UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SOBRE LA PROPIEDAD DE KELLEY Y SUAVIDAD DE UN CONTINUO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

ALGEBRA ANA GUADALUPE AGUILAR MARTÍNEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. GERARDO ACOSTA GARCÍA

2002

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Sobre la propiedad de Kelley y suavidad de un continuo
realizado por Algebra Ana Guadalupe Aguilar Martínez

con número de cuenta 9510982-6, quién cubrió los créditos de la carrera de
Matemáticas.
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Gerardo Acosta García Gerardo Acosta García

Propietario Dr. Alejandro Illanes Mejía

Propietario Dr. Javier Páez Cárdenas

Suplente Dr. Sergio Macías Alvarez

Suplente M.en C. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla

Consejo Departamental de Matemáticas

M.en C. Jose Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A mis padres.

A Jose Luis.

Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar a mi director de Tesis, el Dr. Gerardo Acosta García, por dirigirme en este trabajo, y por su amistad. Gracias también por sus recomendaciones y hasta por sus regaños.

Muy especialmente, quiero agradecer al Dr. Alejandro Illanes Mejía, por las valiosas sugerencias y por todo el apoyo para la realización de este trabajo.

Gracias a mis sinodales por el tiempo invertido en este trabajo y por su ayuda para mejorarlo.

Agradezco a todos mis profesores de la carrera, por todos los conocimientos profesionales y no profesionales también. En especial, al Dr. Javier Páez, que ha sido para mi un ejemplo a seguir y un amigo y al M. en C. Jose Antonio Gómez Ortega. También a la Dra. Carmen Gómez Laveaga y la Dra. Bertha Tomé Arreola, gracias por su amistad.

Gracias mamá, por haberme enseñado a ser fuerte con tu ejemplo de vida, te mando todo mi amor hasta donde te encuentras y un día nos hemos de volver a ver. También a tí papá, sin tu amor, ejemplo y fortaleza en todas las etapas de mi vida, esto no hubiera sido posible.

Gracias a Jose Luis, mi esposo y mi mejor amigo, por compartir su vida conmigo y por estar aquí siempre, en las buenas y en las malas y en todo este camino que hemos recorrido juntos. Tu me das la fuerza. (Te amamos Pepito y yo.)

A mi familia: Jose Luis, mamá, papá, Guichis. Gracias por su amor incondicional. Soy afortunada en tenerlos.

Gracias a mis amigos del cubículo: Yesenia, Galo, Tonathiu, Miguel Angel,... Y a mis amigos Rolando, Tito, John y Mayra. Sin ustedes, a este trayecto le hubiera faltado color.

Gracias a todas las personas que olvidé mencionar y que me han enseñado lecciones de vida.

Quisiera agradecer al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por darme la beca de lugar para concluir mi tesis de Licenciatura y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica, el cual me brindó la oportunidad de una beca económica para la terminación de este trabajo.

Y gracias a mi Universidad, la UNAM, en la cual he pasado ya casi 8 años desde el bachillerato y en la cual, también he aprendido cosas que para mí tienen un valor incalculable.

Introducción.

El presente trabajo se encuentra situado en una rama de la Topología de Conjuntos llamada Teoría de Continuos. Un *continuo* es un espacio métrico X que a su vez es compacto y conexo. Los *hiperespacios* de X que estudiaremos son las familias

$$2^X = \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}$$

y

$$C(X) = \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\},$$

a los que se les da la llamada *métrica de Hausdorff.*

El estudio de los Hiperespacios aparece alrededor de 1900 con los trabajos de Hausdorff y Vietoris. La métrica de Hausdorff fué definida por Pompiu en 1905 y retomada por Hausdorff en 1906 en un contexto más general, que incluye a los hiperespacios de un continuo. Esta métrica aparece también en el famoso libro de Hausforff [23], publicado en 1914, en el cual se define por vez primera el concepto de topología usando vecindades. Recordemos que la noción de espacio métrico fue definida por Frechet en 1906.

Entre 1920 y 1930 se determinaron una buena cantidad de resultados con respecto a la estructura fundamental de los hiperespacios. En 1922, por ejemplo, Vietoris probó en [41] que 2^X es compacto y, en 1931, Borsuk y Mazurkiewicz probaron en [6] que 2^X y $C(X)$ son conexos por trayectorias. En 1942 apareció el artículo [30] de J. L. Keley, en el que se habla de una gran cantidad de tópicos de la Teoría de Hiperespacios. En dicho artículo se introduce, por primera vez, la noción de función de Whitney, considerada hoy en día como una de las herramientas más importantes en esta área. También en este artículo se establecen, por primera vez, las propiedades fundamentales de los continuos hereditariamente indescomponibles y se define una propiedad, bajo la cual los hiperespacios son contraíbles. Esta propiedad se conoce, hoy en día, como la *propiedad de Kelley*

La propiedad de Kelley ha resultado ser, por sí misma, de gran interés, en buena parte, debido a su belleza. En 1977, por ejemplo, aparece un artículo de R. W. Wardle [42] dedicado exclusivamente al estudio de dicha propiedad. En él, se establecen varios resultados que han sido importantes y objeto de estudio, en aras de encontrar generalizaciones a los mismos. Más adelante en el capítulo 3, presentamos una serie de resultados obtenidos por J. J. Charatonik en el año de 1983, que generalizan los de R. W. Wardle.

Otra propiedad importante es la de *suavidad.* Históricamente, dicha noción se definió para una clase de continuos llamados *abanicos* y, posteriormente, se extedió a la clase de los continuos llamados *dendroides.* Después G. R. Gordh Jr. la generalizó para la clase de continuos que contienen puntos de unicoherencia hereditaria y, finalmente, T. Maćkowiak la definió para cualquier continuo [35].

La intención de este trabajo es estudiar, tanto la propiedad de Kelley, como el concepto de suavidad como fue definido por T. Maćkowiak. Con respecto a la Propiedad de Kelley, en el capítulo 2, presentamos una serie de propiedades fundamentales de la misma, así como formas equivalentes de escribirla. También vemos su relación con algunos tipos de continuos y mostraremos una serie de funciones, definidas en términos de un continuo X, cuya continuidad equivale al hecho de que X posee la propiedad de Kelley.

En el capítulo 3 mostramos una serie de resultados que involucran la preservación puntual de la propiedad de Kelley. Dichos resultados se derivan del problema de encontrar una clasificación de las funciones continuas que preservan la propiedad de Kelley. En el capítulo 7 hacemos un estudio de la clase de los continuos tales que todos sus subcontinuos poseen la propiedad de Kelley.

En cuanto a la suavidad, seguimos básicamente el mismo modelo anterior. Primero, en el capítulo 4, presentamos una serie de propiedades fundamentales de la misma, así como formas equivalentes de escribir dicha propiedad. En este mismo capítulo vemos que, una serie de resultados dados en términos de la propiedad de Kelley, permanecen válidos en el contexto de la suavidad. Mostramos, incluso, una función definida en términos de un continuo X, cuya continuidad equivale al hecho de que X es suave. En el capítulo 5, estudiamos la preservación de la suavidad bajo funciones continuas.

En el capítulo 4 vemos, también, como la noción de suavidad se relaciona con la propiedad de Kelley. En el capítulo 6 mostramos que la suavidad de los hiperespacios del continuo X implica la propiedad de Kelley en X. También probamos que la suavidad del producto cartesiano $X \times Y$, de los continuos X y Y implica que tanto X como Y tienen la propiedad de Kelley.

Este trabajo es autocontenido en la medida de lo posible. Suponemos que el lector está familizarizado con los conceptos básicos de la Topología de Conjuntos, principalmente con los resultados fundamentales sobre espacios métricos, así como los de compacidad, conexidad y continuidad. En cuanto a los resultados básicos de la Teoría de Continuos, en el capítulo 1 presentamos una buena cantidad de ellos. En la mayoría de los casos no incluímos las demostraciones de los mismos, pero indicamos en dónde se puede encontrar una prueba de ellos.

La cantidad de artículos que se han escrito sobre la propiedad de Kelley, así como sobre la suavidad de un continuo, es tan amplia que es imposible abarcarlos todos en un trabajo como lo es una Tesis de Licenciatura. Sin embargo, en la bibliografía, se indican todos los artículos que se encontraron en los cuales se estudian dichas nociones, en algunos casos de manera importante y, en otros, como auxiliar para la prueba de otros resultados.

Quisiera resaltar que una buena parte de las ideas que se presentan en este trabajo, fueron sugeridas por mi asesor el Dr. Gerardo Acosta García y por el Dr. Alejandro Illanes Mejía.

Índice General

Capítulo 1

Nociones Fundamentales.

1.1 Introducción.

El presente trabajo está enmarcado en el área de la Topología de Conjuntos llamada Teoría de Continuos e Hiperespacios. En este capítulo describiremos los conceptos fundamentales para el desarrollo del mismo. Es preciso decir que algunos resultados que enunciaremos sin demostración, se encuentran probados en [37]. En cada caso daremos la referencia pertinente.

Definición 1.1. *Un* **continuo** *es un espacio métrico no degenerado, conexo y compacto.*

Mientras no se diga otra cosa, la letra X representará a un continuo con métrica d. Además, convenimos en llamar a un espacio *no degenerado* si tiene más de un punto. De otra manera, diremos que es *degenerado*.

Definición 1.2. *Un* **subcontinuo** *de X es un subconjunto no vacío, cerrado y conexo de X.*

Observemos que un subcontinuo puede ser degenerado, lo cual no sucede con los continuos. Ésta es la diferencia esencial entre estos dos conceptos.

1.2 Hiperespacios de un Continuo.

1.2.1 El Hiperespacio 2^X.

En Topología de Conjuntos entendemos que un *espacio* es un conjunto con una determinada topología. Además, es común llamar *hiperespacios* a aquellas familias de subconjuntos de un espacio dado, que comparten ciertas propiedades topológicas particulares. Es natural pensar que un hiperespacio posee a su vez una topología, que está expresada en términos de la topología del espacio dado.

Un hiperespacio que estudiaremos en este trabajo, y denotaremos por 2^X, es el de los subconjuntos cerrados y no vacíos de X. Así pues:

$$2^X = \{ A \subset X : A \text{ cerrado y no vacío} \}.$$

Es fácil ver que la familia 2^X tiene más de un elemento. A continuación veremos una manera de asignarle una topología a 2^X. Para esto, consideremos primero la siguiente definición.

Definición 1.3. *Sean $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Entonces, la* **ϵ-nube** *de A es el conjunto*

$$N(\epsilon, A) = \{ x \in X : \textit{existe } a \in A \textit{ tal que } d(a, x) < \epsilon \}.$$

Dados un espacio métrico Y, un punto $a \in Y$ y un número $\epsilon > 0$, denotaremos por $B_Y(\epsilon, a)$ a la bola abierta de radio ϵ con centro en a. Cuando el contexto sea lo suficientemente claro, denotaremos $B_Y(\epsilon, a)$ simplemente por $B(\epsilon, a)$. Si A es un subconjunto de Y, utilizamos la notación $\mathrm{cl}_Y(A)$, $\mathrm{int}_Y(A)$ y $\mathrm{fr}_Y(A)$, para referirnos a la cerradura, el interior y la frontera de A en Y, respectivamente.

En el siguiente teorema enunciamos una serie de propiedades elementales de las nubes sobre los elementos de 2^X. Por su simplicidad, la prueba del mismo se omite.

Teorema 1.4. *Sean $A, B, C \in 2^X$ y $\epsilon, \delta > 0$. Entonces:*

1. $N(\epsilon, A) = \bigcup_{a\in A} B(\epsilon, a)$;
2. *si* $\delta < \epsilon$, *entonces* $N(\delta, A) \subset N(\epsilon, A)$;
3. $N(\epsilon, A) \cup N(\delta, A) = N(\max\{\epsilon, \delta\}, A)$;
4. *si* $A \subset B$, *entonces* $N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, B)$;
5. $N(\epsilon, A) \cup N(\epsilon, B) = N(\epsilon, A \cup B)$;

6. si $A \subset N(\epsilon, C)$ y $C \subset N(\delta, B)$, entonces $A \subset N(\epsilon + \delta, B)$.

Notemos que si $A \in 2^X$ y $\epsilon > 0$ entonces, de la primera afirmación del teorema anterior, se tiene que el conjunto $N(\epsilon, A)$ es abierto en X. Observemos también que $A \subset N(\epsilon, A)$.

A continuación probamos una propiedad adicional de las nubes de los elementos en 2^X.

Teorema 1.5. *Sean $A \subset X$, $B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Si $A \subset N(\epsilon, B)$, entonces $\mathrm{cl}_X(A) \subset N(2\epsilon, B)$.*

Demostración. Si $x \in \mathrm{cl}_X(A)$, entonces $B(\epsilon, x) \cap A \neq \emptyset$. Por tanto, existe $a \in B(\epsilon, x) \cap A$. Como $A \subset N(\epsilon, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \epsilon$. Luego

$$d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

De esta manera $x \in N(2\epsilon, B)$. ■

Corolario 1.6. *Sean $A \subset X$, $a \in X$ y $\epsilon > 0$. Si $A \subset B(\epsilon, a)$, entonces $\mathrm{cl}_X(A) \subset B(2\epsilon, a)$.*

Demostración. Notemos que $B(\epsilon, a) = N(\epsilon, \{a\})$, por la primera propiedad del Teorema 1.4. Entonces $A \subset N(\epsilon, \{a\})$ y, por el teorema anterior, $\mathrm{cl}_X(A) \subset N(2\epsilon, \{a\}) = B(2\epsilon, a)$. ■

Una manera de asignar una métrica en 2^X se obtiene por medio de la función $H: 2^X \times 2^X \to [0, \infty)$ definida, para A y $B \in 2^X$, como

$$H(A, B) = \inf\{\, \epsilon > 0 : A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}.$$

En el siguiente teorema mostramos que H es una métrica en 2^X. Además, indicamos una propiedad adicional de H, que se utilizará con bastante frecuencia en este trabajo, por lo que no será necesario citar siquiera dicho resultado.

Teorema 1.7. *La función H es una métrica para 2^X. Más aún, si $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$, entonces $H(A, B) < \epsilon$ si y sólo si $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.*

Demostración. a) Veamos que H está bien definida. Sean $A, B \in 2^X$. Como $A \neq \emptyset$, podemos elegir $a_0 \in A$. Como B es cerrado en el compacto X, B también es un compacto. Por lo tanto, B es acotado, de modo que existen $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ tales que $B \subset B(\delta, x_0)$.

Sea $\epsilon = d(a_0, x_0) + \delta$. Notemos que $\epsilon > 0$. Además, $B \subset B(\epsilon, a_0) \subset N(\epsilon, A)$ pues dado $b \in B$, se tiene que:

$$d(a_0, b) \leq d(a_0, x_0) + d(x_0, b) < d(a_0, x_0) + \delta = \epsilon.$$

Hemos demostrado que existe $\epsilon > 0$ tal que $B \subset N(\epsilon, A)$. De manera similar, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $A \subset N(\epsilon_1, B)$. Sea $\epsilon_2 = \max\{\epsilon_1, \epsilon\}$. Entonces, $B \subset N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon_2, A)$ y $A \subset N(\epsilon_2, B)$. Por lo tanto, el conjunto con el cual definimos $H(A, B)$ es no vacío y, como está acotado inferiormente por el número 0, H está bien definida.

b) $H(A, B) \geq 0$, pues es el ínfimo de un conjunto de números mayores que 0.

c) $H(A, B) = H(B, A)$ pues, en la definición de H, los conjuntos A y B juegan papeles simétricos.

d) $H(A, A) = 0$ pues, por definición, tenemos que

$$H(A, A) = \inf\{\epsilon > 0 \colon A \subset N(\epsilon, A)\} = \inf(0, \infty) = 0.$$

e) Si $H(A, B) = 0$, entonces $A = B$.

Para ver e), supongamos que $H(A, B) = 0$. Demostremos primero que $B \subset A$. Sea $b \in B$. Como A es cerrado basta probar que $b \in \operatorname{cl}_X(A)$. Para obtener lo anterior, tomemos $\delta > 0$ y veamos que $B(\delta, b) \cap A \neq \emptyset$.

Como $\delta > 0$ y $0 = \inf\{\epsilon > 0 \colon A \subset N(\epsilon, B) \text{ y } B \subset N(\epsilon, A)\}$, tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < \delta$ y $B \subset N(\epsilon, A) \subset N(\delta, A)$. De modo que $b \in N(\delta, A)$. Entonces, existe $a \in A$ tal que $d(a, b) < \delta$. Esto nos muestra que $B(\delta, b) \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, $b \in \operatorname{cl}_X(A) = A$. Así, $B \subset A$. De manera similar se demuestra que $A \subset B$.

f) $H(A, B) \leq H(A, C) + H(C, B)$.

Para ver f), aplicamos propiedades de ínfimos, así como la parte 6 del Teorema 1.4. De esta manera:

$$\begin{aligned}
H(A,C)+H(B,C) &= \inf\{\,\epsilon>0\colon A\subset N(\epsilon,C) \text{ y } C\subset N(\epsilon,A)\,\}\\
&+ \inf\{\,\delta>0\colon C\subset N(\delta,B) \text{ y } B\subset N(\delta,C)\,\}\\
&= \inf\{\,\epsilon+\delta\colon \epsilon,\delta>0, A\subset N(\epsilon,C), C\subset N(\epsilon,A),\\
&\quad C\subset N(\delta,B) \text{ y } B\subset N(\delta,C)\,\}\\
&\geq \inf\{\,\epsilon+\delta>0\colon A\subset N(\epsilon+\delta,B) \text{ y } B\subset N(\epsilon+\delta,A)\,\}\\
&= \inf\{\,\lambda>0\colon A\subset N(\lambda,B) \text{ y } B\subset N(\lambda,A)\,\}\\
&= H(A,B).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, H es una métrica en 2^X.

Para ver la segunda parte del enunciado, sean $A, B \in 2^X$ y $\epsilon > 0$. Supongamos que $H(A,B) < \epsilon$. Como $H(A,B) = \inf\{\,\eta > 0\colon A \subset N(\eta, B) \text{ y } B \subset N(\eta, A)\,\}$, existe $0 < \eta < \epsilon$ tal que $A \subset N(\eta, B)$ y $B \subset N(\eta, A)$. Por el Teorema 1.4, inciso 2, tenemos que $N(\eta, B) \subset N(\epsilon, B)$ y $N(\eta, A) \subset N(\epsilon, A)$. Por lo tanto, $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$.

Finalmente, supongamos que $A \subset N(\epsilon, B)$ y $B \subset N(\epsilon, A)$. Veamos que existe $0 < \delta' < \epsilon$ tal que $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$. Primero observemos que:

$$\mathcal{U} = \{\, N(\delta, B) : 0 < \delta < \epsilon \,\}$$

es una familia de abiertos en X que, a su vez, constituye una cubierta abierta de A. Para ver esto último, sea $a \in A$. Como $A \subset N(\epsilon, B)$, existe $b \in B$ tal que $d(a,b) < \epsilon$. Sea $0 < \delta < \epsilon$ tal que $d(a,b) < \delta$. Entonces $a \in N(\delta, B)$. Esto muestra que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de A. Ahora bien, como A es compacto, existen $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ con $0 < \delta_i < \epsilon$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} N(\delta_i, B)$. Sea $\delta_0 = \max\{\,\delta_1, \ldots, \delta_n\,\}$. Notemos que, para cada $i \in \{\,1, 2, \ldots, n\,\}$, se tiene que $N(\delta_i, B) \subset N(\delta_0, B)$, por lo cual $A \subset N(\delta_0, B)$. Además $0 < \delta_0 < \epsilon$ y de, este modo, hemos probado que existe $0 < \delta_0 < \epsilon$ tal que $A \subset N(\delta_0, B)$. De la misma manera, existe $0 < \epsilon_0 < \epsilon$ tal que $B \subset N(\epsilon_0, A)$. Entonces si tomamos $\delta' = \max\{\delta_0, \epsilon_0\}$, sucede que $0 < \delta' < \epsilon$, $A \subset N(\delta', B)$ y $B \subset N(\delta', A)$. Luego, por la definición de H, tenemos que $H(A,B) \leq \delta_0 < \epsilon$. Esto termina la prueba de este teorema. ■

A la función H se le llama la *métrica de Hausdorff*. Observemos que H está definida en términos de la métrica d de X. Deberíamos entonces escribir H_d, en lugar de H. A menos que entren en juego dos métricas, o que el contexto no sea lo suficientemente claro, la métrica de Hausdorff se denotará simplemente por H. Las mismas consideraciones las haremos con la forma de denotar las nubes de elementos en 2^X. En [37, Teorema 4.6] se prueba que la topología γ en 2^X, inducida por la métrica de Hausdorff, es la misma si se tienen métricas equivalentes de X.

Cabe mencionar que 2^X es compacto, lo cual se demuestra en [38, Teorema 0.8]. Más adelante se probará que 2^X es conexo por trayectorias (ver Teorema 1.61). Entonces, 2^X es un continuo y podemos hablar del hiperespacio de 2^X, el cual se define como:

$$2^{2^X} = \{\, \mathcal{A} \subset 2^X : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío} \,\}$$

y resulta ser un continuo bajo la métrica de Hausdorff inducida por H, que denotamos por H_2, y definimos de manera similar a H. Así pues, para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in 2^{2^X}$:

$$H_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\{\, \epsilon > 0 \colon \mathcal{A} \subset \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{B}) \text{ y } \mathcal{B} \subset \mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{A}) \,\},$$

donde:

$$\mathcal{N}(\epsilon, \mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} B_{2^X}(\epsilon, A) \quad \text{y} \quad B_{2^X}(\epsilon, A) = \{\, B \in 2^X : H(A, B) < \epsilon \,\}.$$

1.2.2 El Hiperespacio $C(X)$.

Otro hiperespacio de X que consideraremos en este trabajo, es el de los subcontinuos de X. Dicho hiperespacio que se denotará por $C(X)$, se define como:

$$C(X) = \{\, A \in 2^X : A \text{ es conexo} \,\}.$$

Notemos que $X \in C(X)$ y que la restricción a $C(X)$ de la métrica de Hausdorff definida para 2^X, hace de $C(X)$ un espacio métrico. En [38, Teorema 0.8] se puede ver la prueba de que $C(X)$ es compacto. Más adelante probaremos que $C(X)$ es conexo por trayectorias (ver Teorema 1.60). Luego $C(X)$ es un continuo y podemos hablar de sus hiperespacios, los cuales son:

$$2^{C(X)} = \{ \mathcal{A} \subset C(X) : \mathcal{A} \text{ es cerrado y no vacío} \},$$

y

$$C^2(X) = C(C(X)) = \{ \mathcal{A} \in 2^{C(X)} : \mathcal{A} \text{ es conexo} \}.$$

Y el hiperespacio de 2^X:

$$C(2^X) = \{ \mathcal{A} \in 2^{2^X} : \mathcal{A} \text{ es conexo} \}.$$

1.3 Convergencia en 2^X.

Dado un espacio métrico Y, la notación $(y_n)_n \subset Y$ indicará que $(y_n)_n$ es una sucesión en Y. En vista de que 2^X es un espacio métrico, podemos hablar de la convergencia de una sucesión en 2^X, utilizando la definición usual.

Definición 1.8. *La sucesión $(A_n)_n \subset 2^X$* **converge** *a un elemento $A \in 2^X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(A_n, A) < \epsilon$ para cada $n \geq N$.*

Si $(A_n)_n$ converge a A escribimos $A_n \to A$. Utilizando la noción anterior es sencillo demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1.9. *Sean $(A_n)_n, (B_n)_n \subset 2^X$ tales que $A_n \to A$ y $B_n \to B$ para algunos $A, B \in 2^X$. Entonces $A_n \cup B_n \to A \cup B$.*

Notemos que, en la definición anterior, estamos pensando que los elementos de la sucesión $(A_n)_n$ son puntos de 2^X. Otra manera de hablar de convergencia en 2^X, se obtiene pensando que cada elemento de la sucesión $(A_n)_n$ es un subconjunto de X. A continuación mostraremos la forma de hacer esto.

Definición 1.10. *Sea $(A_n)_n \subset 2^X$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\liminf A_n &= \{ x \in X : \text{ para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \\
&\qquad B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ si } n \geq N \} \quad \text{y} \\
\limsup A_n &= \{ x \in X : \text{ para cada } \epsilon > 0, \text{ existe } J \subset \mathbb{N} \text{ infinito,} \\
&\qquad \text{tal que } B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset \text{ para cada } n \in J \}
\end{aligned}$$

son el **límite inferior** *y el* **límite superior** *de $(A_n)_n$, respectivamente.*

Ahora enunciamos un teorema que habla acerca de las propiedades de los límites inferior y superior. Su prueba puede verse en [38, Teorema 0.6].

Teorema 1.11. *Dada* $(A_n)_n \subset 2^X$ *se tiene que:*

1. $\liminf A_n \subset \limsup A_n$;

2. $\liminf A_n$ *y* $\limsup A_n$ *son subconjuntos cerrados en* X;

3. $\limsup A_n \neq \emptyset$;

4. si $(A_{n_k})_k$ *es una subsucesión de* $(A_n)_n$, *entonces :*

   4.1. $\liminf A_n \subset \liminf A_{n_k}$,

   4.2. $\limsup A_{n_k} \subset \limsup A_n$.

A continuación presentamos la noción de convergencia en 2^X, en términos de la Definición 1.10.

Definición 1.12. *La sucesión* $(A_n)_n \subset 2^X$ **converge** *a un elemento* $A \in 2^X$, *si:*

$$\liminf A_n = A = \limsup A_n.$$

Cuando $(A_n)_n$ converge a A, de acuerdo con la definición anterior, escribimos $\lim A_n = A$. En [37, Teorema 4.11] se prueba que las nociones de convergencia dadas en las definiciones 1.8 y 1.12 son equivalentes.

Teorema 1.13. *Sean* $(A_n)_n \subset 2^X$ *y* $A \in 2^X$. *Entonces* $A_n \to A$ *si y sólo si* $\lim A_n = A$.

De esta manera, y este trabajo no es la excepción, podemos usar a conveniencia las nociones anteriores de convergencia. También, en este trabajo será conveniente utilizar una noción equivalente a los límites superior e inferior en términos de sucesiones. Antes de presentar dicha equivalencia, recordemos que si (Y, e) es un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subset Y$ y $y \in Y$ entonces la distancia del punto y al conjunto A está definida como

$$D(y, A) = \inf\{\, e(y, a) : a \in A \,\}.$$

Si el conjunto A es compacto, entonces:

$$D(y, A) = \min\{\, e(y, a) : a \in A \,\}$$

por lo que existe $a_0 \in A$ tal que $D(y, A) = d(y, a_0)$. Este resultado se utilizará con bastante frecuencia en el capítulo 4. En particular también se usa en la demostración del siguiente teorema.

Teorema 1.14. *Si* $(A_n)_n \subset 2^X$, *entonces:*

1. $x \in \liminf A_n$ *si y sólo si existe una sucesión* $(x_n)_n$ *de* X *tal que* $x_n \to x$ *y* $x_n \in A_n$, *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

2. $x \in \limsup A_n$ *si y sólo si existen una sucesión de números naturales* $n_1 < n_2 < \cdots$ *y puntos* $x_{n_k} \in A_{n_k}$, *para toda* $k \in \mathbb{N}$, *tales que* $x_{n_k} \to x$.

Demostración. Primero veamos el inciso 1.

($\Rightarrow$) Sea $x \in \liminf A_n$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in A_n$ de manera que

$$d(x, x_n) = D(x, A_n)$$

Vamos a demostrar que $x_n \to x$. Tomemos $\epsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Entonces, para cada $n \geq N$, podemos elegir $a_n \in B(\epsilon, x) \cap A_n$. Por tanto $d(x, a_n) < \epsilon$. Por la forma en que tomamos a x_n, sabemos también que $d(x, x_n) \leq d(x, a_n)$. Así podemos concluir que $d(x, x_n) < \epsilon$ para todo $n \geq N$. Luego $x_n \to x$.

($\Leftarrow$) Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$ y $x_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Veremos que $x \in \liminf A_n$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(\epsilon, x)$ para toda $n \geq N$. Por tanto $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para toda $n \geq N$, lo cual nos dice que $x \in \liminf A_n$.

Ahora veamos el inciso 2.

($\Rightarrow$) Sea $x \in \limsup A_n$. Sabemos que para todo $\epsilon > 0$ existe un subconjunto infinito J de $\mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, x) \cap A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in J$. En particular, cuando $\epsilon = 1$, existe $J_1 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $B(1, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J_1$. Por lo tanto, para $n_1 \in J_1$, podemos elegir $x_{n_1} \in B(1, x) \cap A_{n_1}$. También, para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $J_2 \subset \mathbb{N}$ infinito tal que $B(\frac{1}{2}, x) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \in J_2$. Como J_2 es infinito, existe $n_2 \in J_2$ tal que $n_2 > n_1$. Además podemos elegir $x_{n_2} \in B(\frac{1}{2}, x) \cap A_{n_2}$. Procediendo de esta manera, construímos una sucesión de números naturales $(n_k)_k$ tal que $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in B(\frac{1}{k}, x) \cap A_{n_k}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Notemos que $d(x, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ y, como $\frac{1}{k} \to 0$, podemos concluir que $x_{n_k} \to x$.

($\Leftarrow$) Como existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ y puntos $x_{n_k} \in A_{n_k}$, para toda $k \in \mathbb{N}$, tales que $x_{n_k} \to x$, si tomamos $\epsilon > 0$ tenemos que existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_k} \in B(\epsilon, x)$ para todo $k \geq K$. Esto implica que $B(\epsilon, x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ para todo $k \in \{K, K+1, K+2, \ldots\}$, así que $x \in \limsup A_n$. ■

En el siguiente teorema mostramos que el límite de una sucesión en 2^X se preserva bajo contenciones. Notemos el uso del Teorema 1.13.

Teorema 1.15. *Sean $A, B \in 2^X$ y $(A_n)_n, (B_n)_n \subset 2^X$ tales que $A_n \to A$, $B_n \to B$ y $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $A \subset B$.*

Demostración. Sean $\epsilon > 0$ y $a \in A$. Como $\liminf A_n = A$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, a) \cap A_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Además, por hipótesis, $A_n \subset B_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $B(\epsilon, a) \cap B_n \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Por tanto $a \in \liminf B_n = B$. ■

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.16. *Sean $(A_n)_n, (\{a_n\})_n \subset 2^X$ tales que $A_n \to A$ y $\{a_n\} \to \{a\}$ para algunos $A \in 2^X$ y $a \in X$. Si $a_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a \in A$.*

Teorema 1.17. *Sean $A, B \in 2^X$ y $(A_n)_n, (B_n)_n \subset 2^X$ tales que $A_n \to A$, $B_n \to B$ y $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostración. Como cada conjunto $A_n \cap B_n$ es no vacío, dada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un punto $a_n \in A_n \cap B_n$. Como $A_n \cap B_n \subset X$ el cual es compacto, existe una subsucesión (a_{n_k}) de $(a_n)_n$ convergente a algún punto $a \in X$. Por el Teorema 1.14, podemos decir que $a \in \limsup A_n = A$ y también que $a \in \limsup B_n = B$. Por lo tanto, $a \in A \cap B$. ■

Combinando los Teoremas 1.15 y 1.17 tenemos el siguiente resultado, el cual nos indica cómo, a partir de un abierto o de un cerrado de X, podemos construir abiertos o cerrados en 2^X, según sea el caso.

Teorema 1.18. *Dado $U \subset X$, los conjuntos*

$$\mathcal{H} = \{ A \in 2^X : A \subset U \} \qquad y \qquad \mathcal{K} = \{ A \in 2^X : A \cap U \neq \emptyset \}$$

son abiertos o bien cerrados en 2^X si U es abierto o cerrado en X, respectivamente.

Demostración. Supongamos que U es cerrado y veamos que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ también lo son. Supongamos que $(B_n)_n \subset 2^X$ es la sucesión constante U. Para ver que $\mathcal{H}$ es cerrado, sea $A \in \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{H})$. Entonces, $A \in 2^X$ y existe $(A_n)_n \subset \mathcal{H}$ tal que $A_n \to A$. Como $A_n \in \mathcal{H}$, resulta que $A_n \subset U$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A_n \to A$, $B_n \to U$ y $A_n \subset B_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, así que, por el Teorema 1.15, $A \subset U$. Luego $A \in \mathcal{H}$, lo cual prueba que $\mathcal{H}$ es cerrado en 2^X.

Ahora veamos que $\mathcal{K} = \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{K})$. Sea $A \in \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{K})$. Entonces $A \in 2^X$ y existe $(A_n)_n \subset \mathcal{K}$ tal que $A_n \to A$. Entonces $A_n \to A$, $B_n \to U$ y $A_n \cap B_n \neq \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, de acuerdo con el Teorema 1.17, $A \cap U \neq \emptyset$. Así $A \in \mathcal{K}$, lo cual prueba que $\mathcal{K}$ es cerrado en 2^X.

Si suponemos que U es abierto en X, entonces

$$2^X - \mathcal{H} = \{ A \in 2^X : A \not\subset U \} = \{ A \in 2^X : A \cap (X - U) \neq \emptyset \}.$$

Notemos que $X - U$ es cerrado. Así que, por lo que acabamos de probar, $2^X - \mathcal{H}$ es cerrado en 2^X. Luego $\mathcal{H}$ es abierto en 2^X. De forma análoga se prueba que

$$2^X - \mathcal{K} = \{ A \in 2^X : A \cap U = \emptyset \} = \{ A \in 2^X : A \subset X - U \}$$

es cerrado en 2^X. Luego $\mathcal{K}$ es abierto en 2^X y la prueba termina. ■

Terminamos esta sección mostrando una sencilla aplicación del resultado anterior. Notemos el uso de la segunda parte del Teorema 1.7.

Teorema 1.19. *Dado $A \in 2^X$ tal que $A \subset U$ con U abierto en X, existe $\epsilon > 0$ tal que $N(\epsilon, A) \subset U$.*

Demostración. Consideremos, la familia $\mathcal{H} = \{ K \in 2^X : K \subset U \}$. Podemos observar que $A \in \mathcal{H}$ y que $\mathcal{H}$ es abierto en 2^X, según el teorema anterior. Entonces, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(\epsilon, A) \subset \mathcal{H}$. Mostraremos que $N(\epsilon, A) \subset U$. Para esto, sea $a \in N(\epsilon, A)$ y consideremos el conjunto $B = A \cup \{a\}$. Vamos a probar que $B \in B(\epsilon, A)$. En efecto, si $b \in B$ entonces $b = a$ o bien $b \in A$. En cualquier situación resulta que $b \in N(\epsilon, A)$. Esto prueba que $B \subset N(\epsilon, A)$. Además $A \subset N(\epsilon, A) \subset N(\epsilon, B)$, pues $A \subset B$. Por tanto, $B \in B(\epsilon, A)$ y entonces $B \in \mathcal{H}$. Esto implica que $B \subset U$, de donde $a \in U$. ■

1.4 La Función Unión.

En esta sección definiremos la función unión, la cual nos será útil más adelante, especialmente en el capítulo 6. Para definir esta función, supongamos primero que $\mathcal{L} \in 2^{2^X}$ y consideremos el conjunto

$$L = \bigcup \{ K : K \in \mathcal{L} \}.$$

Es claro que $K \subset L$ para cada $K \in \mathcal{L}$, así que L es un subconjunto no vacío de X. En [1, Teorema 1.18] se prueba que L es un subconjunto cerrado de X. Por tanto, $L \in 2^X$. Esto nos permite definir una función $\sigma : 2^{2^X} \to 2^X$ en donde, para $\mathcal{L} \in 2^{2^X}$,

$$\sigma(\mathcal{L}) = \bigcup \{ K : K \in \mathcal{L} \}.$$

También en [1, Teorema 1.18] se prueba que la función σ es continua.

Definición 1.20. *Decimos que σ es la* **función unión** *en* 2^{2^X}.

A continuación presentamos dos propiedades fundamentales de la función unión en 2^{2^X}.

Teorema 1.21. *La función unión σ es suprayectiva.*

Demostración. Dada $A \in 2^X$ consideremos la familia $\mathcal{A} = \{A\}$. Claramente $\sigma(\mathcal{A}) = A$. ■

Teorema 1.22. *Si $\mathcal{L} \in C(2^X)$ y $\mathcal{L} \cap C(X) \neq \emptyset$, entonces $\sigma(\mathcal{L}) \in C(X)$.*

Demostración. Sea $\mathcal{L}$ con las características mencionadas y supongamos que $\sigma(\mathcal{L}) \notin C(X)$. Entonces, $\sigma(\mathcal{L})$ no es conexo, por lo cual existen $M, K \in 2^X$ tales que $M \cup K = \sigma(\mathcal{L})$ y $M \cap K = \emptyset$. Tomemos un elemento $B \in \mathcal{L} \cap C(X)$. Como B es un subconjunto conexo de la unión de los conjuntos ajenos M y K, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B \subset M$. Consideremos ahora las familias:

$$\mathcal{H} = \{ A \in \mathcal{L} : A \subset M \} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{K} = \{ A \in \mathcal{L} : A \cap K \neq \emptyset \}.$$

Por el Teorema 1.18, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son cerrados en 2^X. Además, $\mathcal{H} \neq \emptyset$ pues tiene a B. Tomemos un elemento $b \in K$. Como $K \subset \sigma(\mathcal{L})$, existe $A \in \mathcal{L}$ tal que $b \in A$. Entonces $A \cap K \neq \emptyset$ y, por consiguiente, $A \in \mathcal{K}$. Esto prueba que $\mathcal{K} \neq \emptyset$. Si existe un elemento A en $\mathcal{H} \cap \mathcal{K}$, entonces, como $A \cap K \neq \emptyset$, podemos tomar un punto x en dicha intersección. Ahora bien, $A \subset M$, así que $x \in M$. Luego, $x \in M \cap K$. Esto contradice el hecho de que M y K son ajenos. Por tanto, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ son ajenos.

Notemos que $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} = \mathcal{L}$ ya que, por definición $\mathcal{H} \cup \mathcal{K} \subset \mathcal{L}$ y, si tomamos $A \in \mathcal{L}$ y $A \in \mathcal{H}$, entonces $A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Si $A \notin \mathcal{H}$, entonces $A \not\subset M$. Como $A \subset \sigma(\mathcal{L}) = M \cup K$ resulta que $A \cap K \neq \emptyset$. Luego $A \in \mathcal{K}$ y, por lo tanto, $A \in \mathcal{H} \cup \mathcal{K}$. Esto muestra que $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ forman una separación de $\mathcal{L}$, lo cual es una contradicción. De esta manera, $\sigma(\mathcal{L}) \in C(X)$. ■

De acuerdo con el resultado anterior, si $\mathcal{L} \in C^2(X)$, entonces $\sigma(\mathcal{L}) \in C(X)$. Esto muestra que $\sigma_{|C^2(X)} : C^2(X) \to C(X)$ está bien definida. A dicha función se le conoce como la **función unión en $C^2(X)$**.

1.5 Elementos de Continuidad.

En la presente sección daremos algunos resultados de Continuidad y Topología de Conjuntos los cuales utilizaremos durante todo este trabajo y que, aunque bien conocidos, es bueno mencionar y tener presentes. Además, introduciremos el concepto de semicontinuidad superior e inferior. A continuación presentamos dos resultados sobre funciones continuas.

Teorema 1.23. *Supongamos que X y Y son espacios métricos y que Y es compacto. Sea $f : X \to Y$ una función. Entonces, f es continua en $a \in X$ si* *y sólo si para toda* $(a_n)_n \subset X$ *tal que* $a_n \longrightarrow a$ *y* $f(a_n) \longrightarrow y$ *para algún punto* $y \in Y$, *se tiene que* $y = f(a)$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $(a_n)_n$ una sucesión en X tal que $a_n \to a$ y $f(a_n) \to y$ para algún punto $y \in Y$. Como f es continua en a, tenemos que $f(a_n) \to f(a)$. Por lo tanto $f(a) = y$.

($\Leftarrow$) Supongamos, por el contrario, que f no es continua en $a \in X$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe $b \in B(\delta, a)$ tal que $f(b) \notin B(\epsilon, f(a))$. Ahora, si tomamos $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existe $b_n \in B(\frac{1}{n}, a)$ tal que $f(b_n) \notin B(\epsilon, f(a))$. Ya que $(f(b_n))_n$ es una sucesión en Y, que es compacto, existe una subsucesión $(b_{n_k})_k$ de $(b_n)_n$ tal que $f(b_{n_k}) \longrightarrow y$ para algún $y \in Y$. Ahora bien, por la forma en que construímos la sucesión $(b_n)_n$ tenemos que $b_{n_k} \longrightarrow a$. Entonces, por hipótesis, $y = f(a)$. Pero entonces $f(b_{n_k}) \longrightarrow f(a)$ así que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(b_{n_k}) \in B(\epsilon, f(a))$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto f es continua en a. ■

Teorema 1.24. *Supongamos que* X *y* Y *son espacios métricos y que* Y *es compacto. Sea* $f: X \to Y$ *una función. Entonces,* f *es continua en* $a \in X$ *si para toda* $(a_n)_n \subset X$ *tal que* $a_n \longrightarrow a$ *existe una subsucesión* $(a_{n_k})_k$ *de* $(a_n)_n$ *tal que* $f(a_{n_k}) \to f(a)$.

Demostración. Supongamos, por el contrario, que f no es continua en a. Sea e la métrica de Y. Notemos que existe $\epsilon > 0$ tal que, para $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, podemos elegir un punto $b_n \in B(\frac{1}{n}, a)$ tal que $e(f(a), f(b_n)) \geq \epsilon$. Como $b_n \longrightarrow a$, por hipótesis, existe una subsucesión $(b_{n_k})_k$ de $(b_n)_n$ tal que $f(b_{n_k}) \longrightarrow f(a)$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $e(f(a), f(b_{n_k})) < \epsilon$ para todo $k \geq N$, lo cual contradice lo que habíamos supuesto. Esto prueba que f es continua en a. ■

Definición 1.25. *Sea* $f: X \to Y$ *una función entre los espacios métricos* (X, d) *y* (Y, e). *Se dice que* f **es uniformemente continua** *si para cada* $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $x, y \in X$ *y* $d(x, y) < \delta$, *entonces* $e(f(x), f(y)) < \epsilon$.

La prueba del siguiente resultado se encuentra en [20, Teorema 3.A.17].

Teorema 1.26. *Si* f *es una función continua de un espacio métrico y compacto* A, *a un espacio métrico* B, *entonces* f *es uniformemente continua.*

El resultado anterior tiene como consecuencia el hecho de que toda función continua, definida entre continuos, es uniformemente continua. Por tanto, para dicho tipo de funciones, las nociones de continuidad y continuidad uniforme son equivalentes. En el presente trabajo utilizaremos con frecuencia este resultado, sin dar siquiera la referencia al teorema anterior.

A continuación diremos cómo, a partir de dos sucesiones en un espacio métrico y compacto, podemos encontrar dos subsucesiones convergentes de éstas, que posean el mismo conjunto de subíndices.

Teorema 1.27. *Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ dos sucesiones en el espacio métrico y compacto X. Entonces existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ y puntos $a, b \in X$ tales que $a_{n_k} \to a$ y $b_{n_k} \to b$.*

Demostración. Como X es compacto, existe una subsucesion $(a_{n_k})_k$ de $(a_n)_n$ tal que $a_{n_k} \to a$ para algún $a \in X$. Ahora bien, para la sucesión $(b_{n_k})_k$ en el compacto X, existe a su vez una subsucesión $(b_{n_{k_l}})_l$ tal que $b_{n_{k_l}} \to b$ para algún $b \in X$. Hemos encontrado una sucesión de números naturales $n_{k_1} < n_{k_2} < n_{k_3} < \cdots$ y puntos $a, b \in X$ tales que $a_{n_{k_l}} \to a$ y $b_{n_{k_l}} \to b$. ■

En el resto de la sección supondremos que X y Y son continuos con métricas d y e, respectivamente.

Definición 1.28. *Decimos que una función $f\colon X \to 2^Y$ es*

1. **semicontinua inferiormente** *($\underline{SC}$) en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de x_0 tal que $f(x_0) \subset N(\epsilon, f(x))$ para todo $x \in U$;*
2. **semicontinua superiormente** *($\overline{SC}$) en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad U de x_0 tal que $f(x) \subset N(\epsilon, f(x_0))$ para todo $x \in U$.*

Diremos que $f\colon X \to 2^Y$ es $\underline{SC}$ (respectivamente, $\overline{SC}$) si lo es en cada punto de X.

Teorema 1.29. *Una función $f\colon X \to 2^Y$ es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si f es $\underline{SC}$ y $\overline{SC}$ en x_0.*

Demostración. Esta demostración es inmediata, ya que f es $\underline{SC}$ y $\overline{SC}$ en x_0 si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $x \in B(\delta, x_0)$ se tiene que $f(x) \subset N(\epsilon, f(x_0))$ y $f(x_0) \subset N(\epsilon, f(x))$, de donde $H(f(x), f(x_0)) < \epsilon$. ■

La prueba del siguiente teorema se sigue directamente de las respectivas definiciones.

Teorema 1.30. *Una función* $f: X \to 2^Y$ *es*

1. $\underline{SC}$ *en* $x_0 \in X$ *si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in B(\delta, x_0)$ *y todo* $y \in f(x_0)$ *existe* $z \in f(x)$ *tal que* $e(y, z) < \epsilon$.
2. $\overline{SC}$ *en* $x_0 \in X$ *si y sólo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $x \in B(\delta, x_0)$ *y todo* $z \in f(x)$ *existe* $y \in f(x_0)$ *tal que* $e(y, z) < \epsilon$.

A continuación mostramos otra equivalencia de la semicontinuidad en términos de los límites superior e inferior.

Teorema 1.31. *Sea* $f: X \to 2^Y$. *Entonces*

1. f *es* $\underline{SC}$ *en* $x_0 \in X$ *si y sólo si* $f(x_0) \subset \liminf f(x_n)$ *para toda sucesión* $(x_n)_n$ *en* X *que converge a* x_0.
2. f *es* $\overline{SC}$ *en* $x_0 \in X$ *si y sólo si* $\limsup f(x_n) \subset f(x_0)$ *para toda sucesión* $(x_n)_n$ *en* X *que converge a* x_0.

Demostración. Probaremos sólo 1, en vista de que la prueba de 2 es similar.

($\Rightarrow$) Supongamos que f es $\underline{SC}$ en $x_0 \in X$ y tomemos $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x_0$. Probaremos que dados $z \in f(x_0)$ y $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B(\epsilon, z) \cap f(x_n) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Por la semicontinuidad inferior de f sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0) \subset N(\epsilon, f(x))$ para toda $x \in B(\delta, x_0)$. Además, ya que $(x_n)_n$ converge a x_0, tenemos que para esta δ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(\delta, x_0)$ para cada $n \geq N$. Por tanto $f(x_0) \subset N(\epsilon, f(x_n))$ para todo $n \geq N$, y podemos afirmar que $z \in N(\epsilon, f(x_n))$ para cada $n \geq N$. Por lo anterior, existe $y_n \in f(x_n)$ tal que $y_n \in B(\epsilon, z)$ y concluimos que $B(\epsilon, z) \cap f(x_n) \neq \emptyset$ para cada $n \geq N$. Por tanto $z \in \liminf f(x_n)$.

($\Leftarrow$) Supongamos, por el contrario, que f no es $\underline{SC}$ en $x_0 \in X$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $x \in B(\delta, x_0)$ tal que $f(x_0) \not\subset N(\epsilon, f(x))$. Entonces cuando $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in B(\frac{1}{n}, x_0)$ tal que $f(x_0) \not\subset N(\epsilon, f(x_n))$. Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir un punto $z_n \in f(x_0) - N(\epsilon, f(x_n))$. También, por la compacidad de $f(x_0)$, existe una subsucesión $(z_{n_k})_k$ de $(z_n)_n$ que converge a algún punto $z_0 \in f(x_0)$.

Por construcción $x_{n_k} \to x_0$. Luego $f(x_0) \subset \liminf f(x_{n_k})$, por lo cual $z_0 \in \liminf f(x_{n_k})$. De esta manera, para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $B(\frac{\epsilon}{2}, z_0) \cap f(x_{n_k}) \neq \emptyset$ para toda $k \geq N_1$. Como $z_{n_k} \to z_0$, para $\frac{\epsilon}{2}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_k} \in B(\frac{\epsilon}{2}, z_0)$ para toda $k \geq N_2$. Sean $N = \max\{N_1, N_2\}$ y $m \geq N$. Entonces existe $y \in B(\frac{\epsilon}{2}, z_0) \cap f(x_{n_m})$ y además $e(z_0, z_{n_m}) < \frac{\epsilon}{2}$, de donde

$$e(z_{n_m}, y) \leq e(z_{n_m}, z_0) + e(z_0, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Por tanto, $z_{n_m} \in N(\epsilon, f(x_{n_m}))$. Esto contradice la elección de z_{n_m}. Entonces f es $\underline{SC}$ en x_0. ■

Como una aplicación del resultado anterior, presentamos el siguiente resultado:

Teorema 1.32. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces la función $f^{-1}\colon Y \to 2^X$ es $\overline{SC}$.*

Demostración. Notemos primero que la función f^{-1} está bien definida, pues f es continua y suprayectiva. Sean $y \in Y$ y $(y_n)_n \subset Y$ tales que $y_n \to y$. En vista del Teorema 1.31, basta mostrar que $\limsup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$. Sea $x \in \limsup f^{-1}(y_n)$. Entonces, por el Teorema 1.14, existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $x_m \in f^{-1}(y_{n_m})$, para cada $m \in \mathbb{N}$, tales que $x_m \to x$. Por tanto $y_{n_m} = f(x_m) \to f(x)$. Como tambien $y_{n_m} \to y$, tenemos que $f(x) = y$. Por tanto, $x \in f^{-1}(y)$ y el teorema queda demostrado. ■

Definición 1.33. *Sea X un espacio topológico. Un* **conjunto G_δ** *en X es un subconjunto A de X, el cual es igual a una intersección de una cantidad, a lo más numerable, de abiertos en X. Si además $\mathrm{cl}_X(A) = X$, decimos que A es un* **conjunto G_δ-denso** *en X.*

Ahora mencionaremos, sin prueba, un resultado que se encuentra en [31, Corolario 4, p. 72]. Para una demostración detallada, se puede consultar [1, Teorema 2.13].

Teorema 1.34. *Sean X, Y continuos y $f\colon X \to 2^Y$ una función semicontinua por arriba. Entonces f es continua en un conjunto G_δ-denso en X.*

1.6 Las Funciones Inducidas.

Supongamos que $f\colon X \to Y$ es una función continua entre los continuos X y Y. Para cada $A \in C(X)$ consideremos el conjunto:

$$C(f)(A) = \{\, f(a) \colon a \in A \,\}.$$

Notemos que $C(f)(A) = f(A)$, la imagen de A. Como la imagen continua de un continuo es un continuo, tenemos que $C(f)(A) \in C(Y)$. Por tanto, la asociación anterior define una función $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ que se llama **función inducida** por f. Como uno suele esperar, la continuidad de f implica la de $C(f)$. Este resultado se prueba a continuación. En tal suponemos que los continuos X y Y poseen métricas d y e, respectivamente.

Teorema 1.35. *Si $f\colon X \to Y$ es continua, entonces $C(f)$ es continua.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es una función uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $d(a, b) < \delta$, entonces $e(f(a), f(b)) < \epsilon$. Sean $A, B \in C(X)$ tales que $H(A, B) < \delta$. Mostraremos que $H(C(f)(A), C(f)(B)) < \epsilon$ o, lo que es lo mismo, que $C(f)(A) \subset N(\epsilon, C(f)(B))$ y que $C(f)(B) \subset N(\epsilon, C(f)(A))$.

Para mostrar la primera contención, sea $c \in C(f)(A)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = c$. Como $A \subset N(\delta, B)$, se tiene que $a \in N(\delta, B)$. Por tanto, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, lo que implica que, $e(f(a), f(b)) < \epsilon$. De esta manera, si $y = f(b)$, entonces $y \in C(f)(B)$ es tal que $e(c, y) < \epsilon$. Por tanto, $c \in N(\epsilon, C(f)(B))$ y concluimos que $C(f)(A) \subset N(\epsilon, C(f)(B))$. Análogamente se demuestra que $C(f)(B) \subset N(\epsilon, C(f)(A))$. Luego, $C(f)$ es uniformemente continua y, por consiguiente, también es continua.

■

El resultado anterior nos permite considerar la función $C^2(f)\colon C^2(X) \to C^2(Y)$ *inducida* por $C(f)$. Notemos que para $\mathcal{A} \in C^2(X)$:

$$C^2(f)(\mathcal{A}) = \{\, C(f)(A) \colon A \in \mathcal{A} \,\}.$$

Además, la función $C^2(f)$ también es continua, por el resultado 1.35.

Supongamos ahora que $f\colon Y \to Z$ es una función continua entre los espacios topológicos compactos, conexos y Hausdorff Y y Z. Consideremos ahora que

$$C(Y) = \{ A \subset Y : A \text{ es compacto, conexo y no vacío} \}$$

y

$$C(Z) = \{ A \subset Z : A \text{ es compacto, conexo y no vacío} \}$$

Suponemos aquí que $C(Y)$ y $C(Z)$ poseen la topología de Vietoris ([26, Definición 1.1]). No es nuestra intención estudiar dicha topología. Únicamente diremos que es una topología en $C(Y)$ que es igual a la topología inducida por la métrica de Hausdorff en $C(Y)$, en el caso en que Y es métrico ([26, Teorema 3.1]).

Notemos ahora que podemos hablar de la función inducida $C(f) \colon C(Y) \to C(Z)$ en donde, para cada $A \in C(Y)$, $C(f)(A) = f(A)$. A continuación enunciaremos un Teorema sin prueba:

Teorema 1.36. *Si $f \colon Y \to Z$ es una función continua entre los espacios compactos, conexos y Hausdorff Y y Z, entonces la función $C(f) \colon C(Y) \to C(Z)$ es continua.*

El único lugar en este trabajo en donde se requerirá el uso del resultado anterior, es en el Teorema 2.25.

1.7 Funciones de Whitney.

En esta sección presentamos una de las herramientas más importantes de la Teoría de Hiperespacios. Nos referimos a las funciones de Whitney. En 1932 H. Whitney construyó, en un artículo completamente ajeno a la Teoría de Hiperespacios ([43]), una función $\omega \colon 2^X \to [0, \infty)$ con una serie de propiedades. Posteriormente, en el año de 1942, J. L. Kelley ([30]) utilizó, en el contexto de los Hiperespacios, dos propiedades de la función definida por Whitney . A partir de ese momento, la existencia de dichas funciones ha sido de gran utilidad en la Teoría de Hiperespacios y, prácticamente cualquier artículo correspondiente a esta área, utiliza dichas funciones. Este trabajo no es la excepción.

Definición 1.37. *Una* **función de Whitney en 2^X** *es una función continua $\omega \colon 2^X \to [0, \infty)$ tal que:*

1. $\omega(\{x\}) = 0$ *para toda* $x \in X$;

2. *si* $A, B \in 2^X$ *y* $A \subsetneq B$, *entonces* $\omega(A) < \omega(B)$.

Si en la definición anterior cambiamos 2^X por $C(X)$ obtenemos la noción de función de Whitney en $C(X)$. De aquí en adelante la letra ω representará una función de Whitney en 2^X, mientras que la letra μ representará una función de Whitney en $C(X)$. Naturalmente si ω es una función de Whitney en 2^X, entonces la restricción de ω a $C(X)$ nos da una función de Whitney en $C(X)$.

Es preciso mencionar que, en la práctica, lo que importa de las funciones de Whitney es que existen y que son funciones continuas que satisfacen las propiedades mencionadas en la definición anterior.

A continuación damos una variante de la Definición 1.37.

Definición 1.38. *Una* **función de Whitney normalizada en** 2^X *es una función de Whitney* ω *en* 2^X *tal que* $\omega(X) = 1$.

Notemos que si ω es una función de Whitney normalizada en 2^X, entonces $0 \leq \omega(A) \leq 1$ para cada $A \in 2^X$. Cambiando 2^X por $C(X)$, en la definición anterior, obtenemos la noción de función de Whitney normalizada en $C(X)$.

Teorema 1.39. *Toda función de Whitney es normalizable.*

Demostración. Sea ω una función de Whitney. Es fácil ver que $\omega' = \frac{\omega}{\omega(X)}$ es una función de Whitney normalizada. ■

1.8 Confluencia.

En esta sección se mostrarán diversos tipos de funciones que más adelante nos permitirán probar teoremas relacionados con la propiedad de Kelley. Supondremos que $f : X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y.

1.8.1 Funciones Confluentes.

Definición 1.40. *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es* **confluente** *si para cada subcontinuo K de Y y cada componente A de $f^{-1}(K)$ se tiene que $f(A) = K$. Cuando se pide en cambio que al menos una componente A de $f^{-1}(K)$ satisface que $f(A) = K$, se dice que f es* **débilmente confluente.**

Observemos que toda función confluente es débilmente confluente. La noción de función confluente apareció definida por J. J. Charatonik en el año de 1964 en [7]. En vista de que la diferencia entre las nociones de función confluente y función débilmente confluente radica en que el conectivo universal es cambiado por el conectivo existencial, uno pensaría que la noción de función débilmente confluente también se debe a J. J. Charatonik. Esto no es así. Dicha noción aparece, por primera vez, en 1971 en [32], y se le atribuye a A. Lelek. Ambos tipos de funciones han resultado de gran importancia en la Teoría de Continuos. En su momento J. J. Charatonik confesó que no consideró de importancia el estudio de las funciones débilmente confluentes. Hoy en día una buena cantidad de sus artículos involucran dicha noción.

Ahora daremos una versión puntual de las funciones confluentes.

Definición 1.41. *Una función $f: X \to Y$ es* **confluente relativa a un punto** *$a \in X$ si para cada subcontinuo Q de Y tal que $f(a) \in Q$, la componente C de $f^{-1}(Q)$ tal que $a \in C$ cumple que $f(C) = Q$.*

Teorema 1.42. *Una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ es confluente si y sólo si es confluente relativa a cada punto de X.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Sean $Q \in C(Y)$ y C una componente de $f^{-1}(Q)$. Veremos que $f(C) = Q$. Para esto, sea $a \in C$. Notemos que $a \in f^{-1}(Q)$. Sea C_a la componente de $f^{-1}(Q)$ que contiene a a. Como f es confluente en a, tenemos que $f(C_a) = Q$. Si demostramos que $C_a = C$, entonces esta parte de la demostración quedaría terminada. Ahora bien, como $a \in C \subset f^{-1}(Q)$ y $a \in C_a \subset f^{-1}(Q)$, se tienen las siguientes contenciones

$$C_a \subset C \cup C_a \subset f^{-1}(Q) \quad \text{y} \quad C \subset C \cup C_a \subset f^{-1}(Q).$$

Más aún, como C y C_a son son subconjuntos conexos de X que contienen a a, el conjunto $C \cup C_a$ es conexo y también contiene a a. Por tanto, de la definición de componente, resulta que $C \cup C_a = C$ y $C \cup C_a = C_a$. Entonces $C_a \subset C$ y $C \subset C_a$, por lo que $C = C_a$. De esta manera concluímos que $f(C) = Q$.

($\Rightarrow$) Es inmediata. ■

A continuación presentamos otra versión puntual de la noción de función confluente. Notemos que, mientras que en la definición anterior, la confluencia se da en términos de los puntos del domino, ahora se expresa en términos de los puntos de la imagen.

Definición 1.43. *Sea $f: X \to Y$ una función continua y supravectiva. Decimos que f es* **confluente en un punto** $y \in Y$, *si para todo subcontinuo Q de Y tal que $y \in Q$ y toda componente C de $f^{-1}(Q)$, resulta que $f(C) = Q$.*

Teorema 1.44. *f es confluente si y sólo si f es confluente en cada punto de Y.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Tomemos un punto $y \in Y$, un subcontinuo Q de Y tal que $y \in Q$ y una componente C de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluente, resulta que $f(C) = Q$. Por tanto, f es confluente en y.

($\Leftarrow$) Supongamos que Q es un subcontinuo de Y y que C es una componente de $f^{-1}(Q)$. Tomemos un punto $y \in Q$. Como f es confluente en y, resulta que $f(C) = Q$. Por tanto, f es confluente. ■

Notemos que, por los teoremas 1.42 y 1.44, f es confluente relativa a cada punto de X si y sólo si f es confluente en cada punto de Y. En cuanto a una relación local entre las nociones anteriores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.45. *Si f es confluente en un punto $y \in Y$, entonces f es confluente relativa a cada punto del conjunto $f^{-1}(y)$.*

Demostración. Sean $a \in f^{-1}(y)$, $Q \in C(Y)$ con $f(a) \in Q$ y C la componente de $f^{-1}(Q)$ tal que $a \in C$. Es claro que $f(a) = y \in Q$ y, como f es confluente en $y \in Y$, cada componente de $f^{-1}(Q)$ cumple que su imagen es Q. En particular $f(C) = Q$. Esto muestra que f es confluente relativa a cada punto de $f^{-1}(y)$. ■

En la parte (5) de [8, p. 377], J. J. Charatonik afirma que es claro que el recíproco del teorema anterior es cierto. Como mostramos en el siguiente ejemplo, esto no es así:

Ejemplo 1.46. *Existen una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ y un punto $y \in Y$ tal que f es confluente relativa a cada punto del conjunto $f^{-1}(y)$, mientras que f no es confluente en y.*

Justificación. Sean $X = [0,1]$ y $Y = \left[0, \frac{2}{3}\right]$. Definimos a $f: X \to Y$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \left[0, \frac{2}{3}\right], \\ \frac{4}{3} - x, & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]. \end{cases}$$

Notemos que f *manda* el intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ en el intervalo $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, de manera que $f(\frac{5}{6}) = \frac{1}{2}$ y $f(1) = \frac{1}{3}$. Consideremos ahora, en X, el punto $x = \frac{1}{6}$ y, en Y, el punto $y = \frac{1}{6}$. Entonces $f^{-1}(y) = \{x\}$. Supongamos que Q es un subcontinuo de Y tal que $y = f(x) \in Q$ y sea C la componente de $f^{-1}(Q)$ que tiene a x. Si $\frac{1}{3} \notin Q$, entonces $C = Q$, así que $f(C) = Q$. Si $\frac{1}{3} \in Q$, entonces $f^{-1}(Q)$ posee a lo más dos componentes, dependiendo de si el punto $\frac{2}{3}$ está en Q o no. Por tanto, $C = Q$ o bien $C = Q \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. En cualquier situación tenemos que $f(C) = Q$. Esto muestra que f es confluente relativa a cada punto de $f^{-1}(y)$. Consideremos ahora el subcontinuo $K = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ de Y. Entonces $y \in K$ y $D = \{1\}$ es una componente de $f^{-1}(K)$ tal que $f(D) = \{\frac{1}{3}\} \neq K$. Por tanto, f no es confluente en y. ■

Notemos que la función anterior no satisface la siguiente condición

(*) para cada subcontinuo Q de Y tal que $y \in Q$ y cada componente C de $f^{-1}(Q)$ resulta que $C \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

En el siguiente resultado mostramos que, bajo la condición anterior, el recíproco del Teorema 1.45 es válido.

Teorema 1.47. *Sea $y \in Y$ y supongamos que f satisface $(*)$ y es confluente relativa a cada punto del conjunto $f^{-1}(y)$. Entonces f es confluente en y.*

Demostración. Sean Q un subcontinuo de Y con $y \in Q$ y C una componente de $f^{-1}(Q)$. Por hipótesis, existe un punto $x \in C \cap f^{-1}(y)$. Luego f es confluente relativa a x y C resulta ser la componente de $f^{-1}(Q)$ que tiene a x. Por tanto, $f(C) = Q$. ■

Corolario 1.48. *f es confluente en un punto $y \in Y$, si y sólo si f satisface $(*)$ y f es confluente relativa a cada punto del conjunto $f^{-1}(y)$.*

Demostración. De acuerdo con los teoremas 1.45 y 1.47, basta ver que si f es confluente en y, entonces f satisface $(*)$. Tomemos entonces un subcontinuo Q de Y tal que $y \in Q$ y una componente C de $f^{-1}(Q)$. Como f es confluente en y, tenemos que $f(C) = Q$, así que $y \in f(C)$. Por tanto, $C \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. ■

1.9 Funciones Abiertas.

Definición 1.49. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es* **abierta** *si para cada abierto A de X se tiene que $f(A)$ es abierto en Y.*

En [37, Teorema 13.14], se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.50. *Toda función abierta es confluente.*

Ahora daremos una versión local de la definición anterior.

Definición 1.51. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es* **interior en un punto** *a de X, si para cada vecindad abierta U de a en X, se tiene que $f(a) \in \operatorname{int}_Y(f(U))$.*

El siguiente resultado relaciona las nociones anteriores.

Teorema 1.52. *Una función continua y suprayectiva $f\colon X \to Y$ es abierta si y sólo si es interior en cada punto de X.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $a \in X$ y U una vecindad abierta de a. Como f es abierta, tenemos que $f(U)$ es abierto y $f(a)$ está claramente en $\operatorname{int}_Y(f(U))$. Por lo tanto, f es interior en cada punto de X.

($\Leftarrow$) Ahora sea U un abierto en X. Veremos que $f(U)$ es abierto en Y. Para esto tomemos un punto $y \in f(U)$. Entonces existe $u \in U$ tal que $f(u) = y$. Como U es una vecindad abierta de u y f es interior en u, resulta que $y = f(u) \in \operatorname{int}_Y(f(U))$. Esto prueba que $f(U) \subset \operatorname{int}_Y(f(U))$ y, como también la otra contención es válida, tenemos que $f(U)$ es abierto en Y. ■

1.10 Funciones Monótonas.

Definición 1.53. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es* **monótona** *si $f^{-1}(y)$ es conexo, para cada $y \in Y$.*

El siguiente resultado aparece probado en [37, Teorema 13.15].

Teorema 1.54. *Las funciones monótonas son confluentes.*

Teorema 1.55. *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces f es monótona si y sólo si, para cada subcontinuo Q de Y, la imagen inversa de Q bajo f, es conexa.*

A continuación mostramos una versión local de la noción de función monótona.

Definición 1.56. *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es* **monótona en** *$p \in X$ si para cada subcontinuo Q de Y tal que $f(p) \in Q$, la imagen inversa de Q bajo f, es conexa.*

Como consecuencia inmediata del Teorema 1.55 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.57. *Una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ es monótona si y sólo si es monótona en cada punto de X.*

1.11 Arcos Ordenados y Conexidad por Trayectorias.

En esta sección introduciremos otra de las herramientas básicas de la Teoría de Hiperespacios. Nos referimos a la noción de arco ordenado. Así como en el caso de las funciones de Whitney, lo que realmente importa de un arco ordenado es su existencia, así como el hecho de que satisface las propiedades que enunciaremos más adelante. Dichas propiedades nos permiten, a su vez, probar que los hiperespacios de un continuo dado X, son conexos por trayectorias (sin importar que X lo sea).

1.11.1 Conexidad por Trayectorias.

En esta subsección, la letra Y representa un espacio topológico.

Definición 1.58. *Sean $p, q \in Y$. Una* **trayectoria de p a q en Y**, *es una función continua $h\colon [0,1] \to Y$ tal que $h(0) = p$ y $h(1) = q$. Si además h es inyectiva, entonces h es un* **arco de p a q en Y**. *Decimos que Y es* **conexo por trayectorias** *(respectivamente,* **conexo por arcos***) si para cada $p, q \in Y$, existe una trayectoria (respectivamente, un arco) de p a q en Y. Si Y es un continuo, decimos que Y es* **hereditariamente conexo por trayectorias** *si cada subcontinuo de Y es conexo por trayectorias.*

Notemos que todo arco de p a q en Y es una trayectoria de p a q en Y. Si Y es un continuo, entonces toda trayectoria de p a q en Y contiene un arco de p a q en Y (ver [20, Teorema 9.B.4]). Por tanto, en un continuo, las nociones de conexidad por trayectorias y conexidad por arcos son equivalentes.

Notemos también que, para cada $p \in Y$, la función constante p es una trayectoria de p a p en Y. Más aún, es fácil convencerse de que si existe una trayectoria de p a q en Y, entonces también existe una trayectoria de q a p en Y. Además, si existen trayectorias de p a q, y de q a r en Y, entonces también existe una trayectoria de p a r en Y. Por consiguiente, el conectarse por trayectorias en Y, define una relación de equivalencia en Y.

1.11.2 Arcos Ordenados.

A continuación veremos la definición de arco ordenado. A partir de este momento se denotará por I al intervalo cerrado $[0,1]$.

Definición 1.59. *Sean $A, B \in 2^X$ tales que $A \subset B$. Un* **arco ordenado de A a B en 2^X** *es una función continua $\lambda\colon I \to 2^X$ tal que $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subsetneq \lambda(t)$ siempre que $s < t$.*

Si en la definición anterior cambiamos 2^X por $C(X)$, obtenemos la noción de arco ordenado de A a B en $C(X)$.

En [38, Teorema 1.8] se da la demostración clásica, de que si $A, B \in C(X)$, $A \neq B$ y $A \subset B$, entonces existe un arco ordenado de A a B en $C(X)$. Posteriormente, en [1, Teoremas 1.22, 1.23] se da una demostración nueva y más corta de este resultado. Cabe señalar que, para que exista un arco ordenado de A a B en 2^X, no basta con que A esté contenido en B. Además de esto, se requiere que cada componente de B intersecte a A.

De acuerdo con la Definición 1.58, un arco ordenado de A a B en 2^X (respectivamente, $C(X)$) es, en particular, una trayectoria de A a B en 2^X (respectivamente, $C(X)$). Utilizamos este hecho para probar el siguiente resultado.

Teorema 1.60. *$C(X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean A, $B \in C(X)$. Como $A \subset X$, existe un arco ordenado de A a X en $C(X)$. De la misma manera, existe un arco ordenado de B a X en $C(X)$. En vista de que conectarse por trayectorias define una relación de equivalencia, existe una trayectoria de A a B en $C(X)$. ■

Teorema 1.61. *2^X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sean $A, B \in 2^X$ y C una componente de A. Como $A \subset X$, existe un arco ordenado $\lambda_C \colon I \to C(X)$ de C a X. Ahora bien, para cada $t \in I$, definamos $\lambda(t) = A \cup \lambda_C(t)$. Entonces $\lambda \colon I \to 2^X$ es una trayectoria de A a X en 2^X. En efecto, $\lambda(0) = A \cup \lambda_C(0) = A \cup C = A$ y $\lambda(1) = A \cup \lambda_C(1) = A \cup X = X$. Sólo falta probar que λ es continua. Para esto, sean $t \in I$ y $(t_n)_n \subset I$ tales que $t_n \to t$. Por la continuidad de λ_C, resulta que $\lambda_C(t_n) \to \lambda_C(t)$ y, por el Teorema 1.9, $\lambda(t_n) = A \cup \lambda_C(t_n) \to A \cup \lambda_C(t) = \lambda(t)$. Esto muestra que λ_C es una trayectoria de A a X en 2^X. Procediendo de manera similar, existe una trayectoria de B a X en 2^X. Como conectarse por trayectorias define una relación de equivalencia, existe una trayectoria de A a B en 2^X. Esto termina la demostración. ■

En vista de que, en un continuo, las nociones de conexidad por trayectorias y conexidad por arcos son equivalentes, los resultados anteriores implican que, para cualquier continuo X, los hiperespacios 2^X y $C(X)$ contienen un arco (sin importar si X contiene un arco o no).

Como consecuencia del siguiente resultado, en todo continuo podemos encontrar subcontinuos de cualquier tamaño de acuerdo a una función de Whitney.

Teorema 1.62. *Sean A un subcontinuo de X y $\mu \colon C(X) \to [0, \mu(X)]$ una función de Whitney. Entonces, para cada $t \in [\mu(A), \mu(X)]$, existe $B \in C(X)$ tal que $A \subset B$ y $\mu(B) = t$.*

Demostración. Sea $\lambda\colon I \to C(X)$ un arco ordenado de A a X y $t \in [\mu(A), \mu(X)]$. Notemos que $(\mu \circ \lambda)(0) = \mu(\lambda(0)) = \mu(A)$ y $(\mu \circ \lambda)(1) = \mu(\lambda(1)) = \mu(X)$. Por tanto $\mu\circ\lambda$ es una función continua de I sobre $[\mu(A), \mu(X)]$ así que, por el Teorema del Valor Intermedio, existe $s \in I$ tal que $(\mu\circ\lambda)(s) = t$. Sea $B = \lambda(s)$. Entonces, B es un subcontinuo de X tal que $A \subset B$ y $\mu(B) = t$. ■

A continuación, mostramos que si un arco ordenado en 2^X empieza en un elemento de $C(X)$, entonces está, en realidad, en $C(X)$.

Teorema 1.63. *Si λ es un arco ordenado en 2^X tal que $\lambda(0) \in C(X)$, entonces $\lambda(t) \in C(X)$ para toda $t \in I$.*

Demostración. Sea $t \in [0, 1]$. Consideremos el conjunto $\mathcal{L} = \{\lambda(s) \in C(X) : s \in [0, t]\}$. Como λ es continua, entonces $\mathcal{L}$ es un subcontinuo de 2^X. Además $\lambda(0) \in \mathcal{L} \cap C(X)$, de manera que podemos aplicar el Teorema 1.22 y obtener que $\sigma(\mathcal{L}) \in C(X)$. Ya que λ es un arco ordenado, $\lambda(s) \subset \lambda(t)$ para toda $s \in [0, t]$. De aquí que $\lambda(t) = \sigma(\mathcal{L})$. Por tanto $\lambda(t) \in C(X)$. ■

Terminamos la sección con el siguiente resultado.

Teorema 1.64. *Supongamos que A un subcontinuo propio de X y que U es un abierto en X tal que $A \subset U$. Si $B \in C(X)$ es tal que $A \subsetneq B$, entonces existe $K \in C(B)$ tal que $A \subsetneq K \subset U$.*

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{U} = \{L \in C(X) : L \subset U\}$. Por el Teorema 1.18 sabemos que $\mathcal{U}$ es abierto en $C(X)$. Como $A \in \mathcal{U}$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_{C(X)}(\epsilon, A) \subset \mathcal{U}$. Sea $\lambda\colon I \to C(X)$ un arco ordenado de A a B. Como λ es una función continua, existe $\delta > 0$ tal que si $|t| < \delta$ entonces $H_{C(X)}(\lambda(t), \lambda(0)) = H_{C(X)}(\lambda(t), A) < \epsilon$. Tomemos $t_0 = \frac{\delta}{2}$ y sea $K = \lambda(t_0)$. Como $t_0 > 0$ y λ es un arco ordenado, sucede que $A \subsetneq K \subset B$. Por tanto, K es un subcontinuo de B. Además, como $|t_0| < \delta$ entonces $H(\lambda(t_0), A) < \epsilon$, por lo que:

$$K = \lambda(t_0) \in B_{C(X)}(\epsilon, A) \subset \mathcal{U}.$$

De esta manera, $K \subset U$. ■

1.12 Conjuntos Separados.

Recordemos que los subconjuntos A y B de un espacio topológico Y, están **separados** si

$$A \cap \mathrm{cl}_Y(B) = \mathrm{cl}_X(A) \cap B = \emptyset.$$

En lo sucesivo, el símbolo $Y = Y_1|Y_2$ indicará que Y_1 y Y_2 son dos subconjuntos no vacíos de Y y separados tales que $Y = Y_1 \cup Y_2$. El siguiente resultado se prueba en [37, Proposición 6.3].

Teorema 1.65. *Supongamos que Y es un espacio topológico conexo. Si C es un subconjunto conexo (respectivamente, cerrado) de Y tal que $Y - C = A|B$, entonces los conjuntos $C \cup A$ y $C \cup B$ son conexos (respectivamente, cerrados).*

Como consecuencia del resultado anterior, si X es un continuo y C es un subcontinuo de X tal que $X - C = A|B$, entonces los conjuntos $A \cup C$ y $B \cup C$ son subcontinuos de X. Este resultado se utilizará con bastante frecuencia en los siguientes capítulos.

Definición 1.66. *Sean Y un espacio topológico conexo y $p \in Y$. Decimos que p es un* **punto de corte** *de Y si el conjunto $Y - \{p\}$ no es conexo.*

Si X es un continuo y p es un punto de corte de X, entonces $X - \{p\} = A|B$. En vista de que el conjunto $\{p\}$ es cerrado, los subconjuntos A y B de X son abiertos en X. Además, como A y B están separados, resulta que A y B son ajenos.

En [37, Teorema 6.6] se muestra que todo continuo posee al menos dos puntos que no son de corte. Más aún, el [37, Teorema 6.17], se prueba que el arco es el único continuo que posee justo dos puntos que no son de corte. A continuación, escribimos dichos resultados en forma de teoremas.

Teorema 1.67. *Sean X un continuo y p un punto de corte de X. Si:*

$$X - \{c\} = U|V.$$

entonces existe un punto que no es de corte en U y otro en V.

Teorema 1.68. *Un continuo X es un arco si y sólo si X tiene exactamente dos puntos que no son de corte.*

1.13 Continuos Descomponibles e Indescomponibles

A continuación, presentamos una manera de clasificar a los continuos.

Definición 1.69. *Decimos que X es:*

1. **descomponible** *si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$,*
2. **indescomponible** *si no es descomponible,*
3. **hereditariamente descomponible** *(respectivamente,* **hereditariamente indescomponible***), si todo subcontinuo no degenerado de X es descomponible (respectivamente, indescomponible).*

A primera vista, parecería que todo continuo puede escribirse como la unión de dos de sus subcontinuos propios. Esto no es así. En [37, 1.10], por ejemplo, se construye un continuo indescomponible y, en [37, 1.23] se muestra como obtener un continuo hereditariamente indescomponible. En [37, 2.9] se construye otro continuo indescomponible, llamado el **continuo de Knaster**. Dicho continuo, que denotaremos por K, tiene la propiedad de que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Además contiene un único punto p con la propiedad de que todo arco en K que contiene a p, lo tiene como punto extremo. Decimos que p es el *único punto extemo de K.* Todas estas afirmaciones se mencionan aquí sin demostración pues, más adelante, se utilizarán sólo para motivar unos resultados.

En el siguiente teorema vemos que los continuos indescomponibles están caracterizados por la propiedad de que todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.

Teorema 1.70. *X es indescomponible si y sólo si todos sus subcontinuos propios tienen interior vacío.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Supongamos que X es descomponible y sean $A, B \in C(X) - \{X\}$ tales que $X = A \cup B$. Notemos que $X - B \subset A$. Ahora bien, como B es cerrado y es un subconjunto propio de X, resulta que $\emptyset \neq X - B \subset \text{int}_X(A)$. Esto contradice la hipótesis de que todos los subcontinuos propios de X tienen interior vacío. Por tanto, X es indescomponible.

($\Rightarrow$) Supongamos que existe un subcontinuo propio A de X tal que $\text{int}_X(A) \neq \emptyset$. Consideremos el conjunto $X - A$. Si $X - A$ es conexo, entonces $\text{cl}_X(X - A)$ es un subcontinuo de X. Como $\text{int}_X(A) = X - \text{cl}_X(X - A)$, resulta que $\text{cl}_X(X - A)$ es un subcontinuo propio de X y, por consiguiente:

$$X = A \cup \text{cl}_X(X - A)$$

es la unión de dos de sus subcontinuos propios. Como esto es una contradicción, resulta que $X - A$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos H y K de X tales que $X - A = H \cup K$. Por el Teorema 1.65, $A \cup H$ y $A \cup K$ son subcontinuos propios de X. Por tanto:

$$X = (X - A) \cup A = (H \cup K) \cup A = (A \cup H) \cup (A \cup K)$$

es la unión de dos de sus subcontinuos propios. Como esto es una contradicción, resulta que X es indescomponible. ■

Corolario 1.71. *X es descomponible si y sólo si existe un subcontinuo propio de X con interior no vacío.*

1.14 Conexidad Local y en Pequeño.

En esta sección introducimos los conceptos de conexidad local y de conexidad en pequeño que, como veremos más adelante, están relacionados con las nociones de suavidad y la propiedad de Kelley.

Definición 1.72. *Un espacio Y es* **localmente conexo en** *$p \in Y$ si para cada abierto U de Y tal que $p \in U$, existe un abierto y conexo V tal que $p \in V \subset U$. Se dice que Y es* **localmente conexo** *si lo es en cada uno de sus puntos.*

Definición 1.73. *Un espacio Y es* **conexo en pequeño en** *$p \in Y$ si para cada abierto U de Y tal que $p \in U$, existe una vecindad conexa V de p tal que $p \in V \subset U$.*

Observemos que la conexidad local en un punto, implica la conexidad en pequeño en dicho punto. El recíproco de dicha afirmación no es cierto. En [24, Figura 3-9, p. 113], se muestra un continuo que es conexo en pequeño en un punto y no localmente conexo en dicho punto. Además, en [24, Teorema 3-11] se prueba que, globalmente, la nociones anteriores son equivalentes. Por lo tanto, un espacio es localmente conexo si y sólo si es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos.

Es común abreviar la expresión "conexo en pequeño" como "cik". Dicha abreviatura viene de la oración *connected im kleinen*, con la que se conocen a estos espacios en los textos de habla inglesa. A continuación probaremos una equivalencia de la conexidad en pequeño.

Teorema 1.74. *Un espacio Y es cik en un punto $p \in Y$ si y sólo si para cada abierto U de Y con $p \in U$, existe un subconjunto abierto V de Y tal que $p \in V \subset U$ y, para cada $q \in V$, existe un subconjunto conexo A tal que $p, q \in A \subset U$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea U un abierto de Y tal que $p \in U$. Como Y es cik en p, existe una vecindad conexa V de p con $p \in V \subset U$. Por tanto, $p \in \operatorname{int}_Y(V)$ el cual es un abierto y $p \in \operatorname{int}_Y(V) \subset U$. Ahora, sea $q \in \operatorname{int}_Y(V)$. Notemos que V es un conexo que contiene a $\{p, q\}$ y está contenido en U.

($\Leftarrow$) Sea U un abierto en Y con $p \in U$. Por hipótesis existe un abierto A en Y tal que $p \in A \subset U$ y, para todo $q \in A$, existe un subconjunto conexo C_q tal que $p, q \in C_q \subset U$. Tomemos $V = \bigcup_{q \in A} C_q$. Como V es la unión de conjuntos conexos que tienen en común al punto p, tenemos que V es conexo. Notemos que $A \subset V$ y que A es un conjunto abierto que contiene a p. Por tanto, $p \in \operatorname{int}_Y(V)$. Finalmente, como $V = \bigcup_{q \in A} C_q$ y $C_q \subset U$ para cada $q \in A$, tenemos que $V \subset U$. Esto concluye la demostración. ■

Una manera de redactar el teorema anterior, en términos de epsilones y deltas, es la que se exhibe a continuación.

Teorema 1.75. *Un espacio Y es cik en p si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(\delta, p)$, existe $E \subset Y$ conexo, con $p, x \in E \subset B(\epsilon, p)$.*

Terminamos la presente sección, enunciando una manera equivalente de considerar la conexidad local. Una demostración de dicho resultado puede verse en [20, Teorema 2.E.2]

Teorema 1.76. *X es localmente conexo si y sólo si la componente de cada abierto de X es abierta en X.*

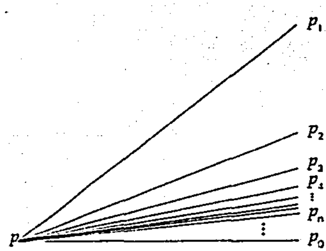
1.15 Algunos Continuos Especiales.

En esta sección presentamos una serie de continuos que utilizaremos muy frecuentemente en las siguientes secciones. Tales continuos servirán en unas ocasiones como contraejemplos y, en otras, nos serán de ayuda para ejemplificar ciertos conceptos. Cabe señalar que en lo sucesivo, cada vez que nos refiramos a un continuo introducido en esta sección, utilizaremos en la medida de lo posible, la notación como aquí se establece.

1.15.1 Abanicos.

Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, los puntos $p = (0,0)$ y $p_0 = (1,0)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $p_n = (1, \frac{1}{n})$. Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea pp_n el segmento de recta de p a p_n. El **abanico armónico estándar** se define como el continuo

$$A_s = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} pp_n.$$



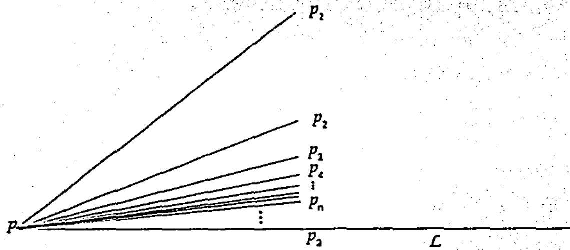
Notemos que la sucesión de arcos $(pp_n)_n \in C(A_s)$ converge al arco pp_0, que llamaremos *la pata límite* de A_s.

El término **abanico armónico** se suele utilizar para referirse a cualquier espacio homeomorfo al abanico armónico estándar. Mientras el contexto sea lo suficientemente claro, en este trabajo, por *abanico armónico* entenderemos al abanico armónico estándar.

Consideremos ahora el conjunto $L = [1,2] \times \{0\}$. Al continuo:

$$A_{sa} = A_s \cup L$$

lo llamaremos el **abanico armónico estándar con pata alargada**. A L, el cual es un continuo, lo llamaremos *la pata alargada* de A_{sa}. Como en el caso anterior, mientras el contexto sea lo suficientemente claro, nos referirimos al continuo A_{sa} simplemente como el *abanico armónico con pata alargada*.



Dada $n \in \mathbb{N}$ consideremos los puntos $q_n = (1 + \frac{1}{n}, 0)$, $p'_n = (1, -\frac{1}{n})$, $r_n = (0, -\frac{1}{n})$ y supongamos que $p_n q_n$, $q_n p'_n$ y $p'_n r_n$ son los segmentos de recta de p_n a q_n, de q_n a p'_n y de p'_n a r_n, respectivamente. Al continuo

$$A_{sd} = A_s \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} p_n q_n \cup q_n p'_n \cup p'_n r_n \right)$$

lo llamaremos **abanico armónico estándar doblado.** Mientras el contexto sea lo suficientemente claro, nos referiremos al continuo A_{sd} simplemente con el nombre de *abanico armónico doblado.*

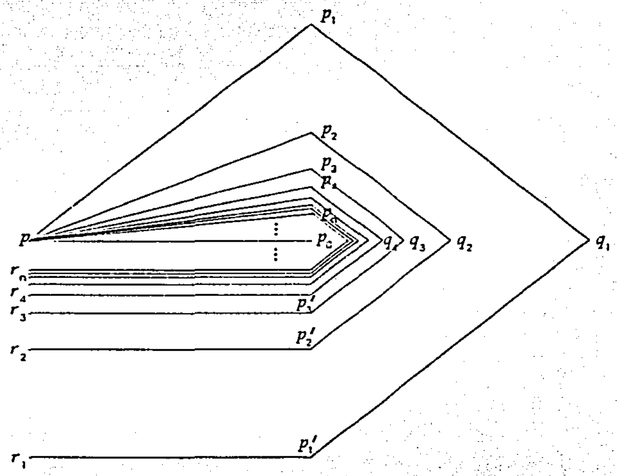
1.15.2 Dos curvas sinoidales.

Consideremos ahora los conjuntos

$$V = \left\{ \left(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1] \right\}$$

y $P = \{0\} \times [-1, 1]$. Entonces al continuo

$$S = \operatorname{cl}_{\mathbb{R}^2}(V) = V \cup P$$



lo llamaremos el **seno de** $\frac{1}{x}$. Al subcontino P de S lo llamaremos *la pata límite de* S. Si $P_a = \{0\} \times [-2, -1]$, entonces al continuo

$$S_a = S \cup P_a$$

lo llamaremos el **seno de** $\frac{1}{x}$ **con pata alargada.** Al subcontinuo P_a de S_a lo llamaremos *la pata alargada* de S_a. Consideremos ahora el continuo

$$C_V = S \cup R$$

donde R es un arco con puntos extremos $(1, \text{sen}(1))$ y $(0, -1)$ de manera que $S \cap R = \{(1, \text{sen}(1)), (0, -1)\}$. A C_V se lo conoce como el **círculo de Varsovia.** Notemos que existe una función continua y suprayectiva $q \colon S \to C_V$, a saber, la que identifica los puntos $(1, \text{sen}(1))$ y $(0, -1)$ de S.

1.15.3 Peines y Seudopeines.

Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, los conjuntos $A_0 = [0, 1] \times \{0\}$, $B = \{0\} \times [0, 1]$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = [0, 1] \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Al continuo:

$$P = (A_0 \cup B) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$$

se se llama el **peine armónico estándar**. En este trabajo, a P lo llamaremos simplemente como el *peine*. Hagamos $A = A_0 \cup B$, $a_0 = (1, 0)$, $b_0 = (0, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (1, \frac{1}{n})$ y $b_n = (0, \frac{1}{n})$. Notemos que:

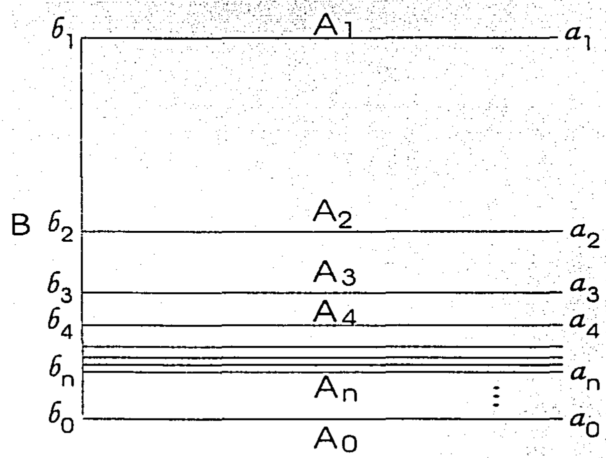
(1) A es un subcontinuo de P;

(2) para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un arco en P que une los puntos a_n y b_n de P y, además, $A_n \cap A = \{b_n\}$;

(3) los arcos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \cdots$ son ajenos dos a dos;

(4) $A_n \to A_0 \in C(A)$, $a_n \to a_0 \in A_0$, $b_n \to b_0 \in A_0$ y $a_0 \neq b_0$.

Las propiedades anteriores de P nos permiten hablar de continuos más generales y que, en cierta forma, se comportan como P.



Definición 1.77. *Un **seudopeine** es un continuo P_s tal que*

$$P_s = A \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$$

donde A y cada A_n satisfacen las condiciones (1)-(4) *cambiando P por P_s.*

Por supuesto, el peine es un caso especial de un seudopeine. El problema de la determinación de seudopeines en un continuo, a sido de interés para A. Illanes quien, en [25, Teorema 2] probó el siguiente teorema:

Teorema 1.78. *Supongamos que X es un continuo hereditariamente conexo por trayectorias y no localmente conexo. Entonces, X contiene un seudopeine.*

Para un seudopeine P_s, si $c \in A_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $a_n c$ al arco de a_n a c en P_s. En [25, Lema 4] se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.79. *Supongamos que:*

$$P_s = A \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)$$

es un seudopeine. Si $n \in \mathbb{N}$ y $c \in A_n - \{a_n\}$, entonces:

$$P_s - \{c\} = (a_n c - \{c\}) \cup (P_s - a_n c)$$

es una separación de $P_s - \{c\}$.

1.16 Golpes en la Frontera.

En esta sección mencionamos, sin prueba, uno de los teoremas más importantes de la teoría de continuos. Nos referimos al Teorema de los Golpes en la Frontera, que nos dice que las componentes de un subconjunto de un continuo llegan hasta su frontera.

Teorema 1.80. *Sean X un continuo y E un subconjunto propio y no vacío de X. Si K es una componente de E, entonces $\mathrm{cl}_X(K) \cap \mathrm{fr}_X(E) \neq \emptyset$.*

Una demostración de este resultado, puede verse en [37, Teorema 5.6]. Con ayuda de este teorema, se puede probar la existencia de arcos ordenados en 2^X, bajo las condiciones que previamente se indicaron. También con ayuda de este resultado, se prueba que todo continuo posee subcontinuos propios no degenerados, afirmación que, en una primera instancia, parece evidente.

1.17 Composantes e Irreducibilidad.

En esta sección, introduciremos las nociones de composantes de un continuo, así como la de irreducibilidad. Asimismo veremos una serie de resultados fundamentales que involucran estas nociones.

Definición 1.81. *Sean X un continuo y $p, q \in X$. Entonces:*

1. *X es* **irreducible entre** *p* **y** *q si para cada subcontinuo G de X tal que $p, q \in G$, sucede que $G = X$;*

2. *X es* **irreducible** *si lo es entre cualesquiera dos de sus puntos;*

3. *p es un* **punto de irreducibilidad de** *X, si X es irreducible entre p y algún otro punto de X.*

De acuerdo a la definición anterior, X no es irreducible entre p y q si y sólo si existe un subcontinuo propio de X que contiene tanto a p como a q. En [24, Teorema 2-10] se prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.82. *Si X es un continuo y $p, q \in X$, entonces X contiene un subcontinuo irreducible entre p y q.*

Notemos, por ejemplo, que el arco $X = [0, 1]$ es irreducible entre los puntos 0 y 1. El abanico estándar, por ejemplo, no es irreducible. El continuo seno de $\frac{1}{x}$ es irreducible entre el punto $(1, \operatorname{sen}(1))$ y cualquier punto de su pata límite. El círculo de Varsovia, por otro lado, no es irreducible.

Definición 1.83. *Sean X un continuo y $p \in X$. Decimos que la* **composante de** *p* **en** *X es la unión de todos los subcontinuos propios de X que contienen a p*

Denotaremos por $K(X,p)$ a la composante de p en X. Por definición, $K(X,p)$ es una unión de subconjuntos propios, cerrados y conexos de X que tienen a p como punto común. Luego, $K(X,p)$ es conexo. Notemos que:

$$K(X,p) = \{x \in X : X \text{ no es irreducible entre } p \text{ y } x\}.$$

Por tanto p es un punto de irreducibilidad de X si y sólo si $K(X,p) \neq X$.

Las composantes de un continuo están caracterizadas de cierto modo, dependiendo de si el continuo es descomponible o indescomponible, como se muestra en el siguiente resultado:

Teorema 1.84. *Si X es un continuo, entonces:*

1) cada composante de X es un subconjunto conexo y denso en X;

2) el complemento de cada composante es conexo;

3) si X es descomponible, entonces X tiene exactamente una o tres composantes. Más precisamente, si X no es irreducible, entonces X es la única composante de X, mientras que si X es irreducible, digamos entre los puntos p y q, entonces X, $K(X,p)$ y $K(X,q)$ son las únicas composantes de X;

4) si X es indescomponible, entonces X tiene una cantidad no numerable de composantes, todas ellas son ajenas dos a dos, y tienen interior vacío.

A manera de referencia, 1) aparece probado en los teoremas 3-44 y 3-45 de [24], 2) en el Teorema 11.4 de [37], 3) en el Teorema 11.13 de [37] y 4) en los teoremas 11.15 y 11.17 de [37].

En el siguiente resultado vemos que, en un continuo indescomponible, cualquier punto x se puede aproximar por una sucesión de puntos que se toman en composantes distintas de $K(X,x)$.

Teorema 1.85. *Supongamos que X es un continuo indescomponible y que $x \in X$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en X tal que $x_n \to x$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \notin K(X,x)$.*

Demostración. Sea K_1 una composante de X diferente de $K = K(X, x)$. En vista de que K_1 es denso en X, existe un punto $x_1 \in B(1, x) \cap K_1$. Como X tiene una cantidad no numerable de composantes, existe una composante K_2 de X diferente de K_1 y de K. Aplicando ahora la densidad de K_2, existe un punto $x_2 \in B(\frac{1}{2}, x)$. De manera similar, podemos encontrar una composante K_3 diferente de K, K_1 y K_2 y un punto $x_3 \in B(\frac{1}{3}, x)$. Procediento de esta manera, encontramos una sucesión $(x_n)_n$ en $X - K$ que converge a x, de forma que si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n \neq m$, entonces x_n y x_m se encuentran en composantes distintas de X. ■

A continuación aplicamos las propiedades de las composantes, para dar una demostración sencilla del hecho de que los continuos conexos por trayectorias son descomponibles. Recordemos que en el contexto de los continuos, la conexidad por arcos es equivalente a la conexidad por trayectorias.

Teorema 1.86. *Si un continuo X es conexo por trayectorias, entonces X es descomponible.*

Demostración. Si X es indescomponible entonces, por el Teorema 1.84, posee una cantidad no numerable de composantes. Entonces podemos considerar dos puntos p y q en composantes distintas de X. Como X es conexo por arcos, existe un arco λ de p a q en X. En vista de que p y q se encuentran en composantes distintas, tenemos que $\lambda = X$. Entonces X es un arco y, por tanto, un continuo descomponible. Esta contradicción termina la prueba del teorema. ■

1.17.1 La Estructura del Complemento de una Composante.

Supongamos que $K(X, p)$ es la composante del punto p de X. Nuestra intención es analizar el conjunto $F = X - K(X, p)$. De acuerdo con la propiedad 2 del Teorema 1.84, F es conexo. Como ya hicimos ver, F es no vacío si y sólo si p es un punto de irreducibilidad de X. Pensemos pues, que p es un punto de irreducibilidad de X. Entonces F es un subconjunto conexo y no vacío de X. ¿Es F cerrado? En general la respuesta es negativa y, para ver esto, basta con pensar que X es indescomponible. Entonces F es la unión de las composantes de X diferentes de $K(X, p)$ y, por el Teorema 1.85, F no es cerrado.

Supongamos que B es el continuo de Knaster (ver [37, 2.9]) y que p es el único punto extremo de B. Sea A un arco tal que $A \cap B = \{p\}$. Entonces el continuo $X = A \cup B$ es descomponible, pero no hereditariamente descomponible, pues contiene al continuo indescomponible B. El círculo de Varsovia es un continuo hereditariamente descomponible y no irreducible. Por tanto, posee sólo una componente.

En el siguiente teorema mostramos que si X es hereditariamente descomponible, entonces el complemento de las composantes es cerrado.

Teorema 1.87. *Si X es un continuo hereditariamente descomponible, entonces el conjunto $X - K(X,p)$ es cerrado para cada p en X.*

Demostración. Sea $p \in X$. Hagamos $F = X - K(X,p)$. Si p no es un punto de irreducibilidad de X, entonces $F = \emptyset$ y, por tanto, F es cerrado. Supongamos, entonces, que p es un punto de irreducibilidad de X y que F no es cerrado. Entonces existe $x \in \mathrm{cl}_X(F) - F$. Fijemos un punto $w \in F$. Como $x \notin F$, entonces $x \in K(X,p)$, así que existe un subcontinuo propio A de X tal que $x, p \in A$.

Por el Teorema 1.82, existe $B \in C(X)$ tal que B es irreducible entre x y w. Como X es hereditariamente descomponible, en particular B es descomponible. Por tanto, existen dos subcontinuos propios C y D de B tales que $B = C \cup D$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x \in C$. Notemos entonces que $w \notin C$ pues B es irreducible entre x y w y C es un subcontinuo propio de B. Por tanto, $w \in D$ y, por la misma razón, $x \notin D$. También sucede que $w \notin A$ pues $w \in F$. Por tanto $w \notin A \cup C$. Como $X - D$ es un subconjunto abierto de X que contiene al punto $x \in \mathrm{cl}_X(F)$, existe $z \in (X - D) \cap F$.

Ahora bien, como $A \cap B \neq \emptyset$, resulta que $A \cup B$ es un subcontinuo de X. Además $p, w \in A \cup B$ y X es irreducible entre w y p. Por tanto, $X = A \cup B$. En particular $z \in A \cup B$ y, como $z \notin D$, sucede que $z \in A \cup C$. Entonces $A \cup C$ es un subcontinuo propio de X que tiene a p y z. De aquí que $z \in K(X,p) \subset X - F$. Esto contradice el hecho de que $z \in F$. Por lo tanto, F es cerrado en X. ■

Supongamos ahora que X es un continuo hereditariamente descomponible. Por el teorema anterior, el complemento de cada composante es cerrado en X. Es natural preguntarse si es posible determinar condiciones bajo las cuales, dichos complementos sean conjuntos sencillos de describir, por ejemplo, conjuntos de un sólo punto.

Para ilustrar lo anterior, consideremos el arco $X_1 = [0,1]$. Notemos que $K(X_1,0) = [0,1)$, así que $X_1 - K(X_1,0) = \{1\}$ es cerrado en X_1. Si ahora X_2 es el continuo seno de $\frac{1}{x}$ y $p = (1, \text{sen}(1))$, entonces $X_2 - K(X_2,p)$ es la pata límite de X_2 y, por tanto, cerrado en X_2. Notemos ahora que X_1 es cik en un punto de $X_1 - K(X_1,0)$, mientras que X_2 no es cik en ningún punto de $X_2 - K(X_2,p)$. Esto motiva el siguiente resultado.

Teorema 1.88. *Supongamos que X es un continuo y que p es un punto de irreducibilidad de X. Sea $F = X - X(K,p)$. Si existe un punto $y \in F$ tal que X es cik en y, entonces $F = \{y\}$.*

Demostración. Supongamos que $F \neq \{y\}$, entonces tomemos un punto $x \in F - \{y\}$. Sea $\epsilon > 0$ tal que $x \notin B(\epsilon, y)$. Como X es cik en y, existe una vecindad conexa G de y contenida en $B(\frac{\epsilon}{2}, y)$. Afirmamos que

1) $x \notin \text{cl}_X(G)$.

Para ver 1) notemos que, por el Corolario 1.6,

$$\text{cl}_X(G) \subset B(\epsilon, y) \subset X - \{x\}.$$

Por tanto, 1) es cierto. Afirmamos ahora que

2) $\text{cl}_X(G) \subset F$.

Para ver esto supongamos, por el contrario, que existe un punto $a \in \text{cl}_X(G) - F$. Entonces $a \in K(X,p)$, por lo que existe un subcontinuo propio A de X tal que $a, p \in A$. Como $a \in \text{cl}_X(G) \cap A$ resulta que $\text{cl}_X(G) \cup A$ es un subcontinuo de X que contiene a p y y. En vista de que $y \in F$ sucede que $X = \text{cl}_X(G) \cup A$. Ahora bien, como X es irreducible entre p y x, tenemos que $x \notin A$. Además, por 1), $x \notin \text{cl}_X(G)$. Luego $x \notin \text{cl}_X(G) \cup A = X$. Esto es un absurdo que proviene de haber supuesto que 2) es falso. Por tanto, 2) de cumple.

De acuerdo con 2)

$$K(X,p) = X - F \subset X - \text{cl}_X(G).$$

Esto es un absurdo pues de acuerdo con el Teorema 1.84 inciso i), $K(X,p)$ es densa en X. Con esto terminamos la demostración del teorema. ■

Así pues, si X es un continuo, y en el complemento de una composante de X podemos encontrar un punto y de conexidad en pequeño, entonces dicho complemento es cerrado e igual al conjunto cuyo único elemento es y.

Ahora mostraremos que si X es un continuo tal que $F = X - K(X,p)$ es cerrado, entonces F se encuentra "en la orilla" de X. Formalizamos esto en la siguiente definición.

Definición 1.89. *Sea X un continuo. Un subcontinuo F de X es* **terminal** *en X si para cada $B \in C(X)$ tal que $B \cap F \neq \emptyset$, se tiene que $B \subset F$ o $F \subset B$.*

Notemos que X y cada conjunto de un sólo punto son terminales en X. Para el continuo seno de $\frac{1}{x}$ su pata límite, que es el complemento de una de sus composantes, es terminal.

Ahora demostramos formalmente, que si el complemento de una composante es cerrado, entonces es terminal.

Teorema 1.90. *Supongamos que X es un continuo y que p es un punto de irreducibilidad de X tal que el conjunto $F = X - K(X,p)$ es cerrado en X. Entonces F es terminal en X.*

Demostración. Para ver que F es terminal en X, sea $B \in C(X)$ tal que $B \cap F \neq \emptyset$ y $B \not\subset F$. Mostraremos que $F \subset B$. Tomemos entonces un punto $m \in F$ y sean $y \in B \cap F$ y $x \in B - F$. En vista de que $x \in K(X,p)$, existe un subcontinuo propio C de X tal que $p, x \in C$. Como $x \in B \cap C$, tenemos que $B \cup C$ es un subcontinuo de X que contiene a p y y. Dado que $y \in F$ tenemos que $X = B \cup C$. Entonces $m \in B \cup C$ y como X es irreducible entre m y p, resulta que $m \notin C$. Luego, $m \in B$. Esto prueba que $F \subset B$ y, por tanto, F es terminal en X. ■

En el siguiente resultado resumimos los teoremas 1.87, 1.88 y 1.90.

Teorema 1.91. *Supongamos que X es un continuo hereditariamente descomponible. Si p es un punto de irreducibilidad de X y $F = X - K(X,p)$, entonces*

(1) F es un subcontinuo terminal en X.

(2) Si existe un punto $y \in F$ tal que X es cik en y, entonces $F = \{y\}$.

Cabe señalar que el teorema anterior aparece por primera vez en [3, Teorema 3.1]. En este trabajo, hemos separado la demostración probando las partes que son posibles de corroborar sin necesidad de suponer que el continuo en cuestión es hereditariamente descomponible.

Capítulo 2

La Propiedad de Kelley.

2.1 Introducción.

En este capítulo presentaremos la noción de la propiedad de Kelley, que se define en todos los puntos de un continuo. Asimismo, veremos algunos resultados básicos sobre esta propiedad, además de una versión local de ella. Más adelante mostraremos, entre otras cosas, que los continuos localmente conexos tienen la propiedad de Kelley. Posteriormente presentaremos una equivalencia de dicha propiedad, en términos de sucesiones, y después, en la Sección 2.5, una ligera variante de la propiedad de Kelley, definida para los subconjuntos cerrados de un continuo. La mayoría de los resultados que aquí se presentan, se encuentran probados en [1]. En cada caso daremos las referencias pertinentes.

En la literatura han aparecido una serie de funciones cuya continuidad equivale al hecho de que el dominio de definición posee la Propiedad de Kelley. En las secciones 2.6 y 2.7, presentaremos algunas de ellas.

2.2 Definición y Ejemplos.

A lo largo del presente capítulo, la letra X representará un continuo con métrica d.

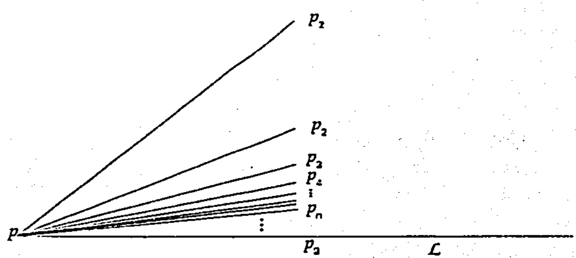
Definición 2.1. *Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley** *si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos a y b de X*

con $d(a, b) < \delta$ y para cada subcontinuo A de X que contenga al punto a, existe un subcontinuo B de X tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \epsilon$.

Esta noción fue introducida en 1942 por J. L. Kelley en el artículo [30]. En dicho trabajo, la propiedad anterior se estableció como la "propiedad 3.2". Algunos artículos hacen referencia a dicha propiedad como J. L. Kelley originalmente la enunció. Hoy en día es bastante común utilizar la expresión "propiedad de Kelley"en lugar de "propiedad 3.2". Para simplificar, otros artículos suelen utilizar la expresión "propiedad K".

La definición anterior puede parecer un tanto desagradable. Lo que informalmente nos dice es que si un punto se encuentra en un subcontinuo dado, entonces cualquier otro punto cercano a él, también se encuentra en un subcontinuo que está cercano al subcontinuo dado. En otras palabras, la propiedad de Kelley establece una cierta preservación de cercanía entre puntos y subcontinuos.

Si a es un elemento de un subcontinuo A de X y b se encuentra muy cerca de a, uno podría pensar que mediante un arco ordenado de $\{b\}$ a X en $C(X)$, siempre se puede encontrar un subcontinuo B de X que contiene a b y se encuentra tan cerca de A como queramos. Para el abanico armónico A_s (ver sección 1.10), es fácil convencerse de que ésta es la situación. Sin embargo, para el abanico armónico con pata alargada A_{sa}, la situación no es así.



Notemos que para el punto $p_0 = (1, 0)$, la pata alargada $\mathcal{L}$ y un punto de $\mathcal{L}$, que se encuentre muy cercano a p_0, no es posible encontrar un subcontinuo

B de A_{sa} que contenga a dicho punto y que esté cerca de $\mathcal{L}$, en vista de que, mientras $\mathcal{L}$ crece "hacia la derecha" de p_0, todos los subcontinuos que tienen al punto cercano, crecen "hacia su izquierda". En términos de la métrica de Hausdorff, los subcontinuos que contienen al punto se van alejando de L.

Así pues, mientras que el abanico armónico tiene la propiedad de Kelley, el abanico armónico con pata alargada, no la tiene. Procediendo de forma similar, nos podemos convencer de que el continuo seno de $\frac{1}{x}$, tiene la propiedad de Kelley, mientras que el continuo seno de $\frac{1}{x}$, con pata alargada, no la tiene.

Los ejemplos anteriores tambien nos indican que pequeños cambios en un continuo que tiene la propiedad de Kelley, pueden ser suficientes para destruir esta propiedad (en vista de que las respectivas patas alargadas, pueden considerarse tan pequeñas como sea necesario).

También notemos que, en la definición anterior, el número δ depende del número ϵ. A continuación presentamos una versión puntual de la propiedad de Kelley, en donde se involucra un número δ el cual, en esta ocasión, depende tanto de ϵ como del punto dado.

Definición 2.2. *Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley en un punto** $a \in X$ *si para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ *tal que si* $b \in X$, $d(a, b) < \delta$ *y si* $a \in A \in C(X)$, *entonces existe un subcontinuo* B *de* X *con* $b \in B$ *y* $H(A, B) < \epsilon$.

La noción anterior se le atribuye a R. Wardle, y aparece por primera vez en 1977, en [42, II], considerado el primero en el que se desarrolla un estudio sistemático de la propiedad de Kelley.

Lo que uno espera de las definiciones anteriores, es que la propiedad de Kelley dada por puntos, equivalga a la propiedad de Kelley en forma global. Esto es verdadero y a continuación escribimos dicho resultado como un teorema.

Teorema 2.3. *X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si X tiene dicha propiedad en cada uno de sus puntos.*

Más adelante daremos una variante de la propiedad de Kelley y luego mostraremos un resultado que tiene como consecuencia el teorema anterior.

Cabe señalar que en [42], R. Wardle sólo comenta entre líneas que el resultado anterior es cierto.

En el siguiente teorema mostramos que los homeomorfismos preservan la propiedad de Kelley, en su versión local.

Teorema 2.4. *Sea $f : X \to Y$ un homeomorfismo entre los continuos X y Y. Si X tiene la propiedad de Kelley en un punto $a \in X$, entonces Y tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, por el Teorema 1.35, la función $C(f)$ es continua. Entonces existe $\epsilon_0 > 0$ tal que si $A, B \in C(X)$ y $H(A, B) < \epsilon_0$, entonces $H(C(f)(A), C(f)(B)) < \epsilon$. Como X tiene la propiedad de Kelley en a, para ϵ_0, existe $\delta_0 > 0$ tal que si $b \in B(\delta_0, a)$ y $a \in A \in C(X)$, entonces existe $B \in C(X)$ con $b \in B$ tal que $H(A, B) < \epsilon_0$. En vista de que f es abierta, el conjunto $f(B(\delta_0, a))$ es un abierto en Y que tiene a $f(a)$. Por tanto, existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta, f(a)) \subset f(B(\delta_0, a))$. Tomemos un punto $y \in B(\delta, f(a))$ y un elemento $Q \in C(Y)$ tal que $f(a) \in Q$. Sea $b \in B(\delta_0, a)$ tal que $f(b) = y$. Notemos que $A = f^{-1}(Q)$ es un subcontinuo de X tal que $a \in A$. Entonces existe $B \in C(X)$ tal que $b \in B$ y $H(A, B) < \epsilon_0$. Notemos que $L = f(B)$ es un subcontinuo de Y tal que $y = f(b) \in L$. Además, por la elección de ϵ_0, resulta que

$$H(Q, L) = H(f(A), f(B)) = H(C(f)(A), C(f)(B)) < \epsilon.$$

Esto muestra que Y tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$. ■

Recordemos que una propiedad P es *topológica*, o bien un *invariante topológico*, si cada vez que un espacio Z tiene dicha propiedad, cualquier espacio homeomorfo a Z también tiene la propiedad. Combinando los dos últimos resultados, obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.5. *La propiedad de Kelley es un invariante topológico.*

Naturalmente estamos interesados en determinar condiciones, bajo las cuales, una función continua y suprayectiva f preserva la propiedad de Kelley. Por supuesto, si pedimos que f sea abierta e inyectiva, entonces f es un homeomorfismo y, por el teorema anterior, f preserva la propiedad de Kelley. Más adelante veremos que es suficiente con pedir que f sea abierta, por ejemplo.

2.3 Conexidad y Propiedad de Kelley

En esta sección probaremos que si un continuo es localmente conexo en un punto, entonces posee la propiedad de Kelley en dicho punto. Mostraremos, además, el resultado análogo con respecto a la conexidad en pequeño. Finalmente veremos que un continuo con la propiedad de Kelley es conexo en pequeño en cada uno de sus puntos de corte (ver Definición 1.66).

Teorema 2.6. *Si X es localmente conexo en un punto $a \in X$, entonces X tiene la propiedad de Kelley en a.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Tomemos un abierto y conexo V de X tal que $a \in V \subset B(\frac{\epsilon}{2}, a)$. Como V es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta, a) \subset V$. Consideremos $b \in B(\delta, a)$ y $A \in C(X)$ con $a \in A$. Mostraremos que existe $B \in C(X)$ con $b \in B$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Tomemos $B = \mathrm{cl}_X(V) \cup A$. Notemos que $\mathrm{cl}_X(V)$ y A son subcontinuos de X que tienen al punto a, así que B es un subcontinuo de X. Además $b \in B$ y, por el Corolario 1.6, $\mathrm{cl}_X(V) \subset B(\epsilon, a)$. Por tanto

$$B = \mathrm{cl}_X(V) \cup A \subset B(\epsilon, a) \cup A \subset N(\epsilon, A).$$

Por otra parte, $A \subset B \subset N(\epsilon, B)$. De esta manera podemos concluir que $H(A, B) < \epsilon$, lo cual termina la prueba. ■

Combinando este resultado con el Teorema 2.3, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.7. *Los continuos localmente conexos tienen la propiedad de Kelley.*

Ahora bien, con respecto a la conexidad en pequeño, que abreviamos como "cik", tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.8. *Si X es cik en un punto a de X, entonces X tiene la propiedad de Kelley en a.*

Demostración. La prueba de este resultado es una variante de la dada en el Teorema 2.6. Sea $\epsilon > 0$. De acuerdo con el Teorema 1.74, existe un abierto V de X tal que $a \in V \subset B(\frac{\epsilon}{2}, a)$ y, para cada $b \in V$, existe un subconjunto conexo C de X tal que $a, b \in C \subset B(\frac{\epsilon}{2}, a)$. Como V es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta, a) \subset V$. Tomemos un punto $b \in B(\delta, a)$ y $A \in C(X)$ con $a \in A$.

Notemos que $b \in V$, así que existe un subconjunto conexo C de X tal que $a, b \in C \subset B(\frac{\epsilon}{2}, a)$. Sea $B = \mathrm{cl}_X(C) \cup A$. Notemos que $\mathrm{cl}_X(C)$ y A son subcontinuos de X que tienen al punto a, así que B es un subcontinuo de X. Además $b \in B$ y, por el Corolario 1.6, $\mathrm{cl}_X(C) \subset B(\epsilon, a)$. Por tanto:

$$B = \mathrm{cl}_X(C) \cup A \subset B(\epsilon, a) \cup A \subset N(\epsilon, A).$$

Por otra parte $A \subset B \subset N(\epsilon, B)$. De esta manera podemos concluir que $H(A, B) < \epsilon$, lo cual termina la prueba. ■

Es claro que si X es un continuo con la propiedad de Kelley en un punto a, entonces a no tiene por que ser un punto de conexidad en pequeño, ni mucho menos un punto de conexidad local. Por ejemplo, el abanico armónico tiene la propiedad de Kelley en todos sus puntos, en particular en aquellos que se encuentran en la pata límite cuando se le quita el $(0, 0)$, en donde el continuo no es ni localmente conexo, ni conexo en pequeño. Esto muestra que los respectivos recíprocos de los teoremas anteriores no son ciertos.

Observemos que el punto $(0, 0)$ en la pata límite del abanico armónico A_s, es un punto de corte de A_s. Como mostramos a continuación si un punto p, donde X tiene la propiedad de Kelley, es de corte en X, entonces X es cik en p. Este resultado, el cual es un recíproco parcial del Teorema 2.8, aparece originalmente en [3, Teorema 2.1].

Teorema 2.9. *Supongamos que X tiene la propiedad de Kelley en un punto $p \in X$. Si p es un punto de corte de X, entonces X es cik en p.*

Demostración. Supongamos que $\epsilon_0 > 0$. Por el Teorema 1.75, basta probar que existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(\delta, p)$, entonces existe $E \subset X$ conexo, con $p, x \in E \subset B(\epsilon_0, p)$. Como $\{p\}$ es un punto de corte de X, existen dos subconjuntos abiertos, ajenos y no vacíos P y Q de X tales que $X - \{p\} = P \cup Q$. Definamos

$$P^* = P \cup \{p\} \qquad \text{y} \qquad Q^* = Q \cup \{q\}.$$

Por el Teorema 1.65, P^* y Q^* son subcontinuos de X. Tomemos puntos $x_0 \in P$ y $y_0 \in Q$. Sea $\epsilon_1 > 0$ tal que $B(\epsilon_1, x_0) \subset P$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\epsilon_1 < \epsilon_0$. Procediendo de la misma manera, tenemos que existe $0 < \epsilon_2 < \epsilon_0$, tal que $B(\epsilon_2, y_0) \subset Q$.

Como $P \cup B(\epsilon_0, p)$ es un abierto en X, tal que $P^* \subset P \cup B(\epsilon_0, p)$, por el Teorema 1.19, existe $\epsilon_3 > 0$ tal que $N(\epsilon_3, P^*) \subset P \cup B(\epsilon_0, p)$. De nueva cuenta podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\epsilon_3 < \epsilon_0$. Procediendo de la misma manera, existe $0 < \epsilon_4 < \epsilon_0$ tal que $N(\epsilon_4, Q^*) \subset Q \cup B(\epsilon_0, p)$.

Sea $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$. Es claro que $\epsilon < \epsilon_0$.

Ahora bien, como X tiene la Propiedad de Kelley en p, entonces existe $0 < \delta_1 < \epsilon$ tal que para cada $x \in X$ con $d(x,p) < \delta_1$ existe $D \in C(X)$ con $x \in D$ tal que $H(D, Q^*) < \epsilon$. De la misma manera, existe $0 < \delta_2 < \epsilon$ tal que para cada $x \in X$ con $d(x,p) < \delta_2$, existe $D' \in C(X)$ con $x \in D'$ tal que $H(D', P^*) < \epsilon$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, para cada $x \in X$ con $d(x,p) < \delta$ existen $D, D' \in C(X)$ con $x \in D \cap D'$ tales que $H(D, Q^*) < \epsilon$ y $H(D', P^*) < \epsilon$.

Tomemos $x \in B(\delta, p) - \{p\}$. Podemos suponer, sin perder generalidad, que $x \in P$. Tomemos $D \in C(X)$ con $x \in D$ y $H(D, Q^*) < \epsilon$. Entonces $Q^* \subset N(\epsilon, D)$ y, como $y_0 \in Q \subset Q^* \subset N(\epsilon, D)$, existe $a \in D$ tal que $d(a, y_0) < \epsilon < \epsilon_0$. Luego $a \in B(\epsilon_0, y_0) \subset Q$ y, por lo tanto, $D \cap Q \neq \emptyset$.

Como $D - \{p\} \subset P \cup Q$, entonces

$$D - \{p\} = (P \cap (D - \{p\})) \cup (Q \cap (D - \{p\})) = (P \cap D) \cup (Q \cap D).$$

Además $P \cap D$ y $Q \cap D$ son abiertos en D y $x \in P \cap D$. Entonces $P \cap D \neq \emptyset$. Más aún, $Q \cap D \neq \emptyset$, y los conjuntos $P \cap D$ y $Q \cap D$ son ajenos, pues $P \cap Q = \emptyset$. Luego, $P \cap D$ y $Q \cap D$ son una separación de $D - \{p\}$. Por tanto, aplicando el Teorema 1.65, tenemos que $E = (P \cap D) \cup \{p\}$ es un subcontinuo de X. Notemos que $p, x \in E$. Ahora veremos que $E \subset B(\epsilon_0, p)$. Para esto sea $e \in E$. Si $e = p$, es claro que $e \in B(\epsilon_0, p)$. Si $e \neq p$, entonces $e \in P \cap D$. Como $H(D, Q^*) < \epsilon$, entonces $D \subset N(\epsilon, Q^*)$. Ahora bien, $N(\epsilon, Q^*) \subset (Q \cup B(\epsilon_0, p))$, por lo que $D \subset Q \cup B(\epsilon_0, p)$. Luego, $e \in Q \cup B(\epsilon_0, p)$. Como $e \notin Q$, pues $e \in P$ y $P \cap Q = \emptyset$, resulta que $e \in B(\epsilon, p)$. Esto prueba que $E \subset B(\epsilon_0, p)$ y termina la demostración del teorema. ■

Corolario 2.10. *Un continuo con la propiedad de Kelley es cik en cada uno de sus puntos de corte.*

2.4 Propiedad de Kelley con Sucesiones

En esta sección, presentamos la forma clásica de enunciar la propiedad de Kelley en términos de sucesiones. En la literatura, dicho resultado aparece por primera vez en [11, p. 74], sin demostración. En otros artículos se ha utilizado esta equivalencia, y en ninguno de ellos aparece una prueba del mismo. Más aún, por conveniencia, la equivalencia aparece en más de una ocasión como la definición de la propiedad de Kelley, en cuyo caso los autores simplemente omiten la definición original dada en términos de epsilones y deltas. En este trabajo no presentaremos una prueba, y optamos por referir al lector a [1, Teorema 2.7] en donde se da una demostración del mismo.

Teorema 2.11. *Para $a \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene la propiedad de Kelley en a.*

2. *Para todo $A \in C(X)$ con $a \in A$ y para toda sucesión $(a_n)_n$ en X tal que $a_n \to a$, existe una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to A$.*

En el artículo [12, Observación 1] aparece, sin prueba, otra caracterización de la propiedad de Kelley en términos de sucesiones. A continuación mencionamos y probamos dicho resultado.

Teorema 2.12. *Para $a \in X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X tiene la propiedad de Kelley en a.*

2. *Para cada $\epsilon > 0$, cada $A \in C(X)$ con $a \in A$ y para toda sucesión $(a_n)_n$ en X tal que $a_n \to a$, existe una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, si $(A_{n_k})_k$ es una subsucesión de $(A_n)_n$ tal que $A_{n_k} \to A_0$, para algún $A_0 \in C(X)$, entonces $H(A, A_0) < \epsilon$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $\epsilon > 0$, $A \in C(X)$ con $a \in A$ y $(a_n)_n$ una sucesión en X tal que $a_n \to a$. por el Teorema 2.11, existe $(A_n)_n \subset C(X)$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to A$. Entonces si $(A_{n_k})_k$ es una subsucesión de $(A_n)_n$, tal que $A_{n_k} \to A_0$, para algún $A_0 \in C(X)$, se tiene que $A_0 = A$ y, por tanto, $H(A, A_0) = 0 < \epsilon$.

($\Leftarrow$) Supongamos que X no tiene la propiedad de Kelley en a. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para cada $\delta > 0$, existen $a_\delta \in B(\delta, a)$ y $A_\delta \in C(X)$ con $a \in A_\delta$ tal que, para cada $B \in C(X)$ con $a_\delta \in B$, sucede que $H(B, A_\delta) \geq \epsilon$

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $\delta_n = \frac{1}{n}$. Entonces existen $a_n \in B(\delta_n, a)$ y $A_n \in C(X)$ con $a \in A_n$ tal que

(*) para cada $B \in C(X)$ con $a_n \in B$ sucede que $H(B, A_n) \geq \epsilon$.

Dada la compacidad de $C(X)$ podemos suponer, sin perder generalidad, que $A_n \to A$ para algún subcontinuo A de X. Aplicando 2 para el número $\frac{\epsilon}{3}$, el subcontinuo A de X que tiene a a, y la sucesión $(a_n)_n$ en X que converge a a, se tiene que existe una sucesión $(B_n)_n$ en $C(X)$ tal que $a_n \in B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, si $(B_{n_k})_k$ es una subsucesión de $(B_n)_n$, que converge a algún subcontinuo B de X, resulta que $H(A, B) < \frac{\epsilon}{3}$.

Consideremos una subsucesión $(B_{n_k})_k$ de $(B_n)_n$ que converge a un subcontinuo B de X. Notemos que la subsucesión $(A_{n_k})_k$ de $(A_n)_n$ converge a A. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $H(B_{n_k}, B) < \frac{\epsilon}{3}$ y $H(A_{n_k}, A) < \frac{\epsilon}{3}$. Notemos entonces que, para un elemento $k \geq N$, B_{n_k} es un subcontinuo de X que tiene al punto a_{n_k} y, además,

$$\begin{aligned} H(B_{n_K}, A_{n_k}) &< H(B_{n_k}, B) + H(B, A) + H(A, A_{n_k}) \\ &< \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} + \tfrac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Como esto contradice (*), tenemos que X tiene la propiedad de Kelley en a. ■

2.5 Una Variante de la Propiedad de Kelley.

Ahora mostraremos una manera natural de hablar tanto de la propiedad de Kelley en un subconjunto cerrado de un continuo dado, como de la propiedad de Kelley en los puntos de dicho subconjunto.

Definición 2.13. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley en un punto** $a \in A$ *si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, a) > 0$ tal que si $b \in X$ satisface que $d(a, b) < \delta$ y $K \in C(X)$ con $a \in K$, entonces existe $L \in C(X)$ con $b \in L$ tal que $H(K, L) < \epsilon$.*

Definición 2.14. *Sean X un continuo y $A \in 2^X$. Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley en** A *si para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cada $a \in A$ y $b \in X$ con $d(a, b) < \delta$ y para todo $K \in C(X)$ con $a \in K$, existe $L \in C(X)$ con $b \in L$ tal que $H(K, L) < \epsilon$.*

Es claro que X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley en cada subcontinuo de X. Esta ligera variante de la propiedad de Kelley, nos permite probar el siguiente resultado, que utilizaremos más adelante (ver Teorema 3.4).

Teorema 2.15. *Sean X un continuo y $A \in C(X)$. Entonces X tiene la propiedad de Kelley en A si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de A.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Es inmediata.

($\Leftarrow$) Supongamos, por el contrario, que X no tiene la propiedad de Kelley en A. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que, para toda $\delta > 0$, es posible encontrar $a_\delta \in A$ y $b_\delta \in X$ tales que $d(a_\delta, b_\delta) < \delta$. Además existe $K_\delta \in C(X)$ con $a_\delta \in K_\delta$ tal que, para cada $L_\delta \in C(X)$ con $b_\delta \in L_\delta$, tenemos que $H(K_\delta, L_\delta) \geq \epsilon$.

En particular, si damos $\delta_n = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n \in A$ y $b_n \in X$ tales que $d(a_n, b_n) < \delta_n$. Además existe $K_n \in C(X)$ con $a_n \in K_n$ tal que

(∗) para cada $L \in C(X)$ con $b_n \in L$, tenemos que $H(K_n, L) \geq \epsilon$.

Como X es compacto, por el Teorema 1.27, existen subsucesiones $(a_{n_m})_m$ y $(b_{n_m})_m$ de $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$, respectivamente, tales que $a_{n_m} \to a$ y $b_{n_m} \to b$ para algún par de puntos $a, b \in X$. Como también A es compacto y cada punto a_{n_m} se encuentra en A, resulta que $a \in A$.

Ahora bien, como $C(X)$ es compacto, podemos suponer que la sucesión $(K_{n_m})_m$ converge a un elemento $K_0 \in C(X)$. Notemos que $a_{n_m} \to a$, $K_{n_m} \to K_0$ y $a_{n_m} \in K_{n_m}$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Entonces, por el Corolario 1.16, resulta que $a \in K_0$.

Como X tiene la propiedad de Kelley en el punto a de A, para $\frac{\epsilon}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $J \in C(X)$ satisfacen que $d(x, a) < \delta$ y $a \in J$, entonces existe $M \in C(X)$ con $x \in M$ tal que $H(J, M) < \frac{\epsilon}{2}$.

Debido a que $a_{n_m} \to a$ y $b_{n_m} \to b$ sabemos, por la continuidad de la función d, que $d(a_{n_m}, b_{n_m}) \to d(a, b)$. Ahora bien $d(a_{n_m}, b_{n_m}) < \frac{1}{n_m}$, para cada $m \in \mathbb{N}$, así que $d(a_{n_m}, b_{n_m}) \to 0$. Por tanto $d(a, b) = 0$ y de aquí que

$a = b$. Esto muestra que $b_{n_m} \to a$. Por tanto, para δ, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_{n_m}, a) < \delta$ para cada $m \geq N_1$

Ahora bien como $K_{n_m} \to K_0$, para $\frac{\epsilon}{2}$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $H(K_0, K_{n_m}) < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $m \geq N_2$. Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$ y sea $m \geq N$. Como K_0 es un subcontinuo de X que contiene a a y $d(b_{n_m}, a) < \delta$, existe $L \in C(X)$ con $b_{n_m} \in L$ tal que $H(K_0, L) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego

$$H(K_{n_m}, L) \leq H(K_{n_m}, K_0) + H(K_0, L) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Hemos encontrado un subcontinuo L de X que contiene al punto b_{n_m} y es tal que $H(A_{n_m}, L) < \epsilon$. Esto contradice (*). Por lo tanto, X tiene la propiedad de Kelley en A. ■

Notemos ahora que el Teorema 2.3 es una consecuencia inmediata del teorema anterior. En efecto, X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley en cada elemento $A \in C(X)$ y, por el teorema anterior, esto equivale a decir que X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de cada subcontinuo de X. Esto es, que X tiene la propiedad de Kelley en cada uno de sus puntos.

2.6 La Función α.

En esta sección estudiaremos una función, la cual está bastante ligada a la propiedad de Kelley. Para cada $a \in X$ definimos

$$\alpha_X(a) = \{ A \in C(X) : a \in A \}. \tag{2.1}$$

A menos que entren en juego varios continuos, acordaremos llamar a $\alpha_X(a)$ simplemente por $\alpha(a)$. En el siguiente teorema veremos que la asociación anterior define una función $\alpha \colon X \to C^2(X)$.

Teorema 2.16. *Dado $a \in X$ se tiene que $\alpha(a) \in C^2(X)$. Más aún, $\alpha(a)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Sea $a \in X$. Por definición $\alpha(a) \subset C(X)$. Además $\alpha(a)$ es no vacío, pues $X \in \alpha(a)$. Notemos que:

$$C(X) - \alpha(a) = \{ A \in C(X) : a \notin A \} = \{ A \in C(X) : A \subset X - \{a\} \}.$$

Como $\{a\}$ es cerrado en X, se tiene que $X - \{a\}$ es abierto en X. Entonces, por el Teorema 1.18, $C(X) - \alpha(a)$ es abierto en $C(X)$. Luego, $\alpha(a)$ es cerrado en $C(X)$.

Mostraremos ahora que $\alpha(a)$ es conexo por trayectorias. Para esto, sean $A, B \in \alpha(a)$. Tomemos un arco ordenado $\lambda \colon I \to C(X)$ de A a X. Notemos que $\lambda(I) \subset \alpha(a)$. En efecto, si $C \in \lambda(I)$ entonces existe $t \in I$ tal que $\lambda(t) = C$. Como λ es un arco ordenado, $A = \lambda(0) \subset \lambda(t) = C$, así que $C \in \alpha(a)$ pues $a \in A$. Esto muestra que existe una trayectoria de A a X en $\alpha(a)$. De manera similar, existe una trayectoria de B a X en $\alpha(a)$. Como conectarse por trayectorias define una relación de equivalencia, existe una trayectoria de A a B en $\alpha(a)$. De esta manera, $\alpha(a)$ es conexo por trayectorias y, por tanto, es conexo. ■

En el siguiente resultado, presentamos una sencilla aplicación del teorema anterior.

Teorema 2.17. *Si $p, x \in X$, entonces:*

$$\mathcal{F} = \{ K \in C(X) : p, x \in K \} \tag{2.2}$$

es un elemento de $C^2(X)$. Más aún, $\mathcal{F}$ es conexo por trayectorias.

Demostración. Por definición $\mathcal{F} \subset C(X)$. Además, $\mathcal{F}$ es no vacío pues contiene a X. Notemos que:

$$\mathcal{F} = \alpha(p) \cap \alpha(x)$$

y, por el teorema anterior, $\alpha(p)$ y $\alpha(x)$ son cerrados en $C(X)$. Luego, $\mathcal{F}$ es cerrado en $C(X)$. Para mostrar que $\mathcal{H}$ es conexo por trayectorias, sean $A, B \in \mathcal{F}$. Supongamos que $\lambda \colon I \to C(X)$ un arco ordenado de A a X. Como $p, x \in \mathcal{F}$, sucede que λ es una trayectoria de A a X en $\mathcal{F}$. De manera similar, podemos construir una trayectoria de B a X en $\mathcal{F}$. En vista de que conectarse por trayectorias define una relación de equivalencia, $\mathcal{F}$ es conexo por trayectorias. ■

A continuación daremos dos resultados más acerca de la función α.

Teorema 2.18. *La función $\alpha: X \to C^2(X)$ es $\overline{SC}$.*

Demostración. Sean $a \in X$ y $(a_n)_n \subset X$ tales que $a_n \to a$. Por el Teorema 1.31, basta probar que $\limsup \alpha(a_n) \subset \alpha(a)$. Sea $A \in \limsup \alpha(a_n)$. Entonces $A \in C(X)$ y, por el Teorema 1.14, existen una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots$ y puntos $A_{n_k} \in \alpha(a_{n_k})$, para toda $k \in \mathbb{N}$, tales que $A_{n_k} \to A$. Entonces tenemos que $a_{n_k} \to a$, $A_{n_k} \to A$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, podemos concluir que $a \in A$, lo cual significa que $A \in \alpha(a)$. Por tanto, $\limsup \alpha(a_n) \subset \alpha(a)$. ■

El siguiente teorema relaciona la continuidad de α con la propiedad de Kelley en X (el dominio de α).

Teorema 2.19. *Dado $a \in X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *α es $\underline{SC}$ en a.*
2. *α es continua en a.*
3. *X tiene la propiedad de Kelley en a.*

Demostración. Veamos que 1 implica 2. Por el Teorema 2.18 tenemos que α es $\overline{SC}$ en a. Como estamos suponiendo que α también es $\underline{SC}$ en a, sucede que α es continua en a, de acuerdo con el Teorema 1.29.

La prueba de que 2 implica 1 se dio también en el Teorema 1.29.

Para terminar la prueba, veremos que las afirmaciones 1 y 3 son equivalentes. Para ver que 1 implica 3, sea $(a_n)_n \subset X$ tal que $a_n \to a$. Por el Teorema 1.31, $\alpha(a) \subset \liminf \alpha(a_n)$. Entonces, para un elemento $A \in \alpha(a)$, existe $(A_n)_n \subset C(X)$ tal que $A_n \to A$ y $A_n \in \alpha(a_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el Teorema 2.11, podemos concluir que X tiene la propiedad de Kelley en a.

Ahora veamos que 3 implica 1. Sea $\epsilon > 0$. Entonces existe $\delta = \delta(a, \epsilon) > 0$ tal que, para todo $b \in B(\delta, a)$ y todo $A \in \alpha(a)$, existe $B \in \alpha(b)$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que para todo $b \in B(\delta, a)$ se tiene que $\alpha(a) \subset N(\epsilon, \alpha(b))$. Por tanto, podemos concluir que α es $\underline{SC}$ en a y así queda demostrado el teorema. ■

Por el Teorema 1.34, toda función semicontinua por arriba , es continua en un conjunto G_δ-denso. Aplicando este resultado a la función α, resulta que existe un subconjunto A de X que es G_δ-denso y, además, α es continua en cada punto de A. De acuerdo con la equivalecia entre las partes 2 y 3 del Teorema 2.19, lo anterior implica que X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de A. De esta manera, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Todo continuo tiene la propiedad de Kelley en un conjunto G_δ-denso.*

2.7 Continuos Homogéneos.

El Teorema 2.20, nos permite exhibir una nueva clase de continuos que poseen la propiedad de Kelley.

Definición 2.21. *Un espacio topológico Y es* **homogéneo** *si para cada par de puntos $p, q \in Y$ existe un homeomorfismo $f\colon Y \to Y$ tal que $f(p) = q$.*

La circunferencia es un ejemplo de un continuo homogéneo. Es conocido que cualquier continuo que a su vez es un grupo topológico, es también homogéneo. Otros continuos homogéneos son más complicados de describir. Para un estudio sobre esta clase importante de continuos, referimos al lector a los artículos [40] y [33]. En relación con la propiedad de Kelley, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.22. *Los continuos homogéneos tienen la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sean X un continuo homogéneo y $p \in X$. De acuerdo al Teorema 2.20, X tiene la propiedad de Kelley en un punto $q \in X$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $f\colon X \to X$ tal que $f(q) = p$. Entonces, por el Teorema 2.4, X tiene la propiedad de Kelley en p. Por tanto, por el Teorema 2.3, X tiene la propiedad de Kelley. ■

En [42, Teorema 3.1] se muestra el siguiente resultado.

Teorema 2.23. *Los continuos hereditariamente indescomponibles tienen la propiedad de Kelley.*

Una prueba detallada del mismo, puede verse en [1, Teorema4.8].

2.8 Continuos no Métricos.

La propiedad de Kelley ha sido considerada para continuos que no tienen por que ser métricos. En dicha situación, pensamos que si X es un espacio compacto, conexo y Hausdorff entonces

$$C(X) = \{ A \subset X : A \text{ es compacto, conexo y no vacío} \}$$

posee la topología de Vietoris ([26, Definición 1.1]). La definición queda expresada entonces como sigue.

Definición 2.24. *Supongamos que X es un espacio compacto, conexo y Hausdorff. Decimos que X tiene la* **propiedad de Kelley** *si para cada punto $p \in X$, cada subconjunto compacto y conexo K de X con $p \in K$ y cada abierto $\mathcal{U}$ en $C(X)$ con $K \in \mathcal{U}$, existe un abierto U en X con $p \in U$ tal que si $q \in U$, entonces existe un subconjunto compacto y conexo L de X con $q \in L$ y $L \in \mathcal{U}$.*

La noción anterior fue establecida por W. J. Charatonik en [16]. En dicho artículo, el autor menciona que los Teoremas 2.18 y 2.19 permanecen válidos si suponemos que X no es métrico y que, para ver esto, es suficiente con usar redes en lugar de sucesiones. En [34] I. Lončar también estudia la propiedad de Kelley para espacios no métricos y, utilizando límites inversos de sistemas inversos σ-dirigidos, hace ver que los Teoremas 2.18 y 2.19 permanecen válidos sin necesidad de suponer que X sea métrico. Utilizando estas mismas ideas, I. Lončar generaliza el Corolario 2.7 para continuos no métricos.

En las secciones 3 y 4 de [16], W. J. Charatonik prueba que existe un continuo no métrico y homogéneo, que no posee la propiedad de Kelley. Por consiguiente, en el Teorema 2.22, la hipótesis de metrizabilidad es esencial.

2.9 Retracciones.

En [42, Teorema 2.9], R. Wardle prueba que las retracciones preservan la propiedad de Kelley. Una prueba detallada de este resultado puede verse en [1, Teorema 4.11]. Recordemos que, si Y y Z son espacios topológicos y $Z \subset Y$, entonces un **retracto de Y en Z** es una función continua $r\colon Y \to Z$ tal que $r_{|Z}$ es la función identidad. A la función r se le llama una **retracción** de

Y en Z. A continuación, mostramos que los retractos preservan la propiedad de Kelley, sin necesidad de suponer que el continuo en cuestión es métrico.

Teorema 2.25 ([16, Teorema 2.8]). *Supongamos que X es un espacio compacto, conexo y Hausdorff. Si X tiene la propiedad de Kelley y Y es un retracto de X, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sea $r: X \to Y$ una retracción de X en Y. Tomemos un punto p en Y, un subconjunto compacto y conexo K de Y tal que $p \in K$, y un abierto $\mathcal{U}$ en $C(Y)$ tal que $K \in \mathcal{U}$. Por el Teorema 1.36, la función inducida $C(r): C(X) \to C(Y)$ es continua. Además, para cada $A \in C(Y)$

$$C(r)(A) = r(A) = A$$

pues $r_{|Y}$ es la identidad. Entonces $C(r)$ es una retracción de $C(X)$ en $C(Y)$. Utilizando esto y el hecho de que $\mathcal{U}$ es abierto en $C(Y)$, resulta que $\mathcal{V} = C(r)^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en $C(X)$. Además, $p \in K \in \mathcal{V}$. Como X tiene la propiedad de Kelley, existe un abierto V en X con $p \in V$ y tal que si $q \in V$, entonces existe un subconjunto compacto y conexo L de X tal que $q \in L \in \mathcal{V}$.

Sea $U = V \cap Y$ y notemos que U es abierto en Y. Supongamos ahora que $q \in U$. Entonces existe un subconjunto compacto y conexo L de X tal que $q \in L \in \mathcal{V}$. Luego, $r(L)$ es un subconjunto compacto y conexo de Y tal que $q \in r(L) \in \mathcal{U}$. Esto prueba que Y tiene la propiedad de Kelley. ■

2.10 Funciones Refinables.

En esta sección introducimos las funciones refinables y su relación con la propiedad de Kelley.

Definición 2.26. *Decimos que la función continua $g: X \to Y$ entre los continuos X y Y es* **refinable** *si para cada $\epsilon > 0$ existe una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ tal que $diam(f^{-1}(y)) < \epsilon$, para cada $y \in Y$ y, si e representa la métrica de Y, entonces* $\sup\{ e(f(x), g(x)) : x \in X \} < \epsilon$.

En [28, Teorema 2.1] H. Kato demostró el siguiente resultado.

Teorema 2.27. *Las funciones refinables preservan la propiedad de Kelley.*

Más adelante veremos que las funciones confluentes preservan la propiedad de Kelley (Corolario 3.5). Por cuestiones de tiempo, no incluímos en este trabajo una demostración del Teorema 2.27.

2.11 Tres Funciones Especiales.

En esta sección se presentarán tres funciones, definidas a partir de un continuo X, cuya continuidad equivale a que X posea la propiedad de Kelley. Recordemos que la letra I representa el intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real. Consideraremos que μ es una función de Whitney normalizada en $C(X)$.

2.11.1 La Función F_μ.

Para cada $(a, t) \in X \times I$ definimos

$$F_\mu(a, t) = \{ A \in \alpha(a) : \mu(A) = t \}.$$

Informalmente hablando, F_μ reúne a todos aquellos elementos de $\alpha(a)$ que "miden" t.

La función F_μ fue definida en [30] por J. L. Kelley. En dicho artículo se prueba que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces F_μ es continua. En 1977, R. Wardle observó en [42] que la continuidad de F_μ implica que X tiene la propiedad de Kelley. Este resultado aparece probado por S. B. Nadler, Jr. en el libro [38, Teorema 16.14], publicado en 1978. Posteriormente, en [1] se hace un tratamiento diferente de la función F_μ. Primero se prueba que F_μ siempre es semicontinua por arriba, y después se ve que la semicontinuidad por abajo de F_μ, es equivalente a la propiedad de Kelley en X.

En el presente trabajo enunciaremos sin prueba, los resultados de [1], dando en cada caso la referencia correspondiente.

Teorema 2.28 ([1, Teorema 3.1]). $F_\mu(a, t) = \alpha(a) \cap \mu^{-1}(t)$ *para cada* $(a, t) \in X \times I$.

Teorema 2.29 ([1, Teorema 3.2]). $F_\mu(a, t) \in C^2(X)$ *para todo* $(a, t) \in X \times I$.

Teorema 2.30 ([1, Teorema 3.3]). *La función* $F_\mu : X \times I \to C^2(X)$ *es semicontinua por arriba.*

Teorema 2.31 ([1, Teorema 3.5]). *Un continuo* X *tiene la propiedad de Kelley en un punto* $a \in X$ *si y sólo si la función* F_μ *es continua en* (a, t) *para toda* $t \in I$.

Corolario 2.32 ([1, Corolario 3.1]). *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si la función F_μ es continua.*

Con ayuda de la función F_μ podemos ver que los continuos hereditariamente indescomponibles tienen la propiedad de Kelley. Notemos que si X es hereditariamente indescomponible y $A, B \in C(X)$ son tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces A y B son comparables. En efecto, si esto no es así, entonces haciendo $C = A \cup B$ resulta que A y B son dos subcontinuos propios de C. Luego, C es descomponible, lo cual contradice el hecho de que X es hereditariamente indescomponible.

Teorema 2.33. *Si X es hereditariamente indescomponible, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Consideremos un elemento $(a, t) \in X \times I$ y una sucesión $(a_n, t_n)_n$ en $X \times I$ tal que $(a_n, t_n) \to (a, t)$. Mostraremos que F_μ es continua utilizando el Teorema 1.23. Supongamos, por tanto, que $F_\mu(a_n, t_n) \to \mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in C^2(X)$. Veremos que $\mathcal{A} = F_\mu(a, t)$. Para esto, tomemos un elemento $A \in \mathcal{A}$. Como $\mathcal{A} = \liminf F_\mu(a_n, t_n)$, existe una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$ tal que $A_n \to A$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in F_\mu(a_n, t_n)$. Como $A_n \to A$ y la función μ es continua, sucede que $t_n = \mu(A_n) \to \mu(A)$. También es cierto que $t_n \to t$ así que $\mu(A) = t$. Por otra parte, como $A_n \to A$, $a_n \to a$ y $a_n \in A_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos, por el Corolario 1.16, que $a \in A$. Luego $A \in F_\mu(a, t)$. Esto prueba que $\mathcal{A} \subset F_\mu(a, t)$.

Para mostrar la otra contención, supongamos ahora que $A \in F_\mu(a, t)$. Dada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 2.29, $F_\mu(a_n, t_n) \neq \emptyset$ por lo que existe $A_n \in F_\mu(a_n, t_n)$. Como $C(X)$ es compacto, existe una subsucesión A_{n_k} de A_n tal que $A_{n_k} \to B$ para algún $B \in C(X)$. Notemos que $B \in \limsup F_\mu(a_n, t_n) = \mathcal{A}$. Veremos, a continuación, que $B = A$. En efecto, como $A_{n_k} \to B$, $a_{n_k} \to a$ y $a_{n_k} \in A_{n_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.16, resulta que $a \in B$. Por tanto $A \cap B \neq \emptyset$ y, en vista de que X es hereditariamente indescomponible, tenemos que $A \subset B$ o bien $B \subset A$.

Ahora bien, por la continuidad de μ, tenemos que $t_{n_k} = \mu(A_{n_k}) \to \mu(B)$. Como también $t_{n_k} \to t$, resulta que $\mu(B) = t$, así que $\mu(B) = \mu(A)$. Tenemos entonces que A y B son dos elementos comparables y tales que $\mu(A) = \mu(B)$. Luego $A = B$. Entonces $A \in \mathcal{A}$ y con esto $F_\mu(A, t) \subset \mathcal{A}$. Tenemos entonces que $F_\mu(a, t) = \mathcal{A}$. Luego, por el Teorema 1.23, F_μ es continua y, por el Corolario 2.32, X tiene la propiedad de Kelley. ■

2.11.2 La Función F^*_μ.

Otra función que cumple con las antes mencionadas propiedades es la llamada función F^*_μ, definida en [15] por W. J. Charatonik. Para cada $(A,t) \in C(X) \times I$, definimos

$$F^*_\mu(A,t) = \begin{cases} \{K \in C(X) \colon A \subset K \text{ y } \mu(K) = t\} & \text{si } \mu(A) \leq t, \\ \{A\} & \text{si } \mu(A) \geq t. \end{cases}$$

Como en la sección anterior, en este trabajo presentaremos sin prueba los resultados correspondientes a la función F^*_μ, indicando en cada caso la referencia apropiada.

Teorema 2.34 ([1, Teorema 3.7]). *La función F^*_μ está bien definida y su imagen se encuentra en $C^2(X)$.*

Por lo tanto se tiene que $F^*_\mu : C(X) \times I \to C^2(X)$.

A continuación veremos un teorema cuya demostración es inmediata de las definiciones de F_μ y F^*_μ. Dicho resultado nos dice cómo están relacionadas estas funciones.

Teorema 2.35 ([1, Lema 3.1]). *Para cada $(a,t) \in X \times I$, se tiene que $F_\mu(a,t) = F^*_\mu(\{a\},t)$.*

Teorema 2.36 ([1, Teorema 3.8]). *La función F^*_μ es semicontinua por a-rriba.*

Teorema 2.37 ([1, Teorema 3.9]). *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley en un punto $a \in X$ si y sólo si la función F^*_μ es continua en (A,t) para todo $(A,t) \in \alpha(a) \times I$.*

Teorema 2.38 ([1, Corolario 3.3]). *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si la función F^*_μ es continua.*

2.11.3 La Función L_μ.

La tercera función que veremos, es la llamada función L_μ, definida en [1] por G. Acosta. Para cada $(A,t) \in C(X) \times I$ definimos:

$$L_\mu(A,t)=\begin{cases}\bigcup\{K\in C(X)\colon A\subset K \text{ y } \mu(K)=t\} & \text{si } \mu(A)\leq t,\\ A & \text{si } \mu(A)=t.\end{cases}$$

De nueva cuenta, los resultados relacionados con la función L_μ, se enuncian a continuación sin demostración, indicando en cada caso la referencia.

Teorema 2.39 ([1, Teorema 3.10]). *La función L_μ está bien definida y su imagen se encuentra en $C(X)$.*

Por lo tanto $L_\mu\colon C(X)\times I\to C(X)$. Es fácil ver que si $A\in C(X)$ entonces:

1. $L_\mu(A,0)=A$ y $L_\mu(A,1)=X$.
2. $L_\mu(A,t)\subset L_\mu(A,s)$ siempre que $t,s\in I$ sean tales que $t\leq s$.
3. $L_\mu(A,t)=\bigcup F_\mu^*(A,t)$, para toda $t\in I$.

Teorema 2.40 ([1, Teorema 3.12]). *Si un continuo X tiene la propiedad de Kelley en un punto $a\in X$, entonces la función L_μ es continua en (A,t) para todo $(A,t)\in\alpha(a)\times I$.*

Corolario 2.41 ([1, Corolario 3.4]). *Si un continuo X tiene la propiedad de Kelley, entonces la función L_μ es continua.*

Recordemos que una **contracción** en un espacio topológico Y, es una función continua $h:Y\times I\to Y$ para la cual existe un punto $y_0\in Y$ tal que $h(y,0)=y$ y $h(y,1)=y_0$, para cada $y\in Y$. En tal situación, decimos que el espacio Y es **contraíble**.

El resultado anterior, combinado con la propiedad 1 enunciada previamente, indica que si X tiene la propiedad de Kelley, entonces la función L_μ es una contracción en $C(X)$. En particular, esto implica que el hiperespacio $C(X)$ es contraíble. Originalmente J. L. Kelley definió esta propiedad con el propósito de demostrar que es una condición suficiente para garantizar la contractibilidad de $C(X)$ (y también la de 2^X). Posteriormente, han aparecido una serie de artículos en donde la propiedad de Kelley juega un papel importante. Hoy en día, esta propiedad es interesante por sí misma. Cabe mencionar que la propiedad de Kelley no es una condición necesaria para garantizar la contractibilidad de $C(X)$. En la página 64 de [1], se prueba que si X es el continuo seno de $\frac{1}{x}$ con pata alargada, el cual no tiene la propiedad de Kelley, entonces el hiperespacio $C(X)$ es contraíble.

Terminamos el presente capítulo mencionando dos resultados, que involucran a la propiedad L_μ.

Teorema 2.42 ([1, Teorema 3.13]). *Si para cualquier función de Whitney normalizada $\mu\colon C(X) \to I$, la función L_μ es continua, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Corolario 2.43 ([1, Corolario 3.6]). *Un continuo X tiene la propiedad de Kelley si y sólo si la función L_μ es continua, para cualquier función de Whitney normalizada $\mu\colon C(X) \to I$.*

Capítulo 3

Preservación de la Propiedad de Kelley.

3.1 Introducción.

En [38], S. B. Nadler, Jr. preguntó si se puede dar una clasificación de las funciones continuas que preservan la propiedad de Kelley. Dicha pregunta es tan general que, a la fecha, sólo se tiene una pequeña lista de ellas (por ejemplo, las retracciones y las funciones refinables, de acuerdo con los teoremas 2.25 y 2.27). En [8], J. J. Charatonik realizó la pregunta de S. B. Nadler, Jr. en su versión puntual.

En este capítulo, presentamos un estudio detallado del artículo [8], con respecto a la preservación puntual de la propiedad de Kelley. Como consecuencia de los resultados de dicho artículo, se obtienen algunos teoremas anteriormente conocidos, que involucran la preservación global de la propiedad de Kelley.

3.2 Preservación Local.

En la Definición 1.41 presentamos una versión local de la confluencia con respecto a los puntos del dominio en el cual se encuentra definida una función. Más adelante, en la Definición 1.43, hicimos algo similar, pero con respecto a los puntos de la imagen de la función en cuestión. Ambas nociones se utilizarán en esta sección.

Supongamos ahora que $f: X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Por el Teorema 1.35, la función inducida $C^2(f): C^2(X) \to C^2(Y)$ también es continua. Además, podemos considerar las funciones $\alpha_X : X \to C^2(X)$ y $\alpha_Y : Y \to C^2(Y)$ en donde, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$:

$$\alpha_X(x) = \{ A \in C(X) : x \in A \} \text{ y}$$
$$\alpha_Y(y) = \{ B \in C(Y) : y \in B \}.$$

Lo anterior nos lleva a considerar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C^2(X) & \xrightarrow{C^2(f)} & C^2(Y) \\ \alpha_X \uparrow & & \uparrow \alpha_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Teorema 3.1 **([8, Proposición 1]).** *El diagrama anterior conmuta en un punto $x \in X$, esto es,*

$$C^2(f)(\alpha_X(x)) = \alpha_Y(f(x))$$

si y sólo si la función f es confluente relativa a x.

Demostración. ($\Leftarrow$) Por definición $C^2(f)(\alpha_X(x)) = \{C(f)(A) : A \in \alpha_X(x)\}$ y $\alpha_Y(f(x)) = \{B \in C(Y) : f(x) \in B\}$. Para mostrar que dichas familias son iguales, tomemos primero un elemento $B \in C^2(f)(\alpha_X(x))$. Entonces $B = C(f)(A)$ para algún $A \in \alpha_X(x)$. En vista de que $x \in A$, tenemos que $f(x) \in B$. Por tanto, B es un subcontinuo de Y que contiene a $f(x)$. Entonces $B \in \alpha_Y(f(x))$. Por tanto, siempre sucede que $C^2(f)(\alpha_X(x)) \subset \alpha_Y(f(x))$.

Ahora tomemos un elemento $B \in \alpha_Y(f(x))$. Consideremos la componente A de $f^{-1}(B)$ que contiene a x. Notemos que $A \in \alpha_X(x)$. Como f es confluente en x, se tiene que $f(A) = B$. Ahora bien, $C(f)(A) = f(A)$, de donde $B = C(f)(A)$. Esto muestra que $B \in C^2(f)(\alpha_X(x))$.

Lo anterior concluye la primera parte de la prueba.

($\Rightarrow$) Para ver que f es confluente relativa a x, sean $B \in C(Y)$ con $f(x) \in B$. Notemos que $B \in \alpha_Y(f(x))$. Sea C la componente de $f^{-1}(B)$ tal que $x \in C$. Notemos que $f(C) \subset B$. Como $B \in \alpha_Y(f(x)) = C^2(f)(\alpha_X(x))$, existe $A \in \alpha_X(x)$ tal que $B = C(f)(A) = f(A)$. Notemos que A es un subconjunto conexo de $f^{-1}(B)$ que contiene a x. Como C es la componente de $f^{-1}(B)$ que contiene a x, resulta que $A \subset C$. por tanto, $B = f(A) \subset f(C)$. En vista de que la otra contención también es válida, tenemos que $f(C) = B$. Por lo tanto, f es confluente en x. ■

Combinando los teoremas 3.1 y 1.42, tenemos el siguiente resultado, que aparece en la literatura por primera vez en [42, Teorema 4.2] y, posteriormente, en [8, Corolario 1].

Corolario 3.2. *El diagrama anterior conmuta si y sólo si f es confluente.*

Como mencionamos en la Introducción, en [8] se planteó el problema de saber, bajo qué condiciones, una función continua $f : X \to Y$ definida entre continuos preserva la propiedad de Kelley en su versión local. Esto es, si X tiene la propiedad de Kelley en un punto a, entonces se tiene que Y tiene la propiedad de Kelley en el punto $f(a)$.

Más adelante mostraremos que las funciones confluentes preservan la propiedad de Kelley (ver Corolario 3.5). A continuación veremos que las funciones confluentes no preservan la propiedad de Kelley en su versión local.

Ejemplo 3.3 ([8, Ejemplo 1]). *Existe una función confluente que no preserva la propiedad de Kelley, en su versión local.*

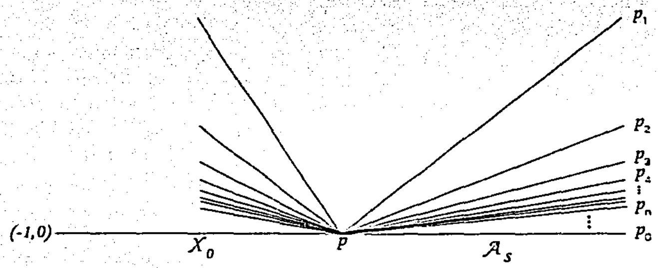
Justificación. Consideremos, en $\mathbb{R}^2$, los conjuntos

$$B = \{(-1, 0)\} \cup \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

y

$$B' = \{(1, 0)\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

así como a los segmentos de recta del punto $(0, 0)$ a los puntos de B. Sean X_0 el continuo que se obtiene uniendo dichos segmentos de recta y $X = X_0 \cup A_s$, donde A_s es el abanico armónico.



Definamos ahora una función $f : X \to \mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in A_s, \\ (-x,-y) & \text{si } (x,y) \in X_0. \end{cases}$$

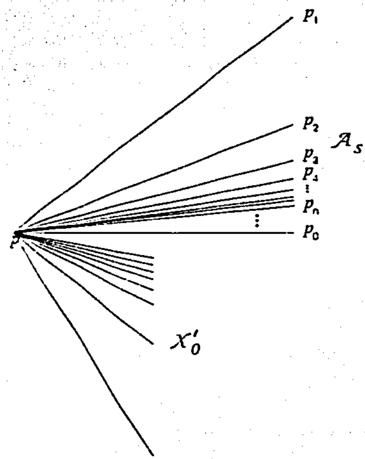
Hagamos $Y = f(X)$. Consideremos, en Y, el arco pp_0 que une los puntos $p = (0,0)$ y $p_0 = (1,0)$. Notemos que $Y = X_0' \cup A_s$, en donde X_0' es el continuo que se obtiene uniendo los segmentos de recta del punto p a los puntos de B'. Además $f(A_s) = A_s$ y $f(X_0) = X_0'$.

Para hacer ver que f es confluente, tomemos un subcontinuo K de Y. Supongamos que $p \notin K$. Entonces K está contenido en $pp_0 - \{p\}$, en uno de los arcos pp_n de A_s o bien en uno de los arcos que une al punto p con un elemento de B'. En la segunda y tercera situación, tenemos que $f^{-1}(K)$ es conexo. Por tanto, $f(f^{-1}(K)) = K$. En la primera situación, $f^{-1}(K)$ posee dos componentes K_1 y K_2. Una de dichas componentes, digamos K_1 coincide con K y la otra se obtiene reflejando K_1 sobre el eje de las abscisas. Por tanto, $f(K_1) = f(K_2) = K$.

Supongamos ahora que $p \in K$. Entonces:

$$K = (K \cap A_s) \cup (K \cap X_0').$$

Notemos que $f^{-1}(K \cap A_s) = K \cap A_s$, mientras que $f^{-1}(K \cap X_0')$ es un subcontinuo de X_0 que tiene al punto $(0,0)$, cuya imagen bajo f es $K \cap X_0'$. Por tanto, $f^{-1}(K)$ es conexo, así que $f(f^{-1}(K)) = K$. Esto prueba que f es confluente.



No es difícil convencerse de que X tiene la propiedad de Kelley en el punto $a = (\frac{1}{2}, 0)$. Ahora bien, Y no tiene la propiedad de Kelley en $f(a) = a$, escencialmente por que X_0' es un abanico armónico con pata alargada contenido en Y y que contiene a $f(a)$. En efecto, si para cada $n \in \mathbb{N}$ hacemos $a_n = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{n})$, entonces $(a_n)_n$ es una sucesión en Y que converge a $f(a)$ y tiene la propiedad de que no es posible encontrar una sucesión $(A_n)_n$ en $C(Y)$ con $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \to A$, en donde A es el segmento de recta en Y que une los puntos $f(a)$ y p_0. ■

Si en el ejemplo anterior, definimos $a_n = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $(a_n)_n$ es una sucesión en X que converge al punto $a = (-\frac{1}{2}, 0)$ y tiene la propiedad de que no es posible encontrar una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to A$, en donde A es el arco en X que une los puntos $(-1, 0)$ y a. Por consiguiente, X no tiene la propiedad de Kelley en el punto a, que pertenece al conjunto $f^{-1}(f(a))$. Como veremos a continuación, esta condición es justo la que destruye la preservación local de la propiedad de Kelley.

Teorema 3.4 (**[8, Proposición 2]**). *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y supravectiva entre los continuos X y Y. Supongamos que f es confluente* *en un punto $y_0 \in Y$ y que X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(y_0)$. Entonces Y tiene la propiedad de Kelley en y_0.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Entonces la función inducida $C(f)\colon C(X) \to C(Y)$ es continua, de acuerdo con el Teorema 1.35. Por tanto existe $\epsilon_1 > 0$ tal que, para cada $K, L \in C(X)$ con $H(K, L) < \epsilon_1$, se tiene que

$$H(C(f)(K), C(f)(L)) < \epsilon.$$

Notemos que $f^{-1}(y_0) \in 2^X$. Como X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(y_0)$, por el Teorema 2.15, resulta que X tiene la propiedad de Kelley en $f^{-1}(y_0)$. Por tanto, para $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1) > 0$ tal que para cada $a \in f^{-1}(y_0)$ y $x \in X$ con $d(x, a) < \delta_1$ y cada $K \in C(X)$ con $a \in K$, existe $L \in C(X)$ con $x \in L$ tal que $H(K, L) < \epsilon_1$.

Por el Teorema 1.32 la función $f^{-1} : Y \to 2^X$ es $\overline{SC}$. Por tanto, para δ_1, existe un subconjunto abierto U en Y tal que $y_0 \in U$ y $f^{-1}(y) \subset N(\delta_1, f^{-1}(y_0))$ para toda $y \in U$. Sea $\delta > 0$ tal que $B(\delta, y_0) \subset U$. Mostraremos que δ satisface la definición de que Y tiene la propiedad de Kelley en y_0.

Sean $y \in Y$ tal que $d(y, y_0) < \delta$ y $P \in C(Y)$ con $y_0 \in P$. Como f es suprayectiva, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Es claro que $x \in f^{-1}(y)$. Notemos que $y \in B(\delta, y_0) \subset U$, así que $f^{-1}(y) \subset N(\delta_1, f^{-1}(y_0))$. En particular tenemos que $x \in N(\delta_1, f^{-1}(y_0))$. Por tanto, existe $x_0 \in f^{-1}(y_0)$ tal que $d(x, x_0) < \delta_1$.

Es claro que $f(x_0) = y_0 \in P$, por lo que $x_0 \in f^{-1}(P)$. Esto nos permite considerar la componente K de $f^{-1}(P)$ tal que $x_0 \in K$. Como f es confluente en y_0, se tiene que $f(K) = P$. Ahora bien, $f(K) = C(f)(K)$, por lo cual $C(f)(K) = P$.

Notemos que x_0 es un punto de $f^{-1}(y_0)$, que K es un subcontinuo de X con $x_0 \in K$ y que x es un punto de X tal que $d(x, x_0) < \delta_1$. Entonces, por la elección de δ_1, existe $L \in C(X)$ con $x \in L$ tal que $H(K, L) < \epsilon_1$. De acuerdo con la elección de ϵ_1, resulta que $H(C(f)(K), C(f)(L)) < \epsilon$.

Hagamos $Q = C(f)(L)$. Notemos que Q es un subcontinuo de Y tal que $y = f(x) \in Q$ y, también:

$$H(P, Q) = H(C(f)(K), C(f)(L)) < \epsilon.$$

Por tanto, Y tiene la propiedad de Kelley en y_0. ■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado que originalmente aparece probado en el artículo [42, Teorema 4.3] y, posteriormente, en [8, Corolario 2].

Corolario 3.5. *Sea $f\colon X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si X tiene la propiedad de Kelley y f es confluente, entonces Y tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sea $y \in Y$. De acuerdo con el Teorema 1.42, f es confluente relativa a cada punto de Y. Entonces, por el Teorema 1.45, f es confluente en y. Como X tiene la propiedad de Kelley, en particular X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(y)$, según el Teorema 2.3. Entonces, por el teorema anterior, Y tiene la propiedad de Kelley en y. Aplicando de nuevo el Teorema 2.3, resulta que Y tiene la propiedad de Kelley. ■

Recordemos que la función $f\colon X \to Y$ del Ejemplo 3.3 satisface las siguientes propiedades:

1. es confluente en un punto $y_0 \in Y$,
2. X no tiene la propiedad de Kelley en uno de los puntos de $f^{-1}(y_0)$,
3. Y no tiene la propiedad de Kelley en y_0.

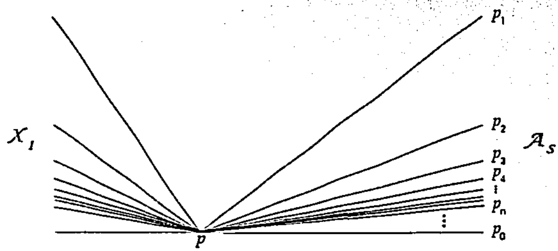
Por tanto, en el Teorema 3.4, la hipótesis de que el continuo X debe tener la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(y_0)$ es esencial. Ahora, mostraremos que existe una función $f\colon X \to Y$ con las siguientes propiedades:

1. no es confluente en un punto $y_0 \in Y$,
2. X tiene la propiedad de Kelley en cada punto de $f^{-1}(y_0)$,
3. Y no tiene la propiedad de Kelley en y_0.

Por tanto, en el Teorema 3.6, la hipótesis de que la función f debe ser confluente en el punto y_0 también es esencial. Para definir a f consideremos, en $\mathbb{R}^2$, el conjunto:

$$B_1 = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \right\} \cup \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{n} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

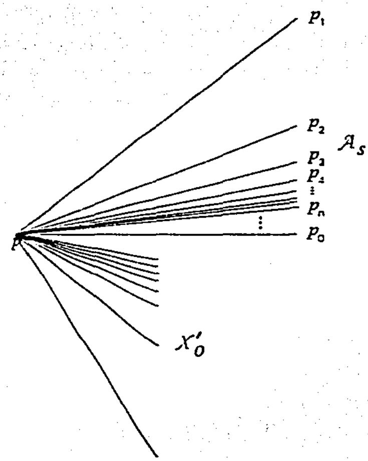
así como los segmentos de recta del punto $(0, 0)$ a los puntos de B. Sean X_1 el continuo que se obtiene uniendo dichos segmentos de recta y $X = X_1 \cup A_s$, donde A_s es el abanico armónico.



Consideremos la función $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ que se define en el Ejemplo 3.3. Notemos que el continuo $Y = f(X)$ es el mismo que se considera en el ejemplo mencionado.

En esta ocasión X tiene la propiedad de Kelley. Consideremos los puntos $y_0 = (\frac{1}{2}, 0)$ y $a = (-\frac{1}{2}, 0)$. Notemos que $f(y_0) = f(a) = y_0$. Como mostramos en el Ejemplo 3.3, Y no tiene la propiedad de Kelley en y_0. No es difícil convencerse de que f es confluente en el punto y_0 de X. Ahora bien, f no es confluente relativa en a, pues si Q es el arco en Y que une los puntos y_0 y $(1, 0)$. Entonces la componente C de $f^{-1}(Q)$ que tiene al punto a es $\{a\}$ y $f(C) \neq Q$. Supongamos que Q es el arco en Y que une los puntos y_0 y $(1, 0)$. Entonces la componente C de $f^{-1}(Q)$ que tiene al punto a es $\{a\}$ y $f(C) \neq Q$. Por tanto, f no es confluente en el punto y_0 de Y. Finalmente, como X tiene la propiedad de Kelley, en particular, tiene la propiedad de Kelley relativa a([30]) cada punto de $f^{-1}(y_0)$.

Ahora bien, de acuerdo con los Teoremas 1.50 y 1.54, tanto las funciones abiertas como las monótonas son confluentes. Por tanto, si $f\colon X \to Y$ es



una función continua y suprayectiva, por el Corolario 3.5, basta con pedir que f sea abierta o monótona para que se preserve la propiedad de Kelley. En el Teorema 3.8 veremos que basta con pedir que f sea abierta para que se preserve la propiedad de Kelley en su versión local. Para probar este resultado, requerimos del siguiente teorema:

Teorema 3.6 **([8, Proposición 3]).** *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si X tiene la propiedad de Kelley en un punto $a \in X$ y f es interior y confluente relativa a $a \in X$, entonces Y tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$.*

Demostración. Sean $B \in C(Y)$ y $(b_n)_n \subset Y$ tales que $f(a) \in B$ y $b_n \to f(a)$. Mostraremos que existe $(B_n)_n \subset C(Y)$ tal que $B_n \to B$ y $b_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Afirmamos que:

1) existen una sucesión $(c_n)_n$ en X tal que $c_n \to a$ y $f(c_n) = b_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Para mostrar lo anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ elegimos $c_n \in f^{-1}(b_n)$ tal que:

$$d(c_n, a) = \min\{d(x, a) : x \in f^{-1}(b_n)\}.$$

Veremos que $c_n \to a$. Sea $\epsilon > 0$. Como f es interior en a, $f(a) \in int_Y(f(B(\epsilon, a)))$, y como $b_n \to f(a)$, entonces, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $b_n \in int_y(f(B(\epsilon, a))) \subset f(B(\epsilon, a))$ para toda $n \geq N$. De modo que, para cada $n \geq N$, existe $x_n \in B(\epsilon, a)$ tal que $b_n = f(x_n)$. Entonces $d(c_n, a) \leq d(x_n, a) < \epsilon$ para toda $n \geq N$. Por tanto $c_n \to a$.

Con esto, podemos ver que 1) se satisface.

Como X tiene la Propiedad de Kelley en el punto a, para la sucesión $(c_n)_n$, garantizada en 1), y la componente A de $f^{-1}(B)$ que tiene al punto a, resulta que existe $(A_n)_{n \geq N} \subset C(X)$ tal que $A_n \to A$ y $c_n \in A_n$ para cada $n \geq N$. De acuerdo con la continuidad de la función inducida $C(f)$ (Teorema 1.35), tenemos que $f(A_n) \to f(A)$. Ahora bien, como f es confluente en a, resulta que $f(A) = B$. Entonces $f(A_n) \to B$.

Consideremos $(B_n)_n \subset C(Y)$ definida por $B_n = f(A_n)$. Notemos que $B_n \to B$ y $b_n \in B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que Y tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$. ■

La demostración del teorema anterior, sigue el esquema propuesto en [8, Proposición 3], en el cual la afirmación 1) anteriormente enunciada, se establece sin prueba.

Combinando los resultados anteriores, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.7 ([8, Corolario 3]). *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si f es interior y confluente en un punto $a \in X$ y, si la función $\alpha_X: X \to C^2(X)$ es continua en a, entonces el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} C^2(X) & \xrightarrow{C^2(f)} & C^2(Y) \\ {\scriptstyle\alpha_X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\alpha_Y} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta en a y la función $\alpha_Y: Y \to C^2(Y)$ es continua en $f(a)$.

Demostración. Como f es confluente relativa a a, por el Teorema 3.1, el diagrama conmuta. También, como la función α_X es continua en a sabemos, por el Teorema 2.19, que X tiene la propiedad de Kelley en a. Además, por hipótesis, f es interior y confluente relativa a a. Entonces, por el Teorema 3.6, Y tiene la propiedad de Kelley en el punto $f(a)$. Por tanto, aplicando de nuevo el Teorema 2.19, concluímos que la función α_Y es continua en $f(a)$. ■

Supongamos ahora que $f: X \to Y$ es una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si f es abierta, entonces por el Teorema 1.52, f es interior en cada punto de X. Además, por el Teorema 1.50, f es confluente de donde, aplicando ahora el Teorema 1.42, sucede que f es confluente relativa a cada punto de X. Tenemos entonces que f es interior y confluente en todos los puntos de X. Por tanto, como consecuencia inmediata del Teorema 3.6, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.8 ([8, Corolario 4]). *Sea $f: X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si f es abierta y X tiene la propiedad de Kelley en un punto $a \in X$, entonces Y tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$.*

En otras palabras, *las funciones abiertas preservan la propiedad de Kelley local.* En el teorema anterior, la hipótesis de que f sea una función abierta no puede ser reemplazada por la de que f sea una función confluente, como nos lo muestra el Ejemplo 3.3.

A continuación veremos que las hipótesis del Teorema 3.6 son esenciales. Para esto, notemos que la función dada en el Ejemplo 3.3 satisface las siguientes condiciones:

1. es confluente y, por tanto, confluente relativa al punto $a = (\frac{1}{2}, 0)$;

2. no es interior en a;

3. X tiene la propiedad de Kelley en a;

4. Y no tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$.

Por tanto, en el Teorema 3.6, la hipótesis de que f debe ser interior en a es esencial. Ahora, mostraremos que la hipótesis de que f debe ser confluente relativa en a también es esencial. En otras palabras, mostraremos la existencia de una función $f: X \to Y$ con las siguientes propiedades:

1. no es confluente relativa a un punto a,
2. es interior en a,
3. X tiene la propiedad de Kelley en a,
4. Y no tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$.

Para ver esto, consideremos el continuo seno de $\frac{1}{x}$, que denotaremos por X, así como el círculo de Varsovia, que denotaremos por Y. Sea $f: X \to Y$ la función que identifica los puntos $(1, \text{sen}(1))$ y $(0, -1)$ de X. Notemos que si P es la pata límite de X, entonces $f(P) = P$. No es difícil convencerse de que f es interior en el punto $a = (0, 0)$ de la pata límite de X. Además, f no es confluente en a. Para ver esto, consideremos el arco, K en Y, que une los puntos $a = f(a)$ y $(\frac{1}{2}, \text{sen}(2))$. Notemos que la componente Q de $f^{-1}(K)$ que contiene al punto a, es el arco en X que une los puntos a y $(0, -1)$. Más aún, $f(Q) = Q \subsetneq K$. Esto muestra que f no es confluente en a. Ahora bien, el continuo X tiene la propiedad de Kelley en a, mientras que Y no tiene la propiedad de Kelley en $a = f(a)$, escencialmente porque Y contiene un continuo seno de $\frac{1}{x}$ con pata alargada que, a su vez, contiene a $f(a)$. Para mostrar esto, consideremos el subcontinuo K de Y antes descrito y tomemos una sucesión $(a_n)_n$ en $Y - P$ que converge a $f(a)$. Entonces, no es posible encontrar una sucesión $(A_n)_n$ en $C(Y)$ tal que $a_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to K$. Por tanto, Y no tiene la propiedad de Kelley en $f(a)$.

Uno podría preguntarse si la propiedad de Kelley puntual es preservada en la dirección opuesta, esto es, si el recíproco del teorema 3.6 o bien del Teorema 3.8 es cierto. La respuesta es negativa y la ilustramos en el siguiente ejemplo:

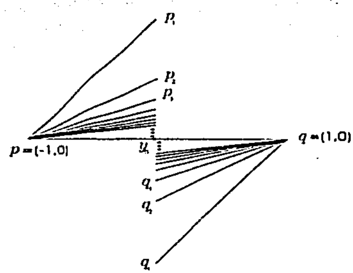
Ejemplo 3.9 **([8, Ejemplo 2]).** *Existe una función abierta $f: X \to Y$ de un continuo X a un continuo Y tal que Y tiene la propiedad de Kelley en un punto y_0, y X no tiene la propiedad de Kelley en ningún punto de $f^{-1}(y_0)$.*

Justificación. Consideremos, en $\mathbb{R}^2$ los puntos $p = (-1, 0)$, $q = (1, 0)$, $y_0 = (0, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, hagamos $p_n = (0, \frac{1}{n})$ y $q_n = (0, -\frac{1}{n})$. Dada $n \in \mathbb{N}$ sean pp_n y qq_n los segmentos de arco de p a p_n y de q a q_n, respectivamente. Supongamos que pq, py_0 y qy_0 son los segmentos de arco de p a q, de p a y_0 y de q a y_0, respectivamente. Definamos

$$Y = py_0 \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} pp_n \right) \quad \text{y} \quad Y_0 = qy_0 \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} qq_n \right). \tag{3.1}$$

Hagamos $X = Y \cup Y_0$ y definamos $f : X \to Y$ como sigue

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in Y, \\ (-x,-y) & \text{si } (x,y) \in Y_0. \end{cases}$$



Notemos que si $(x,y) \in Y_0$, entonces $f(x,y)$ es el punto simétrico en $\mathbb{R}^2$, con respecto a y_0. No es difícil ver que f es una función abierta. Además, Y tiene la propiedad de Kelley, pues es un abanico armónico. En particular, Y tiene la propiedad de Kelley en y_0. Mostraremos ahora que X no tiene la propiedad de Kelley en el punto y_0 que se encuentra en $f^{-1}(y_0)$. En efecto, la sucesión $(p_n)_n$ en X converge a y_0 y tiene la propiedad de que no existe una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$ tal que $p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to qy_0$. Esto termina la justificación. ■

Notemos que la función f del ejemplo anterior hace ver que el recíproco del Teorema 3.8 no es cierto. Asimismo, dicha función hace ver que el recíproco del Teorema 3.6 no es cierto. En efecto, como f es abierta es, en particular interior en y_0. Como las funciones abiertas son confluentes y, las funciones confluentes son confluentes relativas a todos los puntos de su dominio, tenemos que f es confluente relativa a y_0. Además Y tiene la propiedad de Kelley en y_0, mientras que X no tiene dicha propiedad en y_0.

3.3 Homogeneidad Generalizada.

El artículo [8] termina mostrando una aplicación de los resultados anteriores a la noción de homogeneidad generalizada.

Definición 3.10. *Sea M una clase de funciones continuas definidas entre continuos. Decimos que un continuo X es M-***homogéneo***, si para cada par de puntos p y q en X, existe una función continua y suprayectiva $f: X \to X$ tal que $f \in M$ y $f(p) = q$.*

Por ejemplo si M es la clase de las funciones abiertas tenemos a los continuos abierto-homogéneos.

Notemos que si M es la clase de todos los homeomorfismos, entonces obtenemos la noción usual de continuo homogéneo. A continuación presentamos una generalización del Teorema 2.22.

Teorema 3.11. *Los continuos abierto-homogéneos tienen la propiedad de Kelley.*

Demostración. Sean X un continuo abierto-homogéneo y $p \in X$. De acuerdo al Teorema 2.20, X tiene la propiedad de Kelley en un punto $q \in X$. Como X es abierto-homogéneo, existe una función abierta $f: X \to X$ tal que $f(q) = p$. Entonces, por el Teorema 3.8, X tiene la propiedad de Kelley en p. Por tanto, por el Teorema 2.3, X tiene la propiedad de Kelley. ■

En el artículo [8], J. J. Charatonik pregunta si los continuos confluente-homogéneos tienen la propiedad de Kelley. Dicha pregunta fue contestada en negativo por H. Kato en el artículo [29]. Posteriormente, A. Illanes mostró en [27] un continuo monótono-homogéneo que no tiene la propiedad de Kelley.

Sea M una clase de funciones continuas (por ejemplo, de funciones abiertas, débilmente confluentes, confluentes, monótonas, etc). Decimos que M *preserva la propiedad local de Kelley* si para cada $f \in M$, si el dominio de f tiene la propiedad de Kelley en un punto, entonces el contradominio de f tiene la propiedad de Kelley en la imagen de dicho punto. Terminamos este capítulo comentando que una prueba similar a la dada en el teorema anterior, se puede realizar para demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.12. *Si M preserva la propiedad local de Kelley, entonces todo continuo M-homogéneo tiene la propiedad de Kelley.*

Capítulo 4

Suavidad.

4.1 Un Poco de Historia.

En este capítulo haremos un estudio del concepto de suavidad de un continuo. Dicha noción, históricamente, se definió para la clase de continuos llamados *abanicos* ([9]). Posteriormente se extendió para la clase de continuos llamados *dendroides* ([10]). Más adelante, G. R. Gordh, Jr., extendió dicha noción para la clase de continuos que contienen puntos de unicoherencia hereditaria ([22]). Recordemos que un continuo X es *hereditariamente unicoherente en* un punto $p \in X$ si para cada par de subcontinuos A y B de X con $p \in A \cap B$, resulta que $A \cap B$ es conexo. Los dendroides son, por definición, continuos hereditariamente unicoherentes en todos sus puntos. Por último, T. Maćkowiak generalizó la noción de suavidad, dada por G. R. Gordh, Jr., para la clase de los continuos ([35]).

Aunque hoy en día la noción de suavidad, introducida para los abanicos, es bastante común, en este trabajo nos centraremos en la noción de suavidad como la definió T. Maćkowiak. Como veremos en este capítulo, dicha noción está relacionada con la propiedad de Kelley. También veremos que existen una serie de resultados, dados en términos de la propiedad de Kelley, que permanecen válidos en el contexto de la suavidad y que existe, incluso, una función semicontinua superiormente, cuya continuidad es equivalente a la suavidad del continuo.

4.2 Propiedades Fundamentales.

A lo largo de este capítulo, la letra X denotará un continuo con m

Definición 4.1. *Decimos que X es:*

1. **suave en un punto** $p \in X$ **con respecto a un punto** $x \in X$ *cada* $(x_n)_n \subset X$ *que converge a* x *y cada* $K \in C(X)$ *tal que* *existe* $(K_n)_n \subset C(X)$ *con* $p, x_n \in K_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* .
2. **suave en el punto** $p \in X$ *si es suave en* p *con respecto a ca* $x \in X$.
3. **suave** *si es suave en alguno de sus puntos.*

Si X es suave en el punto $p \in X$, decimos que p es un **punto i** X.

Consideremos los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} I(X) &= \{ p \in X : X \text{ es suave en } p \}, \\ L(X) &= \{ p \in X : X \text{ es localmente conexo en } p \}, \\ K(X) &= \{ p \in X : X \text{ tiene la propiedad de Kelley en } p \}. \end{aligned}$$

De acuerdo con el Teorema 2.11, si X es suave en p, entonces X propiedad de Kelley en p. En otras palabras, $I(X) \subset K(X)$. Más mostraremos que $I(X) \subset L(X)$. Como ya hicimos ver, existen conti tienen la propiedad de Kelley en puntos donde el continuo no es lo conexo. Por tanto, el que X tenga la propiedad de Kelley en p nc que X es suave en p.

Para probar que $I(X) \subset L(X)$, necesitamos de la siguiente noci

Definición 4.2. *Dado un subconjunto G de X y un punto $p \in G$, el*

$$C(G, p) = \{ x \in X : \text{ existe } R \in C(X) \text{ tal que } p, x \in R \text{ y } R \subset C$$

se llama la **constituyente de** p **en** G.

Notemos que:

$$C(G,p) = \bigcup\{ R \in C(X) : p \in R \subset G \}. \tag{4.1}$$

Entonces $C(G,p)$ es una unión de subconjuntos conexos de G que contienen al punto p, por lo que $C(G,p)$ es un subconjunto conexo de G.

Teorema 4.3 ([35, Teorema 3.1]). *Para un punto p de X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) X es suave en p.

2) Para cada subconjunto abierto G de X con $p \in G$, el conjunto $C(G,p)$ es abierto en X.

3) Para cada subcontinuo N de X con $p \in N$ y cada subconjunto abierto V de X tal que $N \subset V$, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $N \subset U \subset V$.

4) Para cada subcontinuo N de X con $p \in N$ y cada subconjunto abierto V de X tal que $N \subset V$, existe un subcontinuo K de X tal que $N \subset \operatorname{int}_X(K) \subset K \subset V$.

Demostración. Para ver que 1) $\Rightarrow$ 2), supongamos que X es suave en p y sea G un conjunto abierto de X con $p \in G$. Tomemos un punto $x \in \operatorname{cl}_X(X - C(G,p))$. Entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en $X - C(G,p)$ que converge a $x \in X$. Sea R un subcontinuo de X tal que $p, x \in R$. Hagamos $C = X - G$. Mostraremos que $R \cap C \neq \emptyset$. Para ver esto notemos que, por la suavidad de X en p, existe una una sucesión $(R_n)_n$ en $C(X)$ con $p, x_n \in R_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, tal que $R_n \to R$.

Ahora bien, dada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_n \in X - C(G,p)$. Entonces $R_n \cap C \neq \emptyset$. Además, como G es abierto en X y $R_n \to R$ tenemos, por el Teorema 1.17, que $R \cap C \neq \emptyset$. Esto muestra que $x \in X - C(G,p)$, lo cual implica que $X - C(G,p)$ es cerrado.

Para probar que 2) $\Rightarrow$ 3), supongamos que para cada abierto G de X con $p \in G$, el conjunto $C(G,p)$ es abierto. Tomemos un subcontinuo N de X con $p \in N$ y un abierto V de X tal que $N \subset V$. Hagamos $U = C(V,p)$. Como hicimos ver, U es un subconjunto conexo de V. Además, por hipótesis, U es abierto en X. Como N es un subcontinuo de X que tiene a p y está contenido en V sucede, por (4.1), que $N \subset U$.

Ahora mostraremos que 3) $\Rightarrow$ 4). Para esto, tomemos $N \in C(X)$ con $p \in N$ y un abierto V de X tal que $N \subset V$. Como X es métrico, entonces X es normal. Por tanto, existe un subconjunto abierto G de X tal que $N \subset G \subset \mathrm{cl}_X(G) \subset V$. Además, por hipótesis, existe un subconjunto abierto y conexo U de X tal que $N \subset U \subset G$. Si tomamos $K = \mathrm{cl}_X(U)$, tenemos que K es un subcontinuo de X tal que

$$N \subset U \subset \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(U)) = \mathrm{int}_X(K) \subset K = \mathrm{cl}_X(U) \subset \mathrm{cl}_X(G) \subset V$$

Así pues, $N \subset \mathrm{int}_X(K) \subset K \subset V$.

Mostraremos, por último, que 4) $\Rightarrow$ 1). Sean $x \in X$ y $(x_n)_n \subset X$ tales que $x_n \to x$. Supongamos que M es un subcontinuo de X con $p, x \in M$. Mostraremos que existe $(M_n)_n \subset C(X)$ tal que $M_n \to M$ y $p, x_n \in M_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Para esto, dada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la familia

$$\mathcal{M}_n = \{ A \in C(X) : p, x_n \in A \}$$

Por el Teorema 2.17, $\mathcal{M}_n \in C^2(X)$ por lo que, en particular, $\mathcal{M}_n$ es un subconjunto compacto de $C(X)$. Entonces podemos hablar del punto en $\mathcal{M}_n$ más cercano a M, con respecto a la métrica de Hausdorff. Esto es, existe $M_n \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$H(M_n, M) = \min\{ H(A, M) : A \in \mathcal{M}_n \}.$$

Veamos que la sucesión $(M_n)_n$ converge a M. Sea $\epsilon > 0$. Notemos que $N(\epsilon, M)$ es un abierto en X tal que $M \subset N(\epsilon, M)$. Entonces, por hipótesis, existe $K \in C(X)$ tal que

$$M \subset \mathrm{int}_X(K) \subset K \subset N(\epsilon, M).$$

Entonces $M \subset K \subset N(\epsilon, K)$ y $K \subset N(\epsilon, M)$ por lo que $H(M, K) < \epsilon$.

Ahora bien, como $p, x \in M$, resulta que $p \in K$ y, además, $x \in \mathrm{int}_X(K)$. Por tanto, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $x_n \in \mathrm{int}_X(K) \subset K$.

Esto implica que $K \in \mathcal{M}_n$ para cada $n \geq N$. Por tanto, de acuerdo con la definición de M_n, sucede que

$$H(M_n, M) \leq H(K, M) < \epsilon,$$

para toda $n \geq N$. Esto prueba que $M_n \to M$. ■

La demostración que acabamos de dar, sigue básicamente el esquema mostrado en [35, Teorema 3.1], con excepción de la prueba de que 4) $\Rightarrow$ 1), que aquí se presenta en términos bastante más elementales. Agradecemos a A. Illanes su ayuda en la obtención de la misma.

Corolario 4.4 ([35, Corolario 3.2]). $I(X) \subset L(X)$.

Demostración. Sean $p \in I(X)$ y V un subconjunto abierto en X tal que $p \in V$. Entonces V es un subconjunto abierto en X que contiene al subcontinuo $\{p\}$ de X que contiene a p. Entonces, por la equivalencia entre las afirmaciones 1) y 3) del Teorema 4.3, existe un subconjunto abierto y conexo U en X tal que $\{p\} \subset U \subset V$. Entonces $p \in L(X)$. ■

Consideremos el abanico armónico con pata alargada A_{sa}. Sean $q = (2,0)$, $p_0 = (1,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $p_n = (1, \frac{1}{n})$. Supongamos que $L = [1,2] \times \{0\}$ es la pata alargada de A_{sa}. Entonces $q \in L(X)$ y, además, $q \notin I(X)$ pues no es posible encontrar una sucesión $(A_n)_n$ en $C(X)$ con la propiedad de que $q, p_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to L$. Por tanto, el que un continuo sea localmente conexo en un punto, no implica que el continuo es suave en dicho punto.

En resúmen, tenemos que las siguientes contenciones son ciertas:

$$I(X) \subset L(X) \ \text{ y } \ I(X) \subset K(X).$$

Además las contenciones son, en general, propias. A continuación, probamos que los continuos localmente conexos son suaves en cada uno de sus puntos.

Teorema 4.5 ([35, Corolario 3.3]). *$I(X) = X$ si y sólo si X es localmente conexo.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $I(X) = X$ entonces, por el Corolario 4.4, $X = I(X) \subset L(X)$. Como también es cierto que $L(X) \subset X$, sucede que $L(X) = X$. Entonces, X es localmente conexo.

($\Leftarrow$) Supongamos que X es localmente conexo y sean $p \in X$, $N \in C(X)$ con $p \in N$ y V un abierto en X tal que $N \subset V$. Si U es la componente de V que contiene a N, tenemos que $N \subset U \subset V$. Además, por el Teorema 1.76, U es abierto en X. Entonces, por la equivalencia entre las afirmaciones 1) y 3) Teorema 4.3, X es suave en p. En otras palabras, $p \in I(X)$. Esto prueba que $X \subset I(X)$. Como la otra contención también es cierta, tenemos que $I(X) = X$. ■

4.3 Una Caracterización de la Suavidad.

La noción de suavidad puede expresarse en términos de epsilones y deltas, de la siguiente manera:

Teorema 4.6. *X es suave en el punto $p \in X$ si y sólo si para toda $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ son tales que $d(x,y) < \delta$ y $K \in C(X)$ es tal que $x, p \in K$ entonces existe $L \in C(X)$ con $y, p \in L$ y $H(K, L) < \epsilon$.*

Demostración. ($\Rightarrow$). Sea X suave en el punto $p \in X$ y supongamos por el contrario que existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existen $x, y \in X$ tales que $d(x,y) < \delta$ y un $K \in C(X)$ con $x, p \in K$, tales que para todo $L \in C(X)$ con $y, p \in L$ sucede que $H(K, L) \geq \epsilon$.

Por tanto, si $\delta_n = \frac{1}{n}$, con $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n, y_n \in X$ tales que $d(x_n, y_n) < \delta_n$ y un $K_n \in C(X)$, con $x_n, p \in K_n$, tales que para todo $L_n \in C(X)$ con $y_n, p \in L_n$ se tiene que $H(K_n, L_n) \geq \epsilon$.

Como $(K_n)_n$ es una sucesión en el compacto $\alpha(p)$ existe una subsucesión $(K_{n_r})_r$ de $(K_n)_n$ tal que $K_{n_r} \to K_0$ para algún $K_0 \in \alpha(p)$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_{n_r} \to x_0$ para algún $x_0 \in K_0$(Corolario 1.16).

Además $H(K_{n_r}, L_{n_r}) \geq \epsilon$ para todo $L_{n_r} \in C(X)$ con $y_{n_r}, p \in L_{n_r}$ y ya que $y_{n_r} \in B(\delta_{n_r}, x_{n_r})$ observemos que $y_{n_r} \to x_0$ también. Por lo tanto, $p, x_0 \in K_0$ y $y_{n_r} \to x_0$. Por lo cual, existe $(L_{n_r})_r \subset C(X)$ tal que $p, y_{n_r} \in L_{n_r}$ para toda $r \in \mathbb{N}$ y $L_{n_r} \to K_0$.

Como $K_{n_r} \to K_0$, entonces para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $H(K_{n_r}, K_0) < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $r \geq r_1$ y ya que $L_{n_r} \to K_0$, para $\frac{\epsilon}{2}$ existe $r_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$H(L_{n_r}, K_0) < \frac{\epsilon}{2}$ para cada $r \geq r_2$, entonces si tomamos $r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ y $r \geq r_0$ tenemos que:

$$H(K_{n_r}, L_{n_r}) \leq H(K_{n_r}, K_0) + H(K_0, L_{n_r}) < \epsilon$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto esta parte del teorema queda demostrada.

($\Leftarrow$). Sean $x \in X$, $(x_n)_n$ tal que $x_n \to x$ y $K \in C(X)$ tal que $p, x \in K$. Debemos probar que existe una sucesión $(K_n)_n \subset C(X)$ con $p, x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \to K$.

En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $K_n \in C(X)$ tal que

$$H(K, K_n) = \min\{H(A, B) : B \in \mathcal{M}_n\}$$

donde

$$\mathcal{M}_n = \{A \in C(X) : p, x_n \in A\},$$

del Teorema 2.17. Por lo que $p, x_n \in K_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Veamos que $K_n \to K$, para esto sea $\epsilon > 0$. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ son tales que $d(x, y) < \delta$, existe $L \in C(X)$ con $y, p \in L$ y $H(K, L) < \epsilon$, como $x_n \to x$, para δ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(\delta, x)$ para toda $n \geq N_1$. Por lo tanto, para todo $n \geq N_1$ existe $B_n \in C(X)$ con $x_n, p \in B_n$ tal que $H(K, B_n) < \epsilon$, de acuerdo con la propiedad de K_n tenemos que $H(K, K_n) \leq H(K, B_n) < \epsilon$. Por lo cual $K_n \to K$, y de este modo termina la prueba. ∎

4.4 El Conjunto $S(p)$.

Dado un punto $p \in X$, consideremos el conjunto:

$$S(p) = \{\, x \in X : X \text{ es suave en } p \text{ respecto a } x \,\}.$$

Por definición, X es suave en p si y sólo si X es suave en p con respecto a cualquier punto de X. En la notación que acabamos de establecer, esto queda expresado diciendo que $p \in I(X)$ si y sólo si $S(p) = X$. Por tanto:

$$I(X) = \{\, p \in X : S(p) = X \,\}$$

Combinando esto con el Corolario 4.5, tenemos que si $p \in X$ es tal que $S(p) = X$, entonces X es localmente conexo en p. Supongamos ahora que $p \in X$ es tal que $S(p) \neq X$. ¿Qué podemos decir acerca de la estructura del conjunto $S(p)$? En esta dirección tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.7. *Sea $p \in X$. Si $x \notin S(p)$, entonces existen $(x_n)_n \subset X$ y $L \in C(X)$ con las siguientes propiedades:*

1) $p, x \in L$ y $x_n \to x$;

2) para ninguna subsucesión $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$ es posible encontrar $(L_k)_k \subset C(X)$ tal que $p, x_{n_k} \in L_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, y $L_k \to L$.

Demostración. Como $x \notin S(p)$, existen $(u_n)_n \subset X$ y $L \in C(X)$ tales que $u_n \to x$, $p, x \in L$ y no es posible encontrar $(M_n)_n \subset C(X)$ tal que $M_n \to L$ y $p, u_n \in M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dada $n \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto:

$$\mathcal{M}_n = \{ A \in C(X) : p, u_n \in A \}.$$

Por el Teorema 2.17, $\mathcal{M}_n$ es un subconjunto compacto de $C(X)$. Entonces, existe $M_n \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$H(L, M_n) = \min\{ H(L, A) : A \in \mathcal{M}_n \}.$$

Notemos que $(M_n)_n$ es una sucesión de subcontinuos de X tal que $p, u_n \in M_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, M_n no converge a L. Por tanto, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n \geq N$ tal que $H(M_n, L) \geq \epsilon_0$. Luego, para $N_1 = 1$, existe $n_1 \geq N_1$ tal que $H(M_{n_1}, L) \geq \epsilon_0$. Para $N_2 = n_1 + 1$, existe $n_2 \geq N_2$ tal que $H(M_{n_2}, L) \geq \epsilon_0$. Procediendo de esta manera, es posible encontrar una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tal que $H(M_{n_k}, L) \geq \epsilon_0$, para toda $k \in \mathbb{N}$.

Dada $k \in \mathbb{N}$ hagamos $x_k = u_{n_k}$. Entonces $x_k \to x$. Esto muestra que la sucesión $(x_k)_k$ en X y el subcontinuo L de X satisfacen la condición 1) del teorema. Para ver que también satisfacen la condición 2), sea $(x_{k_r})_r$ una subsucesión de $(x_k)_k$, y supongamos que es posible encontrar una sucesión $(L_r)_r$ en $C(X)$ tal que $p, x_{k_r} \in L_r$, para cada $r \in \mathbb{N}$, y $L_r \to L$. Entonces, para $\epsilon_0 > 0$ existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $H(L_{r_0}, L) < \epsilon_0$. Notemos que $L_{r_0} \in \mathcal{M}_{n_{k_{r_0}}}$, así que, por la definición de $M_{n_{k_{r_0}}}$ resulta que

$$H(M_{n_{k_{r_0}}}, L) \leq H(L_{r_0}, L) < \epsilon_0.$$

Sin embargo, el número $n_{k_{r_0}}$ fue construido de modo que $H(M_{n_{k_{r_0}}}, L) \geq \epsilon_0$. De esta contradicción se tiene que $(x_k)_k$ y L también satisfacen la condición 2) del teorema. De esta manera, la demostración queda terminada. ■

4.5 La Función F_p.

Recordemos que la fórmula (2.1) de la Sección 2.6 define una función $\alpha\colon X \to C^2(X)$, que es semicontinua superiormente, y cuya continuidad equivale al hecho de que X tiene la propiedad de Kelley, de acuerdo a los Teoremas 2.18 y 2.19, respectivamente. En esta sección, dado un punto $p \in X$, definiremos una función $F_p\colon X \to C^2(X)$ que resultará ser semicontinua por arriba y, cuya continuidad equivale al hecho de que X es suave en p.

Si $p \in X$ definimos, para cada $x \in X$

$$F_p(x) = \{K \in C(X) : p, x \in K\}. \tag{4.2}$$

Así pues, F_p asigna a un punto de $x \in X$ la familia de todos los subcontinuos de X que contienen a p y a x. Notemos que $F_p(x) = \mathcal{F}$ en donde $\mathcal{F}$ se define como en la fórmula (2.2) de la Sección 2.6. Entonces, por el Teorema 2.17, $F_p(x) \in C^2(X)$ y, además, $F_p(x)$ es conexo por trayectorias para cada $x \in X$. Esto muestra que F_p es una función de X en $C^2(X)$.

La función $F_p\colon X \to C^2(X)$ fue definida por W. J. Charatonik en la Sección I de [17]. Posteriormente, se consideró en [13]. A continuación, escribimos las propiedades básicas de dicha función.

Teorema 4.8 **([17, Proposición 1]).** *Para cada $p \in X$, la función F_p es $\overline{SC}$.*

Demostración. Sean $x \in X$, y $(x_n) \subset X$ tales que $x_n \to x$. Tomemos un elemento $K \in \limsup F_p(x_n)$. Por el Teorema 1.31, basta probar que $K \in F_p(x)$. Ahora bien, por el Teorema 1.14, existen una sucesión $n_1 < n_2 < \ldots$ de números naturales y elementos $L_k \in F_p(x_{n_k})$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tales que $L_k \to K$. Como $x_{n_k} \to x$ y $p, x_{n_k} \in L_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.16 tenemos que $p, x \in K$. Entonces $K \in F_p(x)$ y, de este modo, concluímos que F_p es semicontinua por arriba. ■

Teorema 4.9 **([13, Teorema 7]).** *La función F_p es $\underline{SC}$ en un punto $x \in X$ si y sólo si $x \in S(p)$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x$ y sea $K \in C(X)$ tal que $p, x \in K$. Notemos que $K \in F_p(x)$. Como F_p es $\underline{SC}$ en x, por el Teorema 1.31, $F_p(x) \subset \liminf F_p(x_n)$. Entonces $K \in \liminf F_p(x_n)$ y, por el Teorema 1.14, existe $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $K_n \in F_p(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $K_n \to K$. Por tanto, X es suave en p con respecto a x.

($\Leftarrow$) Sean $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x$ y $K \in F_p(x)$. Por hipótesis, existe una sucesión $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $K_n \to K$ y $p, x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $K_n \in F_p(x_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por el Teorema 1.14, $K \in \liminf F_p(x_n)$. Por lo tanto $F_p(x) \subset \liminf F_p(x_n)$. De esta manera, por el Teorema 1.31, F_p es $\underline{SC}$ en x. ■

Combinando los teoremas anteriores tenemos, como consecuencia inmediata, los siguientes resultados:

Corolario 4.10 ([13, Corolario 8]). *La función F_p es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si $x \in S(p)$.*

Corolario 4.11 ([13, Corolario 9]). *La función F_p es continua si y sólo si X es suave en p.*

Así pues, la función F_p es continua si y sólo si $S(p) = X$.

Recordemos que, por el Teorema 1.34, toda función semicontinua por arriba, es continua en un conjunto G_δ-denso. Aplicando este resultado a la función F_p, resulta que existe un subconjunto A de X que es G_δ-denso y, además, F_p es continua en A. De acuerdo con el Corolario 4.10, $A \subset S(p)$. Tenemos, por tanto, el siguiente resultado:

Corolario 4.12. *Para cualquier continuo X y un punto cualquiera $p \in X$, el conjunto $S(p)$ contiene un subconjunto G_δ-denso de X.*

El resultado anterior nos habla sobre la estructura del conjunto $S(p)$, especialmente en el caso en que $S(p) \neq X$. En efecto, si $S(p) = X$, entonces no requerimos los resultados de esta sección para mostrar que $S(p)$ contiene un subconjunto G_δ-denso de X pues, en esta situación, $S(p)$ es denso en X y, como es abierto en X, es un conjunto G_δ de X. Luego, $S(p)$ es un conjunto G_δ-denso de X.

4.6 Suavidad Puntual.

En esta sección mostraremos la noción de suavidad puntual, así como una serie de resultados fundamentales, con respecto a esta noción. Recordemos que, para un punto p de X definimos

$$S(p) = \{ x \in X : X \text{ es suave en } p \text{ con respecto a } x \}.$$

Ahora bien, si fijamos un punto $x \in X$ podemos considerar el conjunto

$$W(x) = \{ p \in X : X \text{ es suave en } p \text{ con respecto a } x \}.$$

De las definiciones de cada uno de estos conjuntos, es claro que

$$x \in S(p) \text{ si y sólo si } p \in W(x). \tag{4.3}$$

Definición 4.13. *Decimos que* X **es puntualmente suave en** $x \in X$ *si* $W(x) \neq \emptyset$. *Decimos, además, que* X *es* **puntualmente suave** *si lo es en cada uno de sus puntos.*

Teorema 4.14. *Todo continuo suave es puntualmente suave.*

Demostración. Supongamos que X es suave. Tomemos un punto $x \in X$. Como X es suave, existe un punto $p \in X$ tal que X es suave en p. Entonces X es suave en p con respecto a x, o lo que es lo mismo, $x \in S(p)$. Entonces, por la fórmula (4.3), $p \in W(x)$. Esto muestra que $W(x) \neq \emptyset$. Como esto sucede para cada punto de X, tenemos que X es puntualmente suave. ■

Utilizando los conjuntos $W(x)$ para cada x, podemos caracterizar al conjunto $I(X)$, de los puntos iniciales de X.

Teorema 4.15. *Si* X *es un continuo, entonces*

$$I(X) = \bigcap_{x \in X} W(x).$$

Demostración. Sea $p \in I(X)$. Entonces X es suave en p respecto a cada punto $x \in X$, por lo que $p \in W(x)$ para cada $x \in X$. Luego $p \in \bigcap_{x \in X} W(x)$. Si ahora $p \in \bigcap_{x \in X} W(x)$. Entonces X es suave en p con respecto a cada $x \in X$, o bien $p \in I(X)$. ■

Utilizando el Corolario 4.12, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.16 ([13, Corolario 30]). *El conjunto de puntos en los cuales X es puntualmente suave, contiene un subconjunto G_δ-denso en X.*

Demostración. Consideremos el conjunto $P = \{ x \in X : W(x) \neq \emptyset \}$ de los puntos en donde X es puntualmente suave. Elijamos $p \in X$. Afirmamos que $S(p) \subset P$. Para ver esto, tomemos un punto $z \in S(p)$. Entonces, por (4.3), $p \in W(z)$. Luego, $W(z) \neq \emptyset$ y, por consiguiente, $z \in P$. Esto muestra que $S(p) \subset P$. Utilizando esto y el hecho de que $S(p)$ contiene un conjunto G_δ-denso en X (Corolario 4.12), resulta que P contiene un subconjunto G_δ-denso en X. ■

4.7 Conexidad en Pequeño y Suavidad.

En esta sección presentaremos algunas relaciones entre los conceptos de conexidad en pequeño (cik) y suavidad. Para esto, consideremos el conjunto

$$P(X) = \{ p \in X : X \text{ es cik en } p \}.$$

Como mencionamos en la Sección 1.14, $L(X) \subset P(X)$ y, en general, dicha contención es propia. Además, por el Corolario 4.4, $I(X) \subset L(X)$. Por lo anterior, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.17. $I(X) \subset P(X)$.

También notemos que para el conjunto $S(p)$, es natural preguntarse si $p \in S(p)$. En el siguiente teorema vemos que, si este es el caso, entonces X es cik en p.

Teorema 4.18. *Si $p \in S(p)$, entonces $p \in P(X)$.*

Demostración. Si $p \notin P(X)$, entonces existe un abierto U de X tal que $p \in U$ y, además, no existe una vecindad conexa de p contenida en U. Equivalentemente ningún subconjunto conexo de U que contiene a p, lo tiene en su interior. En vista de que $p \in U$, podemos considerar la componente C de U tal que $p \in C$. Entonces como sabemos, $p \notin \operatorname{int}_X(C)$, así que $p \in \operatorname{fr}_X(C)$. Por lo tanto, existe $(x_n)_n \subset X - C$ tal que $x_n \to p$.

Como $p \in S(p)$, para el subcontinuo $K = \{p\}$ de X que tiene a p y la sucesión $(x_n)_n$ que converge a p, existe $(K_n)_n \subset C(X)$ tal que $x_n, p \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $K_n \to K$. Ahora bien, como U es un abierto en X que contiene a K, por el Teorema 1.19, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{N}(\epsilon, K) \subset U$. Y en vista de que $K_n \to K$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $H(K_m, K) < \epsilon$. Luego $K_m \subset \mathcal{N}(\epsilon, K) \subset U$. Como $p \in K_m$ y C es la componente de U que contiene a p, sucede que $K_m \subset C$. Por lo cual $x_m \in C$. Como esto es una contradicción, podemos concluir que $p \in P(x)$. ■

Utilizando los conjuntos $S(p)$ para cada punto p, podemos caracterizar al conjunto $P(X)$, en una forma parecida a la dada en el Teorema 4.15.

Teorema 4.19. *Si X es un continuo, entonces*

$$P(X) = \bigcap_{p \in X} S(p).$$

Demostración. Supongamos primero que $x \in P(X)$ y tomemos un punto $p \in X$. Mostraremos que $x \in S(p)$. Para esto, sean $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x$ y $K \in C(X)$ con $p, x \in K$. Dada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la familia

$$\mathcal{M}_n = \{ M \in C(X) : x_n, x \in M \}.$$

Por el Teorema 2.17, $\mathcal{M}_n$ es un subconjunto compacto de $C(X)$. Entonces existe $M_n \in \mathcal{M}_n$ tal que

$$H(M_n, \{x\}) = \min\{ H(A, \{x\}) : A \in \mathcal{M}_n \}.$$

Ahora veamos que $M_n \to \{x\}$. Para esto sea $\epsilon > 0$. Como X es normal, existe un subconjunto abierto U en X tal que $x \in U \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset B(\epsilon, x)$. Como X es cik en x, existe una vecindad conexa V de x tal que $x \in V \subset U$. Hagamos $A = \mathrm{cl}_X(V)$ y notemos que

$$A \subset \mathrm{cl}_X(U) \subset B(\epsilon, x) = \mathcal{N}(\epsilon, \{x\}).$$

Entonces cada punto de A se encuentra a distancia menor que ϵ de x. Luego, $\{x\} \subset \mathcal{N}(\epsilon, A)$. Por consiguiente, $H(A, \{x\}) < \epsilon$.

Como $x_n \to x$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para cada $n \geq N$. Esto implica que $x, x_n \in A$ para cada $n \geq N$ o, lo que es lo mismo, que $A \in$

$\mathcal{M}_n$ siempre que $n \geq N$. Por tanto, por la definición de M_n, sucede que $H(M_n, \{x\}) \leq H(V, \{x\}) < \epsilon$ para cada $n \geq N$. Esto prueba que $M_n \to \{x\}$.

Ahora bien, dada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = M_n \cup K$. Entonces, $p, x_n \in K_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y, por el Teorema 1.9,

$$K_n = M_n \cup K \to \{x\} \cup K = K.$$

Por tanto, $x \in S(p)$. Esto prueba que $P(X) \subset \bigcap_{p\in X} S(p)$.

Supongamos ahora que $x \in \bigcap_{p\in X} S(p)$. Entonces, en particular, $x \in S(x)$ y, por el Teorema 4.18, $x \in P(X)$. Esto termina la demostración del teorema. ■

En [13, Proposición 31] se afirma que

$$L(X) = \bigcap_{p\in X} S(p). \tag{4.4}$$

De ser cierta dicha afirmación entonces, por el Teorema 4.19, sucedería que $P(X) = L(X)$. Como señalamos en la Sección 1.14, un continuo puede tener puntos de conexidad en pequeño que no son de conexidad local. Por consiguiente, la igualdad (4.4) es falsa. La forma correcta de calcular $\bigcap_{p\in X} S(p)$ es como se indica en el Teorema 4.19. Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente teorema, que responde la pregunta de si $p \in S(p)$.

Teorema 4.20. *Sea un continuo X y un punto $p \in X$. Entonces $p \in P(X)$ si y sólo si $p \in S(p)$.*

Demostración. Si $p \in P(X)$ entonces, por el teorema anterior, $p \in S(x)$ para cada $x \in X$. En particular, $p \in S(p)$. Si, por otra parte, $p \in S(p)$ entonces, por el Teorema 4.18, $p \in P(X)$. ■

En el siguiente resultado vemos que en los continuos indescomponibles (Definición 1.69), el conjunto $S(p)$ es el complemento de la composante de p en X, denotada por $K(X,p)$. Remitimos al lector a la Sección 1.17 para las nociones y resultados básicos sobre composantes.

Teorema 4.21 ([13, Observación 33]). *Si X es indescomponible y $p \in X$, entonces*

$$S(p) = X - K(X,p).$$

Demostración. Veamos primero que $X - K(X,p) \subset S(p)$. Sea $x \in X - K(X,p)$. Entonces X es irreducible entre p y x. Para ver que $x \in S(p)$ sean $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x$, y $G \in C(X)$ con $p, x \in G$. En vista de que X es irreducible entre p y x, tenemos que $G = X$. Dada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $G_n = X$ es un subcontinuo de X que tiene a p y x_n y, además la sucesión $(G_n)_n$, así formada, converge a G. Luego, $x \in S(p)$.

Ahora veamos que $S(p) \subset X - K(X,p)$, o bien $K(X,p) \subset X - S(p)$. Tomemos $x \in K(X,p)$. Entonces existe un subcontinuo propio G de X tal que $p, x \in G$. Por el Teorema 1.85, existe una sucesión $(x_n)_n$ en $X - K(X,p)$ tal que $x_n \to x$. Por tanto X es irreducible entre p y cada x_n. Ahora bien, si $x \in S(p)$, entonces existe una sucesión $(G_n)_n$ en $C(X)$ tal que $G_n \to G$ y $p, x_n \in G_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Notemos que, para $n \in \mathbb{N}$, X es irreducible entre p y x_n. Por tanto $G_n = X$ y, entonces $G_n \to X$. Por otro lado, $G_n \to G$, así que $G = X$. Esto contradice el hecho de que G es un subconjunto propio de X. Por tanto, $x \in X - S(p)$. ■

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.22. *Los continuos indescomponibles son puntualmente suaves.*

Demostración. Supongamos que X es indescomponible y tomemos un punto $x \in X$. Veremos que $W(x) \neq \emptyset$. Para ver esto supongamos, por el contrario, que $W(x) = \emptyset$. Tomemos un elemento $p \in X$. Si $x \in S(p)$ entonces, por (4.3), $p \in W(x)$. Como esto es imposible, tenemos que $x \in X - S(p)$. De acuerdo con el Teorema ??, $X - S(p) \subset K(X,p)$. Luego, $x \in K(X,p)$. Esto muestra que $x \in K(X,p)$ para cada $p \in X$. En otras palabras, todas las composantes de X tienen en común al punto x. Esto contradice el hecho de que las composantes de X son ajenas dos a dos (parte 4 del Teorema 1.84). Por consiguiente, $W(x) \neq \emptyset$ y X es puntualmente suave. ■

4.8 Propiedad de Kelley y Suavidad.

Recordemos que

$$K(X) = \{\, p \in X : X \text{ tiene la propiedad de Kelley en } p \,\}$$

y

$$P(X) = \{\, p \in X : X \text{ es cik en } p \,\}.$$

Es claro que $K(X) = X$ si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley. De acuerdo con la definición del conjunto $S(p)$ tenemos que si $p \in S(p)$, entonces $p \in K(X)$. Por tanto

$$\{p \in X : p \in S(p)\} \subset K(X). \tag{4.5}$$

Por el Teorema 4.20

$$\{p \in X : p \in S(p)\} = \{p \in X : p \in P(X)\} = P(X) \tag{4.6}$$

Combinando (4.5) y (4.6) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.23. $P(X) \subset K(X)$.

Esto muestra una prueba alternativa del Teorema 2.8. Tenemos, además, el siguiente resultado.

Teorema 4.24. *Para cada continuo X tal que $P(X) \neq \emptyset$, se tiene que*

$$K(X) \subset \bigcap_{p \in P(X)} S(p). \tag{4.7}$$

Demostración. Sean $x \in K(X)$ y $p \in P(X)$. Sean $(x_n)_n \subset X$ tal que $x_n \to x$ y $K \in C(X)$ con $p, x \in K$. Como X tiene la propiedad de Kelley en x, existe $(L_n)_n \subset C(X)$ tal que $x_n \in L_n$ y $L_n \to K$. Notemos que

$$p \in K = \liminf L_n$$

así que, por el Teorema 1.14, existe una sucesión $(p_n)_n$ en X tal que $p_n \to p$ y $p_n \in L_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $p \in P(X)$, por el Teorema 4.19, $p \in S(p)$. Entonces existe $(M_n)_n \subset C(X)$ tal que $p, p_n \in M_n$ y $M_n \to \{p\}$.

Dada $n \in \mathbb{N}$, sea $K_n = L_n \cup M_n$. En vista de que $p_n \in L_n \cap M_n$, resulta que K_n es un subcontinuo de X. Además $p, x_n \in K_n$ y, por el Teorema 1.9,

$$K_n = L_n \cup M_n \to K \cup \{p\} = K.$$

Esto prueba que $x \in S(p)$. ■

El siguiente teorema establece la relación entre la propiedad de Kelley y la suavidad.

Teorema 4.25. *Un continuo X con la propiedad de Kelley es suave en un punto $p \in X$ si y sólo si X es cik en p.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por el Teorema 4.17, $I(X) \subset P(X)$. Por tanto, si X suave en p, X es cik en p.

($\Leftarrow$) En vista de que $K(X) = X$, por el Teorema 4.24,

$$\bigcap_{x \in P(X)} S(x) = X.$$

Equivalentemente, $S(x) = X$, para cada $x \in P(X)$, es decir, X es suave en todos sus puntos de conexidad en pequeño. ■

Recordemos que un **dendroide** es un continuo conexo por trayectorias y hereditariamente unicoherente. Que un continuo X sea unicoherente quiere decir que siempre que X sea igual a la unión de dos subcontinuos de X, sean éstos A y B, entonces sucede que $A \cap B$ es conexo.

En [21], S. T. Czuba estudió la clase de los dendroides y su relación con la propiedad de Kelley. También, en [21, Corolario 5], S. T. Czuba probó el siguiente resultado,

Teorema 4.26. *Los dendroides con la propiedad de Kelley son suaves.*

Combinando los teoremas 4.25 y 4.26 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.27. *Los dendroides con la propiedad de Kelley poseen un punto de conexidad en pequeño.*

En general uno podría considerar el problema de la caracterización de los continuos con la propiedad de Kelley que poseen un punto de conexidad en pequeño. De acuerdo con el Teorema 2.10, todo continuo con la propiedad de Kelley que contiene un punto de corte, posee un punto de conexidad en pequeño.

Terminamos el capítulo mostrando que la contención inversa de (4.7) no es cierta en general.

Ejemplo 4.28. *Existe un continuo X tal que*

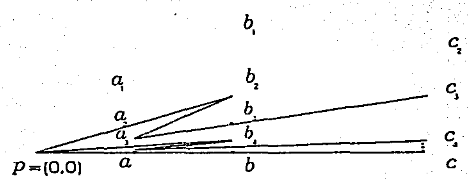
$$P(X) \neq \emptyset \neq \left(\bigcap_{p \in P(X)} S(p) \right) - K(X).$$

Justificación. El continuo X se construirá en $\mathbb{R}^2$. Convenimos que si $u, v \in \mathbb{R}^2$, entonces el símbolo uv denota el segmento de línea de u a v. Consideremos ahora los puntos $p = (0,0), a = (\frac{1}{4}, 0), b = (\frac{1}{2}, 0), c = (1,0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $c_n = (1, \frac{1}{2^n})$ y sean $a_n, b_n \in qc_n$ de manera que su primera coordenada es $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$, respectivamente. Sea:

$$X = qc \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} qb_{2n} \cup b_{2n}a_{2n+1} \cup a_{2n+1}c_{2n+1} \right).$$

Notemos que X no tiene la propiedad de Kelley en b pues para la sucesión $(b_{2n})_n$ que converge a b y el subcontinuo bc de X que contiene a b, no es posible encontrar una sucesión $(B_{2n})_n$ en $C(X)$ que converga a bc y tenga la propiedad de que $b_{2n} \in B_{2n}$, para cada natural n.

Notemos que X es cik en c_3, por lo que $P(X) \neq \emptyset$. Más aún, $P(X) = \{q\} \cup (X - qc)$. Además, para cada $p \in P(X)$ es sencillo ver que $b \in S(p)$. Por tanto, b está en la intersección de todos los conjuntos de la forma $S(p)$ con $p \in P(X)$ y b no está en K(X). ■



Capítulo 5

Preservación de la Suavidad.

5.1 Introducción.

En esta sección mostraremos que las funciones monótonas preservan la suavidad. Dicho resultado se demostró primero en el artículo [17, Corolario 1] y, posteriormente en el artículo [13, Corolario 15]. En el primer caso se presenta una demostración topológica del mismo y, en el segundo, la prueba es un tanto más conjuntista. En este capítulo presentamos ambas demostraciones.

5.2 Primera Demostración.

Supongamos que X es un continuo y sea $p \in X$. En el capítulo anterior definimos una función $F_p\colon X \to C^2(X)$ que es semicontinua por arriba y, cuya continuidad, equivale al hecho de que X sea suave en p. (ver teoremas 4.8 y 4.11). Como dicha función depende del continuo X, podemos suponer que $F[X,p]$ es una notación extendida de F_p. De esta manera, si $f\colon X \to Y$ es una función continua y suprayectiva y, además, $p \in X$ y $q \in Y$, entonces podemos considerar las funciones $F_1 = F[X,p]$ y $F_2 = F[Y,q]$. También podemos considerar la función inducida $C^2(f)\colon C^2(X) \to C^2(Y)$ y, por consiguiente, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C^2(X) & \xrightarrow{C^2(f)} & C^2(Y) \\ {\scriptstyle F_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle F_2} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Teorema 5.1. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Consideremos puntos $p \in X$ y $q \in Y$ de manera que $q = f(p)$. Entonces el diagrama anterior conmuta si y sólo si f es monótona en p.*

Demostración. ($\Rightarrow$)Supongamos que el diagrama conmuta, esto es,

$$C^2(f)(F_1(x)) = F_2(f(x))$$

lo cual significa que

$$\{\, C(f)(K) : K \in C(X) \text{ y } p, x \in K \,\} = \{\, L \in C(Y) : q, f(x) \in L \,\} \tag{5.1}$$

para cada $x \in X$. Ahora bien, sea $Q \subset Y$ un continuo tal que $q \in Q$, y supongamos que $f^{-1}(Q)$ no es conexo. Tomemos entonces un punto x en una componente de $f^{-1}(Q)$ diferente a la que tiene al punto p. Notemos ahora, que:

$$Q \in \{L \in C(Y) : q, f(x) \in L\}.$$

Pero por el contrario $Q \notin \{C(f)(K) : K \in C(X) \text{ y } p, x \in K\}$ puesto que si suponemos que lo está, entonces $Q = C(f)(K)$ para algún $K \in C(X)$ con $p, x \in K$, esto es, $Q = f(K)$; pero $K \subset f^{-1}(Q)$, entonces como K es conexo y $f^{-1}(Q)$ no lo es, tenemos que K está contenido en una componente conexa de $f^{-1}(Q)$ la cual tiene a ambos puntos (p y x), lo cual es una contradicción, por lo tanto es cierto que $Q \notin \{C(f)(K) : K \in C(X) \text{ y } p, x \in K\}$ lo cual, a su vez, es una contradicción a nuestra hipótesis. De esta manera podemos afirmar que $f^{-1}(Q)$ es conexo, y así mismo, que f es monótona en p.

($\Leftarrow$)Supongamos ahora que f es monótona en p. Para ver que el diagrama anterior conmuta, sea $x \in X$ y consideremos que $\mathcal{A}$ es el término izquierdo de la igualdad (5.1), mientras que $\mathcal{B}$ es el término derecho de dicha igualdad.

Veamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Sea $C(f)(K) \in \mathcal{A}$, entonces $K \in C(X)$ y $p, x \in K$. Por lo tanto $C(f)(K) \in C(Y)$, esto es, $C(f)(K) = L$ para algún $L \in C(Y)$. Además ya que $C(f)(K) = f(K)$, entonces $f(p) = q, f(x) \in C(f)(K)$. Por lo tanto $C(f)(K) \in \mathcal{B}$.

Ahora tomemos $L \in \mathcal{B}$, entonces $q, f(x) \in L \in C(Y)$. Como f es monótona relativa a p, entonces $K = f^{-1}(L)$ es conexo y además es cerrado por la continuidad de f, por tanto $K = f^{-1}(L)$ es un continuo de X con $p, x \in K$. De este modo, $L = f(K) = C(f)(K)$ está en $\mathcal{A}$, concluyendo así la demostración de este teorema. ■

Ahora mencionaremos un resultado, el cual nos da una condición para que una función definida entre continuos, preserve la suavidad en la imagen de un punto. Más adelante daremos otra prueba de este resultado, el cual apareció probado primero de esta forma en [17].

Teorema 5.2 **([17, Corolario1]).** *Sean X un continuo suave en un punto p y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva de X en un continuo Y. Si f es monótona en p, entonces Y es suave en $f(p)$.*

Demostración. Por el Corolario 4.11, basta ver que la función F_2 definida en el Teorema 5.1 es continua. Para esto, sean $y \in Y$ y una sucesión $(y_n)_n \subset Y$ tal que $y_n \to y$ y $F_2(y_n) \to \mathcal{A}$ para algún $\mathcal{A} \in C^2(Y)$. Entonces por 1.23, basta ver que $\mathcal{A} = F_2(y)$.

Sea $A \in \mathcal{A}$, como A está en el límite inferior de la sucesión $(F_2(y_n))_n$, por el Teorema 1.14 existe una sucesión $(A_n)_n \subset C(Y)$ tal que $A_n \in F_2(y_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \to A$.

Notemos también que $f(p)$ y y_n están en A_n (ver el Teorema 5.1), luego entonces por 1.16, tenemos que $f(p), y \in A$, así $A \in F_2(y)$ y por lo tanto $\mathcal{A} \subset F_2(y)$.

Para probar la otra contención procederemos como sigue: Ya que f es suprayectiva, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar un punto $x_n \in X$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como X es compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ de (x_n), la cual converge a algún punto $x \in X$. Observemos que $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$. Ahora bien, como f es monótona relativa a p, el diagrama del Teorema 5.1 conmuta, así que para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que:

$$F_2(y_{n_k}) = F_2(f(x_{n_k})) = C^2(F_1(x_{n_k})). \tag{5.2}$$

Además, como $x_{n_k} \to x$, entonces por la continuidad de f, tenemos que $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Pero $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ y la sucesión (y_{n_k}) converge a y, por lo tanto $f(x) = y$. Ahora bien, por la conmutatividad del diagrama, tenemos que

$$F_2(y) = F_2(f(x)) = C^2(F_1(x)). \tag{5.3}$$

Como X es suave en p, entonces por el Corolario 4.11, F_1 es continua, por lo cual $F_1(x_{n_k}) \to F_1(x)$. También, en vista de que f es continua, la función inducida $C(f)$ es continua, y por la misma razón la inducida de $C(f)$, o sea $C^2(f)$ también lo es. Así que:

$$C^2(F_1(x_{n_k})) \to C^2(F_1(x)). \tag{5.4}$$

Usando (5.2), (5.3) y (5.4) tenemos que:

$$F_2(y) = C^2(F_1(x)) = \limsup C^2(F_1(x_{n_k})) = \limsup F_2(y_{n_k})...(a)$$

pero por el Teorema 1.11, inciso 4.2, y el Teorema 1.13, tenemos que

$$\limsup F_2(y_{n_k}) \subset \limsup F_2(y_n) = \mathcal{A}...(b).$$

y de este modo utilizando (a) y (b), afirmamos que $F_2(y) \subset \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A} = F_2(y)$, esto es F_2 es continua, lo cual, finalmente, nos permite concluir que Y es suave en $f(p)$. ■

5.3 Segunda demostración.

En esta sección trabajaremos los resultados de [13], los cuales nos relacionan la suavidad de un continuo X en uno de sus puntos y la Propiedad de Kelley en un punto. A continuación presentaremos un Teorema que nos da una relación bastante curiosa entre una función f definida sobre un continuo X y $S(p)$ para algún punto $p \in X$. Pero antes, recordemos un resultado que nos servirá para demostrar, dicho Teorema:

Teorema 5.3. *Sean $A, B \subset X$ y $f : X \to Y$ una función suprayectiva. Entonces, $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$.*

Demostración. Sea $y \in f(A) - f(B)$. Entonces existe $a \in A$ tal que $y = f(a)$ y además, notemos que $a \notin B$ (pues de lo contrario $y \in f(B)$, lo que sería absurdo). De manera que $a \in A - B$ y $y = f(a) \in f(A - B)$.

Por tanto $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$. ■

Teorema 5.4. *Sean X un continuo X, $p \in X$ y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Entonces*

$$Y - f(X - S(p)) \subset f(S(p)). \tag{5.5}$$

Demostración. Por el Teorema anterior, tenemos que

$$f(X) - f(X - S(p)) \subset f(X - (X - S(p))).$$

Y, como f es suprayectiva, podemos concluir que

$$Y - f(X - S(p)) \subset f(S(p)).$$

■

Teorema 5.5. *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre los continuos X y Y. Si f es monótona en un punto $p \in X$, entonces:*

$$Y - f(X - S(p)) \subset S(f(p)). \tag{5.6}$$

Demostración. Para ver (5.6) probaremos la contención respectiva entre sus complementos, es decir, probaremos que $Y - S(f(p)) \subset f(X - S(p))$.

Sea $y \in Y - S(f(p))$, entonces, por el Teorema 4.7, existen $(y_n)_n \subset Y$ tal que $y_n \to y$ y $Q \in C(Y)$ tal que $y, f(p) \in Q$ y tal que para ninguna subsucesión $(y_{n_k})_k$ es posible encontrar una sucesión de subcontinuos $(Q_k)_k$ de Y tal que $y_{n_k}, f(p) \in Q_k$ y $Q_k \to Q$.

Al suponer, por el contrario que $y \notin f(X - S(p))$, tenemos que, $f^{-1}(y) \subset S(p)$. Por lo tanto, si para algún $x \in X$ sucede que $f(x) = y$, entonces $x \in S(p)$.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos tomar un punto $x_n \in f^{-1}(y_n)$, como $(x_n)_n$ es una sucesión en un compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto $x \in X$ y entonces $f(x_{n_k}) \to f(x)$, pero $f(x_{n_k}) = y_{n_k} \to y$, por lo tanto $f(x) = y$, esto es $x \in f^{-1}(y)$.

Además, como f es monótona en p y $f(p) \in Q$, al tomar $K = f^{-1}(Q)$, tenemos que K es conexo y ya que además es cerrado en un compacto, K es un subcontinuo en X, tal que $p, x \in K$ $(f(p), y \in Q)$. También, ya que $x \in$

$f^{-1}(y) \subset S(p)$, entonces existe una sucesión de subcontinuos $(K_{n_l})_l$ de X tal que $x_{n_l}, p \in K_{n_l}$ para cada $l \in \mathbb{N}$ y $K_{n_l} \to K$. Así si definimos $Q_{n_l} = f(K_{n_l})$, tenemos que Q_{n_l} es un subcontinuo de Y y $y_{n_l}, f(p) \in Q_{n_l}$. Y como $K_{n_l} \to K$ y $C(f)$ es continua, entonces $C(f)(K_{n_l}) \to C(f)(K)$, así que por definición de $C(f)$, $Q_{n_l} \to Q$, con $y_{n_l}, f(p) \in Q_{n_l}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto se cumple la contención relativa a los complementos, lo cual termina esta prueba. ■

A continuación presentaremos la segunda demostración del Teorema 5.2.

Corolario 5.6. *Sean X un continuo suave en un punto p y $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva de X en un continuo Y. Si f es monótona en p, entonces Y es suave en $f(p)$.*

Demostración. Por el Teorema 5.5, tenemos que $Y - f(X - S(p)) \subset S(f(p))$. Pero, ya que X es suave en p, tenemos que $S(p) = X$. Por lo tanto

$$Y \subset S(f(p)).$$

Como la otra contención es obvia, podemos concluir que $Y = S(f(p))$, esto es, Y es suave en $f(p)$. ■

Observemos que esta prueba es digamos más topológica, mientras que la primera requiere de un hecho algebraico como lo es el hecho de que el diagrama del Teorema 5.1 conmute. El siguiente corolario aparece por primera vez en el artículo de T. Mackoviack [35, Teorema 6.2], aunque nosotros lo probaremos justo como lo plantea el artículo [13], en el resultado 16. Dicho corolario, afirma que la imagen de los puntos iniciales de X bajo una función continua, suprayectiva y monótona f, está contenida en el conjunto de los puntos iniciales de $f(X)$.

Corolario 5.7. *Sea $f : X \to Y$ una función continua, suprayectiva y monótona. Entonces*

$$f(I(X)) \subset I(f(X)).$$

Demostración. Si $y \in f(I(X))$, entonces existe $p \in I(X)$ tal que $f(p) = y$. Como X es suave en p, tenemos que $S(p) = X$. Además, como f es monótona, por el Teorema 1.57 f es monótona en x. Aplicando el corolario anterior, tenemos que Y es suave en $f(p) = y$. Luego, $y \in I(Y)$ concluyendo de este modo la demostración. ■

5.4 Contraejemplos.

En esta sección, presentaremos ejemplos, los cuales muestran que las inclusiones:

$$\begin{aligned} &f(S(p)) \subset Y - f(X - S(p)) \\ &S(f(p)) \subset Y - f(X - S(p)) \\ &I(f(X)) \subset f(I(X)) \end{aligned}$$

no siempre suceden, que la monotoneidad de f a un punto es necesaria en el Teorema 5.5 y que los conjuntos $f(S(p))$ y $S(f(p))$ no son comparables. Todos los ejemplos se darán en el plano $\mathbb{R}^2$. Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ convenimos en denotar por ab al segmento de recta que une a los puntos a y b.

Ejemplo 5.8. *Existen dos continuos X y Y, un punto $p \in X$ y una función monótona $f: X \to Y$ tal que $f(S(p)) \not\subseteq Y - f(X - S(p))$ y $f(S(p)) \not\subseteq S(f(p)$.*

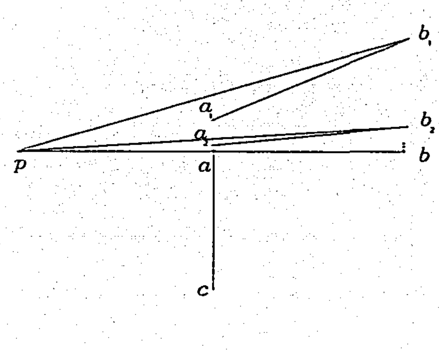
Justificación. Sean $p = (0,0)$, $a = (\frac{1}{2}, 0)$, $b = (1,0)$, $c = (\frac{1}{2}, -1)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4^{n+1}})$ y $b_n = (1, \frac{1}{4^n})$. Definimos

$$Y = pb \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} pb_n \cup b_n a_n \right)$$

y

$$X = ac \cup Y$$

.



Definimos $f: X \to Y$ como la identidad en Y y como la constante a en ac. Esto es, si $x \in ac$, entonces $f(x) = a$. Por tanto, $f^{-1}(y) = \{y\}$ si $y \neq a$ y $f^{-1}(a) = ac$. Esto muestra que f es monótona.

Ahora bien. para mostrar que $f(S(p)) \not\subseteq Y - f(X - S(p))$ y $f(S(p)) \not\subseteq S(f(p))$, es suficiente con hacer ver que $a \in f(S(p)) \cap f(X - S(p)) - S(f(p))$. Para mostrar que $a \in f(S(p))$, notemos que c es un elemento de X tal que $f(c) = a$. Afirmamos que $c \in S(p)$. Para mostrar esto, sea $A \in C(X)$ tal que $p, c \in A$ y sea $(c_n)_n \subset X$ tal que $c_n \to c$. Como $p, c \in A$ resulta que $pa \cup ac \subset A$. Además, si tomamos $\epsilon > 0$ tal que $B_X(\epsilon, c) \subset ac - \{a\}$ entonces, como $c_n \to c$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \in B_X(\epsilon, c)$ para cada $n \geq N$. Luego $c_n \in ac - \{a\} \subset A$ para cada $n \geq N$. Definamos $A_n = X$ para cada $n < N$ y $A_n = A$ para cada $n \geq N$. Entonces A_n es una sucesión de subcontinuos de X tal que $p, c_n \in A_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $A_n \to A$. Esto prueba que $c \in S(p)$. Por tanto, $a \in f(S(p))$.

Para ver que $a \in f(X - S(p))$, notemos que a es un elemento de X tal que $f(a) = a$. Además $a \notin S(p)$ en vista de que $(a_n)_n$ es una sucesión en X que converge a a y tiene la propiedad de que no existe una sucesión $(A_n)_n \subset C(X)$ tal que $p, a_n \in A$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $A_n \to pa$. Finalmente, para ver que $a \notin S(f(p))$ basta con hacer notar que $f(p) = p$ y que, por lo que antes probamos, $a \notin S(p) = S(f(p))$. ■

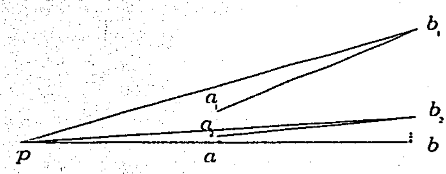
Ejemplo 5.9. *Existen dos continuos X y Y, un punto $p \in X$ y una función continua y suprayectiva $f: X \to Y$ tal que $S(f(p)) \not\subseteq Y - f(X - S(p))$, $I(f(X)) \not\subseteq f(I(X))$ y $S(f(p)) \not\subseteq f(S(p))$.*

Justificación. Utilizando los mismos puntos que definimos en el ejemplo anterior, sea

$$X = pb \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} pb_n \cup b_n a_n \right).$$

Supongamos $f: X \to Y$ es la constante a en ab, mientras que f es un homeomorfismo en $X - ab$. Por lo tanto, $Y = f(X)$ es homeomorfo al abanico armónico que tiene por vértice a $f(p)$ y por pata límite a $f(p)a$. Entonces $S(f(p)) = Y$.

Ahora bien, en vista de que $S(f(p)) = Y$, para probar que $S(f(p)) \not\subseteq Y - f(X - S(p))$, basta con ver que $f(X - S(p))$ es no vacío, lo cual se



logra haciendo ver que $X - S(p)$ es no vacío. En efecto, es fácil ver que $S(p) = (X - pb) \cup \{p\}$. Así que $S(p) \neq \emptyset$.

Notemos ahora que $I(X) = X - pb$. Por tanto, $f(I(X)) = Y - f(p)a$. Luego, $f(p) \notin f(I(X))$. Por otro lado, como $S(f(p)) = Y$, tenemos que $f(p) \in I(Y) = I(f(X))$.

Ahora bien, como $S(p) = (X - pb) \cup \{p\}$, tenemos que $f(S(p)) = (Y - f(p)a) \cup \{f(p)\}$. Por tanto, $a \notin f(S(p))$. En vista de que $S(f(p)) = Y$, resulta que $a \in S(f(p))$. ■

Ejemplo 5.10. *Existen dos continuos X y Y, un punto $p \in X$ y una función continua y suprayectiva $f\colon X \to Y$ que no es monótona en p y es tal que $Y - f(X - S(p)) \not\subseteq S(f(p))$.*

Justificación. Utilizamos la misma notación del primer ejemplo y, adicionalmente, definimos $d = (\frac{3}{2}, 0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n = (\frac{3}{2}, \frac{1}{4^n})$. Consideremos ahora

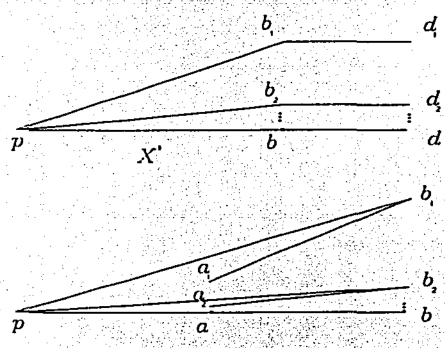
$$X' = pb \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} pb_n\right), \qquad X = X' \cup bd \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} b_n d_n\right)$$

y

$$Y = pb \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} pb_n \cup b_n a_n\right).$$

Observemos que X es homeomorfo a A_s, por lo cual $X = S(p)$. Además $X' \subset Y$. Definimos $f\colon X \to Y$ de manera que

1. f es la identidad en X';



2. dada $n \in \mathbb{N}$, $f_{|b_n d_n}$ es un homeomorfismo del arco $b_n d_n$ al arco $b_n a_n$, de manera que $f(d_n) = a_n$;

3. $f_{|bd_0}$ es un homeomorfismo del arco bd_0 en al arco ba, de manera que $f(d_0) = a$.

Notemos que f no es monótona en p, pues $Q = pa$ es un subcontinuo de Y que tiene a $f(p)$ y $f^{-1}(Q) = pa \cup \{d\}$ no es un conexo. Ahora bien, como $S(p) = X$, tenemos que $Y - f(X - S(p)) = Y$. Por tanto, si $Y - f(X - S(p)) \subset S(f(p))$, sucede que $S(p) = S(f(p)) = Y$. Esto indica que Y es suave en p, lo cual es falso. Por tanto, $Y - f(X - S(p)) \not\subset S(f(p))$. ■

Capítulo 6

Suavidad y Propiedad de Kelley en Hiperespacios.

6.1 Introducción.

En esta sección se describirán en detalle, los resultados que se encuentran en el artículo [18], así como una parte de los del artículo [14], en donde se generalizan los resultados del anterior. En [18] W. J. Charatonik y W. Makuchowski demuestran que, para cualquier continuo X, la suavidad de alguno de sus hiperespacios,$C(X)$ o bien 2^X, implica que X tiene la propiedad de Kelley. Asimismo se demuestra que, para cualesquiera dos continuos X y Y, la suavidad de su producto cartesiano $X \times Y$ implica la propiedad de Kelley en X y Y. En [18] J. J. Charatonik y A. Illanes generalizan el concepto de hiperespacio de un continuo y, posteriormente, muestran que los resultados anteriores permanecen válidos en este contexto.

6.2 Generalización de Hiperespacios.

Dado un continuo X y un subcontinuo P de X, denotaremos por $C(P, X)$ al subconjunto de $C(X)$ cuyos elementos son todos los subcontinuos de X que contienen a P.

Teorema 6.1. *Para cada subcontinuo P de X, tenemos que $C(P, X) \in C^2(X)$. Más aún, $C(P, X)$ es conexo por trayectorias.*

Demostración. Es claro que $P \in C(P, X)$, así que $C(P, X)$ es no vacío. Tomemos ahora un elemento $K \in \mathrm{cl}_{C(X)}(C(P, X))$. Entonces existe una sucesión $(K_n)_n$ en $C(P, X)$ tal que $K_n \to K$. Luego $K \in C(X)$ y $P \subset K_n$ para cada natural n por lo que, de acuerdo con el Teorema 1.15, $P \subset K$. Esto muestra que $C(P, X)$ es cerrado en $C(X)$. Ahora veremos que $C(P, X)$ es conexo por trayectorias. Tomemos un elemento $K \in C(P, X)$ y sea λ un arco ordenado de K a X en $C(X)$. Entonces $P \subset K \subset \lambda(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. Luego, $\lambda \subset C(P, X)$. Por consiguiente, cada elemento de $C(P, X)$ se puede conectar con X mediante una trayectoria en $C(P, X)$. Esto implica que $C(P, X)$ es conexo por trayectorias. En particular, $C(P, X)$ es conexo. ■

Si $P = \{p\}$ para algún punto p de X, denotaremos a $C(P, X)$ simplemente como $C(p, X)$. Notemos que $C(p, X)$ es la constituyente de p en X (ver Definición 4.2).

Una manera natural de generalizar un poco la noción de hiperespacio, y que es la que se presenta en [14], es la siguiente.

Definición 6.2. *Un hiperespacio de un continuo X es un elemento de $C(2^X)$.*

En otras palabras, $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X si $\mathcal{H}(X)$ es un subcontinuo de 2^X. Para cada $p \in X$ el símbolo $\mathcal{H}(p, X)$ es el subespacio de $\mathcal{H}(X)$ de todos los miembros que contienen al punto p.

Algunos ejemplos de hiperespacios son los ya conocidos $C(X)$,

$$C_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}$$

y

$$F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$$

con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. Bajo las mismas consideraciones, cada conjunto de la forma $C(P, X)$ es un hiperespacio de X. Notemos que $C(X) = C_1(X)$, $F_1(X)$ es homeomorfo a X y $C_n(X) \subset C_{n+1}(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Denotaremos como H^2 la métrica de Hausdorff del hiperespacio 2^{2^X} inducida por la métrica de Hausdorff H para X. Una definición que nos será de gran utilidad es la siguiente:

Definición 6.3. *Si $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X y $A, B \in \mathcal{H}(X)$ son tales que $A \subset B$, entonces un* **arco ordenado de A a B en $\mathcal{H}(X)$** *es una función continua $\lambda\colon [0,1] \to \mathcal{H}(X)$ tal que $\lambda(0) = A$, $\lambda(1) = B$ y $\lambda(s) \subsetneq \lambda(t)$ siempre que $0 \leq s < t \leq 1$. En tal situación, decimos que λ* **empieza en A**.

Notemos que $F_1(X) \subset C(X)$. Más aún, todo arco ordenado en 2^X que empieza en un elemento de $C(X)$, está contenido en $C(X)$, de acuerdo con el Teorema 1.63. En tal situación, decimos que $C(X)$ está *completo*. En general, tenemos la siguiente definición.

Definición 6.4. *Un hiperespacio $\mathcal{H}(X)$ de X está* **completo** *si $F_1(X) \subset \mathcal{H}(X)$ y, además, todo arco ordenado en 2^X que empieza en un elemento de $\mathcal{H}(X)$ está contenido en $\mathcal{H}(X)$.*

A manera de ejemplo, tenemos también que el hiperespacio $C_n(X)$ está completo, mientras que $F_n(X)$ y $C(P, X)$ no lo están, en vista de que los arcos ordenados en 2^X que empiezan en un elemento de $F_n(X)$ no están contenidos en $F_n(X)$ y, además, $F_1(X)$ no está contenido en $C(P, X)$.

En el siguiente resultado mostramos la relación entre la suavidad de un hiperespacio que está completo y la propiedad de Kelley.

Teorema 6.5 ([14, Teorema 2]). *Si $\mathcal{H}(X)$ es un hiperespacio de X que es suave y está completo, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

Demostración. Para probar este resultado utilizaremos la caracterización de suavidad en términos de epsilones y deltas (ver Teorema 4.6). Supongamos que $\mathcal{H}(X)$ es suave en un elemento $P \in \mathcal{H}(X)$.

Sea $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{H}(X)$ es suave en P, existe $\delta > 0$ tal que si $A, B \in \mathcal{H}(X)$ son tales que $H(A, B) < \delta$ y $\mathcal{A} \in C(\mathcal{H}(X))$ con $P, A \in \mathcal{A}$, entonces existe $\mathcal{B} \in C(\mathcal{H}(X))$ tal que $P, B \in \mathcal{B}$ y $H^2(\mathcal{B}, \mathcal{A}) < \frac{\epsilon}{3}$. Sin perder generalidad, podemos pensar que $\delta < \frac{\epsilon}{3}$.

Sean $a, b \in X$ tales que $d(a, b) < \delta$ y $A \in C(a, X)$. Mostraremos que existe $B \in C(b, X)$ tal que $H(A, B) < \epsilon$. Para esto consideraremos dos casos.

Supongamos primero que $P \not\subset A$. Entonces $C(P, X) \cap C(A) = \emptyset$. Para ver esto supongamos que, por el contrario, existe un elemento C en dicha intersección. Entonces $P \subset C \subset A$, de donde $P \subset A$. En vista de que esto es una contradicción, los subconjuntos cerrados $C(P, X)$ y $C(A)$ de 2^X son ajenos. Podemos suponer, por consiguiente, que la distancia entre $C(P, X)$ y $C(A)$ es mayor que ϵ. De esta manera tenemos que

1) si $P' \in C(P, X)$ y $A' \in C(A)$, entonces $H(P', A') > \epsilon$.

Consideremos, en 2^X, arcos ordenados λ_1, λ_2 y λ_3 de $\{a\}$ a A, de A a X y de P a X, respectivamente. Sea $\mathcal{A} = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$. Como $A \in \lambda_1 \cap \lambda_2$ y $X \in \lambda_3 \cap (\lambda_1 \cup \lambda_2)$, resulta que $\mathcal{A}$ es un elemento de $C(2^X)$. Más aún, $\lambda_1 \cup \lambda_2$ es un arco ordenado de $\{a\}$ a X en 2^X. En vista de que $\mathcal{H}(X)$ está completo, $\{a\} \in \mathcal{H}(X)$, de modo que $\lambda_1 \cup \lambda_2 \subset \mathcal{H}(X)$. De la misma manera, como $P \in \mathcal{H}(X)$, tenemos que $\lambda_3 \subset \mathcal{H}(X)$. Por tanto, $\mathcal{A} \subset \mathcal{H}(X)$.

De lo anterior, tenemos que $\{a\}$ y $\{b\}$ son dos elementos de $\mathcal{H}(X)$ tales que $H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b) < \delta$. Más aún, $\mathcal{A} \in C(\mathcal{H}(X))$ y $P, A \in \mathcal{A}$. Entonces, por la suavidad de $\mathcal{H}(X)$ en P, existe $\mathcal{B} \in C(\mathcal{H}(X))$ tal que $P, \{b\} \in \mathcal{B}$ y $H_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) < \frac{\epsilon}{3}$.

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B} \cap N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)$. Afirmamos que

2) $\mathcal{B}_0$ es un subconjunto propio de $\mathcal{B}$ que tiene a $\{b\}$.

Para ver esto, notemos que $\{b\} \in \mathcal{B}$ y que $\{a\}$ es un elemento de λ_1 tal que $H(\{a\}, \{b\}) < \delta < \frac{\epsilon}{3}$. Por tanto $\{b\} \in \mathcal{B}_0$. Ahora bien, P es un elemento de $\mathcal{B}$ y, si $P \in \mathcal{B}_0$, entonces $P \in N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)$ por lo que $H(P, A') < \frac{\epsilon}{3}$ para algún $A' \in \lambda_1$. Esto contradice 1). Luego, $P \in \mathcal{B} - \mathcal{B}_0$. Esto prueba 2).

Supongamos ahora que $\mathcal{C}_0$ es la componente de $\mathcal{B}_0$ que contiene a $\{b\}$. Sea $\mathcal{C} = \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}_0)$. Afirmamos que

3) $\mathcal{C} \cap \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}(N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)) \neq \emptyset$.

Para ver esto, notemos que $\mathcal{C}_0$ es una componente del subconjunto propio y no vacío $\mathcal{B}_0$ del continuo $\mathcal{B}$. Entonces, por el Teorema 1.80, $\mathcal{C} \cap \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0) \neq \emptyset$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\emptyset &\neq \mathcal{C} \cap \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_0) \\
&\subset \mathcal{C} \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B} \cap N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B} - N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right) \\
&\subset \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\left(N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B} - N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right) \\
&= \mathcal{C} \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\left(N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right) \cap \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{B} - N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right) \\
&= \mathcal{C} \cap \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}\left(N\left(\tfrac{\epsilon}{3}, \lambda_1\right)\right)
\end{aligned}$$

Esto prueba 3). De acuerdo con esto, podemos tomar un elemento $L \in \mathcal{C} \cap \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}\left(N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)\right)$. Notemos que

$$L \in \mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset N\left(\frac{\epsilon}{3}, \mathcal{A}\right),$$

de donde existe $K \in \mathcal{A}$ tal que $H(K, L) < \frac{\epsilon}{3}$. En vista de que $\mathcal{A} = \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$ tenemos que $K \in \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \lambda_3$. Supongamos que $K \in \lambda_3$. Como $L \in \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}\left(N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)\right)$ tenemos que $B(\frac{\epsilon}{3}, L) \cap N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1) \neq \emptyset$. Tomemos un elemento R en dicha intersección. Como $R \in N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)$ existe $A_0 \in \lambda_1$ tal que $H(A_0, R) < \frac{\epsilon}{3}$. Luego

$$H(K, A_0) \leq H(K, L) + H(L, R) + H(R, A_0) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Tenemos entonces que K es un elemento de $C(P, X)$ y A_0 es un elemento de $C(A)$ tales que $H(K, A_0) < \epsilon$. Esto contradice 1). Por tanto, $K \notin \lambda_3$. Supongamos ahora que $K \in \lambda_1$. Entonces $L \in N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)$, contradiciendo el hecho de que $L \in \mathrm{fr}_{\mathcal{B}}\left(N(\frac{\epsilon}{3}, \lambda_1)\right)$. Por tanto $K \notin \lambda_1$ y, de esta manera, resulta que $K \in \lambda_2$. Luego

$$A \subset K \subset N\left(\frac{\epsilon}{3}, L\right).$$

Definamos ahora $B = \bigcup \mathcal{C}$. Como $\{b\} \in \mathcal{C} \cap C(X)$, por el Teorema 1.22, resulta que $B \in C(X)$. Además $b \in B$ y $L \subset B$. Por tanto

$$A \subset N\left(\frac{\epsilon}{3}, L\right) \subset N\left(\frac{\epsilon}{3}, B\right) \subset N(\epsilon, B).$$

Por otra parte si $D \in \mathcal{C}$ entonces, como

$$\mathcal{C} = \mathrm{cl}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}_0) = \mathrm{cl}_{2^X}(\mathcal{C}_0) \subset N\left(\frac{2\epsilon}{3}, \lambda_1\right)$$

existe $A_1 \in \lambda_1$ tal que $H(A_1, D) < \frac{2\epsilon}{3}$. Luego

$$D \subset N\left(\frac{2\epsilon}{3}, A_1\right) \subset N\left(\frac{2\epsilon}{3}, A\right) \subset N(\epsilon, A).$$

Hemos probado que $D \subset N(\epsilon, A)$ para cada $D \in \mathcal{C}$. Luego $B \subset N(\epsilon, A)$. Por consiguiente, $H(A, B) < \epsilon$.

Supongamos ahora que $P \subset A$. Afirmamos que

4) $C(A) \subset \mathcal{H}(X)$.

Para ver esto, sea $M \in C(A)$ y fijemos un punto $x \in M$. Tomemos un arco ordenado λ de $\{x\}$ a M en 2^X. En vista de que $\mathcal{H}(X)$ está completo, resulta que $\{x\} \in \mathcal{H}(X)$ y, por consiguiente, $\lambda \subset \mathcal{H}(X)$. En particular $M \in \mathcal{H}(X)$. Esto prueba 4).

Notemos que $\{a\}$ y $\{b\}$ son dos elementos de $\mathcal{H}(X)$ tales que $H(\{a\}, \{b\}) = d(a, b) < \delta$. Más aún, por 4), $C(A) \in C(\mathcal{H}(X))$ y, además, $P, A \in C(A)$. Entonces, por la suavidad de $\mathcal{H}(X)$ en P, existe $\mathcal{B} \in C(\mathcal{H}(X))$ tal que $P, \{b\} \in \mathcal{B}$ y $H_2(C(A), \mathcal{B}) < \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$. Hagamos $B = \bigcup \mathcal{B}$. Como $\{b\} \in \mathcal{B} \cap C(X)$, por el Teorema 1.22, tenemos que $B \in C(X)$. Además $b \in B$. Afirmamos que

5) $H(A, B) < \epsilon$.

Para ver esto, tomemos un punto $x \in A$. Entonces $\{x\} \in C(A) \subset N(\epsilon, \mathcal{B})$ por lo que existe $B_0 \in \mathcal{B}$ tal que $H(B_0, \{x\}) < \epsilon$. Notemos que $B_0 \subset B$ por lo que $\{x\} \subset N(\epsilon, B_0) \subset N(\epsilon, B)$. Por consiguiente, $x \in N(\epsilon, B)$ y, de esta manera, $A \subset N(\epsilon, B)$. Supongamos ahora que $L \in \mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subset N(\epsilon, C(A))$ existe $A_0 \in C(A)$ tal que $H(A_0, L) < \epsilon$. Luego $L \subset N(\epsilon, A_0) \subset N(\epsilon, A)$. Hemos probado que $L \subset N(\epsilon, A)$ para cada $L \in \mathcal{B}$. Por tanto, $B \subset N(\epsilon, A)$. Por tanto $H(A, B) < \epsilon$.

Por lo tanto, concluímos que X tiene la propiedad de Kelley. ■

Ahora bien, ya que los hiperespacios 2^X y $C(X)$ están completos, el siguiente resultado es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 6.6 ([18, Teorema 1]). *Si el hiperespacio 2^X o $C(X)$ es suave, entonces X tiene la propiedad de Kelley.*

6.3 Espacios Producto.

A continuación presentaremos el segundo resultado del Artículo [18, Teorema 2].

Dado un número finito de espacios topológicos $\{X_1, X_2, \ldots X_n\}$, recordemos que la topología inducida por la métrica $d_{\Pi_{i=1}^n X_i}$ definida en el producto finito $\Pi_{i=1}^n X_i$ como:

$$d_{\Pi_{i=1}^n X_i}((x_i)_i, (y_i)_i) = \Sigma_{i=1}^n \frac{d_{X_i}(x_i, y_1)}{2^i}$$

es la misma que la topología producto, así que la utilizaremos en el siguiente teorema.

Teorema 6.7. *Si el producto cartesiano $X \times Y$ de dos continuos no degenerados, es suave, entonces cada uno X y Y tienen la propiedad de Kelley.*

Demostración. Supongamos que $X \times Y$ es suave en el punto (p, q). Fijemos un punto $q' \in Y - \{q\}$ y sea $\delta_0 = \frac{d_Y(q,q')}{4}$. Para ver que X tiene la propiedad de Kelley, sea $\epsilon > 0$. Por la suavidad de $X \times Y$, existe $\delta > 0$ tal que si $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ satisfacen que $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < \delta$ y si $A \in C(X \times Y)$ es tal que $(p, q), (x_1, y_1) \in A$, entonces existe $B \in C(X \times Y)$ tal que $(p, q), (x_2, y_2) \in B$ y $H(A, B) < \frac{\epsilon}{4}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\delta < \frac{\epsilon}{4} < \frac{\delta_0}{4}$.

Sean $x \in X$, $y \in Y$, tales que $d_X(x, y) < \delta$ y $K \in C(x, X)$. Mostraremos que existe $L \in C(y, X)$ tal que $H(K, L) < \epsilon$. Afirmamos que

1) existe un subconjunto finito $Z = \{ z_1, z_2, \ldots, z_n \}$ de K tal que, para cada $k \in K$, existe $i \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$ tal que $d(k, z_i) < \frac{\epsilon}{2}$.

Para ver esto notemos que la familia $\mathcal{U} = \{B\left(\frac{\epsilon}{2}, z\right) : z \in K\}$ es una cubierta abierta del conjunto compacto K. Entonces, existen $z_1, z_2, \ldots, z_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(\frac{\epsilon}{2}, z_i\right)$. Tomemos ahora un punto $k \in K$. Entonces existe $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $k \in B\left(\frac{\epsilon}{2}, z_i\right)$. Esto prueba 1).

Ahora bien, dado $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sea

$$P_i = (X \times \{q\}) \cup (\{z_i\} \times Y) \cup (K \times \{q'\}).$$

Es claro que P_i es un subconjunto cerrado y no vacío de $X \times Y$. Como los conjuntos $X \times \{q\}$ y $\{z_i\} \times Y$ son conexos y tienen en común al punto (z_i, q), resulta que $(X \times \{q\}) \cup (\{z_i\} \times Y)$ es conexo. Dicho conjunto y el conjunto conexo $K \times \{q'\}$ tienen en común al punto (z_i, q'). Por tanto, la unión de ellos es conexa. Esto muestra que P_i es conexo. Notemos que $(p, q), (z_i, q), (z_i, q')$ y (x, q') están en P_i. Además

$$\rho((y, q'), (x, q')) = \frac{d_X(y, x)}{2} + \frac{d_Y(q', q')}{4} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Tenemos entonces que (y, q') y (x, q') son dos elementos de $X \times Y$ cuya distancia es menor que δ. Además $P_i \in C(X \times Y)$ tal que $(x, q'), (p, q) \in P_i$. Entonces, por la suavidad de $X \times Y$ en (p, q), existe $Q_i \in C(X \times Y)$ tal que $(y, q'), (p, q) \in Q_i$ y $H(P_i, Q_i) < \frac{\epsilon}{4}$. Afirmamos que:

2) $N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{2}, K \times \{q'\}) \cap N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{2}, X \times \{q\}) = \emptyset$.

En efecto, si esto no es así, entonces existe un punto (m_1, m_2) en la intersección en cuestión. Sean $k \in K$ y $x_0 \in X$ tales que $\rho((m_1, m_2), (k, q')) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\rho((m_1, m_2), (x_0, q)) < \frac{\epsilon}{2}$. Entonces, por la desigualdad del triángulo, tenemos que $\rho((k, q'), (x_0, q)) < \epsilon$. Por otra parte,

$$\rho((k, q'), (x_0, q)) = \frac{d_X(k, x_0)}{2} + \delta_0 > \epsilon$$

lo cual es un absurdo. Por lo tanto 2) es cierto.

Consideremos el conjunto $K_i = Q_i \cap N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{4}, K \times \{q'\})$. Notemos que $(y, q') \in Q_i$. Además $(x, q') \in K \times \{q'\}$ y $\rho((y, q'), (x, q')) < \delta < \frac{\epsilon}{4}$. Entonces $(y, q') \in N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{4}, K \times \{q'\})$. Luego $(y, q') \in K_i$. Sean C_i la componente de K_i que contiene a (y, q') y $L_i = \mathrm{cl}_{X\times Y}(C_i)$. Entonces $L_i \subset Q_i \subset N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{4}, P_i)$.

Notemos que K_i es un subconjunto propio y no vacío de Q_i. Para ver esto, tomemos un punto $k \in K$. Entonces

$$\rho((p, q), (k, q') = \frac{d_X(p, k)}{2} + \delta_0 > \epsilon.$$

Por tanto, $(p, q) \notin N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{4}, K \times \{q'\})$. En particular, $(p, q) \notin K_i$. Tenemos entonces que C_i es una componente del subconjunto propio y no vacío K_i de Q_i. Luego, por el Teorema 1.80, podemos tomar un punto $\overline{x_i} = (x_1^i, x_2^i) \in L_i \cap \mathrm{fr}_{Q_i}(K_i) \neq \emptyset$.

Como $\overline{x_i} \in L_i \subset N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{4}, P_i)$, existe $\overline{w_i} = (w_1^i, w_2^i) \in P_i$ tal que $\rho(\overline{x_i}, \overline{w_i}) < \frac{\epsilon}{4}$. Ahora bien, como $\overline{w_i} \in P_i$ tenemos que:

$$\overline{w_i} \in (X \times \{q\}) \cup (\{z_i\} \times Y) \cup (K \times \{q'\}).$$

Supongamos que $\overline{w_i} \in X \times \{q\}$. Notemos que

$$\overline{x_i} \in L_i \subset \mathrm{cl}_{X\times Y}\left(N_{X\times Y}\left(\frac{\epsilon}{4}, K \times \{q'\}\right)\right) \subset N_{X\times Y}\left(\frac{\epsilon}{2}, K \times \{q'\}\right).$$

Como $\rho(\overline{x_i}, \overline{w_i}) < \frac{\epsilon}{2}$ y $\overline{w_i} \in X \times \{q\}$ resulta que $\overline{x_i} \in N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{2}, X \times \{q\})$. Luego

$$N_{X\times Y}\left(\frac{\epsilon}{2}, K \times \{q'\}\right) \cap N_{X\times Y}\left(\frac{\epsilon}{2}, X \times \{q\}\right) \neq \emptyset.$$

Esto contradice 2). Supongamos ahora que $\overline{w_i} \in K \times \{q'\}$. Entonces, como $\rho(\overline{x_i}, \overline{w_i}) < \frac{\epsilon}{4}$, resulta que $\overline{x_i} \in N_{X\times Y}(\frac{\epsilon}{4}, K \times \{q'\})$. Además $\overline{x_i} \in L_i \subset Q_i$. Luego

$$\overline{x_i} \in Q_i \cap N_{X\times Y}\left(\frac{\epsilon}{4}, K \times \{q'\}\right) = K_i$$

es decir, $\overline{x_i} \in K_i$. Como K_i es abierto en Q_i tenemos, por tanto, que $\overline{x_i} \notin \mathrm{fr}_{Q_i}(K_i)$. Esta contradicción implica que $\overline{w_i} \in \{z_i\} \times Y$. Entonces, $\overline{w_i} = (z_i, w_2^i)$.

Supongamos que $\pi: X \times Y \to X$ la proyección sobre la primera coordenada. Notemos que:

$$\rho(\overline{x_i}, \overline{w_i}) = \frac{d_X(x_1^i, z_i)}{2} + \frac{d_Y(x_2^i, w_2^i)}{4} < \frac{\epsilon}{4}$$

entonces $\frac{d_X(x_1^i, z_i)}{2} < \frac{\epsilon}{4}$.

De lo anterior tenemos que x_1^i es un punto de $\pi(L_i)$ tal que:

$$d_X(x_1^i, z_i) < \frac{\epsilon}{2} \tag{6.1}$$

Consideremos ahora el conjunto:

$$L = \pi(L_1) \cup \pi(L_2) \cup \cdots \cup \pi(L_n).$$

Dada $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\pi(L_i)$ es un subcontinuo de X. Además, $(y, q') \in L_i$ por lo que $y \in \pi(L_i)$. Esto muestra que L es un subcontinuo de X que tiene a y. Haremos ver que $H(K, L) < \epsilon$. Para esto, supongamos primero que $l \in L$. Entonces $l \in \pi(L_i)$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Luego, existe $l' \in Y$ tal que $(l, l') \in L_i$. Como:

$$L_i \subset N_{X\times Y}\left(\frac{\epsilon}{2}, K \times \{q'\}\right),$$

existe $k \in K$ tal que $\rho((l, l'), (k, q')) < \frac{\epsilon}{2}$. Esto implica que $d_X(l, k) < \epsilon$, por lo cual $l \in N_X(\epsilon, K)$. De esta manera $L \subset N_X(\epsilon, K)$.

Supongamos ahora que $k \in K$. Entonces, por 1), existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $d_X(k, z_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Para dicho índice i, tenemos por (6.1), que $d_X(x_1^i, z_i) < \frac{\epsilon}{2}$. Luego:

$$d_X(k, x_1^i) \leq d_X(k, z_i) + d_X(z_i, x_1^i) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Además $x_1^i \in \pi(L_i) \subset L$. Por lo tanto $k \in N_X(\epsilon, L)$ y, de esta manera, $K \subset N_X(\epsilon, L)$. Esto prueba que $H(K, L) < \epsilon$ y, con ello, que X tiene la propiedad de Kelley.

La prueba de que Y tiene la propiedad de Kelley es totalmente análoga.

■

Capítulo 7

Propiedad de Kelley Hereditaria.

7.1 Introducción.

En este capítulo estudiaremos la clase de los continuos tales que todos sus subcontinuos poseen la propiedad de Kelley. Diremos que tales continuos tienen la *propiedad de Kelley hereditaria.* Esta noción fue introducida en [1] y, posteriormente, estudiada en forma sistemática en el artículo [3]. En lo sucesivo, describiremos en detalle algunos resultados de [3]. El más importante de ellos es el Teorema 7.5, en el cual se caracterizan los continuos hereditariamente localmente conexos, en términos de la propiedad de Kelley hereditaria generalizando, de esta manera, un resultado de S. Czuba.

7.2 Definición y Ejemplos.

Definición 7.1. *Un continuo X tiene la* ***propiedad de Kelley hereditaria*** *si cada subcontinuo de X la propiedad de Kelley.*

Es claro que si X tiene la propiedad de Kelley hereditaria entonces X tiene la propiedad de Kelley. Recordemos que el abanico armónico A_s tiene la propiedad de Kelley. Como A_s contiene un abanico armónico con pata alargada, resulta que A_s no tiene la propiedad de Kelley hereditaria. El continuo seno de $\frac{1}{x}$, por otro lado, tiene la propiedad de Kelley hereditaria.

Notemos que si X es un continuo que contiene una copia homeomorfa del cuadrado $[0,1]^2$, entonces X no tiene la propiedad de Kelley hereditaria, pues en dicho cuadrado podemos encajar una copia de un abanico armónico. Daría entonces la impresión de que todos los continuos con la propiedad de Kelley hereditaria son *flacos*, es decir, tienen dimensión 1. Esto no es así pues, en vista de que los continuos hereditariamente indescomponibles tienen la propiedad de Kelley , dichos continuos tienen la propiedad de Kelley hereditaria. Además, en [5] R. H. Bing probó que existen continuos hereditariamente indescomponibles de cualquier dimensión. Luego, existen continuos con la propiedad de Kelley hereditaria de cualquier dimensión.

Supongamos ahora que X es un continuo y que P_s es un subcontinuo de X. Recordemos que P_s es un seudopeine en X si P_s tiene la forma

$$P_s = A \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} a_n b_n \right) \tag{7.1}$$

en donde

a) A es un subcontinuo de X;

b) para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n$ es un arco en X que une los puntos a_n y b_n de X y, además, $a_n b_n \cap A = \{b_n\}$;

c) los arcos $a_1 b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n b_n, \ldots$ son ajenos dos a dos;

d) $a_n b_n \to A_0 \in C(A)$, $a_n \to a_0 \in A_0$, $b_n \to b_0 \in A_0$ y $a_0 \neq b_0$.

En el siguiente resultado, mostramos que los seudopeines no tienen la propiedad de Kelley hereditaria.

Teorema 7.2. *Si X es un continuo hereditariamente conexo por trayectorias y P_s es un seudopeine en X, entonces P_s no tiene la propiedad de Kelley hereditaria.*

Demostración. Supongamos que P_s tiene la forma descrita en (7.1) en donde A y cada conjunto $a_n b_n$ satisfacen a)-d). Supongamos, además, que P_s tiene la propiedad de Kelley hereditaria. Como A_0 es un subcontinuo de X, tenemos que A_0 es conexo por trayectorias o, equivalentemente, conexo por arcos. Por tanto, existe un arco $\alpha\colon [0,1] \to A_0$ de a_0 a b_0.

Sean $c_0 = \alpha(\frac{1}{3})$ y $d_0 = \alpha(\frac{2}{3})$. Como P_s tiene la propiedad de Kelley en a_0 y $a_n \to a_0$, existe una sucesión $(D_n)_n$ en $C(P_s)$ tal que $a_n \in D_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $D_n \to \alpha([0, \frac{2}{3}])$. Ya que $b_0 = \alpha(1) \notin \alpha([0, \frac{2}{3}])$, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$B(2\epsilon, b_0) \cap \alpha\left(\left[0, \frac{2}{3}\right]\right) = \emptyset. \tag{7.2}$$

Además, como $b_n \to b_0$ y $D_n \to \alpha([0, \frac{2}{3}])$, para ϵ, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $b_n \in B(\epsilon, b_0)$ y $H(D_n, \alpha([0, \frac{2}{3}])) < \epsilon$ para cada $n \geq N$. Afirmamos que

1) $D_n \subset a_n b_n - \{b_n\}$ para cada $n \geq N$.

Para ver esto, sea $n \geq N$. Si $b_n \in D_n$, entonces $b_n \in N(\epsilon, \alpha([0, \frac{2}{3}]))$ por lo que existe $x \in \alpha([0, \frac{2}{3}])$ tal que $d(b_n, x) < \epsilon$. Luego $x \in \alpha([0, \frac{2}{3}]) \cap B(\epsilon, b_n)$ y como

$$d(x, b_0) \leq d(x, b_n) + d(b_n, b_0) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

tenemos que $x \in \alpha([0, \frac{2}{3}]) \cap B(2\epsilon, b_0)$ contradiciendo (7.2). Por tanto $b_n \notin D_n$, de donde $D_n \subset P_s - \{b_n\}$. Ahora bien, por el Teorema 1.79,

$$P_s - \{b_n\} = (a_n b_n - \{b_n\}) \cup (P_s - a_n b_n)$$

es una separación de $P_s - \{b_n\}$. Más aún, $a_n \in D_n \cap (a_n b_n - \{b_n\})$ y D_n es un subconjunto conexo de $P_s - \{b_n\}$. Luego $D_n \subset a_n b_n - \{b_n\}$. Esto prueba 1).

Como $c = \alpha(\frac{1}{3}) \in \alpha([0, \frac{2}{3}])$ y la sucesión $D_n \to \alpha([0, \frac{2}{3}])$, existe una sucesión $(c_n)_n$ en P_s tal que $c_n \in D_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $c_n \to c$. Entonces, por 1), $c_n \in a_n b_n - \{b_n\}$ para cada $n \geq N$. Por tanto, dada $n \geq N$, podemos hablar de los subarcos $a_n c_n$ y $c_n b_n$ de $a_n b_n$.

Consideremos el conjunto

$$Z = A \cup \left(\bigcup_{n \geq N} c_n b_n\right).$$

Como $c_n b_n \subset a_n b_n \to A_0 \subset A \subset Z$ y A es cerrado en P_s, resulta que Z es cerrado en P_s. Es claro que $Z \neq \emptyset$. Además cada conjunto $c_n b_n$ es conexo e intersecta a A en b_n. Luego Z es conexo. Por tanto, Z es un subcontinuo de P_s. De donde, Z tiene la propiedad de Kelley en c y, como $(c_n)_{n\geq N}$ es una sucesión en Z tal que $c_n \to c$ y los subcontinuos $\alpha([0,\frac{1}{3}])$ y $\alpha([\frac{1}{3},\frac{2}{3}])$ de Z contienen a c, existen dos sucesiones $(E_n)_{n\geq N}$ y $(F_n)_{n\geq N}$ de subcontinuos de Z tales que $c_n \in E_n \cap F_n$, para cada $n \geq N$, $E_n \to \alpha([0,\frac{1}{3}])$ y $F_n \to \alpha([\frac{1}{3},\frac{2}{3}])$.

Una demostración similar a la realizada para ver que 1) es cierto, se puede efectuar para mostrar que existe $M \geq N$ tal que $F_n \cup E_n \subset a_n b_n - \{b_n\}$ para cada $n \geq M$. Afirmamos que:

2) existe $m \geq M$ tal que ninguno de los conjuntos E_m, F_m y $a_m c_m$ está contenido en la unión de los otros dos.

En efecto, como $a_0 = \alpha(0) \notin \alpha([\frac{1}{3},\frac{2}{3}])$ y $d_0 = \alpha(\frac{2}{3}) \notin \alpha([0,\frac{1}{3}])$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$B(2\delta, a_0) \cap \alpha\left(\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\right) = \emptyset = B(2\delta, d_0) \cap \alpha\left(\left[0,\frac{1}{3}\right]\right). \tag{7.3}$$

Además, como $F_n \to \alpha([\frac{1}{3},\frac{2}{3}])$, $E_n \to \alpha([0,\frac{1}{3}])$, $c_n \to c_0$ y $a_n \to a_0$, existe $m \geq M$ tal que $H(F_m, \alpha([\frac{1}{3},\frac{2}{3}])) < \delta$, $H(E_m, \alpha([0,\frac{1}{3}])) < \delta$, $d(c_m, c_0) < \delta$ y $d(a_m, a_0) < \delta$. Luego $a_0 \in \alpha([0,\frac{1}{3}]) \subset N(\delta, E_m)$ y $d_0 \in \alpha([\frac{1}{3},\frac{2}{3}]) \subset N(\delta, F_m)$. Por tanto, existen $u \in F_m$ tal que $d(u, d_0) < \delta$ y $v \in E_m$ tal que $d(v, a_0) < \delta$.

Si $a_m = c_m$, entonces:

$$d(a_0, c_0) \leq d(a_0, a_m) + d(a_m, c_0) = d(a_0, a_m) + d(c_m, c_0) < \delta + \delta = 2\delta$$

luego $c_0 \in B(2\delta, d_0) \cap \alpha([0,\frac{1}{3}])$, contradiciendo (7.3). Ahora bien si $a_m \in E_m$ entonces, como $E_m \subset Z$ y $a_m c_m \cap Z = \{c_m\}$, resulta que $a_m = c_m$ lo cual es una contradicción. Luego, $a_m \notin E_m$. De manera similar tenemos que $a_m \notin F_m$. Por tanto, $a_m \in a_m c_m - (E_m \cup F_m)$.

Si $u \in E_m$ entonces, como $E_m \subset N(\delta, \alpha([0,\frac{1}{3}]))$, existe $x \in \alpha([0,\frac{1}{3}]) \cap B(\delta, u)$. De esta manera:

$$d(x, d_0) \leq d(x, u) + d(u, d_0) < \delta + \delta = 2\delta$$

lo que significa que $x \in \alpha([0,\frac{1}{3}]) \cap B(2\delta, d)$ contradiciendo (7.3). Entonces $u \notin E_m$. Si $u \in a_m c_m$ entonces, como $u \in Z$ y $a_m c_m \cap Z = \{c_m\}$, resulta que $u = c_m$. Por tanto

$$d(c_0, d_0) \leq d(c_0, c_m) + d(c_m, d_0) = d(c_0, c_m) + d(u, d_0) < \delta + \delta = 2\delta.$$

Luego $c_0 \in B(2\delta, d_0) \cap \alpha([0, \frac{1}{3}])$, contradiciendo (7.3). Por tanto $u \notin a_m c_m$ y, de esta manera $u \in F_m - (E_m \cup a_m c_m)$. De manera similar, podemos demostrar que $v \in E_m - (F_m \cup a_m c_m)$. Esto prueba 2).

Tenemos entonces que E_m, F_m y $a_m c_m$ son tres subcontinuos del arco $a_m b_m$ que tienen en común al punto c_m y satisfacen que ninguno de estos tres conjuntos está contenido en la unión de los otros dos. Como esto es imposible de realizar en un arco, tenemos que P_s no tiene la propiedad de Kelley hereditaria. ■

7.3 Resultados Fundamentales.

En esta sección mostraremos que los continuos conexos por trayectorias que tienen la propiedad de Kelley hereditaria, son hereditariamente descomponibles. Para esto, necesitaremos del siguiente resultado, el cual nos presenta una manera de detectar puntos de conexidad en pequeño en un continuo con la propiedad de Kelley hereditaria.

Teorema 7.3 **([3, Teorema 2.3]).** *Sea X un continuo con la propiedad de Kelley hereditaria. Si $A \in C(X)$ y γ es un arco en X con un punto extremo p son tales que $A \cap \gamma = \{p\}$, entonces A es cik en p.*

Demostración. Si $A = \{p\}$, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $A \neq \{p\}$. Sea $B = A \cup \gamma$. Como $B - \{p\} = (A - \{p\}) \cup (\gamma - \{p\})$, $cl(A - \{p\}) \cap (\gamma - \{p\}) \subset A \cap (\gamma - \{p\}) = \emptyset$, $(A - \{p\}) \cap cl(\gamma - \{p\}) \subset (A - \{p\}) \cap \gamma = \emptyset$, $A - \{p\} \neq \emptyset$ y $\gamma - \{p\} \neq \emptyset$, tenemos que p es un punto de corte de B. Por hipótesis, B tiene la propiedad de Kelley. Por el Teorema 2.9, B es cik en p.

Para ver que A es cik en p, sea $\epsilon > 0$. Como B es cik en p, existe un subcontinuo M de B tal que:

$$p \in int_B(M) \subset M \subset B(\epsilon, p) \cap B$$

Entonces existe $\delta > 0$ tal que $B(\delta, p) \cap B \subset M$. Ya que $\{p\}$ no puede ser abierto ni en A ni en γ, $A \cap B(\delta, p) - \{p\} \neq \emptyset$ y $\gamma \cap B(\delta, p) - \{p\} \neq \emptyset$. De manera que

$$M - \{p\} = (A \cap M - \{p\}) \cup (\gamma \cap M - \{p\})$$

es una separación de M.

Por el Teorema 1.65, $(A \cap M - \{p\}) \cup \{p\} = A \cap M$ es conexo. De modo que $A \cap M$ es un subcontinuo de A y $p \in B(\delta, p) \cap A \subset M \cap A$, así que

$$p \in int_A(A \cap M) \subset A \cap M \subset B(\epsilon, p) \cap A$$

.

Por tanto A es cik en p. ■

Teorema 7.4 ([3, Teorema 2.4]). *Si X es un continuo conexo por trayectorias y con la propiedad de Kelley hereditaria, entonces X es hereditariamente descomponible.*

Demostración. Como X es conexo por trayectorias, por el Teorema 1.86, X es descomponible. Para ver que X es hereditariamente descomponible, sea A un subcontinuo propio y no degenerado de X. Si A es conexo por trayectorias entonces, aplicando de nuevo el Teorema 1.86, tenemos que A es descomponible. Supongamos, por tanto, que A no es conexo por trayectorias. Entonces existen dos puntos $p, q \in A$ tales que ninguna trayectoria de p a q en X está contenida en A .

Como X es conexo por trayectorias, X es también conexo por arcos. Luego, existe un arco $\gamma \colon [0, 1] \to X$ de p a q. Notemos que γ no es subconjunto de A. Tomemos un punto $\gamma(t_0) \in \gamma - A$ y sea

$$t_1 = \min\{ t \in [t_0, 1] \colon \gamma(t) \in A\}.$$

Entonces $\gamma_0 = \gamma([t_0, t_1])$ es un arco en X tal que $\gamma(t_1)$ es un punto extremo de γ_0 y $A \cap \gamma_0 = t = \{\gamma(t_1)\}$. Luego, por el Teorema 7.3, A es cik en $\gamma(t_1)$.

Tomemos un punto $a \in A - \{\gamma(t_1)\}$ y sea U un abierto en A tal que $\gamma(t_1) \in U$ y $a \notin \mathrm{cl}_A(U)$. Como A es cik en $\gamma(t_1)$, existe un subconjunto conexo V de A tal que $\gamma(t_1) \in \mathrm{int}_A(V) \subset V \subset U$. Entonces $\mathrm{cl}_A(V)$ es un subcontinuo propio de A con interior no vacío y, por el Corolario 1.71, A es descomponible. Esto prueba que X es hereditariamente descomponible. ■

7.4 El Teorema Principal.

Recordemos que un continuo X es *hereditariamente localmente conexo* si cada uno de sus subcontinos es localmente conexo. En vista de que los continuos localmente conexos tienen la propiedad de Kelley (Corolario 2.7), tenemos que los continuos hereditariamente localmente conexos poseen la propiedad de Kelley hereditaria. Notemos, además, que todo continuo localmente conexo es conexo por trayectorias ([37, Teorema 8.23]). Por tanto, todo continuo hereditariamente localmente conexo tienen la propiedad de Kelley hereditaria y es conexo por trayectorias. A continuación, mostraremos que el recíproco de dicha afirmación también es cierto. Denotaremos por I al intervalo $[0,1]$ de la recta real. Recordemos que si A es un subcontinuo de X y $p \in A$, entonces $K(A,p)$ es la composante de p en A (ver Definición 1.83). Recordemos también que un subcontinuo F de A es terminal en A si para cualquier subcontinuo B de A que intersecte a F resulta que $F \subset B$ o $B \subset F$.

Teorema 7.5 ([3, Teorema 1.1]). *Un continuo X es hereditariamente localmente conexo si y sólo si X tiene la propiedad de Kelley hereditaria y X es conexo por trayectorias.*

Demostración. Supongamos que X es conexo por trayectorias y tiene la propiedad de Kelley hereditaria. Entonces, por el Teorema 7.4, X es hereditariamente descomponible. Para demostrar que X es hereditariamente localmente conexo, mostraremos primero que X es hereditariamente conexo por trayectorias y, posteriormente, que X es localmente conexo. Para tal efecto, analizaremos la estructura de los complementos de las composantes de ciertos subcontinuos de X.

Supongamos que $p, q \in X$ son tales que $p \neq q$. Por el Teorema 1.82, existe un subcontinuo A de X irreducible entre p y q. Definamos:

$$F = \{\, y \in A \colon A \text{ es irreducible entre } p \text{ y } y \,\}.$$

Observemos que $F = A - K(A,p)$ y que $q \in F$ mientras que $p \notin F$. Más aún, A es hereditariamente descomponible y, por consiguiente, es posible aplicar el Teorema 1.91 al subcontinuo A. De esta manera, F satisface las siguientes propiedades

i) F es un subcontinuo terminal en A,

ii) si existe $y \in F$ tal que A es cik en y, entonces $F = \{y\}$.

Afirmamos que:

1) $F = \{q\}$.

Para probar esto supongamos, por el contrario, que $F \neq \{q\}$. Entonces, por i), F es un subcontinuo no degenerado de A y, por ii), A no es cik en ninguno de los puntos de F. Como X es conexo por trayectorias o, equivalentemente, conexo por arcos existe un arco $\alpha: I \to X$ de p a q en X. Por la continuidad de α y el Teorema 1.87, resulta que el conjunto $\{ t \in I: \alpha(t) \in F \}$ es cerrado en el intervalo compacto I. Además dicho conjunto tiene a 1. Por tanto, podemos considerar:

$$t_0 = \min\{ t \in I: \alpha(t) \in F \}.$$

Sea $x_0 = \alpha(t_0)$. Como $p \notin F$, tenemos que $t_0 > 0$. Considerando un arco ordenado de $\{x_0\}$ a $\alpha([0, t_0])$ en $C(X)$, es posible encontrar $r_1 \in [0, t_0)$ tal que $diam(\alpha([r_1, t_0])) < 1$. Notemos que $\alpha(r_1) \notin F$. Afirmamos que:

$$\alpha([r_1, t_0]) \not\subset A. \tag{7.4}$$

En efecto si, por el contrario, $\alpha([r_1, t_0]) \subset A$ entonces $\alpha([r_1, t_0])$ es un subcontinuo de A que intersecta a F en el punto $\alpha(t_0)$. Como F es terminal en A, tenemos que $\alpha([r_1, t_0]) \subset F$ o bien $F \subset \alpha([r_1, t_0])$. En el primer caso sucede que $\alpha(r_1) \in F$, lo cual contradice la definición de t_0. En el segundo caso, como F es un subcontinuo no degenerado de A, existe $u \in F - \{x_0\}$. Luego $u \in \alpha([r_1, t_0])$ por lo que existe $t \in [r_1, t_0]$ tal que $\alpha(t) = u$. Notemos que $\alpha(t) \in F$ así que, por la definición de t_0, sucede que $t = t_0$. Entonces $u = \alpha(t) = \alpha(t_0) = x_0$. Esto es una contradicción. Por tanto (7.4) es cierto.

De acuerdo con (7.4), existe $s_1 \in [r_1, t_0]$ tal que $z_1 = \alpha(s_1) \in \alpha(I) - A$. En vista de que el conjunto $\{ t \in [s_1, t_0]: \alpha(t) \in A \}$ es compacto y no vacío, pues tiene a t_0 podemos considerar:

$$t_1 = \min\{ t \in [s_1, t_0]: \alpha(t) \in A \}.$$

Sea $x_1 = \alpha(t_1)$. Como $z_1 \notin A$, tenemos que $t_1 > s_1$. Notemos que $\alpha([s_1, t_1])$ es un arco en X con x_1 como uno de sus puntos extremos y tal que $\alpha([s_1, t_1]) \cap A = \{x_1\}$. Entonces, por el Teorema 7.3, A es cik en x_1 y, como A no es cik en ninguno de los puntos de F, resulta que $x_1 \notin F$. Luego $t_1 < t_0$. Considerando un arco ordenado de $\{x_0\}$ a $\alpha([t_1, t_0])$ en $C(X)$, es posible encontrar $r_2 \in (t_1, t_0)$ tal que $diam(\alpha([r_2, t_0])) < \frac{1}{2}$. Notemos que $r_1 < r_2$. Además, mediante una prueba similar a la dada para ver que (7.4) es cierto, se puede demostrar que:

$$\alpha([r_2, t_0]) \not\subset A. \tag{7.5}$$

Por lo tanto existe $s_2 \in [r_2, t_0]$ tal que $z_2 = \alpha(s_2) \in \alpha(I) - A$. Es claro que $s_2 < t_0$. Consideremos ahora

$$t_2 = \min\{\, t \in [s_2, t_0] : \alpha(t) \in A \,\}$$

y sea $x_2 = \alpha(t_2)$. De nuevo, por el Teorema 7.3, A es cik en x_2 por lo que $t_2 < t_0$. Como $t_2 > s_2 \geq r_2 > t_1$ entonces $t_1 < t_2$, por lo cual $t_0 - t_2 < t_0 - t_1$.

En general, supongamos que $r_1, r_2, \ldots, r_n$, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ han sido construídos con las propiedades enummeradas adelante. Considerando un arco ordenado de $\{x_0\}$ a $\alpha([t_n, t_0])$ es posible encontrar $r_{n+1} \in (t_n, t_0)$ tal que $diam(\alpha([r_{n+1}, t_0])) < \frac{1}{n+1}$. Como $r_n < t_n$, resulta que $r_n < r_{n+1}$. Además, mediante una prueba similar a la dada para ver que (7.4) es cierto, se puede demostrar que

$$\alpha([r_{n+1}, t_0]) \not\subset A. \tag{7.6}$$

Sea $s_{n+1} \in [r_{n+1}, t_0]$ tal que $z_{n+1} = \alpha(s_{n+1}) \in \alpha(I) - A$. Notemos que $s_{n+1} < t_0$. Consideremos ahora:

$$t_{n+1} = \min\{\, t \in [s_{n+1}, t_0] : \alpha(t) \in A \,\}$$

y sea $x_{n+1} = \alpha(t_{n+1})$. Entonces $s_{n+1} < t_{n+1}$ y, por el Teorema 7.3, A es cik en x_{n+1}. Por tanto $t_{n+1} < t_0$ y, además, $t_n < t_{n+1}$.

De esta manera, construímos tres sucesiones $(r_n)_n$, $(s_n)_n$ y $(t_n)_n$ en I tales que

a) $(r_n)_n$ es estrictamente creciente y $diam(\alpha([r_n, t_0])) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

b) $(t_n)_n$ es estrictamente creciente y $\alpha(t_n) \in \alpha([s_n, t_0]) \subset \alpha([r_n, t_0])$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

c) A es cik en $x_n = \alpha(t_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$;

d) $\alpha([t_n, t_0]) \not\subset A$ y $\alpha(t_n) \in A - F$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

De acuerdo con a) y b), $d(\alpha(t_n), \alpha(t_0)) < \frac{1}{n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $\alpha(t_n) \to \alpha(t_0)$. Como la sucesión $(t_n)_n$ es estrictamente creciente y acotada superiormente, entonces es convergente. Mostraremos ahora que $t_n \to t_0$. Para esto, supongamos que $t_n \to \xi$. Como α es continua, por el Teorema 1.23, $\alpha(t_n) \to \alpha(\xi)$. Entonces $\alpha(\xi) = \alpha(t_0)$ y, como α es inyectiva, $\xi = t_0$. De esta manera, $t_n \to t_0$.

Ahora bien, como $F \neq \{q\}$ existe un punto $y \in F - \{x_0\}$. Además como F es un continuo, por el Teorema 1.82, existe un subcontinuo C de F que es irreducible entre y y x_0. Como X es hereditariamente descomponible y $C \in C(X)$, tenemos que C es descomponible. Entonces existen dos subcontinuos propios D y E de C tales que $C = D \cup E$. Notemos que $D \cap E \neq \emptyset$. Además, sin perder generalidad, podemos suponer que $x_0 \in D$. En vista de que C es irreducible entre x_0 y y, y de que D es un subcontinuo propio de C, tenemos que $y \in E - D$. De manera similar, resulta que $x_0 \in D - E$.

Notemos que $(x_n)_n$ es una sucesión en A que converge a x_0. Además D es un subcontinuo de A que tiene a x_0 y A tiene la propiedad de Kelley en x_0. Por tanto, existe $(D_n)_n \subset C(A)$ tal que $D_n \to D$ y $x_n \in D_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como $X - D$ es un abierto en X que tiene a y, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B(\delta_1, y) \subset X - D$. De manera similar existe $\delta_2 > 0$ tal que $B(\delta_2, x_0) \subset X - E$. Por consiguiente, si $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces

$$B(\delta, x_0) \cap E = \emptyset = B(\delta, y) \cap D. \tag{7.7}$$

Además como $t_n \to t_0$ tenemos que $[t_n, t_0] \to \{t_0\}$. Entonces, por la continuidad de $C(\alpha)$ (Teorema 1.35, resulta que $\alpha([t_n, t_0]) \to \{\alpha(t_0)\} = \{x_0\}$. También $D_n \to D$ por lo que, para $\frac{\delta}{2}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $H(\alpha([t_n, t_0]), \{x_0\}) < \frac{\delta}{2}$ y $H(D_n, D) < \frac{\delta}{2}$ para cada $n \geq N$.

Supongamos ahora que para alguna $n \geq N$ resulta que $D_n \cap F \neq \emptyset$. Entonces, como F es terminal en A y $D_n \in C(A)$, tenemos que $D_n \subset F$ o bien $F \subset D_n$. En el primer caso, resulta que $x_n = \alpha(t_n) \in F$ lo cual contradice la segunda parte de d). En el segundo caso tenemos, en particular, que $y \in D_n \subset N(\delta, D)$, así que existe $y' \in D \cap B(\delta, y)$. Por tanto $D \cap B(\delta, y) \neq \emptyset$, contradiciendo (7.7). Por tanto $D_n \cap F = \emptyset$ para cada $n \geq N$.

Consideremos ahora el conjunto

$$Y = \alpha([t_N, t_0]) \cup C \cup \left(\bigcup_{n \geq N} D_n \right).$$

Como $D_n \to D \subset C \subset Y$, y los conjuntos $\alpha([t_N, t_0])$ y C son cerrados en X, resulta que Y es un subconjunto cerrado de X. Es claro que $Y \neq \emptyset$. Más aún, como cada conjunto D_n es conexo e intersecta al conjunto conexo $\alpha([t_N, t_0])$, resulta que:

$$\alpha([t_N, t_0]) \cup \left(\bigcup_{n \geq N} D_n \right)$$

es conexo. Dicho conjunto intersecta al conjunto conexo C en x_0, así que Y es conexo. Tenemos entonces que Y es un subcontinuo de X. Entonces Y tiene la propiedad de Kelley. Por tanto, tomando un punto $d_0 \in D \cap E$ y una sucesión $(d_n)_{n \geq N}$ in Y tal que $d_n \to d_0$ y $d_n \in D_n$ para cada $n \geq N$, existe $(E_n)_{n \geq N} \subset C(Y)$ tal que $d_n \in E_n$, para cada $n \geq N$, y $E_n \to E$.

Como $E_n \to E$, para $\frac{\delta}{2} > 0$, existe $M \geq N$ tal que $H(E, E_M) < \frac{\delta}{2}$. Mostraremos ahora que:

$$E_M \subset Y - \alpha([t_N, t_0]). \tag{7.8}$$

Para ver esto supongamos que, por el contrario, $E_M \cap \alpha([t_N, t_0]) \neq \emptyset$. Como

$$\alpha([t_N, t_0]) \subset N\left(\frac{\delta}{2}, \{x_0\}\right) = B\left(\frac{\delta}{2}, x_0\right)$$

tenemos que $E_M \cap B(\frac{\delta}{2}, x_0) \neq \emptyset$. Además $E_M \subset N(\frac{\delta}{2}, E)$ por lo que $N(\frac{\delta}{2}, E) \cap B(\frac{\delta}{2}, x_0) \neq \emptyset$. Tomemos un punto z en dicha intersección. Entonces $d(z, e) < \frac{\delta}{2}$ para algún punto $e \in E$ y $d(z, x_0) < \frac{\delta}{2}$. De aquí que

$$d(x_0, e) \leq d(x_0, z) + d(z, e) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

esto es $d(x_0, e) < \delta$. Luego $e \in E \cap B(\delta, x_0)$, contradiciendo (7.7). Esto prueba (7.8).

De acuerdo con (7.8), $x_0 = \alpha(t_0) \notin E_M$ por lo que $F \not\subseteq E_M$. Ahora bien, por construcción, $Y - A \subset \alpha([t_N, t_0])$. Además $E_M \subset Y$. Entonces, por (7.8), $E_M \cap (Y - A) = \emptyset$. Luego $E_M \subset A$. Si $E_M \cap C \neq \emptyset$ entonces, en particular $E_M \cap F \neq \emptyset$. Como F es terminal en A y $F \not\subseteq E_M$, tenemos que $E_M \subset F$. Luego $d_m \in F$ de donde $D_m \cap F \neq \emptyset$. Esto contradice el hecho de que $D_n \cap F = \emptyset$ para cada $n \geq N$. Por consiguiente, $E_M \cap C = \emptyset$, de donde

$$E_M \subset \bigcup_{n \geq N} D_n.$$

Como $D_n \subset N(\frac{\delta}{2}, D)$ para cada $n \geq N$, tenemos que $E_M \subset N(\frac{\delta}{2}, D)$. Además $y \in E \subset N(\frac{\delta}{2}, E_M)$ por lo que existe $b \in E_M$ tal que $d(y, b) < \frac{\delta}{2}$. Notemos que $b \in N(\frac{\delta}{2}, D)$, así que existe $a \in D$ tal que $d(b, a) < \frac{\delta}{2}$. Por lo tanto

$$d(a, y) \leq d(a, b) + d(b, y) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Entonces $a \in D \cap B(\delta, y)$, contradiciendo (7.7). Esto prueba 1).

Ahora podemos demostrar que X es hereditariamente conexo por trayectorias. Para esto sean $A \in C(X)$ y $p, q \in A$ con $p \neq q$. Por el Teorema 1.82, existe un subcontinuo B de A que es irreducible entre p y q. Probaremos que B es un arco haciendo ver que cada punto $x \in B - \{p, q\}$ corta a B. Tomemos entonces un punto $x \in B - \{p, q\}$. Aplicando de nuevo el Teorema 1.82, podemos encontrar subcontinuos C y D de B tales que C es irreducible entre p y x y D lo es entre q y x. Por lo tanto $C \cup D$ es un subcontinuo de B que contiene a p y q, de donde $C \cup D = B$.

Afirmamos que $C \cap D = \{x\}$. Para ver esto supongamos que, por el contrario, existe $y \in C \cap D - \{x\}$. Aplicando 1) a C, p y x se sigue que x es el único punto en C tal que C es irreducible entre p y x. Por lo tanto C no es irreducible entre p y y. Así que existe un subcontinuo propio K de C tal que $p, y \in K$. Aplicando de nuevo 1) a D, q y x se sigue que x es el único punto de D tal que D es irreducible entre q y x. Entonces D no es irreducible entre q y y y existe un subcontinuo propio L de D tal que $y, q \in L$.

Como K es un subcontinuo propio de C que tiene a p y C es irreducible entre p y x, tenemos que $x \notin K$. De manera similar, como L es un subcontinuo propio de D que tiene a q y D es irreducible entre q y x, resulta que $x \notin L$. Luego, $x \notin K \cup L$. Sin embargo, como K y L son subconjuntos conexos que tienen a y, se sigue que $K \cup L$ es conexo. Entonces $K \cup L$ es un subcontinuo de B que tiene a p y q. En vista de que B es irreducible entre dichos puntos, resulta que $K \cup L = B$. En particular $x \in K \cup L$. Esta contradicción muestra que $C \cap D = \{x\}$.

Ahora bien, como $B = C \cup D$, entonces:

$$B - \{x\} = (C - \{x\}) \cup (D - \{x\}).$$

Más aún, $p \in C - \{x\}$, $q \in D - \{x\}$:

$$\mathrm{cl}_X(C - \{x\}) \cap (D - \{x\}) \subset C \cap (D - \{x\}) = \emptyset$$

y

$$(C - \{x\}) \cap \mathrm{cl}_X(D - \{x\}) \subset D \cap (C - \{x\}) = \emptyset.$$

Por tanto, los conjuntos $C - \{x\}$ y $D - \{x\}$ forman una separación de $B - \{x\}$. Esto muestra que x es un punto de corte de B. Tenemos entonces que cada punto de $B - \{x\}$ corta a B. Luego, B tiene a lo más dos puntos que no lo cortan. Como, por el Teorema 1.67, B tiene al menos dos puntos que no lo cortan, resulta que B tiene exactamente dos puntos que no lo cortan. Luego, por el Teorema 1.68, B es un arco. Entonces A es conexo por trayectorias, pues B es un arco de p a q en A. Esto muestra que X es hereditariamente conexo por trayectorias.

Supongamos ahora que X no es localmente conexo. Entonces, por el Teorema 1.78, X contiene un seudopeine Y. De acuerdo con el Teorema 7.2, Y no tiene la propiedad de Kelley. Esto contradice el hecho de que X tiene la propiedad de Kelley hereditaria. Por tanto, X es localmente conexo.

Hemos probado que todo continuo hereditariamente conexo por trayectorias y con la propiedad de Kelley hereditaria es localmente conexo. Por tanto, si A es un subcontinuo de X, tenemos que A es hereditariamente conexo por trayectorias y A tiene la propiedad de Kelley hereditaria. Luego, A es localmente conexo. Entonces X es hereritariamente localmente conexo. ■

Utilizando límites inversos de sistemas inversos σ-dirigidos, I. Lončar probó en [34] que el resultado anterior se satisface si X es un continuo no métrico.

Recordemos que una **dendrita** es un dendroide localmente conexo. En [37, Corolario 10.6] se prueba que todo subcontinuo de una dendrita, es una dendrita. Por tanto, las dendritas son continuos hereditariamente localmente conexos, por lo que tienen la propiedad de Kelley hereditaria.

En [1] se pregunta si los dendroides con la propiedad de Kelley hereditaria son dendritas. Este resultado se sigue del hecho de que los dendroides con la propiedad de Kelley son suaves (Teorema 4.26). En 1993, V. Neumann-Lara e I. Puga-Espinosa dieron otra demostración del problema anterior, utilizando la noción de puntos orilla. El resultado se muestra en [39]. Utilizando el Teorema 7.5 podemos presentar una demostración más del mismo. En efecto, si X es un dendroide y tiene la propiedad de Kelley hereditaria, entonces X es un continuo conexo por trayectorias con la propiedad de Kelley hereditaria. Luego, por el Teorema 7.5, X es hereditariamente localmente conexo. En particular X es localmente conexo. Luego, X es un dendroide localmente conexo o, equivalentemente, una dendrita.

A continuación resumimos lo anterior en el siguiente teorema:

Teorema 7.6. *Si X es un dendroide, entonces X tiene la propiedad de Kelley hereditaria si y sólo si X es una dendrita.*

En las siguiente sección sólo se mencionarán algunos resultados sin prueba los cuales se encuentran en el artículo [3].

7.5 La Propiedad de Kelley y los ∞-odos.

En el artículo [3] se presentan otros resultados que relacionan a la propiedad de Kelley hereditaria. Por cuestiones de tiempo, en este trabajo, presentaremos sin prueba algunos de ellos dando, en cada caso, la referencia respectiva.

Definición 7.7. *Dada $n \in \mathbb{N}$, decimos que un continuo X es un* **n-odo** *(respectivamente, un* **∞-odo***) si X contiene un subcontinuo B llamado el* **corazón** *de X, tal que el conjunto $X - B$ tiene al menos n componentes (respectivamente, un número infinito de componentes). Decimos que X es* **atriódico** *si no contiene 3-odos.*

En el siguiente resultado, se involucra la estructura de un continuo que tiene la propiedad de Kelley pero no la propiedad de Kelley hereditaria.

Teorema 7.8 ([3, Teorema 5.1]). *Si un continuo X tiene la propiedad de Kelley pero no la propiedad de Kelley hereditaria, entonces X contiene un ∞-odo.*

Como consecuencia de este resultado, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.9 ([3, Corolario 5.2]). *Cada continuo atriódico con la propiedad de Kelley, tiene la propiedad de Kelley hereditaria.*

Ahora bien, de acuerdo con el Teorema 2.22, los continuos homogéneos tienen la propiedad de Kelley. Combinando este resultado con el corolario anterior, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 7.10 ([3, Teorema 10.1]). *Los continuos atriódicos y homogéneos tienen la propiedad de Kelley hereditaria.*

Recordemos que los solenoides son continuos homogéneos con la propiedad de que todos sus subcontinuos propios y no degenerados son arcos. Por tanto, los solenoides tienen la propiedad de Kelley hereritaria. Además, son atriódicos. En [3, p. 161] se pregunta si el recíproco de la afirmación anterior es cierto. Al respecto, sólo se conoce que si X es un continuo homogéneo con la propiedad de Kelley hereditaria y X contiene un arco, entonces X es un solenoide y, por tanto, es atriódico. Dicho resultado aparece probado en [4, Corolario 3.6]. Por consiguiente, tenemos el siguiente resultado

Teorema 7.11. *Sea X un continuo homogéneo que contiene un arco. Entonces X tiene la propiedad de Kelley hereditaria si y sólo si X es un solenoide.*

Bibliografía

[1] G. Acosta, *Hiperespacios y la Propiedad de Kelley*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Escuela de Matemáticas, Coahuila México, 1994.

[2] G. Acosta, *On smooth fans and unique hyperspaces*, por publicarse en Houston J. Math.

[3] G. Acosta, A. Illanes, *Continua which have the property of Kelley hereditarily*, Topology Appl. 102 (2002) 151-162.

[4] G. Acosta y Janusz R. Prajs, *On homogeneous continua containing arcs*, enviado para su publicación. Math. Soc.

[5] R. H. Bing, *Concerning hereditarily indecomposable continua*, Pac. J. Math., 1 (1951), 43-51.

[6] K. Borzuk y H. Mazurkiewicz, *Sur l'hyperespace d'un continu*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, 24 (1931), 149-152.

[7] J. J. Charatonik, *Confluent mappings and unicoherence of continua*, Fund. Math., 56 (1964), 213-220.

[8] J. J. Charatonik, *The Property of Kelley and Confluent Mappings*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys., 31 (1983) 375-380.

[9] J. J. Charatonik, *On fans*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 54 (1967), 1-40.

[10] J. J. Charatonik y C. Eberhart, *On smooth dendroids*, Fund. Math., 67 (1970), 297-322

[11] J. J. Charatonik, W.J. Charatonik, *Fans With The Property of Kelley*, Topology and its Applications, 29 (1988) 73-78.

[12] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, A. Illanes, *Property of Kelley for confluent retractable continua*, Topology and its Applications, 110 (2001) 257-263.

[13] J. J. Charatonik y W. J. Charatonik, *Smoothness and the property of Kelley*, Comment. Math. Univ. Carolinae 41 (1) (2000), 123-132.

[14] J. J. Charatonik, A. Illanes, *Smoothness and the Property of Kelley for Hyperspaces*, por aparecer.

[15] W. J. Charatonik, *On the property of Kelley in Hyperspaces*, Topology and its Applications, 1060 (1982) 7-10.

[16] W. J. Charatonik, *A homogeneous continuum without the property of Kelley*, Topology Apppl. 96 (1999), 209-216.

[17] W. J. Charatonik, *Inverse limits of smooth continua*, Comment. Math. Univ. Carolinae. 23. (1982), 183-191.

[18] W. J. Charatonik, W. Makuchowski, *Smoothness of Hyperspaces and Cartesian Products*, Topology Proc. 24(1999) 87-93.

[19] A. N. Chavez, *Funciones inducidas entre Hiperespacios*,Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de México, 2001.

[20] C. O. Christenson y W. L. Voxman, *Aspects of Topology*, Marcel Dekker, Monographs and textbooks in pure and Applied Mathematics, Vol. 39, New York and Bassel, 1977.

[21] S. T. Czuba, *On Dendroids With Kelleys Property*, Proc. Amer. Math. Soc., 102(1988), 728-730.

[22] G. R. Gordh, Jr., *On decompositions of smooth continua*, Fund. Math. 75 (1972), 51-60.

[23] F. Hausdorff, *Grundzuge der Mengenlehre*, Leipzing 1914.

[24] J. G. Hocking y G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, New York, 1988

[25] A. Illanes, *Characterizing dendrites by deformation retractions*, Topology Proc. 21 (1996) 129-141.

[26] A. Illanes y S.B. Nadler, Jr., *Hyperspaces : Fundamentals and Recent Advances*, Marcel Dekker, Monographs and textbooks in pure and Applied Mathematics, Vol. 216, New York and Bassel, 1999.

[27] A. Illanes, *Monotone homogeneous continua, an example*, Topology Proc. 25 (2000), 189-200.

[28] H. Kato, *Concerning a property of J. L. Kelley and refinable maps*, Math. Japonica, 31 (1986), 711-719.

[29] H. Kato, *Generalized homogeneity of continua and a question of J. J. Charatonik*, Houston J. Math., 13 (1987), 51-63.

[30] J. L. Kelley, *Hyperspaces of a continuum*, Trans. Amer. Math., vol. 52 (1942) 22-36.

[31] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press and PWN, 1968.

[32] A. Lelek, *A clasification of mappings pertinent to curve theory*, Proc. Topology Conference, University of Oklahoma (Norman, Oklahoma, 1972), David Kay, John Green, Leonard Rubin, and Li Pi Su, Editors, 97-103.

[33] W. Lewis, *The Classification of homogeneous continua*, Soochow J. Math, 18 (1992) 85-121.

[34] I. Loncar, *The property of Kelley in nonmetric continua*, Math. Commun. 5 (2000) No. 1, p. 41-50.

[35] T. Maćkowiak, *On smooth continua*, Fund. Math. 85 (1974), 79-95.

[36] A. C. Mercado, *Propiedades topológicas de continuos*, Tesis de Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, Escuela de Matemáticas, Coahuila México, 1998.

[37] S. B. Nadler, Jr., *Continuum Theory : An Introduction*, M. Dekker,Monographs and textbooks in pure and Applied Mathematics, Vol. 158, New York, Bassel and Hong Kong, 1992.

[38] S. B. Nadler, Jr., *Hyperspaces of sets*, M. Dekker, Monographs and textbooks in pure and Applied Mathematics, Vol. 49, New York and Bassel, 1978.

[39] V. Neumann-Lara, I, Puga Espinosa, *Shore points and dendrites*, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 939-942.

[40] J. T. Rogers, *Classifying homogeneous continua*, Top. Appl. 44 (1992) 341-352.

[41] L. Vietoris, Bereiche zweiter Ordnung, Monatshefte fur Mathematik und Physik, 32 (1922), 258-280.

[42] R. W. Wardle, *On a property of J.L. Kelley*, Houston J. Math. 3 (1977) 291-299.

[43] H. Whitney, *Regular families of curves*, I., Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 18 (1932), 255-278.