20485

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

"ELABORACIÓN DE MATERIAL DIDÁCTICO PARA REFORZAR LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN ESTUDIANTES QUE INGRESAN A LA CARRERA DE INGENIERÍA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

P R E S E N T A:

ING. FRANCISCO MEJÍA MEZA

ASESOR: M. en C. JUAN BAUTISTA RECIO ZUBIETA

2002

AGRADECIMIENTOS:

AL M. EN C. JUAN BAUTISTA RECIO ZUBIETA:

MIL GRACIAS ESTIMADO MAESTRO POR SU AMISTAD, SUS CONSEJOS Y SU DESINTERESADO APOYO QUE ME BRINDO EN LA DIRECCIÓN DE ESTE TRABAJO.

A LA DRA. YOLANDA HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ:

A TI MI QUERIDA YOLIS, QUE HAS ESTADO A MI LADO COMPARTIENDO TODOS LOS MOMENTOS IMPORTANTES DE MI VIDA, QUIERO AGRADECERTE INFINITAMENTE TODO TU GRAN AMOR, TU COMPRENSIÓN Y TODO TU INCONDICIONAL APOYO QUE SIEMPRE ME HAS BRINDADO, ESTE NUEVO LOGRO ALCANZADO TE LO DEBO A TI Y QUIERO QUE LO COMPARTAMOS JUNTOS.

A TI VIRGEN DE SAN JUAN DE LOS LAGOS:

PORQUE NUEVAMENTE ME HAS PERMITIDO CULMINAR OTRO DE MIS PROYECTOS.

A MIS PADRES:

QUERIDOS PAPACITOS, AUNQUE FÍSICAMENTE YA NO LOS PUEDO VER, SE QUE ESTÁN MUY CERCA DE MÍ, ACOMPAÑANDOME EN TODO MOMENTO, A TI MI PEPITO Y A TI MI LUPITA LES QUIERO DAR LAS GRACIAS POR LA VIDA QUE ME DIERON, POR SU TERNURA, SU CARIÑO Y EL GRAN APOYO QUE ME BRINDARON, CON MUCHA VENERACIÓN SIEMPRE LOS RECORDARÉ.

A LA SRITA. JULIETA MEJÍA MEZA:

GRACIAS HERMANITA POR TU AYUDA Y APOYO INCONDICIONAL.

A MI TÍA LUPITA:

GRACIAS POR TODAS LAS ATENCIONES INMERECIDAS QUE ME BRINDASTE.

A MIS HERMANOS:

A QUIENES ESTIMO Y QUIERO MUCHO.

A TODOS MIS MAESTROS:

MI RECONOCIMIENTO Y AGRADECIMIENTO A TODOS MIS QUERIDOS MAESTROS POR HABERME DADO LA OPORTUNIDAD DE SER PRIMERO SU ALUMNO Y DESPUÉS SU AMIGO, ASÍ COMO TAMBIÉN SUS INVALUABLES CONOCIMIENTOS Y CONSEJOS QUE ME DIERON.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO:

POR LA GRAN OPORTUNIDAD QUE ME HA BRINDADO LA MÁXIMA CASA DE ESTUDIOS NO SÓLO DE ESTUDIAR UNA INGENIERÍA SINO AHORA UNA MAESTRÍA.

ÍNDICE.

INTRODUCCIÓN

Durante largo tiempo se ha observado que los alumnos que ingresan a la Universidad para estudiar una carrera de Ingeniería se enfrentan a serias dificultades para entender las matemáticas, ésto les ocasiona el no poder avanzar en los conocimientos de las materias propias de la licenciatura y consecuentemente ven frustradas sus aspiraciones de terminar una carrera profesional con éxito. Regularmente los conceptos matemáticos de estos alumnos no están bien definidos, claros, ni completos, dado que las matemáticas que les fueron enseñadas en los diferentes grados, desde la primaria hasta el nivel medio superior, las aprendieron solo memorizándolas, sin razonamiento alguno. Por lo anterior se hace necesario tomar acciones precisas que permitan remediar dicha situación.

Este trabajo pretende mejorar las condiciones de los estudiantes en sus conocimientos básicos de Geometría Analítica, a través del uso de un material didáctico que refuerce los conceptos matemáticos en el área mencionada.

La investigación cuenta con cinco capítulos, que consisten en lo siguiente:

El capítulo I se refiere a los antecedentes, importancia y planteamiento del problema que presentan los alumnos de nuevo ingreso a la carrera de Ingeniería, donde se mencionan algunas citas de expertos sobre el tema. También se hace mención de los posibles alcances del proyecto.

En el capítulo II se hace mención de las características de los aprendizajes por Recepción, Descubrimiento y Significativo, los cuales nos dan los parámetros a seguir para obtener buenos resultados con la aplicación del Material Didáctico propuesto.

En el capítulo III se presenta el objetivo y la hipótesis del trabajo de investigación así como el tipo de análisis, las variables, el ambiente, los instrumentos y el diseño de investigación.

El capítulo IV presenta la forma de recabación y organización de datos, resultados del grupo piloto, los recursos empleados, recomendaciones y entrevistas.

En el capítulo V se presentan las conclusiones y sugerencias del trabajo de investigación.

CAPÍTULO I

MARCO CONCEPTUAL

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

La experiencia generalizada, nos indica que los alumnos aspirantes a concluir una carrera de ingeniería, tienen una serie de limitaciones que no les permiten concluir con éxito sus expectativas, estas son entre otras las siguientes:

* En los grados básicos de primaria y secundaria, así como en el nivel medio superior, los conceptos matemáticos recibidos fueron deficientes, poco atractivos y en su mayoría sólo fueron memorizados sin razonamiento alguno, ocasionando se olvidaran pasado un tiempo.

* La cultura de consultar libros para estudiar y analizar temas específicos, ha sido poco estimulada.

* Falta de hábito para trabajar en equipo.

* Deficientes hábitos de estudio.

* Falta de Orientación vocacional acerca de las carreras.

* Deshomogeneización en conocimientos recibidos.

* Bajo rendimiento académico por la situación económica, generando la falta de interés por obtener un título profesional.

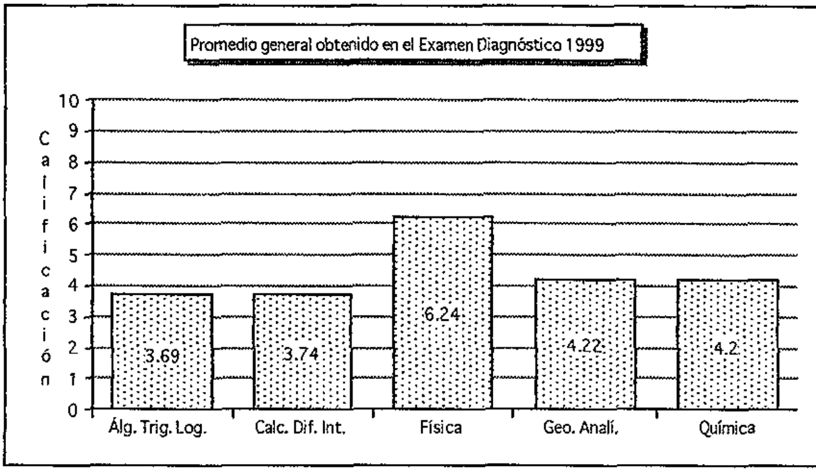
* El uso inadecuado de la computadora los vuelve pasivos y perezosos para estudiar e investigar.

* Manifiestan que están cansados y fastidiados de tanto estudiar, indicando que tal parece que los padres no los quieren tener en sus casas y toman las escuelas como guarderías, como por ejemplo en períodos de vacaciones los inscriben en cursos de verano creando en sus hijos un cansancio mental no saludable.

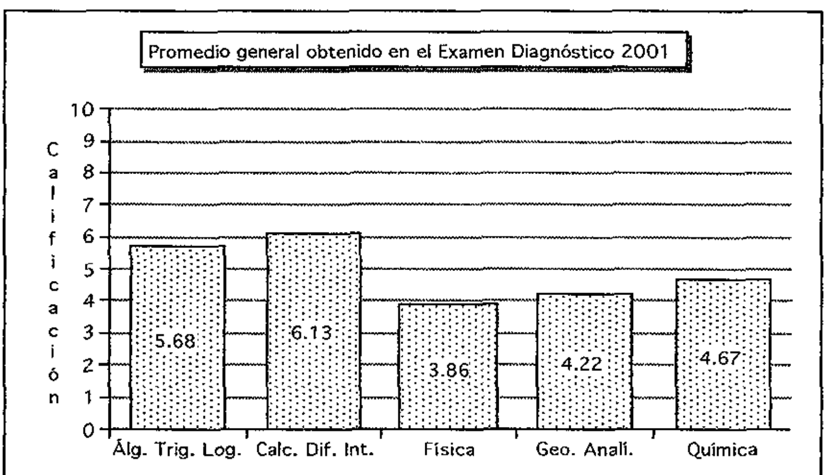
* Influencia de la familia, sociedad, medios de comunicación y algunos profesores crean apatía por las matemáticas.

Por todo lo anterior podemos observar que durante el primer semestre de la carrera de Ingeniería, los alumnos de nuevo ingreso tienen problemas muy serios para obtener calificaciones aprobatorias en sus exámenes parciales, generando con ello desmotivación total, apatía a las matemáticas y consecuentemente la deserción de la carrera.

Durante dos años consecutivos a partir de 1999, se ha estado aplicando un examen diagnóstico a todos los alumnos de nuevo ingreso a la carrera de Ingeniería Civil en la Escuela Nacional de Estudios Profesionales "Acatlán", con la finalidad de tener una estadística referente a sus conocimientos básicos en áreas como: "Álgebra, trigonometría, logaritmos", "Cálculo Diferencial e Integral", "Física", "Geometría Analítica" y "Química", estos exámenes son de opción múltiple con 20 preguntas cada área siendo un total de 100 reactivos. Los resultados obtenidos se muestran a continuación en las gráficas 1 y 2.



Gráfica No. 1



Gráfica No. 2

Como se puede apreciar en las gráficas 1 y 2, el promedio de cada una de las áreas es muy bajo, por lo que es de suma importancia hacer algo en beneficio de los nuevos aspirantes a cursar la carrera de Ingeniería.

En la Escuela Nacional de Estudios Profesionales "Acatlán", fundada hace 27 años, dentro de la carrera de Ingeniería Civil, no había existido un proyecto de un Material Didáctico con las características de este trabajo que sirviera para apoyar en sus conocimientos a los alumnos de nuevo ingreso. Durante estos años, se ha venido observando que gran porcentaje de los alumnos que ingresan a los primeros semestres tienen deficiencias muy serias en sus conocimientos básicos de matemáticas, por lo que son alumnos que al no tener las bases necesarias ven frustradas sus aspiraciones a terminar una carrera profesional, provocando con esto la desmotivación y la baja autoestima para continuar con éxito su carrera.

Investigaciones del tipo de ésta investigación queda de manifiesto en el proyecto que realizaron los maestros: Juan Bautista Recio Zubieta, Carlos Hernández Saavedra, Alejandro Reyes Esparza, Miguel Rodríguez Rojas y Leticia García, sobre el curso propedéutico experimentado en el Tecnológico de Estudios Superiores de Ecatepec, donde el problema principal era la deserción y reprobación de los alumnos en materias tales como Física y Matemáticas, que marcaron la pauta para diseñar los instrumentos necesarios con el fin de eliminar esta problemática general en todos los alumnos.

Una vez que se puso a prueba estos cursos ayudaron a disminuir de un 80% al 20% la deserción y en lo que respecta al indice de reprobación disminuyó del 90% al 50%. Por lo que queda demostrado la necesidad de seguir profundizando sobre este tema.

Para tener parámetros en el diseño del Curso Propedéutico, los investigadores descubrieron que el nivel académico de los estudiantes es muy diverso y que no todos tienen las bases necesarias, ni las aptitudes para avanzar en los cursos a nivel profesional, por lo que se planteo la hipótesis de llevar a cabo una selección mas idónea y de buscar homogeneizar el conjunto de conocimientos necesarios, para lograr la permanencia del alumno, de tal forma que estos mecanismos ayudaran a los futuros ingenieros en su formación.

El proceso de la investigación, se inicio con la búsqueda de exámenes que midieran aquellas capacidades necesarias para el futuro ingeniero, y por otro lado la necesidad de analizar cuál era el problema central al que se enfrentaban los alumnos durante los procesos de enseñanza aprendizaje en cada una de las asignaturas que se impartían en el Tecnológico, por lo que después de diferentes esfuerzos se estableció que la manifestación generalizada de los alumnos era la existencia de una incapacidad para la resolución de problemas.

A partir de esta situación se decidió llevar a cabo un Curso Propedéutico, enfocado principalmente a invitar a los alumnos a la discusión de diversos problemas tipo de las materias de Física, Química, Biología y Matemáticas. Para ello se elaboró una selección de aquellos problemas de las asignaturas señaladas, que de alguna manera se consideran representativos de las mismas.

Se estableció que durante el desarrollo del curso propedéutico los alumnos se integrarían en equipos de discusión de los problemas a resolver y, que el profesor encargado jugaría el papel de coordinador.

En marzo de 1992 se aplicó por primera vez el examen de aptitudes académicas y otro sobre conocimientos, así es como se instrumentó por primera vez el Curso Propedéutico con los aspirantes a ingresar al Tecnológico.

Los resultados obtenidos durante este primer intento fue de aumentar la permanencia de los estudiantes en un 60% y disminuir la reprobación a indices alrededor del 60% en Física y Matemáticas. Esta situación llevó a la conclusión de que habría que seguir instrumentando este tipo de medidas en las futuras generaciones. El curso se desarrolló en tres ocasiones y se alcanzó que la deserción de los alumnos que ingresaron a la institución disminuyera alrededor del 20%.

Los exámenes se revisaron y se mejoraron logrando que los indices de reprobación llegarán a niveles entre el 40% y el 50% en Física y Matemáticas.

El material con el que se trabajó durante el Curso Propedéutico estuvo en constante reelaboración. Esto fue posible a través de un seguimiento que realizaron los profesores que colaboraron en este esfuerzo y que impartieron algunas de las asignaturas en los primeros semestres de la Institución.

Como podemos apreciar en la investigación anterior, se obtuvieron resultados favorables con la aplicación de un Curso Propedéutico, y por lo tanto es de suma importancia poner en práctica estrategias adecuadas similares al caso anterior, para poder ayudar a los alumnos propiciando con ésto que puedan avanzar en sus estudios de licenciatura.

IMPORTANCIA DEL PROBLEMA

En la Escuela Nacional de Estudios profesionales "Acatlán" en su carrera de Ingeniería Civil, surge la necesidad de tomar acciones concretas y contar con un instrumento confiable que le permita al alumno recordar y comprender los conceptos básicos necesarios adquiridos en los grados anteriores a licenciatura y que le haga posible continuar con éxito en sus materias de matemáticas propias del área básica la carrera de Ingeniería Civil. Por lo anterior se pensó en llevar a cabo el proyecto de "**Elaboración de material didáctico para reforzar los conceptos matemáticos en estudiantes que ingresan a la carrera de Ingeniería**".

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Tomando en cuenta los problemas a los que se enfrentan los alumnos de nuevo ingreso a la carrera de ingeniería, se pretende que este proyecto sea una herramienta que los ayude a tener un mejor rendimiento en sus clases de matemáticas y consecuentemente en sus calificaciones semestrales.

Se tomó como parámetros de análisis, un grupo prueba de alumnos de nuevo ingreso de la generación 2000-1 y para ver los resultados de su rendimiento se compararon sus logros con el resto de sus compañeros inscritos en el primer semestre de la carrera de Ingeniería Civil.

El Material Didáctico con temas de Geometría Analítica, se aplicó a una muestra de 8 alumnos de nuevo ingreso a la carrera de Ingeniería Civil de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales "Acatlán". Este taller fue aplicado a los alumnos por el M. en C. Juan Bautista Recio Zubieta y el que suscribe Ing. Francisco Mejía Meza.

El material didáctico esta formado por 14 lecciones cuyo contenido es:

* Lección # 1, contempla los temas: Números con signo, simetría de un número, polinomios, valor absoluto, términos semejantes y leyes de los exponentes, números racionales.

* Lección # 2, contempla los temas: Ejes cartesianos, coordenadas de puntos, distancias entre dos puntos y gráficas.

* Lección # 3, contempla los temas: División de un segmento en una razón dada, punto medio de una recta, rectas paralelas y división de un segmento en tres partes.

* Lección # 4, contempla los temas: División de un segmento en una razón dada (2ª parte) y lugar geométrico.

* Lección # 5, contempla los temas: Graficación de expresiones algebraicas, intersecciones con los ejes coordenados, simetría con respecto a los ejes coordenados y con respecto al origen.

* Lección # 6, contempla los temas: Graficación de funciones, dominio de una función.

* Lección # 7, contempla los temas: Línea recta, pendiente de la recta.

* Lección # 8, contempla los temas: Línea recta (2ª parte), ecuación de la recta cuando se conoce un punto de ella y su pendiente "m", ecuación de una recta cuando se conoce dos de sus puntos y rectas perpendiculares.

* Lección # 9, contempla los temas: Línea recta (3ª parte) y distancia de un punto a una recta.

* Lección # 10, contempla los temas: Circunferencia (1ª parte), ecuación de la circunferencia con centro en (0,0) y radio "r", ecuación de la circunferencia con centro en C(h,k) y radio "r".

* Lección # 11 y Lección # 12, contemplan el tema de la Circunferencia (2ª y 3ª parte).

* Lección # 13 y Lección # 14, contemplan el tema de la Parábola (1ª y 2ª parte).

Es necesario mencionar que estos temas de Geometría Analítica se incluyeron, considerando que son los temas básicos que el alumno de nuevo ingreso a la carrera de Ingeniería debe poseer.

ALCANCES DEL PROYECTO

Una vez que se haya puesto a prueba el material didáctico del proyecto en el Curso Taller y que se tengan los resultados confiables, donde se pueda observar la mejora en calificaciones del grupo de análisis, es decir del grupo de alumnos que tomen el curso comparados con el grupo de alumnos que no lo tomen, se tendrán los argumentos necesarios para decidir si este proyecto que contempla la "**Elaboración de material didáctico para reforzar los conceptos matemáticos en estudiantes que ingresan a la carrera de Ingeniería**", es aceptable y por lo tanto admisible diseñar material para otras áreas tales como: "Álgebra, trigonometría, logaritmos", "Calculo Diferencial e Integral", "Física" etc., que ayuden a los alumnos de la misma manera que con el material preparado para el área de "Geometría analítica".

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

LOS MATERIALES DIDÁCTICOS: MEDIOS Y RECURSOS

Manejaremos la expresión de los materiales didácticos como todos aquellos medios y recursos necesarios que facilitan el proceso de enseñanza-aprendizaje, dentro de un contexto educativo global y sistemático, y estimulan la función de los sentidos para acceder más fácilmente a la información, adquisición de habilidades y destrezas, y a la formación de actitudes y valores. Por lo anterior, el proyecto de: "**Elaboración de material didáctico para reforzar los conceptos matemáticos en estudiantes que ingresan a la carrera de Ingeniería**", se espera sea un material provechosos y estimulante para los alumnos.

De acuerdo con la conceptualización, el documento en que se registra el contenido del mensaje se considera Material Didáctico.

Al revisar los diferentes modelos de instrucción que la tecnología educativa nos ofrece, observamos que los medios y recursos didácticos constituyen un elemento importante.

Considerando la relevancia que en la actualidad han llegado a alcanzar los medios de comunicación, el profesor deberá encontrarse capacitado ampliamente para participar tanto en la producción de los Materiales Didácticos requeridos de acuerdo con los objetivos educativos de su materia, como en su correcta utilización, con el objeto de realizar su quehacer educativo acorde con la época presente.

Es indispensable que el maestro de hoy conozca los materiales de enseñanza actuales para utilizarlos adecuadamente, imprimiéndoles con ésto vida y significación, de tal manera que sirva para proporcionar al estudiante una variedad de experiencias, y con ello le facilite la aplicación de su aprendizaje a la vida real. Cabe mencionar que estos materiales no anulan la personalidad del maestro ni tampoco la limitan. Él puede utilizar los medios para apoyar una exposición, o con el fin de aumentar la motivación al dirigir discusiones en una actividad.

Varios investigadores, entre los que se incluyen Charles F. Hoban, James D. Finn y Edgar Dale, descubrieron que los medios y recursos didácticos, cuando se utilizan adecuadamente en el proceso de enseñanza-aprendizaje pueden aportar ventajas.

No debemos olvidar que es imposible que con el solo aprendizaje éste sea capaz de dar al estudiante lo necesario para afrontar los problemas y necesidades cotidianas de la vida real. La función de la educación no es sólo brindar elementos útiles cotidianamente. Muchas veces, el objetivo de una unidad de instrucción es simplemente preparar al individuo para recibir la unidad siguiente, a fin de que ese conocimiento previo se torne instrumental, se transfiera y facilite el aprendizaje de las tareas subsiguientes.

El problema de la secuencia está íntimamente relacionado con la cuestión de la estructuración del material de enseñanza. Un aspecto importante en la estructuración del material es determinar cuál es la relación entre los componentes de un curso, el modo de desarrollarlo partiendo de las habilidades más simples hasta las habilidades más complejas de orden superior.

Ausubel nos dice en su libro de "Psicología Educativa" que: "El Conocimiento de la estructuración del material tiene como fin último permitir la incorporación de *ideas estables y claras en la estructura cognitiva, de la manera más eficaz, a fin* de introducir la transferencia. Hablando en términos generales, la transferencia es una función de la relevancia, el sentido, la claridad, la estabilidad, la integración y el poder explicativo de las ideas originalmente aprendidas" (Ausubel, Psicología Educativa,1968).

La transferencia del aprendizaje, nos dice Ausubel que depende de la facilidad que proporciona la integración del nuevo material con relación a lo ya aprendido, la cual, con sus importantes propiedades organizativas, nos va a facilitar la aplicación del nuevo conocimiento a nuevas situaciones que se nos presenten.

También hace énfasis en la planificación de la instrucción donde se deben destacar las dependencias del nuevo material con respecto a los materiales ya aprendidos anteriormente, y que la nueva actividad a ser aprendida se debe programar en una secuencia adecuada para facilitar esa integración.

Ausubel y Gagné coinciden en que un individuo tiene que dominar una etapa para pasar a la etapa siguiente. La particularidad del concepto de Ausubel es la que las ideas-ancla quedan destacadas y facilitan así la aprehensión del nuevo material.

Lo importante para el aprendizaje de informaciones, es proveer lo que Ausubel denominó contexto significativo (Ausubel, Psicología Educativa,1968).

EL APRENDIZAJE POR RECEPCIÓN CON EL APRENDIZAJE POR DESCUBRIMIENTO

Ausubel nos dice que existen dos tipos de aprendizaje, uno de ellos es el aprendizaje por recepción donde el alumno no tiene que hacer ningún descubrimiento independiente, se le exige sólo que internalice o incorpore el material que se le presenta de modo que pueda recuperarlo o reproducirlo posteriormente.

En el aprendizaje por descubrimiento el alumno descubre lo aprendido. La primera fase del aprendizaje por descubrimiento involucra un proceso muy diferente al del aprendizaje por recepción. El alumno debe reordenar la información, integrarla con la estructura cognoscitiva existente, y reorganizar o transformar la combinación integrada de manera que se produzca el producto final deseado o se descubra la relación entre medios y fines que hacia falta. Después de realizado el aprendizaje por descubrimiento se hace significativo en el aprendizaje por recepción.

Los aprendizajes por recepción y por descubrimiento, son dos tipos diferentes de procesos, la mayor parte de la enseñanza en el salón de clases esta organizada de acuerdo al aprendizaje por recepción.

Es de suma importancia, observar que los aprendizajes por recepción y por descubrimiento difieren en el desarrollo y el funcionamiento intelectual (Ausubel, "Education Theory", 1961). En su mayoría, los grandes volúmenes de material de estudio se adquieren en virtud del aprendizaje por recepción, mientras que los problemas cotidianos se resuelven gracias al aprendizaje por descubrimiento, ambas funciones coinciden en parte: el conocimiento que se adquiere a través del aprendizaje por recepción se usa también para resolver problemas de la vida diaria y el aprendizaje por descubrimiento se emplea comúnmente en el salón de clase para aplicar, extender, aclarar, integrar y evaluar el conocimiento de la materia de estudio y para poner a prueba la comprensión.

Ausubel nos dice: "Desde el punto de vista psicológico, el aprendizaje significativo por descubrimiento es más complejo que el significado por recepción: involucra una etapa previa de resolución de problemas antes de que el significado emerja y sea internalizado" (Ausubel, "Education Theory", 1961).

Si bien es cierto que la mayor parte de la enseñanza en el salón de clases es por medio del aprendizaje por recepción, el Material Didáctico elaborado en esta investigación, pretende poner en práctica el aprendizaje por <u>descubrimiento guiado</u>, de manera que el alumno reordene la información y la integre a la estructura cognoscitiva existente.

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO COMPARADO CON EL APRENDIZAJE POR REPETICIÓN

Vemos que ambos aprendizajes suelen ser confundidos. Éstas suposiciones reflejan que el único conocimiento que se posee y se entiende es aquel que uno descubre por sí mismo, ambos pueden ser repetitivos o significativos, según las condiciones en que ocurra el aprendizaje según Ausubel.

Ausubel comenta que: "Es cierto que muchos conocimientos potencialmente significativos, enseñados por exposición verbal, producen palabreríos aprendidos repetitivamente. Pero este resultado repetitivo no es inherente al método expositivo, sino que responde más bien al mal uso de tal método pues no satisface los criterios del aprendizaje significativo (Ausubel, "Education Theory", 1961)".

El realizar experimentos de laboratorio a la manera de seguir una receta de cocina, sin comprender los principios metodológicos y sustanciales que intervienen, tiene poco de método científico; tampoco descubrir las respuestas correctas a problemas de matemáticas y de ciencia, sin realmente entender lo que se esta haciendo, agrega mucho al conocimiento o a la habilidad para resolver problemas. Los alumnos logran esta proeza aprendiéndose de memoria problemas tipo y procedimientos mecánicos para manipular símbolos algebraicos. Sin embargo, debe reconocerse que el trabajo de laboratorio y el de resolución de problemas no son experiencias significativas a menos que satisfagan dos condiciones: primera, deben fundarse en conceptos y principios claramente comprendidos; y segunda, las operaciones constitutivas deben ser significativas por sí mismas.

SIGNIFICADO Y APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Según Ausubel "el aprendizaje significativo por recepción involucra la adquisición de significados nuevos. Requiere tanto de una actitud de aprendizaje significativo como de la presentación al alumno de material potencialmente significativo" (Ausubel, Psicología Educativa, 1991).

El aprendizaje significativo no es sinónimo del aprendizaje de material significativo. En primer lugar, el material de aprendizaje es sólo potencialmente significativo. En segundo término, debe estar presente una actitud de aprendizaje significativo.

"El aprendizaje significativo por recepción es importante en la educación porque es el mecanismo humano por excelencia que se utiliza para adquirir y almacenar la vasta cantidad de ideas e información representada por cualquier campo del conocimiento. La adquisición y retención de grandes cuerpos de conocimientos constituyen un fenómeno muy impresionante, considerando que los seres humanos, en primer lugar y a diferencia de las computadoras, pueden aprender e inmediatamente recordar, y en segundo lugar que la memoria para lo aprendido por repetición que reciben presentaciones múltiples es notoriamente limitada por el tiempo y con respecto a la longitud de la lista, a menos que se reproduzcan con frecuencia y se vuelvan a aprender una y otra vez" (Ausubel, Psicología Educativa, 1991).

LA NATURALEZA DEL SIGNIFICADO

El aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados, y, a la inversa, éstos son productos del aprendizaje significativo. Esto significa que el surgimiento de nuevos significados en el alumno refleja la consumación de un proceso de aprendizaje significativo.

CONDICIONES DEL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

Ausubel dice: "La esencia del proceso del aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria se entiende que las ideas se relacionan con algún aspecto existente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. El aprendizaje significativo presupone tanto que el alumno manifiesta una actitud de aprendizaje significativo, es decir una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva, como que el material que aprende es potencialmente significativo para él". (Ausubel, Psicología Educativa, 1991).

"Para que ocurra realmente el aprendizaje significativo no basta con que el material nuevo sea intencionado y sustancialmente relacionable con las ideas correspondientes y pertinentes en el sentido abstracto del término; es necesario que tal contenido ideativo existan en la estructura cognoscitiva del alumno en particular" (Ausubel, Psicología Educativa, 1991).

CRITERIOS PARA EL MATERIAL DE APRENDIZAJE

Ausubel nos dice que para que el material de aprendizaje sea significativo, éste debe ser relacionable no de forma arbitraria pero si sustancialmente con las ideas pertinentes y correspondientes que se hallan dentro de la capacidad de aprendizaje humano, para argumentar lo anterior hace mención a dos criterios que a continuación se describen:

"El primer criterio el de la relacionabilidad no arbitraria, significa simplemente que si el material en sí muestra la suficiente intencionalidad, entonces hay una base adecuada y casi obvia de relacionarlo de modo no arbitrario con los tipos de ideas correspondientes pertinentes que los seres humanos son capaces de aprender. Nos hace mención del siguiente ejemplo: Los datos sobre las temperaturas promedio mensuales de las ciudades se relacionan significativamente con un concepto de clima, y también se relacionan con ideas *acerca de la radiación solar, la posición de la órbita de la tierra, y así por el estilo,* de una manera generalmente congruente.

"El segundo criterio, es el de la relacionabilidad sustancial, significa que sí el material de aprendizaje es lo suficientemente no arbitrario, un símbolo ideativo equivalente podría relacionarse con la estructura cognoscitiva sin que hubiese ningún cambio resultante en el significado. En otras palabras, ni el aprendizaje significativo ni en el significado que surge dependen del uso exclusivo de signos particulares, y ni de otros; el mismo concepto o proposición podrían expresarse de manera sinónima y deberían seguir comunicando exactamente el mismo significado. Así por ejemplo, can, hund y chien producirían los mismos significados que perro en personas que dominan el inglés, el alemán y el francés; y la suma de los ángulos internos de un triángulo equivalen a dos ángulos recto, significaría para la mayoría de los estudiantes de geometría lo mismo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°." (Ausubel, Psicología Educativa, 1991).

Para el diseño de las lecciones que contempla este trabajo de investigación, se tomó en cuenta los criterios mencionados anteriormente donde debe existir en su contenido la suficiente intencionalidad de relacionar las ideas que intuitivamente tiene el alumno con los que es necesario que domine, por ejemplo en una parte de la lección 1, partimos de que el estudiante ya cuenta con una idea intuitiva de la recta numérica y en la cual se pretende que comprenda las operaciones de suma, resta y multiplicación de aquellos números con signos iguales o diferentes. Además se manejó una relacionabilidad sustancial en el sentido de que la simbología y conceptos que se incluyen en las lecciones, se pueden relacionar con la estructura cognoscitiva del alumno, sin que afecte lo que el intuitivamente ya sabía, dado que se pretende reforzar los conocimientos adquiridos sin afectar el significado existente y al contrario se pueda enriquecer más.

TIPOS DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO

El tipo básico de aprendizaje significativo, del cual dependen todos los demás aprendizajes de ésta clase, es el aprendizaje de representaciones, que consiste en hacerse del significado de símbolos solos o de lo que estos representan.

Ausubel nos da el siguiente ejemplo, "Cuando un niño está aprendiendo el significado de la palabra perro se le indica que el sonido de la palabra representa el objeto perro. El niño a su vez, relaciona activamente esta proposición representativa con el contenido pertinente de su estructura cognoscitiva. Así pues, consumado el aprendizaje significativo, la palabra perro es capaz de producir confiablemente una imagen compuesta de los distintos perros con los que ha tenido experiencia que es aproximadamente equivalente a la provocada por los objetos perro en particular", (Ausubel, Psicología Educativa, 1991).

EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN CONTRASTE CON EL APRENDIZAJE DE MATERIAL SIGNIFICATIVO

El aprendizaje significativo no debe interpretarse como el aprendizaje de material significativo. En aquél, los materiales sólo son potencialmente significativos. Si ya fuesen significativos, la meta del aprendizaje ya estaría realizada por definición, desde antes que el aprendizaje se intentara.

En el transcurso del aprendizaje significativo, el estudiante debe de relacionar los elementos componentes con su estructura cognoscitiva idiosincrática.

A continuación hablaremos sobre los materiales didácticos.

MATERIALES DIDÁCTICOS

Lo más importante que influye en el valor del aprendizaje de los materiales didácticos, radica en el grado en que éstos facilitan el aprendizaje significativo a los alumnos.

Es importante reconocer que la planeación del currículum es distinta a la planeación de la enseñanza. La primera centra su atención en la estructura conceptual y metodológica de las disciplinas, mientras que la segunda la dirige a la selección de actividades de aprendizaje que guarden una relación más estrecha con la estructura cognoscitiva existente en el alumno, e incorporen los conceptos y las destrezas identificados durante la planeación del currículum.

Los objetivos de aprendizaje deben especificarse de tal manera que para el estudiante resulten evidentes los conceptos o principios que deben aprenderse formulados en el lenguaje que facilite, por medio de ellos, el reconocimiento de los vínculos que existen entre lo que los alumnos ya saben y los conceptos o principios nuevos que deben aprender.

La planeación de la enseñanza exige una estimación cuidadosa de los conceptos y destrezas que los alumnos poseen y que son relevantes para las nuevas tareas de aprendizaje.

MATERIALES IMPRESOS

Es importante decir que para la trasmisión rutinaria del contenido de la materia, los materiales impresos son indudablemente el método a elegir. No sólo puede presentarse mayor cantidad de material por unidad de tiempo, sino que la velocidad de presentación queda también bajo el control del alumno. Así, éste puede avanzar de acuerdo con la inteligencia, habilidad de lectura y dominio de la materia.

SELECCIÓN DE LOS MATERIALES DIDÁCTICOS

Los Criterios de Selección de Materiales Didácticos se hacen en función del desarrollo de los objetivos de aprendizaje. Para seleccionar los materiales didácticos que se van a utilizar en una instrucción determinada es necesario valorar varios puntos como por ejemplo: los objetivos del aprendizaje que se pretenden lograr en una situación educativa donde se utilizarán los materiales didácticos. Se recomienda que para seleccionar los materiales didácticos es necesario saber varias cosas como: la población, los recursos económicos, el mobiliario, el tiempo para la elaboración del material así como el de la presentación.

Los Criterios de Evaluación de Materiales Didácticos, deben contemplar todos los diferentes elementos que inciden en el proceso de instrucción. Dado que un material didáctico abarca diferentes aspectos se sugieren cuatro criterios para su evaluación: a) Psicológicos; b) de contenido; c) pedagógicos y d) técnicos. Hablando de cada uno de los criterios diremos que el primero, es en el que se consideran aspectos psicológicos del receptor; el segundo, son criterios referidos al contenido del mensaje; el tercero, son criterios relacionados con la forma en que se estructura el material y el cuarto, son los criterios que se refieren a la calidad de la producción de los materiales audiovisuales.

En cuanto al cuidado y protección de los Materiales Didácticos, éstos deben protegerse adecuadamente, así como cuidarse, catalogarse y almacenarse. Se dice que así como existen bibliotecas, deben existir departamentos que realicen las mismas funciones pero con el material didáctico, para clasificarlos inclusive por área de estudio. Deben tener fácil acceso, para que maestros y alumnos puedan utilizarlo cuando lo necesiten. Es necesario que exista un personal que conozca de materiales didácticos, para que se encargue de dar promoción e intercambios con otras instituciones.

Intentar un aprendizaje verbal y autoritario análogo al que muchos docentes insisten en practicar es revelar un desconocimiento absoluto del acto de aprender. (como supuestamente antes se enseñaba -ej. aprender de memoria las tablas de multiplicar). La actividad matemática, que ha de vivirse para ser revivida es la única formadora, puesto que transformará a cada uno en un matemático. Por eso cada uno de los alumnos deberán ejercer su sentido relacional desde el principio y en todo momento. La abstracción ha de corresponder a la jerarquía de los sustitutos y de los símbolos que bien dirigida no ofrecerá obstáculos a los alumnos.

MODELOS PREPARADOS TOMADOS DE LA VIDA COTIDIANA

No hay que olvidar la fuente más rica e instructiva de los modelos preparados: los modelos matemáticos tomados de la vida misma.

Po ejemplo, vivimos rodeados de modelos matemáticos sin que nos llamen la atención, y ello es natural, pues la técnica que nos llena de comodidades está impregnada de matemática. Técnicos y obreros la utilizan constantemente en proyectos y construcción.

A continuación se muestran algunas lecciones que pueden extraerse de modelos insospechados que saltan a la vista.

a) Una ventana, por ejemplo, nos invita a calcular las áreas de sus formas incluidas.

b) Las progresiones en persianas, tapices, serpentinas y objetos enrollados: La persiana enrollada, o un tapiz, o una simple serpentina ofrecen un interesante desafío a la curiosidad del alumno. ¿Qué longitud tendrán una vez desenrolladas?.

c) Estructuras algebraicas en un mosaico: Los mosaicos formados por piezas triangulares.

d) La geometría que se puede desarrollar con un trozo de vidrio: Un sencillo trozo plano de vidrio de borde recto, situado verticalmente sobre el plano del dibujo, es el instrumento natural para llevar a cabo simetrías en el plano. Si el vidrio es de color oscuro, pero conservando su transparencia, la reflexión de la parte anterior del dibujo será tan clara como la visión del semiplano posterior a través del vidrio.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Objetivo

Detectar que a través del uso del: "Material didáctico para reforzar los conceptos matemáticos en estudiantes que ingresan a la carrera de Ingeniería", se mejorarán las condiciones de los alumnos.

Hipótesis del trabajo

Una vez que se haya experimentado el Material Didáctico en una muestra representativa de alumnos, estos mostrarán una mejoría en los conocimientos básicos de Matemáticas.

VARIABLES

Las variables que intervinieron en la presente investigación son:

Variable Independiente: Material didáctico para reforzar conceptos matemáticos.

Variable Dependiente: La mejoría en los conocimientos básicos de Matemáticas.

Variable de Control: El profesor aplicador.

Con el uso del "Material didáctico", se pretende que el alumno recuerde, reafirme y comprenda los temas aprendidos en grados anteriores, encontrando una forma interesante y sencilla de comprensión de temas que tal vez nunca había entendido en los grados mencionados.

La mejoría en los conocimientos básicos de Matemáticas, dependerá de que el estudiante una vez que entre en contacto con el material, cambie su manera de ver y entender las Matemáticas.

El maestro que aplique este taller, deberá ser elemento clave, dado que coordinará, que la aplicación del material sea la adecuada y se cumplan los fines que se pretenden.

SUJETOS

La población a la cual se le aplicó el Curso Taller, fue una muestra representativa de los alumnos de nuevo ingreso de la generación 2001-2004 a la Carrera de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional Autónoma de México en la Escuela Nacional de Estudios Profesionales "Acatlán", ubicada en San Juan Totoltepec s/n, Santa Cruz Acatlán, Naucalpan de Juárez Estado de México. Para tal efecto se solicitó al Departamento de Servicios Escolares, una relación de los alumnos que fueron aceptados en la Institución procedentes de escuelas Preparatorias, Colegios de Ciencias y Humanidades así como externos, con la finalidad de invitarlos por vía telefónica al curso taller y aprovechando el mes de noviembre del 2000 las fechas de inscripción a la escuela, se les entrego también por escrito una invitación alusiva al inicio del "Curso Taller". Como se puede apreciar se tuvo el cuidado de estimar que todos los alumnos de nuevo ingreso estuvieran enterados de dicho taller.

El "Curso Taller" se llevó a cabo en las instalaciones de la Escuela Nacional de Estudios Profesionales "Acatlán", en el salón A-111, ubicado en el edificio A-1 primer piso, para lo cual se solicitó vía oficio con fecha 13 de noviembre del 2000 autorización al Jefe de la División de Matemáticas e Ingeniería y al jefe del Programa de la Carrera de Ingeniería Civil, para poder usar las instalaciones mencionadas del 16 al 25 de noviembre del 2000 en un horario de 9:00 a 12:00 hrs.

INSTRUMENTOS

Los instrumentos que se utilizaron para obtener los datos necesarios para la investigación fueron:

* 14 lecciones impresas las cuales se elaboraron tomando en cuenta las investigaciones y experiencias hechas anteriormente sobre el tema, y las cuales contienen los conceptos más importantes y representativos que los alumnos deben recordar. Estas lecciones están diseñadas a manera de que cuando los alumnos analicen y contesten cada lección, éstos vayan recordando y reafirmando los conocimientos que en alguna ocasión estudiaron y aún los que nunca vieron. El contenido de las lecciones es el siguiente:

- Lección 1:	Números con signo, Racionales.
- Lección 2:	Ejes cartesianos, distancia entre dos puntos.
- Lección 3:	División de un segmento en una razón dada (1ª parte).
- Lección 4:	División de un segmento en una razón dada (2ª parte), lugares geométricos.
- Lección 5:	Graficación de expresiones algebraicas (1ª parte), simetría con respecto a los ejes coordenados, simetría con respecto al origen.
- Lección 6:	Graficación de funciones (2ª parte).
- Lección 7:	Línea recta (1ª parte), pendiente.
- Lección 8:	Línea recta (2ª parte), recta paralela, ecuación de una recta, pendiente.
- Lección 9:	Línea recta (3ª parte).
- Lección 10:	Circunferencia (1ª parte), ecuación de la circunferencia.
- Lección 11:	Circunferencia (2ª parte).
- Lección 12:	Circunferencia (3ª parte).
- Lección 13:	Parábola (1ª parte).
- Lección 14:	Parábola (2ª parte).

* En la lección 1, a partir de los conocimientos que tiene el alumno sobre la recta numérica y el álgebra, se pretende que comprenda la suma, resta y multiplicación de aquellos números o expresiones algebraicas con signos iguales o diferentes, estableciendo así, las reglas respectivas de los signos resultantes a dichas operaciones. También teniendo en cuenta los antecedentes básicos de los números racionales y con base a representaciones de áreas sombreadas y de problemas prácticos, se intenta dejar claro dicho concepto, realizando sus operaciones respectivas.

* En la lección 2, partiendo de los conocimientos sobre las características de los ejes cartesianos incluyendo sus sentidos y la ubicación de coordenadas de puntos, se pretende que al alumno le quede claro el concepto de distancia entre dos puntos que se encuentran sobre alguno de los ejes coordenados y a partir de esto generalice para puntos en rectas paralelas, y usando el teorema de Pitágoras llegue al caso general.

* En las lecciones 3 y 4, a partir de la idea intuitiva que tiene el alumno de dividir un segmento en partes iguales; por ejemplo para dividir un segmento en 3 partes, cada una de ellas tiene una longitud de la tercera parte de la original, a partir de esta idea se pretende llegar primero al uso intuitivo y después al uso general.

* En las lección 5 y 6, a partir de la idea intuitiva de las simetrías y la graficación de expresiones algebraicas como las funciones, se pretende que le queden claro los criterios de simetría así como también, comprenda el concepto de dominio de una función, el concepto de función definida y la recta asintota (el concepto de función no se define).

* En las lecciones 7, 8 y 9, a partir de algunas ideas intuitivas de la trigonometría, se pretende que comprenda el concepto de pendiente en diferentes posiciones de rectas.

* En las lecciones 10, 11 y 12, tomando en cuenta los conocimientos que tiene el alumno del círculo ya que lo viene manejando desde la primaria, se pretende que el estudiante partiendo de ciertas condiciones, encuentre la expresión algebraica de una circunferencia así como también partiendo de una expresión pueda trazar la gráfica.

* En las lecciones 13 y 14, partiendo del concepto geométrico de la parábola, se pretende que confirme sus conocimientos de representación, por medio de su fórmula y trazo, con todas las características que en ellas se implican.

* Se aplicó al final del curso taller un cuestionario a los alumnos que tomaron el "Curso Taller", para conocer algunos datos académicos importantes, ver formato 1.

* Se aplicó un cuestionario a los alumnos que tomaron el "Curso Taller", éste se llevó a cabo después de finalizado el semestre 2001-1. El propósito radicó en saber de los estudiantes sus experiencias vividas durante el curso taller y su semestre lectivo 2001-1. Ver formato 2.

* Se realizó un seguimiento detallado del grupo prueba referente a su rendimiento en calificaciones obtenidas durante y al final del primer semestre de la carrera de Ingeniería Civil.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

INSTRUCCIONES: Marca con una "x" la opción correcta.

1.-¿En qué opción escogiste la carrera de Ingeniería para ingresar a la UNAM?.

a) Primera. b) Segunda. c) Ninguna.

2.-Si no elegiste la carrera de Ingeniería Civil, indica las carreras que seleccionaste en la primera y segunda opción.

1ª opción: ____________________ 2ª opción: ____________________

3.-¿De qué escuela Media Superior provienes?.

a) Preparatoria. b) Colegio de Ciencias y Humanidades.

c) Bachilleres. d) Sistema Incorporado a la UNAM.

e) Otro (indica cual): ______________________________

4.-¿Qué área estudiaste en el Nivel Medio Superior?.

a) Físico Matemáticas. b) Químico Biológicas.

c) Económicas Administrativas. d) Sociales.

e) Artes. f) Otra (indica cual): ____________

5.-¿Qué promedio obtuviste en el Ciclo Medio Superior?.

a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

6.-¿En cuánto tiempo terminaste el Ciclo Medio Superior?.

a) 2 años b) 3 años c) 4 años d) 5 años

FORMATO 1

Nombre del alumno: ______________________ Fecha: ______________

CUESTIONARIO

El "Curso Taller de Geometría Analítica" que se te impartió antes de iniciar el semestre 2001-I, ¿consideras que te beneficio para sacar mejores calificaciones en tus materias del primer semestre en la carrera de Ingeniería Civil?. ¿Por qué si?. ¿Por qué no?.

Consideras que el tiempo en que se te impartió el "Curso Taller" que consistió de 7 días con tres horas diarias, ¿fue el adecuado?. ¿Qué propondrías?.

¿Qué te motivo a tomar el "Curso Taller"?.

¿Te gustó la forma en que se te dio el "Curso Taller"?. ¿Que sugerencias darías?.

¿Se te dificultó comprender alguna lección?. ¿Cuál? y ¿Por qué?.

¿Tendrías algún comentario referente al "Curso Taller"?.

¿Qué otros temas te hubiera gustado ver?.

FORMATO 2

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Se llevó a cabo un análisis detallado referente a cuál es el grado de manejo de los conceptos básicos en Matemáticas que poseen los alumnos de nuevo ingreso a la carrera de Ingeniería Civil, tomando como referencia los resultados de los exámenes diagnósticos a los cuales se hace referencia en el Capítulo I, y a la misma experiencia que se tiene al impartir cursos a los estudiantes de los semestres iniciales. Dado que los datos recopilados no son nada alentadores, nos lanzamos a la gran aventura de crear un Material Didáctico que apoye a los alumnos a comprender los conceptos importantes que requieren.

El curso taller inició el día 16 y terminó el día viernes 24 de noviembre del 2000.

Se llevó un control de asistencia a los alumnos que tomaron el "Curso Taller" .

El día de inicio del curso, el M. en C. Juan B. Recio Zubieta y el que suscribe Ing. Francisco Mejía Meza, como primera actividad fue la de presentarnos ante los alumnos y viceversa con la finalidad de conocernos, así como también se les indicó a detalle la forma en que sería coordinado y aplicado el "Curso Taller".

La duración del "Curso Taller" se programó de 21 horas, durante 7 días y en un horario de 9:00 a 12:00 hrs.

La dinámica del "Curso Taller" consistió en dividir cada sesión en dos partes, cada una de ellas con una duración de hora y media, durante el tiempo asignado, el alumno pudo resolver cada una de las lecciones contempladas, las cuales las analizó y resolvió en orden ascendente.

Dentro de las indicaciones que se le dieron a los alumnos al iniciar el "Curso Taller", se encuentran las siguientes:

* Leer con calma los enunciados y resolver cada una de las lecciones.

* El alumno puede trabajar en equipo al estar resolviendo la lección, es decir tiene la libertad de consultar con alguno o algunos de sus compañeros alguna duda, con la finalidad de que ambos aclaren sus dudas.

* Si existiera alguna duda, el alumno o los alumnos podrán manifestarla al aplicador para que ésta sea aclarada.

* Una vez que esté resuelta cada lección, ésta será entregada al aplicador, y éste a su vez la regresará al día siguiente con los comentarios y observaciones pertinentes.

Se llevó un control detallado del rendimiento de los cuatro grupos de nuevo ingreso a la carrera de Ingeniería Civil, es decir de los grupos 1101 y 1102 del turno de la mañana y de los grupos 1151 y 1152 del turno de la tarde, en las asignaturas del primer semestre de la carrera, que incluyen: "Álgebra Superior", "Cálculo Diferencial e Integral", "Física" y "Geometría Analítica".

El curso taller se llevó a cabo una semana antes de iniciar el año lectivo: 2000-2001 (el semestre inició el día 27 de noviembre del 2000).

CAPÍTULO IV

MARCO OPERATIVO

Los instrumentos con los que se trabajó para el proyecto de tesis fueron: 14 lecciones, aplicación del Curso Taller, aplicación de dos cuestionarios, análisis del comportamiento de calificaciones de los alumnos de nuevo ingreso y resultados.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES

Las lecciones fueron elaboradas en computadora impresas en hojas tamaño carta con las siguientes características:

* Cuadro de datos generales, el cual contiene:
  - Nombre de la Institución: "Universidad Nacional Autónoma de México".
  - Nombre de la escuela: "Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán".
  - Nombre del curso: "Curso Propedéutico".
  - Número de la Lección.
  - Nombre del alumno.
  - Número de cuenta del alumno.
  - Grupo del alumno.
  - Semestre.
  - Fecha.
* Tema.
* Introducción.
* Ejemplos Resueltos.
* Ejercicios para resolver.
* Tareas a resolver con ejercicios de diferente grado de dificultad.

Las lecciones diseñadas fueron proporcionadas en fotocopias a cada uno de los integrantes del grupo prueba que asistieron al Curso Taller.

LOS MATERIALES

Las lecciones que se utilizaron como material didáctico que contemplan 14 lecciones se muestran en el anexo.

RECOMENDACIONES PARA ANTES DE INICIAR LAS ACTIVIDADES

* Tener un espacio físico, es decir un salón, así como el material de apoyo necesario para trabajar, como puede ser: Pizarrón, gis y borrador.

* Tener los materiales suficientes (hojas, lápices, gomas) para las actividades a desarrollar.

* Estimar el tiempo adecuado para cada una de las lecciones, sin rebasar un tiempo promedio de hora y media con la finalidad de ver dos lecciones por día.

* Invitar a los alumnos a aclarar sus dudas en equipo, es decir consultando a sus compañeros o en el último de los casos con el aplicador.

RECOMENDACIONES PARA INICIAR EL CURSO TALLER

* Obtener el número de copias suficientes de las lecciones de acuerdo a la población con que se trabajará.

* Iniciar al mismo tiempo con todos los alumnos la aplicación de cada una de las lecciones.

* Llevar un control de asistencia de los alumnos que tomen el curso.

* Iniciar y terminar puntualmente las lecciones aplicadas.

* El aplicador debe estar siempre presente durante la aplicación del curso taller para auxiliar a los alumnos aclarando las dudas existentes.

RECOMENDACIONES PARA DESPUÉS DE CADA ACTIVIDAD

* Hacer un análisis junto con los alumnos del contenido, grado de dificultad y desarrollo de las lecciones resueltas en cada sesión.

* Tener la certeza por parte del aplicador de que no hay duda alguna de los alumnos con respecto a cada uno de los conceptos de las lecciones.

* Los alumnos dejarán las lecciones analizadas en cada sesión al aplicador al término del día, con la finalidad de que éste les haga los comentarios y sugerencias pertinentes las cuales se les entregarán al día siguiente.

* Una vez entregadas las lecciones calificadas a los alumnos, solicitarles que las analicen nuevamente en casa, para que disipen las dudas y errores que tuvieron en cada una de ellas.

OBSERVACIONES EN EL DESARROLLO DEL TALLER

Se observaron las actitudes, aptitudes y comportamiento del grupo experimental durante el desarrollo de las lecciones, las cuales fueron las siguientes:

* Los alumnos asistieron al Curso Taller puntualmente y con muchos ánimos de trabajar.

* Al iniciar el curso taller se les comentó a los alumnos que estarían presentes dos aplicadores que los apoyarían en las aclaraciones de sus dudas.

* Se observó que los alumnos tal vez por no conocerse entre sí y a pesar de que se les indicó que podrían trabajar en equipo para aclarar sus dudas, esto no fue posible dado que siempre estuvieron trabajando solos.

* En las lecciones: #1, #2, #3, #4, #5, #6, #13 y #14, los alumnos utilizaron las tres horas de cada sesión para resolver dos lecciones, sin embargo las lecciones: #7, #8, #9, #10, #11 y #12, se les facilitó más a los alumnos por lo que resolvieron tres lecciones por cada sesión.

* Durante el desarrollo del taller se pretendió romper el esquema tradicional de enseñanza por parte de los profesores y se trató de que ellos por sí mismo aclararan la mayoría de sus dudas.

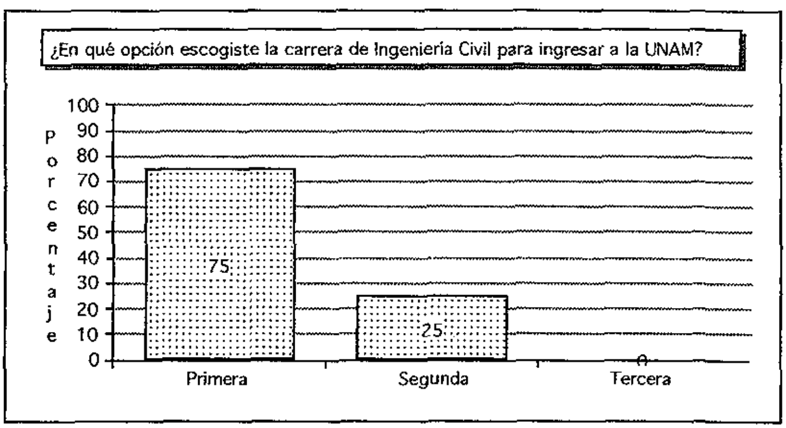
* Todos los alumnos estuvieron colaborando en forma disciplinada y formal durante el taller demostrando mucho interés por aprender los conceptos básicos.

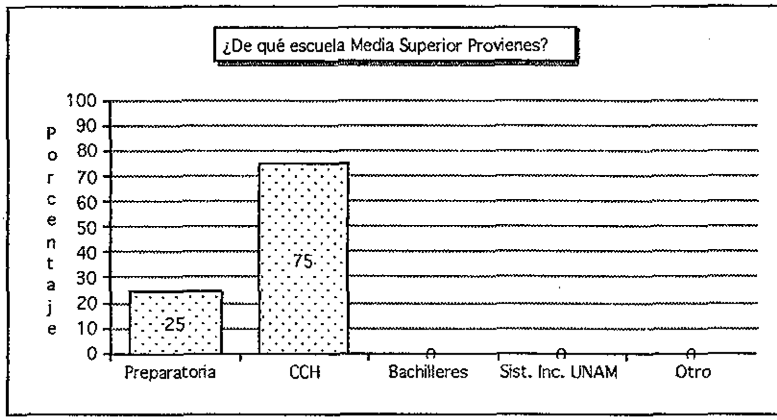
ENTREVISTAS

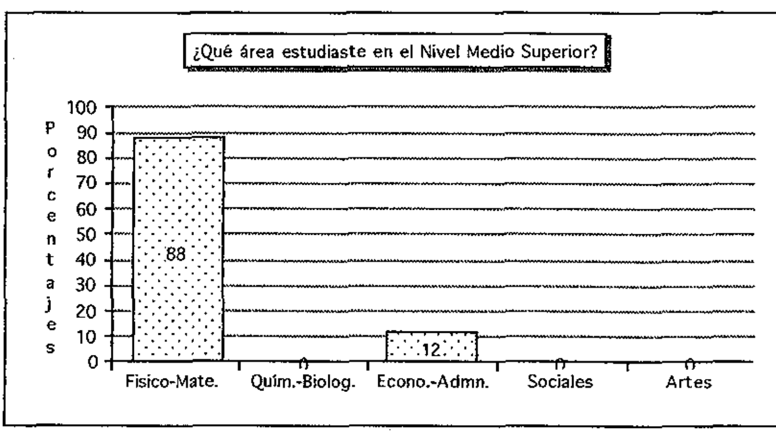
Los alumnos que tomaron el curso taller fueron entrevistados vía cuestionario al inicio del mismo para conocer algunos aspectos académicos importantes y al final del semestre para ver los logros y experiencias en la materia de Geometría Analítica y en sus demás asignaturas del área básica.

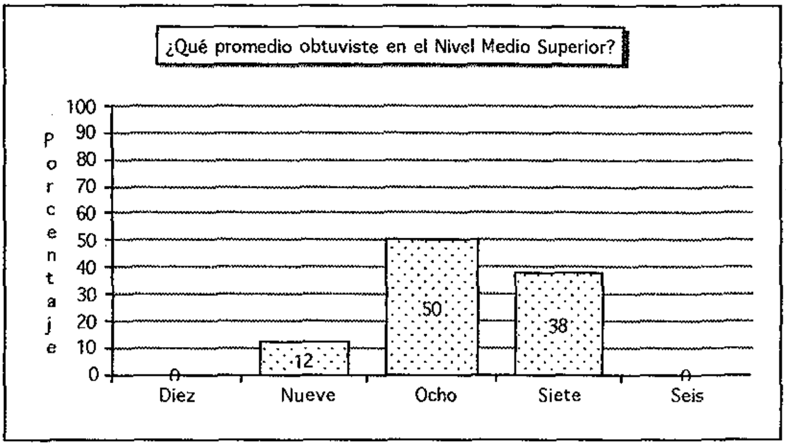
A continuación se muestran las gráficas:

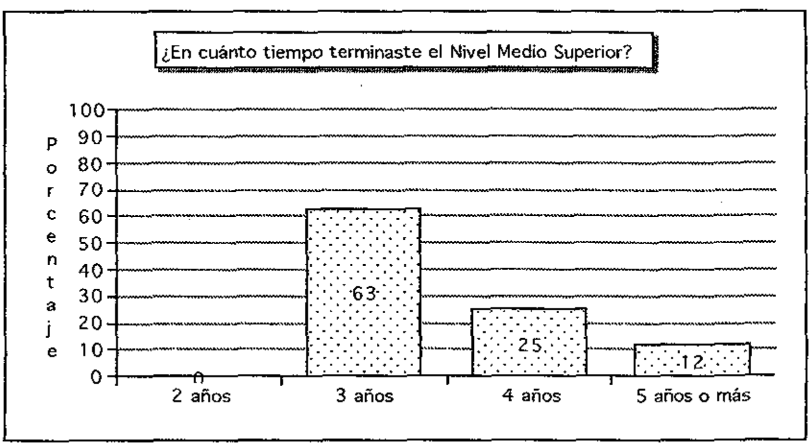
DATOS ESTADÍSTICOS DE LA ENCUESTA




¿De qué escuela Media Superior Provienes?
Porcentaje
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
25
75
0
0
0
Preparatoria
CCH
Bachilleres
Sist. Inc. UNAM
Otro


¿Qué área estudiaste en el Nivel Medio Superior?
Porcentajes
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
88
0
12
0
0
Fisico-Mate.
Quím.-Biolog.
Econo.-Admn.
Sociales
Artes


¿Qué promedio obtuviste en el Nivel Medio Superior?
Porcentaje
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
12
50
38
0
Diez
Nueve
Ocho
Siete
Seis


¿En cuánto tiempo terminaste el Nivel Medio Superior?
Porcentaje
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
63
25
12
2 años
3 años
4 años
5 años o más

RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS QUE TOMARON EL CURSO TALLER AL CUESTIONARIO APLICADO AL FINAL DEL SEMESTRE.

El "Curso Taller de Geometría Analítica" que se te impartió antes de iniciar el semestre 2001-I, ¿consideras que te benefició para sacar mejores calificaciones en tus materias del primer semestre en la carrera de Ingeniería Civil?. ¿Por qué si?. ¿Por qué no?.

* Sí porque en mi caso perdí dos años y no me acordaba de mucho, aunque no fueron buenas mis calificaciones, si me ayudó.
* Por supuesto, un repaso de lo que uno ya conoce siempre es benéfico, y sí influye de manera significativa, ya que obtuve buena calificación en todas las materias no sólo en Geometría Analítica.
* No tanto en calificaciones pero en aprendizaje me benefició demasiado pues en el CCH no presté atención a los cursos.
* Sí, porque algunos temas y problemas que analizamos en el curso taller los retomamos en clase y ya teníamos el conocimiento.
* Sí, porque el curso fue práctico y además temático, por lo que era difícil no entender los temas, además cuando tuve dudas sobre alguno de estos temas sólo basto con darle una leída a las lecciones vistas en el Curso Taller.
* Sí porque recordé algunas cosas.
* Sí, porque pude obtener en dicho taller conocimientos que no sabía, y algunos que no recordaba.
* Sí, porque me puso al corriente en los temas que ya no recordaba.

Consideras que el tiempo en que se te impartió el "Curso Taller" que consistió de 7 días con tres horas diarias, ¿fue el adecuado?. ¿Qué propondrías?

* No, yo creo que mínimo debería ser de dos semanas y cuatro horas por día.
* No estaría mal si fueran diez días, esto no quiere decir que el curso no es suficiente, pero como repito un repaso más extendido sería excelente.
* Fue adecuado pero pienso que deberían ser más horas, mínimo diez.
* Para todo se necesita un poco más de tiempo y creo que si fueran otros cinco días más, sería mejor la preparación.

* Sí, porque fue un horario accesible y además fue dado por buenos profesores, quiero comentar que ellos se preocuparon porque aprendiéramos cada uno de nosotros. En lo personal propondría que dichos maestros impartieran las asignaturas de Geometría Analítica.
* Los días están bien pero las horas están juntas, lo que propongo es que haya pausas entre lección y lección.
* Sí, aunque me extrañó mucho que no hubiera más compañeros tomando el Curso Taller.
* Sí, porque aproveché al máximo las lecciones.

<u>¿Qué te motivó a tomar el "Curso Taller"?.</u>

* El recordar algunos temas que ya se me habían olvidado.
* Después de un largo receso en el estudio consideré necesario tomarlo.
* Me motivó el haber entrado a una carrera de mi preferencia.
* A que tenía dudas acerca de la asignatura de Geometría Analítica y me sirvió mucho para resolver algunas de esas dudas.
* El pensar que una semana antes podría recordar detalles que no se deben olvidar. Y por supuesto llegar con ritmo a una nueva etapa de mi formación como profesional.
* El recordar los temas ya vistos en los grados anteriores.
* En aprovechar los conocimientos para entrar mejor preparado al primer semestre de la carrera de Ingeniería Civil.
* Estaba atrasado en conceptos y quería empezar bien el primer semestre de mi carrera.

<u>¿Te gustó la forma en que se te dio el "Curso Taller". ¿Qué sugerencias darías?.</u>

* Sí, fue muy amena la forma de impartición del curso y fue bueno el que explicaran los temas básicos de la Geometría Analítica.
* En general sí, y sugeriría que se dedicara una hora más por sesión para que el profesor aplicador pudiera dar más ejemplos similares a los que contienen las lecciones del Curso Taller.

* Así como tomé el curso me gustó, pero sugeriría más explicaciones de los temas por parte de los profesores aplicadores.
* La forma en que se dio el curso fue buena.
* Sí, y como mencioné anteriormente me gustaría que los profesores que aplicaron el taller fueran los mismos que impartieran la materia de Geometría Analítica, además considero importante que al inicio del curso normal de la signatura mencionada, se tenga una relación estadística de la forma cómo llegan los alumnos al primer semestre referente a conocimientos básicos.
* Sí, el curso estuvo bien, las explicaciones estuvieron concretas, claras y sencillas.
* Sí, y me gustaría que se dieran más horas de curso.
* Sí, y considero importante que los profesores que aplicaron este taller sean los mismos que lo sigan impartiendo en generaciones posteriores.

¿Se te dificultó comprender alguna lección?. ¿Cuál? y ¿por qué?.

* No, pero no recordaba muy bien los temas y necesito más tiempo para comprenderlas.
* No, pero considero que nos faltó un poco más de tiempo para estudiar elipse y circunferencia con más detalle.
* No, aunque cuando me surgían dudas de algún concepto, después de dos o tres leídas a las lecciones ya lo comprendía mejor y se me aclaraban las dudas.
* No, porque las dudas que teníamos, los maestros aplicadores del Curso Taller nos daban la confianza necesaria para que pudiéramos preguntar y aclarar las dudas.
* No, porque las lecciones son temáticas.
* No, ninguna.
* Sí, la lección #4, ya que no comprendí bien el contenido.
* No tuve problemas con las lecciones.

¿Tendrías algún comentario referente al "Curso Taller"?.

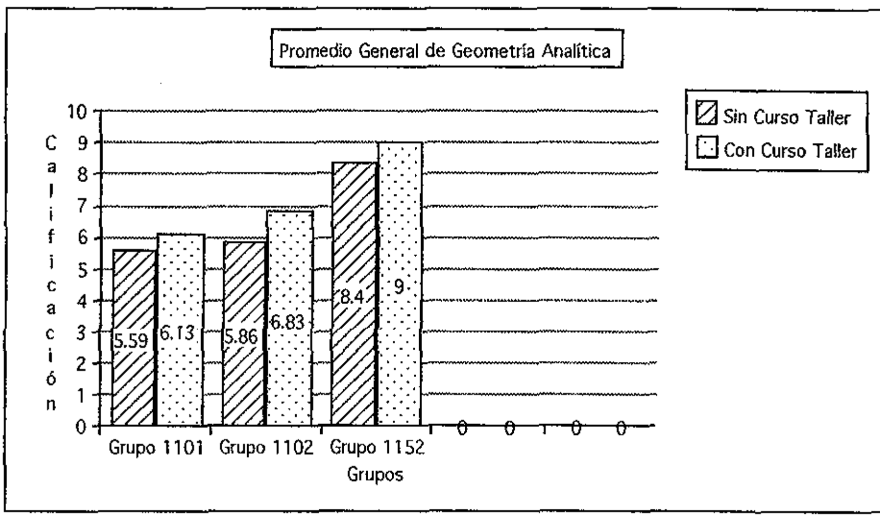
* Que fueran un poco más extensos los temas y que hubieran abarcado más temas de otras materias.
* Que el taller debe seguir aplicándose y no sólo a los de nuevo ingreso, sino a los demás estudiantes que van a seguir con la carrera de ingeniería.
* Que lo siguieran haciendo para las demás generaciones.
* Que el Curso Taller de Geometría Analítica se tome como referencia para que se desarrolle material para otras asignaturas.
* Sugeriría que a la mitad del curso normal del semestre se imparta un taller de Álgebra y la otra mitad un taller de Geometría Analítica.
* Que asistieran más alumnos al Curso Taller, porque considero que la mayoría de alumnos de nuevo ingreso estamos deficientes en conocimientos de conceptos matemáticos básicos y con el curso avanzaríamos y progresaríamos en nuestros estudios.
* No tengo comentario alguno.
* Que se siga aplicando el Curso Taller en generaciones siguientes.

¿Qué otros temas te hubiera gustado ver?.

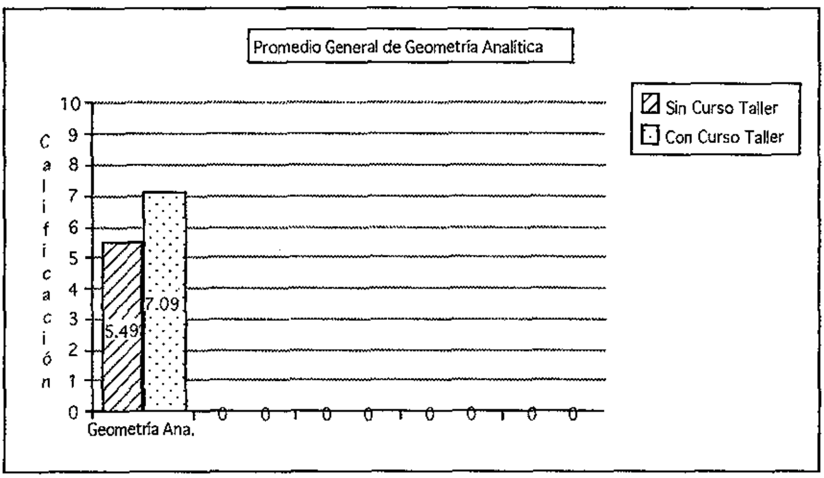
* Temas de Física y de Cálculo Diferencial e Integral.
* Después de haber terminado el primer semestre y viendo mis resultados de calificación en la materia de Física, creo que un Curso Taller de Física sería estupendo para los alumnos de nuevo ingreso.
* Temas de Física, Química y de Álgebra.
* Me hubiera gustado ver temas de Física, teoría sobre autocad, y un poco de las materias de inicio de semestre Álgebra y Cálculo Diferencial e Integral.
* Física y un poco más de Geometría Analítica.
* Física.
* Vectores e integrales.
* Vectores.

A continuación veremos las gráficas de aprovechamiento de los alumnos que tomaron el Curso Taller y los que no lo tomaron:

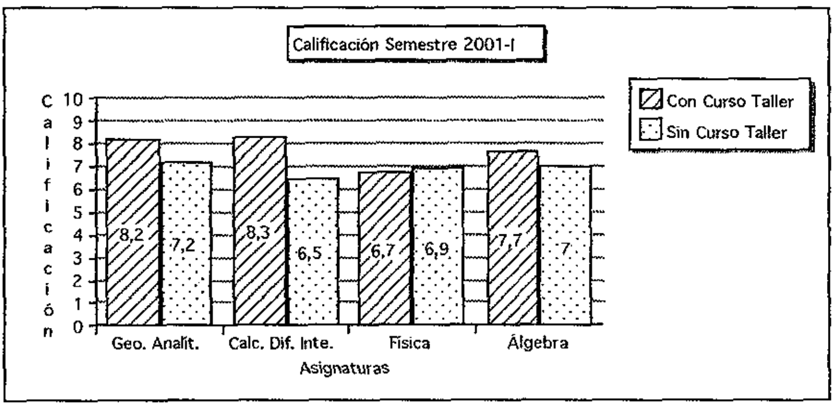
GRÁFICA DE RESULTADOS DEL PRIMER PARCIAL DE LA MATERIA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



GRÁFICA GENERAL DE LA GENERACIÓN 2001-1 EN LOS RESULTADOS DE CALIFICACIÓN FINAL DE LA MATERIA DE GEOMETRÍA ANALÍTICA



GRÁFICA DE LAS CALIFICACIONES OBTENIDAS POR EL GRUPO PRUEBA Y EL RESTO DE LOS ALUMNOS EN 4 ASIGNATURAS DEL PLAN DE ESTUDIOS DE LA CARRERA DE INGENIERÍA AL FINAL DEL SEMESTRE 2001-1



CAPÍTULO V

CONCLUSIONES GENERALES

CONCLUSIONES

Una vez que analizamos los resultados obtenidos con la aplicación del Curso Taller, los comentarios hechos por los alumnos en el cuestionario aplicado al final del semestre de la carrera de Ingeniería y la mejora en los resultados estadísticos de las notas obtenidas por los alumnos en sus asignaturas del primer semestre, podemos concluir lo siguiente:

* Se puede apreciar una mejora en las calificaciones que obtuvieron los alumnos que llevaron el Curso Taller respecto al resto de sus compañeros que no tomaron el curso.

* El Curso Taller ayudó a los alumnos a reafirmar sus conocimientos en conceptos de Matemáticas y recordar los conocimientos vistos en grados anteriores.

* El Curso Taller fue de utilidad a los alumnos, ya que propició que se les dificultará menos el entender los temas de la asignatura de Geometría Analítica durante el desarrollo del semestre.

* La dinámica del Curso Taller fue de su agrado, como lo manifestaron los alumnos.

* Se pudo observar que la lección #4 que consiste en la "División de un segmento", les fue un poco difícil comprender el contenido.

* El curso probablemente propició que se elevara la autoestima de los alumnos, ya que se sintieron con los elementos necesarios para estudiar las asignaturas propias del primer semestre de la carrera de Ingeniería.

* Los alumnos que tomaron el Curso Taller iniciaron el semestre de la carrera, con más confianza y seguridad que el resto de sus compañeros.

* El Curso Taller pudiera propiciar un cambio en la forma tradicional de enseñar Matemáticas.

* El curso ayudó a homogeneizar los conceptos Matemáticos inclusive a los alumnos que habían dejado algún tiempo de estudiar antes de entrar a la Licenciatura.

* Se pudo observar que el curso ayudó a los alumnos a no sólo obtener buena calificación en la asignatura de Geometría Analítica, sino también en otras materias del área de Matemáticas.

* El Material Didáctico del curso fue práctico, sencillo y amigable a los alumnos.

* Es probable que el Curso Taller ayude a los alumnos a iniciar mejor preparados la carrera de Ingeniería.

* Es recomendable que el Curso Taller se siga aplicando no sólo a los alumnos de nuevo ingreso, sino que se debe adecuar y aplicar a los demás estudiantes de semestres más avanzados.

SUGERENCIAS

* De acuerdo a los resultados de esta investigación, se sugiere tomar este trabajo como referencia para elaborar Material Didáctico que beneficie a los alumnos en otras asignaturas y áreas.

* Por los comentarios hechos de alumnos que tomaron el Curso Taller, es necesario que el tiempo designado para impartirlo no sea de dos lecciones por sesión, sino de una sola lección por día.

* En la Universidad es necesario contar con proyectos de este tipo para ayudar a los alumnos a mejorar sus conocimientos en Matemáticas.

* En futuras aplicaciones de este material a los alumnos de nuevo ingreso, es conveniente que al hacer la invitación a los estudiantes a tomar el curso, ésta se haga haciendo partícipe a los padres de familia, para que también hagan labor de convencimiento y envíen a sus hijos.

* Es conveniente que los Materiales Didácticos sean elaborados por los profesores que imparten las asignaturas.

* Se pudo apreciar que los alumnos que tomaron el curso no pudieron trabajar en equipo, por lo que se sugiere tener una actividad de integración con los alumnos antes de iniciar el Curso Taller.

BIBLIOGRAFÍA.

* Ausubel David P, Novak Joseph D, y Hanesian Helen. "Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo", México, editorial Trillas, Quinta reimpresión, 1991.

* Ogalde Isabel Careaga, y Bardavid Esther Nissim. "Los materiales didácticos. Medios y recursos de apoyo a la Docencia", México, editorial Trillas, 1991.

* Araújo Joao B. y Chadwick Clifton B. "Tecnología educacional. Teorías de instrucción", Barcelona, editorial Paidós educador, 1993.

* Scott Patrick; "Introducción a la investigación y evaluación educativa", Maestría en Educación Matemática, UNAM, México, 1991.

* Gattegno, C.; "La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 3-12.

* Servais, W.; "Concreto-Abstracto" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 13-31.

* Castelnuovo, Emma.; "El objeto y la acción en la enseñanza de la geometría intuitiva" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar. Madrid, 1967. pp 32-54.

* Nicolet, J. L.; "Intuición matemática y dibujos animados" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 55-73.

* Fletcher, T. J.; "Los problemas del filme matemático" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 74-93.

* Motard, Lucien.; "Las técnicas del dibujo animado matemático" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 94-96.

* Gattegno, Caleb.; "La enseñanza por el filme matemático" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 97-114.

* Campedelli, Luigi.; "Los modelos geométricos" en : "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 115-146.

* Biguenet, A.; "Modelos animados para la enseñanza de la geometría" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 147-165.

* Peskett, J. W.; "Métodos de fabricación de modelos y materiales necesarios" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 166-191.

* Puig, Pedro Adam.; "Modelos preparados y modelos realizados" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 192-209.

* Gattegno, Caleb.; "Materiales multivalentes" en: "El material para la enseñanza de las Matemáticas", Editorial Aguilar, Madrid, 1967. pp 210-226.

* Pansza, Margarita, "Los Medios de Enseñanza Aprendizaje", en: Perfiles Educativos. Núm. 3, Enero-Febrero-Marzo, 1979 UNAM, Págs. 28-36.

* Ruiz, Enrique Velasco Sánchez, "La informática como medio de enseñanza y objeto de aprendizaje", en: Perfiles Educativos. Núm. doble, julio-diciembre, 1990 UNAM, Págs. 37-43, 49-50.

* Poly, André.; "Las técnicas audiovisuales y la enseñanza de las Matemáticas" en : "Las técnicas audiovisuales al servicio de la enseñanza", Editorial El Ateneo, pp 215-224.

* Mercedes, Charles C.; "La televisión usos y propuestas educativas" en: Perfiles Educativos. Núm. 36, abril-mayo-junio, 1987 UNAM, Págs. 3-15.

ANEXOS

ANEXO I

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 1

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno   Apellido materno   Nombre(s)

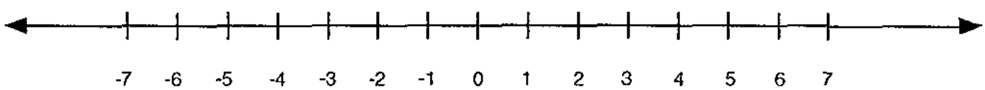
Semestre : 2001-I   Fecha: ____________________

****

Conceptos básicos (repaso):

I.- Números con signo:

Vamos a recordar lo que aprendiste en álgebra, para ello nos valdremos de la recta numérica.



Resuelve las siguientes sumas:

a) 3 + 4 =

b) (-5) + (-4) =

c) 2 + 6 =

d) (-3) + (-2) =

¿Pudiste resolverlas todas? espero que sí. Vamos a analizar qué sucede en la recta numérica con estas sumas:

Si observamos que los positivos están a la derecha del cero y los negativos a la izquierda, para la primera suma podemos pensar en partir del 3 y avanzar 4 espacios hacia la derecha (el 4 es positivo) hasta el 7. Para la segunda suma podemos partir del -5 y avanzar 4 espacios hacia la izquierda (-4 es negativo) hasta el -9.

Para la tercera si partimos de 2 y avanzamos a la derecha llegamos al 8; siguiendo este proceso para la cuarta llegaremos al -5.

En las sumas anteriores los dos sumandos tenían el mismo signo ¿qué pasa si los signos son distintos?. Resuelve:

e) 4 + (-2) =

f) (-6) + 7 =

Si usaste la recta numérica para el inciso e) te paraste en el 4 y avanzaste hacia la izquierda 2 espacios llegaste al 2; para el inciso f) te paraste en -6 y avanzaste 7 espacios hacia la derecha y terminaste en 1.

La recta numérica es muy útil con números pequeños; pero nos causa problemas cuando los números son muy grandes, ya que sería muy difícil dibujar en nuestro cuaderno una recta que tuviera al -324 y al 648 al mismo tiempo; vamos entonces a analizar nuestros resultados para tratar de sacar reglas que nos faciliten la suma de dos números con signo.

Al observar todas las sumas puedes notar que sí los sumandos tienen el mismo signo, el resultado se obtiene sumando y si tienen signos diferentes el resultado se obtiene restando, esto nos permite establecer una primera regla:

A) *Signos iguales sumamos, signos diferentes restamos.*

Surge una pregunta, ¿qué hacemos con el signo?. Vamos a observar otra vez nuestras sumas: *todos los resultados llevan el signo del número de mayor valor absoluto* (¿qué es esto?). El valor absoluto es el número sin su signo, por ejemplo $|6| = 6$ (las barras significan valor absoluto), $|-7| = 7$. Ahora podemos escribir nuestra segunda regla:

B) *El signo del resultado es el del sumando de mayor valor absoluto.*

Ejemplos:

(-47) + 56 = 9; 38 + (-83) = -45; (-26) + (-14) = -40; 84 + 68 = 152

Resuelve las siguientes restas:

a) 8 - (3) =

b) 5 - (7) =

c) $9 - (-6) =$

d) $-4 - (2) =$

e) $-1 - (-8) =$

¿Pudiste resolverlas todas?. Las respuestas son:

a) 5 b) -2 c) 15 d) -6 e) 7

Vamos a ver dos problemas:

1°.- Tengo 27 canicas y me quitan 14. ¿Cuántas me quedan?.
2°.- Debo $48.00 y le quitan a mi deuda $25.00. ¿Cuánto debo?.

Analizaremos el segundo problema:

Si debo $48.00 es como si tuviera -$48.00, si quitan a la deuda $25.00 (quitan -$25.00) me quedan $23.00 de deuda (tengo -$23.00), veamos las operaciones:

$(-48) - (-25) = (-48) + 25 = -23$

¡Cambiando el signo a la que restó la operación se vuelve una suma!.

Analicemos ahora las operaciones del primer problema:

$27 - 14 = 27 + (-14) = 13$

¡Cambiando el signo a la que restó la operación se vuelve una suma!.

¿Sabes qué es el simétrico de un número?. Es el mismo número pero cambiado de signo (se cambia - por +, o + por -).

Las operaciones de suma y resta cuando trabajamos con números con signo se vuelven una sola siempre que en la resta se tome el simétrico del número que se quita. Esta operación única es la suma con las reglas que vimos anteriormente.

Vuelve a realizar las restas anteriores y comprueba tus resultados.

Realiza las siguientes multiplicaciones:

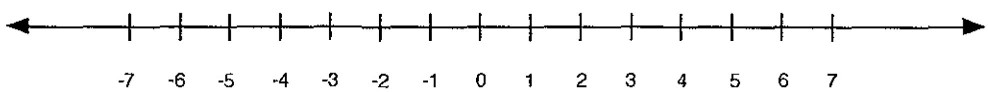
a) (3) (2) =

b) (3) (-2) =

c) (-3) (2) =

d) (-3) (-2) =

¿Pudiste resolverlas todas?. El problema no está en el número del resultado sino en su signo. Vamos a usar otra vez la recta numérica.



¿Recuerdas qué significa (3) (2)?. Si nos regresamos a la primaria diríamos que significa tres veces el dos (usando la conmutatividad también se puede decir dos veces el tres). En nuestra recta numérica tres veces dos nos lleva a seis (el dos es positivo).

¿A dónde llegamos si tomamos tres veces menos dos [(3) (-2)]?, a menos seis ¿estás de acuerdo?. Si consideramos la propiedad conmutativa es lo mismo que menos dos veces el tres (lo cual quiere decir que el tres hay que tomarlo dos veces para la izquierda ya que sí dos veces respeta el sentido, menos dos veces lo debe cambiar).

¿Qué será menos tres veces el dos [(-3) (2)]? y ¿menos tres veces el menos dos [(-3) (-2)]?.

Al observar lo anterior podemos sacar dos reglas de la multiplicación de números con signo:

A) Signos iguales da un resultado positivo.

B) Signos diferentes da un resultado negativo.

¿Qué signo debe llevar un número elevado a una potencia par (2, 4, 6, etc.)? ¿por qué?. Recuerda la definición de potencia. Por ejemplo ¿qué signo llevan los siguientes resultados (no hagas la operación, sólo escribe el signo)?:

1) $(-2)^2 =$ 2) $(4)^2 =$ 3) $(-5)^4 =$ 4) $(3)^6 =$

¿Qué signo debe llevar un número elevado a una potencia impar (3, 5, 7, etc.)? ¿por qué?. Por ejemplo, ¿qué signo llevan los siguientes resultados (no hagas la operación, sólo escribe el signo)?:

1) $(3)^3 =$ 2) $(-2)^5 =$ 3) $(-1)^7 =$ 4) $(4)^3 =$

En Álgebra necesitas sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios; para ello utilizas las reglas que acabamos de trabajar (las leyes de los signos para la división son las de la multiplicación) y las leyes de los exponentes si multiplicas o divides polinomios.

Realiza las siguientes operaciones con polinomios:

a) $(3ab - 5a^2 b + 7ab^2) + (4ab + 2a^2 b - 9ab^2) =$

b) $(4a^2 b^3 + 6ab^3 - 8ab) - (5a^2 b^3 - 2a^3 b^3 + 3ab) =$

c) $(3ab^3 c - 2abc)(-6ab - 5bc + 4ab^2 c) =$

¿Lograste hacerlas todas?. La primera es una suma y la segunda una resta de polinomios, ¿te acordaste que la resta se convierte en suma si tomas el simétrico del que estás quitando?, la segunda se puede reescribir como una suma:

$(4a^2 b^3 + 6ab^3 - 8ab) + (-5a^2 b^3 + 2a^3 b^3 - 3ab) =$

¿Recordaste lo que son términos semejantes y cómo se suman?, ellos se necesitan para sumar polinomios. En el inciso a) y b) respectivamente, el primer término del primer paréntesis y el primero del segundo paréntesis son semejantes; pero el segundo término del inciso b) no tiene termino semejante con los términos del segundo paréntesis del mismo inciso ¿por qué?.

Definición: términos semejantes son los que tienen las mismas letras elevadas a los mismos exponentes.

En el inciso b) el segundo término del primer paréntesis tiene la "a" elevada a la primera potencia y la "b" al cubo, en el segundo paréntesis no existe esta combinación.

Para sumar dos términos semejantes se suman los números y se ponen las letras tal como están.

Para la multiplicación necesitas recordar las leyes de los exponentes, a continuación las pondremos:

1) $(a^n)(a^m) = a^{n+m}$ 2) $a^n/a^m = a^{n-m}$ 3) $(ab)^n = a^n b^n$ 4) $[(a)^n]^m = a^{nm}$

Para la pregunta c) necesitas multiplicar los números (leyes de los signos) y para las letras aplicar la primera ley de los exponentes (no olvides aplicar también la propiedad distributiva).

Tarea.

Realiza las siguientes operaciones:

a) $(-4a^2 b^3 c + 6a b c - 8a) + (-6 a^2 b^3 c + a b c + 3a)$ =

b) $(a b^2 - 4a^2 b + 5) - (a b^2 - 3 a^2 b - 4)$ =

c) $(ab + 2ac - 3bc) (a - 2bc - 4c)$ =

d) $(a^2 b^3 - a^3 b^2 + a b) \div (a b)$ =

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO

Nombre:______________________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

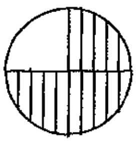
Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

Actividad I: Racionales (repaso).

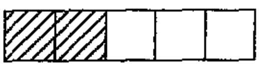
1.- La parte sombreada de la figura ¿qué parte representa del total?.

a)



Respuesta:___________________________

b)



Respuesta:___________________________

2.- Da una explicación del significado del racional 5/7.

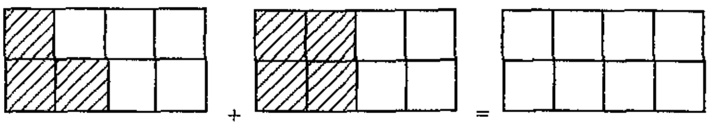
3.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $2/7 + 3/7 =$ b) $3/5 + 1/5 =$ c) $3/8 + 7/8 =$

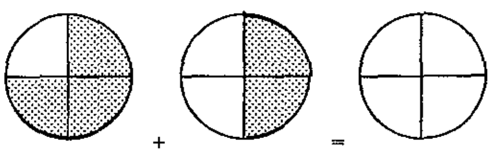
4.- Expresa en la figura el resultado de las siguientes operaciones (se suma solamente la parte sombreada).

a)

b)



c)



5.- Explica tu resultado del problema 4c y dí que relación tiene con 3c.

6.- Un señor compra dos pizzas del mismo tamaño; pero, una está partida en cuatro partes y la otra en cinco; se come un pedazo de la de cuatro partes y dos de la de cinco. El señor quiere saber a qué parte de una pizza corresponde lo que se comió.

a) Traduce el problema a números y resuélvelo.

b) Explica y justifica tu respuesta.

¿Pudiste justificarla?. Intentémoslo juntos.

c) Realiza un dibujo de las dos pizzas y sombrea la parte que se comió de cada una.

d) Toma cada pedazo de la de cuatro partes y divídelo en cinco partes y toma cada pedazo de la de cinco partes y divídelo en cuatro partes.

¿En cuántas partes quedó dividida la pizza de cuatro partes?. Respuesta: ____________
¿La parte sombreada que antes representaba 1/4, qué representa ahora?. Respuesta:______________________________
¿En cuántas partes quedó dividida la pizza de cinco partes?. Respuesta: ______________
¿La parte sombreada que antes representaba 2/5, qué representa ahora?.
Respuesta:______________________________________

¿Puedes justificar ahora tu respuesta al problema?. Justificación: __________________
____
____

La parte sombreada de la pizza de cuatro partes en un principio era 1/4 y después fue de 5/20, entonces: 1/4 = 5/20.

Desde el punto de vista de los números racionales ¿qué le hiciste al primero para que se transformara en el segundo?. Respuesta: ____
____
____

¿Si vemos la otra pizza podemos decir que 2/5 = _______ ?. Respuesta: ______________

Desde el punto de vista de los números racionales ¿qué le hiciste al primero para que se transformara en el segundo?. Respuesta: ____
____
____

¿Podemos concluir que el problema se transformó de la siguiente manera?.
______ + 2/5 = 5/20 + 8/20 = 13/20.

Respuesta:____

Nota: El primer racional se multiplica arriba y abajo por el denominador del segundo racional y viceversa.

Tarea.

Transforma las siguientes parejas de racionales a un común denominador y súmalas.
a) 2/3 , 3/7 b) 3/4 , 1/6 c) 3/5 , 7/9 d) 5/6 , 2/9

EXPRESIONES RACIONALES

Actividad 2: racionales (repaso).

¿Alguna vez te has preguntado por qué los racionales se multiplican y dividen como nos lo enseñaron en la escuela?.

1.- ¿Qué significan las siguientes operaciones?.
   a) 3x5. Respuesta:____
   b) 5x3. Respuesta:____

2.- ¿Cómo expresarías en forma abreviada las siguientes sumas?.
   a) 4+4+4+4+4. Respuesta:____
   b) 5+5+5. Respuesta:____

3.- Compara las respuestas 1a y 2b. ¿Qué puedes concluir? :____________________

4.- Siguiendo el ejemplo de la multiplicación con enteros ¿qué significan las siguientes operaciones?.

a) $6 \times \dfrac{2}{3}$. Respuesta :________________________________

¿Cuál ese el resultado de la operación?. Respuesta: ____________________

b) $4 \times \dfrac{3}{5}$. Respuesta :______________________________________

¿Cuál ese el resultado de la operación?. Respuesta: ________________________________

5.- ¿Qué significado le puedes dar a las siguientes expresiones?. Recuerda que los racionales representan partes

a) $\dfrac{3}{4} \times 8$. Respuesta :______________________________________

Da el resultado de la operación:________________

b) $\dfrac{2}{3} \times 6$. Respuesta :______________________________________

Da el resultado de la operación:________________

6.- Compara los resultados 4a y 5b. ¿Qué puedes concluir?. Cuando multiplicamos enteros decimos que el primero representa el número de veces que tomamos como sumando al segundo; pero, cuando el primer número es un racional hablamos de partes; es decir:

$$\frac{2}{3} \times 6 ,$$

significa dos terceras partes de seis o sea 4 (una tercera parte de seis es 2).

7.- Siguiendo la idea de partes, encuentra el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{5} =$ b) $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{6}{7} =$ c) $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} =$

d) $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{6} =$

8.- ¿Tuviste problemas con 7d?. Recuerda la actividad anterior y trata de transformar 5/6 de tal modo que le puedas sacar octava parte. ¿Ahora si tienes la respuesta?. Respuesta: 5/6 = 40/48 ¿de acuerdo?. ¿Qué fue lo que hicimos?. Respuesta: ________
Entonces ¿cuánto es 1/8 de 40/48?. Respuesta: ______ y ¿cuánto es 3/8 de 40/48?.
Respuesta: ____________________

Ejercicios (tarea).

Realiza las siguientes operaciones:

a) 7/9 x 18/5 = b) 3/5 x 10/12 = c) 6/7 x 2/9 =

9.- Una señora reparte veinte manzanas que compró entre sus tres hijos ¿cuántas manzanas le da a cada uno?.
Respuesta: ____
¿Repartió todas las manzanas o le sobraron algunas?. Respuesta: ______________
Cuando se habla de repartir siempre realizamos una división y el resultado es lo que le toca a cada unidad, en nuestro problema el resultado es lo que le toca a cada hijo.

10.- De acuerdo a lo anterior realiza la siguiente operación: 6 ÷ 1/2=
Explica y justifica tu respuesta: ________________________________
¿Pudiste justificar tu resultado?. Intentemos dar una justificación juntos:
El resultado de una división es lo que le toca a la unidad; entonces, si a la mitad le doy 6, ¿a la unidad le tocan?. Respuesta: ____________________________

11.- ¿Y cómo divido 1/2 ÷ 6?. Recuerda que 1/2 lo puedo transformar en 6/12 y este último lo pudo dividir entre 6; por lo cuál 1/2 ÷ 6=

12.- De acuerdo con lo anterior resuelve las siguientes operaciones:
a) 6/4 ÷ 3/5 = b) 8/9 ÷ 2/3 =

¿Pudiste resolverlos? sino, recuerda lo siguiente: si 6/4 le tocan a 3/5, ¿cuánto le toca a 1/5? y por consiguiente ¿cuánto le toca a la unidad?.

ANEXO II

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 2

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____

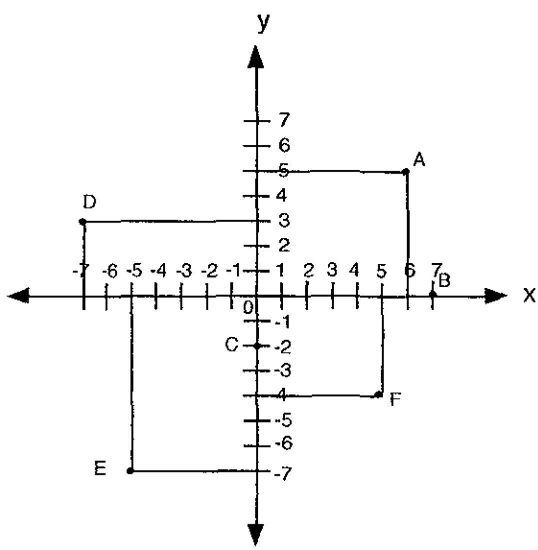
Apellido paterno   Apellido materno   Nombre(s)

Semestre : 2001-I   Fecha: ____________________

****

Conceptos básicos:

II.- Ejes cartesianos.



Escribe las coordenadas de los puntos:

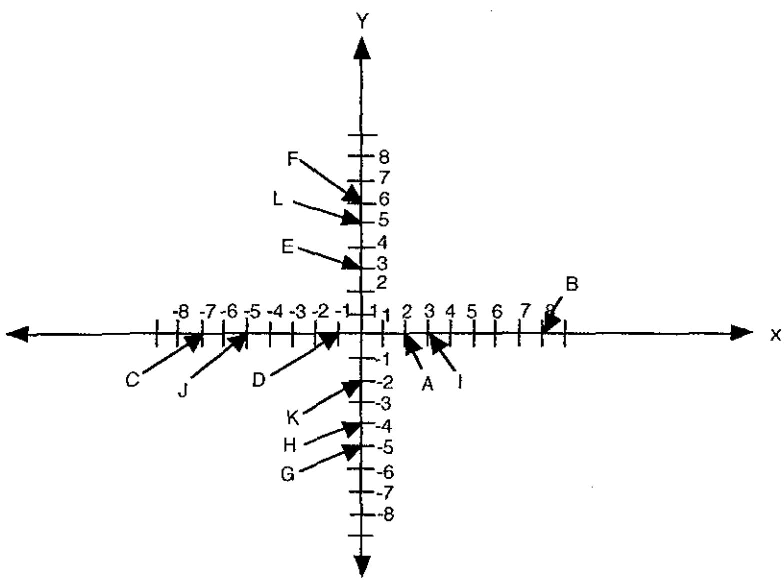
A(,)   B(,)   C(,)   D(,)   E(,)   F(,) Espero te hayas acordado que los positivos en el eje " y " están arriba del eje " x ", que los puntos sobre el eje " x " tienen la ordenada (la " y ") igual a cero y los que están sobre el eje " y " tienen la abscisa (la " x ") igual a cero.

III.- Distancia entre dos puntos:

Calcula las distancias (el valor de una distancia siempre es positivo) entre:

1.-	A(2 , 0)	y	B(8 , 0)
2.-	C(-7 , 0)	y	D(-1 , 0)
3.-	E(0 , 3)	y	F(0 , 6)
4.-	G(0 , -5)	y	H(0 , -4)
5.-	I(3 , 0)	y	J(-5 , 0)
6.-	K(0 , -2)	y	L(0 , 5)

¿Puedes calcular estas distancias?. Usemos los ejes cartesianos.



En las primeras dos distancias los puntos están sobre el eje " x " (la primer pareja en el lado positivo y la segunda en el lado negativo); en las siguientes dos distancias los puntos están sobre el eje " y " (la primer pareja en el lado positivo y la segunda en el lado negativo); en los cuatro casos se puede calcular la distancia contando los pasos que se necesita dar para pasar del primer punto al segundo. Los resultados son:

1.-	La distancia de A hasta B es igual a 6
2.-	La distancia de C hasta D es igual a 6
3.-	La distancia de E hasta F es igual a 3
4.-	La distancia de G hasta H es igual a 1

Igual que hicimos con las operaciones de números con signo, vamos a analizar lo anterior para ver si sacamos reglas:

¡En los dos primeros casos podemos tomar el valor absoluto de la resta de las " x "!.

¡En los dos segundos casos podemos tomar el valor absoluto de la resta de las " y "!.

Usando otra vez los ejes coordenados para las distancias de las preguntas 5 y 6 obtenemos como resultado:

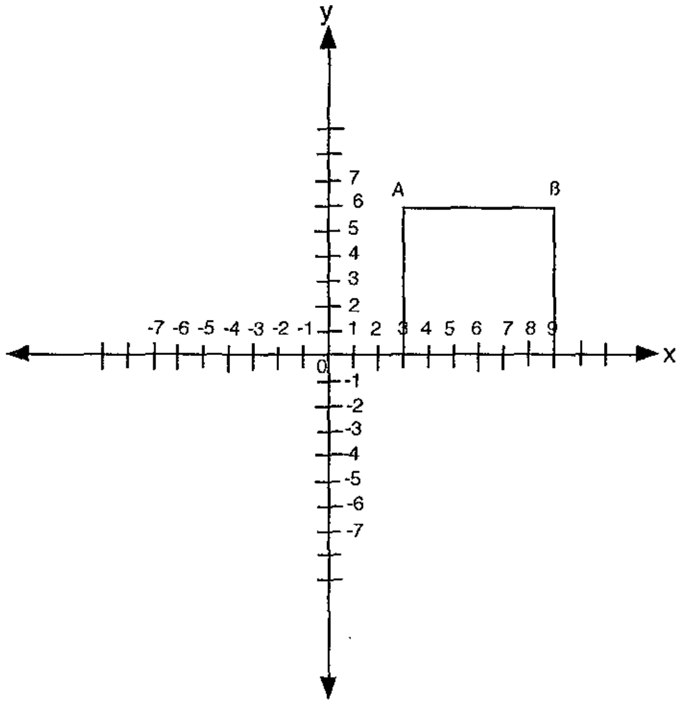
5.-	La distancia de I a J es igual a 8
6.-	La distancia de K a L es igual a 7

¡Otra vez se cumple: para 5 se toma el valor absoluto de la resta de las " x " y para 6 el valor absoluto de la resta de las " y "!.

Vamos a calcular otras distancias entre puntos que no estén sobre los ejes coordenados:

1.-	A(3 , 6)	y	B(9 , 6)
2.-	C(-5 , 2)	y	D(-2 , 2)
3.-	E(8 , 4)	y	F(8 , 7)
4.-	G(-3 , -1)	y	H(-3 , -9)
5.-	I(-6 , -3)	y	J(4 , -3)
6.-	K(5 , 7)	y	L(5 , -4)

¿Puedes calcularlas?. Si ponemos en los ejes cartesianos los dos primeros puntos podemos observar que están sobre una recta paralela al eje " x " (las " y " son iguales).



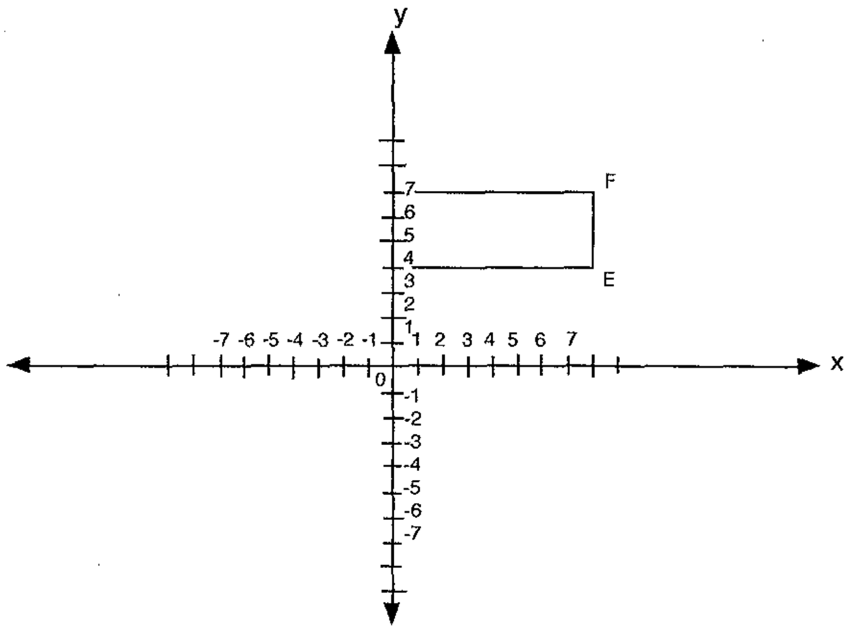
Como los lados opuestos de un paralelogramo son iguales, tenemos que la distancia entre A y B es 6.

¡Cuando las " y " son iguales podemos tomar como distancia el valor absoluto de la resta de las " x "!.

Entonces la distancia de entre C y D es 3

¿Será cierto que cuando las " x " son iguales podemos tomar como distancia el valor absoluto de la resta de las " y "?.

Grafiquemos los puntos E y F:

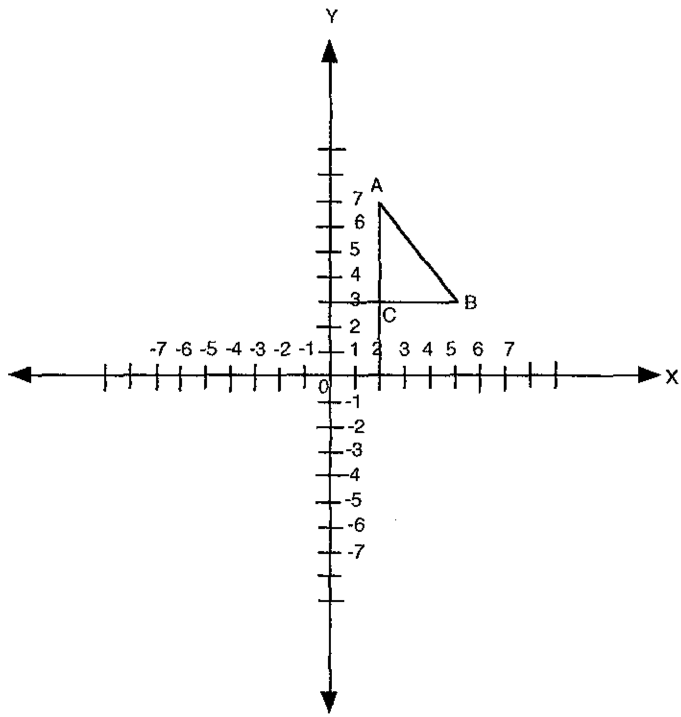


¡Cuando las " x " son iguales podemos tomar como distancia el valor absoluto de la resta de las " y "!.

Ahora ya puedes calcular todas las distancias anteriores.

¿Qué pasa cuando los dos puntos no están sobre uno de los ejes o en una recta paralela a uno de ellos?.

Tomemos los puntos A (2, 7) y B (5, 3) y vamos a graficarlos:



En la gráfica además de los puntos A y B, traza por el punto A una paralela al eje " y ", también traza por B una paralela al eje " x " y llama al punto de intersección C.

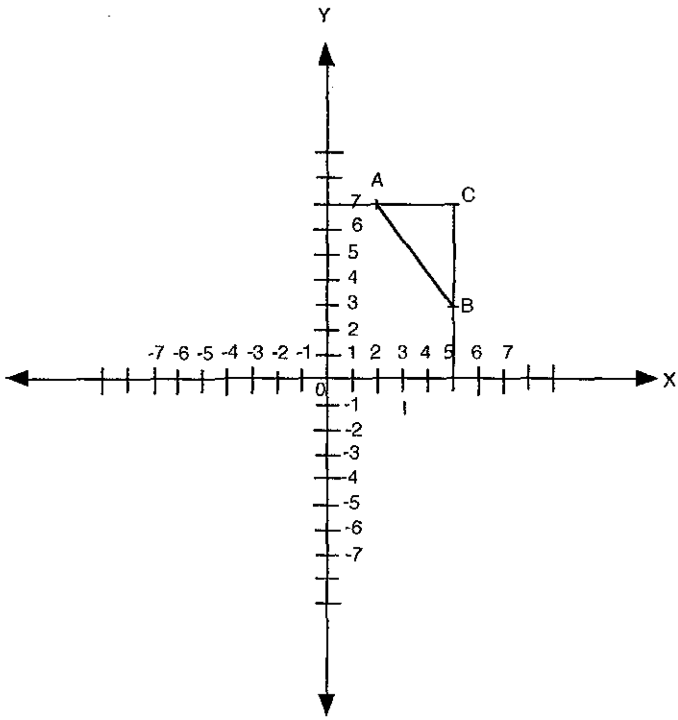
¿Cuáles son las coordenadas del punto C?. Dijiste C (2 , 3), ¡correcto!, tiene la misma " x " que A y la misma " y " que B.

Con los tres puntos se formó un triángulo, ¿qué tipo de triángulo?. Es un triángulo rectángulo del cual conocemos lo que miden los catetos. ¿Cuánto mide el cateto AC (cuál es la distancia entre A y C)?, ¿cuánto mide el cateto CB?.

Conociendo AC y CB apliquemos el teorema del Pitágoras y obtenemos el valor de la hipotenusa AB (la distancia entre A y B).

$AC^2 + CB^2 = AB^2$, en nuestro ejemplo es $|7 - 3|^2 + |5 - 2|^2 = 16 + 9 = 25$; por lo tanto la hipotenusa vale 5.

¿Qué pasa si cambiamos las rectas paralelas, por A pasamos una paralela al eje " x " y por B una paralela al eje " y "?. Observa la gráfica y vuelve hacer los cálculos; ¿el resultado es diferente?.



En el primer caso la letra C tiene la " x " de la A y la " y " de la B, en el segundo caso C tiene la " y " de la A y la " x " de la B; pero, ¡en ambos casos los catetos valen 3 y 4 y por lo tanto la hipotenusa vale 5!.

Lo anterior nos hace ver que podemos tomar como coordenadas para la letra C la " x " de la A y la " y " de la B, o la " y " de la A y la " x " de la B.

Vamos a analizar ésto como lo hicimos con los números con signo a fin de buscar reglas o en su caso una fórmula que resuelva todos los casos.

La letra **C** nos sirvió como ayuda para calcular los catetos, pero, si observamos bien lo que hicimos fue tomar el valor absoluto de la resta de las " x " (la " x " de la **A** y la " x " de la **B**) para calcular un cateto y el valor absoluto de la resta de las " y " para calcular el otro cateto. Supongamos que los puntos son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$, entonces tenemos que la distancia entre P y Q está dada por:

$$d(P,Q) = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

y como sabemos que todo número elevado al cuadrado es positivo, podemos quitar los símbolos del valor absoluto y poner paréntesis:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Hemos obtenido una fórmula para calcular la distancia entre dos puntos: pero, ¿nos servirá también si los puntos están sobre un eje o una recta paralela a un eje?.

Veamos un caso y dejaremos que tú pruebes los otros:

Si los puntos están sobre el eje " x ", significa que las " y " valen 0 y por lo tanto $y_1 - y_2 = 0$ y la fórmula de la distancia queda:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

(es lo que habíamos encontrado anteriormente); la demostración de los otros casos se queda de tarea para ti.

Tarea.

1.- Demuestra que la fórmula de la distancia entre dos puntos es válida cuando los dos puntos:

a) Están sobre el eje y.
b) Están en una paralela al eje x.
c) Están en una paralela al eje y.

2.- Encuentra la distancia entre las siguientes parejas de puntos:

a) A(-6 , 5) y B(-2 , -3)

b) C(8 , 9) y D(-3 , -7)

3*.- La distancia entre los puntos E(7 , -3) y F(7 , y) es 8. ¿Cuál es el valor de y?. Hay dos soluciones. ¿Por qué?.

4*.- La distancia entre los puntos G(-2 , 6) y H(x , -2) es 10. ¿Cuál es el valor de x?. También hay dos soluciones.

ANEXO III

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 3

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____

Apellido paterno   Apellido materno   Nombre(s)

Semestre : 2001-I   Fecha: ____________________

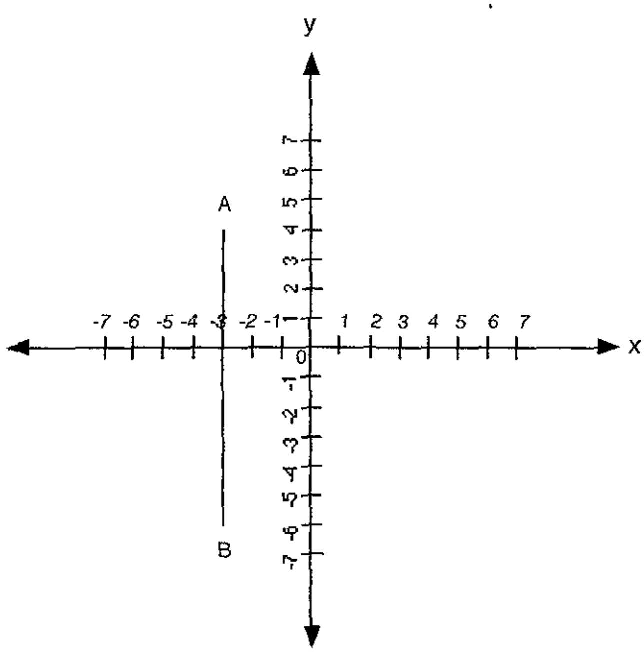
****

Conceptos básicos:

IV.- División de un segmento en una razón dada (1ª parte):

Problema: Dados los puntos A(-3 , 4) y B(-3 , -6), encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que va de A hasta B.

Tracemos nuestros ejes cartesianos y dibujemos los puntos:



¿Cuáles crees que sean las coordenadas del punto medio?. Como A y B están en una recta paralela al eje " y " entonces el punto medio también está en esta recta; además, si conocemos la distancia de A hasta B, el punto medio tiene que estar a la mitad de la distancia.

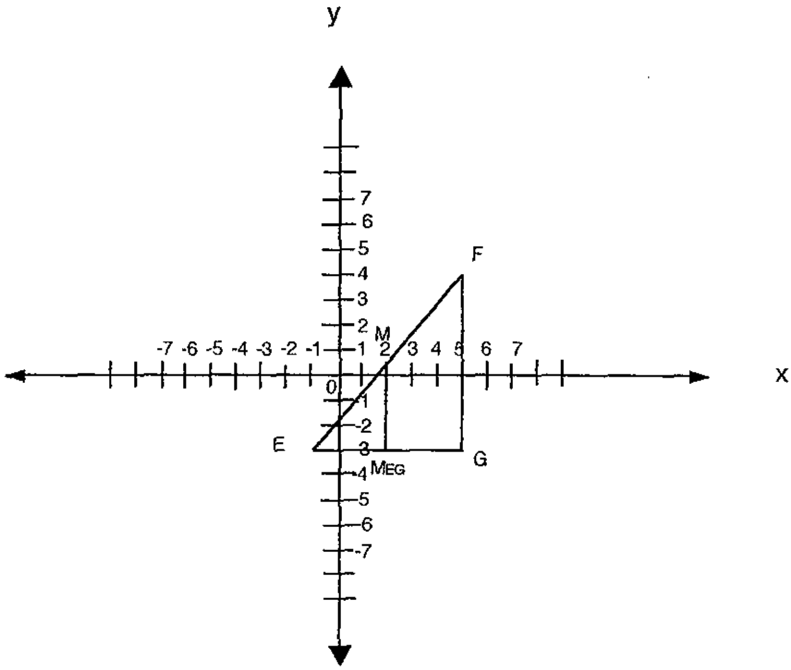
Con la gráfica se puede resolver muy fácilmente cuando las coordenadas son pequeñas; pero si son muy grandes [A(-123 , 245) y B(48 , -53)] es difícil hacer la gráfica.

Vamos a analizar como lo podemos resolver sin usar la gráfica: la distancia de A hasta B es $|4 + 6| = 10$, por lo tanto la mitad de la distancia es 5; ahora tenemos dos opciones, lo sumamos a la " y " de B (para ir hacia arriba) o lo restamos a la " y " de A (para ir hacia abajo), si escogemos la primera opción tenemos $-6 + 5 = -1$, si escogemos la segunda opción tenemos $4 - 5 = -1$ (como esperábamos el resultado tiene que ser el mismo), entonces la " y " del punto medio es -1 y el punto tendrá coordenadas (-3 , -1).

Encuentra el punto medio del segmento formado por CD y del formado por EF:

C(-7 , 2) , D(6 , 2) , E(-1 , -3) , F(5 , 4)

El primero se resuelve de manera semejante al anterior, para el segundo usaremos los ejes coordenados (como un recurso para analizar la situación):



¿Cuáles son las coordenadas de G?. Encontremos las coordenadas del punto medio EG (llamémoslo M_{EG}) y tracemos una paralela al eje " y " (M_{EG} M). ¿Cómo son los dos triángulos que ves en la figura?, ¿dijiste semejantes? ¡muy bien!. Analicemos ésto último:

Si son semejantes entonces los lados homólogos son proporcionales; ésto es:

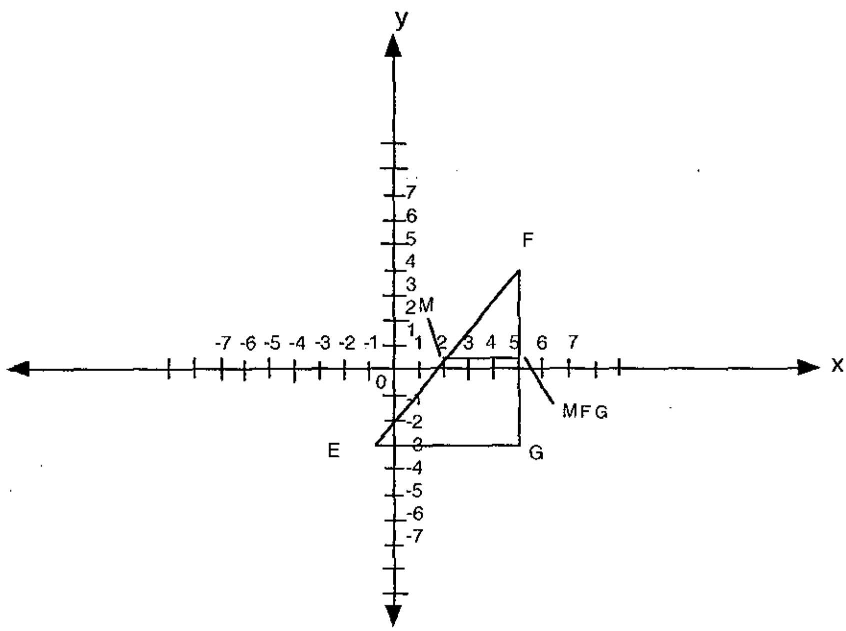
$$\frac{EM_{EG}}{EG} = \frac{EM}{EF}$$ (cateto entre cateto es igual a hipotenusa entre hipotenusa);

pero $$\frac{EM_{EG}}{EG} = \frac{1}{2}$$ (recuerda que M_{EG} es el puto medio de EG) , entonces

$$\frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}$$

¡M es el punto medio de EF! y sabemos calcular la " x " de M, es la misma que la de M_{EG}, vamos a revisar todo:

Las coordenadas de G son (5 , -3) (la " x " de F y la " y " de E), la distancia de E hasta G es 6 por lo tanto la mitad es 3 si lo restamos a la " x " de G (para ir hacia la izquierda) nos da 5 - 3 = 2, esta es la " x " de M ¿cuál es la " y " de M?. Observa la figura siguiente (los ejes cartesianos); si en lugar de trazar una paralela al eje " y " por M_{EG} la hubieras trazado paralela al eje " x " por M_{FG} (punto medio de FG), también hubieras encontrado el punto M y la " y " de M_{FG} es la misma que la de M. Calcula la " y " de M.



La " y " de M es la misma que la de M_{FG} la cual es 0.5, por lo tanto las coordenadas de M son (2 , 0.5).

Si revisamos lo anterior veremos que los puntos M_{EG} y M_{FG} nos sirvieron como ayuda pero que podemos trabajar sin ellos, ya que lo que necesitamos son las " x " y las " y " de los extremos; para la " x " de M, tomamos la distancia entre la " x " de E y F $|-1 - 5| = 6$, entre dos es igual a 3 que sumado a la " x " de E nos da $-1 + 3 = 2$; para encontrar la y de M tomamos la distancia entre las " y " de E y F la dividimos entre dos y se la sumamos a la " y " de E.

Encontrar el punto medio de un segmento es los mismo que partirlo en dos partes iguales; también se dice que el punto M divide al segmento EF en la razón:

$$\frac{1}{2} \quad \text{ya que} \quad \frac{EM}{EF} = \frac{1}{2}$$

¿Cómo se divide un segmento en tres partes iguales?, necesitamos dos puntos para dividir un segmento en tres partes iguales, ¿cuáles serán las coordenadas de esos puntos?, vamos a ver un ejemplo:

Dividir al segmento cuyos extremos son A(2 , 6) y B(-1 , 0) en tres partes iguales. Llamemos R_1 y R_2 a los puntos que dividen al segmento; calcularemos las coordenadas de R_1 y te dejaremos de tarea calcular las coordenadas de R_2.

Para encontrar la " x " de R_1, calculamos la distancia entre las " x " de A y B $|2 + 1| = 3$, dividido entre tres es igual a 1 que restado (la B está a la izquierda de la A) a la " x " de A nos da $2 - 1 = 1$, esta es la " x " de R_1.

Para encontrar la " y " de R_1, calculamos la distancia entre las " y " de A y B $|6 - 0| = 6$, dividido entre tres es igual a 2 que restado (la B está abajo de la A) a la " x " de A nos da $6 - 2 = 4$, ésta es la " y " de R_1, entonces R_1 tiene coordenadas (1 , 4).

La razón en que R_1 divide al segmento AB es:

$$\frac{1}{3} \quad \text{ya que} \quad \frac{AR_1}{AB} = \frac{1}{3}$$

¿Cuál será la razón en que R_2 divide a AB?.

$$\frac{AR_2}{AB} = \frac{2}{3}$$

ya que AR_2 es el doble de la distancia que AR_1.

Tarea.

1.- ¿Cuántos puntos necesitamos para dividir un segmento en cuatro partes? y ¿para dividir en cinco partes cuántos puntos necesitamos?.

2.- ¿Cuáles serán las razones de los puntos de las preguntas anteriores?.

3.- Divide al segmento AB en la razón 2/7; las coordenadas de A son (-6 , 0) y las de B son (8 , -7).

4*.- Las coordenadas de C son (3 , 7) y las de D son (8 , -2). ¿Cuáles son las coordenadas de un punto P que duplica (hace doble) el segmento CD?. Hay dos soluciones. ¿Cuál es la razón de CP entre CD?.

ANEXO IV

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 4

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo: _____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

Conceptos básicos:

IV.- División de un segmento en una razón dada (2ª parte):

Vamos a buscar ahora una fórmula que abarque todos los casos de dividir a un segmento en una razón dada; para ello vamos primero a analizar lo que hemos hecho:

Para poder trabajar sin el símbolo del valor absoluto, haremos lo siguiente: si x_1 está a la derecha de x_2 podemos trabajar sin el símbolo ya que $x_1 - x_2$ es positivo. Si x_1 está a la izquierda de x_2 tomamos $x_2 - x_1$ que será positivo.

Primero veremos el caso de las " x " y luego el de las " y ". Lo primero que observamos es que si la razón es un quebrado, el denominador (el número de abajo) nos dice en cuántas partes se va dividir el segmento y el numerador (el número de arriba) cuántas partes vamos a tomar; esto es, si la razón es a/b, quiere decir que dividimos al segmento en "b" partes y tomamos "a" de éstas.

Si los extremos del segmento son $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ y la razón es a/b, dividimos $|x_1 - x_2|$ entre b; tendremos; $(x_1 - x_2)/b$ cuando x_1 esté a la derecha y después a x_1 le sumaremos

$-a \dfrac{x_1 - x_2}{b}$ (tenemos que ir hacia la izquierda), lo cual nos da:

$$x_1 - a\,\frac{x_1 - x_2}{b} = \frac{x_1 b - a(x_1 - x_2)}{b} = \frac{x_1 b - ax_1 + ax_2}{b} = \frac{x_1(b-a) + ax_2}{b}$$

Cuando x_1 esté a la izquierda $|x_1 - x_2|$ entre b, estará dado por $(x_2 - x_1)/b$ (tenemos que ir hacia la derecha); entonces a x_1 le sumamos a $(x_2 - x_1)/b$ y nos da:

$$x_1 + a\,\frac{x_2 - x_1}{b} = \frac{x_1 b - ax_1 + ax_2}{b} = \frac{x_1(b-a) + ax_2}{b}$$

¡Da el mismo resultado sin importar si x_1 está a la derecha o a la izquierda!.

De acuerdo a lo anterior podemos decir que para encontrar la x del punto que divide un segmento en una razón a/b podemos usar la fórmula:

$$x = \frac{x_1(b-a) + ax_2}{b}$$

Análogamente se puede probar que para encontrar la " y " del punto que divide un segmento en una razón a/b podemos usar la fórmula:

$$y = \frac{y_1(b-a) + ay_2}{b}$$

En particular esta fórmula para el caso que la razón es 1/2 (la <u>a</u> vale 1 y la <u>b</u> vale 2) tenemos para la x:

$$x = \frac{x_1(b-a) + ax_2}{b} = \frac{x_1(2-1) + x_2}{2} = \frac{x_1 + x_2}{b}$$

Y para la y:

$$y = \frac{y_1(b-a)+ay_2}{b} = \frac{y_1(2-1)+y_2}{2} = \frac{y_1+y_2}{b}$$

Fórmulas para encontrar el punto medio de un segmento:

$$x = \frac{x_1+x_2}{b}$$

$$y = \frac{y_1+y_2}{b}$$

Ejercicio para clase:

1.- Demuestra la fórmula para encontrar la " y " del punto que divide un segmento en una razón **a/b**.

2.- ¿Cuáles son las razones que dividen a un segmento en cuatro partes iguales?.

3.- Usa la fórmula y encuentra los puntos que dividen a un segmento en cuatro partes iguales, los extremos del segmento son A(8 , 6) y B(-4 , -2).

V.- Lugares geométricos:

Definición: *Si una curva o una figura geométrica tienen una propiedad que define los puntos que pertenecen a ella y deja fuera los puntos que no pertenecen a ella, decimos que esta propiedad la define como un lugar geométrico.*

En Geometría Analítica se trabajan dos problemas respecto a lugares geométricos:

1.- Dadas las condiciones que cumple un lugar geométrico dar una expresión algebraica de él.

2.- Dada la expresión algebraica de un lugar geométrico trazar su gráfica.

Empezaremos con el primero de los problemas: dadas las condiciones encontrar la expresión algebraica:

Da la expresión algebraica de:

1.- Los puntos que se encuentran tres unidades a la izquierda del eje " y ".

2.- Los puntos cuyas abscisas son iguales a sus ordenadas.

3.- Los puntos que siempre están a 4 unidades de distancia del punto A (2 , 2).

¿Quieres que los resolvamos?.

Vamos a ver el primero: ¿qué puntos que se encuentran tres unidades a la izquierda del eje " y "?, los que tiene la " x " igual a menos tres, entonces la respuesta es $x = -3$.

El segundo nos pide los puntos cuyas abscisas son iguales a sus ordenadas; las abscisas son las " x " y la ordenadas son las " y ", entonces la respuesta es $x = y$.

El tercero dice: los puntos que siempre están a 4 unidades de distancia del punto A (2 , 2); tú conoces la fórmula de la distancia ¡úsala!. Piensa en un punto P (x , y) que cumpla con la condición [su distancia a A (2 , 2) es igual a 4].

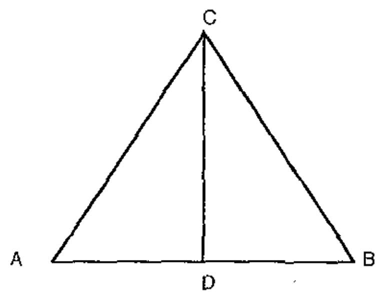
$$d(P, A) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = 4$$

Toma la igualdad de la derecha, elévala al cuadrado, desarrolla los binomios al cuadrado y reduce los términos semejantes. ¿Qué obtuviste?.

Ahora vamos a definir algunos lugares geométricos:

1.- *¿Cómo definirías a la circunferencia como lugar geométrico?.*

2.- La mediatriz de un segmento es una recta perpendicular a él y que pasa por su punto medio. En la figura CD es la mediatriz del segmento AB. ¿Cómo la definirías como lugar geométrico?. Vamos a definir a la mediatriz como lugar geométrico y a encontrar su expresión algebraica:

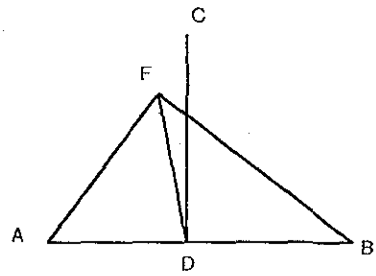


$AD = DB$ y $CD \perp AB$

Si unimos CA y CB ¿puedes demostrar qué los triángulos CAD y CDB son congruentes?. Vamos a hacerlo juntos:

AD = DB y CD es un lado de los dos triángulos además el ángulo entre AD y CD es igual al ángulo entre CD y DB; por el criterio de congruencia de triángulos LAL (lado - ángulo - lado) los triángulos son congruentes y por lo tanto CA = CB (podemos decir que todos los puntos que están sobre CD equidistan de A y de B). ¿Sabes lo qué quiere decir equidistan?, quiere decir que las distancias son iguales.

¿Podemos decir que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento?. Necesitamos probar primero que un punto que no está en la mediatriz no equidista de los extremos del segmento (recuerda la definición de lugar geométrico). Observa la siguiente figura y tratar de dar una demostración de que $FA \neq FB$.



¿Puedes?. Hagámoslo juntos, observa los triángulos FAD y FDB, si FA = FB los triángulos serían congruentes ya que tendrían sus tres lados iguales y entonces los ángulos ADF y FDB serían iguales; pero esto no puede ser cierto porque el ángulo ADF es menor de 90° y el ángulo FDB es mayor de 90°; por lo tanto $FA \neq FB$.

Ahora si podemos decir que la mediatriz de un segmento de recta es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Vamos usar esta definición para encontrar una expresión algebraica para la mediatriz del segmento de recta cuyos extremos son A(3 , 5) y B(5 , -1).

Sea P(x , y) un punto que está en la mediatriz, entonces tenemos:

$$d(P, A) = d(P, B);\ \text{pero}\ d(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}\ \text{y}\ d(P, B) = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$

entonces:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+1)^2}$$

y si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos:

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 = (x-5)^2 + (y+1)^2 \quad ;$$

ahora tú vas a desarrollar los binomios, simplificar la expresión y despejar la " y ".

Ejercicios para hacer en clase:

1.- Definir la circunferencia como lugar geométrico y encontrar una expresión algebraica de ella.

2.- Terminar el desarrollo de la mediatriz que estábamos viendo.

ANEXO V

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 5

Nombre:___________________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____

Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

VI.- Graficación de expresiones algebraicas (1^a parte):

¿Recuerdas qué habíamos dicho que en Geometría Analítica se trabajan dos problemas respecto a lugares geométricos?; ya trabajamos el primero, vamos a ver el segundo:

2.- Dada la expresión algebraica de un lugar geométrico trazar su gráfica, (trabajaremos con un tipo especial de expresiones algebraicas: las funciones).

Para ayudarnos a trazar una gráfica necesitamos conocer algunos hechos:

a) ¿Dónde corta a los ejes coordenados? (intersecciones con los ejes).

b) ¿Hay simetría con respecto a algunos de los ejes?.

c) ¿Hay simetría respecto al origen?.

d) ¿Cuál es el dominio de una función (expresión algebraica donde una de las variables esta despejada)?. ¿Está definida para cualquier valor de " x "?.

Empezaremos por la primer pregunta: Dada la expresión algebraica de un lugar geométrico ¿dónde corta a los ejes coordenados?.

a) Intersecciones con los ejes coordenados:

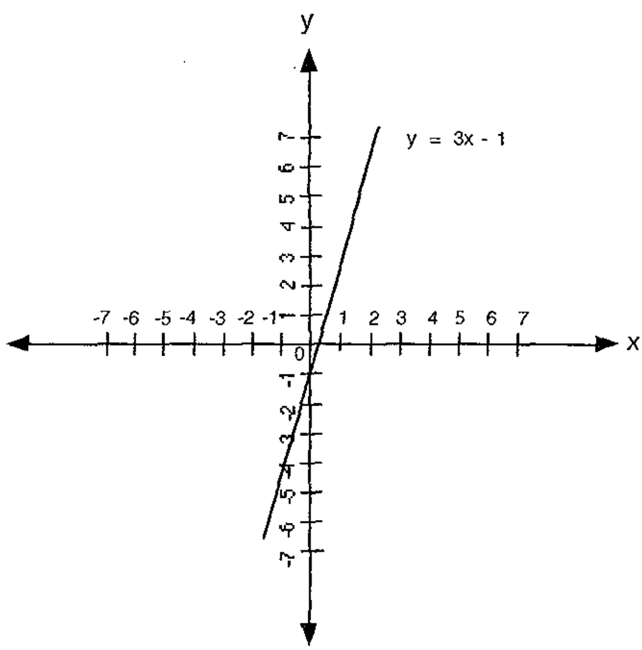
Tomemos la siguiente expresión: $y = 3x - 1$ y antes de graficarla tratemos de saber donde corta a los ejes. Sí la gráfica corta al eje " y " en un punto, ¿cuánto vale la " x " de ese punto?. ¿Lo recordaste?, es un punto sobre el eje " y " por lo cual su " x " debe valer cero.

Recordemos que para que un punto pertenezca a un lugar geométrico debe satisfacer su expresión algebraica; entonces sustituimos $x = 0$ en la expresión $y = 3x - 1$ y tenemos: $y = 3(0) - 1 = - 1$. La expresión $y = 3x - 1$, corta al eje " y " en el punto (0 , -1).

¿Dónde corta al eje x?. Hagamos ahora $y = 0$ y sustituyamos en la expresión $y = 3x - 1$: $0 = 3x - 1$, $1 = 3x$, por lo tanto $x = 1/3$, la expresión corta al eje " x " en el punto (1/3 , 0).

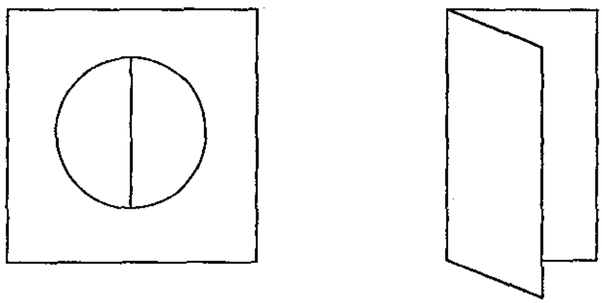
Localicemos ambos puntos sobre los ejes coordenados y grafiquemos (supongo que sabes graficar).

Tomemos ahora la expresión algebraica $y = x^2 - 4$. ¿Dónde corta a los ejes coordenados?. Encuentra los puntos de intersección con los ejes (para el eje " x " hay dos valores ya que queda una ecuación de segundo grado) y grafica.



b) Simetría con respecto a los ejes coordenados:

¿Recuerdas lo qué es simetría respecto a un eje?. De una forma breve podemos definir la simetría axial (respecto a un eje), diciendo que una figura tiene simetría axial, si al doblar la hoja del cuaderno sobre el eje de simetría, la parte que está de un lado del eje coincide con la parte que está del otro lado. Observa la siguiente figura:

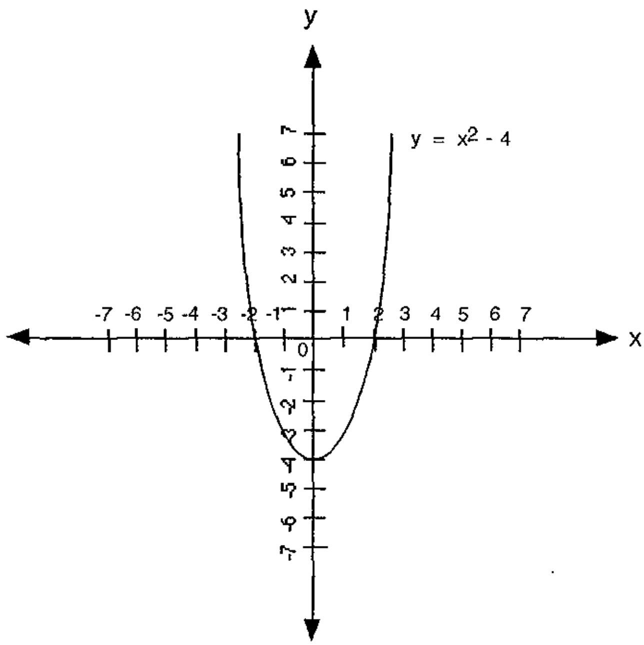


Si doblamos la hoja sobre el diámetro del círculo, una parte del círculo coincide exactamente con la otra parte (hazlo en tu cuaderno).

Contestaremos ahora la segunda pregunta ¿hay simetría con respecto a alguno de los ejes?. Tomemos los ejemplos anteriores: $y = 3x - 1$ y $y = x^2 - 4$

Si observamos la gráfica de $y = 3x - 1$, (está arriba), podemos ver que no tiene simetría respecto al eje " y " ya que si doblamos sobre este eje, una parte de la figura no coincide con la otra. De la misma manera vemos que no tiene simetría respecto al eje " x ".

Observemos la gráfica de $y = x^2 - 4$ (la ponemos a continuación):



Si observamos la gráfica de $y = x^2 - 4$, podemos ver que tiene simetría respecto al eje " y " ya que si doblamos sobre este eje, una parte de la figura coincide con la otra. De la misma manera veremos que no tiene simetría respecto al eje " x ". Vamos a establecer un criterio para la simetría respecto a los ejes.

En el ejemplo anterior $y = x^2 - 4$ podemos observar que para los valores de $x = 1$ y $x = -1$, la " y " tiene el mismo valor $y = -3$; lo mismo podemos decir para cualesquiera valores simétricos de " x "(2 y -2, 3 y -3, etc.), esto pasa porque la " x " está al cuadrado y por lo tanto siempre es positivo este cuadrado. En el primer ejemplo $y = 3x - 1$, no hubo simetría respecto al eje " y " porque la " x " está a la primera potencia y al cambiar un valor de " x " por su simétrico cambia el valor de y (para $x = 1$ $y = 2$; pero para $x = -1$ $y = -4$).

Sin hacer la gráfica de la función $y = x^2 + 2x + 1$ contesta ¿es simétrica respecto al eje " y "? ¿por qué?.

Si dijiste que no era simétrica estas en lo correcto, ya que sí bien valores simétricos de " x " dan el mismo valor de x^2, no dan el mismo valor de 2x (para $x = 1$ y $x = -1$, $2x = 2$ y $2x = -2$ respectivamente) y entonces la " y " tiene valores diferentes.

El criterio de simetría con respecto al eje " y " es muy útil ya que te permite graficar los valores de " y " cuando la " x " es negativa tabulando solamente los valores de " y " cuando la " x " es positiva.

Criterio de simetría respecto al eje " y "
"La gráfica de una expresión algebraica es simétrica respecto al eje " y " cuando la " x " solamente aparece elevada a potencias pares".

¿Cuál será el criterio de simetría respecto al eje " x "?. Si estamos trabajando con funciones, no puede haber simetría respecto al eje x ya que no puede haber dos valores de " y " para un sólo valor de " x ". Más adelante trabajaremos con expresiones algebraicas que representan lugares geométricos que no son funciones y entonces puede haber simetría respecto al eje " x ". Dejaremos que tu escribas el criterio de simetría respecto al eje " x ".

Ejercicios:

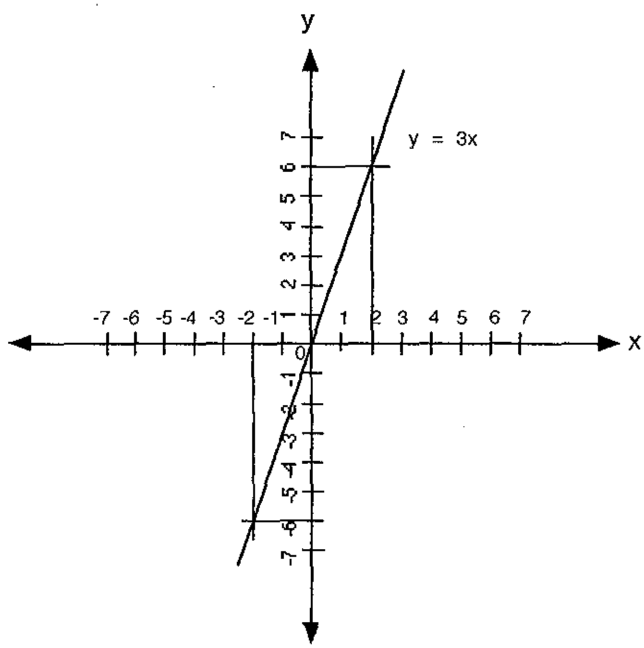
1.- Encuentra los puntos de intersección con lo ejes:
a) $y = x^2 + 2x - 3$, b) $y = x^3 + 5x$, c) $y = 4x - 3$

2.- De las expresiones algebraicas anteriores ¿cuál de ellas tiene simetría respecto al eje " y "?, ¿por qué?.

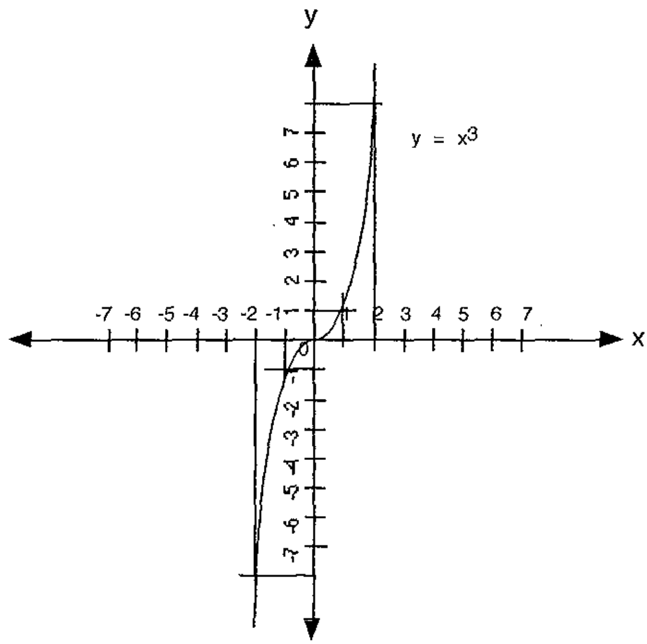
3.- Escribe el criterio de simetría respecto al eje " x ".

c) Simetría respecto al origen:

Continuaremos contestando las preguntas planteadas anteriormente: Pregunta tres ¿hay simetría respecto al origen?. ¿Recuerdas qué significa simetría respecto a un punto?. Significa que al girar la figura 180° (media vuelta) tomando como centro de giro el punto, se sigue viendo igual que antes del giro. La gráfica de y = 3x es:

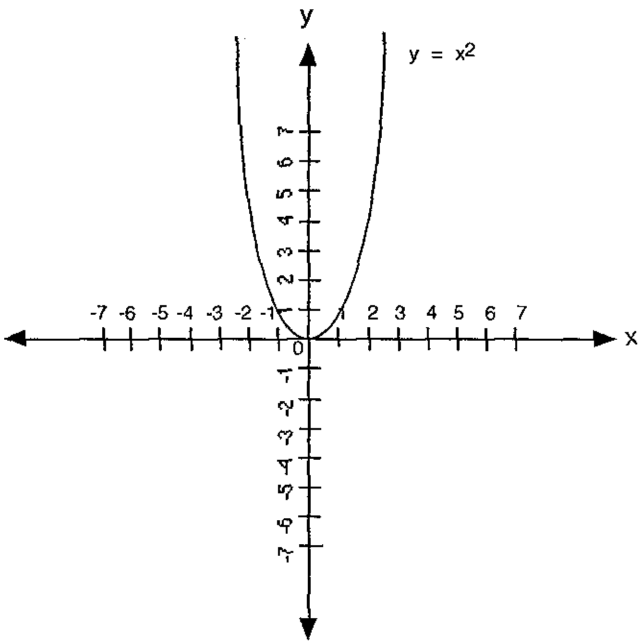


Si tomamos como centro de giro el origen la recta se seguirá viendo igual; veamos otro ejemplo: $y = x^3$



Si tomamos como centro de giro el origen la curva se seguirá viendo igual; vamos a analizar los dos casos anteriores para buscar reglas:

Lo primero que podemos observar es que la función tiene que pasar por el origen y ésto quiere decir que si la " x " es igual a cero también la " y " debe ser cero, por lo tanto no debe haber valor independiente; pero no basta con esto ya que la función $y = x^2$ también pasa por el origen pero no es simétrica respecto al origen, veamos la gráfica:



Lo segundo que observamos es que al cambiar, en la expresión algebraica, un valor de " x " por su simétrico tiene que cambiar la " y " por su simétrico (no es el caso de $y = x^2$); entonces las " x" deben estar elevada a una potencia impar. Nuestro criterio de simetría puede quedar así:

> Criterio de simetría respecto al origen:
>
> "La gráfica de una función es simétrica respecto al origen cuando no existe término independiente y la " x " solamente aparece elevada a potencias impares".

Ejercicios:

1.- ¿Cuál o cuáles de las siguientes funciones es simétrica respecto al origen?

a) $y = x^3 - 3x$, b) $y = 2x^3 - x + 2$, c) $y = x^3 - 5x^2$, d) $y = 4x^5 - 3x^3$

e) $y = x^5 - x^3 + x$.

2.- Explica tus respuestas al ejercicio anterior.

ANEXO VI

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 6

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

VI Graficación de funciones (2ª parte):

Contestaremos ahora las últimas dos preguntas: ¿cuál es el dominio de la función?. ¿Está definida para cualquier valor de " x "?.

En realidad no son dos preguntas ya que el dominio de una función son los valores de " x " para los cuales la función está definida; pero, ¿qué significa que la función esté definida?.

Contestaremos está última pregunta observando algunos ejemplos de funciones:
a) $y = 3x - 1$, b) $y = x^2 - 4$, c) $y = x^3 - 3x$; d) $y = 1/x$, e) $y = 2/(x + 4)$

¿Qué valores puedes darle a " x " en el ejemplo a)?. Puedes darle los que tú quieras tanto positivos como negativos (incluyendo el cero) ya que siempre podrás multiplicar por tres y restar uno y así encontrar el valor de la " y ". Lo mismo podemos decir para b) y c). Cuando pasa esto se dice que la función tiene como dominio todos los números reales y se usa la notación $(-\infty, \infty)$ que se lee "de menos infinito a infinito".

Veamos el caso d); ¿puedes darle cualquier valor a " x "?. Parece no haber problema con los positivos y tampoco con los negativos; pero ¿qué pasa con el cero?, ¿qué significado tiene 1/0?. Siempre nos han dicho que no existe la división entre cero; vamos a ver por qué:

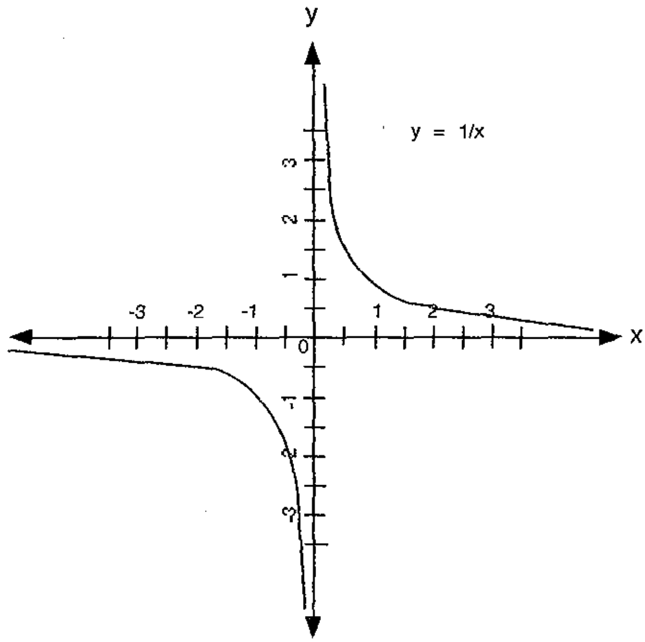
Sabemos que la multiplicación es una suma abreviada, (3)(5) es tres veces el 5, esto es, $5 + 5 + 5 = 15$ o cinco veces el tres $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$; también sabemos que dividir es repartir, pero lo que no sabemos es que la división también es una resta abreviada, $18 \div 3$ es restar del 18 el tres tantas veces como se pueda, esto es: $18 - 3 = 15$, $15 - 3 = 12$, $12 - 3 = 9$, $9 - 3 = 6$, $6 - 3 = 3$, $3 - 3 = 0$, en el momento que tengamos un resultado menor que lo que estamos restando nos paramos (ya no podemos restar); en este caso $18 \div 3 = 6$ (6 es el número de veces que restamos el tres).

Si en lugar de tomar 18, hubiéramos tomado 20 el resultado sería el mismo pero tendríamos un residuo de 2 ya que la última resta hubiera sido 5 - 3 = 2 y aquí nos hubiéramos parado. Regresando a la división entre cero ¿qué sentido tiene 1/0?, veamos nuestras restas: 1 - 0 = 1, 1 - 0 = 1, 1 - 0 = 1, ¿cuándo nos detenemos?. ¿Entiendes ahora por qué se dice que al dividir un número entre cero nos da infinito?. Vamos a regresar a nuestro problema: la función $y = 1/x$ no esta definida cuando la x vale cero, veremos como afecta esto a nuestra gráfica, vamos a tabular tomando valores cada vez más cercanos a cero tanto por la derecha como por la izquierda:

x	y= 1/x
1	1
0.5	2
0.2	5
0.1	10
0.01	100
0.001	1000
-1	-1
-0.5	-2
-0.2	-5
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.001	-1000

Mientras más se acerca el valor de " x " a cero, más grande se hace el valor de " y ".

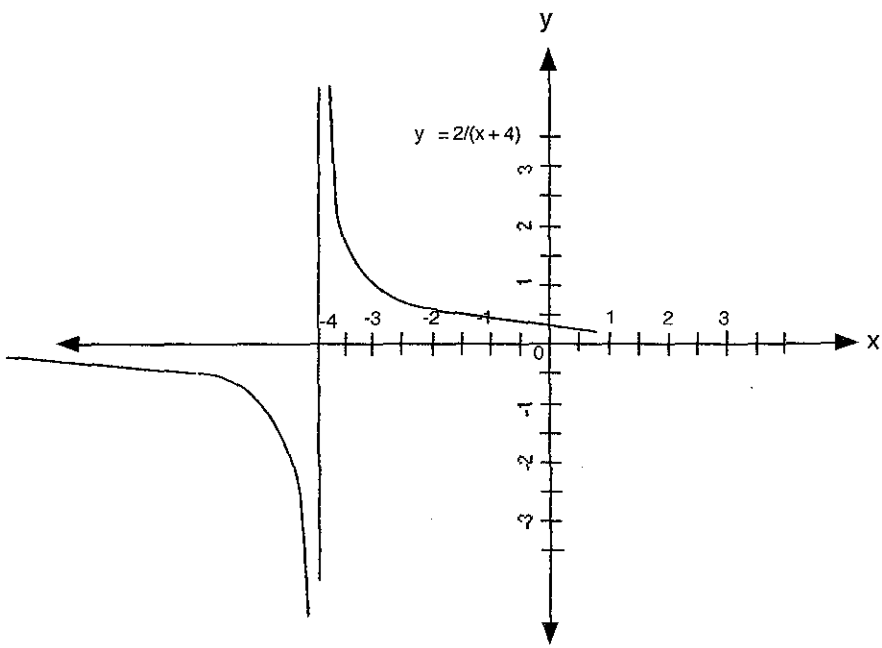
De la misma manera, si ahora tomas valores de " x " cada vez más grandes tanto positivos como negativos el valor de " y " se hace cada vez más pequeño, tanto positivo como negativo (haz la tabla). Veamos la gráfica:



Podemos observar que la gráfica de la función, al acercarnos al eje " y " se va pegando cada vez más a éste, pero no puede tocarlo ya que no está definida para x = 0 (los puntos para los cuales x = 0 son los del eje " y "); cuando una función se va acercando cada vez más a una recta sin llegar nunca a tocarla, se dice que la recta es una ***asíntota*** de la función, en nuestro caso el eje " y " es una ***asíntota*** de la función. ¿Tiene la función otra ***asíntota***?.

Como la función no está definida para el cero, el dominio serán todos los números reales menos el cero y entonces nos quedan dos intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$, se usa el paréntesis redondo ") " lado derecho o " (" lado izquierdo para indicar que el extremo, ya sea el derecho o el izquierdo, no está incluido en el intervalo; cuando el extremo está incluido se usa paréntesis "] " lado derecho o paréntesis " [" lado izquierdo. Regresando a nuestro ejemplo tenemos que el dominio de la función es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

¿Cuál será el dominio de la función $y = 2/(x + 4)$?. Serán todos los números reales menos el valor de " x " que haga cero el denominador, ¿cuál es este valor?. Usando la notación de intervalo escribe el dominio de la función. Vamos a dibujar la gráfica:



Como ya notaste trazamos una recta paralela al eje " y " que pasa por $x = -4$ (el valor de " x " que hace cero el denominador de la función). Si tabulas la función te darás cuenta que al tomar la " x " valores cada vez más cercanos a -4, desde la izquierda o desde la derecha, la función va tomando valores cada vez más grandes como pasó en la otra función al acercarse la " x " a cero.

¿Tiene la gráfica de la función asíntotas?. ¿Cuáles son?.

El dominio de la función $y = 2/(x + 4)$ es $(-\infty , -4) \cup (-4 , \infty)$.

Ejercicios para realizar en clase:

Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

a) $y = -7x + 2$, b) $y = 2x^2 - 8x + 3$, c) $y = 3/(3x + 7)$, d)* $y = 5/ (x^2 - 4)$

e)* $y = (x^2 + 4x +4)/ (x + 2)$

ANEXO VII

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 7

Nombre:______________________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

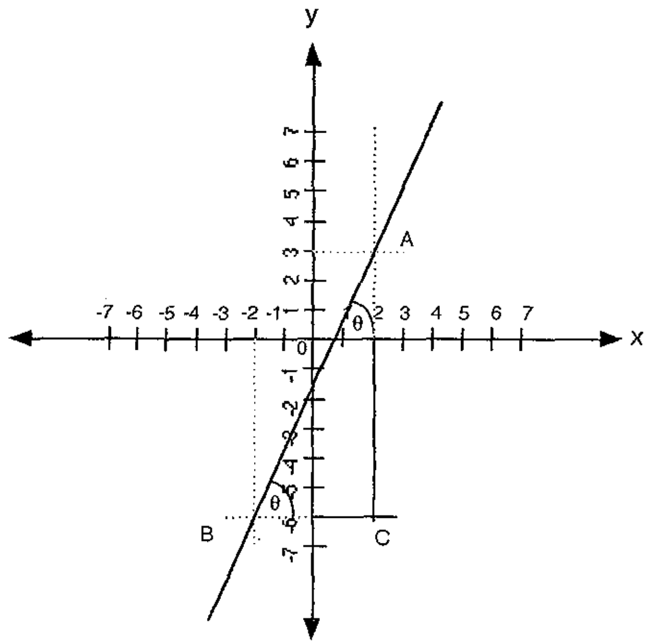
Semestre : 2001-I Fecha: ______________________

****

VII. La línea recta (1ª parte):

En las lecciones de graficación de expresiones algebraicas: (5 y 6), vimos que expresiones algebraicas como: $y = -7x + 2$ y $y = 3x - 1$, tienen por gráfica una línea recta; también notamos que el término independiente tomado con su signo representa el punto de intersección con el eje "y" (recuerda que para encontrar la intersección con el eje "y" tenemos que hacer cero el valor de "x"). ¿Podemos pensar que toda expresión algebraica de primer grado es una línea recta y que toda recta se puede expresar como una expresión algebraica de primer grado?. Analicemos la gráfica de una recta y veamos que principios podemos encontrar:

Una línea recta está determinada cuando conocemos dos de sus puntos A(2 , 3) y B(-2 , -6), eso nos enseñan en geometría elemental; sin embargo, esto no parece ayudarnos a encontrar la expresión algebraica de la recta. Tracemos por "A" una paralela al eje "y" y por "B" una paralela al eje "x", llamemos "C" al punto de intersección. ¿Cuáles son las coordenadas de "C"?.



Podemos observar que la línea recta forma un ángulo con el eje "x", llamemos θ a este ángulo, como BC es paralelo al eje "x" el ángulo con vértice B es igual a θ (observa la figura); si recordamos las definiciones de las razones trigonométricas, tenemos:

$$\text{Tan}\,\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{3-(-6)}{2-(-2)} = \frac{9}{4}$$

¡Parece que los dos puntos si nos sirvieron!, nos ayudaron a encontrar la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el eje "x" (ahora podemos saber el valor del ángulo sin medir) a esta tangente se le llama pendiente de la recta y se denota con la letra "m".

Encuentra la pendiente de la recta que pasa por los puntos:

a) A(4 , 1) y B(6 , 3); b) C(-2 , -3) y D(4 , 5); c) E(-5 , 2) y F(-2 , -6)

Espero te hayas dado cuenta que en las dos primera el resultado es positivo, pero en la última el resultado es negativo ya que si graficas E y D, la recta que los une forma un ángulo con el eje "x" mayor de 90° y menor de 180° y en estos casos la tangente trigonométrica es negativa (si tienes una calculadora científica lo puedes comprobar).

No necesitas estar graficando los puntos, solo necesitas respetar el mismo orden para las "x" y para las "y", veamos el primer caso:

$$m = \frac{1-3}{4-6} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad \text{o} \quad m = \frac{3-1}{6-4} = \frac{2}{2} = 1$$

Si pongo arriba primero la "y" de la A, también abajo debo poner primero la "x" de la A; y si pongo arriba primero la "y" de la B debo poner abajo primero la "x" de la B.

Vamos a hacer lo mismo con el tercer caso:

$$m = \frac{2-(-6)}{-5-(-2)} = \frac{2+6}{-5+2} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$$

Si analizamos lo anterior podemos concluir:

La pendiente de la recta que pasa por los puntos $Q(x_1, y_1)$ y $R(x_2 , y_2)$ está dada por:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{o} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Todo esta muy bien; pero ¿en qué nos ayuda conocer la pendiente de la recta, si lo que necesitamos es su expresión algebraica?. Tomemos un punto P(x , y), para que esté en la recta que forman Q y R la pendiente que forme P con Q o con R debe ser la misma que la que forman Q y R; esto es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si despejamos la "y" tendremos:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \text{ o también } y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)x - \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 + y_1\right)$$

Podemos observar que tenemos una expresión algebraica de primer grado en la cual el coeficiente de la "x" es la pendiente de la recta; esta forma se conoce como la forma usual de la recta y se expresa: $y = mx + b$ (recuerda que el término independiente es el punto donde corta al eje "y", este punto se llama ordenada al origen).

Ahora si podemos afirmar que toda expresión algebraica de primer grado es una línea recta y que toda recta se puede expresar como una expresión algebraica de primer grado. La expresión algebraica de primer grado también se llama expresión algebraica lineal.

Ejercicios para hacer en clases:

1.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) A(1 , 2) y B(5 , 4); b) C(-5 , 3) y D(2 , 1); c) E(3 , 6) y F(-4 , 6);

d) * G(5 , 2) y H(5 , 4).

2.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m:

a) P(-3 , -5) m = 2; b) P(8 , 7) m = 1/2; c) P(-9 , 3) m = -(3/4), d) P(1 , -5) m = 0

3.- Encuentra la ecuación de la recta que:

a) * Pasa por el punto M(-6 , -6) y es paralela al eje "x".

b) * Pasa por el punto M(4 , 3) y es paralela al eje "y".

Para el ejercicio 1.a) buscamos primero la pendiente de la recta:

$$m = \frac{4-2}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

a continuación tomamos los puntos P(x , y) y A(1 , 2) cuya pendiente debe ser igual a 1/2:

$$\frac{y-2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

y despejando tenemos y - 2 = (1/2) (x - 1) lo cual queda:

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{3}{2}$$

ANEXO VIII

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 8

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____

Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

VII. La línea recta (2ª parte):

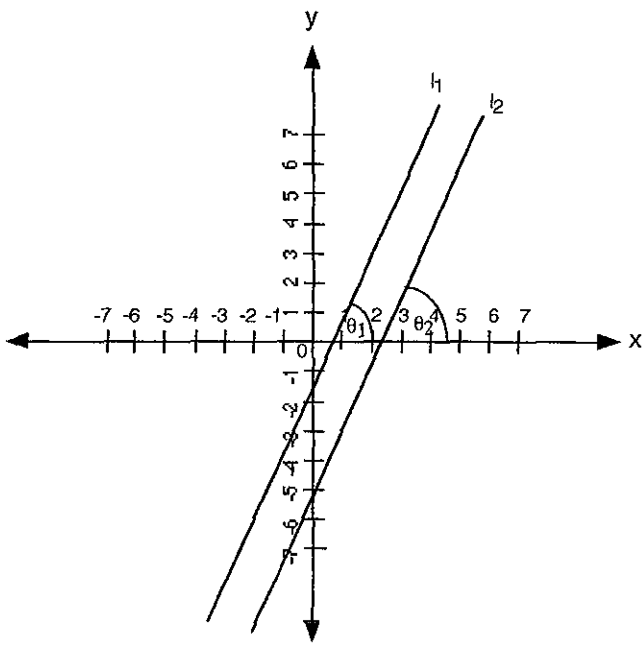
En la lección anterior te enfrentaste a un problema difícil: encontrar la ecuación de la recta que pasa por G(5 , 2) y H(5 , 4), si lo resolviste te felicito; pero si no lo hiciste lo analizaremos juntos; el problema está que la pendiente es:

$$m = \frac{4-2}{5-5} = \frac{2}{0}$$

y como la división entre cero no existe, parece que no hay solución; sin embargo, si graficas los dos puntos verás que están en una recta vertical (paralela al eje "y"), el ángulo que esta recta forma con el eje x es de 90° y la tangente de 90° no existe (usa una calculadora científica y compruébalo). La recta anterior tiene una representación $x = 5$ todas las rectas verticales son de la forma $x = k$, donde k puede tener cualquier valor.

De manera semejante diremos que todas las rectas horizontales (paralelas al eje "x") son de la forma $y = k$, en este caso se llaman expresiones algebraicas constantes (ejercicios 2d y 3a de la sección anterior).

Observa la siguiente gráfica y contesta ¿qué tienen en común las rectas paralelas l_1 y l_2?.



Por el paralelismo de las rectas sabemos que $\theta_1 = \theta_2$ y por lo tanto las dos rectas tienen la misma pendiente.

¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por P(11 , -7) y es paralela a la recta $y = 2x$?. Habrás observado que puedes encontar la ecuación de una recta si conoces dos puntos, o si conoces un punto y la pendiente; en el caso de rectas paralelas, si nos dan la ecuación de una de ellas, podemos conocer inmediatamente la pendiente de las dos (es el coeficiente de la "x" cuando la "y" está despejada). Vamos a sistematizar toda esta información:

Ecuación de una recta cuando se conoce $Q(x1 , y_1)$ un punto de ella y su pendiente "m"

$$y = m\ (x - x1) + y1$$

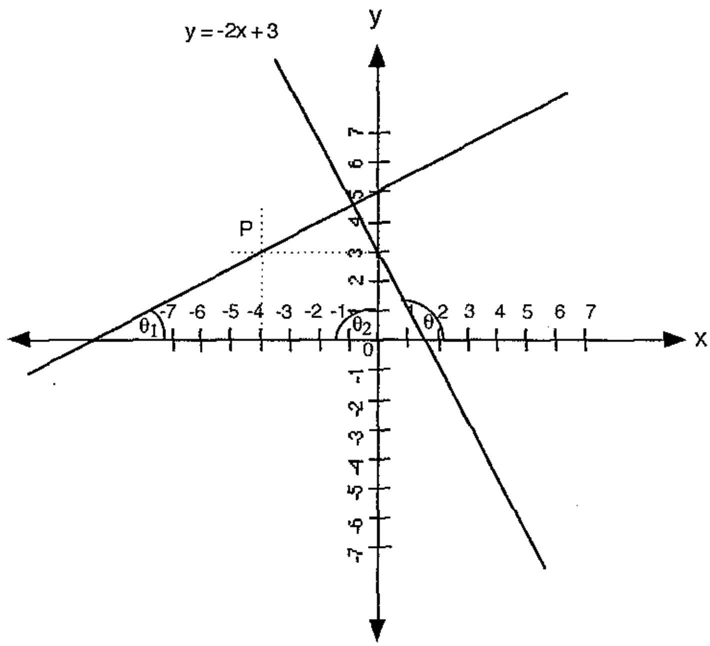
Ecuación de una recta cuando se conocen dos de sus puntos $Q(x_1 , y_1)$ y $R(x2 , y_2)$

$$y= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

Si las rectas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son paralelas, entonces:

$$m1 = m2$$

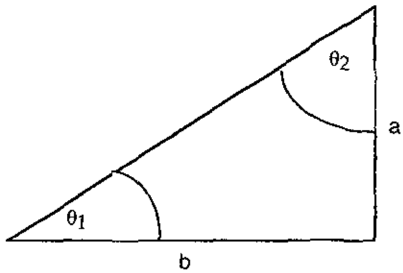
¿Cuál será la ecuación de una recta que pasa por un punto dado y es perpendicular a otra recta?. Veamos un ejemplo: encontrar la ecuación de la recta que pasa por P(-4 , 3) y es perpendicular a la recta y = -2x + 3, hagamos la gráfica:



Trazamos la gráfica de y= -2x + 3 y por el punto "P" dibujamos, con una escuadra, una recta perpendicular. Podemos observar que las rectas perpendiculares forman con el eje "x" ángulos que son: uno agudo θ_1 (menor a 90°) y el otro obtuso θ (mayor de 90°) y de acuerdo con lo que sabemos el ángulo agudo nos da una pendiente positiva y el obtuso una pendiente negativa; como la pendiente de la recta y = -2x + 3 es negativa, la de la recta perpendicular debe ser positiva.

Al volver a observar la figura notamos que las dos rectas y el eje "x" forman un triángulo rectángulo y por lo tanto los ángulos θ_1 y θ_2 son complementarios, es decir suman 90° y las tangentes de los ángulos complementarios son recíprocas. ¿Sabes qué es el recíproco de un número?. Si el número es un entero como -3 su recíproco es -1/3, y si el número es una fracción como -2/5 o como 3/4 su recíproco es -5/2 para la primera y 4/3 para la segunda (el recíproco tiene el mismo signo).

Observa la siguiente figura:



La tangente de θ_1 es a/b y la tangente de θ_2 es b/a, como ves las tangentes son recíprocas cuando los ángulos son complementarios. ¿Para qué nos sirve todo esto?, regresemos a la gráfica de las rectas y vamos a hacer una última observación: θ_2 es el suplemento del ángulo de la recta $y = -2x + 3$ (ángulos suplementarios son los que suman 180°) y cuando los ángulos son suplementarios sus tangentes son simétricas (iguales en valor pero de signo contrario); esto quiere decir que si la pendiente de la recta $y = -2x + 3$ es -2, la pendiente del ángulo θ_2 es 2; pero, entonces la pendiente del ángulo θ_1 es 1/2 (la pendiente de la recta perpendicular) y como la recta pasa por el punto P(-4 , 3) ya podemos escribir la ecuación de la recta perpendicular:

$$y = \frac{1}{2}(x+4)+3 \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{2}x+5$$

y de acuerdo a lo analizado tenemos el siguiente principio:

Si las rectas $y = m_1x + b_1$ y $y = m_2x + b_2$ son perpendiculares, entonces : $$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ejercicios para hacer en clase:

1.- Encuentra el punto de intersección de las rectas $y = -2x + 3$ y $y = (1/2)x + 5$

2.-* Calcula la distancia del punto $P(-4 , 3)$ a la recta $y = -2x + 3$

3.-* Calcula la distancia del origen a la recta $y = -2x + 3$

ANEXO IX

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 9

Nombre:________________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

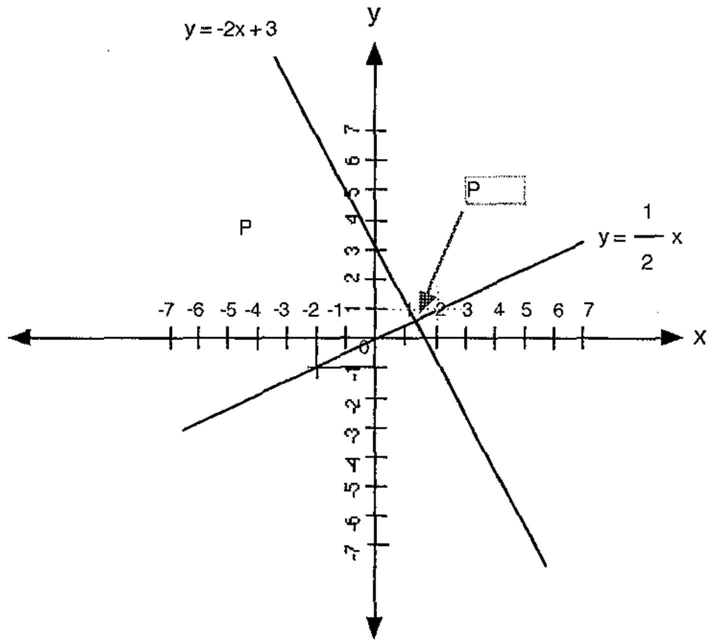
VII. La línea recta (3ª parte):

En la lección anterior te pedimos que encontraras la distancia del punto P(-4 , 3) a la recta $y = -2x + 3$ y también la distancia del origen a la misma recta; este tipo de problemas se presentan con frecuencia, vamos a resolver el segundo de ellos: la distancia del origen a la recta $y = -2x + 3$.

Sabemos que la distancia de un punto a una recta es el tamaño de la perpendicular que va del punto a la recta, para encontrar esta distancia buscaremos primero la ecuación de la recta perpendicular la cual tiene pendiente 1/2 y pasa por el origen O(0 , 0), entonces su ecuación es:

$$y = \frac{1}{2}(x-0)+0 \quad \text{ó sea} \quad y = \frac{1}{2}x$$

si ahora buscamos el punto P donde corta esta recta a $y = -2x + 3$ podremos después calcular la distancia de este punto con el origen y tendremos resuelto el problema. Observa la figura siguiente:



Hagamos simultáneas las dos ecuaciones para encontrar el punto donde se cortan:

Si restamos miembro a miembro tenemos:

$$y = -2x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$0 = -2x - \frac{1}{2}x + 3$$

Y despejando nos queda x = 5/6, sustituyendo en la segunda ecuación y despejando queda: y = 5/12; entonces el punto donde se cortan las dos rectas perpendiculares es R(5/6 , 5/12) y la distancia de este punto al origen es:

$$\sqrt{\left(\frac{5}{6}-0\right)^2+\left(\frac{5}{12}-0\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{12}$$

entonces la distancia del origen a la recta y = -2x + 3 es:

$$\frac{5\sqrt{5}}{12}$$

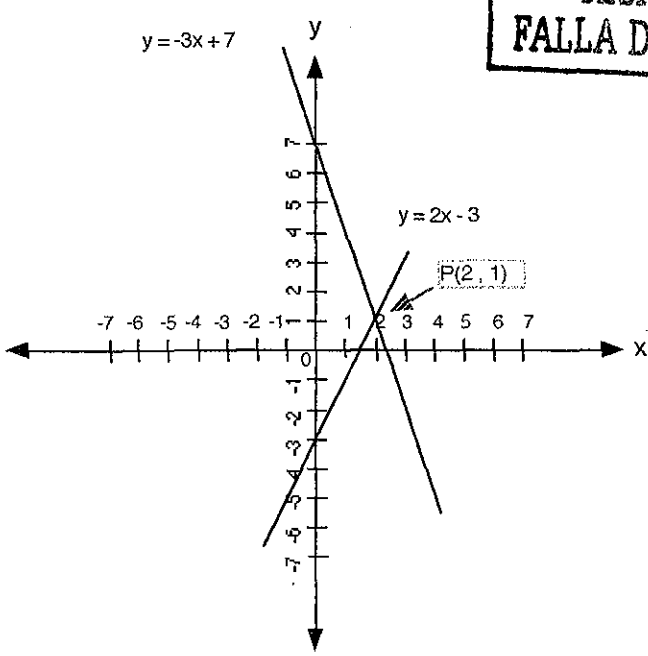
Ejercicios para resolver en clase:

Encuentra la distancia del punto P(-4 , 4) a la recta y = x + 1.

Ecuaciones de primer grado simultáneas, su representación en los ejes coordenados.

En Álgebra cuando viste el tema de ecuaciones de primer grado simultáneas (dos ecuaciones con dos incógnitas), se te enseñó que podía haber una solución, ninguna o una infinidad; vamos a ver usando las gráficas que significa esto; para ello pondremos tres pares de rectas:

Caso 1. $y = 2x - 3$ y $y = -3x + 7$, en este caso al hacer simultáneas las ecuaciones encontramos una pareja de valores $x = 2$ y $y = 1$ que resuelve el problema; si graficamos veremos que corresponden al punto P(2 , 1), punto en el cual se cortan las dos rectas:



Caso 2. $4x - 6x = 8$ y $2x - 3y = 5$, en este caso si tratas de resolver el sistema de ecuaciones simultáneas te encontrarás que no hay solución (inténtalo). Vamos a despejar la "y" en ambas ecuaciones y tendremos que la primera ecuación queda:

$y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ y la segunda queda $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

¡tienen la misma pendiente y diferente ordenada al origen!; entonces las rectas son paralelas y no se cortan (no existe solución, ya que la solución es el punto donde se cortan). Creo que no necesitamos trazar las gráficas ya que conocemos el criterio de paralelismo.

Caso 3. $2y + 3x = 2$ y $4y + 6x = 4$, este caso se parece al anterior; pero, tiene una diferencia, al despejar la "y" la pendiente es igual en ambas ecuaciones $m_1 = m_2 = -(3/2)$ y también es igual a la ordenada al origen $b_1 = b_2 = 1$, entonces no se trata de dos rectas, sino de dos formas de escribir la misma recta (por eso tiene infinidad de soluciones: todos los puntos de la recta son soluciones).

Ejercicios para hacer en clase:

1.- De las siguientes parejas de rectas señala, sin resolver el sistema, cuáles tienen una solución, ninguna o una infinidad:

a) $x - y = -4$, $2x - 2y = 2$; b) $x - y = -4$, $x + y = -2$; c) $x - y = -4$, $-2x + 2y = 8$

b) Explica tus respuestas al ejercicio a).

2.- Dada la recta $-3x + 4y = -1$, da la ecuación de una recta que:

a) Sea paralela a ella.
b) Sea perpendicular a ella.
c) La corte.
d) Sea la misma recta (con otra expresión).

ANEXO X

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 10

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ____________________

****

VIII. Circunferencia (1ª parte):

Desde la primaria te has acostumbrado a trazar la circunferencia cuando te dicen donde está el centro y cuál es el radio; para ello usas el compás que apoyas en el centro y abriéndolo una distancia igual al radio puedes trazar la circunferencia.

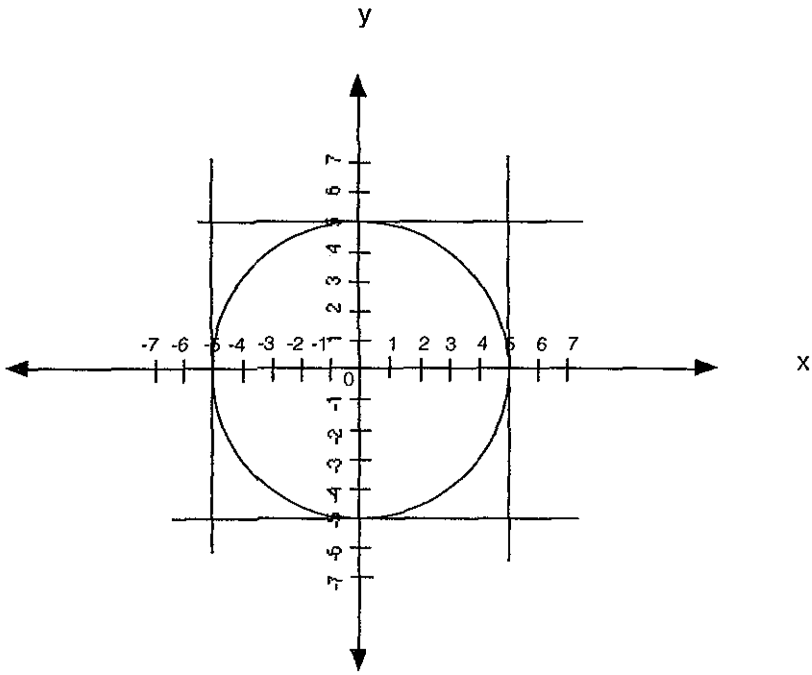
¿Cómo podrías definir la circunferencia como lugar geométrico?; esto es: ¿Qué caracteriza a los puntos de la circunferencia?. La respuesta es inmediata:

La circunferencia está formada por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del centro. Esta distancia es llamada radio.

¿Qué pasa con los puntos que están a una distancia del centro menor que el radio?.
¿Cuáles son los puntos que están a una distancia del centro mayor que el radio?.

Dibuja (usando el compás) una circunferencia de 6 cm. de radio y con tu regla verifica, para algunos puntos que tomes adentro y para otros que tomes afuera de la circunferencia, que la distancia del centro a los de adentro es menor de 6 cm. y la distancia del centro a los de afuera es mayor de 6 cm.

Vamos ahora a ver que pasa con la circunferencia cuando trabajamos con ejes coordenados. Empezaremos trazando una circunferencia con centro en el origen y radio igual a cinco unidades.



Vamos a escribir la expresión algebraica de esta circunferencia; para ello usaremos al punto P(x , y) como un punto de la circunferencia y al punto O(0 , 0) como el origen el punto P debe cumplir con la definición:

$$d(P, O) = 5; \text{ pero } d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

entonces:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

y elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos:

$x^2 + y^2 = 5^2$, por lo tanto $x^2 + y^2 = 25$ o lo que es lo mismo $x^2 + y^2 - 25 = 0$

Si nombramos al radio con la letra "r" podemos entonces escribir:

Ecuación de la circunferencia con centro en O(0 , 0) y radio "r"
$x^2 + y^2 = r^2$ ó $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

¿El punto A(5 , 0) es un punto de la circunferencia con centro en O(0 , 0) y radio 5?. De acuerdo con la definición de lugar geométrico debe cumplir la expresión algebraica que teníamos anteriormente $x^2 + y^2 = 25$; veamos si cumple: $5^2 + 0^2 = 25$, ¡si cumple! y el punto B(4 , 4) ¿está en la circunferencia?. Si tu respuesta es no, señala si está afuera o adentro de la circunferencia. ¿Qué puntos están en la circunferencia?. F(3 , 4), G(1 , 4), H(-3 , 4), K(-4 , 1).

Resuelve en clase los siguientes problemas:

a) Encuentra la ecuación de la circunferencia con centro en O(0 , 0) y radio 3.

b) ¿Qué punto está en la circunferencia del problema b)? L(0 , -3), S(2 , 2).

c)* El punto M(-2 , y) está en la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, ¿Cuál es el valor de y?. Hay dos soluciones.

¿Cuál sería entonces la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen?.

Trabajemos el caso de una circunferencia con centro en el punto C(5 , 6) y radio 4, si P(x , y) es un punto de la circunferencia, de acuerdo a la definición tenemos:

$$d(P , C) = 4; \text{ pero } d(P , C) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-6)^2} = 4$$

Entonces:

$$\sqrt{(x-5)^2+(y-6)^2} = 4$$

y elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad tenemos:

$$(x-5)^2+(y-6)^2 = 16 ,$$

desarrollando los binomios nos queda: $x^2 - 10x + 25 + y^2 +12y +36 = 16$ y simplificando es:

$$x^2 - 10x + y^2 +12y = -45$$

Si nombramos al radio con la letra "r" y a las coordenadas del centro C(h , k), podemos entonces escribir:

Ecuación de la circunferencia con centro en C(h , k) y radio "r"
$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ ó $(x-h)^2+(y-k)^2 - r^2 = 0$

¿Recuerdas cuando vimos la simetría respecto a los ejes?. La circunferencia con centro en el origen si tiene simetría respecto al eje "y", respecto al eje "x" y respecto al origen.

Ejercicios para hacer en clase:

Encuentra la ecuación de cada una de las circunferencias siguientes:

a) Centro C(0 , -2) y radio r = 3.

b) Centro C(1 , 0) y radio r = 6.

c) Centro C(-2 , -3) y radio r = 4.

d)* Centro C(3 , -3) y tangente a los ejes coordenados.

e)* Los extremos de un diámetro son los puntos P(-1 , 4) y Q(2 , 0).

ANEXO XI

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 11

Nombre:______________________________________ # de cuenta:____________ Grupo:_____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ______________________

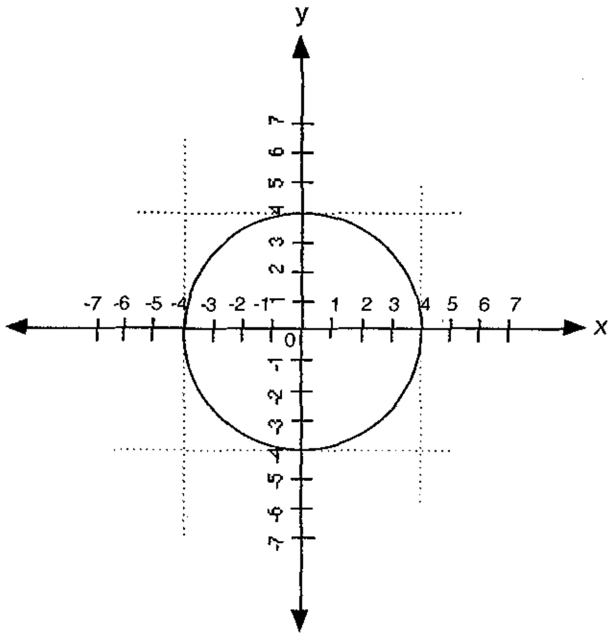
****

VIII. Circunferencia (2ª parte):

Hemos visto con la circunferencia el primero de los problemas (dadas las condiciones encontrar la expresión algebraica); veremos a continuación el segundo problema dada la expresión algebraica trazar la gráfica:

Para trazar la gráfica de una circunferencia necesitamos conocer el centro y el radio.

Si analizamos los casos vistos en la lección anterior notaremos que cuando el centro está en O(0 , 0), en la expresión algebraica sólo aparecen los términos al cuadrado (x^2 y y^2) y no aparecen los términos "x" y "y", por ejemplo: si la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 - 16 = 0$ debe ser una circunferencia con centro en O(0 , 0) y radio igual a 4 (compara la ecuación dada con $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio "r"). Ahora ya podemos trazar la circunferencia $x^2 + y^2 - 16 = 0$.



Traza la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 = 36$.

Veamos el caso cuando aparecen los términos cuadrados y también los de primer grado: grafiquemos la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$. Si comparamos con $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, necesitamos tener dos binomios al cuadrado (uno para las "x" y el otro para las "y"), empecemos con el de las "x": $(x - h)^2 = x^2 - 2hx + h^2$, quitamos h^2 y comparamos con $x^2 - 6x$ (el término al cuadrado y el término a la primera potencia) y tenemos que $x^2 - 2hx = x^2 - 6x$, por lo tanto $-2hx = -6x$ y de aquí despejamos $h = 3$ y tenemos:$(x - h)^2 = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$.

Ahora busquemos el binomio de la "y":

$(y - k)^2 = y^2 - 2ky + k^2$, quitamos k^2 y comparamos con $y^2 + 4y$ (el término al cuadrado y el término a la primera potencia) y tenemos que $y^2 - 2ky = y^2 + 4y$ y tenemos que $- 2ky = 4y$, de aquí despejamos $k = -2$ y como nos piden el simétrico de la "k" tenemos $(y - k)^2 = (y + 2)^2 = y^2 + 4y + 4$.

Regresemos a nuestra expresión original: $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, si reacomodamos nos queda $x^2 - 6x + y^2 + 4y = 3$, para tener los binomios al cuadrado nos falta agregar a las "x" el 9 y a las "y" el 4; pero como es una igualdad también hay que agregarlos del lado derecho: $x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 3 + 9 + 4$ y esta expresión se puede escribir $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Ahora ya sabemos cuales son las coordenadas del centro C(3 , -2), acuérdate que se toman los simétricos, también sabemos cual es el radio $r = 4$.

Si analizamos lo hecho anteriormente tenemos que el término que tiene la "x" a la primera potencia es igual a -2hx y podemos despejar la "h"; el término que tiene la "y" a la primera potencia es igual a -2ky y podemos despejar la "k"; después reacomodamos nuestra expresión juntando las "x", juntando las "y" y despejando el término independiente, por último agregamos el valor de la h^2 y la k^2 a ambos lados de la igualdad y simplificamos.

Apliquemos lo anterior al siguiente ejemplo: encontrar el radio y el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 8y - 8 = 0$.
$2x = -2hx$ y $8y = -2ky$, entonces h = _____ y k = ______, reacomodando la ecuación queda $x^2 + 2x + y^2 + 8y = 8$, agregamos el valor de h^2 y de k^2 a ambos lados de la igualdad y queda $x^2 + 2x +$ ____ $+ y^2 + 8y +$ ____ $= 8 +$ ____ $+$ ____: ¿puedes dar ahora las coordenadas del centro y el valor del radio?.

Ejercicios para hacer en clases:

1.- Encuentra las coordenadas del centro y el radio de las siguientes circunferencias:
a) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$, b)* $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 21 = 0$, c)* $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 29 = 0$

2.- Dibuja las gráficas de las circunferencias del problema anterior, si no se puede explica por qué.

ANEXO XII

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 12

Nombre:____________________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno Apellido materno Nombre(s)

Semestre : 2001-I Fecha: ______________________

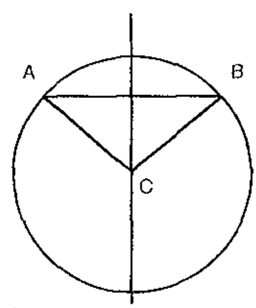
****

VIII. Circunferencia (3ª parte):

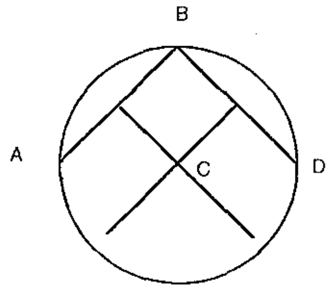
Condiciones para determinar una circunferencia:

Desde la escuela primaria aprendimos que para dibujar una circunferencia deberíamos conocer su centro y su radio; sin embargo, desde la época clásica de los griegos se sabía que si nos daban tres puntos podíamos construir una circunferencia que pasara por esos tres puntos. Nos podemos preguntar: ¿no necesitamos el centro y el radio?, por supuesto que si; pero si nos dan tres puntos podemos encontrar el centro y el radio, veamos como:

Los griegos sabían que la mediatriz de la cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la circunferencia (ver figura).



¿Recuerdas la definición de la mediatriz de un segmento (como lugar geométrico)?: son los puntos que están a la misma distancia (equidistan) de los extremos del segmento, en la figura observamos que AC = BC (ambos son radios de la circunferencia), entonces C está en la mediatriz de AB la cual es una cuerda de la circunferencia. Pongamos ahora tres puntos en una circunferencia y observemos qué pasa al trazar dos mediatrices:



Como el centro está en cada mediatriz, entonces está en el punto donde se cortan, si tenemos tres puntos podemos trazar dos mediatrices (hay tres) y encontrar el centro. ¿Cómo encuentras el radio?. Vamos a ver un ejemplo de lo anterior.

Tenemos los puntos A(2 , 3), B(-1 , 5) y D(3 , -2) y vamos a encontrar la ecuación de la circunferencia que pasa por ellos:

Busquemos la ecuación de la mediatriz de la cuerda AB, en la lección 4 vimos un problema como este: tomamos un punto P(x , y) y usando la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos:

Dist. (P , A) = dist. (P , B)

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2},$$

si elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad y desarrollamos los binomios al cuadrado tenemos:

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$, si simplificamos y despejamos la "y" nos queda:

$$y = \frac{6}{4}x + \frac{13}{4} \quad ;$$

ya tenemos la ecuación de la primera mediatriz, toma ahora los puntos A y D para encontrar otra mediatriz; una vez que encuentres la otra ecuación ¿qué debes hacer?. Como cada una representa la ecuación de una recta y como buscamos el punto donde se cortan tenemos que resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para encontrar la "x" y la "y" del punto donde se cortan el cual corresponde al centro de la circunferencia que buscamos.

Ejercicios para clase:

1.- Encuentra la ecuación de la mediatriz de la cuerda AD.

2.- Encuentra el punto donde se cortan las dos mediatrices.

3.- Encuentra el radio de la circunferencia.

4.- Encuentra la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica.

¿Existe otra forma de encontrar la ecuación de la circunferencia del problema anterior?. La ecuación de la circunferencia con centro C(h , k) y radio "r" es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$$

Si tenemos los puntos A(2 , 3), B(-1 , 5) y D(3 , -2), como son puntos de la circunferencia deben satisfacer la ecuación; esto es, sustituyendo A en la ecuación queda:

$(2 - h)^2 + (3 - k)^2 - r^2 = 0$ y desarrollando los binomios queda:

$4 - 4h + h^2 + 9 - 6k + k^2 - r^2 = 0$, llamemos a ésta la ecuación (1).

Ahora vamos a sustituir B: $(-1 - h)^2 + (5 - k)^2 - r^2 = 0$ y desarrollando los binomios tenemos: $1 + 2h + h^2 + 25 - 10k + k^2 - r^2 = 0$, llamémosla (2).

Por último sustituimos D y desarrollamos: $9 - 6h + h^2 + 4 + 4k + k^2 - r^2 = 0$, ésta es (3).

¿Te das cuenta que obtuvimos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas?.

Las incógnitas son las coordenadas del centro de la circunferencia (h , k) y el radio "r".

Ejercicios para hacer en clase:

1.- Resuelve el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas.

2.- Encuentra la ecuación de la circunferencia.

3.- Traza la gráfica.

Tarea.

Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos O(0 , 0), M(3 , 5) y N(-2 , 0).

ANEXO XIII

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 13

Nombre:______________________________ # de cuenta:__________ Grupo:_____
Apellido paterno   Apellido materno   Nombre(s)

Semestre : 2001-I   Fecha: ____________________

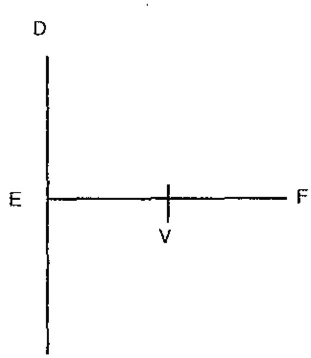
****

IX. Parábola (1ª parte):

A continuación vas a conocer otra curva que se va a definir como lugar geométrico y cuyo trazado (dibujo) se hará de acuerdo a esta definición.

Definición: La parábola está formada por todos los puntos cuya distancia a un punto llamado foco es igual a su distancia a una recta llamada directriz.

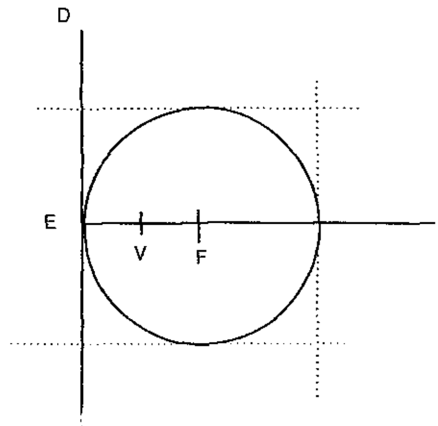
En la figura la recta EF es perpendicular a la recta DE y el punto V es el punto medio de la distancia EF; entonces: si la recta DE es la directriz y el punto F es el foco, el punto V está en la parábola ya que EV = VF. El punto V se llama vértice de la parábola.



¿Cómo encontrarías otros puntos de la parábola?.

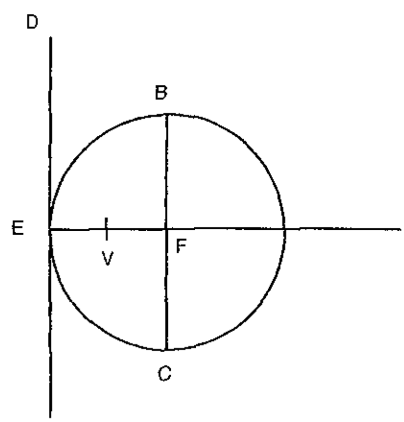
Por ejemplo: ¿Cómo encontrarías un punto cuya distancia a la recta DE y al foco F fuera de 2 cm.?.

Si usas la definición de circunferencia y te apoyas en F puedes construir todos los puntos que están a 2 cm. de F.



¿Cómo construyes todos los puntos que están a 2 cm. de la recta DE?.

Si pensaste en una paralela ¡estas en lo cierto!.

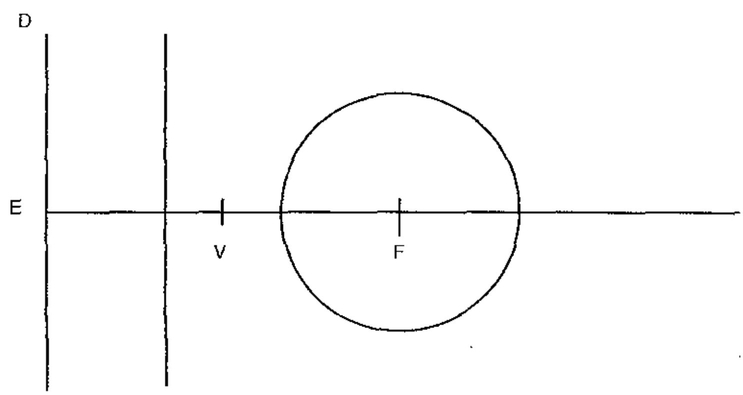


¿Qué observas?. La recta paralela y la circunferencia se cortan en dos puntos B y C las cuales están a 2 cm. tanto de el foco F, como de la directriz DE, por lo cual pertenecen a la parábola. Construye más puntos de la parábola; por ejemplo puntos que estén a 3, 4 y 5 cm. tanto del foco como de la directriz. La recta EF es el eje de simetría de la parábola.

Traza ahora una parábola cuyo foco esté a 6 cm. de su directriz, usa círculos cuyo centro sea F y cuyos radios sean 4, 5, 6, 7 y 8 cm. y paralelas que estén a 4, 5, 6, 7 y 8 cm. de la recta DE y marca los puntos que pertenecen a la parábola.

¿Puedes usar círculos de 2 y 3 cm. de radio y centro F y paralelas que estén a 2 y 3 cm. de DE?. Trázalos.

¿Te son útiles?. Veamos la figura del círculo de 2 cm. y la paralela que está a 2 cm.



¡No se cortan!. Era de esperarse ya que la distancia entre E y F es mayor que 4 cm.

El círculo de radio 3 cm. y la parábola que está a 3 cm. sólo se tocan en un punto (el punto medio de la perpendicular que va del foco a la directriz o sea el vértice).

Traza otra parábola cuyo foco esté a 10 cm. de su directriz (te recomiendo que uses papel cuadriculado por comodidad).

¿Te son útiles círculos de 1, 2, 3 y 4 cm. y paralelas a 1, 2, 3 y 4 cm.?. ¿Por qué?.

Los círculos que son útiles son aquellos cuyo radio es mayor que la mitad de la distancia del foco a la directriz ¿cuáles son las paralelas que te son útiles?.

En el ejemplo anterior te recomendamos usar papel cuadriculado porque las rectas paralelas ya están dadas.

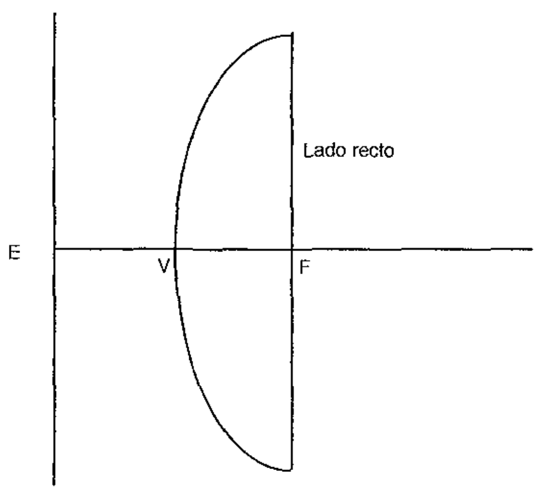
Tal como lo vimos con la circunferencia la parábola tiene puntos que están en su interior y puntos que están en su exterior por ejemplo:

Cualquier punto cuya distancia al foco es menor que su distancia a la directriz está en el interior de la parábola.

¿Qué condición debe tener un punto para estar en el exterior de la parábola?.

En la gráfica de la parábola que dibujaste toma algunos puntos del interior y otros del exterior y comprueba que en los primeros la distancia al foco es menor que la distancia a la directriz y en los segundos la distancia al foco es mayor.

El segmento de recta perpendicular al eje de simetría y que pasa por el foco se llama lado recto.



¿Puedes demostrar que el lado recto mide cuatro veces la distancia VF?.

ANEXO XIV

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"
CURSO PROPEDÉUTICO
LECCIÓN 14

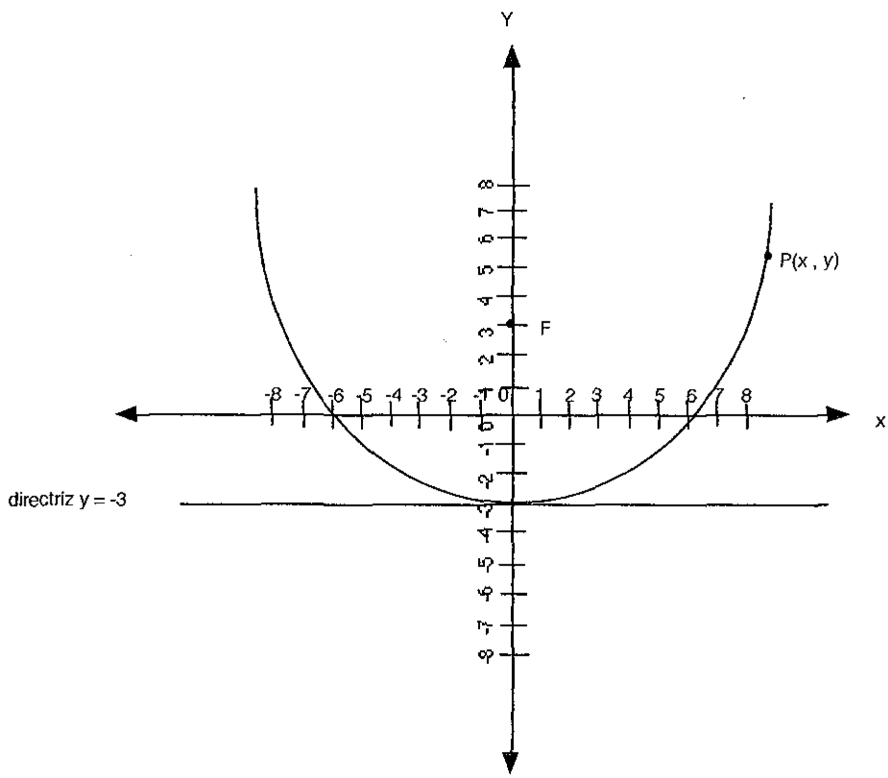
Nombre:________________________________ # de cuenta:___________ Grupo: _____
Apellido paterno   Apellido materno   Nombre(s)

Semestre : 2001-I   Fecha: _____________________

****

IX. Parábola (2^a parte):

En la lección anterior te familiarizaste con la parábola, en ésta vamos a buscar su expresión algebraica; empezaremos trazando una parábola en los ejes cartesianos con vértice en el origen, foco en el punto F(0 , 3) y directriz y = -3:



La definición dice que un punto P(x , y) está en la parábola si su distancia al foco F(0 , 3) es igual a su distancia a la directriz $y = -3$. En la gráfica podemos observar que la distancia del punto P a la directriz es $y + 3$ y la distancia de P al foco F es:

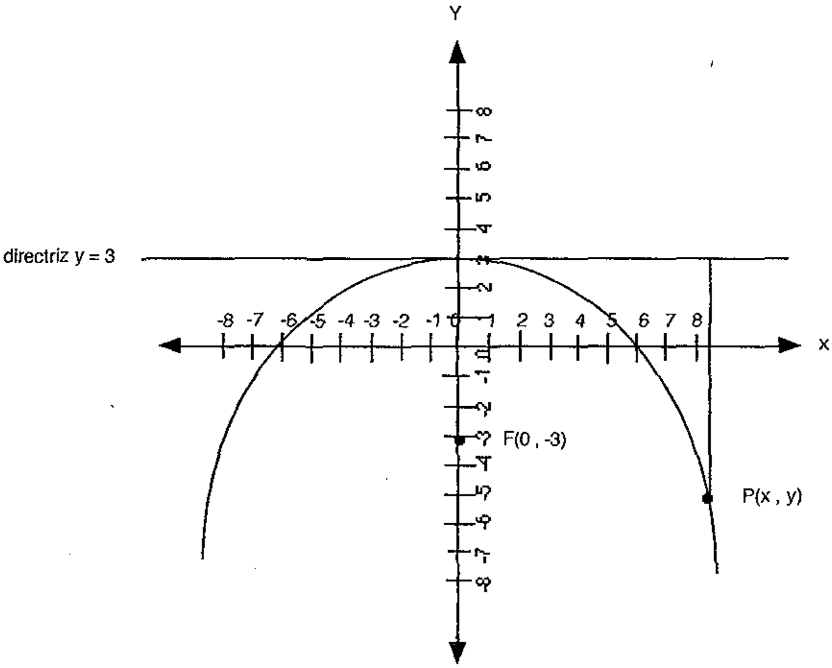
$$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2} \quad ,$$

entonces tenemos que:

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = y+3$$

y si elevamos al cuadrado los dos lados de la igualdad nos queda: $x^2 + (y - 3)^2 = (y + 3)^2$ y desarrollando los binomios tenemos $x^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 + 6y + 9$, simplificando y despejando la "y" queda $y = (x^2)/12$ (es una expresión algebraica cuadrática).

Ahora busca la expresión de la parábola con vértice en el origen, foco F(0 , -3) y directriz $y = 3$ (la parábola se abre en este caso hacia abajo).



Veamos que obtenemos si buscamos la expresión algebraica de una parábola con vértice en el origen, foco F(0 , c) y directriz $y = -c$ (si $c > 0$ la parábola se abre hacia arriba y si $c < 0$ la parábola se abre hacia abajo).

De los dos casos anteriores sabemos que la distancia del punto P(x , y) a la directriz es $|y + c|$ (ponemos el valor absoluto porque la suma puede ser negativa). La distancia del punto P al foco es:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} = \sqrt{x^2+(y-c)^2}$$

y de acuerdo con la definición de la parábola tenemos:

$$\sqrt{x^2+(y-c)^2} = |y+c| \quad ,$$

elevando al cuadrado ambos lados de la igualdad nos queda $x^2 + (y - c)^2 = (y + c)^2$ y desarrollando los binomios tenemos $x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2$; ahora simplificamos y despejamos la "y": $y = (x^2)/(4c)$.

Ecuación de la parábola con vértice V(0 , 0), foco F(0 , c) y directriz y = -c
$y = \dfrac{x^2}{4c}$

Si eres observador habrás notado que la cantidad que divide a x^2 es cuatro veces la distancia del vértice al foco, también podemos decir que es el valor de lado recto.

Las parábolas que hemos visto se llaman verticales (se abren hacia arriba o hacia abajo). ¿Pueden haber parábolas horizontales (que se abran a la izquierda o a la derecha)?.

Ejercicios para hacer en clase:

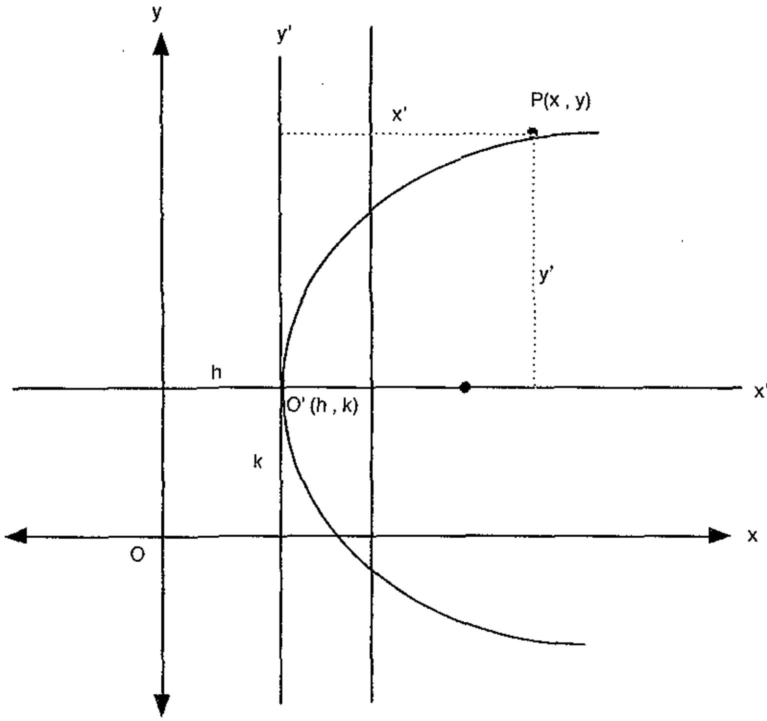
1.- Encuentra la ecuación de las siguientes parábolas:

a) foco F(0 , -2) y directriz $y = 2$, b) foco F(0 , 4) y directriz $y = -4$.

2*.- ¿Cuál será la ecuación de la parábola con foco F(2 , 0) y directriz $x = -2$?.

Encontramos la ecuación de la parábola vertical con vértice en el origen y te pedimos que encontraras la ecuación de la parábola horizontal con vértice en el origen. ¿Cuál será la ecuación de una parábola vertical u horizontal con vértice fuera del origen?; antes de buscar la ecuación de estas parábolas, vamos a ver algo que se llama traslación de los ejes coordenados:

Observa la siguiente figura en la cual tenemos los ejes coordenados "xy" en los cuales el punto P tiene coordenadas (x , y) y otros ejes coordenados x' y' cuyo origen es O' el cual tiene coordenadas (h , k) en los ejes xy; las coordenadas de P respecto a estos nuevos ejes coordenados son, (x' , y').



Si observamos primero las "x" veremos que $x = x' + h$ o lo que es lo mismo $x' = x - h$ y de la misma manera $y = y' + k$ o $y' = y - k$.

Ejercicios para hacer en clase:

1.- Tenemos dos ejes coordenados xy y x'y'; si las coordenadas de O' son (-1 , 5). ¿Cuáles son las coordenadas de P en los ejes xy? si las coordenadas de P en los ejes x'y' son:

a) P(3 , 5), b) P(-2 , -4), c) P(1 , -6), d) P(-8 , 7), e) P(0 , -5)

De acuerdo con lo visto anteriormente $x = x' + h$ y $y = y' + k$, por lo tanto para a) tenemos $x_1 = 3 - 1 = 2$ y $y_1 = 5 + 5 = 10$ y las coordenadas de P en xy son (2 , 10) encuentra las coordenadas de los ejercicios b), c), d) y e).

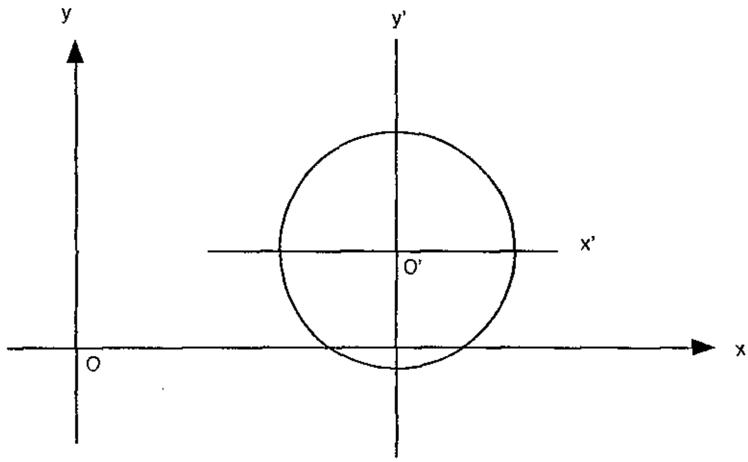
2.- Si las coordenadas de los puntos del ejercicio anterior están ahora en los ejes xy; ¿cuáles son las coordenadas de los puntos en los ejes x'y'?. Ahora necesitamos usar $x' = x - h$ y $y' = y - k$. Calcula las nuevas coordenadas.

Ahora veremos como la traslación de los ejes coordenados nos ayuda a simplificar nuestro análisis:

¿Recuerdas las ecuaciones de la circunferencia con centro en el origen y fuera de él?.

Ecuación de la circunferencia con centro en O(0 , 0) y radio "r"
$x^2 + y^2 = r^2$ ó $x^2 + y^2 - r^2 = 0$
Ecuación de la circunferencia con centro en C(h , k) y radio "r"
$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ó $(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0$

La circunferencia que aparece en la figura de abajo tienen en los ejes coordenados x'y' la ecuación $x'^2 + y'^2 = r^2$ [(su centro es O', el origen de los ejes coordenados x'y' y sus coordenadas en xy son (h , k)] . Si usamos las ecuaciones de la traslación de ejes $x' = x - h$ y $y' = y - k$ y sustituimos x' por $x - h$, y' por $y - k$ obtenemos $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ (la ecuación de la circunferencia en los ejes coordenados xy):



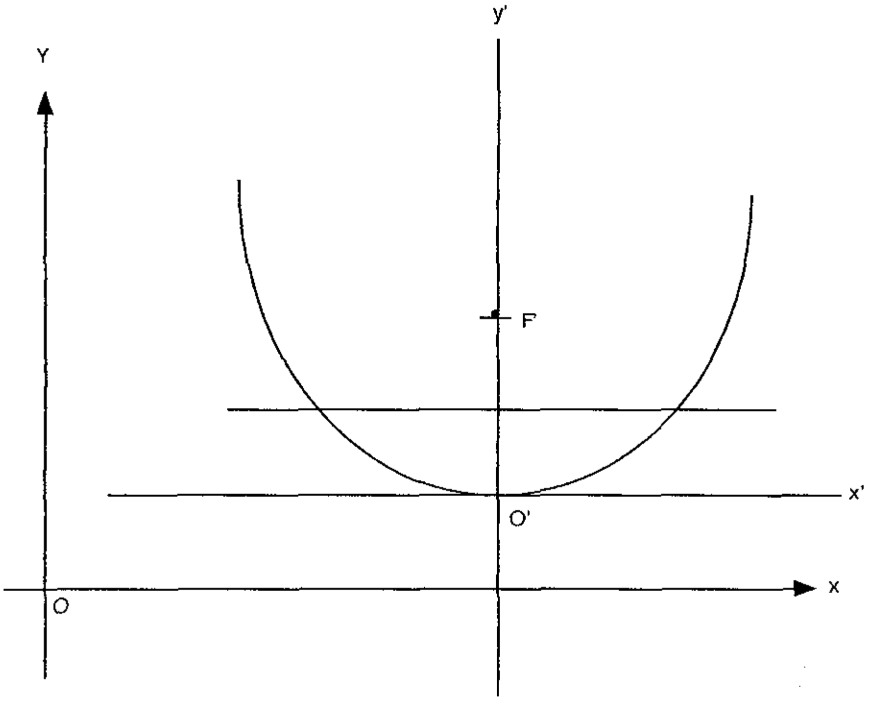
Las coordenadas de la parábola vertical con vértice en el origen son:

Ecuación de la parábola con vértice V(0 , 0), foco F(0 , c) y directriz y = -c $y = \dfrac{x^2}{4c}$

Las coordenadas de la parábola horizontal con vértice en el origen son:

Ecuación de la parábola con vértice V(0 , 0), foco F(c , 0) y directriz x = -c $x = \dfrac{y^2}{4c}$

Veamos la gráfica de una parábola vertical con vértice fuera del origen:



Si ponemos los ejes coordenados x'y' con su centro O' en el vértice de la parábola tendremos:

Ecuación de la parábola con vértice V'(0' , 0'), foco F' (0' , c') y directriz y' = -c'

$$y' = \frac{x'^2}{4c'}$$

En esta ecuación pusimos las coordenadas del vértice, del foco y de la directriz en los ejes x'y', en los ejes normales xy las coordenadas del vértice son (h , k), las mismas que las de O', las del foco (h , k + c') y las de la directriz y = k - c' y usando la transformación de coordenadas la ecuación de la parábola debe quedar:

Ecuación de la parábola con vértice V(h , k), foco F(h , k + c) y directriz y = k - c $$y - k = \frac{(x-h)^2}{4c}$$

La ecuación de la parábola horizontal es:

Ecuación de la parábola con vértice V(h , k), foco F(h + c , k) y directriz x = k - c $$x - h = \frac{(y-k)^2}{4c}$$

Ejercicios:

1.- Con los siguientes datos encuentra la ecuación de la parábola:

a) V(3 , 2), F(3 , 5) y directriz y = -1;

b) V(-2 , 5), F(2 , 5) y directriz x = -6

c)* F(-4 , 6) y directriz y = -4;

d)* F(1 , 3) y directriz x = 7