56

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PROBABILIDAD APLICADA A LAS MATEMATICAS ACTUARIALES.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A N:

EDUARDO HERNANDEZ PEREZ
PAOLA ALEJANDRA PAVON MORENO

DIRECTOR DE TESIS: ACT. JAIME VAZQUEZ ALAMILLA

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

2002

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Probabilidad aplicada a las matemáticas actuariales "

realizado por Hernández Pérez Eduardo
Pavón Moreno Paola Alejandra

con número de cuenta 9339690-9
9653202-3 **, quién cubrió los créditos de la carrera de** Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Act. Jaime Vázquez Alamilla	
Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes	
Propietario	Act. Marisa Miranda Tirado	Marisa Miranda Tirado
Suplente	Dr. Manuel Ordorica Mellado	
Suplente	Act. Pedro Aguilar Beltrán	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Agradecimientos:

Queremos agradecer a nuestros padres por todo el apoyo incondicional que nos han brindado durante todos estos años.

A nuestro director de tesis, Jaime, gracias por habernos dedicado este tiempo, por tus consejos y tu amistad.

A la profesora Pilar, por sus clases, sus comentarios que contribuyeron al desarrollo de este trabajo.

A Marisa, por todo el tiempo que nos dedicaste, por tus comentarios que enriquecieron este trabajo, por tus enseñanzas y tu amistad.

Al Dr. Ordorica, por ser una persona excepcional que siempre nos motiva y apoya para ser mejores en la vida.

Al Act. Pedro Aguilar y a Jorge Avendaño, por las facilidades y aportaciones otorgadas para terminar este trabajo.

Al Prof. Téllez por todo el apoyo incondicional que nos ha brindado, por ser una excelente persona y su amistad.

A la Mat. Irma Glinz "la abuela de Ciencias", por toda la motivación y preocupación que mostró para que finalizáramos éste ciclo.

A Pablo Rosell por todo el tiempo que nos dedicaste, así como tus atinados comentarios. Gracias a ti, pudimos terminar este trabajo.

A todos los profesores de la Facultad, por contribuir en nuestro desarrollo profesional, un especial agradecimiento a: María del Pilar Alonso Reyes, Agustín Cano, Alejandro Díaz Barriga, José Antonio Flores Díaz, Adrián Girard, Inocencio Rafael Madrid, Beatriz Rodríguez Fernández, Humberto Santillana Loyo, Marisa Tirado, Jaime Vázquez Alamilla.

A nuestros amigos: Adriana, Alex, Arminda, Berenice, Cristina, Diana C., Diana V., Didier, Esteban, Fabiola, Isabel, Jean Paul, Jorge, Laura, Luisa, Mary Anna, Marcos, Memo, Miguel, Nancy, Pedro C., Roberto, Sergio, Toño, Víctor, Vladimir.

Dedicatorias:

A mi Mamá:
Por tu apoyo, comprensión, tus consejos, por ser una madre excepcional que se desvive por sus hijos, por todo esto y más te quiero.

A mi Papá:
Por tu apoyo, por tu comprensión, por tus consejos, por contribuir a forjar mi carácter gracias Papa.

A mis hermanos:
Xochitl, Mauricio, Patricia, Sandra y Claudia, por compartir su vida conmigo, por su apoyo, por su compañía, por las peleas, por los buenos ratos, por ser mis hermanos.

A Paola:
Por compartir todo este tiempo conmigo, por brindarme su amistad, confianza y cariño y por ser como eres.

A Jovana:
Por los momentos de alegría que nos has dado.

A la familia Pavón Moreno:
Por abrirme las puertas de su casa y por su confianza.

A mis amigos y compañeros:
Alex, Angel, Armando, Christian, Emmanuel, Igor, Iván, Hugo, Marcos, Memo, Miguel, Rafael, Rodrigo, Toño, y Sergio, por ser buenos amigos y compañeros.

A la Música.

Dedicatorias:

Quiero dedicar este trabajo a la persona a la que le debo todo lo que soy, a **mi papá**. Con tu ejemplo y todo el amor que nos demuestras a mí y a mis hermanos, me impulsas a realizar todas mis metas. Gracias por sacarnos adelante y por demostrarnos que todo lo que te propones lo puedes lograr. Eres una persona excepcional.

A **la memoria de mi mamá**, gracias por darme la vida y por habernos escogido un excelente padre.

A mis hermanitos, **Isabel y Julio**, por estar siempre conmigo.

A **la memoria de mi abuelita Bertha**, por todo el cariño que nos brindaste.

A **mi abuelito Julio**, por impulsarme y motivarme a salir adelante.

A mis tías **Isabel y María Luisa**, por todo el apoyo y cariño que recibo por parte de ustedes.

A mi amiga **Luisa**, por estar siempre conmigo en las buenas y en las malas. Por brindarme tu incondicional amistad.

A **Eduardo**, por todo lo que hemos compartido juntos, por todo lo bueno y lo malo. Gracias por entenderme y sobre todo por soportarme.

Los adoro

Paola

Índice General

Prefacio **iii**

1 Elementos de la teoría de la Probabilidad **1**
1.1 Introducción 1
1.2 Conjuntos y clases de conjuntos 1
1.3 Probabilidad 7
1.4 Variables aleatorias 12
1.4.1 Distribuciones de probabilidad discretas 31
1.4.2 Distribuciones de probabilidad continuas 35
1.4.3 Variables aleatorias conjuntas 38
1.5 Procesos estocásticos 63
1.5.1 Tipos de Procesos Estocásticos 63
1.5.2 Proceso Poisson 65

2 Funciones biométricas **71**
2.1 Introducción 71
2.2 Probabilidad de Supervivencia 71
2.3 Probabilidad de Muerte 73
2.4 Fuerza de Mortalidad 77
2.5 Relación entre la función de supervivencia y la tabla de vida. . 84
2.6 Esperanza de vida 92
2.7 Ejercicios resueltos 100

3 Economía del Seguro **114**
3.1 Introducción 114
3.2 Teoría de la Utilidad 114
3.3 Seguro y utilidad 117

3.4 Modelos individuales de riesgo a corto plazo 121
3.4.1 Modelos de variables aleatorias para reclamaciones individuales 122
3.4.2 Suma de variables aleatorias independientes 126
3.4.3 Aproximación de la distribución de la suma 129
3.4.4 Distribuciones para el número y monto de reclamaciones 132
3.5 Modelos de riesgo colectivo para un periodo 137
3.5.1 Distribución de la suma del monto de las reclamaciones 138
3.5.2 La distribución del número de reclamaciones 141
3.5.3 Distribución del monto individual de reclamaciones . . 146
3.6 Ejercicios resueltos 148

4 Introducción a la teoría del riesgo **159**
4.1 Introducción 159
4.2 Modelo autorregresivo 162
4.3 Modelos con montos de reclamación independientes 169
4.3.1 Modelo a tiempo discreto 169
4.3.2 Modelo a tiempo continuo 175
4.4 Primer excedente debajo del nivel inicial 186
4.5 La máxima pérdida esperada 188
4.6 Ejercicios resueltos 196

Comentarios **211**

Bibliografía **212**

Prefacio

En la vida diaria existen circunstancias que se pueden presentar, las cuales están fuera de nuestro control. Asimismo existe la posibilidad de que al repetir ciertas situaciones controlables se obtengan situaciones distintas. Estos casos que se pueden analizar a través de la probabilidad.

Una de las tantas aplicaciones de la teoría de la probabilidad se encuentra en las matemáticas actuariales, por lo cual el objetivo principal de este trabajo es presentar los aspectos más relevantes del cálculo actuarial fundamentado en la teoría probabilística.

El objeto de la matemática actuarial lo constituye el estudio cuantitativo de las operaciones de seguro (y financieras, en general), a fin de optimizar las decisiones sobre las magnitudes que intervienen en ellas, teniendo en cuenta que las citadas operaciones se llevan a cabo por un ente asegurador (o financiero) que desarrolla su actividad en un entorno económico-social.

El aspecto aleatorio se presenta, en la matemática actuarial, en diferentes grados. Por ejemplo, en el estudio de los fenómenos actuariales (supervivencia y mortalidad) surgen problemas de elaboración y estimación de modelos de naturaleza estocástica.

La teoría del riesgo es esencialmente un caso especial de la teoría conocida como procesos estocásticos, la cual ha tenido un rápido desarrollo en años recientes y constituye una gran rama de la teoría de la probabilidad.

El presente trabajo, involucra la unificación de notación y la especificación de la relación del cálculo estocástico con los conceptos que son de interés para las materias relacionadas con el cálculo actuarial. De esta forma, se hace una redacción detallada de los principales resultados, así como algunas demostraciones o bibliografía, para que la tesis pueda usarse como material didáctico en los cursos impartidos en la Facultad. Se incluyen también ejercicios resueltos al final de cada capítulo.

En el primer capítulo se estudian las bases de la teoría axiomática (Kolmogorov) de la probabilidad con el objeto de introducir al lector en este tema. En dicho capítulo se revisan conceptos y resultados que serán de utilidad para el desarrollo posterior del trabajo. Se comienza con una breve descripción de la teoría de conjuntos para definir el espacio de probabilidad y así llegar al concepto de variable aleatoria, desarrollando sus características más importantes. Posteriormente se hace una generalización de los resultados expuestos en el caso unidimensional. Se finaliza este capítulo con una introducción a los procesos estocásticos, dando una descripición de algunos tipos de procesos.

En el capítulo dos se determinan las funciones biométricas utilizando los conceptos relacionados con la teoría de variables aleatorias, partiendo de la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona. De esta manera, se construyen relaciones entre las probabilidades de supervivencia, muerte y la fuerza de mortalidad.

En el capítulo tres se revisan los principios básicos de la economía del seguro, mediante la teoría de la utilidad. Se proporciona una introducción a la teoría del riesgo individual y del riesgo colectivo, desarrollando algunos modelos de distribuciones relacionados con el número y el monto de los siniestros, especificando las razones de su utilización.

Finalmente, en el capítulo cuatro se concluye con el estudio de la probabilidad de ruina, la cual se basa en los capítulos desarrollados con anterioridad. En esta parte se analizan los modelos de riesgo colectivo a tiempo discreto y continuo a largo plazo, mencionando el primer excedente debajo del nivel inicial y la máxima pérdida esperada (reclamaciones).

Para la lectura del presente trabajo son necesarios conocimientos básicos de cálculo diferencial e integral, de probabilidad, de teoría del seguro y de ser posible, de procesos estocásticos; aunque se ha tratado de que el material expuesto sea autocontenido. Si el lector posee conocimientos previos de probabilidad y procesos estocásticos puede omitirse la lectura del capítulo uno.

Capítulo 1

Elementos de la teoría de la Probabilidad

1.1 Introducción

Este capítulo tiene el objetivo de dar una introducción a la teoría axiomática de la probabilidad, que servirá de base para construir algunos de los principales resultados que serán de gran utilidad en los capítulos posteriores de este trabajo.

1.2 Conjuntos y clases de conjuntos

Los conjuntos juegan un papel importante en la probabilidad, ya que su objeto de estudio es una colección de hechos cuya característica común es que son posibles resultados de un mismo experimento. Un conjunto es una colección de objetos llamados elementos. Un subconjunto B de un conjunto A es otro conjunto cuyos elementos tambien son elementos de A.

Ejemplo 1.1 *Sea A el conjunto de las letras del abecedario y sea B el conjunto de las vocales. El conjunto B es subconjunto de A y se denota por $B \subset A$.*

■

Definición 1.1 *Una clase de subconjuntos de un conjunto A es cualquier colección de subconjuntos de A.*

■

Ejemplo 1.2 *Sea $A = \{H, T\}$ entonces una clase de subconjuntos de A sería*

$$C = \{\{H, T\}, \{T\}, \phi\}$$

■

Definición 1.2 *Una $\sigma -$ álgebra $\mathcal{F}$ es una clase de subconjuntos de un espacio Ω que cumple:*

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$

(b) Si $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $A^C \in \mathcal{F}$

(c) Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

■

El siguiente teorema da la caracterización de una $\sigma -$ *álgebra*:

Teorema 1.1 *Si $\mathcal{F}$ es $\sigma -$ álgebra entonces:*

(a) $\phi \in \mathcal{F}$

(b) Si $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcup_{i=1}^{n} Ai \in \mathcal{F}$ *y* $\bigcap_{i=1}^{n} Ai \in \mathcal{F}$

(c) Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *entonces* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Demostración.

(a) Usando el hecho de que $\phi = \Omega^C$ y por (b) de la Definición 1.2 se cumple que $\phi \in \mathcal{F}$.

(b) Por el inciso anterior y por (c) de la Definición 1.2 se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

y así,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n \bigcup \phi \bigcup \phi \bigcup \ldots \in \mathcal{F}.$$

Además se cumple que

$$\bigcap_{i=1}^{n} Ai = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^C \right)^C$$

y utilizando (b) y (c) de la Definición 1.2 se demuestra que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} Ai \in \mathcal{F}.$$

(c) Ocupando (b) y (c) de la Definición 1.2 se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \in \mathcal{F}.$$

Aplicando a lo anterior (b) de la Definición 1.2 se cumple que

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C \in \mathcal{F},$$

y como

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^C \right)^C = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

se concluye que:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

■

Teorema 1.2 *Sea $\mathcal{C}$ una clase no vacía de subconjuntos de un espacio Ω, entonces existe una única $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}$ en Ω, que cumple con las siguientes propiedades:*

1. $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}$

2. *Si $\mathcal{F}^{*}$ es cualquier $\sigma-$ álgebra $\mathcal{F}$ en Ω, tal que si $\mathcal{F}^{*} \supseteq \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{F}^{*} \supseteq \mathcal{F}$*

Demostración.

Primero se demostrará la existencia. Dicha existencia se satisface, pues por ejemplo, $\mathcal{P}(\Omega)$ es la $\sigma-$ *álgebra* más grande en Ω que contiene a todos los conjuntos de $\mathcal{C}$.

Sea $\mathcal{F}$ la clase de todos los subconjuntos que contienen a $\mathcal{C}$, definida como:

$$\mathcal{F} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{F}_t$$

donde $\mathcal{F}_t$ representa a las $\sigma-$ *álgebras* en Ω que contienen a todos los conjuntos de $\mathcal{C}$, y T es un conjunto de índices.

A continuación se demuestra que $\mathcal{F}$ es $\sigma-$ *álgebra*:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$ ya que $\Omega \in \mathcal{F}_t$, para toda $t \in T$.

(b) Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \in \mathcal{F}_t$, para toda $t \in T$;
y como $\mathcal{F}_t$ es $\sigma-$ *álgebra* entonces $A^{C} \in \mathcal{F}_t$, para toda $t \in T$, concluyéndose que $A^{C} \in \mathcal{F}$.

(c) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ entonces $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F}_t$, para toda $t \in T$;
por lo que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_t$ (pues $\mathcal{F}_t$ es $\sigma-$ *álgebra*).

Lo anterior implica que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Por lo tanto $\mathcal{F}$ es $\sigma-$ *álgebra*, es decir, la intersección de $\sigma-$ *álgebras* es $\sigma-$ *álgebra*.

Enseguida se demostrará la unicidad:

Sean $\mathcal{F}^*$ y $\mathcal{F}$ tales que :

i) $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}$

ii) Si $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}$

iii) $\mathcal{F}^* \supseteq \mathcal{C}$

iv) Si $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{C}$ entonces $\mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}^*$

Como $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}$ por *i*) y además $\mathcal{F}^* \supseteq \mathcal{C}$ por *iii*) entonces por *ii*) se tiene que

$$\mathcal{F}^* \supseteq \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

Por otro lado $\mathcal{F}^* \supseteq \mathcal{C}$ por *iii*) y $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{C}$ por *i*) entonces *iv*) implica que

$$\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}^*. \tag{1.2}$$

De (1.1) y (1.2) se sigue que $\mathcal{F} = \mathcal{F}^*$, por lo tanto $\mathcal{F}$ es única

■

Observación.

En el teorema anterior a $\mathcal{F}$ se le llama la mínima $\sigma -$ *álgebra* generada por $\mathcal{C}$ y se denota por $\sigma(\mathcal{C})$.

Definición 1.3 *Sea $\Omega = \mathbb{R}$, la $\sigma -$ álgebra de Borel denotada por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, es la mínima $\sigma -$ álgebra que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x)$. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, B es llamado Boreliano o conjunto de Borel.*

■

Observación.

De esta manera, si

$$\mathcal{C}^* = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\},$$

entonces, $\sigma(\mathcal{C}^*)$contendrá intervalos de la forma $[x, \infty)$ obtenidos por complementación.

También contendrá intervalos de la forma:

$$
\begin{aligned}
(-\infty, x] &= \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\infty, x+\frac{1}{n}\right) \\
[x, y] &= (-\infty, y] \bigcap [x, \infty) \qquad \text{con } x < y \\
(x, \infty) &= (-\infty, x]^C \\
(x, y) &= (x, \infty) \bigcap (-\infty, y) \quad \text{con } x < y \\
(x, y] &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x, y+\frac{1}{n}\right) \qquad \text{con } x < y.
\end{aligned}
$$

Teorema 1.3 *Sea $\mathcal{I}$ la clase de los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, entonces se cumple que:*

$$\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demostración.
Primero se probará la siguiente contención:

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Sea $(x, y) \in \mathcal{I}$, entonces por la observación de la definición anterior se tiene que

$$(x, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

además

$$(x, y) = (x, \infty) \bigcap (-\infty, y) \text{ con } x < y.$$

Por (b) del Teorema 1.1 se observa que

$$(x, y) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

y así

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

De esta forma por (2) del Teorema 1.2 se demuestra que:

$$\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ahora se probará la inclusión contraria. Para ello, basta demostrar que

$$\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{I})$$

donde $\mathcal{C}$ es la clase de los intervalos de la forma $(-\infty, x)$; ya que por (2) del Teorema 1.2, este hecho implicaría que

$$\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(\mathcal{I})$$

donde $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Sea $(-\infty, x) \in \mathcal{C}$. Dicho intervalo puede escribirse como

$$(-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, x),$$

donde $(-n, x) \in \mathcal{I}$ y por (c) de la Definición 1.2 se tiene que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, x) \in \sigma(\mathcal{I})$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{I}).$$

■

De igual forma se puede probar que $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ cuando $\mathcal{F}$ es cualquier clase de intervalos.

1.3 Probabilidad

Se considera *aleatorio* aquello que bajo las mismas circunstancias no tiene un resultado único. Se entiende como *experimento* cualquier procedimiento capaz de generar resultados observables. Se pueden encontrar experimentos tales que al repetirse bajo las mismas condiciones controlables presenten siempre el mismo resultado, los cuales reciben el nombre de *experimentos deterministas* o bien aquellos que pueden presentar resultados distintos. Estos últimos se conocen como *experimentos aleatorios*.

La probabilidad es la matemática de la incertidumbre. Existen diversos fenómenos en los cuales se puede aplicar la probabilidad tales como apuestas de juegos, seguros, demografía, líneas de espera, entre otros. La probabilidad es una función, definida sobre conjuntos de resultados, conocidos como eventos. A continuación se dará la definición axiomática de probabilidad de Kolmogorov, así como algunas propiedades básicas.

Definición 1.4 *Se define como **espacio muestral** Ω al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.*

■

Definición 1.5 *Un **evento** es un elemento de una $\sigma-$álgebra definida sobre un espacio muestral Ω.*

■

Observación.

Dado un espacio muestral Ω, puede formarse cualquier colección de subconjuntos de Ω, llamada **clase de eventos**. Si dicha clase de subconjuntos de Ω satisface (a), (b) y (c) de la Definición 1.2, se le llama $\sigma-$*álgebra* de subconjuntos de Ω, o simplemente, $\sigma-$*álgebra* de eventos.

Ejemplo 1.3 *Se lanza una moneda honesta al aire, entonces el espacio muestral es:*

$$\Omega = \{\text{águila, sol}\}$$

cuya mínima $\sigma-$álgebra es

$$\mathcal{F} = \{\{\text{águila}\}, \{\text{sol}\}, \{\text{águila,sol}\}, \emptyset\},$$

y algunos eventos asociados a este espacio son:

$$A_1 = \{\text{águila,sol}\}$$

$$A_2 = \{\text{águila}\}.$$

■

Definición 1.6 *Sea Ω el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio y $\mathcal{F}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω (eventos). Una* ***función de probabilidad*** *(o medida de probabilidad) P es una función $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ que asigna a cada evento A de $\mathcal{F}$ un número $P(A)$ llamado la probabilidad de A tal que:*

(a) $P(A) \geq 0$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *tal que* $A_i \bigcap A_j = \phi$, *para toda* $i \neq j$ *entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

■

Estas propiedades junto con las de $\sigma-$*álgebra* (ver Definición 1.2) son también llamadas axiomas de Kolgomorov.

Teorema 1.4 *Sea $\mathcal{F}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de un espacio Ω y sean $A, B \in \mathcal{F}$. Sea P una función de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$, entonces P satisface lo siguiente:*

(a) $P(A^C) = 1 - P(A)$

(b) $P(\phi) = 0$

(c) Si $A \subseteq B$ *entonces* $P(A) \leq P(B)$

(d) $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$

(e) $P(A - B) = P(A) - P(A \bigcap B)$

Demostración.

(a) Se sabe que $\Omega = A \bigcup A^C$ y por (c) de la Definición 1.6 se tiene que

$$1 = P(\Omega) = P\left(A \bigcup A^C\right) = P(A) + P(A^C),$$

por lo tanto:

$$P(A^C) = 1 - P(A).$$

(b) Debido a que $\phi = \Omega^C$, utilizando (a) de este Teorema y (b) de la Definición 1.6 se demuestra que:

$$P(\phi) = P(\Omega^C) = 1 - P(\Omega) = 0.$$

(c) Como $A \subseteq B$ entonces B puede ser escrito como

$$B = A \bigcup \left(B \bigcap A^C \right),$$

lo cual implica que

$$P(B) = P\left(A \bigcup \left(B \bigcap A^C \right) \right).$$

Como A y $(B \bigcap A^C)$ son conjuntos ajenos, por (a) y (c) de la Definición 1.6 se sigue que:

$$P(B) = P(A) + P\left(B \bigcap A^C \right) \geq P(A);$$

de donde, $P(A) \leq P(B)$.

(d) Debido a que:

$$A \bigcup B = \left(B \bigcap A^C \right) \bigcup A \text{ y } B = \left(A \bigcap B \right) \bigcup \left(A^C \bigcap B \right);$$

y por (c) de la Definición 1.6 se tiene que

$$P\left(A \bigcup B \right) = P\left(B \bigcap A^C \right) + P(A), \tag{1.3}$$

y

$$P(B) = P\left(A \bigcap B \right) + P\left(A^C \bigcap B \right). \tag{1.4}$$

De 1.4 se obtiene que

$$P\left(A^C \bigcap B \right) = P(B) - P\left(A \bigcap B \right), \tag{1.5}$$

y sustituyendo 1.5 en 1.3 se demuestra que:

$$P\left(A \bigcup B \right) = P(A) + P(B) - P\left(A \bigcap B \right).$$

(e) Se sabe que:

$$A = \left(A \bigcap B\right) \bigcup \left(A \bigcap B^C\right);$$

aplicando (c) de la Definición 1.6 se obtiene lo siguiente

$$P(A) = P\left(A \bigcap B\right) + P\left(A \bigcap B^C\right).$$

Debido a que

$$A - B = A \bigcap B^C,$$

se concluye que:

$$P(A - B) = P(A) - P\left(A \bigcap B\right).$$

■

Definición 1.7 *Un **espacio de probabilidad** es una terna* $(\Omega, \mathcal{F}, P(\bullet))$ *donde:*

Ω: es el espacio muestral.

$\mathcal{F}$: es una $\sigma -$ álgebra de subconjuntos de Ω.

$P(\bullet)$: es la función de probabilidad definida sobre $\mathcal{F}$.

■

Ejemplo 1.4 *Sea* $\Omega = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$\mathcal{F} = \{\Omega, \phi, A, B\}$ *donde* $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{10, 12\}$;

y sea:

$$P(E) = \frac{\textit{Cardinalidad de } E}{6}$$

entonces $P(A) = \frac{4}{6}, P(B) = \frac{2}{6}$;

y así $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es un espacio de probabilidad.*

■

1.4 Variables aleatorias

En la probabilidad el objeto de estudio es un experimento aleatorio. Será de interés preguntarse por funciones que asignan un número real a los elementos del espacio muestral, dichas funciones se llaman variables aleatorias. Se comenzará con el concepto de imagen inversa.

Definición 1.8 *Sean Ω y Ω^* dos conjuntos y sea $X : \Omega \to \Omega^*$; para todo $A^* \subseteq \Omega^*$ se define la **imagen inversa** de A^* bajo X denotada por $X^{-1}(A^*)$ como:*

$$X^{-1}(A^*) = \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in A^*\}$$

■

Teorema 1.5 *Sean Ω y Ω^* dos conjuntos y sea $X : \Omega \to \Omega^*$ entonces la imagen inversa preserva todas las relaciones entre conjuntos, es decir:*

(a) $X^{-1}(\Omega^*) = \Omega$ *y* $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

(b) Si $A^* \subseteq \Omega^*$ *entonces*

$$X^{-1}(A^{*C}) = [X^{-1}(A^*)]^C$$

(c) Si $A_t^* \subseteq \Omega^*$ *para toda* $t \in T$, *entonces*

$$X^{-1}\left(\bigcap_{t\in T} A_t^*\right) = \bigcap_{t\in T} X^{-1}(A_t^*)$$

y

$$X^{-1}\left(\bigcup_{t\in T} A_t^*\right) = \bigcup_{t\in T} X^{-1}(A_t^*)$$

(d) Si $A^* \subseteq B^* \subseteq \Omega^*$, *entonces* $X^{-1}(A^*) \subseteq X^{-1}(B^*)$

Demostración.

(a) Utilizando la Definición 1.8 :

$$X^{-1}(\Omega^*) = \{\omega \,|X(\omega) \in \Omega^*\} = \Omega$$

y

$$X^{-1}(\emptyset) = \{\omega \,|X(\omega) \in \emptyset\} = \emptyset.$$

(b) Sea $\omega \in X^{-1}(A^*)^C$ por la Definición 1.8 se cumple que:

$$X(\omega) \in (A^*)^C$$

lo anterior es equivalente a decir que

$$X(\omega) \notin A^*,$$

si y sólo si

$$\omega \notin X^{-1}(A^*)$$

si y sólo si

$$\omega \in [X^{-1}(A^*)]^C.$$

(c) Sea $\omega \in X^{-1}\left(\bigcap_{t\in T} A_t^*\right)$ por la Definición 1.8 se tiene que:

$$X(\omega) \in \bigcap_{t\in T} A_t^*$$

lo anterior es equivalente a decir que

$$X(\omega) \in A_t^* \text{ para toda } t \in T,$$

si y sólo si

$$\omega \in X^{-1}(A_t^*) \text{ para toda } t \in T,$$

si y sólo si

$$\omega \in \bigcap_{t\in T} X^{-1}(A_t^*).$$

Sea $\omega \in X^{-1}\left(\bigcup_{t\in T} A_t^*\right)$ por la Definición 1.8 se tiene que:

$$X(\omega) \in \bigcup_{t\in T} A_t^*$$

lo anterior es equivalente a decir que

$$X(\omega) \in A_t^* \text{ para alguna } t \in T,$$

si y sólo si

$$\omega \in X^{-1}(A_t^*) \text{ para alguna } t \in T,$$

si y sólo si

$$\omega \in \bigcup_{t\in T} X^{-1}(A_t^*).$$

(d) Por la Definición 1.8 se tiene que:

$$X^{-1}(A^*) = \{\omega \,|X(\omega) \in A^*\}$$

y

$$X^{-1}(B^*) = \{\omega \,|X(\omega) \in B^*\}$$

Como $A^* \subseteq B^*$, se cumple que

$$\{\omega \,|X(\omega) \in A^*\} \subseteq \{\omega \,|X(\omega) \in B^*\},$$

y por lo tanto,

$$X^{-1}(A^*) \subseteq X^{-1}(B^*).$$

■

Definición 1.9 *Sea $\mathcal{F}$ una $\sigma-$álgebra de eventos y sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se dice que X es $\mathcal{F}-$***medible** *si:*

$$X^{-1}\{(-\infty, c]\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq c\} \in \mathcal{F}, \quad \text{para toda } c \in \mathbb{R}$$

■

Definición 1.10 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. X es una variable aleatoria si X es una función $\mathcal{F}$ —medible.*

■

Teorema 1.6 *Sea $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\mathcal{F}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. X es $\mathcal{F}$ —medible si y sólo si $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Demostración.
(Ver Clarke, 1975; página 35)

■

Observación.
De acuerdo al teorema anterior, X es una variable aleatoria si y sólo si $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, es decir $X^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{F}$.

Ejemplo 1.5 *Se define la función indicadora del conjunto $A \subseteq \Omega$ como:*

$$I_A(w) = \begin{cases} 1 & si\ w \in A \\ 0 & si\ w \notin A \end{cases} .$$

La imagen inversa de la función indicadora I_A está dada por:

$$I_A^{-1}(B) = \begin{cases} \phi & si\ 0 \notin B,\ 1 \notin B \\ A^C & si\ 0 \in B,\ 1 \notin B \\ A & si\ 0 \notin B,\ 1 \in B \\ \Omega & si\ 0 \in B,\ 1 \in B \end{cases} ,$$

con $B \in \mathcal{B}$. Así, la función indicadora de un evento A es una variable aleatoria, ya que $I_A^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

■

De acuerdo a la caracterización proporcionada por la observación anterior, como $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ y $P_X : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$, se puede obtener la probabilidad del evento $X^{-1}(B)$.

Definición 1.11 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida sobre dicho espacio. A la función $P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0,1]$ definida por:*

$$P_X(B) = P[X^{-1}(B)], \ \ B \in \mathcal{B},$$

se le llama la distribución de probabilidad de X.

■

Ejemplo 1.6 *La distribución de probabilidad de I_A está dada por:*

$$P_{I_A}(B) = P[I_A^{-1}(B)] = \begin{cases} 0 & si\ 0 \notin B, \ 1 \notin B \\ P(A^C) & si\ 0 \in B, \ 1 \notin B \\ P(A) & si\ 0 \notin B, \ 1 \in B \\ 1 & si\ 0 \in B, \ 1 \in B \end{cases}.$$

■

Definición 1.12 *Se define la **función de distribución** $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ de la variable aleatoria X, como:*

$$F_X(x) = P[\{X \leq x\}] = P[X^{-1}(-\infty, x]]$$

■

Observación.

La definición anterior puede ser vista en términos de la Definición 1.11 de la siguiente forma:

$$F_X(x) = P[X^{-1}(-\infty, x]] = P_X[(-\infty, x]].$$

La función de distribución F_X es la restricción de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es la clase de conjuntos de la forma $(-\infty, x]$. (Ver Clarke, 1975; página 45)

Ejemplo 1.7 *Sea X una variable aleatoria que puede tomar los valores* $1, 2, 3$ *con las siguientes probabilidades:*

$$P[X = 1] = \frac{1}{5}; \quad P[X = 2] = \frac{2}{5} \;\; y \;\; P[X = 3] = \frac{2}{5};$$

entonces para cualquier valor de $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ se tiene que la distribución de probabilidad de X está dada por:

$$P_X(B) = \frac{1}{5}I_B(1) + \frac{2}{5}I_B(2) + \frac{2}{5}I_B(3)$$

y la función de distribución de X es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \frac{1}{5} & si \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{5} & si \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & si \quad x \ge 3. \end{cases}$$

■

Teorema 1.7 *Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y F_X la función de distribución de X, entonces:*

(a) F_X *es no decreciente.*

(b) F_X *es continua por la derecha.*

(c) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Demostración.
(Ver Clarke, 1975; página 46)

■

Proposición 1.8 *Sea X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y F_X la función de distribución de X, entonces:*

(a) $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

(b) $P(X > x) = 1 - F_X(x)$

Demostración.

(a) Note que:

$$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \bigcup \{a < X \leq b\}.$$

Utilizando el hecho de que los conjuntos $\{X \leq a\}$ y $\{a < X \leq b\}$ son ajenos, y por (c) de la Definición 1.6 se tiene que

$$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b).$$

De lo anterior y por la Definición 1.12 se concluye que:

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

(b) Ocupando (a) del Teorema 1.4 se tiene que:

$$P(X > x) = 1 - P((X > x)^C) = 1 - P(X \leq x)$$

y por la Definición 1.12 se concluye que:

$$P(X > x) = 1 - F_X(x).$$

■

Definición 1.13 *X es una variable aleatoria discreta si su imagen toma valores en un conjunto a lo más numerable.*

■

Definición 1.14 *Se define la* ***función de densidad*** *(o función de probabilidad) de una variable aleatoria discreta X como:*

$$f_X(x) = P[X = x]$$

que cumple con las siguientes propiedades:

(a) $f_X(x) \geq 0$

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i) = 1$.

(c) $f_X(x_j) = F_X(x_j) - \lim_{h \to 0^+} F_X(x_j - h)$,
donde F_X representa la función de distribución de X.

■

Definición 1.15 *Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad $f_X(x)$. Se define el* **valor esperado** *de X como:*

$$E(X) = \sum_x x f_X(x)$$

■

Ejemplo 1.8 *Sea X una variable aleatoria que puede tomar únicamente los valores $-2, 0, 1, 4$ con las siguientes probabilidades*

$$P(X = -2) = 0.1, P(X = 0) = 0.4, P(X = 1) = 0.3 \text{ y } P(X = 4) = 0.2$$

El valor esperado de X está dado por:

$$E(X) = -2(0.1) + 0(0.4) + 1(0.3) + 4(0.2) = 0.9$$

■

Definición 1.16 *Se dice que X es una variable aleatoria absolutamente continua si existe una función f_X:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, continua, que cumple con la propiedad de que para cualquier conjunto C de números reales satisface:*

$$P\{X \in C\} = \int_C f_X(x)dx$$

La función $f_X(x)$ es llamada la función de densidad de la variable aleatoria X y satisface las siguientes propiedades:

(a) $f_X(x) \geq 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = P(X \in (-\infty, \infty)) = 1$

(c) $f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$

■

Definición 1.17 *Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$ se define el **valor esperado** de X como:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

si y sólo si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx < \infty.$$

■

Ejemplo 1.9 *Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es:*

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & o < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El valor esperado de X es:

$$E(X) = \int_{0}^{1} x(2x) dx = \frac{2}{3}$$

■

Lema 1.9 *Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, entonces:*

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} P(X > x) dx - \int_{0}^{\infty} P(X < -x) dx$$

Demostración.
(Ver Ross, 1989; página 256)

■

A continuación se enunciará un resultado conocido como *la ley del estadístico inconsciente.*

Teorema 1.10 *Si X es una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$, entonces para cualquier función real g se cumple lo siguiente:*

$$E(g(X)) = \sum_{\{x: f_X(x)>0\}} g(x) f_X(x), \text{ si } X \text{ es discreta}$$

si y sólo si:

$$\sum_{\{x: f_X(x)>0\}} g(x) f_X(x) < \infty;$$

y

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx, \text{ si } X \text{ es continua}$$

si y sólo si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx < \infty.$$

Demostración.

La prueba se hará suponiendo que X es una variable aleatoria continua; la demostración en el caso discreto es análoga.

Por el Lema 1.9 se tiene que para cualquier función g,

$$\begin{aligned}
E(g(X)) &= \int_0^{\infty} P(g(X) > y) dy - \int_0^{\infty} P(g(X) < -y) dy \\
&= \int_0^{\infty} \int_{\{x: g(x)>y\}} f_X(x) dx dy - \int_0^{\infty} \int_{\{x: g(x)<-y\}} f_X(x) dx dy \\
&= \int_{\{x: g(x)>0\}} \int_0^{g(x)} dy f_X(x) dx - \int_{\{x: g(x)<0\}} \int_0^{-g(x)} dy f_X(x) dx \\
&= \int_{\{x: g(x)>0\}} g(x) f_X(x) dx + \int_{\{x: g(x)<0\}} g(x) f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.11 *Sean X una variable aleatoria, α_1 y α_2 constantes, y g_1, g_2 funciones tales que $g_1, g_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces se cumple que:*

(a) $E[\alpha_1 g_1(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)]$

(b) $E[\alpha_1] = \alpha_1$

(c) $E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)]$

(d) Si $g_1(X) \leq g_2(X)$ *entonces* $E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)]$.

Demostración.
Se demostrará únicamente cuando X es una variable aleatoria discreta.

(a) Sea $h(X) = \alpha_1 g_1(X)$, utilizando el Teorema 1.10 se tiene que:

$$\begin{aligned} E[h(X)] &= \sum_{\{x: f(x)>0\}} h(X) f_X(x) \\ &= \sum_{\{x: f(x)>0\}} \alpha_1 g_1(X) f_X(x) \\ &= \alpha_1 \sum_{\{x: f(x)>0\}} g_1(X) f_X(x). \end{aligned}$$

Por el Teorema 1.10 se cumple que

$$\alpha_1 \sum_{\{x: f(x)>0\}} g_1(X) f_X(x) = \alpha_1 E[g_1(X)],$$

y, por lo tanto

$$E[\alpha_1 g_1(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)]$$

(b) Análogamente, utilizando el Teorema del estadístico inconsciente se tiene que

$$\begin{aligned} E(\alpha_1) &= \sum_{\{x: f(x)>0\}} (\alpha_1) f_X(x) \\ &= \alpha_1 \sum_{\{x: f(x)>0\}} f_X(x), \end{aligned}$$

y por (b) de la Definición 1.14 se concluye que:

$$E(\alpha_1) = \alpha_1.$$

(c) Sea $j(X) = \alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)$, por el Teorema 1.10 se tiene que

$$\begin{aligned} E[j(X)] &= \sum_{\{x:f(x)>0\}} j(X) f_X(x) \\ &= \sum_{\{x:f(x)>0\}} (\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)) f_X(x) \\ &= \alpha_1 \sum_{\{x:f(x)>0\}} g_1(X) f_X(x) + \alpha_2 \sum_{\{x:f(x)>0\}} g_2(X) f_X(x), \end{aligned}$$

y, así por el Teorema 1.10 se demuestra que:

$$E[\alpha_1 g_1(X) + \alpha_2 g_2(X)] = \alpha_1 E[g_1(X)] + \alpha_2 E[g_2(X)].$$

(d) Por hipótesis se tiene que $g_1(X) \leq g_2(X)$,
y, además como $f_X(x) \geq 0$ se cumple lo siguiente

$$\sum_{\{x:f(x)>0\}} g_1(X) f_X(x) \leq \sum_{\{x:f(x)>0\}} g_2(X) f_X(x).$$

Utilizando el Teorema 1.10, y por lo anterior se concluye que:

$$E[g_1(X)] \leq E[g_2(X)].$$

La demostración en el caso continuo es análoga.

■

Definición 1.18 *Se define el r-ésimo momento si existe de* X, $r \geq 1$ *como* $E(X^r)$.

■

Observación.
Utilizando el Teorema del estadístico inconsciente se tiene que:

$$E(X^r) = \begin{cases} \sum\limits_{\{x: f(x)>0\}} x^r f(x) & \text{Si } X \text{ es discreta} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx & \text{Si } X \text{ es continua} \end{cases}.$$

Definición 1.19 *Suponga que X es una variable aleatoria con $E(X) = \mu$. Para cualquier entero positivo k se define:*

$$E\left[(X-\mu)^k\right]$$

*el cual se denomina **momento central de orden** k **de** X.*

■

Observación.
Para cualquier variable aleatoria X, el momento central de orden 1 es 0, porque:

$$E(X-\mu)^1 = E(X) - \mu = 0$$

Además si la distribución es simétrica respecto a μ y si existe el momento central de orden k, con k impar, entonces el valor $E(X-\mu)^k$ será 0.

Definición 1.20 *Sea X una variable aleatoria. Se define la varianza de X, denotada por $var(X)$ como:*

$$var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

■

Teorema 1.12 *Para cualquier variable aleatoria X se cumple que:*

$$var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Demostración.
Sea $E(X) = \mu$,entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
var(X) &= E[(X-\mu)^2] \\
&= E[(X^2 - 2X\mu + \mu^2)] \\
&= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2) \\
&= E(X^2) - \mu^2.
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 1.10 *La varianza de la variable aleatoria X, definida en el Ejemplo 1.9 se calcula de la siguiente manera. Se vió que:*

$$E(X) = \frac{2}{3},$$

entonces

$$E^2(X) = \frac{4}{9}.$$

El segundo momento está dado por:

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2(2x)dx = \frac{1}{2},$$

por lo que la varianza de X es:

$$var(X) = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

■

Teorema 1.13 *Sean X una variable aleatoria, a y b constantes, entonces:*

$$var(aX + b) = a^2 var(X)$$

Demostración.

Sea $E(X) = \mu$. Por la Definición 1.20 y por (a) y (b) del Teorema 1.11 se tiene que:

$$\begin{aligned} var(aX+b) &= E\left[(aX+b-a\mu-b)^2\right] \\ &= E\left[(aX-a\mu)^2\right] \\ &= a^2E\left[(X-\mu)^2\right] \\ &= a^2var(X). \end{aligned}$$

■

Definición 1.21 *La función generadora de momentos de la variable aleatoria X denotada por $M_X(t)$ se define como:*

$$M_X(t) = E[e^{Xt}]$$

■

Observación.

Se llama la función generadora de momentos porque todos los momentos de X pueden ser obtenidos sucesivamente derivando $M_X(t)$, si existen las derivadas en una vecindad alrededor del cero, y evaluando en $t = 0$, es decir:

$$\frac{d^K}{dt^K} M_X(t) \mid_{t=0} = E(X^K).$$

Ejemplo 1.11 *La función generadora de momentos de una variable aleatoria X cuya función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

se calcula como:

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_0^\infty e^{tx}e^{-x}dx = \int_0^\infty e^{(t-1)x}dx.$$

Esta integral será finita sólo para valores $t < 1$, por lo que se concluye que:

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}.$$

■

Teorema 1.14 *Sea X una variable aleatoria con función de densidad y generadora de momentos $f_X(x)$ y $M_X(t)$ respectivamente, con la primera y segunda derivada alrededor del cero, entonces se cumple que:*

(a) $M_X(0) = 1$

(b) $\frac{d}{dt}\log(M_X(t))\,|_{t=0} = E(X)$

(c) $\frac{d^2}{dt^2}\log(M_X(t))\,|_{t=0} = Var(X)$

(d) $\log(M_X(t)) = E(X)t + \frac{1}{2}Var(X)t^2 + ...$

Demostración.

Se demostrará únicamente para cuando que X es una variable aleatoria continua; la demostración en el caso discreto es equivalente.

(a) Utilizando la Definición 1.21 y el Teorema 1.10 se tiene que

$$E(e^{0(X)}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{0(x)} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx$$

y por (b) de la Definición 1.16 se demuestra que:

$$M_X(0) = 1.$$

(b) Note que

$$\frac{d}{dt}\log(M_X(t))\,|_{t=0} = \frac{\frac{d}{dt}M_X(t)}{M_X(t)}\,|_{t=0}\,.$$

Ocupando (a) de este Teorema en el denominador y la observación de la Definición 1.21 se cumple que:

$$\frac{\frac{d}{dt}M_X(t)}{M_X(t)}\,|_{t=0} = E(X).$$

(c) La segunda derivada del logaritmo de $M_X(t)$ está dada por:

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(M_X(t))\,|_{t=0} = \frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)M_X(t) - \left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2}{(M(t))^2}\,|_{t=0}\,. \tag{1.6}$$

Ocupando (a) de este Teorema y la observación de la Definición 1.21 se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(M_X(t))\,|_{t=0} = E(X^2) - (E(X))^2$$

y así por el Teorema 1.12 se demuestra que:

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(M_X(t))\,|_{t=0} = Var(X).$$

(d) Ocupando la serie de Maclaurin:

$$\begin{aligned}\log(M_X(t)) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{d^k}{dt^k}log(M_X(t))\,|_{t=0}\right)}{k!}t^k \\ &= \frac{\frac{d}{dt}M_X(t)}{M_X(t)}\,|_{t=0} + \frac{\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)-\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2}{2(M_X(t))^2}\,|_{t=0}\,t^2 + ...\end{aligned}$$

Por la observación de la Definición 1.21 y (a) de este Teorema se tiene:

$$\log(M_X(t)) = E(X) + \frac{1}{2}\left(E(X^2) - (E(X))^2\right)t^2 + ...$$

y así por el Teorema 1.12 se demuestra que:

$$\log(M_X(t)) = E(X) + \frac{1}{2}Var(X)t^2 + ...$$

■

Definición 1.22 *La **función característica** de la variable aleatoria X denotada por $\varphi_X(t)$ se define de la siguente manera*

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}],$$

donde i es el número que satisface la ecuación $x^2+1=0$. Utilizando la fórmula de Euler

$$e^{itx} = \cos tx + isentx,$$

se puede calcular la función característica como:

$$\varphi_X(t) = E[\cos tX] + iE[sentX].$$

■

Teorema 1.15 *La función característica $\varphi_X(t)$ cumple con las siguientes propiedades:*

(a) $\varphi_X(0) = 1$

(b) $|\varphi_X(t)| \leq 1$

(c) $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

Demostración.

(a) Por la Definición 1.22 y por (a) el Teorema 1.14 se tiene que

$$\varphi_X(0) = E[e^{i0X}] = E[1],$$

y, así por (b) del Teorema 1.11 se demuestra que:

$$\varphi_X(0) = 1.$$

(b) Utilizando la Definición 1.22 se tiene que

$$|\varphi_X(t)| = |E[e^{itX}]| = \left|\sum_x e^{itx} f_X(x)\right|.$$

Por la desigualdad del triángulo se obtiene que

$$\left|\sum_x e^{itx} f_X(x)\right| \leq \sum_x \left|e^{itx} f_X(x)\right|,$$

como $f_X(x) \geq 0$,

$$\sum_x \left|e^{itx} f_X(x)\right| = \sum_x \left|e^{itx}\right| f_X(x).$$

Además por el Teorema 1.10 se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_x \left|e^{itx}\right| f_X(x) &= E\left[\left|e^{itx}\right|\right] \\ &= E[1], \end{aligned}$$

y, finalmente por (b) del Teorema 1.11 se concluye que:

$$|\varphi_X(t)| \leq 1.$$

(c) Utilizando la Definición 1.22 se tiene que

$$\varphi_X(-t) = \sum_x e^{-itx} f_X(x).$$

Como

$$e^{-itx} = \cos(-tx) + isen(-tx),$$

y, por ser el coseno una función par, y el seno impar se tiene que

$$e^{-itx} = \cos(tx) - isen(tx).$$

De lo cual se obtiene que

$$e^{-itx} = \overline{e^{itx}},$$

entonces,

$$\begin{aligned} \sum_x e^{-itx} f_X(x) &= \sum_x \overline{e^{itx}} f_X(x) \\ &= \overline{\sum_x e^{itx} f_X(x)}. \end{aligned}$$

Así por el Teorema 1.10 se tiene que

$$\overline{\sum_x e^{itx} f_X(x)} = \overline{\varphi_X(t)}$$

y, por lo tanto:

$$\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}.$$

■

Ejemplo 1.12 *La función característica de una variable aleatoria X cuya función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, ... \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Se calcula como

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^x}{x!} = e^{-\lambda} \left[e^{e^{it}\lambda} \right],$$

por lo que se concluye que:

$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

■

A continuación se darán algunos ejemplos de distribuciones de probabilidad discretas y continuas.

1.4.1 Distribuciones de probabilidad discretas

Distribución Uniforme discreta

Definición 1.23 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $\{A_{1,...}A_k\} \subseteq \mathcal{F}$ *un conjunto de eventos tales que* $P(A_1) = ... = P(A_k)$. *La variable aleatoria discreta definida como* $X(\omega) = i$, *para toda* $\omega \in A_i$, *se denomina variable aleatoria* uniforme discreta *en* $\{1, 2, ...k\}$ *y su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & x = 1, .., k \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{K+1}{2} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \frac{K^2-1}{12}.$$

Su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = \frac{1}{K}\left[\frac{e^{t(K-1)}-1}{e^t-1}\right]$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{K}\left[\frac{e^{it(K-1)}-1}{e^{it}-1}\right].$$

Distribución Bernoulli

Definición 1.24 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* $A \in \mathcal{F}$ *un evento de probabilidad* p, *cuya ocurrencia se denomina éxito en la observación del fenómeno aleatorio. La variable aleatoria definida como*

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & si\, \omega \in A \\ 0 & si\, \omega \notin A \end{cases}$$

se denomina variable aleatoria Bernoulli *con parámetro* p.

Su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} p & si\ x = 1 \\ 1-p & si\ x = 0 \end{cases}$$

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = p \qquad \text{y} \qquad Var[X] = p(1-p);$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = (1-p) + pe^t$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = (1-p) + pe^{it}.$$

Distribución Binomial

Definición 1.25 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{F}$ un evento de probabilidad p, cuya ocurrencia se denomina éxito en la observación del fenómeno aleatorio. Suponiendo que se realizan n observaciones independientes del fenómeno, la variable aleatoria que toma como valor el número de veces que se obtiene el éxito entre las n observaciones independientes, se denomina variable aleatoria* Binomial *con parámetros n y p. Su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & x = 0, ..., n \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = np \qquad \text{y} \qquad Var[X] = np(1-p);$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \left((1-p) + pe^{it}\right)^n.$$

Distribución Geométrica

Definición 1.26 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{F}$ un evento de probabilidad p, cuya ocurrencia se denomina éxito en la observación del fenómeno aleatorio. Suponiendo que se realizan observaciones independientes del fenómeno, la variable aleatoria que toma como valor el número de veces que se debe observar el fenómeno hasta que se obtiene el primer éxito se denomina variable aleatoria* Geométrica *con parámetro p. Su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & x = 0, 1, ... \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{1}{p} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \frac{1-p}{p^2};$$

su función generadora de momentos:

$$M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \frac{1-p}{1-pe^{it}}.$$

Distribución Binomial negativa

Definición 1.27 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{F}$ un evento de probabilidad p, cuya ocurrencia se denomina éxito en la observación del fenómeno aleatorio. Suponiendo que se realizan observaciones independientes del fenómeno, la variable aleatoria que toma como valor el número* *de fracasos que se observan hasta que se obtienen exactamente K éxitos se denomina variable aleatoria* Binomial negativa *con parámetros K y p. Su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{K+x-1}{x} p^K (1-p)^x & x = 0, 1, \dots \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{K(1-p)}{p} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \frac{K(1-p)}{p^2};$$

su función generadora de momentos:

$$M_X(t) = \left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^K$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \left[\frac{1-p}{1-pe^{it}}\right]^K.$$

Distribución Poisson

Definición 1.28 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria definida sobre Ω . La variable aleatoria X que tiene la siguiente función de densidad:*

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} & x = 0, 1, \dots \quad \lambda > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

se denomina variable aleatoria Poisson *con parámetro λ.*

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \lambda \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \lambda;$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = e^{\left(\lambda(e^t-1)\right)}$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = e^{\left(\lambda(e^{it}-1)\right)}.$$

1.4.2 Distribuciones de probabilidad continuas

Distribución Uniforme continua

Definición 1.29 *Una variable aleatoria continua X que toma valores en un intervalo $(a, b), -\infty < a < b < \infty$, se dice que tiene una distribución* Uniforme continua *en el intervalo (a, b), si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se escribe $X \sim U(a, b)$.

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{a+b}{2} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12};$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t\,(b-a)}$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{it\,(b-a)}.$$

Distribución Exponencial

Definición 1.30 *Una variable aleatoria continua X que toma valores en un intervalo $(0, \infty)$, se dice que tiene una distribución* Exponencial *con parámetro $0 < \lambda < \infty$, si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se escribe $X \sim \exp(\lambda)$.

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2};$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Distribución Normal

Definición 1.31 *Una variable aleatoria continua X que toma valores en los reales se dice que tiene una distribución* Normal *con parámetros μ y σ^2, $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma^2 < \infty$, si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty \, .$$

Se escribe $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \mu \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \sigma^2;$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = e^{\left(i\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}.$$

Distribución Gamma

Definición 1.32 *Una variable aleatoria continua X que toma valores en un intervalo* $(0,\infty)$, *se dice que tiene una distribución* Gamma *con parámetros* s *y* λ ; $s,\lambda > 0$, *y se escribe* $X \sim Gamma(s,\lambda)$. *Si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^s x^{s-1} e^{-\lambda s}}{\Gamma(s)}, & x > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\Gamma(p)$ *es la función Gamma , que viene dada por:*

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1} e^{-u} du$$

para toda $t > 0$.

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = \frac{s}{\lambda} \qquad \text{y} \qquad Var[X] = \frac{s}{\lambda^2};$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^s$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^s.$$

Distribución Ji − cuadrada

Definición 1.33 *Una variable aleatoria continua X que toma valores en un intervalo* $(0,\infty)$, *se dice que tiene una distribución* Ji-cuadrada *con n grados de libertad,* $n > 0$, *y se excribe* $X \sim \chi^2_n$.

Si su función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Su media y varianza son:

$$E[X] = n \quad \text{y} \quad Var[X] = 2n$$

su función generadora de momentos es:

$$M_X(t) = \left[\frac{1}{1-2t}\right]^{\frac{n}{2}}$$

y su función característica es:

$$\varphi_X(t) = \left[\frac{1}{1-2it}\right]^{\frac{n}{2}}.$$

1.4.3 Variables aleatorias conjuntas

En muchos experimentos es necesario considerar las propiedades de dos o más variables aleatorias simultáneamente. La distribución de probabilidad conjunta se denomina distribución bivariada en el caso de dos variables. A continuación se introducirá a este tipo de distribuciones y más adelante se desarrollará y se extenderá al caso en el que se tengan n variables aleatorias.

Distribución bivariada

Definición 1.34 *La función de distribución de las variables aleatorias X y Y se define como:*

$$F_{X,Y}(x,y) = P\left[X \le x, Y \le y\right].$$

■

Teorema 1.16 *La función de distribución conjunta de X, Y satisface para todo $x, y \in \mathbb{R}$:*

(a) $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$,
$F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$
y $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$.

(b) Si $x_1 \leq x_2$ *y* $y_1 \leq y_2$, *entonces:*

$$\begin{aligned} P\left[x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\right] &= F_{X,Y}(x_2,\ y_2) - F_{X,Y}(x_2,\ y_1) \\ &\quad -F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1,\ y_1). \end{aligned}$$

(c) Es continua por la derecha en cada argumento.

Demostración.

(a) Utilizando la Definición 1.34 se tiene que

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(-\infty, y) &= P\left[X \leq -\infty, Y \leq y\right] \\ &= P\left[\{X \leq -\infty\} \bigcap \{Y \leq y\}\right] \\ &= P\left[\emptyset \bigcap \{Y \leq y\}\right] \\ &= P\left[\emptyset\right] \end{aligned}$$

y por (b) del Teorema 1.4 se concluye que:

$$F_{X,Y}(-\infty, y) = 0.$$

La demostración de $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$ es análoga a la anterior. Ahora, utilizando la Definición 1.34,

$$F_{X,Y}(\infty, \infty) = P\left[\{X \leq \infty\} \bigcap \{Y \leq \infty\}\right] = P\left[\Omega\right]$$

y por $b)$ de la Definición 1.6 se concluye que:

$$F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1.$$

(b) **Primero se probará la siguiente igualdad de conjuntos:**

$$\{x_1 < X \leq x_2\} \bigcap \{y_1 < Y \leq y_2\}$$
$$= \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] - \left[\{X \leq x_1\} \bigcup \{Y \leq y_1\}\right].$$

Note que:

$$\{x_1 < X \leq x_2\} \bigcap \{y_1 < Y \leq y_2\}$$
$$= [\{X \leq x_2\} - \{X \leq x_1\}] \bigcap [\{Y \leq y_2\} - \{Y \leq y_1\}].$$

Por propiedades de conjuntos se cumplen las siguientes igualdades:

$$= \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{X \leq x_1\}^C\right] \bigcap \left[\{Y \leq y_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}^C\right]$$
$$= \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \bigcap \left[\{X \leq x_1\}^C \bigcap \{Y \leq y_1\}^C\right]$$
$$= \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \bigcap \left[\left(\{X \leq x_1\} \bigcup \{Y \leq y_1\}\right)^C\right]$$
$$= \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] - \left[\{X \leq x_1\} \bigcup \{Y \leq y_1\}\right].$$

De lo anterior se tiene que

$$P\left[\{x_1 < X \leq x_2\} \bigcap \{y_1 < Y \leq y_2\}\right]$$
$$= P\left[\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] - \left[\{X \leq x_1\} \bigcup \{Y \leq y_1\}\right]\right],$$

y utilizando (e) del Teorema 1.4 la última expresión es equivalente a:

$$P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right]$$
$$-P\left[\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \bigcap \left[\{X \leq x_1\} \bigcup \{Y \leq y_1\}\right]\right]$$
$$= P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right]$$
$$-P\left[\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \bigcup \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right]\right.$$

Por hipótesis se tiene que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$, lo cual implica que:

$$\{X \leq x_1\} \subset \{X \leq x_2\}$$

y

$$\{Y \leq y_1\} \subset \{Y \leq y_2\};$$

y así, se llega a:

$$\{X \leq x_1\} \bigcap \{X \leq x_2\} = \{X \leq x_1\}$$

y

$$\{Y \leq y_1\} \bigcap \{Y \leq y_2\} = \{Y \leq y_1\}.$$

Utilizando lo anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} & P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \\ & -P\left[\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \bigcup \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right]\right. \\ & = P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \\ & -P\left[\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \bigcup \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right]\right]. \end{aligned}$$

Y, por (d) del Teorema 1.4 se tiene que lo anterior es igual a:

$$\begin{aligned} & P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] - P\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \\ & -P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right] \\ & +P\left[\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{X \leq x_2\}\right] \bigcap \left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right]\right] \\ & = P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] - P\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{Y \leq y_2\}\right] \\ & -P\left[\{X \leq x_2\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right] + P\left[\{X \leq x_1\} \bigcap \{Y \leq y_1\}\right], \end{aligned}$$

y así, por la Definición 1.34 se concluye que:

$$\begin{aligned} P\left[x_1 < X \leq x_2,\ y_1 < Y \leq y_2\right] \ = \ & F_{X,Y}(x_2,\ y_2) - F_{X,Y}(x_2,\ y_1) \\ & -F_{X,Y}(x_1, y_2) + F_{X,Y}(x_1,\ y_1). \end{aligned}$$

(c) Por demostrar que:

$$\lim_{y \to b^+} F_{X,Y}(a,y) = F_{X,Y}(a,b).$$

Por los dos incisos anteriores se tiene que:

$$\begin{aligned} P[X \leq a, b < Y \leq y] &= F_{X,Y}(a,y) - F_{X,Y}(a,b) - F_{X,Y}(-\infty,y) + F_{X,Y}(-\infty,b) \\ &= F_{X,Y}(a,y) - F_{X,Y}(a,b). \end{aligned}$$

Ahora, bien cuando y varía, aproximándose a b desde la derecha, el evento $[X \leq a, b < Y \leq y]$ tiende al vacío, y sucede que

$$\begin{aligned} \lim_{y \to b^+} \left(F_{X,Y}(a,y) - F_{X,Y}(a,b)\right) &= \lim_{y \to b^+} P[X \leq a, b < Y \leq y] \\ &= P[\emptyset] \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\lim_{y \to b^+} F_{X,Y}(a,y) = F_{X,Y}(a,b).$$

El caso para x es análogo.

■

Definición 1.35 *Sean X y Y dos variables aleatorias discretas, se define la función de densidad conjunta de X y Y como:*

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

que cumple con las siguientes propiedades:

(a) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

(b) $\sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) = 1$

■

Definición 1.36 *Se dice que dos variables aleatorias X y Y tienen una distribución conjunta absolutamente continua si existe una función f continua definida sobre el plano xy tal que para cualquier subconjunto A del plano,*

$$P\left[(X,Y)\in A\right]=\iint_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

La función f es llamada función de densidad conjunta de X y Y, y satisface las siguientes propiedades:

(a) $f_{X,Y}(x,y)\geq 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)=1$

(c) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y)=f_{X,Y}(x,y)$

■

Definición 1.37 *Se define la función de densidad marginal de X como:*

$$f_X(x)=\sum_y f_{X,Y}(x,y)\quad \textit{si } X \textit{ es discreta}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\quad \textit{si } X \textit{ es continua}$$

Análogamente se define la función de densidad marginal de Y.

■

En el siguiente teorema se enunciarán algunas propiedades de la función de distribución conjunta:

Teorema 1.17 *Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta $F_{X,Y}(x,y)$, entonces se cumple:*

(a) $F_X(x)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)$

(b) $F_Y(y)=\lim_{x\to\infty}F_{X,Y}(x,y)$

Demostración.

(a) Utilizando la Definición 1.12 se sigue que:

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P\left[X \leq x\right] \\
&= P\left[X \leq x, Y < \infty\right] \\
&= P\left[\lim_{y \to \infty} (X \leq x, Y < y)\right] \\
&= \lim_{y \to \infty} P\left[X \leq x, Y < y\right] \\
&= \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y).
\end{aligned}$$

(b) La demostración es análoga al inciso anterior.

■

Definición 1.38 *Si X y Y son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ entonces para cualquier función vectorial real $g{:}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, se cumple lo siguiente:*

$$E(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) f_{X,Y}(x,y) \text{ si } X \text{ y } Y \text{ son discretas,}$$

si y sólo si:

$$\sum_x \sum_y g(x,y) f_{X,Y}(x,y) < \infty;$$

y

$$E(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \text{ si } X \text{ y } Y \text{ son continuas}$$

si y sólo si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy < \infty.$$

■

Definición 1.39 *Sean X y Y variables aleatorias, para las cuales existen sus esperanzas y varianzas. Se define la covarianza de X y Y como sigue:*

$$Cov\,(X,Y) = E\left[(X - E(X))\,(Y - E(Y))\right].$$

■

Proposición 1.18 *Sean X y Y dos variables aleatorias, para las cuales existen sus esperanzas y varianzas, entonces:*

$$Cov\,(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
Cov\,(X,Y) &= E\left[(X - E(X))\,(Y - E(Y))\right] \\
&= E\left[XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)\right] \\
&= E(XY) - E(XE(Y)) - E(E(X)Y) + E(E(X)E(Y)) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y).
\end{aligned}$$

■

Definición 1.40 *Sean X y Y dos variables aleatorias, si sucede que:*

$$Cov\,(X,Y) = 0,$$

entonces se dice que X y Y son no correlacionadas.

■

Proposición 1.19 *Sean X y Y variables aleatorias con varianza$< \infty$, entonces se cumple que:*

$$Var\,(X+Y) = Var\,(X) + Var\,(Y) + 2Cov\,(X,Y)$$

Demostración.
Utilizando la Definición 1.20 se tiene que

$$\begin{aligned}
Var\,(X+Y) &= E\left[[(X+Y) - E(X+Y)]^2\right] \\
&= E\left[(X+Y)^2 - 2(X+Y)E(X+Y) + [E(X+Y)]^2\right].
\end{aligned}$$

Utilizando (a),(b) y (c) del Teorema 1.11

$$\begin{aligned} Var\,(X+Y) &= E[X^2]+2E[XY]+E[Y^2]-2E[X]E[X]-2E[X]E[Y] \\ &\quad -2E[Y]E[X]-2E[Y]E[Y]+(E[X])^2+2E[X]E[Y]+(E[Y])^2 \\ &= \left(E[X^2]-(E[X])^2\right)+\left(E[Y^2]-(E[Y])^2\right)+2\left(E[XY]-E[X]E[Y]\right). \end{aligned}$$

Finalmente aplicando las Definiciones 1.20 al lado izquierdo y al lado derecho se concluye que:

$$Var\,(X+Y) = Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y).$$

■

Definición 1.41 *Sean X y Y variables aleatorias entonces se definen los momentos conjuntos de orden $n+k$ como:*

$$m_{n,k} = E\left[X^n Y^k\right]$$

donde n y k son enteros positivos.

■

Definición 1.42 *Sean X y Y variables aleatorias entonces la función generadora de momentos conjunta de X y Y denotada por $M_{X,Y}(t_1,t_2)$, se define como:*

$$M_{X,Y}(t_1,t_2) = E[e^{t_1X+t_2Y}]$$

■

Observación.

Se llama la función generadora de momentos conjunta porque todos los momentos de las variables aleatorias X y Y pueden ser obtenidos sucesivamente derivando en una vecindad alrededor del orígen a $M_{XY}(t_1,t_2)$ y evaluando en $t_i=0$ para toda i, es decir:

$$\frac{\partial^{n+k}}{\partial t_1^n \partial t_2^k} M_{X,Y}(t_1,t_2)\,|_{t_1=0,t_2=0} = m_{n,k}$$

Definición 1.43 *Sean X y Y variables aleatorias entonces la función característica conjunta de X y Y denotada por $\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)$ se define como:*

$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = E[e^{i(t_1 X + t_2 Y)}]$$

■

Observación.

Así como a través la función generadora de momentos conjunta se pueden obtener todos los momentos conjuntos de las variables aleatorias X y Y, lo mismo sucede con la función caracteristica conjunta. Esto puede lograrse mediante la siguiente relación:

$$\left(\frac{\partial^{n+k}}{\partial t_1^n \partial t_2^k}\varphi_{X,Y}(t_1, t_2)\,|_{t_1=0, t_2=0}\right)\frac{1}{i^{n+k}} = m_{n,k}$$

Independencia

Muchas veces al trabajar con dos o más variables aleatorias es de interés saber si existe alguna relación entre ellas, es decir qué tanto influye una en la otra, para ello se estudiará el concepto de independencia entre variables aleatorias.

Definición 1.44 *Dos variables X, Y son independientes si para $A, B \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que:*

$$P[X \in A, Y \in B] = P[X \in A]\, P[Y \in B]$$

■

Observación.

La definición anterior implica que X y Y son variables aleatorias independientes si $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$.

Teorema 1.20 *Sean las variables aleatorias X, Y con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x, y)$, entonces X y Y son independientes si, y sólo si, existen dos funciones $g(x)$ y $h(y)$ no negativas tal que $f_{X,Y}(x, y) = g(x)h(y)$.*

Demostración.

Suponga que X y Y son variables aleatorias continuas; la demostración en el caso discreto es análoga.

Como X y Y son independientes entonces

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

donde $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las marginales de X y Y respectivamente.

Por (a) de la Definición 1.14 y si

$$f_X(x) = g(x) \text{ y } f_Y(y) = h(y),$$

entonces se tiene que existen dos funciones $g(x)$ y $h(y)$ no negativas tal que

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y).$$

Ahora se demostrará la inclusión contraria.

Se tiene que

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y).$$

Utilizando la Definición 1.37

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)dy \end{aligned}$$

$$f_X(x) = g(x)\int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy \tag{1.7}$$

y

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)dx \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = h(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx; \tag{1.8}$$

multiplicando (1.7) y (1.8)

$$\begin{aligned}
f_X(x)f_Y(y) &= \left(h(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx\right)\left(g(x) \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy\right) \\
&= h(y)g(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy \\
&= h(y)g(x) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)dydx \\
&= h(y)g(x) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dydx \\
&= h(y)g(x) \\
&= f_{X,Y}(x,y).
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.21 *Sean X y Y variables aleatorias independientes entonces se cumple que:*

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Demostración.
Se demostrará únicamente cuando X es una variable aleatoria continua. Utilizando el Teorema 1.38 se tiene

$$\begin{aligned}
E(XY) &= \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_x \sum_y xy f_X(x) f_Y(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_x x f_X(x) \sum_y y f_Y(y) \\ &= E(X)\, E(Y). \end{aligned}$$

La demostración en el caso discreto es análoga.

■

Observación.

En el caso de que X y Y sean variables aleatorias independientes, se cumple que:

$$Cov(X,Y) = 0$$

y por lo tanto,

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y).$$

Definición 1.45 *Sean X y Y variables aleatorias, con función de densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y)$ y funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente. Se define la función de densidad de la variable aleatoria condicional de X dado Y como:*

$$f_{X|Y}(x\,|y=y_0) = \frac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)}$$

si $f_Y(y_0) > 0$.

■

Definición 1.46 *Sean X y Y dos variables aleatorias, se define el valor esperado condicional de $g(X)$ dado $Y=y$ como:*

$$E(g(X)\,|Y=y) = \sum_x g(x) f_{X|Y}(x\,|y), \quad \textit{si } X \textit{ es discreta}$$

siempre y cuando:

$$\sum_x g(x) f_{X|Y}(x\,|y) < \infty;$$

y,

$$E(g(X)\,|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx, \ \textit{si } X \textit{ es continua}$$

siempre y cuando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx < \infty.$$

■

Teorema 1.22 *Sean X y Y variables aleatorias, g_1, g_2 funciones de una variable y c una constante entonces:*

(a) $E\left[g_1(X)\,|Y=y\right]$ *es una función de* Y *y* $E\left[g_1(Y)\,|X=x\right]$ *es función de* X.

(b) $E\left[g_1(X)+g_2(X)\,|Y=y\right] = E\left[g_1(X)\,|Y=y\right] + E\left[g_2(X)\,|Y=y\right]$

(c) $E\left[g_1(X)g_2(Y)\,|Y=y\right] = g_2(Y)E\left[g_1(X)\,|Y=y\right]$

(d) $E\left[c\,|Y=y\right] = c$

Demostración.

(a) **Por la Definición 1.46 se tiene que:**

$$E\left[g(X)\,|Y=y\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx.$$

Utilizando la Definición 1.45 se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx \\ &= \frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X,Y}(x,y)dx,\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$E\left[g(X)\,|Y=y\right] = \frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Por lo tanto la ecuación anterior demuestra que $E(g(X)\,|Y=y)$ es una función de y.

(b) De acuerdo a la Definición 1.46 se tiene que

$$\begin{aligned} E\left[g_1(X)+g_2(X)\,|Y=y\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(g_1(x)+g_2(x)\right) f_{X|Y}(x\,|y)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx + \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx, \end{aligned}$$

y así, por la ecuación anterior y por la Definición 1.46 se concluye que

$$E\left[g_1(X)+g_2(X)\,|Y=y\right] = E\left[g_1(X)\,|Y=y\right] + E\left[g_2(X)\,|Y=y\right].$$

(c) Utilizando la Definición 1.46 se sabe que

$$\begin{aligned} E\left[g_1(X)g_2(Y)\,|Y=y\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x)g_2(y) f_{X|Y}(x\,|y)dx \\ &= g_2(y)\int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f_{X|Y}(x\,|y)dx, \end{aligned}$$

y por la Definición 1.46 se demuestra que

$$E\left[g_1(X)g_2(Y)\,|Y=y\right] = g_2(y)E\left[g_1(X)\,|Y=y\right].$$

(d) De acuerdo a la Definición 1.46 se tiene que

$$E\left[c\,|Y=y\right] = \int_{-\infty}^{\infty} c f_{X|Y}(x\,|y)dx,$$

y así, por las Definiciones 1.45 y 1.37 se concluye que

$$\begin{aligned} c\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x\,|y)dx &= c\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}dx \\ &= \frac{c}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx \\ &= \frac{c}{f_Y(y)} f_Y(y) \\ &= c. \end{aligned}$$

El caso continuo es análogo.

■

Definición 1.47 *Sean X y Y variables aleatorias entonces la varianza condicional de X dado Y se define como:*

$$Var(X\,|Y=y)=E[(X-E(X\,|Y))^2\,|Y]$$

■

Proposición 1.23 *Sean X y Y variables aleatorias entonces:*

$$Var(X\,|Y=y)=E\left[X^2\,|Y\right]-(E\left[X\,|Y\right])^2$$

Demostración.
Utilizando la Definición 1.47 se tiene que:

$$\begin{aligned}Var(X\,|Y=y) &= E[(X-E(X\,|Y))^2\,|Y] \\ &= E\left[X^2-2XE(X\,|Y)+[E(X\,|Y)]^2\,|Y\right].\end{aligned}$$

Aplicando (*b*) , (*c*) y (*d*) del Teorema 1.22 se obtiene que

$$Var(X\,|Y=y)=E\left[X^2\,|Y\right]-2E\left[X\,|Y\right]E\left[X\,|Y\right]+[E(X\,|Y)]^2,$$

y así, la ecuación anterior demuestra que

$$Var(X\,|Y=y)=E\left[X^2\,|Y\right]-(E\left[X\,|Y\right])^2.$$

■

Teorema 1.24 *Sea X, Y variables aleatorias con función de densidad $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, respectivamente ambas con esperanza finita entonces:*

(a) $E(X)=E\left[E(X\,|Y=y)\right]$

(b) $Var(X)=E\left[Var(X\,|Y)\right]+Var\left[E(X\,|Y)\right]$

Demostración.
La prueba se hará cuando X y Y son variables aleatorias continuas; la demostración en el caso discreto es análoga.

(a) Por el Teorema 1.10 se tiene que

$$E[E(X|Y=y)] = \int E(X|Y=y)f_Y(y)dy,$$

y utilizando la Definición 1.46

$$\begin{aligned} E[E(X|Y=y)] &= \int \left(\int x f_{X|Y}(X|Y=y)dx \right) f_Y(y)dy \\ &= \int \int x f_{X|Y}(X|Y=y) f_Y(y)dxdy. \end{aligned}$$

Por la Definición 1.45 se tiene

$$\begin{aligned} \int \int x f_{X|Y}(X|Y=y)f_Y(y)dxdy &= \int \int x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y)dxdy \\ &= \int \int x f_{X,Y}(x,y)dxdy \\ &= \int x \int f_{XY}(x,y)dydx \\ &= \int x f_X(x)dx, \end{aligned}$$

y así, se concluye que:

$$E(X) = E(E(X|Y=y)).$$

(b) Por la Proposición 1.23 se tiene que

$$E[Var(X|Y)] = E[E(X^2|Y)] - E[(E(X|Y))^2],$$

y, utilizando (a) de este Teorema se obtiene que

$$E[Var(X|Y)] = E(X^2) - E[(E(X|Y))^2]. \tag{1.9}$$

Por otra parte, por el Teorema 1.12 se tiene que

$$Var[E(X|Y)] = E[(E(X|Y))^2] - [E(E(X|Y))]^2,$$

aplicando (a) de este Teorema se sigue que

$$Var[E(X|Y)] = E[(E(X|Y))^2] - (E(X))^2. \tag{1.10}$$

(c) Sumando (1.9) y (1.10) y por el Teorema 1.12 se concluye que:
$$Var(X) = E[Var(X\,|Y)] + Var[E(X\,|Y)]$$

■

En la siguiente sección se generalizará el estudio a un número finito de variables aleatorias.

Distribuciones Multivariadas

Definición 1.48 *Un vector aleatorio es un vector* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *donde* X_i, $i = 1, ..., n$ *es una variable aleatoria.*

■

Definición 1.49 *La función de distribución multivariada del vector aleatorio:*
$$\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$$
se define como:
$$F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\,[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, ..., X_n \leq x_n]$$

■

Teorema 1.25 *La función de distribución multivariada del vector aleatorio:*
$$\underline{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$$
satisface:

(a) $F_{X_1,X_2,...,X_n}(-\infty, x_2, ..., x_n) = 0, ...,$
$F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., -\infty, ..., x_n) = 0, ...,$
$F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ...x_{n-1}, -\infty) = 0$

(b) $F_{X,Y}(\infty, \infty, ..., \infty) = 1$

Demostración.
La demostración es análoga a la del Teorema 1.16.

■

Definición 1.50 *Sea* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *un vector aleatorio donde* X_i *es una variable aleatoria discreta para todo* i*, se define la función de densidad multivariada de* $(X_1, X_2, ..., X_n)$ *como:*
$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = P\,[X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n]$$

que cumple con las siguientes propiedades:

(a) $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$

(b) $\sum_{x_1}\sum_{x_2}...\sum_{x_n} f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$

■

Definición 1.51 *Se dice que las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ tienen una distribución conjunta absolutamente continua si existe una función f continua definida sobre todo $\mathbb{R}^n$ tal que para cualquier subconjunto A de $\mathbb{R}^n$,*

$$P[(X_1, X_2, ..., X_n) \in A] = \iint\limits_A ... \int f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_n$$

La función f es llamada función de densidad conjunta del vector aleatorio, y satisface las siguientes propiedades:

(a) $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$

(b) $\iint\limits_A ... \int f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_n = 1$

(c) $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n} F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$

■

Definición 1.52 *Se define la función marginal de X_i como:*

$$f_{X_i}(x_i) = \sum_{x_1}\sum_{x_2}...\sum_{x_{i-1}}\sum_{x_{i+1}}...\sum_{x_n} f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

si X_i es discreta para toda i, y;

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_{i-1}dx_{i+1}...dx_n$$

si X_i es continua para toda i.

■

En el siguiente teorema se mostrará la relación entre la función de distribución conjunta y las funciones marginales:

Teorema 1.26 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias con función de distribución conjunta $F_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$, entonces se cumple:*

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_i \to +\infty} F_{X_1,X_2,...X_{i-1}X_{i+1}...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \quad \text{para toda } i.$$

Demostración.
La demostración es análoga a la del Teorema 1.17.

■

Teorema 1.27 *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$ entonces para cualquier función vectorial real g se cumple lo siguiente:*

$$E(g(X_1, X_2, ..., X_n)) = \sum_{x_1}\sum_{x_2}...\sum_{x_n} g(X_1, X_2, ..., X_n) f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n),$$

si X_i es discreta para toda i, si y sólo si:

$$\sum_{x_1}\sum_{x_2}...\sum_{x_n} g(X_1, X_2, ..., X_n) f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) < \infty;$$

y

$$E(g(X_1, X_2, ..., X_n)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2, ..., X_n) f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n$$

si X_i es continua para toda i, si y sólo si:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty} g(X_1, X_2, ..., X_n) f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n < \infty.$$

Demostración.
(Ver Karr, 1992; página 116)

■

Proposición 1.28 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias entonces se cumple que:*

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(X_i\right) + 2\sum_{i}\sum_{<\, j} Cov\left(X_i, X_j\right)$$

Demostración.
(Ver DeGroot, 1988; página 206)

■

Definición 1.53 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias entonces se definen los momentos conjuntos de orden $\sum_{i=1}^{n} k_i$ como:*

$$m_{k_1,...,k_n} = E\left[X_1^{k_1} X_2^{k_2} ... X_n^{k_n}\right]$$

donde $k_1, ..., k_n$ son enteros positivos.

■

Definición 1.54 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias entonces la función generadora de momentos conjunta de $X_1, X_2, ..., X_n$ denotada por $M_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n)$ se define como:*

$$M_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n) = E\left[e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}\right]$$

■

Observación.

Se llama la función generadora de momentos conjunta porque todos los momentos de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ pueden ser obtenidos sucesivamente derivando en una vecindad alrededor del orígen a $M_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n)$ y evaluando en $t_i = 0$ para toda i, es decir:

$$\frac{\partial^R}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} ... \partial t_n^{k_n}} M_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n) \mid_{t_i=0} = m_{k_1,...,k_n}.$$

donde:

$$R = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Definición 1.55 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias entonces la función característica conjunta de $X_1, X_2, ..., X_n$ denotada por $\varphi_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n)$ se define como:*

$$\varphi_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n) = E\left[e^{\sum_{j=1}^{n} it_jX_j}\right]$$

donde:

$$i = \sqrt{-1}.$$

■

Observación.

Se pueden obtener los momentos de las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$, usando la relación:

$$\left(\frac{\partial^R}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}...\partial t_n^{k_n}}\varphi_{X_1,...,X_n}(t_1, .., t_n)\right)|_{t_i=0}\ \frac{1}{i^{\sum_{i=1}^{n} k_i}} = m_{k_1,...,k_n}.$$

Independencia Al igual que en el caso univariado muchas veces al trabajar con dos o más variables aleatorias es de interés saber si existe alguna relación entre ellas, es decir qué tanto influye una en la otra, para ello se estudiará el concepto de independencia entre variables aleatorias en el caso multivariado.

Definición 1.56 *Las variables $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes si para cualesquiera:*

$$A_1, A_2, ..., A_n \subseteq \mathbb{R}$$

se tiene que:

$$P[X_i \in A_i] = \prod_{i=1}^{n} P[X \in A_i]$$

■

Observación.

La definición anterior implica que las variables $X_1, X_2, ..., X_n$ son independientes si $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2), ..., f(x_n)$.

Teorema 1.29 *Sean las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_n$ con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$, entonces X_i y X_j son independientes si y sólo si, existen n funciones reales $g_i(x_i)$ para toda i no negativas tal que:*

$$f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

Demostración.
La demostración es análoga a la del Teorema 1.20.

■

Teorema 1.30 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes entonces se cumple que:*

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Demostración.
La demostración es análoga al caso bivariado.

■

Proposición 1.31 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias independientes con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$, si:*

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

entonces:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

Demostración.
Utilizando la Definición 1.21 y el Teorema 1.30 se tiene que

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E[e^{tS}] \\ &= E[e^{t(X_1+X_2+...X_n)}] \\ &= E[e^{t(X_1)}e^{t(X_2)}...e^{t(X_n)}] \\ &= E[e^{t(X_1)}]E[e^{t(X_2)}]...E[e^{t(X_n)}] \end{aligned}$$

de donde se concluye que:

$$M_S(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$$

■

Definición 1.57 *Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Se define la función de densidad de la variable aleatoria condicional de $X_{k+1}, ..., X_n$ dado $X_1, ..., X_k$ como:*

$$f_{X_{k+1},...,X_n|X_1,...,X_k}(x_{k+1}, ..., x_n | x_1, .., x_k) = \frac{f_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, ..., x_n)}{f_{X_1,...,X_k}(x_1, .., x_k)}$$

siempre que $f_{X_1,...,X_k}(x_1, .., x_k) > 0$ para todo $(x_1, .., x_k) \in \mathbb{R}^k$.

■

Definición 1.58 *Sean $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{X,Y_1,Y_2,...,Y_n}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. Se define el valor esperado condicional de X dado $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ como:*

$$E(X | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, ..., Y_n = y_n) = \sum_x x f_{X|Y_1,Y_2,...,Y_n}(x | y_1, ..., y_n)$$

si X es discreta, siempre y cuando:

$$\sum_x x f_{X|Y_1,Y_2,...,Y_n}(x | y_1, ..., y_n) < \infty;$$

y

$$E(X | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, ..., Y_n = y_n) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y_1,Y_2,...,Y_n}(x | y_1, ..., y_n) dx$$

si X es continua, siempre y cuando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y_1,Y_2,...,Y_n}(x | y_1, ..., y_n) dx < \infty.$$

■

Teorema 1.32 *Sean* $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *variables aleatorias con función de densidad conjunta* $f_{X,Y_1,Y_2,...,Y_n}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *entonces:*

(a) $E[X] = E[E[X|Y_1, Y_2, ..., Y_n]]$

(b) $E[g_1(X)|Y_1, Y_2, ..., Y_n]$ *es una función de* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$.

(c) $E[g_1(X) + g_2(X)|Y_1, Y_2, ..., Y_n]$
$= E[g_1(X)|Y_1, Y_2, ..., Y_n] + E[g_2(X)|Y_1, Y_2, ..., Y_n]$

(d) $E[g_1(X)g_2(Y)|Y_1, Y_2, ..., Y_n] = g_2(Y)E[g_1(X)|Y_1, Y_2, ..., Y_n]$

(e) Si c *es una constante entonces*

$$E[c|Y_1, Y_2, ..., Y_n] = c$$

Demostración.

(a) (Ver Karr, 1992; página 226)

La demostración de los incisos (b), (c), (d) y (e) es análoga a la del Teorema 1.22.

■

Definición 1.59 *Sean* $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *variables aleatorias con función de densidad conjunta* $f_{X,Y_1,Y_2,...,Y_n}(x, y_1, y_2, ..., y_n)$. *Se define la varianza condicional de* X *dado* $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *como:*

$$Var(X|Y_1, Y_2, ..., Y_n) = E\left[(X - E(X|Y_1, Y_2, ..., Y_n))^2 |Y_1, Y_2, ..., Y_n\right]$$

■

Proposición 1.33 *Sean* $X, Y_1, Y_2, ..., Y_n$ *variables aleatorias entonces*

$$Var(X|Y_1, Y_2, ..., Y_n) = E\left[X^2|Y_1, Y_2, ..., Y_n\right] - (E[X|Y_1, Y_2, ..., Y_n])^2$$

Demostración.
La demostración es análoga a la de la proposición 1.23.

■

1.5 Procesos estocásticos

En esta sección se presentan modelos de probabilidad para procesos que evolucionan en el tiempo de una manera probabilística. Tales procesos se llaman procesos estocásticos.

Definición 1.60 *Un **proceso estocástico** es una colección de variables aleatorias $\{X_t\}_{t\in T}$ indexadas por el conjunto T.*

■

Definición 1.61 *Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un procreso estocástico. Si cada variable aleatoria toma valores en el conjunto E entonces a E se le llama **espacio de estados del proceso**.*

■

Observaciones.

1. Si $\omega \in \Omega$ y $t \in T$ son fijos entonces $X_t(\omega) \in \mathbb{R}$.
2. Si ambos varían, entonces $(\omega, t) \longmapsto X_t(\omega)$ es un *proceso estocástico.*
3. Si t es fijo, entonces $\omega \longmapsto X_t(\omega)$ es una *variable aleatoria.*
4. Si únicamente ω es fijo, entonces $t \longmapsto X_t(\omega)$ se conoce como una *trayectoria o realización del proceso.*

Además cuando $T < \infty$ entonces el proceso estocástico es un vector aleatorio. El concepto de proceso estocástico es muy importante ya que algunas situaciones de la vida real se pueden modelar mediante procesos estocásticos. A continuación se describen los tipos de procesos estocásticos de acuerdo al conjunto de índices T y a otras formas incluyendo independencia.

1.5.1 Tipos de Procesos Estocásticos

Definición 1.62 *Un proceso estocástico $\{X(t)\}_{t\in T}$ es un **proceso a tiempo continuo** si T es un conjunto no numerable.*

■

Definición 1.63 *Un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in T}$ es un proceso a tiempo discreto si T es a lo más un conjunto numerable.*

■

Los diferentes tipos de procesos estocásticos se clasifican de acuerdo a las relaciones de dependencia entre las variables aleatorias que lo conforman, por ejemplo:

1. **Proceso con incrementos independientes.**

   Se dice que un proceso estocástico tiene **incrementos independientes** si

   $$t_1 < t_2 < ...t_n < ... \in T,$$

   entonces

   $$X_{t_{j-2}} - X_{t_{j-3}} \text{ y } X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$$

   son variables aleatorias independientes.

2. **Martingalas**

   Se dice que un proceso estocástico $\{X_n\}_{n=1,2,..}$ con medias finitas es una **martingalas**, si para algún entero cualquiera n se tiene que:

   $$E(X_{n+1} \,|X_1 = a_1, X_2 = a_2, ...X_n = a_n) = a_n.$$

   Es decir, el valor esperado de X_{n+1} dados los valores pasados $X_0, X_1, ..., X_{n-1}$ y el actual de X_n, es igual al valor actual de X_n.

   Si

   $$E(X_{n+1} \,|X_1 = a_1, X_2 = a_2, ...X_n = a_n) \leq a_n$$

   entonces, se dice que $\{X_n\}_{n=1,2,..}$ es una **submartingala**.

   Y sí,

   $$E(X_{n+1} \,|X_1 = a_1, X_2 = a_2, ...X_n = a_n) \geq a_n$$

   entonces, se dice que $\{X_n\}_{n=1,2,..}$ es una **supermartingala**.

3. **Procesos Estacionarios**

   Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico tal que $t_1 < t_2 < t_3 < ...$ entonces se dice que $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso estacionario si

   $$F_{X_{t_1},X_{t_2},...X_{t_n}}(x_1, x_2, ..., x_n) = F_{X_{t_1+h},X_{t_2+h},...X_{t_n+h}}(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ con } h > 0.$$

4. **Proceso de Markov**

   Sea $\{X_t\}_{t\in T}$ un proceso estocástico tal que

   $$t_1 < t_2 < t_3 < ... < t_n < t_{n+1}$$

   entonces se dice que $\{X_t\}_{t\in T}$ es un proceso de Markov si

   $$P(a \leq X_{t_{n+1}} \leq b \,|X_{t_1} = a_1, X_{t_2} = a_2, ..., X_{t_n} = a_n) = P(a \leq X_{t_{n+1}} \leq b \,|X_{t_n} = a_n).$$

   Es decir, las variables aleatorias del proceso estocástico tienen la propiedad de que dado el estado actual, los estados anteriores no tienen influencia en el futuro.

A continuación se expondrá un tipo especial de proceso estocástico el cual será de gran utilidad en capítulos posteriores.

1.5.2 Proceso Poisson

Entre los modelos más usuales que se presentan en la teoría de la probabilidad, se encuentra la conocida distribución de Poisson que se discutió con anterioridad. Si ahora se considera un intervalo de longitud variable (t variable), el número de ocurrencias será una función de t. Si las condiciones del experimento no se alteran al variar t, la media de la variable aleatoria X, que denota el número de ocurrencias en el intervalo $(0, t)$, será λt donde λ será el valor esperado de la variable aleatoria X. De esta forma se obtiene un proceso estocástico, el cual recibe el nombre de Proceso Poisson, cuya definición se presenta a continuación.

Definición 1.64 *Se dice que el proceso $\{X(t)\}_{t\in T}$ es un proceso Poisson si cumple las siguientes propiedades; para Δt suficientemente pequeña:*

(a) La probabilidad de que ocurra un evento en el intervalo $(t, t+\Delta t)$ es $\lambda\Delta t$.

(b) La probabilidad de que ocurran dos o más eventos en el mismo intervalo es cero.

(c) Los números de acontecimientos en dos intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes.

■

Ahora se calculará la función de densidad del Proceso Poisson.

El evento de que en el tiempo $(t, t+\Delta t)$ el número de ocurrencias sea n, puede llevarse a cabo de dos maneras diferentes y excluyentes:

1. Existen n ocurrencias durante un tiempo t y ninguna hasta Δt con probabilidad $1-\lambda\Delta t$. Dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:
$$p_n(t)\,(1-\lambda\Delta t)$$
donde $p_n(t)$ es la probabilidad de n ocurrencias al tiempo t.

2. Que hayan $(n-1)$ ocurrencias al tiempo t, con probabilidad $p_{n-1}(t)$ y ninguna en Δt. Nuevamente, dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:
$$p_{n-1}(t)\lambda\Delta t.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t)\,(1-\lambda\Delta t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t$$

por lo que:

$$p_n(t+\Delta t) = p_n(t) - \lambda\Delta t p_n(t) + p_{n-1}(t)\lambda\Delta t$$
$$p_n(t+\Delta t) - p_n(t) = \lambda\Delta t\,(p_{n-1}(t) - p_n(t))\,.$$

Dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \to \infty$ se tiene:

$$p_n'(t) = \lambda\,(p_{n-1}(t) - p_n(t)) \tag{1.11}$$

que es una ecuación diferencial lineal con respecto a t .
Si $n = 0$ la ecuación anterior se convierte en:

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t),$$

donde la solución a la ecuación diferencial anterior es:

$$p_0(t) = ce^{-\lambda t}$$

y debido a que $p_0(0) = 1$, se tiene que $c = 1$; por lo que:

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{1.12}$$

De manera análoga si $n = 1$ y bajo la condición inicial de $p_1(0) = 0$, se tiene que:

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t),$$

además, por (1.12) se tiene que:

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

y así, lo anterior implica que

$$p_1'(t) + \lambda p_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} . \tag{1.13}$$

Para resolver la ecuación diferencial anterior se utilizara el método del factor integrante, el cual consiste en buscar una función $\mu(t)$ derivable tal que

$$[\mu(t)p_1(t)]' = \mu(t)p_1'(t) + p_1(t)\mu'(t). \tag{1.14}$$

Para encontrar a $\mu(t)$ se multiplica (1.13) por $\mu(t)$ obteniéndose:

$$\mu(t)p_1'(t) + \lambda\mu(t)p_1(t) = \lambda\mu(t)e^{-\lambda t} . \tag{1.15}$$

Si la parte izquierda de (1.14) se iguala a la parte izquierda de 1.15 se obtiene:

$$[\mu(t)p_1(t)]' = \mu(t)p_1'(t) + \lambda\mu(t)p_1(t),$$

pero para que se cumpla la igualdad anterior tiene que suceder que $\lambda\mu(t) = \mu'(t)$, lo cual implica que $\mu(t) = e^{\lambda t}$.
Sustituyendo $\mu(t)$ en (1.15) se obtiene

$$\left(e^{\lambda t}p_1(t)\right)' = \lambda e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = \lambda,$$

e integrando con respecto a t, se sigue que

$$e^{\lambda t}p_1(t) = \lambda t + c$$

de donde:

$$p_1(t) = (\lambda t + c)\, e^{-\lambda t}.$$

Ocupando la condición inicial de que $p_1(0) = 0$, se tiene que $c = 0$, y así,

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}. \tag{1.16}$$

Ahora se demostrará por inducción que:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n\, e^{-\lambda t}}{n!}$$

(a) En el caso de que $n = 0$ por (1.12) se tiene que

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

(b) Si $n = 1$, por (1.16) se obtiene que:

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

(c) Suponiendo que:

$$p_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}\, e^{-\lambda t}}{(n-1)!},$$

por (1.11) se tiene que:

$$p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t)$$

y por la hipótesis de inducción:

$$p_n'(t) = \lambda\frac{(\lambda t)^{n-1}\, e^{-\lambda t}}{(n-1)!} - \lambda p_n(t);$$

de donde,

$$p_n'(t) + \lambda p_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}.$$

Multplicando por $e^{\lambda t}$ ambos mienbros de la ecuación anterior se tiene:

$$\left(e^{\lambda t} p_n(t)\right)' = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

e integrando con respecto a t:

$$e^{\lambda t} p_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{t^n}{n} + c\ .$$

Bajo la condición inicial de que $p_n(0) = 0$ se concluye que:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.$$

■

Definición 1.65 *Sea* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *un proceso Poisson, y sean*

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots$$

los tiempos en que ocurrieron los eventos del proceso entonces se definen los tiempos inter-arribos *como:*

$$Z_n = t_n - t_{n-1}$$

■

Teorema 1.34 *Sea* $\{X(t)\}_{t\in T}$ *un proceso Poisson, entonces las variables aleatorias* Z_n *(los tiempos inter-arribos) son independientes e idénticamente distribuidas exponencialmente.*

Demostración.

Primero se demostrará la independencia. Debido a (c) de la Definición 1.64 se tiene que las Z_i son independientes.

Ahora se demostrará que las variables aleatorias Z_n se distribuyen exponencialmente. Sea $t > 0$ tal que:

$$P(Z_n > t) = P\left(X(t_{n-1} - t) - X(t_{n-1}) = 0\right)$$

debido a la homogenidad se tiene que

$$P\left(X(t_{n-1}-t)-X(t_{n-1})=0\right)=P(X(t)=0)$$

pero

$$P(X(t)=0)=p_0(t)=e^{-\lambda t},$$

por lo tanto

$$P(Z_n>t)=e^{-\lambda t}.$$

Lo anterior puede escribirse como:

$$P(Z_n>t)=1-F_{Z_n}(t)=e^{-\lambda t}$$

por lo que:

$$F_{Z_n}(t)=1-e^{-\lambda t}$$

y así derivando la expresión anterior se sigue que:

$$f_{Z_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t};$$

lo cual comprueba que Z_n se distribuye $\exp(\lambda)$.

■

Definición 1.66 *Sean $\{X(t)\}_{t\in T}$ un proceso Poisson, y Z_n los tiempos interarribos entonces se define el* ***tiempo de espera para que ocurran*** n ***eventos*** *como:*

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}Z_i.$$

■

Observación.

La variable alcatoria Y_n se distribuye $gamma(n,\lambda)$, ya que es suma de n variables aleatorias independientes e idénticamentes distribuidas $\exp(\lambda)$.

Capítulo 2

Funciones biométricas

2.1 Introducción

En este capítulo se ilustrará el uso de la teoría de la probabilidad en el campo de aplicación más común de los actuarios: las técnicas actuariales. Se dará un breve desarrollo de las herramientas más poderosas que son las funciones biométricas, pero antes se definirán los conceptos de supervivencia y mortalidad.

2.2 Probabilidad de Supervivencia

Definición 2.1 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de unrecién nacido, entonces a la función:*

$$S(x) = P(X > x) \qquad x \geq 0$$

*se le conoce como **función de supervivencia**.*

■

Observación.

La función $S(x)$, también pueder ser interpretada como la probabilidad de que un recién nacido alcance la edad x.

Lema 2.1 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces:*

$$S(x) = 1 - F_X(x)$$

Demostración.
Utilizando la Definición 2.1 y por (*b*) de la Proposición 1.8 se demuestra que:

$$S(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x).$$

■

Teorema 2.2 *La función de supervivencia $S(x)$ cumple las siguientes propiedades:*

(a) $S(\infty) = 0$

(b) $S(0) = 1$

(c) *$S(x)$ es una función no creciente.*

(d) *$S(x)$ es una función continua.*

Demostración.

(a) Por el Lema 2.1 y por (*c*) del Teorema 1.7 se demuestra que:

$$S(\infty) = 1 - 1 = 0.$$

(b) Por el Lema 2.1 y por (*c*) del Teorema 1.7 se concluye que:

$$S(0) = 1 - 0 = 1.$$

(c) Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 \leq x_2$ con $x_1, x_2 \geq 0$. Por (*a*) del Teorema 1.7 sucede que:

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$$

y por lo tanto,

$$-F_X(x_1) \geq -F_X(x_2).$$

Utilizando el Lema 2.1:

$$S(x_1) = 1 - F_X(x_1) \geq 1 - F_X(x_2) = S(x_2),$$

por lo que se concluye que $S(x)$ es una función no creciente.

(d) Sea $g(x) = 1$, como g es continua y por (b) del Teorema 1.7 también F_X lo es, entonces se tiene que

$$S(x) = 1 - F_X(x)$$

es continua.

■

El teorema anterior permite verificar la intuición de que la probabilidad de que una persona sobreviva a la edad x es mayor a la de sobrevivir a la edad $x + t$, $t > 0$.

En ocasiones se está interesado en conocer la probabilidad condicional de que una persona muera entre las edades x y $x + z$ dado que ya sobrevivió a la edad x, dicha probabilidad se calcula como sigue. Por la Definición 1.45 se tiene que:

$$P\left(x < X \leq z \,|X > x\right) = \frac{P(x < X \leq z, X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \leq z)}{P(X > x)}.$$

Utilizando (a) de la Proposición 1.8 en el numerador y la Definición 2.1 en el denominador se obtiene que:

$$\begin{aligned} P\left(x < X \leq z \,|X > x\right) &= \frac{F_X(z) - F_X(x)}{S(x)} \\ &= \frac{1 - S(z) - (1 - S(x))}{S(x)} \\ &= \frac{S(x) - S(z)}{S(x)}. \end{aligned}$$

2.3 Probabilidad de Muerte

Definición 2.2 *Suponga que el símbolo (x) denota una persona de edad x y sea X la variable aleatoria que representa la duración de la vida de una persona entonces se define la variable aleatoria $T(x)$ como:*

$$T(x) = X - x,$$

la cual representa el ***tiempo futuro de vida*** *de (x).*

■

Definición 2.3 *La probabilidad de que una persona de edad x muera dentro de los siguientes t años se define como $P(T(x) \leq t)$ y se denota por ${}_tq_x$.*

■

Definición 2.4 *La probabilidad de que una persona de edad x alcance la edad $x+t$ se define como $P(T(x) > t)$ y se denota por ${}_tp_x$.*

■

Cabe señalar que se hará la convención de que si $t = 1$, entonces:

$$\begin{aligned} {}_tq_x &= q_x \\ {}_tp_x &= p_x \end{aligned}$$

Comúnmente se conoce a q_x como tasa de mortalidad.

Proposición 2.3 *Para ${}_tp_x$ y ${}_tq_x$ se cumple la siguiente relación:*

$${}_tq_x = 1 -_t p_x$$

Demostración.

Utilizando las Definiciones 2.3 y 2.4, así como (*b*) de la Proposición 1.8, se concluye que:

$${}_tq_x = P(T(x) \leq t) = 1 - P(T(x) > t) = 1 -_t p_x.$$

■

Definición 2.5 *La probabilidad de que una persona de edad x sobreviva t años y muera dentro de los siguientes u años se define como*

$$P(t < T(x) \leq t + u)$$

y se denota por ${}_{t|u}q_x$.

■

Si $u = 1$ se hace la convención de que:

$${}_{t|u}q_x = {}_{t|}q_x .$$

Teorema 2.4 *Para ${}_tq_x$, ${}_tp_x$ y ${}_{t|u}q_x$ se cumplen las siguientes propiedades:*

(a) ${}_tp_0 = S(t)$

(b) ${}_{t|u}q_x = {}_tp_x - {}_{t+u}p_x$

(c) ${}_tp_x = \frac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \frac{S(x+t)}{S(x)}$

(d) ${}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}$

(e) ${}_{t|u}q_x = ({}_tp_x)({}_uq_{x+t})$

Demostración.

(a) Utilizando la Definición 2.4 se tiene que:

$$ {}_tp_0 = P(T(0) > t) $$

y por las Definiciones 2.2 y 2.1 se concluye que:

$$ {}_tp_0 = P(X - 0 > t) = P(X > t) = S(t). $$

(b) Utilizando la Definición 2.5 se tiene que:

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= P(t < T(x) \leq t + u) \\ &= P(T(x) \leq t + u) - P(T(x) \leq t), \end{aligned} $$

y utilizando la Definición 2.3 y la Proposición 2.3 se concluye que:

$$ \begin{aligned} {}_{t|u}q_x &= {}_{t+u}q_x - {}_tq_x \\ &= 1 - {}_{t+u}p_x - (1 - {}_tp_x) \\ &= {}_tp_x - {}_{t+u}p_x. \end{aligned} $$

(c) Por la Definición 2.4:

$$ \begin{aligned} {}_tp_x &= P(T(x) > t) \\ &= P(T(0) > x + t \,|\, T(0) > x) \end{aligned} $$

de acuerdo a la Definición 1.45 se tiene que

$$ {}_tp_x = \frac{P(T(0) > x, T(0) > x+t)}{P(T(0) > x)} = \frac{P(T(0) > x+t)}{P(T(0) > x)}. $$

Usando la Definición 2.4 y por (a) de este Teorema se concluye que:

$$ {}_tp_x = \frac{{}_{t+x}p_0}{{}_xp_0} = \frac{S(x+t)}{S(x)}. $$

(d) Utilizando la Proposición 2.3 y (c) de este Teorema se tiene que:

$$ {}_tq_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}. $$

(e) Por (b) y (c) de este Teorema:

$$ \begin{aligned} {}_{t}|_{u}q_x &= {}_tp_x - {}_{t+u}\,p_x \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)} - \frac{S(x+t+u)}{S(x)} \\ &= \frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x)} \\ &= \left(\frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x)}\right)\frac{S(x+t)}{S(x+t)} \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)}\left(\frac{S(x+t) - S(x+t+u)}{S(x+t)}\right). \end{aligned} $$

Reagrupando términos y por el inciso (d) de este Teorema se concluye que:

$$ \begin{aligned} {}_{t}|_{u}q_x &= \frac{S(x+t)}{S(x)}(1 - \frac{S(x+t+u)}{S(x+t)}) \\ &= ({}_tp_x)({}_uq_{x+t}). \end{aligned} $$

■

2.4 Fuerza de Mortalidad

Será de interés calcular la probabilidad de que dado que una persona alcanzó la edad x, muera en un futuro cercano $x+\bigtriangleup x$, la cual, usando la Definición 1.45 se calcula como

$$P(x < X \leq x+ \bigtriangleup x | X > x) = \frac{P((x < X \leq x+ \bigtriangleup x) \bigcap (X > x))}{P(X > x)};$$

utilizando (a) de la Proposición 1.8 en el numerador y (b) de la Proposición 1.8 en el denominador, la expresión anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{P(x < X \leq x+ \bigtriangleup x)}{P(X > x)} &= \frac{F_X(x+ \bigtriangleup x) - F_X(x)}{1 - F_X(x)} \\ &= \frac{\frac{F_X(x+\bigtriangleup x)-F_X(x)}{\bigtriangleup x}}{\frac{1-F_X(x)}{\bigtriangleup x}}. \end{aligned}$$

Para $\bigtriangleup x$ cercana a cero se tiene :

$$\frac{F_X(x+ \bigtriangleup x) - F_X(x)}{\bigtriangleup x} \backsimeq \lim_{\bigtriangleup x \to 0} \frac{F_X(x+ \bigtriangleup x) - F_X(x)}{\bigtriangleup x} = F'_X(x) = f_X(x)$$

por lo que

$$\frac{\frac{F_X(x+\bigtriangleup x)-F_X(x)}{\bigtriangleup x}}{\frac{1-F_X(x)}{\bigtriangleup x}} \backsimeq \frac{f_X(x)}{\frac{1-F_X(x)}{\bigtriangleup x}} = \frac{f_X(x) \bigtriangleup x}{1 - F_X(x)};$$

y por lo tanto:

$$P(x < X \leq x+ \bigtriangleup x | X > x) \backsimeq \frac{f_X(x) \bigtriangleup x}{1 - F_X(x)}.$$

El resultado anterior proporciona una interpretación en términos de una probabilidad condicional para la función que a continuación se define.

Definición 2.6 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces se define la función* ***fuerza de mortalidad*** *o* ***tasa instantánea de mortalidad*** $\mu(x)$ *como:*

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)}.$$

■

Teorema 2.5 *La función fuerza de mortalidad cumple las siguientes propiedades:*

(a) $\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)}$

(b) $\mu(x) \geq 0$

Demostración.

(a) Por el Lema 2.1 se tiene que:

$$S(x) = 1 - F_X(x)$$

entonces,

$$-S(x) = -(1 - F_X(x)).$$

Derivando y por la propiedad (c) de la Definición 1.16

$$-S'(x) = F_X'(x) = f_X(x),$$

y por la Definición 2.6 se concluye que:

$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} = \frac{-S'(x)}{S(x)}.$$

(b) Por la propiedad (a) de la Definición 1.16 se tiene que:

$$f_X(x) \geq 0 \tag{2.1}$$

y por (c) del Teorema 1.7,

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

entonces
$$1 - F_X(x) \geq 0 \tag{2.2}$$
y así de (2.1) y (2.2) se demuestra que:
$$\mu(x) = \frac{f_X(x)}{1 - F_X(x)} \geq 0.$$
■

El teorema subsecuente muestra la relación que existe entre $\mu(x)$ y ${}_np_x$.

Teorema 2.6 *La fuerza de mortalidad satisface las siguientes relaciones:*

(a) ${}_np_x = \exp(-\int\limits_x^{x+n} \mu(y)dy)$

(b) ${}_np_x = \exp(-\int\limits_0^n \mu(x+s)ds)$

Demostración.

(a) Por (a) del Teorema 2.5
$$\mu(x) = \frac{-S'(x)}{S(x)}$$
entonces,
$$\mu(x) = -\frac{d}{dx}\ln(S(x)).$$
Integrando la expresión anterior de x a $x+n$, se obtiene
$$\begin{aligned} -\int\limits_x^{x+n} \mu(y)dy &= \ln(S(x+n)) - \ln(S(x)) \\ &= \ln(\frac{S(x+n)}{S(x)}); \end{aligned}$$
de donde:
$$\frac{S(x+n)}{S(x)} = \exp(-\int\limits_x^{x+n} \mu(y)dy).$$

Y así, por (c) del Teorema 2.4 se concluye que:

$$ {}_n p_x = \exp(-\int_x^{x+n} \mu(y)dy). $$

(b) Haciendo el cambio de variable $s = y - x$, en (a) de este Teorema se tiene que

$$ y = x + s \quad \text{y} \quad dy = ds $$

entonces,

$$ \int_x^{x+n} \mu(y)dy = \int_0^n \mu(x+s)ds $$

y, por lo tanto:

$$ {}_n p_x = \exp(-\int_0^n \mu(x+s)ds). $$

■

Los siguientes corolarios proporcionan una herramienta útil para especificar la distribución de la variable aleatoria X usando la fuerza de mortalidad.

Corolario 2.7 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces:*

$$ f_X(x) = {}_x p_0 \mu(x) $$

Demostración.
Por (a) del Teorema 2.6 se tiene que

$$ {}_x p_0 = \exp(-\int_0^x \mu(s)ds), $$

y por (a) del Teorema 2.4 se da la siguiente relación

$$S(x) = \exp(-\int_0^x \mu(s)ds). \tag{2.3}$$

Por el Lema 2.1 se tiene que

$$F_X(x) = 1 - \exp(-\int_0^x \mu(s)ds);$$

y derivando esta expresión se obtiene que

$$F'_X(x) = \exp(-\int_0^x \mu(s)ds)\mu(x).$$

Por (a) del Teorema 2.6, se sigue que:

$$F'_X(x) =_x p_0\mu(x)$$

y por la propiedad (c) de la Definición 1.16 se concluye que:

$$f_X(x) =_x p_0\mu(x).$$

■

Por último se encontrará la función de densidad de $T(x)$ en términos de $\mu(x)$ y $_tp_x$.

Teorema 2.8 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona, entonces la función de densidad de $T(x)$ está dada por:*

$$f_{T(x)}(t) =_t p_x\mu(x+t)$$

Demostración.
Por la Definición 2.3

$$\begin{aligned} F_{T(x)}(t) &= P(T(x) \leq t) \\ &= {}_tq_x, \end{aligned}$$

y por (d) del Teorema 2.4 se tiene que

$$F_{T(x)}(t) = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)},$$

entonces por la propiedad (c) de la Definición 1.16

$$\begin{aligned} f_{T(x)}(t) &= F'_{T(x)}(t) \\ &= -\frac{S'(x+t)}{S(x)} \\ &= \left(-\frac{S'(x+t)}{S(x)}\right)\frac{S(x+t)}{S(x+t)} \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)}\left(-\frac{S'(x+t)}{S(x+t)}\right). \end{aligned}$$

Por (c) del Teorema 2.4 y (a) del Teorema 2.5 se concluye que:

$$f_{T(x)}(t) =_t p_x \mu(x+t).$$

■

Corolario 2.9 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces:*

$$\frac{d}{dt}(1 -_t p_x) =_t p_x \mu(x+t)$$

Demostración.

Por la propiedad (c) de la Definición 1.16 y la Definición 2.3 se cumple que

$$f_{T(x)}(t) = F'_{T(x)}(t) = \frac{d}{dt}\, {}_tq_x,$$

y además por la Proposición 2.3 se obtiene

$$\frac{d}{dt}\, {}_tq_x = \frac{d}{dt}(1 -_t p_x).$$

Finalmente, utilizando el Teorema 2.8 se concluye que:

$$\frac{d}{dt}(1 -_t p_x) =_t p_x \mu(x+t).$$

■

Teorema 2.10 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^{x+n} \mu(y)dy = \infty$$

Demostración.
Primero se demostrará que:

$$\lim_{n\to\infty} {}_n p_x = 0.$$

Por la Proposición 2.3 y la Definición 2.3 se obtiene que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} {}_n p_x &= \lim_{n\to\infty} (1 - {}_n q_x) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - P(T(x) \leq n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} (1 - F_{T(x)}(n)), \end{aligned}$$

y utilizando (c) del Teorema 1.7 se concluye que

$$1 - \lim_{n\to\infty} F_{T(x)}(n) = 1 - 1 = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} {}_n p_x = 0.$$

Lo anterior conduce a las siguientes igualdades:

$$\ln(\lim_{n\to\infty} {}_n p_x) = -\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln({}_n p_x) = -\infty$$

y finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} (-\ln({}_n p_x)) = \infty. \tag{2.4}$$

Por otra parte, utilizando (a) del Teorema 2.6 se tiene que:

$$\ln({}_n p_x) = -\int_x^{x+n} \mu(y)dy$$

y así, por (2.4) se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{x}^{x+n}\mu(y)dy\right)=\infty.$$

■

2.5 Relación entre la función de supervivencia y la tabla de vida.

En los problemas relacionados con las matemáticas actuariales, juega un papel importante la duración de la vida humana. Las llamadas tablas de vida constituyen una manera conveniente de escribir la distribución de esta variable aleatoria.

Definición 2.7 *Sea ℓ_0 un grupo de recién nacidos donde cada uno de ellos tienen la misma función de supervivencia $S(x)$. Sea $I_j(x)$ la función indicadora para el sobreviviente j, es decir:*

$$I_j(x)=\begin{cases}1 & \text{si la persona } j \text{ sobrevive a la edad } x\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Se define:

$$\mathcal{L}(x)=\sum_{j=1}^{\ell_0}I_j(x)$$

como el número de sobrevivientes a la edad x.

■

Lema 2.11 *La esperanza de que una persona del grupo ℓ_0 sobreviva a la edad x es $S(x)$, es decir:*

$$E(I_j(x))=S(x)$$

Demostración.
Calculando la esperanza de $I_j(x)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} E(I_j(x)) &= \sum_{i=0}^{1} i f_{I_j(x)}(i) \\ &= 0 f_{I_j(x)}(0) + 1 f_{I_j(x)}(1) \\ &= f_{I_j(x)}(1) \end{aligned}$$

como $f_{I_j(x)}(1)$ representa la probabilidad de que una persona del grupo ℓ_0 sobreviva a la edad x se concluye que:

$$f_{I_j(x)}(1) = P(X > x) = S(x).$$

■

Teorema 2.12 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona y sea:*

$$\ell_x = E(\mathcal{L}(x)),$$

que representa el número esperado de sobrevivientes a la edad x del grupo de los ℓ_0 recién nacidos, entonces:

$$\ell_x = \ell_0 S(x)$$

Demostración.
Calculando la esperanza se tiene que

$$\ell_x = E(\mathcal{L}(x)) = E(\sum_{j=1}^{\ell_0} I_j(x)) = \sum_{j=1}^{\ell_0} E(I_j(x)),$$

y por el Lema 2.11 se concluye que:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\ell_0} E(I_j(x)) &= \sum_{j=1}^{\ell_0} S(x) \\ &= S(x) \sum_{j=1}^{\ell_0} 1 \\ &= \ell_0 S(x). \end{aligned}$$

■

Corolario 2.13 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona, entonces:*

$$\mu(x) = -\frac{\ell'(x)}{\ell(x)}$$

Demostración.
Utilizando (a) del Teorema 2.5 y por el Teorema 2.12 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mu(x) &= -\frac{S'(x)}{S(x)} \\
&= -\frac{(\frac{\ell_x}{\ell_0})'}{\frac{\ell_x}{\ell_0}} \\
&= -\frac{\ell'_x}{\ell_x}.
\end{aligned}$$

■

Corolario 2.14 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces:*

$${}_np_x = \frac{\ell_{x+n}}{\ell_x}$$

Demostración.
Por el Teorema 2.12 se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\ell_{x+n}}{\ell_x} &= \frac{\ell_0 S(x+n)}{\ell_0 S(x)} \\
&= \frac{S(x+n)}{S(x)}
\end{aligned}$$

y por (c) del Teorema 2.4 se concluye que:

$$\frac{S(x+n)}{S(x)} =_n p_x \,.$$

■

Observación.

Bajo el supuesto de que las variables aleatorias $I_j(x)$ son mutuamente independientes e idénticamente distribuidas, se tiene que $\mathcal{L}(x)$ tiene una distribución binomial con parámetros: $n = \ell_0$ y $p = S(x)$. Sin embargo el teorema anterior no requiere el supuesto de independencia de las $I_j(x)$.

Definición 2.8 *Sea ℓ_0 un grupo de recién nacidos donde cada uno de ellos tiene una función de supervivencia $S(x)$, sea $I_k^*(x)$ la función indicadora para que la persona k del grupo ℓ_0 muera entre las edades x y $x+n$ es decir:*

$$I_k^*(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si la persona } k \textit{ muere entre las edades } x \textit{ y } x+n \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

Se define:

$${}_n\mathcal{D}_x = \sum_{k=0}^{\ell_0} I_k^*(x)$$

como el número de muertes entre las edades x y $x+n$.

■

Lema 2.15 *La esperanza de que una persona del grupo ℓ_0 muera entre las edades x y $x+n$ es:*

$$E(I_k^*(x)) = S(x) - S(x+n)$$

Demostración.

Calculando la esperanza se tiene que:

$$\begin{aligned} E(I_k^*(x)) &= E(\sum_{i=0}^{1} i f_{I_k^*(x)}(i)) \\ &= 0 f_{I_k^*(x)}(0) + 1 f_{I_k^*(x)}(1) \\ &= f_{I_k^*(x)}(1) \end{aligned}$$

como $f_{I_k^*(x)}(1)$ representa la probabilidad de que la k-ésima persona del grupo ℓ_0 muera entre las edades x y $x+n$, utilizando la Definición 2.3 y por (a) de la Proposición 1.8, la expresión anterior es equivalente a:

$$P(x < X \leq x+n) = F_x(x+n) - F_x(x)$$

y por el Lema 2.1 se concluye que:

$$\begin{aligned} E(I_k^*(x)) &= (1 - S(x+n)) - (1 - S(x)) \\ &= S(x) - S(x+n). \end{aligned}$$

■

Teorema 2.16 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona y sea:*

$${}_nd_x = E({}_n\mathcal{D}_x),$$

el número esperado de muertes entre las edades x y $x+n$, entonces:

$${}_nd_x = \ell_x - \ell_{x+n}$$

Demostración.
Calculando la esperanza se tiene que:

$$\begin{aligned} E({}_n\mathcal{D}_x) &= E\left[\sum_{k=0}^{\ell_0} I_k^*(x)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\ell_0} E\left[I_k^*(x)\right], \end{aligned}$$

por el Lema 2.15 se sigue que:

$$\begin{aligned} E({}_n\mathcal{D}_x) &= \sum_{k=0}^{\ell_0} [S(x) - S(x+n)] \\ &= (S(x) - S(x+n)) \sum_{k=0}^{\ell_0} 1 \\ &= (S(x) - S(x+n))\ell_0. \end{aligned}$$

Por el Teorema 2.12 se concluye que:

$$\begin{aligned} E({}_n\mathcal{D}_x) &= \left(\frac{\ell_x}{\ell_0} - \frac{\ell_{x+n}}{\ell_0}\right)\ell_0 \\ &= \ell_x - \ell_{x+n}. \end{aligned}$$

■

Cabe señalar que cuando $n = 1$ se hará la convención de que:

$${}_n\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_x \;\; \text{y} \;\; {}_nd_x = d_x$$

Teorema 2.17 *Sea X la variable aleatoria que mide la duración de la vida de una persona entonces:*

$$\ell_x\mu(x) = \ell_0 f_X(x)$$

donde $f_X(x)$ es la función de densidad de la variable aleatoria X.

Demostración.
Por el Teorema 2.12 se tiene que $\ell_x = \ell_0 S(x)$, lo que implica que:

$$\ell_x\mu(x) = \ell_0 S(x)\mu(x).$$

Por el Teorema 2.4 se tiene que

$$\ell_x\mu(x) = \ell_0({}_xp_0)\mu(x),$$

y por el Corolario 2.7 se demuestra que:

$$\ell_x\mu(x) = \ell_0 f_X(x).$$

■

El siguiente teorema muestra la relación existente entre ℓ_x y $\mu(x)$.

Teorema 2.18 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona, entonces:*

(a) $\ell_x = \ell_0 \exp\left(-\int_0^x \mu(y)dy\right)$

(b) $\ell_{x+n} = \ell_x \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu(y)dy\right)$

(c) ${}_nd_x = \int_x^{x+n} \ell_y \mu(y)dy$

Demostración.

(a) Por (a) del Teorema 2.5 se tiene que:

$$-\frac{S'(x)}{S(x)} = \mu(x)$$

entonces,

$$-\frac{d}{dx}\ln(S(x)) = \mu(x),$$

y

$$\ln(S(x)) = -\int_0^x \mu(y)dy,$$

lo que implica que:

$$S(x) = \left(\exp - \int_0^x \mu(y)dy\right).$$

Por el Teorema 2.12 se concluye que:

$$\ell_x = \ell_0 \exp\left(-\int_0^x \mu(y)dy\right).$$

Ahora se supondrá que se comienza con un grupo de personas de edad x denotado por ℓ_x entonces utilizando (a) del Teorema 2.5:

$$-\frac{S'(x+n)}{S(x+n)} = \mu(x+n)$$

entonces,

$$-\frac{d}{dx}\ln(S(x+n)) = \mu(x+n)$$

y

$$\ln(S(x+n)) = -\int_x^{x+n} \mu(y)dy;$$

lo que implica que

$$S(x+n) = \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu(y)dy\right).$$

Por el Teorema 2.12 se demuestra que:

$$\ell_{x+n} = \ell_x \exp\left(-\int_x^{x+n} \mu(y)dy\right).$$

(b) Se sabe por el Corolario 2.13 que

$$\begin{aligned}\int_x^{x+n} \ell_y\mu(y)dy &= \int_x^{x+n} \ell_y\left(\frac{-\frac{d}{dy}\ell_y}{\ell_y}\right)dy \\ &= \int_x^{x+n} -\frac{d}{dy}\ell_y dy \\ &= -(\ell_{x+n}-\ell_x),\end{aligned}$$

y así, por el Teorema 2.16 se concluye que

$${}_nd_x = \ell_x - \ell_{x+n}.$$

■

2.6 Esperanza de vida

A continuación se enunciará la definición de la esperanza de vida, también llamada esperanza completa de vida de una persona de edad x, así como algunas propiedades.

Definición 2.9 *La esperanza de vida de una persona de edad x, denotada por $\overset{o}{e}_x$ se define como:*

$$\overset{o}{e}_x = E(T(x))$$

la cual expresa el número de años en promedio que le corresponderá vivir a una persona de edad x.

■

Teorema 2.19 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona de edad x tal que:*

$$\lim_{t\to\infty} t \; {}_tp_x = 0$$

entonces se cumple que:

$$\overset{o}{e}_x = \int_0^\infty {}_tp_x dt$$

Demostración.
Por la Definición 2.9 se tiene que:

$$\overset{o}{e}_x = E(T(x)).$$

Calculando la esperanza de $T(x)$ y por el Teorema 2.8 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \overset{o}{e}_x &= \int_0^\infty t f_{T(x)}(t) dt \\ &= \int_0^\infty t {}_tp_x \mu(x+t) dt. \end{aligned}$$

Utilizando el Corolario 2.9 se tiene

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty t\frac{d}{dt}(1 -_t p_x)dt$$
$$= \int_0^\infty -t\frac{d}{dt}{}_t p_x dt,$$

integrando por partes,

$$= t(-_t p_x)\,|_0^\infty - \int_0^\infty -_t p_x dt = t(-_t p_x)\,|_0^\infty + \int_0^\infty {}_t p_x dt.$$

Como:

$$\lim_{t\to\infty} t_t p_x = 0\ ,$$

se demuestra que:

$$\overset{\circ}{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt.$$

■

Teorema 2.20 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona tal que:*

$$\lim_{t\to\infty} t^2(-_t p_x) = 0$$

entonces se cumple que:

$$Var(T(x)) = 2\int_0^\infty t_t p_x dt - (\overset{\circ}{e}_x)^2$$

Demostración.
Primero se calculará el segundo momento de la variable aleatoria $T(x)$:

$$E(T^2(x)) = \int_0^\infty t^2 f_{T(x)}(t)dt,$$

y por el Teorema 2.8 se tiene que

$$E(T^2(x)) = \int_0^\infty t^2({}_tp_x)\mu(x+t)dt.$$

Ahora, de acuerdo al Corolario 2.9 se obtiene que

$$E(T^2(x)) = \int_0^\infty t^2\frac{d}{dt}(1-{}_t p_x)dt = \int_0^\infty -t^2\frac{d}{dt}{}_tp_xdt,$$

e integrando por partes

$$= -(t^2({}_tp_x)\,|_0^\infty - \int_0^\infty 2t{}_tp_xdt).$$

Además

$$\lim_{t\to\infty} t^2(-{}_tp_x) = 0\ ,$$

entonces

$$E(T^2(x)) = 2\int_0^\infty t{}_tp_xdt.$$

Y así, por el Teorema 2.19 se demuestra que:

$$Var(T(x)) = 2\int_0^\infty t{}_tp_xdt - (\mathring{e}_x)^2.$$

■

Es importante señalar que la existencia de $\mathring{e}_x$ depende de la distribución de la variable aleatoria X, la cual denota la duración de la vida de una persona.

Definición 2.10 ***El número total esperado de años vividos entre las edades*** **x** ***y*** **x + n** ***de los sobrevivientes del grupo inicial, se define por:***

$${}_nL_x = \int_0^n t\ell_{x+t}\mu(x+t)dt + n\ell_{x+n}$$

donde, el primer término cuenta los años vividos de aquellos quienes murieron entre las edades x y $x+n$, y el segundo término cuenta los años vividos entre las edades x y $x+n$ de los sobrevivientes a la edad $x+n$.

■

Teorema 2.21 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces:*

$$_nL_x = \int_0^n \ell_{x+t}dt$$

Demostración.

Por el Corolario 2.13 se tiene que

$$\mu(x+t) = -\frac{\ell'_{x+t}}{\ell_{x+t}},$$

entonces

$$\ell'_{x+t} = -\mu(x+t)\ell_{x+t};$$

lo que implica que

$$_nL_x = \int_0^n t\ell_{x+t}\mu(x+t)dt + n\ell_{x+n} = \int_0^n t(-\ell'_{x+t})dt + n\ell_{x+n}. \tag{2.5}$$

Integrando por partes a $\int_0^n t(-\ell'_{x+t})dt$ se obtiene

$$\int_0^n t(-\ell'_{x+t})dt = -t\ell_{x+t}\,|_0^n - \int_0^n -\ell_{x+t}dt = -n\ell_{x+n} + \int_0^n \ell_{x+t}dt. \tag{2.6}$$

Sustituyendo (2.6) en (2.5) se tiene que:

$$\int_0^n t(-\ell'_{x+t})dt + n\ell_{x+n} = -n\ell_{x+n} + \int_0^n \ell_{x+t}dt + n\ell_{x+n} = \int_0^n \ell_{x+t}dt,$$

y así, se demuestra que:

$$ {}_nL_x = \int_0^n \ell_{x+t} dt. $$

■

Enseguida se dará un concepto que relaciona ${}_nd_x$ y ${}_nL_x$.

Definición 2.11 *Se define la* ***tasa central de mortalidad*** *sobre el intervalo* $(x, x+n)$ *como:*

$$ {}_nm_x = \frac{\int_0^n \ell_{x+t}\mu(x+t)dt}{\int_0^n \ell_{x+t}dt} $$

La tasa central de mortalidad es la tasa promedio de muertes del grupo ℓ_0 sobre el intervalo $(x, x+n)$.

■

Teorema 2.22 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona, entonces:*

$$ {}_nm_x = \frac{{}_nd_x}{{}_nL_x} $$

Demostración.

Por el Corolario 2.13 se tiene que:

$$ \mu(x+t) = -\frac{\ell'_{x+t}}{\ell_{x+t}}, $$

lo que implica que

$$ \begin{aligned} \int_0^n \ell_{x+t}\mu(x+t)dt &= \int_0^n \ell_{x+t}\left(-\frac{\ell'_{x+t}}{\ell_{x+t}}\right)dt \\ &= \int_0^n -\ell'_{x+t}dt = -\ell_{x+t}\,|_0^n \\ &= -\ell_{x+n} + \ell_x. \end{aligned} $$

por lo que

$$\int_0^n \ell_{x+t}\mu(x+t)dt = \ell_x - \ell_{x+n}. \tag{2.7}$$

Por otro lado por el Teorema 2.21 se tiene que:

$$_nL_x = \int_0^n \ell_{x+t}dt \tag{2.8}$$

De (2.7) y (2.8) se sigue que:

$$_nm_x = \frac{\int_0^n \ell_{x+t}\mu(x+t)dt}{\int_0^n \ell_{x+t}dt} = \frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{_nL_x}.$$

Utilizando el Teorema 2.16 se concluye que:

$$\frac{\ell_x - \ell_{x+n}}{_nL_x} = \frac{_nd_x}{_nL_x}.$$

■

Observación.
Como antes en el caso de que $n = 1$ se hace la siguiente convención:

$$_nL_x = L_x \quad \text{y} \quad _nm_x = m_x$$

Definición 2.12 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona, se define al **número promedio de personas vivas de edad mayor o igual a X** como:*

$$T_x = \int_0^\infty t\ell_{x+t}\mu(x+t)dt$$

■

Teorema 2.23 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona tal que:*

$$\lim_{t\to\infty} t\ell_{x+t} = 0$$

entonces:

$$T_x = \int_0^\infty \ell_{x+t} dt$$

Demostración.
Por el Corolario 2.13 se tiene que:

$$\ell'_{x+t} = -\ell_{x+t}\mu(x+t),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} T_x &= \int_0^\infty t\ell_{x+t}\mu(x+t)dt \\ &= \int_0^\infty -t\ell'_{x+t} dt; \end{aligned}$$

e integrando por partes,

$$\begin{aligned} T_x &= -t\ell_{x+t}\,|_0^\infty - \int_0^\infty -\ell_{x+t} dt \\ &= -\lim_{t\to\infty} t\ell_{x+t} + \int_0^\infty \ell_{x+t} dt \\ &= \int_0^\infty \ell_{x+t} dt \end{aligned}$$

y así, se demuestra que:

$$T_x = \int_0^\infty \ell_{x+t} dt.$$

■

Observación.
T_x puede ser interpretado como el límite de ${}_nL_x$ cuando n tiende a infinito.

Por último se enunciará una relación existente entre $\overset{o}{e}_x$ y T_x mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.24 *Sea X la variable aleatoria que denota la duración de la vida de una persona entonces:*

$$\frac{T_x}{\ell_x} = \overset{o}{e}_x$$

Demostración.
Por el Teorema 2.23 se tiene que:

$$\frac{T_x}{\ell_x} = \frac{\int\limits_0^\infty \ell_{x+t}dt}{\ell_x} = \int\limits_0^\infty \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}dt,$$

y por el Corolario 2.14

$$\int\limits_0^\infty \frac{\ell_{x+t}}{\ell_x}dt = \int\limits_{0t}^\infty p_x dt.$$

Utilizando el Teorema 2.19 se desmuestra que:

$$\frac{T_x}{\ell_x} = \overset{o}{e}_x .$$

■

2.7 Ejercicios resueltos

1.—Completar la siguiente tabla:

$S(x)$	$F(x)$	$f(x)$	μ_x
			$\tan x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
$e^{-x},\ x \geq 0$			
	$1 - \frac{1}{1+x},\ x \geq 0$		

Solución :
Primer renglón de la tabla:
De acuerdo a la Definición 2.6 se tiene que:

$$\begin{aligned}\mu(x) &= \tan x \\ &= \frac{sen(x)}{\cos(x)},\end{aligned}$$

de donde se observa que

$$f_X(x) = sen(x) \text{ y } S(x) = \cos(x).$$

Utilizando el Lema 2.1 se concluye que:

$$F_X(x) = 1 - \cos(x).$$

Segundo renglón de la tabla:
Ocupando el Lema 2.1 y (c) de la Definición 1.16 se tiene que:

$$\begin{aligned}F_X(x) &= 1 - e^{-x} \\ f_X(x) &= e^{-x},\end{aligned}$$

y por la Definición 2.6 se concluye que:

$$\mu(x) = 1.$$

Tercer renglón de la tabla:

Utilizando el Lema 2.1 y (c) de la Definición 1.16 se tiene:

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f_X(x) &= \frac{1}{(1+x)^2}, \end{aligned}$$

ahora, por la Definición 2.6 se obtiene:

$$\mu_x = \frac{1}{1+x}.$$

Por lo tanto la tabla queda de la siguiente forma:

$S(x)$	$F(x)$	$f(x)$	μ_x
$\cos(x)$	$1-\cos(x)$	$sen(x)$	$\tan x,\ 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
$e^{-x},\ x \geq 0$	$1-e^{-x}$	e^{-x}	1
$\frac{1}{1+x}$	$1-\frac{1}{1+x},\ x \geq 0$	$\frac{1}{(1+x)^2}$	$\frac{1}{1+x}$

2.—Calcular la correspondiente función de supervivencia. En cada caso $x \geq 0$.

(a) $\mu(x) = Bc^x$ $\quad B > 0 \quad c > 1$ (Gompertz)

(b) $\mu(x) = kx^n$ $\quad n > 0 \quad k > 0$ (Weibull)

(c) $\mu(x) = \frac{a}{b+x}$ $\quad a > 0 \quad b > 0$ (Pareto)

Solución :

(a) Como

$$\begin{aligned} \int_0^x \mu(y)dy &= \int_0^x Bc^y dy \\ &= B\frac{c^y}{\ln(c)}\Big|_0^x \\ &= \frac{B}{\ln(c)}\left[c^x - 1\right], \end{aligned}$$

y utilizando (2.3) se tiene que:

$$S(x) = e^{-\frac{B}{\ln(c)}[c^x - 1]}.$$

(b) Como

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mu(y)dy &= \int_0^x ky^n dy \\
&= k\frac{x^{n+1}}{n+1},
\end{aligned}$$

y utilizando (2.3) se obtiene que:

$$S(x) = e^{-\frac{k}{n+1}x^{n+1}}.$$

(c) Observe que

$$\begin{aligned}
\int_0^x \mu(y)dy &= \int_0^x \frac{a}{b+y}dy \\
&= a\ln(b+x)|_0^x \\
&= a\ln(b+x) - a\ln(b),
\end{aligned}$$

por lo tanto, utilizando (2.3) se tiene que:

$$\begin{aligned}
S(x) &= e^{-a\ln(b+x)+a\ln(b)} \\
&= e^{-\ln\left((b+x)^{-a}\right)+\ln((b)^a)} \\
&= e^{-\ln\left[(b+x)^{-a}(b)^a\right]} \\
&= (b+x)^{-a}\,(b)^a \\
&= \left(1+\frac{x}{b}\right)^{-a}.
\end{aligned}$$

3.—Si

$$S(x) = \left[1 - \frac{x}{100}\right]^{\frac{1}{2}} \quad 0 \le x \le 100,$$

calcular:

(a) ${}_{17}p_{19}$

(b) ${}_{15}q_{36}$

(c) ${}_{15|13}\,q_{36}$

(d) $\mu(36)$

(e) $E\left[T(36)\right]$

Solución :

(a) Utilizando (c) del Teorema 2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} {}_{17}p_{19} &= \frac{S(19+17)}{S(19)} \\ &= \frac{\left(1-\frac{36}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{19}{100}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

(b) Por (d) del Teorema 2.4 se obtiene que

$$\begin{aligned} {}_{15}q_{36} &= 1-\frac{S(36+15)}{S(36)} \\ &= 1-\frac{\left(1-\frac{51}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{36}{100}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(c) Por (e) del Teorema 2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} {}_{15|13}q_{36} &= \left({}_{15}p_{36}\right)\left({}_{13}q_{\ 51}\right) \\ &= \left(\frac{S(51)}{S(15)}\right)\left(1-\frac{S(13+51)}{S(13)}\right) \\ &= \frac{\left(1-\frac{51}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{15}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}\left(1-\frac{\left(1-\frac{13+51}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1-\frac{13}{100}\right)^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(d) De (a) del Teorema 2.5 se sigue que

$$\begin{aligned} \mu(x) &= -\frac{\frac{1}{2}\left[1-\frac{x}{100}\right]\left(\frac{-1}{100}\right)}{\left[1-\frac{x}{100}\right]^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{200\left[1-\frac{x}{100}\right]}, \end{aligned}$$

por lo tanto:
$$\mu(36) = \frac{1}{200\left[1 - \frac{36}{100}\right]} = \frac{1}{128}.$$

(e) Utilizando el Teorema 2.19, y por (c) del Teorema 2.4 se tiene que:

$$\begin{aligned}
E\left[T(36)\right] &= \int_0^{\omega-x} {}_tp_{36}dt \\
&= \int_0^{100-36} \frac{S(36+t)}{S(36)}dt \\
&= \frac{1}{S(36)}\int_0^{64} S(36+t)dt \\
&= \frac{1}{S(36)}\int_0^{64} \left[1 - \frac{36+t}{100}\right]^{\frac{1}{2}} dt = \frac{128}{3}.
\end{aligned}$$

4.—Demostrar que:

(a) $\frac{d}{dx}\ell_x\mu_x < 0$ cuando $\frac{d}{dx}\mu_x < \mu_x^2$

(b) $\frac{d}{dx}\ell_x\mu_x = 0$ cuando $\frac{d}{dx}\mu_x = \mu_x^2$

(c) $\frac{d}{dx}\ell_x\mu_x > 0$ cuando $\frac{d}{dx}\mu_x > \mu_x^2$

Solución :

(a) Se sabe que

$$\frac{d}{dx}\ell_x\mu(x) = \left(\frac{d}{dx}\ell_x\right)\mu(x) + \ell_x\left(\frac{d}{dx}\mu(x)\right),$$

por (a) del Teorema 2.5, y por el Teorema 2.12 se tiene que

$$\frac{d}{dx}\ell_x\mu(x) = \left(\frac{d}{dx}\ell_0 S(x)\right)\left(-\frac{\frac{d}{dx}S(x)}{S(x)}\right) + \ell_0 S(x)\left(\frac{d}{dx}\left(-\frac{\frac{d}{dx}S(x)}{S(x)}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \ell_0 \frac{d}{dx} S(x) \left(-\frac{\frac{d}{dx} S(x)}{S(x)} \right) + \ell_0 S(x) \left[\frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right) S(x) + \left(\frac{d}{dx} S(x)\right)^2}{(S(x))^2} \right] \\
&= -\ell_0 \frac{\left(\frac{d}{dx} S(x)\right)^2}{S(x)} + \frac{\left(\frac{d}{dx} S(x)\right)^2 S(x)\ell_0 - \ell_0 (S(x))^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right)}{(S(x))^2} \\
&= \frac{-\ell_0 \left(\frac{d}{dx} S(x)\right)^2 S(x) + \left(\frac{d}{dx} S(x)\right)^2 S(x)\ell_0 - \ell_0 (S(x))^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right)}{(S(x))^2} \\
&= \frac{-\ell_0 (S(x))^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right)}{(S(x))^2} = -\ell_0 \left(\frac{d^2}{dx^2} S(x) \right),
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\frac{d}{dx} \ell_x \mu(x) = -\ell_0 \left(\frac{d^2}{dx^2} S(x) \right). \tag{2.9}
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \mu(x) - (\mu(x))^2 &= \frac{d}{dx} \left(-\frac{\frac{d}{dx} S(x)}{S(x)} \right) - \left(-\frac{\frac{d}{dx} S(x)}{S(x)} \right)^2 \\
&= \frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right) S(x) + \left[\frac{d}{dx} S(x)\right]^2}{(S(x))^2} - \frac{\left(\frac{d}{dx} S(x)\right)^2}{(S(x))^2} \\
&= \frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right)}{S(x)},
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
\frac{d}{dx} \mu(x) - (\mu(x))^2 = \frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2} S(x)\right)}{S(x)}. \tag{2.10}
$$

(b) Por hipótesis se tiene que:

$$
\frac{d}{dx} \mu(x) < (\mu(x))^2 ,
$$

lo que implica que

$$
\frac{d}{dx} \mu(x) - (\mu(x))^2 < 0,
$$

y por lo tanto de (2.10) se obtiene que

$$\frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2}S(x)\right)}{S(x)} < 0.$$

Por la Definición 2.1 se tiene que $S(x) > 0$, lo que implica que

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}S(x)\right) < 0,$$

por otro lado $\ell_0 > 0$, por lo tanto de 2.9 y de la expresión anterior se concluye que:

$$\frac{d}{dx}\ell_x\mu(x) < 0.$$

(c) Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\mu(x) = (\mu(x))^2,$$

lo que implica que

$$\frac{d}{dx}\mu(x) - (\mu(x))^2 = 0,$$

por lo tanto de (2.10) se tiene que

$$\frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2}S(x)\right)}{S(x)} = 0.$$

Por la Definición 2.1 se tiene que $S(x) > 0$ lo que implica que

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}S(x)\right) = 0$$

por otro lado $\ell_0 > 0$, por lo tanto de (2.9) y la expresión anterior se concluye que

$$\frac{d}{dx}\ell_x\mu(x) = 0.$$

(d) Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{d}{dx}\mu(x) > (\mu(x))^2,$$

lo que implica que

$$\frac{d}{dx}\mu(x) - (\mu(x))^2 > 0,$$

por lo tanto de (2.10) se tiene que

$$\frac{-\left(\frac{d^2}{dx^2}S(x)\right)}{S(x)} > 0.$$

Por la Definición 2.1 se tiene que $S(x) > 0$, lo que implica que

$$-\left(\frac{d^2}{dx^2}S(x)\right) > 0,$$

por otro lado $\ell_0 > 0$, por lo tanto de (2.9) y la expresión anterior se concluye que

$$\frac{d}{dx}\ell_x\mu(x) > 0.$$

5.– Si la variable aleatoria T tiene función de densidad dada por:

$$f_T(t) = \begin{cases} ce^{-ct} & t \geq 0,\ c > 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

calcular:

(a) $E[T]$

(b) $Var[T]$

(c) mediana$[T]$

Solución :

(a) Debido a que $T \sim \exp(c)$ entonces se tiene que:

$$E(T) = \frac{1}{c}.$$

(b) Como $T \sim \exp(c)$ entonces se tiene que:

$$Var(T) = \frac{1}{c^2}.$$

(c) La mediana debe satisfacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \int_0^m ce^{-ct}dt \\ &= -e^{-ct}\Big|_0^m \\ &= -e^{-cm} + 1, \end{aligned}$$

de lo anterior se tiene que

$$\frac{1}{2} = e^{-cm},$$

entonces

$$\begin{aligned} -cm &= \ln(\frac{1}{2}) \\ &= \ln(1) - \ln(2) \\ &= -\ln(2) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$m = \frac{\ln(2)}{c}.$$

6.—Si $\mu_{x+t} = t,\ \ t \geq 0$, calcular

(a) ${}_tp_x\mu_{x+t}$

(b) $\overset{o}{e}_x$

Solución :

(a) Utilizando (b) del Teorema 2.6 se tiene que:

$$\begin{aligned} {}_tp_x &= e\left(-\int_0^t \mu(x+s)ds\right) \\ &= e\left(-\int_0^t tds\right) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \end{aligned}$$

por lo que

$$ {}_tp_x\mu_{x+t} = te^{-\frac{t^2}{2}}. $$

(b) Por el Teorema 2.19 se obtiene que:

$$ \overset{o}{e}_x = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt. $$

Debido a que la función de densidad de una variable aleatoria T con distribución normal$(0,1)$ es la siguiente:

$$ f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, $$

y por ser una distribución simétrica se tiene que:

$$ \begin{aligned} \overset{o}{e}_x &= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \sqrt{2\pi} * \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned} $$

7.—El número promedio de años vividos entre las edades x y $x+1$ del grupo de sobrevivientes que murió entre esas edades, se denota por $a(x)$ y se define como:

$$ a(x) = \frac{\int_0^1 t l_{x+t}\mu_{x+t} dt}{\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t} dt}. $$

Demostrar las siguientes relaciones:

(a) $a(x)d_x = L_x - \ell_{x+1}$

(b) $T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}$

Solución :

(a) Utilizando la Definición 2.10 en el numerador y (c) del Teorema 2.18 en el denominador se obtiene que:

$$a(x) = \frac{L_x - \ell_{x+1}}{\ell_x - \ell_{x+1}},$$

y por el Teorema 2.16 se demuestra que

$$a(x)d_x = L_x - \ell_{x+1}.$$

(b) Utilizando el Teorema 2.21 se tiene que

$$\begin{aligned} T_x &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \ell_{x+k+t}\,dt\right) \\ &= \int_0^{\infty} \ell_{x+t}\,dt, \end{aligned}$$

y por el Teorema 2.23 se demuestra que:

$$T_x = \sum_{k=0}^{\infty} L_{x+k}.$$

8.—Considere la siguiente función de supervivencia

$$S(x) = \left[1 - \frac{x}{\omega}\right]^{\alpha} \quad 0 \leq x \leq \omega, \quad \alpha > 0.$$

Calcular:

(a) μ_x

(b) $\overset{o}{e}_x$

Solución :

(a) Utilizando (a) del Teorema 2.5 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \frac{-\frac{\alpha}{\omega}\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^{\alpha-1}}{\left(1-\frac{x}{\omega}\right)^{\alpha}} \\
&= \frac{\alpha}{\left(1-\frac{x}{\omega}\right)} \\
&= \frac{\alpha}{\omega - x}.
\end{aligned}$$

(b) Por el Teorema 2.19 y por (c) del Teorema 2.4 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{e}_x &= \int_0^{\omega-x} \frac{S(x+t)}{S(x)} dt \\
&= \int_0^{\omega-x} \frac{\left[1-\frac{x+t}{\omega}\right]^{\alpha}}{\left[1-\frac{x}{\omega}\right]^{\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\left[1-\frac{x}{\omega}\right]^{\alpha}} \int_0^{\omega-x} \left[1-\frac{x+t}{\omega}\right]^{\alpha} dt \\
&= \frac{\omega - x}{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

9.—Demostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial_x}\ {}_tp_x = {}_t p_x\left[\mu(x) - \mu(x+t)\right].$$

y si

$$\mu(x) = \frac{3}{100-x} - \frac{10}{250-x} \quad \text{para} \quad 40 < x < 100,$$

calcular ${}_{40}p_{50}$.

Solución :

Utilizando (c) del Teorema 2.4 y por (a) del Teorema 2.5 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial_x}\,{}_tp_x &= \frac{\partial}{\partial_x}\frac{S(x+t)}{S(x)} \\
&= \frac{\frac{\partial S(x+t)}{\partial_x}S(x)-\frac{\partial S(x)}{\partial_x}S(x+t)}{[S(x)]^2} \\
&= \frac{1}{S(x)}\left[\frac{\frac{\partial S(x+t)}{\partial_x}S(x)-\frac{\partial S(x)}{\partial_x}S(x+t)}{S(x)}\right] \\
&= \frac{1}{S(x)}\left[\frac{\partial S(x+t)}{\partial_x}-\frac{\frac{\partial S(x)}{\partial_x}S(x+t)}{S(x)}\right]\left(\frac{S(x+t)}{S(x+t)}\right) \\
&= \frac{S(x+t)}{S(x)}\left[\frac{\frac{\partial S(x+t)}{\partial_x}}{S(x+t)}-\frac{\frac{\partial S(x)}{\partial_x}}{S(x)}\right] \\
&= {}_tp_x\left[-\mu(x+t)+\mu(x)\right],
\end{aligned}$$

entonces se cumple que:

$${}_tp_x=\frac{\frac{\partial}{\partial_x}{}_tp_x}{\mu(x)-\mu(x+t)}.$$

Para calcular ${}_{40}p_{50}$. se utiliza (a) del Teorema 2.6, obteniéndose:

$$\begin{aligned}
{}_{40}p_{50} &= e\left(-\int_{50}^{90}\frac{3}{100-s}-\frac{10}{250-s}ds\right) \\
&= e\,(-2.596878)=7.451\times10^{-2}
\end{aligned}$$

10.—Si

$$\ell_x=100-x \ \text{ para } \ 0\le x\le 100,$$

calcular

(a) ${}_{10}L_{50}$

(b) ${}_{10}m_{50}$

Solución :

(a) Utilizando el Corolario 2.13 se tiene que

$$\mu(x) = -\frac{-1}{100 - x - t},$$

entonces por el Teorema 2.21 se obtiene que

$${}_{10}L_{50} = \int_{0}^{10} (100 - 50 - t)dt = 450.$$

(b) De la Definición 2.11 se sigue que

$${}_{10}m_{50} = \frac{\int_{0}^{10} (100 - 50 - t)dt}{450} = \frac{10}{450} = \frac{1}{45}.$$

Capítulo 3

Economía del Seguro

3.1 Introducción

En ocasiones, los planes de las personas se ven frustrados por algunas circunstancias que no se tenían contempladas, por lo cual no se desarrollan con total certeza. El seguro está diseñado para proteger a los individuos en contra de las posibles consecuencias que se obtienen como resultado de eventos aleatorios.

Cabe mencionar que el seguro está restringido a eventos aleatorios que pueden medirse en términos monetarios. De igual forma el seguro no reduce directamente la probabilidad de ocurrencia de algún evento, si no que es un mecanismo para reducir el efecto financiero adverso de los eventos aleatorios que impiden la realización de los planes futuros.

La justificación económica del seguro es que contribuye al bienestar general mediante el mejoramiento de la perspectiva de que los planes no se frustrarán por eventos aleatorios.

3.2 Teoría de la Utilidad

La teoría de la utilidad surge como necesidad de proporcionar diferentes puntos de vista en la toma de decisiones en la que se encuentra involucrada la incertidumbre. Se define el valor de un proyecto económico como un resultado aleatorio que será el valor esperado, sirviendo esto como una solución a este tipo de problemas, es decir, los posibles resultados aleatorios monetarios serán reemplazados simplemente por su valor esperado.

De acuerdo a este principio, una persona que tenga que tomar una decisión (tomador de decisiones) será indiferente entre asumir la pérdida aleatoria X y pagar el monto $E[X]$ para resarcir la pérdida económica.

Este principio es inadecuado para algunas personas ya que depende del monto de la pérdida aleatoria y de la distribución de los posibles resultados de la variable aleatoria X.

Muchas veces los tomadores de decisiones estarán dispuestos a pagar más que el valor esperado, ya que su posible pérdida aleatoria puede ser mayor.

Sea w el monto de la riqueza de un tomador de decisiones medido en unidades monetarias y sea $u(w)$ una función de utilidad estrictamente creciente.

La transformación lineal

$$u^*(w) = au(w) + b, \qquad a > 0$$

es equivalente a $u(w)$.

Una vez que se ha determinado la función de utilidad, se utilizará para elegir entre dos alternativas, las cuales se denotarán por las variables aleatorias X e Y.

El tomador de decisiones elegirá X si sucede que:

$$E[u(w+X)] > E[u(w+Y)]$$

o

$$E[u(w+X)] = E[u(w+Y)].$$

Es importante mencionar que:

1.— La teoría de la utilidad será elaborada bajo la suposición de la existencia de las preferencias de algún evento, así como su probabilidad de ocurrencia.

2.—La función de utilidad no será determinada en forma única, pero las preferencias se preservan cuando la función de utilidad es un incremento lineal de la función original.

Sea $u(w)$ la función de utilidad original y sea:

$$u'(w) = au(w) + b, \qquad a > 0$$

un incremento lineal de $u(w)$ y si:

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

entonces se tienen las siguientes implicaciones:

$$a\,E[u(X)] > a\,E[u(Y)]$$

si y sólo si

$$a\,E[u(X)] + b > a\,E[u(Y)] + b$$

si y sólo si

$$E(a\,E[u(X) + b]) > E(a\,E[u(Y) + b])$$

si y sólo si

$$E[au(X)] + E[b] > E[a\,u(Y)] + E[b]$$

y por lo tanto:

$$E[u'(X)] > E[u'(Y)].$$

3.— Si la función de utilidad es lineal con pendiente positiva, es decir:

$$u(w) = aw + b, \qquad a > 0$$

y si:

$$E(X) = \mu_x, E(Y) = \mu_y;$$

entonces

$$E[u(X)] = E[aX + b] = a\,E[X] + E[b] = a\mu_x + b$$

y

$$E[u(Y)] = E[aY + b] = a\,E[Y] + E[b] = a\mu_y + b;$$

y si además,

$$E[u(X)] > E[u(Y)]$$

se tiene que

$$a\,E[X] + b > a\,E[Y] + b$$

y por lo tanto :

$$\mu_x > \mu_y,$$

es decir, el principio del valor esperado es consistente con la tranformación de la función de utilidad. En este contexto $E(X) = \mu$ recibe el nombre de *prima pura o neta.*

3.3 Seguro y utilidad

Suponga que el tomador de decisiones tiene una propiedad la cual está expuesta a ser dañada o destruida en el siguiente periodo y desea adquirir un contrato con una aseguradora. Dicha aseguradora emitirá ***pólizas*** las cuales serán una promesa de pago para el dueño de la propiedad, definida por un monto igual o menor a la pérdida financiera. Por otro lado el asegurado deberá hacer pagos llamados *primas* para protegerse contra el posible siniestro. Si dicha propiedad sufriera algún daño o destrucción durante el periodo de la póliza, se efectuará el pago del siniestro por parte de la aseguradora.

El monto de la pérdida es una variable aleatoria denotada por X, con función de distribución conocida.

La pérdida esperada para el siguiente periodo $E(X)$ puede interpretarse como la pérdida promedio a largo plazo.

Muchas veces con el fin de considerar cierta seguridad contra las posibles pérdidas, la aseguradora decide incluir gastos e impuestos entre otras cosas, cargándolos adicionalmente a la prima neta.

Sea H la prima cargada dada por :

$$H = (1+a)\mu + c \qquad a > 0, c > 0$$

donde $a\mu$ se asocia a los gastos ocasionados por la pérdida y c a los gastos fijos.

El dueño de la propiedad tiene una función de utilidad $u(w)$ donde w es la riqueza medida en unidades monetarias.

Si el propietario enfrenta un evento que lo puede llevar a la pérdida aleatoria, es indiferente entre pagar una prima G y asumir la pérdida:

$$u(w-G) = E[u(w-X)]. \tag{3.1}$$

El lado izquierdo representa la utilidad que el propietario recibirá si decide asegurarse y el lado derecho indica que él asumirá la pérdida aleatoria.

Si la función de utilidad del propietario es una transformación lineal:

$$u(w) = bw + d, \qquad b > 0$$

y se aplica el principio del valor esperado, utilizando (3.1) se tiene que el propietario adoptará o será indiferente en adquirir un seguro, cuando la utilidad que el propietario recibirá si decide asegurarse es mayor que la utilidad promedio si decide asumir la pérdida, es decir:

$$u(w-G) = b(w-G) + d \geq E[u(w-X)] = E[b(w-X)+d]$$

lo cual implica las siguientes desigualdades:

$$b(w-G) + d \geq E[b(w-X)] + E[d]$$

si y sólo si

$$b(w-G) + d \geq b[E(w-X)] + d$$

si y sólo si

$$b(w-G) + d \geq b[E(w) - E(X)] + d$$

si y sólo si

$$b(w-G) + d \geq b[w-\mu] + d$$

si y sólo si

$$-G \geq -\mu$$

y por lo tanto:

$$G \leq \mu.$$

es decir, el propietario decidirá comprar un seguro cuando el pago del seguro (*prima*) sea menor o igual a la pérdida esperada y asumir la pérdida en otro caso. Por lo que, en este caso, el monto máximo de prima que pagará será μ.

Cabe mencionar que la función de utilidad no tiene porque ser lineal, sino que también puede ser cuadrática, exponencial, logarítmica o de cualquier otra forma particular.

A continuación se mostrará la relación que existe entre la aseguradora y el asegurado con sus respectivas funciones de utilidad, para ello se requiere de las desigualdades de Jensen.

Desigualdades de Jensen

Proposición 3.1 *Sea X una variable aleatoria y $u(w)$ una función de utilidad creciente, con primera y segunda derivada:*

(a) Si $u"(w) < 0$ entonces $E(u(X)) \leq u(E(X))$

(b) Si $u"(w) > 0$ entonces $E(u(X)) \geqslant u(E(X))$

Demostración.

Se analizará el caso $u"(w) < 0$ y $u'(w) > 0$.

Si $E(X) = w$ existe, se considera la línea tangente a $u(w)$ en el punto $(\mu, u(\mu))$:

$$y = u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu)$$

Debido a que $u(w)$ es estrictamente cóncava, su gráfica estará por debajo de la línea tangente, esto es,

$$u(w) \leq u(\mu) + u'(\mu)(w - \mu)$$

para todos los valores de w.

Si se reemplaza w por la variable aleatoria X y se toma esperanza a la desigualdad se tiene que:

$$E[u(X)] \leq E[u(\mu) + u'(\mu)(X - \mu)]$$

lo cual implica las siguientes desigualdades:

$$E[u(X)] \leq E[u(\mu)] + u'(\mu)E(X - \mu)$$

si y sólo si

$$E[u(X)] \leq u(\mu) + u'(\mu)[E(X) - \mu)]$$

si y sólo si

$$E[u(X)] \leq u(\mu) + u'(\mu)[0]$$

y por lo tanto:

$$E[u(X)] \leq u(E[X]).$$

La demostración de la segunda desigualdad es análoga, teniendo en consideración que si $u"(w) > 0$ entonces $u(w)$ es estrictamente convexa. ■

Si se supone que el tomador de decisiones tiene una función de utilidad tal que $u"(w) < 0$ y $u'(w) > 0$. Aplicando (a) de la Proposición 3.1 a

$$u(w - G) = E[u(w - X)],$$

se tiene que

$$E[u(w - X)] \leq u[E(w - X)] = u[E(w) - E(X)] \leq u(w - \mu),$$

es decir

$$u(w - G) \leq u(w - \mu).$$

Como $u'(w) > 0$ entonces $u(w)$ es creciente, por lo que

$$(w - G) \leq (w - \mu)$$

sumando $-w$ a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$-G \leq -\mu$$

por lo tanto:

$$G \geqslant \mu$$

con $G > \mu$ a menos que X sea constante.

De lo anterior se puede concluir que si el tomador de decisiones tiene una función de utilidad $u(w)$, será adverso al riesgo si y sólo si $u"(w) < 0$.

Sea $u_1(w)$ la función de utilidad de la aseguradora y w_1 su nivel de riqueza medido en términos monetarios.

El mínimo valor aceptable de la prima cargada H para asumir la pérdida aleatoria X puede ser determinada por:

$$u_1(w) = E[u_1(w + H - X)] \tag{3.2}$$

donde $u_1(w)$ es la utilidad de la aseguradora al asumir el riesgo y:

$$E[u_1(w + H - X)]$$

es la utilidad esperada de la aseguradora al tomar el riesgo, esta ecuación representa la indiferencia al riesgo de la aseguradora.

Si la función de utilidad de la aseguradora $u_1(w)$ es tal que $u"_1(w) < 0$ y $u'_1(w) > 0$, entonces se puede aplicar la desigualdad de Jensen, de lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} E[u_1(w+H-X)] &\leq u_1(E[w+H-X]) \\ &= u_1(E[w]+E[H]-E[X]) \\ &= u_1(w+H-\mu], \end{aligned}$$

de acuerdo a (3.2) se tiene que:

$$u_1(w) \leq u_1(w+H-\mu].$$

Como $u'_1(w) > 0$ entonces $u_1(w)$ es creciente, de donde se tienen las siguientes desigualdades:

$$w \leq w+H-\mu$$

si y sólo si

$$0 \leq H-\mu$$

si y sólo si

$$\mu \leq H$$

es decir, si sucede que $\mu \leq H$, el asegurador será adverso al riesgo, donde H es la mínima prima cargada aceptable para pagar la pérdida X y μ es la pérdida esperada.

Sea G el máximo monto que el asegurado está dispuesto a pagar. Si sucede que $\mu \leq H \leq G$, el contrato se puede llevar a cabo satisfactoriamente.

3.4 Modelos individuales de riesgo a corto plazo

Como se vió la teoría del riesgo requiere de un modelo probabilístico para las pérdidas potenciales. En esta parte se examinará uno de los modelos comúnmente utilizados.

Sean Xi variables aleatorias independientes que denotan la pérdida del i-ésimo riesgo asegurado y sea n el número de riesgos asegurados, se define S como la pérdida aleatoria de este conjunto de riesgos, es decir,

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

En el modelo individual del riesgo no se reconoce el valor del dinero en el tiempo, se discutirán modelos cerrados donde el número de asegurados n es fijo y conocido al principio del periodo.

3.4.1 Modelos de variables aleatorias para reclamaciones individuales

El asegurado contrata un seguro para un periodo de 1 año, si el asegurado muere dentro del año, la aseguradora le pagará la cantidad b y si sobrevive no se le pagará nada.

Sea q la probabilidad de reclamación durante el año y sea X la variable aleatoria que denota el monto de la reclamación cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1-q & x=0 \\ q & x=b \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

y cuya función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-q & 0 \leq x < b \\ 1 & x \geqslant b \end{cases}.$$

Calculando la esperanza y la varianza de X se tiene que:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = 0(1-q) + bq = bq$$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 f(x) = 0^2(1-q) + b^2 q = b^2 q$$

y

$$Var(X) = E[X^2] - E^2[X] = b^2 q - b^2 q^2 = b^2 q(1-q)$$

Sea I la variable aleatoria tal que :

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si la muerte ocurre} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

entonces la función de densidad de $I(x)$ está dada por :

$$f_{I(x)}(*) = \begin{cases} q & \text{si } I(x) = 1 \\ 1-q & \text{si } I(x) = 0 \end{cases},$$

de tal modo que X puede verse de la siguiente forma:

$$X = Ib$$

donde b es la cantidad que se pagará si ocurre la muerte.

Si se considera que pueden ocurrir varias reclamaciones en un periodo de tiempo, por ejemplo, accidentes y enfermedades, se obtiene que el monto de reclamaciones es también una variable aleatoria que depende del número de reclamaciones en el periodo.

Sea B el monto total de reclamaciones durante el periodo e I la variable aleatoria indicadora de que al menos una reclamación ocurre. Entonces se puede escribir:

$$X = IB.$$

Teorema 3.2 *En el modelo $X = IB$ se tiene que:*

$$E\,(X) = \mu q$$

y

$$Var\,(X) = \mu^2 q(1-q) + \sigma^2 q; \tag{3.3}$$

donde

$$\mu = E(B\,|I = 1)$$

y

$$\sigma^2 = var\,(B\,|I = 1)\,.$$

Demostración.
Si en el Teorema 1.24 se sustituye I por Y se obtiene:

$$E[X] = E\,[E[X\,|I]]$$

y

$$Var(X) = Var(E[X\,|I]) + E(Var[X\,|I]\,)$$

Primero se demostrará que $E(X) = \mu q$. Sean
$$\mu = E(B\,|I=1)$$
y
$$\sigma^2 = var\,(B\,|I=1)\,.$$

Calculando $E(X\,|I=0)$ se tiene:
$$E(X\,|I=0) = \sum_x x f_{X|I}\,(X\,|I=0) = \sum_x x\,(0) = \sum_x 0 = 0$$
es decir:
$$E(X\,|I=0) = 0. \tag{3.4}$$
Si $I=1$ se tiene que $X=B$ entonces:
$$E(X\,|I=1) = E(B\,|I=1) = \mu. \tag{3.5}$$
Las fórmulas (3.4) y (3.5) indican que $E(X\,|I)$ es una función dependiente de I
$$E(X\,|I) = \mu I$$
por lo que:
$$\begin{aligned} E(E((X\,|I)) &= E(\mu I) \\ &= \mu E\,(I) \\ &= \mu \sum_x x f_I\,(x) \\ &= \mu[0(1-q)] + 1(q) \\ &= \mu q \end{aligned}$$
y así:
$$E(X\,|I) = \mu q. \tag{3.6}$$
Ahora se obtendrá la $Var\,(X)$. Si $X=0$ se tiene que $I=0$ y:
$$\begin{aligned} Var\,(X\,|I=0) &= E\,(X^2\,|I=0) - E^2\,(X\,|I=0) \\ &= \sum_x x^2 f_{X|I}\,(X\,|I=0) - 0^2 \\ &= \sum_x x^2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

es decir:

$$Var\,(X\,|I=0)=0. \tag{3.7}$$

Si $I=1$ se tiene que $X=B$ y además:

$$Var\,(X\,|I=1)=Var\,(B\,|I=1)=\sigma^2,$$

por lo tanto :

$$Var\,(X\,|I=1)=\sigma^2 \tag{3.8}$$

de (3.7) y (3.8) se observa que $Var\,(X\,|I)$ es una función que depende de I

$$Var\,(X\,|I)=\sigma^2 I$$

entonces:

$$\begin{aligned} E\,(Var\,(X\,|I)) &= E\,(\sigma^2 I) \\ &= \sigma^2 E\,(X) \\ &= \sigma^2 q \end{aligned}$$

por lo que:

$$E\,(Var\,(X\,|I))=\sigma^2 q. \tag{3.9}$$

Obteniendo la varianza de (3.6) se tiene que:

$$\begin{aligned} Var\,(E\,(X\,|I)) &= Var(\mu I) \\ &= \mu^2 Var\,(I) \\ &= \mu^2\left[E\,(I^2)-E^2\,(I)\right] \\ &= \mu^2[(0^2(1-q)+1^2(q))-q^2] \\ &= \mu^2 q(1-q), \end{aligned}$$

es decir,

$$Var\,(E\,(X\,|I))=\mu^2 q(1-q) \tag{3.10}$$

entonces sustituyendo (3.9) y (3.10) en 3.3, se concluye que:

$$\begin{aligned} Var\,(X) &= Var\,(E\,(X\,|I))+E\,(Var\,(X\,|I)) \\ &= \mu^2 q(1-q)+\sigma^2 q. \end{aligned}$$

■

3.4.2 Suma de variables aleatorias independientes

En el modelo individual de riesgo, la aseguradora modela las reclamaciones como la suma de reclamaciones de los asegurados.

Sean X e Y dos variables aleatorias y sea $S = X+Y$, se calcula la función de distribución de S como:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X+Y \leq s)$$

Se aplica la fórmula de la probabilidad total y si se supone que X e Y son variables discretas se tiene que:

$$F_S(s) = \sum_{y \leq s} P(X+Y \leq s \,|Y = y) f_Y(y)$$

$$F_S(s) \;\; = \sum_{y \leq s} P(X \leq s - y \,|Y = y) f_Y(y)\,. \tag{3.11}$$

Si además se tiene que X e Y son independientes:

$$F_S(s) = \sum_{y \leq s} F_x(s-y) f_Y(y)$$

y la función de densidad está dada por:

$$f_S(s) = \sum_{y \leq s} f_x(s-y) f_Y(y) \tag{3.12}$$

Si se considera a X e Y variables continuas se tiene que la función de distribución y de densidad están dadas por:

$$F_S(s) \;\; = \int_0^s P(X \leq s - y \,|Y = y) f_Y(y)$$

y si además, X e Y son independientes:

$$F_S(s) = \int_0^s F_x(s-y) f_Y(y) dy \tag{3.13}$$

y la función de densidad está dada por:

$$f_S(s) = \int_0^s f_x(s-y) f_Y(y) dy \tag{3.14}$$

Las ecuaciones (3.11) y (3.13) son llamadas la convolución de las funciones de distribución $F_X(x)$ y $F_Y(y)$.

Para determinar la función de distribución de la suma de más de dos variables aleatorias se puede usar el proceso de convolución iterativamente.

Para $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ donde las X_i son variables aleatorias independientes, sea F_i la función de distribución de i, y sea $F^{(k)}$ la distribución de $X_1 + X_2 + ... + X_k$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} F^{(2)} &= F_2 \times F^{(1)} = F_2 \times F_1 \\ F^{(3)} &= F_3 \times F^{(2)} \\ F^{(4)} &= F_4 \times F^{(3)} \\ &\vdots \\ F^{(n)} &= F_n \times F^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Ejemplo 3.1 *Las variables aleatorias X_1, X_2, X_3 son independientes con funciones de densidad definidas de la siguiente forma:*

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0.4 & si\ x = 0 \\ 0.3 & si\ x = 1 \\ 0.2 & si\ x = 2 \\ 0.1 & si\ x = 3 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases},$$

$$f_{X_2}(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{si } x = 0 \\ 0.2 & \text{si } x = 1 \\ 0.1 & \text{si } x = 2, 3, 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases},$$

y

$$f_{X_3}(x) = \begin{cases} 0.6 & \text{si } x = 0 \\ 0.1 & \text{si } x = 2,3,4,5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Para calcular la función de densidad y de distribución de la variable aleatoria $S = X_1 + X_2 + X_3$, se utiliza (3.12) y (3.15), por lo que se obtiene que:

$$f^{(2)}(0) = f_1(0)f_2(0) = 0.4 \times 0.5 = .20$$

$$f^{(2)}(1) = f_1(1)f_2(0) + f_1(0)f_2(1) = 0.3 \times 0.5 + 0.4 \times 0.2 = 0.23$$

y así sucesivamente.

Análogamente se tiene que:

$$f_S(0) = f^{(3)}(0) = f_3(0)f^{(2)}(0) = 0.6 \times 0.20 = .120$$

$$f^{(3)}(1) = f^{(2)}(1)f_3(0) + f^{(2)}(0)f_3(1) = 0.23 \times 0.6 + 0.20 \times 0 = 0.138$$

Para encontrar la función de distribución de la variable aleatoria S, se utiliza (c) de la Definición 1.14. A continuación se presenta la tabla resumida de los cálculos efectuados:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$F_1(x)$	$F^{(2)}(x)$	$F^{(3)}(x)$
0	0.4	0.5	0.6	0.20	0.120	0.4	0.20	0.120
1	0.3	0.2	0.0	0.23	0.138	0.7	0.43	0.258
2	0.2	0.1	0.1	0.20	0.140	0.9	0.63	0.398
3	0.1	0.1	0.1	0.16	0.139	1	0.79	0.537
4	0	0.1	0.1	0.11	0.129	1	0.90	0.666
5	0	0	0.1	0.06	0.115	1	0.96	0.781
6	0	0	0	0.03	0.088	1	0.99	0.869
7	0	0	0	0.01	0.059	1	1	0.928
8	0	0	0	0	0.036	1	1	0.964
9	0	0	0	0	0.021	1	1	0.985
10	0	0	0	0	0.010	1	1	0.995
11	0	0	0	0	0.004	1	1	0.999
12	0	0	0	0	0.001	1	1	1

■

Un método alternativo para encontrar la distribución de la suma de variables aleatorias es a través de la función generadora de momentos o de la función característica. Utilizando la Proposición 1.30 se tiene que:

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)...M_{X_n}(t). \qquad (3.16)$$

3.4.3 Aproximación de la distribución de la suma

Otra alternativa para encontrar la distribución de la suma de variables aleatorias es a través del teorema del límite central. Antes de enunciarlo se dará una definición que es utilizada en el teorema.

Definición 3.1 *La sucesión $\{X_n\}$ converge a X en distribución si:*

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t)$$

para toda t, donde F_X es continua. Se denota:

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

■

Observación :

Si $X_1, ...X_n$ son variables aleatorias independientes tal que para toda i se cumple:

$$E[X_i] = \mu \quad y \quad Var[X_i] = \sigma^2$$

como,

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

se tiene

$$E[S] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$$

y

$$Var[S] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2.$$

Teorema 3.3 *Sean $X_1, ...X_n$ variables aleatorias independientes con:*

$$E[X_i] = \mu \quad y \quad Var[X_i] = \sigma^2$$

y

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

entonces:

$$\frac{S - E[S]}{\sqrt{Var[S]}} = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} Z$$

donde Z es una variable aleatoria con distribución normal $(0, 1)$.

Demostración.
(Ver Hoel;1971, página 212)

■

Ejemplo 3.2 *Una compañía de seguros expide contratos de vida con plazo de un año cuyo beneficio es de* 1 *y* 2 *unidades monetarias a individuos con probabilidades de morir de* 0.02 *o* 0.10. *La siguiente tabla muestra el número de individuos n_k en cada uno de las cuatro clases (k) creadas con un beneficio por la cantidad b_k, y una probabilidad de reclamación q_k*

k	q_k	b_k	n_k
1	0.02	1	500
2	0.02	2	500
3	0.10	1	300
4	0.10	2	500

La compañía desea recaudar, de esta población de 1,800 *individuos, una cantidad igual al* 95 *por ciento de la distribución de las reclamaciones totales. Más aún, desea que la participación de cada individuo sea proporcional a la reclamación esperada por ese individuo. La participación del individuo con media $E(X_j)$ sería $(1 + \theta)E(X_j)$. El requisito del* 95 *por ciento sugiere que $\theta > 0$. Esta cantidad extra $\theta E(X_j)$ es la* **carga de seguridad** *(security loading) y θ es la* **carga relativa de seguridad** *(relative security loading). Calcular θ.*

El criterio para calcular θ es $P(S \leq (1+\theta)E(S)) = 0.95$ en donde $S = X_1 + X_2 + ... + X_{1800}$ Lo cual es equivalente a obtener

$$P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{Var(S)}} \leq \frac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right) = 0.95$$

Utilizando el Teorema 3.3, se tiene que de la ecuación anterior se busca en las tablas de la $N(0,1)$ el cuantil que acumula 0.95 de probabilidad, obteniéndose:

$$\frac{\theta E(S)}{\sqrt{Var(S)}} = 1.645$$

por lo que

$$\theta = 1.645 \frac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$$

Ahora se necesita calcular $E(S)$ y $Var(S)$, para ello utilizando el Teorema 3.2 se obtiene que:

k	q_k	b_k	$\mu_k = b_k q_k$	$\sigma_k^2 = b_k^2 q_k(1-q_k)$	n_k
1	0.02	1	0.02	0.0196	500
2	0.02	2	0.04	0.0784	500
3	0.10	1	0.10	0.0900	500
4	0.10	2	0.20	0.3600	500

Por (a) del Teorema 1.11 y por la Observación que sigue al Teorema 1.21 se tiene que

$$E(S) = \sum_{i=1}^{1800} E[X_i] = \sum_{i=1}^{4} n_k \mu_k = 160$$

y

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{1800} Var[X_i] = \sum_{i=1}^{4} n_k \sigma_k^2 = 256$$

Por lo tanto se concluye que:

$$\theta = 1.645 \frac{\sqrt{256}}{160} = 0.1645$$

■

3.4.4 Distribuciones para el número y monto de reclamaciones

Enseguida se discutirán las distribuciones que se utilizan para la modelación del número y el monto de las reclamaciones individuales en una cartera de pólizas. Es importante destacar que no todos los accidentes se convierten en reclamaciones, ni que la cantidad de reclamaciones es siempre de la misma forma que la cantidad del daño. Una reclamación generalmente no será realizada a menos que el daño tenga un impacto lo suficientemente grande para hacerla importante.

El proceso de reclamación comienza con un accidente, pero el asegurador usualmente sabe acerca de éste cuando la reclamación se lleva a cabo. La mayoría de los aseguradores registran la cantidad de dinero para la cual son responsables y la cual pagan, en vez de registrar los importes del daño.

De aquí se desprende el por qué se modelan los números de reclamaciones, a distinción de los números de accidentes y los montos de reclamaciones, en vez de los importes de los daños.

Distribución del número de reclamaciones

Será de interés estudiar las distribuciones del número de reclamaciones por las siguientes razones:

1. Para obtener una comprensión mayor de la distribución de reclamaciones;
2. Para estimar el efecto de deducibles;
3. Para calcular el costo de reaseguro por exceso;
4. Para estimar el efecto en la solvencia de fluctuaciones aleatorias basadas en la experiencia de las reclamaciones.

Las dos distribuciones comúnmente utilizadas para la modelación del número de reclamaciones son la distribución Poisson (Definición 1.28) y la distribución binomial negativa (Definición 1.27).

La distribución Poisson tiene dos ventajas principales:

1. Existe un único parámetro, es decir, la media de las reclamaciones determina completamente las demás características de la distribución. De esta forma la distribución del número de reclamaciones puede ser proyectada rápida y fácilmente.

2. Es aditiva, es decir, si la distribución de cada riesgo en una cartera de pólizas es Poisson e independientes, entonces el número de reclamaciones en la cartera de pólizas es también una variable Poisson, con parámetros la suma de las medias.

Para que se logre modelar el número de reclamaciones mediante una variable aleatoria Poisson, se deben cumplir las siguientes condiciones:

1. Las reclamaciones son independientes, es decir, el número de reclamaciones en intervalos de tiempo disjuntos son independientes entre sí.

2. Sólo puede ocurrir una reclamación en un instante de tiempo, es decir, la probabilidad de que ocurran dos o más reclamaciones en un instante es casi cero.

3. La probabilidad de que una reclamación ocurra en un intervalo de tiempo depende de su duración y no del tiempo en que ocurrió, es decir, si dos intervalos disjuntos tienen la misma longitud, la probabilidad de que ocurra una reclamación será la misma.

Al considerar las dos primeras condiciones, se tiene que enfatizar la diferencia entre los acontecimientos y las reclamaciones. Un acontecimiento puede generar un número de reclamaciones y con el objeto de modelar una distribución Poisson, las reclamaciones múltiples que provienen de un acontecimiento deberán ser tratadas como una sola reclamación.

La mayoría de los acontecimientos son casos independientes. Las excepciones tienen una tendencia a ocurrir uno al lado del otro y pueden ser tratados como un sólo acontecimiento. Si los acontecimientos figuran así, entonces las primeras dos condiciones conservan su validez.

La tercera condición parece ser válida en un ambiente estacionario o cuando la experiencia está sujeta a las fluctuaciones estacionales, razonablemente estables a corto plazo.

Algunas veces sucede que la distribución Poisson no se ajusta muy bien. Esto es debido a que el número de reclamaciones no es realmente estacionario. En estos casos es conveniente utilizar la distribución Binomial Negativa.

La distribución binomial negativa también tiene propiedades preservantes útiles. La suma de n variables binomiales negativas independientes, cada una con parámetros p y k, es una variable binomial negativa, con parámetros p y nk.

La mayoría de las veces en las distintas ramas del seguro la varianza parece ser mayor que la media. En este caso, la distribución binomial negativa da un mejor ajuste. Cuando se trata del manejo de riesgos homogéneos, la distribución Poisson puede dar resultados satisfactorios.

Distribución del monto de reclamaciones

Debido a que el monto de las reclamaciones rara vez sigue formas sencillas, no existe una regla que sugiera un buen modelo con una sola distribución. Es cuestión de encontrar una distribución que proporcione un ajuste satisfactorio de acuerdo a la información obtenida.

Un problema principal que a menudo se presenta es que la mayoría de las veces se desea un buen ajuste en los valores más grandes, donde se tienen datos mínimos. Puede haber un grado justo de confianza acerca de la forma de la curva en la cola inferior pero la forma de la cola es usualmente más bien vaga porque hay relativamente pocas reclamaciones grandes. Además, la presencia o ausencia de una reclamación grande puede tener un impacto significativo en las estimaciones de los parámetros de la distribución, al punto de que se da una falsa impresión de lo que realmente está sucediendo en dicha región.

Cabe mencionar que el costo de una reclamación no siempre es conocido, y puede tomar muchos años conocerlo; de modo que al analizar la distribución del monto de reclamaciones en un periodo, no se puede lograr un buen ajuste. Por regla general, las pequeñas reclamaciones tienden a ser pagadas más pronto que las grandes. Esto puede introducir distorsión significativa, si el volumen general de reclamaciones no es constante. La mayoría de las distorsiones provienen de la mezcla de reclamaciones nuevas y antiguas debido a que puede cambiar el proceso de reclamación.

En las distribuciones del monto no existe un soporte fuertemente teórico para cualquier distribución particular de reclamación. La mayoría de las distribuciones no proporcionan un ajuste adecuado, posiblemente por las distorsiones que suceden al agruparse y por condiciones de la póliza como los excesos y las sumas máximas garantizadas. No obstante, dan una base para la cual el análisis formal puede comenzar.

Entre las características más notables de las distribuciones del monto de reclamación destacan las siguientes:

1. Son unilaterales, es decir, las reclamaciones negativas no existen.
2. Son altamente asimétricas, es decir, el monto de las reclamaciones tiende a acumularse en los lados de la distribución.
3. Tienen una tendencia a agruparse alrededor de los valores más comunes.

Las dos distribuciones comúnmente utilizadas para la modelación del monto de reclamaciones son la distribución lognormal y distribución Pareto que enseguida serán definidas.

Distribución Log-normal

Definición 3.2 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria absolutamente continua definida sobre dicho espacio. Se dice que X tiene una distribución* Log-normal *con parámetros $-\infty < \mu < \infty$ y $\sigma^2 > 0$ si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad 0 < x < \infty$$

■

La distribución log-normal es una transformación logarítmica de la distribución normal. Informa acerca del rango principal de los montos de las reclamaciones bastante bien, excepto porque tiene una tendencia a bajar rápidamente en los valores más grandes.

Distribución Pareto

Definición 3.3 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria continua definida sobre dicho espacio. Se dice que tiene una distribución* Pareto *con parámetros $\alpha > 0$ y $k > 0$, si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha k^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} & si\ x > k \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

■

La distribución Pareto surge al considerar la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor superior a una x determinada. Deberá ser notado, sin embargo, que esta distribución no da un ajuste satisfactorio sobre el rango entero de las dimensiones del monto de la reclamación, al encontrarse restringido por el parámetro k.

Es importante mencionar que existen otras distribuciones no tan comunes como las anteriores con las cuales se puede modelar el monto de las reclamaciones. A continuación se dará mencionarán algunas de ellas.

La distribución gamma (Definición 1.32) tiene buena flexibilidad, sobre el rango de los montos, pero análogo a la log-normal, tiene una tendencia a ser demasiado ligera en la cola.

Una distribución con una cola más pesada puede ser obtenida por una transformación logarítmica. Al igual que con la log-normal, la distribución log-gamma es un buen modelo para ajustar la distribución correspondiente de la gamma para los logaritmos de los montos de reclamación.

Distribución Log-gamma

Definición 3.4 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria continua definida sobre Ω, que toma valores en un intervalo $(1, \infty)$. Se dice que tiene una distribución* Log-gamma *con parámetros $s, \lambda > 0$, si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda \ln x)^{s-1}\lambda}{\Gamma(s)x^{s}} & x > 1 \\ 0 & e.o.c. \end{cases}$$

y $\Gamma(s)$ es la función Gamma.

■

Distribución Weibull

Definición 3.5 *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un espacio de probabilidad y* X *una variable aleatoria continua definida sobre* Ω, *que toma valores en un intervalo* $(0, \infty)$. *Se dice que tiene una distribución* Weibull *con parámetros* $\alpha, \theta > 0$. *Si su función de densidad está dada por:*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \exp(-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}) & x > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

■

Las distribuciones Weibull y la exponencial (Definición 1.30), también tienen el problema de tener colas ligeras, pero la ventaja es que tienen expresiones simples y fáciles de manipular, para obtener algunas de sus características de interés.

3.5 Modelos de riesgo colectivo para un periodo

Para el modelo de riesgo colectivo se supone un proceso aleatorio que genera reclamaciones para un portafolio de pólizas.

Sea S la variable aleatoria que denota la suma del monto de las reclamaciones:

$$S_N = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

donde X_i son variables aleatorias mutuamente independientes e idénticamente distribuidas que denotan el monto de la reclamación i y N es la variable aleatoria mutuamente independiente de las X_i que denota el número de reclamaciones producidas en un portafolio de pólizas en un periodo de tiempo dado.

3.5.1 Distribución de la suma del monto de las reclamaciones

Sea $f_X(x)$ la función de densidad de las X_i, con k-ésimo momento alrededor del origen y función generadora de momentos dados.

Utilizando el Teorema 1.24 se tiene que:

$$E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = E\left[E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,|N = n\right]\right];$$

pero

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,|N = n\right] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= nE\left[X_i\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Y así,

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] &= E[NE\left[X_i\right]] \\ &= E[N]E[X_i], \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$E[S_N] = E[N]\mu_1 \tag{3.18}$$

donde el valor esperado de la suma del monto de reclamaciones es el producto del valor esperado del monto de reclamaciones individuales y del valor esperado del número de reclamaciones.

Calculando la varianza se tiene que:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = Var\left(E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i \,|N = n\right]\right) + E\left[Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,|N = n\right)\right]. \tag{3.19}$$

Como son independientes:

$$Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \,|N = n\right) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \\
&= nVar(X_i).
\end{aligned}
$$

Sustituyendo lo anterior y (3.17) en (3.19) se obtiene que:

$$Var(S) = \mu_1^2 Var[N] + E[N](VarX) \tag{3.20}$$

El significado del resultado anterior es que la varianza de la suma del monto de las reclamaciones es la suma de la variabilidad de los montos individuales de las reclamaciones más la variabilidad del número de las reclamaciones.

Calculando la función generadora de momentos de S se tiene:

$$M_S(t) = E[e^{tS}] \quad = E[E[e^{tS}|N = n]]$$

Como X_i y N son independientes:

$$E[e^{tS}|N = n] = E\left[e^{\left(\sum_{i=1}^{n} tX_i\right)}\right]$$

y como las X_i son independientes:

$$
\begin{aligned}
E\left[e^{\left(\sum_{i=1}^{n} tX_i\right)}\right] &= \prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}] \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\
&= (M_X(t))^n
\end{aligned}
$$

lo cual implica que:

$$M_S(t) = E[M_X^N(t)],$$

como:

$$
\begin{aligned}
E[M_X^N(t)] &= E[e^{\log M_X^N(t)}] \\
&= E[e^{N \log M_X(t)}] \\
&= M_N[\log(M_X(t))]
\end{aligned}
$$

entonces:

$$M_S(t) = M_N[\log(M_X(t))]. \tag{3.21}$$

Para calcular la función de distribución de S se ocupará la fórmula de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} F_S(x) &= P(S \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leq x \,|N = n)P(N = n) \end{aligned}$$

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[P(X_1 + X_2 + ... + Xn \leq x]P(N = n)$$

ocupando la convolución se tiene:

$$P(X_1 + X_2 + ... + Xn \leq x) = F \times F \times F \times ... \times F(x) = F^{(n)}(x).$$

Se observa que $F^{(n)}(x)$ es la n-ésima convolución de F, por lo tanto:

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(x)P(N = n)$$

Si las X_i tiene una distribución discreta con función de densidad:

$$f_X(x) = P(X = x)$$

entonces la distribución del monto total de las reclamaciones es también discreta y la función de distribución está dada por:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = x \,|N = n)P(N = n)$$

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}[P(X_1 + X_2 + ... + Xn = x]P(N = n),$$

y por la fórmula de convolución se tiene que:

$$P(X_1 + X_2 + ... + Xn = x) = f \times f \times f \times ... \times f(x) = f^{(n)}(x).$$

Se observa que $f^{*n}(x)$ es la n-ésima convolución de f, por lo tanto:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x) P(N = n).$$

Si la variable aleatoria X que denota el monto de las reclamaciones tiene una distribución continua, entonces no se puede concluir que S, la variable aleatoria que denota la suma del monto de las reclamaciones, sea también continua; pero si $P(N = 0) > 0$, es decir, la probabilidad de que no haya ninguna reclamación es mayor que cero, S tiene una distribución mixta, esto es, tendrá una función de densidad en cero y será continua en otra parte (tendrá un punto de acumulación en cero).

3.5.2 La distribución del número de reclamaciones

Distribución Poisson

A continuación se dará una definición; tomada de Aldous (1989), que servirá de base para una posible selección de la distribución del monto de reclamaciones.

Definición 3.6 *Sea v una medida positiva en $(0, \infty)$ tal que:*

$$\int_0^{\infty} \min(1, x)\, v(dx) < \infty,$$

donde una medida debe satisfacer (a) y (c) de la Definición 1.6. Se dice que W tiene la distribución **Poisson compuesta** *si*

$$E\left[e^{-\theta W}\right] = e^{-\int_0^{\infty}\left(1-e^{-\theta x}\right)v(dx)},$$

para toda $\theta > 0$. Se denota por $W \sim POIS(v)$.

■

Observación.

De acuerdo a la definición anterior si Y tiene la distribución Poisson (λ), entonces Y tiene la distribución $POIS(\lambda\delta_i)$, donde δ_i es la medida de probabilidad degenerada en i, o sea,

$$\begin{aligned}\delta_i(A) &= \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A \\ 0 & \text{si } i \notin A \end{cases} \\ &= I_A(i).\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3 *Si X_i son variables aletorias independientes e idénticamente distribuidas μ (μ es una medida de probabilidad en $(0,\infty)$) y si N es una variable aleatoria, independiente de las X_i, con distribución Poisson (λ) entonces $\sum_{i=1}^{N} X_i$ tiene distribución $POIS(\lambda\mu)$.*

Para comprobar lo anterior, considere primero

$$E\left[e^{-\theta\sum_{i=1}^{N} X_i}\right] = E\left[E\left[e^{-\theta\sum_{i=1}^{N} X_i}|N\right]\right]$$

pero como las X_i son independientes e idénticamente distribuidas se tiene:

$$\begin{aligned} E\left[E\left[e^{-\theta\sum_{i=1}^{N} X_i}|N\right]\right] &= E\left[E\left[e^{-\theta\sum_{i=1}^{N} X_i}\right]\right] \\ &= E\left[\prod_{i=1}^{N} E\left[e^{-\theta X_i}\right]\right] \\ &= E\left[(M_X(-\theta))^N\right] \\ &= E\left[e^{N\ln M_X(-\theta)}\right] \\ &= M_N\left(\ln M_X(-\theta)\right)\end{aligned}$$

y debido a que $N \sim Poisson(\lambda)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} M_N\left(\ln M_X(-\theta)\right) &= e^{\lambda\left(e^{\ln M_X(-\theta)}-1\right)} \\ &= e^{\lambda(M_X(-\theta)-1)}\end{aligned}$$

por lo tanto:

$$E\left[e^{-\theta\sum_{i=1}^{N}X_i}\right]=e^{\lambda(M_X(-\theta)-1)}.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
e^{-\int_0^\infty(1-e^{-\theta x})\lambda\mu(dx)} &= e^{-\lambda\int_0^\infty(1-e^{-\theta x})\mu(dx)}\\
&= e^{-\lambda\left(\int_0^\infty\mu(dx)-\int_0^\infty e^{-\theta x}\mu(dx)\right)}\\
&= e^{-\lambda(1-M_X(-\theta))}\\
&= e^{\lambda(M_X(-\theta)-1)}
\end{aligned}$$

por lo que

$$e^{-\int_0^\infty(1-e^{-\theta x})\lambda\mu(dx)}=E\left[e^{-\theta\sum_{i=1}^{N}X_i}\right];$$

y así, se demuestra que $\sum_{i=1}^{N}X_i$ *se distribuye Poisson compuesta.*

■

Observación.

Si N es una variable aleatoria que se distribuye Poisson (λ) y $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, entonces el monto de reclamaciones S tiene una distribución Poisson compuesta.

Ocupando (3.18) y (3.20) se tiene:

$$\begin{aligned}
E[S] &= \mu_1 E[N]\\
&= \mu_1\lambda
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(S) &= \mu_1^2\lambda+\lambda(\mu_2-\mu_1^2)\\
&= \mu_1^2\lambda+\lambda\mu_2-\lambda\mu_1^2\\
&= \lambda\mu_2.
\end{aligned}$$

Como la función generadora de momentos de una Poisson es:

$$M_N(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

y por (3.21) se tiene:

$$\begin{aligned} M_S(t) &= e^{\lambda(e^{\log(M_X(t))}-1)} \\ &= e^{\lambda(M_X(t)-1)}. \end{aligned}$$

Si se supone que el parámetro de la distribución Poisson, Λ, es una variable aleatoria con función de densidad $U(\lambda)$, $\lambda > 0$ y se considera la distribución condicional de N dado $\Lambda = \lambda$, se distribuye Poisson con parámetro λ, entonces ocupando la fórmula de la probabilidad total para conocer la distribución de N se tiene :

$$\begin{aligned} P[N &= n] = \int_0^\infty P[N = n \,|\Lambda = \lambda]U(\lambda)d\,\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} U(\lambda)d\,\lambda. \end{aligned}$$

Además como $N\,|\Lambda$ tiene la distribución $Poisson(\Lambda)$, entonces

$$E[N\,|\Lambda] = Var[N\,|\Lambda] = \Lambda$$

y así,

$$\begin{aligned} E[N] &= E(E[N\,|\Lambda]) \\ &= E[\Lambda], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var(N) &= Var(E[N\,|\Lambda]) + E(Var[N\,|\Lambda]) \\ &= Var[\Lambda] + E[\Lambda]. \end{aligned}$$

La función generadora de momentos está dada por :

$$\begin{aligned} M_N(t) &= E[e^{tN}) \\ &= E(E[e^{tN}\,|\Lambda]) \\ &= M_\Lambda(e^t-1). \end{aligned}$$

Distribución Binomial Negativa

En el caso de que en la distribución del número de reclamaciones, la varianza exceda su media se recomienda usar la distribución binomial negativa (Definición 1.27). Para encontrar la función de densidad de la variable aleatoria X se tiene que de acuerdo a la Definición 1.45 se puede escribir de la siguiente forma:

$$P(X = r \,|N = n) = \frac{P(X = r, N = n)}{P(N = n)}$$

de donde

$$P(X = r, N = n) = P(X = r \,|N = n)P(N = n).$$

De aquí se sigue que la distribución de X, siendo N aleatoria, obtenida como distribución marginal a partir de la distribución conjunta es:

$$\begin{aligned} P(X = r) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = r, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X = r \,|N = n)P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} P(N = n). \end{aligned}$$

La función generadora de momentos de esta densidad, media y varianza están dadas por:

$$M_N(t) = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^r$$

$$E(N) = \frac{rq}{p} \qquad\qquad Var(N) = \frac{rq}{p^2}$$

Como N es una distribución binomial negativa entonces S tiene una distribución binomial negativa compuesta, es decir, el parámetro de S es también una variable aleatoria.

Utilizando la ecuación 3.21 la función generadora de momentos está dada por:

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \left(\frac{p}{1-qe^{\log(M_x(t))}}\right)^r \\
&= \frac{p}{(1-qM_x(t))^r}
\end{aligned}$$

Ocupando (3.18) y (3.20) se tiene que:

$$\begin{aligned}
E[S] &= \mu_1\ E[N] \\
&= \mu_1\frac{rq}{p},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
Var(S) &= \mu_1^2 Var[N] + E[N](\mu_2-\mu_1^2) \\
&= \mu_1^2\frac{rq}{p^2} + \frac{rq}{p}(\mu_2-\mu_1^2) \\
&= \frac{rq}{p}\mu_2 + \frac{rq^2\mu_1^2}{p^2}.
\end{aligned}$$

3.5.3 Distribución del monto individual de reclamaciones

Como la función de densidad de la suma de los montos es calculada a través de convoluciones, generalmente se recomienda escoger una variable aleatoria de montos individuales cuyas convoluciones sean fáciles de calcular; de igual manera el monto de reclamaciones es positivo, por lo que se debe seleccionar una variable aleatoria que tome valores positivos. Una distribución apropiada para esta situación es la distribución Gamma.

Sea $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, entonces, la n-ésima convolución de X es una variable aleatoria Gamma $(n\alpha, \beta)$, ya que:

$$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

y utilizando (3.16) se tiene que:

$$M_S(t) = M_X^{(n)}(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha n}$$

El siguiente teorema aproxima una variable aleatoria Gamma a través de variables aleatorias binomiales negativas.

Teorema 3.4 *Si las variables aleatorias S_k con $k = 0, 1, \ldots$ tienen una distribución binomial negativa compuesta con parámetros r, $p(k)$ y función de densidad $f_X(x)$ para el monto de reclamaciones, y si los parámetros de la distribución binomial negativa son tales que:*

$$\frac{q(k)}{p(k)} = k\frac{q}{p}$$

para $k = 0, 1, \ldots$, donde $q = 1 - p$ es una constante, entonces cuando $k \rightarrow \infty$ se tiene que:

$$\frac{S_k}{E(S_k)} \sim gamma(r, r)$$

Demostración.
(Ver Bowers 1997, página 391)

■

3.6 Ejercicios resueltos

1.— La paradoja de San Petesburgo: considere un juego al azar el cual consiste en tirar una moneda honesta hasta que salga águila. La probabilidad de obtener un águila es 0.5 y los eventos son independientes. Sea N la variable aleatoria que denota el número de evento en el que se obtiene la primera águila. Su función de densidad está dada por:

$$f_N(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(a) Encuentre $E(N)$ y $Var(N)$.

(b) Si se paga una recompensa de $X = 2^N$, pruebe que la esperanza de la recompensa no existe.

(c) Si esta recompensa tiene una función de utilidad $u(w) = \log w$, encuentre $E[u(X)]$.

Solución :

(a) Calculando la esperanza se obtiene que:

$$\begin{aligned} E[N] &= \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2 \end{aligned}$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} E[N^2] &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} Var[N] &= E[N^2] - (E[N])^2 \\ &= 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

(b) Calculando la esperanza de X se tiene que:

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \infty$$

de donde se concluye que la esperanza de la recompensa no existe.

(c) Utilizando el Teorema 1.10 se sigue que

$$\begin{aligned} E[u(X)] &= E[\log X] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \log 2^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log 2}{2^n} \\ &= \log 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \\ &= 2 \log 2 \end{aligned}$$

2.—Si una función de utilidad es tal que $u'(w) > 0$ y $u''(w) > 0$. Demostrar que $G \leq \mu$, es decir, cuando la prima que el propietario pagará por asegurarse es menor que la pérdida promedio si decide asumir el riesgo. Si esto sucede, entonces, se dice que un tomador de decisiones con preferencias consistentes a esta función de utilidad, es amante al riesgo.

Solución :

Aplicando (b) de la Proposición 3.1 a

$$u(w - G) = E[u(w - X)],$$

se tiene que

$$E[u(w - X)] \geqslant u[E(w - X)] = u[E(w) - E(X)] \geqslant u(w - \mu),$$

es decir

$$u(w - G) \geqslant u(w - \mu).$$

Como $u'(w) > 0$ entonces $u(w)$ es creciente, por lo que

$$(w - G) \geqslant (w - \mu)$$

sumando $-w$ a ambos lados de la desigualdad se tiene que

$$-G \geqslant -\mu,$$

por lo tanto se demuestra que:

$$G \leq \mu.$$

3.— Un administrador tiene una función de utilidad $u(w) = k \log w$. Tiene un monto de riqueza $w, w > 1$, y enfrenta una pérdida aleatoria X que tiene una distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Demostrar que la prima máxima de seguro que pagará es:

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}.$$

Solución :

Utilizando el Teorema 1.10 se tiene que,

$$\begin{aligned} E[u(w-X)] &= \int_0^1 k \log(w-x)dx \\ &= -k\left[\log(w-1)^{w-1} - \log(w^w) + 1\right]. \end{aligned}$$

Ahora, por (3.1) se sigue que,

$$\begin{aligned} k\log(w-G) &= -k\left[\log(w-1)^{w-1} - \log(w^w) + 1\right] \\ w - G &= e^{-\log(w-1)^{w-1}} e^{\log(w^w)-1}, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} w - G &= e^{\left[\log(w-1)^{w-1}\right]^{-1}} e^{\log(w^w)} e^{-1} \\ w - G &= \left[(w-1)^{w-1}\right]^{-1} w^w e^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la prima máxima de seguro que pagará es:

$$G = w - \frac{w^w}{e(w-1)^{w-1}}.$$

4.—La probabilidad de que una propiedad no sea dañada en el siguiente periodo es 0.75. La función de densidad de una pérdida positiva está dada por:

$$f_X(x) = 0.25(0.01e^{-0.01x}), \qquad x > 0$$

El dueño de la propiedad tiene una función dada por:

$$u(w) = -e^{-\frac{w}{150}}$$

Calcular la pérdida esperada y la prima de seguro máxima que el dueño de la propiedad pagará.

Solución :

La pérdida esperada está dada por:

$$E(X) = .75(0) + .25 \int_0^\infty x \left(0.01e^{-0.01x}\right) dx = 25$$

La prima de seguro máxima que el dueño de la propiedad pagará se calcula utilizando (3.1), por lo que se tiene

$$\begin{aligned}
u(w-G) &= .75u(w) + \int_0^\infty u(w-x) f_X(x) dx \\
e^{-\frac{1}{150}(w-G)} &= .75\left(-e^{-\frac{w}{150}}\right) + \int_0^\infty -e^{-\frac{w-x}{150}} 0.25(0.01e^{-0.01x}) \; dx \\
e^{\frac{G}{150}} &= .75 + (.25)(.01) \int_0^\infty e^{\frac{x}{150}} e^{-.01x} dx \\
&= .75 + (.25)(.01) \int_0^\infty e^{-\left(.01 - \frac{1}{150}\right)} dx \\
&= \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

entonces

$$e^{\frac{G}{150}} = \frac{3}{2},$$

por lo tanto

$$G = 150\ln(\frac{3}{2})$$

5.—Obtener la media y la varianza de la variable aleatoria de reclamaciones X en donde $q = 0.05$ y la variable aleatoria de reclamaciones B está distribuida uniformemente entre 0 y 20.

Solución :

Se sabe que $B \sim U(0,20)$, por lo que utilizando el Teorema 3.2 se tiene que:

$$\mu = E(B\,|I = 1) = 10$$

y

$$\sigma^2 = var\,(B\,|I = 1) = \frac{100}{3},$$

entonces se obtiene que

$$E\,(X) = (10)(0.05) = \frac{1}{2}$$

y

$$Var\,(X) = (10)^2(0.05)(1 - .05) + (\frac{100}{3})(0.05) = 6.41$$

6.—La probabilidad de un incendio en una cierta estructura en un tiempo determinado es 0.02. Si ocurre un incendio, el daño a la estructura está distribuido uniformente en el intervalo de 0 a su valor total a. Calcular la media y la varianza del daño del incendio a la estructura dentro del periodo de tiempo.

Solución :

Sean X e I las variables aleatorias que denotan el daño y la ocurrencia del incendio respectivamente. Entonces por hipótesis se tiene que $X \sim U(0,a)$ y $P\,[I = 1] = 0.02$ entonces por el Teorema 2.21 se tiene que:

$$\mu = E(B\,|I = 1) = \frac{a}{2}$$

y

$$\sigma^2 = var\,(B\,|I=1) = \frac{a^2}{12},$$

por lo tanto, se obtiene que

$$\begin{aligned} E\,[X] &= \frac{a}{2}(0.02) \\ &= 0.01a \\ &= \frac{a}{100}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var(X) &= \left(\frac{a}{100}\right)^2 (0.02)(.98) + \frac{a^2}{12}(0.02) \\ &= 1.66\,(10^{-3})\,a^2 \end{aligned}$$

7.—La variable aleatoria U tiene la siguiente función generadora de momentos:

$$M_U(t) = (1-2t)^{-9} \qquad t < \frac{1}{2}$$

(a) Usar la función generadora de momentos para calcular la media y la varianza de U.

(b) Usar la aproximación normal para calcular los valores $y_{0.05}$ y $y_{0.01}$ tal que $P(U > y_\epsilon) = \epsilon$.

Solución :

(a) Calculando la primera y segunda derivada de la función generadora de momentos de U se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}M_U(t) &= 18(1-2t)^{-10} \\ \frac{d^2}{dt^2}M_U(t) &= 360(1-2t)^{-11} \quad . \end{aligned}$$

Por la observación de la Definición 1.21 se tiene que:

$$\begin{aligned} E\,[X] &= \left.\frac{d}{dt}M_U(t)\right|_{t=0} = 18 \\ E\left[X^2\right] &= \left.\frac{d^2}{dt^2}M_U(t)\right|_{t=0} = 360, \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} E[X] &= 18 \\ Var[X] &= E[X] - E^2[X] = 36. \end{aligned}$$

(b) Utilizando el Teorema 3.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P[U > y_\varepsilon] \\ &= 1 - P[U \leq y_\varepsilon] \\ &= 1 - P\left[\frac{U-18}{6} \leq \frac{y_\varepsilon - 18}{6}\right] \end{aligned}$$

es decir:

$$P\left[\frac{U-18}{6} \leq \frac{y_\varepsilon - 18}{6}\right] = 1 - \varepsilon,$$

y como $\frac{U-18}{6} \sim N(0,1)$, se busca en las tablas normales al número y_ε que satisfaga la relación anterior.

caso 1)

Si $\varepsilon = 0.01$, entonces se tiene que $\frac{y_{0.01}-18}{6} = 2.326$, por lo tanto $y_{0.01} = 31.956$

caso 2)

Si $\varepsilon = 0.05$, entonces se tiene que $\frac{y_{0.05}-18}{6} = 1.645$, por lo tanto $y_{0.05} = 27.87$

8.—Considere un portafolio de 32 pólizas. Para cada póliza la probabilidad q de reclamación es $\frac{1}{6}$ y B el monto del beneficio dado si ocurre la reclamación tiene función de densidad dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea S el total de reclamaciones del portafolio. Usar la aproximación normal para estimar $P(S > 4)$.

Solución :

Calculando la esperanza y la varianza de Y se tiene que:

$$E(Y) = \int_0^1 2y(1-y)dy = \frac{1}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^1 2y^2(1-y)dy = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - [E(Y)]^2 \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Del Teorema 3.2 se sigue que

$$\begin{aligned} E(S) &= \sum_{k=1}^{32} y_k q_k \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{32} y_k \\ &= 32 * \frac{1}{6} * \frac{1}{3} = \frac{32}{18}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var(S) &= \sum_{k=1}^{32} \left[y_k^2 q_k (1-q_k) + \sigma_k^2 q_k \right] \\ &= \sum_{k=1}^{32} \left[\frac{1}{9} * \frac{1}{6} * \frac{5}{6} + \frac{1}{18} * \frac{1}{6} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{32} \frac{2}{81} = \frac{64}{81} \end{aligned}$$

Se necesita

$$P(S > 4) = 1 - P(S \leq 4),$$

y así, por el Teorema 3.3 se obtiene que:

$$\begin{aligned} 1 - P\left[Z \leq \frac{4 - \frac{32}{18}}{\sqrt{\frac{64}{81}}}\right] &= 1 - P[Z \leq 2.5] \\ &= 1 - .9938 = .00\,62 \end{aligned}$$

9.—Suponga que N se distribuye binomial con parámetros n y p. Expresar lo siguiente en términos de n, p, p_1, p_2 y $M_X(t)$.

(a) $E(S)$

(b) $Var(S)$

(c) $M_S(t)$

Solución :

(a) Por el Teorema 3.2 se tiene que:

$$\begin{aligned} E(S) &= \mu_1 E(N) \\ &= p_1 np, \end{aligned}$$

(b) y

$$\begin{aligned} Var(S) &= \mu_1^2 Var(N) + E(N)\left[\mu_2 - \mu_1^2\right] \\ &= p_1^2 npq + np\left[p_2 - p_1^2\right] \\ &= npp_2 - np_1^2 p^2 \end{aligned}$$

(c) Como N se distribuye binomial, su función generadora de momentos está dada por

$$M_N[t] = (pe^t + q)^n,$$

y utilizando (3.21) se obtiene que

$$M_N[\log M_X(t)] = (pe^{\log M_X(t)} + q)^n = (pM_X(t) + q)^n.$$

10.—

(a) Verificar que:

$$\frac{d^3}{dt^3}\log M_X(t)\,|_{t=0} = E\left[(X - E[X])^3\right]$$

(b) Usar (a) para demostrar que si S se distribuye gamma con parámetros α y β,entonces:

$$E\left[(S - E[S])^3\right] = \frac{2\alpha}{\beta^3}$$

Solución :

(a) Por 1.6 se tiene que:

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(M_X(t)) = \frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)M_X(t) - \left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2}{(M_X(t))^2},$$

por lo que,

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3}\log(M_X(t))\,|_{t=0} &= \frac{d^3}{dt^3}\left[\frac{\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)M_X(t) - \left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2}{(M_X(t))^2}\right] \\
&= \left[\left(\frac{d^3}{dt^3}M_X(t)\right)M_X(t) + \left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)\right. \\
&\quad \left. -2\left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)\left(\frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\right)\right]\frac{(M_X(t))}{(M_X(t))^4} \\
&\quad - \frac{\left(\left[M_X(t)\frac{d^2}{dt^2}M_X(t) - \left(\frac{d}{dt}M_X(t)\right)^2\right]2M_X(t)\frac{d}{dt}M_X(t)\right)}{(M_X(t))^4}.
\end{aligned}$$

Ocupando la observación del Teorema 1.21 se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{dt^3}\log(M_X(t))\,|_{t=0} &= E\left[X^3\right] + E[X]\,E\left[X^2\right] \\
&\quad -2E[X]\,E\left[X^2\right] - \left(E\left[X^2\right] - E^2[X]\right)2E[X] \\
&= E\left[X^3\right] - 3E\left[X^2\right]E[X] + 2E^3[X].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por otro lado:

$$E\left[(X-E[X])^3\right]=E\left[X^3-3X^2E[X]+3XE^2[X]-E^3[X]\right],$$

utilizando (b) del Teorema 1.11 se tiene que:

$$\begin{aligned} E\left[(X-E[X])^3\right] &= E\left[X^3\right]-3E[X]E\left[X^2\right] \\ &\quad +3E^2[X]E[X]-E^3[X] \\ &= E\left[X^3\right]-3E[X]E\left[X^2\right]+2E^3[X], \end{aligned} \tag{3.23}$$

por lo tanto de (3.22) y (3.23) se demuestra que:

$$\frac{d^3}{dt^3}\log(M_X(t))\,|_{t=0}=E\left[(X-E[X])^3\right].$$

(b) Como S se distribuye gamma con parámetros α y β,entonces su función generadora de momentos está dada por:

$$M_S(s)=\left(\frac{\beta}{\beta-s}\right)^{\alpha}$$

por lo que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\log(M_s(s)) &= \alpha\frac{d}{ds}\left(\log\frac{\beta}{\beta-s}\right)|_{s=0} \\ &= \frac{\alpha}{\beta-s}. \end{aligned}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\log(M_S(s))=\frac{\alpha}{(\beta-s)^2}.$$

$$\frac{d^3}{ds^3}\log(M_S(s))\,|_{s=0}=\frac{2\alpha}{(\beta-s)^3}\,|_{s=0}=\frac{2\alpha}{\beta^3}.$$

y así, utilizando (a) de este ejercicio se demuestra que:

$$E\left[(S-E[S])^3\right]=\frac{2\alpha}{\beta^3}.$$

Capítulo 4

Introducción a la teoría del riesgo

4.1 Introducción

La vida moderna se caracteriza por diferentes clases de riesgo: algunos afectan a todas las personas; algunos se restringen a los dueños de una propiedad, carros, etc.; mientras que otros son típicos para algunos individuos o para algunas ocupaciones especiales. Los accidentes correspondientes, pérdidas o reclamaciones ocurrirán súbita e inesperadamente pudiendo involucrar pérdidas financieras considerables. De lo anterior se puede notar que en cualquier actividad humana se encuentra presente el riesgo, el cuantificarlo de manera adecuada, así como la necesidad de evitar o remediar pérdidas financieras, ha propiciado el desarrollo de la ciencia actuarial, en particular de la rama conocida como teoría del riesgo.

En la práctica, sin embargo, se puede identificar a la teoría del riesgo como una aplicación de la teoría de la probabilidad a problemas de riesgo en los seguros. Lo que se conoce como probabilidad de ruina, se usa en las empresas del sector asegurador, principalmente por las entidades reguladoras, para medir el riesgo de incumplimiento financiero. Aunque también puede aplicarse para medir otros riesgos; por ejemplo, el riesgo de que una presa se quede sin agua.

La teoría del riesgo actuarial, se ha desarrollado durante el último siglo, basándose para su desarrollo matemático en la teoría de los procesos estocásticos, específicamente en los procesos Poisson para analizar los modelos de seguro no-vida.

El propósito de este capítulo es presentar modelos matemáticos para la variación de los excedentes del monto de los aseguradoras sobre un periodo de tiempo. Por excedente se entenderá el exceso del fondo inicial y primas cobradas sobre las reclamaciones pagadas.

Definición 4.1 *Sea $S(t)$ el proceso estocástico que denota el total de reclamaciones pagadas al tiempo t, u es el excedente en reserva al tiempo 0 y $c(t)$ denota las primas cobradas al tiempo t. Se define el proceso estocástico excedente al tiempo t denotado por $\{U(t) : t \geq 0\}$ como:*

$$U(t) = u + c(t) - S(t)$$

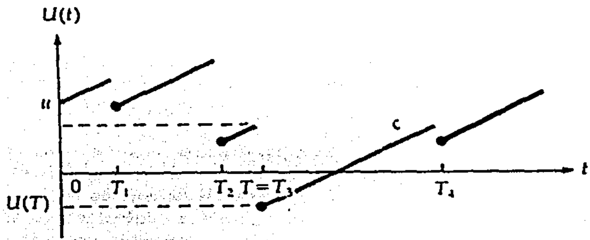
∎

Cabe mencionar que $c(t)$ no es un proceso estocástico, sino determinista, por lo que se supondrá que $c(t) = ct$, con $c > 0$. En ocasiones es útil considerar que $c = (1+\theta)\mu$, con $E(W_i) = \mu$ para toda i, donde W_i es el monto de la reclamación para el periodo i; esto es con el fin de prevenir posibles pérdidas que llevarán a la aseguradora a tener insolvencia económica en el pago de siniestros.

De esta forma se puede observar que el excedente se incrementa linealmente con pendiente c, excepto cuando una reclamación ocurre. En este tiempo el excedente tiene un cambio dado por la cantidad de la reclamación, como puede ser observado en la gráfica 4.1, es decir, si el excedente en reserva u al tiempo 0, se ve aumentado o disminuido por un monto h, entonces la gráfica del excedente $U(t)$ caerá h unidades arriba o debajo del nivel anterior.

La siguiente gráfica muestra que el excedente puede llegar a tomar valores negativos en ciertos periodos de tiempo, lo que estaría diciendo que las primas cobradas al tiempo t y el excedente inicial al tiempo 0 son menores que el total del monto de reclamaciones. Se estará hablando del concepto de ruina, cuando el excedente sea negativo para algunos valores de t.

Resultado típico del proceso excedente a tiempo continuo



(4.1)

Las ideas anteriores son útiles para desarrollar una medida de riesgo financiero de una compañía aseguradora a través del cálculo de la probabilidad de ruina, para ello se dará primero la definición de tiempo de ruina.

Definición 4.2 *Se define el **tiempo de ruina** como:*

$$T = \min\{t : t \geq 0 \ y \ U(t) < 0\}$$

y si $U(t) \geq 0$ para toda t, entonces $T = \infty$.

■

Definición 4.3 *Se define la función **probabilidad de ruina** como:*

$$\psi(u) = P(T < \infty)$$

considerada como una función del excedente inicial u.

■

Debido a que en la práctica la utilidad de un modelo es requerida en un periodo de tiempo, este modelo está limitado a un horizonte realista de planeación en un periodo finito, es decir, se desea saber la probabilidad de ruina antes del tiempo t, la cuál está dada por:

$$\psi(u,t) = P(T < t)$$

Sin embargo, el análisis se hará para la probabilidad de ruina sobre un horizonte infinito $\psi(u)$, ya que sus cálculos son más sencillos y ésta es una cota superior para $\psi(u,t)$.

La probabilidad de ruina, con base en ese modelo, permite conocer la existencia de alguno de los riesgos involucrados. También es importante mencionar que los efectos de interés, gastos, dividendos, y el porcentaje según historial no son incluidos. No obstante, estos modelos proporcionan una manera de analizar el proceso de riesgo. En la práctica, serán complementados por análisis adicionales.

En muchos casos, la suposición de que los montos totales de reclamaciones en periodos diferentes son variables aleatorias independientes puede ser poco realista. Por lo que se considerará un modelo autorregresivo para los montos del asegurador, tomando en cuenta la correlación entre las reclamaciones de periodos sucesivos.

4.2 Modelo autorregresivo

Definición 4.4 *Sean W_i variables aleatorias que denotan el total del monto de las reclamaciones en el periodo i, $i = 1, 2, ..$ se define el modelo autorregresivo de primer orden para las W_i como:*

$$W_i = Y_i + aW_{i-1}$$

donde $|a| < 1$ y las Y_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tal que $E[Y_i] < (1-a)c$ con $c = (1+\theta)\mu$. Se supone que $W_0 = \omega$.

■

Definición 4.5 *Sea W_i el modelo autorregresivo definido anteriormente, S_n el proceso estocástico que denota el total de reclamaciones pagadas para los primeros n periodos, u es el excedente inicial y c denota las primas constantes cobradas en cada periodo. Se define el proceso estocástico* ***excedente en el periodo n****, denotado por $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ como:*

$$U_n = u + nc - S_n$$

■

Definición 4.6 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto: $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, definido anteriormente, entonces se define el* ***tiempo de ruina*** *como:*

$$\widetilde{T} = \min \{n : \ U_n < 0\}$$

y si $U_n \geq 0$ para toda n, entonces $\widetilde{T} = \infty$.

■

Definición 4.7 *Sea $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ el proceso estocástico excedente en el periodo n y W_i el modelo autorregresivo de la Definición 4.4. Entonces se define la función probabilidad de ruina considerada una función del excedente inicial u como:*

$$\widetilde{\psi}(u) = P(\widetilde{T} < \infty)$$

■

Proposición 4.1 *Sea W_i el modelo autorregresivo y S_n el proceso estocástico que denota el total de las reclamaciones pagadas para los primeros n periodos, entonces:*

(a) $W_i = Y_i + aY_{i-1} + ... + a^{i-1}Y_1 + a^i\omega$

(b) $S_n = Y_n + \frac{1-a^2}{1-a}Y_{n-1} + ... + \frac{1-a^n}{1-a}Y_1 + a\frac{1-a^n}{1-a}\omega$

Demostración.

(a) Por la Definición 4.4 se tiene que:

$$\begin{aligned} W_i &= Y_i + aW_{i-1}, \\ W_{i-1} &= Y_{i-1} + aW_{i-2}, \\ W_{i-2} &= Y_{i-2} + aW_{i-3}, ...; \end{aligned}$$

sustituyendo W_{i-1} en W_i se tiene

$$\begin{aligned} W_i &= Y_i + a\,(Y_{i-1} + aW_{i-2}) \\ &= Y_i + aY_{i-1} + a^2 W_{i-2}. \end{aligned}$$

Ahora sustituyendo W_{i-2} en la expresión anterior

$$W_i = Y_i + aY_{i-1} + a^2 Y_{i-2} + a^3 W_{i-3}.$$

Sustituyendo nuevamente W_{i-3} en la expresión anterior, y así sucesivamente, se tiene que:

$$W_i = Y_i + aY_{i-1} + a^2 Y_{i-2} + a^3 Y_{i-3} + ... + a^{i-1} W_1$$

pero

$$W_1 = Y_1 + aW_0,$$

por lo que

$$\begin{aligned} W_i &= Y_i + aY_{i-1} + a^2 Y_{i-2} + a^3 Y_{i-3} + ... + a^{i-1}(Y_1 + aW_0) \\ &= Y_i + aY_{i-1} + a^2 Y_{i-2} + a^3 Y_{i-3} + ... + a^{i-1} Y_1 + a^i W_0; \end{aligned}$$

y como $W_0 = \omega$, se concluye que:

$$W_i = Y_i + aY_{i-1} + a^2 Y_{i-2} + a^3 Y_{i-3} + ... + a^{i-1} Y_1 + a^i \omega.$$

(b) Como

$$S_n = W_1 + ... + W_n$$

por el inciso anterior se tiene que:

$$S_n = (Y_1 + a\omega) + (Y_2 + aY_1 + a^2\omega) + (Y_3 + aY_2 + a^2 Y_1 + a^3\omega)$$

$$+ ... + (Y_n + aY_{n-1} + a^2Y_{n-2} + a^3Y_{n-3} + ... + a^{n-1}Y_1 + a^n\omega)$$

$$= Y_n + (1+a)Y_{n-1} + ... + (1 + a + ... + a^{n-1})Y_1 + \sum_{i=1}^{n} a^i\omega.$$

Ocupando la serie geométrica se obtiene:

$$S_n = Y_n + \frac{1-a^2}{1-a}Y_{n-1} + ... + \frac{1-a^n}{1-a}Y_1 + a\frac{1-a^n}{1-a}\omega.$$

■

La proposición anterior establece que en el modelo autorregresivo la variable aleatoria Y_i contribuye en $\frac{Y_i}{1-a}$ al total de reclamaciones.

A continuación se definirá el coeficiente de ajuste para el caso del modelo autorregresivo. Esta definición es importante ya que más adelante servirá para dar una expresión aproximada a la probabilidad de ruina.

Definición 4.8 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$. *Se define el* ***coeficiente de ajuste*** *denotado por* $\widetilde{R}$ *del modelo autorregresivo como la solución mínima positiva (si existe) de la siguiente ecuación:*

$$M_{\left(\frac{Y_1}{1-a}-c\right)}(r) = 1,$$

donde M *denota la función generadora de momentos de la variable aleatoria* $\left(\frac{Y_1}{1-a} - c\right)$.

■

Proposición 4.2 *El coeficiente de ajuste* $\widetilde{R}$ *en el modelo autorregresivo puede ser calculado de la siguiente forma:*

$$\log E\left[\exp\left(\frac{\widetilde{R}Y}{1-a}\right)\right] = \widetilde{R}c$$

Demostración.
De la Definición 4.8 se tiene que:

$$1 = M_{\left(\frac{Y_i}{1-a}-c\right)}(r) = E\left[e^{r\left(\frac{Y_i}{1-a}-c\right)}\right] = E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}-rc}\right] = E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}}e^{-rc}\right].$$

Como e^{-rc} es una constante por el (*b*) del Teorema 1.11

$$1 = E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}}\right]E(e^{-rc}) = E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}}\right]e^{-rc}.$$

Aplicando la función logaritmo

$$0 = \log\left(E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}}\right]e^{-rc}\right) = \log(e^{-rc}) + \log\left(E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}}\right]\right)$$

de donde,

$$\log\left(E\left[e^{r\frac{Y_i}{1-a}}\right]\right) = rc$$

y si $r = \widetilde{R}$ se demuestra que:

$$\log\left[E\left(\exp\left[\frac{\widetilde{R}Y}{1-a}\right]\right)\right] = \widetilde{R}c.$$

■

Es importante hacer notar que $\widetilde{R}$ depende de la distribución de las Y_i y de los valores de a y c.

Teorema 4.3 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$ *entonces la probabilidad de ruina en el modelo autorregresivo cumple:*

$$\widetilde{\psi}(u,\omega) = \frac{\exp(-\widetilde{R}\widehat{u})}{E[\exp(-\widetilde{R}\widehat{U}_{\widetilde{T}}\,\big|\,\widetilde{T} < \infty)]}$$

donde:

$$\widehat{U}_n = U_n - \frac{a}{1-a}W_n \quad y \quad \widehat{u} = \widehat{U}_0$$

Demostración.
(Ver Bowers et al, 1997; página 425)

■

Corolario 4.4 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, *definido en el modelo autorregresivo, entonces la probabilidad de ruina en el modelo autorregresivo con* $0 \leq a < 1$ *cumple:*

$$\widetilde{\psi}(u) \leq \exp(-\widetilde{R}\widehat{u})$$

Demostración.
Primero se demostrará que:

$$\widehat{U}_n < U_n.$$

Debido a que

$$0 \leq a < 1$$

entonces se cumplen las siguientes desigualdades:

$$-1 < -a \leq 0$$

si y sólo si

$$0 < 1 - a \leq 1$$

si y sólo si

$$\frac{1}{1-a} \geq 1$$

si y sólo si

$$\frac{a}{1-a} \geq 0.$$

Y como

$$W_n \geq 0,$$

entonces se satisface que

$$\frac{a}{1-a} W_n \geq 0$$

si y sólo si

$$-\frac{a}{1-a} W_n < 0$$

si y sólo si

$$U_n - \frac{a}{1-a}W_n < U_n$$

y por el Teorema 4.3 se demuestra que:

$$\widehat{U}_n < U_n.$$

Por la desigualdad anterior y debido a que:

$$\widetilde{R} > 0$$

se tiene que

$$\widetilde{R}\widehat{U}_n < \widetilde{R}U_n,$$

de donde,

$$-\widetilde{R}\widehat{U}_n > -\widetilde{R}U_n > 0$$

y por lo tanto,

$$e^{-\widetilde{R}\widehat{U}_n} > e^{-\widetilde{R}U_n} > 1.$$

Utilizando (c) del Teorema 1.11

$$E\left[e^{-\widetilde{R}\widehat{U}_n}\right] > E\left[e^{-\widetilde{R}U_n}\right]$$

si y sólo si

$$\frac{1}{E\left[e^{-\widetilde{R}\widehat{U}_n}\right]} < \frac{1}{E\left[e^{-\widetilde{R}U_n}\right]}$$

si y sólo si

$$\frac{e^{-\widetilde{R}\widehat{u}}}{E\left[e^{-\widetilde{R}\widehat{U}_n}\right]} < \frac{e^{-\widetilde{R}\widehat{u}}}{E\left[e^{-\widetilde{R}U_n}\right]},$$

por lo que se concluye que:

$$\widetilde{\psi}(u,\omega) \leq \exp(-\widetilde{R}\widehat{u}).$$

■

Después de haber visto el modelo autorregresivo se procederá al análisis del caso en el que se supone que las variables aleatorias que denotan el monto de reclamación son independientes e idénticamente distribuidas.

4.3 Modelos con montos de reclamación independientes

En esta sección, se discutirán los modelos a tiempo discreto y a tiempo continuo.

4.3.1 Modelo a tiempo discreto

Definición 4.9 *Sea S_n el proceso estocástico que representa el total de reclamaciones pagadas para los n primeros periodos, u es el excedente inicial y c denota las primas constantes cobradas en cada periodo. Se define el proceso estocástico* ***excedente en el periodo*** n ***a tiempo discreto*** $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, *como*

$$U_n = u + nc - S_n$$

■

Proposición 4.5 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto:* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, *y sea:*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} W_i \tag{4.2}$$

donde S_n es el total de reclamaciones pagadas en el periodo n y W_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que denotan el total del monto de las reclamaciones del periodo i con $\mu = E[W_i] < c$, entonces:

$$U_n = u + (c - W_1) + ... + (c - W_n)$$

Demostración.
Utilizando la Definición 4.9 y sustituyendo (4.2) se tiene que

$$U_n = u + nc - \sum_{i=1}^{n} W_i,$$

por lo tanto, reagrupando los términos se demuestra que:

$$U_n = u + (c - W_1) + \dots + (c - W_n).$$

■

Definición 4.10 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, *se define el* ***tiempo de ruina*** *como:*

$$\widetilde{T} = \min\{n : \ U_n < 0\}$$

y si $U_n \geq 0$ *para toda* n, *entonces* $\widetilde{T} = \infty$.

■

Definición 4.11 *Se define la función* ***probabilidad de ruina*** *considerada una función del excedente inicial* u *como:*

$$\widetilde{\psi}(u) = P(\widetilde{T} < \infty)$$

■

La siguiente definición proporcionará más adelante una cota superior para la probabilidad de ruina.

Definición 4.12 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, *se define el* ***coeficiente de ajuste*** *denotado por* $\widetilde{R}$ *como la solución mínima positiva (si existe) de la siguiente ecuación:*

$$M_{W-c}(r) = 1$$

donde W *es una variable aleatoria que denota la distribución común de las variables aleatorias* W_i *y* M *es la función generadora de momentos de la variable aleatoria* $W - c$.

■

Proposición 4.6 *El coeficiente de ajuste $\widetilde{R}$ puede ser calculado de la siguiente forma:*

$$\log(M_W(r)) = rc$$

Demostración.

De la Definición 4.12 se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 &= M_{W-c}(r) \\ &= E\left[e^{rW}e^{-rc}\right], \end{aligned}$$

como e^{-rc} es una constante por (a) del Teorema 1.11 se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} 1 &= E\left[e^{rW}\right]E\left[e^{-rc}\right] \\ &= e^{-rc}M_W(r). \end{aligned}$$

Aplicando la función logaritmo a la expresión anterior

$$\begin{aligned} 0 &= \log(e^{-rc}M_W(r)) \\ &= \log(e^{-rc}) + \log(M_W(r)), \end{aligned}$$

y, por lo tanto:

$$\log(M_W(r)) = rc.$$

■

Teorema 4.7 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto $\{U_n : n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$, tal que:*

$$U_n = u + nc - \sum_{i=1}^{n} W_i$$

y W_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con $\mu = E\left[W_i\right] \leq c$ entonces para $u > 0$ se cumple:

$$\widetilde{\psi}(u) = \frac{\exp(-\widetilde{R}u)}{E[\exp(-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}}\,\big|\,\widetilde{T} < \infty)]}$$

Demostración.

Caso particular del Teorema 4.3, ya que en la Definición 4.4 el coeficiente $a = 0$.

■

Corolario 4.8 *Sea el proceso estocástico a tiempo discreto* $\{U_n : n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}\}$, *tal que:*

$$U_n = u + nc - \sum_{i=1}^{n} W_i$$

y W_i *son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con* $\mu = E[W_i] \leq c$ *entonces para* $u > 0$ *y* $U_{\widetilde{T}} < 0$ *se tiene:*

$$\widetilde{\psi}(u) < \exp(-\widetilde{R}u)$$

Demostración.

Por hipótesis

$$U_{\widetilde{T}} < 0\ ,$$

y por ser el coeficiente de ajuste se tiene que

$$\widetilde{R} > 0\ ,$$

por lo que

$$-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}} > 0$$

entonces,

$$\exp(-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}}) > 1.$$

Por (c) del Teorema 1.11

$$E[\exp(-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}} \left| \widetilde{T} < \infty)\right] > 1$$

y

$$\frac{1}{E[\exp(-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}} \left| \widetilde{T} < \infty)\right]} < 1$$

por lo que:

$$\frac{\exp(-\widetilde{R}u)}{E[\exp(-\widetilde{R}U_{\widetilde{T}} \,|\, \widetilde{T} < \infty)]} < \exp(-\widetilde{R}u).$$

Y así por el Teorema 4.7 se concluye que:

$$\widetilde{\psi}(u) < \exp(-\widetilde{R}u).$$

■

En la siguiente proposición se dará una aproximación al coeficiente de ajuste $\widetilde{R}$.

Proposición 4.9 *El coeficiente de ajuste $\widetilde{R}$ puede ser aproximado por:*

$$\widetilde{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2} d$$

donde $\mu = E(W)$ y $\sigma^2 = Var(W)$.

Demostración.
Utilizando la serie de Maclaurin:

$$log(M_W(r)) = \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{d^k}{dr^k} log(M_W(r))\,|_{r=0}\right)}{k!} r^k$$

$$= \left(\frac{d}{dr} log(M_W(r))\,|_{r=0}\right) r + \frac{\left(\frac{d^2}{dr^2} log(M_W(r))\,|_{r=0}\right)}{2!} r^2 + ...;$$

entonces por el Teorema 1.14

$$log(M_W(r)) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + ...$$

y por la Proposición 4.6 se tiene,

$$rc = log(M_W(r)) = \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 + ...$$

Se puede observar que

$$rc \cong \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2,$$

y por lo tanto:

$$\widetilde{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}.$$

■

Ejemplo 4.1 *La expresión para el coeficiente de ajuste en el caso especial de que las W_i tengan una distribución $N(\mu, \sigma^2)$ puede ser calculada de la siguiente forma:*

La función generadora de momentos de una $N(\mu, \sigma^2)$ está dada por

$$M_W(r) = e^{\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}},$$

de donde

$$\ln\left(M_W(r)\right) = \mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2}.$$

Utilizando el Teorema 4.6 se tiene que:

$$\mu r + \frac{\sigma^2 r^2}{2} = rc$$

y,

$$r\left[(\mu - c) + \frac{\sigma^2 r}{2}\right] = 0.$$

Despejando a r se concluye que:

$$\widetilde{R} = \frac{2\,(c-\mu)}{\sigma^2} \qquad \text{con } c > \mu.$$

De lo anterior se puede observar que cuando la distribución del monto de reclamación tiene una distribución normal el resultado del Teorema 4.6 se cumple exactamente.

■

4.3.2 Modelo a tiempo continuo

A continuación se formulará el modelo de ruina usando dos procesos estocásticos, el proceso estocástico que denota el número de reclamaciones y el proceso estocástico que denota el total de reclamaciones. Modelando el primero por un proceso Poisson y el segundo por un proceso Poisson compuesto.

Definición 4.13 *Para un portafolio de seguros, se definen los siguientes procesos estocásticos:* $\{N(t) : t \geq 0\}$ *y* $\{S(t) : t \geq 0\}$, *donde* $N(t)$ *denota el número de reclamaciones y* $S(t)$ *el total de las reclamaciones al tiempo* t *, tal que:*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

donde X_i *es el monto de la reclamación* i.

■

Es importante mencionar que $N(0) = 0$, además que $S(t) = 0$ siempre y cuando $N(t) = 0$, es decir si no existen reclamaciones al tiempo t, tampoco habrá monto de reclamación en dicho periodo.

De la definición anterior se puede observar que para $t \geq 0$ y $h > 0$ el proceso $N(t+h) - N(t)$ es el número de reclamaciones y $S(t+h) - S(t)$ es el monto de reclamaciones que ocurrieron durante el intervalo $[t, t+h]$.

Definición 4.14 *Sea la variable aleatoria* T_i *que denota el tiempo en que ocurre la reclamación* i, *se define la variable aleatoria* ***tiempo entre eventos*** *como:*

$$V_i = T_i - T_{i-1}$$

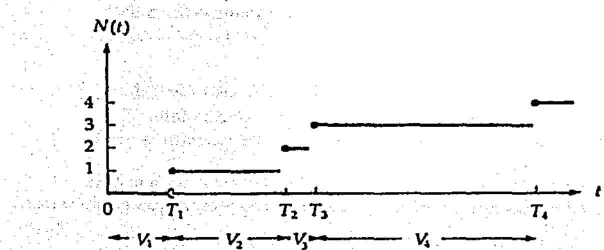
en el caso de que $i = 1$ *se tiene:*

$$V_1 = T_1$$

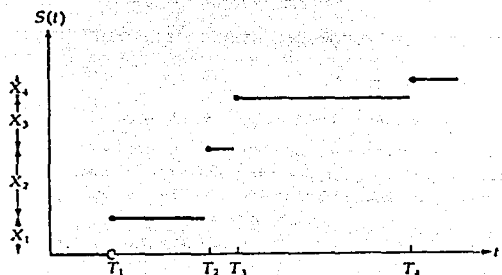
■

En las siguientes gráficas se pueden apreciar las relaciones entre $N(t)$ y $S(t)$, se observa que el incremento en uno afecta el incremento en el otro.

Resultado típico de un proceso número reclamaciones



Resultado típico de un proceso total de reclamaciones



El proceso número de reclamaciones se analizará mediante dos métodos los cuales son:

(a) El método global :
El cual consiste en especificar la distribución de la siguiente variable aleatoria $[(N(t+h)-N(t))\,|N(s)]$para todo $s \leq t$.

(b) El método discreto :
El cual consiste en especificar la distribución conjunta de los tiempos entre eventos $V_1, V_2, ...$ o equivalentemente la de $T_1, T_2, ...$

Se utilizará el proceso Poisson donde los tiempos transcurridos entre reclamaciones son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Definición 4.15 *La definición del método global de un proceso Poisson es como sigue:*

$$P\,[N(t+h)-N(t)=k\,|N(s) \text{ con } s \leq t] = \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^k}{k!} \text{ para } k=0,1,...$$

y satisface las siguientes propiedades:

(a) Tiene incrementos estacionarios, es decir, la distribución de:

$$N(t+h)-N(t)$$

depende de la longitud del intervalo y no de la localización de t.

(b) Para algún conjunto de intervalos disjuntos $\{t_1, t_2, ..., t_n\}$, los incrementos del proceso $t_i, t_{i+h}, ...$ son variables aleatorias independientes, es decir para toda i, las variables aleatorias $N(t_i+h_i)-N(t_i)$ son independientes.

(c) La probabilidad de reclamaciones simultáneas es cero, es decir:

$$\lim_{h\to 0} \frac{P[N(t+h)-N(t)>1]}{h} = 0$$

■

Definición 4.16 *La definición del método discreto de un proceso Poisson se puede hacer bajo el supuesto de que el tiempo transcurrido entre reclamaciones $V_1, V_2, ...$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cuya distribución es exponencial con parámetro λ.*

■

Proposición 4.10 *Los métodos global y discreto del proceso Poisson son equivalentes.*

Demostración.

Primero se demostrará que el método global implica el método discreto.
Utilizando (b) de la Definición 4.15 se tiene que:

$$P(V_{i+1} > h \,|V_1, ..., V_i) = P\left[V_{i+1} > h \,\middle|\, N(s) \text{ para } s \leq t = \sum_{j=1}^{i} V_j\right],$$

es decir, la ocurrencia de los tiempos entre eventos $\{V_1, ..., V_i\}$ es análogo al número de eventos ocurridos al tiempo t_i. Por la Definición 4.15 se llega a que

$$\begin{aligned} P(V_{i+1} &> h\,|V_1, ..., V_i) = P\,[N(t+h) - N(t) = 0\,|N(s), \text{ para } s \leq t] \\ &= \frac{e^{-\lambda h}(\lambda h)^0}{0!} \\ &= e^{-\lambda h}, \end{aligned}$$

Además la última expresión es la función de supervivencia en el proceso Poisson.

Utilizando (b) de la Proposición 1.8, se concluye que:

$$P(V_{i+1} \leq h\,|V_1, ..., V_i) = 1 - e^{-\lambda h}.$$

Ahora se demostrará que el método discreto implica el método global.

Se sabe que:

$$P\,[N(t+h) - N(t) = k\,|N(s), \text{ para } s \leq t] = P\,[T_k \leq h \text{ y } T_k + V_{k+1} > h]$$

donde:

$$T_k = V_1 + \ldots + V_k$$

y las V_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas exponenciales con parámetro k , T_k se distribuye gamma con parámetros λ y k.

Por lo que:

$$P\left[T_k \leq h \text{ y } T_k + V_{k+1} > h\right] = \int_0^h P\left[T_k + V_{k+1} > h \,|T_k = u\right] f_{T_k}(u)du$$

$$= \int_0^h P\left[V_{k+1} > h - u\right] f_{T_k}(u)du = \int_0^h e^{-\lambda(h-u)} \frac{\lambda^k u^{k-1} e^{-\lambda u}}{(k-1)!} du$$

$$= e^{-\lambda h} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^h u^{k-1} du = e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^k}{k!}$$

por lo tanto:

$$P\left[N(t+h) - N(t) = k \,|N(s), \text{ para } s \leq t\right] = e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^k}{k!}.$$

■

A continuación se definirá el proceso Poisson compuesto.

Definición 4.17 *Se define el proceso Poisson compuesto como:*

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

donde las X_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de densidad $f_X(x)$, siendo independientes del proceso Poisson $\{N(t) : t \geq 0\}$.

■

Observación.

Si el proceso de suma de montos de reclamaciones $\{S(t) : t \geq 0\}$ es un proceso Poisson compuesto con parámetro λ y función de densidad $f_X(x)$ de las variables aleatorias X_i dados, entonces $S(t)$ cumple las siguientes propiedades:

(a) Si $t \geq 0$ y $h > 0$, entonces la distribución de $S(t+h) - S(t)$ es Poisson compuesto con λh y $f_X(x)$ dadas, es decir:

$$P[S(t+h) - S(t) \leq x \,|S(s) \text{ para } s \leq t] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda h}(\lambda h)^k \frac{f_X^{(k)}(x)}{k!}$$

donde $f_X^{(k)}$ es la k-ésima convolución de $f_X(x)$.

(b) Para cualquier tiempo t, la probabilidad de que la siguiente reclamación ocurra entre $t + h$ y $t + h + dh$, y que el monto de reclamación sea menor o igual que x, es $e^{-\lambda h}(\lambda dh)\ f_X(x)$.

(c) El proceso $\{S(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes, es decir, la suma de reclamaciones para intervalos de tiempos disjuntos son variables aleatorias independientes y la distribución de cada uno depende solo de la longitud del correspondiente intervalo y no de su localización.

(d) Si para $S(t)$ con t fijo, $S(t)$ tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro Poisson λt, de las fórmulas dadas en las ecuaciones (3.18) y (3.20) se tiene que:

$$E(S(t)) = \lambda t \mu_1$$

y

$$Var(S(t)) = \lambda t \mu_2.$$

donde μ_1 y μ_2 son el primer y segundo momentos de la variable aleatoria X_i que denota el monto de reclamación en el periodo i.

El proceso estocástico de excedente $\{U(t) : t \geq 0\}$ puede ser estudiado por su relación con el proceso de reclamación $\{S(t) : t \geq 0\}$ el cual es un proceso Poisson compuesto. Con esta suposición se pueden desarrollar cotas superiores e inferiores para la probabilidad de ruina $\psi(u)$.

Se supondrá que las primas pagadas c exceden los valores esperados de la reclamación por unidad de tiempo, la cual es $\lambda \mu_1$.

Definición 4.18 *Se define la **carga relativa de seguridad** por la ecuación:*

$$c = (1 + \theta)\lambda\mu_1$$

con $\theta > 0$.

■

Se puede observar que si $\theta \leq 0$ entonces $\psi(u) = 1$, lo que significa que la ruina es certera.

A continuación se dará la definición análoga para el coeficiente de ajuste de la variable aleatoria $S(t) - ct$.

Definición 4.19 *Sea $t > 0$ tal que ct es el monto de las primas pagadas al tiempo t, y la distribución total del monto de reclamaciones $S(t)$ es una variable aleatoria Poisson compuesta con número esperado de reclamaciones λt. Se define el coeficiente de ajuste como la raíz positiva más pequeña de la ecuación:*

$$M_{S(t)-ct}(r) = 1$$

■

Proposición 4.11 *El coeficiente de ajuste $\widetilde{R}$ puede ser calculado de la siguiente forma:*

$$\lambda[M_X(r) - 1] = rc$$

donde X es la variable aleatoria que denota el monto de reclamación del proceso Poisson compuesto.

Demostración.
Por la Definición 4.19 se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &= M_{S(t)-ct}(r) \\ &= E\left[e^{r(S(t)-ct)}\right] \\ &= E\left[e^{rS(t)-rct}\right] \\ &= E\left[e^{rS(t)}e^{-rct}\right]. \end{aligned}$$

Como e^{-rct} es una constante por (a) del Teorema 1.11 se tiene

$$\begin{aligned} 1 &= E\left[e^{rS(t)}\right] E\left[e^{-rct}\right] \\ &= E\left[e^{rS(t)}\right] e^{-rct} \\ &= M_{S(t)}(r)e^{-rct}. \end{aligned}$$

Lo anterior es equivalente a

$$M_{S(t)}(r)e^{-rct} = e^{-\lambda t(M_X(r)-1)}e^{-rct},$$

y aplicando la función logaritmo:

$$0 = \log\left(e^{-\lambda t(M_X(r)-1)}e^{-rct}\right) = \log\left(e^{-\lambda t(M_X(r)-1)}\right) + \log\left(e^{-rct}\right);$$

por lo tanto:

$$\lambda(M_X(r) - 1) = rc.$$

■

Observación.

Si se sustituye $c = (1+\theta)\lambda\mu_1$ en el resultado anterior se tiene la siguiente equivalencia:

$$M_X(r) = (1+\theta)\mu_1 r + 1. \tag{4.3}$$

En general, el coeficiente de ajuste es una función creciente de la carga relativa de seguridad. Enseguida se dará un ejemplo para ilustrar la observación anterior.

Ejemplo 4.2 *El coeficiente de ajuste si la distribución del monto de reclamaciones tiene una distribución exponencial con parámetro $\beta > 0$ se obtiene de la siguiente manera. La función generadora de momentos de una exponencial esta dada por:*

$$M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r},$$

utilizando (4.3) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\beta - r} &= (1+\theta)\frac{1}{\beta}r + 1 \\
\beta - [\beta - r]\left[\frac{(1+\theta)\,r}{\beta} + 1\right] &= 0 \\
-\theta r + \frac{(1+\theta)\,r^2}{\beta} &= 0 \\
-\theta\beta r + (1+\theta)\,r^2 &= 0 \\
r\left[-\theta\beta + (1+\theta)\,r\right] &= 0,
\end{aligned}$$

de donde

$$-\theta\beta + (1+\theta)\,r = 0,$$

por lo tanto:

$$\widetilde{R} = \frac{\theta\beta}{(1+\theta)}$$

■

Teorema 4.12 *Sea $U(t)$ el proceso estocástico basado en que el proceso estocástico Poisson compuesto $S(t)$ que denota el total de reclamaciones con $c > \lambda\mu_1$, (es decir, la carga relativa de seguridad es positiva) entonces para $u \geq 0$ se cumple:*

$$\psi(u) = \frac{\exp(-Ru)}{E[\exp(-RU(T)\,|T < \infty)]}$$

donde R es el coeficiente de ajuste.

Demostración.
(Ver Bowers et al, 1997; página 426)

■

Corolario 4.13 *Sea $U(t)$ el proceso estocástico basado en que el proceso estocástico $S(t)$ que denota el total de reclamaciones y es Poisson compuesto con $c > \lambda\mu_1$, es decir la carga relativa de seguridad es positiva entonces para $u \geq 0$ se cumple:*

$$\psi(u) < \exp(-Ru)$$

donde R es el coeficiente de ajuste.

Demostración.
Si $T < \infty$ entonces
$$U(t) < 0$$
y
$$-U(t) > 0 \ .$$
Por ser el coeficiente de ajuste se tiene que
$$R > 0,$$
por lo que
$$-RU(t) > 0,$$
entonces
$$\exp(-RU(t)) > 1.$$
Por (c) del Teorema 1.11
$$E[\exp(-RU(t)\,|T < \infty)] > 1$$
y
$$\frac{1}{E[\exp(-RU(t)\,|T < \infty)]} < 1,$$
por lo que:
$$\frac{\exp(-Ru)}{E[\exp(-RU(t)\,|T < \infty)]} < \exp(-Ru).$$
Y así, por el Teorema 4.12 se concluye que:
$$\psi(u) < \exp(-Ru).$$
■

Proposición 4.14 *Sea X la variable aleatoria que denota el monto de reclamación, y $m \in \mathbb{R}$ tal que $F_X(m) = 1$. Dado $T < \infty$, se cumple que $U(t) > -m$ siempre y cuando el excedente poco antes de la reclamación haya sido positivo. Entonces se cumple que:*
$$\psi(u) \cong e^{-Ru}$$

Demostración.
Por hipotesis:

$$U(t) > -m$$

$$-U(t) < m$$

y por la Definición 4.3 se tiene que:

$$0 < -U(t) < m.$$

Debido a que $R > 0$ y por la Definición 4.19 se tiene:

$$0 < -RU(t) < Rm,$$

de donde,

$$1 < e^{-RU(t)} < e^{Rm}.$$

Por el (c) del Teorema 1.11 se obtiene que:

$$1 < E\left(e^{-RU(t)}\,|T < \infty\right) < e^{Rm},$$

de donde:

$$1 < \frac{1}{e^{Rm}} < \frac{1}{E\left(e^{-RU(t)}\,|T < \infty\right)}$$

y por lo tanto,

$$1 < \frac{e^{-Ru}}{e^{Rm}} < \frac{e^{-Ru}}{E\left(e^{-RU(t)}\,|T < \infty\right)}.$$

Por el Teorema 4.12 se tiene que:

$$1 < \frac{e^{-Ru}}{e^{Rm}} = e^{-R(u+m)} < \psi(u)$$

concluyéndose que:

$$e^{-R(u+m)} < \psi(u).$$

Y así, por el Corolario 4.13 se tiene que:

$$e^{-R(u+m)} < \psi(u) < e^{-Ru}.$$

Lo anterior sugiere que una buena aproximación de $\psi(u)$ es e^{-Ru}, ya que $e^{-Rm} \approx 0$ para m lo suficientemente grande, lo que demuestra la proposición. ■

Se seguirá trabajando con el modelo a tiempo continuo donde el proceso del monto total de reclamación $S(t)$, es Poisson compuesto.

4.4 Primer excedente debajo del nivel inicial

Se considerará el monto del excedente al tiempo cuando cae por primera vez debajo de su nivel inicial (lo cual nunca puede ocurrir). Como una aplicación, se encontrará una expresión simple para $\psi(0)$, la probabilidad de ruina, si el excedente inicial es 0.

El teorema principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 4.15 *Para un proceso Poisson compuesto la probabilidad de que el excedente caiga debajo de su nivel original u y que después se encuentre entre $(u-y)$ y $(u-y-dy)$ cuando esto pase por primera vez es:*

$$\frac{\lambda}{c}\left[1-F_X(y)\right]dy = \frac{1-F_X(y)}{(1+\theta)\mu_1}dy\ , \quad y>0$$

Demostración.
(Ver Bowers et al, 1997; página 427)

■

Como una aplicación del Teorema 4.15, se observa que la probabilidad de que el excedente caiga debajo de su nivel original es:

$$\frac{1}{(1+\theta)\mu_1}\int_0^{\infty}\left[1-F_X(y)\right]dy = \frac{1}{(1+\theta)}$$

ya que:

$$\int_0^{\infty}\left[1-F_X(y)\right]dy = \mu_1$$

En el caso especial de $u=0$, es decir, cuando se desea calcular la probabilidad de que el excedente caiga debajo de su nivel original 0, o de que la ruina ocurra, es

$$\psi(0) = \frac{1}{(1+\theta)} \tag{4.4}$$

Es notable que $\psi(0)$ sólo depende de la carga relativa de seguridad y no de la forma específica de la distribución del monto de reclamación.

Lema 4.16 *Sea L_1 una variable aleatoria que denota el monto de reclamación por la cual el excedente cae debajo de su nivel inicial por primera vez. La función de densidad para L_1 está dada por:*

$$f_{L_1}(y) = \frac{1 - F_X(y)}{\mu_1}, \quad y > 0$$

Demostración.
La función de densidad para L_1 es obtenida dividiendo:

$$\frac{1 - F_X(y)}{(1+\theta)\mu_1}$$

por

$$\psi(0) = \frac{1}{(1+\theta)},$$

esto es:

$$f_{L_1}(y) = \frac{1 - F_X(y)}{\mu_1}, \quad y > 0$$

■

El siguiente teorema muestra la relación entre la función generadora de momentos de L_1 y la función de distribución de la variable aleatoria X que denota el tamaño de las reclamaciones.

Teorema 4.17 *L_1 cumple la siguiente relación:*

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r}\left[M_X(r) - 1\right],$$

donde $M_X(r)$ denota la función generadora de momentos de la variable aleatoria X.

Demostración.
Utilizando la Definición 1.21 se tiene que:

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1}\int_0^\infty e^{ry}\left[1 - F_X(y)\right] dy,$$

e integrando por partes se obtiene:

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{e^{ry}}{r}\left[1 - F_X(y)\right]\Big|_0^\infty + \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{ry} f_X(y)dy\right].$$

Aplicando las propiedades de la función de distribución, se concluye que:

$$M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1 r}\left[M_X(r) - 1\right].$$

■

El consecuente ejemplo mostrará una aplicación del Lema 4.16.

Ejemplo 4.3 *Si la distribución del monto de reclamaciones es exponencial con parámetro β, la función de densidad de L_1 se calcula de la siguiente forma:*

la esperanza y la función de distribución de una variable aleatoria exponencial están dadas por:

$$E(X) = \frac{1}{\beta} \quad y \quad F_X(x) = 1 - e^{-\beta x}\ , \quad \textit{respectivamente.}$$

Por el Lema 4.16 se concluye que:

$$f_{L_1}(x) = \beta\left(e^{-\beta x}\right).$$

■

4.5 La máxima pérdida esperada

Definición 4.20 *Se define la variable aleatoria **máxima pérdida esperada** L, como:*

$$L = \max_{t \geq 0}\left\{S(t) - ct\right\}$$

es decir, es el máximo excedente de la suma de las reclamaciones sobre las primas recibidas.

■

Observación.

Si $S(t) - ct = 0$ para $t = 0$, entonces $L \geq 0$.

Teorema 4.18 *La función de distribución de L está dada por:*

$$F_L(u) = 1 - \psi(u)$$

Demostración.
Por la Definición 4.3 se sabe que

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P[T < \infty] \\ &= P[(\min\{t\,|U(t) < 0\,,\ \text{para toda } t \geq 0\}) < \infty]\,,\end{aligned}$$

lo anterior es equivalente a decir que:

$$\begin{aligned}1 - \psi(u) &= 1 - P[T > \infty] \\ &= P[U(t) \geq 0,\ \text{para toda } t]\,.\end{aligned}$$

Además por la Definición 4.1 se tiene que

$$\begin{aligned}1 - \psi(u) &= P[u + ct - S(t) \geq 0,\ \text{para toda } t] \\ &= P[S(t) - ct \leq u,\ \text{para toda } t]\,.\end{aligned}$$

El lado derecho de la última igualdad, debido a la Definición 4.20, es análogo a calcular $P(L \leq u)$, lo cual demuestra que:

$$1 - \psi(u) = P(L \leq u),\ u \geq 0.$$

■

Del teorema anterior se puede observar que el complemento de la probabilidad de ruina, puede ser interpretado como la función de densidad de la variable aleatoria L. En particular, se tiene

$$\begin{aligned}1 - \psi(0) &= P(L \leq 0) \\ &= P(L = 0),\end{aligned}$$

con $L \geq 0$. En este caso, la máxima pérdida esperada es lograda al tiempo $t = 0$.

El resultado principal de esta sección es la siguiente fórmula explícita para la función generadora de momentos de L, la cual puede usarse para obtener información acerca de $\psi(u)$.

Teorema 4.19 *Sea L la variable aleatoria que denota la máxima pérdida esperada. Entonces su función generadora de momentos está dada por:*

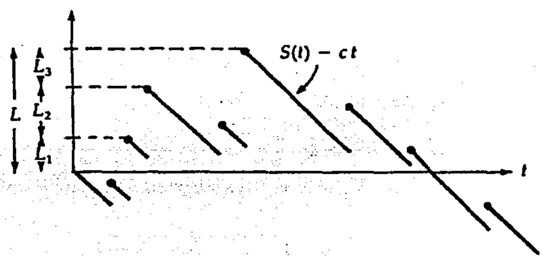
$$M_L(r) = \frac{\theta\mu_1 r}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)},$$

donde X es la variable aleatoria que denota el tamaño de las reclamaciones.

Demostración.

La demostración del teorema involucra la consideración de las veces que el proceso máxima pérdida esperada supone valores altos. Un resultado de este proceso se presenta en la siguiente gráfica:

Típico resultado del proceso máxima pérdida esperada



En este caso un nuevo resultado alto es establecido tres veces después de esto. Cada valor tiene probabilidad de $1 - \psi(0)$ de que no sobrepase los valores altos y una probabilidad de $\psi(0)$ de que será arruinado.

Si el resultado es sobrepasado la función de densidad del incremento de L puede ser representada como suma de un número aleatorio de variables aleatorias, es decir,

$$L = L_1 + L_2 + ... + L_N \tag{4.5}$$

donde L_i es la variable aleatoria que denota el monto de reclamación por la cual el excedente cae debajo de su nivel inicial por i-ésima vez.

Aquí la variable aleatoria N es el número de resultados máximos y tiene una distribución geométrica, con función de densidad dada por:

$$\begin{aligned} P[N = n] &= [1 - \psi(0)]\,[\psi(0)]^n \\ &= \theta\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{n+1}; \quad n = 0, 1, 2, .. \end{aligned}$$

y su función generadora de momentos:

$$M_N(r) = \frac{\theta}{1 + \theta - e^r}. \tag{4.6}$$

Las variable aleatorias $N, L_1, L_2, ...$ son mutuamente independientes y la función de densidad común de las L_i está dada en el Lema 4.16. De acuerdo a la ecuación 4.5 se tiene que la función generadora de momentos de L es:

$$\begin{aligned} M_L(r) &= M_N(\log M_{L_1}(r)) \\ &= \frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(r)} \end{aligned}$$

Además por el Teorema 4.17 se tiene que:

$$\frac{\theta}{1 + \theta - M_{L_1}(r)} = \frac{\theta}{1 + \theta - [1/\mu_1 r][M_X(r) - 1]};$$

lo anterior demuestra que:

$$M_L(r) = \frac{\theta \mu_1 r}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}.$$

■

Corolario 4.20 *Sea L la variable aleatoria que denota la máxima pérdida esperada. Entonces una expresión equivalente a la función generadora de momentos de L está dada por:*

$$M_L(r) = \frac{\theta}{(1+\theta)} + \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta\,[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}\right)$$

Demostración.
Se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\theta}{(1+\theta)} + \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta\,[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}\right) \\
= & \frac{\theta\,(1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)) + \theta\,[M_X(r)-1]}{(1+\theta)\,(1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r))}
\end{aligned}$$

por lo tanto se da la equivalencia:

$$\frac{\theta}{(1+\theta)} + \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta\,[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}\right) = \frac{\theta\mu_1 r}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r).}$$

■

Proposición 4.21 *Sea L la variable aleatoria que denota la máxima pérdida de reclamaciones, entonces:*

(a) Si $1-\psi(u)$ es la función de distribución de la variable aleatoria L la cual tiene un punto de acumulación en el origen y una función de densidad continua para los valores positivos de u, entonces se cumple que:

$$M_L(r) = 1-\psi(0) + \int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]du$$

(b) Se tiene que:

$$\int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]du = \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta\,[M_X(r)-1]}{1+(1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)}\right)$$

Demostración.

(a) Por tener un punto de acumulación en $u = 0$, se cumple lo siguiente

$$M_L(r) = e^{0r}P(L = 0) + \int_0^\infty e^{ur} f_L(u)du.$$

Por el Teorema 4.18 y (c) del Teorema 1.16 se tiene que

$$M_L(r) = 1 - \psi(0) + \int_0^\infty e^{ur} \frac{d}{du} (1 - \psi(u))\, du,$$

por lo que se concluye que

$$M_L(r) = 1 - \psi(0) + \int_0^\infty e^{ur} [-\psi'(u)]\, du$$

(b) Utilizando el inciso anterior y (4.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} M_L(r) &= 1 - \psi(0) + \int_0^\infty e^{ur} [-\psi'(u)]\, du \\ &= \frac{\theta}{1+\theta} + \int_0^\infty e^{ur} [-\psi'(u)]\, du. \end{aligned}$$

Y por el Corolario 4.20 se demuestra que:

$$\frac{1}{(1+\theta)} \left(\frac{\theta [M_X(r) - 1]}{1 + (1+\theta)\mu_1 r - M_X(r)} \right) = \int_0^\infty e^{ur} [-\psi'(u)]\, du$$

■

El resultado anterior es importante ya que puede ser utilizado para obtener una expresión para $\psi(u)$, para una familia de distribuciones especiales del monto de reclamaciones. Un ejemplo de dicha familia, es la mezcla de distribuciones exponenciales cuya función de densidad esta dada por:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_i x} \quad x > 0 \\ \beta_i &> 0, \quad A_i > 0 \text{ y } \sum_{i=1}^{n} A_i = 1. \end{aligned}$$

Para ello se necesita el siguiente teorema.

Teorema 4.22 *Sea X_i la variable aleatoria que denota el monto de reclamaciones, con función de densidad de la forma $f_X(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_i x} \quad x > 0$, entonces*

$$\int_0^{\infty} e^{ur} \left[-\psi'(u)\right] du = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i r_i}{r_i - r}.$$

con $C_i r_i \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Para demostrar este resultado se usará (*a*) de la Proposición 4.21, para ello es necesario calcular la función generadora de momentos del monto de reclamaciones, y para esto se tiene que:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{xt} f_X(x) dx \qquad (4.7) \\ &= \int_0^{\infty} e^{xt} \sum_{i=1}^{n} A_i \beta_i e^{-\beta_i x} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i \int_0^{\infty} e^{xt} \beta_i e^{-\beta_i x} dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{\beta_i}{\beta_i - t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo (4.7) en (a) de la Proposición 4.21 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{ur}\left[-\psi'(u)\right]du &= \frac{1}{(1+\theta)}\left(\frac{\theta\left[\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\frac{\beta_i}{\beta_i-r}-1\right]}{1+(1+\theta)\mu_1 r-\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\frac{\beta_i}{\beta_i-r}}\right) \\
&= \frac{1}{(1+\theta)}\frac{\theta\left[\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\beta_i\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(\beta_j-r)-\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)}\right]}{\dfrac{\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)+(1+\theta)\mu_1 r\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)-\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\beta_i\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(\beta_j-r)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)}}. \\
&= \frac{\theta}{(1+\theta)}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\beta_i\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(\beta_j-r)-\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)+(1+\theta)\mu_1 r\prod\limits_{j=1}^{n}(\beta_j-r)-\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\beta_i\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(\beta_j-r)}
\end{aligned}$$

Al desarrollar el numerador de la expresión anterior se obtiene un polinomio de grado n, al igual que en el denominador, por lo que esta expresión se puede descomponer en fracciones parciales obteniéndose de este modo que:

$$\int_0^{\infty} e^{ur}\left[-\psi'(u)\right]du = \sum_{i=1}^{n}\frac{C_i r_i}{r_i-r}$$

donde $r_1, ..., r_n$ son las raíces del polinomio del denominador.

■

Observación.
El resultado del teorema anterior se cumple si

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_i u},$$

por lo que esta expresión es la probabilidad de ruina.

4.6 Ejercicios resueltos

1.—Considere el monto de las reclamaciones en los periodos $n+1, n+2, ..., n+m$ y se denota el total por $S_{n,m}$; esto es,

$$S_{n,m} = W_{n+1} + W_{n+2} + ... + W_{n+m}.$$

El monto de reclamación para cada periodo es generado por el proceso estocástico descrito en el modelo autorregresivo. Demostrar lo siguiente:

(a)

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= \sum_{i=1}^{m} Y_{n+i} \sum_{j=0}^{m-i} a^j + W_n \sum_{j=1}^{m} a^j \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a} \right) Y_{n+i} + \left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a} \right) W_n. \end{aligned}$$

(b) Cuando $m \to \infty$ el término final del lado derecho de la expresión en (a) converge a

$$\frac{aW_n}{1-a},$$

siempre que $|a| < 1$.

(c)

$$\begin{aligned} & E\left[S_{n,m} | W_1 = w_1, W_2 = w_2, ..., W_n = w_n\right] \\ &= \left[\frac{m(1-a) - a + a^{m+1}}{(1-a)^2} \right] \mu + \left(\frac{a - a^{m+1}}{1-a} \right) w_n \end{aligned}$$

donde $E(Y_{n+i}) = \mu$.

Solución :

(a) Utilizando (b) de la Proposición 4.1 y sustituyendo $n+m$ en lugar de n se tiene que

$$S_{n,m} = Y_{n+m} + \frac{1-a^2}{1-a} Y_{n+m-1} + ... + \frac{1-a^m}{1-a} Y_{n+1} + a\frac{1-a^m}{1-a} W_n$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1-a^m}{1-a}Y_{n+1} + \ldots + \frac{1-a^2}{1-a}Y_{n+m-1} + Y_{n+m} + \frac{a-a^{m+1}}{1-a}W_n \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a}\right)Y_{n+i} + \left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a}\right)W_n. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Por otro lado, como

$$
\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a} = \sum_{j=1}^{m-i} a^j, \qquad (4.9)
$$

y

$$
\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a} = \sum_{j=1}^{m} a^j; \qquad (4.10)
$$

ahora, sustituyendo (4.9) y (4.10) en (4.8) se tiene demuestra que:

$$
\begin{aligned}
S_{n,m} &= \sum_{i=1}^{m} Y_{n+i}\sum_{j=0}^{m-i} a^j + W_n \sum_{j=1}^{m} a^j \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a}\right)Y_{n+i} + \left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a}\right)W_n.
\end{aligned}
$$

(b) Cuando $m \longrightarrow \infty$ en $\sum_{j=1}^{m} a^j W_n$ se tiene que:

$$
W_n \sum_{j=1}^{\infty} a^j = W_n\left(\frac{a}{1-a}\right)
$$

ya que $0 < a < 1$.

(c) Calculando la esperanza se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&E\left[S_{n,m} \,|\, W_1 = w_1, W_2 = w_2, \ldots, W_n = w_n\right] \\
&= E\left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a}\right)Y_{n+i} + \left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a}\right)w_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a}\right)E(Y_{n+i}) + \left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a}\right)w_n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1-a^{(m-i+1)}}{1-a}\right)\right]\mu+\left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a}\right)w_n \\
&= \left[\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{1-a}-\sum_{i=1}^{m}\frac{a^{(m-i+1)}}{1-a}\right]\mu+\left(\frac{a-a^{(m+1)}}{1-a}\right)w_n \\
&= \left[\frac{m(1-a)-a+a^{m+1}}{(1-a)^2}\right]\mu+\left(\frac{a-a^{m+1}}{1-a}\right)w_n.
\end{aligned}
$$

2.—Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso Poisson con parámetro λ y $p_n(t)$ está dada por $P\,[N(t) = n]$.

Demostrar que:

(a) $\frac{d}{dt}p_0(t) = -\lambda p_0(t)$,

(b) $\frac{d}{dt}p_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \qquad n \geq 1.$

Solución :

(a) Sea $P_n(t)$ la probabilidad de que en el tiempo t hayan ocurrido n eventos, entonces $P_0(t + \Delta t)$ es la probabilidad de que en el intervalo $(0, t + \Delta t)$ no ocurra ningun evento. Para que esto suceda tendría que pasar lo siguiente: que al tiempo t no haya ocurrido nada y al tiempo $t + \Delta t$ tampoco, es decir, en términos de probabilidad sería:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(t + \Delta t).$$

Por lo que de acuerdo a la Definición 1.64 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) &= P_0(t)\,(1-\lambda\Delta t) \\
&= P_0(t) - P_0(t)\lambda\Delta t,
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
P_0(t+\Delta t) - P_0(t) &= -P_0(t)\lambda\Delta t \\
\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= -P_0(t)\lambda \\
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} &= -P_0(t)\lambda.
\end{aligned}
$$

y así, se demuestra que

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -P_0(t)\lambda.$$

(b) Sea $P_n(t+\Delta t)$ la probabilidad de que en el intervalo $(0, t+\Delta t)$ hayan ocurrido n eventos, esto puede suceder de dos formas:

La primera de ellas es que existan n ocurrencias durante un tiempo t y ninguna hasta Δt, con probabilidad $1-\lambda\Delta t$. Dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:

$$P_n(t)\left(1-\lambda\Delta t\right).$$

La segunda es que que hayan $(n-1)$ ocurrencias al tiempo t, con probabilidad $p_{n-1}(t)$ y, una en Δt cuya probabilidad de acuerdo a la Definición 1.64 es $\lambda\Delta t$. Nuevamente, dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:

$$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)\left(1-\lambda\Delta t\right) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \\
&= P_n(t) - P_n(t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \\
P_n(t+\Delta t) - P_n(t) &= -P_n(t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \\
\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -P_n(t)\lambda + P_{n-1}(t)\lambda \\
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -P_n(t)\lambda + P_{n-1}(t)\lambda
\end{aligned}$$

y así lo anterior demuestra que:

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad n \geq 1.$$

y así, se demuestra que

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -P_0(t)\lambda.$$

(b) Sea $P_n(t + \Delta t)$ la probabilidad de que en el intervalo $(0, t + \Delta t)$ hayan ocurrido n eventos, esto puede suceder de dos formas:
La primera de ellas es que existan n ocurrencias durante un tiempo t y ninguna hasta Δt, con probabilidad $1 - \lambda\Delta t$. Dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:

$$P_n(t)\,(1 - \lambda\Delta t)\,.$$

La segunda es que que hayan $(n-1)$ ocurrencias al tiempo t, con probabilidad $p_{n-1}(t)$ y, una en Δt cuya probabilidad de acuerdo a la Definición 1.64 es $\lambda\Delta t$. Nuevamente, dada la suposición de independencia, la probabilidad conjunta es:

$$P_{n-1}(t)\lambda\Delta t.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
P_n(t+\Delta t) &= P_n(t)\,(1-\lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \\
&= P_n(t) - P_n(t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \\
P_n(t+\Delta t) - P_n(t) &= -P_n(t)\lambda\Delta t + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t \\
\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -P_n(t)\lambda + P_{n-1}(t)\lambda \\
\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P_n(t+\Delta t) - P_n(t)}{\Delta t} &= -P_n(t)\lambda + P_{n-1}(t)\lambda
\end{aligned}$$

y así lo anterior demuestra que:

$$\frac{d}{dt}P_n(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \qquad n \geq 1.$$

3.—Usar la siguiente desigualdad

$$e^{rx} > 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2 \qquad r > 0, x > 0$$

para demostrar que el coeficiente de ajuste para el Proceso Poisson compuesto cumple lo siguiente:

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}.$$

Solución :

Sean $g_1(x) = e^{rx}$ y $g_2(x) = 1 + rx + \frac{1}{2}(rx)^2$ funciones de variable real y sea X una variable aleatoria.Como

$$M_X(r) = E(e^{rX}),$$

por hipótesis y por (d) del Teorema 1.11 se sigue que

$$M_X(r) > E\left[1 + rX + \frac{1}{2}(rX)^2\right].$$

Por la observación de la Proposición 4.11 se tiene que

$$(1+\theta)\mu_1 r + 1 > 1 + r\mu_1 + \frac{1}{2}r^2\mu_2,$$

entonces

$$\theta\mu_1 r > \frac{1}{2}r^2\mu_2.$$

Como r es el coeficiente de ajuste por la Definición 4.19 se obtiene que $r > 0$, por lo que

$$\theta\mu_1 > \frac{1}{2}r\mu_2.$$

y así, se concluye que

$$R < \frac{2\theta\mu_1}{\mu_2}.$$

4.—Suponer que $\theta = \frac{2}{5}$ y

$$f_X(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x} \qquad x > 0,$$

calcular

(a) γ que es el mínimo valor (distinto de cero) para el cual la función generadora de momentos existe

(b) R para un proceso Poisson compuesto

Solución :

(a) Primero se calculará la función generadora de momentos de X, para ello se utiliza la Definición 1.21 es decir,

$$\begin{aligned} M_X(r) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{rx}\left(3e^{-3x} + 7e^{-7x}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{rx}3e^{-3x}dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{rx}7e^{-7x}dx. \end{aligned}$$

Debido a que $\int_0^\infty e^{rx}3e^{-3x}dx$ se puede ver como una función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución $exp(3)$ y análogamente $\int_0^\infty e^{rx}7e^{-7x}dx$ se distribuye $exp(7)$, se tiene que

$$M_X(r) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3-r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{7-r}\right).$$

Como γ es el mínimo valor para el cual la función generadora de momentos existe, se concluye que $\gamma = 3$.

(b) Para encontrar R se utilizará (4.3), antes de eso se calculará μ_1. Por la observación de la Definición 1.21 se tiene que:

$$\frac{d}{dt}M_X(r) = \frac{3}{2}\frac{1}{(3-r)^2} + \frac{7}{2}\frac{1}{(7-r)^2}$$

por lo que

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{7} = \frac{5}{21}.$$

Ahora, sustituyendo $M_X(r)$, μ_1 y θ en (4.3) se tiene que

$$1 + \left(1 + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{21}\right) r = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{3-r} + \frac{7}{7-r}\right],$$

$$6 + 2r = \frac{9}{3-r} + \frac{21}{7-r},$$

$$(6+2r)(3-r)(7-r) = 126 - 30r.$$

Resolviendo el polinomio

$$12r - 14r^2 + 2r^3 = 0$$

para r se obtiene que $\{r=0\}, \{r=6\}, \{r=1\}$ de donde se concluye que $R = 1$.

5.—Suponga que la distribución del monto de reclamación es discreto con $f_X(1) = \frac{1}{4}$ y $f_X(2) = \frac{3}{4}$. Si $R = \ln 2$, calcular θ.

Solución :

Por la Definición 1.21 se tiene que

$$M_X(r) = \sum_{x=1,2} e^{rx} f_X(x) = \frac{1}{4}e^r + \frac{3}{4}e^{2r}.$$

Calculando la primera derivada de $M_X(r)$ y haciendo $r = 0$ se obtiene que

$$\mu_1 = \frac{1}{4} + \frac{6}{4} = \frac{7}{4}.$$

Sustituyendo $M_X(r)$ y μ_1 en (4.3) se tiene que

$$\frac{1}{4}e^r + \frac{3}{4}e^{2r} = (1+\theta)\frac{7}{4}r + 1,$$

como $R = \ln 2 = r$ se sigue que

$$\frac{1}{4}e^{\ln 2} + \frac{3}{4}e^{2\ln 2} = (1+\theta)\frac{7}{4}\ln 2 + 1$$

entonces,

$$\frac{5}{2} = (1+\theta)\frac{7}{4}\ln 2,$$

despejando θ se concluye que

$$\theta = \frac{10}{7\ln 2} - 1.$$

6.—Sustituir

$$M_X(r) = 1 + \mu_1 r + \mu_2\frac{r^2}{2} + \mu_3\frac{r^3}{6} + \ldots$$

en $M_{L_1}(r)$ para calcular

(a) $E(L_1)$
(b) $E(L_1^2)$
(c) $Var(L_1)$.

Solución :
Sustituyendo $M_X(r)$ en el Teorema 4.17 se tiene que

$$\begin{aligned} M_{L_1}(r) &= \frac{1}{\mu_1 r}\left[1 + \mu_1 r + \mu_2\frac{r^2}{2} + \mu_3\frac{r^3}{6} + \ldots - 1\right] \\ &= \frac{1}{\mu_1 r}\left[\mu_1 r + \mu_2\frac{r^2}{2} + \mu_3\frac{r^3}{6} + \ldots\right] \\ &= \frac{1}{\mu_1}\left[\mu_1 + \mu_2\frac{r}{2} + \mu_3\frac{r^2}{6} + \ldots\right]. \end{aligned}$$

(a) Derivando $M_{L_1}(r)$ se obtiene que

$$\frac{d}{dt}M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{\mu_2}{2} + \frac{2\mu_3 r}{6} + \frac{3\mu_4 r^2}{4!} + \ldots\right],$$

haciendo $r = 0$ se concluye que

$$E(L_1) = \frac{1}{\mu_1}\frac{\mu_2}{2} = \frac{\mu_2}{2\mu_1}.$$

(b) Calculando la segunda derivada de $M_{L_1}(r)$ se tiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}M_{L_1}(r) = \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{2\mu_3}{6} + \frac{6\mu_4 r}{4!} + ...\right],$$

haciendo $r = 0$ se obtiene que

$$E(L_1^2) = \frac{1}{\mu_1}\frac{2\mu_3}{6} = \frac{\mu_3}{3\mu_1}.$$

(c) Utilizando el Teorema 1.12, se concluye que

$$Var(L_1) = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2.$$

7.—Para N como en (4.5), demostrar que

(a) $E(N) = \frac{1}{\theta}$

(b) $Var(N) = \frac{1+\theta}{\theta^2}$.

(c) Usar el resultado del ejercicio anterior para calcular expresiones de $E(L)$ y $Var(L)$.

Solución :

(a) Derivando la función generadora de momentos de N se tiene que

$$\frac{d}{dt}M_N(r) = \frac{\theta e^r}{(1+\theta-e^r)^2},$$

y evaluando $r = 0$, se sigue que

$$E(N) = \frac{1}{\theta}.$$

(b) Calculando el segundo momento se obtiene que

$$\frac{d^2}{dt^2}M_N(r) = \frac{2\theta e^{2r}}{(1+\theta-e^r)^3} + \frac{\theta e^r}{(1+\theta-e^r)^2},$$

y evaluando $r = 0$, se sigue que

$$E(N^2) = \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta},$$

por lo tanto, se demuestra que

$$Var(N) = \frac{2}{\theta^2} + \frac{1}{\theta} - \frac{2}{\theta^2} = \frac{1+\theta}{\theta^2}.$$

(c) Utilizando el Teorema 1.24 se tiene que

$$E(L) = E(N)\, E(L_i),$$

y por (a) del ejercicio anterior y de este teorema se obtiene que

$$E(L) = \frac{1}{\theta}\frac{\mu_2}{2\mu_1}.$$

Nuevamente por el Teorema 1.24 se tiene que

$$Var(L) = E(N)\, Var(L_i) + E^2(L_i)\, Var(N),$$

sustituyendo (a) y (b) de este Teorema y, (a) y (c) del ejercicio anterior en la expresión anterior se concluye que

$$\begin{aligned} Var(L) &= \frac{1}{\theta}\left(\frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2\right) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 \frac{1+\theta}{\theta^2} \\ &= \frac{1}{3\theta}\frac{\mu_3}{\mu_1} - \frac{1}{\theta}\left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 \frac{1}{\theta^2} + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2 \frac{\theta}{\theta^2} \\ &= \frac{1}{3}\frac{\mu_3}{\theta\mu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{1}{\theta}\right)^2. \end{aligned}$$

8.—Bajo ciertos supuestos, la probabilidad de ruina es

$$\psi(u) = (0.3)e^{-2u} + (0.2)e^{-4u} + (0.1)e^{-7u} \quad u \geq 0.$$

Calcular

(a) θ

(b) R

Solución :

(a) Por la relación dada en (4.4) se tiene que

$$\psi(0) = (0.3)e^{-2*0} + (0.2)e^{-4*0} + (0.1)e^{-7*0} = .6$$

de donde

$$\frac{6}{10} = \frac{1}{1+\theta}$$

por lo que se obtiene que

$$\theta = \frac{2}{3}.$$

(b) Utilizando la aproximación de la Proposición 4.14 se tiene que

$$(0.3)e^{-2u} + (0.2)e^{-4u} + (0.1)e^{-7u} = e^{-Ru},$$

$$\ln\left[(0.3)e^{-2u} + (0.2)e^{-4u} + (0.1)e^{-7u}\right] = \ln e^{-Ru},$$

de donde se concluye que:

$$R = -\frac{\ln\left[(0.3)e^{-2u} + (0.2)e^{-4u} + (0.1)e^{-7u}\right]}{u}.$$

9.—Suponga que $\lambda = 3$, $c = 1$, y

$$f_X(x) = \frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x} \qquad x > 0,$$

calcular

(a) $M_X(r)$

(b) μ_1

(c) θ

(d) Expresiones para el Teorema 4.22 y para (a) de la Proposición 4.21.

(e) Una forma explícita para $\psi(u)$.

Solución :

(a) Utilizando la Definición 1.21 se tiene que

$$\begin{aligned}
M_X(r) &= \int_0^\infty e^{rx}\left(\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x}\right)dx \\
&= \frac{1}{3}\int_0^\infty e^{rx}e^{-3x}dx + \frac{16}{3}\int_0^\infty e^{rx}e^{-6x}dx \\
&= \frac{1}{3}\frac{1}{3}\int_0^\infty e^{rx}3e^{-3x}dx + \frac{16}{3}\frac{1}{6}\int_0^\infty e^{rx}6e^{-6x}dx.
\end{aligned}$$

Como $\int_0^\infty e^{rx}3e^{-3x}dx$ se puede ver como una función generadora de momentos de una variable aleatoria con distribución $exp(3)$ y análogamente $\int_0^\infty e^{rx}6e^{-6x}dx$ se distribuye $exp(6)$, se tiene que

$$M_X(r) = \frac{1}{9}\left(\frac{3}{3-r}\right) + \frac{16}{18}\left(\frac{6}{6-r}\right).$$

(b) Derivando $M_X(r)$ se obtiene que

$$\frac{d}{dt}M_X(r) = \frac{3}{9}\frac{1}{(3-r)^2} + \frac{16}{3}\frac{1}{(6-r)^2}$$

por lo que

$$\mu_1 = \frac{1}{3}\frac{1}{9} + \frac{16}{3}\frac{1}{36} = \frac{5}{27}.$$

(c) Para encontrar θ se utilizará la Definición 4.18, es decir,

$$1 = 3(1+\theta)\frac{5}{27},$$

de donde

$$\theta = \frac{4}{5}.$$

(d) Por la Proposición (4.21) y sustituyendo (a),(b) y (c) de este ejercicio se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{ur}[-\psi'(u)]du &= \frac{1}{(1+\frac{4}{5})}\left(\frac{\frac{4}{5}\left[M_X(r)-1\right]}{1+(1+\frac{4}{5})\frac{5}{27}r-M_X(r))}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{[M_X(r)-1]}{1+\frac{9}{27}r-M_X(r))}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{\left[\frac{1}{9}\left(\frac{3}{3-r}\right)+\frac{16}{18}\left(\frac{6}{6-r}\right)-1\right]}{1+\frac{9}{27}r-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{3-r}\right)+\frac{16}{18}\left(\frac{6}{6-r}\right)}\right)\\
&= \frac{4}{9}\left(\frac{\left[\frac{-17r+54}{3(3-r)(6-r)}-1\right]}{1+\frac{9}{27}r-\frac{-17r+54}{3(3-r)(6-r)}}\right)\\
&= \frac{4}{9}\frac{\frac{-17r+54-3(3-r)(6-r)}{3(3-r)(6-r)}}{\frac{27(3)(3-r)(6-r)+9r(3)(3-r)(6-r)-27(-17r+54)}{27(3)(3-r)(6-r)}}\\
&= \frac{4}{9}\frac{27r}{27r}\frac{27\left[10-3r\right]}{r^2-6r+8}\\
&= \frac{4}{9}\frac{10-3r}{r^2-6r+8}.
\end{aligned}$$

Utilizando el Teorema 4.22 y el inciso anterior se tiene que:

$$\frac{4}{9}\frac{10-3r}{r^2-6r+8}=\frac{C_1r_1}{r_1-r}+\frac{C_2r_2}{r_2-r}.$$

Calculando las raíces del polinomio r^2-6r+8 se tiene que $r_1=2$ y $r_2=4$. Entonces,

$$\frac{4}{9}\frac{10-3r}{r^2-6r+8}=\frac{2C_1}{2-r}+\frac{4C_2}{4-r}$$

desarrollando el lado derecho se tiene que

$$\frac{4}{9}\frac{10-3r}{r^2-6r+8}=\frac{8}{9\,(2-r)}+\frac{4}{9\,(4-r)}.$$

Por lo tanto ocupando la observación del Teorema 4.22 se concluye que

$$\psi(u)=\frac{8}{9}e^{-2u}+\frac{1}{9}e^{-4u}.$$

10.—Para el proceso de excedente, con los datos del ejercicio anterior, determinar

(a) $f_{L_1}(x)$
(b) $E(L_1)$
(c) $Var(L_1)$.

Solución :

(a) Calculando la función de distribución de la variable aleatoria X monto de reclamaciones se obtiene que

$$\begin{aligned} F_X(y) &= \int_0^y \left(\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{16}{3}e^{-6x}\right) dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^y e^{-3x}dx + \frac{16}{3}\int_0^y e^{-6x}dx \\ &= 1 - \frac{1}{9}e^{-3x} - \frac{16}{18}e^{-6x}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 4.16, (*b*) del ejercicio anterior y, la expresión anterior se tiene que:

$$f_{L_1}(y) = \frac{27}{5}\left(\frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{16}{18}e^{-6x}\right).$$

(b) Para la esperanza se obtiene que

$$\begin{aligned} E[L_1] &= \int_0^\infty x\left[\frac{27}{5}\left(\frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{16}{18}e^{-6x}\right)\right] dx \\ &= \frac{27}{5}\frac{1}{9}\int_0^\infty xe^{-3x}dx + \frac{27}{5}\frac{16}{18}\int_0^\infty xe^{-6x}dx \\ &= \frac{27}{5}\frac{1}{9}\frac{1}{3}\int_0^\infty x3e^{-3x}dx + \frac{27}{5}\frac{16}{18}\frac{1}{6}\int_0^\infty x6e^{-6x}dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{27}{5}\frac{1}{9}\frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{27}{5}\frac{16}{18}\frac{1}{6}\frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

(c) **Para calcular la varianza, primero se calculará** $E\left[L_1^2\right]$,

$$
\begin{aligned}
E\left[L_1^2\right] &= \int_0^\infty x^2 \left[\frac{27}{5}\left(\frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{16}{18}e^{-6x}\right)\right] dx \\
&= \frac{27}{5}\frac{1}{9}\int_0^\infty x^2 e^{-3x} dx + \frac{27}{5}\frac{16}{18}\int_0^\infty x^2 e^{-6x} dx \\
&= \frac{27}{5}\frac{1}{9}\frac{1}{3}\int_0^\infty x^2 3e^{-3x} dx + \frac{27}{5}\frac{16}{18}\frac{1}{6}\int_0^\infty x^2 6e^{-6x} dx \\
&= \frac{27}{5}\frac{1}{9}\frac{1}{3}\frac{2}{9} + \frac{27}{5}\frac{16}{18}\frac{1}{6}\frac{2}{36} \\
&= \frac{4}{45},
\end{aligned}
$$

por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
Var\left[L_1\right] &= E\left[L_1^2\right] - E^2\left[L_1\right] \\
&= \frac{4}{45} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\
&= \frac{11}{225}.
\end{aligned}
$$

Comentarios

El objetivo de esta tesis fue presentar una introducción a las matemáticas actuariales teniendo como herramienta principal a la teoría de la probabilidad. Para ello se presentaron los resultados relacionados con las técnicas actuariales, en particular, las funciones biométricas, desde el punto de vista probabilístico. Tambien bajo el mismo enfoque se dió una introducción a la economía del seguro y a la teoría del riesgo.

En la práctica las suposiciones teóricas que sustentan los modelos no se cumplen en su totalidad, así los modelos presentados para el cálculo de la probabilidad de ruina parten de supuestos idealizados y simplificados respecto a las variables que intervienen en el proceso de flujos de una compañía de seguros. Sin embargo, la realidad es mucho más compleja y para poder reflejar más fielmente esta realidad se recurre a las técnicas de simulación.

Dado que es demasiado complejo el modelar una función de probabilidad para reflejar la posición financiera de una compañía en un momento dado, por la gran cantidad de variables que intervienen para este cálculo, la simulación aleatoria nos provee de una herramienta para estimar algunas características de esta variable.

Otra de las alternativas sería utilizar el paquete XTREMES. Mediante el cual se pueden simular tiempos y probabilidades de ruina dentro de un horizonte fijo de tiempo. Para ello se le sugiere al lector consultar el libro "Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hidrology and others Fields" (Reiss & Thomas, 1997).

Un trabajo posterior podría ser construir un modelo que sirva para proyectar esta posición financiera a corto y mediano plazo. Lo anterior, con base en las expectativas de desarrollo, políticas de administración e información histórica de las compañías, además de las expectativas económicas del país y los parámetros del mercado asegurador. Los resultados que arroje este modelo permitirán conocer si la institución cuenta con una situación financiera que le permita ser solvente de acuerdo a sus propias expectativas de desarrollo y administración, y de acuerdo a la posible influencia de los factores externos.

También se podrán identificar los posibles factores de riesgo que hacen más vulnerable a la institución, lo que le permitirá tomar las medidas necesarias para disminuir o eliminar dichos efectos de manera anticipada y contar a la vez con los recursos financieros necesarios para garantizar su solvencia a corto y mediano plazo.

Por otra parte, las grandes catástrofes, sean de índole natural -como tremendas inundaciones, fuertes terremotos- o causadas por el hombre -tales como crisis bursátiles o grandes pérdidas industriales, digamos, incendios provocados- son manifestaciones de eventos extremos. La posibilidad de ocurrencia de estos eventos entraña riesgos que las instituciones financieras deben considerar. Puesto que, matemáticamente, los eventos extremos ocurren cuando un riesgo toma valores de la cola de su distribución, una rama de la Teoría de la Probabilidad que cobra gran importancia cuando se trata de modelar eventos extremos es la teoría de valores extremos. Esta teoría proporciona métodos que permiten cuantificar los eventos extremos y sus consecuencias de manera óptima desde el punto de vista estadístico. Esto hace que la teoría de los valores extremos sea particularmente útil en el área de Administración de Riesgos, donde, de acuerdo con la definición[1] de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores, la Administración de Riesgos es el conjunto de objetivos, políticas, procedimientos y acciones que se implementan para identificar, medir, monitorear, limitar, controlar, informar y revelar los distintos tipos de riesgo a que se encuentran expuestas las instituciones. El administrador de riesgos se encarga de estimar probabilidades de colas y altos cuantiles de distribuciones de pérdidas y ganancias; y de datos financieros en general. Es por ello que en Administración de Riesgos se busca modelar el riesgo de manera que se contemple la posibilidad de un resultado extremo. Así, un tema probabilístico de interés en las matemáticas actuariales, y no abordado en este trabajo, es el de la teoría de los valores extremos.

[1] Tomada de la Circular 1473 del 17 de julio de 2000, de la Comisión Nacional Bancaria y de Valores

Bibliografía

Aldous D. (1989). *Probability Approximations via the Poisson Clumping Heuristic.* Springer-Verlag.

Beard, R.E., Pentikainen, T. and Pesonen, E. (1984). *Risk Theory, the Stochastic Basis of Insurance.* 3rd edition. Great Britain Chapman and Hall.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones D. A. and Nesbitt C. J. (1986). *Actuarial Mathematics.* NewYork. The Society of Actuaries.

Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory.* Germany. Springer-Verlag.

Clarke, L. E. (1975). *Random Variables.* New york. Longman.

Daykin,C.D., Pentikainen, T. and Pesonen, M. , (1993). *Practical Risk Theory for Actuaries.* 3rd edition. Great Britain. Chapman and Hall.

Degroot, M. (1986). *Probability and Statistics.* 2nd edition. New York Addison Wesley.

Hoel, P. G. (1971). *Introduction to Mathematical Statistics.* 4th edition. New York. J. Wiley.

Hogg, R. V. and Klugman, S.A. (1995). *Loss Distributions.* New York, John Wiley & Sons.

Gerber, H. U. (1980). *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* New York. Huebner Foundation.

Karr, A. (1993). *Probability.* New York. Springer-Verlag.

López, C. M. and López, M.J. (1996). *Estadística para Actuarios.* España. Mapfre.

Mood, A. M., Graybill, A. and Boes, D. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* México. McGraw Hill.

Nieto, D. A. U. and Vegas, F. (1993). *Matemática Actuarial.* Madrid. Mapfre.

Panjer, H. and Willmut, M. (1992). *Insurance Risk Models.* New York. Society of actuaries.

Papoulis, A.(1991). *Random Variables and Stochastic Processes.* 3rd edition. New York. Mc-Graw-Hill.

Reiss, R.D., Thomas, M. (1997). *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hidrology and others Fields.* Beirkhäuser.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidli, V. and Teugels, J. (1998). *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* England. John Wiley & Sons.

Ross, S. M. (1976). *A first course in Probability.* New York,Macmillan.

Ross, S. M. (1981). *Introduction to Probability Models.* New York. Academic.