37

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPACIOS DE TEICHMÜLLER DE GRUPOS FUCHSIANOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
MATEMÁTICA

P R E S E N T A
ELSA PUENTE VAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS:
M. EN C. MANUEL CRUZ LÓPEZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Espacios de Teichmüller de grupos fuchsianos

realizado por Elsa Puente Vázquez

con número de cuenta 9150717-2 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Manuel Cruz López	
Propietario	Dr. Santiago ALberto Verjovsky Sola	
Propietario	Dr. Javier Páez Cárdenas	
Suplente	Dr. GUillermo Sienra Loera	
Suplente	Dr. José Antonio Seade Kuri	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A mi Sol y mi Papalote, por esta sangre fuerte y libre.

A Susana, por ser mi eterno ángel guardián.

II

Agradecimientos

Le agradezco profundamente a Javier su paciencia y amistad infinita; el asilo político y ese curso de variable compleja donde empezó esta historia.

Todas las gracias del mundo a Alberto por las pláticas palaperas y toda la inspiración que me ha dado para enfrentar y finalizar este trabajo.

Muchas gracias a Manuel por aquella conversación sobre Teichmüller y por enseñarme a siempre ir mas allá de lo que percibe la mirada.

Le agradezco muchísimo a Guillermo Sienra la ayuda y ánimos que me ha brindado para enfrentar a las malvadas transformaciones casiconformes.

Muchísimas gracias a Pepe Seade por recibirme (y aguantarme) en Cuernavaca y aceptar ser sinodal de este trabajo.

Muchas, muchas, muchas gracias a toda mi parentela porque son los mejores de este mundo.

Mil besos desde los cuernos de la luna para Claus, Verito, Jorge, Mauricio, Enrique, Gabo, Marquito, Montserrat, Pablo, Pepe Yúdico, Mito, Juan Pablo y Omar (por hacer mi vida imposible), Margareta, Oscar, todos y cada uno de mis niños, Rocío, Alitacanela, Nora y Jorge Luis por acompañarme a lo largo del camino.

Un abrazo muy fuerte para Margarita Espinoza, las niñas del CDM, Faustino (el Vecination), Pedro Miramontes, Paz, Oscar Palmas, León Kushner, Fidel Casarrubias, Carlos Torres, Toño Gómez, Luis Briseño, Julieta Verdugo, Pilar Martínez, Paco Struck, Héctor Méndez, Ivonne Gamboa y Rafael Rojas (el mas guapo de todos) por hacer el mejor Departamento de Matemáticas de este mundo.

Gracias a la UNAM por refugiar a nuestras ideas y sobrevivir a todas nuestras diferencias.

Elsa.

Introducción

El problema de clasificar objetos que poseen una misma característica topológica, pero que se comportan de manera distinta desde el punto de vista analítico, geométrico o algebráico, es algo muy común en la Matemática. Por ejemplo, dada una superficie real X conexa y orientable, es interesante e importante conocer cuantas estructuras complejas no equivalentes acepta dicha superficie. Este problema, conocido como *problema de moduli*, tiene su origen en los trabajos de G. F. B. Riemann (1826-1866).

Un primer paso para resolver el problema de moduli se encuentra en la teoría de espacios de Teichmüller.

Oswald Teichmüller nació el 14 de junio de 1913 en Nordhausen, Alemania. En 1943 los nombres de todos los miembros de su pelotón en el Ejército Nazi ingresaron a la lista de extraviados en el frente oriental en la Unión Soviética.

La obra conocida de Teichmüller comprende 34 artículos cuyas versiones originales se encuentran en *Oswald Teichmüller: Collected papers* ([Tei82]) y una biografía corta, escrita por W. Abikoff, aparece en [Abi86].

La teoría de espacios de Teichmüller posee una enorme importancia ya que tiene aplicaciones en diversas áreas de la Matemática, como por ejemplo, variedades complejas e hiperbólicas; grupos fuchsianos, kleineanos y de Lie; formas automorfas; análisis complejo; geometría algebráica y diferencial; dinámica compleja; teoría ergódica; ecuaciones diferenciales y topología en dos y tres dimensiones.

Este trabajo pretende ser una introducción a la teoría de espacios de Teichmüller y describe la construcción de dichos espacios en el caso tanto de superficies de Riemann como de grupos fuchsianos que no contienen elementos elípticos, utilizando transformaciones casiconformes. Dicha construcción se generaliza para el caso de grupos fuchsianos que contienen elementos elípticos (ver [IT92] y [Gar87]).

Para entender la antes mencionada construcción, es importante estudiar con cierto detalle algunos aspectos de la teoría general de superficies de Riemann, grupos fuchsianos y transformaciones casiconformes. Por esta razón este trabajo se divide en tres capítulos: en el primero se encuentran las definiciones y resultados básicos de superficies de Riemann y grupo de transformaciones cubrientes, así como el enunciado del Teorema de Uniformización y algunas de sus consecuencias. Una breve recopilación de resultados sobre grupos fuchsianos constituye al segundo capítulo. Algunos de estos resultados son utilizados constantemente en las construcciones incluidas en el tercer capítulo, en el cual se describe a las transformaciones casiconformes y a los espacios de Teichmüller antes mencionados.

Las demostraciones que son bien conocidas se omiten y en cada caso se señala las referencias bibliográficas para que el lector interesado acuda a ellas.

La lista de referencias bibliográficas no intenta ser exhaustiva y sólo incluye suficientes pistas para iniciar el recorrido de este hermoso laberinto que Teichmüller construyó para todos.

Elsa Puente Vázquez

Abril de 2002, Cuernavaca, Morelos.

Lista de símbolos

$\leq$	Subgrupo de
$\cong$	Isomorfo a
$\lvert\cdot\rvert$	Norma de un número complejo
$\lVert\cdot\rVert$	Norma euclideana
$\mathtt{Aut}$	Grupo de automorfismos
$\mathbb{C}$	Números complejos
$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$	Cilindro
$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$	Esfera de Riemann
$\mathtt{Cub}$	Grupo de transformaciones cubrientes
$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$	Disco unitario
$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$	Semiplano superior
$\mathtt{id}$	Transformación identidad
Im	Parte imaginaria de un número complej
$\mathbb{L} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$	Semiplano inferior
$\mathbb{N}$	Números naturales
$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc=1\}$	Grupo de Möbius
$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1\}$	Grupo proyectivo real especial
$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{Z}, ad-bc=1\}$	Grupo modular
ρ	Métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$
$\rho_{\mathbb{H}}$	Métrica hiperbólica en $\mathbb{H}$
$\mathbb{R}$	Números reales
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclideano de n dimensiones
Re	Parte real de un número complejo
$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	Números reales extendidos
$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \lVert x\rVert = 1\}$	Esfera unitaria real de n dimensiones
$\mathbb{Z}$	Números enteros

Índice general

Capítulo 1

Superficies de Riemann

Dios mueve al jugador, y éste a la pieza.

¿Qué Dios detrás de Dios la trama empieza?.

-Jorge Luis Borges-

La noción de superficie de Riemann surge de manera natural en la solución al problema de continuación analítica. Sin embargo, ésta no es su única virtud ya que la teoría de superficies de Riemann es un punto de encuentro para diversas áreas de la Matemática, entre ellas, variedades complejas; grupos de Lie; análisis; geometría y topología algebráicas. Cabe resaltar que el estudio profundo de superficies de Riemann compactas de género uno, llamadas curvas elípticas, es absolutamente central en la teoría de números. Este hecho tiene como paradigma a la demostración del Último Teorema de Fermat escrita por Andrew Wiles.

En este capítulo proporcionamos un tratamiento general de superficies de Riemann. En § 1.1 enunciamos la definición mas común de estos objetos, dada por H. Weyl cerca de 1955, y proporcionamos algunos ejemplos. Continuamos en § 1.2 con la definición y los resultados sobre el grupo de transformaciones cubrientes de un recubrimiento universal que utilizaremos posteriormente. En

§ 1.3 enunciamos algunos resultados de topología algebráica que facilitarán la comprensión de la fuerza que posee el Teorema de Uniformización, el cual simplifica de manera extraordinaria el estudio de superficies de Riemann.

1.1. Definiciones y ejemplos

Una superficie real topológica X es un espacio topológico Hausdorff, con una base numerable de conjuntos abiertos y tal que cada punto $x \in X$ tiene una vecindad homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^2$.

Sea X una superficie real conexa con una familia $\{(\phi_j, U_j) : j \in J\}$, donde J es un conjunto de índices, que satisface las siguientes condiciones:

(i) Cada U_j es un subconjunto abierto de X y $X = \bigcup_{j \in J} U_j$.

(ii) Cada ϕ_j es un homeomorfismo de U_j sobre un subconjunto abierto $V_j \subset \mathbb{C}$.

(iii) Si $U_j \cap U_k \neq \emptyset$, entonces la función de transición $\phi_{kj} = \phi_k \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_j \cap U_k) \to \phi_k(U_j \cap U_k)$ es un homeomorfismo holomorfo, es decir una función conforme, entre los conjuntos abiertos $\phi_j(U_j \cap U_k)$ y $\phi_k(U_j \cap U_k)$ en $\mathbb{C}$.

Observamos que cada función de transición satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y, por lo tanto, preserva orientación.

Cada pareja (ϕ_j, U_j) se llama *carta coordenada*. La condición (iii) se conoce como *compatibilidad analítica* y al sistema $\mathcal{A} = \{(\phi_j, U_j) : j \in J\}$ se le denomina un *atlas complejo* en X. Decimos que dos atlas complejos $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ en X son *analíticamente equivalentes*, si toda carta de $\mathcal{A}_1$ es compatible con toda carta de $\mathcal{A}_2$. Se puede probar que la equivalencia analítica es una relación de equivalencia y cada clase de equivalencia se denomina una *estructura compleja* sobre X.

Definición: Una superficie de Riemann es una pareja (X, E) donde

X es una superficie real conexa y E es una estructura compleja sobre X.

Por el teorema de clasificación de superfices (ver capítulo 1 de [Mas91]) se tiene que toda superfice compacta, conexa y sin frontera es homeomorfa a una esfera con g asas. Este número g se llama el *género* de la superfice y es el único invariante topológico. Esto implica que toda superficie de Riemann compacta tiene un género asociado y a este tipo de superficie de Riemann le llamamos superficie *cerrada de género g*. Una superficie de Riemann que no es compacta se llama superficie *abierta*.

Ejemplos:

(a) El plano complejo $\mathbb{C}$:

Definimos una estructura compleja sobre $\mathbb{C}$ por medio del atlas que consiste de una sola carta coordenada dada por la función identidad $\mathtt{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y el abierto $\mathbb{C}$.

(b) Sea X una superficie de Riemann y $Y \subset X$ un dominio, es decir un subconjunto abierto y conexo de X. Entonces, Y tiene una estructura compleja natural que la convierte en superficie de Riemann. Dicha estructura se obtiene al considerar la restricción del atlas de X a Y, esto es el atlas formado por las cartas $\phi : U \to V$ en X tales que $U \cap Y \neq \emptyset$.

En particular, todo dominio $D \subset \mathbb{C}$ es una superficie de Riemann.

(c) La esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$:

Como conjunto $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Dotamos a $\overline{\mathbb{C}}$ con la topología generada por los conjuntos abiertos usuales de $\mathbb{C}$ y por los conjuntos abiertos de la forma $V \cup \{\infty\}$, donde $V \subset \mathbb{C}$ es el complemento de algún subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Con esta topología, $\overline{\mathbb{C}}$ es un espacio topológico homeomorfo a S^2 (ver capítulo 1 de [JS87]).

Construyamos ahora una estructura compleja sobre $\overline{\mathbb{C}}$. Sean $U_1 = \mathbb{C}$,

$U_2 = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$. Definimos $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ por $\phi_1(z) = z$ y $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ por

$$\phi_2(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{C}^* \\ 0, & \text{si } z = \infty \end{cases} .$$

Es inmediato que ϕ_1 y ϕ_2 son homeomorfismos. Obtenemos que $U_1 \cap U_2 = \mathbb{C}^* \neq \emptyset$ y la función de transición $\phi_{21} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ está dada por $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ que es biholomorfa en $\mathbb{C}^*$.

Entonces, las cartas $\phi_j : U_j \to \mathbb{C}, j = 1, 2$ determinan una estructura compleja sobre $\overline{\mathbb{C}}$.

(d) Ahora construimos una familia de superficies de Riemann:

Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ linealmente independientes sobre $\mathbb{R}$, es decir $\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) \neq 0$. Al conjunto $\Lambda = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 = \{nw_1 + mw_2 : n, m \in \mathbb{Z}\}$ se le llama la *retícula* generada por w_1 y w_2.

Definimos una relación de equivalencia en $\mathbb{C}$ declarando que $z, u \in \mathbb{C}$ son *equivalentes módulo* Λ si y sólo si $z - u \in \Lambda$. Al espacio de clases de equivalencia $\mathbb{C}/\Lambda$ se acostumbra llamarle un toro.

Sea $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ la proyección canónica. Dotamos al toro $\mathbb{C}/\Lambda$ con la topología cociente inducida por π. Se sabe que con esta topología π es continua y abierta y el toro es una superficie real conexa.

Sea $K = \{rw_1 + sw_2 : r, s \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$. Como K es compacto y $\pi_{|K} : K \to \mathbb{C}/\Lambda$ es suprayectiva, obtenemos que $\mathbb{C}/\Lambda = \pi(K)$ es un espacio topológico compacto.

Para construir una estructura compleja sobre el toro, procedemos de la siguiente manera:

Sabemos que cualquier $V \subset K$ abierto tiene la propiedad de que cualesquiera dos puntos distintos en V no son equivalentes módulo Λ. Entonces, como $U = \pi(V)$ es abierto, la función $\pi_{|V} : V \to U$ es un homeomorfismo. Esto implica que su inversa $\pi_{|V}^{-1} : U \to V$ es una carta coordenada compleja en el toro.

Sea $\mathcal{A} = \{(\pi(V), \pi_{|V}^{-1}) : V \subset K$ es abierto $\}$ el conjunto de cartas obtenidas de esta manera.

Consideremos cualquier función de transición que tenga sentido $\phi_{W,V} = \pi_{|W}^{-1} \circ (\pi_{|V}^{-1})^{-1} : \pi_{|V}^{-1}(\pi(W) \cap \pi(V)) \to \pi_{|W}^{-1}(\pi(W) \cap \pi(V))$.

Para cada $z \in \pi_{|V}^{-1}(\pi(W) \cap \pi(V))$ se tiene que $\pi(\phi_{W,V}(z)) = (\pi_{|V}^{-1})^{-1}(z) = \pi(z)$, es decir, $\phi_{W,V}(z) - z \in \Lambda$.

Dado que Λ es un subconjunto discreto del plano complejo y que $\phi_{W,V}$ es continua en $\mathbb{C}$, entonces $\phi_{W,V}(z) = z + a$, donde $a \in \mathbb{C}$ es constante en cada componente conexa de $\pi_{|V}^{-1}(\pi(W) \cap \pi(V))$.

Esto implica que toda función de transición que tenga sentido es analítica.

Concluimos que $\mathcal{A}$ define una estructura compleja sobre el toro $\mathbb{C}/\Lambda$.

1.2. El grupo de transformaciones cubrientes

Sean X y Y superficies de Riemann. Una aplicación continua $f : X \to Y$ es *holomorfa* si para cualquier par de cartas coordenadas $\phi_1 : U_1 \to V_1$ en X y $\phi_2 : U_2 \to V_2$ en Y, tales que $f(U_1) \subseteq U_2$, la función $\phi_2 \circ f \circ (\phi_1)^{-1} : V_1 \to V_2$ es holomorfa en el sentido usual. Decimos que f es un *biholomorfismo* si es una biyección y tanto f como $f^{-1} : Y \to X$ son holomorfas.

Definición: Diremos que X es **conformemente equivalente** a Y si existe un biholomorfismo $f : X \to Y$.

Se puede probar que la equivalencia conforme es una relación de equivalencia entre superficies de Riemann y denotamos por $[X]$ a la clase de equivalencia de la superficie de Riemann X.

Dado $g \geq 0$, el conjunto M_g de todas las clases de equivalencia $[X]$, donde

X es un superficie de Riemann cerrada de género g, se llama el *espacio de moduli de género g*.

Definición: Sea X una superficie de Riemann. Un *automorfismo* de X es un biholomorfismo $g : X \to X$.

La clase de todos los automorfismos de X forma un grupo bajo la composición de funciones, con la función identidad como elemento neutro, y lo denotamos por $\mathtt{Aut}(X)$.

Decimos que una transformación suprayectiva y holomorfa $p : Y \to X$ es una *aplicación cubriente* si para todo $x \in X$, existe una vecindad abierta $U \subset X$ de x tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} V_j$, donde $\{V_j : j \in J\}$ es una familia de subconjuntos abiertos ajenos dos a dos de Y, J es un conjunto de índices que no depende del punto x, y $p_{|V_j} : V_j \to U$ es biholomorfa para todo $j \in J$. Al conjunto $p^{-1}(x)$ se le llama la *fibra* de p sobre x.

A la terna (Y, p, X) le llamamos un *recubrimiento* de X y decimos que Y es una *superficie cubriente* de X. A la aplicación cubriente p también se le llama la *proyección* de Y sobre X.

Cuando Y es simplemente conexa, decimos que (Y, p, X) es un *recubrimiento universal* de X, que Y es una *superficie cubriente universal* y normalmente se le denota por $\tilde{X}$.

En el caso de superficies de Riemann se sabe que siempre existe un recubrimiento universal y que es único salvo homeomorfismos que preservan fibras (ver capítulo 1 de [For81]).

Ejemplos:

(a) Sea $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ definida por $p(z) = \exp(z)$. Entonces, $(\mathbb{C}, p, \mathbb{C}^*)$ es el recubrimiento universal de la superficie $\mathbb{C}^*$.

Si $z \in \mathbb{C}^*$, entonces existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $z = \exp(w)$ y la fibra de p sobre z es el conjunto $\exp^{-1}(z) = \{w + i2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Sea $p : \mathbb{H} \to \mathbb{D} - \{0\}$ definida por $p(z) = \exp(i2\pi z)$. Entonces,

$(\mathbb{H}, p, \mathbb{D} - \{0\})$ es el recubrimiento universal de la superficie $\mathbb{D} - \{0\}$.

(c) Sea $p : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ definida por $p(z) = z^k$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $k \geq 2$. Entonces, $(\mathbb{C}^*, p, \mathbb{C}^*)$ es un recubrimiento, pero no es el recubrimiento universal.

Dado $a \in \mathbb{C}^*$ podemos elegir $b \in \mathbb{C}^*$ tal que $b^k = a$. Como $z \mapsto z^k$ es un homeomorfismo local, sabemos que existen $V_0, U \subset \mathbb{C}^*$ abiertos tales que $b \in V_0, a \in U$ y $p_{|V_0} : V_0 \to U$ es un homeomorfismo.

Sea $w = \exp\left(\frac{2\pi i}{k}\right)$ una raíz k-ésima primitiva de la unidad. Entonces, los conjuntos $V_j = w^j V_0$ para $j = 0, 1, \cdots, k-1$ son ajenos dos a dos y $p_{|V_j} : V_j \to U$ es un homeomorfismo para toda j. Esto implica que $p^{-1}(U) = \bigcup_{j=0}^{k-1} V_j$.

(d) Sean $\tau \in \mathbb{H}$, $\Lambda \subset \mathbb{C}$ la retícula generada por $\{1, \tau\}$ y $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ la proyección canónica. Entonces, $(\mathbb{C}, p, \mathbb{C}/\Lambda)$ es el recubrimiento universal del toro $\mathbb{C}/\Lambda$ (ver ejemplo (d) en la sección anterior).

Definición: Sean (Y, p, X) un recubrimiento y $f : Y \to Y$ un biholomorfismo tal que $p \circ f = p$. Entonces, diremos que f es una *transformación cubriente* del recubrimiento (Y, p, X).

El conjunto de todas las transformaciones cubrientes de un recubrimiento (Y, p, X) forma un grupo bajo la composición de funciones, con la función identidad como elemento neutro, y lo denotamos por $\mathtt{Cub}(Y/X)$.

Observemos que $\mathtt{Cub}(\tilde{X}/X) \leq \mathtt{Aut}(\tilde{X})$.

En los capítulos 5 de [Bea84], 2 de [IT92] y 9 de [Rem91] el lector encontrará una demostración del siguiente resultado.

Teorema 1.

(1) Todo elemento de $\mathtt{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ es de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ con $ad - bc = 1$.

(2) Todo elemento de $\mathtt{Aut}(\mathbb{C})$ es de la forma $z \mapsto az + b$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$.

(3) Todo elemento de $\mathtt{Aut}(\mathbb{D})$ es de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Esta forma es equivalente a $z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$, donde $\theta \in \mathbb{R}$, a $\in \mathbb{D}$.

(4) Todo elemento de $\mathtt{Aut}(\mathbb{H})$ es de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ con $ad - bc = 1$.

Observamos que a $\mathtt{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$ se le llama grupo de Möbius; a $\mathtt{Aut}(\mathbb{C})$ se le conoce como grupo afín y a $\mathtt{Aut}(\mathbb{H})$ se le llama grupo proyectivo real especial y se le denota por $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Un hecho interesante es que existe un biholomorfismo $C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ dado por $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$, cuya inversa $\widehat{C} : \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ está dada por $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$. A C y $\widehat{C}$ se les llama *transformaciones de Cayley.*

Definición: Dos elementos f y g de un grupo $\mathtt{G}$ son *conjugados* en $\mathtt{G}$ si existe un elemento $h \in \mathtt{G}$ tal que $f = hgh^{-1}$.

Se puede probar que la conjugación define una relación de equivalencia en cualquier grupo.

Lema 1. Sean $D, D' \subset \mathbb{C}$ dominios y $f : D \to D'$ un biholomorfismo. Entonces, $\mathtt{Aut}(D) \cong \mathtt{Aut}(D')$.

`Demostración:` Sea $\Phi : \mathtt{Aut}(D) \to \mathtt{Aut}(D')$ definido por $\Phi(g) = fgf^{-1}$.

Dado que la composición de biholomorfismos es un biholomorfismo, obtenemos que Φ está bien definido.

Sean $g, h \in \mathtt{Aut}(D)$. Entonces, $gh = g\mathrm{id}_D h = gf^{-1}fh$.

Obtenemos que $\Phi(gh) = fghf^{-1} = fgf^{-1}fhf^{-1} = (fgf^{-1})(fhf^{-1}) = \Phi(g)\Phi(h)$. Esto implica que Φ es un homomorfismo de grupos.

Es claro que $\Phi(g) = \mathrm{id}_{D'}$ si y sólo si $g = \mathrm{id}_D$. Por lo tanto, Φ es un monomorfismo.

Dada $g' \in \mathtt{Aut}(D')$ definimos $g = f^{-1}g'f$. Entonces, $g \in \mathtt{Aut}(D)$ y $\Phi(g) =$

g'. Es decir, Φ es epimorfismo.

Concluimos que Φ es un isomorfismo. ■

Una consecuencia muy útil del lema 1 es el siguiente resultado.

Proposición 1. $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Demostración: Tómese $f = C$, la transformación de Cayley, en el lema anterior. ■

1.3. El Teorema de Uniformización

El teorema de la aplicación conforme de Riemann establece que todo dominio propio $D \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo es conformemente equivalente al disco unitario $\mathbb{D}$.

Veamos la necesidad de que D no sea todo el plano complejo $\mathbb{C}$ en el enunciado del teorema de la aplicación conforme de Riemann. Supongamos que existe $h : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ holomorfa. Entonces, h es entera y acotada pues $|h(z)| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$. El teorema de Liouville implica que h es una constante y, por lo tanto, no es inyectiva. Concluimos que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{D}$ no son conformemente equivalentes.

Otro hecho interesante es que $\overline{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{C}$ tampoco son conformemente equivalentes. En efecto, supongamos que existe un biholomorfismo $h : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, entonces h es suprayectiva y continua (por ser holomorfa). Dado que $\overline{\mathbb{C}}$ es compacto, obtenemos que $\mathbb{C} = h(\overline{\mathbb{C}})$ es compacto, lo cual es totalmente falso.

Por último, observamos que mediante un argumento análogo al del párrafo anterior, se puede probar que $\overline{\mathbb{C}}$ no es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$.

Una consecuencia sumamente importante del teorema de la aplicación conforme de Riemann es el llamado Teorema de Uniformización, el cual proporciona una hermosa y elegante caracterización geométrica y algebráica de las superficies de Riemann simplemente conexas. Dicho teorema fué concevido, de manera independiente, por F. Klein y J. H. Poincaré hace cerca de 120 años. Poincaré y P. Koebe escribieron en 1907 las primeras demostraciones completas de este resultado. A continuación enunciamos el Teorema de Uniformización y sugerimos la lectura del capítulo 10 de [Ahl73], el cual está dedicado en su totalidad a demostrarlo.

Teorema de Uniformización (Koebe-Klein-Poincaré). Sea X una superficie de Riemann y $(\tilde{X}, p, X)$ su recubrimiento universal. Entonces, $\tilde{X}$ es conformemente equivalente a uno y sólo uno de los espacios $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{D}$.

Observemos que dada una superficie de Riemann X, el Teorema de Uniformización nos permite considerar a uno y sólo uno de los espacios $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{C}}$ y $\mathbb{D}$ como el recubrimiento universal de X. Dado que $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$ son conformemente equivalentes, en el enunciado del Teorema de Uniformización y en cualquier resultado que sea consecuencia de él podemos intercambiar a $\mathbb{D}$ por $\mathbb{H}$.

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en el capítulo 2 de [IT92].

Proposición 2. Sean X una superficie de Riemann y $(\tilde{X}, p, X)$ su recubrimiento universal. Entonces,

(1) para cualesquiera $\tilde{z}, \tilde{w} \in \tilde{X}$ tales que $p(\tilde{z}) = p(\tilde{w})$, existe $g \in \mathrm{Cub}(\tilde{X}/X)$ tal que $g(\tilde{z}) = \tilde{w}$.

(2) para todo $\tilde{z} \in \tilde{X}$, existe una vecindad $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ de $\tilde{z}$ tal que $g(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$ para todo $g \in \mathrm{Cub}(\tilde{X}/X)$ distinto de la identidad. En particular, la única transformación cubriente de p que tiene puntos fijos en $\tilde{X}$ es la identidad.

(3) $\mathrm{Cub}(\tilde{X}/X)$ actúa propia y discontinuamente en $\tilde{X}$, esto es que para todo $K \subset \tilde{X}$ compacto, $g(K) \cap K \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $g \in \mathrm{Cub}(\tilde{X}/X)$.

Observamos que dados una superficie de Riemann X y su recubrimiento universal $(\tilde{X}, p, X)$ se sabe (ver capítulo 1 de [For81]) que $\pi_1(X) \cong \mathrm{Cub}(\tilde{X}/X)$, donde $\pi_1(X)$ es el grupo fundamental de X.

El siguiente resultado, que es consecuencia de la última observación y la proposición 2, deja de manifiesto que el Teorema de Uniformización simplifica enormemente el estudio de superficies de Riemann.

Teorema 2. Sean X una superficie de Riemann y $(\tilde{X}, p, X)$ su recubrimiento universal. Entonces,

(1) $\tilde{X}$ es conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$ si y sólo si X es conformemente equivalente a $\overline{\mathbb{C}}$.

(2) $\tilde{X}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{C}$ si y sólo si X es conformemente equivalente a alguno de los espacios $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ o $\mathbb{C}/\Lambda$, para alguna retícula Λ.

(3) $\tilde{X}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{D}$ si y sólo si X no es conformemente equivalente a ninguno de los espacios $\overline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^*$ o $\mathbb{C}/\Lambda$, donde Λ es una retícula.

Una consecuencia muy interesante del teorema 2 es que, esencialmente, toda superficie de Riemann tiene como superficie cubriente universal a $\mathbb{D}$. Estudiaremos este hecho con mas detalle en el siguiente capítulo.

En el capítulo 2 de [IT92] se encuentra una demostración del siguiente resultado.

Teorema 3. Sean X, Y superficies de Riemann, $(\tilde{X}, p, X)$ y $(\tilde{Y}, q, Y)$ los respectivos recubrimientos universales y $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces, existe una aplicación continua $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ tal que $f \circ p = q \circ \tilde{f}$. La aplicación $\tilde{f}$ está determinada de manera única bajo la condición $\tilde{f}(\tilde{x}_1) = \tilde{y}_1$, donde $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$, $\tilde{y}_1 \in \tilde{Y}$ y $q(\tilde{y}_1) = f(p(\tilde{x}_1))$. Además, si f es homeomorfismo, diferenciable u holomorfa, entonces $\tilde{f}$ es también homeomorfismo, diferenciable u holomorfa.

A la aplicación $\tilde{f}$ se le llama un *levantamiento* de f.

1.4. Superficies de Riemann representadas como espacios cociente

Otro hecho importante es que el Teorema de Uniformización implica que toda superficie de Riemann X se puede representar como el *cociente* de su superficie cubriente universal $\tilde{X}$ por un subgrupo, con ciertas características, de $\mathtt{Aut}(\tilde{X})$. A continuación describimos la construcción de dicho espacio cociente.

Sean X una superficie de Riemann, $(\tilde{X}, p, X)$ su recubrimiento universal y $\mathtt{G} \leq \mathtt{Aut}(\tilde{X})$ tal que, salvo la identidad, ninguno de sus elementos tiene puntos fijos y actúa propia y discontinuamente en $\tilde{X}$. Observemos que por la proposición 2 podemos tomar a $\mathtt{G} = \mathtt{Cub}(\tilde{X}/X)$.

Declaramos que dos puntos $\tilde{z}, \tilde{w} \in \tilde{X}$ son *equivalentes* bajo $\mathtt{G}$ si existe $g \in \mathtt{G}$ tal que $g(\tilde{z}) = \tilde{w}$. Se puede probar que esto define una relación de equivalencia en $\tilde{X}$ y a la clase de equivalencia de $\tilde{z}$ la denotamos por $[\tilde{z}]$.

Al conjunto $\tilde{X}/\mathtt{G} = \{[\tilde{z}] : \tilde{z} \in \tilde{X}\}$ se le llama el *espacio cociente* de $\tilde{X}$ por $\mathtt{G}$.

Sea $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/\mathtt{G}$ la proyección canónica, es decir, $\pi(\tilde{z}) = [\tilde{z}]$. Dotamos a $\tilde{X}/\mathtt{G}$ con la topología cociente. Dado que $\tilde{X}$ es conexo, que π es suprayectiva y abierta y que $\mathtt{G}$ actúa propia y discontinuamente en $\tilde{X}$, obtenemos que $\tilde{X}/\mathtt{G}$ es conexo y Hausdorff.

Sea $\tilde{z} \in \tilde{X}$. Por la proposición 2, existe una vecindad $\tilde{U}_{\tilde{z}} \subset \tilde{X}$ de $\tilde{z}$, la cual podemos suponer que es abierta, tal que $g(\tilde{U}_{\tilde{z}}) \cap \tilde{U}_{\tilde{z}} = \emptyset$ para todo $g \in \mathtt{G}$ distinto de la identidad.

Por el Teorema de Uniformización, podemos considerar que $\tilde{X}$ es $\mathbb{C}$ o $\overline{\mathbb{C}}$ o $\mathbb{D}$. En cualquier caso $\tilde{X}$ es una superficie de Riemann. Esto implica que existe un homeomorfismo $\phi_{\tilde{z}} : \tilde{U}_{\tilde{z}} \to V_{\tilde{z}}$, donde $V_{\tilde{z}} \subset \mathbb{C}$ es abierto.

Sean $z = \pi(\tilde{z}) \in \tilde{X}/\mathtt{G}$ y $U_z = \pi(\tilde{U}_{\tilde{z}}) \subset \tilde{X}/\mathtt{G}$. Entonces, U_z es abierto en $\tilde{X}/\mathtt{G}$.

El hecho de que π es abierta y suprayectiva y la forma en que elegimos a $\tilde{U}_{\tilde{z}}$ implican que la restricción de π a $\tilde{U}_{\tilde{z}}$, $\pi_{\tilde{z}} : \tilde{U}_{\tilde{z}} \to U_z$ es un homeomorfismo.

Definimos $\phi_z : U_z \to V_{\tilde{z}}$ por $w \mapsto (\phi_{\tilde{z}} \circ \pi_{\tilde{z}}^{-1})(w)$.

Entonces, ϕ_z es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos. Este hecho y la manera en que elegimos a $\phi_{\tilde{z}}$ para cada $\tilde{z} \in \tilde{X}$, implican que el conjunto $\mathcal{A} = \{(\phi_z, U_z) : z \in \tilde{X}/\mathtt{G}\}$ es un atlas complejo sobre $\tilde{X}/\mathtt{G}$.

Concluimos que $\tilde{X}/\mathtt{G}$ es una superficie de Riemann.

La forma en que se construyó al atlas complejo $\mathcal{A}$ y el hecho de que π es suprayectiva implican que $\pi : \tilde{X} \to \tilde{X}/\mathtt{G}$ es una aplicación cubriente. Se puede probar que la función $f : \tilde{X}/\mathtt{G} \to X$ definida por $f([\tilde{z}]) = p(\tilde{z})$ es un biholomorfismo.

Esta discusión demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4. Sean X una superficie de Riemann, $(\tilde{X}, p, X)$ su recubrimiento universal y $\mathtt{G} = \mathtt{Cub}(\tilde{X}/X)$. Entonces, $\tilde{X}/\mathtt{G}$ es una superficie de Riemann que es conformemente equivalente a X.

Capítulo 2

Grupos fuchsianos

Busco un libro que diga cómo, luego otro que se titula asi, sigue un tercero llamado nada, es la fórmula del círculo sin fin.

-Nacha Pop-

En el capítulo anterior quedó establecida la importancia que tienen tanto el disco unitario $\mathbb{D}$ como el semiplano superior $\mathbb{H}$ en el estudio de las superficies de Riemann. Es por esto que dedicaremos este capítulo al estudio tanto de ambas superficies de Riemann como del grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) = \mathtt{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathtt{Aut}(\mathbb{D})$.

Construimos explícitamente una métrica especial en $\mathbb{D}$ y otra en $\mathbb{H}$ en § 2.1 y § 2.2, respectivamente, con las cuales $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$ se convierten en modelos de la geometría hiperbólica plana.

En § 2.3 y § 2.4 analizamos desde el punto de vista geométrico y algebráico al grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Los llamados grupos fuchsianos son subgrupos distinguidos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ y en 1880 Poincaré fue el primero en estudiarlos de manera sistemática, a pesar de que algunos ejemplos particulares como el grupo modular y los grupos triangulares (ver § 2.5) ya habían sido objeto de investigaciones.

Los grupos fuchsianos están profundamente relacionados con muchas áreas de la Matemática entre las cuales se encuentran geometría diferencial; teoría de números; teoría de Lie y teoría de la representación.

Cada grupo fuchsiano tiene asociado un subconjunto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, llamado *conjunto límite* (ver § 2.6), el cual se utiliza para clasificar a los grupos fuchsianos en dos clases.

En § 2.5 y § 2.6 damos un breve tratamiento general de grupos fuchsianos.

2.1. La métrica hiperbólica

En esta sección seguiremos las construcciones que Alan Beardon hace en [Bea83], [Bea84] y [Bea91].

Sea $g(z) = \frac{az+\bar{b}}{bz+\bar{a}}$, donde $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a|^2 - |b|^2 = 1$, un elemento del grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Entonces, $|g'(z)| = \frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2}$. En particular, $g'(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{D}$.

Sea $\lambda : \mathbb{D} \to (0, \infty)$ dada por $\lambda(z) = \frac{2}{1-|z|^2}$.

Observamos que λ es una función integrable en $\mathbb{D}$, ya que es continua, que no está acotada superiormente cuando $|z|$ tiende a 1.

La función λ es invariante bajo el grupo $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ en el sentido establecido por el siguiente resultado.

Lema 1. Si $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, entonces $\lambda(g(z)) = \frac{\lambda(z)}{|g'(z)|}$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración: Sean $g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y $z \in \mathbb{D}$.

Entonces, $\lambda(g(z))|g'(z)| = \left(\frac{2}{1-|g(z)|^2}\right)\left(\frac{1-|g(z)|^2}{1-|z|^2}\right) = \lambda(z)$. ■

Sea $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{D}$ una curva diferenciable a pedazos. La *longitud hiperbóli-*

ca de $\mathbf{c}$, denotada por $\ell(\mathbf{c})$, se define mediante la fórmula

$$\ell(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{c}} \lambda(z)|dz|,$$

donde $z = \mathbf{c}(t)$. Dado que $\lambda(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces $\ell(\mathbf{c}) \geq 0$ para todo $\mathbf{c}$.

El siguiente resultado es una consecuencia del lema 1.

Lema 2. La longitud hiperbólica es invariante bajo la acción del grupo $\mathtt{Aut}(\mathbb{D})$.

Demostración: Sean g un elemento de $\mathtt{Aut}(\mathbb{D})$ y $\mathbf{c} : [0,1] \to \mathbb{D}$ una curva diferenciable a pedazos.

Definimos $\bar{\mathbf{c}} : [0,1] \to \mathbb{D}$ por $\bar{\mathbf{c}}(t) = g(\mathbf{c}(t))$. Dado que g es holomorfa y $\mathbf{c}$ es diferenciable a pedazos, entonces $\bar{\mathbf{c}}$ es una curva diferenciable a pedazos.

Sea $w = \bar{\mathbf{c}}(t)$. Entonces, el lema 1 implica que

$$\ell(g(\mathbf{c})) = \int_{\bar{\mathbf{c}}} \lambda(w)|dw| = \int_0^1 \frac{\lambda(\mathbf{c}(t))}{|g'(\mathbf{c}(t))|}|g'(\mathbf{c}(t))||(\mathbf{c}'(t)|dt = \int_{\mathbf{c}} \lambda(z)|dz| = \ell(\mathbf{c}).$$

■

Para $z, w \in \mathbb{D}$ consideramos a la curva diferenciable dada por $\mathbf{s}(t) = (1-t)z + tw$ que une a z con w en $\mathbb{D}$. Denotemos por $\mathbf{C}_{\mathbf{z},\mathbf{w}}$ al conjunto de todas las curvas diferenciables a pedazos que unen a z con w en $\mathbb{D}$.

Observamos que $\mathbf{C}_{\mathbf{z},\mathbf{w}} \neq \emptyset$ ya que $\mathbf{s} \in \mathbf{C}_{\mathbf{z},\mathbf{w}}$.

Definimos $\rho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ como $\rho(z,w) = \inf\{\ell(\mathbf{c}) : \mathbf{c} \in \mathbf{C}_{\mathbf{z},\mathbf{w}}\}$. Entonces, ρ es una función bien definida y no negativa.

Una consecuencia del lema 2 es que $\rho(z,w) = \rho(g(z), g(w))$ para todo $g \in \mathtt{Aut}(\mathbb{D})$ y para cualesquiera $z, w \in \mathbb{D}$.

En [Bea91] se encuentra una demostración de que la fórmula

$$\rho(z,w) = \log\left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}\right)$$

es válida para todo $z, w \in \mathbb{D}$. En este mismo artículo Beardon demuestra el siguiente resultado, con el cual hemos llegado a uno de los objetivos de este capítulo.

Teorema 1. La función ρ es una métrica en $\mathbb{D}$.

A ρ se le conoce como la métrica de Poincaré o *métrica hiperbólica* en $\mathbb{D}$. Denotaremos por $\mathbb{D}$ al espacio métrico $(\mathbb{D}, \rho)$ y por $\mathtt{Isom}(\mathbb{D})$ a su grupo de isometrías.

Como consecuencia del lema 2 y del teorema 1 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. El grupo $\mathtt{Aut}(\mathbb{D})$ es un subgrupo de $\mathtt{Isom}(\mathbb{D})$.

Como $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \cong \mathtt{Aut}(\mathbb{D})$, el corolario 1 implica que todo elemento de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es una isometría de $\mathbb{D}$.

El siguiente argumento muestra que esta métrica especial ρ es distinta a la métrica euclideana d en $\mathbb{D}$:

Supongamos que la métrica ρ es igual a la métrica euclideana d. Sea C_r el círculo con centro en el origen y radio hiperbólico $0 < r < 1$. Entonces, el perímetro hiperbólico de C_r coincide con su perímetro euclideano.

Sabemos (ver [Bea91]) que existe un elemento g de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que $g(\mathrm{C}_r) = \mathrm{C}_R$, donde C_R es el círculo euclideano con centro en el origen de radio R y $r = \log\frac{1+R}{1-R}$.

Esto implica que el perímetro hiperbólico de C_r es igual a $4\pi\mathrm{senh}(r)$. Entonces, $2\pi r = 4\pi\mathrm{senh}(r)$. Es decir, $r = 2\mathrm{senh}(r)$ lo cual es una contradicción.

Una vez dada esta métrica hiperbólica en $\mathbb{D}$, es natural preguntarse cuál es la topología que induce en $\mathbb{D}$. El siguiente resultado resuelve esta cuestión.

Proposición 1. En $\mathbb{D}$ se cumple lo siguiente:

(1) La clase de los círculos hiperbólicos coincide con la clase de los círculos euclideanos.

(2) La clase de los discos abiertos hiperbólicos coincide con la clase de los discos abiertos euclideanos.

(3) La topología hiperbólica coincide con la topología euclideana.

Una demostración de la proposición 1 se encuentra en [Bea91].

En el caso de la geometría euclideana, sabemos que la trayectoria de longitud mas pequeña entre dos puntos cualesquiera es el segmento de recta que los une.

En el caso de la geometría hiperbólica decimos que una *geodésica* es una curva diferenciable $\mathrm{c} : [0,1] \to \mathbb{D}$ con la propiedad de que para cualquier par de puntos distintos $z, w \in \mathrm{c}([0,1])$, el arco de c que une a z con w tiene longitud $\rho(z,w)$.

Entonces, en la geometría hiperbólica las geodésicas juegan el papel de rectas.

Describamos brevemente a las geodésicas en $\mathbb{D}$:

Si $-1 < x < 1$, entonces (ver [Bea91]) la geodésica entre 0 y x es el segmento de recta que une a 0 con x. Recordemos que se puede cosiderar que las rectas son círculos de radio infinito. Entonces, el eje real es el único círculo euclideano ortogonal a la frontera de $\mathbb{D}$ que pasa por 0 y x.

Utilizamos el hecho de que dados $z, w \in \mathbb{D}$ distintos, siempre existe un automorfismo g de $\mathbb{D}$ tal que $g(z) = w$ (ver § 2.4) y el hecho de que los elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ preservan ángulos, para concluir que las geodésicas en $\mathbb{D}$ son los arcos de círculos euclideanos ortogonales a la frontera de $\mathbb{D}$ (la cual se llama *círculo al infinito* y se acostumbra denotarla por C_∞).

Resumimos estas observaciones en el siguiente resultado.

Teorema 2. Sean C el único círculo euclideano ortogonal a C_∞ que pasa por z y w y $\mathbf{c}$ cualquier curva diferenciable a pedazos que une a z con w. Entonces, $\ell(\mathbf{c}) = \rho(z, w)$ si y sólo si $\mathbf{c}$ es el arco simple de C que une a z con w en $\mathbb{D}$.

Al lector interesado en profundizar en el hermoso tema de la geometría hiperbólica plana y en dimensiones mayores le sugerimos consultar [Ver82].

2.2. El modelo del semiplano superior

El hecho de que la transformación de Cayley $\widehat{C}$ es un biholomorfismo entre $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$ nos servirá para construir una métrica especial en $\mathbb{H}$.

Definimos $\lambda_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to (0, \infty)$ como $\lambda_{\mathbb{H}}(u) = \frac{\lambda(z)}{|\widehat{C}'(z)|}$, donde $u = \widehat{C}(z)$.

Como $\widehat{C}'(z) = \frac{2i}{(1-z)^2} \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces la función $\lambda_{\mathbb{H}}$ es continua y por lo tanto integrable en $\mathbb{H}$.

De manera similar a como construimos ρ podemos definir una métrica hiperbólica $\rho_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R}$, utilizando a la función $\lambda_{\mathbb{H}}$ en lugar de λ.

Denotaremos al espacio métrico $(\mathbb{H}, \rho_{\mathbb{H}})$ por $\mathbb{H}$.

El siguiente resultado es otra consecuencia del hecho de que $\mathbb{D}$ es conformemente equivalente a $\mathbb{H}$.

Teorema 3. Las superficies de Riemann $\mathbb{H}$ y $\mathbb{D}$ son isométricamente equivalentes.

Demostración: Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ distintos. Si $\mathbf{c} \in C_{z_1,z_2}$, entonces $\widehat{\mathbf{c}} = \widehat{C}(\mathbf{c})$ pertenece a C_{w_1,w_2}, donde $w_j = \widehat{C}(z_j)$ para $j = 1, 2$.

Esto implica que $\ell_{\mathbb{H}}(\widehat{C}(\mathbf{c})) = \int_{\widehat{\mathbf{c}}} \lambda_{\mathbb{H}}(u)|du| = \int_{\mathbf{c}} \frac{\lambda(z)|\widehat{C}'(z)||dz|}{|\widehat{C}'(z)|} = \ell(\mathbf{c})$.

Concluimos que $\rho_{\mathbb{H}}(\widehat{C}(z_1), \widehat{C}(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$. Es decir, la transformación de Cayley $\widehat{C}$ es una isometría entre $\mathbb{D}$ y $\mathbb{H}$. ■

Se puede probar (ver [Bea91]) que la transformación de Cayley $\widehat{C}$ se puede extender a una biyección entre $\mathbb{C}_\infty$ y $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Esto implica que círculos ortogonales a $\mathbb{C}_\infty$ se transforman bajo $\widehat{C}$ en círculos ortogonales a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Esta observación junto con los teoremas 2 y 3 tienen como consecuencia que las geodésicas en $\mathbb{H}$ son los rayos abiertos ortogonales a $\mathbb{R}$ junto con los semicírculos ortogonales a $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

En el capítulo 4 de [Rat94] se encuentra una discusión muy amplia sobre el modelo del semiplano superior.

2.3. Isometrías hiperbólicas de $\mathbb{D}$ y de $\mathbb{H}$

Al igual que en el caso euclideano, nos interesa caracterizar por completo a las isometrías hiperbólicas de $\mathbb{D}$ y de $\mathbb{H}$.

Hemos mostrado ya que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \leq \mathtt{Isom}(\mathbb{D})$ y de manera similar se muestra que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \leq \mathtt{Isom}(\mathbb{H})$.

El siguiente resultado implica que esencialmente $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ contiene a todas las isometrías hiperbólicas tanto de $\mathbb{D}$ como de $\mathbb{H}$. Una demostración de este resultado se encuentra en el capítulo 7 de [Bea83].

Teorema 4.

(1) Si $h \in \mathtt{Isom}(\mathbb{D})$, entonces existe $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que o bien h es de la forma $h(z) = g(z)$ o de la forma $h(z) = g(\bar{z})$.

(2) Si $h \in \mathtt{Isom}(\mathbb{H})$, entonces existe $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que o bien h es de la forma $h(z) = g(z)$ o de la forma $h(z) = g(-\bar{z})$.

2.4. El grupo PSL$(2, \mathbb{R})$

En esta sección analizaremos algunas propiedades geométricas y algebráicas del grupo PSL$(2, \mathbb{R})$. Utilizaremos el modelo del semiplano superior $\mathbb{H}$ para realizar dicho análisis.

Una manera de clasificar o distinguir a los elementos de un grupo de automorfismos de un conjunto, es caracterizar al conjunto de puntos que permanecen fijos bajo la acción de los elementos de dicho grupo.

Además, el hecho de conocer explícitamente al conjunto de puntos fijos de una transformación dada facilita describir su comportamiento en vecindades de curvas que contengan a dichos puntos.

Es claro que el conjunto de puntos fijos de la transformación identidad de PSL$(2, \mathbb{R})$ es todo el semiplano superior $\mathbb{H}$.

Teorema 5. Sea $g \in$ PSL$(2, \mathbb{R})$ distinta de la identidad. Entonces, se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones:

(1) g tiene un único punto fijo el cual se localiza en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(2) g tiene exactamente dos puntos fijos y ambos se localizan en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(3) g tiene un único fijo en $\mathbb{H}$ y ninguno en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Demostración: Sabemos que g es de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, donde todos los coeficientes son números reales y $ad - bc = 1$.

Consideramos dos posibles casos:

(1) Si $c = 0$, entonces $g(z) = \frac{az+b}{d}$ y es inmediato que $z_1 = \infty$ es punto fijo de g.

Dado que $ad = 1$, entonces $a, d \neq 0$ y tenemos que considerar dos posibles situaciones:

(1.1) Si $a \neq d$, entonces g tiene otro punto fijo en $z_2 = \frac{b}{d-a}$.

(1.2) Si $a = d$, entonces $a = \pm 1$. En este caso $g(z) = z \pm b$ y el único punto fijo de g es $z_1 = \infty$.

En cualquier caso, g tiene como máximo dos puntos fijos distintos los cuales se localizan en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(2) Si $c \neq 0$, nuestro problema se traduce en encontrar los puntos $z \in \mathbb{H}$ tales que $z = \frac{(a-d) \pm \sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$.

Analicemos entonces los posibles valores de $(a+d)^2 - 4$, conocido como el *discriminante* de g, para caracterizar completamente a dichos puntos.

Debemos considerar tres posibles casos:

(2.1) Si $(a+d)^2 - 4 = 0$, entonces g tiene un único punto en $z = \frac{a-d}{2c}$, el cual se localiza en $\mathbb{R}$.

(2.2) Si $(a+d)^2 - 4 > 0$, entonces g tiene exactamente dos puntos fijos distintos en $z_1 = \frac{(a-d)+\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$ y $z_2 = \frac{(a-d)-\sqrt{(a+d)^2-4}}{2c}$, los cuales se localizan en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(2.3) Si $(a+d)^2 - 4 < 0$, entonces g tiene exactamente dos puntos fijos distintos dados por $z_1 = \frac{(a-d)+i\sqrt{4-(a+d)^2}}{2c}$ y $z_2 = \frac{(a-d)-i\sqrt{4-(a+d)^2}}{2c}$.

Observamos que $z_1 \in \mathbb{H}$ y $z_2 = \bar{z_1} \in \mathbb{L}$. ∎

2.4.1. Clases de conjugación en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$

Otra manera de clasificar a los elementos de cualquier grupo se obtiene utilizando el hecho de que la conjugación es una relación de equivalencia en el grupo.

Es claro que la transformación identidad sólo es conjugada a ella misma en PSL(2, $\mathbb{R}$). Nuestro objetivo ahora es caracterizar a la clase de conjugación de un elemento g de PSL(2, $\mathbb{R}$) distinto de la identidad.

Sean $g_1(z) = z + 1$ y $g_k(z) = \frac{kz}{\frac{1}{k}}$ para $k \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0, 1$.

Entonces, $g_k \in$ PSL(2, $\mathbb{R}$) para toda $k \neq 0$.

Un invariante bajo conjugación para estas transformaciones es el operador $\mathtt{tr}^2 : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \to (0, \infty)$, el cual asigna a cada transformación $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ el número $(a+d)^2$, es decir, el cuadrado de la traza de la matriz asociada $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Observamos que $\mathtt{tr}^2(g_k) = (k + \frac{1}{k})^2$ para $k \neq 0$.

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en el capítulo 4 de [Bea83].

Teorema 6. Si g es un elemento de PSL(2, $\mathbb{R}$) distinto de la identidad, entonces g es conjugada a g_k para alguna $k \neq 0$.

Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X. Decimos que G es *transitivo* en X si para cualesquiera $x, y \in X$ distintos, existe $g \in$ G tal que $g(x) = y$. Decimos que G es 2-*transitivo* en X si para cualquier par de elementos distintos $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X \times X$, existe un elemento $g \in$ G tal que $g(x_j) = y_j$ para $j = 1, 2$.

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en el capítulo 5 de [JS87].

Teorema 7.

(1) PSL(2, $\mathbb{R}$) es 1-transitivo en $\mathbb{H}$.

(2) PSL(2, $\mathbb{R}$) es 2-transitivo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

El siguiente resultado es consecuencia directa de los teoremas 5,6 y 7.

Teorema 8. Sean f y g elementos de PSL(2, $\mathbb{R}$). Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) f y g son conjugadas en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$;

(2) $\mathtt{tr}^2(f) = \mathtt{tr}^2(g)$;

(3) f y g tienen el mismo conjunto de puntos fijos.

Utilizaremos al teorema 8 para concluir la descripción de las clases de conjugación en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Isometrías parabólicas

Si $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es distinta de la identidad, decimos que g es *parabólica* si g tiene un único punto fijo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Por el inciso (3) del teorema 8, toda transformación parabólica es conjugada en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ a la traslación g_1.

Isometrías elípticas

En lo que sigue la palabra **rotación** significa una rotación euclideana no trivial respecto al origen en $\mathbb{C}$, es decir una función de la forma $z \mapsto e^{i\theta}z$ para alguna $0 < \theta < 2\pi$.

Si f es una rotación, supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n = \mathrm{id}$, donde f^n representa a la composición de f con ella misma n veces. Decimos que el menor número natural n con esta característica es el *órden* de f. Si no existe tal n, entonces la rotación tiene órden infinito.

Se puede probar (ver [Bea91]) que si dos rotaciones son conjugadas en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, entonces tienen el mismo órden.

Si $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es distinta de la identidad, decimos que g es *elíptica* si g tiene un único punto fijo en $\mathbb{H}$ y ninguno en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Observamos que toda transformación elíptica es conjugada en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ a una rotación. El *órden* de una transformación elíptica es el órden de dicha rotación.

Sea X una superficie de Riemann tal que $\tilde{X} = \mathbb{H}$. Es importante observar que la proposición 2 del capítulo 1 implica que $\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ no contiene elementos elípticos.

Isometrías hiperbólicas

En lo que sigue la palabra **homotecia** significa una homotecia euclideana no trivial en $\mathbb{C}$, es deir una función de la forma $z \mapsto \lambda z$ para algún número real $\lambda > 1$. Al número λ se le llama el *factor* de la homotecia.

Se puede probar (ver [Bea91]) que dos homotecias $z \mapsto \alpha z$ y $z \mapsto \beta z$ son conjugadas en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ si y sólo si $\alpha\beta = 1$.

Si $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ distinta de la identidad, decimos que g es *hiperbólica* si tiene exactamente dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Por el inciso (3) del teorema 8, toda transformación hiperbólica es conjugada en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ a una homotecia.

Concluimos esta sección con el siguiente resultado que clasifica por completo a los elementos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Una demostración se encuentra en el capítulo 4 de [Bea83].

Teorema de Clasificación de Isometrías. Sea $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ distinta de la identidad. Entonces,

(1) g es parabólica si y sólo si $\mathrm{tr}^2(g) = 4$;

(2) g es elíptica si y sólo si $0 < \mathrm{tr}^2(g) < 4$;

(2) g es hiperbólica si y sólo si $\mathrm{tr}^2(g) > 4$.

2.5. Grupos fuchsianos

Dotamos al grupo $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ con la topología de la convergencia uniforme. Esto significa que una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ converge a $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ si y sólo si $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a g en subconjuntos compactos de $\mathbb{H}$ (respectivamente en subconjuntos compactos de $\mathbb{D}$).

Decimos que un subgrupo G de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es *discreto*, si como subconjunto de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ G es discreto, es decir, si G consiste sólo de puntos aislados con respecto a la topología inducida en G por la topología de la convergencia uniforme.

Definición: Un **grupo fuchsiano** es un subgrupo discreto no vacío de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

El siguiente resultado es una consecuencia de esta definición.

Proposición 2. Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) G es un grupo fuchsiano.

(2) No existen sucesiones de elementos de G distintos dos a dos que converjan en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Demostración: Supongamos que G es fuchsiano y que existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ de elementos distintos dos a dos, que converge a un elemento $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$.

Sabemos que g es de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, donde todos los coeficientes son números reales y $ad - bc = 1$.

También sabemos que cada transformación g_n es de la forma $z \mapsto \frac{a_n z+b_n}{c_n z+d_n}$, para algunos números reales a_n, b_n, c_n y d_n tales que $a_n d_n - b_n d_n = 1$.

Podemos asignar de manera biunívoca la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ a g y la matriz $\left(\begin{smallmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{smallmatrix}\right)$ a g_n.

Consideremos la representación matricial de cada transformación g_n^{-1}, es decir la matriz $\begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix}$.

Como la sucesión $\{\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces la sucesión $\{\begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la matriz $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Observando que $g^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$, obtenemos que la sucesión $\{g_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a g^{-1} en PSL$(2,\mathbb{R})$.

Por otra parte, sabemos que para todo número natural j la transformación $g_j^{-1} \circ g_{j+1}$ es un elemento de G y que $g_j^{-1} \circ g_{j+1}$ es distinta de la identidad, pues los g_j son distintos dos a dos.

Observamos que la sucesión $\{g_n^{-1} \circ g_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $g^{-1} \circ g$, es decir converge a la identidad. Como la transformación identidad es un elemento de G, concluimos que G tiene un punto de acumulación. Esto implica que G no es fuchsiano, lo cual es una contradicción.

Hemos probado que (1) implica (2).

Supongamos que ocurre (2) y que G no es fuchsiano. Entonces, G no es discreto.

Esto implica que G tiene al menos un punto de acumulación en PSL$(2,\mathbb{R})$.

Entonces, existe una sucesión de elementos de G distintos dos a dos que converge a un elemento de PSL$(2,\mathbb{R})$. Esto contradice (2). Por lo tanto, G es fuchsiano y hemos probado que (2) implica (1). ■

Una familia $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ de subconjuntos no vacios de un espacio topológico X, con índices en un conjunto A, se llama *localmente finita* si para todo subconjunto compacto $K \subset X$ se cumple que $S_\alpha \cap K \neq \emptyset$ sólo para un número finito de índices $\alpha \in A$.

Para $x \in X$ el conjunto $\mathtt{G}x = \{g(x) : g \in \mathtt{G}\}$ se llama la *órbita* de x bajo G y el conjunto $\mathtt{G}_x = \{g \in \mathtt{G} : g(x) = x\}$ se llama el *estabilizador* de x bajo G.

Dado que $x \in \mathtt{G}x$ y que $\mathrm{id} \in \mathtt{G}_x$, entonces ambos conjuntos son no vacios.

Como G_x es un grupo bajo la composición de funciones, con la identidad como elemento neutro, se le llama el *subgrupo de isotropía* de x.

Sabemos (ver capítulo 2 de [Kat92]) que si un grupo G actúa propia y discontinuamente en un espacio topológico X, entonces la órbita de cualquier punto $x \in X$ bajo G es localmente finita. De aquí se sigue que si G actúa propia y discontinuamente en X, entonces Gx es un subconjunto discreto de X y el órden de G_x es finito para cada $x \in X$.

El siguiente resultado es una caracterización alternativa de los grupos que actúan propia y discontinuamente en un espacio topológico X.

Proposición 3. Sean X un espacio topológico y G un grupo. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) G actúa propia y discontinuamente en X.

(2) para todo punto $x \in X$, existe una vecindad $V \subset X$ de x tal que $g(V) \cap V \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $g \in G$.

Demostración: Supongamos que G actúa propia y discontinuamente en X. Esto implica que Gx es discreto y que G_x es finito para todo $x \in X$.

De aquí se sigue que para todo punto $x \in X$, existe una vecindad $V \subset X$ de x tal que $V \cap Gx = \{x\}$.

Supongamos que existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ de elementos distintos tal que $g_n(V) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces, la sucesión $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ converge a un punto $y \in \bar{V}$, donde $\bar{V}$ denota a la cerradura topológica de V.

Sea $K = \{y, g_1(x), g_2(x), \cdots\}$. Entonces, K es un subconjunto compacto de X que contiene a una infinidad de puntos de Gx. Esto contradice que Gx es localmente finita.

Por lo tanto, $g(V) \cap V \neq \emptyset$ sólo para un número finito de $g \in G$ y hemos probado que (1) implica (2).

Ahora supongamos que ocurre (2) y que G no actúa propia y discontinuamente en X.

Entonces, existe $z \in X$ tal que Gz no es localmente finita. Esto implica que existe $K \subset X$ compacto tal que $g(z) \in K$ para una cantidad infinita de $g \in$ G. Es decir, Gz no es un subconjunto discreto de X. Entonces, existe $z_0 \in X$ tal que z_0 es un punto límite de Gz.

Sea $W \subset X$ abierto tal que $z, z_0 \in W$. Obtenemos que $g(W) \cap W \neq \emptyset$ para una cantidad infinita de $g \in$ G, lo cual contradice (2). Por lo tanto, G actúa propia y discontinuamente en X. Con esto hemos probado que (2) implica (1). ∎

Las demostraciones de los siguientes resultados se encuentran en el capítulo 2 de [Kat92].

Lema 3. Si $w \in \mathbb{H}$ y $K \subset \mathbb{H}$ es compacto, entonces el conjunto $E = \{g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) : g(w) \in K\}$ es compacto.

Lema 4. Sean G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{H}$ y $z \in \mathbb{H}$ tal que z es punto fijo de algún elemento de G. Entonces, existe una vecindad $W \subset \mathbb{H}$ de z tal que ningún otro punto de W es punto fijo de algún elemento de G distinto de la identidad.

Una consecuencia de los lemas 3 y 4 es el siguiente resultado, el cual caracteriza a la acción de un grupo fuchsiano en $\mathbb{H}$.

Teorema 9. Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) G es un grupo fuchsiano.

(2) G actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{H}$.

Demostración: Supongamos que G es un grupo fuchsiano. Sean $z \in \mathbb{H}$ y $K \subset \mathbb{H}$ compacto.

Definimos $E = \mathrm{G}z \cap K$. Entonces, $E = \{g \in \mathrm{G} : g(z) \in K\} = \{g \in$

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) : g(z) \in K\} \cap \mathtt{G}$.

El hecho de que G es discreto y el lema 3 implican que E es finito. Es decir, Gz es localmente finita. Esto prueba que (1) implica (2).

Ahora supongamos que G actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{H}$ y que G no es fuchsiano.

Como G no es fuchsiano, la proposición 2 implica que existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathtt{G}$ de elementos distintos dos a dos tal que converge a $\mathrm{id} \in \mathtt{G}$.

Sea $z \in \mathbb{H}$ un punto fijo de algún elemento de G. El lema 4 implica que existe una vecindad $W \subset \mathbb{H}$ de z tal que ningún otro punto de W es punto fijo de algún elemento de G distinto de la identidad.

Este hecho y dado que $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ es una sucesión de puntos distintos a z que converge a z, implican que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $g_n(z) \in W \subset \bar{W}$.

Es decir, Gz intersecta a $\bar{W}$ en una infinidad de puntos. Como $\bar{W} \subset \mathbb{H}$ es compacto, esto contradice (2). Por lo tanto, G es fuchsiano y hemos probado que (2) implica (1). ■

Como consecuencia del teorema 9 tenemos el siguiente

Corolario 2. Sea G un subgrupo de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tal que Gz es un subconjunto discreto de $\mathbb{H}$, para todo $z \in \mathbb{H}$. Entonces, G es un grupo fuchsiano.

El corolario 2 nos permite dar varios ejemplos de grupos fuchsianos:

(a) Los subgrupos de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ generados por un elemento hiperbólico, parabólico o elíptico (de órden finito) consisten solamente de la identidad y de elementos hiperbólicos, parabólicos y elípticos , respectivamente.

Como la órbita de todo punto $z \in \mathbb{H}$ bajo estos grupos es un subconjunto discreto de $\mathbb{H}$, el corolario 2 implica que estos grupos son fuchsianos.

Un ejemplo concreto son los subgrupos generados por $z \mapsto \lambda z$, con $\lambda > 1$

y $z \mapsto z+1$.

(b) Consideremos el grupo que consiste de todas las transformaciones de la forma $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, donde todos los coeficientes son números enteros y $ad - bc = 1$.

Este grupo se conoce como el **grupo modular** y se denota por $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$. Observando que $\mathbb{Z}$ es un subconjunto discreto de $\mathbb{R}$ se puede probar que la órbita de todo punto $z \in \mathbb{H}$ bajo el grupo modular es un subconjunto discreto de $\mathbb{H}$. Entonces, el corolario 2 implica que este es un grupo fuchsiano.

El grupo modular es el grupo fuchsiano mas estudiado. Para una discusión muy amplia e interesante sobre este grupo recomendamos la lectura del capítulo 6 de [JS87] y el capítulo 5 de [Kat92].

(c) Consideremos el grupo generado por las reflexiones en los lados de un triángulo hiperbólico cuyos ángulos son α, β y γ.

Es claro que la órbita de todo punto en $\mathbb{H}$ bajo este grupo es un subconjunto discreto de $\mathbb{H}$. El corolario 2 implica que este es un grupo fuchsiano.

Los grupos generados de esta forma se llaman grupos *triangulares* o de tipo (α, β, γ) y en el capítulo 10 de [Bea83] se discute ampliamente sobre ellos.

(d) De manera similar al ejemplo (c) se puede mostrar que el grupo generado por las reflexiones en los lados de un cuadrilátero hiperbólico es fuchsiano.

(e) Si G es un grupo fuchsiano, es claro que cualquier subgrupo de G también es fuchsiano.

2.6. Modelos fuchsianos

Sea X una superficie de Riemann tal que $(\mathbb{H}, p, X)$ es su recubrimiento universal.

Sabemos (ver proposición 2 del capítulo 1) que $\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ es un subgrupo de $PSL(2,\mathbb{R})$ que actúa propia y discontinuamente en $\mathbb{H}$. Esto implica que $\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ es un grupo fuchsiano.

Diremos que $\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ es un *modelo fuchsiano* de la superficie de Riemann X.

Todo modelo fuchsiano $\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ tiene asociado un subconjunto no vacío de $\mathbb{H}$, llamado *región fundamental*, el cual es un subconjunto abierto F de $\mathbb{H}$ tal que:

(1) $g(F) \cap F = \emptyset$ para todo $g \in \mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ distinto de la función identidad.

(2) $\mathbb{H} = \bigcup \{g(\bar{F}) : g \in \mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)\}$.

(3) La frontera de F tiene medida de Lebesgue igual a cero.

Se puede probar (ver capítulo 3 de [Kat92]) que a todo modelo fuchsiano se le puede construir una región fundamental conexa y convexa, llamada *región de Dirichlet*.

Las condiciones (1), (2) y (3) implican que podemos considerar que la superficie de Riemann $X \cong \mathbb{H}/\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$ es el conjunto $\bar{F}$ con los puntos de la frontera de F identificados bajo la acción del grupo $\mathrm{Cub}(\mathbb{H}/X)$.

En la introducción de este capítulo mencionamos que cada grupo fuchsiano tiene asociado un subconjunto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Antes de aclarar este hecho, necesitamos los siguientes resultados, los cuales están demostrados en el capítulo 2 de [Kat92].

Lema 5. Sean G un grupo fuchsiano, $z \in \mathbb{H}$ y $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos distintos de G. Si $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto límite $w \in \mathbb{C} \cup \infty$, entonces $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Proposición 4. Sea G un modelo fuchsiano de una superficie de Riemann X cerrada de género $g \geq 2$. Entonces, para todo $w \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$ tal que la sucesión $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ converge a w, para todo $z \in \mathbb{H}$.

Sea G un grupo fuchsiano. Para cada $z \in \mathbb{H}$ definimos $\Lambda_z = \{w \in \mathbb{C} : w$ es punto límite de $Gz\}$.

Al conjunto $\Lambda(G) = \bigcup\{\Lambda_z : z \in \mathbb{H}\}$ se le llama **conjunto límite** de G.

El lema 5 implica que $\Lambda(G) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ para todo grupo fuchsiano G. Una característica muy interesante del conjunto límite de un grupo fuchsiano queda establecida en el siguiente resultado.

Teorema 10. Sea G un grupo fuchsiano. Entonces, $\Lambda(G)$ es invariante bajo G.

Demostración: Sea $w \in \Lambda(G)$. Entonces, existe $z \in \mathbb{H}$ y una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos distintos de G tales que la sucesión $\{g_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a w en $\mathbb{H}$.

Entonces, para cualquier $g \in G$ se cumple que $gg_ng^{-1} \in G$ y la sucesión $\{gg_ng^{-1}(g(z))\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $g(w)$. Es decir, $g(w) \in \Lambda(G)$. ■

Decimos que un subconjunto Y de un espacio topológico X es *perfecto* si es cerrado y no tiene puntos aislados.

Teorema 11. Si $\Lambda(G)$ contiene mas de dos puntos, entonces o bien $\Lambda(G) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o $\Lambda(G)$ es un subconjunto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ perfecto y denso en ninguna parte.

En el capítulo 3 de [Kat92] se encuentra una demostración del teorema 11. Una consecuencia de este resultado es que $\Lambda(G)$ siempre es un conjunto cerrado.

Diremos que un grupo fuchsiano G es *de la primera clase* si $\Lambda(G) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y que es *de la segunda clase* si $\Lambda(G) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Ejemplos:

(a) Sea G el grupo generado por la transformación hiperbólica $z \mapsto 2z$. Es claro que $\Lambda_0 = \{0\}$.

Si $z \in \mathbb{H}$ y es distintinto de 0, entonces $\mathtt{G}z = z \cup \{2^j z : j \in \mathbb{Z}\}$.

Para encontrar los puntos límite de esta órbita, observemos que las únicas sucesiones de elementos distintos de $\mathtt{G}z$ convergentes son $\{2^j z\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{\frac{z}{2^j}\}_{j=1}^{\infty}$. La primera converge a ∞ y la segunda a 0. Esto implica que $\Lambda z = \{0, \infty\}$. Concluimos que $\Lambda(\mathtt{G}) = \{0, \infty\}$ y $\mathtt{G}$ es de la segunda clase.

(b) Si $\mathtt{G}$ es el grupo modular $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$, entonces se puede probar (ver capítulo 4 de [Kat92]) que $\Lambda(\mathtt{G}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Es decir, el grupo modular es un grupo fuchsiano de la primera clase.

Si g es un elemento de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ distinto de la identidad, denotamos por $\mathtt{Fij}(g)$ al conjunto de puntos fijos de g en $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Por el teorema 5, sabemos que $\mathtt{Fij}(g)$ consiste de a lo mas dos puntos distintos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ o consiste de un punto en $\mathbb{H}$.

Lema 6. Sean $\mathtt{G}$ un grupo fuchsiano y g un elemento de $\mathtt{G}$ distinto de la identidad. Si f es un elemento hiperbólico de $\mathtt{G}$, entonces se cumple una y sólo una de las siguientes situaciones:

(1) $\mathtt{Fij}(f) = \mathtt{Fij}(g)$.

(2) $\mathtt{Fij}(f) \cap \mathtt{Fij}(g) = \emptyset$.

`Demostración:` Dado que f es hiperbólica, entonces tiene exactamente dos puntos fijos en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $f(z) = \frac{\lambda z}{\frac{1}{\lambda}}$ para alguna $\lambda > 1$.

Conjugando a f por una transformación apropiada de $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ podemos suponer que $\mathtt{Fij}(f) = \{0, \infty\}$.

Supongamos que no ocurre (1) ni (2). Entonces, $\mathtt{Fij}(f) \cap \mathtt{Fij}(g)$ consiste sólo de un punto.

Observemos que si g fija a 0, entonces necesariamente g fija a ∞. Por lo tanto, $\mathtt{Fij}(f) \cap \mathtt{Fij}(g) = \{\infty\}$.

Entonces, $g(z) = \frac{az+b}{\frac{1}{a}}$ para $a, b \in \mathbb{R}$ distintos de cero.

Sean $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$ las representaciones matriciales de f y g, respectivamente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $g_n = gf^{-n}g^{-1}f^n$.

Entonces, $g_n \in \mathtt{G}$ y tiene asociada a la matriz $C_n = BA^{-n}B^{-1}A^n = \begin{pmatrix} 1 & ab(1-\frac{1}{\lambda^{2n}}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\lambda \neq 1$ y $ab \neq 0$, entonces las transformaciones g_n, y por lo tanto las matrices C_n, son distintas dos a dos.

Dado que $\lambda > 1$, entonces la sucesión $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Es decir, la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathtt{G}$ converge a la transformación $z \mapsto z+ab$, la cual pertenece a $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$. Entonces, la proposición 2 implica que $\mathtt{G}$ no es un grupo fuchsiano, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Concluimos que o bien ocurre (1) o (2). ■

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en el capítulo 2 de [IT92].

Teorema 12. Sea X una superficie de Riemann cerrada de género $g \geq 2$. Entonces, $\mathtt{Cub}(\mathbb{H}/X)$ consiste únicamente de la identidad y elementos hiperbólicos.

Sea $\mathtt{G}$ un grupo y $\mathtt{H}$ cualquier subgrupo de $\mathtt{G}$. El conjunto $\{g \in \mathtt{G} : g\mathtt{H}g^{-1} = \mathtt{H}\}$ se llama el *normalizador* de $\mathtt{H}$ en $\mathtt{G}$ y se denota por $N_{\mathtt{G}}(\mathtt{H})$.

Concluimos este capítulo enunciando algunas propiedades algebráicas de los grupos fuchsianos (ver el capítulo 5 de [JS87] y el capítulo 2 de [Kat92]).

Teorema 13. Sea $\mathtt{G}$ un grupo fuchsiano. Entonces, los siguientes enunciados son verdaderos:

(1) Si G es abeliano, entonces es cíclico.

(2) Si G no es cíclico, entonces el normalizador de G en $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ es un grupo fuchsiano.

(3) Cualquier elemento elíptico de G tiene órden finito.

Capítulo 3

Espacios de Teichmüler

No sea tonto. La bandera es imposible, de modo que no puede estar ondeando. Es el viento lo que ondea.

- Douglas R. Hofstadter-

Dada una superficie de Riemann X, la teoría de espacios de Teichmüller estudia a las distintas estructuras complejas con que se puede dotar a X. Existen varias maneras de definir al espacio de Teichmüller de X (ver [IT92]). En este trabajo seguimos el camino que requiere del concepto de transformación casiconforme en X.

Para llegar a dicho concepto, presentamos en § 3.1 la definición y algunas propiedades de las transformaciones conformes entre dominios de $\overline{\mathbb{C}}$. Continuamos en § 3.2 con la ecuación de Beltrami y algunos resultados sobre la existencia de soluciones de dicha ecuación.

Una vez definidas las transformaciones casiconformes en superficies de Riemann en § 3.3, estaremos en posición de describir la construcción del espacio de Teichmüller de X en § 3.4.

En § 3.5 hacemos lo propio para modelos fuchsianos. Este trabajo concluye con un teorema que nos permite identificar al espacio de Teichmüller de una superficie de Riemann compacta con aquel de su modelo fuchsiano.

3.1. Transformaciones casiconformes de dominios planos

Existen varios caminos que llevan a la noción de transformación casiconforme en un dominio $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ (ver [Ahl66] y [LV73]).

Por considerarlo el mas intuitivo, seguiremos en § 3.1.1 el camino geométrico. En § 3.1.2 presentamos una definición analítica de dichas transformaciones, la cual nos llevará a plantear la ecuación de Beltrami.

3.1.1. Definición geométrica de casiconformalidad

Dados dos dominios $D, D' \subset \overline{\mathbb{C}}$ y un homeomorfismo $h : D \to D'$ que no es analítico, nos interesa en encontrar una manera de cuantificar lo que la transformación h se desvía de ser conforme. Una forma de lograr esto consiste en analizar el cambio bajo homeomorfismos de algún invariante conforme. El invariante conforme que consideraremos es el llamado módulo de un cuadrilátero.

Sea C un círculo en $\overline{\mathbb{C}}$ y $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ un homeomorfismo. Al conjunto $h(\mathsf{C}) \subset \overline{\mathbb{C}}$ se le llama *curva de Jordan*. Si $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ es un dominio cuya frontera es una curva de Jordan, decimos que D es una *región o dominio de Jordan*.

Una pareja $(C; z_1, z_2, z_3, z_4)$ que consiste de un dominio de Jordan C y de cuatro puntos distintos z_1, z_2, z_3 y z_4 que se localizan en la frontera de C en este órden con respecto a la orientación positiva de la frontera de C, se llama *cuadrilátero*.

Diremos que los arcos (z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_4) y (z_4, z_1) son los *lados* del cuadrilátero y que los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 son los *vértices* del cuadrilátero.

A menos que sea necesario especificar los vértices del cuadrilátero, denotaremos a $(C; z_1, z_2, z_3, z_4)$ simplemente por C.

El siguiente resultado es el primer paso hacia una definición geométrica de casiconformalidad. Una demostración se encuentra en el capítulo 4 de [IT92].

Proposición 1. Sea $(C; z_1, z_2, z_3, z_4) \subset \overline{\mathbb{C}}$ un cuadrilátero. Entonces, existe un homeomorfismo $h : C \to R$, donde $R = [0, a] \times [0, b]$ es un rectángulo en $\overline{\mathbb{C}}$, tal que h es holomorfa en C y $h(z_1) = 0, h(z_2) = a, h(z_3) = a + ib$ y $h(z_4) = ib$. Además, el cociente $\frac{a}{b}$ no depende del homeomorfismo h.

Al cociente $\frac{a}{b}$ se le llama *módulo conforme* del cuadrilátero C y lo denotamos por $M(C)$.

Observamos que la definición de módulo de un cuadrilátero implica que $M((C; z_2, z_3, z_4, z_1)) = \frac{b}{a} = M((C; z_4, z_1, z_2, z_3))$ y que $M((C; z_3, z_4, z_1, z_2)) = \frac{a}{b} = M((C; z_1, z_2, z_3, z_4))$.

Si $(C; z_1, z_2, z_3, z_4)$ es un cuadrilátero y $h : C \to \mathbb{C}$ es un homeomorfismo que preserva orientación, entonces consideramos a $h(C)$ como un cuadrilátero con vértices $h(z_1), h(z_2), h(z_3)$ y $h(z_4)$.

Una consecuencia de la proposición 1 es el hecho de que el módulo de un cuadrilátero es un inverante conforme, es decir, si f es una transformación conforme, entonces $M((C; z_1, z_2, z_3, z_4)) = M((f(C); f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)))$.

Dado un dominio $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ denotamos por $\mathbf{C}_D$ al conjunto de todos los cuadriláteros $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ tales que $\bar{C} \subset D$, donde $\bar{C}$ denota a la cerradura topológica de C.

Definición geométrica de casiconformalidad: Sean $D, D' \subset \overline{\mathbb{C}}$ dominios y $h : D \to D'$ un homeomorfismo que preserva orientación. Diremos que h es una *transformación casiconforme* del dominio D si existe una constante $K \geq 1$ tal que $M(h(C)) \leq KM(C)$ para todo $C \in \mathbf{C}_D$.

Se puede probar que el ínfimo de estos números K coincide con el valor de $\mathbf{D}_h$ (ver § 3.1.2).

Observamos que la definición geométrica de casiconformalidad puede ser dada también en términos de los módulos de dominios anulares o de módulos de familias de trayectorias en un dominio D (ver capítulo 1 de [Leh87]).

3.1.2. Definición analítica de casiconformalidad

Una forma de dar una definición analítica de casiconformalidad se basa en el concepto de continuidad absoluta.

Sea $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que g es *absolutamente continua* en $[c, d]$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\sum_{j \in J} |g(d_j) - g(c_j)| < \epsilon$, para todo sistema finito o numerable de subintervalos ajenos dos a dos $(c_j, d_j) \subset [c, d]$ de longitud total $\sum_{j \in J}(d_j - c_j)$ menor que δ.

Observamos que toda función absolutamente continua es continua.

Decimos que una función $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ es *absolutamente continua en rectas* en un dominio $D \subset \mathbb{C}$, si para todo rectángulo cerrado $\{x + iy \in D : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, la función $x \mapsto u(x + iy)$ es absolutamente continua en $[a, b]$ para casi todo punto $y \in [c, d]$ y la la función $y \mapsto u(x + iy)$ es absolutamente continua en $[c, d]$ para casi todo punto $x \in [a, b]$.

Una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ es *absolutamente continua en rectas* en D, si tanto u como v son absolutamente continuas en rectas en D.

Se sabe (ver capítulo 7 de [WZ77]) que si una función f es absolutamente continua en rectas en D, entonces las derivadas parciales f_z y $f_{\bar{z}}$ de f están bien definidas, son finitas y medibles en casi todo punto de D.

Definición analítica de casiconformalidad: Sean $D, D' \subset \overline{\mathbb{C}}$ dominios y $h : D \to D'$ un homeomorfismo que preserva orientación. Diremos que h es una *transformación casiconforme* del dominio D si se cumple que:

(1) h es absolutamente continua en rectas en D;

(2) existe una constante $0 \leq k \leq 1$ tal que $|h_{\bar{z}}(z)| \leq k|h_z(z)|$ para casi todo punto $z \in D$.

Con esta terminología, hacemos $K = \frac{1+k}{1-k}$ y decimos que h es K-casiconforme en D. Al ínfimo de los números K tal que h es K-casiconforme en D se le llama la *dilatación máxima* de h en D y la denotamos por $\mathbf{D}_h$.

Observamos que se puede probar que la definición analítica que hemos dado es equivalente a la definición geométrica de casiconformalidad de § 3.1.1 (ver capítulo 4 de [IT92]).

A continuación enunciamos algunos resultados sobre transformaciones casiconformes entre dominios planos. Las demostraciones se encuentran en [Ahl66], capítulo 4 de [IT92] y [LV73].

Proposición 2. Sean $D, D' \subset \overline{\mathbb{C}}$ dominios y $f : D \to D'$ una transformación K-casiconforme. Entonces, se cumple lo siguiente:

(1) f es conforme en D si y sólo si f es 1-casiconforme en D.

(2) $f_z(z) \neq 0$ para casi todo $z \in D$.

(3) $f^{-1} : D' \to D$ es una transformación K-casiconforme en D'.

(4) si $h : D' \to \mathbb{C}$ es una transformación $\tilde{K}$-casiconforme, entonces la composición $g \circ f : D \to \mathbb{C}$ es una transformación $K\tilde{K}$-casiconforme de D.

(5) si $h : D \to \mathbb{C}$ y $g : D' \to \mathbb{C}$ son transformaciones conformes, entonces la composición $g \circ f \circ h^{-1}$ es una transformación K-casiconforme.

Observamos que el inciso (5) implica que la K-casiconformalidad es un invariante conforme.

3.2. La ecuación de Beltrami

Sean $f : D \to D'$ una transformación K-casiconforme. Por el inciso (2) de la proposición 2, existe $E \subset D$ Lebesgue medible tal que el complemento E^c de E en D tiene medida de Lebesgue cero y el cociente $\mu_f(z) = \frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}$ está bien definido para todo $z \in E$.

Se puede probar utilizando teoremas estándar de análisis real y complejo, que la función $z \mapsto \mu_f(z)$ es Lebesgue medible en D y cumple que

$$\operatorname{supes}\{|\mu_f(z)| : z \in D\} \leq \frac{\mathrm{D}_f - 1}{\mathrm{D}_f + 1} < 1,$$

donde supes denota al supremo esencial.

La función $\mu_f : D \to \mathbb{C}$ se conoce como la *dilatación compleja* de f en D.

Denotamos por $L^\infty(D)$ al espacio de Banach complejo que consiste de todas las funciones complejo valuadas, medibles y acotadas definidas en D.

Sea $\mathrm{B}_1(D) = \{g \in L^\infty(D) : ||g||_\infty < 1\}$, donde $||g||_\infty = \operatorname{supes}\{|g(z)| : z \in D\}$. Entonces, $\mu_f \in \mathrm{B}_1(D)$.

Diremos que $\mu \in \mathrm{B}_1(D)$ es un *coeficiente de Beltrami* en D y que la ecuación diferencial $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ es una *ecuación de Beltrami*.

Observamos que si f es conforme, entonces la función μ se anula idénticamente y la ecuación de Beltrami se convierte en la ecuación de Cauchy-Riemann $f_{\bar{z}} = 0$.

Para describir la construcción de espacios de Teichmüller necesitaremos los siguientes resultados sobre existencia de soluciones de la ecuación de Beltrami en el caso en que $D = \mathbb{C}$ y $D = \mathbb{H}$. Omitimos las correspondientes demostraciones y el lector interesado las puede encontrar en el capítulo 4 de [IT92].

Teorema 1. Sea $\mu \in \mathrm{B}_1(\mathbb{C})$. Entonces, existe un homeomorfismo $h : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ tal que la restricción de h a $\mathbb{C}$ es una transformación casiconforme en $\mathbb{C}$, cuya dilatación compleja coincide con μ. Además, h está determinada de manera única por la normalización $h(0) = 0, h(1) = 1$ y $h(\infty) = \infty$.

Diremos que el homeomorfismo h que existe por el teorema 1 es la *transformación μ-casiconforme* canónica de $\overline{\mathbb{C}}$ y la denotamos por h^μ.

Teorema 2. Sea $\mu \in \mathrm{B}_1(\mathbb{H})$. Entonces, existe una transformación casiconforme suprayectiva $w : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ cuya dilatación compleja coincide con μ. Además, w se puede extender a un homeomorfismo de $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en si mismo y está determinada de manera única por la normalización $w(0) = 0, w(1) = 1$ y $w(\infty) = \infty$.

Diremos que la transformación w que existe por el teorema 2 es la *transformación μ-casiconforme* canónica de $\mathbb{H}$ y la denotamos por w^μ.

3.3. Transformaciones casiconformes de superficies de Riemann

Sean X y Y superficies de Riemann, $(\tilde{X}, p, X)$ y $(\tilde{Y}, q, Y)$ los correspondientes recubrimientos universales. Por el Teorema de Uniformización, podemos suponer que $\tilde{X} = \overline{\mathbb{C}}$ o $\tilde{X} = \mathbb{C}$ o $\tilde{X} = \mathbb{H}$ y que $\tilde{Y} = \overline{\mathbb{C}}$ o $\tilde{Y} = \mathbb{C}$ o $\tilde{Y} = \mathbb{H}$.

Consideramos un homeomorfismo $h : X \to Y$. Por el teorema 3 del capítulo 1, sabemos que existe un levantamiento $\tilde{h} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ de h y que $\tilde{h}$ es un homeomorfismo. Diremos que h es una *transformación K-casiconforme* de X si $\tilde{h}$ es una transformación K-casiconforme de $\tilde{X}$.

Observamos que una función $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ es una transformación K-casiconforme si f es la transformación canónica K-casiconforme f^K (ver teorema 1) compuesta con una transformación de Möbius.

Dado que las transformaciones casiconformes de dominios planos son invariantes conformes (ver proposición 2), la definición de transformación casiconforme de una superficie de Riemann no depende del levantamiento $\tilde{h}$.

3.4. Espacios de Teichmüller de superficies de Riemann

Sean X y Y superficies de Riemann, $(\tilde{X}, p, X)$ y $(\tilde{Y}, q, Y)$ los respectivos recubrimientos universales y denotamos por I al intervalo $[0,1]$.

Diremos que dos homeomorfismos $f_1, f_2 : X \to Y$ son *homotópicos* si y sólo si existe una aplicación continua $h : X \times I \to Y$ tal que $h(\cdot, 0) = f_1$ y $h(\cdot, 1) = f_2$. Decimos que la aplicación h es una *homotopía* entre f_1 y f_2.

Observamos que dados una homotopía h entre f_1 y f_2 y el levantamiento $\tilde{f}_1 : \tilde{X} \to \tilde{Y}$, entonces las transformaciones $h_t : X \to Y$ definidas por $h_t(x) = h(x, t)$ para $0 \leq t \leq 1$, se pueden levantar de modo que obtenemos una homotopía entre $\tilde{f}_1$ y el levantamiento $\tilde{f}_2 : \tilde{X} \to \tilde{Y}$.

Consideremos una superficie de Riemann X fija. A cada transformación casiconforme $f : X \to Y$, donde Y es una superficie de Riemann, le asociamos la pareja (Y, f).

Declaramos que dos parejas (Y_1, f_1) y (Y_2, f_2) son *equivalentes* si y sólo si la transformación $f_2 \circ f_1^{-1} : Y_1 \to Y_2$ es homotópica a una transformación conforme de Y_1 en Y_2.

Denotamos por $(Y_1, f_1) \sim (Y_2, f_2)$ al hecho de que (Y_1, f_1) y (Y_2, f_2) son equivalentes. Entonces, $\sim$ define una relación de equivalencia entre las parejas (Y, f). A la clase de equivalencia de la pareja (Y, f) la denotamos por $[Y, f]$.

Con esta notación damos la siguiente

Definición: Sea X una superficie de Riemann. El **espacio de Teichmüller** de X es el conjunto $\mathbf{T}(X) = \{[Y, f]\}$.

Observamos que $[X, \mathrm{id}] \in \mathbf{T}(X)$ y a esta clase se acostumbra llamarle el *punto base* de $\mathbf{T}(X)$.

Ejemplo:

Supongamos que $\tilde{X} = \overline{\mathbb{C}}$. Por el teorema 2 del capítulo 1, sabemos que $X = \overline{\mathbb{C}} = \tilde{X}$.

Si $[Y, f] \in \mathbf{T}(\overline{\mathbb{C}})$, entonces $f : \overline{\mathbb{C}} \to Y$ es una transformación casiconforme de $\overline{\mathbb{C}}$. Se sabe (ver capítulo 4 de [IT92]) que toda transformación casiconforme de $\overline{\mathbb{C}}$ es homotópica a id. Esto implica que $(Y, f) \in [\overline{\mathbb{C}}, \mathrm{id}]$. Por lo tanto, $\mathbf{T}(\overline{\mathbb{C}}) = [\overline{\mathbb{C}}, \mathrm{id}]$.

3.5. Espacios de Teichmüller de grupos fuchsianos

Sean X una superficie de Riemann tal que $\tilde{X} = \mathbb{H}$ y $\mathtt{G} = \mathtt{Cub}(\mathbb{H}/X)$ un modelo fuchsiano de X. Entonces, $\mathtt{G}$ es un grupo fuchsiano (ver § 2.6).

Si $\mathtt{G}$ es abeliano y no trivial, por el teorema 13 del capítulo 2, sabemos que $\mathtt{G}$ es cíclico.

Entonces, $\mathtt{G} = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ para algún $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ distinto de la identidad.

Sabemos (ver teorema 5 del capítulo 2) que g tiene a lo mas dos puntos fijos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ o que g tiene un único punto fijo en $\mathbb{H}$.

Esto implica que $\mathtt{G} - \{\mathrm{id}\}$ fija a lo mas dos puntos distintos $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ o que $\mathtt{G} - \{\mathrm{id}\}$ fija a un único punto en $\mathbb{H}$.

Si $\mathtt{G}$ no es abeliano, entonces existen $g_1, g_2 \in \mathtt{G}$, ambos distintos de la identidad, tales que $g_1g_2 \neq g_2g_1$.

Sea $g_3 = g_1g_2$. Entonces, $g_3 \in \mathtt{G}$, $g_1g_3 \neq g_3g_1$ y $g_2g_3 \neq g_3g_2$.

Esto implica (ver página 25) que cada g_j es parábolica o es hiperbólica para $j = 1, 2, 3$. Debemos considerar entonces dos posibles casos:

(1) g_j es parabólica para $j = 1, 2, 3$.

Sea $\zeta_j \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ el único punto fijo de g_j. Como g_1 no conmuta con g_2 ni con g_3 y g_2 no conmuta con g_3, entonces $\zeta_1 \neq \zeta_2, \zeta_1 \neq \zeta_3$ y $\zeta_2 \neq \zeta_3$.

(2) g_j es hiperbólica para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que $j = 1$. Sean $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ los dos puntos fijos distintos de g_1.

Sea $\zeta_3 \in \mathbb{C}$ un punto fijo de g_2. Por el lema 6 del capítulo 2, obtenemos que $\zeta_1 \neq \zeta_3$ y $\zeta_2 \neq \zeta_3$.

En ambos casos, concluimos que el conjunto de todos los puntos fijos de los elementos de G distintos de la identidad consiste al menos de tres puntos distintos.

Dado que $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ es 2-transitivo en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, podemos suponer que $0, 1, \infty$ son puntos fijos de algún elemento de G distinto de la identidad.

Sea $f : X \to Y$ una transformación casiconforme, donde Y es otra superficie de Riemann tal que $\tilde{Y} = \mathbb{H}$

Entonces, el levantamiento $\tilde{f} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de f es la restricción a $\mathbb{H}$ de una transformación casiconforme $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Por el teorema 2, $\tilde{f}$ está determinada de manera única por la normalización $\tilde{f}(0) = 0, \tilde{f}(1) = 1, \tilde{f}(\infty) = \infty$.

Con esta notación, diremos que $\tilde{f}$ es el *levantamiento canónico* de f respecto a G. Este levantamiento canónico induce un monomorfismo de grupos $\Phi_{\tilde{f}} : \mathrm{G} \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ dado por $g \mapsto \tilde{f} g \tilde{f}^{-1}$.

Entonces, dados una superficie de Riemann X y un modelo fuchsiano G de X, existe un grupo fuchsiano $\tilde{\mathrm{G}} = \Phi_{\tilde{f}}(\mathrm{G})$ isomorfo a G.

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en el capítulo 5 de [IT92].

Proposición 3. Sean X una superficie de Riemann y $[Y_1, f_1], [Y_2, f_2] \in$

$\mathbf{T}(X)$. Entonces, $[Y_1, f_1] = [Y_2, f_2]$ si y sólo si $\Phi_{\tilde{f}_1} = \Phi_{\tilde{f}_2}$.

Denotamos por $\mathbf{Can}(\overline{\mathbb{C}})$ al conjunto de transformaciones casiconformes canónicas de $\overline{\mathbb{C}}$. Sea $\mathbf{F}(\mathtt{G})$ el conjunto de todas las $f \in \mathbf{Can}(\overline{\mathbb{C}})$ tal que $\tilde{f}\mathtt{G}\tilde{f}^{-1}$ es un grupo fuchsiano.

El **espacio de Teichmüller reducido** del grupo G es el conjunto $\mathbf{T}^{\sharp}(\mathtt{G}) = \{\Phi_{\tilde{f}} : f \in \mathbf{F}(\mathtt{G})\}$.

Observamos que podemos pensar a $\mathbf{T}^{\sharp}(\mathtt{G})$ como el conjunto de grupos fuchsianos que obtenemos al deformar (conjugar) el grupo G por transformaciones casiconformes canónicas de $\overline{\mathbb{C}}$.

Sean $w_1, w_2 \in \mathbf{F}(\mathtt{G})$. Declaramos que w_1 es equivalente a w_2, y lo denotamos por $w_1 \sim w_2$, si y sólo si $w_1(x) = w_2(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Es inmediato que $\sim$ define una relación de equivalencia en $\mathbf{F}(\mathtt{G})$ y denotamos por $[w]$ a la clase de equivalencia de la transformación w.

Definición: El **espacio de Teichmüller** del modelo fuchsiano G es el conjunto $\mathbf{T}(\mathtt{G}) = \{[w] : w \in \mathbf{F}(\mathtt{G})\}$.

Observamos que el espacio de Teichmüller $\mathbf{T}$ se puede definir de la misma manera para cualquier grupo fuchsiano (ver [Gar87]).

Proposición 4. Sean X una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, G un modelo fuchsiano de X y $f_j : X \to Y_j$ $(j = 1, 2)$ transformaciones casiconformes. Entonces, $\Phi_{\tilde{f}_1} = \Phi_{\tilde{f}_2}$ si y sólo si $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración: Supongamos que $\Phi_{\tilde{f}_1} = \Phi_{\tilde{f}_2} = \Phi$.

Sean $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $z_0 \in \mathbb{H}$.

Entonces, por la proposición 4 del capítulo 2, sabemos que existe una sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathtt{G}$ tal que la sucesión $\{g_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{H}$ converge a x.

Se puede probar (ver capítulo 2 de [IT92]) que la sucesión $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge local y uniformemente en $\mathbb{H}$ a una función constante c.

Dado que para $j = 1, 2$ se cumple que $(\tilde{f}_j \circ g_n)(z_0) = (\Phi(g_n) \circ \tilde{f}_j)(z_0)$, entonces $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$.

Como esto ocurre para todo $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, concluimos que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ en $\mathbb{R}$.

Ahora supongamos que $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Entonces, para todo $g \in \mathtt{G}$ se cumple que $\Phi_{\tilde{f}_1}(g)(x) = \Phi_{\tilde{f}_2}(g)(x)$ para todo punto $x \in \mathbb{R}$.

Dado que $\Phi_{\tilde{f}_1}(g)$ y $\Phi_{\tilde{f}_2}(g)$ son transformaciones de Möbius y que $\mathbb{R}$ tiene al menos un punto límite, entonces $\Phi_{\tilde{f}_1}(g) = \Phi_{\tilde{f}_2}(g)$ para todo $g \in \mathtt{G}$.

Esto implica que $\Phi_{\tilde{f}_1} = \Phi_{\tilde{f}_2}$. ■

El siguiente resultado es una consecuencia de las proposiciones 3 y 4.

Teorema 3. Sean X una superficie de Riemann tal que $\tilde{X} = \mathbb{H}$ y $\mathtt{G}$ un modelo fuchsiano de X. Entonces, $\mathrm{T}(X)$ se identifica con $\mathrm{T}^{\sharp}(\mathtt{G})$ como conjuntos. Además, si X es compacta de género $g \geq 2$, entonces $\mathrm{T}(X)$ está identificado con $\mathrm{T}(\mathtt{G})$ como conjuntos.

Demostración: Sea $\Theta : \mathrm{T}(X) \to \mathrm{T}^{\sharp}(\mathtt{G})$ dado por $[Y, f] \mapsto \Phi_{\tilde{f}}$.

La proposición 3 implica que Θ está bien definida y es inyectiva.

Para cada $f \in \mathrm{F}(\mathtt{G})$ sea $\tilde{\mathtt{G}}_f = \Phi_{\tilde{f}}(\mathtt{G})$. Entonces, $\tilde{f}$ se proyecta a la transformación casiconforme $f : X \to Y$, donde $Y = \mathbb{H}/\tilde{\mathtt{G}}_f$. Esto implica que $\tilde{f}$ determina un punto $[Y, f] \in \mathrm{T}(X)$.

Por lo tanto, Θ también es suprayectiva y hemos identificado a $\mathrm{T}(X)$ con $\mathrm{T}^{\sharp}(\mathtt{G})$ como conjuntos.

Si X es compacta de género $g \geq 2$, el resultado es inmediato de la proposición 4. ■

Bibliografía

[Abi86] Abikoff, W.: *Oswald Teichmüller.* The Mathematical Intelligencer, vol. 8, no. 3. Springer-Verlag, New York, 1986. 8-16 y 33.

[Ahl53] Ahlfors, L. V.: *Complex analysis.* McGraw-Hill, New York, 1953.

[Ahl66] Ahlfors, L.V.: *Lectures on quasiconformal mappings.* D. Van Nostrand, Princeton, 1966.

[Ahl73] Ahlfors, L. V.: *Conformal invariants: Topics in geometric function theory.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[Bea83] Beardon A. F.: *The geometry of discrete groups.* Graduate Texts in Mathematics, 91. Springer-Verlag, New York, 1983.

[Bea84] Beardon, A. F.: *A primer on Riemann surfaces.* Lecture Note Series, 78. London Mathematical Society. Cambridge University Press, 1984.

[Bea91] Beardon, A. F.: *An introduction to hyperbolic geometry.* Ergodic theory, symbolic dynamics and hyperbolic spaces. T. Bedford, M. Keane y C. Series, editores. Oxford University Press, 1991. 1-33.

[Ber72] Bers, L.: *Uniformization, moduli and Kleinian groups.* Bulletin of the London Mathematical Society, 4, 1972. 257-300.

[FK80] H. Farkas H. y Kra I.: *Riemann surfaces.* Graduate Texts in Mathematics, 71. Springer-Verlag, New York, 1980.

[For81] Forster, O.: *Lectures on Riemann surfaces.* Graduate Texts in Mathematics, 81. Springer-Verlag, New York, 1981.

[Gar87] Gardiner, F. P.: it Teichmüller theory and quadratic differentials. John Wiley and Sons, New York, 1987.

[IT92] Imayoshi, Y. y Taniguchi, M.: *An introduction to Teichmüller spaces.* Springer-Verlag, Tokyo, 1992.

[JS87] Jones, G. A. y Singerman, D.: *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[KF70] Kolmogorov, A. N. y Fomin, S. V.: *Introductory real analysis.* Dover Publications, New York, 1970.

[Kat92] Katok, S.: *Fuchsian groups.* The University of Chicago Press, 1992.

[Leh87] Lehto, O.: *Univalent functions and Teichmüller spaces.* Graduate Texts in Mathematics, 109. Springer-Verlag, New York 1987.

[LV73] Lehto, O. y Virtanen, K.: *Quasiconformal mappings in the plane.* Springer-Verlag, 1973.

[Mas91] Massey, W.: *A basic course in algebraic topology.* Graduate Texts in Mathematics, 127. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Rat94] Ratcliffe, J. G.: *Foundations of hyperbolic manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 149. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Rem91] Remmert, R.: *Theory of complex functions.* Graduate Texts in Mahematics, 122. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Tei82] Teichmüller, O.: *Collected papers.* L. V. Ahlfors y F. W. Gehring, editores. Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Ver82] Verjovsky, A.: *Introducción a la geometría y variedades hiperbólicas.* Notas del curso impartido en la Sexta Escuela Latinoamericana de

Matemáticas. CINVESTAV, OEA, UNAM, IPN, CONACyT y SEP. Morelos, México, 1982.

[WZ77] Wheeden R. y Zygmund A.: *Measure and integral. An introduction to real analysis.* Marcel Dekker Inc., New York, 1977.

Nire aitaren etxea
defendituko dut,
otsoen kontra,
sikatearen kontra,
lukurreriaren kontra,
justiziaren kontra,
defenditu
eginen dut
nire aitaren etxea.

Galduko ditut
aziendak,
soloak,
pinudiak;
galduko ditut
korrituak
errentak
interesak
baina nire aitaren etxea
defendituko dut.

Harmak kenduko dizkidate,
eta eskuarekin defendituko dut
nire aitaren etxea;
eskuak ebakiko dizkidate
eta besoarekin defendituko dut
nire aitaren etxea;
besorik gabe
sorbaldik gabe,
bularrik gabe
utziko naute,
eta arimarekin defendituko dut
nire aitaren etxea.

Ni hilen naiz,
nire arima galduko da,
nire askazia galduko da,
baina nire aitaren etxea
iraunen du
zutik.

-Gabriel Aresti-