18

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

FUNCIONES INDUCIDAS ENTRE CONTINUOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JOSÉ LUIS GOMEZ RUEDA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA

2002

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Funciones inducidas entre continuos

realizado por José Luis Gómez Rueda

con número de cuenta 9850258-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Gerardo Acosta García	Gerardo Acosta García
Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Sergio Macías Alvarez	S. Macías
Suplente	Dr. Javier Páez Cárdenas	
Suplente	Dr. Raúl Escobedo Conde	

Consejo Departamental de Matemáticas

P.A.

M.en C. Jose Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

Para Algebra

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que me apoyaron durante la realización de este trabajo; al Dr. Gerardo Acosta García por aceptar ser mi director, y porque aún durante el tiempo que estuvo fuera de México, continuó ayudandome como si estuviera aquí. A mis sinodales; Dr. Alejandro Illanes Mejía, Dr. Sergio Macías Alvarez, Dr. Javier Páez Cárdenas, y Dr. Raúl Escobedo Conde, por haber aceptado a la primera, leer esta tesis.

Le agradezco especialmente, al Dr. Alejandro Illanes Mejía, primero, porque sin su ayuda, varios resultados muy importantes, no aparecerían en este trabajo, y luego, porque aceptó apoyarme mientras Gerardo no se encontraba en México.

Le agradezco también a quienes fueron mis profesores durante la carrera, en especial a Javier y Jose Antonio, pues siempre conté con su ayuda.

Le doy gracias por su apoyo, a mi familia, especialmente a mi Mamá y a Algebra, pues siempre me han alentado a seguir adelante.

Agradezco al Instituto de Matemáticas por apoyarme con un espacio de trabajo, y acceso a servicios tales como la Biblioteca y el Centro de Cómputo, durante la realización de esta tesis. Al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica, por su ayuda económica mientras terminaba la carrera e iniciaba mi tesis.

También agradezco la amistad de mis compañeros, de clase, y de cubículo; John Hart, Rolando, Tito, Galo, Mayra, los hijos de Páez, Ferrán, Javier, Tonatihu, Miguel Angel, Esteban, y Yesenia.

Introducción

El trabajo que desarrollaremos está enmarcado en la Teoría de Continuos e Hiperespacios. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto. Los *hiperespacios* de un continuo X de los que nos ocuparemos en este trabajo, son los siguientes:

$$2^X = \{ A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío} \}$$

y, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(X) = \{ A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes} \}$$

y

$$F_n(X) = \{ A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos} \}.$$

Dichos espacios, considerados con la *métrica de Hausdorff*, resultan ser continuos. Por tanto, si $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y, podemos considerar las *funciones inducidas* $2^f\colon 2^X \to 2^Y$, $C_n(f)\colon C_n(X) \to C_n(Y)$ y $F_n(f)\colon F_n(X) \to F_n(Y)$ de f en donde, $2^f(A) = f(A)$, $C_n(f)(A) = f(A)$ y $F_n(f)(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$, $A \in C_n(X)$ y $A \in F_n(X)$, respectivamente.

En este trabajo, el problema que nos interesa es el siguiente: dada una propiedad sobre funciones, queremos saber si el hecho de que alguna(s) de las funciones f, 2^f, $C_n(f)$, $F_n(f)$ posea dicha propiedad, implica que el resto de ellas también la tiene. En caso de que tal cosa no suceda, nos interesa conocer condiciones adicionales, ya sea sobre la función o bien sobre el dominio y/o el contradominio de la misma, bajo las cuales la respuesta al problema en cuestión sea afirmativa.

Históricamente, este problema empezó a estudiarse de manera sistemática por H. Hosokawa en [29], [30] [31], [32] y [33], artículos en los cuales se basa parte de este trabajo. También ha sido de gran interés para J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, quienes han aportado una gran cantidad de artículos relacionados con este tema, como por ejemplo, [9], [14], [15], [16], [18], [19].

En el 2001, se escribió [24] en el tema de las funciones inducidas, contemplando principalmente resultados que aparecen en [29], en donde sólo se discuten las funciones inducidas 2^f y $C(f)$. En el trabajo que aquí presentamos se incluyen las pruebas de algunos resultados que en [24], sólo se mencionan. También, presentamos algunos contraejemplos, que en [24] aparecen sin justificación. Por otra parte, en este trabajo contemplamos las funciones inducidas $F_n(f)$ y $C_n(f)$ incluyendo, tanto resultados de [19], [16], [46] así como algunos que aparecen aquí por primera vez.

Los requisitos necesarios para la lectura de este trabajo son; conocimientos básicos de las propiedades fundamentales de compacidad, conexidad y continudad. Hemos tratado en la medida de lo posible, que este trabajo sea autocontenido, así que en el Capítulo 1 incluimos una serie de resultados básicos sobre la Teoría de Continuos e Hiperespacios que necesitaremos en los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 hacemos un breve estudio sobre las funciones abiertas, monótonas, confluentes, casi interiores, ligeras, OM, y MO. que serán las que utilizaremos a la hora de encontrar relaciones entre las funciones f, 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ con respecto a alguna de estas propiedades. En el Capítulo 3 resolvemos el problema en cuestión cuando consideramos la propiedad de ser una función inyectiva, suprayectiva y continua, respectivamente.

A partir del Capítulo 4, nos centramos en una propiedad específica y consideramos el problema a tratar, con respecto a dicha propiedad. Por ejemplo, en el Capítulo 4, tratamos la propiedad de ser débilmente confluente. Vemos que la confluencia débil de las funciones inducidas, implica la confluencia débil de la función f y que, en cada caso, el recíproco de la afirmación anterior no es cierto. En el capítulo 5 resolvemos el problema para las funciones monótonas, demostrando que si alguna de las funciones f, 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ es monótona, entonces el resto de ellas también lo es. En el resto de los capítulos, consideramos las funciones abiertas, confluentes y OM, respectivamente.

La cantidad de artículos que se han escrito sobre el problema que nos interesa, es tan grande que, en un trabajo de esta índole, es imposible abarcarlos todos. Hemos incluído en la Bibliografía, varios de los artículos que encontramos y que tratan este tema.

Agradecemos finalmente, la gran ayuda de parte del Dr. Alejandro Illanes Mejía, en la obtención de varios resultados, como por ejemplo, Los Teoremas 6.4, 6.8 y 6.9.

Índice General

Capítulo 1

Nociones Fundamentales

1.1 Introducción

En el presente capítulo estableceremos las nociones y resultados fundamentales sobre las que se basa este trabajo. Comenzaremos con una serie de nociones de la Topología de Conjuntos y, posteriormente, escribiremos los conceptos y resultados básicos de la Teoría de Continuos que necesitaremos.

En Topología de Conjuntos es común decir que un espacio es ***degenerado*** si posee sólo un punto. En caso contrario, decimos que dicho espacio es ***no degenerado***.

Dado un espacio topológico X y un subconjunto A de X, los símbolos $Cl_X(A)$, $\text{Int}_X(A)$ y $Fr_X(A)$ denotarán la cerradura, el interior y la frontera de A en X, respectivamente. Omitiremos los subíndices cuando del contexto, sea claro cuál es el espacio en el que estamos trabajando.

Aunque suponemos que el lector está familiarizado con las nociones fundamentales de Topología de Conjuntos, a continuación mencionaremos una serie de propiedades que constantemente utilizaremos.

1. Si X es un espacio métrico, $A \subset X$, y $x \in Cl(A)$, entonces existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A que converge a x.

2. Toda función continua definida entre espacios métricos y compactos es uniformemente continua.

3. Toda función continua y biyectiva definida de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff, es un homeomorfismo.

En este trabajo utilizaremos con frecuencia espacios que contienen arcos que unen cualesquiera dos de sus puntos. A continuación precisamos esto en las siguientes definiciones.

Definición 1.1. *Sean X un espacio topológico y $p, q \in X$. Decimos que una* **trayectoria de p a q en X** *es una función continua $\alpha\colon [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Si α es, además, inyectiva, entonces decimos que α es un* **arco de p a q en X.**

Definición 1.2. *El espacio X es* **conexo por trayectorias** *(respectivamente,* **conexo por arcos***) si para cada par de puntos p y $q \in X$ existe una trayectoria (respectivamente, un arco) de p a q en X.*

Es claro que todo espacio conexo por arcos es, a su vez, conexo por trayectorias. En [23, Teorema 9.B.4] se prueba que si X es un espacio de Hausdorff, entonces toda trayectoria de un punto p a un punto q en X contiene un arco de p a q en X. Por tanto, en un espacio de Hausdorff las nociones de conexidad por trayectorias y conexidad por arcos coinciden.

Si $\alpha\colon [0,1] \to X$ es una trayectoria o bien un arco en X, con frecuencia identificaremos la función con su imagen en X. Así pues, $c \in \alpha$ significa que $c = \alpha(t)$ para alguna $t \in [0,1]$.

1.2 El Teorema del Cable Cortado

En esta sección presentamos unos de los resultados auxiliares más importantes de la Teoría de Continuos. Nos refererimos al ***Teorema del Cable Cortado***, que enunciamos a continuación.

Teorema 1.3. *Sea Y un conjunto compacto y de Hausdorff. Supongamos que B y C son dos subconjuntos cerrados y no vacíos de Y tales que ningún subconjunto conexo de Y intersecta tanto a B como a C. Entonces existen dos subconjuntos cerrados y ajenos H y K de Y tales que $Y = H \cup K$, $B \subset H$ y $C \subset K$.*

Una demostración del teorema anterior puede verse en [39, Teorema 12.9].

1.3 Espacios Métricos y Nubes

Si X es un espacio métrico, $x \in X$ y $\epsilon > 0$ entonces, como es usual, denotaremos la ***bola abierta de radio*** ϵ con centro en x como $B_\epsilon^X(x)$. Cuando el contexto sea lo suficientemente claro, el conjunto anterior se denotará simplemente como $B_\epsilon(x)$.

En adelante, cuando hablemos de un espacio métrico X, supondremos que su métrica es d, y cuando pudiera haber confusión, distinguiremos dicha métrica por d_X. Si X es un espacio métrico y $A, B \subset X$, entonces la **distancia entre** A **y** B, denotada por $D(A, B)$, se define como $D(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A \text{ y } b \in B\}$. Si A y B son compactos, entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $D(A, B) = d(a, b)$.

En esta sección utilizaremos las bolas en un espacio métrico X para mostrar una manera natural de engordar a los subconjuntos de X. Dicha noción será de gran importancia a lo largo de este trabajo.

Definición 1.4. *Sean A un subconjunto de X y $\epsilon > 0$. Diremos que la* ϵ-**nube** ***(o la nube de radio*** ϵ***) de*** A ***en*** X*, es el conjunto:*

$$N(\epsilon, A) = \{x \in X \colon \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } d(a, x) < \epsilon\}.$$

En el siguiente resultado escribimos una serie de propiedades elementales de las nubes en X.

Teorema 1.5. *Sean A y B subconjuntos de X y $\epsilon > 0$. Entonces*

i) $A \subset N(\epsilon, A)$;

ii) $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$;

iii) *Si* $0 < \delta < \epsilon$, *entonces* $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$;

iv) $N(\delta, A) \cup N(\epsilon, A) = N(\textit{máx}\{\delta, \epsilon\}, A)$;

v) *Si* $A \subset B$, *entonces* $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, B)$;

vi) $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$;

vii) $Cl(N(\epsilon, A)) \subset N(2\epsilon, A)$.

Demostración. *i)* Si $x \in A$, entonces x mismo es un elemento de A cuya distancia a x es cero y, por tanto, menor que ϵ. Luego $x \in N(\epsilon, A)$.

ii) Si $x \in N(\epsilon, A)$, existe $b \in A$ tal que $d(b, x) < \epsilon$, así que $x \in B_\epsilon(b)$. Luego, $x \in \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$. Por otra parte, si $x \in \bigcup_{a \in A} B_\epsilon(a)$, entonces existe $b \in A$ tal que $x \in B_\epsilon(b)$. Luego $d(b, x) < \epsilon$ y así $x \in N(\epsilon, A)$.

iii) Si $x \in N(\delta, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta < \epsilon$. Luego, $x \in N(\epsilon, A)$.

iv) Si $x \in N(\delta, A) \cup N(\epsilon, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \delta$ o bien $d(a, x) < \epsilon$. En cualquier caso $d(a, x) < \text{máx}\{\delta, \epsilon\}$, y así $x \in N(\text{máx}\{\delta, \epsilon\}, A)$. Ahora bien, si $x \in N(\text{máx}\{\delta, \epsilon\}, A)$, existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \text{máx}\{\delta, \epsilon\}$. Luego $d(a, x) < \delta$ o $d(a, x) < \epsilon$, así que $x \in N(\delta, A) \cup N(\epsilon, A)$,

v) Si $x \in N(\epsilon, A)$, entonces existe $a \in A$ tal que $d(a, x) < \epsilon$. Como $a \in A \subset B$ tenemos que $x \in N(\epsilon, B)$.

vi) Como $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, por *v)* se tiene que $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, A \cup B)$ y $N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Luego $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Por otro lado, si $x \in N(\epsilon, A \cup B)$, existe $z \in A \cup B$ tal que $d(z, x) < \epsilon$. Si $z \in A$, entonces $x \in N(\epsilon, A)$, y si $z \in B$, entonces $x \in N(\epsilon, B)$. En cualquier caso tenemos que $x \in N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B)$.

vii) Supongamos que $x \in Cl(N(\epsilon, A))$. Entonces $B_\epsilon(x) \cap N(\epsilon, A) \neq \emptyset$. Tomemos un punto $a \in B_\epsilon(x) \cap N(\epsilon, A)$. Como $a \in N(\epsilon, A)$, existe $b \in A$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Luego $d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$. Esto prueba que $x \in N(2\epsilon, A)$. ∎

Del inciso *ii)* se sigue que $N(\epsilon, A)$ es un abierto en X.

1.4 Continuos

En la presente sección daremos la noción de continuo y, a su vez, mostraremos dos resultados que utilizaremos con frecuencia en este trabajo.

Definición 1.6. *Un* continuo *es un espacio métrico, compacto, conexo, no vacío y no degenerado.*

Definición 1.7. *Un* **subcontinuo** *de un continuo X es un subconjunto no vacío, cerrado y conexo de X.*

Notemos que, a diferencia de los continuos, los subcontinuos pueden ser degenerados.

En [54, Lema 3.2] se demuestra que todo espacio de Hausdorff que es la imagen continua de un espacio métrico y compacto, es metrizable. De este resultado se sigue inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 1.8. *Sean X un continuo y Y un espacio de Hausdorff. Si $f: X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces Y es un continuo.*

Recordemos que una función $f: X \to Y$ entre los espacios topológicos X y Y es ***cerrada*** si para cualquier subconjunto cerrado C de X, el conjunto $f(C)$ es cerrado en Y.

Teorema 1.9. *Si $f: X \to Y$ es una función continua entre continuos, entonces f es cerrada.*

Demostración. Sea C un subconjunto cerrado de X, como X es compacto, entonces C es compacto, luego, $f(C)$ es compacto, y por ser Y un espacio métrico, se tiene que $f(C)$ es cerrado. ■

Terminamos la presente sección con una aplicación del resultado anterior.

Teorema 1.10. *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si $p \in Y$ y U es un abierto en X tal que $f^{-1}(p) \subset U$, entonces $p \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$.*

Demostración. Por el Teorema 1.9, f es una función cerrada, así que $f(X - U)$ es cerrado en Y. Como $f^{-1}(p) \subset U$, tenemos que $X - U \subset X - f^{-1}(p)$. De esto se sigue que $f(X - U) \subset f(X - f^{-1}(p))$ y $Y - f(X - f^{-1}(p)) \subset Y - f(X - U) \subset f(U)$. Ahora bien, $p \in Y - f(X - f^{-1}(p))$ y, como $Y - f(X - U)$ es un abierto de Y, concluimos que $p \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$. ■

1.5 Hiperespacios

En un continuo podemos hablar de clases de subconjuntos que comparten características en común. Por ejemplo la clase de los subconjuntos abiertos, la clase de los subconjuntos conexos, etc. Los ***hiperespacios*** de un continuo X son familias de subconjuntos de X, cuyos elementos satisfacen una o varias propiedades topológicas específicas.

A continuación definiremos los hiperespacios que trataremos en este trabajo. En lo que resta de este capítulo, la letra X representará un continuo. Dado un número natural n, consideramos las siguientes familias:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{ A \subset X \colon A \text{ es cerrado y no vacío} \}, \\ C_n(X) &= \{ A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes} \}, \\ F_n(X) &= \{ A \in 2^X \colon A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos} \}, \end{aligned}$$

Notemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene lo siguiente

$$F_n(X) \subset C_n(X) \subset C_{n+1}(X), \qquad F_n(X) \subset F_{n+1}(X).$$

Observemos que, como X es métrico y no degenerado, los subconjuntos de un sólo punto son cerrados, así que 2^X tiene más de un elemento. Además, para $n = 1$, $C_1(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X, el cual en adelante denotaremos como $C(X)$. En la siguiente sección veremos una manera de darle una métrica a los hiperespacios 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$, bajo la cual resultarán ser continuos.

Los hiperespacios 2^X y $C(X)$ han sido extensamente estudiados, principalmente desde 1922, con los trabajos de L. Vietoris. Los libros [53] y [39] tratan fundamentalmene sobre el estudio de estos dos hiperespacios. Remitimos al lector a dichos textos para un estudio detallado de los mismos.

Los hiperespacios $F_n(X)$ fueron introducidos en 1931 por K. Borsuk y S. Ulam en [5]. En dicho artículo al hiperespacio $F_n(X)$ se le conoce como el ***n-ésimo producto simétrico de*** X. Otros artículos en los que se estudian dichos espacios son, por ejemplo, [4], [3], [25] y [52]. En 1969 C. Vincent Lovetro, Jr. escribió su tesis de maestría [42] sobre estos hiperespacios. En México también se han realizado investigaciones en torno a dichos hiperespacios. Hemos de destacar [6], [34], [38], [43], [44], [50], [27] y [7].

Los hiperespacios $C_n(X)$ han sido estudiados principalmente por S. Macías en [46], [47] y [45]. En [2] se realiza un estudio bastante detallado de las propiedades principales de $C_n(X)$. Otro artículo en el que se estudian estos hiperespacios es [37].

1.6 El Hiperespacio 2^X

En esta sección mostraremos una manera de asignarle una métrica al hiperespacio 2^X, de un continuo dado X. Para esto consideremos la función $H: 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$, definida como:

$$H(A, B) = \inf\{\, \epsilon > 0\colon A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\,\}.$$

En [53, Teorema 0.2] se prueba que H es una métrica para 2^X. A dicha función se le conoce como la ***métrica de Hausdorff***. En adelante pensaremos que 2^X posee la topología inducida por la métrica de Hausdorff.

Como la métrica que acabamos de definir está dada en términos de la métrica d en X, deberíamos escribir H_d. En este trabajo escribiremos H para referirnos a ella y, utilizaremos los subíndices sólo si hay lugar a confusión.

En [54, Corolario 4.6] se prueba que si d y e son dos métricas en X que inducen la misma topología en X, entonces las métricas H_d y H_e inducen la misma topología en 2^X. Por tanto, la métrica de Hausdorff sólo depende de la topología en X.

Intuitivamente, dos elementos de 2^X se encuentran cerca uno del otro si están muy "empalmados". En el siguiente teorema formalizamos lo anterior.

Teorema 1.11. *Sean A y $B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces, $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$E = \{\, \delta > 0\colon A \subset N(\delta, B) \text{ y } B \subset N(\delta, A)\,\}.$$

Notemos que $H(A, B) = \inf E$. Supongamos que $H(A, B) < \epsilon$. Entonces existe $\epsilon_0 \in E$ tal que $H(A, B) < \epsilon_0 < \epsilon$. Por el Lema 1.5, inciso *iii)*, se tiene que $A \subset N(\epsilon_0, B) \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon_0, A) \subset N(\epsilon, A)$.

Ahora supongamos que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Consideremos la familia $\mathcal{C} = \{ N(\delta, A) : \delta \in (0, \epsilon) \}$. Dada $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Tomando $\delta_0 > 0$ tal que $d(a, b) < \delta_0 < \epsilon$, tenemos que $b \in N(\delta_0, A) \in \mathcal{C}$. De lo anterior resulta que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta para B. Como B es compacto, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in (0, \epsilon)$ tales que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, A)$. Sea $\gamma_1 = \max\{ \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \}$. Entonces $\gamma_1 \in (0, \epsilon)$ y $B \subset N(\gamma_1, A)$, por el inciso *iv)* del Teorema 1.5. De manera análoga obtenemos que existe $\gamma_2 \in (0, \epsilon)$ tal que $A \subset N(\gamma_2, B)$. Tomando $\gamma = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ se tiene que $A \subset N(\gamma, B)$ y $B \subset N(\gamma, A)$. Luego, $\gamma \in E$. Por lo tanto $H(A, B) = \inf E \leq \gamma < \epsilon$. ■

En el siguiente resultado mostramos una sencilla aplicación del resultado anterior.

Teorema 1.12. *Sean A y $B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Si $B \subset N(\epsilon, A)$, entonces $H(A \cup B, A) < \epsilon$.*

Demostración. Notemos que $A \cup B \subset N(\epsilon, A)$. Además $A \subset A \cup B \subset N(\epsilon, A \cup B)$. Entonces, por el teorema anterior, $H(A \cup B, A) < \epsilon$. ■

En [53, Teorema 0.8] se prueba que 2^X es compacto y, en [53, Teorema 1.9], que 2^X es conexo por trayectorias, independientemente de si X es conexo por trayectorias. Por tanto, el hiperespacio 2^X de un continuo (que bien podría no tener arcos) siempre es un continuo que contiene arcos.

Como 2^X es un continuo, podemos construir el hiperespacio de los subconjuntos cerrados y no vacíos de 2^X. Denotaremos a dicha familia por 2^{2^X}. Así pues:

$$2^{2^X} = \{ \mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío } \}.$$

Consideraremos que 2^{2^X} posee la métrica de Hausdorff H_2, inducida por la métrica de Hausdorff H en 2^X.

1.6.1 Convergencia en 2^X

Ahora que tenemos una métrica en 2^X, podemos considerar el concepto usual de convergencia de sucesiones.

Definición 1.13. *Diremos que la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en 2^X,* **converge** *al elemento $A \in 2^X$ si para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon$ para cada $n \geq N$.*

El símbolo $A_n \to A$ indicará que la sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a A, con respecto a la métrica de Hausdorff.

En el siguiente resultado, dado un elemento $A \in 2^X$, mostramos una manera bastante natural de encontrar una sucesión que converge a este punto.

Teorema 1.14. *Si $A \in 2^X$ y $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos tal que converge a cero, entonces la sucesión $\{Cl(N(\epsilon_n, A))\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al punto A.*

Demostración. Dada $n \in \mathbb{N}$ hagamos $A_n = Cl(N(\epsilon_n, A))$ y sea $\epsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_n < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $n \geq N$. Ahora bien, si $n \geq N$, entonces, por el inciso *i)* del Teorema 1.5, $A \subset N(\epsilon_n, A) \subset A_n \subset N(\epsilon, A_n)$. Por otra parte, de acuerdo con los incisos *iii)* y *vii)* del Teorema 1.5 , $A_n \subset N(2\epsilon_n, A) \subset N(\epsilon, A)$. Entonces $H(A_n, A) < \epsilon$, según el Teorema 1.11. ■

En el siguiente resultado, mostramos que la convergencia, es preservada bajo contenciones.

Teorema 1.15. *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$ con A y $B \in 2^X$. Si $A_n \subset B_n$ para casi toda n, entonces $A \subset B$.*

Demostración. Sea $a \in A$. Dada $\epsilon_k = \frac{1}{k} > 0$, con $k \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $H(A_n, A) < \frac{\epsilon_k}{2}$,

$H(B_n, B) < \frac{\epsilon_k}{2}$ y $A_n \subset B_n$. Tomemos $n \geq N$, luego, existe $z \in A_n$ tal que $d(a, z) < \frac{\epsilon_k}{2}$. Como $A_n \subset B_n$, se tiene que $z \in B_n$. De aquí que existe $b_k \in B$ tal que $d(z, b_k) < \frac{\epsilon_k}{2}$. De lo anterior resulta que $d(a, b_k) \leq d(a, z) + d(z, b_k) < \epsilon_k$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} \epsilon_k = 0$ se tiene que $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = a$, de esto se sigue que $a \in B$, pues B es cerrado. ■

La demostración del siguiente resultado se sigue inmediatamente del teorema anterior.

Corolario 1.16. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X tal que $A_n \to A$ con $A \in 2^X$ y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ con $a \in X$. Si $a_n \in A_n$ para casi toda n, entonces $a \in A$.*

A continuación mostraremos que la convergencia en 2^X es preservada bajo uniones finitas.

Teorema 1.17. *Sean $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$, con $A, B \in 2^X$. Entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$.*

Demostración. Si $\epsilon > 0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon$ y $H(B_n, B) < \epsilon$ para cada $n \geq N$. De esto se sigue que $A_n \cup B_n \subset N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$ y $A \cup B \subset N(\epsilon, A_n) \cup N(\epsilon, B_n) = N(\epsilon, A_n \cup B_n)$, según el inciso *vi* del Teorema 1.5. Luego $H(A_n \cup B_n, A \cup B) < \epsilon$, según el Teorema 1.11. ■

1.6.2 Límite Superior y Límite Inferior

Ahora mostraremos otra manera de hablar de la convergencia en 2^X, pensando que los elementos de 2^X son subconjuntos de X. Para establecer esta noción, necesitamos de los siguientes conceptos.

Definición 1.18. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Diremos que el* **límite inferior** *y el* **límite superior** *de la sucesión, denotados por* lím inf A_n *y* lím sup A_n *respectivamente, son los conjuntos:*

$$\liminf A_n = \{\, x \in X : \ \text{para toda } \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para casi toda } n \,\} \text{ y}$$
$$\limsup A_n = \{\, x \in X : \ \text{para toda } \epsilon > 0, B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para una infinidad de números } n \,\}$$

El siguiente resultado nos da algunas propiedades elementales de los límites inferior y superior.

Teorema 1.19. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Entonces:*

i) lím inf $A_n \subset$ lím sup A_n;

ii) lím inf A_n *y* lím sup A_n *son cerrados en X;*

iii) lím sup $A_n \neq \emptyset$;

iv) Si $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces:

$$\liminf A_n \subset \liminf A_{n_k} \quad y \quad \limsup A_{n_k} \subset \limsup A_n;$$

v) Si $A_n \subset B_n$ para casi toda n, entonces:

$$\liminf A_n \subset \liminf B_n \quad y \quad \limsup A_n \subset \limsup B_n.$$

Demostración. *i)* Si $x \in \lim\inf A_n$, entonces para toda $\epsilon > 0$, se tiene que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n. En particular esto sucede para una infinidad de números n. Por lo tanto $x \in \lim\sup A_n$.

ii) Sea $A = \lim\inf A_n$. Si $x \in Cl(A)$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en A tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. En otras palabras, $x_n \in B_\epsilon(x)$ para cada $n \geq N$. Sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_N) \subset B_\epsilon(x)$. Como $x_N \in A$, se tiene que $B_\delta(x_N) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n. Luego $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n. Por lo tanto $x \in A$. Esto prueba que $\lim\inf A_n$ es cerrado. La prueba de que $\lim\sup A_n$ es cerrado es similar.

iii) Como 2^X es compacto, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_{n_k} \to A$ para algún $A \in 2^X$. Sean $x \in A$ y $\epsilon > 0$. Como $A_{n_k} \to A$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $H(A, A_{n_k}) < \epsilon$. De esto se sigue que, para cada $k \geq k_0$, existe $b_k \in A_{n_k}$ tal que $d(x, b_k) < \epsilon$. Por lo tanto $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números n. Así que $x \in \lim\sup A_n$.

iv) Sea $x \in \lim\inf A_n$. Entonces para todo $\epsilon > 0$ se tiene que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para casi toda n. Como $\{A_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta que $B_\epsilon(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para casi toda k. Por lo tanto $x \in \lim\inf A_{n_k}$.

Si $x \in \lim\sup A_{n_k}$, entonces para toda $\epsilon > 0$ se tiene que $B_\epsilon(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para una infinidad de números k. Luego, $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números n. Por lo tanto $x \in \lim\sup A_n$.

v) Sea $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset B_n$ para cada $n \geq N_1$. Si $x \in \lim\inf A_n$ y $\epsilon > 0$, entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N_2$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$ resulta que $B_\epsilon(x) \cap B_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Luego $x \in \lim\inf B_n$. La prueba de que $\lim\sup A_n \subset \lim\sup B_n$ es similar. ■

En el siguiente resultado vemos una manera equivalente de escribir el límite inferior y el límite superior en términos de sucesiones en X.

Teorema 1.20. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en 2^X. Consideremos los siguientes conjuntos:*

$$L = \{\, x \in X : \textit{ existe una sucesión } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ en } X \textit{ tal que } x_n \in A_n \textit{ para cada } n \in \mathbb{N} \textit{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = x \,\},$$

y

$$S = \{\, x \in X : \textit{ existen una subsucesión } \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \textit{ de } \{n\}_{n\in\mathbb{N}} \textit{ y puntos } x_{n_k} \in A_{n_k}, \textit{ para cada } k \in \mathbb{N}, \textit{ tales que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \,\}.$$

Entonces; $\quad \liminf A_n = L \quad$ *y* $\quad \limsup A_n = S.$

Demostración. Veamos que $\liminf A_n = L$. Sea $x \in \liminf A_n$. Por la compacidad de A_n, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un punto $x_n \in A_n$ tal que $d(x, x_n) = D(\{x\}, A_n)$. Sea $\epsilon > 0$. Como $x \in \liminf A_n$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$. Tomemos $n \geq N$ y $a \in B_\epsilon(x) \cap A_n$. Entonces $d(x, x_n) \leq d(x, a) < \epsilon$, por lo que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y, de aquí, $x \in L$.

Supongamos ahora que $x \in L$. Entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $x_n \in A_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \epsilon$. Luego $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$, pues x_n pertenece a dicha intersección. Por lo tanto, $x \in \liminf A_n$.

Ahora veamos que $\limsup A_n = S$. Sea $x \in \limsup A_n$. Entonces, para $\epsilon = 1$ existe un conjunto infinito $J_1 \subset \mathbb{N}$, tal que $B_1(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in J_1$. Tomando $n_1 \in J_1$ existe $x_{n_1} \in B_1(x) \cap A_{n_1}$. Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe un conjunto infinito $J_2 \subset \mathbb{N}$, tal que $B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \in J_2$. Como J_2 es infinito, podemos tomar $n_2 \in J_2$ tal que $n_2 > n_1$ y, además, un punto $x_{n_2} \in B_{\frac{1}{2}}(x) \cap A_{n_2}$. Con este proceso construimos una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$ tales que $d(x_{n_k}, x) < \frac{1}{k}$. Como $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, concluimos que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$ y, por lo tanto, $x \in S$.

Ahora, si $x \in S$, entonces existen una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Dada $\epsilon > 0$, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq K$, entonces $d(x_{n_k}, x) < \epsilon$. Así que $B_\epsilon(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para un número infinito de números k. Por lo tanto, $x \in \limsup A_{n_k} \subset \limsup A_n$, de acuerdo con el inciso *iv)* del Teorema 1.19 ∎

A continuación mostramos una aplicación del resultado anterior.

Teorema 1.21. *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces para cada $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a y, resulta que:*

$$\text{lím sup } f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y).$$

Demostración. Sea $x \in \text{lím sup } f^{-1}(y_n)$. Entonces, por el Teorema 1.20, existen una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $x_{n_k} \in f^{-1}(y_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Luego $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x)$ y, como $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = y$, sucede que $f(x) = y$. Así que $x \in f^{-1}(y)$. ∎

A continuación mostramos la manera de hablar de convergencia de una sucesión en 2^X, en términos del límite inferior y el límite superior.

Definición 1.22. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en 2^X. Diremos que la sucesión* **converge en conjuntos** *a un elemento $A \in 2^X$, y escribiremos $\text{lím} A_n = A$, si*

$$\text{lím inf } A_n = \text{lím sup } A_n = A.$$

En el siguiente resultado vemos que la convergencia de una sucesión en 2^X, con respecto a la métrica de Hausdorff, es equivalente a la convergencia en conjuntos de dicha sucesión.

Teorema 1.23. *Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos en 2^X. Entonces la sucesión converge si y sólo si converge en conjuntos.*

Demostración. Supongamos que $A_n \to A$ para algún elemento $A \in 2^X$. De acuerdo con el Teorema 1.19, inciso *i)*, basta probar que $\text{lím sup } A_n \subset A \subset \text{lím inf } A_n$. Para ver esto, sea $a \in \text{lím sup } A_n$. Entonces, por el Teorema 1.20, existen una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $a_{n_k} \in A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Como $A_{n_k} \to A$, del Corolario 1.16 tenemos que $a \in A$. Esto prueba que $\text{lím sup } A_n \subset A$.

Ahora tomemos $a \in A$ y veamos que $a \in \text{lím inf } A_n$. Sea $\epsilon > 0$. Como $A_n \to A$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $H(A_n, A) < \epsilon$. Luego, para cada $n \geq N$, se tiene que $a \in A \subset N(\epsilon, A_n)$. De aquí que, para cada $n \geq N$, existe $a_n \in A_n$ tal que $d(a, a_n) < \epsilon$. Entonces $B_\epsilon(a) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$, por lo que $a \in \text{lím inf } A_n$. Esto prueba que $A \subset \text{lím inf } A_n$ y, por consiguiente, $\text{lím} A_n = A$.

Ahora supongamos que $\lim A_n = A$. De acuerdo con el Teorema 1.19, incisos *ii)* y *iii)*, $\lim\sup A_n$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X. Luego, $A \in 2^X$. Sea $\epsilon > 0$. Debemos probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Afirmamos que:

1. Existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $A_n \subset N(\epsilon, A)$ para toda $n \geq N_1$.

2. Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset N(\epsilon, A_n)$ para toda $n \geq N_2$.

Para probar 1, supongamos, por el contrario, que para toda $M \in \mathbb{N}$ existe $n \geq M$ tal que $A_n \not\subset N(\epsilon, A)$. Entonces, si $M_1 = 1$ existe $n_1 \geq M_1$ tal que $A_{n_1} \not\subset N(\epsilon, A)$. Si $M_2 = n_1 + 1$ existe $n_2 \geq M_2$ tal que $A_{n_2} \not\subset N(\epsilon, A)$. Si $M_3 = n_2 + 1$ existe $n_3 \geq M_3$ tal que $A_{n_3} \not\subset N(\epsilon, A)$. Continuando este proceso, construimos una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números naturales y puntos $x_k \in A_{n_k} - N(\epsilon, A)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como X es compacto, la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{x_{k_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$. Entonces, por el Teorema 1.20 y el inciso *iv)* del Teorema 1.19, $x \in \lim\sup A_{n_k} \subset \lim\sup A_n = A$. Esto prueba que $x \in A$.

Ahora bien, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_{k_m} \in X - N(\epsilon, A)$ y, como $X - N(\epsilon, A)$ es cerrado en X, sucede que $x \in X - N(\epsilon, A)$. Por lo tanto $x \notin A$. Esto es una contradicción que proviene de haber supuesto que 1 es falso. Por consiguiente, 1 se cumple.

Para probar 2, sea $\mathcal{U} = \{ B_{\frac{\epsilon}{2}}(a) : a \in A \}$. Como $A \subset \bigcup_{a\in A} B_{\frac{\epsilon}{2}}(a)$, la familia $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de A. De la compacidad de A existen puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i)$. De esto, se sigue que $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, \{ a_1, a_2, \ldots, a_k \})$. Ahora bien, para cada $i \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$ se tiene que $a_i \in \lim\inf A_n$ pues $\lim\inf A_n = A$. Entonces existe $M_i \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq M_i$.

Sea $N_2 = \max\{ M_1, M_2, \ldots, M_k \}$. Tomemos $n \geq N_2$ y sea $a \in A$. Como $A \subset N(\frac{\epsilon}{2}, \{ a_1, a_2, \ldots, a_k \})$, existe $i \in \{ 1, 2, \ldots, k \}$ tal que $a \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i)$. Además, podemos tomar un punto $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(a_i) \cap A_n$, pues $n \geq M_i$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, $d(a, x) \leq d(a, a_i) + d(a_i, x) < \epsilon$, de donde $a \in N(\epsilon, A_n)$. Por tanto $A \subset N(\epsilon, A_n)$ y, así, 2 se cumple.

Ahora bien, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces, por 1 y 2, resulta que $A_n \subset N(\epsilon, A)$ y $A \subset N(\epsilon, A_n)$ para cada $n \geq N$. Entonces, por el Teorema 1.11, tenemos que $H(A_n, A) < \epsilon$. Esto prueba que $A_n \to A$. ■

El resultado anterior se utilizará con frecuencia a lo largo de este trabajo, prescindiendo incluso de la respectiva referencia. A continuación mostramos una aplicación del mismo.

Teorema 1.24. *Sean $A, B \in 2^X$ y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Si $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para casi toda n, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $A_n \cap B_n \neq \emptyset$. Para cada $n \geq N$ tomemos un punto $a_n \in A_n \cap B_n$. De la compacidad de X, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $a \in X$. Entonces, por el Teorema 1.20, $a \in \text{lím sup}\, A_n \cap \text{lím sup}\, B_n = A \cap B$. Por lo tanto, $A \cap B \neq \emptyset$. ■

A continuación mostraremos que toda sucesión decreciente en 2^X es convergente y, además, es bastante sencillo calcular el límite de dicha sucesión.

Teorema 1.25. *Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en 2^X. Entonces $A_n \to \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.*

Demostración. Hagamos $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Mostraremos que $\limsup A_n \subset A \subset \liminf A_n$. Tomemos entonces un elemento $x \in \limsup A_n$ y un número natural m. Mostraremos que $x \in Cl(A_m)$. Para esto sea $\epsilon > 0$. Entonces $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números n. Por tanto, existe $n \geq m$ tal que $B_\epsilon(x) \cap A_n \neq \emptyset$. Como $A_n \subset A_m$, resulta que $B_\epsilon(x) \cap A_m \neq \emptyset$. Luego $x \in Cl(A_m) = A_m$. Como esto es cierto para cada natural m, tenemos que $x \in A$. Ahora supongamos que $x \in A$. Dada $\epsilon > 0$, es claro que $x \in B_\epsilon(x) \cap A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $x \in \liminf A_n$. Esto termina la demostración. ■

En el siguiente teorema vemos cómo, a partir de un abierto en X, es posible construir abiertos en 2^X.

Teorema 1.26. *Sea $U \subset X$ y consideremos los conjuntos:*

$$\mathcal{H} = \{ A \in 2^X : A \subset U \} \quad y \quad \mathcal{K} = \{ A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset \}.$$

Si U es cerrado (respectivamente, abierto) en X, entonces $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados (respectivamente, abiertos) en 2^X.

Demostración. Supongamos que U es cerrado en X y consideremos la sucesión constante $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde $B_n = U$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $A \in Cl_{2^X}(\mathcal{H})$. Entonces, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$, tal que $A_n \to A$. Notemos que $A_n \to A$, $B_n \to U$ y $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $A_n \in \mathcal{H}$. Luego, por el Teorema 1.15, se tiene que $A \subset U$. De aquí que $A \in \mathcal{H}$ y, por lo tanto, $\mathcal{H}$ es cerrado en 2^X.

Ahora sea $A \in Cl_{2^X}(\mathcal{K})$. Entonces, existe una sucesión $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{K}$ tal que $A_n \to A$. Notemos que $A_n \to A$, $B_n \to U$ y $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$, pues $A_n \in \mathcal{K}$. Luego, por el Teorema 1.24, se tiene que $A \cap U \neq \emptyset$. De aquí que $A \in \mathcal{K}$ y, por lo tanto, $\mathcal{K}$ es cerrado en 2^X.

Ahora, supongamos que U es abierto en X. Entonces, $X - U$ es cerrado en X y:

$$2^X - \mathcal{H} = \{\, A \in 2^X : A \not\subset U \,\} = \{\, A \in 2^X : A \cap (X - U) \neq \emptyset \,\}.$$

Por lo que acabamos de probar, $2^X - \mathcal{H}$ es cerrado y, por tanto, $\mathcal{H}$ es abierto en 2^X. De manera similar concluimos que:

$$2^X - \mathcal{K} = \{\, A \in 2^X : A \cap U = \emptyset \,\} = \{\, A \in 2^X : A \subset X - U \,\}$$

es cerrado y, por tanto, $\mathcal{K}$ es abierto en 2^X. ■

Presentamos ahora una aplicación del resultado anterior.

Teorema 1.27. *Sean U un abierto en X y $A \in 2^X$ tales que $A \subset U$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ el conjunto definido en el Teorema 1.26. Entonces $\mathcal{H}$ es abierto en 2^X y $A \in \mathcal{H}$, así que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^{2^X}(A) \subset \mathcal{H}$. Sea $a \in N(\epsilon, A)$. Por el Teorema 1.12, $A \cup \{a\} \in B_\epsilon^{2^X}(A)$. Entonces $A \cup \{a\} \in \mathcal{H}$, así que $A \cup \{a\} \subset U$. En particular $a \in U$. ■

Terminamos la presente subsección con el siguiente resultado.

Teorema 1.28. *Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son elementos de 2^X, ajenos dos a dos. Entonces, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \epsilon$ y los conjuntos $N(\delta, A_1), N(\delta, A_2), \ldots, N(\delta, A_n)$ son ajenos dos a dos.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Por la normalidad de X, existen abiertos U_1, $U_2, \ldots, U_n$ en X, ajenos dos a dos y tales que $A_i \subset U_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Además, dada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $\delta_i > 0$ tal que $N(\delta_i, A_i) \subset U_i$, de acuerdo con el teorema anterior. Sea $\delta = \text{mín}\ \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \frac{\epsilon}{2}\}$. Entonces los conjuntos $N(\delta, A_1), N(\delta, A_2), \ldots, N(\delta, A_n)$ son ajenos dos a dos. ■

1.6.3 La Topología de Vietoris

En esta subsección veremos cómo, a partir de la topología de X, podemos definir una topología τ_v en 2^X. Mostraremos, además que τ_v coincide con la topología τ_H en 2^X, inducida por la métrica de Hausdorff. Para esto, si U y $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son subconjuntos de X, definimos $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y consideramos los conjuntos:

$$\Gamma(U) = \{ A \in 2^X : A \subset U \}, \quad \Lambda(U) = \{ A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset \}$$

y

$$\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in I_n \right\}.$$

Entonces, de acuerdo a las respectivas definiciones de dichos conjuntos, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.29. *Supongamos que U, $U_1, U_2, \ldots, U_n$ y $V_1, V_2, \ldots, V_m$ son subconjuntos de X. Hagamos $W = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ y $Z = \bigcup_{i=1}^{m} V_i$. Entonces:*

i) $\Gamma(U) = \langle U \rangle$,

ii) $\Lambda(U) = \langle X, U \rangle$,

iii) $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle = \Gamma(W) \cap (\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i))$,

iv) $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m \rangle =$
$\langle Z \cap U_1, Z \cap U_2, \ldots, Z \cap U_n, W \cap V_1, W \cap V_2, \ldots, W \cap V_m \rangle$.

Demostración. i). Por definición, se tiene que $\langle U \rangle = \{A \in 2^X : A \subset U\} = \Gamma(U)$.

ii).

$$\begin{aligned}\langle X, U\rangle &= \{A \in 2^X : A \subset X \cup U, A \cap X \neq \emptyset \text{ y } A \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \Lambda(U).\end{aligned}$$

iii).

$$\begin{aligned}\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle &= \left\{A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in I_n\right\} \\ &= \{A \in 2^X : A \subset W\} \cap \{A \in 2^X : A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in I_n\} \\ &= \Gamma(W) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} \Lambda(U_i)\right).\end{aligned}$$

iv). $\langle Z \cap U_1, Z \cap U_2, \ldots, Z \cap U_n, W \cap V_1, W \cap V_2, \ldots, W \cap V_m\rangle =$

$$= \{A \in 2^X : A \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n}(Z \cap U_i)\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m}(W \cap V_j)\right), A \cap (Z \cap U_i) \neq \emptyset,$$
$$\text{para cada } i \in I_n \text{ y } A \cap (W \cap V_j) \neq \emptyset, \text{ para cada } j \in I_m\}.$$

Notemos que $\bigcup_{i=1}^{n}(Z \cap U_i) = Z \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_i = Z \cap W$ y $\bigcup_{j=1}^{m}(W \cap V_j) = W \cap \bigcup_{j=1}^{m}(V_j) = W \cap Z$. Observemos también, que $A \cap U_i \neq \emptyset$ para cada $i \in I_n$ y $A \cap V_j \neq \emptyset$ para cada $j \in I_m$, si y sólo si $A \cap (Z \cap U_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in I_n$ y $A \cap (W \cap V_j) \neq \emptyset$ para cada $j \in I_m$. De aquí que:

$\langle Z \cap U_1, Z \cap U_2, \ldots, Z \cap U_n, W \cap V_1, W \cap V_2, \ldots, W \cap V_m\rangle =$

$$\begin{aligned}&= \{A \in 2^X : A \subset Z \cap W, A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in I_n, \\ &\qquad A \cap V_j \neq \emptyset \text{ para cada } j \in I_m\} \\ &= \{A \in 2^X : A \subset W \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in I_n\} \cap \\ &\qquad \{A \in 2^X : A \subset Z \text{ y } A \cap V_j \neq \emptyset \text{ para cada } j \in I_m\} \\ &= \langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle \cap \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle.\end{aligned}$$

■

Consideremos ahora las familias

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle : U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i\},\\
\mathcal{S} &= \{\Gamma(U) : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\Lambda(U) : U \text{ es abierto en } X\}.
\end{aligned}$$

En [54, Teorema 4.5] se prueba que $\mathcal{B}$ es una base para una topología τ_V en 2^X, y que $\mathcal{S}$ es una subbase para τ_V. A la topología τ_V se le llama ***topología de Vietoris***.

Teorema 1.30. *Si τ_H es la topología en 2^X inducida por la métrica de Hausdorff H, entonces $\tau_V = \tau_H$.*

Demostración. Sea U un abierto en X. Entonces $\Gamma(U), \Lambda(U) \in \tau_V$. Además, por el Teorema 1.26, $\Gamma(U)$ y $\Lambda(U) \in \tau_H$. Esto prueba que todo abierto subbásico de $(2^X, \tau_V)$ es abierto en $(2^X, \tau_H)$. Por tanto, todo abierto básico en $(2^X, \tau_V)$ es abierto en $(2^X, \tau_H)$ y de aquí que $\tau_V \subset \tau_H$.

Supongamos ahora que $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Mostraremos que existe $\mathcal{U}_A \in \tau_V$ tal que $A \in \mathcal{U}_A \subset B_\epsilon^{2^X}(A)$. Como la familia $\{B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a) : a \in A\}$ es una cubierta abierta del compacto A, existen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_i)$. Sea $\mathcal{U}_A = \left\langle B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_1), \ldots, B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_n)\right\rangle$. Notemos que $A \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_i) \neq \emptyset$ para cada $i \in I_n$. Por tanto, $A \in \mathcal{U}_A$. Supongamos ahora que $B \in \mathcal{U}_A$ Entonces

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_i) \subset \bigcup_{a \in A} B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a) = N\left(\frac{\epsilon}{2}, A\right) \subset N(\epsilon, A).$$

Por otra parte, si $x \in A$, entonces $x \in B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_i)$ para alguna $i \in I_n$. Para dicho índice i, tenemos que $B \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_i) \neq \emptyset$. Tomemos un punto $b \in B \cap B_{\frac{\epsilon}{2}}^X(a_i)$ y notemos que $d(x,b) \leq d(x,a_i) + d(a_i,b) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Por tanto, $x \in N(\epsilon, B)$. Esto muestra que $A \subset N(\epsilon, B)$ y, por consiguiente, $H(A,B) < \epsilon$.

Supongamos ahora que $C \in B_\epsilon^{2^X}(A)$ y sea $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{2^X}(C) \subset B_\epsilon^{2^X}(A)$. Por lo que acabamos de demostar, existe $\mathcal{U}_C \in \tau_V$ tal que $C \in \mathcal{U}_C \subset B_\delta^{2^X}(C)$. Luego:

$$B_\epsilon^{2^X}(A) = \bigcup_{C \in B_\epsilon^{2^X}(A)} \mathcal{U}_C.$$

Esto prueba que $B_\epsilon^{2^X}(\mathcal{A})$ es abierto en $(2^X, \tau_V)$. Por tanto, $\tau_H \subset \tau_V$. ■

De acuerdo a lo anterior, podemos pensar que un abierto básico en 2^X es una bola abierta alrededor de un punto de 2^X, con respecto a la métrica de Hausdorff, o bien un elemento de la forma $\langle U_1, U_2, \ldots, U_n \rangle$, en donde cada conjunto U_i es abierto en X.

Como $F_n(X)$ y $C_n(X)$ son subconjuntos de 2^X, tenemos que, para la topología de Vietoris en estos hiperespacios, los abiertos básicos son de la forma $F_n(X) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$ y $C_n(X) \cap \langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle$, respectivamente. De aquí en adelante, dichos abiertos básicos se escribirán como $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle_{F_n}$ y $\langle U_1, U_2, \ldots, U_m \rangle_{C_n}$, para simplificar un poco la notación.

1.6.4 La Función Unión

Como sabemos, en un espacio topológico, la unión arbitraria de subconjuntos cerrados no necesariamente es cerrada. Enseguida veremos que, en un continuo X, la unión de cerrados es cerrada si se pide que la familia formada por dichos subconjuntos sea cerrada en 2^X. Recordemos que $2^{2^X} = \{ \mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío} \}$ posee la métrica H_2 inducida por la métrica de Hausdorff H en 2^X.

Teorema 1.31. *Si $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$, entonces el conjunto $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es un cerrado y no vacío en X.*

Demostración. Sea $B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Como $\mathcal{A} \neq \emptyset$, existe $A \in \mathcal{A}$. Notemos que $A \neq \emptyset$ y, además, $A \subset B$. Por tanto $B \neq \emptyset$. Para probar que B es cerrado en X, sea $b \in Cl_X(B)$. Entonces existe una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en B tal que $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $b_n \in A_n$. Como $\mathcal{A}$ es compacto, existe una subsucesión $\{A_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $A_{n_k} \to A$, para algún $A \in \mathcal{A}$. Tenemos entonces que $A_{n_k} \to A$, $\lim\limits_{k \to \infty} b_{n_k} = b$ y $b_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Corolario 1.16, $b \in A$. Por lo tanto $b \in B$ y, de esta manera, $B \in 2^X$. ■

Ahora que hemos demostrado este resultado, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1.32. *La* **función unión** *es la función $\sigma \colon 2^{2^X} \to 2^X$ dada por $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.*

A lo largo de este trabajo, la letra σ representará la función unión.

Teorema 1.33. *La función σ es continua.*

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B} \in 2^{2^X}$ y $\epsilon > 0$. Supongamos que $H_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \epsilon$. Tomemos un punto $a \in \sigma(\mathcal{A})$. Entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $a \in A$. En vista de que $\mathcal{A} \subset N(\epsilon, \mathcal{B})$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Luego, $A \subset N(\epsilon, B)$ por lo que existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Notemos que $b \in \sigma(\mathcal{B})$, así que $a \in N(\epsilon, \sigma(\mathcal{B}))$. Esto muestra que $\sigma(\mathcal{A}) \subset N(\epsilon, \sigma(\mathcal{B}))$. De manera similar se prueba que $\sigma(\mathcal{B}) \subset N(\epsilon, \sigma(\mathcal{A}))$. Por tanto, $H(\sigma(\mathcal{A}), \sigma(\mathcal{B})) < \epsilon$ y, de esta manera, σ es una función continua. ■

En el siguiente resultado vemos un caso especial en el que la unión de un elemento de 2^{2^X}, es un elemento de $C(X)$.

Teorema 1.34. *Si $\mathcal{A} \in 2^{2^X}$ es conexo y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$.*

Demostración. De acuerdo al Teorema 1.31, $\sigma(\mathcal{A}) \in 2^X$. Supongamos que $\sigma(\mathcal{A})$ no es conexo. Entonces existen H y $K \in 2^X$ tales que $\sigma(\mathcal{A}) = H \cup K$ y $H \cap K = \emptyset$. Sea $B \in \mathcal{A} \cap C(X)$. Como $B \subset \sigma(\mathcal{A})$ es conexo, podemos suponer que $B \subset H$. Sean $\mathcal{H} = \{ A \in \mathcal{A} : A \subset H \}$ y $\mathcal{K} = \{ A \in \mathcal{A} : A \cap K \neq \emptyset \}$. Por el Teorema 1.26 tenemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados en 2^X. Además $\mathcal{H} \neq \emptyset$ pues $B \in \mathcal{H}$. Si $\mathcal{K} = \emptyset$, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}$. Luego, $\sigma(\mathcal{A}) \subset H$ y, por lo tanto, $K = \emptyset$, lo cual es una contradiccion. Así que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Como H y K son ajenos, resulta que $\mathcal{H} \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Veamos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{A}$. Por definición $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$ y suponemos que $A \notin \mathcal{H}$, entonces $A \not\subset H$. Luego, $\emptyset \neq A \cap (\sigma(\mathcal{A}) - H) \subset A \cap K$. Por lo tanto $A \cap K \neq \emptyset$ y $A \in \mathcal{K}$. De lo anterior resulta que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ forman una disconexión de $\mathcal{A}$. Como esto es una contradicción, tenemos que $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$. ■

Ahora establecemos una propiedad interesante de los elementos de un subcontinuo de 2^X, con respecto a las componentes de su unión.

Teorema 1.35. *Sean $\mathcal{K}$ un subcontinuo de 2^X y $K \in \mathcal{K}$. Entonces, cada componente de $\sigma(\mathcal{K})$ intersecta a K.*

Demostración. Supongamos que existe una componente C de $\sigma(\mathcal{K})$ tal que $C \cap K = \emptyset$. Notemos que K y C son dos subconjuntos cerrados y no vacíos de $\sigma(\mathcal{K})$. Además, como C es una componente de $\sigma(\mathcal{K})$, no existe un subconjunto conexo de $\sigma(\mathcal{K})$ que intersecte tanto a C como a K. Luego, por el Teorema

1.3, existen dos elementos ajenos A y $B \in 2^X$, tales que $\sigma(\mathcal{K}) = A \cup B$, $K \subset A$ y $C \subset B$. Hagamos $\mathcal{K}_0 = \{L \in \mathcal{K} : L \subset A\}$ y $\mathcal{K}_1 = \{L \in \mathcal{K} : L \cap B \neq \emptyset\}$. Por el Teorema 1.26 tenemos que $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ son cerrados en 2^X. Notemos que $K \in \mathcal{K}_0$, por lo que $\mathcal{K}_0 \neq \emptyset$. Además, tomando un punto $c \in C$ y un elemento $L \in \mathcal{K}$ tal que $c \in L$, resulta que $c \in L \cap B$. Por tanto, $C \in \mathcal{K}_1$ y de aquí que $\mathcal{K}_1 \neq \emptyset$. Ahora bien, es claro que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ y, como A y B son ajenos, tenemos que $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$. Esto muestra que $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ forman una disconexión del conjunto conexo $\mathcal{K}$, lo cual es una contradicción. ■

1.6.5 Arcos Ordenados

Terminamos esta sección, introduciendo una de las herramientas más importantes de la Teoría de Hiperespacios. Nos referimos a la noción de arco ordenado, que definimos a continuación:

Definición 1.36. *Sean A y $B \in 2^X$ tales que $A \subset B$. Diremos que un* **arco ordenado de** A **a** B **en** 2^X, *es una función continua $\alpha\colon [0,1] \to 2^X$ tal que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$, y si $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$, entonces $\alpha(t_1) \subsetneq \alpha(t_2)$.*

Cambiando 2^X por $C_n(X)$ en la definición anterior, obtenemos la noción de arco ordenado en de A a B en $C_n(X)$. Notemos que un arco ordenado de A a B en 2^X o $C_n(X)$ es, en particular, un arco de A a B en 2^X o en $C_n(X)$, según sea el caso.

Con respecto a la existencia de arcos ordenados en 2^X, en [53, Teorema 1.8] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 1.37. *Si $A, B \in 2^X$, entonces existe un arco ordenado de A a B en 2^X si y sólo si $A \neq B$, $A \subset B$ y A intersecta a cada componente de B.*

Como consecuencia del resultado anterior, si A y $B \in C(X)$, $A \neq B$ y $A \subset B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$. En otras palabras, en los hiperespacios 2^X y $C_n(X)$ siempre podemos hablar de arcos ordenados. Utilizamos este resultado en el siguiente teorema, para ver que todo continuo posee subcontinuos propios y no degenerados arbitrariamente pequeños.

Teorema 1.38. *Sean X un continuo, $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un subcontinuo no degenerado S de X tal que $x \in S \subset B_\epsilon(x)$.*

Demostración. Sea $\alpha\colon [0,1] \to C(X)$ un arco ordenado de $\{x\}$ a X en $C(X)$. Como α es continua en cero, existe $\delta > 0$ tal que si $t < \delta$, entonces $H(\alpha(t), \alpha(0)) < \epsilon$. Tomando $t = \frac{\delta}{2}$, tenemos que $S = \alpha(t) \in B_\delta^{C(X)}(\{x\})$. Por tanto, S es un subcontinuo no degenerado de X tal que $x \in S$ y $S \subset N(\epsilon, \{x\}) = B_\epsilon^X(x)$. ■

El siguiente resultado es una observación bastante sencilla de la noción de arco ordenado. La enunciamos aquí porque será utilizada con frecuencia en los capítulos que vienen.

Teorema 1.39. *Supongamos que $f\colon X \to f(X)$ es una función y que A y $B \in 2^X$ son tales que existe un arco ordenado α de A a B en 2^X. Si $f(A) = f(B)$, entonces $f(D) = f(A)$ para todo $D \in \alpha$.*

Demostración. Si $D \in \alpha$, entonces $A \subset D \subset B$. Luego, $f(A) \subset f(D) \subset f(B) = f(A)$, por lo que $f(D) = f(A)$. ■

De acuerdo con el Teorema 1.37, si K y A son elementos de 2^X tales que $K \subset A$ y cada componente de A intersecta a K, entonces existe un arco ordenado de K a A en 2^X. En general es posible encontrar un subconjunto cerrado M de A para el cual existe un arco ordenado de K a M, según se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 1.40. *Supongamos que K y $A \in 2^X$ y que $K \subset A$. Consideremos el conjunto:*

$$M = \bigcup \{C \subset X : C \text{ es una componente de } A \text{ tal que } C \cap K \neq \emptyset\}.$$

Entonces $M \in 2^X$, $K \subset M \subset A$ y cada componente de M intersecta a K.

Demostración. Para ver que $K \subset M$, tomemos un elemento $x \in K$. Entonces, $x \in A$, por lo que existe una componente de C de A tal que $x \in C$. Naturalmente, $x \in C \cap K$ por lo que $C \subset M$. Luego $x \in M$ y, de esta manera, $K \subset M$. Esto prueba, además, que $M \neq \emptyset$ pues K es no vacío. Ahora bien, como cada uniendo que forma al conjunto M está contenido en A, resulta que M también está contenido en A.

Probaremos ahora que M es cerrado en X. Para esto, tomemos un punto $x \in Cl(M)$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en M tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Dada $n \in \mathbb{N}$, supongamos que C_n es la componente de A tal que $x_n \in C_n$ y

$C_n \cap K \neq \emptyset$. Por la compacidad de $C(X)$, existen una subsucesión $\{C_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $C_{n_m} \to C_0$ para algún subcontinuo C_0 de X. Por los teoremas 1.15 y 1.24, tenemos que $x \in C_0 \subset A$ y $C_0 \cap K \neq \emptyset$. Sea C la componente de A que contiene a C_0. Entonces $C \cap K \neq \emptyset$, por lo que $x \in C \subset M$. Esto prueba que M es cerrado en X.

Supongamos ahora, que D es una componente de M. Entonces $D \subset A$ por lo que existe una componente C_1 de A tal que $D \subset C_1$. Ahora bien si $x \in D$, entonces $x \in M$, por lo que existe una componente C_2 de A tal que $x \in C_2$ y $C_2 \cap K \neq \emptyset$. Notemos que $C_2 \subset M$. Como $x \in C_1 \cap C_2$ y tanto C_1 como C_2 son componentes de A, resulta que $C_1 = C_2$, así que $C_1 \cap K \neq \emptyset$ y $C_1 \subset M$. Por tanto, $C_1 = D$, ya que D es una componente de M. Entonces $D \cap K \neq \emptyset$. Esto termina la demostración. ■

Notemos que, si en el teorema anterior, suponemos que K y $A \in C_n(X)$, entonces la conclusión es obvia. Supongamos ahora, que tenemos dos sucesiones $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Si existe un arco ordenado de A_n a B_n en 2^X, para cada $n \in \mathbb{N}$, es natural preguntarse si también existe un arco ordenado de A a B en 2^X. Como consecuencia del siguiente resultado, la respuesta al problema anterior es afirmativa si pedimos que la sucesión $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sea decreciente.

Teorema 1.41. *Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones en 2^X tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$. Supongamos, además, que $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y que para cada natural n, toda componente de B_n intersecta a A_n. Entonces cada componente de B intersecta a A.*

Demostración. Tomemos una componente C de B. De acuerdo al Teorema 1.25, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Entonces, dada $n \in \mathbb{N}$, sucede que $C \subset B_n$ por lo que existe una componente C_n de B_n tal que $C \subset C_n$. Por hipótesis, $C_n \cap A_n \neq \emptyset$. Ahora bien, como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión $\{C_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $C_{n_m} \to C_0$, para algún subcontinuo C_0 de X. Tenemos entonces que $C_{n_m} \to C_0$, $A_{n_m} \to A$, $C \subset C_{n_m}$ y $C_{n_m} \cap A_{n_m} \neq \emptyset$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces, por los teoremas 1.15 y 1.24, sucede que $C \subset C_0$ y $C_0 \cap A \neq \emptyset$. Ahora bien, como $C_{n_m} \subset B_{n_m}$ y $B_{n_m} \to B$, sucede que $C_0 \subset B$ aplicando de nuevo el Teorema 1.15. Como C es una componente de B, resulta que $C = C_0$. Luego $C \cap A \neq \emptyset$. ■

Terminamos la presente sección con el siguiente resultado:

Teorema 1.42. *Supongamos que $k \in \mathbb{N}$ y que A es un subcontinuo no degenerado de X. Entonces, existen k subcontinuos no degenerados y ajenos dos a dos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de A. Más aún, si $B \in 2^X$ es tal que $B \cap A \neq A$, entonces podemos escoger los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ de manera que $A_i \cap B = \emptyset$, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Demostración. Como A es conexo y no degenerado, y $A \cap B \neq A$, podemos tomar k puntos distintos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ en $A - B$. Afirmamos que

1) existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, \{a_1, a_2, \ldots, a_k) \cap B = \emptyset$ y, para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$, sucede que $B_\epsilon(a_i) \cap B_\epsilon(a_j) = \emptyset$.

Para ver esto notemos que $X - B$ es subconjunto abierto de X tal que $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subset X - B$. Por el Teorema 1.27, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que $N(\epsilon_0, \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}) \subset X - B$. Además, como los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son distintos, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $B_{\epsilon_1}(a_i) \cap B_{\epsilon_1}(a_j) = \emptyset$ para cada $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ con $i \neq j$. Es claro que $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_0, \epsilon_1\}$ satisface 1).

Dada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tomemos un arco ordenado $\alpha_i \colon [0, 1] \to C(X)$ de $\{a_i\}$ a A. Por el Teorema 1.26, $\mathcal{U}_i = \{ K \in C(X) \colon K \subset B_\epsilon(a_i) \}$ es un subconjunto abierto en $C(X)$. Además $\{a_i\} \in \mathcal{U}_i$, por lo que existe $\delta_i > 0$ tal que $B_{\delta_i}(\{a_i\}) \subset \mathcal{U}_i$. Por la continuidad de α_i existe $\gamma_i > 0$ tal que si $t < \gamma_i$, entonces $H(\alpha_i(t), \{a_i\}) < \delta_i$. Hagamos $t_i = \frac{\gamma_i}{2}$ y $A_i = \alpha_i(t_i)$. Entonces los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_k$ cumplen lo que se pide. ■

1.7 El Hiperespacio $F_n(X)$

Como $F_n(X) \subset 2^X$, la restricción de la métrica de Hausdorff en 2^X a $F_n(X)$ hace de éste un espacio métrico. Observemos que la función $f \colon X \to F_1(X)$ definida para cada $x \in X$ como $f(x) = \{x\}$ es un homeomorfismo. Por tanto, $F_1(X)$ es una copia de X contenida en $F_n(X)$. En en esta sección mostraremos que $F_n(X)$ es un continuo. Para esto, requerimos de una serie de resultados iniciales.

Teorema 1.43. *Supongamos que $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ son espacios métricos. Consideremos la función $\rho \colon (\prod_{i=1}^n X_i) \times (\prod_{i=1}^n X_i) \to [0, \infty)$ definida para $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$ en $\prod_{i=1}^n X_i$ como*

$$\rho(x, y) = \textit{máx}\{ d_i(x_i, y_i) \colon i = 1, 2, ..., n \}.$$

Entonces, ρ es una métrica en $\prod_{i=1}^n X_i$.

Demostración. Tomemos dos elementos $x = (x_i)$ y $y = (y_i)$ en $\prod_{i=1}^n X_i$. Como $d_i(x_i, y_i) \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $\rho(x, y) \geq 0$. Además $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $d_i(x_i, y_i) = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Esto sucede si y sólo si $x_i = y_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Como $d_i(x_i, y_i) = d_i(y_i, x_i)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, tenemos que $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Sea $z = (z_i) \in \prod_{i=1}^n X_i$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\rho(x,y) &= \text{máx}\{\, d_i(x_i, y_i) \colon i = 1, 2, \ldots, n \,\} \\
&\leq \text{máx}\{\, d_i(x_i, z_i) + d_i(z_i, y_i) \colon i = 1, 2, \ldots, n \,\} \\
&\leq \text{máx}\{\, d_i(x_i, z_i) \colon i = 1, 2, \ldots, n \,\} + \text{máx}\{\, d_i(z_i, y_i) \colon i = 1, 2, \ldots, n \,\} \\
&= \rho(x, z) + \rho(z, y).
\end{aligned}$$

Esto prueba que ρ es una métrica en $\prod_{i=1}^n X_i$. ■

A la métrica ρ definida como en el teorema anterior, se le conoce como la ***métrica producto***. En el siguiente resultado vemos cómo el hiperespacio $F_n(X)$ se relaciona con el espacio X^n con la métrica producto.

Teorema 1.44. *Consideremos la función $f \colon X^n \to F_n(X)$ definida para $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$, como $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{\, x_1, x_2, \ldots, x_n \,\}$. Entonces f es continua y suprayectiva.*

Demostración. Si $Z \in F_n(X)$, entonces $Z = \{\, z_1, z_2, \ldots, z_k \,\}$ con $k \leq n$. Si $k = n$ tenemos que $f(z_1, z_2, \ldots, z_k) = Z$. Si $k < n$, haciendo $z_{k+1} = z_{k+2} = \cdots = z_n = z_1$ obtenemos que $f(z_1, z_2, \ldots, z_n) = Z$. Esto prueba que f es suprayectiva.

Para ver que f es continua, sean $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in X^n$ y $\epsilon > 0$. Buscamos $\delta > 0$ tal que si $\rho(x, z) < \delta$ entonces $H(f(x), f(z)) < \epsilon$. Hacemos $\delta = \epsilon$, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ es tal que $\rho(x, z) < \epsilon$, resulta que $d(x_i, z_i) < \epsilon$ para toda $i = 1, 2, \ldots n$. Como $x_i \in f(x)$ y $z_i \in f(z)$, tenemos que $f(x) \subset N(\epsilon, f(z))$ y $f(z) \subset N(\epsilon, f(x))$, así que $H(f(x), f(z)) < \epsilon$ y f es continua. ■

Corolario 1.45. *El hiperespacio $F_n(X)$ es un continuo.*

Demostración. Como X es continuo, entonces X^n también lo es. Por tanto, de acuerdo con el teorema anterior, $F_n(X)$ es la imagen continua de un continuo. Luego, $F_n(X)$ es un continuo. ■

Recordemos que el hiperespacio 2^X siempre es conexo por trayectorias. En el siguiente teorema, vemos que esta propiedad no se preserva en el hiperespacio $F_n(X)$. Para probar dicho resultado, utilizaremos una serie de propiedades sobre conexidad local. Recordemos primero que un espacio topológico Y es ***localmente conexo*** si para cada punto $p \in Y$ y cada subconjunto abierto U en Y tal que $p \in U$, existe un subconjunto abierto y conexo V en Y tal que $p \in V \subset U$.

Teorema 1.46. *Toda imagen continua de un continuo localmente conexo, es un continuo localmente conexo.*

Teorema 1.47. *Si $\mathcal{A}$ es cerrado en $F_n(X)$ y localmente conexo, entonces $\bigcup \mathcal{A}$ es localmente conexo.*

Teorema 1.48. *Los continuos localmente conexos son conexos por trayectorias.*

A manera de referencia, una prueba del Teorema 1.46 se encuentra en [54, Corolario 8.17]. El Teorema 1.47 aparece en [25, Lema 2.2], mientras que el Teorema 1.48, se encuentra demostrado en [55, Teorema 31.2].

Teorema 1.49. *El hiperespacio $F_n(X)$ es conexo por trayectorias si y sólo si X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Supongamos que $F_n(X)$ es conexo por trayectorias. Sean $a, b \in X$. Como $\{a\}$ y $\{b\} \in F_n(X)$ y éste es conexo por trayectorias, existe una función continua $\alpha\colon [0,1] \to F_n(X)$ tal que $\alpha(0) = \{a\}$ y $\alpha(1) = \{b\}$. Por el Teorema 1.46, $\mathcal{M} = \alpha([0,1])$ es un continuo localmente conexo. Entonces, por el Teorema 1.47, $M = \bigcup \mathcal{M}$ es localmente conexo. Más aún, como $\mathcal{M}$ es un continuo y $\{a\} \in \mathcal{M} \cap C(X)$, por el Teorema 1.34, M es un subcontinuo de X. Por tanto, por el Teorema 1.48, M es conexo por trayectorias. Como a y $b \in M$ existe una función continua $\beta\colon [0,1] \to M$ tal que $\beta(0) = a$ y $\beta(1) = b$. En vista de que $M \subset X$, β es una trayectoria de a a b en X. Esto muestra que X es conexo por trayectorias.

Ahora supongamos que X es conexo por trayectorias. Entonces X^n es conexo por trayectorias y, por el Teorema 1.44, $F_n(X)$ es la imagen continua de un espacio conexo por trayectorias. Luego, $F_n(X)$ es conexo por trayectorias. ■

A continuación mostraremos que, en la topología de Vietoris, los abiertos básicos de conexos, son conexos en $F_n(X)$. Este resultado aparece en [50, Lema 1].

Teorema 1.50. *Supongamos que $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son subconjuntos conexos de X, y que $m \leq n$. Entonces $\langle C_1, C_2, \ldots, C_m \rangle_{F_n}$ es un subconjunto conexo de $F_n(X)$.*

Demostración. Hagamos $\mathcal{C} = \langle C_1, C_2, \ldots, C_m \rangle_{F_n}$. Notemos que si $K \in \mathcal{C}$, entonces $K \in F_n(X)$ y satisface las condiciones $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ y K intersecta a cada C_i. Fijemos un elemento $A \in \mathcal{C}$ y sea $B \in \mathcal{C}$. Entonces $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ y $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_s\}$ para algunos $r, s \leq n$. Dada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ se tiene que $A \cap C_i \neq \emptyset$ y $B \cap C_i \neq \emptyset$. Por tanto, existen $j_i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y $k_i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ tales que $x_{j_i}, y_{k_i} \in C_i$. Consideremos $D = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\}$ y $E = \{y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots, y_{k_m}\}$. Notemos que D tiene a lo más m elementos, así que $D \in F_n(X)$. Además $D \subset A$. De manera similar, tenemos que $E \in F_n(X)$ y $E \subset B$.

Afirmamos que

1) existe un subconjunto conexo $\mathcal{K}$ de $\mathcal{C}$ que contiene a A y D.

Si $D = A$, entonces $\{A\}$ satisface 1). Supongamos, por tanto, que $D \subsetneq A$. Sean $x_{t_1} \in A - D$ y $u \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tales que $x_{t_1} \in C_u$. Definimos una función

$$f : \{x_{j_1}\} \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\} \times C_u \to F_n(X)$$

para cada $c \in C_u$, como

$$f(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, c) = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, c\}.$$

Notemos que la imagen de f está contenida en $\mathcal{C}$. Más aún, f es continua. Para ver esto, tomemos un punto $c \in C_u$ y sea $\epsilon > 0$. Si $b \in C_u$ es tal que:

$$\rho\left((x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, c), (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, b)\right) < \epsilon$$

entonces, por la definición de ρ en el Teorema 1.43, tenemos que $d(c, b) < \epsilon$, por lo que:

$$H\left((x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, c), (x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, b)\right) < \epsilon.$$

Esto muestra que la función f es continua. Por tanto, si:

$$\mathcal{A}_1 = f(\{x_{j_1}\} \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\} \times C_u).$$

se tiene que $\mathcal{A}_1 \subset C$. Como $\mathcal{A}_1$ es la imagen continua de un producto de conexos, resulta que $\mathcal{A}_1$ es conexo. Como $x_{j_u} \in D \cap C_u$,

$$f(x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, x_{j_u}) = D.$$

Además:

$$f(\{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, x_{t_1}\} = D \cup \{x_{t_1}\},$$

por lo que $D \cup \{x_{t_1}\} \in \mathcal{A}_1$. Esto prueba que $\mathcal{A}_1$ es un subconjunto conexo de C que contiene a D y a $D \cup \{x_{t_1}\}$. Si $D \cup \{x_{t_1}\} = A$, enconces $\mathcal{A}_1$ satisface 1).

Supongamos que $D \cup \{x_{t_1}\} \subsetneq A$. Entonces existe $x_{t_2} \in A - (D \cup \{x_{t_1}\})$. Aplicando el argumento anterior a x_{t_2} obtenemos un subconjunto conexo $\mathcal{A}_2$ de C que contiene a $D \cup \{x_{t_1}\}$ y a $D \cup \{x_{t_1}, x_{t_2}\}$. Si $D \cup \{x_{t_1}, x_{t_2}\} = A$, entonces $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un subconjunto conexo de C que contiene a A y D, con lo cual 1) se satisface.

Continuando con este proceso, y en vista de que A es finito, obtenemos un número finito de números naturales $t_1, t_2, \ldots t_l$, así como un número finito de subconjuntos conexos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_l$ de C de manera que $A = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}, x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_l}\}$, $\mathcal{A}_1$ contiene a D y $D \cup \{x_{t_1}\}$ y, para cada $k \in \{2, \ldots l\}$ sucede que $\mathcal{A}_k$ contiene a $D \cup \{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots x_{t_{k-1}}\}$ y a $D \cup \{x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots x_{t_k}\}$, Entonces, $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{A}_l$ es un subconjunto conexo de C que contiene a A y D. Esto termina la prueba de 1).

De manera similar se prueba que:

2) existe un subconjunto conexo $\mathcal{L}$ de C que contiene a B y E.

Ahora mostraremos que:

3) existe un subconjunto conexo $\mathcal{M}$ de C que contiene a D y E.

Para probar esto, consideremos ahora la función:

$$g_1 : C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\} \to F_n(X)$$

definida para cada $c \in C_1$ como:

$$g_1(c, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}) = \{ c, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m} \}.$$

Notemos que la imagen de g_1 está contenida en $\mathcal{C}$. Además, efectuando una prueba similar a la realizada para f, obtenemos que g_1 es una función continua. En vista de que el conjunto $C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\}$ es conexo, tenemos que:

$$\mathcal{B}_1 = g_1(C_1 \times \{x_{j_2}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\})$$

es un subconjunto conexo y $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{C}$. Además $D = \{ x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m} \} \in \mathcal{B}_1$ y, como $y_{k_1} \in C_1$, se tiene que $\mathcal{B}_1$ también contiene a $\{y_{k_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m}\}$.

Ahora consideremos la función:

$$g_2\colon \{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\} \to F_n(X)$$

definida para cada $c \in C_2$ como:

$$g_2(y_{k_1}, c, x_{j_3}, \ldots, x_{j_m}) = \{ y_{k_1}, c, x_{j_3}, \ldots, x_{j_m} \}.$$

Entonces, la imagen de g_2 está contenida en $\mathcal{C}$ y g_2 es continua. Además:

$$\mathcal{B}_2 = g_2(\{y_{k_1}\} \times C_2 \times \{x_{j_3}\} \times \cdots \times \{x_{j_m}\})$$

es un subconjunto conexo de $\mathcal{C}$, que contiene a los conjuntos $\{ y_{k_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_m} \}$ y $\{ y_{k_1}, y_{k_2}, x_{j_3}, \ldots, x_{j_m} \}$. Procediendo de esta manera, construimos subconjuntos conexos $\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_4, \ldots, \mathcal{B}_m$ de $\mathcal{C}$ tales que, para cada $i \in \{ 3, 4, \ldots, m \}$, $\mathcal{B}_i$ contiene a $\{ y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots y_{k_{i-1}}, x_{j_i}, \ldots, x_{j_m} \}$ y $\{ y_{k_1}, y_{k_2}, \ldots y_{k_i}, x_{j_{i+1}}, \ldots, x_{j_m} \}$. Por consiguiente $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_m$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{C}$ que contiene a D y E. Esto prueba 3).

De las afirmaciones 1), 2) y 3) concluimos que $\mathcal{C}_B = \mathcal{K} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{M}$ es un subconjunto conexo de $\mathcal{C}$ que contiene a A y B. Notemos que $\mathcal{C} = \bigcup_{B \in \mathcal{C}} \mathcal{C}_B$. Por tanto $\mathcal{C}$ se puede escribir como una unión de conexos, en donde todos ellos tienen al elemento A. Luego, $\mathcal{C}$ es conexo. ■

1.8 El Hiperespacio $C_n(X)$

Como en el caso de $F_n(X)$, se tiene que $C_n(X) \subset 2^X$. Así que la restricción de la métrica de 2^X a $C_n(X)$ hace de éste, un espacio métrico. En [53, Teorema 0.8] se demuestra que $C(X)$ es compacto, y en [53, Teorema 1.12] que $C(X)$ es conexo por trayectorias, independientemente de si X es conexo por trayectorias. Esto nos permite generar nuevos hiperespacios, por ejemplo:

$$\begin{aligned} C(2^X) &= \{ \mathcal{A} \in 2^{2^X} : \mathcal{A} \text{ es conexo} \}, \\ 2^{C(X)} &= \{ \mathcal{A} \subset C(X) \colon \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío} \}, \\ C^2(X) &= C(C(X)) = \{ \mathcal{A} \in 2^{C(X)} \colon \mathcal{A} \text{ es conexo} \}, \\ F_n(C(X)) &= \{ \mathcal{A} \in 2^{C(X)} \colon \mathcal{A} \text{ tiene a lo más } n \text{ elementos} \}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Utilizando el hecho de que $C(X)$ es conexo por trayectorias, probaremos en esta sección que $C_n(X)$ es un continuo conexo por trayectorias, para cada $n > 1$. Para esto, necesitaremos también de los siguientes resultados.

Lema 1.51. *El hiperespacio $F_n(C(X))$ es un subconjunto de $2^{C(X)}$ que es conexo por trayectorias.*

Demostración. La primera parte se sigue de la igualdad (1.1). Para mostrar la segunda parte, notemos que, como $C(X)$ es conexo por trayectorias, por el Teorema 1.49, $F_n(C(X))$ es conexo por trayectorias. ■

Recordemos que $\sigma \colon 2^{2^X} \to 2^X$ es la función unión.

Lema 1.52. $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$.

Demostración. Sea $A \in \sigma(F_n(C(X)))$. Entonces $A \in 2^X$ y existe $\mathcal{B} \in F_n(C(X))$ tal que $\sigma(\mathcal{B}) = A$. Como $\mathcal{B}$ tiene a lo más n elementos, entonces A tiene a lo más n componentes. Así que $A \in C_n(X)$.

Ahora supongamos que $A \in C_n(X)$ y sean $C_1, C_2, \ldots, C_k$ sus componentes. Hagamos $\mathcal{A} = \{ C_1, C_2, \ldots, C_k \}$. Entonces $\mathcal{A} \in F_n(C(X))$, pues es un subconjunto de $C(X)$ con a lo más n elementos. Como $\sigma(\mathcal{A}) = A$, tenemos que $A \in \sigma(F_n(C(X)))$. ■

Teorema 1.53. *El hiperespacio $C_n(X)$ es un continuo conexo por trayectorias, para cada $n > 1$.*

Demostración. Sea $n > 1$. Como $C(X)$ es un continuo entonces $F_n(C(X))$ es un continuo. Por el Lema 1.51, $F_n(C(X))$ es conexo por trayectorias y, por el Lema 1.52, tenemos que $\sigma(F_n(C(X))) = C_n(X)$. Combinando lo anterior con el Teorema 1.33, resulta que $\sigma|_{F_n(C(X))}\colon F_n(C(X)) \to C_n(X)$ es una función continua y suprayectiva. Por lo tanto, $C_n(X)$ es un continuo conexo por trayectorias. ■

En el siguiente resultado, veremos que los arcos ordenados en 2^X que inician en un elemento de $C_n(X)$, se quedan contenidos en $C_n(X)$.

Teorema 1.54. *Sean A y $C \in 2^X$ y α un arco ordenado de A a C en 2^X. Si $A \in C_n(X)$, entonces $\alpha \subset C_n(X)$.*

Demostración. Sean $B \in \alpha$ y β el subarco de α con puntos extremos A y B. Es claro que β es un arco ordenado de A a B en 2^X. Por el Teorema 1.37, A intersecta a cada componente de B. Así, si L es una componente de B, existe una componente K de A tal que $K \subset L$. Esto implica que B tiene a lo más el mismo número de componentes de A y, por lo tanto, $\alpha \subset C_n(X)$. ■

Como una aplicación del teorema anterior, vemos ahora que todo subcontinuo no degenerado de X se puede aproximar por elementos de $C_n(X)$.

Teorema 1.55. *Si $n \geq 2$, $S \in C(X)$ es no degenerado y $\epsilon > 0$, entonces existe $A \in C_n(X)$ tal que A tiene n componentes, al menos una de ellas es degenerada y $H(A, S) < \epsilon$. Más aún, si $B \in C_{n-1}(X)$ es tal que $B \subsetneq S$, entonces podemos suponer que $B \subset A$.*

Demostración. Tomemos un arco ordenado α de B a S en 2^X. Por el teorema anteior, $\alpha \subset C_{n-1}(X)$. Como α es continua en 1, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - 1| < \delta$, entonces $H(\alpha(t), \alpha(1)) < \epsilon$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $\delta < 2$. Sean $t_0 = 1 - \frac{\delta}{2}$ y $A_0 = \alpha(t_0)$. Entonces, como α es un arco ordenado y $t_0 < 1$, resulta que $B \subset A_0 \subsetneq S$. Además, $H(A_0, S) = H(\alpha(t_0), \alpha(1)) < \epsilon$. Supongamos que A_0 tiene m componentes. Entonces $m \leq n - 1$ y, en vista de que $A_0 \subsetneq S$, podemos tomar $n - m$ puntos $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n$ en $S - A_0$. Hagamos $A = A_0 \cup \{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\}$. Entonces, como $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\} \subset S$, tenemos que:

$$A = A_0 \cup \{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\} \subset N(\epsilon, S) \cup S = N(\epsilon, S).$$

Por otro lado, como $A_0 \subset A$, tenemos que $S \subset N(\epsilon, A_0) \subset N(\epsilon, A)$. Entonces $H(A, S) < \epsilon$. Es claro que A satisface el resto de las condiciones que se piden. ■

De acuerdo con el Teorema 1.34, $\sigma_{|C^2(X)}: C^2(X) \to C(X)$, está bién definida. En el siguiente resultado, presentamos dos versiones para $C_n(X)$ del Teorema 1.34.

Teorema 1.56. *Si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de $C_n(X)$ y $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$. Más aún, si $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X y $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{A}) \in C_n(X)$.*

Demostración. Como $C_n(X)$ es un continuo contenido en 2^X, entonces $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X así que, por el Teorema 1.34, $\sigma(\mathcal{A}) \in C(X)$.

Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X tal que $\mathcal{A} \cap C_n(X) \neq \emptyset$. Tomemos un elemento $K \in \mathcal{A} \cap C_n(X)$ y supongamos que $\sigma(\mathcal{A})$ tiene al menos $n+1$ componentes. Entonces, por el Teorema 1.35, cada componente de $\sigma(\mathcal{A})$ intersecta a K. Luego, K tiene más de n componentes. Como esto es un absurdo, tenemos que $\sigma(\mathcal{A})$ posee a lo más n componentes. ■

1.9 Modelos Geométricos

Existen continuos para los cuales sus hiperespacios se pueden determinar mediante un modelo geométrico. Por ejemplo, si $X = [0, 1]$, entonces $C([0, 1])$ es el triángulo en $\mathbb{R}^2$ con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 1)$. Una manera de mostrar esto, es considerando la función $f: C([0, 1]) \to \mathbb{R}^2$ definida para cada intervalo $[a, b] \in C([0, 1])$ como $f([a, b]) = (a, b)$. Es claro que f es inyectiva. No es difícil probar que f es continua. Por tanto, f es un homeomorfismo en su imagen, el cual es el triángulo anteriormente descrito.

Si X es la circunferencia unitaria S^1, entonces es conocido que un modelo geométrico para $C(S^1)$ es el disco unitario (ver [39, Ejemplo 5.2]). En la Sección 5 del libro [39] se muestran los modelos geométricos de los hiperespacios de otros continuos, sencillos de describir. A continuación daremos una descripción del modelo geométrico del hiperespacio $C([0, 1])$. Para esto introducimos la siguiente notación. Si X es un continuo y A es un subcontinuo de X, definimos

$$C(A, X) = \{ B \in C(X) : A \subset B \}.$$

Notemos que, en el modelo geométrico del hiperespacio $C([0, 1])$ tenemos que

1. $C(\{0\},[0,1])$ queda representado por el lado del triángulo cuyos extremos son los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. Dicho conjunto es un arco ordenado de $\{0\}$ a $[0,1]$ en $C([0,1])$.

2. $C(\{1\},[0,1])$ está representado por el lado del triángulo cuyos extremos son los puntos $(0,1)$ y $(1,1)$. Dicho conjunto es un arco ordenado de $\{1\}$ a $[0,1]$ en $C([0,1])$.

3. $F_1([0,1])$ está representado por el lado del triángulo cuyos extremos son $(0,0)$ y $(1,1)$.

4. El conjunto $[0,1]$, como elemento de $C([0,1])$, está representado por el vértice $(0,1)$ del triángulo.

Encontrar modelos geométricos para el hiperespacio 2^X de un continuo X, es un problema bastante complicado. En [53, Teorema 1.95] se demuestra que 2^X contiene un cubo de Hilbert, esto es, un espacio homeomorfo a $[0,1]^\infty$. Más aún, en [53, Teorema 1.97] se prueba que cuando X es localmente conexo, 2^X es un cubo de Hilbert.

En cuanto a la determinación de modelos geométricos para el hiperespacio $F_n(X)$ se sabe, por ejemplo que $F_2([0,1])$ es un triángulo, que $F_2(S^1)$ es una banda de Möebius. También se tiene un modelo geométrico del hiperespacio $F_2(X)$ de un continuo X homeomorfo a la letra T. Para más información al respecto, remitimos al lector a [5], [3], [7], [34], [35], [43] y [52].

En cuanto a la determinación de modelos geométricos para $C_n(X)$, en [37, Lema 2] se prueba que el hiperespacio $C_2([0,1])$ es homeomorfo al cubo $[0,1]^4$. También en [37, Lema 3] se demuestra que $C_2(S^1)$ no es homeomorfo a $C_2([0,1])$, pero no se tiene un modelo geométrico para el hiperespacio $C_2(S^1)$.

En la sección anterior vimos que la función $\sigma|_{F_n(C(X))} : F_n(C(X)) \to C_n(X)$ es continua y suprayectiva. Por tanto, uno podría preguntarse si los hiperespacios $F_n(C(X))$ y $C_n(X)$ son homeomorfos. Si $X = [0,1]$, entonces el modelo geométrico de $C_2([0,1])$ es el cubo $[0,1]^4$, mientras que el modelo geométrico de $C([0,1])$ un triángulo el cual, a su vez, es homeomorfo al cuadrado $[0,1]^2$. R. Molski probó en [52] que $F_2([0,1]^2)$ es homeomorfo a $[0,1]^4$. Por tanto, los hiperespacios $F_2(C([0,1]))$ y $C_2([0,1])$ son homeomorfos. Sin embargo, si $X = S^1$, entonces $F_2(C(S^1))$ y $C_2(S^1)$ no son homeomorfos, en vista de que $F_2(C(S^1))$ es homeomorfo a $F_2(C([0,1]))$ y de que $C_2(S^1)$ no es homeomorfo a $C_2([0,1])$.

Capítulo 2

Funciones Especiales

2.1 Introducción

En este capítulo presentamos algunas clases de funciones, así como algunos resultados con respecto a ellas. Varias de estas clases son estudiadas en [24], sobre todo en lo que concierne a las relaciones entre ellas. En este trabajo sólo enunciaremos los resultados que más adelante serán de utilidad.

A lo largo de este capítulo y, a menos que digamos explícitamente lo contrario, supondremos que la letra f representa una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y.

2.2 Funciones Abiertas

Una de las clases más importantes en Topología de Conjuntos es la que se describe a continuación.

Definición 2.1. *Decimos que f es **abierta** si para cada subconjunto abierto U de X, se tiene que $f(U)$ es abierto en Y.*

En algunos casos, para determinar si una función es abierta es más fácil analizar su comportamiento en sus puntos y no directamente en los abiertos del espacio. Esto se realiza con ayuda de la siguiente noción.

Definición 2.2. *Decimos que f es **interior en el punto** $p \in X$, si $f(p) \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$ para cada subconjunto abierto $U \subset X$ que contiene a p.*

La relación entre las funciones abiertas y las interiores queda expresada en el siguiente resultado:

Teorema 2.3. *f es abierta si y sólo si es interior en cada uno de los puntos de su dominio.*

Demostración. Supongamos que f es abierta. Sean $x \in X$ y $U \subset X$ abierto tal que $x \in U$. Entonces $f(x) \in f(U) = \text{Int}_Y(f(U))$. Ahora supongamos que f es interior en cada punto de su dominio. Sea U un subconjunto abierto en X. Tomemos un punto $y \in f(U)$ y sea $x \in U$ tal que $f(x) = y$. Como f es interior en x, sucede que $y \in \text{Int}_Y(f(U)) \subset f(U)$. Luego $f(U)$ es abierto y, por lo tanto, f es abierta. ■

En el siguiente resultado presentamos una caracterización de la noción de función abierta, en términos de sucesiones.

Teorema 2.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *f es abierta.*

ii) *Para cada punto $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a y, tenemos que $f^{-1}(y) \subset \liminf f^{-1}(y_n)$.*

iii) *Para cada punto $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a y, tenemos que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$.*

Demostración. Supongamos que f es abierta. Tomemos un punto $y \in Y$ y una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a y. Sean $x \in f^{-1}(y)$ y $\epsilon > 0$. Como $f(B_\epsilon(x))$ es un abierto en Y que contiene a y y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, resulta que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \in f(B_\epsilon(x))$ para cada $n \geq N$. Luego $B_\epsilon(x) \cap f^{-1}(y_n) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Por consiguiente $x \in \liminf f^{-1}(y_n)$. Esto muestra que *i)* $\Rightarrow$ *ii)*.

Supongamos ahora que *ii)* es cierto. Tomemos un punto $y \in Y$ y una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a y. Por *ii)* y el Teorema 1.21, tenemos que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y) \subset \liminf f^{-1}(y_n)$. Por tanto $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. Esto prueba que *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*.

Supongamos, por último que *iii)* es cierto. Tomemos un punto $x \in X$. Si f no es interior en x, entonces existe un abierto U en X tal que $x \in U$

y $y = f(x) \notin \mathrm{Int}_Y(f(U))$. Entonces, $f(x) \in Fr_Y(f(U))$ por lo que existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y que converge a y tal que $y_n \in Y - f(U)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, de la hipótesis se tiene que $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$. En particular $f^{-1}(y) = \liminf f^{-1}(y_n)$, por el Teorema 1.20, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X que converge a x tal que $x_n \in f^{-1}(y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como U es abierto en X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in U$. Luego $y_m = f(x_m) \in f(U)$. Esto es una contradicción. Por tanto, f es interior en x y, por el Teorema 2.3, f es abierta. ■

2.3 Funciones Monótonas

En esta sección, estudiaremos, someramente, a la clase de las funciones cuyas fibras son conexas.

Definición 2.5. *Decimos que f es* ***monótona*** *si para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es conexo.*

Como mostramos a continuación, para las funciones monótonas, no sólo la preimagen de cada punto es conexo, sino también la preimagen de cada subcontinuo.

Teorema 2.6. *f es monótona si y sólo si para cada $L \in C(Y)$, el conjunto $f^{-1}(L)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que f es monótona y que existe $L \in C(Y)$ tal que $f^{-1}(L)$ no es conexo. Entonces, existen H y $K \in 2^X$ tales que $H \cap K = \emptyset$ y $H \cup K = f^{-1}(L)$. De esto resulta que $L = f(f^{-1}(L)) = f(H \cup K) = f(H) \cup f(K)$. Notemos que $f(H) \cap f(K) = \emptyset$. Para ver esto, supongamos que existe un punto $y \in f(H) \cap f(K)$. Entonces existen $a \in H$ y $b \in K$ tales que $y = f(a) = f(b)$. Como $y \in L$, resulta que $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(L) = H \cup K$. Sean $H_1 = f^{-1}(y) \cap H$ y $K_1 = f^{-1}(y) \cap K$. Entonces $f^{-1}(y) = H_1 \cup K_1$. Notemos que H_1 y K_1 son cerrados en Y y $H_1 \cap K_1 = \emptyset$. Además $H_1 \neq \emptyset$ pues tiene al punto a, y $K_1 \neq \emptyset$ pues tiene al punto b. Esto implica que H_1 y K_1 forman una disconexión de $f^{-1}(y)$. Como esto contradice el hecho de que f es monótona, resulta que $f(H) \cap f(K) = \emptyset$. En vista de que f es cerrada, $f(H), f(K) \in 2^Y$. Por tanto, $f(H)$ y $f(K)$ forman una disconexión de L, lo cual contradice que $L \in C(Y)$. Así concluimos que $f^{-1}(L)$ es conexo.

Ahora supongamos que, para cada $L \in C(Y)$, el conjunto $f^{-1}(L)$ es conexo. Sea $y \in Y$. Como $\{y\} \in C(Y)$, se tiene que $f^{-1}(y) = f^{-1}(\{y\})$ es conexo. Por lo tanto f es monótona. ∎

2.4 Funciones Confluentes

A continuación haremos un pequeño estudio de una clase de funciones que contiene a la clase de las funciones abiertas y a la de las funciones monótonas.

Definición 2.7. *Decimos que $f: X \to Y$ es confluente, si para cada subcontinuo Q de Y, se tiene que $f(K) = Q$ para cada componente K de $f^{-1}(Q)$.*

Como consecuencia del Teorema 2.6, tenemos que las funciones monótonas son confluentes. En [54, Teorema 13.14] se muestra que las funciones abiertas son confluentes. Una prueba detallada de este resultado puede encontrarse en [24, Teorema 2.3.3]. Los recíprocos de las afirmaciones anteriores no son ciertos. En [24, Ejemplo 2.3.1] se muestra una función confluente que no es abierta, y en [24, Pág. 44], una función confluente que no es monótona.

A continuación mostramos que la confluencia se preserva bajo la composición de funciones.

Teorema 2.8. *Si las funciones continuas y suprayectivas $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ son confluentes, entonces $g \circ f: X \to Z$ es confluente.*

Demostración. Sean $L \in C(Z)$ y K una componente de $(g \circ f)^{-1}(L)$. Como $(g \circ f)(K) \subset L$, entonces $g(f(K)) \subset L$, así que $f(K) \subset g^{-1}(L)$. Además, $f(K)$ es conexo, por lo que podemos considerar la componente Y_0 de $g^{-1}(L)$ tal que $f(K) \subset Y_0$. Notemos ahora que K es un subconjunto conexo de $f^{-1}(Y_0)$, por lo que podemos considerar la componente K_0 de $f^{-1}(Y_0)$ tal que $K \subset K_0$. Como f y g son confluentes tenemos que $(g \circ f)(K_0) = g(f(K_0)) = g(Y_0) = L$, así que $K_0 \subset (g \circ f)^{-1}(L)$. Tenemos entonces que K_0 es un subconjunto conexo de $(g \circ f)^{-1}(L)$ que contiene a la componente K de dicho conjunto. Luego, $K = K_0$. Por tanto, $(g \circ f)(K) = (g \circ f)(K_0) = L$. Esto prueba que $g \circ f$ es confluente. ∎

2.5 Funciones Casi Interiores

Introducimos ahora la clase de las funciones casi interiores que, por su nombre mismo, está, en cierta forma ligada con la clase de las funciones interiores.

Definición 2.9. *Decimos que f es* ***casi interior en un punto*** *$y \in Y$, si para cada conjunto abierto $U \subset X$ que contiene a una componente de $f^{-1}(y)$, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$. Diremos que f es* ***casi interior,*** *si f es casi interior en cada punto de Y.*

A continuación mostramos la relación entre las funciones interiores y las casi interiores.

Teorema 2.10. *Si $y \in Y$ y f es interior en cada punto de $f^{-1}(y)$, entonces f es casi interior en y.*

Demostración. Sean K una componente de $f^{-1}(y)$ y U un abierto en X tales que $K \subset U$. Tomemos un punto $x \in K$. Notemos que $x \in f^{-1}(y)$, así que f es interior en x. Luego $f(x) \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$. ■

El recíproco del resultado anterior es falso. Para ver esto consideremos, en $\mathbb{R}^2$, los continuos $Y = [-1,1] \times \{0\}$ y $X = Y \cup (\{0\} \times [0,1])$. Definimos $f: X \to Y$ como la identidad en Y y como la constante $(0,0)$, para cada punto en $\{0\} \times [0,1]$. Entonces, es fácil ver que f es casi interior en $y = (0,0)$ y no es interior en el punto $(0,1)$ que pertenece a $f^{-1}(y)$. Combinando los teoremas 2.3 y 2.10, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.11. *Las funciones abiertas son casi interiores.*

La función que construímos en el ejemplo anterior es monótona y, además, casi interior. A continuación, mostraremos que las funciones monótonas son casi interiores.

Teorema 2.12. *Si f es monótona, entonces f es casi interior.*

Demostración. Sea $y \in Y$. Como f es monótona, el conjunto $f^{-1}(y)$ es conexo. Sea U un abierto en X tal que $f^{-1}(y) \subset U$. Por Teorema 1.10 se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$. Entonces, f es casi interior. ■

Ahora bien, si $y \in Y$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en Y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ entonces, por el Teorema 1.21, $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$, así que $\limsup f^{-1}(y_n)$ intersecta a algunas componentes de $f^{-1}(y)$. Cuando $\limsup f^{-1}(y_n)$ intersecta a *todas* las componentes de $f^{-1}(y)$, obtenemos que f es casi interior y viceversa. Probamos esto en el siguiente resultado.

Teorema 2.13. *La función f es casi interior en $y \in Y$ si y sólo si para cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ se tiene que el conjunto* $\limsup f^{-1}(y_n)$ *intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Demostración. Supongamos que f es casi interior en y. Sean K una componente de $f^{-1}(y)$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ hagamos $U_m = N(\frac{1}{m}, K)$. Como f es casi interior, tenemos que $y \in \mathrm{Int}_Y(f(U_m))$ así que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existen un abierto $V_m \subset Y$ tal que $y \in V_m \subset f(U_m)$ y un número natural N_m tal que si $n \geq N_m$, entonces $y_n \in V_m$. Observemos que si $N_2 \leq N_1$, tomando N_2' con $N_1 < N_2'$, se tiene que si $n \geq N_2'$, entonces $y_n \in V_2$. En esta situación, podemos reemplazar N_2 por N_2'. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $N_1 < N_2 < \cdots$. De esto se sigue que $\{y_{N_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_{N_m} \in V_m \subset f(U_m)$. Luego, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $x_{N_m} \in f^{-1}(y_{N_m}) \cap U_m$.

Consideremos la sucesión $\{x_{N_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de elementos en X y sea $\{x_{N_{m_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión convergente al punto $x \in X$. Por el Teorema 1.14, $Cl(U_{m_k}) \to K$. Además $\lim_{k\to\infty} x_{N_{m_k}} = x$ y $x_{N_{m_k}} \in Cl_X(U_{m_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Luego, por el Corolario 1.16, $x \in K$. Como $x_{N_{m_k}} \in f^{-1}(y_{N_{m_k}})$, se tiene que $x \in \limsup f^{-1}(y_n) \cap K$.

Ahora supongamos que si $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, entonces $\limsup f^{-1}(y_n)$ intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$. Sea U un abierto en X que contiene a una componente K de $f^{-1}(y)$. Notemos que $y \in f(U)$. Si $y \notin \mathrm{Int}_Y(f(U))$, entonces $y \in Fr_Y(f(U))$, así que existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $Y - f(U)$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Por hipótesis existe $z \in \limsup f^{-1}(y_n) \cap K$. Por tanto, existen una subsucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y puntos $x_{n_k} \in f^{-1}(y_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = z$. Como U es un abierto y $z \in K \subset U$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_{k_0}} \in U$. De esto se sigue que $y_{n_{k_0}} = f(x_{n_{k_0}}) \in f(U)$, lo cual contradice el que $y_{n_{k_0}} \in Y - f(U)$. Por lo tanto, $y \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$ y con esto queda demostrado el teorema. ■

Considerando el Teorema 2.12, en [24, Ejemplo 2.2.3] se muestra que existen funciones casi interiores que no son abiertas y, considerando el Teorema

2.11, en [24, Ejemplo 2.2.4] que existen funciones casi interiores que no son monótonas. Como veremos más adelante, las funciones casi interiores son confluentes (ver Teorema 2.18).

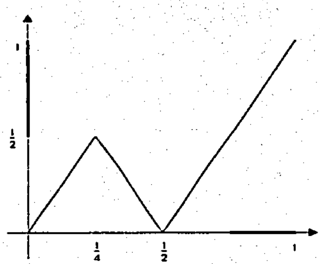
2.6 Funciones Ligeras

Recordemos que un espacio topológico Y es ***totalmente disconexo*** si todas sus componentes son conjuntos de un sólo punto. En contra parte con las funciones monótonas, en donde se requiere que las fibras sean conexas, tenemos a las funciones ligeras, en donde pedimos que las fibras sean totalmente disconexas.

Definición 2.14. *Decimos que f es **ligera** si para cada $y \in Y$, se tiene que $f^{-1}(y)$ es totalmente disconexo.*

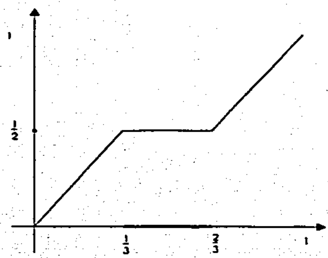
Es fácil ver que existen funciones ligeras que no son monótonas, así como funciones ligeras que no son abiertas. Tomemos, por ejemplo, la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{4}], \\ -2x+1, & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \\ 2x-1, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

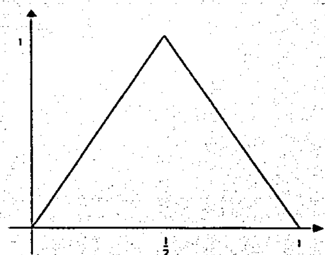


Notemos que f es ligera pero no es abierta ni monótona. La función f tampoco es confluente, pues si Q es el arco que une los puntos $(0, \frac{1}{2})$ y $(0,1)$, entonces $A = \{(\frac{1}{4}, 0)\}$ es una componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $f(A) \neq Q$. Como anunciamos que las funciones casi interiores son confluentes, la función f no es casi interior. Veamos ahora que existen funciones monótonas que no son ligeras. Consideremos la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$



Es fácil ver que f es monótona y, como el conjunto $f^{-1}(\frac{1}{2}) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ no es totalmente disconexo, f no es ligera. Notemos que f no es abierta.



Observemos ahora que la función $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ -2x + 2, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

es abierta y ligera, pero no monótona.

Por último mostraremos que existen funciones abiertas que no son ligeras. Para esto, sean $X = [0,1] \times [0,1]$, $Y = [0,1]$ y $f\colon X \to Y$ definida como $f(x,y) = y$. Es claro que f es abierta. Además $f^{-1}(p) = [0,1] \times \{p\}$ para cada $p \in Y$, así que f no es ligera.

En el siguiente teorema mostramos una serie de condiciones bajo las cuales una función ligera es abierta.

Teorema 2.15. *Sean $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas, definidas entre continuos. Si g es ligera y $g \circ f$ es casi interior, entonces g es abierta.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y U un abierto en Y tales que $y \in U$. Hagamos $z = g(y)$. Afirmamos que

1) toda componente de $f^{-1}(y)$, es una componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$.

Para ver esto, sea K una componente de $f^{-1}(y)$. Entonces:

$$K \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}\left(g^{-1}(g(y))\right) = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = (g \circ f)^{-1}(z).$$

Sea K' la componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$ tal que $K \subset K'$. Entonces $g(f(K')) = (g \circ f)(K') = \{z\}$, de aquí que $f(K') \subset g^{-1}(z)$. Como g es ligera y $f(K')$ es un subcontinuo, tenemos que $f(K')$ es un conjunto de un sólo punto. Notemos que $\{y\} = f(K) \subset f(K')$, así que $f(K') = \{y\}$. Luego $K' \subset f^{-1}(y)$. Como K' es conexo, $K \cap K' \neq \emptyset$ y K es una componente de $f^{-1}(y)$, tenemos que $K' \subset K$. Luego $K = K'$ y 1) es cierto.

Tomemos una componente K de $f^{-1}(y)$. Por 1), K es una componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$. Como $K \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$ es un abierto en X, y $g \circ f$ es casi interior, tenemos que $z \in \mathrm{Int}_Z((g \circ f)(f^{-1}(U)))$. Como f es suprayectiva, $f(f^{-1}(U)) = U$, así que $z \in \mathrm{Int}_Z(g(U))$. Por lo tanto g es interior en y. De esta manera, por el Teorema 2.3, g es abierta. ■

En [54, Teorema 13.3], se demuestra que toda función continua entre espacios métricos compactos se puede escribir como la composición de una función monótona, seguida de una función ligera. Formalmente, tenemos el siuguiente resultado:

Teorema 2.16. *Si X y Y son espacios métricos compactos y $f: X \to Y$ es una función continua y suprayectiva, entonces existen un espacio métrico compacto M, una función monótona $h: X \to M$ y una función ligera $g: M \to Y$ tales que $f = g \circ h$.*

Bajo las condiciones del teorema anterior, si f es casi interior, entonces g resulta ser abierta. A continuación probamos este resultado.

Teorema 2.17. *Si f es casi interior, entonces existen un continuo M, una función monótona $h: X \to M$ y una función ligera y abierta $g: M \to Y$ tales que $f = g \circ h$.*

Demostración. Por el Teorema 2.16 existen un espacio métrico compacto M, una función monótona $h: X \to M$ y una función ligera $g: M \to Y$ tales que $f = g \circ h$. Entonces, M es un continuo y, por el Teorema 2.15, g es abierta. ■

Estamos ahora en condiciones de probar que las funciones casi interiores son confluentes.

Teorema 2.18. *Si f es casi interior, entonces f es confluente.*

Demostración. Por el Teorema 2.17, f se puede escribir como la composición de una función monótona con una función abierta. Como las funciones monótonas y las funciones abiertas son confluentes y la confluencia se preserva bajo composición (Teorema 2.8), tenemos que f es confluente. ■

Veamos ahora que la composición de funciones casi interiores es una función casi interior.

Teorema 2.19. *Sean $f: X \to Y$ y $g: Y \to Z$ funciones continuas y suprayectivas, definidas entre continuos. Si f y g son casi interiores, entonces $g \circ f$ es casi interior.*

Demostración. Sea $z \in Z$. Supongamos que U es un abierto en X que contiene a una componente K de $(g \circ f)^{-1}(z)$. Como $g(f(K)) = \{z\}$, sucede que $f(K) \subset g^{-1}(z)$. Sea K' la componente de $g^{-1}(z)$ tal que $f(K) \subset K'$. Notemos que $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(K') \subset f^{-1}(g^{-1}(z)) = (g \circ f)^{-1}(z)$. Por tanto, si K'' es la componente de $f^{-1}(K')$ tal que $K \subset K''$, entonces $K'' \subset (g \circ f)^{-1}(z)$. Como K es una componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$, resulta que

$K'' = K$. Luego K es una componente de $f^{-1}(K')$. Por el Teorema 2.18, f es confluente así que $f(K) = K'$.

Dados $y \in K'$ y $x \in K$ tales que $f(x) = y$, llamemos K_y a la componente de $f^{-1}(y)$ tal que $x \in K_y$. Notemos que $K \cap K_y \neq \emptyset$ y $K_y \subset f^{-1}(y) \subset f^{-1}(K') \subset (g \circ f)^{-1}(z)$, así que $K_y \subset K \subset U$, pues K es una componente de $(g \circ f)^{-1}(z)$. Como f es casi interior, se tiene que $y \in \mathrm{Int}_Y(f(U))$. Entonces, $K' \subset \mathrm{Int}_Y(f(U))$. Como g es casi interior, $\mathrm{Int}_Y(f(U))$ es un abierto en Y y, puesto que K' es una componente de $g^{-1}(z)$, resulta que $z \in \mathrm{Int}_Z(g(\mathrm{Int}_Y(f(U))))$. Como $g(\mathrm{Int}_Y(f(U))) \subset g(f(U))$, tenemos que:

$$\mathrm{Int}_Z\Big(g\Big(\mathrm{Int}_Y\big(f(U)\big)\Big)\Big) \subset \mathrm{Int}_Z\big(g(f(U))\big) = \mathrm{Int}_Z\big((g \circ f)(U)\big).$$

Por lo tanto, $z \in \mathrm{Int}_Z\big((g \circ f)(U)\big)$ y $g \circ f$ es casi interior. ■

2.7 Funciones OM y MO

A continuación consideramos las clases de las funciones que se pueden escribir como la composición de una función monótona seguida de una función abierta, así como aquella formada por las funciones que se pueden escribir como la composición de una función abierta seguida de una función monótona.

Definición 2.20. *Decimos que $f\colon X \to Y$ es* OM, *si existen un continuo M, una función monótona $h\colon X \to M$ y una función abierta $g\colon M \to Y$ tales que $f = g \circ h$.*

Definición 2.21. *Decimos que $f\colon X \to Y$ es* MO, *si existen un continuo M, una función abierta $h\colon X \to M$ y una función monótona $g\colon M \to Y$ tales que $f = g \circ h$.*

El siguiente resultado es una reformulación del Teorema 2.17.

Teorema 2.22. *Las funciones casi interiores son* OM.

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.23. *Si f es* MO, *entonces f es* OM.

Demostración. Si f es MO, entonces $f = g \circ h$, en donde h es abierta y g es monótona. De acuerdo con los teoremas 2.11 y 2.12, h y g son casi interiores. Entonces, por el Teorema 2.19, la composición $g \circ h$ es casi interior. Luego, por el Teorema 2.22, f es OM. ■

En [24, Ejemplo 2.6.7], se muestra una función OM que no es MO. También en [24, Ejemplo 2.5.2.2], se muestra una función confluente que no es OM. En vista del Teorema 2.23, dicha función no es MO.

A continuación probaremos el recíproco del Teorema 2.22. Por tanto, la clase de las funciones casi interiores es igual a la clase de las funciones OM.

Teorema 2.24. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *f es casi interior,*

ii) *f es* OM.

iii) *f es la composición de una función monótona seguida de una función ligera y abierta.*

Demostración. La implicación *i)* $\Rightarrow$ *ii)* se probó en el Teorema 2.22. Supongamos que *ii)* es cierto. Entonces f es la composición de una función monótona h seguida de una función abierta g. Por los teoremas 2.11 y 2.12, g y h son casi interiores. Luego, por el Teorema 2.19, la composición $f = g \circ h$ es casi interior. Entonces, por el Teorema 2.17, f es la composición de una función monótona seguida de una función ligera y abierta. Esto prueba que *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. Ahora supongamos que *iii)* es cierto, entonces $f = g \circ h$, donde h es monótona y g es ligera y abierta. Por el Teorema 2.12, h es casi interior, y por el Teorema 2.11, g es casi interior. Luego, por el Teorema 2.19, concluimos que f es casi interior. ■

Como una consecuencia inmediata de los teoremas 2.13 y 2.24 se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.25. *f es* OM *si y sólo si para cada $y \in Y$ y cada sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim_{m\to\infty} y_m = y$, el conjunto* $\limsup f^{-1}(y_m)$ *intersecta a cada componente de $f^{-1}(y)$.*

Terminamos este capítulo mencionando que la noción de confluencia se debe a J. J. Charatonik, quién la definió en [8]. Los resultados de esta sección se pueden encontrar en artículos como [48] y [49]. Otros trabajos que conviene destacar son [41] y [51].

Capítulo 3

Las Funciones Inducidas

3.1 Introducción

Durante este capítulo, supondremos que la letra f representa una función continua definida entre los continuos X y Y. Notemos que si $A \in 2^X$, entonces el conjunto $f(A) \in 2^Y$ por ser la imagen bajo una función continua de un conjunto compacto y no vacío. Si además, pedimos, por ejemplo, que A tenga a lo más un determinado número finito de puntos o de componentes, entonces el conjunto $f(A)$ posee la misma propiedad adicional impuesta en A. Por tanto, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos bien definidas tres funciones:

$$2^f : 2^X \to 2^Y, \qquad C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y), \qquad F_n(f) : F_n(X) \to F_n(Y).$$

Así pues, $2^f(A) = f(A)$, $C_n(f)(A) = f(A)$ y $F_n(f)(A) = f(A)$ para cada A en 2^X, $C_n(X)$ y $F_n(X)$, respectivamente. Notemos que $C_n(f) = 2^f|_{C_n(X)}$ y $F_n(f) = 2^f|_{F_n(X)} = C_n(f)|_{F_n(X)}$.

El objetivo principal de este trabajo consiste en determinar si una propiedad que satisface f, la siguen satisfaciendo sus ***funciones inducidas*** 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$. El recíproco de esta situación también es de nuestro interés. En otras palabras, si $\mathcal{P}$ es una propiedad que satisface una función (por ejemplo ser inyectiva, ser suprayectiva, ser cerrada, etc.) y consideramos las condiciones:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \ f \in \mathcal{P}, & (3)\ C_n(f) \in \mathcal{P}, \\ (2)\ 2^f \in \mathcal{P}, & (4)\ F_n(f) \in \mathcal{P}, \end{array}$$

entonces, para cada $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $i \neq j$, nos interesa saber si la implicación $(i) \Rightarrow (j)$ es cierta. De no ser así, es de nuestro interés el conocer propiedades adicionales, ya sea sobre f o sobre los continuos X y Y, bajo las cuales la implicación resulte cierta. Estas situaciones las reflejaremos a lo largo de este trabajo. En las siguientes secciones, trataremos el caso en que $\mathcal{P}$ es la propiedad de ser inyectiva, continua y suprayectiva, respectivamente.

Existen una buena cantidad de artículos en los que se estudian las relaciones entre una función f y sus correspondientes funciones inducidas 2^f y $C(f)$. Por cuestiones de espacio y tiempo, no nos es posible presentar todos los resultados que se conocen al respecto. Hemos optado por presentar en la bibliografía, una lista, lo más completa posible, de todos los artículos que encontramos en los que se discute este tema. Podemos destacar, por ejemplo, los escritos por H. Hosokawa [29], [30], [31], [32] y [33], quien fue el primero en presentar un estudio sistemático al respecto. Posteriormente el tema fue tratado por J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, quienes tanto individualmente como en conjunto han publicado [10], [9], [14], [12], [13], [15], [11], [17], [16], [20], [22], [21] y, junto con A. Illanes publicaron [18].

En [9] se presenta una descripción bastante completa de los resultados conocidos, en el tema en cuestión. Otros artículos que conviene mencionar son [36] y [26].

Con respecto a la relación entre una función y sus funciones inducidas $F_n(f)$ y $C_n(f)$, para $n > 1$, la situación es bastante distinta. A la fecha han aparecido una muy poca cantidad de ellos. Destacamos [19], que ha sido uno de los artículos base para la elaboración del presente trabajo.

3.2 Funciones Inyectivas

En el siguiente teorema, mostramos que la inyectividad de f es equivalente a la de sus funciones inducidas.

Teorema 3.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) f *es inyectiva,* *iii)* $C_n(f)$ *es inyectiva,*
ii) 2^f *es inyectiva,* *iv)* $F_n(f)$ *es inyectiva.*

Demostración. Si f es inyectiva y $A, B \in 2^f$ son tales que $2^f(A) = 2^f(B)$, entonces $f(A) = f(B)$. Por tanto, $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(B))$ y, como f es inyectiva, resulta que $A = B$. Esto muestra que 2^f es inyectiva. En vista de que la restricción de una función inyectiva es inyectiva, las implicaciones *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* y *iii)* $\Rightarrow$ *iv)* son ciertas. Supongamos ahora que $F_n(f)$ es inyectiva y sean a y $b \in X$ tales que $f(a) = f(b)$. Entonces $\{a\}, \{b\} \in F_n(X)$ y $F_n(f)(\{a\}) = F_n(f)(\{b\})$. Como $F_n(f)$ es inyectiva, tenemos que $\{a\} = \{b\}$ y, por tanto, $a = b$. Esto prueba que f es inyectiva. ■

3.3 Funciones Continuas

Con respecto a la continuidad, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es continua,* *iii)* $C_n(f)$ *es continua,*
ii) 2^f *es continua,* *iv)* $F_n(f)$ *es continua.*

Demostración. Supongamos que f es continua y sea $\epsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, y) < \delta$, entonces $d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon$. Sean A y $B \in 2^X$ tales que $H(A, B) < \delta$. Veamos que $H(2^f(A), 2^f(B)) = H(f(A), f(B)) < \epsilon$. Sean $a' \in f(A)$ y $a \in A$ tal que $f(a) = a'$. Como $A \subset N(\delta, B)$ tenemos que existe $b \in B$ tal que $d_X(a, b) < \delta$. Luego, $d_Y(f(a), f(b)) = d_Y(a', f(b)) < \epsilon$. Por lo tanto $a' \in N(\epsilon, f(B))$, de donde $f(A) \subset N(\epsilon, f(B))$. De manera similar se prueba que $f(B) \subset N(\epsilon, f(A))$. De lo anterior se tiene que $H(2^f(A), 2^f(B)) < \epsilon$ y, entonces, 2^f es continua.

Como la restricción de una función continua es, de nueva cuenta, una función continua, las implicaciones *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* y *iii)* $\Rightarrow$ *iv)* son ciertas. Supongamos ahora que $F_n(f)$ es continua. Sean $\epsilon > 0$ y $x \in X$. Como $\{x\} \in F_n(X)$, existe $\delta > 0$ tal que si $H(\{x\}, B) < \delta$, entonces $H(F_n(f)(\{x\}), F_n(f)(B)) < \epsilon$. Sea $z \in X$ tal que $d_X(x, z) < \delta$. Notemos que $H(\{x\}, \{z\}) < \delta$, así que,

$$H\Big(\{f(x)\}, \{f(z)\}\Big) = H\Big(f(\{x\}), f(\{z\})\Big) = H\Big(F_n(f)(\{x\}), F_n(f)(\{z\})\Big) < \epsilon.$$

Como $d_Y(f(x), f(z)) = H\Big(\{f(x)\}, \{f(z)\}\Big)$, tenemos que f es continua. ■

Ahora bien, como estamos suponiendo que f es una función continua, por el teorema anterior, resulta que las funciones inducidas 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ siempre son continuas.

3.4 Funciones Suprayectivas

En esta sección, mostramos que la suprayectividad de f equivale a la de 2^f y la de $F_n(f)$, pero no a la de $C_n(f)$. Comenzamos con el siguiente resultado.

Teorema 3.3. *Consideremos las siguientes afirmaciones:*

i) f *es suprayectiva,* *iii)* $C_n(f)$ *es suprayectiva,*
ii) 2^f *es suprayectiva,* *iv)* $F_n(f)$ *es suprayectiva.*

Entonces i), ii) y iv) son equivalentes y iii) implica i), ii) y iv).

Demostración. Supongamos que f es suprayectiva. Sea $B \in 2^Y$. Como f es continua y suprayectiva, $A = f^{-1}(B)$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X. De aquí que $A \in 2^X$ y $2^f(A) = f(A) = B$. Esto prueba que 2^f es suprayectiva.

Supongamos ahora que 2^f es suprayectiva. Sea $B \in F_n(Y)$. Entonces $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, para algún número natural $k \leq n$. Como 2^f es suprayectiva, existe $C \in 2^X$ tal que $2^f(C) = B$. Entonces $f(C) = B$ y, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, existe $a_i \in C$ tal que $f(a_i) = b_i$. Es claro que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \in F_n(X)$ es tal que $F_n(f)(A) = B$. Por tanto, $F_n(f)$ es suprayectiva.

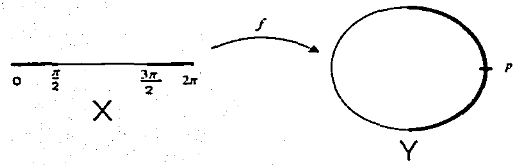
Supongamos que $F_n(f)$ es suprayectiva y sea $y \in Y$. Como $\{y\} \in F_n(Y)$, existe $A \in F_n(X)$ tal que $F_n(f)(A) = \{y\}$. Luego, si $x \in A$ se tiene que $f(x) = y$. Esto prueba que f es suprayectiva.

Tenemos por lo anterior que las afirmaciones *i)*, *ii)* y *iv)* son equivalentes. Notemos que la misma demostración efectuada para ver que *iv)* implica *i)*, se puede realizar para ver que *iii)* implica *i)*. Por la equivalencia entre *i)*, *ii)* y *iii)*, resulta entonces que *iv)* implica cualquiera de ellas. ■

A continuación veremos que, para $n = 1$, la afirmación *i)* $\Rightarrow$ *iii)* del teorema anterior, no es cierta.

Ejemplo 3.4. *Existe una función suprayectiva f tal que $C(f)$ no es suprayectiva.*

Justificación. Consideremos $X = [0, 2\pi]$ y Y la circunferencia unitaria en el plano $\mathbb{R}^2$. Sea $f: X \to Y$ la función definida como $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. Notemos que si $p = (1, 0) \in Y$, entonces $f(0) = f(2\pi) = p$. Más aún, para $x \in X$, $f(x)$ es el punto en Y tal que la longitud del arco que va de p a $f(x)$, en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, es x. Por tanto f es suprayectiva.



Sea B el subarco en Y que contiene a p y tiene como puntos extremos a $(0, 1)$ y $(0, -1)$. Entonces $B \in C(Y)$ y no existe un subcontinuo A de X tal que $C(f)(A) = f(A) = B$. Para ver esto, notemos que $f^{-1}(B) = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = [0, \frac{\pi}{2}]$ y $A_2 = [2\pi - \frac{\pi}{2}, 2\pi]$. Además $C(f)(A_1) \neq B$ y $C(f)(A_2) \neq B$. Por tanto, de existir tal elemento A, por su conexidad, resulta que $A \subset A_1$ o bien $A \subset A_2$. Luego $f(A)$ es un subconjunto de $f(A_1)$ o de $f(A_2)$. En cualquier situación $f(A) \neq B$. Esto muestra que $C(f)$ no es suprayectiva. ■

Notemos en el dibujo anterior, que A_1 y A_2 son las componentes de $f^{-1}(B)$ y que ninguna de ellas satisface que su imagen bajo f es B. Esto nos da la clave para obtener un teorema similar al anterior, con respecto a la función $C_n(f)$. Discutiremos esto en el siguiente capítulo.

3.5 Homeomorfismos

Recordemos que toda función continua y biyectiva de un espacio compacto a un espacio de Hausdorff, es un homeomorfismo. Por tanto, toda función biyectiva y continua definida entre continuos, es un homeomorfismo. De acuerdo con esto, y los resultados presentados en las secciones anteriores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es un homeomorfismo,*	*iii)* $C_n(f)$ *es un homeomorfismo,*
ii) 2^f *es un homeomorfismo,*	*iv)* $F_n(f)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Por los teoremas 3.1, 3.2 y 3.3, la biyectividad y continuidad de f, equivale a la biyectividad y continuidad de 2^f y $F_n(f)$. Además, la biyectividad y continuidad de $C_n(f)$ equivale a la biyectividad y continuidad de f. Por tanto, las afirmaciones *i)*, *ii)* y *iv)* son equivalentes y, además *iii)* $\Rightarrow$ *i)*.

Resta probar que *i)* $\Rightarrow$ *iii)*. Supongamos, por tanto, que f es un homeomorfismo. Entonces f es inyectiva y continua. Luego, por los teoremas 3.1 y 3.2, $C_n(f)$ es inyectiva y continua. Para mostrar que $C_n(f)$ es suprayectiva, sea $B \in C_n(Y)$. Entonces, $B \in 2^Y$ y B tiene a lo más n componentes. Como f es un homeomorfismo, $A = f^{-1}(B)$ es un elemento de 2^X con a lo más n componentes. Además $C_n(f)(A) = f(A) = f(f^{-1}(B)) = B$. Esto prueba que $C_n(f)$ es suprayectiva. Por tanto, $C_n(f)$ es un homeomorfismo. ■

Capítulo 4

Funciones Débilmente Confluentes

A partir de este momento, estudiaremos en cada capítulo una clase particular de funciones continuas. Posteriormente, veremos si cuando una función pertenece a una de estas clases, sus funciones inducidas también pertenecen a dicha clase.

El último párrafo de la Sección 3.4, motiva la siguiente definición.

Definición 4.1. *Una función $f: X \to Y$ continua y suprayectiva entre los continuos X y Y es* **débilmente confluente**, *si para cada subcontinuo B de Y, se tiene que $f(A) = B$ para alguna componente A de $f^{-1}(B)$.*

A continuación veremos que las afirmaciones *i)* y *iii)* del Teorema 3.3 son equivalentes, cuando f es débilmente confluente.

Teorema 4.2 ([19, Proposición 1]). *La función inducida $C_n(f)$ es suprayectiva si y sólo si f es débilmente confluente.*

Demostración. Supongamos que f es débilmente confluente. Sean $B \in C_n(Y)$ y $B_1, B_2, \ldots, B_k$ sus componentes. Como f es débilmente confluente, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ existe una componente A_i de $f^{-1}(B_i)$ tal que $f(A_i) = B_i$. Si $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, entonces $A \in C_n(X)$ y $C_n(f)(A) = f(A) = B$. Esto prueba que $C_n(f)$ es suprayectiva.

Supongamos ahora que $C_n(f)$ es suprayectiva. Entonces, por el Teorema 3.3, f es suprayectiva. Sea B un subcontinuo de Y. Si $B = Y$, entonces X

es una componente de $f^{-1}(Y)$ tal que $f(X) = B$. Supongamos, por tanto, que $B \neq Y$. Fijemos un punto $b_1 \in B$ y tomemos $n-1$ puntos distintos $b_2, b_3, \ldots, b_n$ en $Y - B$. Sea $C = B \cup \{b_2\} \cup \cdots \cup \{b_n\}$. Notemos que $C \in C_n(Y)$. Como $C_n(f)$ es suprayectiva, existe $A \in C_n(X)$ tal que $C_n(f)(A) = C$. Dada $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$ consideremos un punto $a_i \in A$ tal que $f(a_i) = b_i$ y sea A_i la componente de A tal que $a_i \in A_i$. Entonces $f(A_i) = \{b_i\}$ para cada $i \in \{2, 3 \ldots, n\}$. Como $C_n(f)(A) = C$, necesariamente $f(A_1) = B$. Ahora bien, si L es la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a A_1, entonces $B = f(A_1) \subset f(L) \subset B$, por lo que $f(L) = B$. Esto prueba que f es débilmente confluente. ■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente:

Ejemplo 4.3. *Dada $n \in \mathbb{N}$, existe una función suprayectiva f tal que $C_n(f)$ no es suprayectiva.*

Justificación. Consideremos la función f del Ejemplo 3.4. Notemos que f no es débilmente confluente, así que, por el Teorema 4.2, $C_n(f)$ no es suprayectiva. ■

En vista del Teorema 4.2, si f es débilmente confluente entonces, en particular, $C(f)$ es suprayectiva. Es natural preguntarse si $C(f)$ es débilmente confluente. En el siguiente ejemplo respondemos lo anterior en negativo.

Ejemplo 4.4. *Dada $n \in \mathbb{N}$, existe una función débilmente confluente f, tal que las funciones 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ no son débilmente confluentes.*

Justificación. Para mostrar esto, recordemos que si A es un subcontinuo de un continuo Z, entonces $C(A, Z) = \{ K \in C(Z) \colon A \subset K \}$. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ los continuos:

$$X = (\{-1\} \times [-1, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [-1, 1])$$

y

$$Y = ([-1, 0] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Notemos que X es un continuo homeomorfo a la letra H, mientras que Y es un continuo homeomorfo a la letra T. Por tanto, dados dos puntos p y $q \in X$ el arco de p a q en X, que denotaremos por pq, está determinado de manera única. Las mismas consideraciones las haremos en Y.

Antes de dar la función $f: X \to Y$, consideraremos unos puntos especiales en X y en Y. En X, consideremos los puntos $a_1 = (-1,1)$, $a_2 = (1,1)$, $b_1 = (-1,0)$, $b_2 = (0,0)$, $b_3 = (\frac{5}{6},0)$, $b_4 = (1,\frac{1}{2})$, $c_1 = (-1,-1)$, $d_1 = (-1,-\frac{1}{4})$, $d_2 = (\frac{1}{4},0)$, $d_3 = (\frac{2}{3},0)$, $e_1 = (-\frac{1}{2},0)$, $e_2 = (1,0)$, $z_1 = (\frac{1}{2},0)$, y $g_1 = (1,-1)$. En Y, consideramos los puntos $a = (-1,0)$, $b = (0,0)$, $c = (0,-1)$, $d = (0,-\frac{1}{4})$, $e = (0,\frac{1}{2})$, $z = (0,-\frac{1}{2})$ y $g = (0,1)$.

La función f se define por pedazos, de la siguiente manera:

1. f restringida al arco en X, que une los puntos a_1 y b_1, es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos a y b de manera que $f(a_1) = a$ y $f(b_1) = b$;

2. f restringida al arco en X, que une los puntos c_1 y b_1, es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos c y b de manera que $f(c_1) = c$ y $f(d_1) = d$;

3. f restringida al arco en X, que une los puntos b_1 y e_1 es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos b y e de manera que $f(e_1) = e$;

4. f restringida al arco en X, que une los puntos e_1 y z_1, es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos e y z, de manera que $f(b_2) = b$, $f(d_2) = d$ y $f(z_1) = z$;

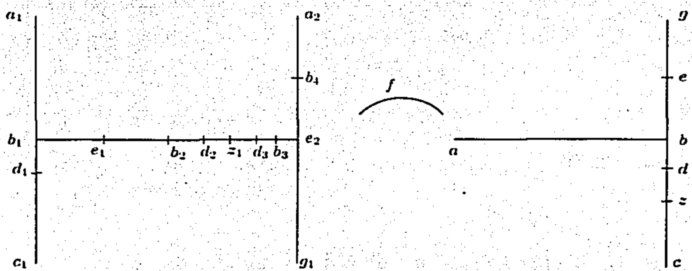
5. f restringida al arco en X, que une los puntos z_1 y e_2, es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos z y e de manera que $f(d_3) = d$, $f(b_3) = b$ y $f(e_2) = e$;

6. f restringida al arco en X, que une los puntos e_2 y g_1, es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos e y g, de manera que $f(g_1) = g$;

7. f restringida al arco en X, que une los puntos e_2 y b_4 es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos e y b de manera que $f(b_4) = b$;

8. la función f restringida al arco en X, que une los puntos b_4 y a_2 es un homeomorfismo de dicho arco al arco en Y, que une los puntos b y a, de manera que $f(a_2) = a$.

Representando la función f como se indica en la figura siguiente, es fácil convencerse de que es débilmente confluente.



Consideremos el siguiente subconjunto de $C(Y)$

$$\mathcal{B} = F_1(ad) \cup C(\{d\}, dg).$$

Es claro que $F_1(ad)$ es un arco en $F_1(X)$ con extremos $\{a\}$ y $\{d\}$. Por otro lado, $C(\{d\}, dg)$ es un arco ordenado de $\{d\}$ a dg en $C(Y)$. Además $F_1(ad) \cap C(\{d\}, dg) = \{\{d\}\}$. Por tanto, $\mathcal{B}$ es un subcontinuo de $C(Y)$. A continuación. describiremos al conjunto $C(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Para esto, hagamos $A_1 = d_1d_2$ y $A_2 = d_3e_2 \cup g_1b_4$. Notemos que A_1 es un arco, mientras que A_2 es un continuo homeomorfo a la letra T. Consideremos, en $C(X)$, los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_1 = F_1(a_1d_1), & \mathcal{A}_3 = C(\{d_2\}, A_1), & \mathcal{A}_5 = F_1(d_3b_3), \\ \mathcal{A}_2 = F_1(b_2d_2), & \mathcal{A}_4 = C(\{d_1\}, A_1), & \mathcal{A}_6 = C(\{d_3\}, A_2). \end{array}$$

Notemos que los conjuntos $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$ y $\mathcal{A}_6$ son continuos. Más aún, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_4 = \{\{d_1\}\}$, por lo que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_4$ es un continuo. Además, $(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_4) \cap \mathcal{A}_3 = \{A_1\}$ y $(\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_3) \cap \mathcal{A}_2 = \{\{d_2\}\}$. Esto muestra que $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_4$ es un continuo. Notemos también que $\mathcal{A}_5 \cap \mathcal{A}_6 = \{\{d_3\}\}$ por lo que $\mathcal{C}_2 = \mathcal{A}_5 \cup \mathcal{A}_6$ es un continuo. Hagamos $\mathcal{C}_3 = F_1(b_4a_2)$ y notemos que $\mathcal{C}_3$ es un continuo. Además $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son ajenos dos a dos. Es fácil ver que $C(f)^{-1}(\mathcal{B}) = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. Por tanto, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ y $\mathcal{C}_3$ son las componentes de $C(f)^{-1}(\mathcal{B})$. Notemos ahora que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(f)(\mathcal{C}_1) &= F_1(ad) \cup C(\{d\}, de) &\neq \mathcal{B},\\
\mathcal{C}(f)(\mathcal{C}_2) &= F_1(db) \cup C(\{d\}, dg) &\neq \mathcal{B},\\
\mathcal{C}(f)(\mathcal{C}_3) &= F_1(ab) &\neq \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $C(f)$ no es débilmente confluente.

La misma función f es tal que 2^f y $C_n(f)$ no son débilmente confluentes. Para ver esto, consideremos la misma familia $\mathcal{B}$ definida anteriormente. Entonces $\mathcal{B}$ es tanto un subcontinuo de 2^Y como un subcontinuo de $C_n(Y)$. Para describir las componentes de $(2^f)^{-1}(\mathcal{B})$ consideremos las siguientes familias

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 = &\ \{ K \in 2^X : K = \{x_1, x_2\},\ x_1 \in d_1b_1,\ x_2 \in b_2d_2,\ f(x_1) = f(x_2) \},\\
\mathcal{B}_2 = &\ \{ K \in 2^X : K = \{x_1, x_2\},\ x_1 \in d_1b_1,\ x_2 \in d_3b_3,\ f(x_1) = f(x_2) \},\\
\mathcal{B}_3 = &\ \{ K \in 2^X : K = \{x_1, x_2\},\ x_1 \in b_2d_2,\ x_2 \in d_3b_3,\ f(x_1) = f(x_2) \},\\
\mathcal{B}_4 = &\ \{ K \in 2^X : K = \{x_1, x_2\},\ x_1 \in a_1b_1,\ x_2 \in b_4a_2,\ f(x_1) = f(x_2) \},\\
\mathcal{B}_5 = &\ \{ K \in 2^X : K = \{x_1, x_2, x_3\},\ x_1 \in d_1b_1,\ x_2 \in b_2d_2,\ x_3 \in d_3b_3,\\
&\ f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) \},
\end{aligned}$$

Notemos que los conjuntos anteriores son conexos y, además:

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{B}_5 \subset (2^f)^{-1}(F_1(ad)).$$

Definamos ahora:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 = &\ \{K \in 2^X : K = K_1 \cup K_2, K_1 \in \mathcal{A}_4, K_2 \in \mathcal{A}_3\},\\
\mathcal{D}_2 = &\ \{K \in 2^X : d_1e_1 \subset K \subset A_1\},\\
\mathcal{D}_3 = &\ \{K \in 2^X : e_1d_2 \subset K \subset A_1\},\\
\mathcal{D}_4 = &\ \{K \in 2^X : K = K_1 \cup K_2, K_1 \in 2^X, d_3e_2 \subset K_1 \subset d_3b_4,\\
&\ K_2 \in C(\{e_2\}, e_2g_1)\}.
\end{aligned}$$

Notemos que $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ y $\mathcal{D}_3$ son conexos. Además, $A_1 \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{C}_1 \neq \emptyset$, por lo que $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1$ es conexo. También tenemos que $\mathcal{D}_2 \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1) \neq \emptyset$ y $\mathcal{D}_3 \cap (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) \neq \emptyset$. Por tanto, $\mathcal{B}_6 = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \mathcal{D}_3$ es conexo. Notemos, además, que $\mathcal{D}_4$ es conexo y $d_3e_2 \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{D}_4$, por lo que $\mathcal{B}_7 = \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{D}_4$ es conexo.

Hagamos $\mathcal{B}_8 = \mathcal{C}_3$ y sea $\mathcal{C}$ una componente de $(2^f)^{-1}(\mathcal{B})$. Entonces, $\mathcal{C} = \mathcal{B}_i$ para alguna $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, o bien $\mathcal{C} \subset 2^{A_1} \cup 2^{A_2}$. En cualquier situación, no es difícil ver que $2^f(\mathcal{C}) \neq \mathcal{B}$. Luego, 2^f no es débilmente confluente. Por tanto, no existe ningún subcontinuo $\mathcal{A}$ de 2^X, tal que $2^f(\mathcal{A}) = \{2^f(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{f(A) : A \in \mathcal{A}\} = \mathcal{B}$. De manera que tampoco existe ningún subcontinuo $\mathcal{A}$ de $C_n(X)$ con las mismas propiedades. De modo que $C_n(f)$ no es débilmente confluente.

Consideremos ahora el siguiente subconjunto de $F_n(Y)$

$$\mathcal{B}_0 = F_1(ad) \cup F_n(\{d\}, dg)$$

en donde $F_n(\{d\}, dg) = \{K \in F_n(Y) : d \in K \subset dg\}$. Notemos que $\mathcal{B}_0$ es un subcontinuo de $F_n(Y)$. Utilizando las ideas anteriores se puede probar que ninguna componente $\mathcal{C}$ de $(F_n(f))^{-1}(\mathcal{B}_0)$ es tal que $F_n(f)(\mathcal{C}) = \mathcal{B}_0$. Por tanto, $F_n(f)$ no es débilmente confluente. ■

Con respecto a la confluencia débil entre las funciones inducidas y la función en cuestión, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.5. *Si 2^f es débilmente confluente, entonces f es débilmente confluente.*

Demostración. Sea $B \in C(Y)$. Notemos que $F_1(B)$ es un subcontinuo de 2^Y. Como 2^f es débilmente confluente, existe un componente $\mathcal{A}$ de $(2^f)^{-1}(F_1(B))$ tal que $2^f(\mathcal{A}) = F_1(B)$. Consideremos el conjunto $A = \bigcup \mathcal{A}$. Por el Teorema 1.31, resulta que $A \in 2^X$. Afirmamos que:

1) $f(A) = B$.

Para ver esto, tomemos primero un elemento $y \in f(A)$. Entonces, existe $a \in A$ tal que $y = f(a)$. Tomemos un elemento $K \in \mathcal{A}$ tal que $a \in K$. Como $2^f(\mathcal{A}) = F_1(B)$, tenemos que $2^f(K) = f(K) = \{b\}$ para algún elemento $b \in B$. Pero $y = f(a) \in f(K)$, así que $y = b$. Esto muestra que $y \in B$, por lo que $f(A) \subset B$.

Ahora supongamos que $b \in B$. Entonces $\{b\} \in F_1(B)$ y como $2^f(\mathcal{A}) = F_1(B)$, se tiene que existe $K \in \mathcal{A}$ tal que $2^f(K) = \{b\}$. Tomemos un elemento $a \in K$. Como $K \subset A$, tenemos que $a \in A$. Además, $f(a) \in f(K) = \{b\}$ por lo que $f(a) = b$. Esto muestra que $b \in f(A)$. Por tanto, $B \subset f(A)$. Con esto concluimos que $f(A) = B$.

Afirmamos ahora que:

2) si C es una componente de $\mathcal{A}$, entonces $f(C) = B$.

Para ver esto, sea C una componente de $\mathcal{A}$. Es claro que $f(C) \subset B$. Por tanto, si $f(C) \neq B$, entonces existe un punto $q \in B - f(C)$. De acuerdo con 1), $f^{-1}(q) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Por tanto, C y $f^{-1}(q) \cap \mathcal{A}$ son dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos de $\mathcal{A}$. Además, C es una componente de $\mathcal{A}$, luego, ningún subconjunto conexo de $\mathcal{A}$ intersecta tanto a C como a $f^{-1}(q) \cap \mathcal{A}$. Así que, de acuerdo con el Teorema 1.3, existen dos subconjuntos cerrados, ajenos y no vacíos H y K de $\mathcal{A}$ tales que $\mathcal{A} = H \cup K$, $C \subset H$ y $f^{-1}(q) \cap \mathcal{A} \subset K$. Consideremos ahora los conjuntos:

$$\mathcal{H} = \{D \in \mathcal{A} \colon D \cap H \neq \emptyset\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{K} = \{D \in \mathcal{A} \colon D \subset K\}.$$

Por el Teorema 1.26, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son subconjuntos cerrados en $\mathcal{A}$. Como H y K son ajenos, tenemos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ también son ajenos. Es claro que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Ahora bien, si $D \in \mathcal{A}$, entonces $D \subset \mathcal{A} = H \cup K$. Si $D \subset K$, entonces $D \in \mathcal{K}$, de lo contrario, $D \cap H \neq \emptyset$. Luego $D \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Esto muestra que $\mathcal{A} = \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$.

Ahora veremos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son no vacíos. En efecto, como $\{q\} \in F_1(B) = 2^f(\mathcal{A})$, existe $D \in \mathcal{A}$ tal que $2^f(D) = \{q\}$. Entonces $D \subset f^{-1}(q) \cap \mathcal{A} \subset K$. Luego $D \in \mathcal{K}$. Esto muestra que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Fijemos ahora un punto $x \in C$. Como $C \subset H$, tenemos que $x \in H$. Además $C \subset \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A}$, luego existe un elemento $E \in \mathcal{A}$ tal que $x \in E$. Luego $x \in E \cap H$ por lo que $E \cap H \neq \emptyset$. Esto prueba que $E \in \mathcal{H}$ y, por tanto, $\mathcal{H} \neq \emptyset$.

Como consecuencia de lo anterior, los conjuntos $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ forman una disconección del conjunto conexo $\mathcal{A}$. Como esto es un absurdo, concluimos que $f(C) = B$. Esto prueba 2).

Para ver que f es débilmente confluente, fijemos una componente C de $\mathcal{A}$ y sea L la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a C. Entonces $f(L) \subset B$ y, además, por 2), $B = f(C) \subset f(L)$ por lo que $f(L) = B$. ■

En la demostración del teorema anterior podemos sustituir 2^f por $C_n(f)$ o por $F_n(f)$ y el teorema correspondinte sigue siendo cierto. Combinando esto con lo anterior, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.6. *La confluencia débil de cualesquiera de las funciones 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ implica la confluencia débil de f, pero no al revés.*

El resto de las relaciones entre la confluencia débil entre la función f y sus funciones inducidas 2^f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ permanece aún sin resolver.

El Teorema 4.5 apareció inicialmente probado de manera diferente, en [20, Proposición 6.10]. En [20, Teorema 7.2] se presenta una generalización del mismo. La demostración que aquí presentamos sigue el esquema descrito en [39, Teorema 77.6].

Capítulo 5

Funciones Monótonas

En este capítulo, estudiaremos la relación entre la monotoneidad de una función y la de sus funciones inducidas.

Teorema 5.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es monótona,*	*iii)* $C_n(f)$ *es monótona,*
ii) 2^f *es monótona,*	*iv)* $F_n(f)$ *es monótona.*

Demostración. Demostraremos primero, que *i), ii)* y *iii)* son equivalentes y luego probaremos la equivalencia entre *i)* y *iv.* Supongamos que f es monótona. Entonces f es continua y, por el Teorema 2.6, f es débilmente confluente. Entonces, por los teoremas 3.2 y 4.2, $C_n(f)$ es continua y suprayectiva. Supongamos ahora que $L \in C_n(Y)$. Sean $\mathcal{L} = C_n(f)^{-1}(L)$ y $L_1, L_2, \ldots, L_k$ con $k \leq n$, las componentes de L. De acuerdo al Teorema 2.6, $f^{-1}(L_i)$ es conexo para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Por tanto, si $C = \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(L_i) = f^{-1}(L)$, entonces $C \in C_n(X)$, $C_n(f)(C) = f(C) = f(f^{-1}(L)) = L$ y C tiene exactamente k componentes. Para cada $B \in \mathcal{L}$, sea:

$$C_n(B, C) = \{D \in C_n(X) : B \subset D \subset C\}.$$

Tomemos un elemento $B \in \mathcal{L}$. Como $C \in \mathcal{L}$, por el Teorema 1.39, tenemos que $C_n(B, C) \subset \mathcal{L}$. Más aún, $C_n(B, C)$ es conexo. Para probar esto, tomemos un elemento $B \in \mathcal{L}$. Sean $D \in C_n(B, C)$ y $f^{-1}(L_i)$ una componente de C. Entonces $D \subset C$ y $f(D) = L$. Como $L_i \subset L$, existe $x \in D$ tal que $f(x) \in L_i$. De aquí que $D \cap f^{-1}(L_i) \neq \emptyset$. Esto muestra que cada componente de C

intersecta a D. Entonces, por el Teorema 1.37, existe un arco ordenado α_D de D a C en 2^X. En vista de que $\alpha_D(0) = D \in C_n(X)$, por el Teorema 1.54, $\alpha_D \subset C_n(X)$. Más aún, $\alpha_D \subset C_n(B, C)$. Por tanto:

$$C_n(B, C) = \bigcup_{D \in C_n(B,C)} \alpha_D$$

es una unión de conexos que tienen al punto C en común. Luego, $C_n(B, C)$ es conexo.

Sea $\mathcal{M} = \bigcup_{B \in \mathcal{L}} C_n(B, C)$. Entonces $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$. Más aún, si $B \in \mathcal{L}$, entonces $C_n(f)(B) = f(B) = L$, por lo que $B \subset f^{-1}(L) = C$. Luego $B \in C_n(B, C)$. Por lo tanto $B \in \mathcal{M}$ y así $\mathcal{M} = \mathcal{L}$. Esto implica que $\mathcal{L}$ es una unión de conjuntos conexos que tienen en común a C. Luego, $\mathcal{L}$ es conexo. Esto prueba que $C_n(f)$ es monótona.

Ahora supongamos que $C_n(f)$ es monótona. Entonces, en particular, $C_n(f)$ es continua y suprayectiva. Luego, por los teoremas 3.2 y 3.3, f y 2^f son continuas y suprayectivas. Tomemos un elemento $B \in 2^Y$ y sea $M = f^{-1}(B)$. Como $M \in 2^X$ y $f(M) = f(f^{-1}(B)) = B$, pues f es suprayectiva, resulta que $M \in (2^f)^{-1}(B)$. Afirmamos que:

1) para cada $Q \in (2^f)^{-1}(B)$, existe un arco ordenado β_Q de Q a M en 2^X. Más aún, $\beta_Q \subset (2^f)^{-1}(B)$.

Para ver esto, sea $Q \in (2^f)^{-1}(B)$. Entonces $f(Q) = B$, por lo que $Q \subset f^{-1}(B) = M$. Sea C una componente de M. Mostraremos que $Q \cap C \neq \emptyset$. Como $C \subset M$, entonces $f(C) \subset f(M) = B = f(Q)$. Por tanto si $z \in f(C)$ existen $k \in C$ y $q \in Q$ tales que $f(k) = f(q) = z$. Como $C_n(f)$ es monótona y $\{z\} \in C_n(Y)$, se tiene que $\mathcal{L} = C_n(f)^{-1}(\{z\})$ es un subconjunto conexo de $C_n(X)$. Luego, $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de $C_n(X)$. Además, $\{k\} \in \mathcal{L} \cap C(X)$. Luego, por el Teorema 1.56, tenemos que $\sigma(\mathcal{L}) = \bigcup_{K \in \mathcal{L}} K$ es un subconjunto conexo de X que contiene a k y a q.

Veamos que $\sigma(\mathcal{L}) \subset M$. Sea $x \in \sigma(\mathcal{L})$. Entonces, existe $K_0 \in \mathcal{L}$ tal que $x \in K_0$. Como $f(K_0) = \{z\} \subset B$, tenemos que $K_0 \subset f^{-1}(B) = M$. Por tanto, $x \in M$. Esto prueba que $\sigma(\mathcal{L}) \subset M$. Tenemos entonces que $\sigma(\mathcal{L})$ es un subconjunto de M que intersecta a la componente C de M en el punto k. Luego $\sigma(\mathcal{L}) \subset C$. En vista de que $q \in \sigma(\mathcal{L})$, resulta que $q \in C$. Por tanto,

$q \in Q \cap C$, así que $Q \cap C \neq \emptyset$. Entonces, por el Teorema 1.37, existe un arco ordenado β_Q de Q a M en 2^X. Como $f(Q) = f(M)$, por el Teorema 1.39 se tiene que $\beta_Q \subset (2^f)^{-1}(B)$. Esto prueba 1) y, entonces:

$$(2^f)^{-1}(B) = \bigcup_{Q \in (2^f)^{-1}(B)} \beta_Q,$$

es una unión de conjuntos conexos que tienen en común al elemento M. Luego, $(2^f)^{-1}(B)$ es conexo. Esto prueba que 2^f es monótona.

Supongamos ahora que 2^f es monótona. Entonces, 2^f es, en particular, continua y suprayectiva. Luego, por los Teoremas 3.2 y 3.3, f es continua y suprayectiva. Tomemos un punto $y \in Y$. Como 2^f es monótona, resulta que $\mathcal{A} = (2^f)^{-1}(\{y\})$ es conexo. Por tanto, $\mathcal{A}$ es un subcontinuo de 2^X. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $f(A) = \{y\}$. Tomemos un punto $a \in A$ y notemos que $f(\{a\}) = \{y\}$. Esto muestra que $\mathcal{A} \cap C(X) \neq \emptyset$. Luego, por el Teorema 1.34, $\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup_{K \in \mathcal{A}} K \in C(X)$. Notemos que si $x \in \sigma(\mathcal{A})$, entonces $x \in K$ para alguna $K \in \mathcal{A}$. Luego $K \subset f^{-1}(y)$. Por tanto, $\sigma(\mathcal{A}) \subset f^{-1}(y)$. Por otra parte, si $x \in f^{-1}(y)$, entonces $f(x) = y$, por lo que $2^f(\{x\}) = \{y\}$. De aquí que $x \in \sigma(\mathcal{A})$. Esto prueba que $f^{-1}(y) \subset \sigma(\mathcal{A})$ y, como la otra contención también es cierta, resulta que $f^{-1}(y) = \sigma(\mathcal{A})$. Entonces, $f^{-1}(y)$ es conexo, por lo que f es monótona.

De lo anterior tenemos que las afirmaciones $i)$, $ii)$ y $iii)$ son equivalentes. Ahora mostraremos que las afirmaciones $i)$ y $iv)$ también lo son. Supongamos primero que $F_n(f)$ es monótona. Si f no es monótona, entonces existe $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y)$ no es conexo. Luego, es posible encontrar H y $K \in 2^X$ tales que $H \cap K = \emptyset$ y $f^{-1}(y) = H \cup K$. Sean:

$$\mathcal{A}_1 = \{ A \in F_n(X) \colon A \subset H \}, \qquad \mathcal{A}_2 = \{ A \in F_n(X) \colon A \subset K \},$$

$$\mathcal{B} = \{ A \in F_n(X) \colon A \subset f^{-1}(y), A \cap H \neq \emptyset \text{ y } A \cap K \neq \emptyset \}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{B}$ son subconjuntos de $F_n(f)^{-1}(\{y\})$. Como $H \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $h \in H$. Luego $\{h\} \in \mathcal{A}_1$. Esto muestra que $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$. De manera similar, se prueba que $\mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Notemos que si $n = 1$ entonces, en vista de que $H \cap K = \emptyset$, tenemos que $\mathcal{B} = \emptyset$. Si $n \neq 1$ entonces, tomando un punto $h \in H$ y un punto $k \in K$, resulta que $\{h, k\} \in \mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

Como H y K son ajenos, resulta que los elementos $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ y $\mathcal{B}$ son ajenos dos a dos. Por el Teorema 1.26, tenemos que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son cerrados en $F_n(X)$. Observemos que, por el mismo teorema, $\mathcal{B}_0 = \{ A \in F_n(X) \colon A \cap H \neq \emptyset \}$, $\mathcal{B}_1 = \{ A \in F_n(X) \colon A \cap K \neq \emptyset \}$ y $\mathcal{B}_2 = \{ A \in F_n(X) \colon A \subset f^{-1}(y) \}$ son cerrados en $F_n(X)$, así que, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cap \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_1$ es cerrado en $F_n(X)$.

Hagamos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ y veamos que $F_n(f)^{-1}(\{y\}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Sea $A \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$. Entonces $f(A) = \{y\}$, por lo que $A \subset f^{-1}(y) = H \cup K$. Luego $A \subset H$, $A \subset K$ o A intersecta tanto a H como a K. En cualquier caso, $A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que $A \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \in F_n(X)$ y $A \subset H \cup K = f^{-1}(y)$, así que, $F_n(f)(A) = f(A) = \{y\}$. Por lo tanto, $A \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$. Si $A \in \mathcal{B}$, entonces $A \in F_n(X)$ y $A \subset H \cup K = f^{-1}(y)$, así que, $F_n(f)(A) = f(A) = \{y\}$. Por lo tanto, $A \in F_n(f)^{-1}(\{y\})$ y, así, concluimos que $F_n(f)^{-1}(\{y\}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Ahora bien, si $n = 1$, entonces $\mathcal{B} = \emptyset$ y $F_n(f)^{-1}(\{y\}) = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. De esto se sigue que $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ forman una disconexión de $F_n(f)^{-1}(\{y\})$, lo cual contradice que $F_n(f)$ es monótona.

Si $n \neq 1$, entonces $F_n(f)^{-1}(\{y\}) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, así que en este caso la disconexión la forman $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. Como también esto es una contradicción, concluimos que f es monótona.

Ahora supongamos que f es monótona y sea $B \in F_n(Y)$. Entonces $B = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ con $m \leq n$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, sea $A_i = f^{-1}(y_i)$. Hagamos $A = f^{-1}(B)$. Entonces

$$A = f^{-1}(B) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{m}\{y_i\}\right) = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(y_i) = \bigcup_{i=1}^{m} A_i.$$

Sea

$$\mathcal{A} = \{ K \in F_n(X) \colon K \subset A \text{ y } K \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \}.$$

Observemos que $\mathcal{A} = \langle A_1, A_2, \ldots, A_m \rangle_{F_n}$. Veamos que $F_n(f)^{-1}(B) = \mathcal{A}$. Si $K \in F_n(f)^{-1}(B)$, entonces $K \subset f^{-1}(B) = A$. Sea $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Como $f(K) = B$, existe $x \in K$ tal que $f(x) = y_i$. Luego, $x \in f^{-1}(y_i) = A_i$, así que $K \cap A_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $K \in \mathcal{A}$. Por otro lado, si $K \in \mathcal{A}$, entonces $K \subset A = f^{-1}(B)$. Luego, $F_n(f)(K) = f(K) = B$, así que $K \in F_n(f)^{-1}(B)$. Por lo tanto concluimos que $F_n(f)^{-1}(B) = \mathcal{A}$.

Como f es monótona, cada conjunto A_i es conexo. Entonces, por el Teorema 1.50, $\mathcal{A}$ es conexo. Esto prueba que $F_n(f)^{-1}(B)$ es conexo y, por lo tanto, $F_n(f)$ es monótona. ■

Con respecto al teorema anterior, la equivalencia entre las afirmaciones *i*) y *ii*) aparece inicialmente probada en [32, Teorema 3.2], mientras que la de *i*) y *iii*) aparece en [19, Proposición 3]. Hasta donde sabemos, la equivalencia entre las afirmaciones *i*) y *iv*) aparece en este trabajo por primera vez.

Capítulo 6

Funciones Abiertas

En este capítulo consideraremos la clase de las funciones abiertas y veremos su relación con las funciones inducidas. Como en el capítulo anterior, supondremos que la letra n representa un número natural y la letra f una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y con métricas d_X y d_Y, respectivamente.

Teorema 6.1. *f es abierta si y sólo si 2^f es abierta. Más aún si $C(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

Demostración. Supongamos primero que 2^f es abierta y sea U un subconjunto abierto en X. Tomemos un punto $y \in f(U)$ y sea $p \in U$ tal que $f(p) = y$. Consideremos la familia $\mathcal{U} = \{A \in 2^X : A \subset U\}$. Por el Teorema 1.26, $\mathcal{U}$ es abierto en 2^X y, como 2^f es una función abierta, $2^f(\mathcal{U})$ es un subconjunto abierto de 2^Y. Como $\{p\} \in \mathcal{U}$, tenemos que $\{y\} = 2^f(\{p\}) \in 2^f(\mathcal{U})$. Por tanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^{2^Y}(\{y\}) \subset 2^f(\mathcal{U})$.

Mostraremos que $B_\epsilon^Y(y) \subset f(U)$. Para esto tomemos un punto $z \in B_\epsilon^Y(y)$. Notemos que $\{z\} \in B_\epsilon^{2^Y}(\{y\}) \subset 2^f(\mathcal{U})$, por lo que existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $2^f(A) = \{z\}$. Tomemos un elemento $a \in A$ y notemos que $f(a) \in f(A) = \{z\}$, por lo que $f(a) = z$. Además, como $A \in \mathcal{U}$, resulta que $A \subset U$, por lo que $a \in U$. Entonces $z = f(a) \in f(U)$. Esto prueba que $B_\epsilon^Y(y) \subset f(U)$ y, por consiguiente, $f(U)$ es una vecindad de cada uno de sus puntos. Luego, $f(U)$ es abierto en Y y, de esta manera, f es abierta. La prueba para $C(f)$ es similar.

Supongamos ahora que f es abierta. Sean $\mathcal{U}$ un abierto en 2^X y $B \in 2^f(\mathcal{U})$. Entonces existe $A \in \mathcal{U}$ tal que $2^f(A) = B$. Como $\mathcal{U}$ es abierto en 2^X, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{2\epsilon}^{2^X}(A) \subset \mathcal{U}$. Dado $p \in A$, en vista de que f es abierta, el conjunto $f(B_\epsilon^X(p))$ es un abierto en Y que contiene a $f(p)$. Por tanto, existe $\delta_p > 0$ tal que $B_{2\delta_p}^Y(f(p)) \subset f(B_\epsilon^X(p))$. Tenemos entonces que las familias $\mathcal{U}_1 = \{B_\epsilon^X(p) \colon p \in A\}$ y $\mathcal{U}_2 = \{B_{2\delta_p}^Y(f(p)) \colon p \in A\}$ son cubiertas abiertas de los conjuntos compactos A y B, respectivamente. Por tanto existen dos subconjuntos finitos A_1 y A_2 de A tales que A está contenido en la unión de los conjuntos de la forma $B_\epsilon^X(p)$, con $p \in A_1$, y B está contenido en la unión de los conjuntos de la forma $B_{2\delta_p}^Y(f(p))$ con $p \in A_2$. Uniendo los elementos de A_1 y los de A_2, obtenemos un número natural n y puntos $p_1, p_2, \ldots, p_n \in A$ tales que:

$$A \subset B_\epsilon^X(p_1) \cup B_\epsilon^X(p_2) \cup \cdots \cup B_\epsilon^X(p_n) \tag{6.1}$$

y

$$B \subset B_{\delta_{p_1}}^Y(f(p_1)) \cup B_{\delta_{p_2}}^Y(f(p_2)) \cup \cdots \cup B_{\delta_{p_n}}^Y(f(p_n)). \tag{6.2}$$

Sea $\delta =$ mín $\{\delta_{p_1}, \delta_{p_2}, \ldots, \delta_{p_n}\}$. Mostraremos que $B_\delta^{2^Y}(B) \subset 2^f(\mathcal{U})$. Para esto, tomemos un elemento $E \in B_\delta^{2^Y}(B)$. Sea $D = f^{-1}(E)$ y notemos que D es un elemento de 2^X tal que $2^f(D) = f(D) = E$. Afirmamos que:

1) existe un elemento $K \in B_{2\epsilon}^{2^X}(A)$ tal que $2^f(K) = E$.

Para ver esto notemos que, dado $y \in E$, en vista de que $E \subset N(\delta, B)$, existe $b \in B$ tal que $d_Y(y, b) < \delta$. Además, por (6.2), existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $b \in B_{\delta_{p_i}}^Y(f(p_i))$. Entonces, por la desigualdad del triángulo y la elección de δ, se tiene que:

$$d_Y(y, f(p_i)) \leq d_Y(y, b) + d_Y(b, f(p_i)) < \delta + \delta_{p_i} \leq 2\delta_{p_i}.$$

Entonces, de acuerdo a la elección de δ_{p_i}, tenemos que $y \in B_{2\delta_{p_i}}^Y(f(p_i)) \subset f(B_\epsilon^X(p_i))$. Por tanto, existe $u_y \in B_\epsilon^X(p_i)$ tal que $f(u_y) = y$. Tenemos entonces que, para cada $y \in E$, existe $u_y \in B_\epsilon^X(p_i)$ tal que $f(u_y) = y$.

Ahora tomemos un índice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y notemos que $f(p_i) \in B \subset N(\delta, E) \subset N(\delta_{2p_i}, E)$, por lo que existe un punto $v_i \in E$, tal que $d_Y(v_i, f(p_i)) < 2\delta_{p_i}$. Entonces $v_i \in B^Y_{2\delta_{p_i}}(f(p_i)) \subset f(B^X_\epsilon(p_i))$, por lo que existe $x_i \in B^X_\epsilon(p_i)$, tal que $f(x_i) = v_i$. Consideremos el conjunto:

$$K = Cl_X(\{u_y \in X : y \in E\}) \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Por construcción, K es cerrado y:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} &\subset B^X_\epsilon(p_1) \cup B^X_\epsilon(p_2) \cup \cdots \cup B^X_\epsilon(p_n) \\ &= N(\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) \\ &\subset N(2\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) \end{aligned}$$

y $\{u_y \in X : y \in E\} \subset N(\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$. Entonces, por el Teorema 1.5;

$$\begin{aligned} Cl_X(\{u_y \in X : y \in E\}) &\subset Cl_X(N(\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})) \\ &\subset N(2\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}). \end{aligned}$$

Por tanto, $K \subset N(2\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) \subset N(2\epsilon, A)$, pues $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset A$. Tomemos ahora un punto $a \in A$. Por (6.1), existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in B^X_\epsilon(p_i)$. Entonces:

$$d_X(a, x_i) \leq d_X(a, p_i) + d_X(p_i, x_i) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Como $x_i \in K$, sucede que $a \in N(2\epsilon, K)$. Por tanto $A \subset N(2\epsilon, K)$. Eso prueba que $K \in B^{2^X}_{2\epsilon}(A)$. Ahora bien, como f es una función cerrada:

$$\begin{aligned} f(K) &= f(Cl_X(\{u_y \in X : y \in E\})) \cup f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \\ &= Cl_Y(f(\{u_y \in X : y \in E\})) \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= Cl_Y(\{y : y \in E\}) \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= Cl_Y(E) \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= E \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= E \end{aligned}$$

pues $\{v_1, v_2, \ldots v_n\} \subset E$. Esto prueba 1).

Tomemos un elemento K, como se establece en 1). Como $B^{2^X}_{2\epsilon}(A) \subset \mathcal{U}$, tenemos que K es un elemento de $\mathcal{U}$ tal que $2^f(K) = E$. Luego $E \in 2^f(\mathcal{U})$. Esto prueba que $B^{2^Y}_\delta(B) \subset 2^f(\mathcal{U})$. Por tanto, $2^f(\mathcal{U})$ es una vecindad de cada uno de sus puntos, o equivalentemente, 2^f es abierta. ■

Corolario 6.2. *Si $C(f)$ es abierta, entonces 2^f es abierta.*

Demostración. Si $C(f)$ es abierta entonces, por el teorema anterior, f es abierta. Luego, por el mismo teorema, 2^f es abierta. ■

El Teorema 6.1 aparece originalmente probado como sigue. Primero, en [31, Teorema 3.2], H. Hosokawa utilizando el Teorema 2.4 hizo ver que si f es abierta, entonces 2^f es abierta. Posteriormente, en [32, Teorema 4.3], H. Hosokawa presenta una prueba más clara del resultado anterior, utilizando de nuevo el Teorema 2.4. Además, hace ver que si 2^f o bien $C(f)$ son abiertas, entonces f es abierta. En [24, Teorema 3.5.4], se presenta una demostración alternativa del Teorema 6.1. En este trabajo, hemos optado por probar dicho resultado, siguiendo el esquema propuesto en [39, Teorema 77.4] el cual, además de presentarse en términos más simples, no requiere del uso del Teorema 2.4.

Con respecto a las funciones inducidas f, $C_n(f)$ y $F_n(f)$ y la propiedad de ser abierta, en [19, Teorema 5] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 6.3. *Si $C_n(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

En este capítulo mostraremos que si $C_n(f)$ es abierta y $n \geq 2$, entonces f es un homeomorfismo. Pensamos por supuesto, que f no es una función constante. Notemos que este resultado, junto con el Teorema 6.1 extiende el teorema anterior. Además, con ayuda del mismo, resulta que cualquier función abierta y no inyectiva f, es un ejemplo de una función abierta tal que ninguna función $C_n(f)$ es abierta, para $n \geq 2$.

Para probar el resultado anteriormente enunciado, es suficiente con mostrar el siguiente teorema.

Teorema 6.4. *Para $n \geq 2$, si $C_n(f)$ es abierta y Y es no degenerado, entonces f es inyectiva.*

Demostración. Haremos la prueba en dos casos, primero para $n = 2$ y luego, para $n \geq 3$.

Caso I. Supongamos que $n = 2$ y que f no es inyectiva. Entonces existen $p, q \in X$ y $z \in Y$ tales que $p \neq q$ y $f(p) = f(q) = z$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon^X(p) \cap B_\epsilon^X(q) = \emptyset$. Hagamos $P = \{p, q\}$ y notemos que $P \in C_2(X)$. De

Ahora tomemos un índice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y notemos que $f(p_i) \in B \subset \mathcal{N}(\delta, E) \subset \mathcal{N}(\delta_{2p_i}, E)$, por lo que existe un punto $v_i \in E$, tal que $d_Y(v_i, f(p_i)) < 2\delta_{p_i}$. Entonces $v_i \in B^Y_{2\delta_{p_i}}(f(p_i)) \subset f(B^X_\epsilon(p_i))$, por lo que existe $x_i \in B^X_\epsilon(p_i)$, tal que $f(x_i) = v_i$. Consideremos el conjunto:

$$K = Cl_X(\{u_y \in X : y \in E\}) \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Por construcción, K es cerrado y:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} &\subset B^X_\epsilon(p_1) \cup B^X_\epsilon(p_2) \cup \cdots \cup B^X_\epsilon(p_n) \\ &= \mathcal{N}(\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) \\ &\subset \mathcal{N}(2\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) \end{aligned}$$

y $\{u_y \in X : y \in E\} \subset \mathcal{N}(\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})$. Entonces, por el Teorema 1.5;

$$\begin{aligned} Cl_X(\{u_y \in X : y \in E\}) &\subset Cl_X(\mathcal{N}(\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\})) \\ &\subset \mathcal{N}(2\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}). \end{aligned}$$

Por tanto, $K \subset \mathcal{N}(2\epsilon, \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}) \subset \mathcal{N}(2\epsilon, A)$, pues $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset A$. Tomemos ahora un punto $a \in A$. Por (6.1), existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $a \in B^X_\epsilon(p_i)$. Entonces:

$$d_X(a, x_i) \leq d_X(a, p_i) + d_X(p_i, x_i) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Como $x_i \in K$, sucede que $a \in \mathcal{N}(2\epsilon, K)$. Por tanto $A \subset \mathcal{N}(2\epsilon, K)$. Eso prueba que $K \in B^{2^X}_{2\epsilon}(A)$. Ahora bien, como f es una función cerrada:

$$\begin{aligned} f(K) &= f(Cl_X(\{u_y \in X : y \in E\})) \cup f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}) \\ &= Cl_Y(f(\{u_y \in X : y \in E\})) \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= Cl_Y(\{y : y \in E\}) \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= Cl_Y(E) \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= E \cup \{v_1, v_2, \ldots v_n\} \\ &= E \end{aligned}$$

pues $\{v_1, v_2, \ldots v_n\} \subset E$. Esto prueba 1).

Tomemos un elemento K, como se establece en 1). Como $B^{2^X}_{2\epsilon}(A) \subset \mathcal{U}$, tenemos que K es un elemento de $\mathcal{U}$ tal que $2^f(K) = E$. Luego $E \in 2^f(\mathcal{U})$. Esto prueba que $B^{2^Y}_\delta(B) \subset 2^f(\mathcal{U})$. Por tanto, $2^f(\mathcal{U})$ es una vecindad de cada uno de sus puntos, o equivalentemente, 2^f es abierta. ■

acuerdo con el Teorema 2.3, $C_2(f)$ es interior en P. Luego, para el abierto $B_\epsilon^{C_2(X)}(P)$ que tiene a P, resulta que:

$$\{z\} = C_2(f)(P) \in \text{Int}_{C_2(Y)}\left(C_2(f)\left(B_\epsilon^{C_2(X)}(P)\right)\right).$$

De esto se sigue que existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$B_{\delta_1}^{C_2(Y)}(\{z\}) \subset C_2(f)\left(B_\epsilon^{C_2(X)}(P)\right). \tag{6.3}$$

Como Y es un espacio no degenerado, existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \delta_1$ y $B_\delta^Y(z) \neq Y$. Notemos que $B_\delta^{C_2(Y)}(\{z\}) \subset B_{\delta_1}^{C_2(Y)}(\{z\})$ así que, por (6.3),

$$B_\delta^{C_2(Y)}(\{z\}) \subset C_2(f)\left(B_\epsilon^{C_2(X)}(P)\right). \tag{6.4}$$

Por el Teorema 1.38 existe un subcontinuo S no degenerado, tal que $z \in S \subset B_\delta^Y(z)$. Como S es cerradon en Y y $B_\delta^Y(z)$ es un subconjunto abierto y propio de Y, sucede que $S \subsetneq B_\delta^Y(z)$. Por tanto, podemos tomar un punto $w \in B_\delta^Y(z) - S$. Es claro que

$$S_0 = S \cup \{w\} \in B_\delta^{C_2(Y)}(\{z\}).$$

De acuerdo con la contención (6.4), $S_0 \in C_2(f)\left(B_\epsilon^{C_2(X)}(P)\right)$. Por tanto, existe $A^s \in B_\epsilon^{C_2(X)}(P)$ tal que $f(A^s) = S_0$. Como S_0 tiene dos componentes, entonces A^s también tiene dos componentes. Más aún, una componente A_s de A^s satisface que $f(A_s) = S$ y, la otra componente de A^s, tiene como imagen al punto w.

Ahora bien, como $H(A^s, P) < \epsilon$, tenemos que

$$A^s \subset N(\epsilon, P) = B_\epsilon^X(p) \cup B_\epsilon^X(q).$$

En vista de que A_s es un subconjunto conexo de A^s y de que $B_\epsilon^X(p) \cap B_\epsilon^X(q) = \emptyset$, podemos suponer que $A_s \subset B_\epsilon^X(q)$.

Ahora bien, por el Teorema 1.42, existen dos subcontinuos ajenos y no degenerados S_{11}, S_{12} de S. Entonces, $S_1 = S_{11} \cup S_{12} \in B_\delta^{C_2(Y)}(\{z\})$. Aplicando de nuevo (6.4), tenemos que existe $B^1 \in B_\epsilon^{C_2(X)}(P)$ tal que $f(B^1) = S_1$. De nueva cuenta, resulta que B^1 tiene dos componentes B_{11} y B_{12}. Más aún, dada una componente B_{1i} de B^1 tenemos que

$$B_{1i} \subset B^1 \subset N(\epsilon, P) = B_\epsilon^X(p) \cup B_\epsilon^X(q)$$

y, como los conjuntos $B_\epsilon^X(p)$ y $B_\epsilon^X(q)$ son ajenos, sucede que B_{1i} está contenido en $B_\epsilon^X(p)$ o bien en $B_\epsilon^X(q)$.

Por otro lado, como $p \in P \subset N(\epsilon, B^1)$, resulta que $B^1 \cap B_\epsilon^X(p) \neq \emptyset$. Similarmente, $B^1 \cap B_\epsilon^X(q) \neq \emptyset$. Por consiguiente, una componente de B^1 intersecta a $B_\epsilon^X(p)$ (y, por tanto, se queda contenida en $B_\epsilon^X(p)$), y la otra componente de B^1 intersecta a $B_\epsilon^X(q)$ (y, por tanto, se queda contenida en $B_\epsilon^X(q)$). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $B_{11} \subset B_\epsilon^X(p)$ y que $f(B_{11}) = S_{11}$.

Sea $A = A_s \cup B_{11}$. Notemos que $A \in B_\epsilon^{C_2(X)}(P)$ y que

$$C_2(f)(A) = f(A) = f(A_s \cup B_{11}) = S \cup S_{11} = S.$$

Como $C_2(f)$ es abierta, para $\frac{1}{k} > 0$, se tiene que $S \in \operatorname{Int}\left(C_2(f)\left(B_{\frac{1}{k}}^{C_2(X)}(A)\right)\right)$. Luego, existe $\delta_k > 0$ tal que $B_{\delta_k}^{C_2(Y)}(S) \subset C_2(f)\left(B_{\frac{1}{k}}^{C_2(X)}(A)\right)$.

Como $S_{11} \subset S$, existe un arco ordenado α_k en $C_2(Y)$, de S_{11} a S, más aún, del Teorema 1.54, se sigue que α_k es un arco ordenado en $C(Y)$, con $\alpha_k(0) = S_{11}$ y $\alpha_k(1) = S$. De la continuidad de α_k en 1, se tiene que existe $\mu_k > 0$ tal que si $|t-1| < \mu_k$ entonces $H(\alpha_k(t), S) < \delta_k$, así que, tomando $t_k = \frac{1+\mu_k}{2} < 1$, resulta que $\alpha_k(t_k) \in B_{\delta_k}^{C_2(Y)}(S)$.

Hagamos $S_k = \alpha_k(t_k) \cup \{z^k\}$, donde $z^k \in S - S_k$. Observemos que $S_k \in B_{\delta_k}^{C_2(Y)}(S)$. Luego, existe $C_k \in B_{\frac{1}{k}}^{C_2(X)}(A)$ tal que $f(C_k) = S_k$ Sean C_1^k y C_2^k las componentes de C_k. Sin perder generalidad podemos suponer que $f(C_1^k) = \{z^k\}$ y que $f(C_2^k) = \alpha_k(t_k)$.

Consideremos las sucesiones:

$$\{C_1^k\}_{k\in\mathbb{N}} \quad \text{y} \quad \{C_2^k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Entonces podemos elegir una sucesión $k_1 < k_2 < \ldots$ en $\mathbb{N}$, tal que $C_i^{k_r} \to C_i^0$, para $i \in \{1, 2\}$. De lo anterior se sigue que

$$C_1^{k_r} \cup C_2^{k_r} \to C_1^0 \cup C_2^0.$$

Por el Teorema 1.14 y considerando que $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}=0$, se tiene que

$$C_1^{k_r}\cup C_2^{k_r}\subset Cl\left(N(\frac{1}{k_r},A_s)\right)\cup Cl\left(N(\frac{1}{k_r},B_{11})\right)\to A_s\cup B_{11}.$$

y por lo tanto $C_1^{k_r}\cup C_2^{k_r}\to A_s\cup B_{11}$. De lo anterior, se sigue que

$$A_s\cup B_{11}=C_1^0\cup C_2^0.$$

Como en ambos lados de esta última igualdad tenemos unión de continuos ajenos, tenemos que $A_s=C_1^0$ y $B_{11}=C_2^0$ o bien, $A_s=C_2^0$ y $B_{11}=C_1^0$. En el primero de estos casos, se tiene que $C_1^{k_r}\to C_1^0=A_s$, de aquí que $\{z^{k_r}\}=f(C_1^{k_r})\to f(A_s)=S$, lo cual es una contradicción debido a que S es no degenerado. En el otro caso, tenemos que $C_1^{k_r}\to C_1^0=B_{11}$, entonces $\{z^{k_r}\}=f(C_1^{k_r})\to f(B_{11})=S_{11}$. Como S_{11} es no degenerado, también lo anterior es un absurdo, así que con esto, concluimos que f es inyectiva.

Caso II. Sea $n\geq 3$ y supongamos que f no es inyectiva. Entonces, existen $p,q\in X$ y $z\in Y$ tales que $f(p)=f(q)=z$. Como Y es no degenerado, tomemos $z_2\in Y$ tal que $z\neq z_2$ y $r\in X$ tal que $f(r)=z_2$. Sea $\epsilon_0>0$ tal que $B_{\epsilon_0}^Y(z)\cap B_{\epsilon_0}^Y(z_2)=\emptyset$. Como f es continua en p,q y r, existen δ_1,δ_2 y $\delta_3>0$ tales que $f(B_{\delta_1}^X(p))\subset B_{\epsilon_0}^Y(z)$, $f(B_{\delta_2}^X(q))\subset B_{\epsilon_0}^Y(z)$ y $f(B_{\delta_3}^X(r))\subset B_{\epsilon_0}^Y(z_2)$. Sea $\delta=\text{mín}\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. Como $C_n(f)$ es interior en $\{p,q,r\}$, existe $\epsilon_1>0$ tal que $B_{\epsilon_1}^{C_n(Y)}(\{z,z_2\})\subset C_n(f)\left(B_\delta^{C_n(X)}(\{p,q,r\})\right)$. Sean $\epsilon=\text{mín}\{\epsilon_0,\epsilon_1\}$, $y_1\in B_\epsilon^Y(z)$, y $y_2,y_3,\ldots,y_n\in B_\epsilon^Y(z_2)$. Entonces, $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}\in B_\epsilon^{C_n(Y)}(\{z,z_2\})$. De lo anterior se tiene que existe $A=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\in B_\delta^{C_n(X)}(\{p,q,r\})$ tal que $C_n(f)(A)=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $f(x_i)=y_i$ para cada $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Como $f(B_\delta^X(p))\subset B_\epsilon^Y(z)$ y $f(B_\delta^X(q))\subset B_\epsilon^Y(z)$, se tiene que $\{x_2,x_3,\ldots x_n\}\subset B_\delta^X(r)$ y $x_1\in B_\delta^X(p)$ o $x_1\in B_\delta^X(q)$. En cualquiera de los casos $A\notin B_\delta^{C_n(X)}(\{p,q,r\})$. Con esta contradicción concluimos que f es inyectiva. ■

Corolario 6.5. *Supongamos que $n\geq 2$. Si f es tal que Y es no degenerado, entonces $C_n(f)$ es abierta si y sólo si f es homeomorfismo.*

Demostración. Si $C_n(f)$ es abierta, del teorema anterior se sigue que f es inyectiva. Como $C_n(f)$ es continua y suprayectiva, por los teoremas 3.2 y 3.3, tenemos que f es continua y suprayectiva. Por tanto, f es un homeomorfismo. Por otra parte, si f es homeomorfismo entonces, por el Teorema 3.5 $C_n(f)$ es homeomorfismo. En particular, $C_n(f)$ es abierta. ■

Hasta donde sabemos, el resultado anterior aparece aquí por primera vez y agradecemos al doctor A. Illanes por su ayuda en la obtención del mismo. A continuación estudiamos la relación entre las funciones f y $F_n(f)$ con respecto a la propiedad de ser abierta. Empezamos con el siguiente resultado.

Teorema 6.6. *Sea $f\colon X \to Y$ una función entre continuos, continua y suprayectiva. Si $a \in X$ y $F_n(f)$ es interior en $\{a\}$, entonces f es interior en a.*

Demostración. Sea $U \subset X$ un abierto tal que $a \in U$. entonces $\{a\} \in \langle U\rangle_{F_n}$, el cual es un abierto en $F_n(X)$. Como $F_n(f)$ es interior en $\{a\}$, se tiene que $\{f(a)\} = F_n(f)(\{a\}) \in \text{Int}(F_n(f)(\langle U\rangle_{F_n}))$, luego, existen subconjuntos abiertos $V_1, V_2, \ldots, V_m$ de Y, tales que $\{f(a)\} \in \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle_{F_n} \subset F_n(f)(\langle U\rangle_{F_n})$. Haciendo $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_m$ tenemos que V es un abierto en Y tal que $f(a) \in V$. Veamos que $V \subset f(U)$. Sea $y \in V$, entonces $\{y\} \in \langle V\rangle_{F_n} \subset \langle V_1, V_2, \ldots, V_m\rangle_{F_n} \subset F_n(f)(\langle U\rangle_{F_n})$. De aquí que existe $A \in \langle U\rangle_{F_n}$ tal que $f(A) = F_n(f)(A) = \{y\}$. Entonces $A \subset U$, por lo que $\{y\} = f(A) \subset f(U)$, luego, $y \in f(U)$. Esto muestra que $V \subset f(U)$ y, en consecuencia que $f(a) \in \text{Int}(f(U))$. Por lo tanto f es interior en a. ■

Corolario 6.7. *Si $F_n(f)$ es abierta, entonces f es abierta.*

Demostración. Tomemos un punto $a \in X$. Por el Teorema 2.3, $F_n(f)$ es interior en $\{a\}$. Entonces, f es interior en a, según el teorema anterior. Luego f es abierta, aplicando de nuevo el Teorema 2.3. ■

Notemos que, en la prueba del teorema 6.6, podemos cambiar $F_n(f)$ por 2^f o por $C_n(f)$. Por tanto, el hecho de que alguna de las funciones 2^f, $C_n(f)$ o $F_n(f)$ sea interior en $\{a\}$, implica que f es interior en a. Este resultado, para el caso de 2^f y $C(f)$, fue probado inicialmente en [16, Teorema 4.2]. Como se ve en la prueba del Corolario 6.7, esto implica que si alguna de las funciones 2^f, $C_n(f)$ o $F_n(f)$ es abierta, entonces f es abierta.

Teorema 6.8. *Sea $f\colon X \to Y$ una función suprayectiva, continua entre continuos. Entonces f es abierta si y sólo si $F_2(f) : F_2(X) \to F_2(Y)$ es abierta.*

Demostración. Supongamos que f es abierta. Tomemos $A \in F_2(X)$. Si $A = \{p\}$, entonces $F_2(f)(A) = \{z\}$, donde $z = f(p)$. Sea $\delta > 0$, como $p \in B_\delta^X(p)$, se tiene que $z \in \text{Int} f(B_\delta^X(p))$, así que existe $\epsilon > 0$ tal que

$B_\epsilon^Y(z) \subset f(B_\delta^X(p))$. Sea $B \in B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z\})$. Si B tiene un sólo punto z_1, tenemos que $z_1 \in B_\epsilon^Y(z)$, luego, existe $x \in B_\delta^X(p)$ tal que $f(x) = z_1$, entonces $\{x\} \in B_\delta^{F_2(X)}(A)$ y $F_2(f)(\{x\}) = \{z_1\} = B$. Si B tiene dos puntos z_1, z_2, entonces z_1 y $z_2 \in B_\epsilon^Y(z)$, luego, existen x_1 y $x_2 \in B_\delta^X(p)$ tales que $f(x_1) = z_1$ y $f(x_2) = z_2$, así que $\{x_1, x_2\} \in B_\delta^{F_2(X)}(A)$ y $F_2(f)(\{x_1, x_2\}) = B$. Con esto concluimos que $B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z\}) \subset F_2(f)(B_\delta^{F_2(X)}(A))$, y por lo tanto $F_2(f)$ es interior en el punto A.

Si $A = \{p, q\}$, tenemos dos casos.

Caso *I*. $f(A) = \{z_1, z_2\}$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $f(p) = z_1$ y $f(q) = z_2$. Sea $\delta > 0$. Como $p \in B_\delta^X(p)$, $q \in B_\delta^X(q)$ y f es abierta, del Teorema 2.3, existen $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ tales que $B_{\epsilon_1}^Y(z_1) \subset f(B_\delta^X(p))$ y $B_{\epsilon_2}^Y(z_2) \subset f(B_\delta^X(q))$. Sea $\epsilon < \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, tal que $B_\epsilon^Y(z_1) \cap B_\epsilon^Y(z_2) = \emptyset$. Tomemos $B \in B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z_1, z_2\})$, de aquí que $B = \{y_1, y_2\}$. Además, podemos suponer que $y_1 \in B_\epsilon^Y(z_1)$ y $y_2 \in B_\epsilon^Y(z_2)$, luego, existen $x_1 \in B_\delta^X(p)$ y $x_2 \in B_\delta^X(q)$, tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Como $\{x_1, x_2\} \in B_\delta^{F_2(X)}(\{p, q\})$ y $F_2(f)(\{x_1, x_2\}) = B$, concluimos que $B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z_1, z_2\}) \subset F_2(f)(B_\delta^{F_2(X)}(A))$, de aquí que, en este caso, $F_2(f)$ es interior en A.

Caso *II*. $f(A) = \{z\}$. Sea $\delta > 0$. Como f es abierta, existen ϵ_1 y $\epsilon_2 > 0$ tales que $B_{\epsilon_1}^Y(z) \subset f(B_\delta^X(p))$ y $B_{\epsilon_2}^Y(z) \subset f(B_\delta^X(q))$. Sea $\epsilon = \text{mín}\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ y tomemos $B \in B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z\})$. Si $B = \{z_1, z_2\}$, entonces z_1 y $z_2 \in B_\epsilon^Y(z)$, luego, existen $x_1 \in B_\delta^X(p)$ y $x_2 \in B_\delta^X(q)$, tales que $f(x_1) = z_1$ y $f(x_2) = z_2$. Como $\{x_1, x_2\} \in B_\delta^{F_2(X)}(A)$ y $F_2(f)(\{x_1, x_2\}) = B$, se tiene que $B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z\}) \subset F_2(f)(B_\delta^{F_2(X)}(A))$. De la misma manera, se tiene que si $B = \{z_1\}$, entonces $B_\epsilon^{F_2(Y)}(\{z\}) \subset F_2(f)(B_\delta^{F_2(X)}(A))$ así que, también en este caso concluimos que $F_2(f)$ es interior en A.

Por tanto, $F_2(f)$ es abierta.

Si $F_2(f)$ es abierta, por el Corolario 6.7 se tiene que f es abierta. ■

Si en la prueba del caso II. del Teorema 6.4 escribimos $F_n(f)$ en lugar de $C_n(f)$, obtenemos la demostración del siguiente teorema:

Teorema 6.9. *Para $n \geq 3$, si $F_n(f)$ es abierta y Y es no degenerado, entonces f es inyectiva.*

Corolario 6.10. *Sea $f: X \to Y$ suprayectiva y continua. Para $n \geq 3$, $F_n(f)$ es abierta si y sólo si f es homeomorfismo.*

Demostración. Si $F_n(f)$ es abierta, por el Teorema 6.9 f es inyectiva, como f es suprayectiva y continua, se tiene que es un homeomorfismo. Si f es homeomorfismo, por el Teorema 3.5, $F_n(f)$ es homeomorfismo y por lo tanto es abierta. ■

En [29, Ejemplo 3.2] H. Hosokawa da un ejemplo de una función abierta f tal que $C(f)$ no es abierta. Posteriormente, en [32, p. 244] H. Hosokawa presenta otra función con las mismas propiedades. En esta ocasión, es bastante más sencillo ver que tal ejemplo satisface lo que se pide. En [19, Observación 9] se menciona que una modificación simple del ejemplo en [32, p. 244], nos da una función abierta f, tal que $C_n(f)$ no es abierta para $n \geq 2$. En [24, Ejemplo 3.5.5] se puede encontrar una justificación detallada de este resultado. De acuerdo con 6.1, la misma función f de H. Hosokawa es tal que 2^f es abierta, pero $C(f)$ no lo es. A continuación exhibimos dicha función.

Ejemplo 6.11. *Existe una función abierta $f: X \to Y$ tal que $C_n(f)$ no es abierta, para ninguna $n \in \mathbb{N}$. y $F_n(f)$ no es abierta para $n \geq 3$.*

Justificación. Sean

$$X = ([0,1] \times [0,1]) \cup ([-1,0] \times [-1,0]) \quad \text{y} \quad Y = [0,1] \times [0,1].$$

Definimos $f : X \to Y$, como $f((x, y)) = (|x|, |y|)$. Esta función es continua, pues en cada coordenada tenemos una función continua. Si $x \in X$ y U es un abierto tal que $x \in U$, entonces no es difícil convencerse de que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^{\mathbb{R}^2}(f(x)) \cap Y \subset f(U)$, Así que, f es interior en cada $x \in X$, luego, f es abierta. Como f no es inyectiva, del Teorema 6.4 se sigue que para $n \geq 2$, $C_n(f)$ no es abierta, y del Teorema 6.9, se tiene que $F_n(f)$ no es abierta para $n \geq 3$. ■

De acuerdo con el Teorema 6.1, la función f del ejemplo anterior es tal que 2^f es abierta pero no $C(f)$.

En [22, Teorema 1] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 6.12. *Si $C(f)$ es abierta y X es localmente conexo, entonces f es monótona.*

Ahora bien, por el Teorema 6.5, si $C_n(f)$ es abierta para $n \geq 2$ entonces, en particular, f es monótona. Por tanto, podemos extender el teorema anterior y obtener el siguiente resultado.

Teorema 6.13. ([19, Teorema 10]) *Si X es localmente conexo y, para alguna $n \in \mathbb{N}$, la función $C_n(f)$ es abierta, entonces f es monótona.*

En [22, Teorema 1], W. J. Charatonik muestra que las funciones monótonas y abiertas cuyo dominio es un continuo hereditariamente localmente conexo, son homeomorfismos. Combinando este resultado con los teoremas 6.1 y 6.13, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.14. ([19, Corolario 48]) *Si X es hereditariamente localmente conexo y para alguna $n \in \mathbb{N}$, $C_n(f)$ es abierta, entonces f es un homeomorfismo.*

Capítulo 7

Funciones Confluentes

Ahora estudiaremos la relación entre la confluencia de una función, con respecto a la de sus funciones inducidas. De nueva cuenta, la letra f representará una función continua y suprayectiva, definida entre los continuos X y Y. Recordemos que f es ***confluente*** si para cada subcontinuo L de Y y cada componente K de $f^{-1}(L)$, resulta que $f(K) = L$. Si suponemos que, en la definición anterior L es un arco, entonces tenemos la noción de ***confluencia por arcos***. Si, en su lugar, pedimos que L sea un subcontinuo conexo por trayectorias de Y, entonces decimos que f es ***confluente por trayectorias***.

Es claro que si f es confluente por trayectorias, entonces f es confluente por arcos. A continuación veremos que dichas nociones son equivalentes.

Teorema 7.1. *Si f es confluente por arcos, entonces f es confluente por trayectorias.*

Demostración. Sean L un subcontinuo conexo por trayectorias de Y y K una componente de $f^{-1}(L)$. Fijemos un elemento $k \in K$. Entonces $f(k) \in L$. Además, dada $l \in L - \{f(k)\}$ existe una trayectoria de $f(k)$ a l en L. Como Y es un continuo, dicha trayectoria contiene un arco β_L de $f(k)$ a l en L. Notemos que $k \in f^{-1}(\beta_L)$, por lo que podemos tomar la componente A_L de $f^{-1}(\beta_L)$ que tiene a k. Entonces A_L es un subconjunto conexo de $f^{-1}(L)$ que intersecta a la componente K de $f^{-1}(L)$ en el punto k. Luego $A_L \subset K$ y, como f es conexo por arcos, $f(A_L) = \beta_L$. Entonces

$$\bigcup_{l \in L} f(A_L) = \bigcup_{l \in L} \beta_L = L.$$

Como $\bigcup_{l\in L} A_L \subset K$, concluímos que $f(K) = L$. ■

Ahora bien, con respecto a las funciones inducidas, en este capítulo comenzaremos viendo que la confluencia de alguna de las funciones 2^f, $C_n(f)$ o $F_n(f)$ implica la de f. Posteriormente veremos que si f es cofluente, entonces 2^f y $C_n(f)$ son confluentes por arcos y, por tanto, confluentes por trayectorias de acuerdo con el Teorema 7.1. Más aún, cuando Y es localmente conexo, veremos que 2^f y $C_n(f)$ son confluentes. Estos resultados, para 2^f y $C(f)$ respectivamente, aparecen probados originalmente en [32] y, en cada caso, daremos la referencia al mismo.

El siguiente resultado, para las funciones 2^f y $C(f)$, aparece demostrado en [32, Teorema 6.3].

Teorema 7.2. *Si alguna de las funciones 2^f, $C_n(f)$ o $F_n(f)$ es confluente, entonces f es confluente.*

Demostración. Supongamos que $C_n(f)$ es confluente y sea B un subcontinuo de Y. Tomemos una componente D de $f^{-1}(B)$ y notemos que $F_1(B)$ es un subcontinuo de $C_n(Y)$. Más aún, $F_1(D)$ es un subcontinuo de $C_n(X)$ tal que $F_1(D) \subset C_n(f)^{-1}(F_1(B))$. Entonces, si $\mathcal{D}$ es la componente de $C_n(f)^{-1}(F_1(B))$ que contiene a $F_1(D)$, por la confluencia de $C_n(f)$, resulta que $C_n(f)(\mathcal{D}) = F_1(B)$. Consideremos el conjunto $D_0 = \sigma(\mathcal{D}) = \bigcup \mathcal{D}$. Como $F_1(D) \subset \mathcal{D} \cap F_1(X)$, por el Teorema 1.34, D_0 es un subcontinuo de X.

Mostraremos ahora que $f(D_0) = B$. Para esto, tomemos primero un punto $y \in f(D_0)$ y sea $a \in D_0$ tal que $y = f(a)$. Entonces existe un elemento $A \in \mathcal{D}$ tal que $a \in A$. Por tanto, $f(A) = C_n(f)(A) = \{b\}$ para algún punto $b \in B$. Luego, $y = f(a) \in f(A) = \{b\}$, por lo que $y = b \in B$. Esto prueba que $f(D_0) \subset B$. Supongamos ahora que $b \in B$. Entonces, $\{b\} \in F_1(B) = C_n(f)(\mathcal{D})$ por lo que existe $A \in \mathcal{D}$ tal que $f(A) = \{b\}$. Tomemos un punto $a \in A$ y notemos que $a \in D_0$ y $f(a) \in f(A) = \{b\}$, por lo que $f(a) = b$. Esto muestra que $B \subset f(D_0)$. Por tanto, $f(D_0) = B$.

Consideremos un punto $x \in D$ y notemos que $\{x\} \in F_1(D)$ por lo que $\{x\} \in \mathcal{D}$. Luego, $\{x\} \subset \sigma(\mathcal{D}) = D_0$. Por tanto, $D \subset D_0$. Esto prueba que D_0 es un subconjunto conexo de $f^{-1}(B)$ que contiene a la componente D de $f^{-1}(B)$. Luego $D = D_0$ y, por lo que demostramos en el párrafo anterior,

$f(D) = B$. Esto prueba que f es confluente. La demostración para 2^f y para $F_n(f)$, es similar. ■

Para probar que si f es confluente, entonces las funciones inducidas 2^f y $C_n(f)$ son confluentes por arcos, utilizaremos el Teorema 1.40. Recordemos que dicho enunciado es obvio en el caso en que los elementos $\mathcal{K}$ y $\mathcal{A}$ que se definen en dicho teorema, se encuentran en $C_n(X)$. También necesitaremos el siguiente resultado de la Teoría de Conjuntos.

Lema 7.3. *Sea $g\colon Z \to W$ una función definida entre los conjuntos Z y W. Si $A \subset Z$ y $B \subset W$, entonces:*

$$g(g^{-1}(B) \cap A) = B \cap g(A).$$

Demostración. Notemos primero que $g^{-1}(B) \cap A \subset g^{-1}(B)$ y $g^{-1}(B) \cap A \subset A$, por lo que

$$g(g^{-1}(B) \cap A) \subset g(g^{-1}(B)) \cap g(A) = B \cap g(A).$$

Para ver la otra contención, tomemos un punto $b \in B \cap g(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $b = g(a)$. Notemos que $a \in g^{-1}(B) \cap A$ es tal que $g(a) = b$. Por tanto, $b \in g(g^{-1}(B) \cap A)$. Esto prueba que $B \cap g(A) \subset g(g^{-1}(B) \cap A)$. ■

El siguiente teorema, para 2^f y $C(f)$, se encuentra probado originalmente en [32, Lema 6.1].

Teorema 7.4. *Si f es confluente, entonces 2^f y $C_n(f)$ son confluentes por arcos.*

Demostración. Probaremos el resultado para 2^f. Sean $\mathcal{L}$ un arco en 2^Y y $\mathcal{K}$ una componente de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$. Tomemos un homeomorfismo $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{L}$ y hagamos $A = \alpha(0)$ y $B = \alpha(1)$. Es claro que $2^f(\mathcal{K})$ es un subcontinuo de $\mathcal{L}$. Tomemos dos puntos $0 \leq s_0 \leq s_1 \leq 1$ tales que $\alpha([s_0, s_1]) = 2^f(\mathcal{K})$. Mostraremos que $B \in 2^f(\mathcal{K})$. Para ver esto, supongamos que no es así. Entonces, $s_1 < 1$. Notemos que $(2^f)^{-1}(B) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L})$. Por consiguiente, $\mathcal{K}$ y $(2^f)^{-1}(B)$ son dos subconjuntos ajenos, cerrados y no vacíos de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$. Además, como $\mathcal{K}$ es una componente de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$, ningún subconjunto conexo de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ intersecta tanto a $\mathcal{K}$ como a $(2^f)^{-1}(B)$. Entonces, por el Teorema 1.3, existen dos subconjuntos cerrados y ajenos $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ tales que $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$, $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$ y $(2^f)^{-1}(B) \subset \mathcal{K}_1$.

Ahora bien, como $\mathcal{K}_0$ es un subconjunto compacto de 2^X, resulta que $2^f(\mathcal{K}_0)$ es un subconjunto compacto de 2^Y. De acuerto con esto y la continuidad de α, el conjunto $J = \{t \in [0,1]: \alpha(t) \in 2^f(\mathcal{K}_0)\}$ es cerrado en $[0,1]$ y, por tanto, compacto. Además $[s_0, s_1] \subset J$, por lo que $J \neq \emptyset$. Entonces podemos considerar a $t_0 = \text{máx}\, J$. Notemos que $B_0 = \alpha(t_0) \in 2^f(\mathcal{K}_0)$ y, como $B = \alpha(1) \notin (2^f)(\mathcal{K})$, tenemos que $s_1 \leq t_0 < 1$. Además existe $K \in \mathcal{K}_0$ tal que $f(K) = 2^f(K) = B_0$. Entonces $K \subset f^{-1}(B_0)$. Consideremos ahora el conjunto

$$M = \bigcup\{C \subset X : C \text{ es una componente de } f^{-1}(B_0) \text{ tal que } C \cap K \neq \emptyset\}.$$

Por el Teorema 1.40, $M \in 2^X$, $K \subset M \subset f^{-1}(B_0)$ y cada componente de M intersecta a K. Entonces, existe un arco ordenado β de K a M en 2^X, de acuerdo con el Teorema 1.37. Notemos que $B_0 = f(K) \subset f(M) \subset B_0$, por lo que $f(M) = B_0$. Luego, $\beta \subset (2^f)^{-1}(B_0)$, por el Teorema 1.39. Entonces, $\beta \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1$ y, como β es conexo y tiene al elemento K de $\mathcal{K}_0$, resulta que $\beta \subset \mathcal{K}_0$. En particular, $M \in \mathcal{K}_0$.

Ahora bien, dada $t \in (t_0, 1]$, definimos $\mathcal{L}_t = \alpha([t_0, t])$, $L_t = \sigma(\mathcal{L}_t) = \bigcup \mathcal{L}_t$ y $B_t = \alpha(t)$. Notemos que $f(M) = B_0 = \alpha(t_0) \subset L_t$, por lo que $M \subset f^{-1}(L_t)$ y podemos considerar al conjunto

$$M_t = \bigcup\{C \subset X : C \text{ es una componente de } f^{-1}(L_t) \text{ tal que } C \cap M \neq \emptyset\}.$$

Aplicando de nuevo el Teorema 1.40, tenemos que $M_t \in 2^X$, $M \subset M_t \subset f^{-1}(L_t)$ y cada componente de M_t intersecta a M. Afirmamos que:

1) si C es una componente de M_t, entonces $f(C)$ es una componente de L_t.

Para ver 1), sea C una componente de M_t. Entonces, C es una componente de $f^{-1}(L_t)$ tal que $C \cap M \neq \emptyset$. Por tanto $f(C)$ es un subcontinuo de L_t. Sea D la componente de L_t tal que $f(C) \subset D$. Entonces $C \subset f^{-1}(D)$ por lo que si E es la componente de $f^{-1}(D)$ que contiene a C, por la confluencia de f, resulta que $f(E) = D$. Ahora bien, como $D \subset L_t$, tenemos que $C \subset E \subset f^{-1}(D) \subset f^{-1}(L_t)$. En vista de que C es una componente de $f^{-1}(L_t)$, sucede que $E = C$. Luego $f(C) = f(E) = D$. Esto prueba 1).

Definamos $K_t = f^{-1}(B_t) \cap M_t$. Afirmamos ahora que

2) $K_t \neq \emptyset$ y cada componente de M_t intersecta a K_t.

Para ver 2), tomemos una componente C de M_t. Entonces, por 1), $f(C)$ es una componente de $L_t = \sigma(\mathcal{L}_t)$. Además B_t es un elemento del subcontinuo $\mathcal{L}_t$ de 2^Y. Entonces, por el Teorema 1.35, $f(C) \cap B_t \neq \emptyset$. Luego $C \cap f^{-1}(B_t) \neq \emptyset$. Por tanto

$$\emptyset \neq C \cap f^{-1}(B_t) \subset M_t \cap f^{-1}(B_t) = K_t.$$

Esto prueba que $K_t \neq \emptyset$. Además, un punto de $C \cap f^{-1}(B_t)$ es, a su vez, un punto de $C \cap K_t$ pues C es un subconjunto de M_t. Luego, $C \cap K_t \neq \emptyset$ y 2) se cumple.

Tenemos entonces que K_t es un subconjunto cerrado y no vacío de X tal que $K_t \subset f^{-1}(L_t)$. Afirmamos ahora que:

3) $B_t \subset f(M_t)$.

Para ver 3), tomemos un punto $b \in B_t$. Como $B_t \subset L_t$, existe una componente D de L_t tal que $b \in D$. Notemos que $B_0 \in \mathcal{L}_t$ así que, por el Teorema 1.35, sucede que $D \cap B_0 \neq \emptyset$. Tomemos un punto $b_0 \in B_0 \cap D$. Como $f(M) = B_0$, existe un punto $a \in M$ tal que $f(a) = b_0$. Notemos que $a \in M_t$ pues $M \subset M_t$. Sea C la componente de M_t tal que $a \in C$. Entonces, por 1), $f(C)$ es una componente de L_t. Como $b_0 = f(a) \in f(C) \cap D$ y D es una componente de L_t, resulta que $f(C) = D$. Por tanto, $b \in D = f(C) \subset f(M_t)$. Esto prueba 3).

Afirmamos ahora que

4) $f(K_t) = B_t$.

En efecto, por el Lema 7.3 y 3), sucede que

$$f(K_t) = B_t \cap f(M_t) = B_t.$$

Tenemos entonces, que $K_t \in (2^f)^{-1}(B_t)$ para cada $t \in (t_0, 1]$. Supongamos ahora que t y $s \in (t_0, 1]$ son tales que $s \leq t$. Entonces, $[t_0, s] \subset [t_0, t]$ por lo que $\mathcal{L}_s = \alpha([t_0, s]) \subset \alpha([t_0, t]) = \mathcal{L}_t$. Esto implica que $L_s = \sigma(\mathcal{L}_s) \subset \sigma(\mathcal{L}_t) = L_t$, por lo que $f^{-1}(L_s) \subset f^{-1}(L_t)$. Tomemos ahora un punto $x \in M_s$. Entonces existe una componente C_1 de $f^{-1}(L_s)$ tal que $x \in C_1$ y $C_1 \cap M \neq \emptyset$. Por tanto, $C_1 \subset f^{-1}(L_t)$ y existe una componente C_2 de $f^{-1}(L_t)$ tal que $C_1 \subset C_2$. Notemos que $\emptyset \neq C_1 \cap M \subset C_2 \cap M$ por lo que $C_2 \subset M_t$. Entonces, $x \in M_t$ y con esto probamos que $M_s \subset M_t$.

Consideremos ahora una sucesión decreciente $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el intervalo $(t_0, 1]$ tal que $t_n \to t_0$. Dada $n \in \mathbb{N}$, hagamos $\mathcal{L}_n = \alpha([t_0, t_n])$, $L_n = \sigma(\mathcal{L}_n) = \bigcup \mathcal{L}_n$, $B_n = \alpha(t_n)$ y $K_n = f^{-1}(B_n) \cap M_{t_n}$. Afirmamos que

5) $L_n \to B_0$ y $M_{t_n} \to M$.

Para ver esto, notemos que $[t_0, t_n] \to \{t_0\}$. Entonces $\mathcal{L}_n = \alpha([t_0, t_n]) \to \{\alpha(t_0)\} = \{B_0\}$. Luego, por la continuidad de la función unión (Teorema 1.33), $L_n = \sigma(\mathcal{L}_n) \to \sigma(\{B_0\}) = B_0$. Así pues, $L_n \to B_0$. Para ver la segunda parte de 5), notemos que, por lo que demostramos en el párrafo anterior, $\{M_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente en 2^X. Entonces, por el Teorema 1.25 si $M_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_{t_n}$, entonces $M_{t_n} \to M_0$. Además, en vista de que $M \subset M_{t_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos, por el Teorema 1.15, que $M \subset M_0$.

Mostraremos ahora que $M_0 \subset M$. Para esto, tomemos un punto $x \in M_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_{t_n}$. Dada $n \in \mathbb{N}$, $x \in M_{t_n}$ así que existe una componente C_n de $f^{-1}(L_n)$ tal que $x \in C_n$ y $C_n \cap M \neq \emptyset$. Por la compacidad de $C(X)$, existe una subsucesión $\{C_{n_m}\}_{m\in\mathbb{N}}$ de $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $C_{n_m} \to C_0$, para algún elemento $C_0 \in C(X)$. Notemos que $f(C_{n_m}) \subset L_{n_m}$, $f(C_{n_m}) \to f(C_0)$ y $L_{n_m} \to B_0$. Entonces, por el Teorema 1.15, $f(C_0) \subset B_0$. Luego, $C_0 \subset f^{-1}(B_0)$. Ahora bien, $x \in C_{n_m}$ y $C_{n_m} \cap M \neq \emptyset$ para cada $m \in \mathbb{N}$, por lo que $x \in C_0$ y $C_0 \cap M \neq \emptyset$, de acuerdo con el Corolario 1.16 y el Teorema 1.24. Tomemos un punto $z \in C_0 \cap M$. Entonces existe una componente D de $f^{-1}(B_0)$ tal que $z \in D$ y $D \cap K \neq \emptyset$. Notemos que $z \in D \cap C_0$ y como D es una componente de $f^{-1}(B_0)$, necesariamente $C_0 \subset D$. Por tanto, $x \in C_0 \subset D \subset M$, así que $x \in M$. Esto muestra que $M_0 \subset M$ y, entonces $M = M_0$.

Para simplificar la notación, dada la compacidad de 2^X, supongamos que la sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $K_0 \in 2^X$. En vista de que $K_n \subset M_{t_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por 5) y el Teorema 1.15, sucede que $K_0 \subset M$. Ahora bien, como la sucesión $\{M_{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y, de acuerdo con 2), cada componente de M_{t_n} intersecta a K_n tenemos, por el Teorema 1.41, que cada compomente de M intersecta a K_0. De esta manera, de acuerdo con el Teorema 1.37, existe un arco ordenado γ de K_0 a M. Afirmamos que:

6) $\gamma \subset \mathcal{K}_0$.

Para ver esto, notemos que, como $K_n \to K_0$ resulta que $f(K_n) \to f(K_0)$. Ahora bien, de acuerdo con 4), $f(K_n) = B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, como $t_n \to t_0$, por la continuidad de α tenemos que $B_n = \alpha(t_n) \to \alpha(t_0) = B_0$. Luego, $f(K_0) = B_0$. Tenemos, de esta manera, que $f(K_0) = f(M) = B_0$ así que, utilizando el Teorema 1.39;

$$\gamma \subset (2^f)^{-1}(B_0) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1.$$

Entonces, por la conexidad de γ y el hecho de que K es un elemento de γ que pertenece a $\mathcal{K}_0$, resulta que $\gamma \subset \mathcal{K}_0$. En particular, $K_0 \in \mathcal{K}_0$.

Ahora bien, de acuerdo con 4),

$$K_n \in (2^f)^{-1}(B_n) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{K}_0 \cup \mathcal{K}_1.$$

Si para algún número natural n resulta que $K_n \in \mathcal{K}_0$, entonces $\alpha(t_n) = B_n = f(K_n) \in (2^f)(\mathcal{K}_0)$, por lo que $t_n \in J$. Entonces $t_0 = \text{máx}\, J \geq t_n$. Esto contradice el hecho de que $t_n > t_0$. Por tanto, $K_n \in \mathcal{K}_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En vista de que $\mathcal{K}_1$ es cerrado, tenemos que $K_0 \in \mathcal{K}_1$. Hemos demostrado así, que K_0 es un elemento en $\mathcal{K}_0 \cap \mathcal{K}_1$. Esto contradice el hecho de que los conjuntos $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_1$ son ajenos.

De lo anterior tenemos que $B \in (2^f)(\mathcal{K})$. Una prueba similar hace ver que $A \in (2^f)(\mathcal{K})$. Por tanto, $(2^f)(\mathcal{K})$ es un subcontinuo del arco $\mathcal{L}$ que contiene a sus dos puntos extremos. Luego, $(2^f)(\mathcal{K}) = \mathcal{L}$. Esto prueba que 2^f es conexo por arcos. La demostración para $C_n(f)$ es similar. ■

Combinando los teoremas 7.1 y 7.4, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.5 ([32, Corolario 6.2]). *Si f es confluente, entonces 2^f y $C_n(f)$ son confluentes por trayectorias.*

Para ver que cuando Y es localmente conexo y f es confluente, entonces las funciones inducidas 2^f y $C_n(f)$ son confluentes, utilizaremos los dos teoremas que enunciamos a continuación.

Teorema 7.6. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) X *es localmente conexo,*

ii) 2^X *es localmente conexo,*

iii) $C_n(X)$ *es localmente conexo.*

Teorema 7.7. *Si* X *es localmente conexo entonces, para cada subcontinuo* A *de* X, *existe una sucesión decreciente* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $C(X)$ *tal que* A_n *es localmente conexo, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *y* $A_n \to A$.

A manera de referencia, una demostración del Teorema 7.6, para $n = 1$, puede verse en [53, Teorema 1.135]. La prueba de que las afirmaciones i) y iii) de dicho teorema son equivalentes, se encuentra en [46, Teorema 3.2]. Una prueba del Teorema 7.7 aparece en [40, p. 260]. En [32, Teorema 6.3], H. Hosokawa demuestra el siguiente resultado, para el caso $n = 1$:

Teorema 7.8. *Si* Y *es localmente conexo, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es confluente.*

ii) 2^f *es confluente.*

iii) $C_n(f)$ *es confluente.*

Demostración. Para ver que *i)* $\to$ *ii)* supongamos que f es confluente. Sean $\mathcal{L}$ un subcontinuo de 2^Y y $\mathcal{K}$ una componente de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$. Como Y es localmente conexo, por el Teorema 7.6, 2^Y es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 7.7, existe una sucesión decreciente $\{\mathcal{L}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subcontinuos localmente conexos de 2^Y, tal que $\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}$. Por el Teorema 1.25, $\mathcal{L} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n$. Entonces, dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_n$, por lo que

$$\mathcal{K} \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n),$$

de donde podemos considerar la componente $\mathcal{K}_n$ de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$ tal que $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n$. Notemos que

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_{n+1} \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_{n+1}) \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$$

así que $\mathcal{K}_{n+1} \cap \mathcal{K}_n \neq \emptyset$ y, como $\mathcal{K}_n$ es una componente de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L}_n)$, resulta que $\mathcal{K}_{n+1} \subset \mathcal{K}_n$. Entonces $\{\mathcal{K}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente por lo que si $\mathcal{K}_0 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{K}_n$, por el Teorema 1.25, $\mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_0$.

Ahora bien, como $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 1.15, $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}_0$. Por otro lado, cada elemento $\mathcal{L}_n$ es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 1.48, cada $\mathcal{L}_n$ es conexo por trayectorias. Luego, por el Teorema 7.5, $2^f(\mathcal{K}_n) = \mathcal{L}_n$. Además, en vista de que $\mathcal{K}_n \to \mathcal{K}_0$, tenemos que $\mathcal{L}_n = 2^f(\mathcal{K}_n) \to 2^f(\mathcal{K}_0)$. También es cierto que $\mathcal{L}_n \to \mathcal{L}$. Por tanto $2^f(\mathcal{K}_0) = \mathcal{L}$ y, por consiguiente, $\mathcal{K}_0$ es un subconjunto conexo de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$ que intersecta a la componente $\mathcal{K}$ de $(2^f)^{-1}(\mathcal{L})$. Luego $\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}$. Esto muestra que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ y, además, $2^f(\mathcal{K}) = 2^f(\mathcal{K}_0) = \mathcal{L}$. Entonces 2^f es confluente.

Combinando lo anterior con el Teorema 7.2, resulta que las afirmaciones *i)* y *ii)* son equivalentes. De manera similar podemos ver que las afirmaciones *i)* y *iii)* son equivalentes. Entonces también las afirmaciones *ii)* y *iii)* lo son. ■

Ahora veremos que, en el teorema anterior, la hipótesis de que Y es localmente conexo es esencial.

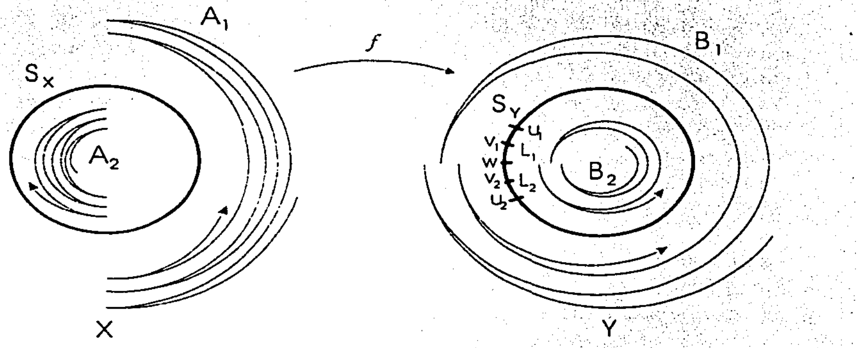
Ejemplo 7.9. *Existe una función confluente $f : X \to Y$ tal que las funciones 2^f y $C_n(f)$ no son confluentes.*

Justificación. En el plano $\mathbb{R}^2$, expresado en coordenadas polares, consideremos los siguientes conjuntos.

$$A_1 = \left\{(r,\theta) : \theta = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ y } 1 < r \leq 2\right\},$$
$$A_2 = \left\{(r,\theta) : \theta = \frac{\pi}{2}\left(2 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \text{ y } \frac{1}{2} \leq r < 1\right\},$$
$$B_1 = \left\{(r,\theta) : \theta = \pi\operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ y } 1 < r \leq 2\right\},$$
$$B_2 = \left\{(r,\theta) : \theta = \pi\left(2 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right)\right) \text{ y } \frac{1}{2} \leq r < 1\right\}.$$

Hagamos $S_X = \{(1,\theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $S_Y = S_X$, $X = S_X \cup A_1 \cup A_2$, $Y = S_Y \cup B_1 \cup B_2$ y definamos $f : X \to Y$ como $f(r,\theta) = (r, 2\theta)$, para cada $(r,\theta) \in X$. Consideremos en S_Y, los puntos $w = (1,\pi)$, $u_1 = \left(1, \pi - \frac{1}{2}\right)$,

$u_2 = (1, \pi + \frac{1}{2})$, $v_1 = (1, \pi - \frac{1}{4})$ y $v_2 = (1, \pi + \frac{1}{4})$. Notemos que si $L_1 = wu_1$ y $L_2 = u_2w$, entonces $l(L_1) = l(L_2) = \frac{1}{2}$. Además $l(wv_1) = l(v_2w) = \frac{1}{4}$.



Para ver que f es confluente, sea A un subcontinuo de Y. Notemos que

i) A es un arco contenido en $B_1 \cup B_2$.

ii) A es un arco contenido en S_Y o bien $A = S_Y$.

iii) A es homeomorfo a $B_1 \cup S_Y$ o a $B_2 \cup S_Y$.

iv) A es homeomorfo a Y.

En el caso i), como A es conexo y $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, resulta que $A \subset B_1$ o $A \subset B_2$. Supongamos que $A \subset B_1$. Entonces existen $s, t \in (1, 2]$ tales que $s \leq t$ y que

$$A = \left\{(r, \theta) : \theta = \pi \mathrm{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ y } r \in [s, t]\right\}.$$

Luego:

$$f^{-1}(A) = \left\{(r, \theta) : \theta = \frac{\pi}{2} \mathrm{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ y } r \in [s, t]\right\}.$$

Por tanto, $f^{-1}(A)$ es un arco contenido en A_1. De la misma manera se tiene que si $A \subset B_2$, entonces $f^{-1}(A)$ es un arco contenido en A_2. En ambos casos $f^{-1}(A)$ es conexo y $f(f^{-1}(A)) = A$.

En el caso ii), supongamos primero que $A \neq S_Y$. Si $(1,0) \notin A$, entonces existen $s,t \in (0,2\pi)$ tales que $s \leq t$ y $A = \{(1,\theta)\colon \theta \in [s,t]\}$. Entonces $f^{-1}(A) = C_1 \cup C_2$, donde

$$C_1 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{s}{2}, \tfrac{t}{2}\right]\right\} \quad \text{y} \quad C_2 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\pi + \tfrac{s}{2}, \pi + \tfrac{t}{2}\right]\right\}.$$

Además los conjuntos C_1 y C_2 son conexos y ajenos. Por tanto, son las componentes de $f^{-1}(A)$. Notemos que $f(C_1) = f(C_2) = A$. Ahora bien, si $(1,0) \in A$, entonces existen p y $q \in [0,2\pi]$ tales que $p \leq q$ y que

$$A = \{(1,\theta)\colon \theta \in [0,p]\} \cup \{(1,\theta)\colon \theta \in [q,2\pi]\}.$$

Entonces $f^{-1}(A) = D_1 \cup D_2$, donde

$$D_1 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[0, \frac{p}{2}\right]\right\} \cup \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\pi + \frac{q}{2}, 2\pi\right]\right\}$$

y

$$D_2 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\frac{q}{2}, \pi + \frac{p}{2}\right]\right\}.$$

Además D_1 y D_2 son conexos y ajenos. Por tanto, son las componentes de $f^{-1}(A)$. Más aún, $f(D_1) = f(D_2) = A$. Por último, si $A = S_Y$ entonces $f^{-1}(A) = S_X$ y $f(S_X) = A$. Supongamos ahora que A satisface iii). Si A es homeomorfo a $B_1 \cup S_Y$, entonces existe $1 < t \leq 2$ tal que A y $f^{-1}(A)$ quedan determinados de la siguiente manera

$$A = \left\{(r,\theta)\colon \theta = \pi \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ y } 1 < r \leq t\right\} \cup S_Y,$$
$$f^{-1}(A) = \left\{(r,\theta)\colon \theta = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ y } 1 < r \leq t\right\} \cup S_X.$$

Entonces $f^{-1}(A)$ es un continuo homeomorfo a $A_1 \cup S_X$ y $f(f^{-1}(A)) = A$. De manera análoga si A es homeomorfo a $B_2 \cup S_Y$, entonces $f^{-1}(A)$ es un continuo homeomorfo a $A_2 \cup S_X$ cuya imágen, bajo f, es A. Supongamos, por último, que A satisface iv). Utilizando argumentos similares a los anteriores, sucede que $f^{-1}(A)$ es un subcontinuo de X, homeomorfo a X y cuya imágen bajo f es A. Tenemos, por tanto, que la imágen de cada componente de $f^{-1}(A)$ es, en cualquier situación, igual a A. Entonces, f es confluente.

Ahora veamos que 2^f no es confluente. Convenimos en que si K es un subcontinuo de X o bien de Y, y K es un arco con puntos extremos x y y, entonces $K = xy$. Si K está contenido en S_X o bien en S_Y convenimos, además, en que el arco xy está recorrido en el sentido de las manecillas del reloj. En cualquier situación, denotaremos por $l(xy)$ a la longitud del arco xy.

Consideremos, en $C(Y)$, los siguientes conjuntos

$$\mathcal{Y}_1 = \left\{K \in C(Y) \colon K \subset B_1 \text{ y } l(K) = \frac{1}{2}\right\},$$
$$\mathcal{Y}_2 = \left\{K \in C(Y) \colon K \subset B_2 \text{ y } l(K) = \frac{1}{2}\right\},$$
$$\mathcal{Y}_3' = \left\{K \in C(S_Y) \colon (1, \pi) \notin \mathrm{Int}_{S_Y}(K) \text{ y } l(K) = \frac{1}{2}\right\}$$

y

$$\mathcal{Y}_3 = \mathcal{Y}_3' \cup C(wv_1, L_1) \cup C(v_2w, L_2),$$

en donde $C(wv_1, L_1) = \{K \in C(S_Y) \colon wv_1 \subset K \subset L_1\}$ y, análogamente, $C(v_2w, L_2) = \{K \in C(S_Y) \colon v_2w \subset K \subset L_2\}$. No es difícil ver, que los conjuntos $C(wv_1, L_1)$ y $C(v_2w, L_2)$ son arcos en $C(S_Y)$. Por consiguiente, dichos conjuntos son subcontinuos de $C(S_Y)$.

Notemos ahora que cada elemento de $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ y $\mathcal{Y}_3$ es un arco en Y. Afirmamos que:

1) los conjuntos $\mathcal{Y}_1$ y $\mathcal{Y}_2$ son conexos y $\mathcal{Y}_3$ es un subcontinuo de $C(S_Y)$.

Para ver esto, consideremos el punto extremo $z = (2, \pi\mathrm{sen}(-1))$ de B_1 y definamos, en B_1, un orden $<_z$ como sigue: $x <_z y$ si y sólo si $zx \subset zy$. Definamos ahora $g \colon [0, \infty) \to \mathcal{Y}_1$ como $g(t) = r_1r_2$, donde r_1r_2 es el único elemento de $\mathcal{Y}_1$ tal que $r_1 <_z r_2$ y $l(zr_1) = t$. Diremos que r_1 es el primer punto extremo de r_1r_2. Notemos que g es inyectiva, pues si $g(t_1) = g(t_2)$, entonces $r_1r_2 = g(t_1) = g(t_2) = s_1s_2$, $l(zr_1) = t_1$, $l(zs_1) = t_2$, $r_1 <_z r_2$ y $s_1 <_z s_2$. Entonces, $r_1 = s_1$ y, por tanto, $t_1 = t_2$. Ahora veamos que g es suprayectiva. Sea $r_1r_2 \in \mathcal{Y}_1$ y, sin perder generalidad, supongamos que

$r_1 <_z r_2$. Entonces, si $t = l(zr_1)$ sucede que $g(t) = r_1r_2$. Por lo tanto g es biyectiva.

Para ver que g es continua, sea $\epsilon > 0$. Supongamos que $t, s \in [0, \infty)$ son tales que $|t - s| < \epsilon$. Hagamos $g(t) = r_1r_2$ y $g(s) = s_1s_2$. Sin perder generalidad, podemos suponer que $t \leq s$. Entonces $d_{\mathbb{R}^2}(r_1, s_1) < l(r_1s_1) < \epsilon$. Tenemos entonces, que $g(t)$ y $g(s)$ son dos arcos en B_1 con la misma longitud y tales que la distancia entre sus primeros puntos extremos es menor que ϵ. Entonces $H(g(t), g(s)) < \epsilon$. Esto muestra que g es continua. De manera similar podemos ver que g^{-1} es continua.

De lo anterior tenemos que g es homeomorfismo y, en consecuencia, $\mathcal{Y}_1$ es conexo. Análogamente se demuestra que $\mathcal{Y}_2$ es conexo. La prueba de que $\mathcal{Y}_3'$ es conexo también es similar. En efecto, para el punto $w = (1, \pi)$ definamos, como antes, una relación de orden $<_w$ en S_Y como sigue: $x <_w y$ si y sólo si $wx \subset wy$. Supongamos que $l(wu_2) = p$ y notemos que $p = 2\pi - \frac{1}{2}$. Definamos ahora $g\colon [0, p] \to \mathcal{Y}_3'$ como $g(t) = r_1r_2$, donde r_1r_2 es el único arco en $\mathcal{Y}_3'$ tal que $r_1 <_w r_2$ y $l(wr_1) = t$. Una prueba similar a la anterior, hace ver que g es un homeomorfismo. Por tanto, $\mathcal{Y}_3'$ es un subcontinuo de $C(S_Y)$. Además. $\mathcal{Y}_3'$ intersecta a los subcontinuos $C(wv_1, L_1)$ y $C(v_2w, L_2)$ de $C(S_Y)$ en los elementos L_1 y L_2, respectivamente. Luego $\mathcal{Y}_3$ es un subcontinuo de $C(S_Y)$ y, así, 1) se cumple.

Afirmamos ahora que:

2) $Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1) = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_3$.

Para ver esto, tomemos un elemento $K \in \mathcal{Y}_3'$. Entonces K es un arco xy en S_Y recorrido en el sentido de las manecillas del reloj. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos en B_1 que converge al punto x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea x_ny_n el arco de longitud $\frac{1}{2}$ contenido en B_1 y tomado en el sentido de las manecillas del reloj. Es fácil ver que la sucesión $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{Y}_1$, converge al arco $K = xy$. Por tanto $K \in Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$. Entonces $\mathcal{Y}_3' \subset Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$. Ahora bien, si $K \in C(wv_1, L_1) \cup C(v_2w, L_2)$ entonces, también es posible encontrar una sucesión $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{Y}_1$, que converge al arco K, de manera que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergen al punto extremo de K diferente de w. Esto muestra que $C(wv_1, L_1) \cup C(v_2w, L_2) \subset Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$. Como también es cierto que $\mathcal{Y}_1 \subset Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$, tenemos que $\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_3 \subset Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$.

Ahora sea $K \in Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$. Entonces existe una sucesión $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{Y}_1$ que converge a K. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, x_ny_n es un subconjunto del conjunto compacto $B_1 \cup S_Y$. Por tanto $K \subset B_1 \cup S_Y$. Más aún, como cada arco x_ny_n tiene longitud $\frac{1}{2}$, sucede que K es un continuo con longitud finita. Luego $K \subset B_1$ o bien $K \subset S_Y$. En el primer caso, resulta que $K \in \mathcal{Y}_1$. Con respecto al segundo caso notemos que si a lo más un número finito de los elementos de la sucesión $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ intersecta al conjunto $P = \{(r, \theta) \in B_1 : \theta = \pi \text{ o } \theta = -\pi\}$, entonces la longitud de K es $\frac{1}{2}$ y, por consiguiente $K \in \mathcal{Y}_1'$. Si, por el contrario, una infinidad de elementos de la sucesión $\{x_ny_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ intersecta al conjunto P, entonces $K \in C(wv_1, L_1) \cup C(v_2w, L_2)$. Por consiguiente, $K \in \mathcal{Y}_3$. Esto muestra que $Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1) \subset \mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}_3$ y, de esta manera, 2) es cierto.

De manera similar se prueba que $Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_2) = \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3$. Ahora bien, como $\mathcal{Y}_1$ y $\mathcal{Y}_2$ son conexos, tenemos que $Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1)$ y $Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_2)$ son subcontinuos de $C(Y)$. Dichos continuos contienen al continuo $\mathcal{Y}_3$, así que:

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 = Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_1) \cup Cl_{C(Y)}(\mathcal{Y}_2)$$

es un subcontinuo de $C(Y)$. Consideremos ahora, los siguientes subconjuntos de $C(X)$:

$$\mathcal{X}_1 = \left\{K \in C(X) \colon K \subset A_1 \text{ y } l(f(K)) = \frac{1}{2}\right\},$$
$$\mathcal{X}_2 = \left\{K \in C(X) \colon K \subset A_2 \text{ y } l(f(K)) = \frac{1}{2}\right\}.$$

La prueba de que $\mathcal{X}_1$ y $\mathcal{X}_2$ son conexos es análoga a la de que $\mathcal{Y}_1$ y $\mathcal{Y}_2$ son conexos. Afirmamos que:

3) $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_1) = \mathcal{X}_1$.

Para ver esto, sea $K \in (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_1)$. Entonces existe $M \in \mathcal{Y}_1$ tal que $f(K) = M$. Como $M \in \mathcal{Y}_1$, tenemos que $M = m_1m_2 \subset B_1$ y $l(M) = \frac{1}{2}$. De la construcción de X y Y se tiene que $f^{-1}(B_1) = A_1$. Además f es inyectiva en A_1, de aquí que $K = f^{-1}(f(K)) = f^{-1}(M) \subset f^{-1}(B_1) = A_1$. Como $f(K) = M$, entonces $l(f(K)) = l(M) = \frac{1}{2}$. Puesto que M es un arco, K es también un arco. Por lo tanto $K \in \mathcal{X}_1$, así que $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_1) \subset \mathcal{X}_1$. Ahora, sea

$K \in \mathcal{X}_1$. Como $K \in C(X)$ y $K \subset A_1$, sucede que $f(K) \in C(Y)$ y $f(K) \subset B_1$. Además, $l(f(K)) = \frac{1}{2}$, así que $f(K) \in \mathcal{Y}_1$. Entonces $K \in (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_1)$ y, por tanto, $\mathcal{X}_1 \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_1)$. Esto prueba 3).

De manera similar se demuestra que $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_2) = \mathcal{X}_2$. Para calcular $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$, consideremos los siguientes subconjuntos de S_X:

$$S_1 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right\}, \qquad S_2 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right)\right\},$$
$$R_1 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{4}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right\}, \qquad R_2 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\right]\right\},$$
$$R_3 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{3\pi}{2} - \tfrac{1}{4}, \tfrac{3\pi}{2}\right]\right\}, \qquad R_4 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2} + \tfrac{1}{4}\right]\right\}.$$
$$R_5 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{8}, \tfrac{\pi}{2}\right]\right\}, \qquad R_6 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{1}{8}\right]\right\}.$$
$$R_7 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{3\pi}{2} - \tfrac{1}{8}, \tfrac{3\pi}{2}\right]\right\}, \qquad R_8 = \left\{(1,\theta)\colon \theta \in \left[\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2} + \tfrac{1}{8}\right]\right\}.$$

Definamos, en X, $p_1 = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $p_2 = \left(1, -\frac{\pi}{2}\right)$, $q_1 = \left(1, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\right)$, $q_2 = \left(1, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\right)$, $q_3 = \left(1, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{8}\right)$, $q_4 = \left(1, \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{8}\right)$. Notemos que $f(p_1) = f(p_2) = w$. Consideremos ahora los siguientes subconjuntos de 2^{S_X}:

$$\mathcal{R}_0 = \left\{K \in 2^{S_X}\colon K \cap S_1 \neq \emptyset \text{ y } K \cap S_2 \neq \emptyset\right\},$$
$$\mathcal{R}_1 = \left\{K \in 2^{S_X}\colon K \cap R_1 \neq \emptyset \text{ y } K \cap R_3 \neq \emptyset\right\},$$
$$\mathcal{R}_2 = \left\{K \in 2^{S_X}\colon K \cap R_2 \neq \emptyset \text{ y } K \cap R_4 \neq \emptyset\right\},$$
$$\mathcal{R}_3 = \left\{K \in 2^{S_X}\colon K \cap R_5 \neq \emptyset \text{ y } K \cap R_7 \neq \emptyset\right\},$$
$$\mathcal{R}_4 = \left\{K \in 2^{S_X}\colon K \cap R_6 \neq \emptyset \text{ y } K \cap R_8 \neq \emptyset\right\},$$

así como:

$$\mathcal{S}_1 = \left\{K \in C(S_X)\colon K \subset S_1 \text{ y } l(f(K)) = \frac{1}{2}\right\} \cup C(R_5, R_1) \cup C(R_8, R_4),$$
$$\mathcal{S}_2 = \left\{K \in C(S_X)\colon K \subset S_2 \text{ y } l(f(K)) = \frac{1}{2}\right\} \cup C(R_6, R_2) \cup C(R_7, R_3),$$
$$\mathcal{S}_3 = \left\{K \in \mathcal{R}_0\colon f(K) \in C(S_Y) \text{ y } l(f(K)) = \frac{1}{2}\right\},$$
$$\mathcal{S}_4 = \{K \in \mathcal{R}_1\colon f(K) = wu_1\} \cup \{K \in \mathcal{R}_2\colon f(K) = u_2 w\},$$
$$\mathcal{S}_5 = \{x_4 p_2, p_2 x_3, x_2 p_1, p_1 x_1\},$$
$$\mathcal{S}_6 = \{K \in \mathcal{R}_3\colon f(K) \in C(wv_1, L_1)\},$$
$$\mathcal{S}_7 = \{K \in \mathcal{R}_4\colon f(K) \in C(v_2 w, L_2)\},$$

en donde $x_1 = (1, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4})$, $x_2 = (1, \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4})$, $x_3 = (1, \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4})$ y $x_4 = (1, \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{4})$. Hagamos, por último:

$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7.$$

Afirmamos que:

4) $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3) = \mathcal{X}_3$.

Para ver esto, sea $K \in \mathcal{S}_1$. Entonces $f(K) \in C(S_Y)$ y $l(f(K)) = \frac{1}{2}$. Además, como $K \subset S_1$, resulta que $p_1, p_2 \notin K$, por lo que $w \notin \text{Int}_{S_Y}(f(K))$. Por tanto $f(K) \in \mathcal{Y}_3$. Esto muestra que $\mathcal{S}_1 \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$. De manera similar, resulta que $\mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$. Es claro, además, que $\mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7 \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$. Por tanto, $\mathcal{X}_3 \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$.

Supongamos ahora, que $K \in (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$. Entonces $f(K)$ es un subcontinuo de S_Y con longitud $\frac{1}{2}$ o $f(K) \in C(wv_1, L_1) \cup C(wv_2, L_2)$. Supongamos que $w \notin f(K)$. Entonces $p_1, p_2 \notin K$. Por tanto $K \subset S_1 \cup S_2$. Si K es conexo, entonces $K \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$. Por otro lado, si K no es conexo entonces $K \in \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7$. Ahora, supongamos que $w \in f(K)$. Entonces $f(K) = wu_1$ o bien $f(K) = u_2w$. Si $K \notin \mathcal{S}_5$ entonces, en vista de que al menos uno de p_1 y p_2 se encuentra en K y $l(K) = \frac{1}{4}$, sucede que $K \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Luego, $K \in \mathcal{S}_4$. Esto prueba que $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3) \subset \mathcal{X}_3$. Luego, 4) se cumple.

Notemos que:

$$(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}) = (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_1) \cup (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_2) \cup (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3) = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{X}_3.$$

Ahora bien, las respectivas pruebas de que $Cl_{2^Y}(\mathcal{Y}_1) = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_3$ y $Cl_{2^Y}(\mathcal{Y}_2) = \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3$, se pueden adaptar para demostrar que

$$Cl_{2^X}(\mathcal{X}_1) = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \{p_1x_1, x_4p_2\}$$

y

$$Cl_{2^X}(\mathcal{X}_2) = \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{x_2p_1, p_2x_3\}.$$

De lo anterior, se sigue que $\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \{p_1x_1, x_4p_2\}$ y $\mathcal{X}_2 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{x_2p_1, p_2x_3\}$ son subcontinuos de 2^X. Claramente se tiene que

$(\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \{p_1x_1, x_4p_2\}) \cap (\mathcal{X}_2 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{x_2p_1, p_2x_3\})) \cap (\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7) = \emptyset.$

Supongamos ahora que $K \in Cl_{2^X}(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4) \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7$. Entonces, como $\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7 \subset (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3) \cap 2^{S_X}$ y el conjunto $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$ es compacto, resulta que $K \in (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$. Además, $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3) \subset 2^{S_X}$ por lo que $K \in 2^{S_X}$. Ahora bien, si K es el límite de una sucesión en $\mathcal{S}_3$ y suponemos que $p_1, p_2 \notin K$, entonces K es el límite de una sucesión de conjuntos disconexos, en donde algunas componentes están contenidas en S_1 y otras en S_2. Luego, K posee la misma propiedad. Como cada elemento de dicha sucesión tiene longitud $\frac{1}{2}$ y su imágen es un subcontinuo de S_Y, al pasar al límite, dichas propiedades se preservan. Por tanto, $K \in \mathcal{S}_3$.

Supongamos ahora, que K es el límite de una sucesión de elementos en $\mathcal{S}_3$ y que alguno de p_1 y p_2 está en K. Como $K \in (2^f)^{-1}(\mathcal{Y}_3)$, resulta que $f(K) = wu_1$ o bien u_2w. En vista de que los elementos de la sucesión que converge a K son disconexos y que cada uno de ellos está contenido en la unión de un arco en S_X de longitud $\frac{1}{2}$ y su arco antípodo, al pasar al límite, tendremos que $K \in \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Entonces $K \in \mathcal{S}_4$.

Hemos hecho ver que $Cl_{2^X}(\mathcal{S}_3) \subset \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$. Notemos ahora, que

$$\mathcal{S}_4 = \left(\mathcal{R}_1 \cap (2^f)^{-1}(wu_1)\right) \cup \left(\mathcal{R}_2 \cap (2^f)^{-1}(u_2w)\right).$$

Por tanto, $\mathcal{S}_4$ es cerrado en 2^X. Por consiguiente, el conjunto $\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4$ es cerrado en 2^X. De manera similar se prueba que los conjuntos $\mathcal{S}_6$ y $\mathcal{S}_7$ son cerrados en 2^X. De esta manera, los conjuntos $\mathcal{C}_0 = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \{p_1x_1, x_4p_2\}$, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{x_2p_1, p_2x_3\}$ y $\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7$ son cerrados, ajenos dos a dos y su unión es $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y})$. Por consiguiente, si $\mathcal{C}$ es una componente de $(2^f)^{-1}(\mathcal{Y})$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$, o bien $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7$ (se puede demostrar que, de hecho, $\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7$ es conexo. Sin embargo, para efectos de la demostración, esto no es necesario). Ahora bien, en el primer caso, tenemos que $2^f(\mathcal{C}) = 2^f(\mathcal{C}_0) = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_3 \neq \mathcal{Y}$. En el segundo caso, resulta que $2^f(\mathcal{C}) = 2^f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3 \neq \mathcal{Y}$. Finalmente, en el tercer caso $2^f(\mathcal{C}) \subset 2^f(\mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7) = \mathcal{Y}_3 \neq \mathcal{Y}$. Por lo tanto 2^f no es confluente.

Veamos que $C(f)$ no es confluente. Para esto, definimos $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2 \cup \mathcal{Y}_3$ como antes. Siguiendo la misma demostración para 2^f, manteniendo la notación, resulta que $\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_6 = \mathcal{S}_7 = \emptyset$. Por consiguiente:

$$C(f)^{-1}(\mathcal{Y}) = (\mathcal{X}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \{p_1x_1, x_4p_2\}) \cup (\mathcal{X}_2 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{x_2p_1, p_2x_3\}).$$

Por consiguiente, $\mathcal{C}_0 = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{S}_1 \cup \{p_1x_1, x_4p_2\}$ y $\mathcal{C}_1 = \mathcal{X}_2 \cup \mathcal{S}_2 \cup \{x_2p_1, p_2x_3\}$ son las componentes de $C(f)^{-1}(\mathcal{Y})$ y, como antes, la imagen bajo $C(f)$ de cada una de ellas no es $\mathcal{Y}$. Luego, $C(f)$ no es confluente.

Supongamos ahora que $n > 1$. Para ver que $C_n(f)$ no es confluente, consideremos el continuo $\mathcal{Y}$ como antes y, siguiendo la prueba para el caso de 2^f, respetando la notación, consideramos ahora los elementos de $\mathcal{S}_3$, , $\mathcal{S}_6$ y $\mathcal{S}_7$ que estén contenidos en $C_n(X)$. Entonces, resulta que si $\mathcal{C}$ es una componente de $C_n(f)^{-1}(\mathcal{Y})$, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ o bien $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}_3 \cup \mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_6 \cup \mathcal{S}_7$, y en cualquier situación, su imágen bajo $C_n(f)$ no es $\mathcal{Y}$. ■

En [19, Teorema 18] se Demuestra el siguiente resultado:

Teorema 7.10. *Sean $f: X \to Y$ una función continua entre continuos, y $n \geq 3$. Entonces $C_n(f)$ es confluente si y sólo si f es monótona.*

Observemos, que para $n \geq 3$ este resultado prueba que la función $C_n(f)$ en el Ejemplo 7.9 no puede ser confluente, pues es claro que f no es monótona.

Capítulo 8

Funciones OM

En este capítulo veremos la clase de las funciones OM y su relación con las funciones inducidas. Como hemos venido suponiendo, $f: X \to Y$ representa una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. En [32, Teorema 5.2] se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 8.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) f *es una función OM.*

ii) 2^f *es una función OM.*

iii) $C(f)$ *es una función OM.*

A lo largo del capítulo, probaremos algunas de las implicaciones establecidas en el teorema anterior. Para tal efecto, necesitaremos del siguiente resultado.

Lema 8.2. *Si* $p \in Y$ *y* K *es una componente de* $f^{-1}(p)$, *entonces:*

i) 2^K *es la componente de* $(2^f)^{-1}(\{p\})$ *que contiene a* K,

ii) $C_n(K)$ *es la componente de* $C_n(f)^{-1}(\{p\})$ *que contiene a* K, *para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como $f(K) = \{p\}$, tenemos que $K \in C_n(f)^{-1}(\{p\})$. Sea $\mathcal{C}$ la componente de $C_n(f)^{-1}(\{p\})$ tal que $K \in \mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de $C_n(X)$ tal que $K \in \mathcal{C} \cap C(X)$. Entonces, por el Teorema

1.34, $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$ es conexo. Además es claro que $\sigma(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(p)$ y, como K es una componente de $f^{-1}(p)$ y $K \subset \sigma(\mathcal{C})$, resulta que $K = \sigma(\mathcal{C})$.

Veamos que $C_n(K) = \mathcal{C}$. Tomemos primero un elemento $C \in C_n(K)$. Como $C \subset K$, entonces $f(C) \subset f(K) = \{p\}$, así que $C \in C_n(f)^{-1}(\{p\})$. Esto muestra que $C_n(K) \subset C_n(f)^{-1}(\{p\})$ y, como $\mathcal{C}$ es la componente de $C_n(f)^{-1}(\{p\})$ y $\mathcal{C}$ comparte con $C_n(K)$ el elemento K, resulta que $C_n(K) \subset \mathcal{C}$. Tomemos ahora un elemento $C \in \mathcal{C}$. Entonces $C \subset \sigma(\mathcal{C}) = K$, por lo que $C \in C_n(K)$. De esta manera $\mathcal{C} \subset C_n(K)$ y, por consiguiente, $C_n(K) = \mathcal{C}$.

Lo anterior termina la demostración para el caso de $C_n(f)$. La respectiva prueba para 2^f es similar. ■

En el caso de $F_n(f)$ tenemos el siguiente resultado.

Lema 8.3. *Si $p \in Y$ y K es una componente de $f^{-1}(p)$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $F_n(K)$ es una componente de $F_n(f)^{-1}(\{p\})$.*

Demostración. Como $f(K) = \{p\}$, tenemos que $F_n(K) \subset F_n(f)^{-1}(\{p\})$. En vista de que $F_n(K)$ es conexo (Corolario 1.45), podemos considerar la componente $\mathcal{C}$ de $F_n(f)^{-1}(\{p\})$ tal que $F_n(K) \subset \mathcal{C}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es un subcontinuo de 2^X tal que $F_1(K) \subset \mathcal{C} \cap C(X)$. Entonces, por el Teorema 1.34, $\sigma(\mathcal{C}) = \bigcup_{A\in\mathcal{C}} A$ es conexo. Además, es claro que $K \subset \sigma(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(p)$ y, como K es una componente de $f^{-1}(p)$ y $K \subset \sigma(\mathcal{C})$, resulta que $K = \sigma(\mathcal{C})$. Por tanto, si $A \in \mathcal{C}$, resulta que $A \in F_n(X)$ y $A \subset \sigma(\mathcal{C}) = K$. Luego, $A \in F_n(K)$. Esto muestra que $\mathcal{C} \subset F_n(K)$. Por tanto $\mathcal{C} = F_n(K)$. ■

Utilizando los lemas anteriores, podemos probar el siguiente resultado.

Teorema 8.4. *Si alguna de las funciones 2^f, $C_n(f)$ o $F_n(f)$ es OM, entonces f también lo es.*

Demostración. Sea $\Lambda \in \{2^f, C_n(f), F_n(f)\}$ y supongamos que Λ es OM. Tomemos un punto $y \in Y$ y una sucesión $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en Y tal que $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = y$. Entonces la sucesión $\{\{y_m\}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $\{y\}$. Sea K una componente de $f^{-1}(y)$. Definimos ahora $\mathcal{K}$ como sigue: si $\Lambda = 2^f$, hacemos $\mathcal{K} = 2^K$; si $\Lambda = C_n(f)$, entonces $\mathcal{K} = C_n(K)$; finalmente, si $\Lambda = F_n(f)$, consideramos que $\mathcal{K} = F_n(K)$. En cualquier situación $\mathcal{K} \subset 2^K$ y, de acuerdo con los lemas 8.2 y 8.3, $\mathcal{K}$ es una componente de $\Lambda^{-1}(\{y\})$.

En vista de que Λ es OM, por el Teorema 2.25, tenemos que

$$\mathcal{K} \cap \text{lím sup } \Lambda^{-1}(\{y_m\}) \neq \emptyset.$$

Tomemos un elemento L en esta intersección. Entonces, $L \in \mathcal{K}$ y, por el Teorema 1.20, existen una subsucesión $\{y_{m_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ de $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y elementos $K_r \in \Lambda^{-1}(\{y_{m_r}\})$ para cada $r \in \mathbb{N}$, tales que la sucesión $\{K_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ converge a L. Mostraremos ahora que $L \subset \text{lím sup } f^{-1}(y_m)$. Tomemos entonces un punto $x \in L$. En vista de que $\{y_{m_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, basta con demostrar que, para cada $r \in \mathbb{N}$, existe un punto $x_r \in f^{-1}(y_{m_r})$ tal que la sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ converge a x. En efecto, como $L = \text{lím inf } K_r$, por el Teorema 1.20, existe una sucesión $\{x_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ que converge a x en donde, dada $r \in \mathbb{N}$, sucede que $x_r \in K_r$. Luego $f(x_r) \in f(K_r) = \{y_{m_r}\}$, por lo que $x_r \in f^{-1}(y_{m_r})$ como se quería. Esto prueba que $x \in \text{lím sup } f^{-1}(y_m)$. Luego $L \subset \text{lím sup } f^{-1}(y_m)$. Ahora bien, como $\mathcal{K} \subset 2^K$, tenemos que $L \in 2^K$. Por tanto, $L \subset K$. Por consiguiente, $K \cap \text{lím sup } f^{-1}(y_m) \neq \emptyset$. De esta manera, aplicando de nuevo el Teorema 2.25, f es OM. ■

Supongamos ahora, que f es OM. Entonces $f = h \circ g$ para alguna función monótona g y una función abierta h. Por tanto, $2^f = 2^h \circ 2^g$. Como g es monótona, por el Teorema 5.1, la función 2^g es monótona, y como h es abierta, por el Teorema 6.1, la función 2^h es abierta. Por tanto, 2^f es OM. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Teorema 8.5. *Si f es OM, entonces 2^f es OM.*

Ahora bien, si f es OM y escribimos $f = h \circ g$, entonces $C_n(f) = C_n(h) \circ C_n(g)$ y, por el Teorema 5.1, $C_n(g)$ es monótona. Sin embargo, por el Ejemplo 6.11 , existen funciones abiertas f_0 tales que ninguna de sus funciones inducidas $C_n(f_0)$ es abierta. Por tanto, no podemos asegurar que $C_n(h)$ es abierta y proceder como antes. En [32, Teorema 5.2], H. Hosokawa utilizó el Teorema 2.25 para hacer ver que si f es OM, entonces $C(f)$ es OM. En este trabajo, no presentaremos esta demostración y preferimos remitir al lector a la referencia anteriormente dada.

En el caso de $F_n(f)$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 8.6. *Si f es OM entonces $F_2(f)$ es OM.*

Demostración. Como $f = h \circ g$ con g monótona y h abierta, entonces $F_2(f) = F_2(h) \circ F_2(g)$, por el Teorema 5.1, $F_2(g)$ es monótona, y por el Teorema 6.8, $F_2(h)$ es abierta. Luego, $F_2(f)$ es OM. ■

Para $n \geq 3$ no podemos proceder de la misma manera, pues por el Ejemplo 6.11, existen funciones abiertas f tales que $F_n(f)$ no es abierta, así que no se puede asegurar que $F_n(h)$ es abierta. Para $n = 2$, vemos a continuación que si f es OM, entonces $C_2(f)$ es OM. Posteriormente, mostraremos con un ejemplo que el resultado anterior no se cumple para $n \geq 3$.

Teorema 8.7. *Si f es OM, entonces $C_2(f)$ es OM.*

Demostración. Por el Teorema 8.1 tenemos que la función $C(f)$ es OM. Afirmamos que:

1) si $P \in C(Y)$ y $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(Y)$ tal que $P_m \to P$ entonces, para toda componente E de $f^{-1}(P)$ sucede que

$$(\text{lím sup } C(f)^{-1}(P_m)) \cap C(f)^{-1}(P) \cap C(E) \neq \emptyset.$$

Para ver 1), recordemos que las funciones OM son confluentes. Por tanto f es confluente, así que $f(E) = P$ y $E \in C(f)^{-1}(P)$. Sea $\mathcal{K}$ la componente de $C(f)^{-1}(P)$ que contiene a E. Como $C(f)$ es OM, por el Teorema 2.25, existe $A \in \mathcal{K} \cap \text{lím sup } C(f)^{-1}(P_m)$. En vista de que $\mathcal{K} \subset C(f)^{-1}(P)$, tenemos que

$$A \in (\text{lím sup } C(f)^{-1}(P_m)) \cap C(f)^{-1}(P).$$

Mostraremos ahora, que también A es un elemento de $C(E)$. Para esto, sea $D = \sigma(\mathcal{K}) = \bigcup_{B\in\mathcal{K}} B$. Como $E \in \mathcal{K} \cap C(X)$, tenemos por el Teorema 1.34, que D es un subconjunto conexo de X. Además $D \subset f^{-1}(P)$. Por tanto, $D = E$, pues E es componente de $f^{-1}(P)$ y $E \subset D$. Ahora bien, como $A \in \mathcal{K}$, entonces $A \subset D = E$. Luego, $A \in C(E)$ y 1) se cumple.

Afirmamos ahora, que:

2) si P y $Q \in C(Y)$, E y F son componentes de $f^{-1}(P)$ y de $f^{-1}(Q)$, respectivamente y si $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ son sucesiones en $C(Y)$ que convergen a P y a Q, respectivamente, entonces existen $A \in C(E) \cap C(f)^{-1}(P)$ y $B \in C(F) \cap C(f)^{-1}(Q)$ tales que $A \cup B \in \text{lím sup } C_2(f)^{-1}(P_m \cup Q_m)$.

Por 1), existe un elemento

$$A \in (\text{lím sup } C(f)^{-1}(P_m)) \cap C(f)^{-1}(P) \cap C(E).$$

Por tanto, existen una subsucesión $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y elementos $A_k \in C(f)^{-1}(P_{m_k})$ tales que $A_k \to A$. Observemos que $\{Q_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{Q_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, así que $Q_{m_k} \to Q$. Otra vez, por la afirmación 1), existe un elemento

$$B \in (\text{lím sup } C(f)^{-1}(Q_{m_k})) \cap C(f)^{-1}(Q) \cap C(F).$$

Por tanto, existen una subsucesión $\{m_{k_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ de $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y elementos $B_{k_r} \in C(f)^{-1}(Q_{m_{k_r}})$ tales que $B_{k_r} \to B$.

Consideremos la subsucesión $\{P_{m_{k_r}}\}_{r\in\mathbb{N}}$ de $\{P_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y la subsucesión $\{A_{k_r}\}_{r\in\mathbb{N}}$ de $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Entonces se tiene que $A_{k_r} \cup B_{k_r} \to A \cup B$ y que

$$f(A_{k_r} \cup B_{k_r}) = f(A_{k_r}) \cup f(B_{k_r}) = P_{m_{k_r}} \cup Q_{m_{k_r}}.$$

Por lo tanto, $A \cup B \in \text{lím sup } C_2(f)^{-1}(P_m \cup Q_m)$ y con esto, queda demostrada la afirmación 2).

Ahora bien, para probar el teorema sean $P \in C_2(Y)$, $\mathcal{K}$ una componente de $C_2(f)^{-1}(P)$ y $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $C_2(Y)$ tal que $P_m \to P$. Mostraremos que:

$$\mathcal{K} \cap \text{lím sup } C_2(f)^{-1}(P_m) \neq \emptyset.$$

Para esto, fijemos un elemento $D \in \mathcal{K}$ y consideremos dos casos. Primero supongamos que P es disconexo. Como $P \in C_2(Y)$, sucede que P tiene justo dos componentes R_1 y R_2. Es claro que $P = R_1 \cup R_2$. Como $f(D) = P$, tenemos que D no es conexo. En vista de que $D \in C_2(X)$, sucede que D también posee justo dos componentes D_1 y D_2. Además, $D = D_1 \cup D_2$ y, sin perder generalidad, $f(D_1) = R_1$ y $f(D_2) = R_2$.

Como la sucesión $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge al subconjunto disconexo P podemos suponer, sin perder generalidad, que cada elemento P_m es disconexo. Por tanto, como $P_m \in C_2(Y)$, el conjunto P_m posee justo dos componentes R_1^m y R_2^m. Entonces $P_m = R_1^m \cup R_2^m$ y, sin perder generalidad, podemos suponer también que $R_1^m \to R_1$ y que $R_2^m \to R_2$. Sean E_1 la componente de

$f^{-1}(R_1)$ que contiene a D_1 y E_2 la componente de $f^{-1}(R_2)$ que contiene a D_2. Haciendo $D_0 = E_1 \cup E_2$ se tiene, por la confluencia de f, que $f(D_0) = P$. Como $D = D_1 \cup D_2 \subset E_1 \cup E_2 = D_0$ y D intersecta a cada componente de D_0, existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ en 2^X, de D a D_0. Además, por el Teorema 1.54, tenemos que $\mathcal{A} \subset C_2(X)$ y, por el Teorema 1.39, $\mathcal{A} \subset C_2(f)^{-1}(P)$. Como $D \in \mathcal{A} \cap \mathcal{K}$ resulta que $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$. En particular $D_0 \in \mathcal{K}$.

Aplicando la afirmación 2) a los conjuntos R_1 y R_2, las componentes E_1 y E_2 y las sucesiones $\{R_1^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{R_2^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, tenemos que existen $A_1 \in C(E_1) \cap C(f)^{-1}(R_1)$ y $A_2 \in C(E_2) \cap C(f)^{-1}(R_2)$, tales que

$$A_1 \cup A_2 \in \text{lím sup } C_2(f)^{-1}(R_1^m \cup R_2^m) = \text{lím sup } C_2(f)^{-1}(P_m).$$

Sea $D' = A_1 \cup A_2$. Entonces, $f(D') = P$ y $D' = A_1 \cup A_2 \subset E_1 \cup E_2 = D_0$. Además, cada componente de D_0 intersecta a D, por lo que existe un arco ordenado $\mathcal{B}$ en 2^X, de D' a D_0. Por un argumento análogo al efectuado antes para el arco ordenado $\mathcal{A}$, obtenemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$. Por tanto:

$$D' \in \mathcal{K} \cap \text{lím sup } C_2(f)^{-1}(P_m).$$

Esto termina la prueba en el caso en que P es disconexo. Supongamos ahora que P es conexo. Como $D \in C_2(X)$, resulta aue D tiene a lo más dos componentes D_1 y D_2. Además, podemos considerar las componentes E_1 y E_2 de $f^{-1}(P)$ que contienen a D_1 y D_2, respectivamente. Notemos que si D es conexo, entonces $D_1 = D_2$ y $E_1 = E_2$. Ahora bien, como f es confluente, $f(E_1) = f(E_2) = P$. Sea $D_0 = E_1 \cup E_2$. Entonces, $D = D_1 \cup D_2 \subset E_1 \cup E_2 = D_0$ y, considerando un arco ordenado de D a D_0 podemos ver, como lo hicimos antes, que $D_0 \in \mathcal{K}$.

Notemos ahora, que cada conjunto P_m posee a lo más dos componentes R_m y S_m. Dada la compacidad de $C(Y)$, existen subsucesiones $\{R_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{S_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{R_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ y $\{S_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, respectivamente, tales que $R_{m_k} \to R$ y $S_{m_k} \to S$ con $R, S \in C(Y)$. Como $P_m = R_m \cup S_m$ y $P_m \to P$, entonces $R_{m_k} \cup S_{m_k} \to P$. Como también $R_{m_k} \cup S_{m_k} \to R \cup S$, tenemos que $R \cup S = P$. De aquí que $R \subset P$ y $f^{-1}(R) \subset f^{-1}(P)$.

Tomemos un punto $y \in R$. Como $f(E_1) = P$, existe $x \in E_1$ tal que $f(x) = y$. Entonces, $x \in f^{-1}(R)$. Sea E la componente de $f^{-1}(R)$ tal que

$x \in E$. Entonces, E es un subconjunto conexo de $f^{-1}(P)$ que intersecta a la componente E_1 de $f^{-1}(P)$ en el punto x. Por tanto, $E \subset E_1$. Análogamente, existe una componente F de $f^{-1}(S)$ tal que $F \subset E_2$. Aplicando la afirmación 2) a los conjuntos R y S, las componentes E y F y las sucesiones $\{R_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{S_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que existen $A \in C(E) \cap C(f)^{-1}(R)$ y $B \in C(F) \cap C(f)^{-1}(S)$, tales que:

$$D' = A \cup B \in \operatorname{lím\,sup} C_2(f)^{-1}(R_{m_k} \cup S_{m_k}) = \operatorname{lím\,sup} C_2(f)^{-1}(P_{m_k}).$$

Además, por el Teorema 1.19, $\operatorname{lím\,sup} C_2(f)^{-1}(P_{m_k}) \subset \operatorname{lím\,sup} C_2(f)^{-1}(P_m)$. Por tanto $D' \in \operatorname{lím\,sup} C_2(f)^{-1}(P_m)$. Notemos, además, que

$$f(D') = f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) = R \cup S = P$$

y

$$D' = A \cup B \subset E \cup F \subset E_1 \cup E_2 = D_0.$$

Además, cada componente de D_0 intersecta a D'. Por tanto, existe un arco ordenado $\mathcal{B}$ en 2^X, de D' a D_0. Como hemos hecho ver, esto implica $\mathcal{B} \subset \mathcal{K}$. Por lo tanto $D' \in \mathcal{K} \cap \operatorname{lím\,sup} C_2(f)^{-1}(P_m)$ y el teorema queda demostrado. ■

Para ver que el resultado anterior no se puede extender a las funciones inducidas $C_n(f)$ con $n \geq 3$, utilizaremos el hecho de que las funciones abiertas son OM. En efecto, si $f\colon X \to Y$ es una función abierta e $1_X\colon X \to X$ es la identidad en X, entonces 1_X es monótona y $f = f \circ 1_X$ es la composición de una función monótona con una abierta. Luego, f es OM.

Ejemplo 8.8. *Existe una función OM $f\colon X \to Y$ tal que ninguna función $C_n(f)$ es OM, para $n \geq 3$.*

Justificación. Consideremos, en el plano $\mathbb{R}^2$, los conjuntos $X = [-1,1] \times [0,1]$ y $Y = [0,1] \times [0,1]$. Definimos $f\colon X \to Y$ como $f(x,y) = (|x|, y)$, para cada $(x,y) \in X$. En vista de que f es una reflexión con respecto al eje de las ordenadas, f es abierta y, por tanto, OM.

Consideremos ahora los siguientes subconjuntos de X

$$A_{-1} = \{-1, 0\} \times [0,1] \qquad \text{y} \qquad A_1 = \{0, 1\} \times [0,1].$$

Consideremos, además, el subconjunto $B = \{0,1\} \times [0,1]$ de Y. Es claro que $f(A_{-1}) = f(A_1) = B$, por lo que A_{-1} y $A_1 \in C_n(f)^{-1}(B)$. Notemos, además, que $C_n(f)^{-1}(\{0\}\times[0,1]) = \{0\}\times[0,1]$. Por tanto, si $A \in C_n(f)^{-1}(B)$ y A tiene al menos 3 componentes, entonces $A \cap (\{-1\} \times [0,1])$ y $A \cap (\{1\} \times [0,1])$. Como consecuencia de esto, tenemos que:

$$C_n(f)^{-1}(B) \cap B_{\frac{1}{4}}^{C_n(X)}(A_{-1}) = \{A_{-1}\}$$

y

$$C_n(f)^{-1}(B) \cap B_{\frac{1}{4}}^{C_n(X)}(A_1) = \{A_1\}.$$

Por consiguiente, A_{-1} y A_1 son puntos aislados de $C_n(f)^{-1}(B)$. Entonces, si hacemos $\mathcal{K} = C_n(f)^{-1}(B) - \{A_1, A_{-1}\}$, resulta que $Cl_{C_n(f)^{-1}(B)}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$. Por tanto, $\mathcal{K}$ es cerrado en $C_n(f)^{-1}(B)$. Observemos que si $A \in \mathcal{K}$, entonces $\{0\} \times [0,1] \subset A$, $A \cap (\{-1\} \times [0,1]) \neq \emptyset$ y $A \cap (\{1\} \times [0,1]) \neq \emptyset$. Luego $A \subset A_{-1} \cup A_1$ y cada componente de $A_{-1} \cup A_1$ intersecta a A. Por consiguiente, existe un arco ordenado $\mathcal{A}$ en $C_n(X)$ de A a $A_1 \cup A_{-1}$. En vista de que $f(A) = f(A_{-1} \cup A_1)$, por el Teorema 1.39, resulta que $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$. Esto muestra que $\mathcal{K}$ es conexo por trayectorias.

Ahora bien, $C_n(f)^{-1}(B) = \{A_{-1}\} \cup \{A_1\} \cup \mathcal{K}$ y la unión es ajena. Por tanto, $\{A_{-1}\}$, $\{A_1\}$ y $\mathcal{K}$ son las componentes de $C_n(f)^{-1}(B)$. Consideremos el conjunto $\left\{\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}\right\}$. Notemos que:

$$\left\{\frac{1}{2(n-1)}, \frac{3}{2(n-1)}, \ldots, \frac{2(n-2)+1}{2(n-1)}\right\}$$

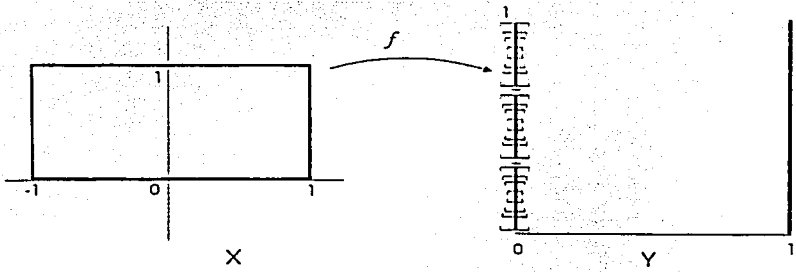
es el conjunto de los puntos medios de los intervalos $\left[\frac{i}{n-1}, \frac{i+1}{n-1}\right]$ con $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-2\}$. Sea $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de elementos en el intervalo abierto $\left(0, \frac{1}{2(n-1)}\right)$, tal que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \frac{1}{2(n-1)}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$, hagamos:

$$a_{m(2k+1)} = \tfrac{2k+1}{2(n-1)} - x_m, \qquad b_{m(2k+1)} = \tfrac{2k+1}{2(n-1)} + x_m$$

y consideremos el siguiente subconjunto de B:

$$B_m = \left(\{0\} \times \left(\bigcup_{k=0}^{n-2} \left[a_{m(2k+1)}, b_{m(2k+1)}\right]\right)\right) \cup (\{1\} \times [0,1])$$

Observemos que cada B_m tiene n componentes, y que la sucesión $\{B_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a B. De acuerdo con el Teorema 2.25, para ver que $C_n(f)$ no es una función OM, basta demostrar que $\mathcal{K} \cap \text{lím sup}\, C_n(f)^{-1}(B_m) = \emptyset$. En efecto, si $A \in \text{lím sup}\, C_n(f)^{-1}(B_m)$, entonces existe una sucesión $\{A_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $C_n(X)$ tal que $A_{m_k} \to A$ y $f(A_{m_k}) = B_{m_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $B_{m_k} = f(A_{m_k}) \to f(A)$ y, como también $B_{m_k} \to B$, sucede que $f(A) = B$. Por tanto $A \in C_n(f)^{-1}(B)$.



Dada $k \in \mathbb{N}$, tenemos que B_{m_k} tiene n componentes y $n-1$ de ellas están contenidas en $\{0\} \times [0,1]$. Además $f(A_{m_k}) = B_{m_k}$, así que A_{m_k} tiene n componentes. Más aún, como $C_n(f)^{-1}(\{0\} \times [0,1]) = \{0\} \times [0,1]$, $n-1$ componentes de A_{n_k} están contenidas en $\{0\} \times [0,1]$ y la componente de A_{n_k} que falta es $\{-1\} \times [0,1]$ o bien $\{1\} \times [0,1]$. Ahora bien, en vista de que la sucesión $\{A_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente, dicha sucesión es de Cauchy. Por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_{m_k}, A_{m_r}) < \frac{1}{4}$ para cada k y $r \in \mathbb{N}$. Entonces, dados $k, r \in N$, si una componente de A_{m_k} es $\{1\} \times [0,1]$, entonces dicho conjunto también es una componente de A_{m_r}. Tenemos entonces, que $\{1\} \times [0,1]$ es una componente de A_{m_k} para casi toda $k \in \mathbb{N}$. Entonces, $\{1\} \times [0,1] \subset A_{m_k} \subset A_1$ para casi toda $k \in \mathbb{N}$ y, por el Teorema 1.15, $\{1\} \times [0,1] \subset A \subset A_1$. Finalmente, como $A \in C_n(f)^{-1}(B)$, tenemos que $A = A_1$. Luego $A \notin \mathcal{K}$ y, por lo tanto, $C_n(f)$ no es OM. ■

Cabe mencionar aquí, que con el Teorema 8.7 y con el Ejemplo 8.8 se muestra por primera vez, un resultado válido para $C(f)$, que no se puede extender a $C_n(f)$ para $n \geq 3$.

111

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la Propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Universidad Autónoma de Coahuila. 1994.

[2] J. G. Anaya, *El hiperespacio* $C_n(X)$, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, 2001.

[3] R. Bott, *On the third symmetric potency of* S_1, Fund. Math., 39 (1952), 364-368.

[4] K. Borsuk, *On the third symmetric potency of the circumference*, Fund. Math. 36 (1949), 168-202.

[5] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 37 (1931), 875-882.

[6] E. Castañeda, *A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent* Topology Proc. 23 (1998), 61-67.

[7] E. Castañeda, *Productos simétricos*, tesis de doctorado, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

[8] J. J. Charatonik, *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math., 56 (1964), 213-220.

[9] J. J. Charatonik, *Recent results of induced mappings between hyperspaces of continua*, Topology. Proc. 22 (1997), 103-122.

[10] J. J. Charatonik, *Properties of elementary mappings* Acta Math. Hungar., 85 (1999), 143-152.

[11] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Atomicity of mappings* Internat. J. Math. & Math. Sci., 21 (1998), 729-734.

[12] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Hereditarily weakly confluent induced mappings are homeomorphisms*, Colloq. Math. 75 (1998), 195-203.

[13] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Inducible mappings between hyperspaces* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46 (1998), 5-9.

[14] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Lightness of induced mappings*, Tsukuba J. Math. 22 (1998), 179-192.

[15] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Limit properties of induced mappings*, Top. Appl. 100 (2000), 103-118.

[16] J. J.Charatonik y W.J.Charatonik, *Inverse limits and openness of the induced mappings*, Top. Appl. 114 (2001), 235-260

[17] J. J. Charatonik y J. R. Prajs, *Lifting property for confluent mappings*, por aparecer.

[18] J. J. Charatonik, y W. J. Charatonik y A. Illanes *Openness of induced mappings* Top. Appl. 98 (1999), 67-80.

[19] J. J. Charatonik, A.Illanes, y S.Macías, *Induced mappings on the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, por aparecer en Houston J. Math.

[20] W. J. Charatonik, *Arc approximation property and confluence of induced mappings*, Rocky Mountain J. Math (1)(28) (1998), 107-154.

[21] W. J. Charatonik, *Induced near-homeomorphisms*, Comment. Math. Univ. Carolin. 41 (2000), 133-137.

[22] W. J. Charatonik, *Openness and homogeneity on induced mappings*, Por aparecer en Proc. Amer. Math. Soc.

[23] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1977.

[24] A. N. Chavez, *Funciones inducidas en hiperespacios*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, 2001.

[25] D. W. Curtis y N. T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to* $\aleph_0$*-dimensional linear metric spaces*, Topology Appl., 19 (1985), 251-260.

[26] V. V. Fedorchuk, *On hypermaps, which are trivial bundles*, Lecture Notes in Math., Springer, Berlin-New York, 1060 (1984)(, 26-36.

[27] R. M. García de la Rosa, *El Hiperespacio de los subconjuntos finitos de un continuo*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 1995.

[28] A. Garcia-Maynez y A. Tamariz *Topología General*, Porrúa, 1998.

[29] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces*, Bull. Tokio Gakugei Univ., 41 (1989), 1-6.

[30] H. Hosokawa, *Mappings of hyperspaces induced by refinable mappings*, Bull. Tokio Gakugei Univ., 42 (1990), 1-8.

[31] H. Hosokawa, *Induced mappings between hyperspaces II*, Bull. Tokyo Gakugei Univ., 44 (1992), 1-7.

[32] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces*, Tsukuba J. Math., 21 (1)(1997), 239-250.

[33] H. Hosokawa, *Induced mappings on hyperspaces II*, Tsukuba J. Math., 21 (3)(1997), 773-783.

[34] A. Illanes, *Multicoherence of symmetric products*, An. Inst. Mat., Universidad Nacional Autónoma de México, 25 (1985), 11-24.

[35] A. Illanes, *Notas de clase de curso de hiperespacios*, UNAM, México, 1990.

[36] A. Illanes, *The openness of induced maps on hyperspaces*, Colloq. Math. 74 (1997), 773-783.

[37] A. Illanes, *The hyperspace* $C_2(X)$ *for a finite graph* X *is unique*, por aparecer.

[38] A. Illanes, S. Macías y S. B. Nadler, Jr., *Symmetric products and Q-manifolds*, Geometry and topology in dynamics (Winston-Salem, NC, 1998/San Antonio, TX, 1999), 137–141, Contemp. Math., 246, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999

[39] A. Illanes y S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1999

[40] K. Kuratowski *Topology*, Vol. II, Academic Press, Inc. New York-London-Warszawa, 1968.

[41] A. Lelek, *On confluent mappings*, Colloq. Math., 15 (1966), 223-233.

[42] C. V. Lovetro, Jr., *Symmetric and permutation product spaces*, Tesis de Maestría, Louisiana State University, 1969.

[43] S. Macías, *On symmetric products of continua*, Topology Appl. 92 (1999), 173-182.

[44] S. Macías, *Aposyndetic properties of symmetric products of continua*, Topology Proc. 22 (1997), 281-296.

[45] S. Macías, *Connectedness of the hyperspace of closed subsets with at most n components*, Questions Answers Gen. Topology 19 (1)(2001), 133-138.

[46] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X*, Top. Appl. 109 (2001), 237-256.

[47] S. Macías, *On the hyperspaces $C_n(X)$ of a continuum X, II*, Topology Proc. 25 (2000), 255-276.

[48] T. Maćkowiak, *Continuous mappings on continua*, Dissertationes Math., 158 (1979).

[49] T. Maćkowiak y E. D. Tymchatyn, *Continuous mappings on continua II*, Dissertationes Math., 225 (1984).

[50] J. M. Martínez-Montejano, *Mutual aposyndesis of symmetric products*, Topology Proc. 24 (1999), 203-213.

[51] L. McAuley, *Monotone mappings and open mappings*, SUNY at Binghamton, 1970.

[52] R. Molski, *On symetric products*, Fund. Math 44 (1957), 165-170.

[53] S. B. Nadler, Jr., *Hyperespaces of Sets*, Marcel Dekker, New York and Basel, 1978.

[54] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory: An introduction*, Marcel Dekker, New York, Basel and Hong Kong, 1992.

[55] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading MA, 1970.