



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE INGENIERIA MECANICA E INDUSTRIAL

INTERACCION ENTRE UNA BURBUJA
Y UNA PARED VERTICAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

INGENIERO MECANICO

P R E S E N T A :

RAUL ^{Salvador} LIMA OCHOTERENA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ROBERTO ZENIT CAMACHO

CIUDAD, UNIVERSITARIA

JULIO 2002.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

División de Ingeniería Mecánica e Industrial

Interacción entre una burbuja y una pared vertical

Tesis

Que para obtener el título de Ingeniero Mecánico

Presenta:

Raúl S. Lima Ochoterena.

Director de Tesis

Dr. José Roberto Zenit Camacho.

Julio del 2002.



Resumen

En este trabajo se realizó un estudio sobre la interacción entre una burbuja en libre ascenso y una pared vertical. Se estudió la velocidad de la burbuja sin que existiese interacción con la pared, obteniendo resultados comparables a trabajos publicados anteriormente, con diferencias en lo referente a la velocidad terminal, posiblemente producto de la disminución en la recirculación interna causada por surfactantes suspendidos en el líquido.

Una vez obtenidos los datos sobre velocidad vertical en libre ascenso se hicieron mediciones con la pared en la vecindad de la trayectoria de la burbuja. Se observó que existe interacción, notoria en colisiones y disminución en la velocidad cuando la pared y la burbuja están cerca una de otra.

Como parte final se realizaron experimentos de visualización de flujo, los cuales permitieron dar una explicación a los fenómenos observados y las sospechas sobre la transición a flujo inestable.



Indice

I	Introducción	1
II	Antecedentes	4
	Flujo multifásico	4
	Parámetros adimensionales	6
	Diámetro equivalente	8
	Forma de una burbuja	8
	Coefficiente de arrastre	9
	Contaminantes	11
	Trayectoria de una burbuja	12
	Interacción entre una burbuja y un muro	14
III	Marco teórico	15
	Flujo de un fluido ideal	15
	Flujo potencial	17
	Solución bidimensional	19
	Solución tridimensional exacta	25
	Velocidad terminal de una burbuja	31
	Formación de una burbuja	35



IV	Diseño experimental	37
	Dispositivo experimental	37
	Producción de burbujas	38
	Inyección de burbujas al tanque	40
	Tanque de experimentación	41
	Equipo de visualización	42
	Adquisición de datos	44
	Digitalización de imágenes	45
	Filtrado del agua	46
V	Resultados experimentales	47
	Calibración del experimento	47
	Velocidad terminal de la burbuja	49
	Interacción entre la burbuja y el muro	52
	Visualización de flujo	63
VI	Conclusiones	67
	Bibliografía	69



Todo es un fluido; por difícil que sea otorgar una concepción física a esta afirmación.

I Introducción

La mecánica de fluidos comenzó con el estudio de la hidrostática. Pudo ser por lo común de los fenómenos y problemas observados en el origen o el tratamiento magistral dado por aquel gran siciliano, Arquímedes de Siracusa al ver los navíos cartagineses meciéndose en el oleaje del mediterráneo. El origen de la mecánica de fluidos y el como se ha desarrollado le ha dado un lugar a su historia, desarrollo y proyecciones futuras como forjadora de un espacio propio en el tiempo.

Originalmente la mecánica considera en su estudio a la materia en dos estados, sólido y fluido. Los sólidos pueden resistir un esfuerzo cortante con una deformación estática. Para un fluido es intolerable a su condición estática un esfuerzo cortante. Un fluido, a su vez, puede ser un líquido, compuesto por moléculas con grandes fuerzas cohesivas tendientes a conservar su volumen, o un gas, con fuerzas cohesivas despreciables libre de expandirse infinitamente o hasta que encuentre alguna barrera física que le confine.

Los flujos multifásicos son una rama de reciente interés para la mecánica de fluidos. Estos flujos tienen una gran cantidad de aplicaciones para la ingeniería como aerosoles, control de contaminantes, sistemas de transporte, lechos fluidizados, conversión de energía y propulsión, manufactura, extinción y control de incendios, transporte sanguíneo, etc.

Dentro de los flujos multifásicos están contenidos los flujos gas-líquido. Un ejemplo de ellos son los flujos burbujeantes, de relevancia para este trabajo. Estos,



en las últimas décadas, han sido un tópico de investigación para la mecánica de fluidos; pueden dividirse en diferentes regímenes acorde con la cantidad de gas presente en el líquido y la velocidad relativa entre las fases. En los flujos burbujeantes la fracción volumétrica de gas es pequeña, alrededor del uno por cada cien, y la distancia relativa entre burbujas es muy grande, por ello no interaccionan unas con otras; empero, que no interactúen unas con otras no implica que carezcan de relación con el medio circundante.

Al formar una burbuja única en el fondo de un tanque lleno de líquido, independiente a la dificultad que ello represente, podría suponerse, si no se conoce el tema, que una burbuja debe ascender con una trayectoria lineal vertical debido a las fuerzas de flotación. Sin embargo, si incluimos una pared vertical en el interior del tanque cerca de la trayectoria de la burbuja, la interacción entre la burbuja y la pared se hará patente, modificará la trayectoria lineal original de la burbuja afectada ahora por la cercanía de la pared.

Dicha interacción puede observarse desde una simple modificación de la trayectoria, hasta una o varias colisiones con la pared. El estudio y explicación puede darse desde un punto de vista simplista como aproximación inicial. Debido a la localización de la burbuja puede establecerse que la distancia entre la burbuja y la pared es tan pequeña en comparación con cualquier otra cara del tanque, que puede considerarse que no existe otra pared antes del infinito. Por esta razón las líneas de corriente se estrecharán entre la pared y la burbuja, y permanecerán igual entre la burbuja y el infinito. El estrechamiento en las líneas de corriente debe entenderse como un aumento de la velocidad del fluido entre la burbuja y la pared respecto a su contracara en la que la velocidad del fluido permanecerá invariante. El aumento de velocidad, acorde al efecto Bernoulli, provoca una disminución en la presión de dicha región. Ese gradiente de presión entre ambas caras de la burbuja provoca una fuerza que le proyecta hacia el muro vertical.



La existencia de la fuerza de atracción entre la pared y la burbuja no indica que la colisión entre la partícula y la pared se lleve a cabo, ya que debe desplazar ahora el fluido de la periferia y el existente entre el muro vertical y ésta.



II Antecedentes

Flujo multifásico

Un flujo multifásico es aquel en el que el fluido está presente en más de una fase; mientras el fluido multicomponente es aquel donde hay diferentes elementos mezclados. Debe entenderse una fase como un estado de la materia, mientras un componente como un elemento químico. Las mezclas multifásicas y multicomponentes están presentes en una gran cantidad de aplicaciones industriales y de la vida cotidiana, lo cual hace su estudio de interés para la ingeniería. Un buen ejemplo de flujo multicomponente es el aire, compuesto por una gran cantidad de elementos. Un flujo multifásico puede ser el de un fluido de refrigeración a lo largo de un sistema de refrigeración.

En el estudio de flujo multicomponente, en gases, es común que la mezcla sea representada por las propiedades del fluido y no por las propiedades de los elementos constituyentes cuando no existe disociación o condensación de alguno de los componentes debido a temperaturas extremas. En el caso de flujo de mezclas de líquidos miscibles la mezcla es posible estudiarla como un fluido monofásico con las propiedades modificadas; sin embargo cuando los fluidos constitutivos no son miscibles el estudio de los mismos se torna altamente complicado ya que no puede tratarse como algo homogéneo, refiriéndose su estudio como emulsiones en el caso de que existan gotas de uno de los fluidos inmiscuidas en el otro.



Los flujos multifásicos se pueden dividir en cuatro categorías; gas-líquido, gas-sólido, líquido-sólido y flujos trifásicos. Los flujos multifásicos pueden también clasificarse como continuos o dispersos. Los flujos multifásicos dispersos, son aquellos en los cuales la fase dispersa está inmersa en la fase continua. La fase continua no tiene interrupciones, es donde se puede pasar de un punto a otro sin dejar de tocar dicha fase, en cambio la fase dispersa es la que está presente de forma discontinua o no está materialmente conectada, es decir, que para trasladarse de un punto a otro es necesario tocar la otra fase del flujo.

Los flujos gas-líquido pueden tener diferentes configuraciones, como el movimiento de burbujas en un líquido donde el líquido es la fase continua y el gas la fase dispersa. En el flujo de gotas en un gas, el gas es la fase continua y las gotas la fase dispersa. Un flujo separado es aquel en el que el líquido se mueve pegado a las paredes del conducto y el gas, separado del líquido, en la sección alta del conducto o central; siendo continuas las dos fases.

Los flujos gas-sólido se caracterizan por estar compuestos de un gas con partículas suspendidas, como transporte neumático, lechos fluidizados, flujo granular, etc.

Los flujos líquido-sólido consisten de partículas arrastradas por un líquido. Se conocen como flujos de arrastre y flujo de líquidos a través de un medio poroso. Esta clase de flujos cubre un amplio espectro de aplicaciones para aplicaciones de transporte de sedimentos. Además pueden ser clasificados como flujos de fase dispersa.

Los flujos trifásicos son aquellos en las que tres fases están presentes, tomando como ejemplo la presencia de burbujas en un flujo de arrastre, etc.



Parámetros adimensionales

Existen diferentes parámetros que permiten caracterizar un fenómeno determinado y presentar los resultados de forma concisa, de tal forma que se facilite su análisis y comprensión. En experimentos de mecánica de fluidos, la utilización de números adimensionales reduce el número de variables y la complejidad de las mismas que intervienen en el fenómeno físico.

Es claro que el comportamiento de la burbuja en estudio, depende de las características físicas del medio y de la misma. Por ello se debe considerar el cómo afecta el cambio de dichas propiedades físicas el curso de los fenómenos observados. Dentro de los parámetros conocidos que afectan el comportamiento y el curso de los experimentos son las propiedades del líquido; como densidad, viscosidad cinemática, el coeficiente de tensión superficial (afectado por contaminación) y las características inherentes a la burbuja, como densidad, tamaño, forma y pureza del gas. Deben utilizarse parámetros que relacionen la mayor cantidad de propiedades de tal forma que permitan la realización de la menor cantidad de experimentos posibles.

El número de Reynolds mide la proporción entre la magnitud de las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas; si el número de Reynolds es alto, las fuerzas viscosas son menos importantes que las inerciales, y si es bajo los efectos viscosos dominan.

Flujos donde los efectos viscosos son despreciables pueden ser estudiados con la teoría de flujo no viscoso o flujo potencial, la cual considera un flujo incompresible e irrotacional. Cabe mencionar que no es que los fluidos en estudio carezcan de viscosidad, solo que la magnitud de las fuerzas viscosas representa un valor muy bajo contra las inerciales.

$$Re = \frac{D_{eq} U_f}{\nu}$$



El número de Weber relaciona la curvatura de la superficie libre con la profundidad en el líquido. Este número relaciona las fuerzas de tensión superficial con fuerzas inerciales. Si $We \ll 1$ dominan las fuerzas de tensión superficial teniendo burbujas esféricas; por ello que solo es importante cuando su valor es cercano a uno o menor.

$$We = \frac{D_{eq} \rho U_i^2}{\sigma}$$

Para burbujas que suben libremente o partículas en caída libre los números de Eötvös y Morton son de suma importancia para describir la forma de la partícula respectiva a su tamaño. El número de Morton solo relaciona propiedades físicas del fluido, pudiendo separarlos en dos grupos, los de número de Morton alto ($Mo > 10^2$) y los de un número de Morton bajo ($Mo < 10^{-6}$).

$$Mo = \frac{g v^4 \rho^3}{\sigma^3}$$

El número de Eötvös representa un medida de el volumen de la burbuja.

$$Eo = \frac{2 \rho D_{eq} g}{\sigma}$$

El factor de forma, χ , relaciona el diámetro horizontal de la burbuja con el vertical, siendo los valores cercanos a uno los importantes para burbujas esféricas.

$$\chi = \frac{D_v}{D_H}$$



Diámetro equivalente

Un parámetro dimensional sumamente utilizado es aquel que tiene una relación con la forma y el volumen real de la burbuja. La burbuja asciende debido al balance de fuerzas de flotación y gravitación. Aunque se podría pensar que una burbuja es una esfera, es un elipsoide como consecuencia del mismo ascenso y arrastre, volumen y tensión superficial. Con el fin de calcular el volumen de la burbuja es posible obtener un diámetro equivalente, basado en la sombra proyectada de la burbuja considerando los diámetros horizontal y vertical.

$$D_{eq} = (D_H^2 D_V)^{\frac{1}{3}}$$

Forma de una burbuja

Las burbujas en ascenso libre bajo la influencia de la gravedad pueden agruparse dentro de tres categorías acorde a su forma.

Las "esféricas" son muy cercanas a ser una esfera. Esto se observa si las fuerzas de tensión superficial y las fuerzas viscosas son más importantes que las fuerzas inerciales. Una burbuja puede considerarse esférica si la diferencia entre el radio menor y el mayor tienen una diferencia menor a un diez por cada cien ($1.1^{-1} < \chi < 1.1$).

Las "elipsoidales" son utilizadas para referirse a burbujas ovaladas con una interfaz convexa vista desde el interior de la burbuja alrededor de la superficie entera. Es común que este tipo de burbujas sufra dilataciones periódicas o movimientos aleatorios haciendo difícil la caracterización de su sombra.

Las "de tapa esférica" son burbujas sumamente grandes que adoptan formas planas y no presentan simetría proa-popa. Muchas se notan como segmentos de una esfera. Generalmente este tipo de burbujas tiene una indentación en la parte de popa que les hace ver como si tuvieran falda.

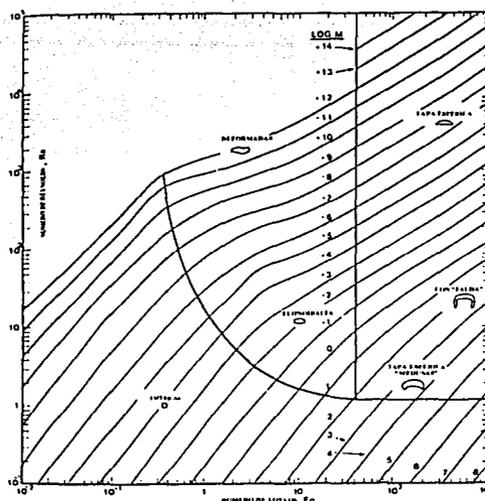


Figura 2.01. Síntesis del comportamiento y forma de las burbujas en función del número de Reynolds y Eötvös.

Debido a las características geométricas, las burbujas de interés para este estudio son aquellas que se pueden ver como una esfera moviéndose en el interior de un líquido. Considerando únicamente burbujas esféricas las cuales están acotadas por los números de Reynolds ($10^{-1} < Re < 10^2$) y de Eötvös ($10^{-2} < Eo < 10^0$).

Coefficiente de arrastre

Es evidente que el movimiento de la burbuja alcanzaría una velocidad infinita si no existiera una fuerza que equiparara a la fuerza de flotación. Es claro que una burbuja al subir libremente alcanza una velocidad terminal en cuanto su fuerza de arrastre sea equilibrada con la fuerza de flotación. La fuerza de flotación varía únicamente con el volumen desplazado por la burbuja. Esta fuerza de flotación variará muy poco ya que el tamaño de la burbuja aumenta un poco debido a la disminución de la presión hidrostática en la trayectoria de la burbuja desde el fondo del tanque hasta la superficie libre.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



La fuerza de arrastre se debe a la distribución de presiones entre la proa y la popa de la burbuja, o la diferencia de presiones entre la cara aguas arriba y la cara aguas abajo.

Una contribución a la teoría del movimiento de una burbuja a altos números de Reynolds fue hecha por Levich (1962), calculando el arrastre de una burbuja esférica considerando la disipación viscosa del líquido utilizando la deformación obtenida de la teoría de flujo potencial. Moore (1965), extendió la teoría hasta incluir las deformaciones en las burbujas calculando además la deformación de una burbuja oblongada haciendo un balance de fuerzas en la superficie de la burbuja. Más tarde se realizaron trabajos de investigación que sofisticaron el cálculo de dichos coeficientes de arrastre hasta que Ryskin y Leal (1984) calcularon numéricamente los coeficientes de arrastre de las proyecciones de una burbuja en función del número de Weber y de Reynolds.

Moore (1965), determinó un coeficiente de arrastre en función de las funciones $G(\chi)$ y $H(\chi)$ y del número de Reynolds; en la que χ es la razón de forma de la burbuja. Las funciones antes mencionadas, $H(\chi)$ y $G(\chi)$ fueron tabuladas en el artículo publicado por Moore.

$$C_D = \frac{48}{Re} G(\chi) \left[1 + \frac{H(\chi)}{Re^{\frac{1}{2}}} + O\left(\frac{1}{Re^2}\right) \right]$$

Para el caso particular en el que la burbuja es esférica, el valor de χ es uno. Para dicho caso el coeficiente de arrastre es función del número de Reynolds exclusivamente.

$$C_D = \frac{48}{Re}$$



Contaminantes

Los surfactantes pueden tener una gran influencia en el comportamiento y velocidad terminal de la burbuja. Debido a que el agua tiene una gran susceptibilidad a los contaminantes, puede ser que la adición de éstos no tengan una influencia en las propiedades conjuntas del líquido, empero, un contaminante puede eliminar la circulación interna, incrementando el arrastre. Los sistemas que exhiben una gran tensión interfacial, como agua-aire, son mucho más susceptibles al efecto causado por la contaminación.

Cuantificar la influencia de este tipo de contaminación es sumamente complicado, ya que debe medirse la cantidad de contaminantes presente y su naturaleza u origen. Los contaminantes que presentan una mayor inferencia en la velocidad terminal de una burbuja en libre ascenso son aquellos que no son solubles en ninguna fase y aquellos que tienen una presiones superficiales muy altas. Otra complicación es que aunque las burbujas puedan estar relativamente libres de contaminantes superficiales activos cuando son inyectadas en un sistema, la velocidad de ascenso y la circulación disminuyen acorde las moléculas se acumulan en la interfaz del gas y el líquido durante el movimiento de la burbuja.

La circulación interna es debida a que la superficie de la burbuja se comporta como una membrana viscosa, de tal forma que la superficie externa de la burbuja puede tener una velocidad sumamente diferente a la cara interna. Esta circulación puede ser la causa de que las burbujas o las esferas fluidas tengan una velocidad terminal considerablemente mayor a la de una esfera rígida con las mismas características de flotabilidad y tamaño. En burbujas pequeñas se ha notado que obedecen a la ley de Stokes, traduciéndose en que la circulación es practicamente inexistente mientras que al incrementar el diámetro se acerca a las predicciones de la teoría de Hadamard-Rybczynski (1911). Esta teoría dice que las esferas sólidas deben tener una velocidad terminal un 50% menor a la velocidad de una esfera fluida acorde a la teoría de Stokes



(1851), empero esto solo se da cuando $Eo > 4$. Esta falta de circulación en las burbujas de diámetro pequeño bien puede obedecer a la presencia de surfactantes en el líquido donde se mueven las esferas fluidas. La presencia de trazas de contaminantes superficiales activos, la circulación en la parte de popa de las burbujas tiende a desaparecer antes que en la parte de proa.

Trayectoria de una burbuja

Una burbuja en libre ascenso tiende a moverse de forma rectilínea a bajos números de Reynolds y oscilatoriamente a números de Reynolds altos. La forma de la burbuja es estable a números de Weber cercanos a uno e inestable para números de Weber altos; dicha inestabilidad en la forma y las oscilaciones en la trayectoria ocurren en diferentes etapas. El movimiento en espiral o helicoidal de cuerpos sólidos axisimétricos en un fluido perfecto fueron descritos por Lamb (1932); quien mencionó que los cuerpos con inercia angular tienen un infinito rango de posibilidades de movimiento helicoidal.

Dado un régimen estable el máximo número de Weber, encontrado por Benjamin (1987), para una forma oscilatoria o inestabilidad de forma, es $We_{max}=3.271$, con un factor de forma de $\chi=3.722$ comparables con los resultados obtenidos por Miksis (1981). Benjamin (1987) sostiene que este número de Weber máximo es asociado a una bifurcación axisimétrica.

El movimiento inicial de una burbuja es rectilíneo, sin embargo en burbujas grandes este movimiento se torna inestable resultando en un movimiento en espiral o en zigzag. La teoría del movimiento Hamiltoniano de Benjamin (1987), explica que este movimiento en espiral es posible que exista si y solo si, un impulso par diferente de cero existe. Duineveld (1984) cree que dicha inestabilidad obedece a un punto crítico caracterizado por los números de Weber y Morton. Los primeros en encontrar una relación empírica para la descripción de dicha inestabilidad fueron Tsuge e Hibino



(1977) determinando relaciones empíricas entre los números de Weber, Reynolds y Morton para el punto crítico donde se realiza dicha inestabilidad.

$$We_{cr} = 21.5 Re_{cr}^{-0.32}$$

$$Re_{cr} = 9.0 Mo_{cr}^{-0.173}$$

Estudios previos realizados por Saffman (1956) mostraron dicha inestabilidad basándose en el radio equivalente. Saffman reportó haber encontrado trayectorias rectilíneas para $R_{eq} < 0.7$ mm, para radios mayores $R_{eq} < 1.0$ mm, movimiento en zigzag, mientras que para burbujas mayores a la última mencionada movimientos helicoidales; determinando un $Re_{cr} = 400$ para dicha inestabilidad. Pese a que al liberar una burbuja del mismo tamaño a su predecesora inmediatamente posterior a la salida de la primera, es posible que la segunda tenga la misma velocidad terminal que la inicial aunque la segunda se mueva en espirales y la primera en zigzag.

Tabla 2.02 Compendio sobre inestabilidad de trayectoria en función del tamaño, número de Reynolds y Weber.

	Criterios de inestabilidad de trayectoria			Comentarios
	Rectilínea	Helicoidal	Zigzag	
Haberman y Morton (1954)	$Re < 300$	$300 < Re < 3000$	$Re > 3000$	
Hartunian y Sears (1957)	$Re < 202$ $We < 3.17$	$Re > 202$ $We > 3.17$	$Re > 202$ $We > 3.17$	Esf. Sólidas y Ag. Cont. Agua pura $Mo < 10^{-4}$
Saffman (1956)	$r_{eq} < 0.7$ mm $Re < 400$	$r_{eq} > 1.0$ mm	$r_{eq} > 0.7$ mm $Re > 400$	
Aybers y Tapucu (1969)	$r_{eq} < 0.67$ mm $Re < 565$	$0.67 < r_{eq} < 1.0$ mm $565 < Re < 880$	$r_{eq} = 1.0$ mm $880 < Re < 1350$	
Duineveld (1994, 1995)	$r_{eq} < 0.91$ mm $We < 3.3$ $Re < 662$		$r_{eq} > 0.91$ mm $We > 3.3$ $Re > 662$	



Interacción entre una burbuja y un muro.

Definimos un cuerpo con flotabilidad positiva a aquel cuya densidad es menor a la del líquido en el que está inmerso; mientras uno de flotabilidad negativa a aquel que es más denso que el medio que le rodea. Una burbuja de gas en agua tiene una densidad de uno por cada mil respecto al líquido en el que está inmersa. Esta diferencia de densidades provoca que tenga una fuerza de flotación suficiente para provocar que emerja a una velocidad terminal constante causada por el balance de la fuerza de flotación y la fuerza de arrastre.

Al tener una pared vertical inmersa en un contenedor lleno de líquido es posible observar la interacción entre la burbuja y dicha pared. Dicha interacción puede observarse al inyectar una burbuja en la base del contenedor a una distancia pequeña de la pared para el caso de una burbuja moviéndose a un *Re* alto. La interacción entre la burbuja y la pared se verá reflejada en una atracción entre la burbuja y la pared. Duineveld (1994) y de Vries (2001) observaron dicha interacción que puede ser estudiada teóricamente con flujo potencial. Esta teoría considera una secuencia de imágenes en la que se supone una burbuja virtual de las mismas características a la de estudio en el otro lado de la pared, posicionada simétricamente a un eje de simetría imaginario coincidente a la pared.



III Marco Teórico

Flujo de un fluido ideal

El estudio de una burbuja cuyo movimiento es caracterizado por un número de Reynolds relativamente alto y un número de Weber menor que uno es posible describirlo y estudiarlo teóricamente por medio de flujo incompresible no viscoso. En dicho caso es factible despreciar los efectos viscosos y suponer que en la superficie de la burbuja la condición de no deslizamiento no se impone. El flujo incompresible no viscoso o flujo potencial es capaz de explicar, en general, los flujos fuera de la capa límite.

Dicha caracterización o estudio es referido a los fluidos idealizados en el caso que los efectos viscosos no son importantes y los efectos de compresibilidad son despreciables. Es notorio que los fluidos y su comportamiento pueden ser modelados adecuadamente por las ecuaciones de balance (Navier-Stokes). Sin embargo, los efectos viscosos y los de compresibilidad vuelven compleja la solución de estas ecuaciones. La mayor ventaja de resolver las ecuaciones con las simplificaciones anteriores es la posibilidad de plantear soluciones matemáticas formales con una gran simplificación.

Una vez que se ha dado por hecho la incompresibilidad y desprecio de los efectos viscosos del fluido, la Ecuación de Conservación de Masa y las Ecuaciones de Conservación de Momentum son reducidas a:

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.01) \quad y \quad \frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + f \quad (3.02)$$



Estas ecuaciones de balance son conocidas como las ecuaciones de Euler; ahora suficientes para establecer la velocidad y la presión del fluido independiente de cualquier distribución de temperaturas que pueda existir.

Las condiciones de contorno para estas ecuaciones son la velocidad de la corriente en los contornos del flujo libre y la ausencia de velocidad normal a las superficies sólidas fijas. La velocidad tangencial a lo largo de superficies sólidas debe determinarse como parte de la solución del problema. Este hecho radica en que las ecuaciones de Euler permiten que la condición de no deslizamiento causada por los términos viscosos se vea relajada, sin embargo, la condición de carencia de velocidad normal se mantiene. Es posible agrupar estas condiciones nombrando un vector \vec{n} normal a la superficie sólida y \vec{U} como el vector velocidad del cuerpo.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n} \quad (3.03)$$

Donde \vec{U} es la velocidad del fluido en la superficie sólida del cuerpo. El significado físico de esta condición de frontera es que la superficie del cuerpo debe ser sólida, representada por una línea de corriente la cual no es posible traspasar.



Flujo potencial

En el caso de que el flujo de un fluido ideal alrededor de un cuerpo origine un flujo irrotacional, la vorticidad del flujo será igual a cero.

$$\nabla \times \vec{u} = 0 \quad (3.11)$$

Si el flujo es irrotacional entonces \vec{u} se puede representar como:

$$\vec{u} = \nabla \phi \quad (3.12)$$

La función ϕ es llamada el potencial de velocidades. Ahora, con el fin de obtener la ecuación que satisface el potencial de velocidades ϕ , la expresión para \vec{u} es substituida en la ecuación de continuidad ecuación (3.11) para obtener la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.13)$$

De este modo, al resolver las ecuaciones de Laplace (3.13) y la ecuación (3.12), el campo de velocidades puede ser establecido sin la utilización directa de las ecuaciones de movimiento. Resolviendo la ecuación (3.13) es posible obtener la distribución del campo de presiones indirectamente al utilizar la ecuación de Bernoulli una vez obtenido el campo de velocidades.

El potencial de velocidades ϕ fue definido como una manera automática de satisfacer la condición de irrotacionalidad la cual debe ser una solución de la ecuación de Laplace. Una segunda función puede ser definida como un procedimiento complementario para estudio bajo flujo potencial. Esta función puede ser definida para que satisfaga la ecuación de continuidad misma que satisface la condición de



irrotacionalidad. Dicha función es la función de corriente definida de la siguiente manera:

$$u = \frac{d\phi}{dy} \quad (3.14)$$

$$v = -\frac{d\phi}{dx} \quad (3.15)$$

La función de corriente tiene dos propiedades. La primera es la que corresponde a una línea de corriente, donde el valor de la función de corriente permanece constante; y la segunda, que, la diferencia entre los valores de dos líneas de corriente indican el flujo entre éstas.

Es posible construir flujos potenciales interesantes a partir de la superposición de soluciones elementales conocidas. Por ejemplo, corriente uniforme, fuentes o sumideros, torbellinos, etc. Lo anterior, puede ser demostrado, partiendo del hecho de que ϕ_1 y ϕ_2 son soluciones a la ecuación de Laplace.

$$\text{Si } \nabla^2 \phi_1 = 0 \text{ y } \nabla^2 \phi_2 = 0 \rightarrow \nabla^2 (\phi_1 + \phi_2) = 0 \quad (3.16)$$

Es posible construir además cuerpos cerrados superponiendo a una corriente uniforme, fuentes, sumideros y torbellinos; siendo el cuerpo cerrado si y solo si la intensidad de la fuente es igual al del sumidero.



Solución bidimensional

Un acercamiento inicial al problema de la interacción entre una burbuja y una pared puede darse con flujo potencial y la teoría de imágenes. Con la teoría de imágenes es posible dar solución a flujos potenciales limitados en extensión por paredes sólidas, como es el caso de una burbuja. El procedimiento matemático de la teoría de imágenes consiste en situar un cuerpo igual del otro lado de la pared a la misma distancia quedando la pared entre los dos cuerpos, siendo ahora la pared un cuerpo virtual. Esta adición da a lugar a una línea de corriente horizontal entre las burbujas que simula a la virtual pared, como puede observarse en la figura subsecuante.

Para la solución de tal acercamiento, es posible efectuarlo con la superposición de una corriente y dos dobletes, el cual modela el flujo alrededor de dos cilindros infinitos, compuestos por una fuente y un sumidero cada uno. El modelo matemático simplificado obedece a la figura presentada.

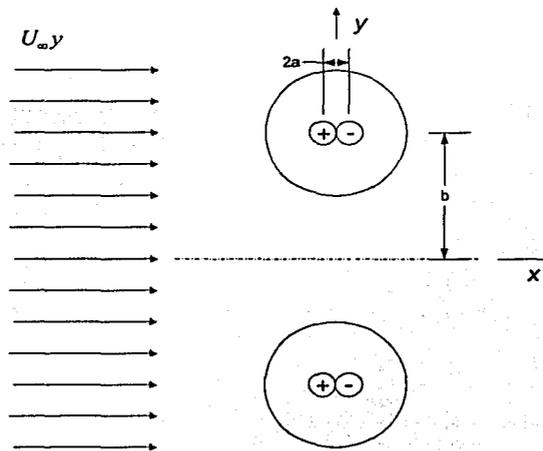


Figura 3.01. Esquema de solución bidimensional.



Para que dicha solución fuese obediente a dos cilindros circulares se deber incluir una serie infinita de dobles de corrección en cada uno de los cuerpos siendo cada uno de menor intensidad respecto al anterior. Este factor de corrección es necesario debido a que la interacción entre uno y otro deforma la superficie del otro cuerpo provocando que los cuerpos no sean cilíndricos por la presencia del otro. Debido a la simplificación matemática requerida en una aproximación; solo se presentará el caso en el cual no se consideran correcciones matemáticas de alto orden.

$$\varphi = \varphi_{\text{corriente}} + \varphi_{\text{doble1}} + \varphi_{\text{doble2}} \quad (3.21)$$

$$\varphi = \varphi_{\text{corriente}} + \varphi_{\text{fuente1}} + \varphi_{\text{sumidero1}} + \varphi_{\text{fuente2}} + \varphi_{\text{sumidero2}} \quad (3.22)$$

Sustituyendo las ecuaciones de un doblete y un sumidero en la ecuación 3.22, tenemos:

$$\varphi = U_{\infty} y + \text{marctg} \frac{y-b}{x+a} - \text{marctg} \frac{y-b}{x-a} + \text{marctg} \frac{y+b}{x+a} - \text{marctg} \frac{y+b}{x-a} \quad (3.23)$$

Utilizando la identidad trigonométrica 3.24, es posible agrupar términos obteniendo una función de corriente simplificada (3.25).

$$\text{arctg} \alpha - \text{arctg} \beta = \text{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha \beta} \quad (3.24)$$

$$\varphi = U_{\infty} y - \text{marctg} \frac{2a(y-b)}{x^2 - a^2 + (y-b)^2} - \text{marctg} \frac{2a(y+b)}{x^2 - a^2 + (y+b)^2} \quad (3.25)$$



$$a \rightarrow 0, \alpha \approx 1 \text{ y } \lambda = 2am \Rightarrow \operatorname{arctg}(\alpha) \approx \alpha \quad (3.26)$$

$$\varphi = U_{\infty}y - \lambda \left(\frac{(y-b)}{x^2 - a^2 + (y-b)^2} \right) - \lambda \left(\frac{(y+b)}{x^2 - a^2 + (y+b)^2} \right) \quad (3.27)$$

Basados en que la función de corriente general es una superposición de otras funciones de corriente, la intensidad de los dobletes λ , puede calcularse tomando en cuenta a una corriente uniforme con un solo doblete (3.28).

$$\varphi = U_{\infty}r \operatorname{sen} \theta + \frac{\lambda \operatorname{sen} \theta}{r} \quad (3.28)$$

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = U_{\infty} \cos \theta + \frac{\lambda}{r^2} \cos \theta \quad (3.29)$$

$$\text{Si } V_r \left[\begin{matrix} r=R \\ \theta=\pi \end{matrix} \right] = 0 \Rightarrow \lambda = -U_{\infty}R^2 \quad (3.210)$$

Sustituyendo el valor de (3.210) en (3.27), obtenemos la función de corriente del problema en cuestión.

$$\varphi = U_{\infty}y + \lambda \left(\frac{U_{\infty}R^2(y-b)}{x^2 - a^2 + (y-b)^2} \right) + \lambda \left(\frac{U_{\infty}R^2(y+b)}{x^2 - a^2 + (y+b)^2} \right) \quad (3.211)$$

Al graficar la función de corriente es notorio el estrechamiento de las líneas de corriente entre los dos cilindros. Este estrechamiento denota el aumento de velocidad



del fluido al pasar entre los cilindros, existiendo una diferencia de magnitud de la velocidad entre la cara superior e inferior. Este estrechamiento puede verse claramente al comparar la distancia entre las líneas de corriente situadas entre los cilindros y las posicionadas diametralmente opuestas a la parte comprendida entre los dos cilindros.

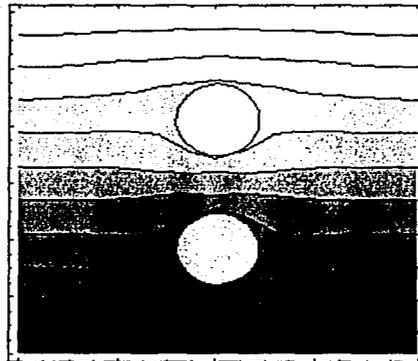


Figura 3.02. Gráfica de función de corriente.

Utilizando la función de corriente es posible obtener el campo de velocidades acorde a las siguientes relaciones.

$$U_x = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad U_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.212)$$

Las expresiones anteriores proporcionan el campo de velocidades a lo largo y ancho de nuestro sistema de referencia, lo que puede ser utilizado para calcular la distribución de presiones en la superficie del cilindro. De este modo, es posible calcular la fuerza de atracción entre el cilindro y la pared como función de la separación de la pared. Para este cálculo es necesario utilizar la ecuación de Bernoulli (2.213) sin considerar los efectos gravitacionales.

$$P_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = P_s + \frac{1}{2} \rho (U_x^2 + U_y^2) \quad (3.213)$$



La fuerza total se calcula integrando la presión en la superficie del cilindro.

$$F = \int P \cdot \bar{n} dA \quad (3.214)$$

$$F_L = - \int_{-R}^R U_{xy}^2 \sqrt{R^2 - x^2} \frac{1}{a} - \int_{-R}^R U_{xy}^2 \sqrt{R^2 - x^2} \frac{1}{a} \quad (3.215)$$

Integrando en la trayectoria $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} + b$.

Para mostrar la interacción entre la burbuja y la pared, como una aproximación al problema particular a solucionar, se ha realizado una solución numérica para un caso específico de los datos observados y mostrados a continuación para un instante dado, obteniendo las gráficas de velocidad horizontal y vertical, así como la velocidad absoluta mostrada a continuación sobre el cilindro superior y el cálculo de la fuerza neta para los parámetros descritos.

$$U_{\infty} = 0.18 \frac{m}{s}, \quad R = 1 \times 10^{-3} m \quad y \quad b = 2R \quad \Rightarrow \quad F = -3 \times 10^{-4} N.$$



En la gráfica siguiente se muestra el cuadrado de la velocidad absoluta en la vecindad a lo largo de la superficie del cilindro, mostrando que en esta simulación numérica la velocidad absoluta en la cara superior es menor a la existente en la inferior, lo que provoca una sustentación negativa en el sistema de referencia utilizado.

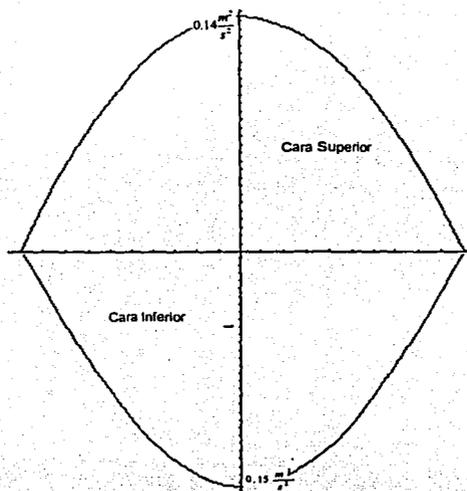


Figura 3.03. Gráfica del cuadrado de la velocidad absoluta en la periferia del cilindro superior.

Es posible concluir, de esta aproximación, que un objeto de sección circular inmerso en una corriente en movimiento en un flujo potencial interactuando con una pared experimentará una fuerza de atracción hacia la pared.



Solución tridimensional exacta.

Otra solución al problema antes descrito, consiste en modelar a la burbuja como una esfera tal que sea posible tratarla con las ecuaciones que describan su movimiento en tres planos. La solución matemática basada en flujo potencial consiste en situar una esfera tal que el vector velocidad original sea paralelo a un muro (Milne 1968). Dicho artificio matemático es posible realizarlo con la teoría de imágenes poniendo dos esferas iguales inmersas en una corriente; simulando que una de las dos se mueve paralela a un muro y la otra es su imagen en flujo potencial.

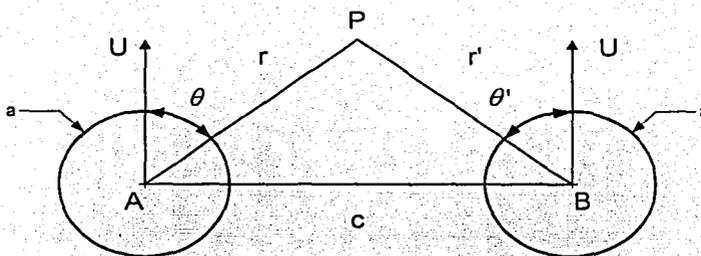


Figura 3.04. Esquema de dos burbujas modeladas por flujo potencial.

Considerando dos esferas con centros en A y B, de radio a, las cuales se mueven paralelas y a la misma velocidad U. La posición del punto P, se relaciona a las dos esferas mediante los radio vectores r' y r referidos a B y A respectivamente. Para satisfacer las condiciones de flujo potencial, la función de potencial ϕ debe satisfacer las condiciones de frontera en las dos esferas, en donde no debe satisfacer la condición de no deslizamiento y la velocidad normal absoluta en la superficie debe ser nula.



$$-\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = U \cos \theta' \quad (3.31)$$

Teniendo la función de potencial como una suma de cada una de las funciones de potencial por cada una de las esferas. Por lo que es posible descomponer el potencial en dos componentes, un potencial cuando la esfera A se mueve con velocidad U, y la esfera B esta en reposo, y otro cuando la esfera B se mueve con velocidad U y A se encuentra en reposo, pudiendo escribir.

$$\phi = U(\phi_1 + \phi_2) \quad (3.32)$$

Es posible comenzar la solución resolviendo el problema para ϕ_1 , empero para los dos dobletes es similar. Si B estuviera ausente ϕ_1 seria el potencial debido a un doblete en A, con magnitud $\mu_0 = 1/2 a^3$; sin embargo la presencia de B causa que la primera condición de frontera sea violada.

Para mantener dicha condición se puede introducir una imagen dentro de la esfera para conservar las condiciones de frontera en B. Esto se logra introduciendo una imagen de μ_0 en la esfera B, que es un doblete μ_1 , dirigido a lo largo de la línea entre B y A; dicho doblete debe ser introducido en A_1 , punto inverso de A respecto a B, pero esta imagen requiere otra imagen mas μ_2 en A_2 , punto inverso de A_1 respecto a A. Se requerirán una serie infinita de imágenes para mantener la condición de frontera descrita, los cuales deben situarse según de la siguiente forma.

$$\overline{AA_n}_{(par)} = \frac{a^2}{AA_{n-1}} \quad (3.33)$$

$$\overline{AA_n}_{(impar)} = c - \frac{a^2}{c - AA_{n-1}} \quad (3.34)$$



De esta forma se obtiene una serie infinita de imágenes en los puntos A_1, A_2, A_3 , de magnitud $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$

$$\mu_{n(\text{par})} = \mu_{n-1} \left(-\frac{a}{AA_{n-1}} \right)^3 \quad (3.35)$$

$$\mu_{n(\text{impar})} = \mu_{n-1} \left(-\frac{a}{BA_{n-1}} \right)^3 \quad (3.36)$$

$$\mu_1 = \mu_0 \left(-\frac{a^3}{c^3} \right), \mu_2 = \mu_1 \left(-\frac{a^3}{f_1^3} \right), \mu_3 = \mu_2 \left(-\frac{a^3}{(c-f_2)^3} \right), \dots \quad (3.37)$$

$$f_1 = c - \frac{a^2}{c}, f_2 = \frac{a^2}{f_1}, f_3 = c - \frac{a^2}{c-f_2}, \dots \quad (3.38)$$

La ecuación para f_n nos conduce a una ecuación diferencial de Riccati, que puede ser resuelta para el valor de μ_n que puede ser escrita así.

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 \cos \theta}{r^2} + \frac{\mu_1 \cos \theta_1}{r_1^2} + \frac{\mu_2 \cos \theta_2}{r_2^2} + \dots \quad (3.39)$$

Esta es una solución exacta pero en una forma poco apropiada. Para obtener una solución aproximada al término c^{-3} , usaremos el siguiente método. Si B estuviese ausente el potencial estaría dado por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2a^3} \frac{\cos \theta}{r^2} \dots \quad (3.310)$$



Usando la expansión de un dipolo en Polinomios de Legendre, encontramos que en la vecindad de la esfera B, cuando A es el origen:

$$\frac{1}{2a^3} \frac{\cos\theta}{r^2} = -\frac{1}{2} \frac{a^3}{c^2} - \frac{a^3 r' P_1(\cos\theta')}{c^3} - \frac{3}{2} \frac{a^3 r'^2 P_2(\cos\theta')}{c^4} - \dots \quad (3.311)$$

Por lo que con esta expresión podemos calcular la velocidad alrededor de la esfera B.

$$V_{r'} = \frac{a^3 P_1(\cos\theta')}{c^3} - 3 \frac{a^3 r' P_2(\cos\theta')}{c^4} - 6 \frac{a^3 r'^2 P_3(\cos\theta')}{c^5} - \dots \quad (3.312)$$

Evaluando en $r'=a$, se obtiene un valor para $V_{r'}$ en B, función de $\left(\frac{a}{c}\right)^3$.

$$V_{r'=a} = \frac{a^3 P_1(\cos\theta')}{c^3} - 3 \frac{a^4 P_2(\cos\theta')}{c^4} - 6 \frac{a^5 P_3(\cos\theta')}{c^5} - \dots \quad (3.313)$$

Para eliminar términos de velocidad en B, es posible agregar términos al potencial basado en la esfera B.

$$\phi_1 = \frac{1}{2a^3} \frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{a^6}{c^3} \frac{P_1(\cos\theta')}{r'^2} + \frac{a^8}{c^4} \frac{P_2(\cos\theta')}{r'^3} + \frac{3}{2} \frac{a^9}{c^5} \frac{P_3(\cos\theta')}{r'^4} + \dots \quad (3.314)$$

Cada corrección a la velocidad normal en B, causa una modificación al potencial en A. Sin embargo la aproximación para distancias grandes entre esferas es aceptable.

$$\phi_1 = \frac{1}{2a^3} \frac{\cos\theta}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{a^6}{c^3} \frac{\cos\theta'}{r'^2} + \dots \quad (3.315)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2a^3} \frac{\cos\theta'}{r'^2} + \frac{1}{2} \frac{a^6}{c^3} \frac{\cos\theta}{r^2} + \dots \quad (3.316)$$



Las expresiones se pueden simplificar expresando el dipolo en función de θ y r .

$$\frac{\cos \theta'}{r'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{2r \cos \theta}{c^3} + \dots \quad (3.317)$$

De esta forma el valor del potencial f_1 , y f_2 , alrededor de A, proporciona el siguiente valor.

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \frac{b^3}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{ab^3}{c^3} \cos \theta \quad (3.318)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2a} \cos \theta \quad (3.319)$$

Para calcular la energía cinética del líquido se tiene la siguiente expresión:

$$T = -\frac{1}{2} \rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_A - \frac{1}{2} \rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_B \quad (3.320)$$

La integral se calcula en la periferia de las esferas A y B; y utilizando las condiciones de frontera.

$$T = \frac{1}{2} \rho [P_1 U^2 + (Q_1 + Q_2) U^2 + P_2 V^2] \quad (3.321)$$

Los valores P_1 , P_2 , y Q_1, Q_2 , se evalúan a partir de las siguientes integrales:

$$Q_1 = - \int \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS_A \quad Q_2 = \int \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} dS_B \quad P_1 = \int \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS_A \quad P_2 = \int \phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} dS_B \quad (3.322)$$



Por lo que es posible, hasta los términos c^{-3} , evaluar la energía cinética debida al movimiento de las burbujas.

$$P_1 = P_2 = \frac{2}{3} \pi a^3, \quad Q_1 = Q_2 = \frac{2}{c^3} \pi a^6 \quad (3.324)$$

De tal forma que la energía cinética puede calcularse basado en la siguiente expresión.

$$T = \frac{1}{4} M U^2 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{a^3}{h^3} \right) \quad (3.325)$$

Donde M es la masa añadida o la masa del líquido desplazado por las burbujas y $c=2h$, donde h es la distancia entre el centro de la burbuja al muro. Dicho análisis proporciona la expresión para calcular la energía cinética en función de la velocidad de la burbuja, empero no es exacto debido a que no considera una serie infinita de dipolos que mantengan la condición de frontera cuando la distancia entre la pared y la burbuja sea pequeña.



Velocidad terminal de la burbuja.

Para calcular la velocidad terminal de la burbuja es necesario igualar la fuerza de arrastre a la fuerza de flotación de la burbuja. El saber la distancia o el tiempo al cual alcance dicha velocidad es crucial para diseñar el experimento apropiadamente.

Esta distancia y el tiempo en que llega a su velocidad terminal pueden obtenerse resolviendo la ecuación diferencial que relaciona la flotación y el coeficiente de arrastre a la segunda ley de Newton. Obviamente parece ilógico relacionarla si se ha mencionado que la masa de la burbuja es despreciable respecto al líquido, pero, la masa de la burbuja no es la única que se desplaza con el movimiento de esta. La masa añadida de la burbuja es la masa de líquido que se desplaza en conjunto a la burbuja siendo esta la causa del incrementando en la inercia de la partícula.

Los conceptos anteriores pueden calcularse en función a las relaciones siguientes:

$$F_F = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_l - \rho_g) g \quad (3.41)$$

$$F_A = 12\pi\mu UR \quad (3.42)$$

$$m = m_{add} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3 \rho_l \quad (3.43)$$

$$F_F - F_A = m \frac{dU}{dt} \quad (3.44)$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.41, 3.42 y 3.43 en 3.44 y resolviendo la ecuación diferencial, tenemos:

$$U(t) = \frac{R^2 g \rho_l}{9\mu} \left(1 - e^{\frac{-18\mu}{R^2 \rho_l} t}\right) \quad (3.45)$$



$$y(t) = \frac{R^4 g \rho_l}{162 \mu} \left(e^{\frac{-18 \mu}{R^2 \rho_l} t} - 1 \right) + \frac{R^2 g \rho_l}{9 \mu} t \quad (3.46)$$

Con base en estos resultados se puede mostrar que las burbujas pequeñas alcanzan su velocidad terminal en menor tiempo que burbujas de mayor tamaño. A continuación se muestran las gráficas siguientes de velocidad terminal y desplazamiento en función del tiempo.

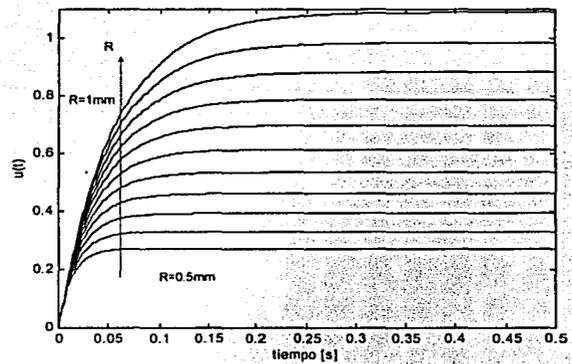


Figura 3.05. Velocidad vs tiempo para burbujas de diferente tamaño.

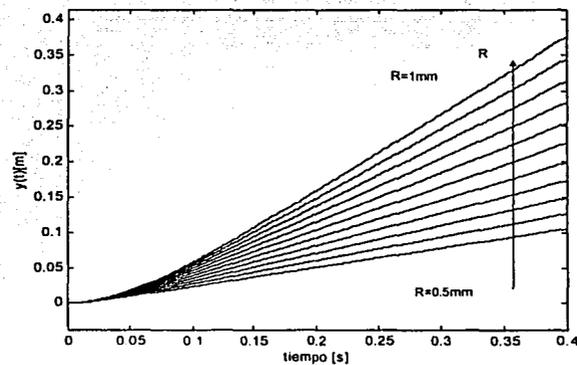


Figura 3.06. Desplazamiento vs tiempo para burbujas de diferente tamaño.



En las gráficas anteriores es notoria la relación existente entre el volumen, la velocidad terminal, y la distancia necesaria para alcanzarla. Se puede ver que mientras más grandes sean las burbujas recorren un trayecto en menor tiempo, sin embargo tardan más en alcanzar su velocidad terminal. Para el rango de burbujas estudiadas comprendidas entre medio y un milímetro de radio; les toma alcanzar un valor cercano a su velocidad terminal entre cuatro y veinte centímetros.

En las gráficas siguientes se ilustra el comportamiento de la burbuja en cuanto respecta a su aceleración, velocidad terminal, distancia y tiempo de aceleración de forma adimensional. Puede observarse el mismo patrón que en las anteriores notándose el colapso en una sola cuando alcanzan su velocidad terminal.

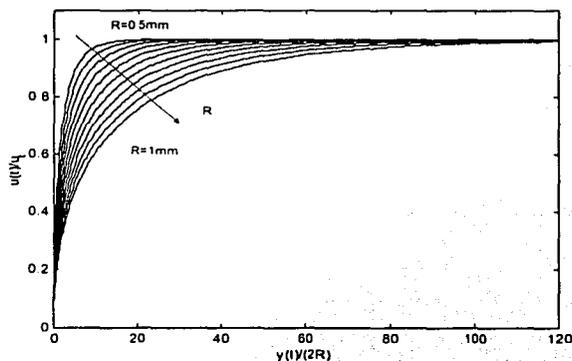


Figura 3.07. Velocidad vs desplazamiento para burbujas de diferente tamaño adimensionalizada con la velocidad terminal y diámetro de la burbuja.

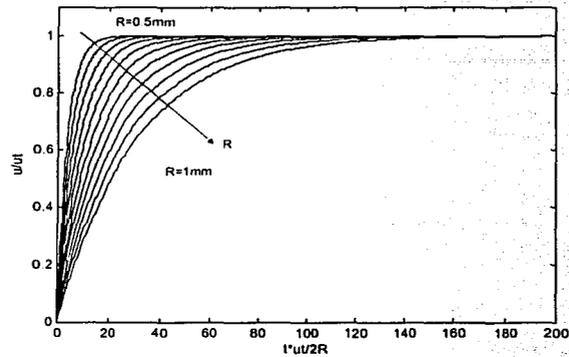


Figura 3.08. Velocidad vs tiempo para burbujas de diferente tamaño adimensionalizadas con la velocidad terminal y diámetro de la burbuja.

En esta última gráfica se observa el colapso de las familias de curvas pertenecientes a burbujas de diferente tamaño una vez alcanzada su velocidad terminal, notando el espaciamiento entre cada curva significado de la diferencia en tiempo que tarda cada cual en llegar a su velocidad terminal.



Formación de una burbuja

Existen varias maneras de formar una burbuja en un líquido acorde al tamaño deseado y la cantidad de burbujas requeridas en un tiempo determinado. Una forma común de generar burbujas pequeñas es introducir gas en un tubo capilar inmerso en un fluido. Estas burbujas serán de un tamaño tal que su separación o desprendimiento será en el momento que su fuerza de flotación sea mayor a la fuerza cohesiva entre el capilar y la burbuja causada por la tensión superficial. La ecuación de balance de fuerzas es mostrado a continuación:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_l - \rho_g) g = 2 \rho_l R_o \sigma \quad (3.51)$$

La ecuación 3.51, es resuelta para el volumen de la burbuja V_b , mostrada a continuación:

$$V_b = \frac{2 \rho_l R_o \sigma}{(\rho_l - \rho_g) g} \quad (3.52)$$

Radio del capilar R_o .

Densidad del gas y líquido ρ_l y ρ_g .

Coefficiente de tensión superficial σ .

El tamaño de la burbuja, en el caso más simple, es función del diámetro del capilar y de las propiedades del gas y el fluido. En primera instancia al aumentar el flujo de gas dentro del capilar, aumenta el volumen de la burbuja pero tiende a estabilizarse obedeciendo a la siguiente relación basada en el gasto volumétrico que fluye en el interior del capilar.

$$V_b = 1.138 \frac{Q_g^{\frac{6}{5}}}{g^{\frac{3}{5}}} \quad (3.53)$$

Gasto volumétrico del gas en el capilar Q_g .

Aceleración gravitacional g .



En aplicaciones industriales es común que las burbujas utilizadas no sean producidas de forma individual, y son generadas por bancos de capilares o medios porosos por medio de vapor o calentamiento. Dicha formación no obedece a burbujas idénticas debido a la inestabilidad de Taylor de un fluido dentro de otro más denso, pero el volumen de las burbujas producidas es similar, como puede observarse en la siguiente relación.

$$R_b = \left[\frac{\sigma}{g(\rho_l - \rho_g)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.54)$$



*El silencio,
sonido fundamental.*

IV Diseño Experimental

Dispositivo experimental

El diseño del dispositivo experimental se basó en la necesidad de realizar una serie de experimentos. El primer experimento consistió en medir la velocidad terminal de burbujas de diferentes diámetros así como la estabilidad de su trayectoria; una vez establecido esto, se procedió a determinar el efecto causado por el acercamiento de la pared.

La figura siguiente muestra un esquema del dispositivo experimental y componentes esenciales.

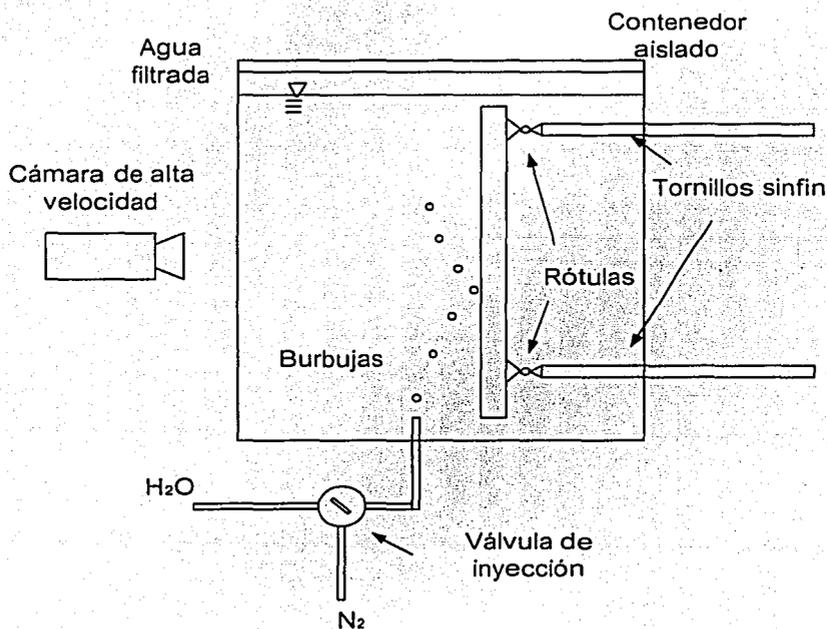


Figura 4.11. Esquema del dispositivo experimental



Así, la segunda serie de experimentos estuvo formada por la observación, medición y documentación del cambio de trayectoria provocado por el acercamiento de un muro vertical. Finalmente, en el tercer experimento se llevó a cabo la visualización del flujo alrededor de la burbuja provocado por su paso a través del fluido, y la perturbación provocada por el paso de la misma.

La concepción del dispositivo experimental se centró en la producción de burbujas iguales, repetibles y volumen variable.

Producción de Burbujas.

La formación e inyección de burbujas en el experimento debe ser controlada debido a la repetitividad necesaria para la evaluación de los experimentos dentro del proceso estadístico. El proceso de generación de burbujas se realizó introduciendo un volumen de gas conocido, en una corriente muy lenta de líquido inyectada posteriormente en el capilar situado en la base del contenedor.

Una parte sumamente importante dentro de el dispositivo de inyección, es una válvula de conmutación de microvolúmenes (modelo VICI C14WE.06), la cual puede ser utilizada cuando se requieren cantidades sumamente pequeñas de como es el caso.

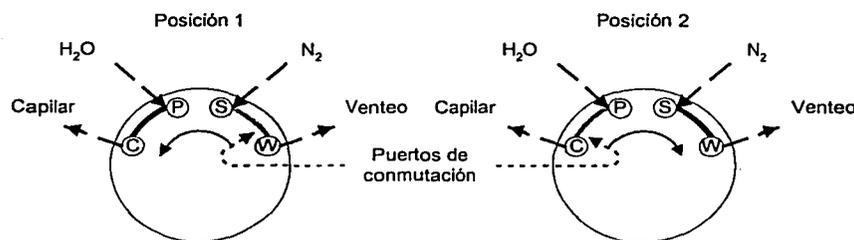


Figura 4.12 Esquema interior de la microválvula empleada



El funcionamiento de la válvula está basado en un volumen de control desplazable, dentro del cual circula gas o líquido acorde a la posición en momento determinado. Una vez que existe flujo entre los puertos S y N (figura 4.12) la microcámara de conmutación es llenada por nitrógeno, al girar la válvula dicho volumen de control es posicionado en la corriente del líquido siendo arrastrado por la corriente existente entre los puertos P y C. Para lograr repetidas inyecciones, la cámara de conmutación debe ser limpiada del líquido, adherido a las paredes internas, por la corriente de gas cada vez que la válvula esté en la posición original.

Es posible modificar el volumen del gas inyectado de dos formas, la primera y lógica consiste en variar la presión del suministro de gas, empero este procedimiento puede ser una causa de irrepetitividad experimental difícil de controlar y filtrar. El método segundo y utilizado consiste en mantener la presión del gas e interrumpir la corriente de líquido mientras se efectúa el giro de la cámara de conmutación el número de veces que sea necesario para incrementar el volumen de inyección. Este método puede ser desempeñado debido a que la coalescencia hace que el volumen de gas dentro de la cámara se añada al volumen de gas inicial dentro de el puerto de salida, C, generando un volumen de gas proporcional al número de conmutaciones realizadas mientras la corriente de líquido sea interrumpida.

Los dispositivos auxiliares a la microválvula de conmutación son aquellos para mantener la presión, velocidad de flujo y pureza de los fluidos que circulan en el interior de la válvula.

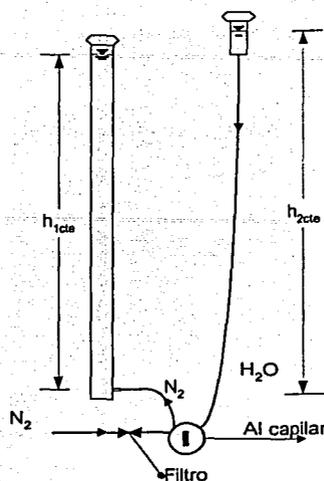


Figura 4.13. Esquema de sistemas de control de presión del dispositivo experimental

Dichos dispositivos auxiliares son dos contenedores con líquido en el interior en los cuales se mantiene a una altura constante el nivel del mismo, con el fin de mantener las características del flujo (figura 4.13). Estos contenedores están llenos de agua ultrapura ($R = 18 \text{ M}\Omega\text{-cm}$) con una altura absoluta de superficie libre superior a la del tanque de experimentación, la cual puede ser modificada para realizar diferentes experimentos. El filtro es una válvula de ensamble con un volumen muerto nulo y un elemento filtrante en el interior del cople que impide que impurezas residuales del tanque de nitrógeno obstruyan la cámara de la válvula de conmutación.

Inyección de burbujas al tanque

Una vez que el volumen de gas es puesto dentro de la corriente de líquido, éste es conducido hasta el tubo capilar, de acero inoxidable de cinco milésimas de diámetro interno, por un tubo de PTFE de diez milésimas de pulgada de diámetro interno.



Una vez que el volumen de gas es puesto en el capilar se inyecta al tanque de experimentación a una velocidad baja tal, que no perturbe la trayectoria de la burbuja.

Tanque de experimentación

El tanque, de sección transversal cuadrada, y la pared están contruidos con acrilico transparente de trece milímetros de espesor y las esquinas de las paredes del tanque están reforzadas con ángulo de aluminio. Las medidas internas del tanque son cincuenta centímetros por cada lado de la base y setenta centímetros de altura. Fue necesario diseñar una pared móvil tal que permitiese realizar mediciones con distancias diferentes entre la pared y la burbuja, así como nivelarla e inclinarla respecto a la horizontal. La pared móvil está contruida de tal forma que la distancia entre el borde inferior de la pared y la base del contenedor es de diez centímetros permitiendo que la burbuja haya desarrollado su velocidad terminal antes de que efectúe interacción alguna con la pared. La pared está sujeta por tres rótulas que permiten que tenga dos grados de libertad pudiendo colocarse vertical, con inclinación positiva o negativa respecto a la vertical y con inclinación respecto al horizonte.

Las rótulas, fijas a la pared mediante tuercas de nylon, y a birlos de acero inoxidable por el otro lado, permiten que la pared se acerque o aleje del capilar. Dichas rótulas, pese a tener un recubrimiento electrolítico de níquel, están sujetas a la corrosión al estar inmersas en el líquido del tanque. Para minimizar estos efectos fueron diseñados un juego de cubrepolvos que mantiene libres de contacto a las rótulas con el líquido acoplada con un retén al birlo enroscado en la rótula. En la base está situado un barreno en donde está colocado un tornillo de nylon con una perforación que lo traspasa por su eje longitudinal el cual es sellado con un polímero



autosellable, el cual permite la introducción del capilar, impidiendo fugas, y facilitando el ajuste de altura del capilar.

Equipo de visualización.

Para la visualización de los fenómenos se utilizaron diferentes técnicas de adquisición de datos debido a las limitaciones físicas inherentes a cada uno de los equipos disponibles.

En el experimento sobre velocidad terminal se utilizó una cámara ultrarrápida marca Kodak Motion Corder modelo 1000 e iluminación indirecta difusa con un lente Nikkor 105mm Macro 2.8D tal que permite un acercamiento suficiente que permite obtener la velocidad terminal y la forma de la burbuja. En el experimento sobre colisiones se utilizó la cámara ultrarrápida e iluminación difusa directa junto con un lente Nikkor 90mm Macro 2.8D que permite una observación de una mayor parte de la trayectoria de la burbuja así como las colisiones en los casos donde existen.

En los experimentos de visualización de flujo fue utilizada una técnica de iluminación dual que permite observar el cuerpo y el flujo alrededor del cuerpo en estudio (figura 4.14). El paso inicial fue disolver partículas trazadoras (microesferas de vidrio de diámetro medio de diez micrómetros recubiertas con plata). Estas partículas reflejan una gran cantidad de luz cuando son iluminadas por una fuente de luz además de ser de una densidad similar a la del agua por lo que es posible observar el flujo debido a que pequeñas corrientes las arrastran siguiendo al fluido de manera fidedigna. Como solo se desea observar el flujo en una porción selecta del flujo, se utilizó un haz láser monocromático rojo marca Metrologic modelo Neon laser. El haz recto se hizo pasar por una lente cilíndrica para generar una hoja delgada de luz.



Una vez iluminada esta lámina de fluido se colocó de tal forma que iluminara un corte colineal a la trayectoria de la burbuja para conocer el flujo alrededor de esta. Para esta visualización se utilizó una cámara digital Fuji S1Pro con una resolución mayor a seis megapíxeles con una lente Nikkor 105mm Macro 2.8D utilizando tiempos de exposición cercanos a dos segundos. Con la técnica antes mencionada no es posible observar el cuerpo, sino solo las trayectorias de las partículas trazadoras. Para lograr visualizar la forma y posición de la burbuja se incluyó una luz estroboscópica marca Pasco Scientific modelo SF9211 controlada por un generador de señales marca Hewlett Packard modelo 33120A, de tal forma que permitiese saber el cambio de posición de la burbuja en cada momento que su imagen se viese a causa de la luz producida por la lámpara estroboscópica reflejada en su superficie.

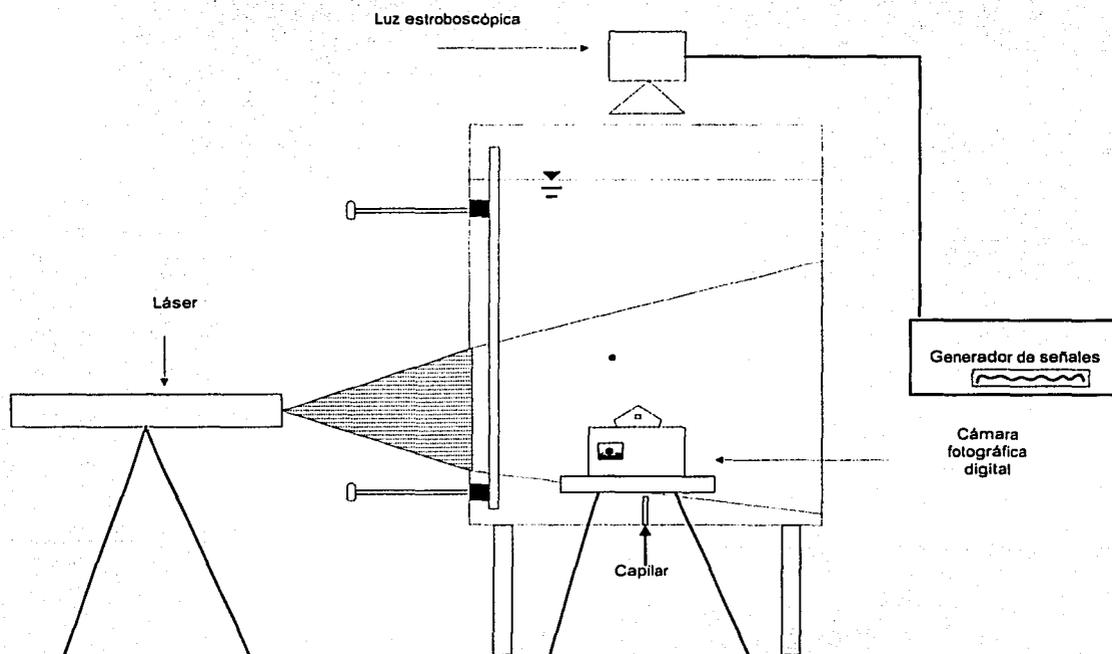


Figura 4.14. Dibujo esquemático para visualización de flujo.



Adquisición de datos

Para obtener el desplazamiento de las burbujas se digitalizaron y procesaron las imágenes de las grabaciones hechas con la cámara ultrarrápida. La cámara ultrarrápida es capaz de grabar imágenes con una velocidad de película y obturador de hasta mil cuadros por cada segundo y una milésima de segundo respectivamente. Una vez grabadas las imágenes en la unidad de proceso de la cámara se reproducen a treinta cuadros por cada segundo al grabarlas en una cinta de video. La salida de el aparato reproductor de video común, mientras se reproduce el contenido, está conectada a una tarjeta digitalizadora de video por medio la cual pueden ser capturadas imágenes en un computador (figura 4.15).

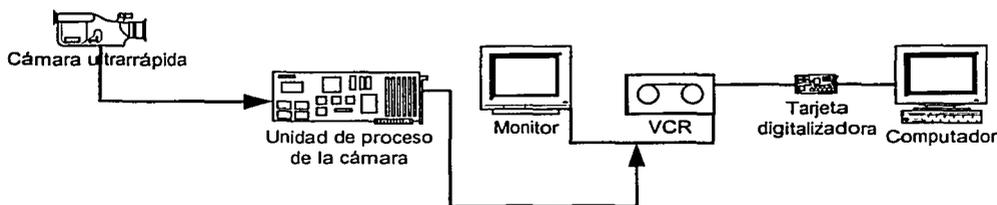


Figura 4.15. Proceso de adquisición de datos



Digitalización de imágenes

Una vez digitalizadas las imágenes es necesario procesarlas de tal forma que sea posible conocer la posición de la burbuja cuadro a cuadro de las imágenes experimentales. Para este propósito se utilizó Epix y Pixci SV4, un programa de cómputo capaz de procesar imágenes con diferencia tonal y contraste entre la partícula de estudio y el rededor. Xcap es un programa que soporta a la tabla de imágenes de Pixci, proviendo el formato de imagen, configuración y resolución en imágenes continuas o imágenes únicas. Los arreglos de imágenes de Pixci pueden ser cargados y analizados. Pixci es capaz de analizar imágenes con tamaño, profundidad y color independiente pixel a pixel.

Debido al tipo de iluminación escogida la burbuja aparece como una mancha oscura respecto al resto de la imagen. Las imágenes adquiridas son una secuencia por ello, es posible digitalizar cuadro por cuadro, conociendo así el comportamiento de la burbuja en cada instante grabado. Este programa localiza la ubicación respecto a un sistema de referencia propio invariante en cada cuadro, conociendo además las dimensiones de cada una de las sombras encontradas. Para lograr el reconocimiento de las burbujas es necesario efectuar modificaciones en la gama tonal de las imágenes adquiridas con el fin de obtener el contraste máximo posible entre la imagen de la partícula y el resto de la imagen.

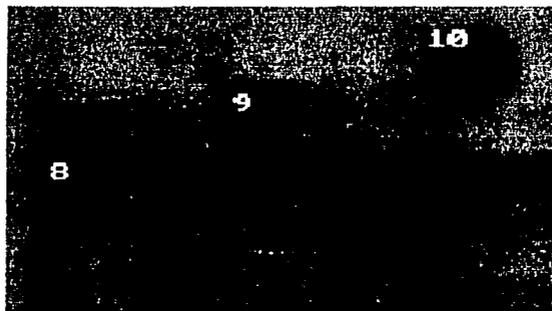


Figura 4.16. Secuencia de imágenes digitalizadas en Epix.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Filtrado del agua

Debido a la limpieza requerida en el líquido se instaló un sistema de filtrado recirculante con un sistema doble, que eliminase surfactantes, partículas suspendidas y disueltas en el agua. El sistema está compuesto por dos filtros marca Cuno, y una bomba de turbina marca Micropump, modelo 101. El arreglo de los filtros (figura 4.16) se dispuso con un primer filtro de carbón activado, modelo AP100, y un segundo filtro de gasa, modelo AP110, con un tamaño de poro de un micrómetro. El experimento fue llenado con agua potable filtrada originalmente, y se puso en marcha el sistema de filtrado doble por un tiempo de quince horas antes de realizar cualquier medición.

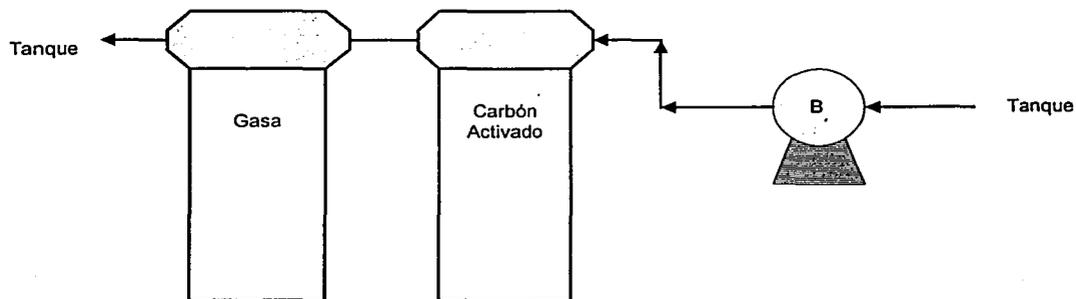


Figura 4.16. Esquema del dispositivo de filtrado.



*Nada visto es real,
todo son reflejos.*

V Resultados Experimentales

Los resultados están divididos en tres etapas acorde al cronograma experimental y al hecho de que cada serie de experimentos está basado en los resultados anteriores. Por la naturaleza y necesidad experimental se inició con la calibración experimental siguiendo con los experimentos de velocidad terminal, interacción con la pared y visualización de flujo.

Calibración del experimento

Debido a la construcción experimental es necesario saber el volumen de cada burbuja como función del número de conmutaciones de la microválvula de inyección. Para dicha calibración se produjeron burbujas de diferente volumen variando el número de muestreos efectuados; obteniendo como resultado de este primer experimento la velocidad final, tamaño, forma, velocidad terminal horizontal y velocidad terminal vertical. Para esta serie se mantiene fija la presión de salida del gas.

Esta primera etapa tiene como objetivo la simplificación de la serie de experimentos subsecuentes y validar la forma de producir burbujas e inyectarlas en el interior del tanque de experimentación.



La gráfica 5.11 muestra el diámetro equivalente en función del número de conmutaciones efectuadas en la microválvula. En esta gráfica, es observable la dependencia exponencial del volumen respecto al número de conmutaciones; denotada dicha relación con un exponente cercano a un tercio.

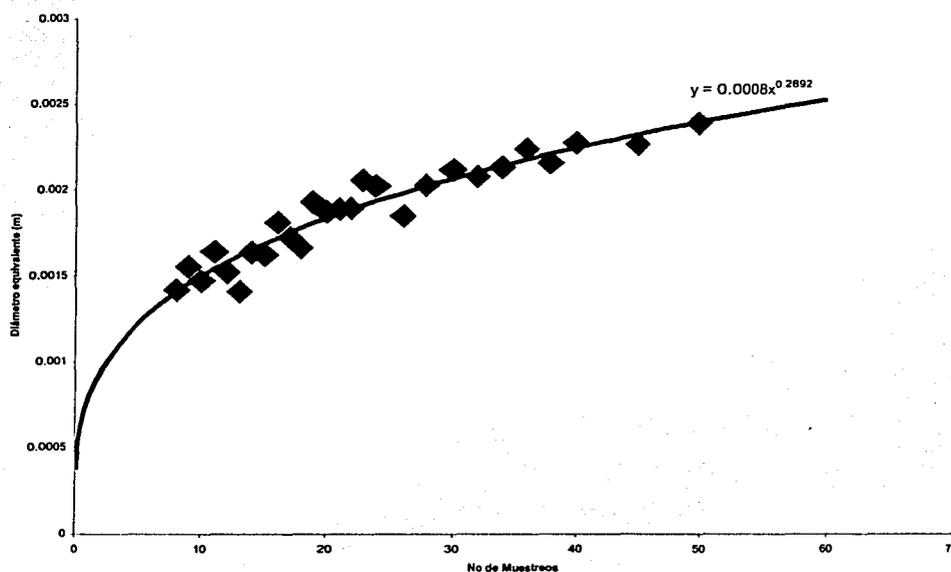


Figura 5.11. Relación entre el número de conmutaciones y el diámetro equivalente de la burbuja.

En la gráfica (figura 5.11) se observa que el volumen de la burbuja crece monótonicamente con el número de conmutaciones. Este resultado es de suma utilidad en experimentos posteriores para caracterizar el comportamiento de la formación de burbujas, pudiendo saber el volúmen de la burbuja con solo conocer el número de conmutaciones realizadas en la válvula. Para los experimentos posteriores solo se registró el número de conmutaciones tomando como referencia la curva de la figura 5.11 para inferir el tamaño de la burbuja obtenida.



Velocidad terminal de la burbuja.

Es claro que la velocidad terminal de la burbuja debe ser una función del volumen de la misma y las propiedades físicas del líquido y gas. La pureza del líquido también juega un papel crucial en la velocidad de la burbuja por lo cual no es posible conocer teóricamente la velocidad terminal real si no son conocidos todos los parámetros que intervienen para el cálculo de la misma como la pureza del líquido, temperatura, etc. Además, es necesario conocer la trayectoria de la burbuja sin que exista interacción con la pared para poder calificar la existencia de dicha relación cuando exista.

La velocidad terminal de la burbuja es posible calcularla teóricamente con una aproximación buena cuando es posible considerar esférica a la burbuja, ya que al momento de convertirse en un elipsoide, el comportamiento y forma son tan diversos que es difícil proporcionar una aproximación teórica real.

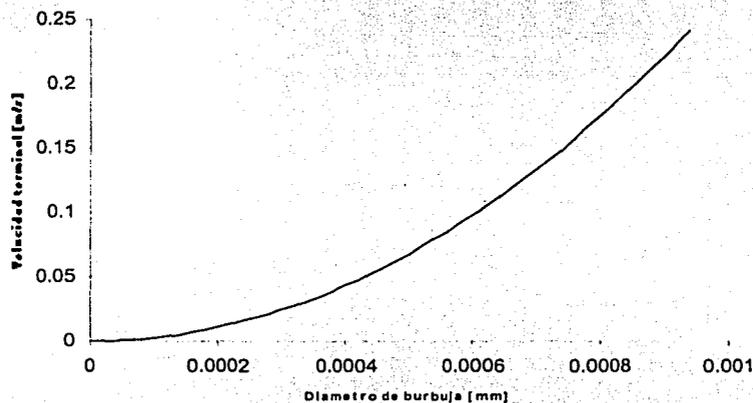


Figura 5.21a. Curva de relación entre el diámetro y la velocidad terminal teórica

La figura 5.21 muestra la dependencia entre el diámetro y la velocidad terminal de la burbuja.

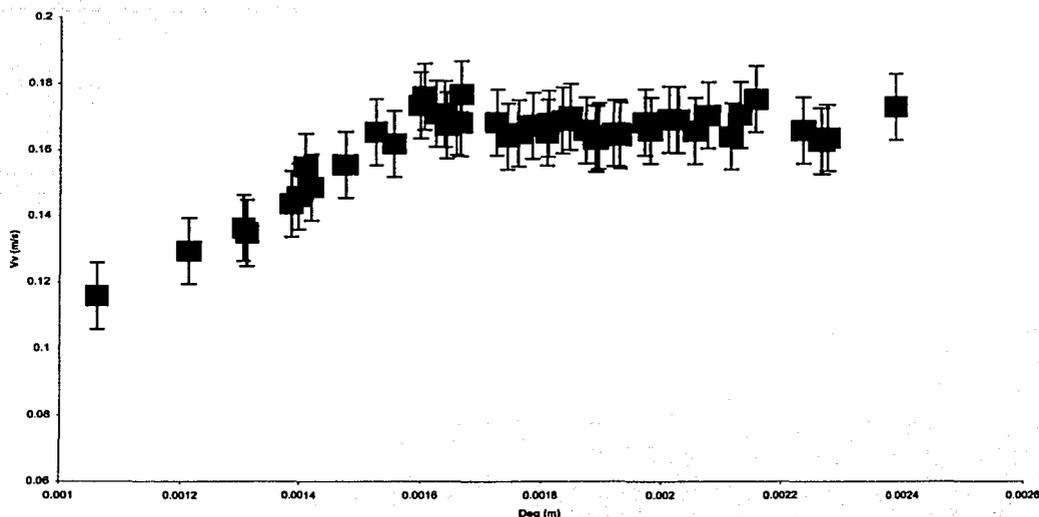


Figura 5.21b. Curva de relación entre el diámetro equivalente y la velocidad terminal real.

La gráfica de velocidad vertical terminal (figura 5.21b), muestra la relación existente entre velocidad terminal y el diámetro equivalente de la burbuja; en la parte inicial de la gráfica se observa una relación correspondiente a un incremento lineal de la velocidad como función del diámetro. A cierto volúmen, existe un cambio brusco y es notorio como al aumentar el volumen de la burbuja en lugar de aumentar la velocidad de la burbuja, existe una disminución en su velocidad terminal y un posterior aumento con una pendiente menor a la inicial.

Dicha disminución es causada por el desprendimiento de vórtices que indican la imposición de efectos inerciales a partir de los valores correspondientes a dicha inflexión y es entonces, cuando los efectos no lineales empiezan a cobrar la importancia que podía despreciarse antes de ese punto facilitando los cálculos con la utilización de la teoría de flujo ideal. Dichos efectos coinciden con el inicio de



inestabilidad en la trayectoria de la burbuja, a un número de Reynolds ($Re > 450$) según el comportamiento observado por Clift (1978).

Es importante identificar el comienzo de la inestabilidad de trayectoria. Así es posible el observar la interacción con otros elementos ya que permite saber cuando las oscilaciones son provocadas por el comportamiento no lineal y cuándo por las interacciones con la pared.

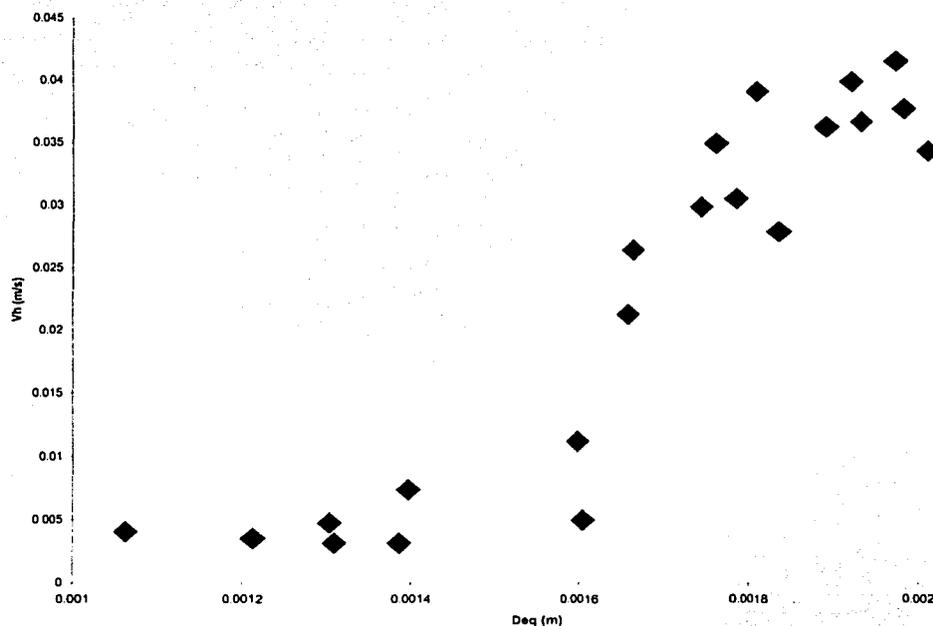


Figura 5.22. Gráfica de velocidad horizontal terminal en función del tamaño.

En la gráfica que muestra la velocidad horizontal (figura 5.22) es posible notar que se encuentra dividida en dos grupos de datos, además entre estos dos grupos de datos se muestra un claro punto de inflexión coincidente al máximo relativo encontrado en la gráfica de velocidad vertical. El tamaño de burbuja en el cual



ocurre la inflexión es un punto de interés. En ésta, la velocidad vertical aumenta en un orden de magnitud respecto a la existente en burbujas de diámetro menor, es un claro límite característico que permite saber dónde las oscilaciones comienzan por el simple ascenso libre de las burbujas y cuando sin la interacción de otro elemento deben ascender de manera rectilínea.

Interacción entre la burbuja y el muro

Con base en los resultados anteriores se hicieron experimentos en cuatro grupos variando la distancia entre la línea de trayectoria de la burbuja en libre ascenso y la pared, para diferentes diámetros de burbuja. Dos de los grupos de experimentos se planearon para burbujas menores al tamaño crítico en el cual aparece la inestabilidad de trayectoria. Los otros dos grupos de experimentos se planearon para burbujas con un volumen mayor a las de las localizadas en el punto de inflexión para observar, en el caso de la validación de la hipótesis, la modificación de la trayectoria por la interacción entre la burbuja y la pared.

Los experimentos realizados fueron llevados a cabo con burbujas de diez, quince, veinticinco y treintaicinco conmutaciones, que corresponden a 1.47 mm, 1.62mm, 2.03mm y 2.132mm respectivamente. Además se hicieron pruebas a medio, dos, cuatro y seis diámetros de burbuja de la pared para cada grupo de experimentos realizados. Los resultados obtenidos pueden ser ejemplificados por un caso particular (figura 5.31) en donde se muestra por medio de una gráfica adimensional la trayectoria que denota la existencia de una colisión con la pared y en otra gráfica la variación de velocidades vertical y horizontal antes y después de la colisión.

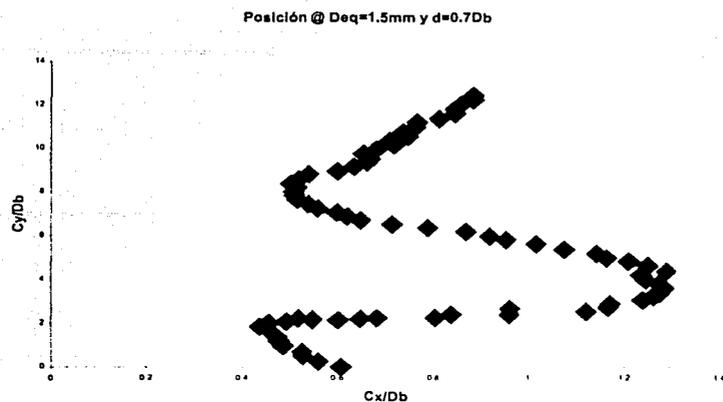


Figura 5.31. Gráfica de una colisión representativa entre una burbuja ($D_{eq}=1.47\text{mm}$) y la pared ($d=0.7D_{eq}$).

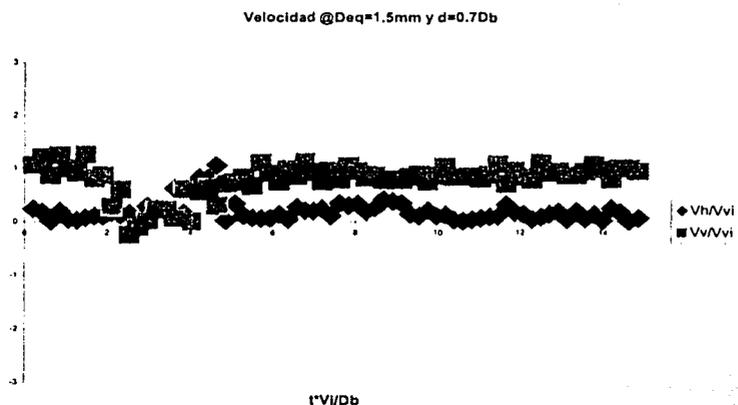


Figura 5.31. Gráfica de velocidades en una colisión representativa entre una burbuja ($D_{eq}=1.47\text{mm}$) y la pared ($d=0.7D_{eq}$).

En la gráfica de trayectoria de la burbuja (figura 5.31) es observable una colisión debido a que la posición del centro de la burbuja respecto a la pared es de medio diámetro, lo que es claro que estuvo muy cerca o chocó contra la pared. Otro parámetro observable que demuestra la colisión es la variación de la velocidad vertical y horizontal. Antes del choque la velocidad vertical disminuye a valores tan bajos que su relación respecto a la velocidad de la burbuja en libre ascenso llega a ser igual a cero, existiendo en dicho momento únicamente velocidad horizontal



como reflejo de la atracción entre la pared y la burbuja. Después de la colisión (figura 5.32) existe un aumento en la velocidad horizontal llegando a valores de hasta un orden de magnitud mayor a los habituales en su recorrido cuando no existe colisión alguna.

A continuación se muestran ocho gráficas adimensionales en las que se muestra, para cada grupo de experimentos la variación de su velocidad horizontal y vertical así como la trayectoria seguida tomando como referencia horizontal a la distancia entre la pared y el centro de la burbuja.

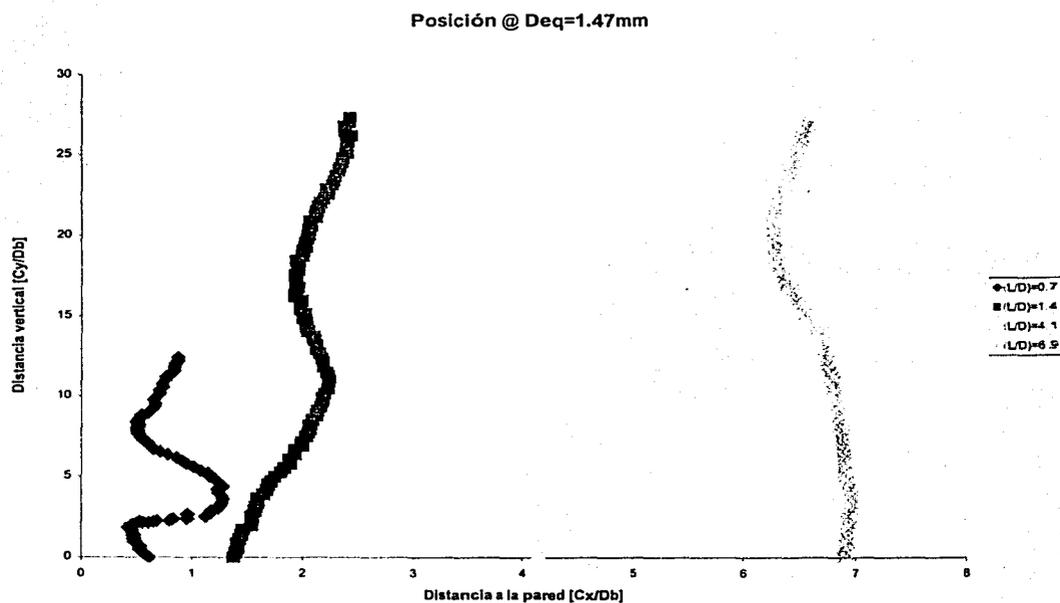


Figura 5.33. Gráfica de posición @ $Deq=1.47\text{mm}$.



En la gráfica de posición para el caso $D_{bcq}=1.47\text{mm}$ (figura 5.33), es creíble la existencia de una colisión entre la burbuja y la pared cuando ésta es colocada a una distancia cercana a la pared, como es mostrado en la gráfica de su trayectoria.

El problema real es determinar la existencia de una colisión entre la burbuja y la pared. Pudiendo partir de conocer si realmente chocó, o existió una película de líquido entre la burbuja y la pared en el momento de la supuesta colisión.

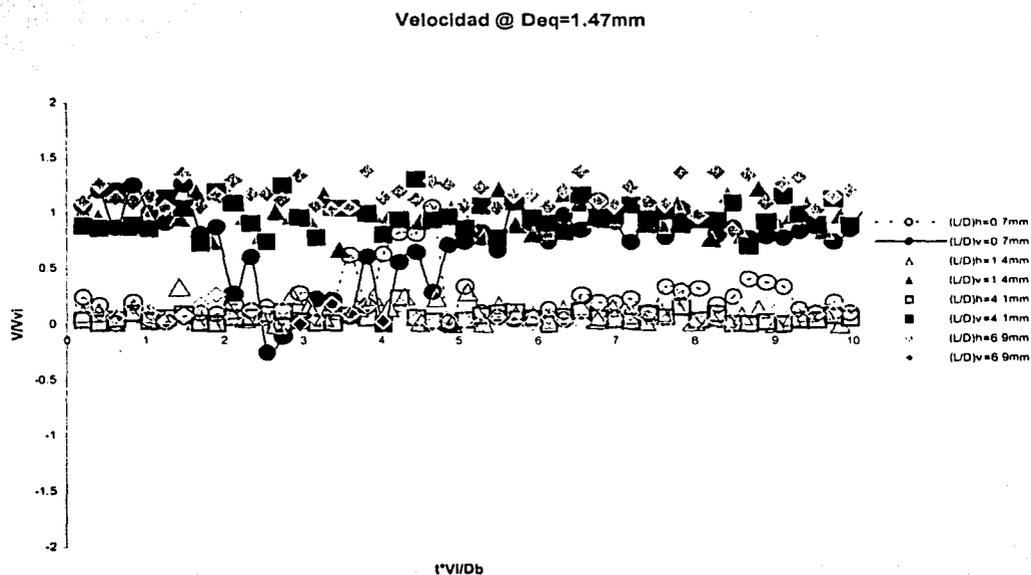


Figura 5.34. Gráfica de velocidad @ $Deq=1.47\text{mm}$.

La gráfica de velocidades muestra el comportamiento de la velocidad vertical (símbolos sólidos) y la de la velocidad horizontal (símbolos huecos). Enfatizando el caso de la burbuja $(L/D)=0.7\text{mm}$, la variación de la velocidad horizontal y vertical en el momento de la colisión. Es de resaltar que aunque el contacto entre la burbuja



y la pared pudiese no existir debido a una película de fluido, existe una interacción importante entre la burbuja y la pared manifestada por el cambio de trayectoria y afectación de la velocidad.

En las gráficas para $D_{beq}=1.6\text{mm}$ se notan dos colisiones en la burbuja más próxima a la pared (figura 5.35); denotados además por la variación en la velocidad vertical y horizontal representadas en la gráfica adimensional de velocidades (figura 5.36).

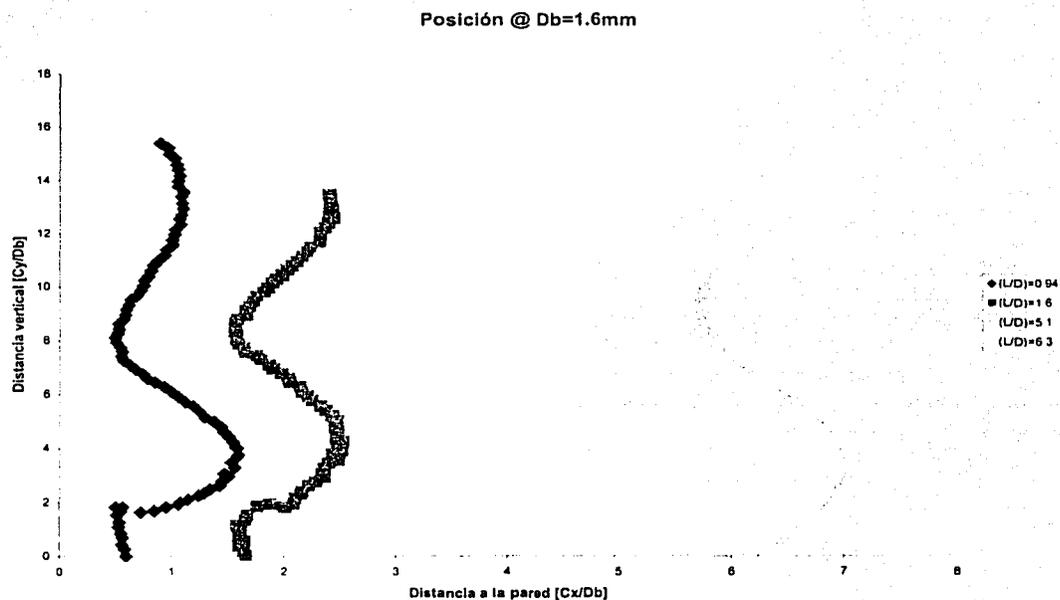


Figura 5.35. Gráfica de posición @ $D_{eq}=1.6\text{mm}$.

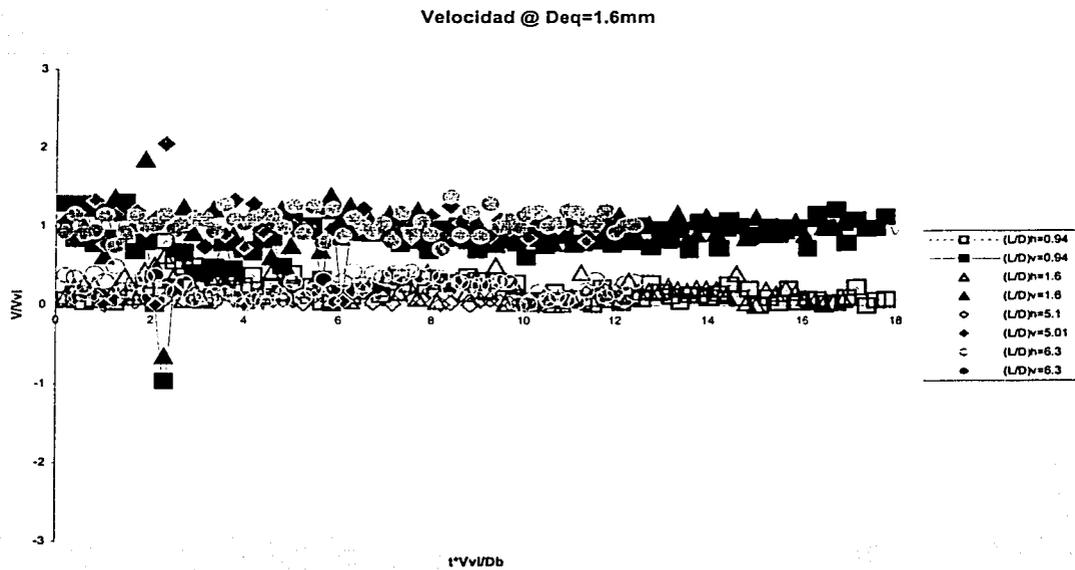


Figura 5.36. Grafica de velocidad @ Deq=1.6mm.

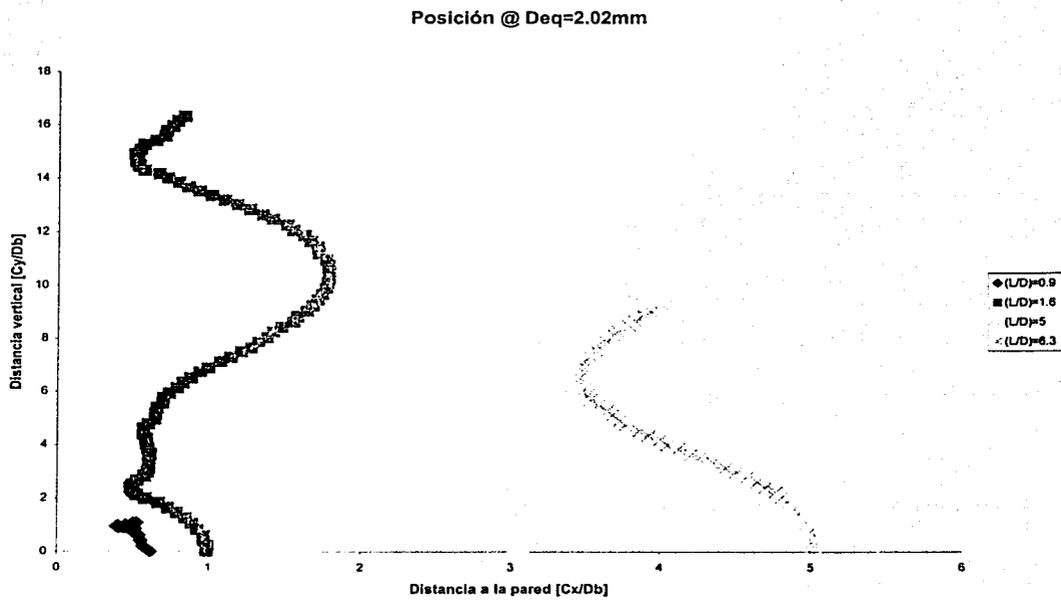


Figura 5.37. Grafica de posición @ Deq=2.02mm.



Velocidad @ Deq=2.02mm



Figura 5.38. Grafica de velocidad @ Deq=2.02mm.

En la gráfica de posición de la burbuja a $D_{beq} = 2.03\text{mm}$ existen colisiones en las burbujas liberadas en primer y segundo lugar respectivamente a la distancia entre la pared y la burbuja. La primera burbuja realiza una colisión con la base de la pared (figura 5.37) quedando adherida a la misma después de la colisión por lo que la trayectoria se ve interrumpida justo en la esquina del muro.

La segunda burbuja efectúa dos colisiones notorias en la trayectoria (figura 5.37) y en la gráfica de velocidades (figura 5.38), notando además un acercamiento posterior a la primera colisión que no se consumó en un choque claramente observable en la extraña trayectoria seguida tras realizar la primera colisión. La



existencia de una variación en la velocidad horizontal muestra un patrón en las dos colisiones y en el acercamiento mencionado.

En las gráficas referentes a $D_{beq} = 2.13\text{mm}$, se muestran las trayectorias de las burbujas exceptuando la primera que chocó en el marco de la pared en todas las ocasiones experimentadas. La segunda burbuja, respecto a la lejanía con la pared, muestra dos colisiones contra la pared, una en la esquina inferior y la segunda cerca de tres diámetros arriba del comienzo de la misma. Dicha colisión es mostrada en la variación de la velocidad en las colisiones efectuadas.

Las trayectorias de las burbujas más alejadas muestran un patrón de comportamiento debido al cual las trayectorias lucen similares una con otra, pareciendo a una gráfica similar defasada unos cuantos diámetros una de la otra.

En las gráficas de velocidad adimensional, independiente a las colisiones mostradas, es notoria la oscilación e inestabilidad de trayectoria debido al desprendimiento vorticoso y la notoriedad de los efectos inerciales del fluido.



Posición @ Deq=2.132mm

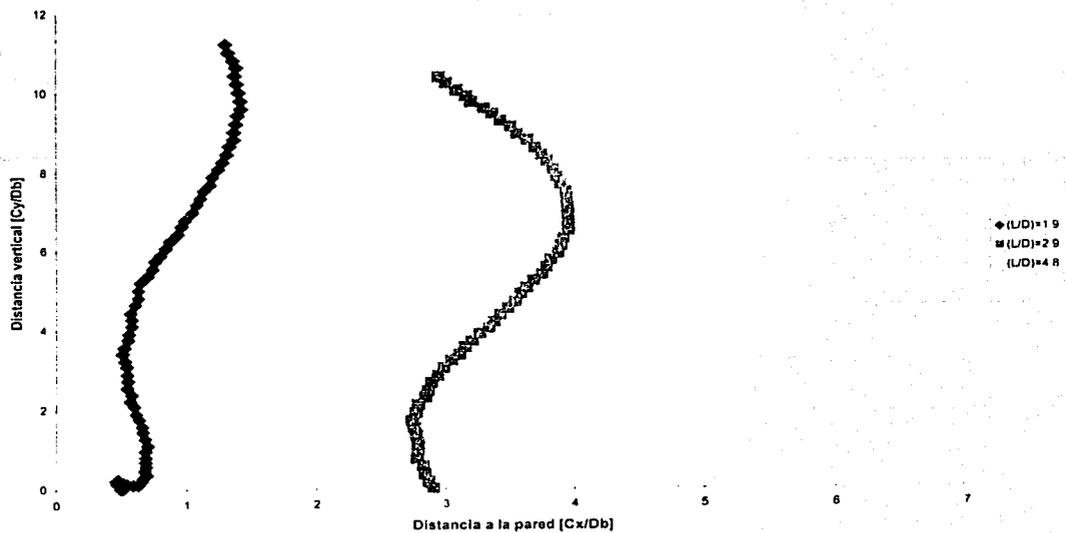


Figura 5.39. Grafica de velocidad @ Deq=2.132mm.

Velocidad @ Deq=2.13mm

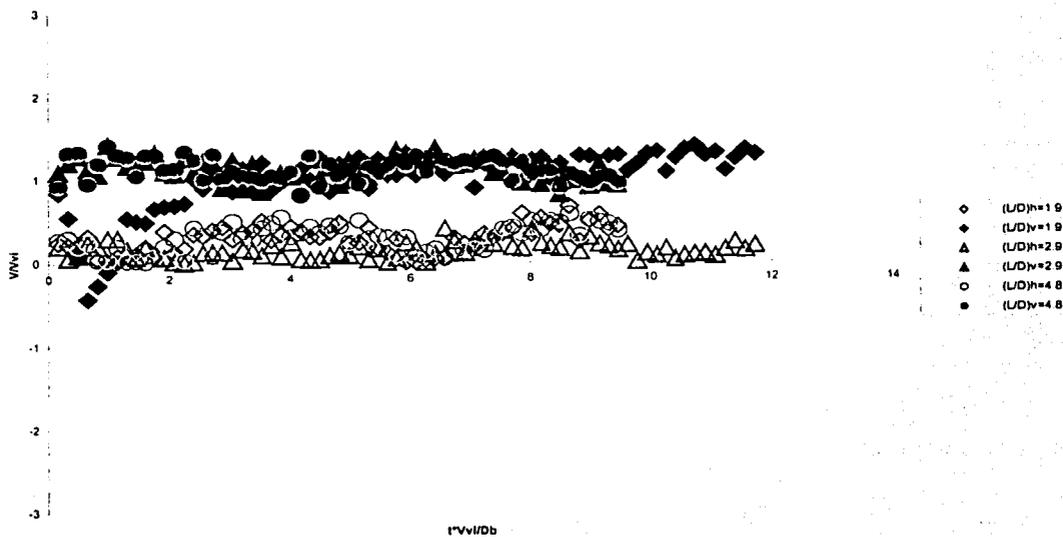


Figura 5.310. Grafica de velocidad @ Deq=2.13mm.



Una gráfica que resume el comportamiento de la burbuja al interactuar de manera próxima a una pared es la familia de curvas de la figura 5.311, en esta gráfica, se muestra la variación de la velocidad terminal de la burbuja para diferentes distancias a la pared.

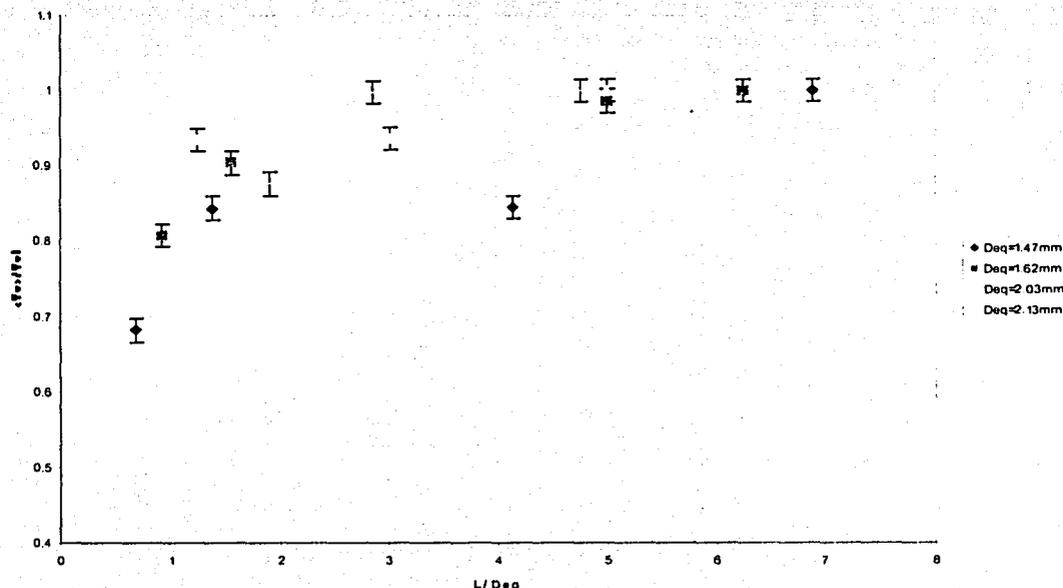


Figura 5.311. Velocidad terminal vs. distancia a la pared.

Es posible notar en estas gráficas, la disminución de la velocidad terminal, mientras está más cerca de la pared, la velocidad terminal es más baja, mostrando que la influencia es proporcional a la cercanía entre la burbuja y la pared.



A manera demostrativa y ejemplificativa de una colisión, se muestra en la siguiente figura una colisión doble de la burbuja con la pared. Esta imagen fue obtenida con la cámara ultrarrápida. La imagen 5.312, es sumamente clara, observándose la disminución de la velocidad vertical en el momento de la colisión denotado por el traslape en las imágenes las cuales fueron tomadas con el mismo espaciamiento temporal.



Figura 5.312. Superposición de imágenes en una colisión doble.



Visualización de flujo

El experimento de visualización, lejos de ser cuantitativo, tiene como objetivo entender el movimiento de la burbuja y la perturbación causada al fluido por el paso de la misma. Las visualizaciones realizadas muestran el flujo alrededor de una burbuja, la trayectoria y la burbuja.

Estas visualizaciones muestran en cada caso, si existe una simple perturbación en el flujo causado por el paso de la burbuja, o turbulencia debida a la misma. Las visualizaciones mostradas no son la totalidad de las realizadas, sin embargo, son las más representativas de los fenómenos observados.

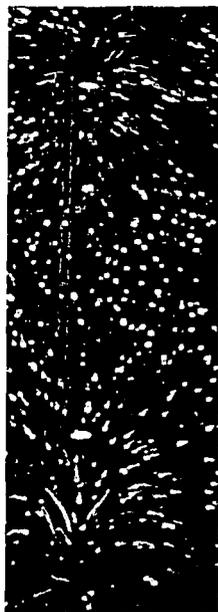


Fig. 5.41 $D_b=1.17$ mm s/pared.



Fig. 5.42. $D_b=1.47$ mm s/pared.



Fig 5.43. $D_b=1.62$ mm s/pared.



El flujo observado en la primer gráfica (figura 5.41) muestra la trayectoria rectilínea de la burbuja, denotada por la línea roja, como reflejo de la luz láser en la burbuja, mostrando una única perturbación del flujo, sin existir turbulencia ni deformidad en la forma esférica de la burbuja. Es casi evidente, debido a la trayectoria rectilínea podemos inferir que se trata de una burbuja pequeña.

Para la burbuja de $D_b=1.47$ mm (figura 5.42), se observa una trayectoria casi en línea recta y sin existir turbulencia detrás de ella, empero la perturbación causada en el flujo por el paso de una burbuja de $D_b=1.62$ mm es sumamente notoria (figura 5.43). Esta burbuja tiene una forma esférica pero una pequeña inestabilidad en la trayectoria e indicios de turbulencia en el flujo alrededor de esta, notorio por la baja agitación causada; mostrada en la parte superior derecha de la imagen.



Fig. 5.44. $D_b=2.08$ mm. s/pared.



Fig 5.45. $D_b=2.03$ mm s/pared.

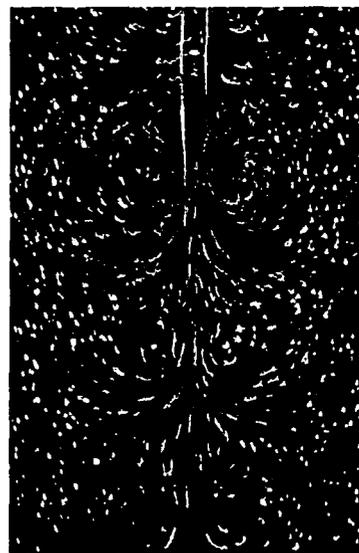


Fig. 5.46. $D_b=2.03$ mm s/pared



La visualización del flujo alrededor de burbujas cercanas al punto de inflexión está caracterizado por la existencia de patrones de vorticidad, claramente observados en las imágenes. La trayectoria oscilante (figura 5.44) es característica del tamaño de la burbuja mayor, al de burbujas ubicadas en el punto crítico. Estas burbujas son ligeramente elipsoidales, con inestabilidad de trayectoria y gran agitación del fluido.

Una imagen interesante es la mostrada en la figura 5.45, la cual denota un vórtice doble formado por la estela viscosa persecutora de la burbuja. Aunque la forma sea casi esférica, la trayectoria es parecida a una recta lo que indica un claro ejemplo de una burbuja de transición. Un aspecto importante de la transición a la turbulencia es la existencia de vórtices discretos (figura 5.46). En este caso los vórtices siguen a una burbuja ligeramente deformada elipsoidal.

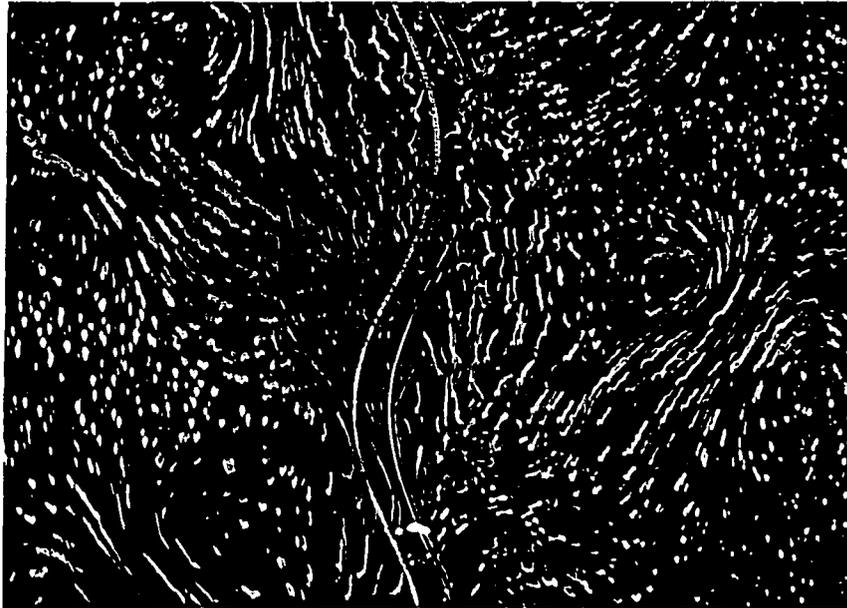


Fig. 5.47. $D_b=2.13$ mm s/pared



En burbujas de mayor tamaño al crítico, es sabido que la forma será elipsoidal sin embargo, la variedad de trayectorias que pueden seguir, denota desde las oscilantes en un plano (figura 5.47), hasta las que lo hacen en trayectoria helicoidal. La visualización anterior muestra la avenida de vórtices de Von Karmann, que se pueden observar como vórtices simétricos e iguales que mantienen un patrón, en este caso cada uno es paralelo al predecesor, manteniendo el tamaño o intensidad.

En la visualización de una colisión de la burbuja con una pared (figura 5.48), puede observarse la agitación producida por el mismo choque con la pared. En dicha imagen no se observan vórtices, solo se observa la agitación causada por la colisión y por el paso de la burbuja antes y después de la misma.



Fig. 5.48. $D_b=1.62$ mm y $(L/D)=1.564$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



VI Conclusiones

Se encontró que la velocidad terminal depende del volumen de la burbuja, así como, cantidad y tipo de contaminantes presentes en el líquido. Era conocido en la bibliografía consultada un comportamiento similar al encontrado respecto a la velocidad terminal en libre ascenso de la burbuja. Los experimentos mostraron un patrón similar respecto a lo reportado en estudios anteriores, pero, la velocidad terminal fue más baja. Podría deberse a la contaminación que fue imposible retirar con el sistema de filtrado implementado y la consecuente disminuida recirculación en las burbujas menor que la necesaria para tener burbujas de alta velocidad.

Me es suficientemente claro, que fue adecuado el método utilizado para medir el tamaño de la burbuja por lo que al único factor que queda culpar es al filtrado y pureza del líquido potable tomado del suministro. En trabajos futuros sería apropiado el caracterizar el líquido utilizado, usar agua ultra pura y seguir usando el método de validación al tamaño basado en el tamaño del capilar y anatomía comparativa.

Las hipótesis formuladas al inicio del trabajo fueron verificadas. La interacción entre la burbuja y el muro existe, por difícil que sea caracterizarla. Fue posible obtener satisfactoriamente el comportamiento cinemático de la burbuja pese a las complicaciones. Estas llevaron a efectuar un perfeccionamiento experimental que fungió desde modificar la fisonomía de la pared y orientarla por medio de un láser, hasta inyectar la burbuja a velocidades anodantes para prevenir inestabilidades anteriores a la interacción con el muro y modificaciones en la iluminación.



En los experimentos fue muy clara la interacción existente entre los elementos protagónicos del trabajo, la burbuja y el muro. Ahora, debido a las dificultades técnicas que significa el saber la existencia de la colisión, se debe, como trabajo futuro, colocar un transductor de presión para conocer, además de las características cinemáticas, las características dinámicas de la colisión y saber así, la cantidad de energía cedida por la burbuja y conocer si chocó contra el muro o solamente contra la película de fluido, no desplazada, entre el muro y la burbuja. Considero que después de analizar los datos de desplazamiento, la colisión si existió, ya que la deformación causada en la burbuja podría indicar la certeza de esta afirmación, empero la teoría existente no es capaz de respaldar fielmente a ninguna de las dos posibilidades.

La visualización entrega como ventajas iniciales el saber los resultados casi al instante y permitió dar una explicación clara a ese punto de inflexión causado en la gráfica de velocidad terminal, confirmar sospechas sobre la transición al flujo inestable y el conocer que además de la burbuja, en una colisión, también la masa añadida experimenta tantos problemas que se añaden a los de la misma burbuja cuestionada. Se identificó que debido al choque de la burbuja la masa añadida, asociada con un cierto volumen de fluido alrededor de la burbuja, experimenta una perturbación.

El sistema de visualización es novedoso y útil al entendimiento de la fenomenología asociada al movimiento de la burbuja.



*La historia es el reflejo del
tiempo como invento.*

Bibliografía

- Aybers N. M. & Tapucu A. 1969 a. The motion of a gas bubbles rising trough stagnant liquid. *Wärme und Stoffübertragung* 2. 118-128.
- Aybers N. M. & Tapucu A. 1969 b. Studies on the drag and shape of gas bubbles rising through a stagnant liquid. *Wärme und Stoffübertragung* 2. 171-177.
- Batchelor G. G. 1967. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press.
- Benjamin T. B. 1987. Hamiltonian theory for motions of bubbles in an infinite liquid. *J. Fluid Mech.* 181. 349-379.
- Bisheuvel A. & Van Wijngaarden L. 1982. The motion of pairs of gas bubbles in a perfect liquid. *J. Engang Maths.* 4. 349-279.
- Bisheuvel A. & Spoelstra S. 1989. The added mass coefficient of adispersion of spherical gas bubbles in liquid. *J. Multiphase Flow* 15. 911-924.
- Brun Marina José. 1990. Introducción a la Teoría de las funciones Armónico Esféricas. Instituto Geográfico Nacional. Madrid.
- Clift R. & Weber. 1978. Bubbles, drops and particles. Academic Press Inc.
- Currie. 1974. Fundamental Mechanics of Fluids. McGrawHill.
- De Vries A. G. 2001. Path and Wake of a Rising Bubble. PhD. Thesis. University of Twente.
- Duiniveld P.C. 1994. Bouncing and coalescence of two bubbles in water. PhD. Thesis. University of Twente.
- Duiniveld P.C. 1995. The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds number. *J. Mech. Fluids.* 292. 325-332.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



- Haberman & Morton. 1954. An experimental study of bubbles moving in liquids. Trans ASCE 2799. 227-252.
- Hartunian & Sears W. R. 1957. On the instability of small gas bubbles moving in liquids. J. Fluid Mech. 3. 27-47.
- Joseph, Zenit, Hunt & Rosnwinkel. 2001. Particle wall collisions in a viscous fluid. J. Fluid Mech. 433. 329-346.
- Kok J. B. W. 1989. Dynamics of gas bubbles moving through liquid. PhD. Thesis. University of Twente.
- Kok J. B. W. 1993 I. Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. European J. Mech. Fluids. 12. 515-540.
- Kok J. B. W. 1993 II. Dynamics of a pair of gas bubbles moving through liquid. European J. mech. Fluids. 12. 541-560.
- Lamb H. 1932. Hydrodynamics. Dover. 6th ed.
- Levich, V. 1962. Physico-Chemicals Hidrodynamics. Prentince Hall.
- Miksis M., Vanden-Broeck, J. M. & Keller J. B. 1981. Axisymmetric bubble or drop in a uniform flow. J. Fluid Mech. 108. 89-100.
- Milne-Thompson L. M. 1968. Theoretical Hidrodynamics. Dover.
- Moore D.W. 1963. The boundary layer on a spherical gas bubbles. J. Fluid Mech. 16. 161-176.
- Moore D.W. 1965. The velocity rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. J. Fluid Mech. 23. 749-766.
- Oguz & Properetti. 1993. Dynamics of bubble growth and detachment from a needle. J. Fluid Mech. 257. 11-145.
- Rybezynski W., Bull. 1911. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A. 40-66
- Ryskin & Leal. 1984 a. Numerical Solution of free-boudary problems in fluid mechanics. The finite-difference technique. J. Fluid Mech. 148. 1-17.



Ryskin & Leal. 1984 b. Numerical Solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Bouyancy-driven motion gas bubble through a quiescent liquid. *J. Fluid Mech.* 148. 19-35.

Saffman P. G. 1956. On the rise of small air bubbles in water. *J. Fluid Mech.* 1. 249-275.

Stewart C. W. 1995. Bubble interaction in low viscosity liquids. *Int. J. Multiphase Flow.* 21. 1037-1046.

Stokes G.G. 1851. *Trans. Cambridge Philos. Soc. Math Phys. Pap.* 3.1. 9 8-27.

Tsao & Koch D. L. 1997. Observations of high Reynolds number bubbles interacting with a rigid wall. *Phys. Fluids* 9. 44-55.

Tsuge H. & Hibino S. 1977. The onset conditions of oscillatory motion of single gas bubbles rising in various liquids. *J. Chem. Eng. Japan* 10. 66-68.

Van Wijngaarden L. 1991. Bubble deformation in bubbly liquids and its effect on the stability of voidage waves. In *mathematical approaches in hidrodynamics.* Siamm. 38-49.

Zenit, Hunt and Brennen. 1997. Collisional particle pressure measurements in solid liquid flows. *J. Fluid Mech.* 353. 261-283.

Zenit & Hunt. 1999. Mechanics of immersed particle collisions. *ASME J. Fluid Eng.* 121. 179-184.