición funciona dentro de la predicación: S es P o es Q.
4. LA MODALIDAD: clasifica a los juicios respecto a su forma de realización, efectiva, posible o necesaria. En el primer caso son los juicios ASERTÓRICOS, en el segundo son los PROBLEMÁTICOS y en el tercero son los APODÍCTICOS.

AFIRMACIONES CATEGÓRICAS.

Tanto la cualidad como la cantidad varian independientemente; combinados ambos puntos de vista dan lugar a las AFIRMACIONES CATEGÓRICAS, cuyo análisis prepara el camino para el estudio de los SILOGISMOS CATEGÓRICOS. Hay cuatro formas de afirmaciones categóricas que en seguida se explican.

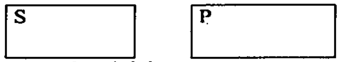
1. Todos los S son P. Esta afirmación significa que todo elemento x de S es elemento de P, su negación es: existe un elemento x de S que NO es elemento de P, esto es, S es la representante de CUALQUIER TIPO DE OBJETOS porque la determinación objetiva de sus elementos carece de interés, esto mismo se aplica a P, consecuentemente S y P son conjuntos o clases abstractas a las cuales EULER las representa mediante un conjunto rectangular de puntos interiores. De acuerdo con esta explicación, el diagrama

euleriano de la afirmación, todos los S son P es la siguiente figura o diagrama euleriano.



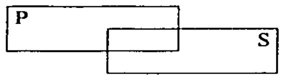
Este tipo de afirmaciones constituye los juicios UNIVERSALES AFIRMATIVOS y para referirse a ellos se utiliza la letra A.

2. Ningún S es P. Esta afirmación significa que todo elemento de S no es elemento de P; su esquema euleriano es:



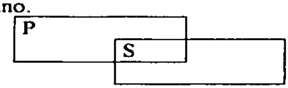
Este tipo de afirmaciones son los juicios UNIVERSALES NEGATIVOS a los que se designa con la vocal E.

3. Algunos S son P, son juicios PARTICULARES AFIRMATIVOS, indicados con la letra I, cuyo diagrama euleriano es:



Cuyo significado es que por lo menos existe un elemento x de S que también es elemento de P, por lo cual se observa que los juicios I son CONTRADICTORIOS a los juicios E, esto es, los juicios I son la negación de los juicios E.

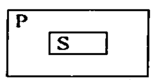
4. Algunos S no son P. Son los juicios PARTICULARES NEGATIVOS donde se declara que existe por lo menos un elemento x de S que no es elemento de P, se denotan con la vocal O. Se observa que son los CONTRADICTORIOS de los juicios A. En seguida se muestra su diagrama euleriano.



EXTENSIÓN o DISTRIBUCIÓN

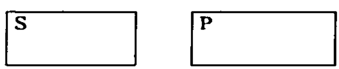
En afirmación categórica, un término está extendido o DISTRIBUIDO si de él se asevera algo acerca de TODOS los elementos del conjunto que el término indica.

En una afirmación A:

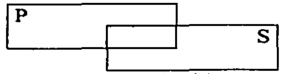


Todos los S son P, el sujeto S se encuentra distribuido, el predicado P no está distribuido.

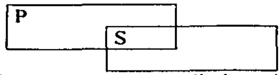
En una afirmación E:



Ningún S es P, ambos, sujeto y predicado están distribuidos.
En una afirmación I:

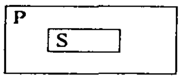
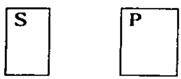
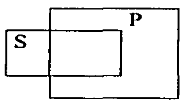
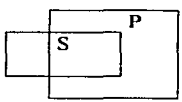


Algunos S son P, ningún término está distribuido.
En la afirmación O:



Algunos S no son P, significa que todo P es distinto de algunos S, por consiguiente el predicado P está distribuido y el sujeto S no lo está.

Lo expuesto se resume en la siguiente

		TABLA DE DISTRIBUCIONES	
		DISTRIBUIDO	**NO DISTRIBUIDO**
A		SUJETO	PREDICADO
E		SUJETO Y PREDICADO	ϕ
I		ϕ	SUJETO Y PREDICADO
O		PREDICADO	SUJETO

REGLA 1: En las UNIVERSALES, el sujeto está distribuido
REGLA 2: En las NEGATIVAS, el predicado está distribuido.

RELACIONES ENTRE LOS JUICIOS

1. Dos juicios son CONTRADICTORIOS cuando refiriéndose a su situación idéntica, salvo en la cantidad, uno afirma lo que el otro niega. Los juicios A son contradictorios de los O. Los juicios E son contradictorios de los I.
2. Dos juicios son CONTRARIOS si ambos son universales y uno afirma lo que el otro niega.
3. Dos juicios son SUBCONTRARIOS si ambos son particulares y uno afirma lo que el otro niega, así los juicios I son subcontrarios de O.
4. Dos juicios son SUBALTERNOS, cuando la misma cualidad y distinta cantidad, poseen el mismo predicado; esta relación no es recíproca, así el juicio universal es el subordinante del particular el subordinado, por ejemplo, todo S es P subordina al juicio algunos S son P. Análogamente ningún S es P subordina al juicio algunos S no son P.

Tradicionalmente este cuadro sintetiza las relaciones de los juicios considerados desde los puntos de vista de la cualidad y la cantidad.

CONOCIMIENTO INTUITIVO

Durante la Edad Media, el reconocimiento del hombre como imagen viva de ΔIOS, conduce al origen divino de los poderes humanos en cuanto son imágenes de los poderes divinos, por consiguiente el hombre tiene la capacidad del CONOCIMIENTO INSTANTÁNEO, derivado de un acto simple y perfecto de la inteligencia, mediante el cual se aprehende la esencia de todos los seres y sus más intimas relaciones ordenadas en cadenas causales, todo apresado, asido simultánea e instantáneamente. El hombre es potencialmente un vidente de los PRINCIPIOS ÚLTIMOS; es un ser APTO para CAPTARLOS inmediatamente, tal como ΔIOS los formuló desde antes que el mundo fuera.

San Pablo, en su conocida primera epistola a los corintios, en el capitulo 13 dedicado al elogio de la caridad en los versículos 8, 9, 10 y 12, afirma:

8. La *caridad nunca deja de ser: más las profecias se han de acabar y cesarán las lenguas y la ciencia ha de ser quitada.*
9. Porque en parte conocemos y en parte profetizamos.
10. Mas cuando venga lo que es perfecto, entonces lo que es en parte será quitado.

12. Ahora vemos por espejo, en obscuridad mas entonces VEREMOS CARA A CARA: ahora conozco en parte; mas entonces conoceré como SOY CONOCIDO.

Esta posible forma de conocimiento subyace en las profundidades subconscientes aún en los fundadores de la nueva ciencia: Leonardo, Copérnico, Kepler y Galileo Galilei, matizado su pensamiento de cierto pitagorismo, aseveran que el procedimiento matemático de la ciencia se justifica porque la Naturaleza en su más intimo ser tiene estructura matemática tal como lo expresa Galileo: los caracteres con los que está escrito el gran libro de la Naturaleza son triángulos, círculos, etc.

Nuestro poeta nayarita, Amado Nervo, persuadido por el canto de San Pablo en fecha tan reciente como el 3 de noviembre de 1916, en plena edad moderna nos dice:

Murieron los QUIÉN, SABE,
callaron los QUIZÁ.
El corazón es copa de amor, en donde cabe
todo el divino vino que la esperanza da.
No ignora ya la nave
qué rumbo seguirá,
ni desconoce el ave,
donde su nido está.
Murieron los quién sabe
callaron los quizá.
¡Oh misterioso y suave
AMANECER: no habrá
sombra que menoscabe
tus explendores ya!
Cuando una luz acabe
otra se encenderá

Dentro del alma grave
murieron los QUIEN SABE
callaron los QUIZÁ

Escuchemos ahora la voz del esclarecido poeta sevillano Don Antonio Machado (1875-1939)

Anohe, cuando dormía,
soñé, ¡bendita ilusión!,
que una fontana fluía
dentro de mi corazón.
Di, ¿por qué acequia, escondida
agua, vienes hasta mi,
manantial de nueva vida
en donde nunca bebí?

Anoche, cuando dormía,
soñé, ¡bendita ilusión!
que una colmena tenía
dentro de mi corazón;
y las doradas abejas

iban fabricando en él,
con las amarguras viejas,
blanca cera y dulce miel.

Anoche, cuando dormía,
soñé, ¡bendita ilusión!,
que un ardiente sol lucía
dentro de mi corazón.
Era ardiente porque daba
calores de rojo hogar,
y era sol porque alumbraba
y porque hacía llorar

Anoche, cuando dormía,
soñé, ¡bendita ilusión!,
que era ΔIOS lo que tenía
dentro de mi corazón.

Indudablemente, la intensidad musical de esta poesía severa y escueta induce una secreta emoción. Contrasta este punto de vista con el del ilustre Kepler, quien describe el Sol como "el único cuerpo que, en virtud de su dignidad y poder, parece a propósito para mover los planetas en sus órbitas, y digno de convertirse en la morada del propio ΔIOS, por no decir en el primer motor".

Kepler mira hacia fuera, Machado hacia dentro. Este enigmático oscilar entre macrocosmos y microcosmos define la posición de la filosofía en el sistema de la cultura, así la filosofía cual nuevo Jano tiene dos caras: una mira a la Justicia y el Arte y la otra hacia la Ciencia; con una cara considera el conjunto de la realidad, con la otra el carácter teórico.

La filosofía es un intento del espíritu humano con la finalidad de alcanzar una concepción del Mundo y del valor de la vida, mediante la autorreflexión sobre sus funciones valorativas teóricas y prácticas. El hombre esencialmente es un espíritu cognoscente. Las notas esenciales de toda filosofía son la orientación hacia la totalidad de los objetos y su carácter racional.

SILOGISMOS CATEGÓRICOS

No obstante esa posible forma de conocer, ciertamente hay el conocimiento DISCURSIVO que procede derivando conclusiones de premisas mediante sucesivos y concatenados enunciados afirmativos o negativos, universales o particulares; es el razonamiento DEDUCTIVO cuyo majestuoso ejemplo es la MATEMÁTICA, uno de los más grandes dominios de saber, instrumento imprescindible para el estudio del comportamiento del macrocosmos y el microcosmos.

Los silogismos categóricos son argumentos compuestos de dos afirmaciones categóricas llamadas PREMISAS, de las que se CONCLUYE NECESARIAMENTE otra afirmación categórica: la CONCLUSIÓN. Cada afirmación categórica tiene dos términos, pero el silogismo categórico sólo tiene tres, porque uno de los términos de las premisas ocurre dos veces, esto es, UNA SOLA VEZ en cada premisa, al cual se le da el nombre de TÉRMINO MEDIO y se indica con la letra M.

Cada uno de los otros dos términos figuran en la conclusión y son los TÉRMINOS EXTREMOS, pero en la conclusión no se encuentra el término medio; el predicado de la conclusión es el EXTREMO MAYOR o brevemente el MAYOR. Obviamente el sujeto de la conclusión es el EXTREMO MENOR o simplemente el MENOR. La premisa que contiene al extremo mayor es la PREMISA MAYOR y la que encierra al extremo menor es la PREMISA MENOR.

CUATRO FIGURAS CLÁSICAS

Las distintas formas del silogismo se llaman figuras y se deben a las distintas posiciones del término medio. Son CUATRO las posibles posiciones del término medio en el silogismo como se muestran en la siguiente figura:

M es C	C es M	M es C	C es M
B es M	B es M	M es B	M es B

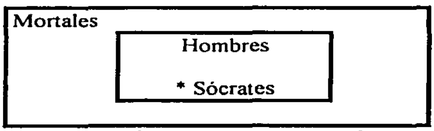
=

M	C	C	M	M	C	C	M
B	M	B	M	M	B	M	B
1ª fig.		2ª fig.		3ª fig.		4ª fig.	

- En la primera figura el término medio es sujeto en la premisa mayor y predicado en la menor.
- En la segunda figura el término medio es predicado en ambas premisas.
- En la tercera figura el término medio es sujeto en ambas premisas.
- En la cuarta figura el término medio es predicado en la premisa mayor y sujeto en la menor.

Ejemplo:
Todo hombre es mortal
Sócrates es hombre
.: Sócrates es mortal

Su diagrama Euleriano es:



En este ejemplo el término medio es HOMBRE, el extremo mayor es MORTAL, el extremo menor es SÓCRATES, por consiguiente el silogismo es de la primera figura; desde el punto de vista euleriano es una trivialidad.

Con las distintas formas de premisas se pueden formar 16 posibles parejas de acuerdo con la tabla que a continuación se presenta:

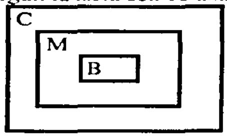
	A	E	I	O
A	AA	AE	AI	AO
E	EA	EE	EI	EO
I	IA	IE	II	IO
O	OA	OE	OI	OO

Cada pareja representa un tipo de silogismo y como hay cuatro figuras de acuerdo con la posición del término medio, en total resultan 64 posibles silogismos categóricos, 16 por figura; se analizará cada uno mediante su respectivo diagrama euleriano y de esta investigación se obtendrán las formas válidas de cada figura. Con estos diagramas se sustituye la lógica de términos por la lógica de CLASES, paso indispensable para su FORMALIZACIÓN.

ANÁLISIS DE VALIDEZ DE LA PRIMERA FIGURA

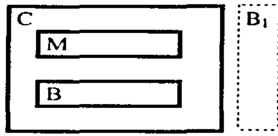
Según la tabla son 16 análisis

A	M	C	Todo M es C
A	B	M	Todo B es M
A	B	C	.: Todo B es C



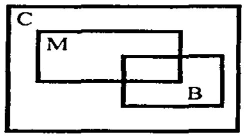
En la lógica tradicional este silogismo se llama **BÁRBARA**

A	M	C	Todo M es C
E	B	M	Ningún B es M



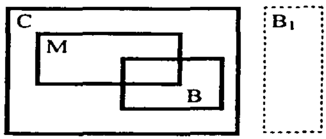
Este silogismo es inválido, Hay conclusiones contradictorias

A	M	C	Todo M es C
I	B	M	Algunos B son M
I	B	C	Algunos B son C



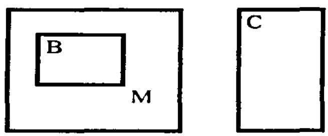
Tradicionalmente este Silogismo se llama **DARII**

A	M	C	Todo M es C
0	B	M	Algunos B no son M



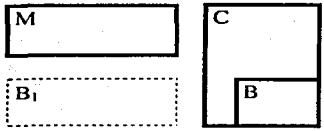
Silogismo inválido, hay conclusiones contradictorias

E	M	C	Ningún M es C
A	B	M	Todos los B son M
E	B	C	Ningún B es C



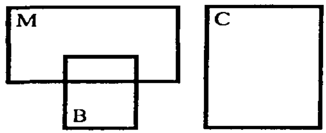
Tradicionalmente este Silogismo se llama **CELÁRENT**

E	M	C	Ningún M es C
E	B	M	Ningún B es M



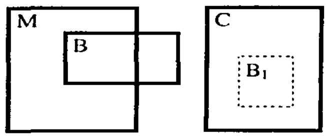
Inválido, hay conclusiones contradictorias

E	M	C	Ningún M es C
I	B	M	Algunos B son M
O	B	C	Algunos B no son C



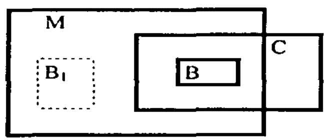
Tradicionalmente este Silogismo se llama **FERIO**

E	M	C	Ningún M es C
O	B	M	Algunos B no son M



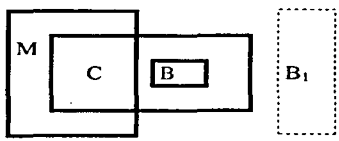
Inválido, hay conclusiones contradictorias

I	M	C	Algunos M son C
A	B	M	Todos los B son M



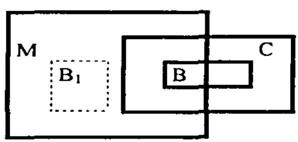
Inválido, hay conclusiones contradictorias

I	M	C	Algunos M son C
E	B	M	Ningún B es M



Inválido, hay conclusiones contradictorias

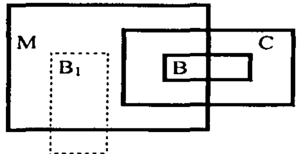
I	M	C	Algunos M son C
I	B	M	Algunos B son M



Inválido, hay conclusiones contradictorias

I	M	C
O	B	M

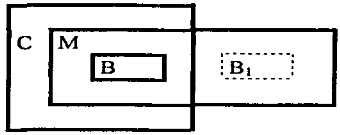
Algunos M son C
Algunos B no son M



Inválido, hay conclusiones contradictorias

O	M	C
A	B	M

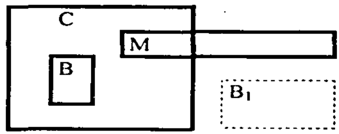
Algunos M no son C
Todos los B son M



Inválido, hay conclusiones contradictorias

O	M	C
E	B	M

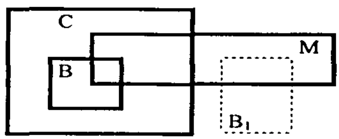
Algunos M no son C
Ningún B es M



Inválido, hay conclusiones contradictorias

O	M	C
I	B	M

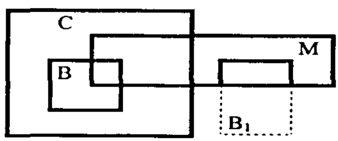
Algunos M no son C
Algunos B son M



Inválido, hay conclusiones contradictorias

O	M	C
O	B	M

Algunos M no son C
Algunos B no son M



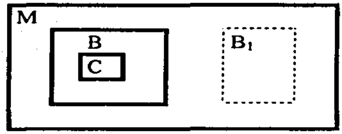
Inválido, hay conclusiones contradictorias

ANÁLISIS DE VALIDEZ DE LA SEGUNDA FIGURA

La tabla de posibilidades de la primera figura es válida para la segunda figura, así son 16 análisis

A	C	M	Todos los C son M
A	B	M	Todos los B son M

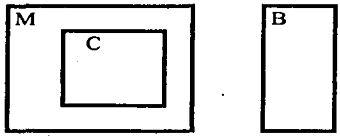
No hay conclusión



Este silogismo es inválido.

A	C	M	Todos los C son M
E	B	M	Ningún B es M
E	B	C	Ningún B es C

Algunos B no son C

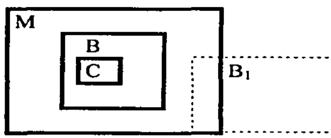


En la lógica tradicional este silogismo se llama **CAMESTRES**

La conclusión Ningún B es C implica que algunos B no son C, es conclusión menos general. Hay quienes les llama de modos DEBILITADOS O SUBORDINADOS y los considera triviales.

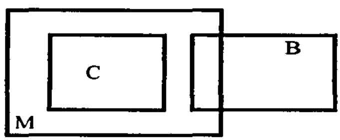
A	C	M	Todos los C son M
I	B	M	Algunos B son M

No hay conclusión



Este silogismo es inválido

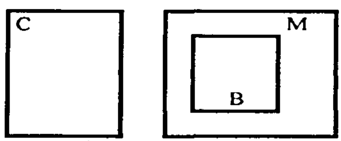
A	C	M	Todos los C son M
O	B	M	Algunos B no son M
O	B	C	Algunos B no son C



En la lógica tradicional este silogismo se llama **BAROCO**

E	C	M	Ningún C es M
A	B	M	Todos los B son M
E	B	C	Ningún B es C

Algunos B no son C

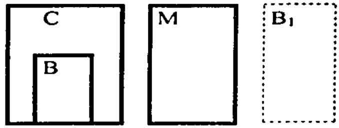


En la lógica tradicional este silogismo se llama **CESARE**

La conclusión subordinada se considera trivial.

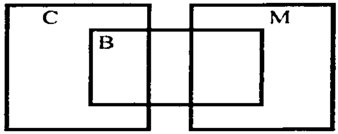
E	C	M	Ningún C es M
E	B	M	ningún B es M

No hay conclusión



Este silogismo es inválido

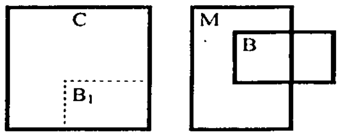
E	C	M	Ningún C es M
I	B	M	Algunos B son M
O	B	C	Algunos B no son C



En la lógica tradicional este silogismo se llama **FESTINO**

E	C	M	Ningún C es M
O	B	M	Algunos B no son M

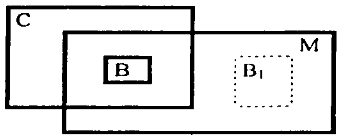
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

I	C	M	Algunos C son M
A	B	M	Todos los B son M

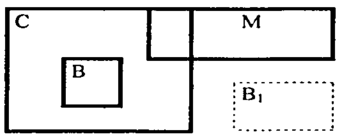
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

I	C	M	Algunos C son M
E	B	M	Ningún B es M

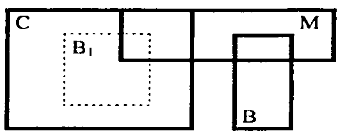
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

I	C	M	Algunos C son M
I	B	M	Algunos B son M

No hay conclusión

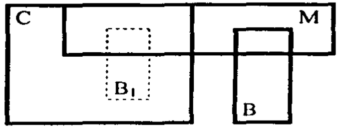


Este silogismo es inválido

I	C	M
O	B	M

Algunos C son M
Algunos B son M

No hay conclusión

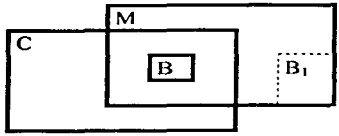


Este silogismo es inválido

O	C	M
A	B	M

Algunos C no son M
Todos los B son M

No hay conclusión

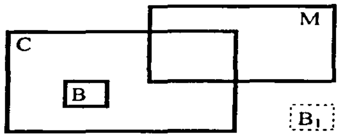


Este silogismo es inválido

O	C	M
E	B	M

Algunos C no son M
Ningún B es M

No hay conclusión

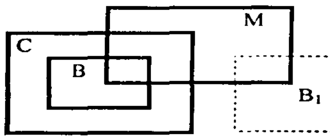


Este silogismo es inválido

O	C	M
I	B	M

Algunos C no son M
Algunos B son M

No hay conclusión

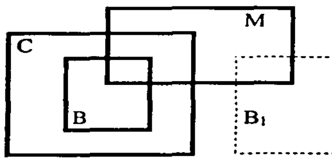


Este silogismo es inválido

O	C	M
O	B	M

Algunos C no son M
Algunos B no son M

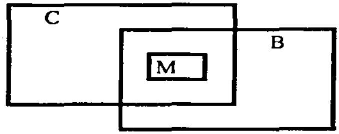
No hay conclusión única



Este silogismo es inválido

ANÁLISIS DE LA TERCERA FIGURA.
SON 16 POSIBILIDADES

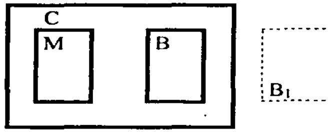
A	M	C	Todos los M son C
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



Este silogismo en la lógica tradicional se llama **DARAPTI**

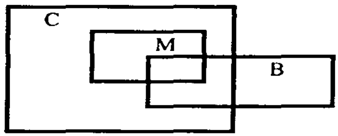
A	M	C	Todos los M son C
E	M	B	Ningún M es B

No hay conclusión



Este silogismo es inválido

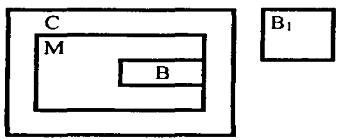
A	M	C	Todos los M son C
I	M	B	Algunos M son B
I	B	C	Algunos B son C



Este silogismo en la lógica tradicional se llama **DATISI**

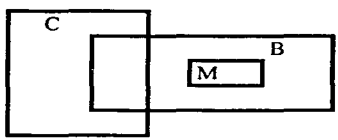
A	M	C	Todos los M son C
O	M	B	Algunos M no son B

No hay conclusión



Este silogismo es Inválido

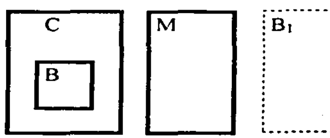
E	M	C	Ningún M es C
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C



Este silogismo en la Lógica tradicional se llama **FELAPTON**

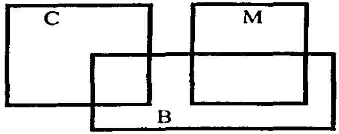
E	M	C	Ningún M es C
E	M	B	Ningún M es B

No hay conclusión



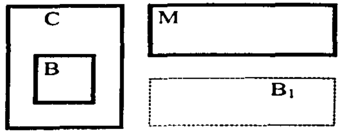
Este silogismo es inválido

E	M	C	Ningún M es C
I	M	B	Algunos M son B
O	B	C	Algunos B no son C



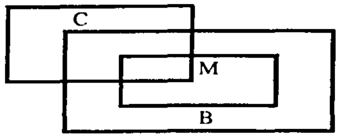
Este silogismo en la lógica tradicional se llama **FERISON**

E	M	C	Ningún M es C
O	M	B	Algunos M no son B



Este silogismo es inválido

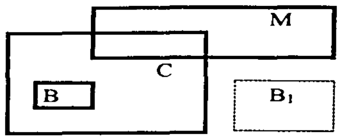
I	M	C	Algunos M son C
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



Este silogismo en la lógica tradicional se llama **DISAMIS**

I	M	C	Algunos M son C
E	M	B	Ningún M es B

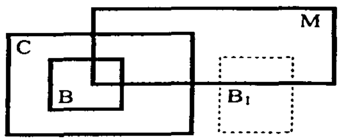
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

I	M	C	Algunos M son C
I	M	B	Algunos M son B

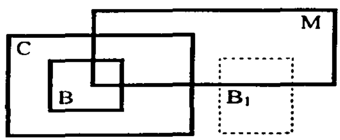
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

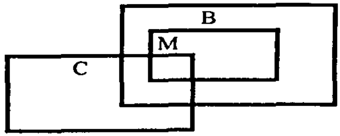
I	M	C	Algunos M son C
O	M	B	Algunos M no son B

No hay conclusión



Este silogismo es inválido

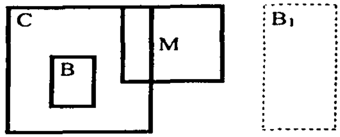
O	M	C	Algunos M no son C
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C



Este silogismo en la lógica tradicional se llama **BOCARDO**

O	M	C	Algunos M no son C
E	M	B	Ningún M es B

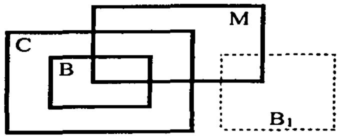
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

O	M	C	Algunos M no son C
I	M	B	Algunos M son B

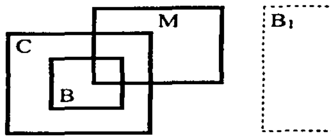
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

O	M	C	Algunos M no son C
O	M	B	Algunos M no son B

No hay conclusión

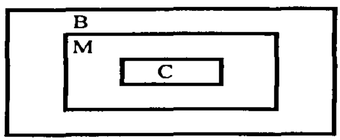


Este silogismo es inválido

ANÁLISIS DE LA VALIDEZ DE LA CUARTA FIGURA

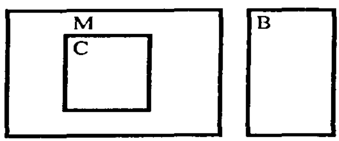
Como en los anteriores análisis, de acuerdo con la tabla, hay 16 posibilidades:

A	C	M	Todos los C son M
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



Este silogismo se llama **BAMALIP**

A	C	M	Todos los C son M
E	M	B	Ningún M es B
E	B	C	Ningún B es C

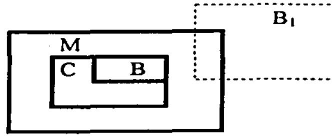


Este silogismo tradicionalmente se llama **CAMENES**

A	C	M
I	M	B

Todos los C son M
Algunos M son B

No hay conclusión

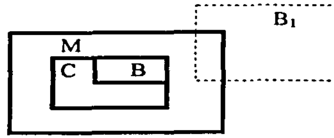


Este silogismo es inválido

A	C	M
O	M	B

Todos los C son M
Algunos M no son B

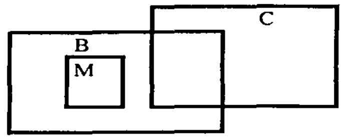
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

E	C	M
A	M	B
O	B	C

Ningún C es M
Todos los M son B
Algunos B no son C

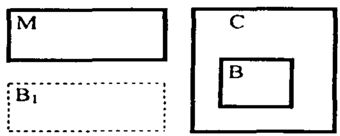


Este silogismo tradicionalmente se llama **FESAPO**

E	C	M
E	M	B

Ningún C es M
Ningún M es B

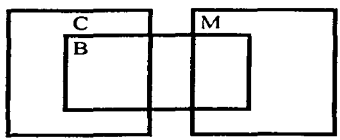
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

E	C	M
I	M	B
O	B	C

Ningún C es M
Algunos M son B
Algunos B no son C

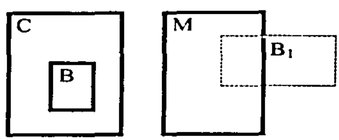


Tradicionalmente este silogismo se llama **FRESISON**

E	C	M
O	M	B

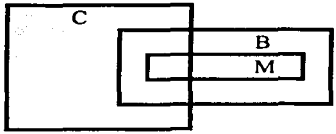
Ningún C es M
Algunos M no son B

No hay conclusión



Este silogismo es inválido

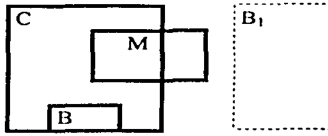
I	C	M	Algunos C son M
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



Este silogismo en la lógica tradicional se llama **DIMATIS**

I	C	M	Algunos C son M
E	M	B	Ningún M es B

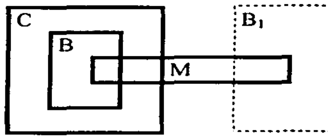
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

I	C	M	Algunos C son M
I	M	B	Algunos M son B

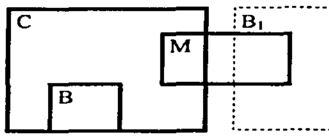
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

I	C	M	Algunos C son M
O	M	B	Algunos M no son B

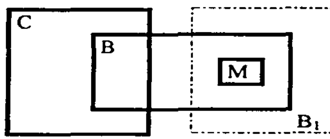
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

O	C	M	Algunos C no son M
A	M	B	Todos los M son B

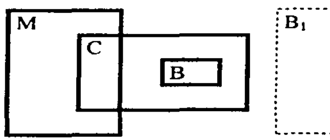
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

O	C	M	Algunos C no son M
E	M	B	Ningún M es B

No hay conclusión

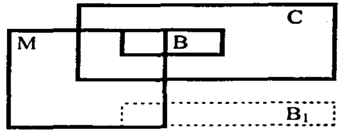


Este silogismo es inválido

O	C	M
I	M	B

Algunos C no son M
Algunos M son B

No hay conclusión

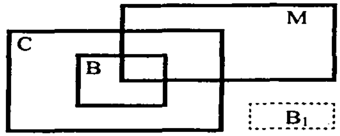


Este silogismo es inválido

O	C	M
O	M	B

Algunos C no son M
Algunos M no son B

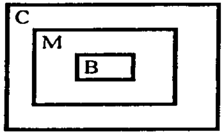
No hay conclusión



Este silogismo es inválido

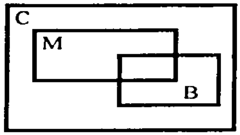
RESUMEN DE LOS SILOGISMOS VÁLIDOS
PRIMERA FIGURA

A	M	C	Todo M es C
A	B	M	Todo B es M
A	B	C	.: Todo B es C



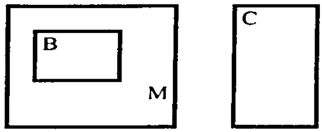
BÁRBARA
(1 1 1)

A	M	C	Todo M es C
I	B	M	Algunos B son M
I	B	C	Algunos B son C



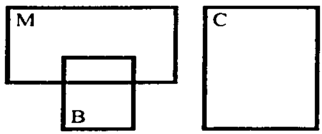
DARII
(1 3 3)

E	M	C	Ningún M es C
A	B	M	Todos los B son M
E	B	C	Ningún B es C



CELÁRENT
(2 1 2)

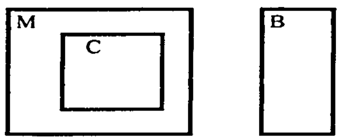
E	M	C	Ningún M es C
I	B	M	Algunos B son M
O	B	C	Algunos B no son C



FERIO
(2 3 4)

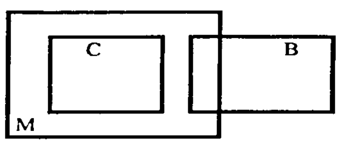
SEGUNDA FIGURA

A	C	M	Todos los C son M
E	B	M	Ningún B es M
E	B	C	Ningún B es C



CAMESTRES
(1 2 2)

A	C	M	Todos los C son M
O	B	M	Algunos B no son M
O	B	C	Algunos B no son C

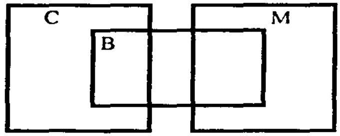


BAROCO
(1 4 4)

E	C	M	Ningún C es M
A	B	M	Todos los B son M
E	B	C	Ningún B es C

CESARE
(2 1 2)

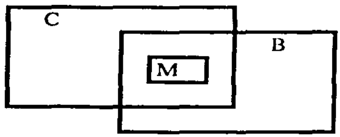
E	C	M	Ningún C es M
I	B	M	Algunos B son M
O	B	C	Algunos B no son C



FESTINO
(2 3 4)

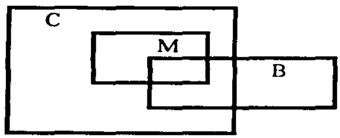
TERCERA FIGURA

A	M	C	Todos los M son C
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



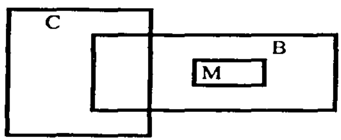
DARAPTI
(1 1 3)

A	M	C	Todos los M son C
I	M	B	Algunos M son B
I	B	C	Algunos B son C



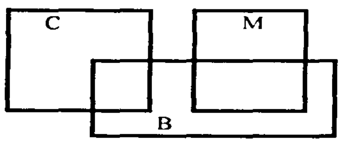
DATISI
(1 3 3)

E	M	C	Ningún M es C
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C



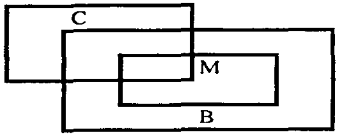
FELAPTON
(2 1 4)

E	M	C	Ningún M es C
I	M	B	Algunos M son B
O	B	C	Algunos B no son C



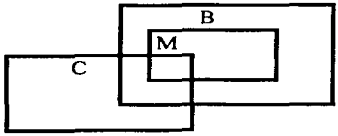
FERISON
(2 3 4)

I	M	C	Algunos M son C
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



DISAMIS
(3 1 3)

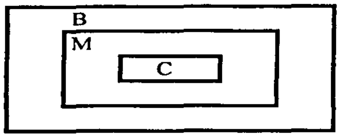
O	M	C	Algunos M no son C
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C



BOCARDO
(4 1 4)

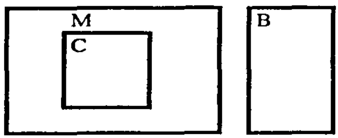
CUARTA FIGURA

A	C	M	Todos los C son M
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



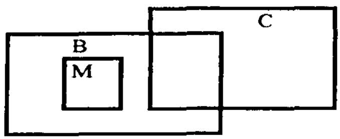
BAMALIP
(1 1 3)

A	C	M	Todos los C son M
E	M	B	Ningún M es B
E	B	C	Ningún B es C



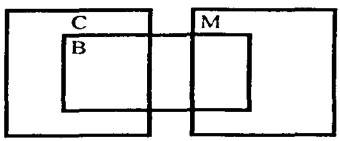
CAMENES
(1 2 2)

E	C	M	Ningún C es M
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C



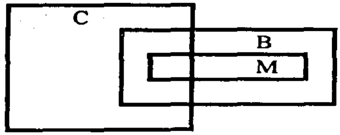
FESAPO
(2 1 4)

E	C	M	Ningún C es M
I	M	B	Algunos M son B
O	B	C	Algunos B no son C



FRESISON
(2 3 4)

I	C	M	Algunos C son M
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



DIMATIS
(3 1 3)

Los nombres que la tradición ha impuesto a los silogismos pretenden tener una función mnemotécnica, pero aunque culturalmente conviene conservar ciertos aspectos tradicionales desde el punto de vista del descubrimiento de las interrelaciones entre estos silogismos válidos conviene numerarlos mediante las ordenaciones de los cuatro dígitos: 1, 2, 3, 4, de acuerdo con las correspondencias A=1, E=2, I=3, O=4, de este modo se obtienen las listas siguientes donde se nombran numéricamente los silogismos:

1ª figura		
1	1	1
1	3	3
2	1	2
2	3	4

2ª figura		
1	2	2
1	4	4
2	1	2
2	3	4

3ª figura		
1	1	3
1	3	3
2	1	4
2	3	4
3	1	3
4	1	4

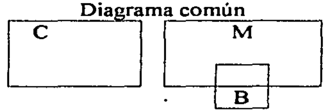
4ª figura		
1	1	3
1	2	2
2	1	4
2	3	4
3	1	3

El análisis de estas conduce a las conclusiones:

La estructura 234 es válida en todas las figuras.

E	M	C	C	M	M	C	C	M	2
I	B	M	B	M	M	B	M	B	3
O	B	C	B	C	B	C	B	C	4
	FERIO 1ª figura		**FESTINO** 2ª figura		**FERISON** 3ª figura		**FRESISON** 4ª figura		

Diagrama común

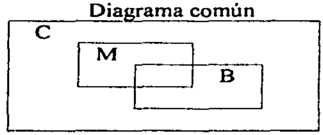


Se puede leer de 4 formas

La estructura 133 es válida en la primera figura DARII y en la tercera DATISI

A	M	C	M	C	1
I	B	M	M	B	3
I	B	C	B	C	3
	DARII 1ª figura		**DATISI** 3ª figura		

Diagrama común

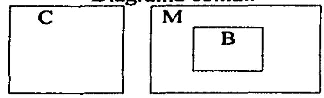


Se puede leer de 2 formas

La estructura 212 es válida
En la primera figura CELARENT y en la segunda CESARE.

E	M	C	C	M	2
A	B	M	B	M	1
E	B	C	B	C	2
	CELARENT		**CESARE**		
	1ª figura		**2ª figura**		

Diagrama común

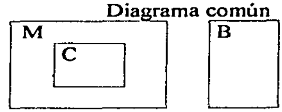


Se puede leer de 2 formas

La estructura 122 es válida
En la segunda figura CAMESTRES y en la cuarta CAMENES

A	C	M	C	M	1
E	B	M	M	B	2
E	B	C	C	B	2
	CAMESTRES		**CAMENES**		
	2ª figura		**4ª figura**		

Diagrama común

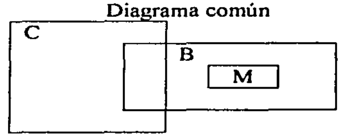


Se puede leer de 2 formas

LA estructura 214 es válida en la tercera figura FELPATON y en la cuarta FESAPO

E	M	C	C	M	2
A	M	B	M	B	1
O	B	C	B	C	4
	FELAPTON		**FESAPO**		
	3ª figura		**4ª figura**		

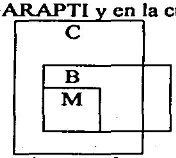
Diagrama común



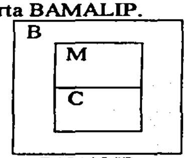
Se puede leer de 2 formas

La estructura 113 es válida en la tercera figura DARAPTI y en la cuarta BAMALIP.

A	M	C	C	M	1
A	M	B	M	B	1
I	B	C	B	C	3
	DARAPTI		**BAMALIP**		
	3ª figura		**4ª figura**		



DARAPTI

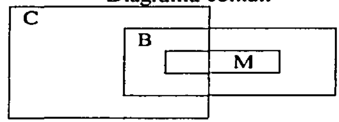


BAMALIP

La estructura 313 es válida en la tercera figura DISAMIS y en la cuarta DIMATIS

Diagrama común

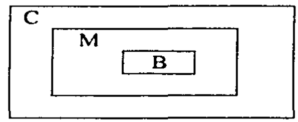
I	M	C	C	M	3
A	M	B	M	B	1
I	B	C	B	C	3
	DISAMIS		**DIMATIS**		
	3ª figura		**4ª figura**		



Se puede leer de 2 formas

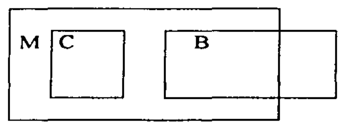
La estructura 111 es única, a continuación se presenta su diagrama

A	M	C	1
A	B	M	1
A	B	C	1
	BÁRBARA		
	1ª figura		



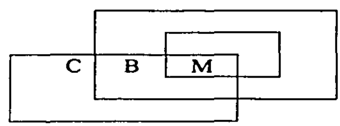
Esta estructura es única, su diagrama es:

A	C	M	1
O	B	M	4
O	B	C	4
	BAROCO		
	2ª figura		



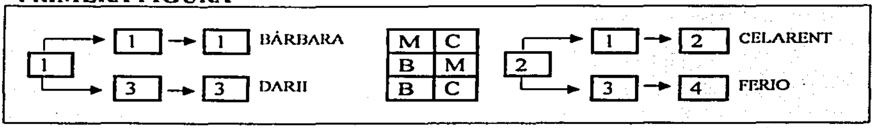
Esta estructura es única, su diagrama es:

O	M	C	4
A	M	B	1
O	B	C	4
	BOCARDO		
	3ª figura		

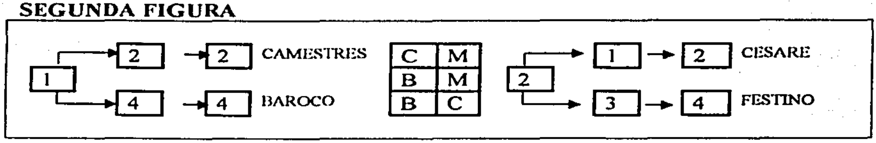


REDES LÓGICAS MNEMOTÉCNICAS

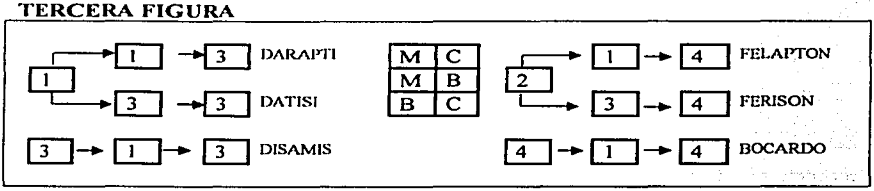
PRIMERA FIGURA



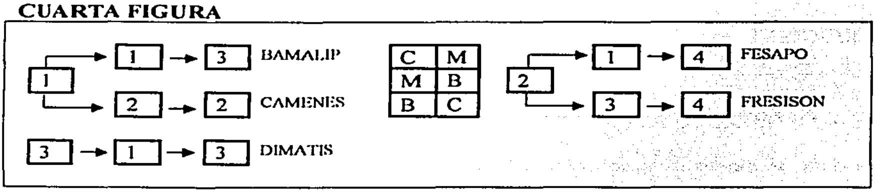
SEGUNDA FIGURA



TERCERA FIGURA



CUARTA FIGURA



ANÁLISIS DE LAS FIGURAS MEDIANTE LAS REDES LÓGICAS

PRIMERA FIGURA

1. La premisa mayor siempre es UNIVERSAL.
2. Si la premisa menor es UNIVERSAL AFIRMATIVA, la conclusión es UNIVERSAL AFIRMATIVA cuando la mayor es afirmativa; cuando la mayor es negativa, la conclusión es UNIVERSAL NEGATIVA.
3. La premisa menor no puede ser UNIVERSAL NEGATIVA.
4. Si la menor es PARTICULAR AFIRMATIVA la conclusión es PARTICULAR AFIRMATIVA cuando la mayor es AFIRMATIVA y es PARTICULAR NEGATIVA cuando la mayor es NEGATIVA.
5. La premisa menor no puede ser PARTICULAR NEGATIVA.

SEGUNDA FIGURA

1. La premisa mayor siempre es UNIVERSAL.
2. Si la premisa mayor es AFIRMATIVA y la menor es UNIVERSAL NEGATIVA, la conclusión es UNIVERSAL NEGATIVA.
   Si la premisa mayor es NEGATIVA y la menor es UNIVERSAL AFIRMATIVA, la conclusión es UNIVERSAL NEGATIVA.
3. Si la menor es PARTICULAR, la conclusión es PARTICULAR NEGATIVA.
4. Cuando una de las premisas es NEGATIVA, la conclusión es negativa.

TERCERA FIGURA

1. La premisa mayor puede ser UNIVERSAL O PARTICULAR, AFIRMATIVA O NEGATIVA.
2. Si la premisa mayor es PARTICULAR, la premisa menor NECESARIAMENTE es UNIVERSAL AFIRMATIVA.
3. Si la mayor es PARTICULAR AFIRMATIVA, la conclusión es PARTICULAR AFIRMATIVA.
   Si la mayor es PARTICULAR NEGATIVA, la conclusión es PARTICULAR NEGATIVA.
4. Si la mayor es UNIVERSAL AFIRMATIVA, la conclusión es PARTICULAR AFIRMATIVA.
   Si la mayor es UNIVERSAL NEGATIVA, la conclusión es PARTICULAR NEGATIVA.

CUARTA FIGURA

1. La premisa mayor puede ser UNIVERSAL AFIRMATIVA O NEGATIVA, o bien, PARTICULAR AFIRMATIVA.
2. Si la mayor es PARTICULAR AFIRMATIVA, necesariamente la menor es UNIVERSAL AFIRMATIVA.
3. Si la mayor es UNIVERSAL NEGATIVA, la conclusión es PARTICULAR NEGATIVA.

GENERALIDADES.

1. Cuando la premisa mayor es UNIVERSAL NEGATIVA, la conclusión es NEGATIVA.
2. Cuando la premisa mayor es UNIVERSAL NEGATIVA y la premisa menor es UNIVERSAL AFIRMATIVA, la conclusión en la primera y segunda figuras es UNIVERSAL NEGATIVA y en la tercera y cuarta figuras es PARTICULAR NEGATIVA.
3. Cuando la premisa mayor es UNIVERSAL NEGATIVA y la menor es PARTICULAR AFIRMATIVA, en todas las figuras la conclusión es PARTICULAR NEGATIVA.
4. Cuando una de las premisas es UNIVERSAL NEGATIVA, la conclusión es NEGATIVA.
5. Cuando una de las premisas es PARTICULAR la conclusión es PARTICULAR.

RESUMEN

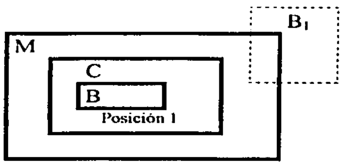
Los análisis de validez probaron que de las 64 estructuras de silogismos posibles, sólo 19 son válidas, estos son los VERDADEROS SILOGISMOS. Los diagramas eulerianos esencialmente diferentes son 11, donde sólo es posible una conclusión LÓGICAMENTE NECESARIA sin recurrir a ningún vinculo EMPÍRICO. Los silogismos no son FALSOS sino INVÁLIDOS. Los juicios constituyen UNIDADES BÁSICAS DE SIGNIFICACIÓN, a los cuales se les puede valorar con toda propiedad, ya como verdaderos, ya como falsos, pero observando las restricciones: $\boxed{1}$ no existe juicio que sea verdadero y falso simultáneamente. $\boxed{2}$ un juicio es verdadero, de no ser así NECESARIAMENTE es FALSO. Se acepta esta orientación bivalente con exclusión de todo ámbito intermedio.

Euler, mediante sus diagramas, demostró que todas las estructuras inválidas implican situaciones que transgreden la restricción $\boxed{1}$ y advirtió que la expresión "x es elemento de S y x no es elemento de S" es un desatino sin el más elemental significado: FALACIA MAYÚSCULA.

La única diferencia entre dos afirmaciones contradictorias es que una afirma lo que la otra niega, esto es S es P y S no es P; aceptar que ambos son verdaderas impediría todo **pensar coherente, inhibiría todo pensamiento científico**.

El análisis de validez de los silogismos mediante los diagramas eulerianos es rigurosamente seguro porque expresan plenamente el contenido de las premisas y cuando el silogismo es inválido se obtienen dos posibles conclusiones contradictorias. Veamos el ejemplo:

A	C	M	Todos los C son M
I	M	B	Algunos M son B



Posición 2

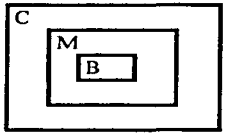
En su respectivo diagrama euleriano vemos cumplidamente la afirmación de la premisa mayor: todos los elementos de C también son elementos del término medio M.

La premisa menor afirma que algunos elementos del término medio M son elementos de B, luego B puede ser subconjunto de C como se indica en la posición 1, pero también de acuerdo con la premisa menor se puede colocar B en la situación B_1, como lo indica la posición 2. En la posición 1 la conclusión es: a) Todos los B son C y en la posición 2 la conclusión es: b) Ningún B es C. Claramente b niega lo que afirma a, luego hay dos conclusiones contradictorias y el silogismo es inválido. Observe que en rigor no hay silogismo porque no existe conclusión. En los silogismos válidos el diagrama euleriano conduce a conclusión única.

CUALIDADES DE LOS SILOGISMOS

PRIMERA FIGURA

A	M	C	Todo los M son C
A	B	M	Todos los B son M
A	B	C	Todos los B son C

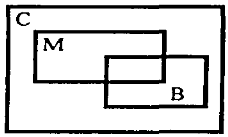


BÁRBARA

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. El mayor C no está distribuido y el menor B está distribuido dos veces.
3. Ambas premisas son afirmativas y la conclusión es afirmativa. Las dos premisas son UNIVERSALES.

A	M	C	Todos los M son C
I	B	M	Algunos B son M
I	B	C	Algunos B son C

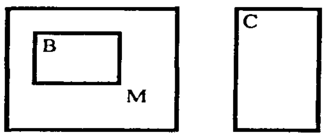


DARII

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. El extremo mayor C y el extremo menor B no están distribuidos.
3. Ambas premisas son afirmativas y la conclusión es afirmativa.
4. Hay una afirmación universal.

E	M	C	Ningún M es C
A	B	M	Todos los B son M
E	B	C	Ningún B es C

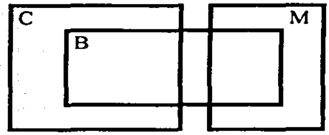


CELÁRENT

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. Los extremos B y C están distribuidos dos veces.
3. La premisa mayor es negativa y la conclusión también lo es.
4. Hay 2 premisas universales y la conclusión es universal.

E	M	C	Ningún M es C
I	B	M	Algunos B son M
O	B	C	Algunos B no son C



FERIO

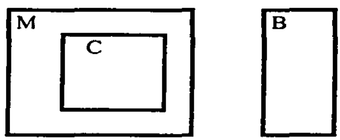
Análisis
1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. Hay una premisa universal.
3. Hay una premisa particular y la conclusión es particular.
4. El extremo C está distribuido dos veces y el extremo B no está distribuido.

RESUMEN

- La premisa mayor es UNIVERSAL A o E; cuando es PARTICULAR I u O el silogismo es inválido.
- La premisa menor es AFIRMATIVA A o I; cuando es NEGATIVA E u O el silogismo es inválido.
- El término medio M está distribuido una sola vez.
- Ningún término extremo está distribuido una sola vez.
- El número de premisas negativas es igual al de conclusiones negativas.

SEGUNDA FIGURA

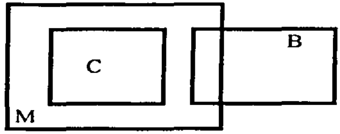
A	C	M	Todos los C son M
E	B	M	Ningún B es M
E	B	C	Ningún B es C



CAMESTRES

Análisis
1. El término medio está distribuido una sola vez en la premisa menor.
2. Hay una premisa AFIRMATIVA.
3. Hay una premisa NEGATIVA y la conclusión es NEGATIVA.
4. Hay dos premisas UNIVERSALES.
5. El extremo C y el B están distribuidos dos veces.

A	C	M	Todos los C son M
O	B	M	Algunos B no son M
O	B	C	Algunos B no son C

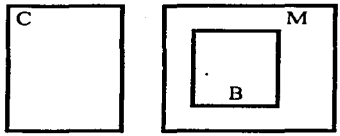


BAROCO

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa menor.
2. Hay una premisa AFIRMATIVA.
3. Hay una premisa NEGATIVA y la conclusión es negativa.
4. Hay una premisa UNIVERSAL.
5. El extremo C está distribuido dos veces y B no está distribuido.

E	C	M	Ningún C es M
A	B	M	Todos los B son M
E	B	C	Ningún B es C

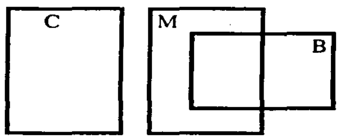


CESARE

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. Hay una premisa AFIRMATIVA.
3. Hay una premisa negativa y la conclusión es negativa.
4. Hay 2 premisas universales y la conclusión es universal.
5. Los extremos B y C están distribuidos dos veces.

E	C	M	Ningún C es M
I	B	M	Algunos B son M
O	B	C	Algunos B no son C



FESTINO

Análisis:

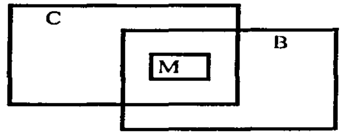
1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. Hay una premisa AFIRMATIVA.
3. Hay una premisa negativa y la conclusión es negativa.
4. El extremo C está distribuidos dos veces y el B no está distribuido.

RESUMEN

1. La premisa mayor es universal A o E; cuando es particular I u O el silogismo es inválido.
2. Una premisa es negativa. En CAMESTRES y BAROCO la premisa negativa es la menor y en CESARE y FESTINO es la mayor, por consiguiente TODAS las conclusiones son NEGATIVAS.
3. El término medio M está distribuido una sola vez.
4. Los términos extremos C y B no están distribuidos una sola vez.

TERCERA FIGURA

A	M	C	Todos los M son C
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C

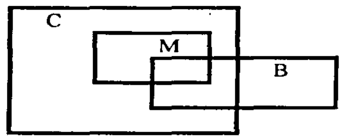


DARAPTI

Análisis:

1. El término medio M está distribuido en la premisa mayor y en la menor
2. Los extremos C y B no están distribuidos.
3. Las premisas son afirmativas y la conclusión también los es.
4. Las dos premisas son universales.

A	M	C	Todos los M son C
I	M	B	Algunos M son B
I	B	C	Algunos B son C

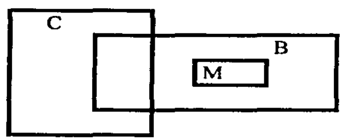


DATISI

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la premisa mayor.
2. Los extremos C y B no están distribuidos.
3. Ambas premisas son afirmativas y la conclusión es afirmativa.
4. Una premisa es particular y la conclusión es particular.

E	M	C	Ningún M es C
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C

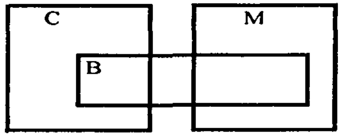


FELAPTON

Análisis:

1. El término medio M está distribuido en ambas premisas.
2. El extremo C está distribuido dos veces y el B no está distribuido.
3. Hay una premisa afirmativa.
4. Hay una premisa negativa y la conclusión es negativa.
5. Hay dos premisas universales.

E	M	C	Ningún M es C
I	M	B	Algunos M son B
O	B	C	Algunos B no son C

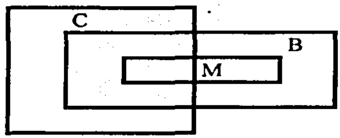


FERISON

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la mayor.
2. El extremo C está distribuido dos veces y el B no está distribuido.
3. Hay una premisa afirmativa.
4. Hay una premisa negativa y la conclusión es negativa.
5. Hay una premisa universal.
6. Hay una premisa particular y la conclusión es particular.

I	M	C	Algunos M son C
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C

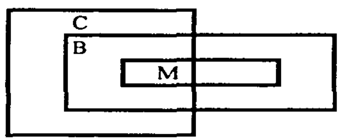


DISAMIS

Análisis

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la menor.
2. Los extremos C y B no están distribuidos.
3. Ambas premisas son afirmativas y la conclusión es afirmativa.
4. Hay una premisa universal.
5. Hay una premisa particular y la conclusión es particular.

O	M	C	Algunos M no son C
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C



BOCARDO

Análisis:

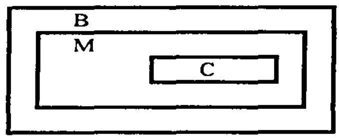
1. El término medio M está distribuido una sola vez en la menor.
2. El extremo C está distribuido dos veces y el B no está distribuido.
3. Una premisa es negativa y la conclusión es negativa.
4. Hay una premisa afirmativa.
5. Hay una premisa universal.
6. Hay una premisa particular y la conclusión es particular.

RESUMEN

1. La premisa menor siempre es afirmativa.
2. LA conclusión es particular.
3. El término medio M está distribuido una sola vez.
4. Los términos extremos no están distribuidos una sola vez.

CUARTA FIGURA

A	C	M	Todos los C son M
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C

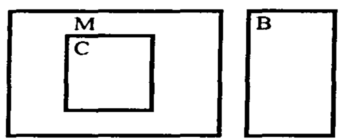


BAMALIP

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la menor.
2. El extremo C está distribuido una vez en la premisa mayor y el B no está distribuido.
3. Las dos premisas son afirmativas y la conclusión es afirmativa.
4. Hay dos premisas universales.

A	C	M	Todos los C son M
E	M	B	Ningún M es B
E	B	C	Ningún B es C

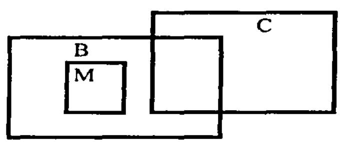


CAMENES

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la menor.
2. Los extremos C y B están distribuidos dos veces.
3. La mayor es afirmativa.
4. La menor es negativa y la conclusión es negativa.
5. La mayor es universal.

E	C	M	Ningún C es M
A	M	B	Todos los M son B
O	B	C	Algunos B no son C

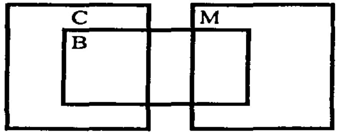


FESAPO

Análisis:

1. El término medio está distribuido en la mayor y en la menor.
2. El extremo C está distribuido dos veces y el B no está distribuido.
3. La menor es afirmativa.
4. La mayor es negativa y la conclusión es negativa.
5. Ambas premisas son universales.

E	C	M	Ningún C es M
I	M	B	Algunos M son B
O	B	C	Algunos B no son C

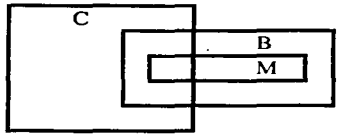


FRESISON

Análisis:

1. El término medio M está distribuido una sola vez en la mayor.
2. El extremo C está distribuido dos veces y el B no está distribuido.
3. La menor es afirmativa; la mayor es negativa y también la conclusión.
4. La menor es PARTICULAR y la conclusión es particular.
5. La mayor es universal.

I	C	M	Algunos C son M
A	M	B	Todos los M son B
I	B	C	Algunos B son C



DIMATIS

Análisis:

1. El término medio está distribuido en la menor.
2. Los extremos C y B no están distribuidos.
3. La menor es afirmativa.
4. La mayor es particular y la conclusión es particular.
5. La menor es universal.
6. Ambas premisas son afirmativas y la conclusión también.

RESUMEN

En DIMATIS la premisa mayor es PARTICULAR AFIRMATIVA y la menor es UNIVERSAL AFIRMATIVA.
En FRESISON la premisa menor es particular afirmativa y la mayor es UNIVERSAL NEGATIVA.
En FRESISON la premisa menor es particular afirmativa y la mayor es universal negativa.

RESUMEN GENERAL

En la primera figura y en la segunda, las respectivas premisas mayores son todas universales.
En la tercera figura en DISAMIS la premisa mayor es particular afirmativa y la conclusión es particular afirmativa. En BOCARDO la premisa mayor es particular negativa y la conclusión es particular negativa. En ambas la menor es universal afirmativa. Por esto: si la premisa mayor es particular, la premisa menor no puede ser negativa, siempre será UNIVERSAL AFIRMATIVA.
En la conclusión ningún término debe figurar con mayor extensión que en las premisas.
Del estudio anterior se obtienen las siguientes reglas:

REGLA 1. El término medio M debe estar distribuido al menos en una de las dos premisas.
REGLA 2. Al menos una de las premisas debe ser AFIRMATIVA.
REGLA 3. Si ambas premisas son afirmativas, la conclusión es afirmativa.
REGLA 4. Si una premisa es negativa, la conclusión es negativa.
REGLA 5. Si una premisa es particular, la conclusión es particular.

REGLA GENERAL
La aplicación de estas reglas es muy útil pero desde el punto de vista euleriano, el mejor método didáctico es construir el diagrama de Euler y establecer su validez.

CONCEPTOS GENERALES
Las estructuras válidas de los silogismos SON INDEPENDIENTES de todo lenguaje, de todo sistema de representación y de todo contenido objetivo, sólo las caracteriza su FORMA. Con Euler se pasa de la lógica de términos a la de CLASES.
La gerametrización de la teoría del silogismo mediante los diagramas eulerianos conduce a la interrogante ¿Será posible axiomatizar la lógica como Euclides axiomatizó la geometría?
En la geometría se encuentran conceptos con pleno significado pero no definibles, también hay relaciones no definibles pero con significado único. Asimismo hay afirmaciones que enlazan los términos no definibles con las relaciones no definibles.
El gran descubrimiento de poder inferir la verdad de la afirmación A a partir de otras afirmaciones H1, ... Hn, que llevan NECESARIAMENTE a la afirmación A sin recurrir a ninguna asistencia empírica, posibilita considerar que si en cierto dominio D se quieren inferir todas las afirmaciones verdaderas, tomando como punto de partida un conjunto de afirmaciones iniciales coneptuadas VERDADERAS a las que se les da el nombre de AXIOMAS del dominio D, entonces se está construyendo la TEORÍA AXIOMÁTICA del citado dominio D. Las deducciones iniciadas con los axiomas se llaman pruebas o demostraciones y las conclusiones alcanzadas son los TEOREMAS. El teorema demostrado engrandece al sistema axiomático y puede utilizarse como axioma en la demostración de otros teoremas. Hay quien opina que este descubrimiento puede compararse en importancia con la invención del signo 0 para significar CERO, lo que dio origen al valor de posición de los distintos guarimos en todo sistema de numeración.
En todas las presentaciones axiomáticas hay tres conjuntos privativos que deben conocerse:
a) Términos no definibles con significado.
b) Relaciones y operaciones, no definibles con significados.
c) Postulados o axiomas, que son afirmaciones aceptadas sin prueba, cuya función es enlazar los términos no definibles con las relaciones y operaciones no definibles.

Los elementos de estos tres conjuntos son los ELEMENTOS PRIMARIOS del sistema axiomático.
EJEMPLO DE SISTEMA AXIOMÁTICO
En el año de 1899, Giuseppe Peano (1852-1932), profesor de la Universidad de Turín, formuló una teoría axiomática de la aritmética de los cardinales. En esta labor utilizó términos no definibles con significado: número natural y cero.
Asimismo, agregó la operación no definible "sucesor inmediato de" o simplemente "sucesor de".

Con estos elementos primarios, formuló los postulados, que ahora se llaman postulados de Peano

1P. Cero es un número natural.
2P. El sucesor de un número es un número.
3P. El cero no es sucesor de ningún número.
4P. No hay dos números diferentes con el mismo sucesor.
5P. Si una propiedad pertenece a cero y siempre que la posee un número natural, también la goza su sucesor, entonces es propiedad de todos los números naturales.

De este ejemplo se infiere que en un sistema axiomático se observan los atributos fundamentales:

1. Un conjunto pequeño de afirmaciones, tiene la jerarquía de CIENCIA PURA.
2. Este conjunto de afirmaciones **caracteriza** la estructura formal de una teoría deductiva.
3. Se requieren palabras y signos adecuados.

En el proceso de abstracción se suprimen los rasgos no esenciales respecto a los propósitos directrices de la investigación con lo cual se llega a descubrir la estructura fundamental de un sistema axiomático, de modo que al compararla con la de otros, aparentemente diferentes, se concluye la identidad esencial estas estructuras, donde las diferencias observadas se deben solamente a dos factores:

1. La forma de los signos utilizados en el sistema.
2. La interpretación que se da a los citados signos en cada sistema axiomático.

Las investigaciones realizadas con la finalidad de establecer la identidad de ciertos sistemas axiomáticos, donde han intervenido brillantísimos investigadores, algunos verdaderamente geniales, conduce a levantar la estructura abstracta, sistema de signos desprovistos de significado especial, los signos primitivos, de los cuales posteriormente se formarán otros, los signos definidos, indispensables en el desarrollo de la teoría abstracta.
A partir de distintas interpretaciones de las teorías abstractas, se pueden lograr sistemas axiomáticos con distintos significados, pero con la misma esencia operativa y de este modo se logran MODELOS ISOMORFOS de la teoría abstracta, pero ¿Cuáles son los nexos con el mundo real atribuidos a los sistemas abstractos?

PROCESOS DE INTERPRETACIÓN. MODELOS

El proceso de interpretación consiste en tomar ciertos objetos con significado de una teoría concreta ajena a la teoría abstracta con la que se compara y sustituir los signos abstractos de ésta por los concretos de aquella. Mediante esta sustitución, los signos primitivos adquieren significación concreta y los postulados abstractos se convierten en afirmaciones con significado. La verdad de los teoremas dentro de la teoría abstracta se refiere únicamente a la particularidad de ser consecuencias lógicas de los postulados, los cuales no son conclusiones de otras afirmaciones del sistema, por esto no tiene sentido fundamentar la verdad de los postulados abstractos, pero después de la sustitución, los postulados abstractos se han convertido en afirmaciones con significado y resulta propio inquirir acerca de su verdad, respecto a los objetivos concretos y las operaciones **implicadas**. Si las afirmaciones que sustituyen a los postulados abstractos son verdaderas, entonces el sistema de objetos concretos adquieren la categoría de MODELO de la teoría abstracta y todo los teoremas probados en el sistema abstracto, con las sustituciones pertinentes, dan origen a nuevas **afirmaciones** verdaderas en el sistema concreto. En la práctica se ha podido constatar la existencia de varios modelos correspondientes a un sistema abstracto, esta situación muestra la utilidad que puede **reportar** el estudio de un sistema abstracto: al conocer su comportamiento automáticamente se conoce el de sus múltiples modelos, los cuales heredan todos los teoremas demostrados en el sistema abstracto. Probar un **teorema** en el sistema abstracto significa haber demostrado los correspondientes teoremas en cada uno de sus modelos.

De no existir el conocimiento del modelo abstracto, la labor docente se multiplica porque en esta situación se deben probar por separado cada uno de los teoremas en cada uno de los modelos.

Respecto a los vínculos que una teoria abstracta pueda guardar con el mundo real, con los legítimos intereses de la humanidad de lograr una mejor calidad de vida, estos vínculos se expresan mediante las relaciones que los objetos de sus diversos modelos tienen con las ciencias **particulares**: fisica, quimica, biologia, economía, informática, de las cuales surgen las aplicaciones tecnológicas.

Sin embargo, **frecuentemente** se ha dado el caso, de sistemas abstractos que cuando los matemáticos los descubren o **inventan**, de momento no se les encuentra aplicación alguna en la tarea de solucionar algunos problemas que plantea la satisfacción apremiante de las necesidades humanas, muchas veces amplificadas por las **desigualdades impuestas** en nuestra estructura social, pero pasados algunos años, llegan a ser fundamento inevitable en la solución de enorme variedad de problemas de índole práctica. Entre los ejemplos más notables de esta particularidad destaca el álgebra matricial, la cual muchos años después de haberla expuesto, los matemáticos Cayley y Silvester, en el ámbito de las aplicaciones, no pasaba de ser una **curiosidad** matemática abstracta sin ninguna aplicación práctica, pero con el desarrollo de la lógica formal, llegó el advenimiento de las computadoras electrónicas de programas almacenado y el álgebra matricial alcanzó la jerarquía de instrumento teórico-práctico de primerísima importancia en la resolución de problemas fundamentes de carácter eminentemente práctico, como la teoria matricial de estructuras esqueletales de la ingeniería civil, como el análisis de las relaciones interindustriales de Leontief, la operatividad de muchos temas del análisis estadístico multivariado y otros modelos lineales.

Una evolución semejante experimentó el campo de la lógica, ahora se cuenta con los **isomorfos:** lógica formal, teoria de conjuntos, estructuras Booleanas y teoría de los circuitos de elementos biestables o teoría de los e-binarios.

A continuación se muestra la isomorfia del álgebra booleana y la teoria de conjuntos; más adelante la isomorfia con la lógica formal.

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA BOOLEANA

ÁLGEBRA BOOLEANA.

Las teorías axiomáticas son abstracciones de sistemas concretos, en cierto aspecto histórico, ajenos a la teoría abstracta, lograda ésta después de muchos años de búsquedas, en las que han participado muchísimos investigadores, algunos increíblemente talentosos.
En el proceso de abstracción se suprimen rasgos considerados no indispensables de cierto tema matemático, respecto a los propósitos que guían la investigación, con la finalidad de poner en claro la estructura fundamental del citado tema, de modo que al compararla con la de otros, aparentemente diferentes, se concluye su identidad esencial, donde las diferencias provienen de la forma de los signos empleados y su interpretación particular. Principalmente de las investigaciones en lógica formal y teoría de conjuntos se concluye la identidad básica de estos temas, cuyo enlace se formula mediante el álgebra booleana. En este trabajo se mostrará como se deriva el álgebra de conjuntos a partir del álgebra booleana, SIN RECURRIR AL CONCEPTO TRADICIONAL DE ELEMENTO DE UN CONJUNTO.

DEFINICIÓN DE ÁLGEBRA BOOLEANA

Un álgebra booleana es un conjunto B de elementos abstractos donde se definen dos operaciones binarias y una primaria, cuya forma de proceder se indica en los postulados que caracterizan precisamente a un álgebra booleana, consecuentemente su estructura la forman dos entidades:

1. El conjunto de los signos primarios.
2. La tabla de postulados.

EL CONJUNTO DE SIGNOS PRIMITIVOS

Los signos primitivos son de cuatro clases:

a) El conjunto B={u, v, x,...}, de letras minúsculas mediante las cuales se representan los elementos abstractos con los que se realizan las operaciones.

b) Los signos + y * para indicar las operaciones binarias con las cuales B es cerrado, esto significa que transforman una pareja (x,u) de elementos de B en un elemento de B:

$$x + u = v, \text{ donde } x, u, v \text{ son elementos de B.}$$
$$x * u=w, \text{ donde } x, u, w \text{ son elementos de B.}$$

c) El signo ', con el se que se indica una operación primaria para la cual B es cerrado, o bien que la operación ' transforma un elemento x de B en otro elemento, esto es, $x'=h$, donde x,h son elementos de B.

d) Los signos especiales **0** y **1**, con los que se hace referencia a dos elementos extraordinarios de B, cuyo comportamiento se indica en los axiomas.

TABLA DE AXIOMAS

Ya se dijo que los axiomas o postulados son afirmaciones aceptadas SIN PRUEBA que caracterizan la estructura formal de una teoría deductiva. En el caso particular del álgebra booleana, en la tabla de sus postulados se registra la forma en la cual se aplican las operaciones binarias y también la operación primaria, así como el proceder de los signos especiales.

Obviamente, la función más importante de la tabla de postulados es dar validez a cada paso de los procesos probatorios: las demostraciones.

TABLA I. POSTULADOS DE UN ÁLGEBRA BOOLEANA PARA ELEMENTOS CUALESQUIERA x, y, z DE B

PRINCIPALES		DUALES	
1P.	$x + u = u + x$	1D.	$x * u = u * x$
2P.	$x*(u + v) = (x * u) + (x * v)$	2D.	$x + (u * v) = (x + u) * (x + u)$
3P.	$x + 0 = x$	3D.	$x * 1 = x$
4P.	$x + x' = 1$	4D.	$x * x' = 0$
5P.	$0 \neq 1$	5D.	$1 \neq 0$

Comúnmente se utiliza el signo (B, +, x, ', 1, 0) para referirse a un álgebra booleana, pero si no es factible ocasionar confusiones se utiliza el signo B.
La operación representada con el signo +, cruz, se llama adición booleana, la indicada con *, áster, es la multiplicación booleana y la denotada con ', tilde, se llama complementación booleana y se dice que x' es el complemento de x. A los postulados $x+x'= 1$, $x *x'=0$ se le da el nombre de leyes de la complementación.
A causa del papel que desempeñan los signos especiales, al signo 0, cero, se le da el nombre de neutral aditivo y el 1, uno, es el neutral multiplicativo.

OBSERVACIONES ACERCA DE LA TABLA I.

1. Del postulado 1P. $x + u = u + x$, se pasa al 1D $x * u = u * x$, con sólo cambiar el signo + por el signo *.
2. Del postulado 2P. $x*(u+v)=(x*u)+(x*v)$, se pasa al 2D. $x+(u*v)=(x+u)*(x+u)$, con sólo cambiar el signo + por el * y recíprocamente.
3. A partir del postulado 3P. $x + 0 = x$, se obtiene el 3D. $x * 1 = x$, mediante el cambio de + por * y el signo especial 0, cero, por el signo especial 1, uno.
4. De 5P. $0 \neq 1$, se pasa al 5D. $1 \neq 0$, por el cambio de 0 por 1 y recíprocamente 1 por 0.

En resumen de los postulados PRINCIPALES se obtienen los pustulados DUALES con sólo cambiar el sigo + por el signo * y recíprocamente. Asimismo, debe cambiarse el signo especial 0, cero, por el signo especial 1, uno, y recíprocamente.

DUALIZACIÓN

La operación que consiste en cambiar el signo + por el * con sus respectivos cambios recíprocos y el signo especial 0, cero, por el signo especial 1, uno, en una expresión booleana se llama DUALIZACIÓN, por ejemplo al dualizar la igualdad $x + 1 = (x+1)*1$, se obtiene $x*0=(x*0)+0$.
Obsérvese que la operación de dualizar es completamente diferente a las operaciones de adición, multiplicación y complementación boléanos y además no se deriva de ellos.
Hay teoremas que se aplican a todos los teoremas del álgebra booleana, son teoremas acerca de teoremas, claramente NO SON TEOREMAS del álgebra booleana, por esto se les da el nombre de METATEOREMAS.

METATEOREMA
HIPÓTESIS 1: T1 es un teorema del álgebra booleana B.
HIPÓTESIS 2. T2 es el dual de T1, es decir, la estructura formada por las expresiones duales de las hipótesis y la afirmación de T1.
AFIRMACIÓN: T2 es teorema de B.
Demostración:
Si T1 es teorema de B, para demostrarlo se ha elaborado un proceso deductivo cuyos pasos están avalados por una sucesión ordenada de postulados de la TABLA I.
A cada paso i de la demostración de T1, avalado por el postulado S_i, le corresponde el paso dual i, avalado por el postulado dual de S_i.
La sucesión de pasos duales de la demostración de T1, justificados por los respectivos postulados duales de los pasos que garantizan la demostración de T1, constituyen la demostración de T2.

EDET = Esto demuestra el teorema

Conviene recordar que en el marco de una teoría abstracta la verdad de sus teoremas, únicamente se refiere a la particularidad de ser consecuencias lógicas de los postulados.

DEMOSTRACIÓN DE LOS TEOREMAS BÁSICOS DE UN ÁLGEBRA BOOLEANA
A continuación se exponen las demostraciones de los teoremas básicos de un álgebra boolena

TEOREMAS DE UNICIDAD

TEOREMA 1: Unicidad del neutral aditivo 0, cero.
Hipótesis: Axioma 3P, $x + 0 = x$ para todo elemento x de B.
Afirmación: El elemento 0 es único.
Demostración por reducción al absurdo: $p \wedge \bar{q} \rightarrow q$. La negación de la afirmación es: en B hay dos neutrales aditivos 0 y 0_1.

Si 0 es neutral aditivo en B por el postulado 3P,	$0_1 + 0 = 0_1$	(1)
Si 0_1 es neutral aditivo en B, según postulado 3P,	$0 + 0_1 = 0$	(2)
En la igualdad (2) se aplica el postulado 1P	$0_1 + 0 = 0$	(3)
De (1) y (3) se concluye la igualdad	$0 = 0_1$	
	EDET	

TEOREMA 2. Unicidad del neutral multiplicativo 1, uno.
Hipótesis: Axioma 3D, $x*1 = x$ para todo x de B.
Afirmación: El elemento 1 es único.
Demostración tipo $p \wedge \bar{q} \rightarrow q$.
La negación de la afirmación es: en B existen dos neutrales multiplicativos 1 y 1_a.

Si 1 es neutral conforme a 3D,	$1_a*1 = 1_a$	(1)
Si 1_a es neutral, según 3D,	$1*1_a = 1$.	(2)
A la igualdad (2) se le aplica 1D,	$1_a*1 = 1$	(3)
De (1) y (3) se concluye:	$1_a = 1$.	

Obsérvese que la hipótesis, la afirmación y los pasos dados en esta demostración son los respectivos duales de los realizados en la demostración del TEOREMA 1. También advierta que estos dos primeros teoremas del álgebra booleana se inician con un AXIOMA como hipótesis.

EDET.

TEOREMA 3. Unicidad del complemento.
Hipótesis 1: Axioma 4P $x + x' = 1$
Hipótesis 2: Axioma 4D $x * x' = 0$
Afirmación: El complemento x' del elemento x del álgebra B es único para todo x de B,
Demostración tipo $p \wedge \bar{q} \rightarrow q$.
La negación de la afirmación es: para todo x de B existen dos complementos x' y a; según ésta y las hipótesis

$x + x' = 1$ (1) $\qquad x + a = 1$ (3)

$x * x' = 0$ (2) $\qquad x * a = 0$ (4)

PRIMERA PARTE

Si la igualdad (1) se multiplica por a, se observa

	$a * (x + x') = a * 1$
Conforme al axioma 2P	$(a * x) + (a*x') = a * 1$
Según el axioma 3D	$(a * x) + (a*x') = a$
De acuerdo con el axioma 1D	$(x*a) + (a*x') = a$
De la igualdad (4)	$0 + (a*x') = a$
Por el axioma 1P	$(a*x')+0= a$
Ahora se aplica 3P	$a*x' = a$ (5)

SEGUNDA PARTE

Si la igualdad (3) se multiplica por x', se deduce:

	$x'*(x + a) = x'*1$
Conforme al axioma 2P	$(x'*x)+(x'*a) = x'*1$
Según el axioma 3D	$(x'*x) + (x'*a) = x'$
De acuerdo con el axioma 1D	$(x*x') + (x'*a)=x'$
De la igualdad 2	$0+(x'*a)=x'$
Por el axioma 1P	$(x'*a) + 0=x'$
Ahora se aplica 3P	$x'*a = x'$
De acuerdo con el axioma 1D	$a*x' = x'$ (6)
De las igualdades (5) y (6) e concluye:	$a = x'$

EDET

COROLARIO 1.
Si $x + y = 1$ y $x * y = 0$, entonces $y = x'$.

TEOREMA 4. Cancelación de la doble complementación.
Hipótesis: Definición, x' es el complemento de x, ambos en B.
Afirmación: $(x')' = x'' = x$.
Demostración:

Según 1P	$x'+x = x+x'$	
Conforme 4P	$x' + x = 1$	(1)
Por 1D	$x' * x = x * x'$	
De acuerdo con 4D	$x' * x = 0$	(2)

De (1) y (2) y COROLARIO 1, se infiere $x=(x')'=x''$.
EDET.

Advierta que el COROLARIO 1 se utilizó como AXIOMA.

TEOREMAS DE EQUIPOTENCIA

TEOREMA 5. Equipotencia multiplicativa.
Hipótesis: x es un elemento cualquiera de un álgebra B.
Afirmación: $x = x*x$.
Demostración

Según 3D	$x = x * 1$
Se aplica 4P	$x = x*(x+x')$
Conforme a 2P	$x = (x*x) + (x*x')$
Por axioma 4D	$x = (x*x)+0$
De acuerdo con 3P	$x = x*x$

EDET

TEOREMA 6. Equipotencia aditiva.
Hipótesis: x es un elemento cualquiera de un álgebra B.
Afirmación: $x = x+x$
Demostración:

De acuerdo con 3P	$x = x+0$
Se aplica 4D	$x = x + (x *x')$
Conforme a 2D	$x = (x+x)*(x+x')$
Por axioma 4P	$x = (x+x)*1$
De acuerdo con 3D	$x = x+x$

EDET

Este teorema 6 es el dual del teorema 5. Advierta que los pasos dados en la demostración del teorema 6 son los respectivos pasos duales de los pasos que componen la demostración del teorema 5. Además, también observe que esta relación de dualidad es recíproca; obviamente se pudo abreviar la demostración recurriendo al principio de dualidad.

TEOREMA DE ASIMILACIÓN.

TEOREMA 7. Asimilador multiplicativo.
Hipótesis: x es un elemento del álgebra B.
Afirmación: $x*0=0$
Demostración

De acuerdo con 3P	$x * 0 = (x*0)+0$
Se aplica 4D	$x * 0 = (x*0) + (x*x')$
Conforme a 1P	$x*0 = (x*x')+ (x*0)$
Por axioma 2P	$x*0 = x*(x'+0)$
Al aplicar 3P	$x *0 = x*x'$
Según 4D	$x *0 = 0$
	EDET

COROLARIO 2.
$x*0 = 0*x=0$. El cero multiplicativo absorbe a todo elemento x de un álgebra B.

TEOREMA 8. Asimilador aditivo.
Hipótesis: x es un elemento del álgebra B.

Afirmación: $x+1 = 1$
Demostración:

De acuerdo con 3D	$x +1 = (x+1)*1$
Se aplica 4P	$x +1 = (x+1)*(x+x')$
Conforme a 1D	$x +1 = (x+x')*(x+1)$
Por axioma 2D	$x +1 = x + (x'*1)$
Al aplicar 3D	$x +1 = x + x'$
Según 4P	$x +1 = 1$
	EDET

Este teorema 8 es el dual del teorema 7. Compruebe que los pasos en su demostración son los respectivos duales de los pasos de la demostración del teorema 7.

LEYES DE LA ABSORCIÓN

TEOREMA 9. Absorción aditiva
Hipótesis: x, u son elementos de un álgebra B.
Afirmación: $x*(x+u) = x$
Demostración:

De acuerdo con 3P	$x * (x+u) = (x+0) *(x+u)$
Conforme a 2D	$x *(x+u) = x+ (0*u)$
Por corolario 2	$x *(x+u) = x + 0$
Por axioma 3P	$x *(x+u) = x$
	EDET

Advierta que el corolario 2 se utilizó como axioma.

TEOREMA 10. Absorción multiplicativa.
Hipótesis: x, u son elementos de un álgebra B.
Afirmación: $x + (x*u)=x$
Demostración:

De acuerdo con 3D	$x + (x*u) = (x*1) + (x*u)$
Según 2P	$x + (x*u) = x * (1 + u)$
Por axioma 1P	$x + (x*u) = x * (u + 1)$
Por el teorema 8	$x + (x*u) = x * 1$
Conforme a 3D	$x + (x*u) = x$
	EDET

Observe que el teorema 8 se utilizó como axioma.
Además es el dual del teorema 7.

CONDICIONES DE IGUALDAD

TEOREMA 11
Hipótesis 1: x, u, v son elementos de un álgebra B.
Hipótesis 2: $u*x = v*x$
Hipótesis 3: $u*x' = v*x'$
Afirmación: $u = v$
Demostración:

Del postulado 3D	$u = u*1$
De acuerdo con 4P	$u = u*(x+x')$
Según 2P	$u = (u*x) + (u*x')$
Por las hipótesis 1,2,3	$u = (v*x) + (v*x')$
Conforme a 2P	$u = v* (x+x')$
Según el axioma 4P	$u = v * 1$
Al aplicar 3D	$u = v$
	EDET

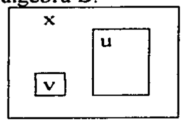
TEOREMA 12.

Hipótesis 1: x, u, v son elementos de un álgebra B.

Hipótesis 2: $u+x = v+x$

Hipótesis 3: $u+x'=v+x'$

Afirmación: $u = v$



Interpretación euleriana. No es suficiente H1 y H2, debe agregarse la H3

Demostración:

Del postulado 3P	$u = u + 0$
De acuerdo con 4D	$u = u + (x*x')$
Según 2D	$u = (u+x) * (u+x')$
Por hipótesis 1, 2, 3	$u = (v+x) * (v+x')$
Conforme a 2D	$u = v + (x*x')$
Según el axioma 4D	$u = v + 0$
Al aplicar 3P	$u = v$
	EDET

El teorema 12 es el dual del teorema 11.

LEYES ASOCIATIVAS

TEOREMA 13. Asociatividad de la adición booleana.

Hipótesis: x, u, v son elementos de un álgebra B.

Afirmación: $x+(u+v) = (x+u)+v$

Demostración:

PRIMERA PARTE

Por 1D	$[x+(u+v)]*x = x*[x+(u+v)]$	
Según 2P	$[x+(u+v)]*x = (x*x) + [x*(u+v)]$	
Por TEOREMA 5	$[x+(u+v)]*x = x+ [x*(u+v)]$	
Por TEOREMA 10	$[x+(u+v)]*x = x$	(1)

SEGUNDA PARTE

Por axioma 1D	$[(x+u)+v]*x= x*[(x+u)+v]$	
Según 2P	$[(x+u)+v]*x= [x*(x+u)] + (x*v)$	
Por TEOREMA 9	$[(x+u)+v]*x= x + (x*v)$	
Por TEOREMA 10	$[(x+u)+v] *x= x$	(2)
De (1) y (2)	$[(x+u)+v]*x= [x+(u+v)]*x$	(3)

TERCERA PARTE

Por axioma 1D	$[x+(u+v)]*x'= x'*[x+(u+v)]$	
Según 2P	$[x+(u+v)]*x'= (x'*x) + [x'* (u+v)]$	
Conforme 1D y 4D	$[x+(u+v)]*x'= 0+[x'* (u+v)]$	
Por 1P y 3P	$[x+(u+v)]*x'= x'* (u+v)$	(4)

CUARTA PARTE

Por axioma 1D $[(x+u)+v]*x' = x'*[(x+u)+v]$

Según 2P $[(x+u)+v]*x' =[x'*(x+u)]+(x'*v)$

Se aplica 2P $[(x+u)+v]*x' = (x'*x) + (x'*u) + (x'*v)$

Según 1D y 4D $[(x+u)+v]*x' = 0 + (x'*u) + (x'*v)$

Por 1P y 3P $[(x+u)+v]*x' = \quad + (x'*u) + (x'*v)$

Se aplica2P $[(x+u)+v]*x' = x'* (u+v) \qquad (5)$

De (4) y (5) $[(x+u)+v]*x' =[x+(u+v)]*x' \qquad (6)$

De las igualdades (3) y (6) y el TEOREMA 11, acerca de las condiciones de igualdad, resulta:

$$x + (u+v) = (x+u)+v.$$

EDET

TEOREMA 14. Asociatividad del producto.

Hipótesis: x, u, v son elementos de un álgebra B.

Afirmación: $x*(u*v) =(x*u) *v$

Demostración:

Por dualización del teorema 13, $x*(u*v) = (x*u) *v$

EDET

LEYES DE DE MORGAN

Estas leyes constituyen la columna vertebral de la complementación booleana. Son dos sus fases: la complementación de la adición booleana y su dual, la complementación del producto booleano. También se les conoce como el primer teorema de De Morgan y el segundo teorema de De Morgan respectivamente.

TEOREMA 15. Complementación de la adición booleana.

Hipótesis: x, u son elementos de un álgebra B.

Afirmación: $(x+u)' = x' * u'$

Demostración:

PRIMERA PARTE

Se aplica 2D $(x+u) + (x'*u') = [(x+u)+x'] * [(x+u)+u']$

Según 1P $(x+u) + (x'*u') = [x'+(x+u)] * [(x+u)+u']$

Por TEOREMA 13 $(x+u) + (x'*u') = [(x'+x)+u] * [x+(u+u')]$

Por axioma 4P $(x+u) + (x'*u') = (1+u) * (x+1)$

Por TEOREMA 8 $(x+u) + (x'*u') = 1*1$

Conforme 3D $(x+u) + (x'*u') = 1 \qquad (1)$

SEGUNDA PARTE

Por axioma 1D $(x+u) * (x'*u') = (x'*u') * (x+u)$

Se aplica 2P $(x+u) * (x'*u') = [(x'*u') *x] + [(x'*u') *u]$

Según 1D $(x+u) * (x'*u') = [x* (x'*u')] + [(x'*u') *u]$

Por TEOREMA 14 $(x+u) * (x'*u') = [(x*x') *u'] + [x'*(u'*u)]$

Conforme 4D $(x+u) * (x'*u') = (0*u') + (x'*0)$

Por TEOREMA 7 $(x+u) * (x'*u') = 0 + 0$

Por axioma 3P $(x+u) * (x'*u') = 0 \qquad (2)$

De (1) y (2), el COROLARIO 1 y el TEOREMA 3 se concluye $(x+u)' = x' * u'$

EDET

TEOREMA 16. Complementación del producto booleano.
Hipótesis: x, u son elementos de un álgebra B.
Afirmación: $(x*u)' = x' + u'$
Demostración: por dualización. Este teorema 16 es el dual del teorema 15. $(x*u)'=x'+u'$
EDET

TEOREMA 17.
Hipótesis 1: x, u son elementos de un álgebra B.
Hipótesis 2: $x*u' = 0$
Afirmación: $x = x*u$
Demostración:

De acuerdo con 3D	$x = x*1$
Por axioma 4P	$x = x*(u+u')$
Según 2P	$x = (x*u) + (x*u')$
Hipótesis 2	$x = (x*u) + 0$
Por axioma 3P	$x = x*u$
	EDET

TEOREMA 18. Recíproco del TEOREMA 17 NO SU DUAL.
Hipótesis 1: x, u son elementos de un álgebra B.
Hipótesis 2: $x = x*u$
Afirmación: $x*u' = 0$
Demostración:

Por axioma 3P	$x*u' = 0+(x*u')$
Según 4D	$x*u' = (x*x')+(x*u')$
De acuerdo con 2P	$x*u' = x*(x'+u')$
Por TEOREMA 16	$x*u' = x*(x*u)'$
Hipótesis 2	$x*u' = x*x'$
Según 4D	$x*u'=0$
	EDET

PROBLEMA: Formular y demostrar el teorema dual del TEOREMA 17.

TEOREMA 19.
Hipótesis: 0 es el neutral aditivo en un álgebra B.
Afirmación: 0' = 1
Demostración:

Conforme a 4P $0'+0=1$
Según 3P $0'=1$
EDET

TEOREMA 20.
Hipótesis: 1 es el neutral multiplicativo en un álgebra B.
Afirmación: 1' = 0
Demostración: Conforme a 4D $1' * 1 = 0$
Según 3D $1' = 0$
EDET

TEOREMAS DE COMPLEMENTACIÓN	
PRINCIPALES	**DUALES**
$x + x' = 1$	$x*x' = 0$
$0' = 1$	$1' = 0$
$(x+u)' = x'*u'$	$(x*u)' = x'+u'$
$x'' = x$	$x'' = x$

Observe que hay expresiones autoduales como $x'' = x$.
Resulta muy ventajoso resumir en la tabla II todos los teoremas booleanos demostrados anteriormente; también se agrega el COROLARIO 1.

TABLA II. RESUMEN DE LOS TEOREMAS BOLÉANOS

TEOREMA 1:	0 es único
TEOREMA 2:	1 es único
TEOREMA 3:	x' es único
TEOREMA 4:	$(x')' = x'' = x$
TEOREMA 5:	$x * x = x$
TEOREMA 6:	$x + x = x$
TEOREMA 7:	$x * 0 = 0$
TEOREMA 8:	$x + 1 = 1$
TEOREMA 9:	$x * (x+u)=x$
TEOREMA 10:	$x + (x*u)=x$
TEOREMA 11:	Si $u*x = v*x$, $u*x'=v*x'$, entonces $u = v$
TEOREMA 12:	Si $u+x = v+x$, $u+x' = v+x'$, entonces $u = v$
TEOREMA 13:	$x+(u+v) = (x+u)+v$
TEOREMA 14:	$x* (u*v) = (x*u)*v$
TEOREMA 15:	$(x+u)' = x'*u'$
TEOREMA 16:	$(x*u)' = x' + u'$
TEOREMA 17:	Si $x*u' = 0$, entonces $x=x*u$
TEOREMA 18:	Si $x = x*u$, entonces $x*u' = 0$
TEOREMA 19:	$0' = 1$
TEOREMA 20:	$1' = 0$
COROLARIO 1:	Si $x+y=1$, $x*y=0$, entonces $y=x'$

Estos teoremas se unen a los postulados para utilizarlos como axiomas en la demostración de nuevos teoremas. Siempre, demostrado un teorema hace el papel de nuevo axioma, así enriquece la teoría a la cual pertenece.

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

APLICACIÓN AL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

En los conceptos estudiados, se puso el acento en un hecho esencial: las teorías axiomáticas abstractas, valga la redundancia, son abstracciones de sistemas concretos con significado. Asimismo se explicó la factibilidad de enfocar la problemática en forma recíproca: a partir de una teoría abstracta o ideal se puede iniciar un proceso de INTERPRETACIÓN, es decir, dar a la teoría abstracta cierto contenido especial, objetivo que se logra al sustituir los signos abstractos de la teoría que se va a interpretar por otros con significado específico. Estos cambios producen una nueva teoría CONCRETA, con evidente acepción bien definida; de este modo se ha logrado construir uno de los modelos de la teoría abstracta.
Uno de los ejemplos de cómo se modela una teoria ideal es deducir el álgebra de conjuntos a partir del álgebra booleana, sin RECURRIR al concepto tradicional de ELEMENTO de un conjunto, lo cual en cierta medida modifica la definición del concepto de inclusión de conjuntos. En esta labor que inmediatamente se emprende, es posible cometer algunas repeticiones, pero estas acaso procuren mayor claridad a los conceptos ya vertidos. Este punto de vista es parte de lo peculiar de esta TESIS.

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

En la construcción del álgebra de conjuntos, el punto de inicio es la TABLA I de axiomas del álgebra (B, +, *, ', 0, 1), donde se consideran los componentes:

1. Un conjunto $P(\upsilon) = \{A, B, \ldots\}$, donde los elementos abstractos A, B,... se consideran CONJUNTOS contenidos en $P(\upsilon)$.
2. Tres signos para indicar operaciones entre subconjuntos de $P(\upsilon)$: $\cap$, $\cup$,$-$. Los dos primeros denotan operaciones binarias nombradas UNIÓN e INTERSECCIÓN respectivamente. Con el signo $-$ se notifica una operación primaria titulada COMPLEMENTACIÓN.
3. Dos signos especiales para representar conjuntos particulares, υ el CONJUNTO UNIVERSAL y ϕ el CONJUNTO VACÍO.
4. Conjunto de postulados, afirmaciones que se vierten en la

TABLA III. POSTULADOS DE UN ÁLGEBRA DE CONJUNTOS PARA ELEMENTOS CUALESQUIERA A, B, C de $P(\upsilon)$

PRINCIPALES		DUALES	
1P.	$A \cup B = B \cup A$	1D.	$A \cap B = B \cap A$
2P.	$A \cap (A \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	2D.	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3P.	$A \cup \phi = A$	3D.	$A \cap \upsilon = A$
4P.	$A \cup \bar{A} = \upsilon$	4D.	$A \cap \bar{A} = \phi$
5P.	$\phi \neq \upsilon$	5D.	$\upsilon \neq \phi$

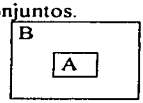
En la construcción de la TABLA III, reformulación de la TABLA I, se utilizan los conceptos ordenadores asentados en la TABLA IV donde se explican los cambios que implican las interpretaciones necesarias para efectuar el paso de un sistema abstracto a otro concreto.

TABLA IV. TRANSFORMACIONES

SIGNO O ABSTRACTO	CONCEPTO UTILIZADO EN LA TRANSFORMACIÓN	NUEVO SIGNO CONCRETO
$+$	Este signo se interpreta como unión de conjuntos y se sustituye por el nuevo signo concreto	$\cup$
$*$	Este signo se traduce como intersección de conjuntos y se cambia por el nuevo signo concreto	$\cap$
'	Ahora este signo se considera como complementación de conjuntos y se reemplaza por el nuevo signo	$\overline{}$
1	La interpretación de este signo es el concepto de CONJUNTO UNIVERSAL y se cambia por el nuevo signo	$\mathcal{U}$
0	Ahora 0 significa CONJUNTO VACIO y se cambia por ϕ	ϕ
x, u ,v, ..	Los signos x, u, v,... se traducen como subconjuntos del UNIVERSAL $\mathcal{U}$ y se sustituyen por los nuevos signos.	A, B, C, ..
B	Este signo se interpreta como el conjunto de los subconjuntos de $\mathcal{U}$ y se sustituye por el nuevo signo	$P(\mathcal{U})$

Mediante las transformaciones explicadas en la TABLA IV aplicadas a la TABLA II, donde se resumen en los teoremas booleanos en cuya demostración solamente se utilizaron en los distintos pasos axiomas y teoremas PREVIAMENTE DEMOSTRADOS, se pueden deducir los respectivos teoremas del álgebra de conjuntos, sin embargo conviene ilustrar el método de interpretación de una teoría ideal en una de contenido concreto.

TEOREMA 17
Hipótesis 1: A, B, son subconjuntos del álgebra de conjuntos.
Hipótesis 2: $A \cap \overline{B} = \phi$
Afirmación: $A = A \cap B$
Demostración:



Interpretación euleriana

De acuerdo con 3D	$A = A \cap \mathcal{U}$
Por axioma 4P	$A = A \cap (B \cup \overline{B})$
Según 2P	$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
Hipótesis 2	$A = (A \cap B) \cup \phi$
Por axioma 3P	$A = A \cap B$
	EDET

Conviene aclarar que el álgebra de conjuntos no es el único modelo del álgebra booleana, también a partir de ella, mediante procesos de interpretación respectivos se pueden modelar el álgebra de proposiciones y de forma semejante se puede obtener el álgebra de los elementos biestables (e-binarios) base del diseño lógico de computadoras, detallar esta última isomorfía nos apartaría del objetivo de esta TESIS.

TABLA V. PROCESOS DE INTERPRETACIÓN
TEOREMAS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS
HERENCIA DIRECTA DEL ÁLGEBRA BOOLEANA

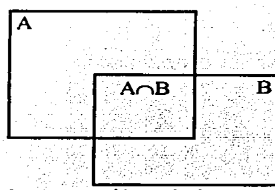
TEOREMA 1:	El conjunto vacío ϕ es único
TEOREMA 2:	El conjunto universal U es único
TEOREMA 3:	El complemento $\bar{A}$ de A es único
TEOREMA 4:	$\bar{\bar{A}} = A$
TEOREMA 5:	$A \cap A = A$
TEOREMA 6:	$A \cup A = A$
TEOREMA 7:	$A \cap \phi = \phi$
TEOREMA 8:	$A \cup U = U$
TEOREMA 9:	$A \cap (A \cup B) = A$
TEOREMA 10:	$A \cup (A \cap B) = A$
TEOREMA 11:	Si $A \cap B = C \cap B$ y $A \cap B = C \cap B$, entonces $A = C$
TEOREMA 12:	Si $A \cup B = C \cup B$ y $A \cup B = C \cup B$, entonces $A = C$
TEOREMA 13:	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
TEOREMA 14:	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
TEOREMA 15:	$A \cup B = A \cap B$
TEOREMA 16:	$A \cap B = A \cup B$
TEOREMA 17:	Si $A \cap B = \phi$, entonces $A = A \cap B$
TEOREMA 18:	Si $A \cup B = U$, entonces $A = A \cup B$
TEOREMA 19:	$\phi = U$
TEOREMA 20:	$\bar{U} = \phi$
COROLARIO 1:	Si $A \cup B = U$ y $A \cap B = \phi$, entonces $B = \bar{A}$, $A = \bar{B}$

Se insiste en una interpretación directa adicional.

TEOREMA 10.
Hipótesis: A, B son elementos de un álgebra de conjuntos.
Afirmación: $A \cup (A \cap B) = A$
Demostración:

Del axioma 3D	$A \cup (A \cap B) = (A \cap U) \cup (A \cap B)$
Según 2P	$A \cup (A \cap B) = A \cap (U \cup B)$
Al aplicar 1P	$A \cup (A \cap B) = A \cap (B \cup U)$
TEOREMA 8	$A \cup (A \cap B) = A \cap U$
Conforme 3D	$A \cup (A \cap B) = A$

EDET



Interpretación euleriana

Se observa que en la tabla PROCESO DE INTERPRETACIÓN, no se utilizaron las definiciones clásicas:

$A \cup B = \{x: x \in A, x \in B$ o en ambos$\}$

$A \cap B = \{x: x \in A, x \in B$ simultáneamente$\}$

$A - B = \{x: x \in A, x \notin B\}$

Las cuales descansan en el concepto: x es ELEMENTO de un conjunto, concepto innecesario en nuestra exposición.

DUALIDAD DE LA INCLUSIÓN DE CONJUNTOS.

TEOREMA 17: Si $A \cap \bar{B} = \phi$, entonces $A \cap B = A$, o bien $A \subset B$.
TEOREMA 18: Si $A \cup \bar{B} = \upsilon$, entonces $A \cup B = A$, o bien $B \subset A$
Por esto el concepto dual de $A \subset B$ es $B \subset A$.

CONTRAPOSICIÓN EN LA INCLUSIÓN DE CONJUNTOS

Según el teorema 4 se tiene $\bar{\bar{A}} = A$
Por esto, $A \cap \bar{B} = \phi = \bar{\bar{A}} \cap \bar{B} = \bar{B} \cap \bar{\bar{A}} = \phi$, luego $\bar{B} \subset \bar{A}$
Por consiguiente, $A \subset B = \bar{B} \subset \bar{A}$ $\therefore$ $\bar{B} \subset \bar{A}$ es la inclusión contrapuesta de $A \subset B$.

Ahora, conviene elaborar una TEORÍA DE LA INCLUSIÓN.

TEOREMA 21.
Hipótesis 1: $B \neq \phi$ es cualquier subconjunto de υ
Hipótesis 2: ϕ es el conjunto vacío.
Afirmación: $\phi \subset B$, esto es, ϕ es subconjunto de todo subconjunto de υ
Demostración:
Para todo B según el TEOREMA 17, si $A \cap \bar{B} = \phi$, entonces $A = A \cap B$, luego si $\phi \cap \bar{B} = \phi$, entonces $\phi \subset B$, inclusión válida para todo subconjunto B de υ.

EDET

TEOREMA 22.
Si $A \subset B$, entonces $A \cap \bar{B} = \phi$ y recíprocamente.

TEOREMA 23.
Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$ y recíprocamente.

TEOREMA 24.
Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ y recíprocamente.

TEOREMA 25.
Si $A \subset B$, entonces $B \cup \bar{A} = \upsilon$ y recíprocamente.

TEOREMA 26.
Si $A \subset B$, entonces $\bar{B} \subset \bar{A}$ y recíprocamente.

TEOREMA 27.

Para todo subconjunto A de $\mho$, vale $\phi \subset A$.

TEOREMA 28.
Hipótesis 1: A, C son subconjuntos cualesquiera de $\mho$.
Hipótesis 2: $A = C$
Afirmación: $A \subset C$ y $C \subset A$.
Demostración:

Según el postulado 4D	$A \cap \bar{A} = \phi$	(1)
Por la hipótesis 2	$A = C$	(2)
De (1) y (2)	$A \cap \bar{C} = \phi$	
Por el teorema 17	$A = A \cap C$, luego $A \subset C$	
Análogamente		
De (1) y (2)	$C \cap \bar{A} = \phi$	
Por teorema 17	$C = C \cap A$, luego $C \subset A$	
	EDET	

Este teorema que afirma la condicional
Si $A = C$, entonces $A \subset C$ y $C \subset A$ y recíprocamente, se probó sin recurrir al concepto de elemento de un conjunto; solamente se utilizó el postulado 4D y el TEOREMA 17, ambos herencia del álgebra booleana.
De aquí se infiere que el concepto de conjunto NO ES DEFINIBLE pero tiene significado concreto sin confundirlo con otros conceptos no definibles como tiempo, espacio y otros.

NOTA. Para la demostración de la isomorfía del álgebra de proporciones es preciso definir sus elementos y las operaciones que con ellos se efectúan, los postulados que la estructuran y los signos que le dan coherencia. Debido a su gran importancia se expone con cierto detenimiento la teoría de las condicionales y como una de sus aplicaciones la justificación de algunos de los métodos deductivos de la prueba y finalmente establecer la TABLA VI base de su ISOMORFÍA con el álgebra booleana.

INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA FORMAL

AFIRMACIÓN SIMPLE

En lógica formal una afirmación simple se representa por las minúsculas p, q, r,... La constituyen un conjunto de sonidos y silencios ordenados adecuadamente para garantizar la presencia de cierta ACEPCIÓN valorable como verdadera o falsa con las restricciones.

1. No hay afirmación simple verdadera y falsa simultáneamente.
2. Una afirmación necesariamente es verdadera o falsa, pero no ambas valoraciones simultáneamente.

VALORES DE VERDAD.

Los predicados "verdadera" y "falsa" son los valores de verdad que se asignan a las afirmaciones uno con exclusión del otro; para representarlos se utiliza V para verdadera y F para falsa.

OPERACIONES LÓGICAS

Mediante las operaciones lógicas, se enlazan afirmaciones simples para construir afirmaciones compuestas. Las operaciones básicas son tres, dos binarias y una primaria. Las binarias son la conjunción y la disyunción; la primaria es la negación. Se indica la conjunción con el signo $\wedge$; la disyunción con $\vee$. La negación se denota con el signo $\sim$. Así $p \wedge q$ es la conjunción de las afirmaciones p y q y se lee p y q. Los signos $p \vee q$ representan la disyunción de las afirmaciones p, q y significan p ó q ó ambas. Los signos $\sim q$ significan "no es cierto que q", esta es la negación de la afirmación de q.

Una afirmación simple se distingue de una compuesta, porque la mayoría de las veces el valor de la verdad de las simples lo imponen las ciencias particulares: matemáticas, física, química, biología, etc., en tanto que en las afirmaciones compuestas su valor de verdad queda completamente determinado por los valores de verdad de sus afirmaciones simples componentes y de la forma particular en la cual estas componentes se encuentran entrelazadas por los signos de las operaciones lógicas. Las afirmaciones $p \wedge q$, $p \vee q$, $\sim q$, son las proposiciones fundamentales y todos sus posibles valores de verdad se definen mediante su respectiva tabla de verdad.

LA CONJUNCIÓN

El resultado de unir dos afirmaciones simples, p y q por medio de la palabra "y" se llama conjunción de las afirmaciones p y q. Ya se dijo que esta operación se indica mediante la cadena de signos $p \wedge q$, cuya lectura es "p y q", lo cual significa que ambas afirmaciones acontecen simultáneamente. Los valores de verdad que pueden tomar $p \wedge q$ se definen en el postulado que sigue:

$\boxed{L1}$: La conjunción $p \wedge q$ es verdadera solamente si ambas afirmaciones componentes p y q son verdaderas; en caso contrario $p \wedge q$ es falsa.

El postulado L1 se advierte en la tabla de verdad

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

LA DISYUNCIÓN

En el resultado de unir dos afirmaciones simples p y q, mediante la palabra "o" en el sentido incluyente, se representa con la cadena de signos $p \vee q$ y se lee p o q; significa p o q o ambos. Sus valores de verdad satisfacen al postulado:

$\boxed{L2}$: La disyunción $p \vee q$ sólo es falsa cuando ambas afirmaciones componentes p, q son falsas. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

LA NEGACIÓN

La define el postulado:

$\boxed{L3}$: Si p es verdadera $\sim p$ es falsa. Si p es falsa $\sim p$ es verdadera. Su tabla de verdad es:

p	$\sim p$
V	F
F	V

CONSTANTES Y VARIABLES

Todo signo con significación inalterable en el curso de los razonamientos, recibe el nombre de constante como 2, 10.5, π, los conectivos aritméticos +, -, x, $\sqrt{}$. También son constantes, los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\sim$.

Las variables son signos que representan elementos de un conjunto bien definido, por ejemplo: en el conjunto de los números reales $0 \leq x \leq 3$, significa que x puede tomar el valor de cualquier número real comprendido entre cero y tres, inclusive los números 0 y 3.

Las variables son signos bien definidos que carecen de significado individual, lo que a veces da lugar a la imposibilidad de asignarle a una expresión un valor de verdad, por ejemplo en:

"x es un número par" (1)

por consiguiente (1) no es afirmación pero al sustituir x por un número de un conjunto específico, entonces es evidente la valoración, así en el conjunto de los números reales, si x=4, entonces, la afirmación 4 es un número par es verdadera y 10.5 es un número par es falsa. Expresiones semejantes a la (1) se les da el nombre de funciones proposicionales o simplemente PROPOSICIONES. La tabla de verdad de una proposición depende de los valores que se asignen a sus variables y de los conectivos lógicos que la integran.

TAUTOLOGÍAS

Son las proposiciones compuestas P(p, q, ...) verdaderas para todo valor de verdad de sus variables p, q,... Se representan con el signo u.

PROBLEMA 1.

Pruebe que $P(p,q) = p \vee \sim(p \wedge q)$ es tautologia.

Solución:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \vee \sim(p \wedge q)$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Observe que en la solución de este problema se consideró como base de la solución, que en el fondo es una demostración, a las tablas de verdad de la conjunción $p \wedge q$ y la negación $\sim(p \wedge q)$ como AXIOMAS. Ciertamente lo son porque son expresiones de los respectivos postulados.

CONTRADICCIONES

Son las proposiciones compuestas P(p, q,...), siempre falsas para todo valor de sus variables. Se indican con el signo f.

Observe que la negación de una tautologia es una contradicción.

PROBLEMA 2.

Se tienen las proposiciones $P = (\sim p \wedge r) \wedge (\sim q \wedge r)$

$Q = (p \vee q) \vee \sim r$

Pruebe que $Q \wedge P$ es contradicción.

Demostración:

p	q	r	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge r$	$\sim q \wedge r$	P	$p \vee q$	$\sim r$	Q	$Q \wedge P$
V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	V	F	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	F	F	F	F	V	V	F

TEOREMA 29. PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN

Hipótesis 1: La posición P(p, q,...) es tautologia.

Hipótesis 2: $P_1(p, q,...)$, $P_2(p, q,...)$,..., son proposiciones cualesquiera.

Afirmación: $P(P_1, P_2,...)$es tautología. Sustituciones convenientes no afectan el valor de verdad de las tautologías.

Demostración

Para cierto conjunto de valores de las afirmaciones simples p, q,.., el valor P_1 es verdadero o falso; análogamente para P_2,.., Si en P(p, q,...) se asigna p el valor que toma P_1 y a q el de P_2,..., entonces el valor de verdad de $P(P_1, P_2,...)$ es verdadero según la hipótesis 1.

EDET.

LA CONDICIONAL

Tradicionalmente en el juicio HIPOTÉTICO se ligan dos juicios, el que dicta la condición y el otro condicionado. Lo característico del juicio hipotético es su dependencia respecto a una situación previa determinante, así como el carácter hipotético de la condición impuesta; esta puede ser afirmativa o negativa, lo mismo que el juicio, lo cual da lugar a cuatro modos:

CONDICIÓN	CONDICIONADO	NOMBRE
Si Q es R,	entonces S es P	Modus ponendo ponens
Si Q es R,	entonces S no es P	Modus ponendo tollens
Si Q no es R,	entonces S es P	Modus tollendo ponens
Si Q no es R,	entonces S no es P	Modus tollendo tollens

En la lógica formal, la estructura del paradigma hipotético se representa mediante la cadena de signos: Si p, entonces q, o brevemente, $p \to q$ y se lee: p implica q, donde la afirmación p es el antecedente y q el consecuente de esta afirmación compuesta a que se da el nombre de PROPOSICIÓN CONDICIONAL cuyos valores de verdad se calculan mediante la igualdad

$$p \to q = \sim p \vee q \qquad (1)$$

Cálculo que se registra en la siguiente tabla:

p	~p	q	~p∨q	p→q
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

Luego $p \to q = \sim p \vee q$

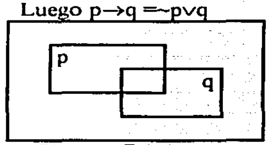


Diagrama Euleriano

Consecuentemente el valor de verdad de la condicional $p \to q$ se resume en el siguiente postulado:

$\boxed{\text{L4}}$: La condicional $p \to q$ es falsa cuando el antecedente p es verdadero y el consecuente q es falso. En todos los demás casos es verdadera.

La identidad $p \to q = \sim p \vee q$ establece rigurosamente el concepto de afirmación condicional; elimina toda referencia a ligas causales, anímicas y de cualquier otra índole.

PROBLEMA 3.

1. Pruebe que $(p\rightarrow q)\rightarrow(\sim q\rightarrow\sim p)$ es tautologia. (1)
2. En (1) efectúe los cambios de variable: $p = a\wedge\sim b$, $q = \sim a\rightarrow(a\vee b)$

Establezca el efecto que este cambio produce en la tabla de verdad de (1).

Solución:

Para resolver el punto 1, se construye la tabla de verdad de (1).

p	~p	q	~q	p→q	~q→~p	(p→q)→(~q→~p)
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V

Esta tabla prueba que (1) es tautologia.

Punto 2. Si en (1) se efectúan los cambios propuestos, se tiene la nueva afirmación: $[(a\wedge\sim b)\rightarrow(\sim a\rightarrow(a\vee b)]\rightarrow[\sim(\sim a\rightarrow(a\vee b))\rightarrow(\sim(a\wedge\sim b))]$. Para simplificar se acepta la nomenclatura:

$P = (a\wedge\sim b)\rightarrow(\sim a\rightarrow(a\vee b))$, $Q = \sim(\sim a\rightarrow(a\vee b))\rightarrow(\sim(a\wedge\sim b))$

Por consiguiente, la nueva afirmación es $P\rightarrow Q$.

TABLA DE VERDAD DE P

a	b	~a	~b	a∨b	a∧~b	~a→(a∨b)	P=(a∧~b)→[~a→(a∨b)]
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F	V

TABLA DE VERDAD DE Q

~a→(a∨b)	~(a∧~b)	~[~a→(a∨b)]	Q=[~a→(a∨b)]→[~(a∧~b)]
V	V	F	V
V	F	F	V
V	V	F	V
F	V	V	V

De acuerdo con los resultados de estas tablas, inmediatamente se concluye que $P\rightarrow Q$ es tautologia, por consiguiente, los cambios de variable introducidos no alteraron la calidad tautológica de $(p\rightarrow q)\rightarrow(\sim q\rightarrow\sim p)$. Observe que este es un ejemplo, no una demostración.

CLASIFICACIÓN DE LAS CONDICIONALES

La condicional PRINCIPAL es:	$p\rightarrow q$	(1)
La CONTRAPUESTA de (1) es:	$\sim q\rightarrow\sim p$	(2)
La RECÍPROCA de (1) es	$q\rightarrow p$	(3)
La INVERSA de (1) es	$\sim p\rightarrow\sim q$	(4)

EQUIVALENCIA LÓGICA
Dos posiciones P(p, q,...), Q(p, q,...) son EQUIVALENTES o iguales si para valores idénticos de sus componentes p, q,... las columnas finales de sus tablas de verdad son IDÉNTICAS. En este caso se escribe P(p, q,...) = Q(p, q,...).

TEOREMA 30.
Hipótesis: $p \rightarrow q$ es la condicional principal.
Afirmación: La contrapuesta $\sim q \rightarrow \sim p$ es lógicamente equivalente a la principal.

Demostración:
Se construyen las tablas de verdad de ambas condicionales y se comparan sus columnas finales:

p	q	~p	~q	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Las últimas columnas de esta tabla de verdad son idénticas, en consecuencia $p \rightarrow q = \sim q \rightarrow \sim p$.
EDET

TEOREMA 31
Hipótesis: $q \rightarrow p$ es la recíproca de la principal $p \rightarrow q$.
Afirmación: La inversa $\sim p \rightarrow \sim q$ es lógicamente equivalente a la recíproca $q \rightarrow p$ de la principal $p \rightarrow q$.
Demostración:
Observe que la inversa $\sim p \rightarrow \sim q$ de la principal $p \rightarrow q$, es la contrapuesta de la recíproca $q \rightarrow p$ de la principal. Por estas razones y de acuerdo con el teorema 30, se concluye:

$$q \rightarrow p = \sim p \rightarrow \sim q$$

EDET

TEOREMA 32.
Hipótesis: $q \rightarrow p$ es la recíproca de la principal $p \rightarrow q$.
Afirmación: $q \rightarrow p$ no es lógicamente equivalente a $p \rightarrow q$.
Demostración:
Se constreyen las tablas de verdad de ambas condiciones $p \rightarrow q$ y de $q \rightarrow p$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Al comparar las dos últimas columnas de esta tabla de verdad, se observa que no son idénticas, por lo tanto: $p \rightarrow q \neq q \rightarrow p$.
EDET

LA BICONDICIONAL

La afirmación bicondicional es la conjunción de la condicional principal $p \to q$ y su recíproca $q \to p$, concepto que se expresa mediante la igualdad:

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$$

El signo de la bicondicional $p \leftrightarrow q$ tiene varias formas de leerse, a continuación se indican dos:

p si y sólo si q.

Si p, entonces q y recíprocamente.

Sus valores de verdad se deducen de su definición como se muestra en la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

En resumen:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

IMPLICACIÓN LÓGICA

La proposición P(p, q,...) IMPLICA LÓGICAMENTE a la proposición Q(p, q,...), si todo juego de valores de las variables p, q,..., que hacen verdaderas a P, también hacen verdadera a Q.

TEOREMA 33.

Hipótesis: P(p, q,...) implica lógicamente a Q(p, q,...).

Afirmación: La condicional de $P \to Q$ es tautología.

Demostración.

De acuerdo con la hipótesis todo juego de valores de las variables p, q,... que hace verdadera a P hace verdadera a Q. La condicional $P \to Q$ es falsa cuando P es verdadera y Q es falsa. Obviamente este caso no puede darse porque según la hipótesis, siempre que P es verdadera, también Q lo es, por lo tanto la condicional $P \to Q$ nunca es falsa.

EDET

TEOREMA 34. Recíproco del anterior.

Hipótesis: $P(p, q,...) \to Q(p, q,...)$ es tautología.

Afirmación: P(p, q,...) implica lógicamente a Q(p, q,...).

Demostración:

Según la hipótesis con todo juego de valores de p, q,... la condicional de $P \to Q$ es verdadera, por esto es imposible el caso de P verdadera y Q falsa, puesto que en esta circunstancia la condicional $P \to Q$ es falsa contra la hipótesis, por consiguiente, todo juego de valores que hace verdadera a P(p, q,...) también hace verdadera a Q(p, q,...). Análogamente, todo juego de valores de p, q,... que hace falsa a P(p, q,...) también hace falsa a Q(p, q,...).

EDET.

Los teoremas 33 y 34 constituyen un método efectivo para establecer cuando la proposición P(p, q,...) implica lógicamente a otra Q(p, q,...): se construye la tabla de verdad de $P \rightarrow Q$ y se observa si es tautología.

TEOREMA 35. Transitividad de la implicación lógica.
Hipótesis1: P(p, q,...) implica lógicamente a Q(p, q,...).
Hipótesis2: Q(p, q,...) implica lógicamente a R(p, q,...).
Afirmación: P(p, q,...) implica lógicamente a R(p, q,...).

Demostración:
Según la hipótesis 1, siempre que P es verdadera, también lo es Q. Por la hipótesis 2, si Q es verdadera también R lo es. Consecuentemente, siempre que P es verdadera lo es R. Análogamente siempre que P es falsa lo es Q y si Q es falsa lo es R, por consiguiente, siempre que P es falsa lo es R, luego P implica lógicamente a R.

EDET

DISYUNCIÓN COMPLETA O EXCLUYENTE

La disyunción completa se define mediante la afirmación: "p ó q, pero no ambos" y se representa con el signo $\veebar$, así $p \veebar q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$. Sus valores de verdad se calculan en la tabla que sigue:

p	q	~p	~q	p∧~q	~p∧q	p⊻q
V	V	F	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	F

TEOREMA 36.
Hipótesis 1: $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
Hipótesis 2: $p \veebar q = (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
Afirmación 3: $p \veebar q = \sim(p \leftrightarrow q)$

Demostración:
Se tiene la tabla de verdad:

p	q	p↔q	~(p↔q)	p⊻q
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

De esta tabla se infiere $p \veebar q = \sim(p \leftrightarrow q)$.

EDET

EQUIVALENCIA LÓGICA

Dos afirmaciones P y Q son lógico-equivalentes si y sólo si, siempre toman el mismo valor de verdad, para todo valor de verdad asignado a sus variables, por consiguiente sus tablas de verdad son idénticas y se escribe $P = Q$.

TEOREMA 37.
Hipótesis: Las proposiciones P y Q son lógico-equivalentes.
Afirmación: $P \leftrightarrow Q$ es tautología.
Demostración:
Por hipótesis, si P es verdadera, entonces Q es verdadera y si P es falsa lo es Q, luego $P \leftrightarrow Q$ es tautología.

EDET

TEOREMA 38. Recíproco del anterior.
Hipótesis: Con las proposiciones P y Q; la nueva proposición $P \leftrightarrow Q$ es tautología.
Afirmación: Las proposiciones P y Q son lógico-equivalente.
Demostración:
La hipótesis implica la tabla de verdad:

$P \leftrightarrow Q$	P	Q
V	V	V
F	F	F

Por consiguiente las tablas de verdad de P y Q son idénticas, luego P y Q son lógico-equivalentes.

TEOREMA 39.
Hipótesis: $p \rightarrow q$ es cualquier condicional.
Afirmación: $p \rightarrow q$ es lógico-equivalente a la condicional $(p \wedge \sim q) \rightarrow q$
Demostración:
Se debe mostrar que $[(p \wedge \sim q) \rightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ es tautologia mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	~q	$p \wedge \sim q$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$[(p \wedge \sim q) \rightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

EDET

TEOREMA 40.
Hipótesis: $p\to q$ es cualquier condicional.
Afirmación: $p\to q$ es lógico-equivalente a $(p\wedge\sim q)\to\sim p$.

Demostración:
Se muestra que la bicondicional $[(p\wedge\sim q)\to \sim p]\leftrightarrow(p\to q)$ es tautología.

p	q	~p	~q	$p\wedge\sim q$	$(p\wedge\sim q)\to \sim p$	$p\to q$	$[(p\wedge\sim q)\to \sim p]\leftrightarrow(p\to q)$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

EDET

TEOREMA 41.
Hipótesis: $p\to q$ es cualquier condicional.
Afirmación: $p\to q$ es lógico-equivalente a la a $(p\wedge\sim q)\to(r\wedge\sim r)$
Demostración:
Se construye la tabla de verdad de $[(p\wedge\sim q)\to(r\wedge\sim r)]\leftrightarrow(p\to q)$

p	q	~q	$p\wedge\sim q$	$r\wedge\sim r$	$(p\wedge\sim q)\to (r\wedge\sim r)$	$p\to q$	$[(p\wedge\sim q)\to(r\wedge\sim r)]\leftrightarrow(p\to q)$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V

EDET

RESUMEN
Los teoremas 39, 40 y 41 se resumen en la afirmación, la condicional $p\to q$ es lógico-equivalente a cada una de las tres condicionales:

$(p\wedge\sim q)\to q$, $(p\wedge\sim q)\to \sim p$, $(p\wedge\sim q)\to(r\wedge\sim r)$

MÉTODO DE PRUEBA POR REDUCCIÓN AL ABSURDO

Las identidades:
$$p\to q = (p\wedge\sim q)\to q$$
$$p\to q = (p\wedge\sim q)\to \sim p$$
$$p\to q = (p\wedge\sim q)\to(r\wedge\sim r)$$
constituyen el método de prueba conocido como demostración por REDUCCIÓN AL ABSURDO, explicado a continuación:
Si $p\to q$ es un teorema donde p es la conjunción de las hipótesis y q la tesis o afirmación del teorema, entonces se construye un nuevo teorema lógico-equivalente, donde a p se le agrega como nueva hipótesis la negación $\sim q$ de la tesis; esto significa que en el nuevo teorema la conjunción de las hipótesis es $p\wedge\sim q$. La tesis del nuevo teorema puede ser q, o bien, $\sim p$, pero también puede ser una contradicción cualquiera $r\wedge\sim r$. El procedimiento se detalla en el teorema que sigue.

TEOREMA 42.
Hipótesis 1: H1.
Hipótesis 2: H2.
. . . .
Hipótesis n: Hn.
Afirmación: Af.
Demostración:
La condicional que representa al teorema propuesto es $H1 \wedge H2 \wedge ... \wedge Hn \rightarrow Af$. (1)
Este teorema en su forma contrapuesta es: $\sim Af \rightarrow \sim(H1 \wedge H2 \wedge ... \wedge Hn)$. (2)
Más adelante se probará que en (2) es licito aplicar el TEOREMA 16 booleano de complementación del producto booleano; asi $\sim Af \rightarrow \sim H1 \vee \sim H2 \vee ... \vee \sim Hn$ (3)
La condicional (3) significa que para demostrar el TEOREMA 42, $H1 \wedge H2 \wedge ... \wedge Hn \rightarrow Af$, es suficiente partir de la negación $\sim Af$ de la tesis Af y concluir la negación $\sim Hi$ de una de las hipótesis.

EDET.

Al llegar a este punto de la tesis se verá claramente que el objetivo que impulsó el desarrollo de la teoria de las condicionales desde el punto de vista de la lógica formal es fundamentar los métodos deductivos de prueba de los teoremas en un sistema axiomático. Esta demostración es POR CONTRAPOSICIÓN.
El método por reducción al absurdo permite justificar al de INDUCCIÓN MATEMÁTICA, para lo cual enseguida se demuestra el siguiente teorema:

TEOREMA 43.
Hipótesis 1: La afirmación A(x) es verdadera cuando $x=1$.
Hipótesis 2: k es un número natural.
Hipótesis 3: Si A(k) es verdadera, entonces también A(k+1) es verdadera.
Afirmación: A(n) es verdadera para todo número natural n.
Demostración por reducción al absurdo.
Se parte de la negación de la afirmación:
P=A(n) no es verdadera para todo natural n, existe un número q, el MENOR DE TODOS para el cual se cumple P, esto es, A(q) es falsa. (1)
Conforme a hipótesis 1, $q \neq 1$, luego $q>1$. Además A(q-1) es verdadera. (2)
Las afirmaciones (1) y (2) constituyen la negación de la hipótesis 3.

EDET

Observe que en esta demostración se utilizó la propiedad: en todo subconjunto no vacio de números naturales hay un número único MENOR que los demás. Esta afirmación es el AXIOMA del BUEN ORDENAMIENTO, a primera vista parece una ingenuidad pero es uno de los metateoremas más fundamentales sobre el cual descansan otros metateoremas básicos.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA
Hay teoremas en los cuales se debe probar su validez para todo valor entero y positivo de un cierto parámetro; en estos casos el método de prueba ad hoc, es el que se conoce como inducción matemática, cuya estructura lógica es la siguiente:

1. El teorema afirma que A(n) es verdadera para todo entero positivo n.
2. La demostración se inicia con la comprobación de la afirmación, A(1) es verdadera.
3. Se acepta la hipótesis de inducción: A(q) es verdadera y a partir de ésta se prueba que A(q+1) es verdadera.
4. Si se logra probar la verdad de A(q+1), entonces A(n) es verdadera para todo número natural n de acuerdo con el TEOREMA 43.

Con lo expuesto finaliza la teoría de las condicionales para seguir con los teoremas básicos del álgebra de proposiciones.

TEOREMA 44. Teorema 1 de DE MORGAN.
Hipótesis: p,q son afirmaciones.
Afirmación: $\sim(p\vee q) = \sim p\wedge\sim q$
Demostración:
Se concluyen las siguientes tablas de verdad de ambos miembros de la igualdad de la afirmación y se comparan sus columnas finales:

p	q	~p	~q	p∨q	~(p∨q)	~p∧~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Obviamente $\sim(p\vee q)\leftrightarrow(\sim p\wedge\sim q)$ es tautología.
EDET

TEOREMA 45. Teorema 2 de DE MORGAN
Hipótesis: p,q son afirmaciones.
Afirmación: $\sim(p\wedge q) = \sim p\vee\sim q$
Demostración:
Se construyen las respectivas tablas de verdad:

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

Evidentemente $\sim(p\wedge q)\leftrightarrow(\sim p\vee\sim q)$ es tautología.
EDET

TEOREMA 46. De la deducción
Hipótesis: $(P_1\wedge P_2\wedge\ldots\wedge P_n\wedge R)\rightarrow S$ es tautología
Afirmación: $(P_1\wedge P_2\wedge\ldots\wedge P_n)\rightarrow(R\rightarrow S)$ es tautología.
Demostración por reducción a lo absurdo:
Negación de la afirmación:
Existe un caso * en el cual la afirmación: $(P_1^*\wedge P_2^*\wedge\ldots\wedge P_n^*)\rightarrow(R^*\rightarrow S^*)$ es falsa (1)

Se sabe que una condicional es falsa SOLAMENTE cuando su antecedente es verdadero y su consecuente falso, así en (1) $P_1^* \wedge P_2^* \wedge \ldots \wedge P_n^*$ es verdadera y falsa $R^* \rightarrow S^*$, lo cual implica que R^* es verdadera y S^* es falsa.
Como $P_1^* \wedge P_2^* \wedge \ldots \wedge P_n^*$ y R^* Son verdaderas, la conjunción $P_1^* \wedge P_2^* \wedge \ldots \wedge P_n^* \wedge R^*$ es verdadera y S^* es falsa, luego $(P_1^* \wedge P_2^* \wedge \ldots \wedge P_n^* \wedge R^*) \rightarrow S^*$, es falsa. (2)
En (2) se afirma que hay un caso donde la condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \wedge R) \rightarrow S$ es falsa contra la hipótesis.

EDET

Demostración directa.
Para simplificar se acepta $Q=(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ así la hipótesis toma la forma:
$(Q \wedge R) \rightarrow S = \sim(Q \wedge R) \vee S = (\sim Q \vee \sim R) \vee S$ es tautología.
Por asociatividad: $(Q \wedge R) \rightarrow S = \sim Q \vee (\sim R \vee S) = \sim Q \vee (R \rightarrow S)$
En consecuencia: $(Q \wedge R) \rightarrow S = Q \rightarrow (R \rightarrow S)$, esto es: $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow (R \rightarrow S)$.

EDET

ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

TEOREMA 47. Conmutatividad
Hipótesis: p, q son afirmaciones.
Afirmación: $p \vee q = q \vee p$, $p \wedge q = q \wedge p$
Demostración:

p	q	p∨q	q∨p	p∧q	q∧p
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	F

Ciertamente
$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
Son tautologías

EDET

TEOREMA 48. Distributividad de ∧ sobre ∨
Hipótesis: p, q son afirmaciones.
Afirmación: $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Demostración:

p	q	r	q∨r	p∧q	p∧r	p∧(q∨r)	(p∧q)∨(p∧r)
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Claramente $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ es tautología.

EDET

TEOREMA 49. Distributividad de $\vee$ sobre $\wedge$
Hipótesis: p, q son afirmaciones.
Afirmación: $p\vee(q\wedge r) = (p\vee q)\wedge(p\vee r)$
Demostración:

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee q$	$p\vee r$	$p\vee(q\wedge r)$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Indudablemente $[p\vee(q\wedge r)] \leftrightarrow [(p\vee q)\wedge(p\vee r)]$ es tautología.
EDET

Las tautologías son afirmaciones de estructura especial donde los cambios de variables en sus afirmaciones componentes no cambian su carácter tautológico; en lo que sigue las vamos a representar con el signo 1. Análogamente a las contradicciones las vamos a representar con el signo **0**.

TEOREMA 50
Hipótesis: p es afirmación.
Afirmación: $p\vee\mathbf{0} = p$
Demostración:

p	**0**	$p\vee\mathbf{0}$
V	F	V
F	F	F

Es fácil ver que $p\leftrightarrow(p\vee\mathbf{0})$ es tautología.
EDET

TEOREMA 51
Hipótesis: p es afirmación.
Afirmación: $p\wedge 1 = p$
Demostración:

p	1	$p\wedge 1$
V	V	V
F	V	F

Sin duda $(p\wedge 1) \leftrightarrow p$ es tautología.
EDET

TEOREMA 52.
Hipótesis: p es afirmación.
Afirmación: $p \vee \sim p = 1$
Demostración:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	1
V	F	V	V
F	V	V	V

$(p \vee \sim p) \leftrightarrow 1$ es tautología.
EDET

TEOREMA 53
Hipótesis: p es afirmación.
Afirmación: $p \wedge \sim p = \mathbf{0}$
Demostración:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	**0**
V	F	F	F
F	V	F	F

$(p \wedge \sim p) \leftrightarrow \mathbf{0}$ es tautología.
EDET

Por definición se tiene $\mathbf{0} \neq 1$.

ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES: RESUMEN

En la construcción del álgebra de proposiciones se cuenta con los teoremas 46, 47, 48, 49, 50, 51 y 52 que se pueden resumir en la siguiente tabla ordenándolos en dos grupos: los principales y los duales.

TABLA VI

PRINCIPALES	DUALES
1P. $p \vee q = q \vee p$	1D. $p \wedge q = q \wedge p$
2P. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	2D. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
3P. $p \vee \mathbf{0} = p$	3D. $p \wedge 1 = p$
4P. $p \vee \sim p = 1$	4D. $p \wedge \sim p = \mathbf{0}$
5P. $\mathbf{0} \neq 1$	5D. $1 \neq \mathbf{0}$

La clasificación propuesta se justifica porque de 1P. $p \vee q = q \vee p$ se pasa al 1D. $p \wedge q = p \wedge q$, con sólo cambiar el signo $\vee$ por el signo $\wedge$.
De 2P. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ se pasa al punto 2D. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ al cambiar el signo $\wedge$ por $\vee$ y recíprocamente $\vee$ por $\wedge$.
De 3P. $p \vee \mathbf{0} = p$ se llega al 3D. $p \wedge 1 = p$ mediante el cambio de $\vee$ por $\wedge$ y el cambio del signo **0** por el signo 1 y recíprocamente; esto mismo tiene lugar con 4P al pasar al 4D y el 5P al pasar al 5D.
Consecuentemente a los teoremas principales se les puede aplicar la operación de DUALIZACIÓN para obtener los teoremas duales y recíprocamente. Además la TABLA VI es reformulación de la TABLA I donde se anotan los axiomas de un álgebra booleana. Para efectuar las interpretaciones necesarias se deben explicar los cambios implicados en el paso del sistema abstracto booleano al concepto del álgebra de proposiciones, con este fin se construye la TABLA VII.

TABLA VII. TRANSFORMACIONES.

SIGNO O ABSTRACTO	CONCEPTO UTILIZADO EN LA TRANSFORMACIÓN	NUEVO SIGNO CONCRETO
+	Este signo se interpreta como disyunción de proporciones y se sustituye por el nuevo signo concreto.	$\vee$
*	Este signo se traduce como conjunción de proposiciones y se sustituye por el nuevo signo concreto.	$\wedge$
'	Se interpreta este signo abstracto como negación de proposiciones y se reemplaza por el nuevo signo concreto.	~
1	La interpretación de este signo es el concepto de TAUTOLOGÍA y se cambia por el nuevo signo concreto.	**1**
0	Este signo se interpreta mediante el concepto de CONTRADICCIÓN y se cambia por el nuevo signo concreto.	**0**
x, u ,v, ..	Los signos x, u, v,... se consideran como afirmaciones, elementos de un álgebra de proposiciones y se cambian por los nuevos signos.	p, q, r,...
B	Este signo se interpreta como el conjunto de proposiciones que integran un álgebra de proposiciones y se sustituye por el nuevo signo.	P(p,q,...)

Mediante las transformaciones explicadas en la TABLA VII aplicadas a la TABLA II donde se resumen los teoremas boléanos se obtiene la TABLA VIII.

TABLA VIII.
PROCESO DE INTERPRETACIÓN, TEOREMAS BÁSICOS DEL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

TEOREMA 1:	0 es único
TEOREMA 2:	1 es único
TEOREMA 3:	La negación $\sim p$ de p es única
TEOREMA 4:	$\sim(\sim p) = p$
TEOREMA 5:	$p \wedge p = p$
TEOREMA 6:	$p \vee p = p$
TEOREMA 7:	$p \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$
TEOREMA 8:	$p \vee 1 = 1$
TEOREMA 9:	$p \wedge (p \vee q) = p$
TEOREMA 10:	$p \vee (p \wedge q) = p$
TEOREMA 11:	Si $p \wedge q = r \wedge q$ y $p \wedge \sim q = r \wedge \sim q$, entonces $p = r$
TEOREMA 12:	Si $p \vee q = r \vee q$ y $p \vee \sim q = r \vee \sim q$, entonces $p = r$
TEOREMA 13:	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$
TEOREMA 14:	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
TEOREMA 15:	$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$
TEOREMA 16:	$\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$
TEOREMA 17:	Si $p \wedge \sim q = \mathbf{0}$, entonces $p = p \wedge q$
TEOREMA 18:	Si $p \vee \sim q = 1$, entonces $p = p \vee q$
TEOREMA 19:	$\sim \mathbf{0} = 1$
TEOREMA 20:	$\sim 1 = \mathbf{0}$
COROLARIO 1:	Si $p \vee q = 1$ y $p \wedge q = \mathbf{0}$, entonces $q = \sim p$ y $p = \sim q$

CONCLUSIÓN IMPORTANTE.

TABLA I. AXIOMAS DEL ÁLGEBRA BOOLEANA

PRINCIPALES		DUALES	
1P.	$x+u = u+x$	1D.	$x*u = u*x$
2P.	$x*(u+v) = (x*u)+(x*u)$	2D.	$x+(u*v) = (x+u)*(x+v)$
3P.	$x+0 = x$	3D.	$x*1 = x$
4P.	$x+x' = 1$	4D.	$x*x'=0$
5P.	$0 \neq 1$	5D.	$1 \neq 0$

TABLA III. AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

PRINCIPALES		DUALES	
1P.	$A\cup B = B\cup A$	1D.	$A \cap B = B\cap A$
2P.	$A\cap(A\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$	2D.	$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
3P.	$A\cup\phi = A$	3D.	$A\cap U = A$
4P.	$A\cup\bar{A} = U$	4D.	$A\cap\bar{A} = \phi$
5P.	$\phi \neq U$	5D.	$U \neq \phi$

TABLA VI. AXIOMAS DEL ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES.

PRINCIPALES		DUALES	
1P.	$p\vee q = q\vee p$	1D.	$p\wedge q = q\wedge p$
2P.	$p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$	2D.	$p\vee(q\wedge r) = (p\vee q)\wedge(p\vee r)$
3P.	$p\vee\mathbf{0} = p$	3D.	$p\wedge 1 = p$
4P.	$p\vee\sim p = 1$	4D.	$p\wedge\sim p = \mathbf{0}$
5P.	$\mathbf{0} \neq 1$	5D.	$1 \neq \mathbf{0}$

Estas tres tablas muestran claramente que existe ISOMORFÍA entre la lógica de proposiciones, la teoría de conjuntos y el álgebra booleana, por consiguiente la lógica formal es una CIENCIA ESENCIALMENTE MATEMÁTICA, la más general de todas las ciencias por lo cual es la ÚNICA que puede suministrar los métodos deductivos de prueba: el silogístico, la reducción al absurdo, la inducción matemática y el contraejemplo.
Asimismo las tablas dan a conocer la extraordinaria utilidad de los signos, no sólo en la lógica y en la matemática, sino en todas las ciencias exactas como en la mecánica teórica. Los hombres inmersos en un mundo heterogéneo han logrado inventar una simbología general, condición indispensable para la comprensión recíproca esencial para lograr el desarrollo de todas las ciencias. Destaca el planteo simbólico de la lógica y la matemática lo que ha posibilitado su aplicación a todas las ciencias, las de la naturaleza y las sociales; provocando su increíble desarrollo.
Los diagramas eulerianos son el inicio, la aurora de la formalización de la lógica; resuelven en forma sencilla y elegante el problema del silogismo válido del que no lo es, lo cual constituye el meollo de la lógica tradicional. La moderna lógica simbólica ha logrado extraordinarios frutos y colocarse en la trayectoria de las ciencias de la matemática pura: hay quien considera que su estructura es la de anillo booleano y que su desarrollo depende de las investigaciones en este campo con el respectivo proceso de interpretación.

CONSECUENCIAS

Al pasar de la lógica de términos a la de clase mediante los diagramas eulerianos, Euler orienta:

1 Los axiomas que sirven como premisas se consideran LEYES NECESARIAS DE LA LÓGICA. Los teoremas derivados de los axiomas son CONSECUENCIA de los PRINCIPIOS LÓGICOS, los cuales son las TAUTOLOGÍAS NECESARIAS SIGUIENTES:

p	Identidad $p \to p$	$p \wedge \sim p$	Ley de NO CONTRADICCIÓN $\sim(p \wedge \sim p)$	Tercero excluido $p \vee \sim p$
V	V	F	V	V
F	V	F	V	V

2 Los axiomas NO ESTÁN PRESCRITOS, no valen porque algún inventor lógico los haya establecido, no son reglas inventadas como las de un juego semejantes a las del ajedrez que según el historiador árabe Asaphad inventó Sessa, son PRINCIPIOS VERDADEROS, NECESARIOS e INDEMOSTRABLES. ¿Cómo se sabe que son necesarios? Porque son parte ESENCIAL de la conformación del pensamiento humano, evidentes por sí mismos, como el darse cuenta del ser: YO SOY.

3 El hombre piensa pero además SABE que piensa, lo CARACTERIZA saber que sabe y que puede COMUNICAR sus pensamientos; para lograr este propósito INVENTÓ lenguajes orales y escritos, por esto TODO LENGUAJE se construye para AJUSTARSE a las leyes esenciales del PENSAR y no a la inversa. Es posible que algunos animales aprendan a contar, pero una cosa es contar y otra muy diferente SABER que se sabe contar. Ese saber que se sabe es lo que ha permitido al hombre hacer ciencia, arte y anhelar la JUSTICIA.

4 Los hombres SABEN cuando piensan en A y cuando dejan de pensar en A, pueden comunicar, pienso en A, ya no pienso en A y saben que les es imposible SIMULTÁNEAMENTE pensar en A y no estar pensando en A. La NEGACIÓN, la CONJUNCIÓN y la IMPOSIBILIDAD de pensar $p \wedge \sim p$, son

FUNCIONES BÁSICAS DEL PENSAMIENTO.

5 El hombre no infiere ARBITRARIAMENTE, cuando reconocemos que hacemos una implicación, esta aptitud no es exclusivamente personal, es capacidad de todos los hombres independientemente del lenguaje, del día y del lugar de quien infiere.
Ahora los estudios del genoma humano prueban la indiscutible unidad humana, pero la lógica probó mucho antes la unidad del pensamiento humano. Ningún hombre puede afirmar p y sin retractarse afirmar $\sim p$.

6 Si a partir de las premisas "Todos los mexicanos son americanos" y "todos veracruzanos son mexicanos", autoritariamente ALGUIEN obligará a cierto individuo a concluir "Todos los veracruzanos NO son americanos", ese ALGUIEN estaría violando uno de los más SAGRADOS derechos humanos. Ese ALGUIEN carece de moral, por lo tanto perderá el respecto de todos los seres humanos; por no ser humano. La lógica suministra LEYES INVIOLABLES. Quizá existan gobiernos

interesados en reinterpretar los fundamentos de la lógica para darle cierto barniz científico a sus particulares designios, generalmente inconvenientes.

7 Los procedimientos operativos que deben seguirse en las demostraciones de los teoremas presuponen la validez universal y eterna de los principios lógicos, INDEPENDIENTEMENTE de toda ingerencia de filósofos y teólogos. Además presuponen la capacidad de nuestros oyentes para distinguir entre argumentos válidos y los inválidos.

8 Es posible construir sistemas axiomáticos cuyos axiomas sean postulados quizá arbitrarios, sin pretensiones de verdad ni de necesidad lógica, valen porque se ha establecido que valgan, pero el desarrollo de tales sistemas, es decir la demostraciones de los teoremas deducidos de los axiomas impuestos, exigen que los pasos demostrativos cumplan ciertos requisitos, NO SON ARBITRARIOS, se fundamentan en PRINCIPIOS LÓGICOS VÁLIDOS, en contraste de los axiomas del sistema. Las formas demostrativas señalan rutas que deben recorrerse independientes de la voluntad del demostrador y del lenguaje empleado, natural o vocabulario especial. Algunos opinan que aparte de la lógica matemática hay la lógica de EXPRESIONES DEL HABLA COTIDIANA quizá con objetivos populistas pero evidentemente NO científicos, quizá para encubrir intereses económico-políticos.

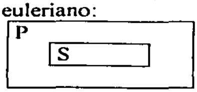
9 La EXPERIENCIA NO ENSEÑA que si la proposición p es verdadera su negación ~p es falsa. No hay experimento alguno que motive el abandono de este principio UNIVERSAL, guía indiscutible en los proyectos e investigaciones experimentales. No todo conocimiento viene de la experiencia, el principio de NO-CONTRADICCIÓN y su correlativo concepto de NEGACIÓN son respectivamente condición mínima y constitutivo mínimo de TODO PENSAMIENTO COHERENTE, pero también lo son el concepto de CONJUNCIÓN y el de DISYUNCIÓN.

10 Los diagramas eulerianos son de dos clases, los que afirman y los que niegan: [Todos los S son P, algunos S son P] y [ningún S es P, algunos S no son P], donde S y P son clases, situación que directamente conduce a la teoría de la CUANTIFICACIÓN, esto es:

a Una función lógica p(x) de Dominio D y CODOMINIO $\{V, F\}$ donde V significa verdadero y F falso.

b El subconjunto $A \subset D$, donde para todo $x \in A$ se tiene p(x) es verdadera, es el dominio de verdad de p(x), concepto que se indica con los signos $(\forall x \in A)p(x)$ o bien, cuando no hay confusiones $\forall x, p(x)$, cuya lectura es: "para todo elemento x de A, la afirmación p(x) es verdadera".

c El signo $\forall$ se llama CUANTIFICADOR UNIVERSAL y se lee "para todo", por esto el diagrama euleriano:



Todo S es P se puede escribir $(\forall x \in S)x \in P$.

Si p(x) es función lógica de dominio D, entonces los signos $(\exists x \in D)p(x)$, o bien, $\exists x, p(x)$ es afirmación y se lee: "existe por lo menos un x en D tal que p(x) es afirmación verdadera", más brevemente "para algún x, p(x). "el signo $\exists$ se llama CUANTIFICADOR EXISTENCIAL y se lee "existe", lo cual implica que D no es vacío".

d NEGACIONES DE CUANTIFICADORES.

La negación "para todo elemento de A, la afirmación p(x) es verdadera" afirma que por lo menos existe un elemento x de A tal que p(x) es falsa, por consiguiente:

$\sim(\forall x\in A)p(x) = \exists x\in A$, tal que $\sim(p(x))$

$\sim(\forall x\in A)p(x) = (\exists x\in A)\sim p(x)$ (1)

Análogamente la negación del cuantificador existencial es:

$\sim(\exists x\in A)p(x) = (\forall x\in A)\sim(p(x))$ (2)

"No es verdad que en A existe un elemento x para el cual p(x) es verdadera porque para todo elemento x de A, p(x) es falsa.

La igualdad (1) significa que para demostrar que los teoremas de la forma $(\forall x\in A)p(x)$ son falsos, basta mostrar que un elemento $x_1\in A$ conduce a $p(x_1)$ es falsa.

El elemento x_1 se llama CONTRAEJEMPLO del teorema $\forall x$, p(x)

e Hasta aquí se consideró la función lógica p(x) de una variable, ahora se define la función $p(x_1,\ldots,x_n)$ de n variables de modo que $p(a_1,\ldots,a_n)$ es falsa o verdadera para toda n-ada ordenada $(a_1,\ldots,a_n) \in A_1\times,\ldots,\times A_n$, donde $A_1,\ldots,A_n$ son conjuntos conocidos, por consiguiente el dominio de la función $p(x_1,\ldots,x_n)$ es el producto cartesiano $A_1\times,\ldots,\times A_n$ y el codominio es el conjunto $\{V,F\}$, donde V significa verdadero y F falso.

Esta definición permite precisar afirmaciones cuantificadas donde la función lógica va precedida por un cuantificador para cada variable, por ejemplo, conocidos los conjuntos A_1, A_2, A_3, se puede escribir

$\forall x_1\in A_1(\exists x_2\in A_2)\forall x_3\in A_3,\ p(x_1, x_2, x_3).$ (1)

La negación de (1) se construye del modo siguiente:

$\sim[\forall x_1\in A_1(\exists x_2\in A_2)\forall\ x_3\in A_3,\ p(x_1, x_2, x_3)] =$

$= \exists x_1\in A_1\sim[(\exists x_2\in A_2)\forall\ x_3\in A_3,\ p(x_1, x_2, x_3)] =$

$= \exists x_1\in A_1\forall x_2\in A_2\sim[\forall\ x_3\in A_3,\ p(x_1, x_2, x_3)] =$

$= \exists x_1\in A_1\forall x_2\in A_2\exists\ x_3\in A_3,\ \sim p(x_1, x_2, x_3).$ (2)

En caso de no presentarse confuciones, las expresiones (1) y (2) se pueden simplificar, esto es, dada la afirmación $\forall x_1\in A_1(\exists x_2\in A_2)\forall x_3\in A_3 p(x_1, x_2, x_3)$, su negación es $\exists x_1\forall x_2\exists x_3\sim p(x_1,x_2,x_3)$.

Por consiguiente se tiene el ejemplo:

$\sim[\forall x_1\exists y[p(x,y) \rightarrow q(x,y)]= \exists x\forall y(p(x,y)\wedge\sim q(x,y)$, porque

$p(x,y)\rightarrow q(x,y) = \sim p(x,y)\vee q(x,y)$, donde se aplica el respectivo teorema de De Morgan.

Las afirmaciones categóricas extendidas al concepto de clases se pueden expresar mediante CUANTIFICADORES, esto es:

A. Todos los S son P, con cuantificadores $\forall x\in S$, $(x\in P)$.

E. Ningún S es P, con cuantificadores $\forall x\in S$, $(x\notin P)$

I. Algunos S son P. con cuantificadores $\exists x\in S$, $(x\in P)$

O. Algunos S no son P. con cuantificadores $\exists x\in S$, $(x\notin P)$

Mediante el concepto básico de negación:

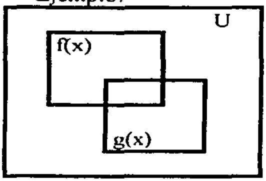
$\sim[\exists x \in S, (x \notin P)] = \forall x \in S, (x \in P)$: A

$\sim[\exists x \in S, (x \in P)] = \forall x \in S, (x \notin P)$: E

$\sim[\forall x \in S, (x \notin P)] = \exists x \in S, (x \in P)$: I

$\sim[\forall x \in S, (x \in P)] = \exists x \in S, (x \notin P)$: O

Ejemplo:



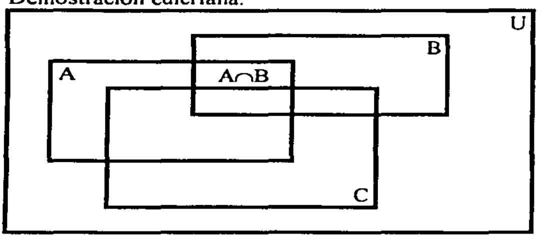
Observe la naturalidad con la que el diagrama Euleriano adjunto prueba la fórmula:
$\forall(x), (f(x) \wedge g(x)) \equiv \forall(x), f(x) \wedge \forall x, g(x)$.

En la enseñanza de la lógica un recursos didáctico de primer orden son los diagramas eulerianos; no se abandonarán nunca porque tienen las propiedades:

1. Conservan estrecha analogía con el lenguaje común.
2. Por su gran valor didáctico se conceptúan naturales.
3. Interesan sus evidentes características formales en la medida que estas son significativas en cierto contexto dado. Propendemos a utilizarlos en el estudio de ciertas fórmulas abstractas para presentar la lógica de una argumentación en una exposición más sencilla, por ejemplo en la demostración de teoremas, como se ilustra a continuación:

TEOREMA: $A \cap B \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$

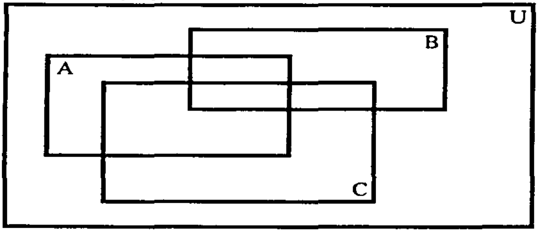
Demostración euleriana.



Hipótesis:
$A \cap C \neq \phi$
$B \cap C \neq \phi$
$A \cap B \neq \phi$

TEOREMA: $(A\cup C)\cap(B\cup \overline{C})\subset(A\cup B)$

Demostración euleriana:



Hipótesis:

$A\cup C\neq\phi$

$B\cup \overline{C}\neq\phi$

$A\cup B\neq\phi$

11. TEORÍA FORMAL

Se establece una teoria formal T cuando se presentan los elementos siguientes:

- 11a. Un conjunto numerable de signos, de preferencia finito, como: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, ( ), A_i. $i\in N$.
- 11b. Reglas para combinar los signos de T y formar un conjunto de FÓRMULAS bien constituidas, FBC, de T.
- 11c. Un conjunto ESPECIAL de FBC_A: los axiomas de T. En este caso T es una teoria axiomática.
- 11d. Un conjunto FINITO DE RELACIONES $R_1,\dots, R_n$, entre las FBC; las REGLAS DE INFERENCIA. Para cada relación R_i, existe un número natural j único tal que para todo conjunto j de FBC_A y cada $A\in FBC$ se puede decidir cuando las $jFBC_A$, dadas están en relación R_i con A. .
  Si este requisito se cumple A es la CONSECUENCIA DIRECTA de las FBC_A dadas, en VIRTUD DE R_i, o sea, A es TEOREMA de T.
- 11e. Una PRUEBA o DEMOSTRACIÓN en T, es una sucesión $A_1,\dots,A_n$ de FBC tales que para toda i A_i es axioma o teorema precedente de acuerdo con las reglas de inferencia.
- 11f. Todo TEOREMA A de T es FBC, consecuencia de la última FBC de la cual se deriva A. Aunque T sea axiomática, esto es, si hay un procedimiento efectivo para revisar cualquier FBC y determinar si es teorema; este procedimiento debe ser un método mecánico; si este existe, la teoria es DECIDIBLE, en caso contrario es NO-DECIDIBLE, en estas últimas se requiere mucho ingenio e inventiva para probar la calidad de teorema de las FBC.
- 11g. Una FBC A es CONSECUENCIA en T de un conjunto C de FBC, si y sólo si hay una sucesión $A_1,\dots A_n$ de FBC, tales que $A=A_n$, donde A_i es axioma o consecuencia directa, mediante una regla de inferencia de algunas FBC PRECEDENTES en la sucesión. Esta sucesión es la prueba o DEMOSTRACIÓN de A a partir de C y los elementos de C son las hipótesis o premisas de la DEMOSTRACIÓN. Si C es conjunto finito se escribe $A_1,\dots,A_n \vdash A$; si $C=\phi$, $\phi\vdash A$, esto es, $\vdash A$, notación mediante la cual se indica que A es axioma.

CARDINALIDAD

Consideremos los conjuntos de siete sillas, de siete gatos, de siete árboles frutales y de siete libros. Después de excluir toda consideración a su naturaleza, permanece la particularidad común de que todos están compuestos de siete elementos. Desde este punto de vista, todos los conjuntos nombrados son indistinguibles, son EQUIVALENTES, son representantes del número siete. Establecer la equivalencia de conjuntos con número finito de elementos es fácil labor, con sólo poner sus elementos en correspondencia biunívoca; con el fin de extender estos conceptos a conjuntos infinitos se suministra la definición:

Los conjuntos A y B son equivalentes si existe la función biyectiva $f: A \to B$. Este concepto se indica con el signo $A \cong B$, por consiguiente dos conjuntos finitos C y D son equivalentes si tienen el mismo número de elementos, esto es, si ambos tienen el mismo NÚMERO CARDINAL; obviamente el conjunto E tiene un número cardinal mayor que el del conjunto H cuando existe un subconjunto $S \subset E$, tal que $H \cong S$, pero E no es equivalente a H.

CONJUNTO INFINITO SEGÚN DEDEKIND

Todo conjunto infinito es equivalente a uno de sus subconjuntos propios.

TEOREMA 54.

Hipótesis: $N=\{1,2,3,...\}$ es el conjunto de los números naturales y $P=\{2,4,6...\}$ de los número pares.

Afirmación: N y P son equivalentes.

Demostración

Entre los elementos de N y los de Py existe la función biyectiva $f:N \to P$, donde para todo $n \in N$ se tiene $f(n)=2n \in P$ y $P \subset N$.

EDET

COROLARIO

El conjunto $N=\{1,2,3,...\}$ de los números naturales es infinito, su número cardinal es $\aleph_0$ y se llama aleph cero.

TEOREMA 55.

Hipótesis: los conjuntos A y B son equivalentes.

Afirmación: La relación $A \cong B$ es de equivalencia.

Demostración:

1. Existe la función biyectiva neutral f_{1A}, tal que f_{1A}: $A \to A$, luego $A \cong A$.
2. Si $A \cong B$, entonces existe la función biyectiva $f:A \to B$, por esto, existe la función inversa $f^{-1}= B \to A$, también biyectiva, por esto, $A \cong B$ implica $B \cong A$.
3. Si $A \cong B$ y $B \cong C$, entonces existen las funciones biyectivas $f:A \to B$ y $g:B \to C$. La composición de funciones gof es biyectiva y se tiene gof: $A \to C$, de manera que $A \cong B$ y $B \cong C$ implica $A \cong C$.

EDET

CONJUNTO NUMERABLE

Todo conjunto A equivalente al de los números naturales N={1,2,...} es numerable, pero es imposible de asignarle un número finito a esta cardinalidad, es quimérico hablar de "número de elementos", la cardinalidad de N se representa con $\aleph_0$, aleph cero.

Si un conjunto es infinito y no equivalente a N, entonces es No-numerable. Todo conjunto finito es equivalente a un subconjunto finito de N, así todo conjunto finito es numerable y todos los conjuntos finitos equivalentes están representados por el mismo cardinal. Análogamente, en el caso de los conjuntos infinitos equivalentes, todos están representados por el mismo número cardinal TRANSFINITO. Estos números cardinales transfinitos son una ampliación de los números naturales.

TEOREMA 56.

Hipótesis: Se tiene el conjunto $P_n=\{2,3,5,\ldots,p_n\}$ de los n primeros primos.

Afirmación: El conjunto de $P=\{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}$ de los números primos es infinito numerable.

Demostración:

Se construye el número $Z=[2(3)5(7)\ldots p_n]+1$.

Z es número primo mayor que p_n, así dado P_n, para toda $n\in N$, siempre hay un primo mayor que p_n. Los números primos se pueden ordenar en una sucesión de acuerdo con su magnitud numérica y establecer la correspondencia biyectiva.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
N=\{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & \ldots, & 100, & \ldots, & 200, & \ldots, & 300, & \ldots\} \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
P=\{ & 2, & 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, & \ldots, & 541, & \ldots, & 1223, & \ldots, & 1987, & \ldots\}
\end{array}$$

Mediante la CRIBA DE ERATÓSTENES:

Por consiguiente $P\subset N$ y $P\cong N$, luego el cardinal del conjunto P es aleph cero y P es infinito numerable.

EDET

TEOREMA 57.

Hipótesis: La sucesión infinita $S=a_1,a_2,\ldots$ tiene todos sus elementos distintos.

Afirmación: S es numerable.

Demostración:

Toda sucesión es una función biyectiva $f(n)=a_n$, cuyo dominio es N, luego S es numerable de cardinalidad aleph cero.

EDET

Corolario:

Los conjuntos: $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots 1/n\ldots\}$

$\{1,-2,3,-4,\ldots,(-1)^{n-1}n,\ldots\}$

$\{(1,1), (4,8),(9,27),\ldots,(n^2,n^3)\ldots\}$

Son numerables de cardinal aleph cero.

TEOREMA 58.
Hipótesis: N={1, 2, 3,...} es el conjunto de los números naturales.
Afirmación: NxN es conjunto numerable.
Demostración:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & \rightarrow & (1,3) & & (1,4) & \rightarrow & (1,5),\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & (3,5)\ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & & (3,5)\ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & (4,5)\ldots \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
(5,1) & & (5,2) & & (5,3) & & (5,4) & & (5,5)\ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Las flechas establecen la sucesión infinita de elementos distintos, asi NxN={(1,1), (2,1),(1,2),(1,3)...} por esto NxN es numerable de cardinal aleph cero.

EDET

COROLARIO

El conjunto de los racionales positivos es numerable,

NÚMEROS ALGEBRAICOS

Son las raíces de la ecuación algebraica.

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_{n-i}X^{n-i} + \ldots + a_1X^1 + a_0 = 0 \qquad (1)$$

donde $n \in N$ y es a_{n-i} número entero donde $a_n \neq 0$.
Los números racionales son un subconjunto de los números algebraicos debido a que todo racional es la raiz de la ecuación de primer grado,
$a_1X^1 + a_0 = 0$ donde $a_1 \neq 0$ y a_1 y a_0 son enteros.
A partir de las ecuaciones algebraicas de segundo grado se presentan las raíces complejas, esto es, en $a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ las raíces son:

$$r_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \qquad\qquad r_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

donde es posible que $a_1^2 - 4a_2a_0 < 0$.
La altura de la ecuación algebraica (1) es el entero
$h_n = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_{n-i}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$
Así, para las ecuaciones algebraicas del primer grado se tiene $h_1 = 1 + |a_1| + |a_0|$
En las ecuaciones algebraicas de segundo grado: $h_2 = 2 + |a_2| + |a_1| + |a_0|$
Análogamente, con $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$
$h_3 = 3 + |a_3| + |a_2| + |a_1| + |a_0|$
Y con $a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 = 0$
$h_4 = 4 + |a_4| + |a_3| + |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Cada ecuación de grado n tiene cuando más n raíces diferentes, por esto toda ecuación algebraica tiene a lo más n números algebraicos diferentes, los cuales se pueden ordenar de acuerdo con el programa siguiente:

$\boxed{1}$. Según el aumento de las alturas de sus ecuaciones algebraicas de las cuales son solución.

$\boxed{2}$. Con ecuaciones de la misma altura se ordenan los números algebraicos de acuerdo con el aumento del grado de sus respectivas ecuaciones.

$\boxed{3}$. Las distintas soluciones de la misma ecuación, los números algebraicos se ordenan, si son números reales de acuerdo con el aumento de su valor. Si son números complejos, según el valor de su parte real; si estas son iguales por el valor creciente de su parte imaginaria.

CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ALGEBRAICOS

Altura	Grado	Coeficientes	Ecuaciones	Números algebraicos
h=2	n=1	$a_1 = \pm 1$, $a_0 = 0$	$\pm x = 0$	0
h=3	n=1	$a_1 = \pm 2$, $a_0 = 0$	$\pm 2x = 0$	0
		$a_1 = \pm 1$, $a_0 = \pm 1$	$\pm x \pm 1 = 0$	-1, +1
	n=2	$a_1 = a_0 = 0$, $a_2 = \pm 1$	$\pm x^2 = 0$	0
		$a_1 = \pm 1$, $a_0 = \pm 2$	$\pm x \pm 2 = 0$	-2, 2
	n=1	$a_1 = \pm 2$, $a_0 = \pm 1$	$\pm 2x \pm 1 = 0$	-½, + ½
		$a_1 = \pm 3$, $a_0 = 0$	$\pm 3x = 0$	0
h=4		$a_2 = \pm 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = \pm 1$	$\pm x^2 \pm 1 = 0$	-1, -i, +1, +i
	n=2	$a_2 = \pm 1$, $a_1 = \pm 1$, $a_0 = 0$	$\pm x^2 \pm x = 0$	-1, 0, 1
		$a_2 = \pm 2$, $a_1 = a_0 = 0$	$\pm 2x^2 = 0$	0
	n=3	$a_2 = \pm 3$, $a_2 = a_1 = a_0 = 0$	$\pm 3x^3 = 0$	0

Mediante este método de cálculo se van ordenando los números algebraicos en una sucesión infinita, esto es, se va construyendo un conjunto numerable.

$$A = \{0, -1, +1, -2, +2, -½, +½, -i, i, \dots\}$$

En esta sucesión todo número algebraico ocupa un lugar bien definido, por consiguiente se afirma el

TEOREMA 59

Hipótesis 1: $a_n X^n + \dots + a_{n-j} X^{n-j} + \dots + a_1 X + a_0 = 0$ (1)
es ecuación algebraica

Hipótesis 2: Las raíces de las ecuaciones algebraicas son los números algebraicos.

Afirmación: El conjunto de todos los números algebraicos es numerable, esto es, su número cardinal es aleph cero.

Demostración:

Es el método de cálculo de los números algebraicos.

EDET

Los conjuntos $N=\{1,2,3,4,\dots\}$, $G=\{2,4,6,\dots\}$, $U=\{1,3,5,\dots\}$, $P=\{2,3,5,7,11,13,17,\dots\}$, $A=\{0,-1,+1,-2,+2,-½,+½,-i,+i,\dots\}$, todos son numerables y A contiene a N, G, U y P como subconjuntos propios. Falta investigar si existen conjuntos NO-NUMERABLES.

COROLARIO

El conjunto P de polinomios enteros $p(x)= a_m X^m+\ldots+ a_1 X + a_0 = 0$ (1)
donde $a_m,\ldots,a_1,a_0$ son enteros es numerable porque para todo par de números naturales (m,n) el conjunto P(m,n) de polinomios de (1) de grado m y $|a_m|+\ldots+|a_1|+|a_0|=n$ es finito, luego $P= \bigcup_{(i,j)\in(N\times N)} P(i,j)$ es numerable porque P no es finito.

CONJUNTOS NO NUMERABLES

Todos los números reales r en el intervalo $0<r<1$, pueden escribirse en forma única como fracciones decimales infinitas, por ejemplo:
1/2=0.49999..., 1/3= 0.3333..., 1/4=0.249999...,
2/5=0.39999..., 1/7=0.142857172857..., $\pi/6$=0.523598...

TEOREMA 60.

Hipótesis: $I=\{r|\ 0<r<1\}$ es el conjunto de números reales en el intervalo $0<r<1$.
Afirmación: I no es numerable.
Demostración:
Si todos estos reales fueran numerables, entonces sería posible escribirlos en cierto orden, esto es, existiría un primer número, luego un segundo, consecutivo un tercero y así sucesivamente como se muestra:

$$\left.\begin{array}{l} 1\to 0.\ Z_{11}\ Z_{12}\ Z_{13}\ Z_{14}\ldots \\ 2\to 0.\ Z_{21}\ Z_{22}\ Z_{23}\ Z_{24}\ldots \\ 3\to 0.\ Z_{31}\ Z_{32}\ Z_{33}\ Z_{34}\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\rangle \begin{array}{l}\text{Lista L de fracciones decimales propuestas} \\ \text{y ordenadas conforme a N}\end{array}$$

donde los dígitos Z_{ij} son elementos del conjunto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}. Se puede formar el número real $r_1=0.\ a_1\ a_2\ a_3,\ldots$ donde $a_i\neq Z_{ii}$, o bien $a_1\neq Z_{11}$, $a_2\neq Z_{22}$, $a_3\neq Z_{33},\ldots$ y $a_i\in\{0,1,2,3,\ldots 9\}$; en consecuencia, el número r_1 se puede construir en una infinidad de formas, pero ninguna r_1 construida en esta forma está contenida en la lista L de las fracciones propuestas porque las r_1 difieren de la primera por lo menos en la primera decimal ($a_1\neq Z_{11}$), difiere de las segunda por lo menos en la segunda decimal ($a_2\neq Z_{22}$) y así sucesivamente; estos resultados prueban que no existe conjunto numerable de números reales en el intervalo $0<r<1$ que contenga el conjunto de TODOS los números reales de este intervalo, por estas razones I no es numerable.

EDET

COROLARIO

El intervalo $[0,1]=\{0\}\cup I\cup\{1\}$ no es numerable, por esto todo conjunto equivalente al intervalo [0,1] no es numerable. Tiene cardinal C, así $[0,1]\equiv(0,1)$, $[0,1]\equiv[0,1)$, $[0,1]\equiv(0,1]$.

COROLARIO.

Todo intervalo cerrado [a,b] tiene cardinalidad C porque existe la función biyectiva $f(x):[0,1]\to[a,b]$, donde $f(x) = a+(b-a)x$. Si $a= -\pi/2$, $b=+\pi/2$, entonces el intervalo cerrado $[-\pi/2,\pi/2]$ tiene cardinalidad C.

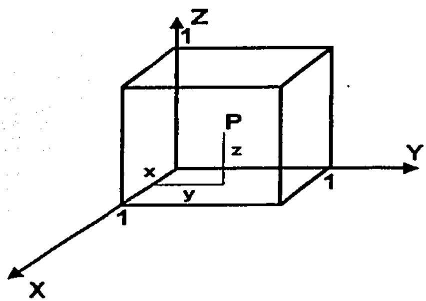
Si $f(x)=t_g x$, cuyo dominio es el segmento $[-\pi/2,\pi/2]$ y el codominio es el conjunto de los reales $(-\infty<x<+\infty)$, entonces el conjunto de todos los números reales tiene cardinal C porque $f(x)=t_g x$ es función biyectiva en $[-\pi/2,\pi/2]$.

El conjunto de todos los números reales $\{-\infty<x<+\infty\}$ puede ponerse en correspondencia biyectiva con los puntos de la recta real, luego ésta tiene cardinal C.

El cardinal C se llama NÚMERO DEL CONTINUO, éste es un cardinal MAYOR que el aleph cero, así no todos los conjuntos infinitos son equivalentes, hay NIVELES en el infinito análogamente como en los conjuntos finitos.

TEOREMA 61

Hipótesis: A es el conjunto de los puntos interiores de un cubo unitario.



Afirmación: Su número cardinal es C.

Demostración:

El punto P interior del cubo tiene de coordenadas: $x=0.a_1a_2a_3,\ldots$ $y=0.b_1b_2b_3\ldots$ $z=0.c_1c_2c_3\ldots$

Consecuentemente se puede caracterizar el punto P mediante la decimal $d=0.a_1b_1c_1a_2b_2c_2a_3b_3c_3\ldots$ esto prueba que a todo punto interior del cubo le corresponde en forma única una decimal d, donde $0<d<1$, esto es un punto del segmento abierto $(0,1)$, luego el número cardinal de A es C. Análogamente se prueba que el conjunto de los puntos interiores de un cuadro unitario tiene cardinal C.

COROLARIO

Los conjuntos de puntos de una recta, de un plano y de un espacio son equivalentes, esto es, pueden colocarse en CORRESPONDENCIA BIUÍVOCA. En la caracterización de un número cardinal NO TIENE SIGNIFICACIÓN EL CONCEPTO DE DIMENSIÓN.

CONSTRUCCIÓN DE FREGE

Frege concibió la idea de construir los números naturales mediante el concepto de conjunto y la operación de SUCESOR añadiendo UNO, idea que adoptó Russell y de este modo crearon un SISTEMA en el cual, pudieron demostrar que permanecerían verdaderos los postulados de Peano y definieron: Si A es un conjunto y #A su número cardinal, entonces #A={S| S es un conjunto y $S \cong A$}, claramente $A \subset \#A$. Además Frege y Russell fueron capaces de generalizar su procedimiento en forma efectiva y sencilla. Así definieron: $\#\phi=0$, $\#\{1\}=1$, $\#\{1,2\}=2$, $\#\{1,2,3\}=3$,.., a los que llamaron CARDINALES FINITOS, esto es, los números cardinales se consideran SUPERCONJUNTOS de los cardinales finitos, 0,1,2,3,..., o bien de N y 0 (cero).

El siguiente paso es instituir la ARITMÉTICA CARDINAL; si a=#A, b=#B y $A \cap B=\phi$, entonces: $a+b=\#(A \cup B)$, ab= (AxB).

Definición independiente de los conjuntos A,B, esto es, si $A \cong A_1$, $B \cong B_1$, y $A \cap B=\phi$, $A_1 \cap B_1=\phi$, entonces $\#(A \cup B)=\#(A_1 \cup B_1)$, $\#(AxB)=\#(A_1xB_1)$.

Las operaciones de adición y multiplicación de cardinales finitos corresponden a los de adición y multiplicación de números naturales, pero con el cardinal aleph cero se presenta la propiedad de EQUIPOTENCIA porque $\aleph_0=\#\{1,3,5,...\}$, $\aleph_0=\#\{2,4,6,...\}$,, así

$\aleph_0+\aleph_0=\#\{1,3,5,...\} \cup \{2,4,6,...\}=\#N=\aleph_0$

$\aleph_0\aleph_0=\#(NxN)=\#N=\aleph_0$

También es INVÁLIDA la ley de cancelación porque

$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0=1+\aleph_0$, lo cual no implica $\aleph_0=1$. análogamente $\aleph_0 * \aleph_0=\aleph_0=1\aleph_0$ pero $\aleph_0 \neq 1$.

PROBLEMA

X={a,b,c,}, determinar las funciones caracteristicas de X y la familia de subconjuntos de X.

Solución:

Con el árbol contador se obtiene la tabla 1.

a	b	c
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Asi, las funciones características de X son:

a→V	a→V	a→V	a→V	a→F	a→F	a→F	a→F
b→V	b→V	b→F	b→F	b→V	b→V	b→F	b→F
c→V	c→F	c→V	c→F	c→V	c→F	c→V	c→F
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
S: {a,b,c},	{a,b },	{a, c},	{a},	{b,c},	{b},	{c},	ϕ

P es la familia de las funciones características de X, S, es 2^X, la familia de los subconjuntos de X y P es equivalente a 2^X.

TEOREMA 62.
Hipótesis 1: X es un conjunto cualquiera.
Hipótesis 2: P es la familia de funciones características de X.
Afirmación: $2^X \cong P$
Demostración:
Si B es el subconjunto de X, entonces $B \subset 2^X$. Se establece la función: $f: 2^X \to P$, la cual le asigna a B como imagen la función característica de X, donde los elementos A tienen imagen "verdadero" y esta función es biyectiva, luego $2^X \cong P$.

EDET

POTENCIAS DE CARDINALES

Si A y B son conjuntos, entonces B^A es el conjunto de todas las funciones $f: A \to B$, por ejemplo, si A={a,b,c} y B={1,2}, entonces de la tabla 1, del problema anterior con V=1 y F=0, se obtienen las funciones:

a→1	a→1	a→1	a→1	a→0	a→0	a→0	a→0
b→1	b→1	b→0	b→0	b→1	b→1	b→0	b→0
c→1	c→0	c→1	c→0	c→1	c→0	c→1	c→0

Si $p=\#A=3$, $q=\#B$, entonces $q^p=\#B^A=2^3=8$.
En general las leyes de los exponentes válidas para los números naturales valen para los cardinales, así, $p^q p^r = p^{q+r}$, $(p^q)^r=p^{qr}$, $(pq)^r = p^r q^r$

DESIGUALDADES EN LOS CARDINALES

1. Se tienen los conjuntos A, B y $B_1 \subset C$
2. $A \cong B_1$, esto es, existe la función biyectiva $f_1: A \to B_1$, luego existe la función inyectiva $f: A \to B$.
3. Si se cumplen 1 y 2, entonces se escribe $A \lesssim B$, que se lee "A precede a B". En este caso si $\alpha=\#A$ y $\beta=\#B$, entonces $\alpha \leq \beta$
4. Si $A \lesssim B$ y $A \not\cong B$, entonces se escribe A<B, por lo cual se tiene $\alpha \leq \beta$ y $\alpha \neq \beta$, por ejemplo N es el conjunto de los naturales y R de los reales, y $N \subset R$, luego $\aleph_0 \leq C$ y como R no es numerable $\aleph_0 \neq C$, por consiguiente $\aleph_0 < C$.

TEOREMA 63. DE CANTOR.
Hipótesis: α es un cardinal.
Afirmación: Existe un cardinal mayor que α.
Demostración:
Dado el conjunto A se tiene $A<2^A$, si $\alpha=\#A$ y $2^A = \#2^A$, luego $\alpha < 2^\alpha$.
EDET

En el ejemplo anterior $\#A=3$ y $\#2^A=8$, así $3<8$.

TEOREMA 64
Hipótesis: A es conjunto infinito.
Afirmación: existe $B\subset A$ y B es numerable.
Demostración:
$f: 2^A \to A$ es la función de elección donde:
$a_1=f(A)$, $a_2=f(A-\{a_1\}, \ldots, a_n=f(A-\{a_1,a_2,\ldots a_{n-1}\}),\ldots$
Por la hipótesis $A-\{a_1,a_2,\ldots a_{n1}\} \neq \phi$, $\forall n\in N$..
Como f es función de elección $a_n \neq a_i$, $i<n$.
Por consiguiente todos los a_n son distintos y el conjunto $B=\{ a_1, a_2,\ldots\}$ es numerable.
EDET.

TEOREMA 65
Hipótesis 1: A es un conjunto numerable.
Hipótesis s: $B\subset A$.
Afirmación: B es finito o numerable.
Demostración:
Según la hipótesis $A=\{a_1,a_2,,\ldots,a_n,\ldots\}$
Si $B=\phi$, entonces B es finito.
Si $B\neq\phi$, entonces $a_{n1}\in A$ es el primer elemento de B, $a_{n2}\in A$ y $a_{n2}\in B$ es el segundo elemento de B, así $B=\{a_{n1},a_{n2},a_{n3},\ldots,a_{ni},\ldots\}$.
Si $\{n1,n2,n3,..,ni,\ldots\}$ es acotado B es finito en caso contrario B es numerable.
EDET

TEOREMA 66.
Hipótesis 1: A es conjunto infinito.
Hipótesis 2: $B=\{b_1,b_2,\ldots\}$ es conjunto numerable.
Hipótesis 3: $A\cap B=\phi$. Los conjuntos A y B son ajenos.
Afirmación: $A\cup B\cong A$
Demostración:
De acuerdo con el teorema 63 y la hipótesis 1, existe $D\subset A$ donde $D=\{d_1,d_2,\ldots\}$ es numerable.
Ahora se puede establecer la función $f:A\cup B\to A$.
Donde Si $x\in A-D$, entonces $f(x)=x \therefore f(A-D) = A-D$.
Si $x=d_n$, entonces $f(d_n)= d_{2n-1}$
Si $x=b_n$, entonces $f(b_n)= d_{2n}$
Por consiguiente f es biyectiva y $A\cup B\cong A$.

$A\cup B$			$(A-D)\cup D=A$		
$A-D$		f	$A-D$		
D	d_1	$\longrightarrow$	d_1	índices Nones	D
	d_2	$\longrightarrow$	d_3		
	d_3	$\longrightarrow$	d_5		
	...	$\longrightarrow$	...		
B	b_1	$\longrightarrow$	d_2	Índices Pares	
	b_2	$\longrightarrow$	d_4		
	b_3	$\longrightarrow$	d_6		
	...	$\longrightarrow$	...		

EDET

COROLARIO
Si $A\cup B\cong A$, $A\cap B=\phi$, $\#A=\beta$, $\#B=\aleph_o$, entonces $\aleph_o+\beta=\beta$.

COROLARIO
Si $A\subset M$, $A\cup B=M$ y $A\cap B=\phi$, donde M es conjunto infinito y A es conjunto numerable, entonces el complemento resultante B tiene la cardinalidad de M, esto es $M\cong B$.

COROLARIO.
La unión de una infinidad de conjuntos numerables es numerable.

COROLARIO.
Hipótesis 1: $Z=\{...,-1,0,1,..\}$ y $A=[0,1)$.
Hipótesis: $f: Z\to A$ es $f(i,a) = i+a$, donde $i\in Z$, $a\in A$.
Afirmación: (aleph cero) C=C, donde C es el número del continuo, esto es $\aleph_o C=C$
Demostración
La imagen de $\{i\}x[0,1)$ producida por f es $[i,i+a)$, luego f es biyectiva y $ZxA\cong R$, donde $\#Z=\aleph_o$, $\#A=C$, $\#R=C$, por consiguiente $\aleph_o C=C$.

EDET

TEOREMA 67.
Hipótesis 1: R es el conjunto de los números reales.
Hipótesis 2: 2^Q es la familia de subconjuntos del conjunto Q de los números racionales.
Hipótesis 3: A la función $f:R\to 2^Q$ la define $f(a)=\{x|\ x\in Q,\ x<a\}$;
La imagen de todo real a es el conjunto de los racionales menores que a.
Afirmación: $C=2^{\aleph_o}$, donde C es el número del continuo.
Demostración:
Primeramente se demuestra que f es inyectiva:
Si $a,b\in R$ y $a<b$, entonces existe $r\in Q$, tal que $a<r<b$, luego por la hipótesis 3, $r\in f(b)$ y $r\notin f(a)$, por consiguiente $a\neq b$ implica $f(a)\neq f(b)$, así $f:R\to 2^Q$ es inyectiva, por lo cual $R \leqq 2^Q$, donde $\#R=C$, $\#Q=\aleph_o$, por esto $C\leq 2^{\aleph_o}$ (1).
De acuerdo con el teorema 62, si P es la familia de funciones características de N, $\phi:N\to\{0,1\}$, se tiene $2^N\cong P$ (2)
donde N es el conjunto de los números naturales.

Ahora se define la función $F:P\rightarrow[0,1]$ mediante la igualdad $F(g)=0.\phi(1)\ \phi(2)\phi(3)...$, donde $F(g)$ es una decimal formada por una sucesión infinita de unos y ceros.

Si f, $g\in P$ y $f\neq g$, entonces $F(f)\neq F(g)$, es decir, los decimales $F(f)$ y $F(g)$ son distintos, por consiguiente F es inyectiva, luego $P\leqq[0,1]$ (3)

De (2) y (3) se concluye	$2^{N}\leqq [0,1]$	(4)
Por consiguiente	$2^{\aleph_o}\leq C$	(5)
De (1) y (5) se concluye	$2^{\aleph_o}=C$	
	EDET.	

TEOREMA 68.

Hipótesis 1: F es el conjunto de todas las funciones reales $y=f(x)$ cuyo dominio es el intervalo (0,1).

Hipótesis 2: El número cardinal F es $\Im$.

Afirmación: $\Im$ es mayor que C el número del continuo.

Demostración:

Neguemos la afirmación: $\Im=C$, entonces existe la función biyectiva: $f:F\rightarrow (0,1)$, por consiguiente a una función $f_r(x)\in F$, le corresponde un punto $r\in(0,1)$ y sólo uno; pero se puede construir una función $\phi(x)$ en infinidad de formas, por ejemplo: $\phi(r))=f_r(x)+1$, la cual no coincide con ningún $f_r(x)$ ya que por lo menos para $x=r$ se tiene $\phi(r)\neq f_r(x)$, por esto $\phi(x)$ no está en el conjunto equivalente al continuo, el cual se supuso que contenia TODAS las funciones, en consecuencia la hipótesis de que el conjunto F es equivalente al continuo es falsa, luego $\Im >C>\aleph_o$.

EDET

EJEMPLO:

Se considera $F_c\subset F$ donde $f_r(x)=x/r$ y $0<r<1$, esto es, F_c es la familia de funciones reales cuyo dominio es el intervalo (0,1) cuyo cardinal es C el número del continuo y para la cual se tiene:

$r=1/2$, $f_{1/2}(x)=2x$, $r=1/4$, $f_{1/4}(x)=4x$, $r=1/8$, $f_{1/8}(x)=8x$,

Ahora a la función $\phi(x)$ se le impone la condición $\phi(r)\neq f_r(r)$ en particular $\phi(r)=f(r)+1$, donde $f_r(r)=1$, luego $\phi(x)=2$ y esta recta no está contenida en el conjunto de líneas $f_r(x)=x/r$, por consiguiente $\phi(x)$ es elemento de F que no pertenece a F_c

Es claro que existen cardinales mayores que $\Im$; el teorema de Cantor significa que dado un conjunto con cardinal α, existe un conjunto con cardinalidad mayor que α, esto es, la sucesión de cardinales transfinitos NO ESTÁ ACOTADO SUPERIORMENTE, no hay el "máximo cardinal". Hay una infinidad de bien determinados y distintos números cardinales transfinitos que rigurosamente determinan la multiplicidad del infinito.

TEOREMA 69. De Schröder-Bernstein

Hipótesis 1: A y B son conjuntos infinitos.

Hipótesis 2: $A_1 \subset A$ y $B_1 \subset B$

Hipótesis 3: $A \cong B_1$, y $B \cong A_1$

Afirmación: $A \cong B$

Demostración:

Por las hipótesis existen las funciones biyectivas $f: A \rightarrow B_1$, $g: B \rightarrow A_1$

Con las funciones f y g se construyen subconjuntos de A y B en la siguiente forma: Si $i \in N$, entonces

$A_1 = g(B)$, $A_2 = g(B_1)$, $A_3 = g(B_2), \ldots, A_{i+1} = g(B_i), \ldots$

$B_1 = f(A)$, $B_2 = f(A_1)$, $B_3 = f(A_2), \ldots, B_{i+1} = f(A_i), \ldots$

donde $A_{i+1} \subset A_i$, $B_{i+1} \subset B_i$

$$A = [\bigcap_{i \in N} A_i] \cup (A - A_1) \cup [\bigcup_{i \in N} (A_i - A_{i+1})] \qquad (1)$$

donde claramente

$$[\bigcap_{i \in N} A_i] \cap [(A - A_1) \cup [\bigcup_{i \in N} (A_i - A_{i+1})]] = \phi$$

Análogamente

$$B = [\bigcap_{i \in N} B_i] \cup (B - B_1) \cup [\bigcup_{i \in N} (A_i - A_{i+1})] \qquad (2)$$

donde

$$[\bigcap_{i \in N} B_i] \cap [(B - B_1) \cup [\bigcup_{i \in N} (B_i - B_{i+1})]] = \phi$$

Para simplificar la escritura se escribe:

$$A^* = (A - A_1) \cup [\bigcup_{i \in N} (A_{2i} - A_{2i+1})] \qquad A^{**} = \bigcup_{i \in N} (A_{2i+1} - A_{2i})$$

$$B^* = (B - B_1) \cup [\bigcup_{i \in N} (B_{2i} - B_{2i+1})] \qquad B^{**} = \bigcup_{i \in N} (B_{2i+1} - B_{2i})$$

Así

$$A = [\bigcap_{i \in N} A_i] \cup A^* \cup A^{**}$$

$$B = [\bigcap_{i \in N} B_i] \cup B^* \cup B^{**}$$

Como f y g son funciones biyectivas, la teoría de funciones prueba que

$$f(P \cup Q) = f(P) \cup f(Q) \qquad f(P - Q) = f(P) - f(Q)$$

$$g(P \cup Q) = g(P) \cup g(Q) \qquad g(P - Q) = g(P) - g(Q)$$

Por consiguiente:

$f(A^*) = f(A - A_1) \cup f(A_2 - A_3) \cup f(A_4 - A_5) \cup \ldots = (B_1 - B_2) \cup (B_3 - B_4) \cup (B_5 - B_6) \cup \ldots$

Esto es $f(A^*) = B^{**}$, $g(B^*) = A^{**}$, luego $A^* \cong B^{**}$, $B^* \cong A^{**}$

Falta probar: $\bigcap_{i \in N} A_i \cong \bigcap_{i \in N} B_i$

Si $a \in \bigcap_{i \in N} A_i$, entonces $a \in A_i$, $\forall i \in N$, luego $f(a) \in B_i$, $\forall i \in N$, por esto

$$f(a) \in \bigcap_{i \in N} B_i \qquad (3)$$

De acuerdo con (3) a todo elemento $a \in \bigcap_{i \in N} A_i$

se le puede asociar un elemento f(a) único en $\bigcap_{i\in N} B_i$

y como f es biyectiva, resulta: $\bigcap_{i\in N} A_i \cong \bigcap_{i\in N} B_i$ (4)

A juzgar por (1), (2) y (4), $A\cong B$,

puesto que se tiene la función biyectiva.

$$F(a) = \begin{cases} f(a), \text{ si } a\in[\bigcap_{i\in N} A_i]\cup A^{*} \\ b, \text{ donde } a=g(b), \text{ si } a\in A^{**} \end{cases}$$

EDET

TEOREMA 70

Si $M=A\cup B\cup C$, $M_1=A\cup B$, $N=N_1=A$, $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\phi$, entonces $M\cong N_1$ y $N\cong M_1$, implica $M\cong N$, significa $A\cup B\cup C\cong A$ y $A\cong A\cup B$, por transitividad $A\cup B\cup C\cong A\cup B$, esto es, $A\subset A\cup B\subset A\cup B\cup C$ y $A\cong A\cup B\cup C$, implican $A\cup B\cong A\cup B\cup C$, cuando $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\phi$. En general.

Hipótesis 1: $X_1\subset Y\subset X$.

Hipótesis 2: $X\cong X_1$

Afirmación: $X\cong Y$.

Demostración:

Por H2, existe la biyectividad $f:X\rightarrow X_1$

Por H1 existe la restricción inyectiva $f:Y\rightarrow X_1$, luego existe la función biyectiva $f:Y\rightarrow X_1$, luego, existe la función biyectiva $f:Y\rightarrow Y_1$, donde $Y_1\subset X_1$

De $X_1\subset Y$ y la biyectividad $f:Y\rightarrow Y_1$,se concluye que existe $X_2\subset Y_1$, tal que $X_1\cong X_2$, donde $X_2\subset Y_1\subset X_1\subset Y\subset X$, y $f:X_1\rightarrow X_2$ es biyectiva, por consiguiente hay conjuntos equivalentes $X\cong X_1\cong X_2\cong\ldots$, $Y\cong Y_1\cong Y_2\cong\ldots$ tales que... $\subset Y_2\subset X_2\subset Y_1\subset X_1\subset Y\subset X$.

Así $X=(X-Y)\cup(Y-X_1)\cup(X_1-Y_1)\cup\ldots\cup B$.

$Y=(Y-X_1)\cup(X_1-Y_1)\cup(Y_1-X_2)\cup\ldots\cup B$, donde

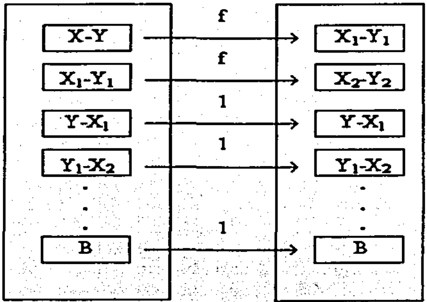
$B=X\cap Y\cap X_1\cap Y_1\cap X_2\cap Y_2\cap\ldots$

donde $(X-Y)\cong(X_1-Y_1)\cong(X_2-Y_2)\cong\ldots$

En particular se tiene la biyectividad:

$f:(X_n-Y_n)\rightarrow(X_{n+1}-Y_{n+1})$

Mediante el diagrama euleriano siguiente se define la biyectividad $g:X\rightarrow Y$, como se indica:

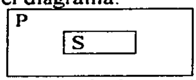


$$g(x)=\begin{cases} f(x), \text{ si } x\in X_i\text{-}Y_i \text{ ó } x\in X\text{-}Y \\ x, \text{ si } x\in Y_i\text{-}X_i \text{ ó } x\in B \end{cases}$$

EDET

LAS PARADOJAS

La afirmación categórica que constituye los juicios universales afirmativos, TODOS los S son P, Euler lo representó mediante el diagrama:



del cual se infiere que todos los elementos de S son elementos de P, esto es, ALGUNOS ELEMENTOS de P son ELEMENTOS de S, por consiguiente el conjunto P respecto al S juega el papel de CONJUNTO UNIVERSAL compuesto de los elementos pertenecientes a S y a los elementos de P que no son de S a los que se da el nombre de COMPLEMENTO de S e indicado con el signo $\bar{S}$, esto es, $S\cup\bar{S}=U$, $S\cap\bar{S}=\phi$, donde P=U, de aquí se infiere que la expresión $R=\{x|x\in S\wedge x\notin S\}=\{x|x\in S\wedge x\in \bar{S}\}$ es un absurdo, un desatino incapaz del más elemental significado.

PARADOJA DE RUSSELL

Ahora se considera la famosa paradoja de Russell presentada en 1902. El lógico matemático Bertrand Russell observó que si S es un conjunto, entonces $S\in S$, o bien, $S\notin S$: Cierto objeto conocido es elemento de cierto conjunto o no lo es, por ejemplo el conjunto de perros no es elemento de él mismo porque no es un perro, así consideramos el CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS QUE NO SON ELEMENTOS DE ELLOS MISMOS, esto es $C=\{x|x \text{ es un conjunto y } x\notin x\}$.

Dado que C es objeto, se tiene $C\in C$, o bien, $C\notin C$. Consideremos ambas posibilidades:

$\boxed{1}$. Se supone $C\in C$. Por definición $C\notin C$, pero no se pueden aceptar ambas situaciones. Hay contradicción.

$\boxed{2}$. Se supone $C\notin C$, entonces por definición de C resulta $C\in C$, puesto que se ha supuesto que C es conjunto.

De $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$, se concluye que no se puede afirmar $C\in C$, ni afirmar que $C\notin C$. Esta es la PARADOJA DE RUSSELL.

Examinemos este argumento a la luz de la definición fundamental: Un conjunto es una colección definida de objetos, de tal modo que podemos afirmar de TODO OBJETO que

pertenece a cierto conjunto o que no pertenece a él, en consecuencia la paradoja de Russell demuestra que C NO ES CONJUNTO, luego la definición de C NO ES SATISFACTORIA: Existe un objeto C respecto al cual no se puede afirmar que es elemento de un conjunto así como no se puede negar que pertenezca al conjunto. Esta situación indica que toda actividad humana obliga a reflexión filosófica.
La enseñanza implicada en la paradoja de Russell consiste en alertarnos: cuando se define un conjunto, mediante el concepto de ELEMENTO se debe estar seguro que realmente exista un conjunto antes de asignarle un nombre, vigilar cuidadosamente de NO incurrir en el error de supuestamente estar definiendo bien un conjunto y no resultar que de modo alguno lo sea. El signo $S=\{x|x \text{ es conjunto}\}$, en palabras S es el conjunto de todos los conjuntos, es signo carente de significado, con lo cual se concluye que no existe tal cosa como "el conjunto de todos los conjuntos". No existe un conjunto del cual TODO conjunto sea elemento. El concepto "ELEMENTO" es inseguro.
Gottlob Frege nació el 8 de noviembre de 1848 en Wimar, estudió matemáticas y fisica en las universidades de Jena (1869-1871) y Göttingen (1871-1873) donde se doctoró en matemáticas. Fue el creador de la lógica moderna en su forma inicial. El enfoque actual es obra de pensadores como Hilbert, Gödel y Tarski; pero indudablemente quien merece ser considerado como el creador de la lógica moderna es Frege porque en 1879 la fundó con la publicación de su famoso Begriffsschrift eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. (Ideografía; un lenguaje de fórmulas semejante al aritmético para un lenguaje puro), donde establece la tesis logicistia; los teoremas aritméticos son enunciados analíticos. La aritmética se reduce a la lógica. También Dedekin compartía esta tesis. En junio de 1902 Russell por carta le comunica a Frege su paradoja que no sólo afecta al sistema creado por Frege, sino también a las teorías que emplean ingenuamente el concepto de conjunto. En 1903 Frege saturado de profunda depresión escribe "Nada más triste puede sucederle a un escritor científico que ver como después de terminar su trabajo, se tambalean los fundamentos de su obra" (Grundgesetze der Arithmetik). Frege pugnó inútilmente por resolver la contradicción descubierta por Russell, sin esperanza, pocos años antes de su muerte renunció a la tesis logicista. Un año antes de apagarse escribe"Mis esfuerzos por aclarar lo que sean los números me han conducido a un fracaso total". Murió el 26 de julio de 1925.

PARADOJA DE CANTOR (1899).
Sea "C el conjunto de todos los conjuntos", luego todo subconjunto de C es también elemento de C, por consiguiente el conjunto potencia de C es subconjunto de C, esto es, $2^C \subset C$, lo cual implica de las cardinalidades:
$\#(2^C) \leq \#(C)$. Según el teorema de Cantor: $\#(C) < \#(2^C)$
Claramente se reconoce que el concepto "el conjunto de todos los subconjuntos" conduce a una contradicción.

PARADOJA DE BURALI-FORTI (1897).
El conjunto A está bien ordenado si todo subconjunto de A tiene primer elemento, luego A está totalmente ordenado, así todo subconjunto de un conjunto bien ordenado está bien ordenado, por consiguiente: Si A está bien ordenado y B es isomórfo al conjunto A, entonces B está bien ordenado.
Si A es conjunto bien ordenado, la SECCIÓN INICIAL S(a) de $a \in A$ es:

$S(a)=\{x|x\in A, x<a\}$, el conjunto de todos los elementos de A que estrictamente preceden al elemento $a\in A$, obviamente $S(a)\subset A$, en consecuencia un conjunto bien ordenado:

1. NO PUEDE SER ISOMORFO a una de sus secciones INICIALES.
   Ahora veamos "C es el conjunto de todos los números ordinales", luego C es conjunto bien ordenado y $\alpha=ord(C)$. Consideremos $S(\alpha)$ es el conjunto de todos los números ordinales que preceden a α y son elementos de C, luego:
2. $S(\alpha)$ es sección inicial de C, por esto
3. $\alpha=ord(S(\alpha))$, así que $ord(S(\alpha))=\alpha=ord(C)$

De estos resultados se infiere que C es ISOMORFO a una de sus secciones iniciales contra la afirmación 1. El concepto de "conjunto de todos los números ordinales conduce a una contradicción".

CONJUNTO DE TODOS LOS NÚMEROS CARDINALES

Sea C el conjunto de TODOS los números cardinales. Para cada cardinal $\alpha\in C$ hay un conjunto A_α tal que $\alpha=\#(A_\alpha)$. se define $A=\cup_{\alpha\in C}A_\alpha$' donde el conjunto potencia de A es 2^A y es equipotente con $A_{\#(2A)}$, por esto, $2^A \lesssim A$, así que $\#(2^A)\leq\#(A)$ (1)

Según el teorema de Cantor: $\#A<\#(2^A)$ (2)

De (1) y (2) se concluye que el concepto "EL CONJUNTO DE TODOS LOS NÚMEROS CARDINALES" conduce a una contradicción.

CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS EQUIPOTENTES A UN CONJUNTO

$A=\{a,b,\ldots\}$ es un conjunto no necesariamente numerable.

$B=\{i, j,\ldots\}$ es otro conjunto.

$A_i=\{(a,i), (b,i),..\}$, $A_j=\{(a,j).(b,j),..\}$,...es la familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in B}$' donde $\#(\{A_i\}_{i\in B})=\#B$. Además $A_i\cong A$ para toda $i\in B$.

La familia de TODOS LOS CONJUNTOS EQUIPOTENTES al conjunto A es α y su conjunto potencia es 2^α, luego $\{A_i\}_{i\in 2^\alpha}\subset\alpha$.

En consecuencia $\#(2^\alpha)=\#(\{A_i\}_{i\in 2^\alpha})\leq\#(\alpha)$ (1)

Según el teorema de Cantor $\#(\alpha)<\#(2^\alpha)$ (2)

Por esto, el concepto "Familia de todos los conjuntos equipotentes" a un conjunto conduce a una contradicción, este concepto se utiliza para definir número cardinal.

CONJUNTO DE TODOS LOS CONJUNTOS ISOMÓRFOS A UN CONJUNTO BIEN ORDENADO

$A=\{a,b,\ldots\}$ es conjunto bien ordenado, $B=\{i,j,\ldots\}$ otro conjunto. $A_i=\{(a,i).(b,i),..\}$, $A_j=\{(a,j).(b,j),..\}$, el conjunto A_i se ordena de modo tal que $(a,i) \lesssim (b,i)$ si $a\leq b$,así A_i está bien ordenado y es isomorfo al conjunto A, $A_i\cong A$.

Ahora λ es la familia de todos los conjuntos isomórfos al conjunto bien ordenado A y su conjunto potencia es 2^λ se define la familia de conjuntos $\{Ai\}_{i\in 2^\lambda}$ como todo A_i es isomorfo a A, por esto se tiene $\{Ai\}_{i\in 2^\lambda}\subset\lambda$.

Luego $\#(2^\lambda)= \#(\{Ai\}_{i\in 2^\lambda})\leq\#\lambda$ (1)

Según el teorema de Cantor $\#\lambda<\#(2^\lambda)$ (2)

De (1) y (2) se concluye que el concepto de "familia de todos los conjuntos isomorfos a un conjunto bien ordenado lleva a una contradicción. Este concepto se utiliza para definir un número ordinal.

PARADOJAS SEMÁNTICAS

En sentido estricto, la lógica puede con justicia no tomarlas en cuenta porque se refieren más al contenido que a la forma, por ejemplo la paradoja de los cretenses, conocida, desde la más remota antigüedad.

Según Epiménides, los cretenses mienten:

$\boxed{1}$. Epiménides es cretense, luego miente, por lo tanto los cretenses dicen la verdad.

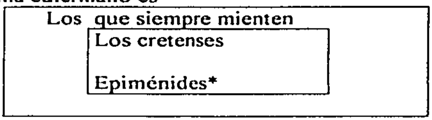
La pretendida segunda premisa está mal construida, el juicio correcto es de acuerdo con Epiménides es el siguiente

Todos los cretenenses siempre mienten.

Epiménides es cretense,

luego Epiménides miente

El correspondiente diagrama eulerinano es



En $\boxed{1}$. el término medio MIENTEN es imprudente; afirmar que todos los cretenses SIEMPRE mienten es una temeridad o una mentira. En la pretendida segunda premisa se afirma que el mentir de Epiménides es permanente, todo lo que dice es mentira por el hecho de SER CRETENSE.

Otra paradoja muy conocida se refiere al relato: En la aldea donde sólo hay un barbero quien se propone afeitar solamente a los hombres que no se afeitan ellos mismos, ¿Quién rasura al barbero? Es claro que las paradojas lógicas son las verdaderamente preocupantes, a las que los lógico-matemáticos les prestan atención, las analizan profundamente para evitarlas. En la demostración de un teorema, expresar que los pasos realizados para obtener la conclusión son válidos o que la conclusión se sigue de las hipótesis significa que es INCONSECUENTE afirmar las hipótesis y negar la conclusión lo cual equivale a la afirmación de dos enunciados, UNO LA NEGACIÓN DEL OTRO, ejemplo de IMPOSIBILIDAD LÓGICA. Contradecirse así mismo es ejemplo de INCONSECUENCIA MAYÚSCULA, de absurdo lógico, por esto presentar las paradojas lógicas es CONDENARLAS. El hombre no puede afirmar p y luego, SIN RETRACTARSE, afirmar no es cierto que p.

Al analizar las paradojas lógicas se observa que éstas solamente incluyen conceptos de la teoría de los conjuntos, el concepto "elemento de un conjunto" y su análogo extendido "conjunto de un conjunto" deben emplearse con sumo cuidado. Los analistas de las paradojas presentaron varios procedimientos, cuya finalidad era evitarlas, donde el denominador común de estas ponencias es la restricción de los conceptos intuitivos que se presentan en la deducción de las citadas paradojas.

Russell observó la automención presente en todas las paradojas y sugirió que todo objeto se le debe asignar un entero no negativo para caracterizarlo, al que se define como su TIPO. Mediante este concepto una expresión como "x es elemento del conjunto y" posee significado pleno, si y sólo si, el tipo de y es mayor que el tipo de x. Este enfoque lo desarrollaron y sistematizaron Bertrand Russell y Alfred North Whitehead entre los años

1910 y 1913; se dio a conocer con el nombre de teoria de los tipos, la cual cumplió completamente con su objetivo: eliminar la posibilidad de construir paradojas, empezando por las ya conocidas, por ejemplo, la paradoja de Russell depende de la existencia del conjunto A de todos los conjuntos que no son elementos de ellos mismos, pero de acuerdo con la teoría de los tipos no tiene sentido decir que un conjunto pertenece a él mismo, luego no puede existir tal conjunto A.
La teoria de los tipos en la práctica es difícil de aplicar y además sus críticos afirman que presentan varios inconvenientes. Otra censura diferente de las paradojas lógicas es encarar directamente las hipótesis en que se fundan y rechazarlas, por esta razón la deducción de las paradojas es imposible: en la paradoja de Russell $C=\{x|x$ es conjunto y $x \notin x\}$ carece de sentido. En la paradoja de Cantor se rechaza el concepto "conjunto de todos los conjuntos". En la paradoja de Burali-Forti se impugna el concepto "C es el conjunto de todos los números ordinales", sin embargo estos contrasentidos fueron el indicador de la necesidad de suministrar un conjunto de nuevos postulados como punto de partida para elaborar los procesos demostrativos expuestos, por ejemplo, en la estructura del álgebra booleana se inicia con CINCO principales, SUS CINCO duales y sus veinte teoremas básicos.

Fue Ernest Zermelo (Math.Annalen, 65, 1908) quien inventó o descubrió la primera teoria axiomática de los conjuntos. Existen varias teorías híbridas que combinan algunos aspectos de la teoría de los tipos con los principios de la teoría axiomática de los conjuntos, pero la interpretación más radical de las paradojas la ha expuesto y defendido por Brouwer y su escuela intuicionista, cuyos partidarios se niegan a reconocer la validez universal de ciertas leyes lógicas primordiales como la del tercero excluido: $p \vee \sim p$, postulado que tal vez sólo vale en conjuntos finitos e inválido ampliar su dominio y considerarla principio fundamental en todos los conjuntos. Análogamente declaran indebido el contraejemplo, de la afirmación "existe un objeto x_o tal que no es cierto que $P(x_o)$ concluir "no es cierto que para todo x se verifique P(x), porque sólo es licito afirmar la existencia de cierta propiedad de un objeto cuando se conoce un método efectivo para construir o encontrar el citado objeto. Por supuesto las paradojas no son deducibles e incluso aún cuando posean pleno significado, si se someten a las críticas rigurosas del intuicionismo, pero ¡oh contratiedad! en esta situación se encuentran los teoremas más apreciados de la matemática; por esta razón el intuicionismo ha encontrado muy pocos prosélitos entre los matemáticos.
Las doctrinas más modernas consideran que independientemente el enfoque en el cual se juzguen las paradojas, primeramente se requiere examinar el lenguaje de la lógica y la matemática con la finalidad de determinar las formas licitas en las que los signos adecuados puedan reunirse para formar términos, fórmulas, afirmaciones y demostraciones y establecer lo que se puede demostrar o lo indemostrable de acuerdo con los axiomas postulados y las reglas de inferencia que desde un principio se han aceptado. Esta es labor primordial de la lógica matemática, hasta que ésta dio su luz no había base para comparar fundamentos rivales de la lógica y la matemática. Los desvelos de egregios investigadores lograron ganar para la lógica matemática su categoria de rama independiente de la matemática.

ESBOZO HISTÓRICO

Cuando la ciencia estaba en formación imposible que de ella naciera la lógica. Vio la luz en el ámbito de la filosofía, su padre fue el Estagirita, por antonomasia el Filósofo. Decir que Aristóteles es el fundador de la lógica no implica que nadie antes de él haya utilizado argumentos lógicamente correctos; sólo se afirma que incipientemente, quizá sin proponérselo, él fue el primer lógico formal en la historia, quien por vez primera afirmó que el objeto de la lógica es el estudio de las conexiones necesarias entre proposiciones de una deducción y asi fue el creador de la teoria de silogismo categórico, que como se ha explicado condujo al método axiomático, objeto de máxima valoración en nuestros dias, al presentarlo, como FORMA UNIVERSAL a la que se amoldan todas la ciencias deductivas y las particulares perfectamente desarrolladas. Es tan valioso el método axiomático que no sólo se ha empleado para sistematizar la ciencias deductivas fundamentales, sino también para axiomatizar la lógica misma, lo cual se considera como un grandioso descubrimiento.

Durante la Edad Media, la lógica se desarrolla en manos de filósofos y teólogos; entra al servicio de la fe como afirma Alejandro de Afrodisia: "Si verdaderamente el mayor bien para el hombre es hacerse semejante a ΔIOS, y esto le es posible mediante la contemplación y el conocimiento de la verdad, se consigue por demostración, entonces es justo que ésta sea considerada digna del máximo honor e interés, y en virtud de ella también la logística, si es verdad que la demostración es un cierto tipo de silogismo".

Algunos tratados medievales superan en rigor formal a los de la antigüedad y los escolásticos desarrollaron la mayor parte de sus investigaciones a nivel metalógico. Desde los griegos, grandes hombres fueron los protagonistas de esta labor: Teofrasto y Eudemo, discípulos más directos de Aristóteles, el estoico Crisipo, posteriormente Abelardo y muchos más.

Se omiten prolijios detalles y se llega a Leibniz quien se dio cuenta de que la lógica no podía quedar reducida a lo que habia logrado Aristóteles; en una carta escrita a G. Wagner en 1696 afirma: "En toda las ciencias infalibles, si se demuestran indubitablemente, se encarnan igualmente formas superiores que, en parte descienden de las aristotélicas y, en parte, todavia aceptan la ayuda de otras". Consideró necesario ir más allá del nivel alcanzado por la lógica antigua a fin de dotar a la metafisica de instrumento potentisimo que le permitiera alcanzar el mismo grado de rigor y EXCELENCIA CIENTÍFICA logrado por la matemática. Leibniz sintió la necesidad de crear una lógica como "lógica simbólica" de carácter completamente calculistico análogo a los procedimientos matemáticos. En una de esas misteriosas anticipaciones propias de los hombres geniales a Leibniz lo sedujo la idea de explicar la numeración de base 2 ahora indispensable en los modernos programas de las computadoras electrónicas, aporte tecnológico de la lógica moderna. Correspondió a Leibiniz la gloria de haber reducido las reglas de la deducción lógica a reglas de cálculo, prescindiendo del contenido semántico de las premisas. Leibniz es el fundador de la lógica matemática en la segunda mitad del siglo XVII, sus investigaciones quedaron inéditas durante siglos; sólo COUTURAT hasta 1901 publicó la Logique de Leibniz. En Leibniz se inspira la gloriosa obra FREGE.

Hasta la mitad del siglo XIX las ideas precursoras de Frege despertaron de su largo olvido, pertenece a George Boole el mérito de haber despejado el sendero. En 1847 Boole publica su The Mathematical analysis of logic, donde en primer lugar construye un cálculo puramente algebraico mediante simbolos y operaciones definidas a partir de los mismos. Luego, se interpreta como manejo de clases y de elementos de clases, edificando de este modo toda la teoria mediante ecuaciones, con este procedimiento Boole logra traducir la lógica tradicional a una teoria de ecuaciones, paralela a esta elaboración algebraica de la

lógica de TÉRMINOS, realiza Boole otra interpretación del mismo cálculo a una teoría algebraica proposicional, tema que ya había puesto en claro Euler con el tratamiento geométrico de la silogística tradicional mediante sus diagramas desde el año de 1766; pero Boole plenamente consciente afirma que el cálculo lógico no está ligado al concepto de cantidad sino a un procedimiento mucho más general, cuya VALIDEZ NO DEPENDE de la interpretación de los signos sino de las LEYES DE COMBINACIÓN, lo cual señaló un verdadero cambio de rumbo en la historia de la lógica.
Los continuadores de la obra de Boole no se limitan a elaborar su desarrollo, someten a rigurosa crítica los conceptos de Boole, los modifican y corrigen, purificándolos hasta llegar a formular los postulados de un álgebra booleana como se mostró en la TABLA I de esta tesis.
La obra de Jevons, muy por debajo de las concepciones de Boole, no impidió que este investigador fuera el primero en concebir la idea de una máquina pensante e intentar realizarla a partir de 1860, de este modo demostró que mentalmente tenía perfectamente definido el concepto de la AUTOMATICIDAD y la MECANICIDAD de la deducción, consecuentemente fue el precursor de la identificación entre SISTEMA FORMAL y MÁQUINA CALCULADORA.
El refinamiento que alcanzó la lógica formal condujo al anhelo de proceder con mayor eficacia al análisis crítico de las CONDICIONES DE LA DEDUCCIÓN PERFECTA; en lo que atañe a este reconocimiento, destacan las teoría de Gottlob Frege y del italiano Giuseppe Peano. El coronamiento del trabajo simbólico culmina en los PRINCIPIA MATHEMATICA de RUSSEL y WHITEHEAD, con el objetivo principal de establecer los fundamentos de la matemática, donde la lógica ya no toma a ésta como modelo, ahora surge vigorosa capaz de someter a examen los propios fundamentos de los procedimientos matemáticos, e imprime su carácter a las más avanzadas teorías.
Afirma Bochenki:
"La conclusión de todo este desarrollo lo encontramos en el simbolismo propuesto en 1889 por Giuseppe Peano, el cual se extiende esencialmente más allá del cálculo booleano y lo lleva al mismo tiempo a su forma definitiva".
El término Lógica Matemática por primera vez la introduce en su obra el lógico italiano, lo utiliza no sólo debido a la afinidad del simbolismo lógico con el matemático, sino para destacar especialmente que la nueva lógica es poderoso instrumento aprovechable en la sistematización rigurosa del saber matemático. Con la colaboración de un grupo de valiosos discípulos se ocupó de su programa, esto es, sistematizar con exactitud la matemática y fue el primero en realizar la axiomatización y construccón rigurosa de la aritmética, partiendo solamente de los axiomas mediante una lógica conocida y explícitamente definida, obra que la tradición únicamente había visto en la geometría euclidiana no perfectamente formalizada, labor que realizó Hilbert diez años después de la axiomatización de Peano.
La construcción metódica de todo el imponenete edificio de la matematica, fue realizada por Bertrand Russell en colaboración con su antiguo maestro Alfred Whitehead, titánica obra en tres tomos que vio la luz entre 1910 y 1913 con el título PRINCIPIA MATHEMÁTICA, donde se presenta en forma unitaria toda la investigación de los lógicos precedentes, sin limitarse exclusivamente a la presentación del análisis puramente lógico, tratando cuestiones de carácter especulativo y teórico como la naturaleza de la lógica y de la matemática, de sus recíprocas relaciones y otros temas afines. Acerca de esta obra opina Evandro Agazzi: "Si se quisiera pasar revista a la aportaciones técnicas de Russell a la lógica matemática, se podrán citar mucha cosas, pero no se trataría tanto de verdaderas

innovaciones y descubrimientos como, más bien, de sistematizaciones más rigurosas, refinamientos y perfeccionamientos, con frecuencia decisivos y admirables".
"Sería gran ingenuidad menospreciar esta obra y no considerarla original, aún por modesta familiaridad que se tenga con los estudios matemáticos, por ejemplo, se sabrá muy bien que con bastante frecuencia los nombres más destacados en esas disciplinas están ligados a perfeccionamientos, a progresos en la exactitud y a complementos de ideas e instrumentos técnicos ya descubiertos por otros y a veces largamente usados por sus predecesores".
"La obra de Russell y Whitehead, por tanto, debe situarse entre las mayores aportaciones que jamás se hayan hecho a la historia de la lógica concretamente, los PRINCIPIA en muchos aspectos todavía son el manual no superado a que se ha de volver para muchas cuestiones, ya que nunca más se ha vuelto a escribir un tratado tan completo, minucioso y exacto de lógica matemática, con excepción y sólo hasta cierto punto de los GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK de Hilbert y Bernays (2 volúmenes, Berlín 1934-1939)".
"Además los PRINCIPIA han codificado y generalizado como simbolismo usado por la mayor parte de los lógicos contemporáneos (al menos por los de lengua inglesa o de cultura anglosajona) la notación de Peano. Así, la influencia de Peano sobre Russell no se redujó, desde luego, a la simple adopción del simbolismo. El propio Russell llamó "el año más importante de mi vida intelectual" al de su encuentro con Peano y sus discípulos en el Congreso Inernacional de Filosofía celebrado en París en 1900".
De este modo, la lógica en su estado actual parece que vive nueva aurora; pero brevemente veamos la obra de Cantor. Goerge Cantor nació el 3 de marzo de 1845 en San Petersburgo, ciudad que ya antes había contado con Daniel Bernoulli y Leonhard Euler. Desde su más tierna infancia mostró especial gusto por la matemática pero su padre le aconsejó que estudiara ingeniería. Por fin Cantor recibió la autorización de estudiar matemáticas y en el otoño de 1862 las empezó a estudiar en la Universidad de Zürich. Al año siguiente murió su padre y Cantor se trasladó a Berlín para acompañar a su madre.
En la Universidad de Berlín, Cantor estudió con egregios matemáticos: Karl Weierstrass, Ernest Kummer y Leopold Kronecker. En 1867 presentó su tésis doctoral, la examinaron Kummer y Weierstrass y le otorgaron el anhelado MAGNA CUM LAUDE. En la primavera de 1869 llegó a Halle recomendado por Hermann Schwarz. El lapso de 1878-1884 fue de la máxima floración de su indiscutible genio, expuso la teoría de conjuntos incluidos los números cardinales, los ordinales y su interrelación con la teoría de los alephs, publicadas por Felix Klein. Más tarde, Felix Hausdorff publicó el famoso tratado GRUNDZÜGE DER MENGENLEHRE, dedicado a Cantor "con agradecida admiración".
A Cantor se le debe haber descubierto el campo de lo TRANSFINITO. En 1888 DedeKind define: Un conjunto S es INFINITO si es biyectable con un subconjunto propio de sí mismo, en caso contrario, el conjunto es finito.
(Was Sind und was sollen die Zalen). Era la primera vez que se daba una definición tan precisa de lo infinito y Cantor embelasado se atreve a explorar el obscuro territorio de lo infinito y descubre que no hay un sólo tipo de infinito, sino muchisimos infinitos distintos; sus hallazgos los publica en su artículo "Ein Beitrag zur Mannigfaltig keitslehre" en 1878. Pensaba que tanto conjuntos como números transfinitos son entidades existentes con independencia del mundo natural y de la mente del matemático. No hay creación, sólo descubrimiento. En 1888 en carta a Jeiler afirma: "No tengo ninguna duda acerca de la verdad de lo transfinito que he descubierto con la ayuda de ΔIOS y cuya variedad y unidad estudio desde hace más de veite años".

Su máxima obra sobre conjuntos: Unión, inclusión, cardinalidad biyectabilidad, etc., es el famoso Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, publicado en 1895 y 1897 en dos partes en el Mathematische Annalen. En ese mismo año, Burali-Forti da a conocer su renombrada paradoja, pero aparentemente ni Cantor, Frege, ni Dedekind le dieron atención; Cantor ya conocía estos problemas, era consciente del carácter antinómico de los conceptos "conjuntos de todos los números cardinales" y "conjuntos de todos los ordinales", acera de esto comenta: "No dudo que de este modo nunca se llegará a una frontera insuperable, ni por lo menos captar aproximadamente lo absoluto, este puede reconocerse, pero no CONOCERSE. Me parece que la sucesión absolutamente infinita de los números ordinales en cierto modo es símbolo adecuado de lo Absoluto que es la INFINITUD DE ΔIOS". La sucesión de los ordinales como símbolo de lo absoluto, no es objeto matemático sujeto a las operaciones matemáticas, pues al tratarlo de esta forma se cae en contradicción, a tales multiplicidades las llamó "absolutamente infinitas o inconsistentes", al contrario, cuando la totalidad de los elementos de una multiplicidad puede pensarse como conjuntos sin contradicción las llamó "multiplicidad consistente o conjunto".
No obstante las antinomias, la teoria de conjuntos se impuso y en 1895 Minkowski le escribía a Hilbert: "De nuevo me he dado cuenta que Cantor es uno de los más geniales matemáticos vivientes. Su definición puramente abstracta de la cardinalidad de los puntos de un segmento con ayuda de los llamados números transfinitos es verdaderamente admirable".
El 11 de mayo de 1917 ingresó en la clinica para enfermos de los nervios de la Universidad de Halle. Murió allí el 6 de enero de 1918.

Kurt Gödel nació en Brün, la capital de Moravia, el 28 de abril de 1906. En 1924 concluyó sus estudios secundarios y se trasladó a Viena. Se nacionalizó austriaco en 1929. Estudió en la Universidad de Viena durante los años de 1924 hasta 1927; se inicia en fisica, pero le fascina la teoria de los números brillantemente expuesta por Philipp Furtwängler. El matemático Hans Hahn, apasionado por el tema de los fundamentos fue su director de tesis. Etudió historia de la filosofia con Heinrich Gomperz y participó en los seminarios de Moritz Schlick, fundador del Círculo de Viena que trasladado a las aulas de la Universidad conoció a Rudolf Carnap, Karl Menger y Hebert Feigl.
Algunos miembros del Círculo suponian que los fenómenos parapsicológicos sólo eran imposturas impropias de la investigación científica entre los que se contaban Ludwing Wittgenstein y Otto Neurath, en cambio Hahn, Carnap y Gödel estaban a favor de investigar con detenimiento cualquier postura por absurda que pudiera ser.
En 1928 Gödel conoció el Grundzüge der theoretischen Logik de Hilbert y Ackermann, el primer texto en el sentido actual, donde además de presentar el cálculo deductivo, se plantea el problema de establecer la completitud de ese cálculo, por lo cual eligió como tema de sus tesis doctoral la completitud del cálculo lógico de primer orden. En julio de 1929, la tesis recibió el visto bueno de Hahn y Furtwängler y Gödel obtuvo oficialmente el doctorado en febrero de 1930.
Precisa Gödel los conceptos sintácticos de los semánticos que los anteriores autores habian confundido y responde a dos interrogantes: 1. ¿Es el cálculo lógico del primer orden completo? 2. ¿Los axiomas utilizados son independientes unos de otros?.
El programa formalista de Hilbert pretende:

a. Construir sistemas formales COMPLETOS para las principales teorías de la matemática clásica.
b. Probar la consistencia de dichos sistemas formales.

SISTEMA FORMAL
Como se ha visto, un sistema formal cuenta con un conjunto numerable de signos primitivos, con REGLAS combinatorias que decretan respecto a las hileras de signos, quienes son FÓRMULAS, cuyo conjunto constituye el LENGUAJE del sistema. Hay otras REGLAS que puntualizan cuáles SUCESIONES de fórmulas establecen una DEDUCCIÓN.

1. AFIRMACIÓN es una fórmula sin variables libres. Es AFIRMACIÓN DEDUCIBLE si constituye el último miembro de una deducción.
2. El conjunto de las AFIRMACIONES deducibles constituye una TEORÍA FORMALIZADA.
3. El sistema formal S es COMPLETO, si y sólo si, para caa afirmación A de su lenguaje formal ocurre que A es deducible o bien, lo es ~A; seguro que a una de las dos se llega. En S todo problema es decidible.
4. El sistema formal S es INCOMPLETO, si y sólo si, existe una afirmación A tal que ni A ni ~A son deducibles. Hay problemas indecidibles en S.
5. El sistema formal S es CONSISTENTE, si y sólo si, para ninguna afirmación A de su lenguaje formal ocurre que tanto A como ~A sean deducibles en S.
6. Un sistema formal S es INCONSISTENTE o CONTRADICTORIO, si y sólo si, existe la afirmación A del lenguaje formal de S, tal que, tanto A como ~A son deducibles en S. Estos sistemas son absurdos por lo cual son inútiles, pero un sistema INCOMPLETO puede ser de gran utilidad teórica.

Una TEORÍA T definida SEMÁNTICAMENTE es siempre COMPLETA y CONSISTENTE. si el sistema formal S refleja perfectamente a T, es preciso que S sea completo y consistente. Si se quiere probrar plenamente la consistencia S, los razonamientos empleados en la prueba de consistencia deben ser los más sencillos indubitables, más seguros que los incorporados en el sistema formal mismo.

Cerca de 1930 se pensaba que el programa formalista de Hilbert lo había realizado Russell y Whitehead en los PRINCIPIA, sólo faltaba probar la CONSISTENCIA del sistema formal. En 1931 la lógica y la filosofía recibieron un golpe tan terrible del que no se recobrarian jamás, Gödel publicó el artículo más formidable en toda la historia de la lógica, donde mostró la imposibilidad de realizar el programa de Hilbert. Todos los sistemas formales de la matemátioca clásica: los Principia de Rusell, la aritmética de Peano, la teoria axiomática de conjuntos de Zermelo, en general todo sistema formal son incompletos; en cada uno de ellos se puede construir una afirmación indecidible, esta incompletitud es irremediable, agregar más axiomas de nada sirve, persiste la incomplenitud. También demostró Gödel la imposibilidad de probar la consistencia de un sistema formal dentro del mismo, aunque es posible demostrar su consistencia desde una teoria más potente que el propio sistema formal.
En septiembre, Gödel, Carnap, Hahn y Feigl de Viena viajaron a Königsberg a la conferencia acerca de epistemologia de la ciencias exactas donde se analizaron, el logicismo, el intuicionismo y el formalismo por Carnap, Heyting y Von Neumann respectivamente. El último dia Gödel informó que habia encontrado proposiciones

aritméticas verdaderas por su contenido, pero indemostrables en el sistema formal de la matemática clásica. En enero de 1931 enteró de sus hallazgos sobre incomplenitud al Circulo de Schlick y al Coloquio de Menger; en septiembre los comunicó a la Sociedad de Matemáticos Alemanes en Bad Elster. Se le opusieron Zermelo y Wittgenstein porque no eran capaces de entenderlo. No es fácil entender de primera a Gödel.

El 28 de junio de 1932 en el Coloquio de Menger, Gödel comunicó sus descubrimientos acerca de la consistencia de la lógica clásica e intuicionista; uno de los asistentes era Oswald Veblen, organizador del Instituto de Estudios Avanzados (IAS) de Princenton, maravillado invitó a Gödel a incorporarse al IAS donde impartió un curso de febrero a mayo de 1934. Regresó a Viena el 7 de junio de 1934, donde encontró un ambiente penoso, el 24 de junio expira Hans Hahn, su maestro y amigo; al día siguiente los nazis asesinan al presidente Dollfuss y en octubre ingresa en el sanatorio de Purkersdorf a causa de un colapso nervioso.

El 20 de Septiembre de 1938 se casa con su amiga Adele y después de padecer un verdadero via crucis, el 15 de enero de 1940 salen los Gödel de Berlín, cruzan toda la Unión Soviética y llegan a Yokohama (Japón) el 2 de febrero, descansan y se embarcan hacia Estados Unidos de Norteamérica; llegan el 4 de marzo a San Francisco, atraviesan en los EUA, llegan a Nueva York y se establecen definitivamente en Princeton y no volverán a salir de los Estados Unidos. El 2 de abril de 1948 los Gödel recibieron la ciudadania americana.

Kurt Gödel creía firmemenete en la diferencia esencial entre mente y materia, lo cual no implica que aceptaba un platonismo ingenuo; después de analizar las formalizaciones de la teoría de los tipos, la de conjuntos, las pruebas no constructivas de existencia y de las definiciones impredicativas, Gödel dice: "El resultado de la discusión precedente es que nuestros axiomas, si se interpretan como enunciados con significado, neceariamente un tipo de platonismo, lo que no puede satisfacer a una mente crítica y ni por lo menos produce la convicción de que sean consistentes. No obstante, y por otras razones, es muy inaceptable que impliquen contradicciones". Es inadmisible porque se llevan manejando mucho tiempo sin que se haya encontrado contradicción alguna. A veces Gödel da la sensación de que juzga ciertas clases como algo objetivo, casi inefable, imposible de explicarse y que el espíritu humano capta mediante intuición intelectual y al penetrarlos mejor se llegan a vislumbrar nuevos axiomas que resolverán los problemas abiertos de la matemática.

En 1943 Russell visitó al IAS de Princeton, conversó con Gödel, Eistein y Pauli. Quedó anodado por los conceptos vertidos por Gödel; el propósito russelliano de eliminar las clases concluirá en pleno fracaso. Las entidades abstractas son insubstituibles, las clases y los conceptos son objetos reales, que el hombre es incapaz de construir, nos limitamos a describirlos a caracterizarlos; no hay inconveniente en aceptar definiciones impredicativas, es reprobable el principio: NO se puede aceptar una totalidad que contenga elementos definibles sólo en función de esa totalidad, porque arruina el intento de Principia de reducir la matemática a la lógica, hace irealizable gran parte de la matemática moderna, lo cual sugiere la falsedad del principio y no la de la matemática clásica.

Como se dijo, la lógica no siempre ha estado en manos de los matemáticos, pasó largos años de su niñez y juventud en hogares de filósofos y teólogos, algunos brillantísimos. En estas circunstancias se plantea la lógica como obra el hombre y a éste como un SER PENSANTE, capaz de COMUNICARSE. Desde el punto de vista del ser queda la lógica matizada de ONTOLOGISMO. Si se la considera en la jurisdicción del pensar queda la

lógica al servicio de la PSICOLOGÍA, y si se ubica dentro del área de la comunicación, sirve la lógica a la LINGÜÍSTICA.
El interés por el FORMALISMO LÓGICO, consecuentemente el interes por los problemas gnoseológicos, psicológicos, metódicos y lingüiticos se acentúa en el curso de la Edad Moderna, así durante los siglos XVII, XVIII y XIX, la lógica escolar se expone en forma heterogénea de enseñanzas filosóficas: junto a la silogística tradicional, hay anotaciones metódicas, esbozos de teoría del conocimiento, análisis de conceptos generales y otros temas. A este respecto el modelo a seguir es el Art de Penser de los maestros de Port Royal, conocido como Logique de Port Royal.

Más tarde, Kant recoge la herencia Leibniziana y distingue claramente la lógica de la ontología y la psicología afirmando su carácter de doctrina formal pura, pero no del discurso sino del pensamiento, lo cual conduce a un psicologismo trascendental insito en el kantianismo; junto a la lógica formal pura Kant pone una lógica lógica trascendental como doctrina de las funciones puras del conocimiento.
La lógica pierde así su sentido tradicional y se considera como "metafisica de la mente" o del "pensamiento". Al final del siglo XIX se entiende la lógica como teoría del pensamiento, tratada con métodos naturalistas por los positivistas o con métodos metafisicos-trascendentales por los idealistas. Edmund Husserl en sus Investigaciones Lógicas (Madrid, 1929) critica a fondo este punto de vista, volviendo a las ideas del lógico checo Bernard Bolzano (1781-1848) profesor de la Universidad de su ciudad natal. En su obra Wissenschaftslehre, Teoría de la ciencia, realza con toda exactitud científica, la independencia de la lógica como ciencia libre de ontologismo y psicologismo, como lógica formal pura, pero el formalimo no cristalizó pronto, fue indispensable el paso a un punto de vista nuevo, de la lógica de términos a la lógia de clases que realizó desde 1760, Leonhard Euler, desde el punto de vista EXTENSIONAL, según el cual los conceptos son considerados sólo como clases o colecciones de objetos y las proposiciones se interpretan como inclusiones o exclusiones de CLASES totales o parciales, de tal modo, la ANALÍTICA aristotélica, que comprendía principalmente la teoría de la conversión y la del silogismo, fue sustituida por el cálculo de clases, como ya se explicó. Partiendo de estos estudios los ingleses Boole, Jevos, Withehead y los europeos continentales, Schöder, Poretsky, Couturat, crearon un disciplina más formalizada. La evolución continuó hasta culminar en los PRINCIPIA MATHEMATICA de B. Russell.
En la escuela de Chicago y bajo la influencia del neopositivismo inglés y el pragmatismo americano, la lógica se ha orientado principalmente por obra de Morris, Carnap y Hempel, en sentido más análitico-filosófico, tendiendo a resultar parte de una disciplina mucho más amplia, la SEMIÓTICA o teoría general de los signos, cuya teoría del lenguaje es la más interesante, creada por Morris con el doble impulso de la síntesis lógica de Carnap y de la lógica de Dewey. Abandonando todo supuesto mental y toda veleidad metafisica, la ciencia del pensamiento resulta ciencia del lenguaje, o sea de un caracteristico y esencial comportamiento humano. Así el análisis lógico resulta análisis lingüistico, lo que la tradición consideraba como dimensión lógica son solamente DIMENSIONES DEL LENGUAJE. La SINTÁTICA por la cual los signos que componen el lenguaje se conectan entre si según reglas de formación y transformación relativas a la forma del discurso mismo. La otra dimensión es la SEMÁNTICA, mediante la cual el discurso y los enunciados que lo componen puede ser verdadero o falso, esto es, remite a hechos y acontecimientos, luego las palabras que lo componen remiten a cosas y cualidades. Son

éstos los dos aspectos fundamentales: Lógica formal analitica y Lógica matemática, dos direcciones diferentes de la investigación lógica, debido a dos tipos de interés teórico. En esta trayectoria se ha constituido la TEORIA LINGÜÍSTICO-CONVENCIONALISTA (TLC).
Las doctrinas convencionalistas aceptan la hipótesis de que la verdad de algunas proposiciones válidas en ciertos campos se debe al acuerdo común de los que utilizan esas proposiciones y postulan como inicio del convencionalismos la afirmación de Demócrito: Por convención calor es calor, frío es frío, pero lo real son los átomos y el vacío; pero hay que advertir que esta afirmación es ingenua, atrás de las variaciones de la temperatura está el transfondo de un compleja fisiología que nos indica cuando hace calor y cuando hace frío, y las palabras calor y frío son los NOMBRES de las respectivas sensaciones. En este punto, con la finalidad de no acrecentar indebidamente esta tesis, sólo recordamos el esclaresido pensamiento de Alfred Joules Ayer, vertido en su libro LENGUAJE, VERDAD Y LÓGICA, publicado por EUDEBA, Editorial Universitaria de Buenos Aires.
"Porque aunque afirmo que la validez de las proposiciones A PRIORI depende de ciertos hechos relativos al modo de usar las palabras, NO CONSIDERO que esto equivalga a decir que ellas describen esos hechos en el sentido en que las proposiciones empíricas pueden describir los hechos que las verifican; y en realidad sostengo que en ese sentido no describen absolutamente ningún hecho. Al mismo tiempo admito que la utilidad de las proposiciones A PRIORI se fundan tanto en el hecho empírico de que ciertos símbolos se usan de cierta manera, como en el hecho empírico de que dichos símbolos se aplican a nuestra experiencia, y en el capítulo cuarto de este libro procuro mostrar por qué ocurre esto.
Así como es un error identificar las proposiciones A PRIORI con las proposiciones empíricas acerca del lenguaje, también considero hoy que es un error decir que ellas mismas son REGLAS LINGÜÍSTICAS. Porque además del hecho de que de ellas se puede decir con propiedad que son verdaderas, lo que no sucede con las reglas lingüísticas, se distinguen también por ser necesarias, mientras que las reglas lingüísticas, en cambio, son arbitrarias. Al mismo tiempo, si son necesarias ello se debe tan solo a que se dan por supuestas la reglas lingüísticas pertinentes.
Así, por ejemplo, es un hecho contingente y empírico que la palabra "ANTERIOR" se use en nuestro idioma para significar anterior, y es una regla de lenguaje arbitraria, aunque conveniente, que las palabras que designan relaciones temporales se usen transitivamente; pero dada esta regla, la proposición que dice: Si A es anterior a B y B anterior a C, entonces A es anterior a C, se torna VERDAD NECESARIA.
En forma semejante, en el sistema de lógica de Russell y Whitehead es un hecho contingente y empírico que al signo "$\supset$" se le haya dado el significado que tiene y las reglas que gobiernan el uso de este signo son convenciones, que por sí mismas no son ni verdaderas, ni falsas; pero dadas estas reglas la proposición A PRIORI "$q \supset p \supset q$" es necesariamente verdadera. Por ser A PRIORI, esta proposición no da ninguna informaión en el sentido corriente en que se puede decir que una proposición empírica proporciona información, ni prescribe por sí misma cómo ha de usarse la constante lógica "$\supset$". Lo que hace es aclarar el uso correcto de esta constante lógica y es en este sentido que es informativa.

BIBLIOGRAFÍA

1. Lenguaje, verdad y lógica.
   Alfred Jules Ayer.
   EUDEBA.
   Editorial Universitaria de Buenos Aíres. 1965.

2. La lógica simbólica.
   Evandro Agazzi.
   Editorial Herder.
   Barcelona 1967.

3. Lógica.
   Francisco Romero y Eugenio Pucciarelli.
   ESPASA-CALPE Argentina, S. A.
   Buenos Aires-México. 1947.

4. La lógica de la Ciencia.
   Francisco Larroyo y Miguel Ángel Cevallos.
   Editorial Porrua. S. A.
   México, 1954.

5. Introducción a la lógica moderna.
   L. Susan Stebbing.
   Fondo de Cultura Económica. 1981.

6. Introducción a la lógica.
   Alfred Tarki.
   ESPASA-CALPE Argentina, S.A.
   Buenos Aires-México. 1951.

7. Los lógicos.
   Jesús Mosterín.
   Editorial Espasa Calpe, S.A. 2000.

8. Introduction to the theory of sets.
   Joseph Breuer.
   Prentice-Hall, INC. 1959.