



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"AMBIGÜEDADES EN LA DEFINICION DE  
RESONANCIA EXACTA PARA EL CASO CIRCULAR EN  
EL PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**F I S I C O**

P R E S E N T A :

**CARLOS ESTEBAN CHAVEZ PECH**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

DIRECTOR DE TESIS: DR. JULIA ESPERANZA EIBENSCHUTZ



MEXICO, D.F.

FACULTAD DE CIENCIAS  
SECRETARÍA

2002



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Ambigüedades en la definición de resonancia exacta para el caso circular en el  
problema restringido de los tres cuerdos"  
realizado por CHAVEZ PECH CARLOS ESTEBAN

con número de cuenta 097579261 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

DRA. JULIA ESPRESATE EIBENSCHUTZ

*Julia Espresate E*

Propietario

DRA. MARIA DE LOS ANGELES ORTIZ FLORES

*Maria de los Angeles Ortiz Flores*

Propietario

DR. JUAN MANUEL LOZANO RECIA

*Juan Manuel Lozano Recia*

Suplente

DR. WILLIAM LEE ALARDIN

*William Lee Alardin*

Suplente

DR. ROBERTO ALLAN SUSEMAN LIVOVSKY

*Roberto Allan Suseman Livovsky*

Consejo Departamental de Física

*Patricia Goldstein Menaché*  
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura

## **Agradecimientos:**

Quiero agradecer a mi Mamá Maria Enriqueta Josefina Pech Austin por darme la vida, por cuidarme durante todos estos años, por apoyarme en todas mis decisiones y por haberme permitido seguir mi sueño.

Quiero agradecer a mi asesora Julia Espresate Eibenschutz por haberme dirigido y apoyado en la realización de esta tesis.

Quiero agradecer a mi hermana Carla Georgina Chávez Pech por haberme apoyado durante todos estos años y por darme el ultimo empujón que necesitaba para atreverme a seguir mi sueño.

Quiero agradecer a mi tia Consuelo Granados Austin por haberme apoyado y por todo lo que nos ha dado, sin lo cual no podría estar donde estoy.

Quiero agradecer a mi tío Agustín Luna Gutierrez y a mi tia Georgina Pech Austin por todo el apoyo que me han brindado y aunque al principio no les convencía la idea, ahora me han apoyado incondicionalmente.

Quiero agradecer a mis Primos Alejandro Luna Pech, Hugo Eduardo Vazquez Lugo, José Antonio Luna Pech y Jorge Antonio Luna Pech por haberme brindado su apoyo y compañía todos estos años.

Quiero agradecer a mi tia Carmen Lugo por haberme cuidado ya aconsejado durante los tres años en que viví con su familia.

Quiero Agradecer a mi padre Carlos Chávez Díaz y a su familia por haberme apoyado en el ultimo par de años de manera incondicional.

**Dedicatoria:**

*Esta tesis esta dedicada a la memoria de mi abuelita Maria de Luz Austin que ya no alcanzo a verla terminada.*

# Tesis

## INDICE:

### Capítulo I Introducción

#### 1.1 Introducción

### Capítulo II Parte Analítica

#### 2.1 Órbita en un Plano en Coordenadas Cartesianas y Polares.

#### 2.2 El Campo Central Gravitacional y la Ecuación Vis Viva.

#### 2.3 Las 3 Leyes de Kepler

#### 2.4 Elementos orbitales

### Capítulo III El Problema de los 3 Cuerpos Restringido

#### 3.1 El Problema de los 3 Cuerpos General.

#### 3.2 El Problema de los 3 Cuerpos Restringido y la Integral de Jacobi

### Capítulo IV Las Ecuaciones de la Variación de los Elementos Orbitales

#### 4.1 La Física del Encuentro Orbital entre la Partícula y el Satélite

#### 4.2 Variación de los Elementos Orbitales

#### 4.2.1 Elementos Orbitales y el Método de Variación de Constantes

#### 4.2.2 El Bracket de Lagrange y la Independencia en el Tiempo de los Brackets Lagrange

#### 4.2.3 El Método de Whittaker para Obtener los Brackets de Lagrange

#### 4.2.4 Aproximación en Serie de Taylor de las Coordenadas Cartesianas en Términos de los Elementos Orbitales

#### 4.2.5 Cálculo de los Brackets de Lagrange

#### 4.2.6 Obtención de la Variación de los Elementos Orbitales en Términos de la Función Perturbadora.

#### 4.2.7 Aproximación a Primer Orden de las Ecuaciones de la Variación de los Elementos Orbitales.

### Capítulo V El Problema Plano Circular Restringido de los Tres Cuerpos y la Resonancia Exacta

#### 5.1 Función Perturbadora y la Aproximación de Primer Orden

#### 5.2 Ángulo Resonante

#### 5.3 El Modelo del Péndulo Simple y el Ancho de Libración para Resonancias de Primer Orden

#### 5.4 La resonancia Nominal y la Ambigüedad en la Definición de Resonancia Exacta para el Problema Plano Circular Restringido de los Tres Cuerpos.

**1 TESIS**

**Capitulo VI Conclusiones**

**Apéndices**

# CAPITULO I

## INTRODUCCION

Los anillos de Saturno fueron por primera vez reportados en 1610 por el gran científico italiano Galileo Galilei. Aunque nunca estuvo seguro de la forma precisa de los anillos, él creía que los anillos eran como manijas (del latín *ansae*) ver fig (1,1). En todo el siglo XVII hubo científicos que se dedicaron a hacer dibujos poco precisos. Fue hasta 1659 cuando el gran científico Christian Huygens infirió la verdadera naturaleza de la forma de los anillos ver fig.(1,2). En 1676 por primera vez Cassini dibujó el sistema con la separación entre los anillos que ahora lleva su nombre, en ese entonces se pensaba que el sistema de anillos estaba compuesto de una especie de aros hechos de hielo macizo. El siguiente avance fué hecho por James Clerk Maxwell que demostró teóricamente que los anillos deberían de estar compuestos de un número muy grande de partículas no conectadas entre sí, lo que le valió el premio Adams en 1857. La primera fotografía del sistema fue tomada por Common en 1883, y fue hasta la llegada de las sondas Pioneer y Voyager que se pudieron tomar imágenes y medir características como la composición y tamaño aproximado de las partículas, así como descubrir que los otros planetas jovianos también tienen un sistema de anillos.

En los últimos años se ha podido avanzar en la simulación de los sistemas de anillos debido al increíble avance en el cómputo y supercómputo, lo que ha permitido además estudiar la dinámica de estos sistemas.

Existen una amplia variedad de preguntas relacionadas con los anillos planetarios como formación, estabilidad, resonancias, ondas espirales. En esta tesis me enfocaré principalmente al fenómeno de las resonancias y más precisamente en las resonancias de primer orden. El objetivo principal de esta tesis es el de discutir si el criterio del argumento resonante es válido cuando la excentricidad es muy pequeña o incluso cuando la excentricidad es cero en el Problema Plano Circular Restringido de Tres Cuerpos (PPCRTC).

Se comienza en el capítulo 2 repasando la parte analítica necesaria, que consiste en ver la órbita de una partícula en coordenadas cartesianas y en polares. Se ven la conservación del momento lineal, del momento angular y de la energía, se discute además la ecuación *Vis Viva*. Se discute la ley de la gravitación de Newton y el caso del potencial central gravitacional. Luego se ven las 3 leyes de Kepler. A continuación se discuten los elementos orbitales y cómo son utilizados en la mecánica celeste. En el capítulo 3 se discute el problema de los 3 cuerpos restringido, la integral de Jacobi y además se discuten los elementos orbitales osculantes.

En el capítulo 4 estudiamos la variación de los elementos orbitales en términos de la



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

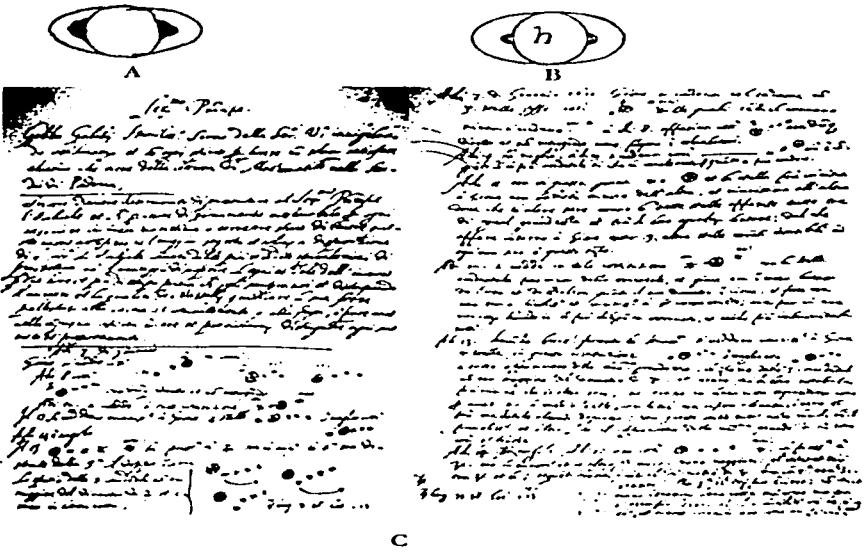
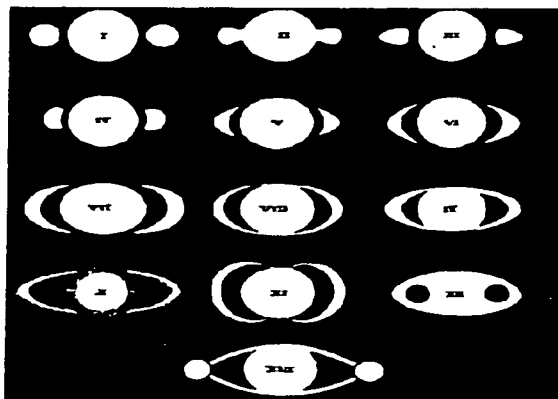


Fig (1.1)  
 En la figura A y en la figura B se muestran dos de los bosquejos que hizo Callisto de Europa y su sistema de anillos. En la figura C se muestra una reproducción de uno de los manuscritos de Callisto en el que se menciona a Júpiter y algunos de sus satélites.

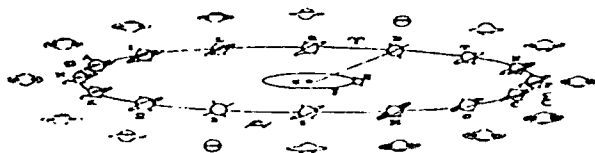
función perturbadora y se hace la aproximación a primer orden de las ecuaciones de los elementos orbitales.

En el capítulo 5 se estudia el PPCRTC, comenzando con el estudio de la función perturbadora y la aproximación a primer orden, con esto se deduce el modelo del péndulo simple y se calcula el ancho de oscilación para las resonancias de primer orden. Se estudia la resonancia exacta y la ambigüedad en la definición de ésta para el caso circular.

Para finalizar en el capítulo 6 se dan las conclusiones.



A



B

Fig 12

En la figura A se muestran las observaciones hechas por Huygens en 1656 del sistema de anillos de Saturno. En la figura B se muestra la teoría propuesta por Huygens para las observaciones

## Capítulo II Parte Analítica

### 2.1 Órbita en un plano en coordenadas cartesianas y polares

Las coordenadas cartesianas son las que más fácilmente podemos imaginar y las que son más intuitivas, sobre todo en los comienzos de la formación profesional, pero como se ha demostrado no siempre son las más adecuadas para estudiar un problema, pues como veremos existen casos donde las coordenadas polares son las más adecuadas. Sea  $\vec{r}$  el vector posición de una partícula en 2 dimensiones, entonces sus componentes serán:

$$\vec{r} = (x, y) \quad (2,1,1)$$

donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas de  $\vec{r}$  en un sistema de ejes ortogonales.

Se puede sacar la velocidad de la partícula, que por definición:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (2,1,2)$$

con  $v_x$  la velocidad en la dirección  $x$  y  $v_y$  la velocidad en la dirección  $y$ .

Y la aceleración:

$$\vec{a} = (a_x, a_y) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \quad (2,1,3)$$

con  $a_x$  la aceleración en la dirección  $x$  y  $a_y$  la aceleración en la dirección  $y$ .

La posición de esta misma partícula en coordenadas polares tiene componentes:

$$\vec{r} = (r, \theta) \quad (2,1,4)$$

donde  $r$  es la magnitud de  $\vec{r}$  y  $\theta$  es el ángulo que forma  $\vec{r}$  con el eje  $x$ .

Queremos encontrar una transformación para pasar de uno de los sistemas al otro, la figura 2.1 muestra la relación entre los dos tipos de coordenadas:

De aquí vemos que:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2,1,5)$$

Así pues hemos encontrado una forma de relacionar las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares.

Sacando las derivadas respecto al tiempo  $t$  por medio de la regla de la cadena:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \cos(\theta) \frac{dr}{dt} - r \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,7)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} = \sin(\theta) \frac{dr}{dt} + r \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,8)$$

## CAPITULO II PARTE ANALÍTICA

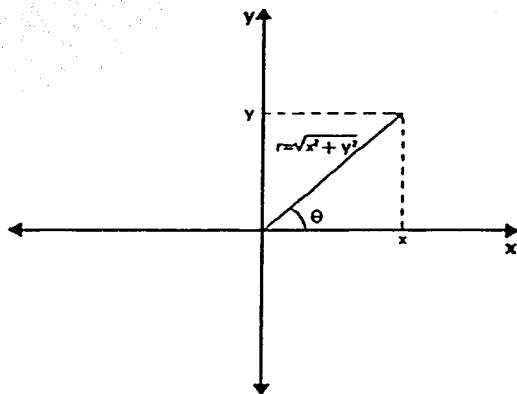


Fig 2.1 Relación entre las coordenadas cartesianas y polares

De aquí podemos deducir además que, si multiplicamos la ec. (2,1,7) por  $\cos(\theta)$  y la ec. (2,1,8) por  $\sin(\theta)$  obtenemos:

$$\cos(\theta) \frac{dx}{dt} = \cos^2(\theta) \frac{dr}{dt} - r \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,9)$$

$$\sin(\theta) \frac{dy}{dt} = \sin^2(\theta) \frac{dr}{dt} + r \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,10)$$

sumemos ahora las ecs. (2,1,9) y (2,1,10) para obtener:

$$\cos(\theta) \frac{dx}{dt} + \sin(\theta) \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \frac{dr}{dt} = v_r \quad (2,1,11)$$

De manera análoga al multiplicar la ec. (2,1,7) por  $-\sin(\theta)$  y la ec. (2,1,8) por  $\cos(\theta)$  y sumar el resultado es:

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = -\sin(\theta) \frac{dx}{dt} + \cos(\theta) \frac{dy}{dt} \quad (2,1,12)$$

## CAPITULO II PARTE ANALÍTICA

pero además podemos multiplicar la ec. (2,1,11) por  $\cos(\theta)$  y la ec. (2,1,12) por  $-\sin(\theta)$  para obtener:

$$\cos(\theta)v_r = \cos^2(\theta)\frac{dx}{dt} + \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{dy}{dt} \quad (2,1,13)$$

$$-\sin(\theta)v_\theta = \sin^2(\theta)\frac{dx}{dt} - \sin(\theta)\cos(\theta)\frac{dy}{dt} \quad (2,1,14)$$

sumemos las ecs (2,1,13) y (2,1,14) para obtener:

$$\frac{dx}{dt}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \frac{dx}{dt} = v_r \cos(\theta) - v_\theta \sin(\theta) \quad (2,1,15)$$

Ahora multiplicamos la ec. (2,1,11) por  $\sin(\theta)$  y la ec. (2,1,12) por  $\cos(\theta)$  obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = v_r \cos(\theta) - v_\theta \sin(\theta) \quad (2,1,16)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_r \sin(\theta) + v_\theta \cos(\theta) \quad (2,1,17)$$

y al comparar esto con las ecs. (2,1,7) y (2,1,8) deducimos las siguientes expresiones:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad (2,1,18)$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,19)$$

entonces la magnitud de  $\vec{v}$  está dada por:

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (2,1,20)$$

ahora calculemos las componentes de la aceleración en coordenadas polares, tomando las ecs. (2,1,7) y (2,1,8) y derivando de nuevo:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{d^2r}{dt^2}\cos(\theta) - \left(r\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt} + \sin(\theta)\frac{dr}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt} - r\sin(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2,1,21)$$

reagrupando:

$$a_x = \cos(\theta)\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] - \sin(\theta)\left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right] \quad (2,1,22)$$

por lo tanto la componente  $a_x$ :

$$a_x = a_r \cos(\theta) - a_\theta \sin(\theta) \quad (2,1,23)$$

## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

donde a  $a_r$  se le llama la aceleración radial y a  $a_\theta$  se le llama la aceleración angular, de donde:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (2,1,24)$$

$$a_\theta = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,25)$$

Por lo tanto, la 2ª Ley de Newton que está dada por:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2,1,26)$$

Se escribe en coordenadas polares como:

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_\theta \quad (2,1,27)$$

donde  $\vec{F}_r$  y  $\vec{F}_\theta$  se les llama la fuerza radial y tangencial respectivamente, dadas por:

$$\vec{F}_r = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \hat{r} \quad (2,1,28)$$

$$\vec{F}_\theta = \frac{m}{r} \left( r^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( m r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \hat{\theta} \quad (2,1,29)$$

sea:

$$L \equiv m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,30)$$

a esta cantidad la llamaremos el momento angular y más adelante veremos el porqué de la importancia de esta cantidad

Podemos además definir la siguiente cantidad

$$h \equiv \frac{L}{m} = r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (2,1,31)$$

que la definimos como el momento angular por unidad de masa.

## 2.2 El Campo Central Gravitacional y la Ecuación Vis Viva

En esta sección tomaremos el campo gravitacional central y veremos el tipo de trayectorias que sigue una partícula sometido a este tipo de campo y al finalizar veremos la conservación del momento angular y la energía.

## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

Campo Central es aquel en que:

$$\vec{F} = f(r)\vec{r} \quad (2,2,1)$$

En particular el campo gravitacional central es:

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \quad (2,2,2)$$

Con  $k = GMm$ , con  $G$  la constante gravitacional,  $M$  la masa que se encuentra en el origen de coordenadas que genera el campo gravitacional central y  $m$  la masa de la partícula de prueba.

Pero vimos de la sección anterior que la fuerza se puede dividir en fuerza radial y tangencial, así pues para el campo gravitacional tenemos

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{r} + 0\hat{\theta} \quad (2,2,3)$$

retomando las ecs. (2,1,29) y (2,1,30) podemos concluir que para el caso gravitacional:

$$\vec{F}_\theta = \frac{1}{r} \frac{dL}{dt} \hat{\theta} = 0\hat{\theta} \quad (2,2,4)$$

Por lo tanto el momento angular  $L$  se conserva para el campo gravitacional central.

Ahora solucionaremos la ecuación de Newton de la fuerza radial, sea  $F_r$  la norma del vector  $\vec{F}_r$ , entonces:

$$F_r = m \left( \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = -\frac{k}{r^2} \quad (2,2,5)$$

Para facilitar el análisis hagamos el siguiente cambio de variable, sea:

$$u = \frac{1}{r} \quad (2,2,6)$$

de donde:

$$r = \frac{1}{u} \quad (2,2,7)$$

así pues resulta que:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2,2,8)$$

pero como ya vimos:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} \quad (2,2,9)$$

por lo que despejando  $\frac{d\theta}{dt}$  :

## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} = hu^2 \quad (2,2,10)$$

Así sustituyendo la ec. (2,2,10) en la ec. (2,2,8) obtenemos:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} (hu^2) = -h \frac{du}{d\theta} \quad (2,2,11)$$

Ahora saquemos la segunda derivada:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -h \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) (hu^2) \quad (2,2,12)$$

Así pues sustituyendo las ecs. (2,2,11) y (2,2,12) en la ec. (2,2,5) obtenemos:

$$m \left( \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = m \left( -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - r h^2 u^4 \right) = m \left( -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u} h^2 u^4 \right) = -\frac{k}{r^2} = -ku^2$$

$$m \left( -h^2 u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2} - h^2 u^3 \right) = -ku^2 \quad (2,2,13)$$

Dividiendo ambos lados de la igualdad por  $-mh^2u^2$  obtenemos:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{k}{mh^2} \quad (2,2,14)$$

Hagamos el siguiente cambio de variable:

$$u' = u - \frac{k}{mh^2} \quad (2,2,15)$$

observemos que:

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} = \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (2,2,16)$$

y sustituyendo las ecs. (2,2,16) y (2,2,15) en la ec. (2,2,14) obtenemos:

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} + u' = 0 \quad (2,2,17)$$

de donde:

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} = -u' \quad (2,2,18)$$

que como sabemos es la ecuación del oscilador armónico cuya solución general es:

$$u' = u - \frac{k}{mh^2} = A \cos(\theta - \bar{\omega}) \quad (2,2,19)$$



## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

Donde  $\bar{\omega}$  y  $A$  son constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales.

De donde:

$$u = \frac{1}{r} = A \cos(\theta - \bar{\omega}) + \frac{k}{mh^2} \quad (2,2,20)$$

por lo tanto:

$$r = \frac{1}{A \cos(\theta - \bar{\omega}) + \frac{k}{mh^2}} \quad (2,2,21)$$

multiplicamos y dividimos en la parte derecha de la igualdad anterior por  $\frac{mh^2}{k}$ :

$$r = \frac{\left(\frac{mh^2}{k}\right)}{A \frac{mh^2}{k} \cos(\theta - \bar{\omega}) + 1} \quad (2,2,22)$$

Que es la ecuación de las secciones cónicas, y como sabemos de nuestros cursos de geometría analítica esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (2,3,23)$$

Donde  $p = \frac{mh^2}{k}$  es el *semilatus rectum* y  $e = A \frac{mh^2}{k}$  es la excentricidad, es claro que ambas cantidades permanecen constantes, pues el momento angular se conserva.

Así pues tenemos 4 casos:

Si  $e < 1$  entonces la solución es una elipse.

Si  $e = 0$  es un círculo.

Si  $e = 1$  es una parábola.

Si  $e > 1$  entonces se trata de una hipérbola.

En la Fig. 2.2a se muestran cada uno de los casos posibles

Ahora veamos el caso de la elipse, multiplicando y dividiendo por  $(1+e)$  la ec.(2,2,22) obtenemos:

$$r = \left(\frac{mh^2}{k(1+e)}\right) \frac{(1+e)}{A \frac{mh^2}{k} \cos(\theta - \bar{\omega}) + 1} \quad (2,2,24)$$

y sea  $r_0 = \frac{mh^2}{k(1+e)}$ , así pues:

$$r = r_0 \frac{(1+e)}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} \quad (2,2,25)$$

y además sabemos que  $r_0 = a(1 - e)$ , por lo que:

$$r = r_0 \frac{(1+e)}{1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e \cos(\theta - \bar{\omega}))} \quad (2,2,26)$$

## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

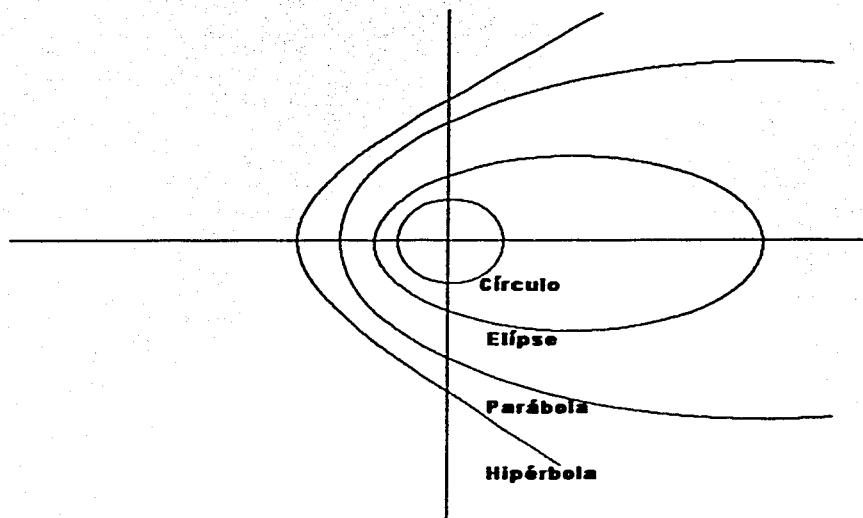


Fig. 2.2 \* Casos posibles de cónicas.

En la fig. (2.2b) se muestra la elipse y cada uno de los elementos.

Donde  $a$  es el semieje mayor de la órbita,  $e$  es la excentricidad de la elipse y  $r_0$  es la distancia al periapside.

Ahora hagamos la deducción de la ecuación "Vis Viva".

Tomemos la ec. (2,3,23) y despejando  $\frac{p}{r}$  obtenemos:

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\theta - \bar{\omega}) \quad (2.2,27)$$

diferenciamos la ec. (2.2.27) respecto al tiempo  $t$ :

$$-\frac{p}{r^2} \frac{dr}{dt} = -e \sin(\theta - \bar{\omega}) \frac{d\theta}{dt} \quad (2.2,28)$$

de donde:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r^2 e}{p} \sin(\theta - \bar{\omega}) \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{p} \sin(\theta - \bar{\omega}) \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{e}{p} h \sin(\theta - \bar{\omega}) \quad (2.2,29)$$

## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

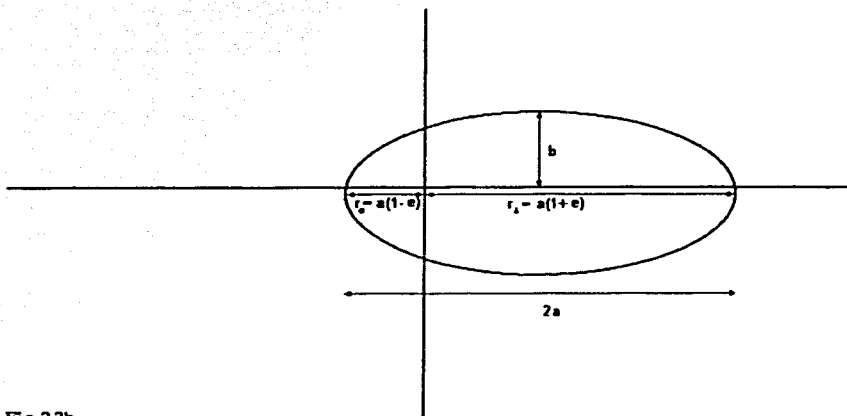


Fig. 2.2b

Cada uno de los elementos de la elipse donde  $a$  es el semieje mayor,  $e$  es la excentricidad,  $r_0$  es el periapside,  $r_p$  es el apoapside y  $b$  es el semieje menor

y sustituyendo de la definición de  $p$  :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ek}{mh} \sin(\theta - \bar{\omega}) \quad (2,2,30)$$

retomando la ec. (2,1,31) y despejando  $r \frac{d\theta}{dt}$

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{mh}{r} \quad (2,2,31)$$

y retomando la ec. (2,2,27)

$$\frac{p}{r} = \frac{mh^2}{kr} = 1 + e \cos(\theta - \bar{\omega}) \quad (2,2,32)$$

de donde:

$$\frac{h}{r} = \frac{k}{mh} (1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})) \quad (2,2,33)$$

sustituyendo la ec. (2,2,31) en la ec. (2,2,33)

## 2.2 EL CAMPO CENTRAL GRAVITACIONAL Y LA ECUACIÓN VIS VIVA

$$r \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{mh} (1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})) \quad (2,2,34)$$

ahora calculemos la norma de la velocidad según la ec. (2.1.20)

$$v^2 = e^2 \frac{k^2}{m^2 h^2} \operatorname{sen}^2(\theta - \bar{\omega}) + \frac{k^2}{m^2 h^2} (1 + e \cos(\theta - \bar{\omega}))^2 \quad (2,2,35)$$

$$v^2 = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ e^2 \operatorname{sen}^2(\theta - \bar{\omega}) + (1 + e \cos(\theta - \bar{\omega}))^2 \right] \quad (2,2,36)$$

$$v^2 = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ e^2 \operatorname{sen}^2(\theta - \bar{\omega}) + 1 + e^2 \cos^2(\theta - \bar{\omega}) + 2e \cos(\theta - \bar{\omega}) \right] \quad (2,2,37)$$

$$v^2 = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ e^2 + 1 + 2e \cos(\theta - \bar{\omega}) \right] \quad (2,2,38)$$

sumando y restando 1

$$v^2 = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ e^2 + 2 + 2e \cos(\theta - \bar{\omega}) - 1 \right] = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ e^2 + 2(1 + e \cos(\theta - \bar{\omega})) - 1 \right] \quad (2,2,39)$$

así pues sustituyendo la ec. (2,2,32) en la ec. (2,2,39)

$$v^2 = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ e^2 + 2 \frac{p}{r} - 1 \right] = \frac{k^2}{m^2 h^2} \left[ 2 \frac{p}{r} + (e^2 - 1) \right] \quad (2,2,40)$$

de la definición de  $p$

$$\begin{aligned} p &= \frac{mh^2}{k} \\ \frac{k}{h^2} &= \frac{m}{p} \\ \frac{k^2}{h^2} &= \frac{km}{p} \end{aligned} \quad (2,2,41)$$

sustituyendo la ec. (2,2,41) en la ec. (2,2,40)

$$v^2 = \frac{k}{mp} \left[ 2 \frac{p}{r} + (e^2 - 1) \right] = \frac{k}{m} \left[ 2 \frac{1}{r} + \frac{(e^2 - 1)}{p} \right] \quad (2,2,42)$$

pero sabemos de nuestros cursos de geometría analítica que  $p = a(1 - e^2)$ , que sale de evaluar la ec. (2.2.26) para  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

$$v^2 = \frac{k}{m} \left[ 2 \frac{1}{r} + \frac{(e^2 - 1)}{a(1 - e^2)} \right] = \frac{k}{m} \left[ 2 \frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right] \quad (2,2,43)$$

### 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

a esta ecuación se le llama "Vis Viva" y su importancia la veremos a continuación.

Sabemos que la energía gravitacional total se puede escribir de la siguiente forma:

$$E_{Total} = \frac{1}{2}mv^2 + \Phi(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad (2,2,44)$$

Donde con  $E_{Total}$  la energía total del sistema,  $\frac{1}{2}mv^2$  la energía cinética y  $\Phi(r) \equiv -\frac{k}{r}$  es el potencial gravitacional.

Sustituyendo la ec. (2,2,43) en la ec. (2,2,44) obtenemos:

$$E_{Total} = \frac{1}{2}m \left( \frac{k}{m} \left[ 2\frac{1}{r} + \frac{(e^2 - 1)}{a(1 - e^2)} \right] \right) - \frac{k}{r} = \frac{k}{r} + \frac{k}{2a} - \frac{k}{2a} = -\frac{k}{2a} \quad (2,2,45)$$

Así acabamos de encontrar una expresión para la energía total de los cuerpos en el campo gravitacional central en términos únicamente de la constante gravitacional, de la masa del cuerpo central y del semieje mayor, así sólo basta medir cada una de ellas para conocer la energía de dicho cuerpo.

### 2.3 Las 3 leyes de Kepler

Dentro de la historia de la física existen casos curiosos e interesantes, como el caso del clérigo Johannes Kepler. Kepler nació en 1571 en el pueblo de Weil en Swabia, en el sureste de Alemania. Su abuelo paterno, Sebald Kepler, fue un respetado artesano que sirvió como alcalde del pueblo; su abuelo materno, Melchior Guldenmann, fue un tabernero y también alcalde del pueblo. Por otro lado su padre fue como dijo Kepler "un soldado inmoral", y también describió a su madre en los mismos términos. De 1574 a 1576 Johannes vivió con sus abuelos; en 1576 sus padres se mudaron a Leonberg, donde Johannes entró en la escuela Latina. En 1584 ingresó al Seminario Protestante en Alderberg, y en 1589 comenzó su educación universitaria en la Universidad Protestante de Tübingen. Allí estudió teología y pasó el examen de M.A. en 1591 y continuó sus estudios como estudiante de posgrado.

El profesor de matemáticas de Kepler fue Michael Maestlin (1580-1635). Maestlin fue uno de los primeros astrónomos en adherirse a la teoría heliocéntrica de Copernico, aunque en su universidad se enseñaba únicamente la teoría Ptolomeica. Solamente en lo que ahora podíamos llamar seminarios de posgrado él lo exponía.

En 1594 Kepler aceptó un puesto como profesor de matemáticas en el Seminario Protestante en Graz (en la provincia Austriaca de Styria). Él fue también contratado como el matemático del distrito y el encargado de hacer el calendario. Kepler permaneció en Graz hasta 1600, cuando todos los protestantes fueron forzados a convertirse al catolicismo o ser obligados a dejar la provincia. Por seis años, Kepler enseñó aritmética, geometría y

### 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

retórica. En su tiempo libre hizo sus estudios en astronomía y astrología. En 1597 Kepler se casó con Barbara Müller. En el mismo año publicó su primer trabajo importante, *EL MISTERIO DE LA COSMOGRAFIA*, en el cual argumentó que las distancias de los planetas del Sol en el sistema *copernicano* pueden ser determinados por cinco sólidos regulares, si uno supone que la órbita de un planeta es circunscrita cerca de un sólido y además inscribe éste en otro (ver la figura 2.3a).

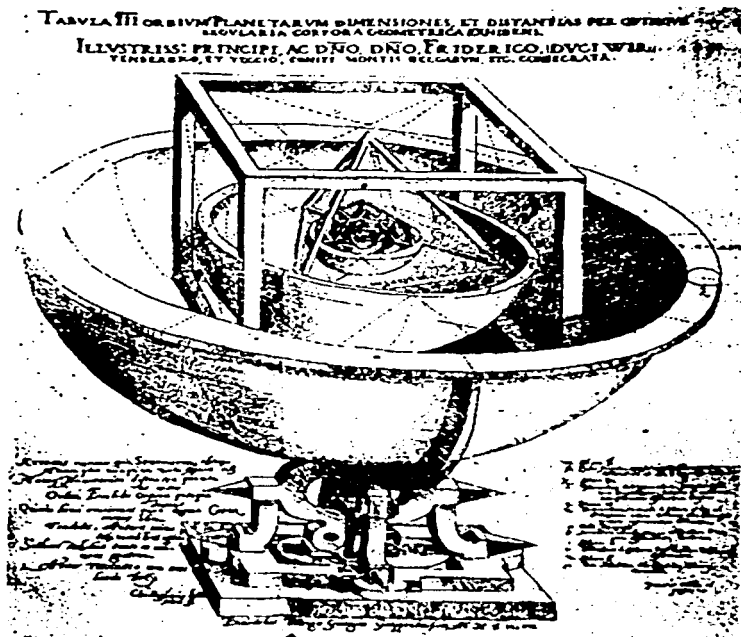


Fig 2,3a

En esta figura se muestra el modelo que utilizó Kepler para aproximar las órbitas de los planetas mediante 5 sólidos regulares.

Excepto por la órbita de Mercurio, la construcción de Kepler produce resultados bastante buenos. Por su talento como matemático, fue invitado por Tycho Brahe a Praga a convertirse en su ayudante y calcular nuevas órbitas para los planetas, para las observa-

### 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

ciones de Tycho. Kepler se mudó a Praga en 1600. Kepler sirvió como asistente de Tycho hasta la muerte de Tycho en 1601 y fue el sucesor de éste como Matemático Imperial, el más prestigioso puesto en matemáticas en Europa. Ocupó este cargo hasta 1612, cuando el Emperador Rodolfo II fue depuesto. En Praga Kepler publicó un número importante de libros. En 1604 *Astronomia pars Optica* es decir "La parte Optica de la Astronomía" en el cual trató la refracción atmosférica así como también trató las lentes y dió una moderna explicación a cómo trabaja el ojo; en 1606 publicó *De Stella Nova* "acerca de la nueva estrella", que era acerca de una nueva estrella que había aparecido en 1604; y en 1609 su *Astronomia Nova* "La Nueva Astronomía" que contenía sus primeras dos leyes que veremos más adelante. Kepler tomó un punto de vista dinámico, introduciendo la física en los cielos.

En 1610 Kepler oyó y leyó acerca de los descubrimientos de Galileo con su telescopio. Rápidamente escribió una extensa carta y un año después, obtuvo el uso de un telescopio. Publicó sus observaciones de los satélites jovianos con el título *Narratio de Observatis Quatuor Jovis Satellitibus* "Narración acerca de Cuatro Satélites de Júpiter Observados", esto fue un enorme soporte para Galileo, cuyos descubrimientos como sabemos fueron rebajados o negados por muchos. Ambos tratados de Kepler fueron rápidamente reimpresos en Florencia, Kepler fue de los primeros en hacer una teoría del funcionamiento del telescopio en su *Dioptrice*, publicada en 1611.

Durante este período los Kepler tuvieron tres hijos, Susanna (1602), que se casó con el asistente de Kepler, Jakob Bartsch, en 1630, Friedrich (1604-1611), y Ludwin (1607-1663). La esposa de Kepler, Barbara, murió en 1612, en el mismo año en que Kepler aceptó la posición de matemático del distrito de Linz, una posición que ocupó hasta 1626. En Linz Kepler se casó con Susanna Reuttinger. La pareja tuvo seis niños, de los cuales 3 murieron a mu corta edad.

En Linz, Kepler publicó su primer trabajo en cronología y el nacimiento de Jesús. En alemán en 1613 y más amplio en latín en 1614 *De Vero Anno quo Aeternus Dei Filius Humanam Naturam in Utero Benedictae Virginis Mariae Assumptis* "Acerca del verdadero año en que el Niño Dios asumió una forma humana en el útero de la sagrada Virgen María". En este trabajo demostró que el calendario cristiano tenía un error de cinco años. Entre 1617 y 1621, Kepler publicó *Epitome Astronomiae Copernicanae* "Epitome de la Astronomía Copernicana", que se convirtió en la influencia más grande para la introducción de la astronomía heliocéntrica; en 1619 publicó *Harmonice Mundi* "Mundo Armónico", en el cual derivó las distancias heliocéntricas a los planetas y sus periodos de consideraciones de armonía musical. En este trabajo encontramos su tercer ley.

En 1615-1616, su madre fue acusada de bruja, y fue liberada cinco años después gracias a la intervención de su hijo Johannes.

### 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

Ahora veamos las 3 leyes de Kepler,

- 1) Los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
- 2) El vector posición de los planetas barre áreas iguales en tiempos iguales.
- 3) El cubo del semieje mayor multiplicado por el inverso de la velocidad angular media al cuadrado es una cantidad constante para todos los planetas.

Ahora nos daremos a la tarea de demostrar cada una. La primera la acabamos de demostrar en el capítulo anterior, de hecho encontramos otras posibles órbitas de otros objetos (como parábolas, hipérbolas y círculos), veamos pues la segunda ley.

Ahora enfoquemos toda nuestra atención en la Fig. 2.3

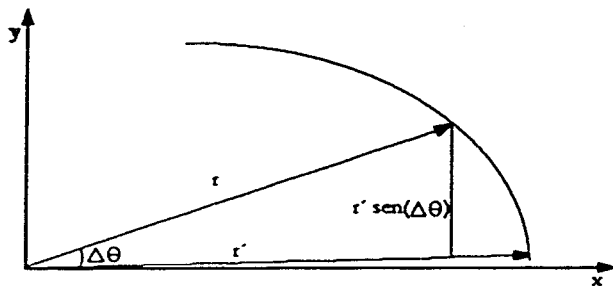


Fig. 2.3 Pequeño desplazamiento del vector posición, de  $r$  a  $r'$  se desplaza un ángulo  $\Delta\theta$

Se ve que para un pequeño desplazamiento se cumple, que si llamamos  $A$  al área que barre el vector posición en un avance de ángulo  $\Delta\theta$ , entonces claramente de la figura 3 se puede deducir que:

$$\Delta A \approx (\text{base}) \left( \frac{\text{altura}}{2} \right) = r' \left( \frac{r \sin(\Delta\theta)}{2} \right) \quad (2.3,1)$$



### 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

Por lo que:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r'r \operatorname{sen}(\Delta\theta)}{2} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (2,3,2)$$

En el límite cuando  $\Delta\theta$  es muy pequeño se cumple que  $\operatorname{sen}(\theta) \approx \Delta\theta$  y  $r' \approx r$  de donde la ec. (2.3.2) se simplifica en:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{2} \quad (2,3,3)$$

pero como ya vimos la parte derecha de la ec. (2.3.3) es la mitad del momento angular y es constante por lo que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} \quad (2,3,4)$$

integrando obtenemos:

$$A = \frac{h}{2}t + C \quad (2,3,5)$$

Con  $C = cte.$

Con ésto concluimos la demostración de la segunda ley de Kepler.

Para poder demostrar la 3ª ley de Kepler es necesario hacer algunas demostraciones antes, para poder sacarla de manera evidente.

Tomemos la ecuación de la energía total:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = E_{Total} \quad (2,3,6)$$

Pero como ya vimos de la ec. (2,1,20), podemos sustituir el valor de la velocidad al cuadrado en coordenadas polares en la ec. (2,3,6)

$$\frac{1}{2}m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{k}{r} = E_{Total} \quad (2,3,7)$$

pero usando el cambio de variable de  $u = \frac{1}{r}$  y dándonos cuenta que:

$$r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = r^4 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \frac{1}{r^2} = h^2 u^2 \quad (2,3,8)$$

de donde:

$$E_{Total} = \frac{1}{2}m \left( \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m \left( \left( -h \frac{du}{d\theta} \right)^2 + h^2 u^2 \right) - ku = \frac{1}{2}mh^2 \left( \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) - ku \quad (2,3,9)$$

de donde:

## 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

$$\left(\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right) = (E_{Total} + ku) \frac{2}{mh^2} \quad (2,3,10)$$

por lo que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= (E_{Total} + ku) \frac{2}{mh^2} - u^2 \\ \frac{du}{d\theta} &= \sqrt{(E_{Total} + ku) \frac{2}{mh^2} - u^2} \end{aligned} \quad (2,3,11)$$

son variables separables por lo que:

$$\left((E_{Total} + ku) \frac{2}{mh^2} - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du = d\theta \quad (2,3,12)$$

y buscando en libros de tablas matemáticas vemos que:

$$\theta = \theta_0 + \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{h^2 mu - k}{(k^2 + 2E_{Total} mh^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (2,3,13)$$

sea  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{mh^2 u - k}{(k^2 + 2E_{Total} mh^2)^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{\pi}{2} \quad (2,3,14)$$

$$\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}^{-1} \left[ \frac{mh^2 u - k}{(k^2 + 2E_{Total} mh^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (2,3,15)$$

de donde

$$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{mh^2 u - k}{(k^2 + 2E_{Total} mh^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2,3,16)$$

pero como sabemos:

$$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}(\theta) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cos(\theta) \quad (2,3,17)$$

por lo tanto

$$\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta) \quad (2,3,18)$$

por lo tanto si sustituimos la ec. (2.3.18) en la ec. (2.3.16) obtenemos:

$$\cos(\theta) = \frac{h^2 u - k}{(k^2 + 2E_{Total} mh^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2,3,19)$$

de donde:

## 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

$$\begin{aligned}
 (k^2 + 2E_{Total}mh^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta) &= h^2 mu - k \\
 (k^2 + 2E_{Total}mh^2)^{\frac{1}{2}} \cos(\theta) + k &= mh^2 u \\
 \frac{(k^2 + 2E_{Total}mh^2)^{\frac{1}{2}}}{mh^2} \cos(\theta) + \frac{k}{mh^2} &= u
 \end{aligned} \tag{2,3,20}$$

de donde:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} &= \frac{(k^2 + 2E_{Total}mh^2)^{\frac{1}{2}}}{mh^2} \cos(\theta) + \frac{k}{mh^2} \\
 \frac{1}{r} &= \frac{k}{mh^2} \left[ \frac{(k^2 + 2E_{Total}mh^2)^{\frac{1}{2}}}{k} \cos(\theta) + 1 \right]
 \end{aligned} \tag{2,3,21}$$

por lo que:

$$r = \frac{h^2}{k} \left[ \frac{1}{\frac{(k^2 + 2E_{Total}mh^2)^{\frac{1}{2}}}{k} \cos(\theta) + 1} \right] \tag{2,3,22}$$

por lo tanto comparando la ec. (2,3,22) con la ec. (2,2,22) vemos que necesariamente se tiene que cumplir que:

$$e = \left( 1 + 2 \frac{E_{Total}mh^2}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2,3,23}$$

de donde sustituyendo que  $k = GMm$ :

$$e = \left( 1 + \frac{2E_{Total}mh^2}{G^2 M^2 m^2} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2,3,24}$$

y como ya demostramos en la sección de la ecuación Vis Viva, de la ec. (2,2,45):

$$E_{Total} = - \frac{GMm}{2a} \tag{2,3,25}$$

así pues:

$$e = \left( 1 - 2 \frac{GMm}{2a} \frac{mh^2}{G^2 M^2 m^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{aGMm^2}} \tag{2,3,26}$$

elevando al cuadrado:

$$\begin{aligned}
 e^2 &= \left( 1 - \frac{L^2}{aGMm^2} \right) \\
 \frac{L^2}{aGMm^2} &= 1 - e^2 \\
 L^2 &= aGMm^2(1 - e^2)
 \end{aligned}$$

## 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

$$L = \sqrt{aGMm^2(1 - e^2)} = m\sqrt{aGM(1 - e^2)} \quad (2,3,27)$$

Pero como ya vimos  $L = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$  de donde:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{aGM(1 - e^2)} \quad (2,3,28)$$

y como ya vimos en la ec. (2,2,26), sustituyendo r:

$$\frac{a^2(1 - e^2)^2}{(1 + e \cos(\theta))^2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \sqrt{aGM(1 - e^2)} \quad (2,3,29)$$

de donde se ve que nos queda una ecuación diferencial separable de donde:

$$\frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \sqrt{\frac{aGM(1 - e^2)}{a^4(1 - e^2)^4}} dt = \sqrt{\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3}} dt \quad (2,3,30)$$

así que si integramos de ambos lados de la igualdad en la órbita completa:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \sqrt{\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3}} \int_0^P dt = \sqrt{\frac{GM}{a^3(1 - e^2)^3}} P \quad (2,3,31)$$

donde  $P$  es el período, citando de nuevo las tablas de integrales resulta que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos(x))^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2,3,32)$$

de donde:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} P \quad (2,3,33)$$

por lo tanto encontramos que:

$$\begin{aligned} 2\pi &= \sqrt{\frac{GM}{a^3}} P \\ \frac{2\pi}{P} &= \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \\ \left( \frac{2\pi}{P} \right)^2 &= \frac{GM}{a^3} \end{aligned} \quad (2,3,34)$$

y como sabemos la velocidad angular media está dada por la distancia angular total ( $2\pi$ ) entre el tiempo que tarda en recorrerla ( el período  $P$ ).

$$w = \left\langle \frac{d\theta}{dt} \right\rangle = \frac{2\pi}{P} \quad (2,3,35)$$

## 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER

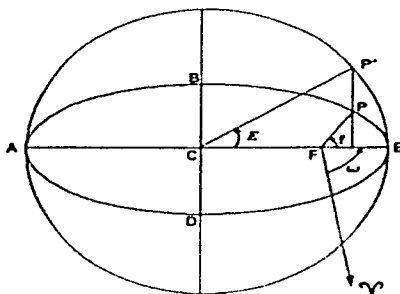
por lo tanto tomando la ec. (2,3,34) y la ec. (2,3,35) obtenemos la forma más conocida de la 3a ley de Kepler:

$$a^3 \omega^2 = GM \quad (2,3,36)$$

con ésto concluimos la demostración de las 3 leyes de Kepler.

### 3.1. 2.4 ELEMENTOS ORBITALES

Los elementos orbitales son la excentricidad  $e$ , el semieje mayor  $a$ , la inclinación  $i$ , la longitud del nodo ascendente  $\Omega$ , la verdadera anomalía  $f$ , y el argumento del periapside  $\tilde{\omega}$ . Con las primeras dos ya nos encontramos familiarizados de nuestros cursos de geometría analítica y de lo que acabamos de ver en los capítulos anteriores, pero con los demás no, así que tendremos que ver cómo son. Primero que nada verificamos que son 6 nuevas variables, al igual que son 6 variables cartesianas (3 para la posición y 3 para el momento), así pues debe existir una transformación entre ambas. Para ver qué significa cada una de las nuevas variables veamos la figura 2.4a y la figura 2.4b.



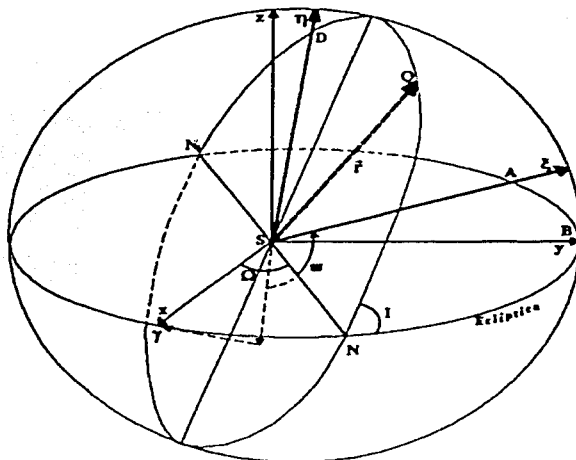
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig 2.4 a

En esta figura se muestra el plano orbital de la partícula. La relación entre la anomalía excéntrica,  $E$ , que es el ángulo  $P'CE$  y la verdadera anomalía,  $f$ , que es el ángulo  $PFE$ . Para pequeñas excentricidades, estos dos ángulos son casi iguales. El vector que va del punto  $F$  al punto  $\gamma$  es el vector proyección del vector que va al llamado punto gamma sobre el plano orbital ( el punto gamma es donde el eje  $X$  y la eclíptica se tocan )

Los elementos son mucho más cómodos en muchos casos pues en las coordenadas cartesianas, el problema del campo gravitacional dado por un cuerpo y una partícula de prueba orbitando alrededor, todas las variables cartesianas están variando (tanto la posición como la velocidad), sin embargo en términos de los elementos orbitales, por ejemplo para el caso de una órbita elíptica, sólo es el ángulo  $\theta = f - \tilde{\omega}$  el que está variando ( $\tilde{\omega}$  no

## 2.3 LAS 3 LEYES DE KEPLER



**Fig 2.4 b** En esta figura se muestran cada uno de los ángulos necesarios para definir la trayectoria de una partícula en el espacio tridimensional, se muestra la inclinación  $I$  que es el ángulo que forma el plano orbital y la eclíptica, se muestra la recta de intersección entre el plano orbital y la eclíptica y se muestran los puntos extremos de dicha recta con los nombres  $N$  y  $N'$ , la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  es el ángulo que forma la recta de intersección y el eje  $X$ . También se muestra el punto gamma  $\gamma$  que es el punto donde se intersectan el eje  $X$  y la eclíptica. El argumento del periapside  $\omega$  que es el ángulo que forma la proyección del punto gamma  $\gamma$  en el plano orbital y el eje  $\xi$ .

varia), en otras palabras para 6 coordenadas cartesianas existen 6 elementos orbitales de los cuales 5 son constantes en el tiempo para el campo central y para el problema de los dos cuerpos.

En el apéndice I se ve cómo pasar de elementos orbitales a coordenadas cartesianas y también cómo pasar de coordenadas cartesianas a elementos orbitales.

Con esto concluimos el capítulo 2.

### III El Problema de los 3 Cuerpos Restringido

#### 3.1 El Problema de los 3 Cuerpos General

El problema de los 3 cuerpos no se ha podido resolver a pesar de que las mejores mentes de todos los tiempos han tratado de atacarlo y darle solución. Gente como Newton, Gauss, Lagrange, Poincaré, etc.

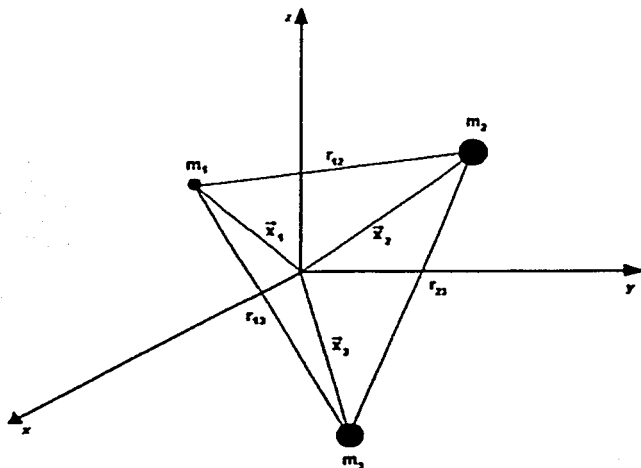


Fig 3.1 Planteamiento del Problema de los Tres Cuerpos General

Primero discutamos el Problema de los Tres Cuerpos en General (PTCG) para ver cuál es el problema de hallar su solución, supongamos que tenemos tres partículas acomodadas de manera arbitraria, como se muestra en la fig. (3.1), supongamos que escogemos cualquiera como la partícula 1 y que ésta tiene una masa  $m_1$  y escogemos otra y la llamamos partícula 2 con masa  $m_2$  y por último tomamos la partícula que nos faltaba como partícula 3 y cuya masa es  $m_3$ .

Entonces las ecuaciones de movimiento estarán dadas por:

$$\vec{F}_{i1} = m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} \quad (3,1,1)$$

$$\vec{F}_{i2} = m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} \quad (3,1,2)$$

$$\vec{F}_{i3} = m_3 \vec{a}_3 = \vec{F}_{32} + \vec{F}_{31} \quad (3,1,3)$$

donde  $\vec{F}_i$  es la fuerza total que actúa sobre la partícula  $i$ ,  $m_i$  es la masa de la partícula  $i$ ,  $\vec{F}_{ij}$  es la fuerza que siente la partícula  $i$ -ésima debido a la  $j$ -ésima.

Pero como la atracción entre ellas supondremos que es sólo gravitacional.

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{r}_{12}|^3} - Gm_1 m_3 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{r}_{13}|^3} \quad (3,1,4)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -Gm_2 m_1 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{r}_{21}|^3} - Gm_2 m_3 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{|\vec{r}_{23}|^3} \quad (3,1,5)$$

$$m_3 \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} = -Gm_3 m_2 \frac{(\vec{x}_3 - \vec{x}_2)}{|\vec{r}_{32}|^3} - Gm_3 m_1 \frac{(\vec{x}_3 - \vec{x}_1)}{|\vec{r}_{31}|^3} \quad (3,1,6)$$

con  $\vec{x}_i$  la posición de la partícula  $i$ -ésima y el vector diferencia definido como  $|\vec{r}_{ij}| = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ . La única información extra que podemos obtener está dada por la 3ª ley de Newton que nos dice que  $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ , lo cual cambiaría el signo a algunos miembros de las ecs. (3.1.4) (3.1.5) y (3.1.6). Pero si observamos que  $\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = -(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$ :

$$m_1 \frac{d^2 \vec{x}_1}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{r}_{12}|^3} - Gm_1 m_3 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{r}_{13}|^3} \quad (3,1,7)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{x}_2}{dt^2} = -Gm_1 m_2 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}{|\vec{r}_{12}|^3} - Gm_2 m_3 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{|\vec{r}_{23}|^3} \quad (3,1,8)$$

$$m_3 \frac{d^2 \vec{x}_3}{dt^2} = -Gm_2 m_3 \frac{(\vec{x}_2 - \vec{x}_3)}{|\vec{r}_{23}|^3} - Gm_1 m_3 \frac{(\vec{x}_1 - \vec{x}_3)}{|\vec{r}_{13}|^3} \quad (3,1,9)$$

De donde obtenemos un conjunto de 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas, que nadie ha podido solucionar más que para casos particulares como el que vamos a discutir aquí y para casos triviales sin interés científico (por ejemplo que estén inicialmente en reposo acomodadas en forma de triángulo equilátero y con la misma masa).

### 3.2 El Problema Circular de los Tres Cuerpos Restringido y La Integral de Jacobi

Ahora definiremos y veremos el Problema Circular de los Tres Cuerpos Restringido (PCTCR). El problema particular que vamos a tratar fue por primera vez discutido por Lagrange en 1772.



Hagamos algunas definiciones antes de comenzar la discusión, decimos que un cuerpo es un "cuerpo infinitesimal" si es atraído por masas finitas pero ella no atrae a los cuerpos de masa finita. La interpretación física de dicha definición es que un cuerpo infinitesimal es aquel cuya masa es tan pequeña que no perturba el movimiento de los cuerpos de masa finita de manera apreciable.

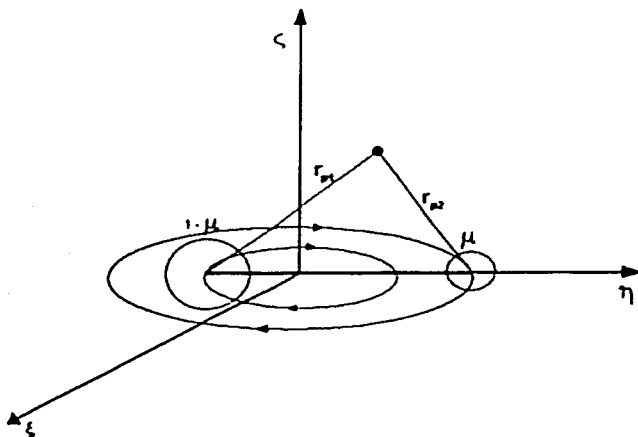


Fig 3.2 Planteamiento del Problema de los Tres Cuerpos Restringido, los cuerpos masivos giran con velocidad angular constante y la distancia entre ambas permanece constante

El PCTCR consiste de dos cuerpos masivos que giran alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante y para facilitar el cálculo supongamos que la velocidad angular de rotación es 1, y un cuerpo infinitesimal que está a merced del campo gravitacional de estos dos cuerpos pero sin interferir en el movimiento de éstos.

Para facilitar aún más los cálculos supongamos que la suma de las masas es 1, entonces uno de los cuerpos tendrá una masa  $\mu$  y la otra, una masa  $1 - \mu$ , llamemos al primero el cuerpo 2 y al segundo el cuerpo 1, al cuerpo infinitesimal llamémoslo cuerpo 3. Cabe señalar que el caso que nos ocupará será el que cumple con la condición  $\mu < \frac{1}{2}$  es decir

que la masa del cuerpo 2 es mucho menor que la del cuerpo 1. Sea la distancia entre los cuerpos masivos (que por cierto supondremos siempre constante) la unidad de distancia.

Escojamos el origen de coordenadas en el centro de masa de los cuerpos masivos, y tres ejes ortogonales  $(\xi, \eta, \zeta)$  de tal forma que el plano  $\xi\eta$  siempre contenga a los dos cuerpos ver fig. (3.2). Así pues el vector posición de cada uno de los cuerpos masivos estará dado por:

$$\vec{r}_1 = (\xi_1, \eta_1, 0) \quad (3,2,1)$$

$$\vec{r}_2 = (\xi_2, \eta_2, 0) \quad (3,2,2)$$

Ahora sea  $\vec{r} = (\xi, \eta, \zeta)$  el vector posición de la partícula infinitesimal entonces su ecuación de movimiento sera:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{r_{p1}^3} - \mu \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,3)$$

Con  $r_{p1} \equiv |\vec{r} - \vec{r}_1|$  y por por otro lado  $r_{p2} \equiv |\vec{r} - \vec{r}_2|$  que son las distancias del cuerpo 3 a las masas  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente.

Pero la ec. (3,2,3) se puede descomponer como:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\xi - \xi_1}{r_{p1}^3} - \mu \frac{\xi - \xi_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,4)$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\eta - \eta_1}{r_{p1}^3} - \mu \frac{\eta - \eta_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,5)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{\zeta - \zeta_1}{r_{p1}^3} - \mu \frac{\zeta - \zeta_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,6)$$

Pero como el movimiento de la partícula infinitesimal depende de la posición de las otras dos es necesario ver las ecuaciones de las partículas masivas.

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\frac{G(1 - \mu)\mu}{r_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad (3,2,6a)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{G\mu(1 - \mu)}{r_{21}^2} \vec{r}_{21} \quad (3,2,6b)$$

Pero tenemos la condicion extra  $r_{12} = r_{21} = cte = 1$  y además no es difícil demostrar que  $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$ .

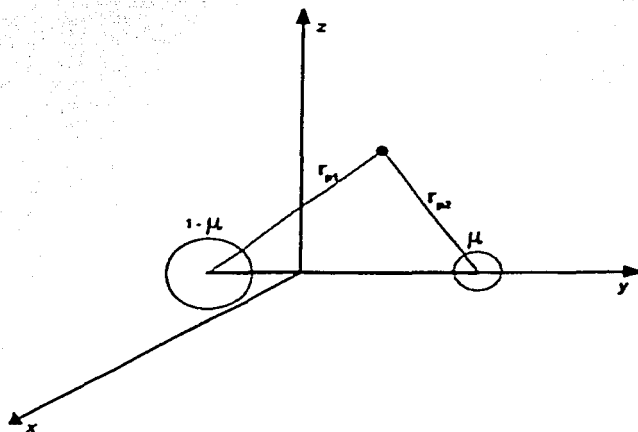


Fig 3.3 Problema de los Tres Cuerpos Restringido visto desde el sistema de referencia que gira con la misma velocidad angular que los cuerpos

Ahora, si nos cambiamos a un sistema de referencia que tenga el mismo origen pero con ejes ortogonales  $x$ ,  $y$  y  $z$  tales que los ejes  $x$  e  $y$  están en el plano  $\xi \eta$  pero rotan a la misma velocidad angular de los cuerpos masivos, y el eje  $z$  es paralelo al eje  $\zeta$

$$\xi = x \cos(t) - y \sin(t) \quad (3,2,7)$$

$$\eta = x \sin(t) + y \cos(t) \quad (3,2,8)$$

$$\zeta = z \quad (3,2,9)$$

de donde:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos(t) - \sin(t)x - \frac{dy}{dt} \sin(t) - \cos(t)y$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cos(t) - \sin(t) \frac{dx}{dt} - \cos(t)x - \frac{dx}{dt} \sin(t) - \frac{d^2y}{dt^2} \sin(t) - \cos(t) \frac{dy}{dt} + \sin(t)y - \frac{dy}{dt} \cos(t) \quad (3,2,10)$$

reagrupando y simplificando

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \cos(t) \left( \frac{d^2x}{dt^2} - x - 2 \frac{dy}{dt} \right) + \sin(t) \left( -2 \frac{dx}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + y \right) \quad (3,2,11)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \cos(t) \left( \frac{d^2x}{dt^2} - x - 2 \frac{dy}{dt} \right) - \sin(t) \left( 2 \frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - y \right) \quad (3,2,12)$$

y como sabemos la distancia es un invariante ante rotaciones. Sustituyendo las ecs. (3,2,12) en la ec. (3,2,4) obtenemos:

$$\begin{aligned} & \cos(t) \left( \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x \right) - \sin(t) \left( \frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} - y \right) = \\ & -(1 - \mu) \left[ \frac{x - x_1}{r_{p1}^3} \cos(t) - \frac{y - y_1}{r_{p1}^3} \sin(t) \right] - \mu \left[ \frac{x - x_2}{r_{p2}^3} \cos(t) - \frac{y - y_2}{r_{p2}^3} \sin(t) \right] \quad (3,2,13) \end{aligned}$$

reagrupando:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x \right] \cos(t) - \left[ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y \right] \sin(t) = \\ & - \left[ (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_{p1}^3} + \mu \frac{x - x_2}{r_{p2}^3} \right] \cos(t) + \left[ (1 - \mu) \frac{y - y_1}{r_{p1}^3} + \mu \frac{y - y_2}{r_{p2}^3} \right] \sin(t) \quad (3,2,14) \end{aligned}$$

de manera totalmente análoga obtenemos:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - x \right] \sin(t) - \left[ \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - y \right] \cos(t) = \\ & - \left[ (1 - \mu) \frac{x - x_1}{r_{p1}^3} + \mu \frac{x - x_2}{r_{p2}^3} \right] \sin(t) - \left[ (1 - \mu) \frac{y - y_1}{r_{p1}^3} + \mu \frac{y - y_2}{r_{p2}^3} \right] \cos(t) \quad (3,2,15) \end{aligned}$$

y por último

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(1 - \mu) \frac{z}{r_{p1}^3} - \mu \frac{z}{r_{p2}^3} \quad (3,2,16)$$

Multiplicando la ec. (3.2.14) por  $\cos(t)$  y la ec. (3.1.15) por  $-\sin(t)$  y sumando el resultado es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -(1-\mu)\frac{x-x_1}{r_{p1}^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,18)$$

multiplicando la ec. (3.2.14) por  $-\sin(t)$  y la ec. (3.2.15) por  $\cos(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -(1-\mu)\frac{y-y_1}{r_{p1}^3} - \mu\frac{y-y_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,19)$$

Así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -(1-\mu)\frac{x-x_1}{r_{p1}^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,20)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -(1-\mu)\frac{y-y_1}{r_{p1}^3} - \mu\frac{y-y_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,21)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(1-\mu)\frac{z}{r_{p1}^3} - \mu\frac{z}{r_{p2}^3} \quad (3,2,22)$$

Tomemos la orientación de los ejes coordenados (rotantes) de modo que:

$$y_1 = y_2 = 0 \quad (3,2,23)$$

en todo instante de tiempo; por lo tanto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = -(1-\mu)\frac{x-x_1}{r_{p1}^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,24)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = -(1-\mu)\frac{y}{r_{p1}^3} - \mu\frac{y}{r_{p2}^3} \quad (3,2,25)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(1-\mu)\frac{z}{r_{p1}^3} - \mu\frac{z}{r_{p2}^3} \quad (3,2,26)$$

Este conjunto de ecuaciones admiten una integral que fue obtenida por primera vez por Jacobi en *Comptes Rendus des Sciences de Paris* vol. III pág. 59 y fue discutido por Hill en su artículo de la teoría lunar *The American Journal of Mathematics* vol. I pag 18.

Definimos:

$$U(x, y, z) \equiv \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_{p1}} + \frac{\mu}{r_{p2}} \quad (3,2,27)$$

y por definición  $r_{p1} = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2}$  y  $r_{p2} = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + z^2}$  derivando la ec. (3,2,27) con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + (1-\mu)\left(-\frac{1}{2}\right)\left((x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2(x-x_1) + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)\left((x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2(x-x_2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x - (1-\mu)\frac{x-x_1}{r_{p1}^3} - \mu\frac{x-x_2}{r_{p2}^3} \quad (3,2,28)$$

por lo tanto las ec. (3,2,24) se puede escribir como:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (3,2,29)$$

Se procede de la misma manera para  $\frac{\partial U}{\partial y}$  y para  $\frac{\partial U}{\partial z}$  para obtener:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (3,2,30)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (3,2,31)$$

si multiplicamos la ec. (3,2,29) por  $2\frac{dx}{dt}$ , la ec. (3,2,30) por  $2\frac{dy}{dt}$  y la ec. (3,2,31) por  $2\frac{dz}{dt}$  obtenemos:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 2\frac{dx}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} \quad (3,2,32)$$

$$2\frac{dy}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} = 2\frac{dy}{dt}\frac{\partial U}{\partial y} \quad (3,2,33)$$

$$2\frac{dz}{dt}\frac{d^2 z}{dt^2} = 2\frac{dz}{dt}\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3,2,34)$$

de donde si sumamos las ecs. (3,2,32) (3,2,33) y (3,2,34):

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + 2\frac{dz}{dt}\frac{d^2 z}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}\frac{\partial U}{\partial x} + 2\frac{dy}{dt}\frac{\partial U}{\partial y} + 2\frac{dz}{dt}\frac{\partial U}{\partial z} \quad (3,2,35)$$

De donde

$$2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) \quad (3,2,36)$$

vemos que la segunda parte de la igualdad es la definición de la derivada total respecto a  $t$  de  $U(x(t), y(t), z(t))$  y vemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3,2,37)$$

de donde sustituyendo la ec. (3,2,37) en la ec. (3,2,36)

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right] = \frac{d}{dt} (2U(x, y, z)) \quad (3,2,38)$$

así podemos integrar de ambos lados de la igualdad para obtener:

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = 2U(x, y, z) - C \quad (3,2,39)$$

con  $C$  una constante en el tiempo y resulta evidente que la parte izquierda es el cuadrado de la norma de la velocidad en coordenadas cartesianas del sistema rotante.

Como ya sabemos, para poder resolver el problema necesitaríamos de 5 integrales más. Si limitamos el cuerpo infinitesimal a que sólo se pueda mover en el plano  $XY$  entonces sólo necesitamos 3 integrales más. Así pareciera que solo falta conocer dos integrales para resolver el problema, pero Bruns probó en *Acta Mathematica* vol. XI que en coordenadas rectangulares no existe solución algebraica y Poincaré probó en su *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste* vol. I cap. V que cuando los elementos orbitales son usados como variables no hay nuevas integrales trascendentales. Aún cuando la masa de uno de los cuerpos finitos se haga muy pequeña comparada con la otra.

## Capítulo IV Las Ecuaciones de la Variación de los Elementos Orbitales

### 4.1 La Física del Encuentro Orbital entre la Partícula y el Satélite

En el Problema Plano restringido de Tres cuerpos, el objetivo es encontrar cómo se modifica la órbita (alrededor del cuerpo central), de una partícula sin masa en presencia de un satélite (poco masivo) que también orbita alrededor del cuerpo central. Supondremos que el satélite está en una órbita circular exterior a la órbita elíptica de la partícula sin masa, como se muestra en la Fig. 4.1 y supongamos que las órbitas se recorren en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Como la masa del satélite se supone mucho menor que la del cuerpo central, la mayor parte del tiempo, la interacción gravitacional partícula-satélite es prácticamente despreciable. Solamente cuando ocurre una conjunción la partícula "siente" la presencia del satélite. Por estar en una órbita más interna, la velocidad angular media de la partícula es mayor que la del satélite, por tanto, para una conjunción en el punto "A", la partícula siente primero una fuerza tangencial debida al satélite, que va en la misma dirección que su velocidad tangencial. Después de la conjunción la partícula sufre una fuerza tangencial en sentido contrario. Sin embargo, antes de la conjunción la velocidad relativa entre el satélite y la partícula es menor que después de la conjunción (puesto que la partícula va camino del periapside) y la interacción dura más tiempo. Además sus órbitas están más cercanas (mayor fuerza gravitacional) antes de la conjunción. Así pues, la fuerza tangencial antes de la conjunción no solamente es mayor sino que actúa por más tiempo que la fuerza tangencial después de la conjunción. El resultado neto es un aumento en la velocidad tangencial de la partícula y en consecuencia, su momento angular aumenta. El aumento en la velocidad tangencial implica también un aumento en la energía total de la partícula. Por tanto, la partícula "se muda" a una órbita más externa, donde finalmente su velocidad tangencial disminuye así como también su velocidad angular. Entonces, el resultado neto de una conjunción en el punto "A" es un aumento del momento angular y después de migrar a una órbita más externa, una disminución en la velocidad angular.

Una interacción en el punto "B" ocurre de manera inversa, las órbitas están en convergencia y la partícula camino del apoapside (mínima velocidad), por tanto, la fuerza tangencial antes de la conjunción que va en la misma dirección que la velocidad tangencial, es menor y actúa por menos tiempo que la fuerza después de la conjunción (frenado). La velocidad tangencial de la partícula disminuye, al igual que su momento angular y



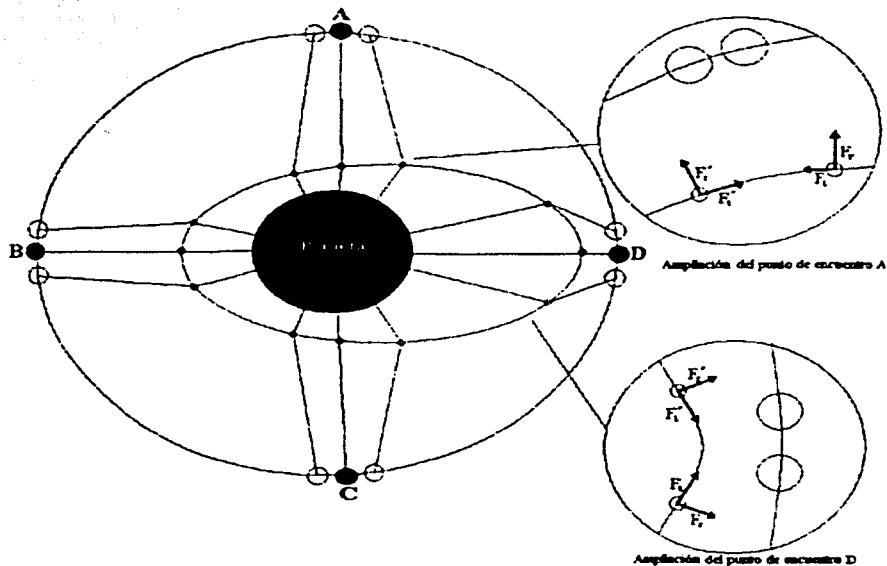


Fig. 4.1

En esta figura se ven posibles lugares para que suceda el encuentro entre la partícula y el satélite, como se ve en el perispside y en el apopside la fuerza tangencial se suma, pero esto solo sucede en estos dos puntos (ver ampliación del punto de encuentro A). En cualquier otro punto la fuerza no se suma y esto da como resultado que el momento angular  $L$  cambie, modificando la órbita (ver ampliación del punto de encuentro D).

la partícula se ve obligada a "migrar" a una órbita más interna donde finalmente su velocidad angular aumenta.

Lo que interesa ahora es expresar cuantitativamente los cambios en la órbita de la partícula ante la presencia del satélite.

## 4.2 Variación de los Elementos Orbitales

El problema restringido circular de los tres cuerpos se puede atacar por diversos caminos, lo que nosotros haremos en este capítulo será usar la herramienta estándar usada en la mecánica celeste dada por la teoría de las pequeñas perturbaciones que consiste en poner las ecuaciones de movimiento de la partícula sin masa en términos de una

función perturbadora.

Cabe señalar que primero daremos una pequeña introducción del procedimiento y los pasos a seguir en este capítulo para podernos dar una visión global de lo que vamos a hacer y por qué.

En esta sección nos ocuparemos de la variación de los elementos orbitales osculantes de la partícula sin masa, en términos de la función perturbadora. Para ello partiremos de las ecuaciones de Newton, que son 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden, escritas en términos de una función perturbadora.

De aquí en adelante supondremos que el planeta es lo suficientemente masivo y la masa del satélite lo suficientemente pequeña como para no tomar en cuenta el movimiento del planeta alrededor del centro de masa y referir el movimiento de la partícula respecto a un sistema de referencia inercial que está en el centro del planeta.

Supongamos además que la masa del satélite es tan pequeña como para sólo ser una perturbación al movimiento elíptico que seguiría la partícula si no existiera el satélite.

Supondremos, como ya lo mencionamos que el planeta no se está moviendo, que el satélite está en una órbita circular alrededor del planeta y que la partícula se encuentra orbitando alrededor del planeta sintiendo únicamente la fuerza del planeta.

Las ecuaciones de Newton de la partícula descritas desde dicho sistema de referencia estarán dadas por:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \quad (4,2,0,1)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} \quad (4,2,0,2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \quad (4,2,0,3)$$

Donde  $(x, y, z)$  son las coordenadas de la partícula referidas al sistema de referencia inercial ubicado en el centro del planeta,  $\mu = GM_{\text{planeta}}$  con  $M_{\text{planeta}}$  la masa del planeta,  $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x}$  es la fuerza gravitacional del planeta sobre la partícula y  $\nabla \mathcal{R}$  es la fuerza del satélite sobre la partícula.

Mediante el método de variación de constantes podremos encontrar la doble derivada en el tiempo de las coordenadas cartesianas, pero esta vez en términos de los elementos orbitales osculantes y al sustituir dichas dobles derivadas en las ecuaciones de Newton encontramos 6 ecuaciones de primer grado que también dependen de la función perturbadora. Luego definiremos los brackets de Lagrange y deduciremos dos de sus principales propiedades más importantes, que son la antisimetría y sobre todo su invariancia en el tiempo.

Pondremos a continuación las 6 ecuaciones de primer orden que habíamos encontrado en términos de los brackets de Lagrange. Utilizaremos el método de Whittacker para calcular los brackets de Lagrange, que consiste en hacer 3 rotaciones para facilitar el cálculo de cada bracket. Aprovechando la propiedad de invariancia en el tiempo de los brackets haremos una serie de Taylor de las coordenadas y evaluaremos dicha serie cuando el tiempo  $t$  es igual al período  $P$  con lo que se eliminarán todos los términos excepto los independientes en el tiempo.

Así pues al sustituirlo en las 6 ecuaciones que vamos a encontrar, que consistirán de los brackets de Lagrange multiplicados cada uno por el cambio de un elemento orbital osculante en el tiempo, vamos a poder despejar el cambio de los elementos orbitales osculantes en términos de la función perturbadora para poder finalmente encontrar las siguientes ecuaciones:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varepsilon} \quad (4,2,0,4)$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2 e} (1 - \sqrt{(1-e^2)}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varepsilon} \quad (4,2,0,5)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} + \frac{\tan\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2 \sqrt{(1-e^2)}} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} + \frac{\sqrt{(1-e^2)}(1 - \sqrt{(1-e^2)})}{(na^2)e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad (4,2,0,6)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} + \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)}na^2} \tan\left(\frac{I}{2}\right) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (4,2,0,7)$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan\left(\frac{i}{2}\right)}{na^2 \sqrt{(1-e^2)}} \left[ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varepsilon} \right] - \frac{1}{na^2 \sqrt{(1-e^2)} \operatorname{sen} I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega} \quad (4,2,0,8)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{(1-e^2)} \operatorname{sen} I} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial I} \quad (4,2,0,9)$$

donde todas las variables tienen el mismo significado que en el capítulo 2, excepto  $\varepsilon = \lambda + n\tau$ , donde  $\varepsilon$  es la *longitud media* en época,  $\lambda$  es el *longitud media* y  $\tau$  el *tiempo de paso por el pericentro*, que más adelante explicaremos.

#### 4.2.1 Elementos Orbitales Osculantes y el Método de Variación de Constantes

La fuerza del satélite sobre la partícula de prueba está dada por la siguiente ecuación:

$$\vec{R} = (\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3) \quad (4,2,1,1)$$

así vemos que las ecs. de movimiento de la partícula son:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{x}{r^3} = \mathcal{R}_1 \quad (4,2,1,2)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu \frac{y}{r^3} = \mathcal{R}_2 \quad (4,2,1,3)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \mu \frac{z}{r^3} = \mathcal{R}_3 \quad (4,2,1,4)$$

Con  $\mu = GM$  y  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  y  $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$  las componentes del gradiente de la función perturbadora  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} \quad (4,2,1,5)$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} \quad (4,2,1,6)$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial z} \quad (4,2,1,7)$$

Supongamos por un momento que las ecs. (4,2,1,5) a (4,2,1,7), son idénticamente cero, entonces la solución es idéntica a la del campo central y las 6 coordenadas cartesianas de posición y velocidad se pueden escribir como:

$$x = f_1(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad (4,2,1,8)$$

$$\frac{dx}{dt} = g_1(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad (4,2,1,9)$$

$$y = f_2(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad 4,2,1,10$$

$$\frac{dy}{dt} = g_2(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad (4,2,1,11)$$

$$z = f_3(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad 4,2,1,12$$

$$\frac{dz}{dt} = g_3(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \quad (4,2,1,13)$$

donde las 6 constantes representan los 6 elementos orbitales que definen una órbita en el espacio tridimensional:

$$c_1 = a$$

$$c_2 = e$$

$$c_3 = \epsilon$$

$$c_4 = \bar{\omega}$$

$$c_5 = I$$

$$c_6 = \Omega$$

Como vimos en el capítulo 2, sección 2.4,  $a$  es el semieje mayor,  $e$  es la excentricidad,  $\bar{\omega}$  es el argumento del periapside,  $I$  es la inclinación y  $\Omega$  la longitud del nodo ascendente. El único elemento nuevo es  $\epsilon$  que describiremos a continuación.

Definimos la anomalía media,  $M$ , como:

$$M \equiv n(t - \tau) \quad (4,2,1,14)$$

Con  $n$  la velocidad angular media,  $t$  el tiempo y  $\tau$  el tiempo de paso por el pericentro. Recordemos de la fig. (2,4a) que la anomalía excentrica  $E$  es el ángulo P'CE, se puede demostrar que se cumplen las siguientes relaciones para  $E$ .

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right) \quad (4,2,1,15)$$

que es la ecuación de Kepler, y también:

$$M = E - e \operatorname{sen}(E) \quad (4,2,1,16)$$

Definimos la longitud media,  $\lambda$  cómo:

$$\lambda \equiv M + \bar{\omega} \quad (4,2,1,17)$$

Definimos por último a la longitud media en época (mean longitude at epoch),  $\epsilon$ , cómo:

$$\epsilon \equiv \lambda - nt \quad (4,2,1,18)$$

Sustituyendo la ec. (4,2,1,14) y la ec. (4,2,1,17) en la ec. (4,2,1,18) encontramos:

$$\epsilon = \bar{\omega} - n\tau \quad (4,2,1,19)$$

Después de haber definido cada una de las constantes que usaremos continuemos con nuestro análisis. En el movimiento que estamos describiendo,  $c_1, c_2, \dots, c_6$  son constantes, de donde:

$$g_k = \frac{\partial f_k}{\partial t} \quad (4,2,1,20)$$

con  $k = 1, 2, 3$ .

Como ya se puede vislumbrar en el método de variación de constantes, éstas dejan de serlo y se convierten en funciones del tiempo, es decir:

$$c_i = c_i(t)$$

con  $i = 1, 2, 3$ .

La derivada total de  $x$  es entonces:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_1}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} \quad (4.2.1,21)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_2}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} \quad (4.2.1,22)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial f_3}{\partial c_i} \frac{dc_i}{dt} \quad (4.2.1,23)$$

De aquí en adelante usaremos la notación de Einstein, en la cual:

a) Los índices latinos como  $i, j, k$ , etc, tomarán los valores 1, 2, 3. Por otro lado los índices griegos como  $\mu, \nu, \gamma$ , etc, tomarán los valores de 1, 2, 3, 4, 5, 6, entendiendo que  $x_1 = x, x_2 = y$  y  $x_3 = z$ .

b) Cuando dos índices estén repetidos dentro de un mismo término de una ecuación, uno arriba y otro abajo, se entenderá que se esta sumando sobre todos los índices, es decir:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{dt} \equiv \sum_{\mu=1}^6 \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_\mu} \frac{dx_\mu}{dt} \right) \quad (4.2.1,24)$$

Así pues al conjunto de la ec. (4.2.1.21) a la ec. (4.2.1.23) lo podemos escribir de la siguiente forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \frac{dc_\mu}{dt} \quad (4.2.1,25)$$

Para seguir con el análisis introduzcamos la siguiente condicion extra:

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \frac{dc_\mu}{dt} = 0 \quad (4.2.1,26)$$

por lo tanto:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} \equiv g_i \quad (4.2.1,27)$$

y si derivamos de nuevo la ec. (4.2.1.27) obtenemos:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial c_\mu} \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) \right] \frac{dc_\mu}{dt} \quad (4.2.1,28)$$

de donde por (4.2.1.27) obtenemos:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \left[ \frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \right] \frac{dc_\mu}{dt} \quad (4.2.1,30)$$

Por otro lado al conjunto de la ec. (4.2.1.2) a la (4.2.1.4) lo podemos escribir como:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \mu \frac{x_i}{r^3} = \mathcal{R}_i \quad (4.2.1,31)$$

Así pues si sustituimos la ec. (4.2.1.30) en la ec. (4.2.1.31) obtenemos

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \left[ \frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \right] \frac{dc_\mu}{dt} + \frac{\mu}{r^3} f_i = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \quad (4.2.1,32).$$

donde  $r = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2}$ , reagrupando la ec. (4.2.1.32) obtenemos:

$$\left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \frac{\mu}{r^3} f_i \right] + \frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \frac{dc_\mu}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \quad (4.2.1,33)$$

Però como sabemos en el campo central:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} + \frac{\mu}{r^3} f_i = 0. \quad (4.2.1,34)$$

por lo que al sustituir la ec. (4.2.1.34) en la ec. (4.2.1.33) obtenemos:

$$\frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \frac{dc_\mu}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \quad (4.2.1,35)$$

Para ser consistentes con lo que deduciremos más adelante re-escribamos la ec. (4.2.1.26) y la ec. (4.2.1.35) de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_\nu} \frac{dc_\nu}{dt} = 0 \quad (4.2.1,36)$$

$$\frac{\partial g_i}{\partial c_\nu} \frac{dc_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \quad (4.2.1,37)$$

A partir de estas ecuaciones definiremos el bracket de Lagrange.

### 4.2.2 El Bracket de Lagrange y la independencia en el tiempo de los Brackets de Lagrange

En esta sección vamos a definir el bracket de Lagrange y a deducir dos de sus propiedades más importantes que son: la antisimetría y su invariancia en el tiempo.

Para poder utilizar los brackets de Lagrange y sus propiedades para escribir las ecuaciones que encontramos en la sección anterior (la ec. (4,2,1,36) y la ec. (4,2,1,37)) en términos de los brackets de Lagrange, para en la sección que sigue, mediante el método de Whittacker calcular explícitamente los brackets.

Para definir el bracket de Lagrange tratemos de deducir como se relaciona con las ecuaciones que ya hemos visto. Tomemos la ec. (4.2.1.36) y multipliquémosla por  $-\frac{\partial g_i}{\partial c_\mu}$  para obtener:

$$-\frac{\partial f_i}{\partial c_\nu} \frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \frac{dc_\nu}{dt} = 0 \quad (4,2,2,1)$$

y si por otro lado multiplicamos la ec. (4,2,1,37) por  $\frac{\partial f_i}{\partial c_\mu}$  obtenemos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \frac{\partial g_i}{\partial c_\nu} \frac{dc_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \quad (4,2,2,2)$$

Sumando la ec. (4,2,2,1) y la ec. (4,2,2,2) obtenemos:

$$\frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \frac{\partial g_i}{\partial c_\nu} \frac{dc_\nu}{dt} - \frac{\partial f_i}{\partial c_\nu} \frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \frac{dc_\nu}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \quad (4,2,2,3)$$

Definimos el Bracket de Lagrange como:

$$[c_\mu, c_\nu] = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f_i}{\partial c_\mu} \frac{\partial g_i}{\partial c_\nu} - \frac{\partial f_i}{\partial c_\nu} \frac{\partial g_i}{\partial c_\mu} \right) \quad (4,2,2,4)$$

Observamos la primera propiedad del Bracket de Lagrange:

$$[c_\mu, c_\nu] = -[c_\nu, c_\mu] \quad (4,2,2,5)$$

A esta propiedad se le llama antisimetría.

Vemos que dado que  $\mu$  y  $\nu$  toman valores entre 1 y 6, entonces el número total de Brackets de Lagrange posibles es  $6 \times 6 = 36$ . Se puede formar una matriz de  $6 \times 6$  pero por la propiedad de antisimetría la diagonal de dicha matriz tiene que ser necesariamente cero para cada uno de sus elementos, así que son 6 menos de los 36, lo cual nos deja sólo 30, pero de nuevo por la propiedad de antisimetría sólo hay 15 brackets distintos (se pueden escoger arbitrariamente los de arriba de la diagonal, los de abajo solo variarán de éstos por el signo).



Por último vemos que la ec. (4.2.2.3) se puede escribir usando la notación de brackets de Lagrange como:

$$\sum_{\nu=1}^6 [c_{\mu}, c_{\nu}] \frac{dc_{\nu}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c_{\mu}} \quad (4.2.2.6)$$

Veamos ahora la independencia en el tiempo de los brackets de Lagrange. Tomemos según la definición el bracket de Lagrange de dos elementos orbitales cualesquiera. Sin pérdida de generalidad sean  $p$  y  $q$  dos elementos orbitales cualesquiera.

$$[p, q] = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial g_i}{\partial q} - \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial g_i}{\partial p} \right) \quad (4.2.2.7)$$

sacando la derivada parcial en el tiempo de ambos lados de la igualdad:

$$\frac{\partial [p, q]}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_i}{\partial p} \right) \frac{\partial g_i}{\partial q} + \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial g_i}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f_i}{\partial q} \right) \frac{\partial g_i}{\partial p} - \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial g_i}{\partial p} \right) \right] \quad (4.2.2.8)$$

y como suponemos que todas las variables son de clase  $c^2$  (al menos dos veces diferenciables), entonces podemos intercambiar el orden de las derivadas:

$$\frac{\partial [p, q]}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2 f_i}{\partial p \partial t} \frac{\partial g_i}{\partial q} + \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial^2 g_i}{\partial q \partial t} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial q \partial t} \frac{\partial g_i}{\partial p} - \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial^2 g_i}{\partial p \partial t} \right] \quad (4.2.2.9)$$

Pero por otro lado observemos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial g_i}{\partial q} - \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial g_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial g_i}{\partial p} - \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial g_i}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial p \partial t} \frac{\partial g_i}{\partial q} + \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial^2 g_i}{\partial p \partial q} - \frac{\partial^2 g_i}{\partial p \partial q} \frac{\partial f_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial^2 g_i}{\partial p \partial t} - \frac{\partial^2 f_i}{\partial q \partial t} \frac{\partial g_i}{\partial p} + \left( - \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial^2 g_i}{\partial q \partial p} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 f_i}{\partial q \partial p} \frac{\partial g_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial^2 g_i}{\partial q \partial t} \end{aligned} \quad (4.2.2.10)$$

Vemos que las cantidades encerradas en paréntesis se eliminan, así pues nos queda la ec. (4.2.2.9), salvo por la sumatoria. Sustituyendo la ec. (4.2.2.10) en la ec. (4.2.2.9) encontramos:

$$\frac{\partial [p, q]}{\partial t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial g_i}{\partial q} - \frac{\partial f_i}{\partial q} \frac{\partial g_i}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial g_i}{\partial p} - \frac{\partial f_i}{\partial p} \frac{\partial g_i}{\partial t} \right) \quad (4.2.2.11)$$

Tomemos la función potencial dada por  $\Phi(r) = -\frac{k}{r}$ , de donde por la segunda ley de Newton:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (4,2,2,12)$$

así pues observamos también que:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)}{\partial q} \right] = \frac{\partial f_i}{\partial t} \frac{\partial \left( \frac{\partial f_i}{\partial t} \right)}{\partial q} \quad (4,2,2,13)$$

pero usando la ec. (4,2,1,27), vemos que podemos sustituir  $\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{dx_i}{dt}$  en la ec. (4,2,2,13) de donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [p, q]}{\partial t} &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2}{\partial q} - \frac{\partial \Phi(r)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2}{\partial p} - \frac{\partial \Phi(r)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial p} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2}{\partial q} - \frac{\partial \Phi(r)}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2}{\partial p} - \frac{\partial \Phi(r)}{\partial p} \right) \right] \end{aligned} \quad (4,2,2,14)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [p, q]}{\partial t} &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]^2 - \Phi(r) \right) - \frac{\partial^2}{\partial q \partial p} \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]^2 - \Phi(r) \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{\partial^2}{\partial p \partial q} \left( \frac{1}{2} \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]^2 - \Phi(r) - \frac{1}{2} \left[ \frac{dx_i}{dt} \right]^2 + \Phi(r) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4,2,2,15)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial [p, q]}{\partial t} = 0 \quad (4,2,2,16)$$

Por otro lado se puede demostrar que la ec. (4,2,2,4) se puede escribir de la siguiente forma:

$$[c_\mu, c_\nu] = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial x_i}{\partial c_\mu} \frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)}{\partial c_\nu} - \frac{\partial x_i}{\partial c_\nu} \frac{\partial \left( \frac{dx_i}{dt} \right)}{\partial c_\mu} \right) \quad (4,2,2,17)$$

Que será la definición útil para nuestros propositos.

### 4.2.3 El Método de Whittaker para obtener los brackets de Lagrange

Ahora que hemos definido los brackets de Lagrange y hemos deducido dos de sus propiedades más importantes; usaremos el método de Whittaker para calcular de manera explícita los brackets de Lagrange.

El método de Whittaker se basa en una serie de rotaciones para facilitar el cálculo de los brackets de Lagrange y luego en una aproximación mediante una serie de Taylor.

Hagamos una rotación en el sistema  $XYZ$  alrededor del eje  $Z$ , de  $+\Omega$ , así pues haciendo el cambio de coordenadas:

$$x = x' \cos \Omega - y' \sin \Omega \quad (4.2,3,1)$$

$$y = x' \sin \Omega + y' \cos \Omega \quad (4.2,3,2)$$

$$z = z' \quad (4.2,3,3)$$

donde  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  son las coordenadas cartesianas rotadas, de aquí en adelante supondre que  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ , sólo significa que  $\Omega$  no depende explícitamente del tiempo (lo cual no implica que no varíe en el tiempo).

Así pues:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial x'}{\partial p} \cos \Omega - x' \sin \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \frac{\partial y'}{\partial p} \sin \Omega - y' \cos \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial p} \quad (4.2,3,4)$$

reagrupando:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \left( \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) \cos \Omega - \left( x' \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{\partial y'}{\partial p} \right) \sin \Omega = A_1 \cos \Omega - B_1 \sin(\Omega) \quad (4.2,3,5)$$

donde:

$$A_1 = \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

$$B_1 = x' \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{\partial y'}{\partial p}$$

De manera totalmente análoga podemos obtener:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \left( \frac{\partial y'}{\partial p} + x' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) \cos \Omega + \left( \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) \sin \Omega = B_1 \cos \Omega + A_1 \sin \Omega \quad (4.2,3,6)$$

Ahora hagamos lo mismo para:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \cos \Omega - \frac{dy'}{dt} \sin \Omega \quad (4.2,3,7)$$

sacando la parcial respecto de  $p$  de la ec. (4.2.3.7):

$$\frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial p} = \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial p} \cos \Omega - \left(\frac{dx'}{dt} \operatorname{sen} \Omega\right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} - \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial p} \operatorname{sen} \Omega - \frac{dy'}{dt} \cos \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial p} =$$

$$\frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial p} = \left(\frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial p} - \frac{dy'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right) \cos \Omega - \left(\frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial p} + \frac{dx'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial p}\right) \operatorname{sen} \Omega = C_1 \cos \Omega - D_1 \operatorname{sen} \Omega \quad (4,2,3,8)$$

donde:

$$C_1 = \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial p} - \frac{dy'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

$$D_1 = \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial p} + \frac{dx'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial p}$$

de manera totalmente análoga a como sucedió en el caso anterior, vemos que

$$\frac{\partial(\frac{dy}{dt})}{\partial p} = D_1 \cos \Omega + C_1 \operatorname{sen} \Omega \quad (4,2,3,9)$$

Y de manera análoga, sean:

$$A_2 = \frac{\partial x'}{\partial q} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial q}$$

$$B_2 = x' \frac{\partial \Omega}{\partial q} + \frac{\partial y'}{\partial q}$$

$$C_2 = \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial q} - \frac{dy'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q}$$

$$D_2 = \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial q} + \frac{dx'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q}$$

Encontramos que:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = A_2 \cos \Omega - B_2 \operatorname{sen} \Omega \quad (4,2,3,10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = B_2 \cos \Omega + A_2 \operatorname{sen} \Omega \quad (4,2,3,11)$$

$$\frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} = C_2 \cos \Omega - D_2 \operatorname{sen} \Omega \quad (4,2,3,12)$$

$$\frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} = D_2 \cos \Omega + C_2 \operatorname{sen} \Omega \quad (4,2,3,13)$$

De donde obtenemos que al multiplicar la ec. (4,2,3,5) por la ec. (4,2,3,12):

$$\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} = (A_1 \cos \Omega - B_1 \operatorname{sen} \Omega)(C_2 \cos \Omega - D_2 \operatorname{sen} \Omega) =$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} = A_1 C_2 \cos^2 \Omega - A_1 D_2 \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega - B_1 C_2 \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega + B_1 D_2 \operatorname{sen}^2 \Omega \quad (4,2,3,14)$$

de manera análoga:

$$\frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial p} = (A_2 \cos \Omega - B_2 \operatorname{sen} \Omega)(C_1 \cos \Omega - D_1 \operatorname{sen} \Omega) =$$

$$A_2 C_1 \cos^2 \Omega - A_2 D_1 \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega - B_2 C_1 \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega + D_1 B_2 \operatorname{sen}^2 \Omega \quad (4,2,3,15)$$

por lo tanto obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial p} &= (A_1 C_2 - A_2 C_1) \cos^2 \Omega + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \operatorname{sen}^2 \Omega \\ &+ (-A_1 D_2 - B_1 C_2 + A_2 D_1 + B_2 C_1) \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega \end{aligned} \quad (4,2,3,16)$$

que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial p} &= (A_1 C_2 - A_2 C_1) \cos^2 \Omega + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \operatorname{sen}^2 \Omega \\ &+ \left( (A_2 D_1 - A_1 D_2) + (B_2 C_1 - B_1 C_2) \right) \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega . \end{aligned} \quad (4,2,3,17)$$

Y de manera totalmente análoga:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dy}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dy}{dt})}{\partial p} &= (B_1 D_2 - B_2 D_1) \cos^2 \Omega + (A_1 C_2 - A_2 C_1) \operatorname{sen}^2 \Omega + \\ &+ \left( (A_1 D_2 - A_2 D_1) + (B_1 C_2 - B_2 C_1) \right) \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega = \\ &= (B_1 D_2 - B_2 D_1) \cos^2 \Omega + (A_1 C_2 - A_2 C_1) \operatorname{sen}^2 \Omega \\ &- \left( (A_2 D_1 - A_1 D_2) + (B_2 C_1 - B_1 C_2) \right) \operatorname{sen} \Omega \cos \Omega \end{aligned} \quad (4,2,3,18)$$

Recordemos la definición de bracket de Lagrange dado por la ec. (4,2,2,17), pero ahora desarrollemos la sumatoria:

$$[p, q] = \left( \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dx}{dt})}{\partial p} \right) + \left( \frac{\partial y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dy}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dy}{dt})}{\partial p} \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dz}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial z}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dz}{dt})}{\partial p} \right) \quad (4,2,3,19)$$

Definimos:

$$\frac{\partial(A, B)}{\partial(p, q)} \equiv \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} \quad (4,2,3,20)$$

De donde la ec. (4.2.3.19) se puede escribir como:

$$[p, q] = \frac{\partial(x, \frac{dx}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(y, \frac{dy}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(z, \frac{dz}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (4,2,3,21)$$

Pero los primeros dos términos de la ec. (4,2,3,21) son lo que calculamos en la ec. (4,2,3,17) y en la ec. (4,2,3,18), así pues obtenemos:

$$\begin{aligned} [p, q] &= (A_1 C_2 - A_2 C_1) \cos^2 \Omega + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \sin^2 \Omega + \\ &+ \left( (A_2 D_1 - A_1 D_2) + (B_2 C_1 - B_1 C_2) \right) \sin \Omega \cos \Omega + (B_1 D_2 - B_2 D_1) \cos^2 \Omega + (A_1 C_2 - A_2 C_1) \sin^2 \Omega \\ &- \left( (A_2 D_1 - A_1 D_2) + (B_2 C_1 - B_1 C_2) \right) \sin \Omega \cos \Omega + \frac{\partial(z, \frac{dz}{dt})}{\partial(p, q)} \end{aligned} \quad (4,2,3,22)$$

Simplificando:

$$[p, q] = (A_1 C_2 - A_2 C_1) + (B_1 D_2 - B_2 D_1) + \frac{\partial(z, \frac{dz}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (4,2,3,23)$$

Calculemos cada uno de los términos y simplifiquemos:

$$\begin{aligned} A_1 C_2 - A_2 C_1 &= \left( \frac{\partial x'}{\partial p} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial q} - \frac{dy'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right) - \left( \frac{\partial x'}{\partial q} - y' \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial p} - \frac{dy'}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial p} \right) = \\ &= \frac{\partial(x', \frac{dx'}{dt})}{\partial(p, q)} + \left( -y' \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial q} + \frac{dy'}{dt} \frac{\partial x'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left( -\frac{dy'}{dt} \frac{\partial x'}{\partial p} + y' \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q} \end{aligned} \quad (4,2,3,24)$$

y de manera totalmente análoga obtenemos:

$$B_1 D_2 - B_2 D_1 = \frac{\partial(y', \frac{dy'}{dt})}{\partial(p, q)} + \left( x' \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial q} - \frac{dx'}{dt} \frac{\partial y'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \left( \frac{dx'}{dt} \frac{\partial y'}{\partial p} - x' \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q} \quad (4,2,3,25)$$

Definimos:

$$[p, q]' \equiv \frac{\partial(x', \frac{dx'}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(y', \frac{dy'}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(z', \frac{dz'}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (4,2,3,26)$$

De donde sustituyendo la ec. (4.2.3.24) la ec. (4.2.3.25) en la ec. (4.2.3.19) y a ese resultado sustituimos la definición dada por la ec. (4.2,3,26), y usando que por simetría  $\frac{\partial(x', \frac{dx'}{dt})}{\partial(p, q)} = \frac{\partial(x', \frac{dx'}{dt})}{\partial(p, q)}$  obtenemos:

$$\begin{aligned} [p, q] &= [p, q]' + \left( -y' \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial q} + \frac{dy'}{dt} \frac{\partial x'}{\partial q} + x' \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial q} - \frac{dx'}{dt} \frac{\partial y'}{\partial q} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \\ &+ \left( -\frac{dy'}{dt} \frac{\partial x'}{\partial p} + y' \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial p} + \frac{dx'}{dt} \frac{\partial y'}{\partial p} - x' \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial p} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial q} \end{aligned} \quad (4,2,3,27)$$

Pero hagamos la siguiente observación:

$$\frac{\partial(x' \frac{dy'}{dt})}{\partial q} = \frac{\partial x'}{\partial q} \frac{dy'}{dt} + x' \frac{\partial(\frac{dy'}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial y'}{\partial q} \frac{\partial x'}{\partial t} - y' \frac{\partial(\frac{dx'}{dt})}{\partial q} \quad (4,2,3,28)$$

y se puede hacer de manera totalmente análoga para  $p$ , por lo que obtenemos:

$$[p, q] = [p, q]' + \left( \frac{\partial \Omega}{\partial p} \frac{\partial(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial \Omega}{\partial q} \frac{\partial(x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt})}{\partial p} \right) \quad (4,2,3,29)$$

pero de la definición dada por la ec. (4.2.3.20) obtenemos:

$$[p, q] = [p, q]' + \frac{\partial(\Omega, x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (4,2,3,30)$$

pero recordemos de la ec.(2.4.7), que vimos en capítulo 2,  $x' \frac{dy'}{dt} - y' \frac{dx'}{dt} = h$ , pero en este caso tenemos inclinación  $I$ , así podemos concluir que:

$$T = \sqrt{a(1 - e^2)} \cos I \quad (4,2,3,31)$$

por lo tanto obtenemos:

$$[p, q] = [p, q]' + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(p, q)} \quad (4,2,3,32)$$

Usemos otro cambio de coordenadas, este será una rotación de ángulo  $I$  alrededor del eje  $X'$ , dándonos las siguientes relaciones:

$$x' = x'' \quad (4,2,3,33)$$

$$y' = y'' \cos I - z'' \sin I \quad (4,2,3,34)$$

$$z' = y'' \operatorname{sen} I + z'' \operatorname{cos} I \quad (4.2.3,35)$$

Es obvio que dado que se puede hacer  $x$ ,  $y$ ,  $z$  como coordenadas en índices, el resultado de dicha rotación será totalmente análogo a la que acabamos de hacer, así no será necesario hacer toda la deducción de nuevo.

Así pues resulta que:

$$[p, q]' = [p, q]'' + \frac{\partial(\Omega, y'' \frac{dx''}{dt} - z'' \frac{dy''}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (4.2,3,36)$$

Pero  $z''$  y  $\frac{dz''}{dt}$  son cero pues  $x''$ ,  $y''$  coinciden con el plano orbital, de donde:

$$[p, q]' = [p, q]'' \quad (4.2,3,37)$$

Finalmente hagamos una rotación alrededor del eje  $z''$  en un ángulo  $\omega = \bar{\omega} - \Omega$ , y a estas nuevas coordenadas designémoslas con las letras  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y que el plano  $XY$  coincida con el plano orbital y el eje  $X$  este direccionado (dirigido) en la dirección del perihelio, y como también es una rotación encontramos:

$$[p, q]'' = [p, q]''' + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (4.2,3,38)$$

y en este sistema de referencia definimos:

$$h \equiv X \frac{dY}{dt} - Y \frac{dX}{dt} = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \quad (4.2,3,39)$$

de donde:

$$[p, q]'' = [p, q]''' + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(p, q)} \quad (4.2,3,40)$$

Sustituyendo la ec. (4.2.3.39) en la ec. (4.2.3.38) y usando que  $[p, q]' = [p, q]''$  como lo vimos en la ec. (4,2,3,37) y sustituyendo todo en la ec. (4.2.3,32) obtenemos:

$$[p, q] = \left( [p, q]''' + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(p, q)} \right) + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(p, q)} \quad (4.2,3,41)$$

Ahora que ya encontramos la ec. (4.2.3.41) usemos una aproximación en serie de Taylor de  $X$ ,  $Y$  para poder calcular los brackets de Lagrange de cada elemento orbital.



#### 4.2.4 Aproximación en Serie de Taylor de las Coordenadas Cartesianas en Términos de los Elementos Orbitales

El hacer tres rotaciones y ver como se veían en este nuevo sistema de referencia los brackets de Lagrange, aunque fue un proceso laborioso, nos ayudará para que en esta nueva sección calculamos la serie de Taylor de las coordenadas cartesianas en este nuevo sistema de referencia ( $X$  y  $Y$ ) en términos de los elementos orbitales osculantes. Con lo que vamos a encontrar en esta sección y lo que encontramos en la sección anterior podremos calcular finalmente los brackets de Lagrange de manera explícita.

Como sabemos las series de Taylor de las coordenadas estarán dadas por:

$$X = X_0 + \frac{dX_0}{dt}(t - P) + \frac{d^2X_0}{dt^2} \frac{(t - P)^2}{2!} + \dots \quad (4,2,4,1)$$

$$Y = Y_0 + \frac{dY_0}{dt}(t - P) + \frac{d^2Y_0}{dt^2} \frac{(t - P)^2}{2!} + \dots \quad (4,2,4,2)$$

Pero como sabemos las coordenadas cartesianas en términos de los elementos orbitales, ver Apéndice I, están dadas por:

$$X = r \cos(f + \bar{\omega}) \cos \Omega - r \sin(f + \bar{\omega}) \sin \Omega \cos I \quad (4,2,4,3)$$

$$Y = r \cos(f + \Omega) \sin \Omega \cos \epsilon + r \sin(f + \bar{\omega})(\cos \Omega \cos I \cos \epsilon - \sin I \sin \epsilon) \quad (4,2,4,4)$$

$$Z = r \cos(f + \bar{\omega}) \sin \Omega \sin \epsilon + r \sin(f + \bar{\omega})(\cos \Omega \cos I \sin \epsilon + \sin I \cos \epsilon) \quad (4,2,4,5)$$

Así pues, dado que en este sistema de referencia  $\Omega = 0$ ,  $I = 0$ ,  $\epsilon = 0$ , y además sabemos de la ec. (2,3,32) que  $r = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos f)}$  obtenemos entonces que:

$$X = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos f)} \cos(f + \bar{\omega}) \quad (4,2,4,6)$$

$$Y = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos f)} \sin(f + \bar{\omega}) \quad (4,2,4,7)$$

de donde si evaluamos la ec.(4.2.4.6) en  $t = 0$  y escojemos el tiempo de tal forma que en ese instante:  $f(t = 0) = 0$  y  $\bar{\omega}(t = 0) = 0$  obtenemos:

$$X_0 = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = \frac{a(1+e)(1-e)}{(1+e)} = a(1-e) \quad (4,2,4,8)$$

Ahora saquemos la derivada en el tiempo de la ec.(4,2,4,6) utilizando la regla de la cadena:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial f} \frac{df}{dt} \quad (4, 2, 4, 9)$$

pero entonces sacando la parcial de la ec. (4,2,4,7) respecto a  $f$ :

$$\frac{\partial X}{\partial f} = a(1 - e^2) \left( \frac{-\operatorname{sen}(f + \bar{\omega})(1 + e \cos f) - (-e \operatorname{sen} f) \cos(f + \bar{\omega})}{(1 + e \cos f)^2} \right) \quad (4, 2, 4, 10)$$

Por lo que al evaluarlo en  $t = 0$ :

$$\frac{\partial X_0}{\partial f} = 0 \quad (4, 2, 4, 11)$$

y por lo tanto:

$$\frac{dX_0}{dt} = 0$$

Ahora derivemos la ec. (4,2,4,9):

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial^2 X_0}{\partial f^2} \left( \frac{df}{dt} \right)^2 \quad (4, 2, 4, 12)$$

sacando la derivada parcial de la ec. (4,2,4,10) respecto a  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial f^2} = a(1 - e^2) & \left[ - \frac{\left[ (\cos(f + \bar{\omega})(1 + e \cos f) + (-e \operatorname{sen} f) \operatorname{sen}(f + \bar{\omega})) (1 + e \cos f)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(1 + e \cos f)(-e \operatorname{sen} f)(\operatorname{sen}(f + \bar{\omega})(1 + e \cos f)) \right]}{(1 + e \cos f)^4} \right] + \\ & + e \left[ \left( \cos f \cos \frac{(f + \bar{\omega}) + (-\operatorname{sen}(f + \bar{\omega}) \operatorname{sen} f)}{(1 + e \cos f)^2} (1 + e \cos f)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(1 + e \cos f)(-e \operatorname{sen} f) \operatorname{sen} f \cos(f + \bar{\omega}) \right) \right] \end{aligned} \quad (4, 2, 4, 13)$$

así pues evaluando la ec. (4.2.4.13) en  $t = 0$  encontramos, que todos los términos que contengan  $\operatorname{sen} f$ ,  $\operatorname{sen}(f + \bar{\omega})$ , son eliminados, y por otro lado  $\cos f = \cos(f + \bar{\omega}) = 1$  por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial f^2} = a(1 - e^2) \left[ -\frac{(1+e)(1+e)^2}{(1+e)^4} + \frac{e(1+e)^2}{(1+e)^4} \right] = a(1 - e^2) \left[ \frac{-1 - e + e}{(1+e)^2} \right]$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial f^2} = -\frac{a(1 - e^2)}{(1+e)^2} \quad (4,2,4,14)$$

Nos falta calcular  $\frac{df}{dt}$ , ver ec. (4,2,4,9). Recordemos de la ec. (2,4,36), que  $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{a\mu(1 - e^2)}$ , si hacemos  $\mu = 1$ , obtenemos:

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{a(1 - e^2)} \quad (4,2,4,15)$$

en este sistema de referencia  $\bar{\omega} = cte$

$$r^2 \frac{df}{dt} = \sqrt{a(1 - e^2)}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\sqrt{a(1 - e^2)}}{r^2}$$

pero recordando la expresión para  $r$  dada por la ec.(2,3,32)

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{a(1 - e^2)} \left( \frac{(1 + e \cos f)^2}{a^2(1 - e^2)^2} \right) \quad (4,2,4,16)$$

de donde:

$$\left( \frac{df}{dt} \right)^2 = a(1 - e^2) \left( \frac{(1 + e \cos f)^4}{a^4(1 - e^2)^4} \right) = \frac{(1 + e \cos f)^4}{a^3(1 - e^2)^3} \quad (4,2,4,17)$$

y si lo evaluamos en  $t = 0$ , ó  $f = 0$ :

$$\left( \frac{df_0}{dt} \right)^2 = \frac{(1 + e)^4}{a^3(1 - e^2)^3} \quad (4,2,4,18)$$

Por lo tanto sustituyendo la ec. (4,2,4,14) y la ec.(4,2,4,18) en la ec. (4,2,4,12) encontramos:

$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} = \left( -\frac{a(1 - e^2)}{(1+e)^2} \right) \left( \frac{(1+e)^4}{a^3(1 - e^2)^3} \right) = -\frac{(1+e)^2}{a^2(1 - e^2)^2} = -\frac{(1+e)^2}{a^2(1 - e)^2(1+e)^2} \quad (4,2,4,19)$$

por lo tanto:

$$\frac{d^2 X_0}{dt^2} = -\frac{1}{a^2(1 - e)^2} \quad (4,2,4,20)$$

Por lo que al sustituir la ec. (4,2,4,20) y la ec.(4,2,4,11) en la ec. (4,2,4,8) podemos obtener la serie de Taylor, hasta el segundo orden:

$$X = a(1 - e) - \frac{1}{a^2(1 - e)^2} \frac{(t - P)^2}{2} + \dots \quad (4,2,4,21)$$

Ahora hagamos el siguiente cambio de variable:

$$l = nt + \epsilon - \bar{\omega}$$

de donde despejando:

$$nt = l - (\epsilon - \bar{\omega})$$

$$t = \frac{l - (\epsilon - \bar{\omega})}{n}$$

por lo tanto:

$$t^2 \propto \frac{l^2}{n^2} \quad (4,2,4,22)$$

Recordemos de la 3ª ley de Kepler que  $a^3 n^2 = \mu$ , pero hicimos  $\mu = 1$  así pues  $a^3 n^2 = 1$  de donde obtenemos:

$$\frac{1}{n^2} = a^3 \quad (4,2,4,23)$$

por lo tanto obtenemos:

$$t^2 \propto a^3 l^2 \quad (4,2,4,24)$$

Así pues con este cambio de variable, y sustituyendolo en la ec. (4,2,4,21) obtenemos la siguiente serie de Taylor:

$$X = a(1 - e) - \frac{al^2}{(1 - e)^2} + \dots \quad (4,2,4,25)$$

De manera análoga podemos hacer lo mismo para  $Y$ , evaluando la ec. (4.2.4.2) en  $t = 0$  obtenemos:

$$Y_0 = 0$$

Derivemos la ec. (4,2,4,2) respecto al tiempo:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial f} \frac{df}{dt} \quad (4,2,4,26)$$

sacando la parcial de la ec. (4,2,4,4) respecto a  $f$ :

$$\frac{\partial Y}{\partial f} = a(1 - e^2) \frac{[\cos(f + \bar{\omega})(1 + e \cos f) - (-e \operatorname{sen} f) \operatorname{sen}(f + \bar{\omega})]}{(1 + e \cos f)^2} \quad (4,2,4,27)$$

y evaluando para  $t = 0$ :

$$\frac{\partial Y_0}{\partial f} = a(1 - e^2) \frac{(1 + e)}{(1 + e^2)^2} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e)} \quad (4,2,4,28)$$

y usando la ec. (4.2.4.16) para  $t = 0$  y la ec. (4,2,4,28) y sustituyendo ambos en la ec. (4,2,4,26):

$$\frac{dY_0}{dt} = a(1 - e^2) \frac{(1 + e)}{(1 + e^2)^2} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e)} \sqrt{a(1 - e^2)} \left( \frac{(1 + e)^2}{a^2(1 - e^2)^2} \right) = \frac{(1 + e)}{\sqrt{a}\sqrt{(1 - e^2)}} \quad (4,2,4,29)$$

de donde:

$$\frac{dY_0}{dt} = \frac{(1 + e)}{\sqrt{a}\sqrt{(1 - e)(1 + e)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4,2,4,30)$$

Como  $Y_0 = 0$  y sustituyendo está junto con la ec. (4,2,4,30) en la ec. (4,2,4,2), la serie estaría dada por:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{a}} \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}} (t - P) + \dots \quad (4,2,4,31)$$

y con el mismo cambio de variable:

$$t \propto \frac{l}{n} = a^{\frac{3}{2}} l \quad (4,2,4,32)$$

la serie dada por la ec. (4,2,4,31) será:

$$Y = a \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}} l + \dots \quad (4,2,4,33)$$

Así pues derivando la ec. (4.2.4.25) obtenemos la serie para  $\frac{dX}{dt}$ :

$$\frac{dX}{dt} = -\frac{anl}{(1 - e)^2} + \dots \quad (4,2,4,34)$$

derivando la ec. (4.2.4.33) obtenemos la serie de  $\frac{dY}{dt}$ :

$$\frac{dY}{dt} = a \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}} + \dots \quad (4,2,4,35)$$

### 4.2.5 Cálculo de los Brackets de Lagrange

En esta sección usaremos lo que hemos encontrado en las dos secciones precedentes para poder finalmente encontrar los brackets de Lagrange, con lo que los podremos sustituir en la ec. (4,2,2,9). Todo esto lo hemos hecho con miras de más adelante poder despejar de dicha ecuación el cambio en el tiempo de los elementos orbitales.

Así pues podemos obtener las siguientes relaciones:

Si sacamos la parcial de la ec. (4.2.4.25) respecto a  $a$  y luego evaluando cuando  $l = 0$  para truncar la serie de Taylor a primer orden obtenemos:

$$\frac{\partial X}{\partial a} = (1 - e) \quad (4,2,5,1)$$

y de manera totalmente análoga usando las definiciones dadas por la ec. (4,2,4,25), la ec. (4,2,4,32), la ec. (4,2,4,34) y la ec. (4,2,4,35) obtenemos:

$$\frac{\partial X}{\partial a} = (1 - e) \quad (4,2,5,2)$$

$$\frac{\partial X}{\partial e} = -a \quad (4,2,5,3)$$

$$\frac{\partial X}{\partial(\epsilon - \bar{\omega})} = 0 \quad (4,2,5,4)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial a} = 0 \quad (4,2,5,5)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial e} = 0 \quad (4,2,5,6)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial(\epsilon - \bar{\omega})} = a \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4,2,5,7)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial X}{\partial a} \right)}{\partial a} = 0 \quad (4,2,5,8)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial X}{\partial a} \right)}{\partial e} = 0 \quad (4,2,5,9)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial X}{\partial a} \right)}{\partial(\epsilon - \bar{\omega})} = - \frac{an}{(1 - e)^2} \quad (4,2,5,10)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\partial Y}{\partial a} \right)}{\partial a} = n \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4,2,5,11)$$

$$\frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} = an \frac{1}{2} \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{(1-e) + (1+e)}{(1-e)^2} \right) = -\frac{an}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} \quad (4,2,5,12)$$

$$\frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})} = 0 \quad (4,2,5,13)$$

Usaremos la siguiente identidad:

$$[p, q]''' = \frac{1}{6} \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(x, \frac{dx}{dt})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(y, \frac{dy}{dt})}{\partial(a, e)} \right] + \frac{1}{6} \frac{\partial(c, \varepsilon - \tilde{\omega})}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(x, \frac{dx}{dt})}{\partial(c, \varepsilon - \tilde{\omega})} + \frac{\partial(y, \frac{dy}{dt})}{\partial(c, \varepsilon - \tilde{\omega})} \right] + \frac{1}{6} \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(x, \frac{dx}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(y, \frac{dy}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)} \right] \quad (4,2,5,14)$$

La demostración de la ec.(4,2,5,14) es directa, pero si existe alguna duda, ésta puede ser resuelta en el Apéndice II.

Ahora estamos en la posición de sustituir los valores que hemos encontrado en la ec.(4,2,5,1) a la ec. (4,2,5,13) para calcular cada uno de los términos que se encuentran en los corchetes de la ec. (4,2,5,14):

$$\frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(a, e)} = \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} = 0 \quad (4,2,5,15)$$

$$\frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(a, e)} = \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial a} = 0 \quad (4,2,5,16)$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(a, e)} = 0 \quad (4,2,5,17)$$

De manera análoga:

$$\frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(e, \varepsilon - \tilde{\omega})} = \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})} - \frac{\partial X}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} = (-a) \left( -\frac{an}{(1-e)^2} \right) = \frac{a^2 n}{(1-e)^2} \quad (4,2,5,18)$$

$$\frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(e, \varepsilon - \tilde{\omega})} = \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})} - \frac{\partial Y}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega})} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} = - \left( a \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left( \frac{an}{\sqrt{(1+e)(1-e)^3}} \right)$$

por lo que:

$$\frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(e, e - \bar{\omega})} = -\frac{a^2 n}{(1-e)^2} \quad (4,2,5,19)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(e, e - \bar{\omega})} + \frac{\partial(y, \frac{dy}{dt})}{\partial(e, e - \bar{\omega})} = 0 \quad (4,2,5,20)$$

Y por otro lado obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial((e - \bar{\omega}), a)} &= \frac{\partial X}{\partial(e - \bar{\omega})} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial(e - \bar{\omega})} = \\ &= \left[ -(1-e) \left( -\frac{an}{(1-e)^2} \right) \right] = \frac{an}{(1-e)} \end{aligned} \quad (4,2,5,21)$$

$$\frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial((e - \bar{\omega}), a)} = \left( a \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left( -n \left( \frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} \right) = -\frac{an(1+e)}{2(1-e)} \quad (4,2,5,22)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(e - \bar{\omega}, a)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(e - \bar{\omega}, a)} &= \left( \frac{an}{(1-e)} \right) + \left( -\frac{an(1+e)}{2(1-e)} \right) = \frac{an}{(1-e)} \left( 1 + \frac{-1-e}{2} \right) = \\ &= \frac{an}{(1-e)} \left( \frac{1}{2}(1-e) \right) = \frac{an}{2} \end{aligned} \quad (4,2,5,23)$$

Por lo tanto si sustituimos las ec. (4,2,5,23), la ec. (4,2,5,20) y la ec. (4,2,5,17) en la ec. (4,2,5,14) obtenemos:

$$[p, q]''' = \frac{an}{2} \left( \frac{\partial(e - \bar{\omega}, a)}{\partial(p, q)} \right) \quad (4, 2, 5, 24)$$

Y recordando la 3ª ley de Kepler,  $\frac{an^2}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}}$ , así pues:

$$[p, q]''' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu}{a}} \left( \frac{\partial(e - \bar{\omega}, a)}{\partial(p, q)} \right) \quad (4, 2, 5, 25)$$

Pero el operador derivada es un operador lineal, por lo que deja entrar constantes, por lo que:

$$[p, q]''' = \left( \frac{\partial(e - \bar{\omega}, \sqrt{\frac{\mu}{a}} a)}{\partial(p, q)} \right) = \left( \frac{\partial(e - \bar{\omega}, Q)}{\partial(p, q)} \right) \quad (4, 2, 5, 26)$$

con  $Q = \sqrt{\mu a}$  que es el momento angular por unidad de masa.

Sustituyendo la ec. (4,2,5,26) en la ec. (4,2,3,41):



$$[p, q] = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(p, q)} \quad (4,2,5,27)$$

Recordemos que  $Q = \sqrt{\mu a}$  de la ec. (4,2,5,26),  $h = \sqrt{a\mu(1 - e^2)}$  de la ec. (4,2,3,39) y que  $T = \sqrt{a\mu(1 - e^2)} \cos I$  de la ec. (4,2,3,31), de donde podemos obtener las siguientes relaciones de forma directa:

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sqrt{\mu} \frac{1}{2} (a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} na \quad (4,2,5,28)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial e} = 0 \quad (4,2,5,29)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial I} = 0 \quad (4,2,5,30)$$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \sqrt{\mu(1 - e^2)} \frac{1}{2} (a)^{-\frac{1}{2}} = na \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{2} \quad (4,2,5,31)$$

$$\frac{\partial h}{\partial e} = \sqrt{a\mu} \frac{1}{2} (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} (-2e) = -na^2 \frac{e}{\sqrt{(1 - e^2)}} \quad (4,2,5,32)$$

$$\frac{\partial h}{\partial I} = 0 \quad (4,2,5,33)$$

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \sqrt{\mu(1 - e^2)} \cos I \frac{1}{2} (a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} na \sqrt{(1 - e^2)} \cos I \quad (4,2,5,34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial e} = \sqrt{a\mu} \cos I \frac{1}{2} (1 - e^2)^{-\frac{1}{2}} (-2e) = -na^2 \frac{e}{\sqrt{(1 - e^2)}} \cos I \quad (4,2,5,35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial I} = \sqrt{a\mu(1 - e^2)} (-\sin I) = -na^2 \sqrt{(1 - e^2)} \sin I \quad (4,2,5,36)$$

Ahora tenemos todos los elementos necesarios para calcular todos los brackets (que son solo 15). Sólo es necesario fijarnos en la simetrías y en el hecho de que  $Q, h, T$  solo dependen de  $a, e$  e  $I$ , por lo que los únicos brackets distintos de cero son:

$$[\varepsilon, a] = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(\varepsilon, a)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(\varepsilon, a)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(\varepsilon, a)} = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega})}{\partial \varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial a} = 1 \left( \frac{1}{2} na \right) \quad (4,2,5,37)$$

$$[\bar{\omega}, a] = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(\bar{\omega}, a)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(\bar{\omega}, a)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(\bar{\omega}, a)} = (-1) \left( \frac{1}{2} na \right) + \frac{na}{2} \sqrt{(1 - e^2)} =$$

$$= -\frac{1}{2}na(1 - \sqrt{1 - e^2}) \quad (4,2,5,38)$$

$$\begin{aligned} [\Omega, a] &= \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(\Omega, a)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(\Omega, a)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(\Omega, a)} = (-1)\left(\frac{na}{2}\sqrt{1 - e^2}\right) + 1\left(\frac{1}{2}na\sqrt{1 - e^2}\cos I\right) = \\ &= -\frac{1}{2}na\sqrt{1 - e^2}[1 - \cos I] \end{aligned} \quad (4,2,5,39)$$

$$[\bar{\omega}, e] = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(\bar{\omega}, e)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(\bar{\omega}, e)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(\bar{\omega}, e)} = -\frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (4,2,5,40)$$

$$\begin{aligned} [\Omega, e] &= \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(\Omega, e)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(\Omega, e)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(\Omega, e)} = (-1)\left(-na^2\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\right) + 1\left(-na^2\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\cos I\right) = \\ &= \frac{na^2e}{\sqrt{1 - e^2}}(1 - \cos I) \end{aligned} \quad (4,2,5,41)$$

$$[\Omega, I] = \frac{\partial(\varepsilon - \bar{\omega}, Q)}{\partial(\Omega, I)} + \frac{\partial(\bar{\omega} - \Omega, h)}{\partial(\Omega, I)} + \frac{\partial(\Omega, T)}{\partial(\Omega, I)} = -na^2\sqrt{1 - e^2}\text{sen } I \quad (4,2,5,42)$$

#### 4.2.6 Obtención de la Variación de los Elementos Orbitales en Términos de la Función Perturbadora

En esta sección nos daremos a la tarea de sustituir de manera explícita los valores encontrados para los brackets de Lagrange en la ec. (4,2,2,6) para encontrar 6 ecuaciones en las que aparezcan combinaciones lineales del cambio en el tiempo de los elementos orbitales osculantes, para poder despejar del sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas el cambio en el tiempo de cada uno de los elementos orbitales en términos de la función perturbadora.

Sea  $c_1 = a$ ,  $c_2 = e$ ,  $c_3 = \bar{\Omega}$ ,  $c_4 = \varepsilon$ ,  $c_5 = \bar{\omega}$  y  $c_6 = I$ , evaluemos la ec. (4,2,2,6) para  $c_1 = a$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^6 [a, c_\nu] \frac{dc_\nu}{dt} &= [a, a] \frac{da}{dt} + [a, e] \frac{de}{dt} + [a, \bar{\Omega}] \frac{d\bar{\Omega}}{dt} + [a, \varepsilon] \frac{d\varepsilon}{dt} + [a, \bar{\omega}] \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [a, I] \frac{dI}{dt} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial a} \end{aligned} \quad (4,2,6,1)$$

de donde obtenemos, usando el conjunto de ec. (4,2,5,37) a la ec. (4,2,5,42):

$$\left[ \frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} (1 - \cos I) \right] \frac{d\Omega}{dt} + \left( -\frac{1}{2} na \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2} na (\sqrt{1-e^2}) \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (4,2,6,2)$$

de manera análoga para  $c_2 = e$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^6 [e, c_\nu] \frac{dc_\nu}{dt} &= [e, a] \frac{da}{dt} + [e, e] \frac{de}{dt} + [e, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [e, \varepsilon] \frac{d\varepsilon}{dt} + [e, \bar{\omega}] \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [e, I] \frac{dI}{dt} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \quad (4,2,6,3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial e} = -\frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} (1 - \cos I) \frac{d\Omega}{dt} + \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (4,2,6,4)$$

analogamente para  $c_3 = \Omega$

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^6 [\Omega, c_\nu] \frac{dc_\nu}{dt} &= [\Omega, a] \frac{da}{dt} + [\Omega, e] \frac{de}{dt} + [\Omega, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [\Omega, \varepsilon] \frac{d\varepsilon}{dt} + [\Omega, \bar{\omega}] \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [\Omega, I] \frac{dI}{dt} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (4,2,6,5)$$

de donde:

$$-\frac{1}{2} na \sqrt{1-e^2} (1 - \cos I) \frac{da}{dt} + \frac{na^2 e}{\sqrt{1-e^2}} (1 - \cos I) \frac{de}{dt} - na^2 \sqrt{1-e^2} \operatorname{sen} I \frac{dI}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (4,2,6,6)$$

Analogamente para  $c_4 = \varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^6 [\varepsilon, c_\nu] \frac{dc_\nu}{dt} &= [\varepsilon, a] \frac{da}{dt} + [\varepsilon, e] \frac{de}{dt} + [\varepsilon, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [\varepsilon, \varepsilon] \frac{d\varepsilon}{dt} + [\varepsilon, \bar{\omega}] \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [\varepsilon, I] \frac{dI}{dt} = \\ &= \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \end{aligned} \quad (4,2,6,7)$$

así pues:

$$\frac{1}{2} na \frac{da}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \quad (4,2,6,8)$$

de donde resulta inmediatamente que:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \quad (4,2,6,9)$$

lo mismo para  $c_5 = \bar{\omega}$ :

$$\sum_{\nu=1}^6 [\bar{\omega}, c_\nu] \frac{dc_\nu}{dt} = [\bar{\omega}, a] \frac{da}{dt} + [\bar{\omega}, e] \frac{de}{dt} + [\bar{\omega}, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [\bar{\omega}, \epsilon] \frac{d\epsilon}{dt} + [\bar{\omega}, \bar{\omega}] \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [\bar{\omega}, I] \frac{dI}{dt} =$$

$$= \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \quad (4,2,6,10)$$

de donde:

$$-\frac{1}{2} na(1 - \sqrt{(1 - e^2)}) \frac{da}{dt} - \frac{1}{2} \frac{na^2 e}{\sqrt{(1 - e^2)}} \frac{de}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \quad (4,2,6,11)$$

y por último obtenemos para  $c_6 = I$ :

$$\sum_{\nu=1}^6 [I, c_\nu] \frac{dc_\nu}{dt} = [I, a] \frac{da}{dt} + [I, e] \frac{de}{dt} + [I, \Omega] \frac{d\Omega}{dt} + [I, \epsilon] \frac{d\epsilon}{dt} + [I, \bar{\omega}] \frac{d\bar{\omega}}{dt} + [I, I] \frac{dI}{dt} =$$

$$= \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,6,12)$$

de donde:

$$na^2 \sqrt{(1 - e^2)} \operatorname{sen} I \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,6,13)$$

de donde resulta inmediato que:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{(1 - e^2)} \operatorname{sen} I} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,6,14)$$

Lo que quisiéramos llegado este punto es despejar  $\frac{d\epsilon}{dt}$  para toda  $\mu$ , tenemos 6 ecuaciones con 6 incógnitas, que es soluble, pero 2 ya están resueltas (para  $\frac{da}{dt}$  y para  $\frac{d\Omega}{dt}$ ), así que solo hay que resolverlo para los 4 elementos orbitales que faltan.

Sustituamos la ec. (4,2,6,9) en la ec. (4,2,6,11)

$$\left( -\frac{1}{2} na(1 - \sqrt{(1 - e^2)}) \right) \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} - \frac{1}{2} \frac{na^2 e}{\sqrt{(1 - e^2)}} \frac{de}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \quad (4,2,6,15)$$

de donde despejando  $\frac{d\epsilon}{dt}$

$$\frac{1}{2} \frac{na^2 e}{\sqrt{(1 - e^2)}} \frac{de}{dt} = \left( \frac{1}{2} na(1 - \sqrt{(1 - e^2)}) \right) \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \epsilon} + \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \quad (4,2,6,16)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\sqrt{(1 - e^2)}}{na^2 e} (1 - \sqrt{(1 - e^2)}) \frac{\partial R}{\partial \epsilon} \quad (4,2,6,17)$$

Tomemos la ec. (4,2,6,4) y sustituyamos en ella la ec. (4,2,6,14)

$$-\frac{na^2e}{\sqrt{(1-e^2)(1-\cos I)}} \left( \frac{1}{na^2} \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)\sin I}} \right) \frac{\partial R}{\partial I} + \frac{na^2e}{\sqrt{(1-e^2)}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial e} \quad (4,2,6,18)$$

de donde:

$$\frac{na^2e}{\sqrt{(1-e^2)}} \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{na^2e}{\sqrt{(1-e^2)(1-\cos I)}} \left( \frac{1}{na^2} \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)\sin I}} \right) \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,6,19)$$

por lo que:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)na^2}} \frac{1-\cos I}{\sin I} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,6,20)$$

Usemos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan \frac{I}{2} = \frac{1-\cos I}{\sin I} \quad (4,2,6,21)$$

de donde podemos escribir la ec. (4,2,6,20) como:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)na^2}} \tan \left( \frac{I}{2} \right) \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,6,22)$$

Tomemos ahora la ec. (4,2,6,2) y sustituimos en ella la ec.(4,2,6,22) y la ec.(4,2,6,14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}na\sqrt{(1-e^2)}(1-\cos I) \left( \frac{1}{na^2\sqrt{(1-e^2)\sin I}} \right) \frac{\partial R}{\partial I} + \left( -\frac{1}{2}na \right) \frac{d\varepsilon}{dt} + \\ & + \frac{1}{2}na(1-\sqrt{(1-e^2)}) \left[ \left( \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2e} \right) \frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{\sqrt{(1-e^2)na^2}} \left( \frac{1-\cos I}{\sin I} \right) \frac{\partial R}{\partial I} \right] = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (4,2,6,23) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2a} \tan \left( \frac{I}{2} \right) \frac{\partial R}{\partial I} - \frac{1}{2}na \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{1}{2} \frac{(1-\sqrt{(1-e^2)})\sqrt{(1-e^2)}}{ae} \frac{\partial R}{\partial e} + \\ & + \frac{1}{2a} \frac{(1-\sqrt{(1-e^2)})}{\sqrt{(1-e^2)}} \tan \left( \frac{I}{2} \right) \frac{\partial R}{\partial I} = \frac{\partial R}{\partial a} \quad (4,2,6,24) \end{aligned}$$

y reagrupando:

$$\frac{1}{2}na \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan\left(\frac{I}{2}\right)}{2a\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} + \frac{\sqrt{(1-e^2)}(1-\sqrt{(1-e^2)})}{(2na)e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (4.2,6,25)$$

por lo tanto:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\tan\left(\frac{I}{2}\right)}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial I} + \frac{\sqrt{(1-e^2)}(1-\sqrt{(1-e^2)})}{(na^2)e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (4.2,6,26)$$

Ya por último sustituyamos en la ec.(4.2,6,6) la ec. (4.2,6,9) y la ec. (4.2,6,17):

$$\begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{2}na\sqrt{(1-e^2)}(1-\cos I) \right] \left[ \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] + \\ & \left[ \frac{na^2e}{\sqrt{(1-e^2)}}(1-\cos I) \right] \left[ -\frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{na^2e} (1-\sqrt{(1-e^2)}) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] + \\ & + (-na^2\sqrt{(1-e^2)}\sin I) \frac{dI}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (4.2,6,27)$$

:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1-e^2)}(1-\cos I) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - (1-I) \frac{\partial R}{\partial \omega} - (1-\cos I)(1-\sqrt{(1-e^2)}) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \\ & - na^2\sqrt{(1-e^2)}\sin I \frac{dI}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (4.2,6,28)$$

de donde:

$$\begin{aligned} & (1-\cos I) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \left[ -\sqrt{(1-e^2)} - 1 + \sqrt{(1-e^2)} \right] - (1-\cos I) \frac{\partial R}{\partial \omega} - na^2\sqrt{(1-e^2)}\sin I \frac{dI}{dt} = \\ & - (1-\cos I) \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} - (1-\cos I) \frac{\partial R}{\partial \omega} - na^2\sqrt{(1-e^2)}\sin I \frac{dI}{dt} = \frac{\partial R}{\partial \Omega} \end{aligned} \quad (4.2,6,29)$$

y podemos despejar:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{(1-\cos I)}{na^2\sqrt{(1-e^2)}\sin I} \left[ \frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] - \frac{1}{na^2\sqrt{(1-e^2)}\sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (4.2,6,30)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\tan\left(\frac{I}{2}\right)}{na^2\sqrt{(1-e^2)}} \left[ \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right] - \frac{1}{na^2\sqrt{(1-e^2)} \sin I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (4.2.6,31)$$

Así pues hemos encontrado las ecuaciones de los elementos osculantes en términos de una función perturbadora, a estas ecuaciones se les llaman las Ecuaciones de Lagrange.

### 4.2.7 Aproximación a Primer Orden de las Ecuaciones de la Variación de los Elementos Orbitales

En esta sección haremos una aproximación de las ecuaciones para el cambio en el tiempo de los elementos orbitales osculantes tomando el caso en el que  $e \ll 1$  e  $I \ll 1$  tratando de justificar lo mejor posible lo que Murray y Dermot publicaron en su libro *Solar System Dynamics*<sup>1</sup> página 328-329, sección 8.4

Para poder usar de manera práctica las ecuaciones de Lagrange es necesario hacer una aproximación de las ecuaciones que acabamos de obtener, antes de esto usemos la longitud media en vez de la longitud en época con un cambio de variable:

$$\lambda = nt + \varepsilon \quad (4.2,7,1)$$

De donde obtenemos al hacer el cambio de variable sobre la ec.(4,2,6,9)

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (4.2,7,2)$$

y si volvemos a usar la 3ª ley de Kepler  $a = n^{-\frac{1}{3}}$  obtenemos:

$$da = -\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} dn \quad (4.2,7,3)$$

y usando la ec. (4,2,7,2) y la ec.(4,2,7,3)

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2}{3} n^{-\frac{1}{3}} \frac{dn}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda}$$

despejando  $\frac{dn}{dt}$ :

$$\frac{dn}{dt} = \left( -\frac{3}{2} n^{\frac{1}{3}} \right) \left( \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (4.2.7.4)$$

Ahora vamos a considerar solamente los términos de orden más bajo en  $e$  e  $I$  podemos aproximar las ecs. (4,2,7,4), (4,2,6,14), (4,2,6,17), (4,2,6,22), (4,2,6,26) y (4,2,6,31) con  $e \ll 1$  e  $I \ll 1$ .

Vemos que la ec. (4,2,7,4) no se modifica:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \quad (4, 2, 7, 5)$$

sin embargo, la ec. (4,2,6,14) nos queda:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \operatorname{sen} I} \frac{\partial R}{\partial I} \quad (4,2,7,6)$$

Por otro lado la ec. (4,2,6,17) queda:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} \quad (4, 2, 7, 6)$$

La ec. (4,2,6,22) queda:

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (4,2,7,7)$$

La ec. (4,2,6,26) queda:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e}{2na^2} \frac{\partial R}{\partial e} \quad (4,2,7,8)$$

y por último la ec. (4,2,6,22)

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{na^2 \operatorname{sen} I} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \quad (4,2,7,9)$$

Donde para obtener estas ecuaciones hemos supuesto que  $\tan\left(\frac{I}{2}\right) \approx 0$ ,  $\sqrt{(1-e^2)} \approx \sqrt{(1-0)} = 1$  y por último para encontrar la aproximación de la ec. (4.2.6.26) se utilizó la regla de L'Hopital.

Más adelante utilizaremos estas aproximaciones.



## Capítulo V El Problema Circular Plano Restringido de los Tres Cuerpos y la Resonancia Exacta

En este capítulo nos vamos a enfocar al Problema Circular Plano Restringido de los Tres Cuerpos (PCPRTC), es decir que la partícula sin masa se mueve solo en el plano orbital de los dos cuerpos masivos, por lo que  $\Omega = 0$  e  $I = 0$ . Por lo que de las ecuaciones (4,2,7,5) a (4,2,7,9) sólo nos quedan:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \quad (5,0,1)$$

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{1}{na^2c} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} \quad (5,0,2)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{na^2c} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c} \quad (5,0,3)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{c}{2na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial c} \quad (5,0,4)$$

Dado que estas ecuaciones están en términos de la función perturbadora  $\mathcal{R}$  nos daremos a la tarea de calcular  $\mathcal{R}$  al menos a primer orden. Para ello deduciremos de dónde surge la función perturbadora.

Con esta expresión para  $\mathcal{R}$  reescribiremos las ecs. (5,0,1)-(5,0,4). Con estas expresiones deduciremos algunas relaciones físicas, como que si  $a$  aumenta  $c$  disminuye.

Más adelante podremos deducir el modelo del péndulo. Con lo cual podremos deducir el ancho de libración máxima y esto lo compararemos con algunas características del sistema Sol-Jupiter-Cinturon de Asteroides así como del sistema Saturno-Mimas-anillos.

En la siguiente sección lo que haremos será analizar con lo que tengamos hasta ese punto la *resonancia exacta*, los criterios que la definen y el significado del ancho de libración

### 5,1 Función Perturbadora y la Aproximación de Primer Orden

En esta sección encontraremos la expresión de la función perturbadora  $\mathcal{R}$  en términos de los elementos orbitales a primer orden y podremos encontrar las expresiones de la ec. (5,0,1) a la ec. (5,0,4) en términos de dicha aproximación

Para deducir la ecuación perturbadora veamos primero que nada la fig. (5,1,1), de la figura se puede deducir que:

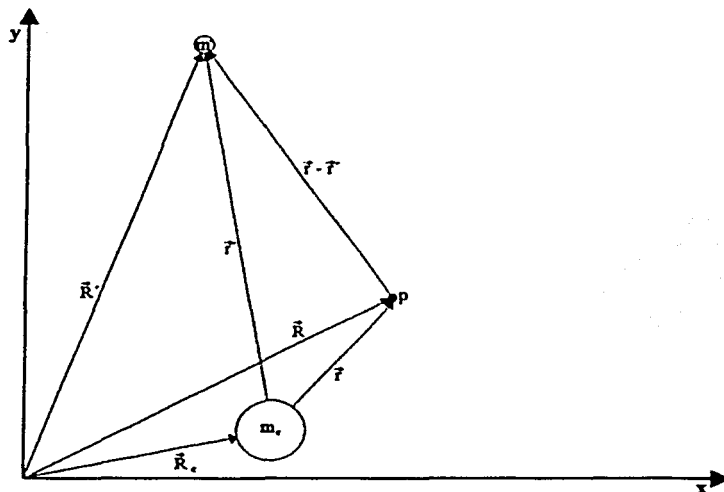


Fig. 5.1.1. Figura donde se muestran los vectores que existen entre las tres partículas y que no dependen del sistema de referencia (las  $r$ 's minúsculas) y los vectores posiciones de las tres partículas que sí dependen del sistema de referencia (la  $r$ 's mayúsculas). Estamos suponiendo que  $m_0 \gg m_1$

$$|\vec{r}'_1| = r' = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (5.1.1)$$

$$|\vec{r}'_2| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.1.2)$$

de donde la distancia entre la partícula de masa cero y  $m'$  es:

$$|\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \quad (5.1.3)$$

Y escribiendo las ecs. de Newton para cada una de las tres masa:

$$m_c \frac{d^2 \vec{R}_c}{dt^2} = G m_c m'_1 \frac{\vec{r}'_1}{r'^3} \quad (5.1.4)$$

$$m' \frac{d^2 \vec{R}'}{dt^2} = -Gm' m_c \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (5,1,5)$$

$$\frac{d^2 \vec{R}'}{dt^2} = Gm' \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - Gm_c \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5,1,6)$$

Y es claro que vectorialmente hablando se cumple la relación:

$$\vec{r}' = \vec{R}' - \vec{R}_c$$

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{R}'}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{R}_c}{dt^2} \quad (5,1,7)$$

y análogamente:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{R}_c}{dt^2} \quad (5,1,8)$$

Esto quivale a trasladar el origen al centro de la masa central  $m_c$ : de donde sustituyendo la ec. (5,1,4) y la ec. (5,1,6) en la ec. (5,1,8) obtenemos

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = -G(m_c + m') \frac{\vec{r}'}{r'^3} \quad (5,1,9)$$

y de manera análoga:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -G(m_c) \frac{\vec{r}}{r^3} + Gm' \left( \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} - \frac{\vec{r}'}{r'^3} \right) \quad (5,1,10)$$

Estas ecuaciones pueden ser escritas como el gradiente de una función escalar, en concreto:

$$\frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = -\nabla' U' \quad (5,1,11)$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\nabla(U + \mathcal{R}) \quad (5,1,12)$$

donde  $U' = -\frac{G(m_c + m')}{r'}$  y  $U = -\frac{G(m_c)}{r}$ , la prima en el operador nabla implica que las derivadas son respecto a  $x'$ ,  $y'$ .

de donde:

$$\mathcal{R} = Gm' \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r'^3} - \frac{Gm'}{|\vec{r}' - \vec{r}|} \quad (5,1,14)$$

Al primer término de  $\mathcal{R}$  se le llama el término directo de la función perturbadora y al segundo término se le llama el término indirecto.

La función perturbadora se puede escribir como una serie infinita de la siguiente forma:

$$\mathcal{R} = \mu' \sum S(a, a', e, e') \cos \varphi \quad (5,1,15)$$

donde  $a$ , es el semieje mayor de la partícula sin masa,  $a'$  el de  $m'$ ,  $e$  es la excentricidad de la partícula sin masa y  $e'$  es la de la partícula  $m'$  y el ángulo  $\varphi$  está dado por:

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_3 \tilde{\omega}' + j_4 \tilde{\omega} \quad (5,1,16)$$

Sin embargo, como  $\tilde{\omega}$  no está definida porque  $m'$  esta en órbita circular, entonces  $j_3 = 0$  y el ángulo es:

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda + j_4 \tilde{\omega} \quad (5,1,17)$$

Además se cumple que:

$$\sum_{i=0}^4 j_i = 0 \quad (5,1,18)$$

a  $\varphi$  se le conoce como argumento resonante.

La deducción de la expresión para  $S$  escapa del objetivo de esta tesis, pero una deducción formal (incluso hecha en tres dimensiones) fue hecha por William M. Kaula en el *Astronomical Journal*, vol. 67 numero 5, Junio 1962, pags. 300-303.

Del Dermott y Murray pag. 332 ec. (8.26) tenemos que:

$$\langle \mathcal{R} \rangle = \frac{Gm'}{a'} \left[ f_{s,1}(\alpha) e^2 + e^{b+1} f_d(\alpha) \cos \varphi \right] \quad (5,1,19)$$

Donde para sacar  $\langle \mathcal{R} \rangle$  lo que se ha hecho es asumir (con justificación) que todos los términos no importantes son de corto periodo, y por lo tanto sus efectos promedian cero para periodos largos de movimiento. Con este principio en mente y aislando aquellos términos de la función perturbadora que son apropiados para el problema es como se logro obtener la expresión de la ec. (5,1,19).

De donde si calculamos las expresiones para la ec. (5.0.1) a la ec. (5.0,4) obtenemos:

$$\frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \lambda} = \frac{Gm'}{a'} \left[ f_d(\alpha) e^{b+1} (-\text{sen } \varphi) j_2 \right] \quad (5,1,20)$$

$$\frac{\partial \langle \mathcal{R} \rangle}{\partial \lambda} = -j_2 \left( \frac{Gm'}{a'} f_d(\alpha) \right) e^{b+1} \text{sen } \varphi \quad (5,1,21)$$

Pero recordando de la 3ª ley de Kepler  $n^2 a^3 = G m_c$  entonces  $G = \frac{n^2 a^3}{m_c}$  por lo que nos queda que la ec. (5,0,1) se puede escribir como:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3j_2}{a^2} \left[ \frac{n^2 a^3}{m_c} \frac{m'}{a'} f_d(\alpha) e^{bj_4} \operatorname{sen} \varphi \right] \quad (5,1,22)$$

$$\frac{dn}{dt} = -3j_2 n \left[ n \left( \frac{m'}{m_c} \right) \left( \frac{a}{a'} \right) f_d(\alpha) \right] e^{bj_4} \operatorname{sen} \varphi = -3j_2 n C_r e^{bj_4} \operatorname{sen} \varphi \quad (5,1,23)$$

con

$$C_r = n \left( \frac{m'}{m_c} \right) \left( \frac{a}{a'} \right) f_d(\alpha) = n \left( \frac{m'}{m_c} \right) \alpha f_d(\alpha) \quad (5,1,24)$$

De aquí podemos además encontrar que usando la ec. (4,2,7,3) podemos obtener de manera directa que

$$\frac{da}{dt} = -2j_2 C_r a e^{bj_4} \operatorname{sen} \varphi \propto \frac{m'}{m_c} \quad (5,1,25)$$

De manera totalmente análoga podemos encontrar que:

$$\frac{\partial(\mathcal{R})}{\partial \bar{\omega}} = \frac{G m'}{a'} \left[ f_d(\alpha) e^{bj_4} (-\operatorname{sen} \phi) | j_4 | \right] \quad (5,1,26)$$

de donde si sustituimos la ec. (5,1,26) en la ec. (5,0,2) obtenemos:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \left[ -\frac{G m'}{a'} | j_4 | f_d(\alpha) e^{bj_4} \operatorname{sen} \varphi = \left[ n \left( \frac{m'}{m_c} \right) \alpha f_d(\alpha) \right] | j_4 | \left( \frac{e^{bj_4}}{e} \right) \operatorname{sen} \varphi \right] \quad (5,1,27)$$

pero sustituyendo la ec. (5,1,24) en la ec. (5,1,27) obtenemos:

$$\frac{de}{dt} = C_r | j_4 | e^{bj_4-1} \operatorname{sen} \varphi \propto \frac{m'}{m_c} \quad (5,1,28)$$

Ahora calculemos:

$$\frac{\partial(\mathcal{R})}{\partial e} = \frac{G m'}{a'} \left[ 2e f_{(s,1)}(\alpha) + f_d(\alpha) | j_4 | e^{bj_4-1} \cos \varphi \right] \quad (5,1,29)$$

sustituyendo la ec. (5,1,29) en la ec. (5,0,3)

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \left[ \frac{G m'}{a'} \left( 2e f_{(s,1)}(\alpha) + f_d(\alpha) | j_4 | e^{bj_4-1} \cos \varphi \right) \right] \quad (5,1,30)$$

y usando de nuevo la 3ª ley de Kepler para  $G$  encontramos que

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \left[ \frac{n^2 a^3}{m_c} \frac{m'}{a'} \left( 2e f_{(s,1)}(\alpha) + f_d(\alpha) | j_4 | e^{bj_4-1} \cos \varphi \right) \right] =$$

así pues:

$$\frac{d\dot{\omega}}{dt} = 2 \left[ n \left( \frac{m'}{m_c} \alpha f_{(s,1)}(\alpha) \right) \right] + \left[ n \left( \frac{m'}{m_c} \right) \alpha f(\alpha) \right] | j_4 | \left( \frac{e^{b_4|l-1}}{e} \right) \cos \varphi \quad (5,1,31)$$

por lo tanto obtenemos:

$$\frac{d\dot{\omega}}{dt} = 2C_s + C_r | j_4 | e^{b_4|l-2} \cos \varphi \quad (5,1,32)$$

donde hemos llamado:

$$C_s = n \left( \frac{m'}{m_c} \right) \alpha f_{(s,1)}(\alpha) \quad (5,1,33a)$$

Por lo que:

$$\frac{d\dot{\omega}}{dt} = 2C_s + C_r | j_4 | e^{b_4|l-2} \cos \varphi \propto \frac{m'}{m_c} \quad (5,1,33b)$$

Finalmente sustituyendo la ec. (5,1,32) en la ec. (5,0,4) obtenemos:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{e}{2na^2} \frac{Gm'}{a'} \left[ 2ef_{(s,1)}(\alpha) + f_d(\alpha) | j_4 | e^{b_4|l-1} \cos \varphi \right] \quad (5,1,34)$$

de donde es directo que:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_s e^2 + \frac{1}{2} C_r | j_4 | e^{b_4|l} \cos \varphi \propto \frac{m'}{m_c} \quad (5,1,35)$$

Por otro lado dividiendo la ec. (5,1,25) entre la ec. (5,1,28) obtenemos:

$$\frac{\frac{da}{dt}}{\frac{d\varepsilon}{dt}} = \frac{da}{d\varepsilon} = -2 \left( \frac{j_2}{j_4} \right) \varepsilon a \quad (5,1,36)$$

La interpretación física de la ec. (5,1,36) es de tomarse en consideración ya que dependiendo del signo de  $j_2$  y  $j_4$  sucede que, si tienen el mismo signo entonces si  $a$  crece, entonces  $\varepsilon$  disminuye. Pero si tienen signos contrarios si  $a$  crece,  $\varepsilon$  también crece.

## 5,2 Ángulo Resonante

En esta sección vamos a estudiar con mayor detalle el ángulo resonante definido por la ec. (5.1.17) Lo que vamos a estudiar es como escribir el cambio en el tiempo del ángulo resonante y cómo puede escribirse dicho cambio en términos de los cambios de la longitud media en época  $\varepsilon$  y del argumento del periapside  $\dot{\omega}$ , despreciaremos los términos que vayan como  $\left(\frac{m'}{m_c}\right)^2$  podremos encontrar que el ángulo resonante (en primera aproximación), obedece la ecuación del péndulo simple.

Tomemos la ec. (5,1,17) y derivémosla respecto al tiempo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 \frac{d\lambda'}{dt} + j_2 \frac{d\lambda}{dt} + j_4 \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (5,2,1)$$

Pero si recordamos la ec. (4,2,6,9) y como el satélite está en órbita circular  $\epsilon' = 0$  y obtenemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 n' + j_2 \left( n + \frac{d\epsilon}{dt} \right) + j_4 \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (5,2,2)$$

Derivando la ec. (5,2,2) y tomando en cuenta que por ser un movimiento circular  $n' = cte$  obtenemos:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = j_2 \left( \frac{dn}{dt} + \frac{d^2\epsilon}{dt^2} \right) + j_4 \frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} \quad (5,2,3)$$

derivando la ec. (5,1,34) y la ec. (5,1,28) obtenemos:

$$\frac{d^2\epsilon}{dt^2} = 2C_r e \frac{de}{dt} + |j_4| C_r \left( \frac{1}{2} |j_4| e^{b_4 l - 1} \frac{de}{dt} \cos \varphi - \text{sen } \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{1}{2} e^{b_4 l} \right) \propto \left( \frac{m'}{m_c} \right)^2 \quad (5,2,4)$$

de donde análogamente al derivar la ec. (5,1,32) obtenemos:

$$\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} = |j_4| C_r \left[ \left( |j_4| - 2 \right) e^{b_4 l - 3} \frac{de}{dt} \cos \varphi - \left( e^{b_4 l - 2} \right) \frac{d\varphi}{dt} \text{sen } \varphi \right] \propto \left( \frac{m'}{m_c} \right)^2 \quad (5,2,5)$$

Mientras que por otro lado por inspección de la ec. (5,1,23):

$$\frac{dn}{dt} \propto C_r \propto \left( \frac{m'}{m_c} \right) \quad (5,2,10)$$

Por lo tanto de las ecs. (5,2,7), (5,2,9) y (5,2,10) se ve que  $\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2}$  son  $\left( \frac{m'}{m_c} \right)$  veces más pequeños que  $\frac{dn}{dt}$ , este factor para el caso del sistema Sol-Júpiter, dado que la masa del sol es  $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$  Kg y la masa de Júpiter es  $M_{\text{Júpiter}} = 1.900 \times 10^{27}$  Kg tiene un valor de  $\left( \frac{m'}{m_c} \right) = 9,552 \times 10^{-4}$  y  $\left( \frac{m'}{m_c} \right)^2 = 9,12407 \times 10^{-7}$  por lo que podemos despreciar en una primera aproximación  $\frac{d^2\epsilon}{dt^2}$  y  $\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2}$  de la ec. (5,2,3) por lo que obtenemos usando la ec. (5,1,48):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = j_2 \frac{dn}{dt} = -3j_2 n C_r e^{b_4 l} \text{sen } \varphi \quad (5,2,11)$$

Sea:

$$\omega_0^2 = -3j_2 n C_r e^{b_4 l} \quad (5,2,12)$$

Veamos de la tabla del Apéndice III, que si tenemos una resonancia de primer orden entonces  $\omega_0^2$  es siempre una cantidad positiva pues el factor  $\alpha f_d(\alpha)$  es siempre negativo, por lo que al sustituir la ec. (5,2,12) en la ec. (5,2,11) encontramos:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \text{sen } \varphi \quad (5,2,13)$$

Que como sabemos es la ecuación del péndulo simple.

### 5,3 El Modelo del Péndulo Simple y el Ancho de Libración

En esta sección vamos a usar la aproximación del péndulo simple para, mediante el uso de la *energía* del ángulo resonante, calcular el ancho de libración en semieje mayor. Donde de aquí en adelante entenderemos como el ancho de libración del semieje mayor como, dada una excentricidad, el semieje mayor máximo (ó mínimo) tal que el ángulo resonante se encuentra en el límite entre oscilar de  $+\pi$  a  $-\pi$  y circular de 0 a  $2\pi$ . Después de esto lo que haremos será tomar en cuenta el término  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  para poder encontrar una ecuación del péndulo simple modificada y poder encontrar de nuevo un ancho en libración del semieje mayor un poco más aproximado a la realidad.

Como acabamos de ver en la sección anterior, en una primera aproximación, el ángulo resonante puede ser modelado con la ecuación del péndulo simple, esta ecuación es una de las más estudiadas, por ejemplo sabemos que para pequeños ángulos la ec. (5,2,13) se puede escribir como:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} \approx -\omega_0^2\varphi \quad (5,3,1)$$

Que como sabemos es la ecuación del oscilador armónico cuya solución es una combinación lineal de senos y cosenos, para continuar con el estudio de la ecuación del péndulo simple podemos definir una ecuación de la *energía* para el ángulo resonante dada por:

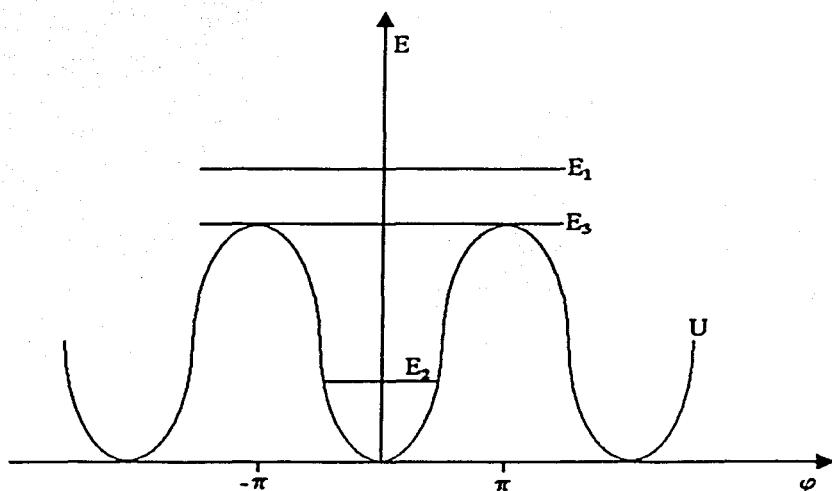
$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2\omega_0^2 \text{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \quad (5,3,2)$$

cabe aclarar que esta *energía* del ángulo resonante no es en realidad una energía mecánica

Podemos clasificar la trayectoria en el espacio fase dependiendo de la energía que tenga el sistema, como lo muestran las figs. (5,3,1) y (5,3,2).

Como se ve en la figura si se comienza con una energía  $E_2$  se está muy cerca de la aproximación del oscilador armónico y por lo mismo el vector posición que describe la combinación de  $\varphi$  y  $\frac{d\varphi}{dt}$  en el espacio fase da toda la vuelta, sin embargo el ángulo resonante  $\varphi$  oscila entre ángulos más pequeños que  $+\pi$  y  $-\pi$ . La energía dada por  $E_3$  es muy importante en el análisis del péndulo y se le llama *separatriz*. En realidad para





**Fig. 5,3,1**

Gráfica de al ángulo resonante versus energía. Se grafica la energía potencial ( $U$ ) y se muestran diferentes valores posibles de la energía total  $E_1$ ,  $E_2$ , y  $E_3$  con  $E_1 > E_2 > E_3$ .

$E = E_3$  el vector posición en el espacio fase está en un punto de equilibrio inestable (ya sea  $+\pi$  ó  $-\pi$ ) y cualquier perturbación (es decir cualquier cambio en cualquiera de los ángulos que definen  $\varphi$ ) hace que se salga de dicho punto. Por último la energía dada por  $E_1$  es la que uno espera encontrar al sobrepasar  $E_3$  y lo que pasa es que el ángulo resonante  $\varphi$  tiene la libertad de visitar de  $0$  a  $2\pi$  y seguir su camino.

De donde tenemos 3 casos.

a) Si  $E > E_3$ , por ejemplo el caso de  $E = E_1$ , entonces el movimiento de  $\varphi$  es tal que circula. En el caso del péndulo esto implica un movimiento de 360 grados alrededor del punto de suspensión.

b) Si  $E < E_3$ , por ejemplo el caso de  $E = E_2$ , entonces el movimiento de  $\varphi$  es de oscilación (ó libración). Para el péndulo esto implica un movimiento hacia adelante y

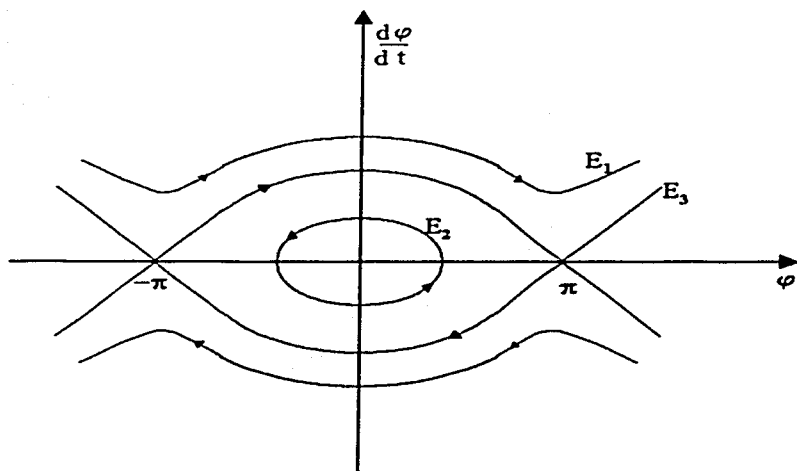


Fig 5,3,2

Gráfica del espacio fase del ángulo resonante, se grafica el ángulo resonante versus la derivada en el tiempo del ángulo resonante. Se muestran las diferentes trayectorias dependiendo de la energía, se usan los valores de la energía total que se usaron en la fig 5,3,1. Con  $E_1 > E_2 > E_3$ .

hacia atrás alrededor del punto de suspensión.

c) Si  $E = E_3$ , es el caso de la separatriz, que divide el régimen de circulación del régimen de libración. Para el péndulo sería como estar en la posición vertical superior.

Para  $E = E_1$  hay una variación de  $\frac{d\varphi}{dt}$  con  $\varphi$ , pero  $\frac{d\varphi}{dt}$  nunca es cero. Para el caso  $E = E_2$ ,  $\frac{d\varphi}{dt}$  toma el valor cero, en cada uno de los extremos del movimiento del ángulo  $\varphi$ . En el caso especial de la separatriz,  $E = E_3$ , se queda en  $\varphi = \pi$  ó en  $-\pi$  para siempre y para estos puntos  $\frac{d\varphi}{dt}$  es siempre cero.

Se pueden hacer muchos de análisis respecto al modelo del péndulo, pero lo que a nosotros físicamente nos interesa para el concepto y el fenómeno de las resonancias es suficiente con lo que hemos visto hasta el momento.

Ahora nos enfocaremos en el ancho de libración, la principal ventaja de derivar un

modelo analítico de la resonancia es que podemos estimar la variación de los elementos orbitales causada por las resonancias y la podemos comparar con algunas observaciones (como espacios entre los anillos) y con las simulaciones numéricas hechas metiendo las ecuaciones completas de Newton sin simplificaciones.

Tomemos la ec. (5,3,2) y vemos que es claro de la fig. (5,3,1) y de la fig. (5,3,2) que la energía máxima que puede tener el ángulo resonante para seguir librando (oscilando) y no empezar a circular es  $E_{max} = E_3$  que se da cuando  $\varphi = \pm\pi$  y  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  de donde:

$$E_{max} = 2\omega_0^2 = -j_2 n C_r e^{b\varphi} \quad (5, 3, 3)$$

Veamos ahora a el conjunto de valores alrededor de  $E_{max}$  que cumplen con está condición, así pues igualando la ec. (5,3,2) y la ec. (5,3,3) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + 2\omega_0^2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi &= 2\omega_0^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 &= 2\omega_0^2 \left( 1 - \sin^2 \frac{1}{2}\varphi \right) \end{aligned} \quad (5,3,4)$$

y recordando la identidad trigonométrica:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (5,3,5)$$

obtenemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{4\omega_0^2} \cos \frac{1}{2}\varphi \quad (5,3,7)$$

Y sustituyendo  $\omega_0^2$  de la ec. (5,2,12) en la ec. (5,3,7) obtenemos

$$\frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{12j_2^2 n |C_r| e^{b\varphi}} \cos \frac{1}{2}\varphi \quad (5,3,8)$$

Usando la ec. (5,1,48) obtenemos:

$$dn = -3j_2 n C_r e^{b\varphi} \sin \varphi dt \quad (5,3,9)$$

de donde:

$$dn = -3j_2 n C_r e^{b\varphi} \sin \varphi \frac{1}{\frac{d\varphi}{dt}} d\varphi \quad (5,3,10)$$

de donde sustituyendo  $\frac{d\varphi}{dt}$  de la ec. (5,3,9) en la e.(5,3,10) obtenemos:

$$dn = \left( \mp \frac{3j_2 n C_r e^{b\varphi} \sin \varphi}{j_2 \sqrt{12n |C_r| e^{b\varphi}} \cos \frac{1}{2}\varphi} \right) d\varphi \quad (5,3,11)$$

Pero recordemos otra identidad trigonométrica dada por la siguiente relación:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad (5.3,12)$$

de donde:

$$\operatorname{sen} \varphi = 2 \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (5.3,13)$$

De donde sustituyendo la ec. (5,3,13) en la ec. (5,3,11):

$$\begin{aligned} dn &= \pm \left( \frac{-6n C_r e^{b_4 l} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{12n |C_r| e^{b_4 l} \cos \frac{\varphi}{2}}} \right) d\varphi = \pm \sqrt{\frac{36n^2 |C_r|^2 e^{2b_4 l}}{12n |C_r| e^{b_4 l}}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ & dn = \pm \sqrt{3n |C_r| e^{b_4 l}} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} d\varphi \end{aligned} \quad (5.3,14)$$

integrando la ec. (5,3,14) respecto a  $n$  del lado izquierdo de la igualdad, con los límites de integración de  $n_0$  a  $n$ . Respecto a  $\varphi$  del lado derecho de la igualdad, con los límites de integración de 0 a  $\frac{\varphi}{2}$  obtenemos:

$$n = n_0 \pm \sqrt{12 |C_r| n e^{b_4 l}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (5.3,15)$$

Así pues:

$$\delta n_{\max} = \pm \sqrt{12 |C_r| n e^{b_4 l}} \quad (5.3,16)$$

y usando de nuevo la 3ª ley de Kepler  $\delta n_{\max} = -\frac{1}{6} \frac{\mu}{a^3 n} \delta a_{\max}$  obtenemos:

$$\delta a_{\max} = \pm \sqrt{\frac{16 |C_r|}{3} \frac{n}{n}} e^{b_4 l} a \quad (5.3,17)$$

Que es el ancho de libración en semiciclo mayor cuando estamos usando la aproximación del péndulo. Esta aproximación del péndulo no es valido para resonancias de primer orden, pues recordemos que la ec. (5,2,5) que  $\frac{d^2 \dot{\varphi}}{dt^2} \propto e^{b_4 l - 2}$  y en el caso de resonancias de primer orden  $|j_4| = 1$  por lo que para una resonancia de primer orden  $\frac{d^2 \dot{\varphi}}{dt^2} \propto \frac{1}{2}$  pero como estamos en la aproximación en la cual  $\epsilon \ll 1$  entonces no podemos despreciarlo. Utilizaremos una aproximación más realista para resonancias de primer orden ( $|j_4| = 1$ ).

Dado que  $j_4 = 1$  la ec. (5,1,17) se puede escribir como:

$$\varphi = j_1 \lambda' + j_2 \lambda - \tilde{\omega} \quad (5.3,18)$$

derivemos la ec. (5,3,18):

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 \frac{d\lambda'}{dt} + j_2 \frac{d\lambda}{dt} - \frac{d\tilde{\omega}}{dt} \quad (5.3,19a)$$

Igual que en el caso anterior::

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 \left( n' + j_2 n + \frac{dc}{dt} \right) - \frac{d\bar{\omega}}{dt} \quad (5,3,19b)$$

donde hemos despreciado  $\frac{d}{dt}$  (5,2,2) derivando la ec. (5,3,19b):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = j_2 \left( \frac{dn}{dt} + \frac{d^2c}{dt^2} \right) - \frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} \quad (5,3,20)$$

y dejando de despreciar el término para  $\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2}$  dado por la ec. (5,2,5), ignorando el término secular y usando la expresión para  $\frac{dc}{dt}$  encontrada en la ec. (5,1,28) obtenemos:

$$\frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} = \frac{C_r^2}{e^2} \sin 2\varphi - \frac{C_r}{e} (j_1 n' + j_2 n) \sin \varphi \quad (5,3,21)$$

por lo tanto obtenemos que al sustituir la ec. (5,3,21) en la ec. (5,3,20):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = j_2 \frac{dn}{dt} - \frac{d^2\bar{\omega}}{dt^2} = -j_2 (3j_2 C_r n e \sin \varphi) - \frac{C_r^2}{e^2} \sin^2 2\varphi + \frac{C_r}{e} (j_1 n' + j_2 n) \sin \varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = [3j_2^2 C_r n e + \frac{C_r}{e} (j_1 n' + j_2 n)] \sin \varphi - \frac{C_r^2}{e^2} \sin^2 2\varphi \quad (5,3,22)$$

Para solucionar la ec. (5,3,22) podemos construir una solución modificada del péndulo suponiendo que en efecto la solución dada por la ec. (5,3,15) es válida pero escrita de la siguiente forma:

$$n = n_0 + k \cos \frac{\varphi}{2} \quad (5,3,23)$$

Con  $k$  una "constante" a determinar y  $n_0$  la velocidad angular inicial, usemos la ec. (5,3,19b) y sustituyamos en ella la ec. (5,3,23) así como la ec. (5,1,32), de donde:

$$\frac{d\varphi}{dt} = j_1 n' + j_2 [n_0 + k \cos \frac{\varphi}{2}] - C_r e^{-1} \cos \varphi \quad (5,3,24)$$

y tomando que  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$  y  $\varphi = \pm \pi$  para la separatriz:

$$0 = j_1 n' + j_2 n_0 + C_r e^{-1} \quad (5,3,25)$$

así pues:

$$j_1 n' + j_2 n_0 = -\frac{C_r}{e} \quad (5,3,26)$$

Por lo tanto usando la ec. (5,3,23), la ec. (5,3,26) y las sustituimos en la ec. (5,3,22) obtenemos:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = [3j_2^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2}] \operatorname{sen} \varphi + j_2 k \frac{C_r}{e} \cos \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \varphi - \frac{C_r^2}{e^2} \operatorname{sen} 2\varphi \quad (5,3,27)$$

Y podemos definir una integral de energía dada de la siguiente forma:

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 2 \left[ 3j_2^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2} \right] \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{4}{3} j_2 k \frac{C_r}{e} \cos^3 \frac{\varphi}{2} + \frac{C_r^2}{e^2} \operatorname{sen}^2 \varphi \quad (5,3,28)$$

De manera análoga podemos buscar la energía máxima  $E_{max}$  que puede tener el ángulo resonante para librar (oscilar) y no circular, y esto sucede cuando  $\frac{d\varphi}{dt} = 0$   $\varphi = \pm\pi$ , de donde:

$$E_{max} = -2 \left[ 3j_2^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2} \right] \quad (5,3,29)$$

por lo tanto:

$$E_{max} = -6j_2^2 C_r n e + 2 \frac{C_r^2}{e^2} \quad (5,3,30)$$

Y de manera análoga al caso anterior, queremos buscar el conjunto de valores para los cuales el ángulo resonante sigue librando (oscilando) y no circulando. Veamos el conjunto de valores que cumplen con esta condición, igualando la ec. (5,3,28) y la ec. (5,3,30) obtenemos:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - 2 \left[ 3j_2^2 C_r n e - \frac{C_r^2}{e^2} \right] \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{4}{3} j_2 k \frac{C_r}{e} \cos^3 \frac{\varphi}{2} + \frac{C_r^2}{e^2} \operatorname{sen}^2 \varphi = -6j_2^2 C_r n e + 2 \frac{C_r^2}{e^2} \quad (5,3,31)$$

Veamos  $\frac{d\varphi}{dt}$  cuando  $\varphi = 0$ , entonces:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\varphi=0} \right)^2 + \frac{4}{3} j_2 k \frac{C_r}{e} = -6j_2^2 C_r n e + 2 \frac{C_r^2}{e^2} \quad (5,3,32)$$

$$\left( \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\varphi=0} \right)^2 = -\frac{8}{3} j_2 k \frac{C_r}{e} - 12j_2^2 C_r n e + 4 \frac{C_r^2}{e^2} \quad (5,3,33)$$

Pero si por otro lado tomamos la ec. (5,3,24) y la evaluamos para  $\varphi = 0$  obtenemos:

$$\frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\varphi=0} = j_1 n' + j_2 n_0 + j_2 k - \frac{C_r}{e} \quad (5,3,34)$$

y usando la ec. (5,3,26) en la ec. (5,3,34):

$$\frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\varphi=0} = -\frac{C_r}{e} + j_2 k - \frac{C_r}{e} = j_2 k - 2 \frac{C_r}{e} \quad (5,3,35)$$

de donde al elevar al cuadrado la ec. (5,3,35):

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{\varphi=0}\right)^2 = \left(j_2 k - 2\frac{C_r}{e}\right)^2 = j_2^2 k^2 - 4j_2 k \frac{C_r}{e} + 4\frac{C_r^2}{e^2} \quad (5,3,36)$$

Por lo que al igualar la ec. (5,3,36) y la ec. (5,3,33) obtenemos:

$$j_2^2 k^2 - 4j_2 k \frac{C_r}{e} + 4\frac{C_r^2}{e^2} = -\frac{8}{3}j_2 k \frac{C_r}{e} - 12j_2^2 C_r n e + 4\frac{C_r^2}{e^2} \quad (5,3,37)$$

Así pues podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} j_2^2 k^2 + \left(\frac{8}{3} - 4\right)\frac{j_2 C_r}{e} k + 12j_2^2 C_r n e &= 0 \\ j_2^2 k^2 - \frac{4}{3}\frac{j_2 C_r}{e} k + 12j_2^2 C_r n e &= 0 \\ k^2 - \frac{4}{3}\frac{C_r}{j_2 e} k + 12C_r n e &= 0 \end{aligned} \quad (5,3,38)$$

Nos encontramos con una ecuación de segundo grado para  $k$  cuya solución es:

$$k = \frac{2}{3}\frac{C_r}{j_2 e} \pm \sqrt{12|C_r| n e} \sqrt{1 + \frac{1}{27j_2^2 e^3} \frac{|C_r|}{n}} \quad (5,3,39)$$

Por lo tanto si sustituimos en la ec. (5,3,23) la ec. (5,3,39) para  $\varphi = 0$  obtenemos:

$$n = n_0 + \frac{2}{3}\frac{C_r}{j_2 e} \pm \sqrt{12|C_r| n e} \sqrt{1 + \frac{1}{27j_2^2 e^3} \frac{|C_r|}{n}} \cos \frac{\varphi}{2} \quad (5,3,40)$$

por lo tanto el ancho en velocidad angular media,  $n$ , para el cual el ángulo resonante se encuentra entre oscilar y circular estará dado por:

$$\delta n_{\max} = k + \frac{|C_r|}{j_2 e} \quad (5,3,41)$$

$$\delta n_{\max} = \pm \sqrt{12|C_r| n e} \sqrt{1 + \frac{1}{27j_2^2 e^3} \frac{|C_r|}{n}} + \frac{|C_r|}{3j_2 e} \quad (5,3,42)$$

Y usando la tercera ley de Kepler podemos encontrar:

$$\delta a_{\max} = a \left[ \pm \sqrt{\frac{16|C_r|}{3} \frac{|C_r|}{n}} e \sqrt{1 + \frac{1}{27j_2^2 e^3} \frac{|C_r|}{n}} - \frac{|C_r|}{n} \frac{2}{9j_2 e} \right] \quad (5,3,42)$$

La ec. (5,3,42) la encontramos suponiendo que era una resonancia de primer orden, así que la ec. (5,3,42) predice el ancho de libración de únicamente las resonancias de primer

orden. Para todas las demas resonancias es la ec. (5,3,17) la que predice el ancho de libración.

Ahora que hemos encontrado la ec. (5,3,42) hagamos un análisis de qué es lo que significa físicamente esta expresión. Esta ecuación la hemos encontrado al analizar el caso para el cual la "energía" del ángulo resonante era la máxima para que el ángulo resonante oscilara de  $\pm\pi$  y no empezara a circular de 0 a  $2\pi$ . Así pues hemos encontrado una expresión para  $\delta a_{max}$  en función de la excentricidad, lo que significa que; dada una excentricidad fija  $e$ , la  $\delta a_{max}$  da el conjunto de valores en semieje mayor alrededor de la resonancia nominal (que explicaremos en la siguiente sección) tales que el argumento resonante libra y no circula. Así pues el conjunto de valores para el semieje mayor encerrados entre las curvas dadas por  $\delta a_{max}$  con raíz positiva y  $\delta a_{max}$  con raíz negativa son aquellos para los cuales el comportamiento de  $\varphi$  es oscilatorio. Al conjunto de valores que se encuentran fuera de estas curvas el argumento resonante circula (de 0 a  $2\pi$ ), a la separación entre ellas es a lo que llamamos el ancho de libración.

#### 5,4 La Resonancia Nominal y la Ambigüedad en la Definición de Resonancia Exacta para el Problema Plano Circular Restringido de los Tres Cuerpos

Se define que la partícula se encuentra en la resonancia nominal  $p + q : q$  si cumple que:

$$a = \left( \frac{p}{p+q} \right)^{\frac{2}{3}} a' \quad (5,4,1)$$

Para ilustrar que es lo que ocurre supongamos que la partícula del anillo planetario esta dando 2 vueltas mientras que el satélite esta dando 1 vuelta, supongamos además para fines de la deducción que en una primera aproximación no sienta una fuerza gravitacional mutua, entonces podemos encontrar si llamamos  $n$  la velocidad angular media de la partícula y  $n'$  la velocidad angular media del satélite que existe la siguiente relación entre ambas ver fig. (5,5,1).

$$n = 2n' \quad (5,4,2)$$

Pero recordando la tercera ley de Kepler  $a^3 n^2 = \mu$  de donde  $n = \frac{\mu}{a^3}$  por lo que la ec. (5,4,3) nos queda

$$\frac{\mu}{a^3}^{\frac{1}{2}} = 2 \frac{\mu}{a'^3}^{\frac{1}{2}} \quad (5,4,4)$$



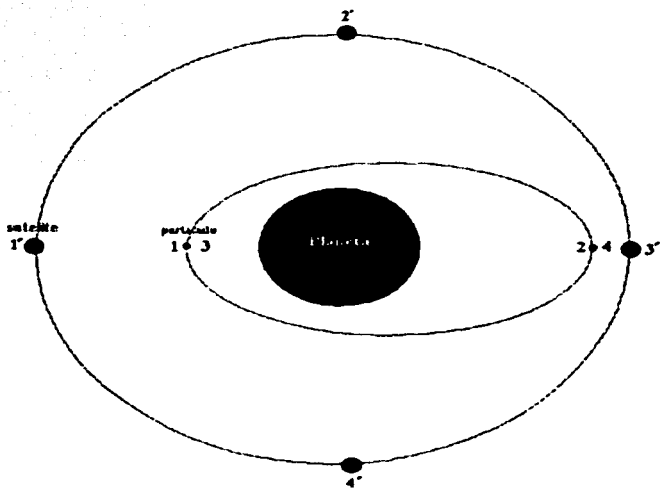


Fig. 5.4.1

La partícula está en resonancia 2:1 con el satélite, mientras la partícula da dos vueltas a su órbita, el satélite da solo una. Los números indican dónde se están cada uno, el encuentro se da en el instante señalado con el número 1 y 1'. Cuando la partícula ha dado cuatro vueltas (2) el satélite solo ha dado un cuarto de vuelta (1'). Cuando la partícula ha completado tres vueltas (3) el satélite lleva apenas media vuelta (1.5). Cuando la partícula lleva una vuelta y media (4) el satélite lleva tres cuartos de vuelta (4') y para concluir se vuelven a encontrar en 1 y 1'. Por lo que podemos concluir que en el único lugar donde el jalón gravitacional es más fuerte debido al satélite es en 1 y 1', pero es donde están más cerca, y que siempre es en el mismo lugar de la órbita.

de donde podemos despejar  $a$ :

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} a' \quad (5.4.5)$$

Ahora veamos que es lo que ocurre físicamente en este tipo de órbitas, por lo que supondremos que la partícula siente la fuerza gravitacional del satélite, pero el satélite no siente la fuerza debida a la partícula. Usemos de nuevo la fig(4,1).

La fig. (4.1) describe el comportamiento de la partícula cuando interactúa con el satélite durante las conjunciones.

La diferencia entre una partícula en una órbita resonante y una partícula en una órbita no resonante, es que en el caso resonante, las conjunciones se repiten de manera coherente causando grandes perturbaciones. al cabo de conjunciones repetidas. Mientras que para

la partícula no resonante las conjunciones no se repiten de manera coherente y al cabo de conjunciones repetidas, la perturbación se anula.

Supongamos una partícula en resonancia que sufre una conjunción en el punto  $A$  (fig. 4,1). Como la partícula migra a una órbita más externa, su velocidad angular disminuye y la siguiente conjunción ocurrirá un poco después (más cerca del periapside) que la conjunción anterior; la siguiente conjunción ocurre más cerca del periapside, de modo que después de varias conjunciones donde su momento angular ha ido aumentando y su velocidad angular disminuye, la conjunción ocurre en el periapside. Si la conjunción ocurre en el punto  $B$  entonces la velocidad angular de la partícula aumenta y las conjunciones subsiguientes ocurrirán también más cerca del periapside. Por lo tanto, no importa donde ocurran las conjunciones la tendencia es que el punto de conjunciones se va corriendo hacia el periapside.

En una órbita no conmensurable, como los encuentros no siempre son en el mismo lugar, el efecto acumulativo tiende a compensarse y después de muchas órbitas se anula.

En la gráfica (5,4,1) se está graficando la excentricidad versus el semieje mayor para el sistema Sol-Júpiter en la región de los asteroides y se muestra la localización de las resonancias nominales y su ancho de libración. Esta gráfica es igual a la que obtuvieron Murray y Dermott en su libro de *Solar System Dynamics*<sup>1</sup> Pág. 341 fig. (8,7).

A continuación haremos un análisis de cuales son las resonancias nominales que pueden llegar a ser importantes en el espacio de Cassini del sistema de anillos de Saturno. El espacio de Cassini es el espacio que separa los anillos más brillantes que tiene el sistema de anillos de Saturno, estos son el anillo A y el anillo B. Dicho espacio se muestra en la gráfica. (5,4,2) como dos líneas verticales, en ella se muestran las resonancias de primer orden para los diferentes satélites de Saturno (las resonancias de primer orden son las que en la ec. (5,4,1)  $q = 1$  y en general decimos es la resonancia de orden  $q$ ).

Después de ver la gráfica (5,4,2) se puede concluir que las siguientes resonancias son las que deben tomarse en consideración: Mimas 2 : 1, Janus 3 : 2 y 4 : 3, Epimetheus 3 : 2 y 4 : 3, Pandora 4 : 3 y 5 : 4, Prometheus 6 : 5, Atlas 6 : 5 y Pan 6 : 5.

Dado que el ancho de libración depende de las masas, las masas de los diferentes satélites son: Mimas =  $3,80 \times 10^{19}$  Kg, Janus =  $2,01 \times 10^{18}$  Kg, Epimetheus =  $5,6 \times 10^{17}$  Kg, Pandora =  $2,2 \times 10^{17}$  Kg, Prometheus =  $2,7 \times 10^{17}$  Kg, las masa de Atlas y de Pan no se conocen aún pero se estiman menores que la de los satélites más pequeños.

Debido a que los anchos de libración dependen de la masa del satélite, los anchos de los satélites poco masivos son demasiado pequeños y por lo tanto no se tomarán en cuenta. La gráfica (5,4,3) muestra los anchos de libración de la resonancia 2 : 1 de Mimas, la resonancia 3 : 2 y la 4 : 3 de Janus. Se puede notar el cruzamiento y traslape de dichas resonancias. Wisdom *demostró*<sup>17</sup> en un artículo publicad<sup>o</sup> en Astr. J. vol. 85 paginas

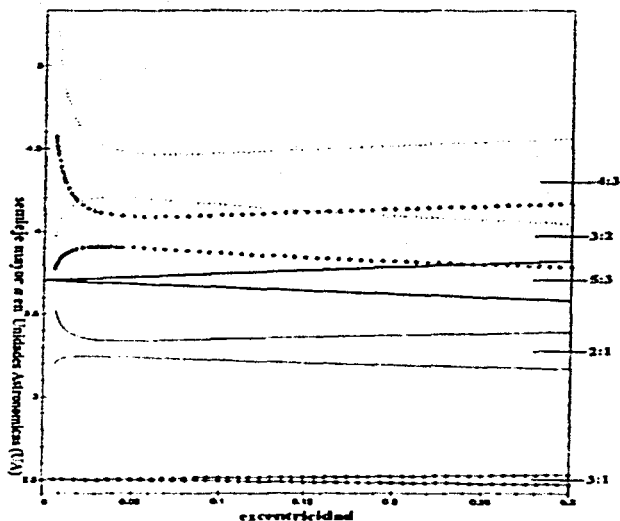


Gráfico 5.4.1

En esta gráfica se muestran los anchos de libración para las diferentes resonancias nominales del sistema Sol-Júpiter en la región de los asteroides. Se grafica excentricidad versus semeje mayor (en UA). Las curvas compuestas por puntos unidas por líneas formando un pico en el semeje mayor 2.5 UA es el ancho que le corresponde a la resonancia 3:1, las curvas continuas delgadas son el ancho de libración de la resonancia 2:1, las dos rectas gruesas que forman un pico en 3.7 UA son el ancho de libración de la resonancia 5:3, las dos curvas compuestas de puntos grandes son en ancho de libración de la resonancia 3:2 y por último las curvas compuestas de puntos pequeños son en ancho de libración de la

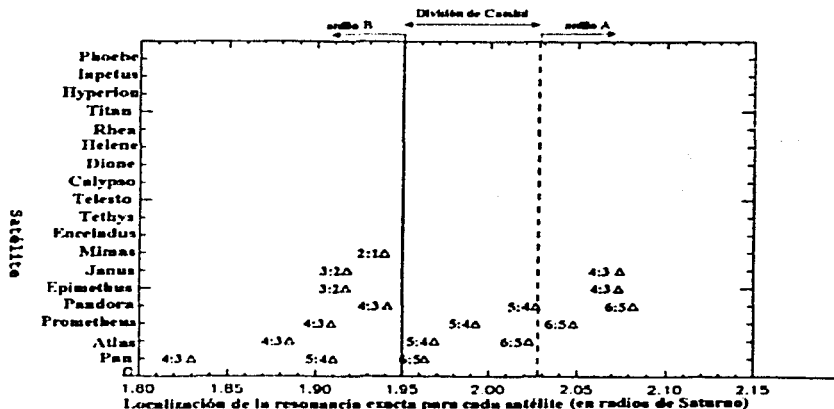
1122-1133 (1980) que las regiones donde las resonancias de primer orden se traslapan son regiones de inestabilidad orbital: órbitas cuasi-periódicas no pueden existir allí.

Así pues resulta que viendo la gráfica (5.4.3) podemos concluir que el traslape entre las resonancias de Mimas y Janus pueden ser en parte las responsables de que el espacio de Cassini sea orbitalmente inestable y por lo mismo que esta región se encuentre vacía.

Cabe aclarar que está es la aproximación más sencilla y a primer orden del problema, pues en realidad no estamos tomando en cuenta el posible choque entre las partículas ni la posible interacción gravitacional entre ellas.

Así pues la resonancia nominal nos ayuda a darnos una idea de donde empezar a buscar una resonancia.

El problema insalvable del que habíamos hablado en el capítulo anterior es el siguiente.



Gráfica 5.4.2

En esta gráfica se muestra la localización de las resonancias exactas de primer orden para cada uno de los diferentes satélites de Saturno.

Se muestra comparada con la división de Cassini que aparece como las dos líneas verticales.

recordemos el conjunto de ecuaciones a más bajo orden que encontramos para los elementos orbitales, aún antes de que se hiciera la aproximación de la función perturbadora.

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3}{a^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \quad (5.4.6)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \bar{\omega}} \quad (5.4.7)$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{1}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad (5.4.8)$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{c}{2na^2} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} \quad (5.4.9)$$

Vemos que existe un problema no trivial, pues la ec. (5.5.8) no está definida cuando la excentricidad inicial de la partícula es cero y conforme  $e$  tiende a cero el cambio del argumento del periapside aumenta indefinidamente. Sin embargo las ecuaciones que hemos deducido no son capaces de predecir el comportamiento del argumento del periapside. Uno pudiera pensar que dado que la función perturbadora depende de los elementos orbitales, esta parte de la ecuación anula la singularidad pero como encontramos en la ec. (5.1.53)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = 2C_s + C_r |j_4| e^{l_4 l - 2} \cos \varphi \quad (5.4,10)$$

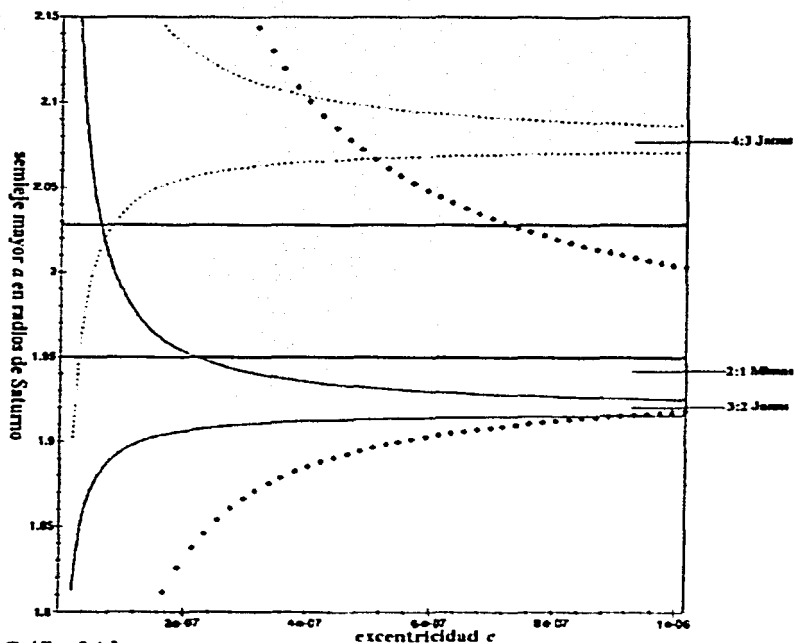
Pero si suponemos que es una resonancia de primer orden ( $|j_4| = 1$ ) entonces

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = 2C_s + C_r |j_4| e^{l-2} \cos \varphi = 2C_s + \frac{C_r |j_4|}{e} \cos \varphi \quad (5.4,11)$$

Así como ya lo habíamos comentado la singularidad es insalvable por lo menos para las resonancias de primer orden que son las que ejercen mayor *torca*<sup>6</sup> y por lo mismo las que son dinamicamente más interesantes.

Lo que sucede con el argumento del periapside es un indicio de que posiblemente nos encontremos sobreesimplificando el problema, y que se debe ser más cuidadoso al afirmar y definir la resonancia exacta, pues se ha encontrado evidencia de que cuando la excentricidad es muy *pequeña*<sup>6</sup> (ó inclusive cero) se puede encontrar la localización de un lugar en el cual la variación de los elementos orbitales es la predicha para una resonancia de primer orden por una aproximación analítica a segundo orden (en vez de al orden más bajo en  $a$  y  $e$ ) y sin embargo, el argumento resonante, circula.

Así pues, para órbitas circulares el criterio de oscilación del argumento resonante no define, ni el ancho de libración para las resonancias de primer orden, ni la localización de la resonancia exacta.



Gráfica 5.4.3

En esta gráfica se muestra el espacio de Cassini como las dos líneas horizontales continuas gruesas, se grafica además el ancho de libración para la resonancia 2:1, representada por las curvas compuestas de puntos grandes, se grafica el ancho de libración de la resonancia 3:2 de Janus, representada por la curva continua y por último se grafica el ancho de libración para la resonancia 4:3 de Janus representada por las curvas de puntos pequeños.

Para todas se señala la localización de la resonancia nominal

## 1. Capítulo VI Conclusiones

1) Durante la realización de esta tesis tuve la oportunidad de asimilar y desarrollar las ecuaciones más básicas para el Problema Restringido de Tres Cuerpos. Esto me ha permitido llegar a la aproximación del péndulo y entender el significado del ancho de libración alrededor de una resonancia y calcular analíticamente los anchos de libración para algunas resonancias de los anillos de Saturno. Estos anchos se refieren a los valores en semieje mayor y excentricidad que puede tener una partícula alrededor de la resonancia nominal para que se encuentre en resonancia con el satélite (libración del argumento resonante).

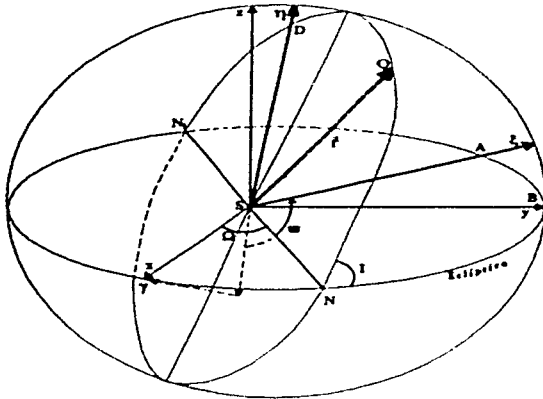
2) Tomando en cuenta los resultados de Wisdom, de la graf. (5.4.3) se puede ver que para excentricidades del orden de  $10^{-7}$  (órbitas casi circulares) hay un traslape de al menos 3 resonancias de primer orden a todo lo ancho de la División de Cassini, dos de ellas causadas por Janus y una por Mimas. Este resultado sugiere que la División de Cassini puede ser una región inestable, dado que las partículas en los anillos de Saturno deben tener excentricidades pequeñas debido al alto número de colisiones.

La inestabilidad causada por el traslape es un fenómeno que ayudaría a sacar partículas cuya órbita esté dentro de la división de Cassini.

3) Al final del desarrollo de las ecuaciones de los elementos orbitales en función de la función perturbadora a primer orden encontramos que éstas no están definidas para el caso de excentricidad cero. Por lo tanto, el tratamiento analítico es limitado a casos con  $e \neq 0$ . Otros tratamientos analíticos que usan elementos orbitales tienen exactamente la misma limitante.

## Apendice I

### Cómo Pasar de Coordenadas Cartesianas a Elementos Orbitales



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Fig. Ai2

En esta figura se muestran cada uno de los ángulos necesarios para definir la trayectoria de una partícula en el espacio tridimensional, se muestra la inclinación  $I$  que es el ángulo que forma el plano orbital y la eclíptica, se muestra la recta de intersección entre el plano orbital y la eclíptica y se muestran los puntos extremos de dicha recta con los nombres  $N$  y  $N'$ , la longitud del nodo ascendente  $\Omega$  es el ángulo que forma la recta de intersección y el eje  $X$ . También se muestra el punto gamma  $\gamma$  que es el punto donde se intersectan el eje  $X$  y la eclíptica. El arjamento del perisapaide  $\omega$  que es el ángulo que forma la proyección del punto gamma  $\gamma$  en el plano orbital y el eje  $\xi$ .

Queremos encontrar como escribir las coordenadas cartesianas y las velocidades en cartesianas en terminos de los elementos orbitales, para ello vemos de las figs. (Ai1) y (Ai2) que la transformación para pasar de elementos orbitales a coordenadas cartesianas esta dado por:

$$x = r[\cos(\Omega) \cos(\tilde{\omega} + f) - \text{sen}(\Omega) \text{sen}(\tilde{\omega} + f) \cos(I)] \quad (\text{a},1)$$

$$y = r[\text{sen}(\Omega) \cos(\tilde{\omega} + f) + \cos(\Omega) \text{sen}(\tilde{\omega} + f) \cos(I)] \quad (\text{a},2)$$

$$z = r[\text{sen}(\tilde{\omega} + f) \text{sen}(I)] \quad (\text{a},3)$$

pero recordemos la ec. (2,2,26)



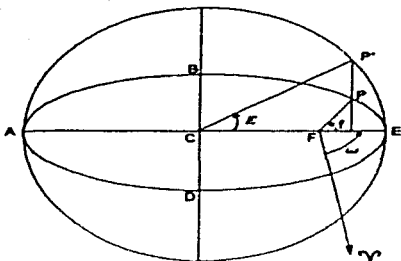


Fig. A12

En esta figura se muestra el plano orbital de la partícula. La relación entre la anomalía excéntrica,  $E$ , que es el ángulo  $P'CE$  y la verdadera anomalía,  $f$ , que es el ángulo  $PFE$ . Para pequeñas excentricidades, estos dos ángulos son casi iguales. El vector que va del punto  $F$  al punto  $\gamma$  es el vector proyección del vector que va al llamado punto gamma sobre el plano orbital (el punto gamma es donde el eje  $X$  y la eclíptica se tocan)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)} \quad (a,4)$$

y como también queremos conocer las coordenadas de la velocidad, entonces derivando respecto al tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} [\cos(\Omega) \cos(\theta) - \sin(\Omega) \sin(\theta) \cos(I)] + r \left[ -\frac{df}{dt} \cos(\Omega) \sin(\theta) - \frac{df}{dt} \sin(\Omega) \cos(\theta) \cos(I) \right] \quad (a,5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} [\sin(\Omega) \cos(\theta) + \cos(\Omega) \sin(\theta) \cos(I)] + r \left[ -\frac{df}{dt} \sin(\Omega) \sin(\theta) + \frac{df}{dt} \cos(\Omega) \cos(\theta) \cos(I) \right] \quad (a,6)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \sin(\theta) \sin(I) + r \frac{df}{dt} \cos(\theta) \sin(I) \quad (a,7)$$

donde  $\theta \equiv \bar{\omega} + f$  y además retomando la ec. (4,2,4,15)

$$\frac{df}{dt} = \sqrt{a(1 - e^2)} \left( \frac{(1 + e \cos(f))^2}{a^2(1 - e^2)} \right) \quad (a,8)$$

y por otro lado se puede ver que tomando la ec. (2,2,30)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ek}{mh} \sin(\theta - \bar{\omega}) = \frac{ek}{L} \sin(f + \bar{\omega} - \bar{\omega}) = \frac{ek}{L} \sin(f) \quad (a,9)$$

Así pues hemos logrado escribir las coordenadas cartesianas y las velocidades de estas en terminos de elementos orbitales.

**De Coordenadas Cartesianas a Elementos Orbitales**

Sabemos que:

$$r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (a_10)$$

y que:

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (a_11)$$

recordando la ecuación Vis Viva dada por la ec. (2,2,45) y recordando la definición de energía gravitacional dada por la ec. (2,2,44)

$$E_{Total} = -\frac{k}{2a} \quad (a_12)$$

$$E_{Total} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} \quad (a_13)$$

por lo tanto encontramos el semieje en terminos de las coordenadas cartesianas:

$$a = -\frac{k}{2\left[\frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}\right]} \quad (a_14)$$

Recordando la definición de momento angular:

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{v}| \quad (a_15)$$

y de la ec. (2,3,2,6):

$$e = \sqrt{1 - \frac{L^2}{aGMm}} = \sqrt{1 - \frac{|\vec{r} \times \vec{v}|^2}{aGMm}} \quad (a_16)$$

La inclinación  $i$  puede ser calculada de la componente  $z$  del momento angular:

$$L = \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) \cos(i) \quad (a_17)$$

de donde:

$$i = \cos^{-1} \left( \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{L} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{|\vec{r} \times \vec{v}|} \right) \quad (a_18)$$

La longitud del nodo ascendente puede ser calculada de la siguiente manera, como se ve de la figura:

$$\Omega = \tan^{-1} \left( \frac{x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt}}{-z \frac{dz}{dt} + x \frac{dx}{dt}} \right) \quad (a,19)$$

Citando de nuevo la ec. (2,2,26) encontramos que:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(f)}$$

despejando  $f$

$$1 + e \cos(f) = \frac{a(1 - e^2)}{r}$$

$$e \cos(f) = \frac{a(1 - e^2)}{r} - 1$$

$$\cos(f) = \frac{1}{e} \left( \frac{a(1 - e^2)}{r} - 1 \right)$$

$$f = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{e} \left( \frac{a(1 - e^2)}{r} - 1 \right) \right] \quad (a,20)$$

y finalmente encontramos que:

$$\cos(\theta) = \frac{x \cos(\Omega) + y \operatorname{sen}(\Omega)}{r} \quad (a,21)$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{[x \cos(\Omega) + y \operatorname{sen}(\Omega)] \cos(f) + z \operatorname{sen}(f)}{r} \quad (a,22)$$

De donde:

$$\tilde{\omega} = \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \right) - f \quad (a,23)$$

Con esto podemos encontrar cualquier elemento orbital en terminos de las coordenadas cartesianas.

## Apendice II

En este apéndice demostraremos cómo escribir  $[p, q]'''$  en términos de las parciales de los elementos orbitales.

Queremos demostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(a, e)} \right] + \frac{1}{6} \frac{\partial(e, \varepsilon - \tilde{\omega})}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(e, \varepsilon - \tilde{\omega})} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(e, \varepsilon - \tilde{\omega})} \right] + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(\varepsilon - \tilde{\omega}, a)} \right] = [p, q]''' \quad (a_1 i1) \end{aligned}$$

Tomemos la primera cantidad de la primera parte de la igualdad de la ec. (a<sub>1</sub>i1) y usemos la ec. (4,2,3,19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(a, e)} \right] = \\ = \frac{1}{6} \left( \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial e}{\partial q} - \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial e}{\partial p} \right) \left[ \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial a} \right] \quad (a_1 i2) \end{aligned}$$

y desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \frac{\partial(a, e)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(a, e)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(a, e)} \right] = \\ = \frac{1}{6} \left[ \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial e}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial e}{\partial q} \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} + \frac{\partial e}{\partial q} \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial a}{\partial p} \frac{\partial e}{\partial q} \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial a} \right. \\ \left. - \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial e}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} + \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial e}{\partial p} \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} - \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial e}{\partial p} \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} - \frac{\partial a}{\partial q} \frac{\partial e}{\partial p} \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial a} \right] = \\ = \left[ \left( \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial q} \right) - \left( \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial q} \right) + \left( \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial q} \right) - \left( \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial q} \right) \right. \\ \left. - \left( \frac{\partial X}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial q} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p} \right) + \left( \frac{\partial X}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial q} \right) - \left( \frac{\partial Y}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial q} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p} \right) + \left( \frac{\partial Y}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial q} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial q} + \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial q} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial X}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial p} + \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial q} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial p} + \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial q} \right] = \\
 &= \frac{1}{3} \left( \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial X}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dX}{dt})}{\partial q} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial p} \frac{\partial(\frac{dY}{dt})}{\partial q} \right)
 \end{aligned}$$

De donde usando de nuevo la definición dada or la ec. (4,2,3,19):

$$\frac{1}{6} \frac{\partial(a, c)}{\partial(p, q)} \left[ \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(a, c)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(a, c)} \right] = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(p, q)} \right) \quad (a, i3)$$

Pero como vimos para obtener la ec. (a,ii3) no intervino cuáles elementos orbitales estamos usando, así obtenemos finalmente que la ec. (a,ii1) *sepuede describir como* :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{3} \left( \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(p, q)} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(p, q)} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(p, q)} \right) = \\
 &= \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (a, ii4)
 \end{aligned}$$

Pero recordemos que:

$$[p, q]''' = \frac{\partial(X, \frac{dX}{dt})}{\partial(p, q)} + \frac{\partial(Y, \frac{dY}{dt})}{\partial(p, q)} \quad (a, ii5)$$

con lo que termina la demostración.

### Apéndice III

En este Apéndice aparecen los valores numéricos para  $\alpha$ ,  $\alpha f_d(\alpha)$  y  $\alpha f_{s,1}(\alpha)$ , para las principales resonancias. Estos valores fueron tomados del libro *Solar System Dynamics* de Murray y Dermott primera edición pag 334 tabla 8.5.

$p+q : p$	$\alpha$	$\alpha f_{s,1}(\alpha)$	$\alpha f_d(\alpha)$
2:1	0.629961	0.244190	-0.749964
3:2	0.743143	0.879751	-1.54553
4:3	0.825482	1.88147	-2.34472
5:4	0.861774	3.24494	-3.14515
6:5	0.885549	4.96857	-3.94613
3:1	0.480750	0.0683812	0.287852
5:3	0.711379	0.515657	2.32892
7:5	0.799064	1.33523	6.28903
9:7	0.845740	2.51812	12.1673
11:9	0.874782	4.06179	19.9639

## Referencias

- 1) Solar System Dynamics/ C. Murray S. Dermott/ Cambridge University Press/ 1999
- 2) Methods of Celestial Mechanics/ D. Brouwer G. Clemence/Academic Press/1961
- 3) An Introduction to Celestial Mechanics /F. Moulton/ Second Revised Edition/ Macmillan Company/1953
- 4)Manual de Fórmulas y Tablas Matemáticas/M. Spiegel/McGraw-Hill/1995
- 5) <http://www.solarviews.com/>
- 6) Tesis Doctoral: Torca Lineal Sobre un Anillo Centrado en una Resonancia de Primer Orden/Dr. Julia Espresate Eibenschutz/1997
- 7) Numerical Recipes/H.Press S. Teutolsky/Second Edition/Cambridge University Press/1992
- 8) A beginner's Book of Tex/R. Seroul S. Levy/ Springer-Verlag/1992
- 9) Discovery of 12 satellites of Saturn exhibiting orbital clustering/B. Gladman, J. Kavelaars/Nature/july 12 2001
- 10) Resonances in Saturn Rings/J. Lissauer J. Cuzzi/The Astronomical Journal Vol. 87 numb.7 pags.1051-1058
- 11) Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite/W. Kaula/The Astronomical Journal Vol. 67 num.5 págs. 300-303/1962
- 12) Understanding Planetary Rings/L. Esposito/Annual Review Earth Planetary Sciences págs. 487-523
- 13) Visual detection of 1981S13, Saturn's eighteenth satellite, and its role in the Encke gap/Nature vol.351 june/27th/1991
- 14) the Dynamics of Planetary Rings/P.Goldreich S. Tremaine/ Annual Review of Astronomy and Astrophysics págs. 249-283/1982
- 15) Origen and Evolution of the Natural Satellites/S. Peale/Annual Review of Astronomy and Astrophysics págs. 533-601/1999
- 16) Resonance and chaos I, II III/ O. Winter C. Murray/Astronomy and Astrophysics págs 399-408 /1996
- 17) Astr. J. vol. 85 pags. 1122- 1133 (1980)
- 18) Nature of the Kirkwood gaps in the asteroid belt/ Datnley F. Dermott and Carl Murray/ Nature Vol. 301, 20 january 1983