00384
8

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO SOBRE DENDROIDES Y COMPACTACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

M. en C. VERÓNICA MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JANUSZ JERZY CHARATONIK

MÉXICO, D.F. JUNIO, 2002

Estudio Sobre Dendroides y Compactaciones

Verónica Martínez de la Vega y Mansilla

Julio del 2002

A MI MAMÁ Y MI PAPÁ CON TODO MI CARIÑO,
RESPETO Y AGRADECIMIENTO

A ALEJANDRO CON TODO MI AMOR

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer a tantas y tantas personas por haber estado ahí durante todo el trayecto, que no importa como lo haga se que voy a olvidar gente. Todavía no creo que ya llegue a este punto, la verdad me parece increíble, pero bueno parece que lo logré y se que no es un mérito unicamente mio si no de toda la gente que ha estado conmigo, que me ha querido, que me ha aguantado y que me ha hechado la mano.

Quisiera agradecer a mis padres María Elena y Eduardo por todo lo que me dierón, por haberme empujado a llegar hasta aqui, por su apoyo y sobre todo por su ejemplo, que ha sido la mejor de mis enseñanzas.

Quiero agradecer a Alejandro por todo su amor, su comprensión, su cariño, su apoyo, y aqui el agradecimiento es doble, pues también académicamente sus consejos y apoyo me ayudarón a llegar hasta aqui.

Quiero agradecer a mis hermanas Nena, Paty, Doc y Mery por todo en general, a mi hermano Pancho por todo lo que me ha ayudado y por siempre estar ahí y a mis sobrinos (ahijados) Christopher, Eduardo y Tess pues su presencia en este mundo me ha dado momentos de mucha felicidad.

Quiero agradecer a mis amigos, son muchos y muy variados, algunos estan lejos y otros cerca, y si los escribiera a todos no acabaría, pero quiero agradecer en especial a Ita, Margareta y Quico que han estado desde hace mucho tiempo y saben cuanto trabajo me ha costado llegar hasta aqui.

Quiero agradecer a mis maestros que a lo largo de todo este camino me han guiado y enseñado. Al Dr. Janusz J. Charatonik por haber dirigido este trabajo con paciencia y dedicación, a Beti por todas sus enseñanzas y amistad, y a Javier Páez por sus muchos y muy variados consejos. También quiero agradecer a mis sinodales Victor Neumann, Rollie, Adalberto García Máynez y muy en especial a la Dra. Sylvia de Neymet por haber leído este trabajo y por sus muy valiosos comentarios.

Quiero agradecer al Instituto de Matemáticas por todo el apoyo que me han dado, en especial al Maestro Ángel Carrillo por siempre preocuparse por los problemas de los becarios, y por siempre estar en la mejor disposición para ayudarnos, también agradezco al Dr. José Antonio de la Peña que nos apoyó para comenzar el doctorado durante la huelga, en un momento en que el nuevo Posgrado en Matemáticas no funcionaba y se nos cerraron todas las puertas.

Por último quiero agradecer a la Dirección General de Estudios de Posgrado (DGEP) por la beca que me otorgó para realizar este doctorado, al Programa de Apoyo a Estudiantes de Posgrado (PAEP) que me otorgó becas para exponer mis resultados en diferentes congresos internacionales y me apoyó en los gastos para la publicación de este trabajo y al Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) que me ha apoyado de diferentes maneras con becas y patrocinios para asistir a congresos.

vi

Índice General

Introducción **ix**

1 La Propiedad *RNT* en los Dendroides **1**
- 1.1 Preliminares 1
- 1.2 La propiedad *RNT* en arco conexos. 3
- 1.3 La propiedad *RNT* en las dendritas. 9
- 1.4 La Propiedad *RNT* hereditaria 11
- 1.5 La propiedad *RNT* en dendroides suaves 19
- 1.6 Un dendroide con la propiedad *RNT*. 29
  - 1.6.1 Un dendroide retractil 29

2 La Propiedad RNT en Compactaciones **39**
- 2.1 Preliminares 39
- 2.2 Compactaciones del rayo y la propiedad *RNT*. 43
- 2.3 Una compactación con la propiedad *RNT* 50
  - 2.3.1 Construcción del ejemplo 53
  - 2.3.2 Una compactación con la propiedad *RNT*. 65
- 2.4 Una compactación sin la propiedad *RNT*. 81
  - 2.4.1 Construcción del segundo ejemplo 85

3 Una Familia de Compactaciones **91**
- 3.1 Preliminares 91
- 3.2 Construcción del pseudoarco 94
- 3.3 Una Familia no Numerable de Compactaciones 106

4 Selecciones Abiertas **117**
- 4.1 Selecciones en el Intervalo 117
  - 4.1.1 El hiperespacio del intervalo. 117

4.1.2 Selecciones abiertas para el intervalo 118
4.2 Selecciones en el Triodo. 119
4.2.1 El hiperespacio de continuos del triodo 119
4.2.2 Funciones continuas y abiertas del cubo en el triodo. . 120
4.2.3 Lagos de Wada 121
4.2.4 Túneles de Wada 123
4.2.5 Selecciones abiertas en el triodo 124
4.3 Selecciones Abiertas en n-odos 130

Introducción

La tesis que tiene usted en sus manos, es una tesis de Topología en el área de Teoría de Continuos e Hiperespacios.

La tesis consta de cuatro capítulos, y para leerla, lo que se necesita es haber llevado dos cursos de topología general y estar familiarizado con los continuos.

En esta tesis casi todos los elementos que usamos los definimos dentro de la misma tesis, excepto tal vez los que a continuación le vamos a mencionar.

Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo (no degenerado), un *subcontinuo* es un subconjunto compacto conexo y no vacío de un continuo (que puede ser degenerado o todo el continuo). Los continuos utilizarán la métrica d, y denotamos por $B_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\}$.

Un continuo es *hereditariamente unicoherente* si la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es vacía o es un subcontinuo. Un continuo es *arco conexo* si para cualesquiera dos puntos a y b en el continuo, existe un arco en el continuo que los une.

Un *dendroide* es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente, supondremos que usted sabe que los subcontinuos de los dendroides son dendroides. Las *dendritas* son dendroides localmente conexos.

Entre las nociones de topología general que utilizamos, están las de *localmente conexo, conexo en pequeño,* suponemos que usted conoce el Lema de Uryshon y que sabe que los abiertos conexos de un continuo localmente conexo son arco conexos.

Además de esto utilizaremos algo de Teoría de Hiperespacios. Dado un continuo X, denotamos por $C(X)$ al *hiperespacio de continuos* de X.

$$C(X) = \{A \subset X : A \text{ es un subcontinuo de } X\}$$

Dada $\varepsilon > 0$ y $A \in C(X)$, denotamos a la nube ε de A como $N(\varepsilon, A)$ donde $N(\varepsilon, A) = \{x \in X : \text{existe } a \in A \text{ tal que } d(x,a) < \varepsilon\}$. A este hiperespacio le damos la métrica de Hausdorff, la cual denotaremos por H, decimos que dos subcontinuos A y B de X distan menos que ε ($H(A;B) < \varepsilon$) si $A \subset N(\varepsilon, B)$ y $B \subset N(\varepsilon, A)$.

Una función de Whitney, μ, es una función continua de $C(X)$ en $[0, \infty)$ que cumple que:
$\mu(\{p\}) = 0$ para todo $p \in X$ y si $A \subsetneq B$, entonces $\mu(A) < \mu(B)$.

Un continuo es *descomponible* si se puede escribir como la unión de dos subcontinuos propios, y es *indescomponible* si no se puede. Decimos que un continuo es *hereditariamente indescomponible*, si todos sus subcontinuos no degenerados son indescomponibles. Dentro de la familia de los continuos hereditariamente indescomponibles se encuentra el *pseudoarco,* la explicación detallada de este continuo la podrá encontrar en los Capítulos 2 y 3.

Por último una selección abierta $\sigma : C(X) \to X$, es una función continua y abierta que además cumple que $\sigma(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$. Se sabe que los únicos continuos que admiten selecciones son los dendroides.

Habiéndonos puesto de acuerdo en qué sabemos y qué no sabemos, podemos hacer un pequeño resumen de lo que usted encontrará en esta tesis.

El primer capítulo es un estudio de retracciones con poco movimiento en los dendroides, definimos la propiedad RNT (Retractable onto Near Trees), en la que pedimos que dada una $\varepsilon > 0$, exista una $\delta > 0$ tal que si T es un árbol en el dendroide X y $H(T, X) < \delta$, entonces existe una ε-retracción $r : X \to T$. Lo que hicimos en el primer capítulo fue caracterizar ciertas familias de dendroides a través de esta propiedad. En el segundo capítulo comenzamos a estudiar la propiedad RNT pero ahora en compactaciones métricas del rayo, y lo que obtuvimos fue un resultado muy interesante, pues vimos que las únicas compactaciones del rayo que pueden tener esta propiedad, deben cumplir que su residuo sea el pseudoarco. Esto nos llevó a estudiar las compactaciones métricas con residuo pseudoarco, pues se sabía poco de ellas, y descubrimos, gracias a esta propiedad, que no son homeomorfas. En el tercer capítulo construimos toda una familia de compactaciones métricas diferentes del rayo con residuo pseudoarco. Por último en el cuarto capítulo trabajamos con dendroides de nuevo, y en este capítulo, lo que hicimos fue definir selecciones abiertas sobre n-odos, usted podrá observar más adelante que esto no es nada sencillo

Pues esto es básicamente lo que usted encontrará. Este trabajo se escribió pensando en alumnos de maestría interesados en la Teoría de Continuos. Por ser una tesis de doctorado, ésta contiene resultados originales, de hecho de ella se escribieron cuatro artículos, dos de ellos ya han sido aceptados en revistas internacionales con arbitraje, sin embargo a la hora de desarrollar la tesis se trato de ir explicando paso por paso lo que se utilizaba de manera que un alumno de licenciatura o maestría con interes en el área la pudiera seguir sin ningún problema.

Esperamos que usted disfrute de este trabajo.

Julio del 2002.

CAPÍTULO 1

La Propiedad *RNT* en los Dendroides

1.1 Preliminares

Un dendroide es un continuo, conexo por trayectorias tal que la intersección de cualesquiera dos de sus subcontinuos es conexa.

Cuando se hicieron los primeros intentos por definir a los dendroides (1958, 1959 y principios de los años 60), en la sede de Wroclaw del Seminario Superior de Topología de la Academia Polaca de Ciencias, conducido por Bronislaw Knaster, el mismo Knaster visualizaba a estas curvas como las que se pueden retraer sobre sus subdendritas, o mejor aún, en sus subárboles bajo retracciones, con poco movimiento. Más tarde, por facilidad se adoptó como definición de dendroide, la que hemos escrito arriba, Pero el problema de decir si las dos definiciones son equivalentes aún permanece abierto. En este capítulo no resolveremos este problema, pero estudiaremos qué tipo de subárboles de los dendroides podrían tener esta propiedad. Como no todos los dendroides pueden retraerse a todos sus subárboles cercanos, introduciremos la propiedad *RNT* para estudiar los que sí se pueden.

Definición 1.1 *Un* dendroide *es un continuo arco conexo y hereditariamente unicoherente.*

Definición 1.2 *Una* dendrita *es un dendroide localmente conexo.*

Definición 1.3 *Una* gráfica finita *es un continuo que es una unión finita de segmentos (aristas) tales que dos de ellos, o no se intersectan o se intersectan en sus puntos terminales.*

Definición 1.4 *Un* árbol *es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.*

En particular los árboles resultan dendroides localmente conexos, es decir dendritas.

Definición 1.5 *Una* retracción *de X en un subconjunto T de X es una función continua $f : X \to T$ que cumple que $f(t) = t$ para toda $t \in T$.*

Definición 1.6 *Una* ε-retracción *es una retracción $r : X \to T$ que satisface que $d(x, r(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in X$.*

Notación. En este capítulo trabajaremos casi todo el tiempo con dendroides, y T siempre denotará un árbol contenido en X.

Definición 1.7 *Un continuo X tiene* la propiedad RNT *si para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si T es un árbol contenido en X y $H(T, X) < \delta$, entonces existe una ε-retracción $r : X \to T$.*

Lo que queremos decir con esta propiedad es que si tenemos una $\varepsilon > 0$, entonces para cualquier subárbol T suficientemente cercano al total, existe una ε-retracción, r de X sobre T.

En este capítulo probaremos una serie de resultados con respecto a la propiedad RNT, por el momento los enunciaremos y después iremos desarrollando uno por uno.

(1) Si X es un continuo arco conexo con la propiedad RNT, entonces X es un dendroide.

(2) Las dendritas tienen la propiedad RNT.

(3) Un dendroide X tiene la propiedad RNT hereditaria si y sólo si X es una dendrita.

(4) Un dendroide suave X tiene la propiedad RNT si y sólo si X es una dendrita.

(5) Existe un dendroide no localmente conexo X tal que X tiene la propiedad RNT.

1.2 La propiedad RNT en arco conexos.

En esta sección probaremos que los continuos arco conexos con la propiedad RNT son dendroides, para esto desarrollaremos una serie de resultados preliminares.

Lema 1.8 *Si X y Y son dos continuos no degenerados que no contienen curvas cerradas simples y $X \cap Y = \{z\}$, entonces $X \cup Y$ no contiene curvas cerradas simples.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $X \cup Y$ contiene una curva cerrada simple S.

Aseguramos que $(X \cup Y) \setminus \{z\}$ no es conexo.

Esto se ve fácilmente pues los conjuntos $H = X \setminus \{z\}$ y $K = Y \setminus \{z\}$ nos dan una separación del espacio ya que $\overline{H} \cap K = X \cap (Y \setminus \{z\}) = \emptyset$, $\overline{K} \cap H = Y \cap (X \setminus \{z\}) = \emptyset$ y como X y Y son continuos no degenerados, $H \neq \emptyset$ y $K \neq \emptyset$.

Veamos que $z \in S$, si esto no ocurriera como S es conexo y $z \notin S$, entonces $S \subset X \setminus \{z\} \subset X$ o $S \subset Y \setminus \{z\} \subset Y$, lo cual es una contradicción pues ni X ni Y contienen curvas cerradas simples, por tanto $z \in S$.

Ahora como S es una curva cerrada simple, entonces ninguno de sus puntos la desconecta y por tanto $S \setminus \{z\}$ es un subconjunto conexo de $(X \setminus \{z\}) \cup (Y \setminus \{z\})$, y como ambos uniendos son separados concluimos que $S \setminus \{z\} \subset X \setminus \{z\}$ o $S \setminus \{z\} \subset Y \setminus \{z\}$. Esto implica que $S \subset X$ o $S \subset Y$, lo cual es absurdo. Esta contradicción nace de suponer que existe una curva cerrada simple S contenida en $X \cup Y$, por tanto $X \cup Y$ no contiene curvas cerradas simples.

■

Lema 1.9 *Sea X un continuo. Dado un árbol $T \subset X$ y un arco $A \subset X$, con extremos p, q $(A = pq)$, si $T \cap A = \{p\}$ o $T \cap A = \{q\}$, entonces $T \cup A$ es un árbol.*

Demostración. Supongamos que $T \cap A = \{p\}$, entonces $p \in T$. Sea J la arista de T que contiene al punto p. Si p es un extremo de la arista J, entonces $T \cup A$ es una gráfica finita pues es una unión finita de arcos que se unen sólo en sus puntos extremos. Si p no es extremo de la arista J, entonces sean j_1 y j_2 sus puntos extremos. Ahora redefino T declarando dos nuevas aristas en T, J_1 que es el arco con extremos j_1 y p,(es decir el arco j_1p) y J_2

que es el arco con extremos j_2 y p, (es decir el arco j_2p). Para ver que $T \cup A$ es un árbol, declaremos a p como vértice de $T \cup A$. Veremos que cualesquiera dos aristas de $T \cup A$ sólo se intersectan en sus puntos extremos. Para empezar las aristas en T que no intersectaban a J sólo se intersectan en sus puntos extremos, y las aristas en T que intersectaban a J la intersectaban en j_1 o en j_2 (pues T es un árbol), pero ahora intersectan a la arista J_1 o a la arista J_2 en uno de sus puntos extremos. Finalmente A, es una arista que intersecta a J_1 en p y a J_2 en p o sea en uno de sus puntos enxtemos, por tanto $T \cup A$ es una gráfica finita.

Por el Lema 1.8 como T no contiene curvas cerradas simples (pues es un árbol), además A no contiene curvas cerradas simples (pues es un arco) y $T \cap A = \{p\}$, entonces $T \cup A$ no contiene curvas cerradas simples. De modo que $T \cup A$ es una gráfica finita sin curvas cerradas simples, y por tanto es un árbol.

(El caso $T \cap A = \{q\}$ se analiza de manera análoga pues p y q juegan papeles simétricos).

■

Lema 1.10 *Dado un continuo arco conexo X, un árbol T de X y un punto $x \in X$, existe un punto $t \in T$ y un arco A en X (posiblemente degenerado), con extremos x, t que cumple que $A \cap T = \{t\}$.*

Demostración. Si $x \in T$, hacemos $A = \{x\}$ y $t = x$. Supongamos entonces que $x \notin T$. Sea p un punto fijo en T, como X es arco conexo existe un arco en X que une x con p, este arco se puede ver como la imagen de una función inyectiva y continua $\alpha : [0,1] \to A$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = p$.

Sea $s = \min \alpha^{-1}(T)$, notemos que $\alpha^{-1}(T)$ es no vacío pues como $\alpha(1) = p \in T$, entonces $1 \in \alpha^{-1}(T)$. Ahora sea $t = \alpha(s)$, entonces $\alpha([0,s])$ es un arco que une x con t, pues es la imagen continua e inyectiva del arco $[0,s]$, donde $\alpha(0) = x$ y $\alpha(s) = t$.

Veamos ahora que $\alpha([0,s]) \cap T = \{t\}$. Como $s = \min\{\alpha^{-1}(T)\}$, entonces $s \in \alpha^{-1}(T)$, de modo que $\alpha(s) \in T$. Y como $\alpha(s) = t$, entonces $t \in T$, así que $t \in \alpha([0,s]) \cap T$. Por tanto $\{t\} \subset \alpha([0,s]) \cap T$. Para ver la otra contención tomemos un punto t' en $\alpha([0,s]) \cap T$, entonces existe un número s' en $[0,s]$ que cumple que $\alpha(s') = t'$. Como $s = \min\{\alpha^{-1}(T)\}$ y $\alpha(s') = t' \in T$, entonces $s \leq s'$, pero como $s' \in [0,s]$, entonces $s' \leq s$, de modo que $s = s'$, y por tanto $\alpha(s) = \alpha(s')$. Con lo que tenemos que $t = t'$. Con esto hemos probado que $\alpha([0,s]) \cap T \subset \{t\}$. De estas dos contenciones obtenemos que $\alpha([0,s]) \cap T = \{t\}$.

Si hacemos que $A = \alpha([0,s])$, entonces A tiene como extremos a los puntos x, t pues $\alpha(0) = x$ y $\alpha(s) = t$, y $A \cap T = \{t\}$, y con esto terminamos la prueba.

■

Lema 1.11 *Sea X un continuo arco conexo. Dado un árbol T de X y un número finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, existe un árbol T_n de X tal que $T \subset T_n$ y $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset T_n$.*

Demostración. Haremos esta prueba por inducción en n. Si sólo tuvieramos un punto x_1, podemos suponer que $x_1 \notin T$. De acuerdo con el Lema 1.10, existen un punto $t \in T$ y un arco A con extremos x_1 y t que cumplen que $A \cap T = \{t\}$. Y por el Lema 1.9 , como $T \cap A = \{t\}$, entonces $A \cup T$ es un árbol que contiene a T y al punto x_1.

Para hacer el paso inductivo, supongamos que el lema es cierto para n puntos y consideremos $n+1$ puntos $x_1, ..., x_{n+1}$. Por la hipótesis de inducción, existe un árbol T_n que contiene tanto a T como a los puntos $x_1, ..., x_n$. Y por el caso $n = 1$ en esta inducción, existe un árbol T_{n+1} que contiene tanto a T_n como a x_{n+1}. De modo que el árbol T_{n+1} contiene tanto a T como a los puntos $x_1, ..., x_{n+1}$. Esto concluye el paso inductivo, termina la inducción y la prueba del lema.

■

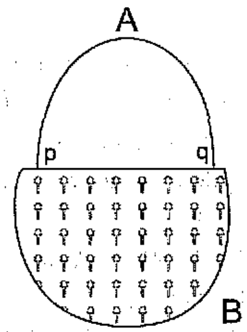
Lema 1.12 *Dado un continuo arco conexo X y un árbol T contenido en X, se tiene que para todo número $\delta > 0$ existe un árbol T_δ de X que cumple que $T \subset T_\delta$ y $H(X, T_\delta) < \delta$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = \{B_\delta(x) : x \in X\}$. Notemos que $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de X. Como X es compacto existen puntos $x_1, x_2, ..., x_n$ en X que cumplen que $X = B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup ... \cup B_\delta(x_n)$. Por el Lema 1.11 existe un árbol T_n de X que cumple que tanto T como el conjunto de puntos $\{x_1, ..., x_n\}$ están contenidos en T_n. Veamos ahora que $H(T_n, X) < \delta$.

Como $T_n \subset N(\delta, X)$, entonces sólo tenemos que probar que $X \subset N(\delta, T_n)$. Sea $x \in X$. Como $X = B_\delta(x_1) \cup B_\delta(x_2) \cup ... \cup B_\delta(x_n)$, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $d(x, x_i) < \delta$. Ya que $x_i \in T_n$. Concluimos que $x \in N(\delta, T_n)$. Hemos probado entonces que $X \subset N(\delta, T_n)$. Por tanto $H(T_n, X) < \delta$. Finalmente hacemos $T_\delta = T_n$. Con esto terminamos la prueba del lema.

■

Definición 1.13 *Un* candado *en un continuo X, es un subcontinuo L de X que cumple que es la unión de dos subcontinuos A y B de X, ($L = A \cup B$) tales que:*
(i) A es un arco no degenerado con extremos p, q y
(ii) $A \cap B = \{p, q\}$



Lema 1.14 *Sea X un continuo arco conexo. Si X no es hereditariamente unicoherente, entonces X contiene un candado L.*

Demostración. Supongamos que X no es hereditariamente unicoherente, entonces existen dos subcontinuos no degenerados H y K de X tales que $H \cap K$ no es conexo. Por tanto $H \cap K$ tiene al menos dos componentes. Llamemos C_1 y C_2 a dos de las componentes de $H \cap K$. Elegimos $p' \in C_1$, y $q' \in C_2$. Como X es un continuo arco conexo existe un arco en X que une p' con q', a este arco lo podemos ver como la imagen de una función continua e inyectiva $\alpha : [0,1] \to X$ tal que $\alpha(0) = p'$ y $\alpha(1) = q'$. Entonces $\alpha([0,1])$ es un arco en X con extremos p' y q'.

Veremos que $\alpha([0,1])$ no está contenido en $H \cap K$. Supongamos por el contrario que $\alpha([0,1])$ está contenido en $H \cap K$. entonces $\alpha([0,1])$ es un conjunto conexo que intersecta a dos componentes diferentes C_1 y C_2 de $H \cap K$. De modo que $\alpha([0,1]) \cup C_1 \cup C_2$ es un subconjunto conexo de $H \cap K$. Pero como C_1 y C_2 son componentes de $H \cap K$, entonces $\alpha([0,1]) \cup C_1 \cup C_2 \subset C_1$ y $\alpha([0,1]) \cup C_1 \cup C_2 \subset C_2$. De aquí que $C_1 \subset C_2$ y que $C_2 \subset C_1$. De modo que $C_2 = C_1$. Pero esto es una contradicción pues C_1 y C_2 son componentes diferentes de $H \cap K$. Esta contradicción nace de suponer que $\alpha([0,1])$ está contenido en $H \cap K$. Por tanto $\alpha([0,1])$ no está contenido en $H \cap K$.

Debido a que $\alpha([0,1])$ no está contenido en $H \cap K$ tenemos que existe $r \in \alpha([0,1])$ tal que $r \notin H$ ó $r \notin K$.

Analizaremos el caso en que $r \notin H$ y construiremos un candado L en X. Como H y K juegan papeles simétricos, el caso en que $r \notin K$ se analiza de manera análoga y también se puede construir un candado en X.

Sea $s_r \in [0,1]$ tal que $\alpha(s_r) = r$. Consideremos la función α restringida al intervalo $[0, s_r]$, entonces $\alpha|_{[0,s_r]} : [0, s_r] \to X$ es una función continua e inyectiva, sea $s_p = \max(\alpha|_{[0,s_r]})^{-1}(H)$, notemos que $(\alpha|_{[0,s_r]})^{-1}(H) \neq \emptyset$, pues $\alpha(0) = p' \in H$. Notemos también que $s_p < s_r$ pues $\alpha(s_p) \in H$ y $\alpha(s_r) = r \notin H$. Sea $p = \alpha(s_p)$.Veremos ahora que $\alpha([s_p, s_r]) \cap H = \{p\}$.

Como $p = \alpha(s_p) \in H$, entonces $p \in \alpha([s_p, s_r]) \cap H$. Por tanto $\{p\} \subset \alpha([s_p, s_r]) \cap H$. Para probar la otra contención sea $p_1 \in \alpha([s_p, s_r]) \cap H$, entonces existe $s_{p_1} \in [s_p, s_r]$ tal que $\alpha(s_{p_1}) = p_1$. Así que $s_{p_1} \in (\alpha|_{[0,s_r]})^{-1}(H)$. Pero $s_p = \max(\alpha|_{[0,s_r]})^{-1}(H)$, de manera que $s_{p_1} \leq s_p$. Pero como $s_{p_1} \in [s_p, s_r]$, entonces $s_p \leq s_{p_1}$. Por tanto $s_p = s_{p_1}$. De modo que $\alpha(s_p) = \alpha(s_{p_1})$, y por tanto $p = p_1$. Con esto hemos probado que $\alpha([s_p, s_r]) \cap H \subset \{p\}$. de las dos contenciones obtenemos que $\alpha([s_p, s_r]) \cap H = \{p\}$.

Ahora analizaremos la función α restringida al intervalo $[s_r, 1]$, entonces $\alpha|_{[s_r,1]} : [s_r, 1] \to X$ es una función continua e inyectiva, definimos $s_q = \min(\alpha|_{[s_r,1]})^{-1}(H)$, notemos que $\{(\alpha|_{[s_r,1]})^{-1}(H)\} \neq \emptyset$ pues $\alpha(1) = q' \in H$. Notemos también que $s_q > s_r$ pues $\alpha(s_q) \in H$ y $\alpha(s_r) = r \notin H$.

Sea $q = \alpha(s_q)$. Procediendo como antes, se conluye que $\alpha([s_r, s_q]) \cap H = \{q\}$. Ya que $\alpha([s_p, s_q]) \cap H = (\alpha([s_p, s_r] \cup \alpha([s_r, s_q]) \cap H = (\alpha([s_p, s_r]) \cap H) \cup (\alpha([s_r, s_q]) \cap H) = \{p\} \cup \{q\}$. Tenemos que $\alpha([s_p, s_q]) \cap H = \{p, q\}$.

Entonces, si hacemos $A = \alpha([s_p, s_q])$, tenemos que A es un arco con extremos p, q. Notemos que A es no degenerado pues $s_p < s_r < s_q$, y como α es una función inyectiva, entonces $\alpha(s_p) \neq \alpha(s_q)$, y por tanto $p \neq q$. Hacemos $B = H$, entonces $L = A \cup B$ es un candado en X, pues $A, B \in C(X)$ y cumplen que:

(i) A es un arco con extremos p, q y

(ii) $A \cap B = \{p, q\}$.

Hemos probado que si X es un continuo conexo por trayectorias y X no es hereditariamente unicoherente, entonces X contiene un candado L.

■

Teorema 1.15 *Si X es un continuo arco conexo con la propiedad RNT entonces X es un dendroide.*

Demostración. Como X ya es un continuo arco conexo, basta probar que X es hereditariamente unicoherente.

Supongamos por el contrario que X no es hereditariamente unicoherente, entonces por el Lema 1.14 existe un candado L de X.

Recordemos que un candado L es un continuo de la forma $L = A \cup B$ donde A y B son dos subcontinuos de X que satisfacen:

(i) A es un arco no degenerado con extremos p, q y

(ii) $A \cap B = \{p, q\}$

Probaremos entonces que X no tiene la propiedad RNT (lo cual será una contradicción).

Sea $s \in A \setminus \{p, q\}$, entonces $s \notin B$. Como $\{s\}$ y B son dos cerrados ajenos tenemos que, si d es la métrica en X, entonces $d(s, B) = \varepsilon > 0$.

Para esta $\varepsilon > 0$ probaremos que para toda $\delta > 0$ existe un árbol T_δ en X tal que $H(T_\delta, X) < \delta$ y no hay una ε-retracción, r de X sobre T_δ.

Consideremos el arco A del candado L, por el Lema 1.12 existe un árbol $T_\delta \subset X$ tal que $A \subset T_\delta$ y $H(T_\delta, X) < \delta$.

Como $A \subset T_\delta$, entonces $p, q \in T_\delta$ y como T_δ es un árbol y en particular T_δ es únicamente arco conexo, tenemos que si H es un subcontinuo de T_δ que contiene a los puntos p, q, entonces $A \subset H$.

Sea $r : X \to T_\delta$ una retracción. Como $p, q \in T_\delta$, entonces $r(p) = p$ y $r(q) = q$. Ahora como $p, q \in B$, entonces $r(B)$ es un subcontinuo de T_δ que contiene a los puntos p, q y por tanto $A \subset r(B)$. Como $s \in A$ y $A \subset r(B)$, entonces existe un punto $b \in B$, tal que $r(b) = s$. Con esto obtenemos que $d(b, r(b)) = d(b, s) \geq d(B, s) = \varepsilon$, entonces r no es una ε-retracción.

Acabamos de probar que para $\varepsilon = d(s, B)$ y para toda $\delta > 0$, existe un árbol $T_\delta \subset X$ tal que $H(T_\delta, X) < \delta$ y ninguna retracción $r : X \to T_\delta$, es una ε-retracción. De esto obtenemos que X no tiene la propiedad RNT lo cual es una contradicción que viene de suponer que X no es hereditariamente unicoherente. Por tanto X es hereditariamente unicoherente y como X es arco conexo, X es un dendroide. Con esto finalizamos la prueba del teorema.

■

En esta sección probamos que los continuos arco conexos con la propiedad RNT son necesariamente dendroides, en las siguientes secciones enfocaremos el estudio de la propiedad RNT exclusivamente a los dendroides.

1.3 La propiedad RNT en las dendritas.

En esta sección probaremos que las dendritas tienen la propiedad RNT, para ello utilizaremos unos cuantos resultados auxiliares.

Observación. Dado un dendroide X, para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$ existe un único arco xy, que une x con y y tiene como puntos extremos a x, y.

Notación. Cada vez que hablemos del arco ab en un dendroide X, nos referiremos al único arco en X que tiene como puntos extremos a los puntos a y b.

Lema 1.16 *Sean X un dendroide, $B \in C(X)$ y a un punto en X. Entonces existe un único punto $b \in B$ tal que el arco ab cumple que $ab \cap B = \{b\}$, y b tiene la propiedad de que para todo punto $y \in B$, $b \in ay$.*

Demostración. Como X es un dendroide, entonces X es únicamente arco conexo, sea y cualquier punto en B y fijémonos en el arco ay, ahora fijémonos en $ay \cap B$ como X es hereditariamente unicoherente, entonces $ay \cap B$ es un subcontinuo de ay y por tanto un subarco de ay que contiene al punto y, de tal forma que existe $b \in ay$ tal que $ay \cap B = by$ y como $ay = ab \cup by$ tenemos que $ab \cap B = \{b\}$.

Ahora veamos que $b \in ay'$ para todo punto $y' \in B$. Sea $y' \in B$, como B es únicamente arco conexo (pues los subcontinuos de los dendroides, son también dendroides) $by' \subset B$, ahora $ab \cap by' \subset ab \cap B = \{b\}$, entonces $ab \cup by'$ es un arco que une a con y' y como X es únicamente arco conexo entonces $ab \cup by' = ay'$. Por tanto $b \in ay'$, y esto es para toda $y' \in B$.

■

Corolario 1.17 *Sean X una dendrita y T un árbol contenido en X. Entonces para toda $x \in X$ existe un único punto $p_x \in X$ tal que el arco xp_x cumple que $xp_x \cap T = \{p_x\}$ y para toda $t \in T$ se tiene que p_x pertenece al arco xt.*

Demostración. Como X es una dendrita, entonces X es un dendroide y como T es un árbol contenido en X, entonces por el Lema 1.16 para $x \in X$

existe un único punto $p_x \in T$ tal que el arco xp_x cumple que $xp_x \cap T = \{p_x\}$ y $p_x \in xt$ para toda $t \in T$ y esto se cumple para toda $x \in X$.

■

Notación. Dado un dendroide X, un subcontinuo Y de X y un punto $x \in X$, denotaremos por p_x al único punto en Y que cumple que $xp_x \cap Y = \{p_x\}$ y $p_x \in xy$ para toda $y \in Y$.

Lema 1.18 *Sean X una dendrita y Y un subcontinuo de X. Entonces la función $r : X \to Y$ definida como $r(x) = p_x$ es una retracción de X en Y.*

Demostración. Veamos que $r(x) = p_x$ es una retracción.

Primero veremos que $r(y) = y$ para toda $y \in Y$. Dada $y \in Y$, entonces $y \in yp_y \cap Y = \{p_y\}$ por tanto $y = p_y$. De modo que $r(y) = y$ para toda $y \in Y$.

Ahora veremos que $r : X \to T$ es continua. Veremos que para toda $\varepsilon > 0$ existe $\delta > o$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(r(x), r(y)) < \varepsilon$.

Veremos primero el caso en que $x \notin Y$. Sea $\varepsilon > 0$, si $x \in X \setminus Y$ como este conjunto es abierto, existe una $\varepsilon' < \varepsilon$ tal que $B_{\varepsilon'}(x) \cap T = \emptyset$ y como X es una dendrita existe un abierto conexo por arcos U_x tal que $x \in U_x \subset B_{\varepsilon'}(x)$, (recordemos que los abiertos conexos en un espacio localmente conexo, son arco conexos) y existe $\delta_1 > 0$ tal que $x \in B_{\delta_1}(x) \subset U_x \subset B_{\varepsilon'}(x) \subset X \setminus Y$. Sea $y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta_1$, entonces $y \in B_{\delta_1}(x)$. Probaremos que $r(y) = p_x$. Sabemos que $r(y) = p_y$, ahora el arco xy está contenido en U_x pues $y, x \in U_x$ y U_x es conexo por trayectorias, y como $xy \subset U_x \subset B_{\varepsilon'}(x) \subset X \setminus Y$, entonces $xy \cap Y = \emptyset$, de modo que si nos fijamos en el continuo $(yp_y \cup xy \cup xp_x) \cap Y$ tenemos que: $(yp_y \cup xy \cup xp_x) \cap Y = (yp_y \cap Y) \cup (xy \cap Y) \cup (xp_x \cap Y) = \{p_y\} \cup \emptyset \cup \{p_x\} = \{p_y, p_x\}$. Pero como X es hereditariamente unicoherente entonces $\{p_x, p_y\}$ es un conjunto conexo por tanto $p_x = p_y$. Así pues tenemos que $r(y) = p_y = p_x$ para toda $y \in B_{\delta_1}(x)$. Entonces, si $d(x, y) < \delta_1$ tenemos que $d(r(x), r(y)) = d(p_x, p_y) = d(p_y, p_y) = 0 < \varepsilon$.

Analizaremos ahora el caso cuando $x \in Y$. Como X es una dendrita, dada $\varepsilon > 0$ existe un abierto arco conexo U_x tal que $x \in U_x \subset B_\varepsilon(x)$, y existe un número $\delta_2 > 0$ que satisface que $x \in B_{\delta_2}(x) \subset U_x \subset B_\varepsilon(x)$. Si y cumple que $d(x, y) < \delta_2$, entonces $y \in B_{\delta_2}(x)$. Entonces el arco xy está contenido en $U_x \subset B_\varepsilon(x)$ pues $y, x \in B_{\delta_2}(x) \subset U_x$ y U_x es conexo por arcos, y también tenemos que $p_y \in yx$, pues $x \in Y$. Entonces $p_y \in B_\varepsilon(x)$. De modo que si $d(x, y) < \delta_2$, entonces $d(r(x), r(y)) = d(p_x, p_y) = d(x, p_y) < \varepsilon$.

Esto concluye la prueba de que la función r es continua. Tenemos entonces que $r : X \to Y$ cumple que $r(y) = y$ para toda $y \in Y$ y que r es continua. Por tanto r es una retracción de X en Y.

■

Teorema 1.19 *Si X es una dendrita, entonces X tiene la propiedad RNT.*

Demostración. Como X es localmente arco conexo para cada $x \in X$ existe un abierto arco conexo U_x tal que $x \in U_x \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$. Consideremos ahora el conjunto $C= \{U_x : x \in X\}$, entonces C es una cubierta abierta de X. Como X es compacto existen puntos $x_1, x_2, ...x_n$ de X que cumplen que $X = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup ... \cup U_{x_n}$. Para cada $i = \{1, ..., n\}$, existe un número positivo $\delta_i > 0$ tal que $x_i \in B_{\delta_i}(x_i) \subset U_{x_i} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n\}$. Sea T un árbol contenido en X tal que $H(T, X) < \delta$, entonces para cada $i = \{1, ..., n\}$ existe $t_i \in T$ tal que $d(x_i, t_i) < \delta$. Como $\delta \leq \delta_i$, tenemos que $t_i \in B_{\delta_i}(x_i) \subset U_{x_i}$.

Consideremos $r : X \to T$ definida por $r(x) = p_x$. Por el Lema 1.18, r es una retracción, veremos ahora que r es una ε-retracción. Sea $x \in X$, si $x \in T$, entonces $r(x) = x$ y, por tanto $d(x, r(x)) = d(x, x) = 0 < \varepsilon$. Si $x \in X \setminus T$, entonces como $x \in U_{x_i}$ para alguna $i = \{1, 2, ..., n\}$, y tenemos un punto $t_i \in B_{\delta_i}(x_i) \subset U_{x_i}$, y como U_{x_i} es arco conexo, entonces el arco $xt_i \subset U_{x_i} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ y como $t_i \in T$, entonces $p_x \in xt_i \subset U_{x_i} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$. Entonces tenemos que $p_x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ y $x \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_i)$ y por tanto $d(x, x_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x_i, p_x) < \frac{\varepsilon}{2}$, de donde tenemos que $d(x, r(x)) = d(x, p_x) \leq d(x, x_i) + d(x_i, p_x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por tanto la función $r : X \to T$ es una ε-retracción, y con esto hemos probado que las dendritas tienen la propiedad *RNT*.

■

Con esto terminamos esta sección. En la siguiente sección caracterizaremos a las dendritas como dendroides que tienen la propiedad *RNT* hereditaria.

1.4 La Propiedad *RNT* hereditaria

Cuando empezamos a estudiar la propiedad *RNT* en los dendroides, pensamos que sólo las dendritas tenían esta propiedad, pero esto no es cierto, como se verá en la sección 5. En esta sección veremos que si X es un dendroide, entonces todo subdendroide Y de X tiene la propiedad *RNT* si y sólo si X es una dendrita.

Para probar esto daremos primero un par de definiciones y desarrollaremos un par de resultados auxiliares.

Definición 1.20 *Un continuo X tiene* la propiedad *RNT* hereditaria, *si para todo subcontinuo Y de X, se tiene que Y tiene la propiedad RNT.*

Definición 1.21 *Dado un dendroide en X, una* semiescoba *en X es un subcontinuo Y de X que contiene:*
(a) un arco $A \subset Y$,
(b) dos puntos p, q, con $p \neq q$,
(c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$ tales que:

(i) $Y = A \cup \overline{\{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}\}}$,
(ii) $p_n \to p$,
(iii) $p_nq \cap p_mq = \{q\}$ si $n \neq m$,
(iv) $p_nq \cap A = \{q\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Observación. Sea $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}}$ una semiescoba en un dendroide X, y sea $Y' = \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}}$, entonces como Y' es la cerradura de un conexo, tenemos que Y' es un continuo.

Lema 1.22 *Sea $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}}$ una semiescoba en un dendroide X y sea $Y' = \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}}$, entonces para toda $\delta > 0$ existe un número natural N_δ tal que $T'_\delta = \bigcup\{p_nq : n \leq N_\delta\}$ es un árbol y $H(T'_\delta, Y') < \delta$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{B_{\frac{\delta}{2}}(x) : x \in Y'\}$. Como C es una cubierta abierta de Y' y Y' es compacto, entonces existen un número finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_k \in Y'$ tal que $Y' = B_{\frac{\delta}{2}}(x_1) \cup B_{\frac{\delta}{2}}(x_2) \cup ... \cup B_{\frac{\delta}{2}}(x_k)$. Para $i = \{1, 2, ..., k\}$ tenemos dos posibilidades:
(A) $x_i \in \bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $x_i \in p_{m_i}q$ o
(B) $x_i \in \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}} \setminus \bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}$ y por tanto existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $B_{\frac{\delta}{2}}(x_i) \cap p_{m_i}q \neq \emptyset$.

Sean $K_\delta = \max\{m_1, m_2, ..., m_k\}$ y $T'_\delta = \bigcup\{p_nq : n \leq K_\delta\}$. Claramente como T'_δ es una unión finita de arcos que sólo se intersectan en su punto extremo q, entonces T'_δ es una gráfica finita y como es subcontinuo de un dendroide, entonces T'_δ no contiene curvas cerradas simples y por tanto T'_δ es un árbol.

Veamos ahora que $H(T'_\delta, Y') < \delta$. Como $T'_\delta \subset N(\delta, Y')$, sólo tenemos que ver que $Y' \subset N(\delta, T'_\delta)$. Sea d la métrica en X y sea $x \in Y'$, entonces $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_i)$ para alguna $i = \{1, 2, ..., k\}$. Si $x_i \in p_{m_i}q$, entonces $x_i \in T'_\delta$, de modo que existe $t = x_i$ un punto en T'_δ tal que $d(x, t) < \delta$. Ahora si $x_i \notin T'_\delta$, entonces $B_{\frac{\delta}{2}}(x_i) \cap p_{m_i}q \neq \emptyset$ con $p_{m_i}q \subset T'_\delta$, entonces existe un punto $t \in T'_\delta$ tal que $d(x_i, t) < \frac{\delta}{2}$, de modo que $d(x,t) \leq d(x, x_i) + d(x_i, t) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$. De cualquier forma, para cada $x \in Y'$, existe un punto $t \in T$ tal que $d(x,t) < \delta$. Por tanto $Y' \subset N(\delta, T'_\delta)$. De las dos contenciones obtenemos que $H(T'_\delta, Y') < \delta$ y con esto terminamos la prueba del lema.

■

Lema 1.23 *Sean X un dendroide y $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}}$ una semiescoba en X, entonces X no tiene la propiedad RNT hereditaria.*

Demostración. Sea $Y' = \overline{\bigcup\{p_nq : n \in \mathbb{N}\}}$. Entonces Y' es un subcontinuo de X. Veremos que Y' no tiene la propiedad *RNT*.

Como la sucesión $p_n \to p$ (Definición 1.21 (ii)), entonces $p \in Y'$. De modo que $\{p, q\} \subset Y'$. Como Y' es un dendroide, Y' es únicamente arco conexo, por tanto el arco qp está contenido en Y'.

Sea $b \in qp \setminus \{q, p\}$. Entonces $qp = qb \cup bp$, donde $qb \cap bp = \{b\}$. Debido a que el punto q y el arco bp son dos cerrados ajenos, entonces existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(q) \cap bp = \emptyset$. De igual manera, como el punto p y el arco qb son dos cerrados ajenos, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_2}(p) \cap qb = \emptyset$. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Veremos que para todo $\delta > 0$ existe un árbol $T_\delta \subset Y'$ tal que $H(T_\delta, Y') < \delta$ y que cumple que para toda retracción r de X en T_δ, se tiene que r no es una ε-retracción.

Sea $\delta > 0$. Por el Lema 1.22, existe un número natural K_δ tal que $T'_\delta = \bigcup\{p_nq : n \leq K_\delta\}$ es un árbol y $H(T'_\delta, Y') < \delta$.

Como por la propiedad (iv) de la definición de una semiescoba (Definición 1.21), $p_nq \cap A = \{q\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y como $pq \subset A$, entonces $p_nq \cap pq = \{q\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto para $T'_\delta = \bigcup\{p_nq : n \leq K_\delta\}$, tenemos que $T'_\delta \cap pq = \{q\}$. Ahora como $b \in pq$ y $b \neq q$, entonces $b \notin T'_\delta$.

Consideremos ahora el árbol $T_\delta = T'_\delta \cup qb$, como qb es un arco y qb intersecta al árbol T'_δ sólo en uno de sus puntos extremos, entonces, por el Lema 1.9 tenemos que $T_\delta = T'_\delta \cup qb$ es un árbol. Como $H(T'_\delta, Y') < \delta$ y $T'_\delta \subset T_\delta$, entonces $H(T_\delta, Y') < \delta$.

Sea $r : X \to T_\delta$ una retracción, veremos que r no es una ε-retracción. Sea d la métrica en X. Como $p \notin T'_\delta$ y $p \notin qb$, entonces $p \notin T_\delta$. Por tanto $r(p) \neq p$. Supongamos por el contrario que r es una ε-retracción, entonces $d(p, r(p)) < \varepsilon$. Como $d(p, qb) > \varepsilon$, entonces $r(p) \notin qb$. Ahora, como $r(p) \in T_\delta$ y $r(p) \notin qb$, entonces $r(p) \in T'_\delta = \bigcup\{p_nq : n \leq K_\delta\} \setminus \{q\}$, por tanto $r(p) \in p_nq \setminus \{q\}$ para alguna $n \leq K_\delta$. Sea $r(p) = k$.

Veamos ahora qué pasa con $r(bp)$. Como r es una retracción de X en T_δ y $b \in T_\delta$, entonces $r(b) = b$, y como $r(p) = k$ tenemos que $bk \subset r(bp)$. Veremos que $q \in bk$.

El punto k pertenece al arco $p_n k$, entonces el arco qk está contenido en el arco $p_n q$. El punto b pertenece al arco pq, entonces el arco qb está contenido en el arco pq. De esto obtenemos que $bq \cap qk \subset p_n q \cap pq = \{q\}$. Entonces concluimos que $bq \cap qk = \{q\}$, de modo que $bq \cup qk$ es un arco que tiene como puntos extremos a los puntos b,k y como Y' es un dendroide este arco es único por tanto $bk = bq \cup qk$. Con esto hemos probado que $q \in bk$.

Como $bk \subset r(bp)$ y $q \in bk$, entonces existe un punto $s \in bp$ tal que $r(s) = q$. De modo que $d(s, r(s)) = d(s, q) \geq d(bp, q) = \varepsilon$, lo cual es una contradicción que nace de suponer que r es una ε-retracción. Por tanto r no es una ε-retracción, y esto es para cualquier retracción r de Y' en T_δ.

Hemos probado que Y' no tiene la propiedad *RNT*. Como Y' es un subcontinuo de X, entonces X no tiene la propiedad *RNT* hereditaria y con esto concluimos la prueba del lema.

■

Ahora haremos un proceso parecido con el que hicimos con las semiescobas, pero con unos subcontinuos de los dendroides llamados semipeines, mostraremos que si X es un dendroide que contiene un semipeine Y, entonces existe un subcontinuo de Y' de Y tal que Y' no tiene la propiedad *RNT*.

Definición 1.24 *Un* semipeine *en un dendroide X es un subcontinuo Y de X que contiene:*
(a) un arco A,
(b) dos puntos $p, q \in A$ con $p \neq q$,
(c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $Y \setminus A$, y
(d) una sucesión de puntos $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A.
tales que:

(i) $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_n q_n : n \in \mathbb{N}\}}$,
(ii) $p_n \to p$, $q_n \to q$,
(iii) $p_1q_1, p_2q_2, \ldots,$ *son arcos ajenos dos a dos,*
(iv) $p_n q_n \cap A = \{q_n\}$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$, al arco A_n como $A_n = p_n q_n$. Entonces $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$ y $A_n \cap A = \{q_n\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.25 *Sea $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_nq_n : n \in \mathbb{N}\}}$ un semipeine de un dendroide X, entonces existe un subcontinuo Y' de Y que contiene:*
(a') un arco B,
(b') un punto $b \in B$,
(c') un subconjunto infinito $\mathbb{M}$ de $\mathbb{N}$
tales que:

(i') $Y' = B \cup \overline{\bigcup\{p_mq_m : m \in \mathbb{M}\}}$,
(ii') $B \subset A$, $q \in B$ y $p \notin B$,
(iii') $p, q \neq b$, $pb \cap B = \{b\}$, $q \notin pb$,
(iv') $q_m \in B$ para toda $m \in \mathbb{M}$ y $p \notin p_mq_m$ para toda $m \in \mathbb{M}$.

Demostración. El continuo $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_nq_n : n \in \mathbb{N}\}}$ es un semipeine con las propiedades mencionadas en la Definición 1.24. Sean a, a' los puntos extremos del arco A. Como por la Definición 1.24 (b), $p, q \in A$ y $p \neq q$, tomando un orden en A podemos suponer que $a \leq q < p \leq a'$. Sea $b \in A$ tal que $a \leq q < b < p \leq a'$, entonces si hacemos $B = ab$, tenemos que B es un arco que cumple que $B \subset A$, $q \in B$ y $p \notin B$. También tenemos que $p, q \neq b$ por la manera en que se eligió b, además $pb \cap B = \{b\}$ y $q \notin pb$.

Sea $\mathbb{M} = \{m \in \mathbb{N} : q_m \in B\}$. Claramente $\mathbb{M} \subset N$. Veremos que $\mathbb{M}$ es un conjunto infinito de $\mathbb{N}$. Como por la Definición 1.24 (ii), $q_n \to q$ y por la Definición 1.24 (iv), $p_nq_n \cap A = \{q_n\}$, entonces dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $q_n \in (B_\varepsilon(q) \cap A)$. Como $B = ab$ con $a \leq q < b$. Sea d la métrica en X, y sea $\varepsilon = \frac{d(q,ba')}{2}$, entonces $(B_\varepsilon(q) \cap A) \subset B$ y para toda $n \geq N$, $q_n \in (B_\varepsilon(q) \cap A) \subset B$. Por tanto, para toda $n \geq N$, tenemos que $n \in \mathbb{M}$. De modo que $\{n \in \mathbb{N} : n \geq N\} \subset M$ y, por tanto, $\mathbb{M}$ es infinito.

Sea $Y' = B \cup \overline{\bigcup\{p_mq_m : m \in \mathbb{M}\}}$. Como para toda $m \in \mathbb{M}$, $q_m \in B$, entonces Y' es conexo. Como B es cerrado y $\overline{\bigcup\{p_mq_m : m \in \mathbb{M}\}}$ es cerrada entonces Y' es cerrado y por tanto Y' es un continuo.

Ahora tenemos que $p \in A \setminus B$ y como $p_mq_m \cap A = \{q_m\}$ y $q_m \in B$ para toda $m \in \mathbb{M}$, entonces $p \cap p_mq_m = \emptyset$ para toda $m \in \mathbb{M}$. Con esto terminamos la prueba del lema.

■

Lema 1.26 *Sea $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_nq_n : n \in \mathbb{N}\}}$ un semipeine en un dendroide X, y sea $Y' = B \cup \overline{\bigcup\{p_mq_m : m \in \mathbb{M}\}}$ un subcontinuo de Y con las propiedades del Lema 1.25. Entonces para toda $\delta > 0$ existe un número $M_\delta \in \mathbb{M}$ tal que $T_\delta = B \cup \bigcup\{p_mq_m : m \in \mathbb{M}$ y $m \leq M_\delta\}$ es un árbol contenido en Y' y cumple que $H(T_\delta, Y') < \delta$.*

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathcal{C} = \{B_{\frac{\delta}{2}}(x) : x \in Y'\}$. Como $\mathcal{C}$ es una cubierta abierta de Y' y Y' es compacto, entonces existe un número finito de puntos $x_1, x_2, ..., x_n \in Y'$ tales que $Y' = B_{\frac{\delta}{2}}(x_1) \cup B_{\frac{\delta}{2}}(x_2) \cup ... \cup B_{\frac{\delta}{2}}(x_n)$.

Para cada $i = \{1, 2, ..., n\}$ tenemos dos posibilidades:
(A) $x_i \in B \cup \bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M}\}$ y por tanto existe $k_i \in \mathbb{M}$ tal que $x_i \in B \cup p_{k_i} q_{k_i}$ o
(B) $x_i \in \overline{\bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M}\}} \setminus \bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M}\}$ y por tanto existe $k_i \in \mathbb{M}$ tal que $B_{\frac{\delta}{2}}(x_i) \cap p_{k_i} q_{k_i} \neq \emptyset$.

Sea $M_\delta = \max\{k_1, k_2, ..., k_n\}$. Sea $T_\delta = B \cup \bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M} \text{ y } m \leq M_\delta\}$. Veremos que T_δ es un árbol. Podemos pensar que $T_\delta = B \cup p_{m_1} q_{m_1} \cup p_{m_2} q_{m_2} \cup ... \cup p_{m_L} q_{m_L}$ Haremos una demostración por inducción para mostrar que T_δ es un árbol. Dada $m \in \{m_1, ..., m_L\}$ notemos que, por la Definición 1.24 (iv), $A \cap p_m q_m = \{q_m\}$ y como $B \subset A$ y $q_m \in B$, entonces $B \cap p_m q_m = \{q_m\}$. También notemos que por la Definición 1.24 (iii), $p_m q_m \cap p_n q_n = \emptyset$ si $n \neq m$. Ahora como $B \cap p_{m_1} q_{m_1} = \{q_{m_1}\}$ y como B y $p_{m_1} q_{m_1}$ no tienen curvas cerradas simples, entonces por el Lema 1.9, tenemos que $B \cup p_{m_1} q_{m_1}$ es un árbol.

Supongamos ahora que $B \cup p_{m_1} q_{m_1} \cup p_{m_2} q_{m_2} \cup ... \cup p_{m_{l-1}} q_{m_{l-1}}$ es un árbol. Veremos que $(B \cup p_{m_1} q_{m_1} \cup p_{m_2} q_{m_2} \cup ... \cup p_{m_{l-1}} q_{m_{l-1}}) \cup p_{m_l} q_{m_l}$ es un árbol. Como $(B \cup p_{m_1} q_{m_1} \cup p_{m_2} q_{m_2} \cup ... \cup p_{m_{l-1}} q_{m_{l-1}}) \cap p_{m_l} q_{m_l} = (B \cap p_{m_l} q_{m_l}) \cup \bigcup\{p_{m_i} q_{m_i} \cap p_{m_l} q_{m_l} : i = 1, 2, ..., l-1\} = \{q_{m_l}\}$, entonces por el Lema 1.9 $(B \cup p_{m_1} q_{m_1} \cup p_{m_2} q_{m_2} \cup ... \cup p_{m_{l-1}} q_{m_{l-1}}) \cup p_{m_l} q_{m_l}$ es un árbol. Con esto terminamos la inducción.

Veamos ahora que $H(T_\delta, Y') < \delta$. Como $T_\delta \subset N(\delta, Y')$ sólo tenemos que ver que $Y' \subset N(\delta, T_\delta)$. Sea d la métrica en X y sea $x \in Y'$, entonces $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(x_i)$ para alguna $i = \{1, 2, ..., n\}$. Si $x_i \in B \cup p_{m_i} q_{m_i}$, entonces $x_i \in T_\delta$, de modo que existe $t = x_i$ un punto en T_δ tal que $d(x, t) < \delta$. Ahora si $x_i \notin T_\delta$, entonces $B_{\frac{\delta}{2}}(x_i) \cap p_{m_i} q_{m_i} \neq \emptyset$ con $p_{m_i} q_{m_i} \subset T_\delta$. De modo que existe un punto $t \in T_\delta$ tal que $d(x_i, t) < \frac{\delta}{2}$, por lo que $d(x, t) \leq d(x, x_i) + d(x_i, t) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$.

De cualquier forma para cada $x \in Y'$ existe un punto $t \in T_\delta$ tal que $d(x, t) < \delta$. Por tanto $Y' \subset N(\delta, T_\delta)$. De las dos contenciones obtenemos que $H(T_\delta, Y') < \delta$ y con esto terminamos la prueba del lema.

■

Lema 1.27 *Sea X un dendroide y sea $Y = A \cup \overline{\bigcup\{p_n q_n : n \in \mathbb{N}\}}$ un semipeine en X, entonces X no tiene la propiedad RNT hereditaria.*

Demostración. Como Y es un semipeine por el Lema 1.25, existe un subcontinuo Y' de Y que contiene:
(a') un arco B,
(b') un punto $b \in B$,
(c') un subconjunto infinito $\mathbb{M}$ de $\mathbb{N}$,
tales que:

(i') $Y' = B \cup \overline{\bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M}\}}$,
(ii') $B \subset A$, $q \in B$ y $p \notin B$,
(iii') $p, q \neq b$, $pb \cap B = \{b\}$, $q \notin pb$,
(iv') $q_m \in B$ para toda $m \in \mathbb{M}$ y $p \notin p_m q_m$ para toda $m \in \mathbb{M}$.

Probaremos que Y' no tiene la propiedad *RNT*. Consideremos el arco bp y sea $b' \in bp \setminus \{b, p\}$. De modo que $p \notin bb'$, y como $bb' \subset bp$ y $B \cap bp = \{b\}$, entonces $bb' \cap B = \{b\}$.

Sea d la métrica en X, como $\{p\}$ y $B \cup bb'$ son dos cerrados ajenos existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_1}(p) \cap (B \cup bb') = \emptyset$. Como $B \cap b'p = \emptyset$, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $N(\varepsilon_2, B) \cap N(\varepsilon_2, b'p) = \emptyset$. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Para esta ε, veremos que para cualquier número positivo δ, existe un árbol $T_\delta \subset Y'$ tal que $H(T_\delta, Y') < \delta$ y para toda retracción r de Y' en T_δ, r no es una ε-retracción.

Sea $\delta > 0$, por el Lema 1.26, para dicha δ existe un número positivo $M_\delta \in \mathbb{M}$ y un árbol $T'_\delta \subset Y'$ tal que $T'_\delta = B \cup \bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M} \text{ y } m \leq M_\delta\}$ y $H(T'_\delta, Y') < \delta$. Sea $T_\delta = T'_\delta \cup bb'$, veremos que T_δ es un árbol. Primero veremos que $T'_\delta \cap bb' = \{b\}$, como $T'_\delta = B \cup \bigcup\{p_m q_m : m \in \mathbb{M} \text{ y } m \leq M_\delta\}$ y $bb' \cap B = \{b\}$ y como $bb' \subset bp$ y $bp \cap p_m q_m = \emptyset$ para toda $m \in \mathbb{M}$, entonces $T'_\delta \cap bb' = \{b\}$. Ahora como T'_δ es un árbol, bb' es un arco y $T'_\delta \cap bb' = \{b\}$, entonces por el Lema 1.9, $T'_\delta \cup bb'$ es un árbol. Como $T'_\delta \subset Y'$ y $bb' \subset qp \subset Y'$, entonces $T_\delta = T'_\delta \cup bb' \subset Y'$. Como $H(T'_\delta, Y') < \delta$ y $T'_\delta \subset T_\delta \subset Y'$, entonces $H(T_\delta, Y') < \delta$.

Sea $r : Y' \to T_\delta$ cualquier retracción, veremos que r no es una ε-retracción. Primero observemos que $p \notin T_\delta$. Como $p \notin B$, $p \notin bb'$ y $p \notin p_m q_m$ para toda $m \in \mathbb{M}$, entonces $p \notin T_\delta$. Ahora $r(p) \in T_\delta$. Supongamos que r es una ε-retracción, entonces $d(p, r(p)) < \varepsilon \leq \varepsilon_1$. Como $r(p) \in B_{\varepsilon_1}(p)$ y como $B_{\varepsilon_1}(p) \cap \{B \cup bb'\} = \emptyset$ tenemos que $r(p) \notin B \cup bb'$. De modo que $r(p) \in p_k q_k$ para algún $k \in \mathbb{M}$ con $k \leq M_\delta$.

Como $b' \in T_\delta$, entonces $r(b') = b'$. Consideremos $r(b'p)$, sea $r(p) = x \in p_k q_k$ para algún $k \in \mathbb{M}$ con $k \leq M_\delta$, entonces $b'x \subset r(b'p)$. Veremos que $q_k \in xb'$. Tenemos que $xq_k \subset q_k p_k$ y $q_k b' \subset B \cup bb' \subset A$. De modo que $xq_k \cap q_k b' \subset q_k p_k \cap A = \{q_k\}$. Por tanto $xq_k \cup q_k b'$ es un arco en el dendroide

Y' que une x con b' y como Y' es un dendroide este arco es único. Por tanto $xq_k \cup q_k b' = xb'$ y con esto hemos probado que $q_k \in xb'$. Como $q_k \in xb'$ y $xb' \subset r(pb')$, existe $z \in pb'$ tal que $r(z) = p_k$. Veremos que $d(z, r(z)) > \varepsilon$. Tenemos que $z \in b'p$ y $r(z) = q_k \in B$, como $N(\varepsilon_2, b'p) \cap N(\varepsilon_2, B) = \emptyset$, entonces $d(z, r(z)) > \varepsilon_2 \geq \varepsilon$. Esta es una contradicción que nace de suponer que r es una ε-retracción. Hemos probado entonces que Y' no tiene la propiedad RNT. Como Y' es un subcontinuo del semipeine Y contenido en X, entonces Y' es un subcontinuo del dendroide X. Por tanto X no tiene la propiedad RNT hereditaria, que es lo que queriamos probar.

■

La demostración del siguiente teorema no la desarrollaremos en esta tesis, sólo lo utilizaremos como referencia.

Teorema 1.28 *Sea X un dendroide. Entonces X es una dendrita si y sólo si X no contiene ni semipeines ni semiescobas.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede leer con todo detalle en [VT, Teorema 6.10, pags 62-69].

■

Teorema 1.29 *Sea X un dendroide. Entonces X tiene la propiedad RNT hereditaria si y sólo si X es una dendrita.*

Demostración.

($\Rightarrow$) Supongamos que X no es una dendrita, entonces por el Teorema 1.28, X contiene una semiescoba o un semipeine. Si X contiene una semiescoba, entonces por el Lema 1.23, X no tiene la propiedad RNT hereditaria. Si X contiene un semipeine, entonces por el Lema 1.27, X no tiene la propiedad RNT hereditaria. Con esto hemos probado que si X es un dendroide con la propiedad RNT hereditaria, entonces X es una dendrita.

($\Leftarrow$) Sea X una dendrita, entonces por el Teorema 1.19, X tiene la propiedad RNT. Como todos los subcontinuos de las dendritas son dendritas, entonces X tiene la propiedad RNT hereditaria. Con esto terminamos la prueba del teorema.

■

Con este resultado terminamos también esta sección, en la siguiente sección caracterizaremos a las dendritas como los dendroides suaves que tienen la propiedad RNT.

1.5 La propiedad *RNT* en dendroides suaves

En esta sección estudiaremos la propiedad *RNT* en dendroides suaves y caracterizaremos a las dendritas como los dendroides suaves que tienen la propiedad *RNT*.

Definición 1.30 *Un dendroide X es un* dendroide suave *si existe un punto $v \in X$ llamado* vértice de suavidad *tal que para toda sucesión convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $x_n \to x$, se tiene que la sucesión de arcos $\{vx_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C(X)$ también converge y cumple que $vx_n \to vx$.*

Recordemos que los dendroides son únicamente arco conexos y por eso tiene sentido hablar de los arcos vx_n pues éstos son únicos.

En esta sección probaremos que X es un dendroide suave con la propiedad *RNT* si y sólo si X es una dendrita, para probar esto necesitaremos una serie de resultados preliminares que nos serán de mucha utilidad.

Lema 1.31 *Si X es un dendroide suave con vértice de suavidad v, entonces X es localmente conexo en v.*

Demostración. Sea μ una función de Whitney, $\mu : C(X) \to [0, \infty)$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \mu(vx)$, veremos que f es una función continua. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X tal que $x_n \to x$. Como v es vértice de suavidad de X, entonces $vx_n \to vx$. Como μ es una función continua tenemos que $\mu(vx_n) \to \mu(vx)$, por tanto $f(x_n) \to f(x)$ y por tanto f es una función continua.

Consideremos ahora $\mathcal{B} = \{f^{-1}([0, \varepsilon)) : \varepsilon > 0\}$. Veremos que $\mathcal{B}$ es una base de vecindades conexas de v. Como f es continua y $[0, \varepsilon)$ es abierto en $[0, \infty)$ entonces para toda $\varepsilon > 0$ tenemos que $f^{-1}([0, \varepsilon))$ es abierto. Ahora veremos que dada $\varepsilon > 0$ se tiene que $f^{-1}([0, \varepsilon))$ es conexo. Sea $z \in f^{-1}([0, \varepsilon))$, entonces $f(z) = \mu(vz) = \delta < \varepsilon$. Sea $y \in vz$, entonces como μ es una función de Whitney y $vy \subset vz$ se tiene que $\mu(vy) \leq \mu(vz) = \delta < \varepsilon$, por tanto para toda $y \in vz$ se tiene que $y \in f^{-1}([0, \varepsilon))$ con esto tenemos que el arco $vz \subset f^{-1}([0, \varepsilon))$ y esto es para toda $z \in f^{-1}([0, \varepsilon)$, lo cual prueba la conexidad de $f^{-1}([0, \varepsilon))$.

Ahora sólo tenemos que ver que para todo abierto U de X tal que $v \in U$ se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $v \in f^{-1}([0, \varepsilon)) \subset U$. Sea $\varepsilon = \min\{f(x) : x \in X \setminus U\}$. Como $v \notin X \setminus U$ tenemos entonces que $f(x) > 0$ para toda $x \in X \setminus U$. Como $X \setminus U$ es compacto entonces f alcanza su mínimo en $X \setminus U$.

Por tanto existe $y \in X \setminus U$ tal que $f(y) = \varepsilon$, y como $f(y) > 0$, tenemos que $\varepsilon > 0$.

Veremos que $v \in f^{-1}([0, \varepsilon)) \subset U$, como $f(v) = \mu(v) = 0$, entonces $v \in f^{-1}([0, \varepsilon))$. Sea $z \in f^{-1}([0, \varepsilon))$. Como $f(z) < \varepsilon$ y $\varepsilon = \min\{f(x) : x \in X \setminus U\}$, entonces $z \notin X \setminus U$, por tanto $z \in U$. De modo que $v \in f^{-1}([0, \varepsilon)) \subset U$. Con esto terminamos la prueba del lema.

■

Lema 1.32 *Si X es un dendroide suave no localmente conexo, con vértice de suavidad v, entonces existe un punto $p \in X$ y un abierto U tal que $p \in U$, $v \notin U$ y para toda vecindad N_p de p tal que $N_p \subset U$, se tiene que N_p no es conexa.*

Demostración.

Como X no es localmente conexo, entonces X no es conexo en pequeño [VT Teorema 6.6 pág. 58], entonces existe $p \in X$ tal que X no es conexo en pequeño en p. De esta manera tenemos que existe un abierto U' en X tal que para toda vecindad N_p de p contenida en U' se tiene que N_p no es conexa. Notemos que como por el Lema 1.31 X es localmente conexo en v, entonces $v \neq p$. Sea $U = U' \setminus \{v\}$, entonces U es abierto en X, $p \in U$, $v \notin U$ y para toda vecindad N_p de p contenida en U, tenemos que $N_p \subset U'$, entonces N_p no es conexa.

■

Lema 1.33 *Sea X un dendroide no localmente conexo, entonces existen:*
(1) dos abiertos U y V en X,
(2) dos puntos diferentes p y $q \in \overline{V}$,
(3) dos sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\overline{V}$ y
(4) una sucesión de componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, \ldots$ de U
tales que:

(A) $\overline{V} \subset U$,
(B) $pq \subset \overline{V} \cap C_0$,
(C) $p_n \to p$, $q_n \to q$ y
(D) $p_n q_n \subset \overline{V} \cap C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
(E) Si X es un dendroide suave con vértice de suavidad v, entonces $v \notin U$.

Demostración. Como X no es localmente conexo, entonces existe $p \in X$ tal que X no es conexo en pequeño en p. De esta forma tenemos que existe un abierto U en X tal que para toda vecindad N_p de p contenida en U, N_p no es conexa. En el caso en que X es un dendroide suave con vértice de suavidad v por el Lema 1.32 podemos pedir que $v \notin U$

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B_\varepsilon(p)} \subseteq U$. Sea C_0 la componente de U que contiene a p. Notemos que, por la forma como elegimos a U, $p \notin int(C_0)$, entonces $B_\delta(p)$ no está contenida en C_0 para ninguna $\delta > 0$.

Vamos a construir inductivamente lo siguiente:
(a) una sucesión de números naturales $\frac{1}{\varepsilon} < n_1 < n_2 < n_3 < ...$,
(b) una sucesión de componentes $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$, de U, y
(c) una sucesión de puntos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que si $B_i = B_{\frac{1}{n_i}}(p)$, entonces:

(i) $p_i \in B_i \cap C_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$,
(ii) $B_i \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup ... \cup C_{i-1}) = \emptyset$ para toda $i \in \mathbb{N}$,
(iii) $C_i \neq C_0$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

Para $i = 1$ sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\varepsilon} < n_1$. Como B_1 no está contenida en C_0, existe $p_1 \in B_1$ tal que $p_1 \notin C_0$.

Sea C_1 la componente de U que tiene a p_1, entonces se cumple que $p_1 \in B_1 \cap C_1$ y también se cumple que $C_1 \cap C_0 = \emptyset$. Supongamos ahora que ya hemos construido un conjunto finito de números naturales $\{n_1, n_2, n_3, ..., n_j\}$ un conjunto finito de puntos $\{p_1, p_2, p_3, ..., p_j\}$ y un conjunto finito de componentes $\{C_1, C_2, C_3, ..., C_j\}$ de U con las propiedades mencionadas.

Como C_j es cerrado en U, y como U es abierto de X, $U \setminus C_j$ es un abierto de X tal que $p \in U \setminus C_j$.

Por tanto existe $n_{j+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{j+1} > n_j$ y que$B_{j+1} \cap C_j = \emptyset$. Como $B_{j+1} \subset B_j$ y $B_j \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup ... \cup C_{j-1}) = \emptyset$ tenemos que $B_{j+1} \cap (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup ... \cup C_j) = \emptyset$.

Como B_{j+1} no está contenida en C_0 existe $p_{j+1} \in B_{j+1}$ tal que $p_{j+1} \notin C_0$. Sea C_{j+1} la componente de U que tiene a p_{j+1}. De donde tenemos que $C_{j+1} \cap C_0 = \emptyset$.

De esta manera hemos construido inductivamente lo que queríamos y así hemos demostrado que existen dos abiertos U y $V = B_\varepsilon(p)$ en X, una sucesión $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ en V, y componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, ...$ de U tales que $p \in (C_0 \cap \overline{V}) \subset U$, $p_n \in (C_n \cap V)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $p_n \to p$.

Ahora para toda $n \in \mathbb{N}$, sea D_n la componente de V que contiene a p_n. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset C_n$ y, como $D_n \subset V$, entonces$\overline{D_n} \subset \overline{V}$. Por tanto $\overline{D_n} \subset (\overline{V} \cap C_n) \cap U$.

Tomemos la sucesión $\{\overline{D_n}\}_{n=1}^{\infty}$ en el compacto $\overline{V}$, entonces existe una subsucesión convergente $\{\overline{D_{n_k}}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $\overline{D_{n_k}} \to D_0$ donde D_0 es un subcontinuo de X contenido en $\overline{V}$. Puesto que para toda $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $p_{n_k} \in D_{n_k}$, $\overline{D_{n_k}} \to D_0$ y $p_{n_k} \to p$, entonces $p \in D_0$. Entonces D_0 es un subcontinuo de U que tiene a p, por tanto $D_0 \subset C_0$. Por el Teorema de los Golpes en la Frontera [Nd, Theorem 20.3] tenemos que para toda $k \in \mathbb{N}$, $\overline{D_{n_k}} \cap Fr(V) \neq \emptyset$. Elegimos $q_{n_k} \in \overline{D_{n_k}} \cap Fr(V)$, podemos suponer que la sucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a un punto q. Como $\overline{D_{n_k}} \to D_0$ y la sucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cumple que $q_{n_k} \to q$, entonces $q \in (D_0 \cap Fr(V))$.

Ahora como X es un dendroide y $p_{n_k}, q_{n_k} \in \overline{D_{n_k}}$, entonces el arco $p_{n_k}q_{n_k} \subset \overline{D_{n_k}} \subset (C_{n_k} \cap \overline{V})$. Notemos también que, como $p \in V$ y $q \in Fr(V)$, entonces $p \neq q$. Del mismo modo para toda $k \in \mathbb{N}$, se cumple que, como $p_{n_k} \in V$ y $q_{n_k} \in Fr(V)$, entonces $p_{n_k} \neq q_{n_k}$.

De esta manera hemos mostrado que existe una sucesión $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $\overline{V}$ tal que $q_{n_k} \to q$, $q_{n_k} \in C_{n_k}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $q \in C_0$. Notemos que como $p_n \to p$, entonces $p_{n_k} \to p$.

Entonces, ya tenemos dos abiertos U y V en X, dos puntos diferentes p y $q \in \overline{V} \subset U$, dos sucesiones $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en $\overline{V}$ y componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, ...$ de U tales que p y $q \in C_0 \cap \overline{V}$, p_{n_k} y $q_{n_k} \in C_{n_k} \cap \overline{V}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, $p_{n_k} \to p$, $q_{n_k} \to q$, el arco $p_{n_k}q_{n_k} \subset \overline{V} \cap C_{n_k}$ y si X es un dendroide suave con vértice de suavidad v, entonces $v \notin U$.

■

Lema 1.34 *Sea X un continuo con dos abiertos U y W tales que $\overline{W} \subseteq U$. Sean $C_0, C_1, C_2, ...$ componentes diferentes de U y $D_0, D_1, D_2, ...$ componentes diferentes de $\overline{W}$, donde D_i es un subconjunto de $C_i \cap \overline{W}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y A es un arco en X. Entonces A intersecta sólo a un número finito de conjuntos D_n.*

Demostración. Como A es un arco, existe un homeomorfismo $f : [0,1] \to A$. Sea d la métrica en X, y sea $\varepsilon = d(\overline{W}, X \setminus U)$. Como f es una función uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que si $B \subset [0,1]$ y $diam(B) < \delta$, entonces $diam(f(B)) < \varepsilon$. Tomemos $K_\delta \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{K_\delta} < \delta$ y dividamos el intervalo $[0,1] = [\frac{0}{K_\delta}, \frac{1}{K_\delta}] \cup [\frac{1}{K_\delta}, \frac{2}{K_\delta}] \cup ... \cup [\frac{K_\delta - 1}{K_\delta}, \frac{K_\delta}{K_\delta}]$, si llamamos I_k al intervalo $[\frac{k-1}{K_\delta}, \frac{k}{K_\delta}]$ para $k = 1, 2, ..., K_\delta$ tenemos que $diam(I_k) < \frac{1}{K_\delta} < \delta$ y por tanto $diam(f(I_k)) < \varepsilon$.

Mostraremos que si $f(I_k) \cap D_n \neq \emptyset$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(I_k) \cap D_m = \emptyset$ para toda $m \neq n$. Sea D_n tal que $f(I_k) \cap D_n \neq \emptyset$. Supongamos que existe $m \neq n$ tal que $f(I_k) \cap D_m \neq \emptyset$. Como $D_n \subset C_n$ y $D_m \subset C_m$, tenemos que $f(I_k)$ intersecta a dos componentes diferentes de U por tanto $f(I_k) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Como $f(I_k) \cap \overline{W} \neq \emptyset$ y $f(I_k) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ y como $d(\overline{W}, X \setminus U) = \varepsilon$, entonces tenemos que $diam(f(I_k)) \geq \varepsilon$, esto es una contradicción que nace de suponer que si $f(I_k) \cap D_n \neq \emptyset$, entonces existe $m \neq n$ tal que $f(I_k) \cap D_m \neq \emptyset$. Por tanto $f(I_k)$ sólo puede intersectar una componente D_n de $\overline{W}$. Como $[0,1] = \bigcup\{I_k : k = 1, 2, ..., K_\delta\}$, entonces $A = f([0,1])$ intersecta sólo un número finito de componentes D_n de $\overline{W}$. De esta manera terminamos la prueba del lema.

■

Lema 1.35 *Sea X un continuo con dos abiertos U y W tales que $\overline{W} \subseteq U$. Sean $C_0, C_1, C_2, ...$ componentes diferentes de U, y $D_0, D_1, D_2, ...$ componentes diferentes de $\overline{W}$, donde D_i es un subconjunto de $C_i \cap \overline{W}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y T es un árbol en X, entonces T intersecta sólo un número finito de componentes D_n de $\overline{W}$.*

Demostración. Como T es un árbol, entonces T es la unión finita de arcos que sólo se intersectan en sus puntos extremos, digamos que $T = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Por el Lema 1.34, cada arco A_i intersecta sólo a un número finito de conjuntos D_n. Por tanto T sólo intersecta a un número finito de conjuntos D_n.

■

Lema 1.36 *Sean X una dendrita, y $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones de puntos en X tales que $k_n \to k$ y $s_n \to s$. Entonces la sucesión de arcos $\{k_n s_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $k_n s_n \to ks$.*

Demostración. Si $k = s$, entonces $ks = \{k\} = \{s\}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces como X es una dendrita, existe un abierto arco conexo U tal que $k \in U \subset B_\varepsilon(k)$. Como $k_n \to k$ y $s_n \to s = k$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que k_n, $s_n \in U$, y como U es arco conexo, se tiene que $k_n s_n \subset U$. De modo que $k_n s_n \subset U \subset B_\varepsilon(k)$. Por tanto $H(k_n s_n, ks) < \varepsilon$ para toda $n \geq N$, por lo que $k_n s_n \to ks$.

Supongamos que $k \neq s$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existen U y V dos abiertos conexos de X tales que $k \in U \subset \overline{U} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k)$ y $s \in V \subset \overline{V} \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(s)$. Como $k_n \to k$ y $s_n \to s$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $k_n \in U \subset \overline{U}$ y $s_n \in V \subset \overline{V}$. Notemos que como U y V son abiertos conexos, entonces $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son continuos.

Consideremos el continuo $Y = \overline{U} \cup ks \cup \overline{V}$. Veamos que $Y \subset N(\varepsilon, ks)$. Sea $y \in Y$, entonces si $y \in \overline{U}$, $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k)$ y por tanto $y \in N(\varepsilon, ks)$, de igual modo si $y \in \overline{V}$, $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(s)$ y por tanto $y \in N(\varepsilon, ks)$, si $y \in ks$, claramente $y \in N(\varepsilon, ks)$. Por tanto $Y \subset N(\varepsilon, ks)$.

Ahora veremos que para $n \geq N$, se cumple que el arco $k_n s_n \subset Y$. Como U es arco conexo y $k_n, k \in U$, entonces el arco $k_n k \subset U$, de igual manera, como V es arco conexo y $s_n, s \in V$, entonces el arco $s_n s \subset V$.

Consideremos ahora el continuo $Z_n = k_n k \cup ks \cup ss_n$. Como $k_n, s_n \in Z_n$, entonces el arco $k_n s_n \subset Z_n$. De modo que $k_n s_n \subset Z_n = k_n k \cup ks \cup ss_n \subset U \cup ks \cup V \subset Y \subset N(\varepsilon, ks)$. Por lo que hemos probado que para toda $n \geq N$ $k_n s_n \subset N(\varepsilon, ks)$.

Ahora, para cada $n \geq N$ consideremos el continuo $Y_n = \overline{U} \cup k_n s_n \cup \overline{V}$. Veamos que $Y_n \subset N(\varepsilon, k_n s_n)$. Sea $y \in Y_n$, entonces si $y \in \overline{U}$, $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(k)$ y como $d(k, k_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(y, k_n) < \varepsilon$, por tanto $y \in N(\varepsilon, k_n s_n)$, de igual modo si $y \in \overline{V}$, $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(s)$ y como $d(s, s_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $d(y, s_n) < \varepsilon$, por tanto $y \in N(\varepsilon, k_n s_n)$, si $y \in k_n s_n$, claramente $y \in N(\varepsilon, k_n s_n)$. Por tanto $Y_n \subset N(\varepsilon, k_n s_n)$. Como $k \in \overline{U} \subset Y_n$ y $s \in \overline{V} \subset Y_n$ para toda $n \geq N$, entonces el arco $ks \subset Y_n$ para toda $n \geq N$. Por lo que $ks \subset Y \subset N(\varepsilon, k_n s_n)$.

Hemos probado entonces que para toda $n \geq N$, $k_n s_n \subset N(\varepsilon, ks)$ y $ks \subset N(\varepsilon, k_n s_n)$ por lo que para toda $n \geq N$, $H(k_n s_n, ks) < \varepsilon$, por tanto $k_n s_n \to ks$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 1.37 *Sea X una dendrita. Entonces X es un dendroide suave.*

Demostración. Sea X una dendrita, sea $v \in X$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X que cumple que $p_n \to p$. Por el Lema 1.36 $vp_n \to vp$. Por tanto X es un denroide suave.

Notemos que hemos probado, no sólo que si X es una dendrita, X es un dendroide suave, hemos probado que todos los puntos de una dendrita X son vértices de suavidad.

■

Teorema 1.38 *Sea X un dendroide suave. Entonces X tiene la propiedad RNT si y sólo si X es una dendrita.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que X no es una dendrita, entonces X no es localmente conexo por tanto por el Lema 1.33 se cumple que X contiene:

(1) dos abiertos U y V en X,
(2) dos puntos diferentes p y $q \in \overline{V}$,
(3) dos sucesiones $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\overline{V}$ y
(4) una sucesión de componentes diferentes $C_0, C_1, C_2, ...$ de U
tales que:

(A) $\overline{V} \subset U$,
(B) $pq \subset \overline{V} \cap C_0$,
(C) $p_n \to p$, $q_n \to q$ y
(D) $p_n q_n \subset \overline{V} \cap C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$,
(E) Si el vértice de suavidad de X es v, entonces $v \notin U$.

Esta demostración la iremos desarrollando por pasos, puesto que es muy larga y contiene muchos tecnicismos.

Durante la prueba de este teorema llamaremos E_n a la componente de $\overline{V}$ que contiene al arco $p_n q_n$ y E_0 es la componente de $\overline{V}$ que contiene al arco pq. Denotaremos por v al vértice de suavidad de X.

Afirmación 1. Para cada componente E_n de $\overline{V}$, existe un único punto $r_n \in \overline{V}$ tal que $vr_n \cap E_n = \{r_n\}$.

Esto es una consecuencia del Lema 1.16.

Afirmación 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n \in \overline{V}$ tal que $vr_n \cap E_n = \{r_n\}$, entonces la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $r_{n_k} \to r$ y $r \in E_0$.

Recordemos que E_0 es la componente de $\overline{V} \cap C_0$ que contiene a p, q. Claramente como $\overline{V}$ es un compacto, la sucesión $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \overline{V}$ tiene una subsucesión convergente $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $r_{n_k} \to r$ y $r \in \overline{V}$. Veremos que $r \in E_0$. La sucesión de componentes $\{E_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{V}$, tiene una subsucesión convergente $\{E_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ tal que $E_{n_j} \to E$ y $E \subset \overline{V}$. Como $p_{n_j} \to p$, $q_{n_j} \to q$ y $r_{n_j} \to r$, entonces, $p, q, r \in E$. Como E_0 es la componente de $\overline{V}$ que contiene a p, q, entonces $E \subset E_0$, y por tanto $r \in E_0$.

Observación 3. Para evitar los complicados subíndices, supondremos que $r_n \to r$. Ahora como $p, r, q \in E_0$ y $p \neq q$, podemos suponer entonces que $r \neq p$ ó $r \neq q$. A partir de este momento analizaremos el caso en que $r \neq q$, pero como p, q juegan papeles simétricos el caso en que $r \neq p$, se analiza de manera análoga.

Afirmación 4. El arco vr está contenido propiamente en el arco vq.

Recordemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $q_n \in E_n$, y $vr_n \cap E_n = \{r_n\}$. Como $r_n, q_n \in E_n$, entonces $r_nq_n \subset E_n$. De modo que $vr_n \cup r_nq_n$ cumple que $r_n \in vr_n \cap r_nq_n \subset vr_n \cap E_n = \{r_n\}$. Por tanto $vq_n = vr_n \cup r_nq_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Con esto tenemos que $vr_n \subset vq_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como $r_n \to r$, $q_n \to q$ y X es un dendroide suave con vértice de suavidad v, entonces $vr_n \to vr$ y $vq_n \to vq$. Por tanto como $vr_n \subset vq_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $vr \subset vq$. Como $r \neq q$, entonces vr está contenido propiamente en vq.

Afirmación 5. Sea d la métrica en X. Entonces existe un abierto $W \subset X$ y un número positivo ε', que cumplen que:
(*a*) $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$,
(*b*) $d(\overline{V}, X \setminus U) > \varepsilon'$,
(*c*) $\overline{B_{\varepsilon'}(r)} \subset W$, $\overline{B_{\varepsilon'}(q)} \subset W$,
(*d*) $\overline{N(\varepsilon', rq)} \subset W$,
(*e*) $\overline{N(\varepsilon', vr)} \cap \overline{B_{\varepsilon'}(q)} = \emptyset$.

Como por (A) $V \subset \overline{V} \subset U$, entonces por normalidad existe un abierto W, tal que $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$.

Sea $\varepsilon_1 = \frac{d(\overline{V}, X \setminus W)}{2}$, como $\overline{V}$ y $X \setminus W$ son dos cerrados ajenos, entonces ε_1 es un número positivo. Como $r, q \in \overline{V}$, veremos que $\overline{B_{\varepsilon_1}(r)} \subset W$ y $\overline{B_{\varepsilon_1}(q)} \subset W$. Como $\overline{B_{\varepsilon_1}(r)} \subset \{x \in X : d(x, r) \leq \varepsilon_1\}$, entonces si $y \in \overline{B_{\varepsilon_1}(r)}$, se tiene que $d(y, r) \leq \varepsilon_1$ y por tanto $y \notin X \setminus W$, de donde tenemos que $\overline{B_{\varepsilon_1}(r)} \subset W$. De la misma manera se puede mostrar que $\overline{B_{\varepsilon_1}(q)} \subset W$.

Como por la Afirmación 2, $r \in E_0$ y por (B) $q \in \overline{V} \cap C_0 = E_0$, entonces $rq \subset E_0 \subset \overline{V}$. Veremos que $\overline{N(\varepsilon_1, rq)} \subset W$. Como la $\overline{N(\varepsilon_1, rq)} \subset \{x \in X : d(x, rq) \leq \varepsilon_1\}$, entonces si $y \in \overline{N(\varepsilon_1, rq)}$, se tiene que $d(y, rq) \leq \varepsilon_1$ y por tanto $y \notin X \setminus W$, de donde tenemos que $\overline{N(\varepsilon_1, rq)} \subset W$.

Recordemos que, por la Afirmación 4, $vr \subset vq$ y $r \neq q$, por tanto q y vr son dos cerrados ajenos. Sea $\varepsilon_2 = \frac{d(vr, q)}{3}$. Como $\overline{N(\varepsilon_2, vr)} \subset \{x \in X : d(x, vr) \leq \varepsilon_2\}$, entonces si $y \in \overline{N(\varepsilon_2, vr)}$, tenemos que $d(y, vr) \leq \varepsilon_2$ y por tanto $d(y, q) > 2\varepsilon_2$. De este modo tenemos que si $y \in \overline{N(\varepsilon_2, vr)}$, entonces $y \notin \overline{B_{\varepsilon_2}(q)}$. Por tanto $\overline{B_{\varepsilon_2}(q)} \cap \overline{N(\varepsilon_2, vr)} = \emptyset$.

Sea $\varepsilon' = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Veremos que tenemos todo lo que necesitabamos.

(a) Hemos probado que por normalidad existe un abierto W tal que $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$.
(b) Como $\varepsilon_1 = \frac{d(\overline{V}, X \setminus W)}{2}$, entonces $d(\overline{V}, X \setminus W) = 2\varepsilon_1 > \varepsilon'$.
(c) Como $\overline{B_{\varepsilon_1}(r)} \subset W$, $\overline{B_{\varepsilon_1}(q)} \subset W$ y $\varepsilon_1 \geq \varepsilon'$, entonces $\overline{B_{\varepsilon'}(r)} \subset W$ y $\overline{B_{\varepsilon'}(q)} \subset W$.
(d) Como $\overline{N(\varepsilon_1, rq)} \subset W$ y $\varepsilon_1 \geq \varepsilon'$, entonces $\overline{N(\varepsilon', rq)} \subset W$.
(e) Como $\varepsilon_2 = \frac{d(vr,q)}{2}$, $\overline{B_{\varepsilon_2}(q)} \cap \overline{N(\varepsilon_2, vr)} = \emptyset$ y $\varepsilon_2 \geq \varepsilon'$, entonces $\overline{B_{\varepsilon'}(q)} \cap \overline{N(\varepsilon', vr)} = \emptyset$.

Afirmación 6. X no tiene la propiedad *RNT*.

Por la Afirmación 5, existen un abierto W y $\varepsilon' > 0$ que cumplen que:
(a) $V \subset \overline{V} \subset W \subset \overline{W} \subset U$
(b) $d(\overline{V}, X \setminus U) > \varepsilon'$
(c) $\overline{B_{\varepsilon'}(r)} \subset W$, $\overline{B_{\varepsilon'}(q)} \subset W$
(d) $\overline{N(\varepsilon', rq)} \subset W$
(e) $\overline{N(\varepsilon', vr)} \cap \overline{B_{\varepsilon'}(q)} = \emptyset$.

Como por (e) tenemos que $\overline{N(\varepsilon', vr)} \cap \overline{B_{\varepsilon'}(q)} = \emptyset$, entonces el número $\varepsilon_3 = d(\overline{N(\varepsilon', vr)}, \overline{B_{\varepsilon'}(q)})$ es positivo. Sea $\varepsilon = \min\{\varepsilon', \varepsilon_3\}$. Veremos que para toda $\delta > 0$, existe un árbol $T \subset X$ tal que $H(T, X) < \delta$ y para toda retracción $r : X \to T$, r no es una ε-retracción.

Por el Lema 1.3, existe un árbol $T' \subset X$ tal que $v \in T'$ y $H(T', X) < \delta$. Como por la suavidad de X, $vr_n \to vr$ y como por (C) $q_n \to q$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, $vr_n \subset N(\varepsilon, vr)$ y $q_n \in B_\varepsilon(q)$. Sea D_n la componente de $\overline{W}$ tal que $p_n q_n \subset D_n$. Por el Lema 1.35, $T' \cap D_n \neq \emptyset$ sólo para un número finito de conjuntos D_n. Entonces existe $m \geq N$ tal que $vr_m \subset N(\varepsilon, vr)$, $q_m \in B_\varepsilon(q)$ y $T' \cap D_m = \emptyset$. Ahora como $r_m \in E_m \subset D_m$ y $q_m \subset E_m \subset D_m$, entonces $r_m q_m \subset D_m$ y por tanto $T' \cap r_m q_m = \emptyset$. Además tenemos que $r_m q_m \subset E_m \subset \overline{V}$. Consideremos el arco vr_m, como $q_m \in B_\varepsilon(q)$, $vr_m \subset N(\varepsilon, vr)$ y por (e) tenemos que $\overline{B_{\varepsilon'}(q)} \cap \overline{N(\varepsilon', vr)} = \emptyset$. Como $\varepsilon \leq \varepsilon'$, entonces $B_\varepsilon(q) \cap N(\varepsilon, vr) = \emptyset$. Por tanto $q_m \notin vr_m$.

Sea $T = T' \cup vr_m$, como $q_m \notin T'$ y $q_m \notin vr_m$, entonces $q_m \notin T$. Veremos que T es un árbol. Como T es un subcontinuo de un dendroide, no contiene curvas cerradas simples, como T' es un árbol, entonces $T' \cup vr_m$, es una unión finita de arcos. Por tanto T es un árbol. Como $T' \subset T$ y $H(T', X) < \delta$, entonces $H(T, X) < \delta$.

Veremos que para toda retracción r de X en T, r no es una ε-retracción. Supongamos por el contrario que r es una ε-retracción. Primero veremos que $r(q_m) \notin vr_m$. Supongamos por el contrario que $r(q_m) \in vr_m$, entonces $d(q_m, r(q_m)) \geq d(q_m, vr_m) \geq d(\overline{B_{\varepsilon'}(q)}, \overline{N(\varepsilon', vr)}) = \varepsilon_3 \geq \varepsilon$. Lo cual es imposible pues estamos suponiendo que r es una ε-retracción. Por tanto $r(q_m) \notin vr_m$, de modo que $r(q_m) \in T'$, como $T' \cap D_m = \emptyset$, entonces $r(q_m) \notin D_m$. Veremos que q_m está en una componente D' de $\overline{W}$, que cumple que $D_m \neq D'$. Si $r(q_m) \notin \overline{W}$, entonces $r(q_m) \in X \setminus \overline{W} \subset X \setminus W$. Por tanto tenemos que $d(q_m, r(q_m)) \geq d(q_m, X \setminus W) \geq \varepsilon' > \varepsilon$. Lo cual no es posible pues r es una ε-retracción. Entonces $r(q_m) \in \overline{W}$, sea D' la componente de $\overline{W}$ que contiene a $r(q_m)$. Recordemos que $r(q_m) \in T'$. Como $D_m \cap T' = \emptyset$, entonces $D' \neq D_m$.

Analizaremos ahora al conjunto $r(r_m q_m)$. Veremos que $r(r_m q_m)$ intersecta a dos componentes diferentes de $\overline{W}$. Como $r_m \in T$, entonces $r(r_m) = r_m$. Como $r_m \in D_m$, entonces $r(r_m q_m) \cap D_m \neq \emptyset$. Recordemos que D' es la componente de $\overline{W}$ tal que $r(q_m) \in D'$ y D' cumple que $D' \neq D_m$. Entonces $r(r_m q_m) \cap D' \neq \emptyset$ y $r(r_m q_m) \cap D_m \neq \emptyset$. Por tanto $r(r_m q_m)$ intersecta a dos componentes diferentes de $\overline{W}$.

Tenemos entonces que $r(r_m q_m)$ es un conexo que intersecta dos componentes diferentes de $\overline{W}$. Por tanto $r(r_m q_m) \cap X \setminus W \neq \emptyset$. Por otro lado $r_m q_m \subset E_m$, por tanto $r_m q_m \subset E_m \subset \overline{V}$. De modo que existe $s \in r_m q_m \subset \overline{V}$ tal que $r(s) \in X \setminus W$. Con esto tenemos que $d(s, r(s)) \geq d(\overline{V}, X \setminus W) > \varepsilon' \geq \varepsilon$. Esta es una contradicción que nace de suponer que r es una ε-retracción. Por tanto hemos probado que X no tiene la propiedad *RNT*.

Con esto hemos probado la primera implicación de este teorema. Probaremos ahora la otra implicación.

($\Leftarrow$) Sea X una dendrita, por el Teorema 1.19, X tiene la propiedad *RNT*. Por el Lema 1.37, X es un dendroide suave. Por tanto si X es una dendrita, X es un dendroide suave con la propiedad *RNT*, y con esto terminamos la prueba del teorema.

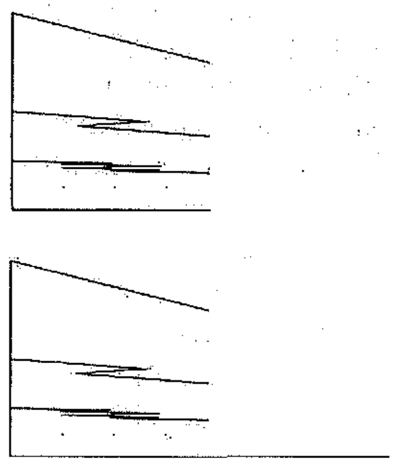
■

Con esto terminamos también la sección, en la siguiente sección mostraremos un ejemplo de un dendroide no localmente conexo X, tal que X tiene la propiedad *RNT*.

1.6 Un dendroide con la propiedad *RNT*.

En [AI] Alejandro Illanes construyó un ejemplo de un dendroide no localmente conexo que se puede retraer en todos sus subcontinuos. En esta sección utilizaremos este ejemplo con una pequeñísima modificación y probaremos que el nuevo ejemplo modificado tiene la propiedad *RNT*.

Antes de que entremos en detalles técnicos, pondremos un dibujo ilustrando los dos ejemplos, que describiremos más tarde.



Esto lo hicimos sólo para hacer notar cuan tan pequeña es la modificación, y como el trabajo que realizó Alejandro Illanes es realmente lo que nos permitirá demostrar que el dendroide modificado tiene la propiedad *RNT*.

En este momento explicaremos como construyó Alejandro Illanes su ejemplo.

1.6.1 Un dendroide retractil

Para construir este ejemplo introduciremos algo de notación que nos hará más fácil el manejo. Dados dos puntos $p, q \in \mathbb{R}^2$, denotaremos por $\langle p, q \rangle$ al segmento convexo que los une. Para un punto $p \in \mathbb{R}^2$, $p = (x, y)$, definimos p' como el reflejado de p sobre el eje y, es decir $p = (-x, y)$.

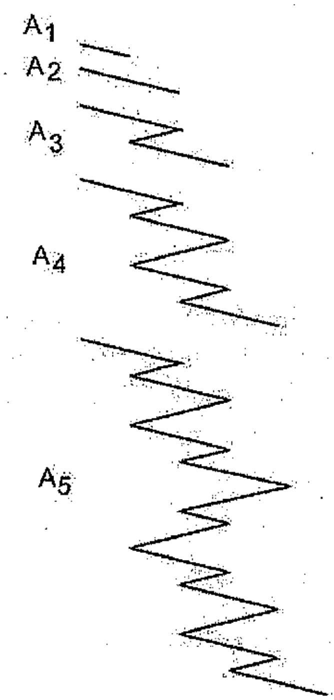
Dado un conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$, definimos B' como el reflejado del conjunto B sobre el eje y, es decir $B' = \{p' \in R^2 : p \in B\}$.

El origen en $\mathbb{R}^2$ se denotará por Θ. Sean π_1 y π_2 las proyecciones en la primera y segunda coordenadas, respectivamente.

Definiremos primero una sucesión $A_0, A_1, ..., A_n, ...$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, tales que para toda $n \in \mathbb{N}$. A_n es una poligonal que une Θ con un punto $a_n = (u_n, v_n)$.

Sea $A_0 = \{\Theta\}$ y $A_1 = \langle \Theta, (1, -\frac{1}{4}) \rangle$. Entonces A_1 es una poligonal que une Θ con $a_0 = (1, -\frac{1}{4})$. Para construir A_{n+1}, supondremos que ya hemos construido A_n con $n \geq 1$. Tomemos A_n, como sabemos A_n es una poligonal que une Θ con a_n. Tomemos $a_n + A'_{n-1}$, esto es tomemos el reflejado de A_{n-1} sobre el eje y, y trasladémoslo hacia a_n.

Veamos qué es $a_n + A'_{n-1}$, A'_{n-1} es una poligonal que une Θ con a'_{n-1}, al trasladarla a a_n obtenemos que $a_n + A'_{n-1}$ es una poligonal que une a_n con $a_n + a'_{n-1}$. Sea $b_n = a_n + a'_{n-1}$. Ahora tomemos $b_n + A_n$, esto es A_n trasladado a b_n. De este modo diremos que $A_{n+1} = A_n \cup (a_n + A'_{n-1}) \cup (b_n + A_n)$. El siguiente dibujo ilustra la explicación anterior.



De manera que hemos construido inductivamente $A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ...$ Estas poligonales A_n que hemos construido nos servirán para reconstruir el ejemplo. Una de las propiedades importantes de estos arcos fue probada por Alejandro Illanes en [AI, Assertion 1]. A continuación describimos estas propiedeades.

Propiedada 0. Para cada $n \geq 0$, A_n es una poligonal, $v_n < 0$, $A_n \subset ((0,n] \times [v_n, 0)) \cup \{\Theta\}$, $u_n = n$, $a_{n+1} = 2a_n + a'_{n-1}$ y $A_n = a_n - A_n$. Lo cual implica que el único punto de A_n en el eje y es el Θ y el único punto de A_n con primera coordenada igual a n es a_n.

Lo que haremos ahora será reacomodar cada A_n para poder construir el dendroide.

Definamos, para $n \geq 2$, $f_n : A_n \to \mathbb{R}^2$ como $f_n(x,y) = (\frac{x}{n}, \frac{-y}{2^n v_n})$. Se puede ver fácilmente que f_n es inyectiva y continua. Como A_n es compacto, $f(A_n)$ también lo es. Ya que $f : A_n \to \mathbb{R}^2$ es lineal, $f(A_n)$ es una poligonal.

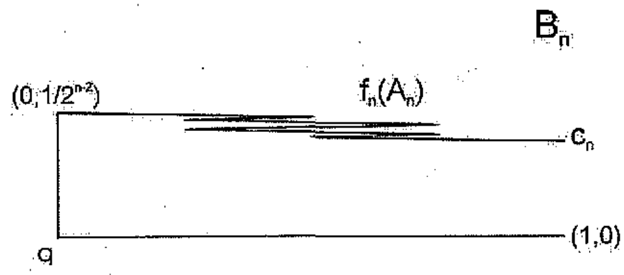
Como A_n es un arco, podemos darle un orden natural donde $\Theta < a_n$. Notemos que por la manera en que construimos A_n, si $p < q$, entonces $\pi_2(q) < \pi_2(p)$. Es decir A_n es un arco que va descendiendo. Ahora notemos que $f_n(p) = (\frac{\pi_1(p)}{n}, \frac{-\pi_2(p)}{2^n v_n})$, $f_n(q) = (\frac{\pi_1(q)}{n}, \frac{-\pi_2(q)}{2^n v_n})$ y $a_n = (u_n, v_n)$. Como los arcos A_n son descendentes y comienzan en Θ, tenemos que $v_n < 0$ para toda $n \geq 2$ de donde tenemos que si $\pi_2(q) \leq \pi_2(p)$, entonces $\frac{-\pi_2(q)}{2^n v_n} \leq \frac{-\pi_2(p)}{2^n v_n}$. Pero esto es lo mismo que decir que $\pi_2(f_n(q)) \leq \pi_2(f_n(p))$. Por tanto tenemos que si $p \leq q$ en A_n, entonces $\pi_2(f_n(q)) \leq \pi_2(f_n(p))$.

Habiendo definido f_n definamos ahora, para $n \geq 2$, $C_n = (0 + \frac{1}{2^{n-2}}) + f_n(A_n)$. Notemos que C_n es una poligonal de $(0, \frac{1}{2^{n-2}})$ a $(0, \frac{1}{2^{n-2}}) + f_n(a_n)$. Como C_n es sólo una traslación de $f_n(A_n)$ las condiciones de orden recién planteadas se siguen cumpliendo, de manera que si en C_n definimos un orden tal que $(0, \frac{1}{2^{n-2}}) < (0, \frac{1}{2^{n-2}}) + f(a_n)$, tenemos que si $p, q \in C_n$ con $p < q$, entonces $\pi_2(q) < \pi_2(p)$. De donde obtenemos la siguiente propiedad.

Propiedad 1. Sea $C_n = (0, \frac{1}{2^{n-2}}) + f_n(A_n)$, entonces para todo $p \in C_n$ tenemos que $\pi_2(p) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Para ver esto, tenemos que para toda $p \in C_n \backslash \{(0, \frac{1}{2^{n-2}})\}$, $(0, \frac{1}{2^{n-2}}) < p$, por tanto $\pi_2(p) < \pi_2((0, \frac{1}{2^{n-2}}))$, así pues $\pi_2(p) < \frac{1}{2^{n-2}}$.

Ahora definamos B_n como la unión de los arcos $\langle \Theta, (1,0) \rangle$, $\langle \Theta, (0, \frac{1}{2^{n-2}}) \rangle$ y C_n. Es decir $B_n = \langle \Theta, (1,0) \rangle \cup \langle \Theta, (0, \frac{1}{2^{n-2}}) \rangle \cup C_n$. El siguiente dibujo ilustra como se ve B_n.



Notación. Si $q, p \in B_n$, entonces $\langle\langle q, p\rangle\rangle$ denotará el arco en B_n que une p con q.

La siguiente propiedad que mencionaremos no será probada en este trabajo, Alejandro Illanes la probó en [AI,Assertion 5, pág 801].

Propiedad 2. Para cada $n \geq 2$ y $q \in C_n$, existe una retracción $\phi_n : B_n \to \langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle$ que depende de q, que cumple que $|\pi_1(p) - \pi_1(\phi_n(p))| \leq \frac{3}{n}$.

Afirmación 3 Sea $q \in C_n$ y $\rho : B_n \to \langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle$ una retracción, entonces para toda $p \in B_n$ se tiene que $|\pi_2(p) - \pi_2(\rho(p))| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Por la Propiedad 1 $0 \leq \pi_2(p) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ para toda $p \in C_n$. Notemos que $\pi_2(\langle\Theta, (1,0)\rangle \cup \langle\Theta, (0, \frac{1}{2^{n-2}})\rangle) = [0, \frac{1}{2^{n-2}}]$. De manera que $\pi_2(p) \in [0, \frac{1}{2^{n-2}}]$ para toda $p \in B_n$ y como $\pi_2(\rho(p)) \in \pi_2(B_n) = [0, \frac{1}{2^{n-2}}]$ concluimos que $p, \rho(p) \in [0, \frac{1}{2^{n-2}}]$. Por tanto $|\pi_2(p) - \pi_2(\rho(p))| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

Con la Propiedad 2 y la Afirmación 3 obtenemos la siguiente propiedad:

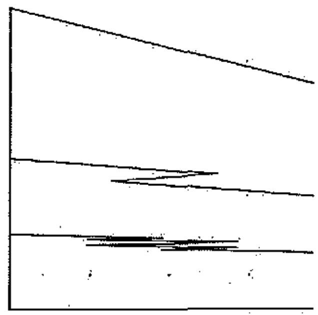
Propiedad 4. Para cada $n \geq 2$ y $q \in C_n$, existe una retracción $\phi_n : B_n \to \langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle$ tal que $|\pi_1(p) - \pi_1(\phi_n(p))| \leq \frac{3}{n}$ y $|\pi_2(p) - \pi_2(\phi_n(p)| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$.

El dendroide no localmente conexo definido por Alejandro Illanes en [AI] es el siguiente:

Ejemplo 5

$$Y = \bigcup\{B_n : n \geq 2\} = \langle\Theta, (0,1)\rangle \cup \langle\Theta, (1,0)\rangle \cup \bigcup\{C_n : n \geq 2\}.$$

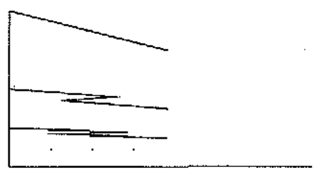
La siguiente figura lo ilustra.



Nosotros definiremos el siguiente dendroide.

Definición 1.39 *Definimos el dendroide X, como $X = Y \cup \langle (1,0),(2,0)\rangle$.*

Éste sigue siendo claramente un dendroide no localmente conexo que se ilustra en la siguiente figura.



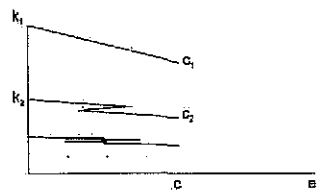
Veremos ahora que X tiene la propiedad *RNT*.

Teorema 1.40 *El dendroide X de la Definición 39 tiene la propiedad RNT.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que si T es un árbol contenido en X y $H(T,X) < \delta$, entonces existe una ε-retracción $r : X \to T$.

Esta demostración es larga y técnica, así que la iremos desarrollando por pasos.

Notación. Como X es un dendroide, es únicamente arco conexo, como es usual si $p, q \in X$, pq denotará el único arco en X que une p con q. Cada arco C_n tiene como extremos a los puntos $(0, \frac{1}{2^{n-2}})$ y $f_n(a_n)$. Llamaremos $k_n = (0, \frac{1}{2^{n-2}})$ y $c_n = f_n(a_n)$. Llamaremos c al punto $(1,0)$, y e al punto $(2,0)$.



Para $n \geq 2$, sea z_n un punto interior del arco C_n, es decir $z_n \in C_n \setminus \{k_n, c_n\}$ que cumpla que el diámetro del arco $z_n c_n$ es menor que ε. Como $z_n c_n \setminus \{z_n\}$ es un abierto de X, entonces existe un numero positivo δ_n tal que $B_{\delta_n}(c_n) \subset z_n c_n \setminus \{z_n\}$.

De igual manera como $ce \setminus \{c\}$ es un abierto en X, existe un número positivo δ' tal que $B_{\delta'}(e) \subset \{ce \setminus \{c\}\}$.

Ahora prestemos un poco de atención a la sucesión $\{\frac{3}{n} - \frac{1}{2^{n-2}}\}_{n=2}^{\infty}$, esta sucesión converge a cero por lo tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que $\frac{3}{n} - \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon$.

Sea $\delta = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}, \delta', \delta_1, \delta_2, ..., \delta_N\}$. Mostraremos que si T es un árbol contenido en X tal que $H(T, X) < \delta$, entoces existe una ε-retracción r de X en T.

Afirmación 5. Sea T un árbol contenido en X, tal que $H(T, X) < \delta$, entonces:
(a) el arco $\langle \Theta, (1,0) \rangle$ está contenido en T,
(b) $k_n \in T$ para toda $n \geq 2$,
(c) el arco $k_n z_n$ está contenido en T para toda $n \leq N$.

Para probar el inciso (a), notemos que como $\delta \leq \frac{1}{2}$, entonces tenemos que $B_\delta((2,0)) \cap Y = \emptyset$, por tanto existe $t_1 \in T$ tal que $t_1 \in \{B_\delta((2,0)) \cap T\} \setminus Y$. También tenemos que como $\delta \leq \delta_2$, entonces $B_\delta(c_2) \subset z_2 c_2 \setminus \{z_2\}$ por tanto existe $t_2 \in T$ tal que $t_2 \in B_\delta(c_2) \cap T$. Como T es un árbol, el arco en X que une t_1 con t_2 está contenido en T. Notemos que $\langle t_1, (1,0) \rangle \cup \langle \Theta, (1,0) \rangle \cup \langle \Theta, (0,1) \rangle \cup \langle (0,1), t_2 \rangle$ es un arco que tiene como extremos a los puntos t_1 y t_2 como X es únicamente arco conexo, este arco es precisamente $t_1 t_2$. De este modo vemos que $\langle \Theta, (1,0) \rangle$ está contenido en T y (a) queda probado.

Como $k_n = (0, \frac{1}{2^{n-2}}) \in \langle \Theta, (0,1) \rangle$ para toda $n \geq 2$, y $\langle \Theta, (0,1) \rangle \subset t_1 t_2 \subset T$, tenemos que $k_n \in T$ para toda $n \geq 2$ y de esta manera (b) queda demostrado.

Para probar (c) notemos que como $T \subset X$ y $H(T, X) < \delta$, entonces para toda $n \leq N$, tenemos que $B_\delta(c_n) \subset z_n c_n \setminus \{z_n\}$, por tanto existe $t_n \in T$ tal que $t_n \in \{B_\delta(c_n) \cap T\}$, como por (b) $k_n \in T$ para toda $n \geq 2$, entonces para $n \leq N$, el arco $k_n t_n \subset T$, como $z_n \in k_n t_n$, entonces $k_n z_n \subset T$ y con esto queda probado (c).

Afirmación 6. Para toda $n \geq 2$, existe un punto $q_n \in C_n$ tal que $C_n \cap T = k_n q_n$.

Como C_n es un dendroide y C_n, T son subcontinuos de X, $C_n \cap T = \emptyset$ o $C_n \cap T$ es un subcontinuo de C_n. Pero C_n es un arco, k_n es un extremo de C_n y $k_n \in T$. De manera que $C_n \cap T$ es un subarco de C_n que tiene a k_n. Por tanto $C_n \cap T$ es de la forma $k_n q_n$ para alguna $q_n \in C_n$.

Afirmación 7. Para el arco $\langle \Theta, (2,0) \rangle$, existe un punto q tal que $\langle \Theta, (2,0) \rangle \cap T = \Theta q$.

La demostración se hace de manera idéntica a la demostración de la Afirmación 6.

Afirmación 8. Para toda $n \geq 2$, $C_n \setminus T$ es abierto en X.

Primero notemos que $(C_n)^\circ = C_n \setminus \{k_n\}$.

Ahora por la Afirmación 5 (b), tenemos que para toda $n \geq 2$, $k_n \in T$. Veremos ahora que $C_n \setminus T = (C_n)^\circ \setminus T$. Claramente $(C_n)^\circ \setminus T \subset C_n \setminus T$. Ahora sea $x \in C_n \setminus T$, como $k_n \in T$, tenemos que $x \in C_n \setminus \{k_n\}$ y como $C_n \setminus \{k_n\} = (C_n)^\circ$, entonces $x \in (C_n)^\circ \setminus T$. Por lo que $(C_n)^\circ \setminus T = C_n \setminus T$.

Como $(C_n)^\circ \setminus T$ es abierto en X y $C_n \setminus T = (C_n)^\circ \setminus T$, entonces tenemos que $C_n \setminus T$ es abierto en X, y la afirmación queda demostrada.

Afirmación 9. La función r de X en T definida como

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in T, \\ q_n, & \text{si } x \in C_n \backslash T \text{ y } n \leq N, \\ q, & \text{si } x \in \langle (1,0),(2,0) \rangle \backslash T, \\ \phi_n(x), & \text{si } x \in C_n \backslash T \text{ y } n > N, \end{cases}$$

es una retracción de X en T.

Veamos que r es continua. Tomemos $x \in X$. Analicemos las distintas posibilidades para x.

Caso 1. Si $x \in C_n \setminus T$ con $n \leq N$, tenemos que $r(x) = q_n$ que es una función constante. Como por la Afirmación 8, $C_n \setminus T$ es un abierto en X, entonces r es continua en el abierto $C_n \setminus T$. Por tanto r es continua en x.

Caso 2. Si $x \in \langle(1,0),(2,0)\rangle \setminus T$, como r es constante en $\langle(1,0),(2,0)\rangle \setminus T$ y esto es un abierto de X, entonces r es continua en $\langle(1,0),(2,0)\rangle \setminus T$ y por tanto r es continua en x.

Caso 3. Si $x \in C_n \setminus T$ con $n > N$, $r(x) = \phi_n(x)$, por la Propiedad 2, ϕ_n es una función continua en el abierto $C_n \setminus T$ y por tanto r también lo es. De modo que r es continua en x.

Caso 4. Si $x \in T^\circ$, como r en T° está definida como la función identidad y T° es abierto en X, entonces r es continua en T° y por tanto r es continua en x.

Caso 5. Si $x = q_n$ para alguna $n \geq 2$. En este caso, existe un abierto U tal que $q_n \in U$ y $U \subset T \cup (C_n \setminus T)$. Entonces $U \subset T \cup C_n$. Si $n > N$, notemos que $C_n \cap T = k_n q_n$ y ϕ_n restringida a $k_n q_n$ es la identidad en $k_n q_n$, pues $k_n q_n \subset \langle\langle q_n, (1,0)\rangle\rangle$. De manera que r restringida a $C_n \cup T$ está definida en dos conjuntos cerrados (C_n y T), con funciones continuas (ϕ_n y la identidad en T) que coinciden en la intersección. Por tanto r restringida a $C_n \cup T$ es continua y, como $C_n \cup T$ es una vecindad de q_n, tenemos que r es continua en $x \geq q_n$. El caso en que $n \leq N$ es similar.

Caso 5.5. Si $x = q$, en este caso existe un abierto U tal que $q \in U \subset \langle(1,0),(2,0)\rangle$. Este caso es similar al Caso 5.

Caso 6. Si $x \in Fr(T) \setminus (\{q_n : n \geq 2\} \cup \{q\})$, entonces x es de la forma $x = (u, 0)$ con $0 \leq u \leq 1$. Tomemos una sucesión de puntos $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en X tal que $x_m \to x$. Si cada $x_m \in T$, entonces $r(x_m) = x_m$, y como $r(x) = x$, tenemos que $r(x_m) \to r(x)$. Podemos suponer entonces que $x_m \notin T$ para toda m y también podemos suponer que $x_m \notin \langle(\frac{3}{2},0),(2,0)\rangle$ pues $u \leq 1$. De manera que cada x_m es de la forma $x_m = (u_m, v_m)$ con $v_m > 0$. Entonces cada x_m está en un conjunto $C_{n_m} \setminus T$ para alguna $n_m \in \mathbb{N}$. Ya que $x = (u, 0)$, también podemos suponer que $n_m > N$ para toda $m \geq 1$. puesto que $x_m \to x$, entonces $v_m \to 0$, así que $n_m \to \infty$.

Como $|\pi_1(r(x_m)) - \pi_1(x_m)| = |\pi_1(\phi_{n_m}(x_m)) - \pi_1(x_m)| \leq \frac{3}{n_m}$ (por la Propiedad 4) y $\pi_1(x_m) = u_m \to u$, obtenemos que $\pi_1(r(x_m)) \to u$.

Por otra parte como $\phi_{n_m}(x_m) \in B_{n_m}$ y como por la propiedad 4 $\pi_2(x) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$ para $x \in B_n$, tenemos que, $0 \leq \pi_2(r(x_m)) = \pi_2(\phi_{n_m}(x_m)) \leq \frac{1}{2^{n_m-2}}$. De manera que como $n_m \to \infty$ tenemos que $\pi_2(r(x_m)) \to 0$.

Usando los hechos de que $\pi_1(r(x_m)) \to u$ y $\pi_2(r(x_m)) \to 0$, obtenemos que $r(x_m) \to (u, 0) = x = r(x)$. Por tanto r es continua en x.

Con estos 6 casos queda demostrada la continuidad de r. Notemos que como $r(x) = x$ para toda $x \in T$, y como $r(x) \in T$ para toda $x \in X$, y como r es una función continua, tenemos que r es una retracción de X en T, y con esto hemos probado la afirmación.

Afirmación 10. La retracción r de X en T de la Afirmación 9 es una ε-retracción.

Caso 1. Si $x \in T$, entonces $r(x) = x$ por lo que $d(x, r(x)) = 0 < \varepsilon$.

Caso 2. Si $x \in C_n \setminus T$ con $n \leq N$, tenemos que $r(x) = q_n$. Como por la Afirmación 5, $k_n z_n \subset T$, entonces $k_n z_n \subset k_n q_n$ y por tanto $d(x, q_n) < \delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto $d(x, r(x)) < \varepsilon$.

Caso 3. Si $x \in \langle\langle(1,0),(2,0)\rangle\rangle \setminus T$, entonces $r(x) = q$. Como $d(q,(2,0)) < \delta$, entonces $d(x, q) < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$ y por tanto $d(x, r(x)) < \varepsilon$.

Caso 4. Si $x \in C_n \setminus T$ con $n > N$, entonces $r(x) = \phi_n(x)$. Por la Propiedad 4, $|\pi_1(\phi_n(x)) - \pi_1(x)| < \frac{3}{n}$, y también como $\phi_n(x) \in B_n$ y $\pi_2(x) \leq \frac{1}{2^{n-2}}$, entonces $0 \leq |\pi_2(\phi_n(x)) - \pi_2(x)| \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. De modo que, como $n > N$, entonces
$d(x, r(x)) = |x - \phi_n(x)| \leq |\pi_1(\phi_n(x)) - \pi_1(x)| + |\pi_2(\phi_n(x)) - \pi_2(x)| \leq \frac{3}{n} + \frac{1}{2^{n-2}} < \varepsilon$.

De modo que, en cualquier caso, $d(x, r(x)) < \varepsilon$. Por tanto r es una ε-retracción. Con esto damos por terminada la prueba de la afirmación y la demostración del teorema.

■

Con esto terminamos el capítulo, en donde estudiamos la propiedad *RNT* en los dendroides. En el siguiente capítulo enfocaremos el estudio de esta propiedad en continuos que son compactaciones métricas de un rayo.

CAPÍTULO 2

La Propiedad RNT en Compactaciones

En este capítulo estudiaremos las compactaciones métricas de un rayo. Veremos cuáles de ellas cumplen que tienen la propiedad RNT. Probaremos que si una compactación de un rayo, tiene esta propiedad, entonces su residuo es el pseudoarco. Daremos dos ejemplos de compactaciones del rayo con residuo pseudoarco, una con la propiedad RNT y otra sin ella. Con estos ejemplos lo que estamos probando es que no todas las compactaciones del rayo con residuo pseudoarco son homeomorfas, contestando así una pregunta de M. Awartani.

2.1 Preliminares

Durante todo el desarrollo de este trabajo, estaremos pensando en compactaciones métricas del rayo.

Definición 2.1 *Un continuo X, es una* compactacion del rayo *si existe un encaje h del intervalo $[0, \infty)$ en X tal que $h([0, \infty))$ es denso en X.*

Como $h([0, \infty))$ es denso en X, tenemos que $X = \overline{h([0, \infty))}$.

Definición 2.2 *Decimos que R es el* residuo *de la compactación del rayo, si $R = \overline{h([0, \infty))} \setminus h([0, \infty))$*

De manera que como $X = \overline{h([0,\infty))}$ y $R = \overline{h([0,\infty))} \setminus h([0,\infty))$, tenemos que $X = h([0,\infty)) \cup R$.

Notación. En este capítulo cuando mencionemos un continuo X, el cual es compactación de un rayo, R siempre denotará el residuo y $h([0,\infty))$ dicho rayo, de modo que $X = h([0,\infty)) \cup R$ y supondremos que R es no degenerado.

Lema 2.3 *Sean X un espacio topológico, D denso en X y U un abierto en D tal que $\overline{U}^X \subset D$. Entonces U es abierto en X.*

Demostración. Como U es abierto en D, entonces $U = V \cap D$ donde V es abierto en X. Veremos que $V \subset D$. Supongamos por el contrario que V no está contenido en D, entonces existe $v \in V$ tal que $v \notin D$. Como $\overline{U}^X \subset D$, tenemos entonces que $v \notin \overline{U}^X$. Sea $W = V \setminus \overline{U}^X$, tenemos que W es abierto en X y $W \neq \emptyset$ pues $v \in W$. Como D es denso, existe un punto $p \in D \cap W$, entonces, $p \in D \cap V$, de modo que $p \in U$, pero eso es una contradicción pues $p \in W = V \setminus \overline{U}^X$. De modo que tenemos que $V \subset D$ por tanto $U = V$ y U es abierto de X.

■

Sea X una compactación del rayo, $X = h([0,\infty)) \cup R$, probaremos una serie de resultados de estas compactaciones.

Lema 2.4 *Sea X una compactación del rayo, entonces para toda $p \in [0,\infty)$, tenemos que $\overline{h([0,p))} = h([0,p])$.*

Demostración. Como $[0,p]$ es compacto, $h([0,p])$ es compacto y cerrado en X, entonces $\overline{h([0,p))} \subset h([0,p])$. Como h es un encaje, tenemos que $\overline{h([0,p))} \supset \overline{h([0,p))}^{h([0,\infty))} = h(\overline{[0,p)}^{[0,\infty)}) = h([0,p])$ por tanto $\overline{h([0,p])} = h([0,p])$

■

Lema 2.5 *Sea X una compactación del rayo, entonces para toda $p \in [0,\infty)$, $h([0,p))$ es un abierto de X.*

Demostración. Como $h([0,p))$ es abierto en $h([0,\infty))$ que es denso en X y $\overline{h([0,p))} = h([0,p]) \subset h([0,\infty))$, entonces por el Lema 2.3, $h([0,p))$ es abierto de X.

■

Teorema 2.6 *Sea X una compactación del rayo, entonces R es un continuo.*

Demostración. Probaremos que $R = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))}$. Como por defınción $R = \overline{h([0,\infty))} \setminus h([0,\infty))$, entonces $R \cap h([0,n]) = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Y como $R \subset X = h([0,n]) \cup \overline{h([n,\infty))}$, entonces $R \subset \overline{h([n,\infty))}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, por tanto $R \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))}$.

Para ver la otra contención, tomemos $q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))} \subset X = h([0,\infty)) \cup R$. Si $q \in h([0,\infty))$, entonces existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $h(p) = q$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $p < m$, entonces $q \notin h([m,\infty))$ y como $h([0,m))$ es abierto por Lema 2.25 y $h([0,m)) \cap h([m,\infty)) = \emptyset$ por la inyectividad de h, entonces $q \notin \overline{h([m,\infty))}$ lo cual es una contradicción pues $q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))}$. De modo que para toda $q \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))} \subset X$, $q \notin h([0,\infty))$, por tanto $q \in R$ y así tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))} \subset R$.

De estas dos contenciones tenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))} = R$.

Ahora sólo falta ver que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))}$ es un continuo. Como h es un encaje, tenemos que $\overline{h([n,\infty))}$ es un continuo para toda $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{h([n,\infty))}$ es una intersección anidada de continuos y por tanto un continuo.

■

Lema 2.7 *Sea X una compactación del rayo, si A es un subcontinuo de X, tal que $A \cap R \neq \emptyset$, entonces $A \subset R$ ó $R \subset A$.*

Demostración. Si A no está contenido en R, entonces $A \cap h([0,\infty)) \neq \emptyset$ Sea $h(p) \in A \cap h([0,\infty))$, probaremos que $h([p,\infty)) \subset A$.

Supongamos, por el contrario, que existe un $h(q) \in h((p,\infty)) \setminus A$, como $X \setminus A$ es abierto y h es un encaje, existe $\varepsilon > 0$ tal que $h((q-\varepsilon, q+\varepsilon)) \cap A = \emptyset$, entonces $A = (A \cap h([0, q-\varepsilon])) \cup (A \cap \overline{h([q+\varepsilon,\infty))})$ y tenemos que $(A \cap h([0,q-\varepsilon])) \cap (A \cap \overline{h([q+\varepsilon,\infty))}) = \emptyset$. De modo que A es la unión de dos cerrados no vacíos y ajenos. Lo cual es una contradicción pues A es conexo. Esta contradicción nace de suponer que $h(q) \notin A$. Por tanto $h([p,\infty)) \subset A$, pero como A es cerrado tenemos que $\overline{h([p,\infty))} \subset A$ de modo que $R \subset A$ y con esto terminamos la prueba del lema.

■

Lema 2.8 *Sea X una compactación del rayo. Entonces X no es localmente conexo en ningún punto de R.*

Demostración. Supongamos por el contrario que X es localmente conexo en algún punto p de R. Como R es no degenerado, existe un abierto conexo U tal que $p \in U$ y R no está contenido en $\overline{U}$ Como $p \in R = \overline{h([0,\infty))} \setminus h([0,\infty))$, tenemos que $U \cap h([0,\infty)) \neq \emptyset$. Por tanto $\overline{U}$ es un continuo de X que intersecta a R, no está contenido en R y no contiene a R, lo cual contradice el Lema 2.7. Por tanto X no es localmente conexo en ningún punto de R.

■

Lema 2.9 *Sea X una compactación del rayo, si A es un subcontinuo localmente conexo de X, entonces $A \subset R$ ó $A \subset h\left([0,\infty)\right)$.*

Demostración. Si A no está contenido en R, entonces $A \cap h([0,\infty)) \neq \emptyset$, supongamos que $A \cap R \neq \emptyset$, entonces por el Lema 2.7 $R \subset A$, entonces $A = h([p,\infty)) \cup R$ para alguna $p \in [0,\infty)$, pero eso significa que A es una compactación del rayo con residuo R, entonces por el Lema 2.8, A no es localmente conexo en R, lo cual es una contradicción pues A es un continuo localmente conexo, está contradicción nace de suponer que $A \cap R \neq \emptyset$. Por tanto $A \cap R = \emptyset$ y $A \subset h([0,\infty))$.

■

Lema 2.10 *Sea X una compactación del rayo, entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo subcontinuo localmente conexo A de X que cumpla que $H(A,X) < \delta$ se tiene que $A \subset h([0,\infty))$.*

Demostración. Sea $\delta = \min\{d(h(0),x) : x \in R\}$. Como $R \cap h(0) = \emptyset$, entonces $\delta > 0$. Sea A un subcontinuo localmente conexo de X tal que $H(A,X) < \delta$, por el Lema 2.7 tenemos que $A \subset R$ ó $A \subset h([0,\infty))$. Como $H(A,X) < \delta$, existe $a \in A$ tal que $d(a,h(0)) < \delta$, entonces $a \notin R$, por tanto $a \in h([0,\infty))$, de modo que $A \cap h([0,\infty)) \neq \emptyset$ y por el Lema 2.9, tenemos que $A \subset h([0,\infty))$ y el lema queda demostrado.

■

2.2 Compactaciones del rayo y la propiedad *RNT*.

En esta sección analizaremos a las compactaciones del rayo que tienen la propiedad *RNT* y demostraremos que si una compactación del rayo tiene esta propiedad, entonces el residuo de la compactación es el pseudoarco. Primero probaremos que si X es una compactación del rayo con la propiedad *RNT*, entonces X es un continuo encadenable, pero para eso necesitamos dar una serie de definiciones y probar algunos resultados auxiliares.

Definición 2.11 *Dada $\varepsilon > 0$, una ε-función $f : X \to Y$ es una función que cumple que para toda $y \in Y$ diam $(f^{-1}(y)) < \varepsilon$.*

Definición 2.12 *Sea X un espacio topológico. Una* cadena *es una familia finita de abiertos $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ que cumple que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$. A los elementos U_i de una cadena los llamamos* eslabones.

Definición 2.13 *Una* cadena cerrada *es una familia finita de cerrados $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ que cumple que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| < 1$. A los elementos de una cadena cerrada también se les llama* eslabones.

Definición 2.14 *Dada $\varepsilon > 0$ una ε-*cadena *(ce- rrada) es una cadena (cerrada) en la que el diámetro de cada eslabón es menor que ε.*

Definición 2.15 *Un continuo es* encadenable *(resp., encadenable por cerrados) si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena (resp., ε-cadena cerrada) tal que X es la unión de los eslabones. Es decir si existe $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ (resp., $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$) tal que $X = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$ (resp., $X = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$) y cada U_i es abierto (resp., cada D_i es cerrado).*

Lema 2.16 *Sea X un continuo encadenable, entonces X es encadenable por cerrados.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X es encadenable, existe una cadena $\mathcal{C} = \{U_1, U_2, ..., U_n\}$ tal que $X = U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_n$ y diam$(U_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ para cada i. Definimos $D_1 = \overline{U_1 \cup U_2}$, $D_2 = \overline{U_3 \cup U_4}$ y en general $D_i = \overline{U_{2i-1} \cup U_{2i}}$ (de esta manera D_n contiene uno o dos uniendos, dependiendo de si n es impar o par). Veamos que la familia $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ es una ε-cadena cerrada. Por la manera como se definió D_i tenemos que:

(a) D_i es un cerrado para toda i,
(b) como $D_i = \overline{U_{2i-1} \cup U_{2i}}$, $U_{2i-1} \cap U_{2i} \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(U_j) < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda j, tenemos que $\operatorname{diam}(D_i) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$.
(c) veamos ahora que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$.

Sea $p \in D_i \cap D_j$ donde $i \leq j$. Entonces $p \in \overline{U_{2i-1} \cup U_{2i}} \cap \overline{U_{2j-1} \cup U_{2j}}$ y $p \in U_k$ para alguna $k \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $U_k \cap (U_{2i-1} \cup U_{2i}) \neq \emptyset$ y $U_k \cap (U_{2j-1} \cup U_{2j}) \neq \emptyset$. Así que $k \in \{2i-2, 2i-1, 2i, 2i+1\} \cap \{2j-2, 2j-1, 2j, 2j+1\}$. Pero es fácil verificar que como esto ocurre, entonces $|i-j| \leq 1$.

Ahora supongamos que $|i-j| \leq 1$, entonces $i = j+1$ ó $j = i+1$. En el caso en que $i = j+1$, se tiene que $D_i \cap D_j = D_i \cap D_{i+1} = \overline{U_{2i-1} \cup U_{2i}} \cap \overline{U_{2i+1} \cup U_{2i+2}}$ y como $U_{2i} \cap U_{2i+1} \neq \emptyset$, entonces $D_i \cap D_j \neq \emptyset$. El caso $j = i+1$ es análogo y con esto probamos la afirmación (c). Hemos probado que $\mathcal{D}$ es una ε-cadena cerrada.

■

Lema 2.17 (de Urysohn) *Sean X un espacio métrico y A, B dos cerrados no vacíos y ajenos. Entonces existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f^{-1}(0) = A$ y $f^{-1}(1) = B$.*

Demostración. Ver [Du, Theorem 4.1]. Sea $f : X \to [0, 1]$ dada por $f(p) = \frac{d(p,A)}{d(p,A)+d(p,B)}$, donde d es la distancia de X. Es fácil ver que f tiene las propiedades mencionadas.

■

Teorema 2.18 *Un continuo X es encadenable si y sólo si para toda $\varepsilon > 0$, X admite ε-funciones al intervalo.*

($\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$, como X es un continuo encadenable, entonces por el Lema 2.16, X es un continuo encadenable por cerrados. Sea $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ una $\frac{\varepsilon}{3}$-cadena cerrada de X, donde podemos suponer que $m \equiv 0 (\text{mod } 3)$. Por el Lema de Urysohn, para cada $i \in \{1, 2, ..., m : i \equiv 1 \text{ mod } 3\}$, existe una función continua $f_i : D_i \cup D_{i+1} \cup D_{i+2} \to [i-1, i+2]$ tal que $f^{-1}(i-1) = D_i$, $f^{-1}(i+2) = D_{i+2}$, de modo que f_i es una ε-función para toda $i \in \{1, 2, ..., m : i \equiv 1 \text{ mod } 3\}$. Sea $f : X \to [0, m]$ dada por $f(x) = f_i(x)$, si $x \in D_i \cup D_{i+1} \cup$

D_{i+2}. Como f es continua en los cerrados de una familia localmente finita y coincide en las intersecciones, entonces f es continua y como $\operatorname{diam}(f^{-1}(x)) = \operatorname{diam}(f_i^{-1}(x)) < \varepsilon$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., m : i \equiv 1 \bmod 3\}$. Entonces f es una ε-función al intervalo $[0, m]$.

Ahora consideremos un homeomorfismo $g : [0, m] \to [0, 1]$, entonces $(g \circ f) : X \to [0, 1]$ es una ε-función de X en el intervalo $[0, 1]$. Por tanto X admite ε-funciones al intervalo $[0, 1]$ para toda $\varepsilon > 0$.

$(\Leftarrow)$ Sea $\varepsilon > 0$, como X admite ε-funciones al intervalo, existe $f : X \to [0, 1]$ tal que $\operatorname{diam}(f^{-1}(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in [0, 1]$.

Afirmación 1. Existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces diam $(f^{-1}([x, y])) < \varepsilon$.

Supongamos por el contrario que esto no ocurre, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, existen puntos x_n, y_n tales que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $\operatorname{diam}(f^{-1}([x_n, y_n])) \geq \varepsilon$. Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \to x$ y como $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ y $\delta_{n_k} \to 0$, entonces $y_{n_k} \to x$. Pero $\operatorname{diam}(f^{-1}([x_{n_k}, y_{n_k}])) \geq \varepsilon$. De manera que existen p_k, $q_k \in f^{-1}([x_{n_k}, y_{n_k}])$ tales que $d(p_k, q_k) \geq \varepsilon$, donde d es la métrica de X. Podemos suponer que $p_k \to p$ y $q_k \to q$ para alguna $p, q \in X$. Entonces $f(p_k) \to f(p)$, $f(q_k) \to f(q)$. Como $f(p_k)$, $f(q_k) \in [x_{n_k}, y_{n_k}]$ y $x_{n_k} \to x$, $y_{n_k} \to y$, tenemos que $f(p_k) \to x$ y $f(q_k) \to x$. De manera que $p, q \in f^{-1}(x)$. Ya que $d(p_k, q_k) \geq \varepsilon$, la continuidad de la función distancia implica que $d(p, q) \geq \varepsilon$. Entonces $\operatorname{diam}(f^{-1}(x)) \geq \varepsilon$. Lo cual es una contradicción pues f es una ε-función. Por tanto existe una $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $f^{-1}([x, y]) < \varepsilon$.

Por la Afirmación 1, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$, entonces $f^{-1}([x, y]) < \varepsilon$. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{n} < \delta$ y n es un múltiplo impar de 3.

Consideremos la familia:

$\mathcal{C} = \{U_1 = [0, \frac{3}{n}), U_2 = (\frac{2}{n}, \frac{5}{n}), ..., U_m = (\frac{2m-2}{n}, \frac{2m+1}{n}), ..., U_{\frac{n-1}{2}} = (\frac{n-3}{n}, \frac{n}{n}]\}$.

Entonces $\mathcal{C}$ es una familia de abiertos U_i, que cumple que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i - j| \leq 1$, y $\operatorname{diam}(U_i) < \delta$ para toda $i \in \{1, 2, ..., \frac{n-1}{2}\}$. Además $[0, 1] = [0, \frac{3}{n}) \cup (\frac{2}{n}, \frac{5}{n}) \cup ... \cup (\frac{2m-2}{n}, \frac{2m+1}{n}) \cup, ..., \cup (\frac{n-3}{n}, \frac{n}{n}]$.

Como $X = f^{-1}([0,1])$, tenemos que $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \cup ... \cup f^{-1}(U_{\frac{n-1}{2}})$, como cada U_i es abierto, entonces cada $f^{-1}(U_i)$ es abierto y como $\text{diam}(U_i) < \delta$, entonces $\text{diam}(f^{-1}(U_i)) < \varepsilon$. y como $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$, entonces $f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. Por tanto $\mathcal{C}' = \{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), ..., f^{-1}(U_{\frac{n-1}{2}})\}$ es una ε-cadena de X y por tanto X es encadenable. Con esto terminamos la prueba del teorema.

■

Corolario 2.19 *Un subcontinuo de un continuo encadenable es encadenable*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, y X un continuo encadenable. Entonces X admite ε-funciones al intervalo. De modo que existe $f : X \to [0,1]$ tal que $\text{diam}(f^{-1}(x)) < \varepsilon$ para toda $x \in [0,1]$. Sea A un subcontinuo de X. Entonces $f|A$ es una ε-función de A en $[0,1]$. Por tanto A es encadenable.

■

Lema 2.20 *Sea X una compactación del rayo. Si X tiene la propiedad RNT, entonces X admite ε-funciones al intervalo* $[0,1]$ *para toda* $\varepsilon > 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como X tiene la propiedad RNT (Definición 1.7, Capítulo 1), existe $\delta > 0$ tal que si T es un árbol contenido en X y $H(T,X) < \delta$, entonces existe una $\frac{\varepsilon}{2}$-retracción, $r : X \to T$. Podemos suponer que δ cumple con las condiciones del Lema 2.10. Como T es un árbol, T es un continuo localmente conexo y por tanto $T \subset h([0,\infty))$. De modo que T es un arco, entonces existe un homeomorfismo $f : T \to [0,1]$. Consideremos $f \circ r : X \to [0,1]$, tomemos $p \in [0,1]$ y sean $x, y \in (f \circ r)^{-1}(p)$. Entonces $f(r(x)) = f(r(y))$ y como f es homeomorfismo, $r(x) = r(y)$. Por tanto $d(x,y) \leq d(x, r(x)) + d(y, r(y)) < \varepsilon$. De manera que $\text{diam}((f \circ r)^{-1}(p)) < \varepsilon$ y esto es para toda $p \in [0,1]$. Por lo que X admite ε-funciones al intervalo.

■

Teorema 2.21 *Sea X una compactación del rayo. Si X tiene la propiedad RNT, entonces X y R son encadenables.*

Demostración. Como X tiene la propiedad RNT, entonces por el Lema 2.20, X admite ε-funciones al intervalo $[0,1]$ para toda $\varepsilon > 0$, por el Teorema 2.18, X es encadenable. Y como R es un subcontinuo de X, entonces por el Corolario 2.19, R es encadenable.

■

Definición 2.22 *Un continuo* $\mathcal{P}$ *es* el pseudoarco *si* $\mathcal{P}$ *es encadenable y hereditariamente indescomponible.*

Teorema 2.23 *Sea* X *una compactación del rayo. Si* X *tiene la propiedad* RNT*, entonces* R *es el pseudoarco.*

Demostración. Como X tiene la propiedad RNT, entonces por el Teorema 2.21, X y R son encadenables. Así que para ver que R es el pseudoarco, por la Definición 2.22, sólo basta probar que R es hereditariamente indescomponible.

Supongamos, por el contrario, que R contiene un subcontinuo descomponible Y. Como Y es descomponible, existen dos subcontinuos propios A_0, B_0 de Y tales que $Y = A_0 \cup B_0$. Sean $a \in A_0 \setminus B_0$, $b \in B_0 \setminus A_0$ y $c \in A_0 \cap B_0$. Sea A un subcontinuo de A_0, irreducible con respecto a a y c, [Nd, 4.35 Exercise, pág. 68] y sea B un subcontino de B_0 irreducible con respecto a b y c.

Recordemos que, como X es la compactación de un rayo con residuo R, entonces $X = h([0,\infty)) \cup R$. Dados dos elementos $s, t \in h([0,\infty))$, denotamos por st el segmento en $h([0,\infty))$ que los une, si $s \neq t$, y sea $st = \{s\}$, si $s = t$.

Afirmación 1. Existen sucesiones de números $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $h([0,\infty))$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$:

(i) $c_n \in a_n b_n \setminus \{a_n, b_n\}$,
(ii) $a_{n+1},\, b_{n+1} \notin h(0)a_n \cup h(0)b_n$,
(iii) $a_n c_n \subset N(\frac{1}{n}, A)$ y $c_n b_n \subset N(\frac{1}{n}, B)$,
(iv) $d(a_n, a)$, $d(b_n, b)$, $d(c_n, c) < \frac{1}{n}$.

Supongamos que $\operatorname{diam}(X) \leq 1$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a \notin N(3\varepsilon, B)$ y $b \notin N(3\varepsilon, A)$.

Para $n = 1$, sea $a_1 = h(0)$, $c_1 = h(1)$ y $b_1 = h(2)$, entonces (i), (ii), (iii) y (iv) se satisfacen.

Supongamos que hemos construido $a_1, a_2, ..., a_n$; $c_1, c_2, ..., c_n$ y $b_1, b_2, .., b_n$ y que satisfacen las condiciones (i),(ii),(iii) y (iv). Sea $\varepsilon_0 = \min(\{d(x,y) : x \in$

$h(0)a_n \cup h(0)b_n$ y $y \in R\} \cup \{\varepsilon, \frac{1}{n+1}\})$. Como X tiene la propiedad RNT, existe $\delta > 0$ tal que si T es un árbol, $T \subset X$ y $H(T, X) < \delta$, entonces existe una ε_0-retracción $r : X \to T$. Sea $M \in h([0, \infty))$ tal que $h(0)a_n \cup h(0)b_n \subseteq h(0)M$ y tal que $H(h(0)M, X) < \delta$. Entonces, para el árbol $T = h(0)M$, existe una ε_0-retracción $r : X \to T$.

Como $d(a, r(a)) < \varepsilon_0$ y $d(b, r(b)) < \varepsilon_0$, entonces $r(a)$ y $r(b) \notin h(0)a_n \cup h(0)b_n$. Sea $a_{n+1} = r(a)$, $b_{n+1} = r(b)$ y $c_{n+1} = r(c)$.

Veremos que a_{n+1}, b_{n+1} y c_{n+1} cumplen con las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv).

Como $a_{n+1} = r(a)$, $b_{n+1} = r(b)$ y $c_{n+1} = r(c)$, y $r(a)$, $r(b) \notin h(0)a_n \cup h(0)b_n$, entonces a_{n+1} y $b_{n+1} \notin h(0)a_n \cup h(0)b_n$ y (ii) se satisface.

Como r es una ε_0-retracción, entonces $d(a, r(a)) = d(a_n, a) < \frac{1}{n}$, $d(b, r(b)) = d(b_n, b) < \frac{1}{n}$ y $d(c, r(c)) = d(c_n, c) < \frac{1}{n}$. Por tanto (iv) se cumple.

Como $r(A)$ es un subconjunto conexo de $h([0, \infty))$ que contiene a los puntos a_{n+1}, b_{n+1}, entonces $a_{n+1}c_{n+1} \subset r(A) \subset N(\frac{1}{n}, A)$, de igual modo podemos ver que $b_{n+1}c_{n+1} \subset N(\frac{1}{n}, B)$. Por tanto (iii) se satisface.

Para ver que (i) se satisface veremos que $a_{n+1} \notin c_{n+1}b_{n+1}$ y que $b_{n+1} \notin a_{n+1}c_{n+1}$. Supongamos por el contrario que $a_{n+1} \in c_{n+1}b_{n+1}$, entonces $a_{n+1} \in r(B)$, entonces existe $x \in B$ tal que $r(x) = a_{n+1}$. De modo que $d(x, a) \leq d(x, r(x)) + d(r(x), a_{n+1}) + d(a_{n+1}, a) < \varepsilon_0 + 0 + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 \leq 2\varepsilon$. Con esto tenemos que $a \in N(2\varepsilon, B)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $a_{n+1} \notin c_{n+1}b_{n+1}$. Del mismo modo podemos ver que $b_{n+1} \notin a_{n+1}c_{n+1}$. Por tanto $c_{n+1} \in a_{n+1}b_{n+1} \setminus \{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ y (i) queda probado.

De manera que hemos construido inductivamente sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $h([0, \infty))$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$, (i), (ii), (iii) y (iv) se cumplen.

Afirmación 2. Consideremos las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $h([0, \infty))$ tales que para toda $n \in \mathbb{N}$ se satisfacen las condiciones (i), (ii), (iii) y (iv) de la Afirmación 1. Entonces las sucesiones de arcos $\{a_nc_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_nc_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumplen que $a_nc_n \to A$ y $b_nc_n \to B$.

Tomemos una subsucesión convergente $\{a_{n_k}c_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{a_nc_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces $a_{n_k}c_{n_k} \to D$, para alguna $D \in C(X)$. Como $a_{n_k}c_{n_k} \subset N(\frac{1}{n_k}, A)$, entonces $a_{n_k}c_{n_k} \to D \subset A$, pero como $a_{n_k} \to a$ y $c_{n_k} \to c$, entonces a, $c \in D$. Como A es irreducible entre a y c, entonces $D = A$. Por tanto toda subsucesión convergente de $\{a_nc_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a D. Esto muestra que $a_nc_n \to$

A. Del mismo modo podemos ver que $c_nb_n \to B$. Como $a_nc_n \cup c_nb_n = a_nb_n$, entonces $a_nb_n \to A \cup B$.

Ahora estamos listos para terminar la prueba del teorema.

Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesiones en $h([0,\infty))$ que cumplen con las condiciones de las Afirmaciones 1 y 2.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $a \notin N(3\varepsilon, B)$ y $b \notin N(3\varepsilon, A)$. Sea $\delta > 0$ como en la definición de la propiedad *RNT* y sea $m \in h([0,\infty))$ tal que $H(h(o)m, X) < \delta$. Como $a_n \to a \in R$ y $b_n \to b \in R$ existe $N \geq 1$ tal que para toda $n \geq N$ se cumple que:

(i) $a_nb_n \notin h(0)m$,
(ii) $d(a,a_n)$, $d(b,b_n) < \varepsilon$,
(iii) $H(a_nc_n, A)$, $H(b_nc_n, B) < \varepsilon$.

Consideremos los puntos a_N, b_N. Podemos suponer que $a_N < b_N$ en el orden natural de $h([0,\infty))$. Sea $T = h(0)c_N$, entonces $b_N \notin T$ y $h(0)M \subset h(0)c_N \subset X$, y $H(h(0)m, X) < \delta$. Entonces $H(T,X) < \delta$ y $T = h(0)m \cup ma_N \cup a_Nc_N$.

Por la manera como elegimos a T, existe una ε-retracción $r : X \to T$. Analizaremos qué ocurre con $r(b_N)$.

Caso 1. Si $r(b_N) \in a_Nc_N$, como $H(a_Nc_N, A) < \varepsilon$, existe $x \in A$ tal que $d(x, r(b_N)) < \varepsilon$. Entonces $d(b,x) \leq d(b,b_N) + d(b_N, r(b_N)) + d(r(b_N), x) < 3\varepsilon$. De modo que $b \in N(3\varepsilon, A)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $r(b_N) \notin a_Nc_N$.

Caso 2. Si $r(b_N) \in h(0)m \cup ma_N$ como $r(c_N) = c_N$ y $r(b_Nc_N)$ es conexo, entonces $a_N \in r(b_Nc_N)$. De modo que existe $y \in c_Nb_N$ tal que $r(y) = a_N$. Como $H(c_Nb_N, B) < \varepsilon$, existe $z \in B$ tal que $d(z,y) < \varepsilon$. De modo que $d(a,z) \leq d(a,a_N) + d(a_N, r(y)) + d(r(y), y) + d(y,z)$ y como $r(y) = a_N$ y $d(a,a_N) < \varepsilon$ por (ii), entonces $d(a,z) < 3\varepsilon$, lo cual implica que $a \in N(3\varepsilon, B)$, lo cual es una contradicción. Por tanto $r(b_N) \notin h(0)m \cup ma_N$.

De los casos 1 y 2 obtenemos que $r(b_N) \notin h(0)m \cup ma_N \cup a_Nc_N$ por tanto $r(b_N) \notin T$, lo cual es una contradicción, pues r es una retracción de X en T. Esta contradicción nace de suponer que R contiene un subcontinuo descomponible, por tanto R es hereditariamente indescomponible.

De manera que hemos obtenido que R es un continuo hereditariamente indescomponible y encadenable, por tanto por la Definición 2.22 R es el pseudoarco y con esto terminamos la prueba del teorema.

■

2.3 Una compactación con la propiedad *RNT*

En esta sección construiremos una compactación del rayo que tiene la propiedad *RNT*. Para construir este ejemplo, utilizaremos la construcción de Alejandro Illanes en [AI, pág 798] de los arcos A_n en el plano, estos arcos los utilizamos en el Capitulo 1, Sección 1.6.1.

Definición 2.24 *Una función* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es* lineal por pedazos *si existe una partición del intervalo* $a = t_o < t_1 < ... < t_n = b$ *tal que si* $t \in [t_{i-1}, t_i]$, *entonces* $\gamma(t) = \frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\gamma(t_i) + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}}\gamma(t_{i-1})$.

Definición 2.25 *Una* poligonal *de* p *a* q, *es la imagen de una función inyectiva y lineal por pedazos* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$, *tal que* $\gamma(a) = p$ *y* $\gamma(b) = q$.

Lema 2.26 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existen funciones inyectivas y continuas* $T_n, R_n : A_n \to [0,n] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ *que cumplen que:*
(i) $T_n(\Theta) = \Theta = R_n(a_n)$, $\quad T_n(a_n) = (n,0) = R_n(\Theta)$,
(ii) $T_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1,1)) = \{\Theta\} = R_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1,1))$ *y*

$$T_n(A_n) \cap (\{n\} \times (-1,1)) = \{(n,0)\} = R_n(A_n) \cap (\{n\} \times (-1,1)),$$

(iii) Si $p, q \in A_n$ y $|\pi_1(p) - \pi_1(q)| < 2$, entonces $|\pi_1(T_n(p)) - \pi_1(T_n(q))| < 2$ y $|\pi_1(R_n(p)) - \pi_1(R_n(q))| < 2$,
(iv) La imagen de T_n y R_n es yab poligonal.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $T_n(x,y) = (x, \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|})$ y $R_n(x,y) = (n - x, \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|})$.

Por la definición de A_n, $a_n = (u_n, v_n)$, donde $u_n = n$ y $v_n < 0$. Se puede verificar que T_n y R_n son funciones continuas e inyectivas.

Como $\pi_1(A_n) = [0,n]$ y como $\pi_2(A_n) = [v_n, 0]$, tenemos que dado $(x,y) \in A_n$, $v_n < y \leq 0 \leq -\frac{v_n}{n} < -v_n$, entonces $-\frac{1}{2} \leq \frac{v_n}{2|v_n|} \leq \frac{y}{2|v_n|} \leq \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|} \leq \frac{-\frac{v_n}{n}x}{2|v_n|} \leq -\frac{v_n}{2|v_n|} \leq \frac{1}{2}$ por tanto $T_n(A_n), R_n(A_n) \subset [0,n] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Para verificar que (i) se cumple notemos que:
$T_n(\Theta) = T_n(0,0) = (0, \frac{0 - \frac{v_n}{n}0}{2|v_n|}) = (0,0) = \Theta$,
$R_n(a_n) = R_n(u_n, v_n) = R_n(n, v_n) = (n - n, \frac{v_n - \frac{v_n n}{n}}{2|v_n|}) = (0,0) = \Theta$,

$T_n(a_n) = T_n(u_n, v_n) = T_n(n, v_n) = (n, \frac{v_n - \frac{v_n n}{n}}{2|v_n|}) = (n, 0)$,
$R_n(\Theta) = R_n(0,0) = (n, \frac{0 - \frac{v_n}{n} 0}{2|v_n|}) = (n, 0)$.
Por tanto $T_n(\Theta) = \Theta = R_n(a_n)$ y $T_n(a_n) = (n, 0) = R_n(\Theta)$.

Para verificar (ii), recordemos que, por la Propiedad 0 del Capítulo 1 Sección 1.6.1, el único punto de A_n en el eje y es el Θ y el único punto de A_n con primera coordenada igual a n es a_n. Tomemos $(x, y) \in A_n$ tal que $T_n(x, y) \in T_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1))$, entonces $T_n(x, y) = (x, \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|})$ y $T_n(x, y) = (0, \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|})$. De modo que $x = 0$, con lo que tenemos que (x, y) sólo puede ser el Θ y por (i), $T_n(\Theta) = \Theta$. Entonces $T_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1)) = T_n(\Theta) = \{\Theta\}$.

Ahora sea $(x, y) \in R_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1)\}$. Entonces $R_n(x, y) = (n - x, \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|})$ y $R_n(x, y) = (0, \frac{y - \frac{v_n x}{n}}{2|v_n|})$. De donde obtenemos que $n - x = 0$. Por tanto $n = x$, así que $(x, y) = (n, v_n) = a_n$ y por (i) sabemos que $R_n(a_n) = \{\Theta\}$. De modo que $T_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1)) = \{\Theta\} = R_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1))$

De igual manera utilizando estas dos propiedades de los A_n se puede verificar que $T_n(A_n) \cap (\{n\} \times (-1, 1)) = (n, 0)$ y que $R_n(A_n) \cap (\{n\} \times (-1, 1)) = (n, 0)$.

Ahora para mostrar (iii) sean $p, q \in A_n$ tales que $|\pi_1(p) - \pi_1(q)| < 2$, entonces como $T_n(p) = (\pi_1(p), \frac{\pi_2(p) - \frac{v_n}{n}\pi_1(p)}{2|v_n|})$ y $T_n(q) = (\pi_1(q), \frac{\pi_2(q) - \frac{v_n}{n}\pi_1(q)}{2|v_n|})$, tenemos que $|\pi_1(T_n(p)) - \pi_1(T_n(q))| = |\pi_1(p) - \pi_1(q)| < 2$.

De igual manera $R_n(p) = (n - \pi_1(p), \frac{\pi_2(p) - \frac{v_n}{n}\pi_1(p)}{2|v_n|})$ y $R_n(q) = (n - \pi_1(q), \frac{\pi_2(q) - \frac{v_n}{n}\pi_1(q)}{2|v_n|})$, entonces $|\pi_1(R_n(p)) - \pi_1(R_n(q))| = |(n - \pi_1(p)) - (n - \pi_1(q))| = |\pi_1(p) - \pi_1(q)| < 2$.

Por último, como R_n y T_n son funciones afines (lineales trasladadas), entonces, envían segmentos en segmentos y en consecuencia, envían poligonales en poligonales. Ya que A_n es una poligonal, entonces $R_n(A_n)$ y $T_n(A_n)$ son poligonales y (iv) queda demostrado.

Con esto terminamos la demostación del lema.

■

Lema 2.27 *Sean* $A \subset [0,b] \times (-1,1)$ *una poligonal de* Θ *a* $(b,0)$ *y* $\delta > 0$ *tal que* $A \cap (\{0\} \times (-1,1)) = \{\Theta\}$ *y* $A \cap (\{b\} \times (-1,1)) = \{(b,0)\}$. *Entonces existen* $m \in \mathbb{N}$ *y una* $G : [0,m] \times [-1,1] \to [0,b] \times (-1,1)$ *que cumplen que:*
(a) G *es una función continua e inyectiva,*
(b) diam $(G([i-1,i] \times [-1,1])) < \delta$ *para cada* $i \in \{1,2,...,m\}$,
(c) $G([0,n] \times \{0\}) = A$,
(d) $G(\Theta) = \Theta$ *y* $G((n,0)) = (b,0)$.

Demostración.

Elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $(N(\varepsilon, A) \cap [0,b] \times \mathbb{R}) \subset [0,b] \times (-1,1)$. Por definición A es una poligonal, de modo que existen: una función continua e inyectiva $g : [0,1] \to A$ y una partición $P : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ de $[0,1]$ tales que, $g(0) = \Theta$, $g(1) = (b,0)$, y para toda $i \in \{1,...,n\}$ y toda $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $g(t) = \frac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} g(t_i) + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} g(t_{i-1})$. Para cada $i \in \{1,...,n-1\}$, sea B_i la recta bisectriz del ángulo formado por los segmentos $g([t_{i-1}, t_i])$ y $g([t_i, t_{i+1}])$.

Para $i = 0$ (resp., $i = n$), sea B_0 (resp., B_n) el segmento $\{0\} \times [-1,1]$ (resp., $\{b\} \times [-1,1]$).

Elegimos un segmento A_0, contenido en B_0, con punto terminal Θ y que tenga diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$. Elegimos un segmento A_1 contenido en B_1, con punto terminal $g(t_1)$, que tenga diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y que esté en el mismo semiplano que A_0, de los dos semiplanos en que es dividido el plano por la recta que contiene a $g([t_0, t_1])$. En general, una vez elegido A_i, elegimos un segmento A_{i+1} contenido en B_{i+1}, con punto terminal $g(t_{i+1})$, que tenga diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y que esté en el mismo semiplano que A_i, de los dos semiplanos en que es dividido el plano por la recta que contiene a $g([t_i, t_{i+1}])$. Con esto ya elegimos segmentos $A_0, A_1, ..., A_n$. Para cada $i \in \{0,1,...,n\}$, elegimos un segmento C_i, contenido en B_i, con punto terminal $g(t_i)$, que tenga diámetro menor que $\frac{\varepsilon}{2}$ y sólo intersecte a A_i en el punto $g(t_i)$.

Notemos que, por construcción, para $i \in \{1,...,n\}$, la envolvente convexa $\mathcal{A}_i$ de A_{i-1} y A_i es un cuadrilátero convexo que tiene como tres de sus lados a A_{i-1}, A_i y $g([t_{i-1}, t_i])$.

Entonces podemos definir un homeomorfismo $f_i : [t_{i-1}, t_i] \times [0,1] \to \mathcal{A}_i$ tal que $f_i(t_{i-1}, 0) = g(t_{i-1})$, $f_i(t_i, 0) = g(t_i)$, $f_i|\{t_j\} \times [0,1]$ es un homeomorfismo lineal de $\{t_j\} \times [0,1]$ sobre A_j para $j = i-1, i$ y $f_i|[t_{i-1}, t_i] \times \{0\}$ es un homeomorfismo lineal de $[t_{i-1}, t_i] \times \{0\}$ sobre $g([t_{i-1}, t_i])$ y entonces, $f_i(t, 0) = g(t)$ para toda $t \in [t_{i-1}, t_i]$. En consecuencia, existe una extensión común $f^+ : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{A}_1 \cup ... \cup \mathcal{A}_n$, de manera que $f^+|[t_{i-1}, t_i] \times [0,1] = f_i$ para toda $i \in \{1,...,n\}$ y $f^+(t,0) = g(t)$ para toda $t \in [0,1]$.

De igual manera podemos definir para $i \in \{1,2,...,n\}$ a $\mathcal{D}_i$, como la envolvente convexa de C_{i-1} y C_i, que es una cuadrilatero convexo que tiene como tres de sus lados a C_{i-1}, C_i y $g([t_{i-1},t_i])$.

Entonces podemos definir una homeomorfismo $g_i : [t_{i-1},t_i] \times [-1,0] \to \mathcal{D}_i$ tal que $g_i : ((t_{i-1},0)) = g(t_{i-1})$, $g_i((t_i,0)) = g(t_i)$, $g_i|\{t_j\} \times [-1,0]$ es un homeomorfismo lineal de $[t_{i-1},t_i] \times \{0\}$ sobre $g([t_{i-1},t_i])$, y entonces $g_i(t,0) = g(t)$ para toda $t \in [t_{i-1},t_i]$.

En consecuencia existe una extensión común $f^- : [0,1] \times [-1,0] \to \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup ... \cup \mathcal{D}_n$ de manera que $f^-|[t_{i-1},t_i] \times [-1,0] = g_i$ para toda $i \in \{1,2,...,n\}$ y $f^-(t,0) = g(t)$.

Podemos hacer una extensión común $F : [0,1] \times [-1,1] \to (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cup (D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n) \subset [0,b] \times (-1,1)$, donde F es un homeomorfismo que cumple que:
(i) $F|[0,1] \times [0,1] = f^+$,
(ii) $F|[0,1] \times [-1,0] = f^-$,
(iii) $F([0,1] \times \{0\}) = A$,
(iv) $F(\Theta) = \Theta$, $F((1,0)) = (b,0)$ y $F((t,0)) = g((t,0))$ para toda $t \in [0,1]$.

Por la continuidad uniforme de F existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{diam}(F([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}])) < \delta$ para cada $i \in \{1,2,...,n\}$.

Sea $G : [0,m] \times [-1,1] \to [0,b] \times (-1,1)$ dada por $G(x,y) = F(\frac{x}{m}, \frac{y}{m})$, veamos que G cumple con las condiciones requeridas.

(a) Como F es homeomorfismo y $(x,y) \to (\frac{x}{n}, \frac{y}{n})$ también lo es, claramente G es continua e inyectiva,

(b) $\mathrm{diam}(G([i-1,i] \times [-1,1])) = \mathrm{diam}(F([\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}] \times [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}])) < \delta$,

(c) $G([0,m] \times \{0\}) = F([0,1] \times \{0\}) = A$,

(d) $G(\Theta) = F(\Theta) = \Theta$ y $G((m,0)) = F((1,0) = (b,0)$.

■

2.3.1 Construcción del ejemplo

Ahora empezaremos la construcción del ejemplo, esta construcción es muy técnica, consiste en construir unos arcos L_n contenidos en el rectángulo $[0,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$. Después, bajo un homeomorfismo transformamos cada arco

L_n en un arco $J_n \subset [0,1] \times [-1,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$ tal que la unión de esos arcos J_n es homeomorfa al rayo $[0,\infty)$, entonces construimos el continuo $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n}$, este continuo es una compactación métrica del rayo, probamos que X tiene la propiedad RNT y por el Teorema 2.23, sabemos que entonces el residuo R de esta compactación es el pseudoarco. El siguiente lema es más bien un lema constructivo que nos será de gran utilidad para la construcción que acabamos de describir.

Lema 2.28 *Consideremos el rectángulo* $[0,1]\times[-1,1]$. *Entonces existen: un conjunto infinito de los naturales* $J = \{n_0, n_1, ...\}$, *una sucesión de números positivos* $\{\delta_1, \delta_2, ...\}$ *y una sucesión de funciones* $\{G_1, G_2, ...\}$ *que cumplen que:*
(i) $1 = n_0 < n_1 < n_2 < ...,$
(ii) $0 < \delta_i < \frac{1}{2^i}$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$,
(iii) $G_i : [0, n_i] \times [-1,1] \to [0, n_{i-1}] \times [-1,1]$ *es continua e inyectiva para toda* $i \in \mathbb{N}$,
(iv) $diam((G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([j-1, j] \times [-1,1]) \leq \frac{1}{2^{i+1}}$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$,
(v) $G_i([0,n_i] \times \{0\}) = \begin{cases} T_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}) & \text{si } i \text{ es par} \\ R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}) & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$ *para cada* $i \geq 2$ *donde* $T_{n_{i-1}}$ *y* $R_{n_{i-1}}$ *son como en el Lema 2.26,*
(vi) $G_i(\Theta) = \Theta$ *y* $G_i((n_i, 0)) = (n_{i-1}, 0)$ *para toda* $i \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sean $n_0 = 1$, $\delta_1 = \frac{1}{4}$ y $A = [0,1] \times \{0\}$. Como A cumple que une Θ con $(1,0)$, está contenido en $[0,1] \times (-1,1)$ y $A \cap (\{0\} \times (-1,1)) = \Theta$ y $A \cap (\{1\} \times (-1,1)) = (1,0)$, entonces podemos aplicarle el Lema 2.27 al arco A y a δ_1.

De manera que existen $n_1 \in \mathbb{N}$ y una función $G_1 : [0, n_1] \times [-1,1] \to [0,1] \times (-1,1)$ tales que:
(a) G_1 es una función continua e inyectiva,
(b) diam $(G_1([i-1,i] \times [-1,1])) < \delta = \frac{1}{4}$ para cada $i \in \{1, 2, ..., n_1\}$,
(c) $G_1([0,n_1] \times \{0\}) = A = [0,1] \times \{0\}$,
(d) $G_1(\Theta) = \Theta$ y $G_1((n_1, 0)) = (1,0)$.

De modo que para $\delta_1 = \frac{1}{4}$, n_1 y G_1 (ii), (iii), (iv) y (vi) se satisfacen, como diam$(G_1([i-1,i] \times [-1,1])) < \delta = \frac{1}{4}$ y $G_1([0,n_1] \times \{0\}) = [0,1] \times \{0\}$

entonces $\text{diam}(G_1([0,n_1]\times\{0\})) > \frac{1}{4}$ por tanto $n_1 > n_0 = 1$ y (i) se satisface. Construyamos ahora los siguientes términos de cada sucesión.

Por la continuidad uniforme de G_1 existe $\delta' > 0$ tal que si $\text{diam}(A) < \delta'$, entonces $\text{diam}(G_1(A)) < \frac{1}{2^{2+1}}$, sea $\delta_2 = \frac{\min\{\delta',\delta_1,\frac{1}{2^2}\}}{2}$.

Consideremos el arco $T_{n_1}(A_{n_1})$ como en el Lema 66, entonces el arco $T_{n_1}(A_{n_1})$ cumple que $T_{n_1}(A_{n_1}) \subset [0,n_1]\times[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \subset [0,n_1]\times[-1,1]$, $T_{n_1}(A_{n_1})\cap(\{0\}\times(-1,1)) = \{\Theta\}$ y $T_{n_1}(A_{n_1})\cap(\{n_1\}\times(-1,1)) = \{(n_1,0)\}$.

De modo que tenemos que $T_{n_1}(A_{n_1})$ es un arco que cumple las condiciones del Lema 2.27, aplicando este lema al arco $T_{n_1}(A_{n_1})$ y δ_2 obtenemos que existen $n_2 \in \mathbb{N}$ y $G_2 : [0,n_2]\times[-1,1] \to [0,n_1]\times(-1,1)$ que cumplen que:
(a) G_2 es una función continua e inyectiva,
(b) diam $(G_2([i-1,i]\times[-1,1])) < \delta_2$ para cada $i \in \{1,2,...,n_2\}$,
(c) $G_2([0,n_2]\times\{0\}) = T_{n_1}(A_{n_1})$,
(d) $G_2(\Theta) = \Theta$ y $G_2((n_2,0)) = (n_1,0)$.

De modo que para δ_2, n_2 y G_2 se satisfacen (iii), (v) y (vi). Como $G_2([0,n_2]\times\{0\}) = T_{n_1}(A_{n_1})$ y $\text{diam}(T_{n_1}(A_{n_1})) \geq n_1$, tenemos entonces que $n_1 \leq \text{diam}(G_2([0,n_2]\times\{0\})) \leq \text{diam}(G_2([0,n_2]\times[-1,1])) < \delta_2 n_2 < \frac{n_2}{2^2} \leq n_2$. De modo que tenemos que $n_2 > n_1 > n_0 = 1$, así que se satisface (i). Como $\delta_2 = \frac{\min\{\delta',\delta_1,\frac{1}{2^2}\}}{2}$, entonces $0 < \delta_2 < \frac{1}{2^2}$ y se satisface (ii). Para ver que se satisface (iv) notemos que $\text{diam}(G_2([i-1,i]\times[-1,1])) < \delta_2 < \delta'$ para cada $i \in \{1,2,...,n_2\}$, entonces $\text{diam}(G_1\circ G_2)([i-1,i]\times[-1,1])) < \frac{1}{2^{2+1}}$ para cada $i \in \{1,2,...,n_2\}$.

Supongamos ahora que hemos construido un subconjunto $\{n_0,n_1,...,n_i\}$ de los naturales, una sucesión de números positivos $\{\delta_1,\delta_2,...,\delta_i\}$ y una sucesión de funciones $\{G_1,G_2,...,G_i\}$ que cumplen con las condiciones (i)-(vi). Supongamos que i es un entero par, (el caso en que i es un entero impar se analiza de manera muy similar).

Por la continuidad uniforme de $(G_1\circ G_2\circ...\circ G_i)([0,n_i])\times[-1,1]) \to [0,1]\times(-1,1)$, existe $\delta' > 0$ tal que si $\text{diam}(A) < \delta'$, entonces $\text{diam}(G_1\circ G_2\circ ...\circ G_i)(A) < \frac{1}{2^{i+2}}$. Sea $\delta_{i+1} = \frac{\min\{\delta',\delta_i,\frac{1}{2^{i+2}}\}}{2}$.

Consideremos el arco $R_{n_i}(A_{n_i})$ como en el Lema 2.26, entonces el arco $R_{n_i}(A_{n_i})$ cumple que $R_{n_i}(A_{n_i}) \subset [0, n_i] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \subset [0, n_i] \times [-1, 1]$, $R_{n_i}(A_{n_i}) \cap (\{0\} \times (-1, 1)) = \{\Theta\}$ y $R_{n_i}(A_{n_i}) \cap (\{n_i\} \times (-1, 1)) = \{(n_i, 0)\}$. De modo que $R_{n_i}(A_{n_i})$ es un arco que cumple las condiciones del Lema 2.27. Aplicando este lema al arco $R_{n_i}(A_{n_i})$ y δ_{i+1} obtenemos que existen $n_{i+1} \in \mathbb{N}$ y $G_{i+1} : [0, n_i] \times [-1, 1] \to [0, n_{i+1}] \times (-1, 1)$ que cumplen que:
(a) G_{i+1} es una función continua e inyectiva.
(b) diam $(G_{i+1}([j-1, j] \times [-1, 1])) < \delta_{i+1}$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n_i\}$
(c) $G_{i+1}([0, n_{i+1}] \times \{0\}) = R_{n_i}(A_{n_i})$
(d) $G_{i+1}(\Theta) = \Theta$ y $G_{i+1}((n_{i+1}, 0)) = (n_i, 0)$.

De modo que para δ_{i+1}, n_{i+1} y G_{i+1} se satisfacen (iii), (v) y (vi). Como $G_{i+1}([0, n_{i+1}] \times \{0\}) = R_{n_i}(A_{n_i})$ y $\text{diam}(R_{n_i}(A_{n_i})) \geq n_i$, entonces $n_i \leq \text{diam}(G_{i+1}([0, n_{i+1}] \times \{0\})) \leq \text{diam}(G_{i+1}([0, n_{i+1}] \times [-1, 1])) < \delta_{i+1} n_{i+1} < \frac{n_{i+1}}{2^{i+2}} \leq n_{i+1}$. Así que $n_{i+1} > n_i > ... > n_2 > n_1 > n_0 = 1$. De modo que se satisface (i). Como $\delta_{i+1} = \frac{\min\{\delta', \delta_i, \frac{1}{2^{i+2}}\}}{2}$, entonces $0 < \delta_{i+1} < \frac{1}{2^{i+2}}$ y se satisface (ii). Para ver que se satisface (iv), notemos que $\text{diam}(G_{i+1}([j-1, j] \times [-1, 1])) < \delta_{i+1} < \delta'$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n_{i+1}\}$, entonces $\text{diam}(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(G_{i+1}[j-1, j] \times [-1, 1])) < \frac{1}{2^{2+1}}$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n_{i+1}\}$.

De modo que hemos construido inductivamente un conjunto infinito $J = \{n_0, n_1, ...\}$ de los naturales, una sucesión de números positivos $\{\delta_1, \delta_2, ...\}$ y una sucesión de funciones $\{G_1, G_2, ...\}$ que cumplen las condiciones (i)-(vi) y con esto terminamos la prueba del lema.

■

Definición 2.29 *Sea $B_0 = [0, 1] \times [-1, 1]$ y para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos B_i y $\mathcal{Q}$ como: $B_i = (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([0, n_i] \times [-1, 1])$, $\mathcal{Q} = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$.*

Lema 2.30 *La sucesión $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión anidada de continuos, $\mathcal{Q}$ es un continuo y $\mathcal{Q} = \lim_{i \to \infty} B_i$.*

Demostración. Por el Lema 2.28 (iii), $G_i : [0, n_i] \times [-1, 1] \to [0, n_{i-1}] \times (-1, 1)$ es una función continua e inyectiva para todo $i \in \mathbb{N}$.

De modo que $B_i = (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i) : [0, n_i] \times [-1, 1] \to [0, 1] \times (-1, 1)$ es un continuo para toda $i \in \mathbb{N}$.

Como $B_1 = G_1([0, n_1] \times [-1, 1]) \subset [0, 1] \times [-1, 1]$, entonces $B_1 \subset B_0$ y como $B_{i+1} = (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{i+1})([0, n_{i+1}] \times [-1, 1]) \subset (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ$

$G_i)([0,n_i] \times [-1,1]) = B_i$, tenemos que ... $\subset B_{i+1} \subset B_i \subset ... \subset B_1 \subset B_0$ y por tanto $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión anidada de continuos.

Ahora $\mathcal{Q} = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$ y como la sucesión $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión anidada de continuos, entonces $\mathcal{Q}$ es un continuo. Nos falta demostrar que $\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i = \lim_{i\to\infty} B_i$. Para esto primero probaremos que para toda $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq M$ se cumple que $B_i \subset N(\varepsilon, \mathcal{Q})$.

Sea $\varepsilon > 0$, como $\mathcal{Q} = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i$ y B_0 son compactos, entonces $B_0 \backslash N(\varepsilon, \mathcal{Q})$ también es un compacto. Consideremos los abiertos $U_i = B_0 \backslash B_i$, entonces $\mathcal{C} = \{U_i : i \geq 1\}$ es una cubierta abierta de $B_0 \backslash N(\varepsilon, \mathcal{Q})$, de manera que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $B_0 \backslash N(\varepsilon, \mathcal{Q}) \subset U_1 \cup U_2 \cup ... \cup U_k$ Como $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión anidada de continuos, entonces tenemos que $U_1 \subset U_2 \subset ... \subset U_k$, por tanto $B_0 \backslash N(\varepsilon, \mathcal{Q}) \subset U_k$, entonces $B_0 \backslash U_k \subset N(\varepsilon, \mathcal{Q})$. Esto quiere decir que $B_k \subset N(\varepsilon, \mathcal{Q})$ y como $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión anidada de continuos, entonces para toda $i \geq k$, $B_i \subset N(\varepsilon, \mathcal{Q})$. Sea $M = k$, notemos que como $\mathcal{Q} = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i \subset B_i$, entonces $\mathcal{Q} \subset N(\varepsilon, B_i)$, de manera que para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq M$ se cumple que $H(\mathcal{Q}, B_i) < \varepsilon$, entonces $\lim_{i\to\infty} B_i = \mathcal{Q}$.

■

Definición 2.31 *Definimos una sucesión de arcos* $\{L_i\}_{i=0}^{\infty} \subset B_0$ *de la siguiente manera. Sea* $L_0 = [0,1] \times \{0\}$ *y para cada* $i \in \mathbb{N}$, *definimos* L_i *como*

$$L_i = \begin{cases} (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(T_{n_i}(A_{n_i})), & \text{si } i \text{ es impar.} \\ (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(R_{n_i}(A_{n_i})), & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Lema 2.32 *Para toda* $i \in \mathbb{N}$ *se cumple que:*
(a) $L_i \subset [0,1] \times (-1,1)$,
(b) $L_i \cap (\{0\} \times [-1,1]) = \{\Theta\}$ *y* $L_i \cap (\{1\} \times [-1,1]) = \{(1,0)\}$,
(c) $L_i \subset B_i$,
(d) $L_{i-1} \subset B_i$.

Demostración. Como por la Definición 2.31

$$L_i = \begin{cases} (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(T_{n_i}(A_{n_i})), & \text{si } i \text{ es impar,} \\ (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(R_{n_i}(A_{n_i})), & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases},$$

tenemos lo siguiente:

(a) Por el Lema 2.26, sabemos que $T_{n_i}(A_{n_i})$, $R_{n_i}(A_{n_i}) \subset [0, n_i] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, ahora G_i es una función continua e inyectiva, $G_i : [0, n_i] \times [-1, 1] \to [0, n_{i-1}] \times (-1, 1)$, para toda $i \in \mathbb{N}$ (Lema 2.28 (iii)). De modo que G_i es un homeomorfismo en su imagen. Por tanto como $T_{n_i}(A_{n_i})$, $R_{n_i}(A_{n_i}) \subset [0, n_i] \times (-1, 1)$, entonces $L_i \subset [0, 1] \times (-1, 1)$ y (a) queda demostrado.

(b) Por el Lema 2.26 (ii), sabemos que $T_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1)) = \{\Theta\} = R_n(A_n) \cap (\{0\} \times (-1, 1))$ y que $T_n(A_n) \cap (\{n\} \times (-1, 1)) = \{(n, 0)\} = R_n(A_n) \cap (\{n\} \times (-1, 1))$. Ahora por el Lema 2.28 (iii), G_i es un homeomorfismo en su imagen para toda $i \in \mathbb{N}$, por tanto $L_n \cap (\{0\} \times [-1, 1]) = \Theta$ y $L_n \cap (\{1\} \times [-1, 1]) = (1, 0)$.

(c) Por la Definicón 2.30, $B_i = (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([0, n_i] \times [-1, 1])$. Como $R_{n_i}(A_{n_i})$, $T_{n_i}(A_{n_i}) \subset [0, n_i] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, entonces $L_i \subset B_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

(d) Como $B_1 = G_1([0, n_1] \times [-1, 1])$ y $G_1([0, n_1] \times \{0\}) = [0, 1] \times \{0\} = L_0$, entonces $L_0 \subset B_1$.

Ahora como $B_i = (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([0, n_i] \times [-1, 1])$ y por el Lema 2.28 (v), tenemos que

$$G_i([0, n_i] \times \{0\}) = \begin{cases} T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1}), & \text{si } i \text{ es par,} \\ R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}), & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases},$$

entonces tenemos que:
$(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{i-1})(R_{n_{i-1}}(A_{n_i-1})) \subset (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([0, n_i] \times [-1, 1]) = B_i$, si i es impar y
$(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{i-1})(T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1})) \subset (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([0, n_i] \times [-1, 1]) = B_i$, si i es par.

Por tanto $L_{i-1} \subset B_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$.

■

Lema 2.33 *Para toda $i \in \mathbb{N}$ existe una $\frac{1}{2^i}$-retracción $r_i : B_i \to L_{i-1}$ y* $\lim\limits_{i \to \infty} L_i = Q$.

Demostración. Definimos $r_i : B_i \to L_{i-1}$ como

$$r_i(p) = (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(\pi_1(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)^{-1}(p), 0).$$

Veamos que r_i está bien definida. Sea $p \in B_i$, como por el Lema 68 (iii) $G_i : [0, n_i] \times [-1, 1] \to [0, n_{i-1}] \times (-1, 1)$ es continua e inyectiva para cada $i \in \mathbb{N}$, entonces existe un único $p' \in [0, n_i] \times [-1, 1]$ tal que $p' = (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)^{-1}(p)$. Por tanto tenemos que $r_i(p) = (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(\pi_1(p'), 0)$ está bien definida.

Veamos que $r_i(p) \in L_{i-1}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.28 (v) tenemos que

$$G_i([0, n_i] \times \{0\}) = \begin{cases} T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1}), & \text{si } i \text{ es par,} \\ R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}), & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

de modo que $G_i(\pi_1(p'), 0) \subset G_i([0, n_i] \times \{0\})$.

Con lo anterior podemos ver que

$$r_i(p) \in \begin{cases} (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_{i-1})(T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1})) & \text{si } i \text{ es par} \\ (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}})) & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

de modo que por la Definición 2.31 $r_i(p) \in L_{i-1}$ y r_i está bien definida para toda $i \in \mathbb{N}$.

Por ser composición de funciones continua, tenemos que r_i es una función continua para toda $i \in \mathbb{N}$. Veremos ahora que para toda $i \in \mathbb{N}$, r_i es una retracción. Para esto sólo tenemos que ver que para toda $p \in L_{i-1}$, $r_i(p) = p$.

Sea $p \in L_{i-1}$, entonces por el Lema 2.32, $L_{i-1} \subset B_i$ de modo que le podemos aplicar la función r_i. Por la Definición 2.31 tenemos que

$$L_{i-1} = \begin{cases} (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_{i-1})(T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1})), & \text{si } i \text{ es par,} \\ (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}})), & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Como por el Lema 2.28 (iii), G_i es una función inyectiva para toda $i \in \mathbb{N}$, tenemos que existe un único

$$p' \in \begin{cases} T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1}), & \text{si } i \text{ es par,} \\ R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}), & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

tal que $(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_{i-1})(p') = p$, así que

$$(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_{i-1})^{-1}(p) = p' \in \begin{cases} T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1}), & \text{si } i \text{ es par,} \\ R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}), & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}.$$

Pero por el Lema 2.28 (v) tenemos que

$$G_i([0, n_i] \times \{0\}) = \begin{cases} T_{n_{i-1}}(A_{n_i-1}), & \text{si } i \text{ es par,} \\ R_{n_{i-1}}(A_{n_{i-1}}), & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

De modo que $(G_i)^{-1}(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_{i-1})^{-1}(p) \in [0, n_i] \times \{0\}$. Con lo que obtenemos que $(\pi_1((G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)^{-1}(p), 0)) = (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)^{-1}(p)$, de modo que por la inyectividad de G_i para toda $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $r_i(p) = p$.

Por tanto r_i es una retracción de B_i en L_{i-1}.

Ahora sólo nos falta ver que r_i es una $\frac{1}{2^i}$-retracción para toda $i \in \mathbb{N}$.

Dado $p \in B_i$, por la inyectividad de las funciones $G_1, G_2, \ldots, G_i$ (Lema 2.28, (iii)) existe un único $p' \in [0, n_i] \times [-1, 1]$ tal que $(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(p') = p$.

Como $p' \in [0, n_i] \times [-1, 1]$, existe $j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$ tal que $p' \in [j-1, j] \times [-1, 1]$ de modo que p' y $(\pi_1(p'), 0) \in [j-1, j] \times [-1, 1] \subset [0, n_i] \times [-1, 1]$.

Ahora por el Lema 2.28 (iv) tenemos que $\operatorname{diam}(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)([j-1, j] \times [-1, 1]) < \frac{1}{2^{i+1}}$. Consideremos $d(p, r_i(p)) = d((G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(p'), (G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)(\pi_1(p'), 0)) \leq \operatorname{diam}(G_1 \circ G_2 \circ \ldots \circ G_i)([j-1, j] \times [-1, 1]) < \frac{1}{2^{i+1}} < \frac{1}{2^i}$ y esto es para toda $p \in B_i$ y por tanto r_i es una $\frac{1}{2^i}$-retracción de B_i en L_{i-1}.

Hemos probado que r_i es una $\frac{1}{2^i}$-retracción de B_i en L_{i-1}, entonces $H(B_i, L_{i-1}) < \frac{1}{2^i}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ Ahora probaremos que $\lim_{i\to\infty} L_i = \mathcal{Q}$. Sea $\{L_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cualquier subsucesión convergente de $\{L_i\}_{i=0}^{\infty}$, veamos que $\lim_{k\to\infty} L_{i_k} = \mathcal{Q}$. Sea $\varepsilon > 0$, como por el Lema 2.30 $\lim_{i\to\infty} B_i = \mathcal{Q}$, de manera que existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que para toda $i \geq N_1$ $H(B_i, \mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{2}$, además existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N_2$, $i_k \geq N_1$ y $\frac{1}{2^{i_k}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $k \geq N_2$, entonces $H(L_{i_k}, \mathcal{Q}) \leq H(L_{i_k}, B_{i_k+1}) + H(B_{i_{k+1}}, \mathcal{Q}) < \frac{1}{2^{i_k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Por tanto $\lim_{k\to\infty} L_{i_k} = Q$, Pero esto es para cualquier subsucesión convergente de $\{L_i\}_{i=0}^{\infty}$, de manera que $\lim_{i\to\infty} L_i = Q$

■

Notación. En el artículo [AI] se utiliza la siguiente notación que nosotros también utilizaremos aquí. Dados dos puntos $a, b \in A_n$, denotamos por $\langle\langle a, b\rangle\rangle$ el único arco que une a y b en A_n , si $a \neq b$ y $\langle\langle a, b\rangle\rangle = \{a\}$, si $a = b$.

Adoptamos también la siguiente notación. Dados dos puntos $a, b \in L_n$, denotamos por $\langle\langle\langle a, b\rangle\rangle\rangle$ el único arco que une a y b en L_n, si $a \neq b$ y $\langle\langle\langle a, b\rangle\rangle\rangle = \{a\}$, si $a = b$.

En ese mismo artículo [AI, Assertion 3], se probó el siguiente resultado.

Proposición 2.34 *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $q \in A_n$, existe una función continua $\sigma : A_n \to A_n$ (que depende de q) que cumple lo siguiente:*
(i) $\sigma| \langle\langle \Theta, q\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle}$ (es decir $\sigma(x) = x$ para toda $x \in \langle\langle\Theta, q\rangle\rangle$),
(ii) $|\pi_1(p) - \pi_1(\sigma(p))| \leq 2$ para toda $p \in A_n$,
(iii) Si $q \in A_{n-1}$, entonces $\sigma^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle q, a_n\rangle\rangle \neq \emptyset$ y si s es el primer punto en $\langle\langle q, a_n\rangle\rangle \cap \sigma^{-1}(\Theta)$ (tomando el orden natural de A_n de Θ a a_n), entonces $\sigma(\langle\langle q, s\rangle\rangle) \subset \langle\langle\Theta, q\rangle\rangle$ y $\sigma(a_n) = a_n$,
(iv) si $q \in A_n \setminus A_{n-1}$, entonces $\sigma(A_n) \subset \langle\langle\Theta, q\rangle\rangle$.

Basándonos en esta proposición, probaremos el siguiente lema.

Lema 2.35 *Para cualesquiera $i \in \mathbb{N}$ y $q \in L_i$, existe una función continua $\eta_i : L_i \to L_i$ que depende de q tal que:*
(a) Si i es impar $\eta_i| \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle}$,
(a') Si i es par $\eta_i| \langle\langle\langle q, (1, 0)\rangle\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle}$,
(b) $d(p, \eta_i(p)) \leq \frac{3}{2^{i+1}}$ para cada $p \in L_i$,
(c) Si i es impar y $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i \circ T_{n_i})^{-1}(q) \in A_{n_{i-1}}$, entonces $\eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, (1, 0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$ y si s es el primer punto en $\eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, (1, 0)\rangle\rangle\rangle$ (en el orden natural en $\langle\langle\langle q, (1, 0)\rangle\rangle\rangle$ de q a $(1, 0)$), entonces $\eta_i(\langle\langle\langle q, s\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_i((1, 0)) = (1, 0)$,
(c') Si i es par y $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i \circ R_{n_i})^{-1}(q) \in A_{n_{i-1}}$, entonces $\eta_i^{-1}((1, 0)]) \cap \langle\langle\langle q, (1, 0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$ y si s es el primer punto en $\eta_i^{-1}((1, 0)]) \cap \langle\langle\langle q, (1, 0)\rangle\rangle\rangle$ (en

el orden natural en $\langle\langle\langle q,\Theta\rangle\rangle\rangle$ *de* q *a* Θ*), entonces* $\eta_i(\langle\langle\langle q,s\rangle\rangle\rangle \subset \langle\langle\langle(1,0),q\rangle\rangle\rangle$ *y* $\eta_i(\Theta)=\Theta$,
(d) Si i *es impar y* $(G_1\circ G_2\circ ...\circ G_i\circ T_{n_i})^{-1}(q)\in A_{n_i}\setminus A_{n_{i-1}}$*, entonces* $\eta_i(L_i)\subset\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle$,
(d') Si i *es par y* $(G_1\circ G_2\circ ...\circ G_i\circ R_{n_i})^{-1}(q)\in A_{n_i}\setminus A_{n_{i-1}}$*, entonces* $\eta_i(L_i)\subset\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$.

Demostración. Definimos para cada $i\in\mathbb{N}$ un homeomorfismo $\psi_i: A_{n_i}\to L_i$ de la siguiente manera

$$\psi_i(q)=\begin{cases}(G_1\circ G_2\circ ...\circ G_i\circ T_{n_i})(q), & \text{si } i \text{ es impar,}\\ (G_1\circ G_2\circ ...\circ G_i\circ R_{n_i})(q), & \text{si } i \text{ es par.}\end{cases}$$

Como por el Lema 2.26. T_i, R_i son encajes para toda $i\in\mathbb{N}$ y G_j es inyectiva, y continua para toda $j\in\mathbb{N}$, (Lema 2.28 (iii)) tenemos que ψ_i es una función continua e inyectiva. Por la Definición 2.31, $L_i=\psi_i(A_{n_i})$ para toda $i\in\mathbb{N}$. Por tanto ψ_i es un homeomorfismo.

Sea $q\in L_i$, de manera que existe un único $q'\in A_{n_i}$ tal que $\psi_i(q')=q$ ó $q'=\psi_i^{-1}(q)$.

Por la Proposición 2.34, existe una función σ que depende de q' y que cumple lo siguiente:

(i) $\sigma|\,\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle}$ (es decir $\sigma(x)=x$ para toda $x\in\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle$),
(ii) $|\pi_1(p)-\pi_1(\sigma(p))|\leq 2$ para toda $p\in A_n$,
(iii) Si $q\in A_{n-1}$, entonces $\sigma^{-1}(\Theta)\cap\langle\langle q,a_n\rangle\rangle\neq\emptyset$ y si s es el primer punto en $\langle\langle q,a_n\rangle\rangle\cap\sigma^{-1}(\Theta)$ (tomando el orden natural de A_n de Θ a a_n), entonces $\sigma(\langle\langle\langle q,s\rangle\rangle\rangle)\subset\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle$ y $\sigma(a_n)=a_n$,
(iv) si $q\in A_n\setminus A_{n-1}$, entonces $\sigma(A_n)\subset\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle$.

Definimos $\eta_i: L_i\to L_i$ como $\eta_i=\psi_i\circ\sigma\circ\psi_i^{-1}$

Sea i un número impar, veamos que (a), (c) y (d) se cumplen.

Notemos que para toda i impar $\psi_i(\Theta)=\Theta$ y $\psi_i(a_{n_i})=(1,0)$ (Lema 2.26 (i) y Lema 2.28 (iii)). Como $\psi_i^{-1}(\Theta)=\Theta$ y $\psi_i^{-1}(q)=q'$, tenemos que $\psi_i^{-1}\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle=\langle\langle\Theta,q'\rangle\rangle\subset A_{n_i}$.

(a) Sea $p \in \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle \subset L_i$ veremos que $\eta_i(p) = p$. Sea p' el único punto de A_{n_i} tal que $\psi_i^{-1}(p) = p'$, entonces $p' \in \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle \subset A_{n_i}$ como $\sigma| \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\Theta,q'\rangle\rangle}$, $\sigma(p') = p'$, por tanto $\eta_i(p) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(p) = \psi_i \circ \sigma(p') = \psi_i(p') = p$.

De modo que $\eta_i(p) = p$ para todo $p \in \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y por tanto $\eta_i| \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle}$.

(c) Supongamos ahora que $\psi_i^{-1}(q) = q' \in A_{n_i-1}$. Como $\psi_i(\Theta) = \Theta$, $\psi_i(a_{n_i}) = (1,0)$ y $\psi_i(q') = q$ tenemos que $\psi_i(\langle\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle \subset L_i$.

Veamos que $\eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$. Sabemos que $\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle \cap \sigma^{-1}(\Theta) \neq \emptyset$. Sea $z \in \langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle$ tal que $\sigma(z) = \Theta$, consideremos $\psi_i(z) = y$ como $\in \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, veamos que $y \in \eta_i^{-1}(\Theta)$.

Como $y \in \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_i(y) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(y) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(\psi_i(z)) = \psi_i \circ \sigma(z) = \psi_i(\Theta) = \Theta$, tenemos que $y \in \eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$.

Sea p el primer punto de $\eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, en el orden natural de q a $(1,0)$. Veremos que $\eta_i(\langle\langle\langle q,p\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_i((1,0)) = (1,0)$.

Sea $p' = \psi_i^{-1}(p)$, veremos que p' es el primer punto en $\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle \cap \sigma^{-1}(\Theta)$ (en el orden natural de q' a a_{n_i}). Supongamos que existe un $p'' < p'$ tal que $\sigma(p'') = \Theta$, como $p'' < p'$ y $\psi_i(\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle = \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, tenemos que $\psi_i(p'') < \psi_i(p') = p$ y $\eta_i(\psi_i(p'')) = \Theta$, entonces $\psi_i(p'') \in \eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, lo cual es una contradicción.

Por (iii) de la Proposición 2.34, tenemos que $\sigma(\langle\langle q', p'\rangle\rangle \subset \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle$ y $\sigma(a_{n_i}) = a_{n_i}$. De modo que $\eta_i(\langle\langle\langle q,p\rangle\rangle\rangle) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(\langle\langle\langle q,p\rangle\rangle\rangle) = \psi_i \circ \sigma(\langle\langle q', p'\rangle\rangle) \subset \psi_i(\langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle) = \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_i((1,0)) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}((1,0)) = \psi_i \circ \sigma(a_{n_i}) = \psi_i(a_{n_i}) = (1,0)$, y el inciso (c) queda demostrado.

(d) Ahora supongamos que $\psi_i^{-1}(q) = q' \in A_{n_i} \setminus A_{n_i-1}$, entonces $\sigma(A_{n_i}) \subset \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle$ y como $\psi_i(\langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle) = \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$, tenemos que si $p \in L_i$, entonces $\eta_i(p) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(p) = \psi_i(\sigma(\psi_i^{-1}(p))) \subset \psi_i(\langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle = \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$, por tanto $\eta_i(L_i) \subset \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y el inciso (d) queda demostrado.

Ahora supongamos que i es un entero par y vamos a demostrar los incisos (a'), (c') y (d').

Notemos que como $\eta_i = G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i \circ R_{n_i}$, y por el Lema 2.26 (i), $R_{n_i}(\Theta) = (n_i, 0)$ y por el Lema 2.28 (iii), $G_i(n_i, 0) = (n_{i-1}, 0)$ para toda i, entonces $\psi_i(\Theta) = (1,0)$ y $\psi_i(a_{n_i}) = \Theta$.

(a') Sea $q' = \psi_i^{-1}(q)$, entonces como ψ_i^{-1} es un homeomorfismo tenemos que $\psi_i^{-1}((1,0)) = \Theta$, entonces $\psi_i^{-1}(\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle) = \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle \subset A_{n_i}$. Sea $p \in \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, entonces $\psi_i^{-1}(p) \in \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle$, entonces como $\sigma| \langle\langle\Theta, q'\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\Theta,q'\rangle\rangle}$ tenemos que $\sigma(\psi_i^{-1}(p)) = \psi_i^{-1}(p)$. Por tanto $\eta_i(p) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(p) = \psi_i(\psi_i^{-1}(p)) = p$, por lo que $\eta_i| \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle}$.

(c') Si $\psi_i^{-1}(q) = q' \in A_{n_i-1}$. Como $\psi_i(\Theta) = (1,0)$ y $\psi_i(a_{n_i}) = \Theta$ y $\psi_i(q') = q$, tenemos que $\psi_i(\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle) = \langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle \subset L_i$.

Veamos que $\eta_i^{-1}((1,0)) \cap \langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$. Sabemos que $\sigma^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle \neq \emptyset$, sea $z \in \langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle$ tal que $\sigma(z) = \Theta$. Como $\psi_i(\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle) = \langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle$, entonces $\psi_i(z) \in \langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle$. Ahora $\eta_i(\psi_i(z)) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(\psi_i(z)) = \psi_i(\sigma(z)) = \psi_i(\Theta) = (1,0)$. De modo que $\psi_i(z) \in \eta_i^{-1}((1,0))$ y por tanto $\eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$.

Ahora sea p el primer punto en $\eta_i^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle$ tomando el orden natural en $\langle\langle\langle q, \Theta\rangle\rangle\rangle$ de q a Θ, veamos que $\eta_i(\langle\langle\langle q, p\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle (1,0), q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_i(\Theta) = \Theta$. De igual manera como probamos el inciso (c) es fácil ver que $\psi_i^{-1}(p)$ es el primer punto en $\sigma^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle$ en el orden natural en $\langle\langle q', a_{n_i}\rangle\rangle$ de q' a a_{n_i}. Con lo que tenemos que $\sigma(\langle\langle q', \psi_i^{-1}(p)\rangle\rangle) \subset \langle\langle \Theta, q'\rangle\rangle$ y $\sigma(a_{n_i}) = a_{n_i}$ de donde obtenemos que $\eta_i(\langle\langle\langle q, p\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle (1,0), q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_i(\Theta) = \Theta$ y el inciso (c') queda demostrado.

(d') Sea $\psi_i^{-1}(q) = q' \in A_{n_i} \setminus A_{n_i-1}$, entonces $\sigma(A_{n_i}) \subset \langle\langle \Theta, q'\rangle\rangle$. Como $\psi_i(\langle\langle \Theta, q'\rangle\rangle) = \langle\langle\langle (1,0), q\rangle\rangle\rangle$ tenemos que si $p \in L_i$, entonces $\eta_i(p) = \psi_i \circ \sigma \circ \psi_i^{-1}(p) = \psi_i(\sigma(\psi_i^{-1}(p))) \subset \psi_i(\langle\langle \Theta, q'\rangle\rangle) = \langle\langle\langle (1,0), q\rangle\rangle\rangle$. Por tanto $\eta_i(L_i) \subset \langle\langle\langle (1,0), q\rangle\rangle\rangle$ y el inciso (d') queda demostrado.

(b) Ahora probaremos el inciso (b). Sea $p \in L_i$ y $\psi_i^{-1}(p) = p' \in A_{n_i}$. Por la Proposición 2.34 (ii) $|\pi_1(p') - \pi_1(\sigma(p'))| < 2$, y por Lema 2.26 (iii), tenemos que $|\pi_1(T_{n_i}(p')) - \pi_1(T_{n_i}(\sigma(p')))| < 2$ y $|\pi_1(R_{n_i}(p')) - \pi_1(R_{n_i}(\sigma(p')))| < 2$, entonces existe $k \in \{0, 1, 2, ..., n_i - 3\}$ tal que $T_{n_i}(p')$, $T_{n_i}(\sigma(p'))$, $R_{n_i}(p'), \in R_{n_i}(\sigma(p')) \in [k, k+3] \times [-1, 1]$, como por el Lema 2.28 (iv) $\operatorname{diam}((G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([j-1, j] \times [-1, 1]) < \frac{1}{2^{i+1}}$ entonces $\operatorname{diam}((G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)([k, k+3] \times [-1, 1]) < \frac{3}{2^{i+1}}$, de modo que $d((G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(T_{n_i}(p')), (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(T_{n_i}(\sigma(p')))) < \frac{3}{2^{i+1}}$ y $d((G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(R_{n_i}(p')), (G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i)(R_{n_i}(\sigma(p')))) < \frac{3}{2^{i+1}}$, pero $\psi_i^{-1}(p) = p'$ y

$$\psi_i = \begin{cases} G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i \circ T_{n_i}, & \text{si } i \text{ es impar,} \\ G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_i \circ R_{n_i}, & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

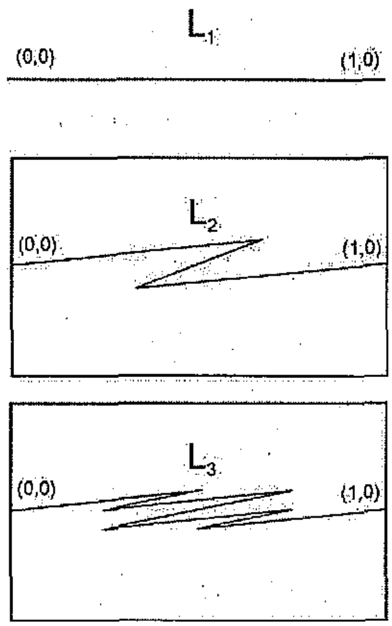
De modo que $d(\psi_i(\psi_i^{-1}(p)), \psi_i(\sigma(\psi_i^{-1}(p)))) < \frac{3}{2^{i+1}}$ con lo que obtenemos que $d(p, \eta_i(p)) < \frac{3}{2^{i+1}}$ y (b) queda demostrado.

Con esto terminamos la prueba del lema.

■

2.3.2 Una compactación con la propiedad RNT.

Para construir este ejemplo tomamos en cuenta los arcos L_n de la Definición 2.31.



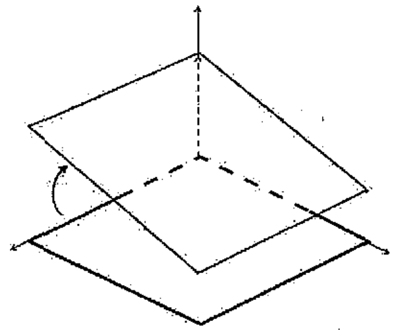
y definimos la siguiente función

Definición 2.36 *Para cada $n \geq 0$ consideremos el plano $\mathbb{Z}_n$ en $\mathbb{R}^3$ de finido por la igualdad:*

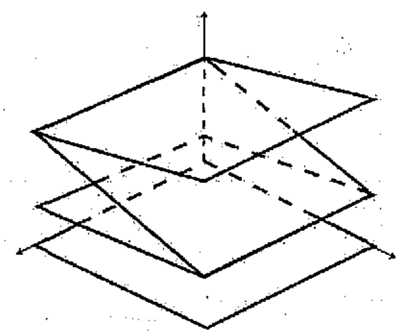
$$z_n = \begin{cases} x(\frac{1}{2^{n+1}}) + (1-x)(\frac{1}{2^n}), & si\ n\ es\ impar, \\ x(\frac{1}{2^n}) + (1-x)(\frac{1}{2^{n+1}}), & si\ n\ es\ par. \end{cases}$$

y definamos la función $\kappa_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está dada por: $\kappa_n(x,y) = (x,y,z_n)$.

En particular, si el rectángulo $[0,1] \times [-1,1]$ va a dar a un rectángulo en el plano $\mathbb{Z}_n$ de la siguiente manera.



En general, la unión $\bigcup\{\kappa_n([0,1] \times [-1,1]) : n \in \mathbb{N}\}$ se ve de la siguiente manera.



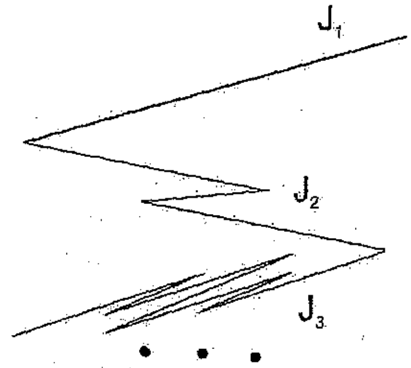
Ahora sí, restringimos κ_n a los arcos L_n y obtenemos lo siguiente:

Definición 2.37 *Para cada $n \geq 0$ sea $J_n = \kappa_n(L_n)$*

Lema 2.38 *Para cada $n \geq 0$ la función $\kappa_n|L_n : L_n \to J_n$ es un homeomorfismo y para todo $(x,y) \in L_n$ se cumple que $d((x,y), \kappa_n(x,y)) \leq \frac{1}{2^n}$.*

Demostración. Claramente $k_n|L_n : L_n \to J_n$ es un homeomorfismo y por la manera en que está definido z_n, que es una combinación lineal de $\frac{1}{2^{n+1}}$ y $\frac{1}{2^n}$, se cumple que $z_n \leq \frac{1}{2^n}$. Por tanto si $(x,y) \in L_n$, entonces $d((x,y), \kappa_n(x,y)) = d((x,y,0),(x,y,z_n) \leq \frac{1}{2^n}$.
■

En el siguiente dibujo se muestra como se ve la unión $\bigcup\{\kappa_n(L_n) : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{J_n : n \in \mathbb{N}\}$



Veremos que efectivamente el dibujo muestra la realidad.

Lema 2.39 *Los arcos J_n tienen las siguientes propiedades:*
(i) $J_n \cap J_m \neq \emptyset \Longleftrightarrow |n-m| \leq 1$,

(ii) $J_n \cap J_{n+1} = \begin{cases} \{(1,0,\frac{1}{2^{n+1}})\}, & \textit{si } n \textit{ es par,} \\ \{(0,0,\frac{1}{2^{n+1}})\}, & \textit{si } n \textit{ es impar.} \end{cases}$,

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = Q$.

Demostración. (i) El arco J_n está contenido en el cubo $C_n = [0,1]\times[-1,1]\times[\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}]$ de manera que si $J_n \cap J_m \neq \emptyset$, entonces los cubos $C_n \cap C_m \neq \emptyset$, pero estos cubos sólo se pueden intersectar en los rectángulos $[0,1]\times[-1,1]\times\{a\}$, dónde $a \in \{\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^m},\frac{1}{2^{m+1}}\}$ y esto sólo ocurre si $|n-m| \leq 1$.
(ii) Ahora supongamos que tenemos dos números naturales consecutivos n y m. Recordemos que cuando se definieron los arcos L_n (Definición 2.31) se probó que los arcos L_n cumplen con las siguientes propiedades (Lema 2.32).
(a) $L_n \subset [0,1]\times(-1,1)$ y es un arco con extremos Θ y $(1,0)$
(b) $L_n \cap (\{0\}\times[-1,1]) = \Theta$ y $L_n \cap (\{1\}\times[-1,1]) = (1,0)$.

Como el homeomorfismo $\kappa_n : L_n \to J_n$ no altera las primeras dos coordenadas y la coordenada z alcanza su máximo y su mínimo únicamente en los puntos Θ y $(1,0)$, entonces los únicos puntos de J_n que se encuentran en los rectángulos $[0,1]\times[-1,1]\times\{\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^n}\}$ son $\kappa_n(\Theta)$ y $\kappa_n((1,0))$ pero

$$\kappa_n(\Theta) = \begin{cases} (0,0,\frac{1}{2^n}), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (1,0,\frac{1}{2^n}), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

y

$$\kappa_n((1,0)) = \begin{cases} (1,0,\frac{1}{2^{n+1}}), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (0,0,\frac{1}{2^{n+1}}), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

De modo que J_n es un arco contenido en el cubo C_n cuyos extremos son $(0,0,\frac{1}{2^n})$, $(1,0,\frac{1}{2^{n+1}})$, si n es par y $(1,0,\frac{1}{2^n})$, $(0,0,\frac{1}{2^{n+1}})$, si n es impar. Por lo que si n y m son dos enteros consecutivos entonces $J_n \cap J_m \neq \emptyset$ y si $n < m$, entonces $J_n \cap J_m = J_n \cap J_{n+1} = \begin{cases} \{(1,0,\frac{1}{2^{n+1}})\}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \{(0,0,\frac{1}{2^{n+1}})\}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$.

(iii) Por el Lema 2.33, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \mathcal{Q}$ y por el Lema 2.38 para toda $(x,y) \in L_n$ se tiene que $d((x,y),\kappa_n(x,y)) < \frac{1}{2^n}$, por tanto $H(L_n, J_n) < \frac{1}{2^n}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$ $H(L_n, \mathcal{Q}) < \frac{\varepsilon}{2}$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$ $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para toda $n \geq N$, se tiene que $H(J_n, \mathcal{Q}) \leq H(J_n, L_n) + H(L_n, \mathcal{Q}) < \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} J_n = \mathcal{Q}$

■

Veremos ahora que $X = \overline{(\bigcup\limits_{n\geq 0} J_n)}$ es una compactación métrica del rayo. Para ver esto tenemos que mostrar que $(\bigcup\limits_{n\geq 0} J_n)$ es la imagen continua e inyectiva del rayo $[0,\infty)$, esto lo mostraremos utilizando una serie de resultados auxiliares.

Lema 2.40 *Sea Z un espacio topológico y $g : [0,\infty) \to Z$ una función continua e inyectiva que para toda $n \in \mathbb{N}$ cumple que $g([0,n)) \cap \overline{g([n,\infty))} = \emptyset$. Entonces g es un homeomorfismo en su imagen.*

Demostración. Como g es continua e inyectiva, basta ver que g es abierta en su imagen.

Afirmación 1. Para toda $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $g([0,x)) \cap \overline{g([x,\infty)))} = \emptyset$.

Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [0,n)$, por hipótesis $g([0,n)) \cap \overline{g(([n,\infty))} = \emptyset$ por lo que solamente hay que ver que $g([0,x)) \cap \overline{g([x,n))} = \emptyset$. Primero notemos que $\overline{[x,n)} = [x,n]$ así que por continuidad $g([x,n]) \subset \overline{g([x,n))}$. Ahora como $[x,n]$ es un compacto, $g([x,n])$ también lo es, por tanto $\overline{g([x,n])} = g([x,n])$ y como $\overline{[x,n)} \subset [x,n]$ tenemos que $\overline{g([x,n))} \subset \overline{g([x,n]} = g([x,n])$ de modo que $\overline{g([x,n))} = g([x,n])$ por lo que $g([0,x)) \cap \overline{g([x,n))} = g([0,x)) \cap g([x,n]) = \emptyset$, puesto que la función es inyectiva, y de esta manera la afirmación queda demostrada.

Afirmación 2. La función g es abierta en su imagen.

Para ver esto notemos que los abiertos básicos del rayo $[0,\infty)$ son de la forma $[0,x+\varepsilon)$ o $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ donde $x \in [0,\infty)$ y $\varepsilon > 0$. Veremos que si V es un abierto básico de $[0,\infty)$, entonces $g(V)$ es abierto en su imagen. Esto lo haremos para el caso en que $V = (x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ y el caso en que $V = [0,x+\varepsilon)$ es análogo.

Sea $K = g([0,x-\varepsilon]) \cup \overline{g([x+\varepsilon,\infty))}$. Como por continuidad $g([0,x-\varepsilon]) \subset \overline{g([0,x-\varepsilon))}$ y por compacidad $\overline{g([0,x-\varepsilon))} \subset g([0,x-\varepsilon])$ tenemos que $g([0,x-\varepsilon]) = \overline{g([0,x-\varepsilon))}$ y por tanto $g([0,x-\varepsilon])$ es cerrado en Z. De modo que K es la unión de dos cerrados en Z y por tanto K es cerrado. Sea $U = Z \setminus K$, veremos que $g(V) = U \cap g([0,\infty))$ con lo cual quedará demostrado que $g(V)$ es abierto en su imagen.

$\supseteq$) Sea $z \in U \cap g([0,\infty))$, como $z \in U$, entonces $z \notin K$, por tanto $z \notin g([0,x-\varepsilon]) \cup \overline{g([x+\varepsilon,\infty))}$ de modo que $z \in g((x-\varepsilon,x+\varepsilon)) = g(V)$, por tanto $U \cap g([0,\infty)) \subset g(V)$.

$\subseteq$) Como $g(V) = g((x-\varepsilon,x+\varepsilon))$ veremos que $g(V) \cap K = \emptyset$. Por la inyectividad de g, tenemos que $g([0,x-\varepsilon]) \cap g((x-\varepsilon,x+\varepsilon)) = \emptyset$ y, por la Afirmación 1, tenemos que $g((x-\varepsilon,x+\varepsilon)) \cap \overline{g([x+\varepsilon,\infty))} = \emptyset$. Por tanto $g(V) \cap K = \emptyset$ y $g(V) \subset Z \setminus K = U$. De modo que $g(V) \subset U \cap g([0,\infty))$.

De las dos contenciones obtenemos que $g(V) = U \cap g([0,\infty))$, donde U es abierto en Z y esto es para cualquier abierto básico de $[0,\infty)$, de modo que g es abierta en su imagen y la afirmación queda demostrada.

De modo que g es continua, inyectiva y por la Afirmación 2, g es abierta en su imagen. Por tanto g es homeomorfismo en su imagen y el lema queda demostrado.

■

Vamos ahora a definir una función g de $[0,\infty)$ sobre $\bigcup\limits_{n\geq 0} J_n$ y veremos que cumple con las condiciones del Lema 2.40, de esta manera podremos probar

$\bigcup_{n\geq 0} J_n \simeq [0,\infty)$ con lo cual probaremos que $X = \overline{\bigcup_{n\geq 0} J_n}$ es una compactación métrica del rayo.

Definición 2.41 *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ y como J_n es un arco, podemos definir un homeomorfismo $g_n : [n, n+1] \to J_n$ que cumple que*

$$g_n(n) = \begin{cases} (0,0,\frac{1}{2^n}), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (1,0,\frac{1}{2^n}), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

y

$$g_n(n+1) = \begin{cases} (1,0,\frac{1}{2^{n+1}}), & \text{si } n \text{ es par,} \\ (0,0,\frac{1}{2^{n+1}}), & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Ahora definimos $g : [0,\infty) \to \bigcup_{n\geq 0} J_n$ como $g(x) = g_n(x)$ si $x \in [n, n+1]$.

Veamos que la función g está bien definida. Si $x \in [0,\infty) \setminus \mathbb{N}$ no tenemos ningún problema, ahora sea $x = m \in \mathbb{N}$, entonces $g(x) = g_m(x)$ puesto que $x \in [m, m+1]$ y $g(x) = g_{m-1}(x)$ puesto que $x \in [m-1, m]$. Analizaremos el caso en que m es par, el caso en que m es impar es análogo. Sea m par, entonces $g_m(x) = g_m(m) = (0,0,\frac{1}{2^m})$, ahora como m es par, entonces $m-1$ es impar de modo que $g_{m-1}(x) = g_{m-1}(m) = (0,0,\frac{1}{2^{(m-1)+1}}) = (0,0,\frac{1}{2^m})$. De modo que g está bien definida.

Probaremos una propiedad importante de g y después probaremos que g es un homeomorfismo.

Lema 2.42 *Sean $X = \overline{g([0,\infty))}$ y $R = \overline{g([0,\infty))} \setminus g([0,\infty))$. Entonces $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset [0,1] \times [-1,1] \times \{0\}$, donde los conjuntos B_n son los continuos de la Definición 2.29*

Demostración. Recordemos que $Q = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = \lim_{n\to\infty} B_n$ es un continuo (Definición 2.29 y Lema 2.30). Primero veamos que $R \subset Q$.

($\subseteq$) Sean $p \in R$ y $m \in \mathbb{N}$, veremos que $p \in B_m$. Sea U un abierto en $\mathbb{R}^3$ tal que $p \in U$, entonces $U \cap g([n, n+1]) \neq \emptyset$ para una infinidad de números

$n \in \mathbb{N}$. Como $g([n, n+1]) = J_n$, entonces $U \cap J_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(p) \subset U$. Ahora notemos que la bola $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \subset U$ y $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \cap J_n \neq \emptyset$ para una infinidad de números $n \in \mathbb{N}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ que cumple que

(a) $N > m$,

(b) $\frac{1}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ y,

(c) $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p) \cap J_N \neq \emptyset$.

Sea $z \in J_N \cap B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$. Como $\kappa_N : L_N \to J_N$ es un homeomorfismo, existe $z' \in L_N$ tal que $\kappa_N(z') = z$ y además por el Lema 2.38, $d(\kappa_N(z'), z') < \frac{1}{2^N}$ de modo que $d(z', p) \leq d(z', \kappa_N(z')) + d(z, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, por tanto $z' \in L_N \cap B_\varepsilon(p)$ con lo que tenemos que $L_N \cap B_\varepsilon(p) \neq \emptyset$ pero como $L_N \subset B_N$ (Definición 2.31, Lema 2.32) y $B_N \subset B_m$ (Definición 2.29, Lema 2.30), entonces $B_\varepsilon(p) \cap B_m \neq \emptyset$ y por tanto $U \cap B_m \neq \emptyset$. Esto es para todo abierto U en $\mathbb{R}^3$. De modo que $p \in \overline{B_m}$. Pero B_m es cerrado, por lo que $p \in B_m$ y esto ocurre para toda $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $p \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$, por lo que $R \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Sea $p \in \mathcal{Q}$. Por el Lema 2.39 (iii), $\lim\limits_{n \to \infty} J_n = \mathcal{Q}$, entonces $p \in \lim\limits_{n \to \infty} J_n$, de manera que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $p_n \in J_n$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$, por lo cual existe $x_n \in [n, n+1]$ tal que $g_n(x_n) = g(x_n) = p_n$, de manera que $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} p_n = p$, entonces $p \in \overline{g([0, \infty))}$.

Veamos que $p \notin g([0, \infty))$, supongamos por el contrario que $p \in g([0, \infty))$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, y $x \in [m, m+1]$ tal que $g(x) = p$. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n=m+2}^{\infty}$, entonces $g(x_n) \in g([m+2, \infty)$ para toda $n \geq m+2$ y $\overline{g([m+2, \infty))} \cap g([m, m+1] = \emptyset$, por tanto $\overline{g([m+2, \infty))} \cap \{p\} = \emptyset$, lo cual es una contradicción pue para toda $n \geq m+2$, $p_n \in \overline{g([m+2, \infty))}$ y por tanto $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = p \in \overline{g([m+2, \infty))}$. Esta contradicción, nace de suponer que $p \in g([0, \infty))$, por tanto $p \in \overline{g([0, \infty))} \backslash g([0, \infty)) = R$, de manera que $\mathcal{Q} \subset R$.

De las dos contenciones obtenemos que $\mathcal{Q} = R$.

Ahora como $B_n \subset [0,1] \times [-1,1] \times \{0\}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n \subset [0,1] \times [-1,1] \times \{0\}$ y el lema está demostrado.

■

Lema 2.43 *La función* $g : [0, \infty) \to \bigcup\limits_{n \geq 0} J_n$ *definida como* $g(x) = g_n(x)$ *si* $x \in [n, n+1]$ *es un homeomorfismo de* $[0, \infty)$ *en* $\bigcup\limits_{n \geq 0} J_n$.

Demostración. Probaremos que g es continua, inyectiva, suprayectiva y abierta.

Afirmación 1. La función g es continua e inyectiva.

Como g es continua en cada cerrado de una familia localmente finita y coincide en las intersecciones, entonces g es una función continua. Para ver que g es inyectiva, sean $x, y \in [0, \infty)$, $x \neq y$. Si existe $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ tal que $x, y \in [n, n+1]$, entonces $g(x) = g_n(x)$ y $g(y) = g_n(y)$ y como g_n es un homeomorfismo de $[n, n+1]$ en J_n, entonces $g(x) \neq g(y)$. Ahora si para toda n se tiene que $x, y \notin [n, n+1]$ y $x < y$, entonces $x \in [m, m+1]$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y $y \in (m+1, \infty)$ de modo que $g(x) = g_m(x) \in J_m$ y $g(y) \in \bigcup_{n \geq m+1} J_n$.

Si $g(y) \in J_n$ con $n > m+1$, entonces por el Lema 79, $J_n \cap J_m = \emptyset$ y por tanto $g(x) \neq g(y)$. Ahora si $n = m+1$, entonces $g(y) \in J_m$ menos sus extremos pues uno de sus extremos es $g(m+1)$ y $y \neq m+1$ y el otro está en J_{m+2} y este caso ya lo analizamos. De modo que $g(x) \neq g(y)$ pues $J_n \cap J_m = J_n \cap J_{n+1}$ se intersectan solamente en uno de sus extremos (Lema 2.39). De manera que si $x \neq y$, entonces $g(x) \neq g(y)$ y por tanto g es inyectiva.

Afirmación 2. La función $g : [0, \infty) \to \bigcup_{n \geq 0} J_n$ es suprayectiva.

Sea $p \in \bigcup_{n \geq 0} J_n$, entonces $p \in J_n$ para alguna $n \geq 0$, como $g_n : [n, n+1] \to J_n$, es un homeomorfismo, para cada n, tenemos que existe $x \in [n, n+1]$ tal que $g_n(x) = p$, entonces $g(x) = g_n(x) = p$. Por tanto existe $x \in [0, \infty)$ tal que $g(x) = p$, lo que prueba que g es una función suprayectiva.

Afirmación 3. La función g es abierta

Como g es continua, inyectiva y suprayectiva, por el Lema 2.40, sólo es necesario ver que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $g([0, n)) \cap \overline{g([n, \infty))} = \emptyset$.

Recordemos que $J_n \in [0,1] \times [-1,1] \times [\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ y que el único punto de intersección de $J_n \cap J_{n+1} = \{g(n)\}$ (Lema 2.39). Entonces $g([0,n]) \cap \overline{g([n, \infty))} \subset (g([0, n-1]) \cup g([n-1, n))) \cap (g([n, n+1]) \cup \overline{g([n+1, \infty))}) \subset ((([0,1] \times [-1,1] \times [\frac{1}{2^{n-1}}, 1]) \cup (J_{n-1} \backslash \{g(n)\}) \cap (J_n \cup ([0,1] \times [-1,1] \times [0, \frac{1}{2^{n+1}}]) \subset (J_{n-1} \backslash \{g(n)\}) \cap J_n = \emptyset$. Por tanto $g([0, n)) \cap \overline{g([n, \infty))} = \emptyset$ y esto es para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que g es abierta.

De modo que por las Afirmaciones 1, 2 y 3 hemos probado que g es un homeomorfismo de $[0,\infty)$ en $\bigcup_{n\geq 0} J_n$.

■

Hemos probado entonces que $[0,\infty) \simeq \bigcup_{n\geq 0} J_n$. De modo que $X = \overline{\bigcup_{n\geq 0} J_n}$ es una compactación métrica del rayo $[0,\infty)$ pues $X = \overline{\bigcup_{n\geq 0} J_n} = \overline{g([0,\infty))}$. Utilizando el Lema 2.42, vemos que si R es el residuo de la compactación, entonces $R \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, donde los conjuntos B_n son los continuos de la Definición 2.29. Ahora probaremos que X tiene la propiedad RNT.

Teorema 2.44 *Sea $X = \overline{\bigcup_{n\geq 0} J_n} = \overline{g([0,\infty))}$ con residuo R, entonces X tiene la propiedad RNT.*

Demostración. Esta demostración es larga y técnica, por lo que la vamos a ir probando por partes.

Afirmación 1. La proyección $f : \mathbb{R}^3 \to R^2$ dada por $f(x,y,z) = (x,y)$ cumple con que $f|J_n : J_n \to L_n$ es un homeomorfismo para toda $n \geq 0$ y además cumple que si $p \in J_n$, entonces $d(p, f(p)) < \frac{1}{2^n}$.

La función κ_n se definió como $\kappa_n(x,y) = (x,y,z_n)$ (Definición 2.36) y J_n es un arco que se definió como $\kappa_n(L_n) = J_n$. De modo que si $(x,y) \in L_n$, se tiene que $\kappa_n(x,y) = (x,y,z_n) \in J_n$ y $f(\kappa_n(x,y)) = f((x,y,z_n)) = (x,y)$ por lo que $(f\circ\kappa_n)|L_n : L_n \to L_n$ es la identidad de lo que conluimos que $f|J_n = f|\kappa_n(L_n)$ es un homeomorfismo de J_n en L_n. De hecho $f|J_n$ es la inversa de la función κ_n para toda $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 2.38 se cumple que para toda $q \in L_n$, $d(q, \kappa_n(q)) \leq \frac{1}{2^n}$. Sea $p \in J_n$, entonces existe $q \in L_n$ tal que $\kappa_n(q) = p$, entonces $d(p, f(p)) = d(\kappa_n(q), f(\kappa_n(q))) = d(\kappa_n(q), q) \leq \frac{1}{2^n}$. Con esto la afirmación queda demostrada.

Afirmación 2. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una $\frac{3}{2^m}$-retracción $\rho_m : \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R \to J_m$.

Para probar esta afirmación definamos $\rho_m : \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R \to J_m$ como $\rho_m = \kappa_m \circ r_{m+1} \circ f$. Donde f es la función de la Afirmación 1, $r_{m+1} : B_{m+1} \to L_m$ es la $\frac{1}{2^{m+1}}$- retracción del Lema 2.33 y $\kappa_m : L_m \to J_m$ es el homeomorfismo de la Definición 2.36.

Como por el Lema 2.42, $R \subset \bigcap_{n\geq 0} B_n \subset [0,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2$ tenemos que $f(R) = R$ y como por la Afirmación 1, $f(J_n) = L_n$, entonces $f(\bigcup_{n\geq m} J_n \cup R) = \bigcup_{n\geq m} L_n \cup R$. como por el Lema 2.32 (iv), $L_n \subset B_{n+1}$, tenemos entonces que $\bigcup_{n\geq m} L_n \cup R \subset \bigcup_{n\geq m} B_{n+1} \cup R$.

Como por el Lema 2.42, $R \subset \bigcap_{n\geq 0} B_n$, entonces $R \subset B_n$ para toda n y como por el Lema 2.30, la sucesión $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión anidada de continuos tenemos que $\bigcup_{n\geq m} B_{n+1} \cup R = B_{m+1}$ de modo que $f(\bigcup_{n\geq m} J_n \cup R) \subset B_{m+1}$. Con esto hemos probado que ρ_m es una composición bien definida de tres funciones continuas, y por tanto es continua.

Ahora verificaremos que $\rho_m : \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R \to J_m$ es una retracción. Sea $q \in J_m$, $q = (x,y,z)$, entonces $f(q) = (x,y) \in L_m$, $r_{m+1}(f(q)) = f(q)$ pues r_{m+1} es una retracción de B_{m+1} en L_m y $\kappa_m(r_{m+1}(f(q)) = \kappa_m(f(q)) = q$, pues por la Afirmación 1, κ_m es la inversa de $f|J_m$. De modo que $\rho_m(q) = \kappa_m \circ r_{m+1} \circ f(q) = q$.

Veamos ahora que $\rho_m : \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R \to J_m$ es una $\frac{3}{2^m}$-retracción. Sea $p \in \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R$, entonces $f(p) \in B_{m+1}$, si $p \in \bigcup_{n\geq m} J_n$, entonces, por la Afirmación 1, $d(p, f(p)) \leq \frac{1}{2^m}$ y si $p \in R$, entonces $f(p) = p$. Por tanto, para toda $p \in \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R$, se tiene que $d(p, f(p)) \leq \frac{1}{2^m}$. Como $r_{m+1} : B_{m+1} \to L_{m+1}$ es una $\frac{1}{2^{m+1}}$-retracción se tiene entonces que $d(f(p), r_{m+1}(f(p))) \leq \frac{1}{2^{m+1}}$, y $r_{m+1}(f(p)) \in L_m$. Ahora $\kappa_m : L_m \to J_m$ es un homeomorfismo que cumple que $d(r_{m+1}(f(p)), \kappa_m(r_{m+1}(f(p)))) \leq \frac{1}{2^m}$. De modo que para toda $p \in \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R$ se tiene que $d(p, \rho_m(p)) \leq d(p, f(p)) + d(f(p), r_{m+1}(f(p))) + d(r_{m+1}(f(p)), \kappa_m(r_{m+1}(f(p)))) \leq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^m} < \frac{3}{2^m}$.

Por tanto $\rho_m : \bigcup_{n\geq m} J_n \cup R \to J_m$ es una $\frac{3}{2^m}$-retracción y la Afirmación 2 queda demostrada.

Afirmación 3. Si T es un árbol, $T \subset X$ y $H(T,X) < \delta$, con $\delta < \frac{1}{8}$, entonces $T \cap J_0 \neq \emptyset$, existe $m \geq 2$ tal que $T = (J_0 \cap T) \cup (\bigcup_{n=1}^{m} J_n) \cup (J_{m+1} \cap T)$ y $J_{m+1} \nsubseteq T$.

Como $(1,0,1) \in J_0$, y $B_{\frac{1}{8}}((1,0,1)) \subset J_0$, tenemos que $J_0 \cap T \neq \emptyset$. Por el Lema 49, como $J_0 \cap T \neq \emptyset$, entonces $T \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} J_n$. De modo que $R \cap T = \emptyset$. Elegimos un punto $x \in R$. Como $J_0 \cup J_1 \cup J_2 \subset [0,1] \times [-1,1] \times [\frac{1}{8}, 1]$, $x \in R \subset [0,1] \times [-1,1] \times \{0\}$ y $B_{\frac{1}{8}}(x) \cap T \neq \emptyset$, podemos tomar un punto $p \in B_{\frac{1}{8}}(x) \cap T \subset (\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n) \setminus (J_0 \cup J_1 \cup J_2)$, por lo que existe $m \geq 3$ tal que $p \in J_m \cap T$. Entonces $J_1 \cup J_2 \subset T$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_m \subset T$ y $J_{m+1} \cap T \neq J_{m+1}$. Entonces $T = (J_0 \cap T) \cup (\bigcup_{n=1}^{m} J_n) \cup (J_{m+1} \cap T)$, y como $J_1 \cup J_2 \subset T$, entonces $m \geq 2$. Esto termina la prueba de la Afirmación 3.

Afirmación 4. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una $\frac{3}{2^m}$-retracción $\sigma : X \to J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_m$.

Consideremos la $\frac{3}{2^m}$-retracción $\rho_m : \bigcup_{n \geq m} J_n \cup R \to J_m$ de la Afirmación 2. Definimos σ por:

$$\sigma(p) = \begin{cases} p, & \text{si } p \in J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_m, \\ \rho_m(p), & \text{si } p \in \bigcup\limits_{n \geq m} J_n \cup R. \end{cases}$$

Claramente σ es una retracción y como ρ_m es una $\frac{3}{2^m}$-retracción, obtenemos que σ también es una $\frac{3}{2^m}$-retracción.

Estamos listos para probar que X tiene la propiedad *RNT*. Por la Afirmación 4 sabemos que X puede ser retraido en una unión del tipo $J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_m$, moviendo poco. Ahora nos falta ver que una unión de este tipo puede ser retraida a sus subárboles grandes, moviendo poco, por supuesto.

Empecemos pues tomando $\varepsilon > 0$. Tenemos que encontrar $\delta > 0$ tal que si T es un árbol de X y $H(T, X) < \delta$, entonces X se puede ε-retraer a T. Sea $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4}$. Consideremos $\delta = \min\{\frac{3}{2^{i-1}}, \frac{1}{8}\}$.

Sea T un árbol de X tal que $H(T, X) < \delta$. Como δ satisface las condiciones de la Afirmación 3, entonces $T = (J_0 \cap T) \cup (\bigcup_{n=1}^{m} J_n) \cup (J_{m+1} \cap T)$, para alguna $m \geq 2$. Sea $p \in R$, como $p \notin T$ y $H(T, X) < \delta$, existe $t \in T$ tal que $d(t, p) < \delta < \frac{3}{2^{i-1}} < \frac{1}{2^{i-2}}$. De modo que $B_\delta(p) \cap (J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{i-1}) = \emptyset$.

Por lo que $J_1 \cup ... \cup J_{i-1} \subset T$. Por lo que tenemos que $i - 1 \leq m$. Es decir, $i \leq m + 1$.

Por la Afirmación 4 tenemos una $\frac{3}{2^{m+1}}$-retracción $\sigma : X \to J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1}$. Como $\frac{3}{2^{m+1}} < \frac{3}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4}$, ahora sólo necesitamos una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción $r : J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1} \to T$.

Notemos que $J_0 \cap T$ es de la forma $J_0 \cap T = \langle\langle\langle w, (\Theta, \frac{1}{2})\rangle\rangle\rangle$.

Caso A. Supongamos primero que $m+1$ es impar. En este caso $J_{m+1} \cap T$ es de la forma $J_{m+1} \cap T = \langle\langle\langle (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle$. Entonces T es de la forma:

$$T = \langle\langle\langle w, (\Theta, \tfrac{1}{2})\rangle\rangle\rangle \cup \bigcup_{n=1}^{m} J_n \cup \langle\langle\langle (\Theta, \tfrac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle.$$

Por la Afirmación 1, la proyección f en el plano XY satisface que $f|J_{m+1} : J_{m+1} \to L_{m+1}$ es un homeomorfismo y, para toda $p \in J_{m+1}$, $d(p, f(p)) < \frac{1}{2^{m+1}}$. Entonces la imagen bajo f del subarco $\langle\langle\langle (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle$ de J_{m+1} es un subarco de L_{m+1} que une a Θ con el punto $f(s)$. Sea $q = f(s)$. Así que $f(\langle\langle\langle (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle) = \langle\langle\langle \Theta, q\rangle\rangle\rangle$.

Vamos a usar la función $\eta_{m+1} : L_{m+1} \to L_{m+1}$ del Lema 2.35, que depende del punto q. Recordemos que estamos considerando el caso en que $m + 1$ es impar, así que η_{m+1} satisface las siguientes propiedades:
(a) $\eta_{m+1}| \langle\langle\langle \Theta, q\rangle\rangle\rangle = Id_{\langle\langle\langle \Theta, q\rangle\rangle\rangle}$,
(b) $d(p, \eta_{m+1}(p)) \leq \frac{3}{2^{m+2}}$ para cada $p \in L_{m+1}$,
(c) si $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{m+1} \circ T_{n_{m+1}})^{-1}(q) \in A_{n_m}$, entonces $\eta_{m+1}^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$ y si u es el primer punto en $\eta_{m+1}^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle\rangle$ (en el orden natural en $\langle\langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle\rangle$ de q a $(1,0)$), entonces $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle q, u\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle \Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_{m+1}((1,0)) = (1,0)$.
(d) si $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{m+1} \circ T_{n_{m+1}})^{-1}(q) \in A_{n_{m+1}} \setminus A_{n_m}$, entonces $\eta_{m+1}(L_{m+1}) \subset \langle\langle\langle \Theta, q\rangle\rangle\rangle$.

Subcaso A.1. $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{m+1} \circ T_{n_{m+1}})^{-1}(q) \in A_{n_m}$.

En este caso $\eta_{m+1}^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$ y si z es el primer punto en $\eta_{m+1}^{-1}(\Theta) \cap \langle\langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle\rangle$ (en el orden natural en $\langle\langle\langle q, (1,0)\rangle\rangle\rangle$ de q a $(1,0)$), entonces $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle q, z\rangle\rangle\rangle) \subset \langle\langle\langle \Theta, q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_{m+1}((1,0)) = (1,0)$. De modo que el punto z tiene las siguientes propiedades, $z \geq q$ en el orden natural de

L_{m+1} de Θ a $(1,0)$, $\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle \subset \langle\langle\langle\Theta,z\rangle\rangle\rangle$, $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle\Theta,z\rangle\rangle\rangle) = \langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle$, $\eta_{m+1}(z) = \Theta$ y $\eta_{m+1}((1,0)) = (1,0)$, por lo que $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle z,(1,0)\rangle\rangle\rangle) = L_{m+1}$.

En este caso, definimos $r : J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1} \to T$ de la siguiente manera.

$$r(p) = \begin{cases} w, & \text{si } p \in (J_0 \backslash T) \cup \{w\}, \\ p, & \text{si } p \in \langle\langle\langle w, (\Theta, \frac{1}{2})\rangle\rangle\rangle \cup \bigcup\limits_{n=1}^{m} J_n, \\ (\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p), & \text{si } p \in J_{m+1} \text{ y } f(p) \in \langle\langle\langle \Theta, z\rangle\rangle\rangle, \\ (\kappa_m \circ r_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p), & \text{si } p \in J_{m+1} \text{ y } f(p) \in \langle\langle\langle z, (1,0)\rangle\rangle\rangle, \end{cases}$$

donde $r_{m+1} : B_{m+1} \to L_m$ es la $\frac{1}{2^{m+1}}$-retracción del Lema 2.33.

Recordemos también que $\kappa_m : L_m \to J_m$ es el homeomorfismo de la Definición 2.36.

Veamos que r está bien definida.

Como $f|J_{m+1} : J_{m+1} \to L_{m+1}$ es un homeomorfismo, $\eta_{m+1} : L_{m+1} \to L_{m+1}$ es una función continua y $\kappa_{m+1} : L_{m+1} \to J_{m+1}$ es un homeomorfismo, entonces $\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f$ está bien definida. Ahora, como $L_{m+1} \subset B_{m+1}$ (Lema 2.32, (iv)), $r_{m+1} : B_{m+1} \to L_m$ y $\kappa_m : L_m \to J_m$ es un homeomorfismo, entonces tenemos lo siguiente.

Si $p \in J_m \cap J_{m+1}$, entonces $p = (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}})$, así que $f(p) = \Theta$ y $(\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p) = \kappa_{m+1}(\eta_{m+1}(\Theta)) = \kappa_{m+1}(\Theta) = (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}) = p$.

Si $f(p) = z$, $(\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p) = \kappa_{m+1}(\eta_{m+1}(z)) = \kappa_{m+1}(\Theta) = (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}})$. Mientras que $(\kappa_m \circ r_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p) = \kappa_m(r_{m+1}(\eta_{m+1}(z))) = \kappa_m(r_{m+1}(\Theta)) = \kappa_m(\Theta) = (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}})$ (m es par).

Para ver que la imagen de r está contenida en T, revisemos otra vez las cuatro formas que definen a r. En la primera basta observar que $w \in T$, para la segunda basta observar que el conjunto respectivo está contenido en T, para la cuarta notemos que el contradominio de κ_m es $J_m \subset T$. Finalmente, notemos que $\kappa_{m+1}(\eta_{m+1}(\langle\langle\langle\Theta,z\rangle\rangle\rangle)) = \kappa_{m+1}(\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle)$, y como es un homemorfismo tal que $\kappa_{m+1}(\Theta) = (\Theta, \frac{1}{2^{m+1}})$ y $\kappa_{m+1}(q) = s$, concluimos que $\kappa_{m+1}(\langle\langle\langle\Theta,q\rangle\rangle\rangle) = \langle\langle\langle(\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle = J_{m+1} \cap T$. Con todo esto podemos concluir que la imagen de r está contenida en T.

Por tanto r está bien definida.

Como $J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1}$ es un arco y r está definida continuamente en los subarcos que lo componen, podemos concluir que r es continua.

Para ver que r es una retracción, tomemos un elemento $p \in T$. Como $T = \langle\langle\langle w, (\Theta, \frac{1}{2})\rangle\rangle\rangle \cup \bigcup_{n=1}^{m} J_n \cup \langle\langle\langle(\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle$, si p está en uno de los dos primeros uniendos, claramente $r(p) = p$. Ahora supongamos que $p \in \langle\langle\langle(\Theta, \frac{1}{2^{m+1}}), s\rangle\rangle\rangle$. Entonces $f(p) \in \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle \subset \langle\langle\langle\Theta, z\rangle\rangle\rangle$, de manera que $r(p) = \kappa_{m+1}(\eta_{m+1}(f(p)))$. Por la propiedad (a) de η_{m+1}, $r(p) = \kappa_{m+1}(f(p)) = p$. Por tanto r es una retracción.

Sólo nos falta ver que r es una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción. Como $\operatorname{diam}(J_0 \setminus T) < \delta < \frac{3}{2^{i-1}} < \frac{3}{2^m}$, y como para toda $x \in J_0 \setminus T$, $r(x) = w$, entonces $d(x, r(x)) = d(x, w) < \frac{3}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4} < \frac{3\varepsilon}{4}$.

Como r es retracción, para toda $p \in T$, tenemos que $r(p) = p$, por lo que $d(p, r(p)) = 0 < \frac{3\varepsilon}{4}$.

Ahora sea $p \in J_{m+1}$, tal que $f(p) \in \langle\langle\langle\Theta, z\rangle\rangle\rangle$, entonces $d(p, r(p)) = d(p, (\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p))$.

Como por la Afirmación 2, $d(p, f(p)) < \frac{1}{2^{m+1}}$, por (b) del Lema 2.35, $d(f(p), \eta_{m+1}(f(p))) < \frac{3}{2^{m+2}}$ y por el Lema 2.38 tenemos que:

$$d(\eta_{m+1}(f(p)), k_{m+1}(\eta_{m+1}(f(p)))) < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Deducimos entonces que:

$$d(p, r(p)) < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{3}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+1}} < \frac{4}{2^{m+1}} = \frac{2}{2^m} < \frac{3}{2^m} < \frac{\varepsilon}{4} < \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Ahora si $p \in J_{m+1}$ y $f(p) \in \langle\langle\langle z, (1,0)\rangle\rangle\rangle$, entonces $r(p) = \kappa_m \circ r_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f(p)$.

Como por el Lema 2.33, r_{m+1} es una $\frac{1}{2^{m+1}}$-retracción, entonces
$d(\eta_{m+1}(f(p), r_{m+1}(\eta_{m+1}(f(p)))) < \frac{1}{2^{m+1}}$ y por el Lema 2.38,
$d(r_{m+1}(\eta_{m+1}(f(p))), \kappa_m(r_{m+1}(\eta_{m+1}(f(p))))) < \frac{3}{2^m}$,
entonces tenemos que
$d(p, r(p)) < \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{3}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{3}{2^m} < \frac{4}{2^m} + \frac{3}{2^{m+2}} < \frac{19}{2^{m+2}} < \frac{9}{2^m} < \frac{3\varepsilon}{4}$.

Por lo que hemos probado que $r : J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1} \to T$ es una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción.

Subcaso A.2. $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{m+1} \circ T_{n_{m+1}})^{-1}(q)) \in A_{n_{m+1}} \setminus A_{n_m}$.

En este caso, η_{m+1} satisface que $\eta_{m+1}(L_{m+1}) \subset \langle\langle\langle\Theta, q\rangle\rangle\rangle$. De manera que definimos r de la siguiente forma.

$$r(p)=\begin{cases} w, & \text{si } p\in J_0\backslash T,\\ p, & \text{si } p\in \langle\langle\langle w,(\Theta,\frac{1}{2})\rangle\rangle\rangle\cup\bigcup\limits_{n=1}^{m} J_n,\\ (\kappa_{m+1}\circ\eta_{m+1}\circ f)(p), & \text{si } p\in J_{m+1}.\end{cases}$$

Análogamente como en el Subcaso A.1. Podemos ver que r está bien definida, y es una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción de $J_0\cup J_1\cup\ldots\cup J_{m+1}$ en T.

De manera que si $m+1$ es un entero impar, hemos podido definir una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción $r: J_0\cup J_1\cup\ldots\cup J_{m+1}\to T$.

Con esto terminamos el caso A.

Ahora veremos qué pasa cuando $m+1$ es un entero par.

Caso B. Supongamos primero que $m+1$ es par. En este caso $J_{m+1}\cap T$ es de la forma $J_{m+1}\cap T=\langle\langle\langle(1,0,\frac{1}{2^{m+1}}),s\rangle\rangle\rangle$. Entonces T es de la forma:

$$T=\langle\langle\langle w,(\Theta,\tfrac{1}{2})\rangle\rangle\rangle\cup\bigcup_{n=1}^{m} J_n\cup\langle\langle\langle(1,0,\tfrac{1}{2^{m+1}}),s\rangle\rangle\rangle.$$

Por la Afirmación 1, la proyección f en el plano XY satisface que $f|J_{m+1}: J_{m+1}\to L_{m+1}$ es un homeomorfismo y, para toda $p\in J_{m+1}$, $d(p,f(p))<\frac{1}{2^{m+1}}$. Entonces la imagen bajo f del subarco $\langle\langle\langle((1,0,\frac{1}{2^{m+1}}),s\rangle\rangle\rangle$ de J_{m+1} es un subarco de L_{m+1} que une a $(1,0)$ con el punto $f(s)$. Sea $q=f(s)$. Así que $f(\langle\langle\langle((1,0),\frac{1}{2^{m+1}}),s\rangle\rangle\rangle)=\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$.

Vamos a usar la función $\eta_{m+1}: L_{m+1}\to L_{m+1}$ del Lemma 2.35, que depende del punto q. Recordemos que estamos considerando el caso en que $m+1$ es par, así que η_{m+1} satisface las siguientes propiedades

(a') $\eta_{m+1}|\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle=Id_{\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle}$,
(b') $d(p,\eta_{m+1}(p))\leq\frac{3}{2^{m+2}}$ para cada $p\in L_{m+1}$,
(c') si $(G_1\circ G_2\circ\ldots\circ G_{m+1}\circ R_{n_{m+1}})^{-1}(q)\in A_{n_m}$, entonces $\eta_{m+1}^{-1}((1,0)])\cap\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle\neq\emptyset$ y si z es el primer punto en $\eta_{m+1}^{-1}((1,0))\cap\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$ (en el orden natural en $\langle\langle\langle q,\Theta\rangle\rangle\rangle$ de q a Θ), entonces $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle q,z\rangle\rangle\rangle\subset\langle\langle\langle(1,0),q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_{m+1}(\Theta)=\Theta$,
(d') si $(G_1\circ G_2\circ\ldots\circ G_{m+1}\circ R_{n_{m+1}})^{-1}(q)\in A_{n_{m+1}}\backslash A_{n_m}$, entonces $\eta_{m+1}(L_{m+1})\subset\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$.

Subcaso B.1. $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{m+1} \circ T_{n_{m+1}})^{-1}(q) \in A_{n_m}$.

En este caso $\eta_{m+1}^{-1}((1,0)) \cap \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle \neq \emptyset$ y si z es el primer punto en $\eta_{m+1}^{-1}((1,0)) \cap \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$ (en el orden natural en $\langle\langle\langle q,\Theta\rangle\rangle\rangle$ de q a Θ), entonces $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle q,z\rangle\rangle\rangle \subset \langle\langle\langle(1,0),q\rangle\rangle\rangle$ y $\eta_{m+1}(\Theta) = \Theta$. De modo que el punto z tiene las siguientes propiedades, $z \geq q$ en el orden natural de L_{m+1} de $(1,0)$ a Θ, $\langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle \subset \langle\langle\langle z,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, $\eta_{m+1}(\langle\langle\langle z,(1,0)\rangle\rangle\rangle) = \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$, $\eta_{m+1}(z) = (1,0)$ y $\eta_{m+1}(\Theta) = \Theta$.

En este caso, definimos $r : J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1} \to T$ de la siguiente manera.

$$r(p) = \begin{cases} w, & \text{si } p \in (J_0 \backslash T) \cup \{w\}, \\ p, & \text{si } p \in \langle\langle\langle w,(\Theta,\frac{1}{2})\rangle\rangle\rangle \cup \bigcup\limits_{n=1}^{m} J_n, \\ (\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p), & \text{si } p \in J_{m+1} \text{ y } f(p) \in \langle\langle\langle z,(1,0)\rangle\rangle\rangle, \\ (\kappa_m \circ r_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p), & \text{si } p \in J_{m+1} \text{ y } f(p) \in \langle\langle\langle \Theta, z\rangle\rangle\rangle, \end{cases}$$

donde $r_{m+1} : B_{m+1} \to L_m$ es la $\frac{1}{2^{m+1}}$-retracción del Lema 2.33. Recordemos también que $\kappa_m : L_m \to J_m$ es el homeomorfismo de la Definición 2.36.

La demostración de que r es una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción, se hace de manera análoga al Caso A.1.

Subcaso B.2 $(G_1 \circ G_2 \circ ... \circ G_{m+1} \circ T_{n_{m+1}})^{-1}(q)) \in A_{n_{m+1}} \setminus A_{n_m}$.

En este caso, η_{m+1} satisface que $\eta_{m+1}(L_{m+1}) \subset \langle\langle\langle q,(1,0)\rangle\rangle\rangle$. De manera que definimos r de la siguiente forma.

$$r(p) = \begin{cases} w, & \text{si } p \in J_0 \backslash T, \\ p, & \text{si } p \in \langle\langle\langle w,(\Theta,\frac{1}{2})\rangle\rangle\rangle \cup \bigcup\limits_{n=1}^{m} J_n, \\ (\kappa_{m+1} \circ \eta_{m+1} \circ f)(p), & \text{si } p \in J_{m+1}. \end{cases}$$

Análogamente como en el Subcaso B.2. Podemos ver que r está bien definida, y es una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción de $J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1}$ en T.

De modo que en todos los casos, es posible definir una $\frac{3\varepsilon}{4}$-retracción r de $J_0 \cup J_1 \cup ... \cup J_{m+1}$ en T. Componiendo $r \circ \sigma$ obtenemos una ε-retracción de X a T. Por tanto X tiene la propiedad RNT y el teorema queda demostrado.

■

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior y el Teorema 2.23.

Corolario 2.45 *Sea* $X = \overline{\bigcup_{n\geq 0} J_n} = \overline{g([0,\infty))}$ *con residuo* $R = \overline{\bigcup_{n\geq 0} J_n} \setminus \bigcup_{n\geq 0} J_n = \overline{g([0,\infty))} \setminus g([0,\infty))$. *Entonces R es homeomorfo al pseudoarco ($\mathcal{P}$) y* $\mathcal{Q} = \lim_{n\to\infty} J_n = \mathcal{P}$.

2.4 Una compactación sin la propiedad RNT.

En esta sección construiremos una compactación métrica del rayo $[0,\infty)$ que tenga residuo homeomorfo al pseudoarco, pero que no tenga la propiedad RNT. Esto mostrará que no todas las compactaciones métricas del rayo $[0,\infty)$ con residuo homeomorfo al pseudoarco son homeomorfas. El Lema 2.52 es crucial para la construcción del ejemplo principal de esta sección. A primera vista este lema parece muy técnico pero lo que dice en esencia es que si una sucesión de arcos tiende a un pseudoarco, entonces, para dada uno de esos arcos, existe otro de índice muy grande tal que la única manera de enviar una parte del primero, por una función que mueva poco los puntos es achicándolo. Esto se debe a que los arcos de índice muy grande deben estar muy retorcidos (pues cada vez se parecen más al pseudoarco) y entonces un arco fijo sólo se puede mandar en una parte pequeña de ellos. Comenzaremos con una serie de resultados preliminares.

Lema 2.46 *Sea $g : K \to L$ una función continua, donde K y L son arcos, y sean $t, s \in g(K)$. Entonces existen $p, q \in K$ tales que $g(p) = t$, $g(q) = s$ y $g(pq) = ts$.*

Demostración. Podemos suponer que $K = [0,1] = L$. Sean p_1, $q_1 \in [0,1]$ tales que $g(p_1) = t$ y $g(q_1) = s$. Supongamos por ejemplo que $p_1 \leq q_1$. Sea $p = \max(g^{-1}(t)) \cap [p_1, q_1]$, la existencia de este máximo se justifica porque el conjunto tomado es cerrado y no vacío pues p_1 pertenece a él. De igual manera podemos tomar $q = \min(g^{-1}(s)) \cap [p, q_1]$. Entonces $g(p) = t$ y $g(q) = s$. Como $g(pq)$ es un conexo que tiene a t y a s, entonces $ts \subset g(pq)$. Nos falta probar la otra contención. Sea $y = g(x) \in g(pq)$, con $x \in pq$. Podemos suponer que $t \leq s$. Si $y < t$, entonces $p < x$ y por el Teorema del Valor Intermedio, existe $p' \in [x, q]$ tal que $g(p') = t$ lo cual contradice la elección de p. Por tanto $t \leq y$. Similarmente, $y \leq s$. Esto termina la prueba de que $g(pq) = ts$ y también la prueba del lema.

■

Lema 2.47 *Sean $\gamma > 0$ y $g : K \to L$ una función continua entre dos arcos K y L, con la propiedad de que para toda $p \in K$, $d(p, g(p)) < \gamma$, y diam$(g(K)) \geq \frac{1}{2}$, entonces diam $(K) \geq \frac{1}{2} - 2\gamma$.*

Demostración. Sean $p, q \in K$, tales que $d(g(p), g(q)) = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{1}{2} = d(g(p), g(q)) \leq d(g(p), p) + d(p, q) + d(q, g(q)) < 2\gamma + d(p, q)$, entonces $d(p, q) > \frac{1}{2} - 2\gamma$ y como $p, q \in K$, entonces diam $(K) > \frac{1}{2} - 2\gamma$.

■

Lema 2.48 *Sea L un arco y $\{K_m\}_{m=n}^{\infty} \subset L$, una sucesión de arcos, donde $K_m = p_m q_m$, entonces existe una subsucesión $\{K_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ de $\{K_m\}_{m=n}^{\infty}$ tal que $K_{m_i} \to K$, donde $K = pq$ y además se cumple que $p_{m_i} \to p$ y $q_{m_i} \to q$.*

Demostración. Como L es compacto, podemos suponer que $p_m \to p$ y $q_m \to q$, con $p, q \in L$. Ahora $C(L)$ = Hiperespacio de continuos del arco L, es compacto, de modo que la sucesión $\{K_m\}_{m=n}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente $\{K_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ que cumple que $K_{m_i} \to K$.

Veremos que $K = pq$. Como $p_m \to p$ y $q_m \to q$, entonces $p_{m_i} \to p$ y $q_{m_i} \to q$, de modo que $p, q \in K$, y por tanto $pq \subset K$. Veamos que $K \subset pq$, sea $t \in K$, entonces existe una sucesión convergente $\{t_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$, donde $t_{m_i} \in K_{m_i}$, $t_{m_i} \to t$. En el orden natural de L supongamos que $p_m < q_m$ para toda $m \geq n$, entonces $p_{m_i} \leq t_{m_i} \leq q_{m_i}$, por lo que $p \leq t \leq q$. Por tanto $t \in pq$, con lo que probamos que $K \subset pq$. De modo que $K = pq$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 2.49 *Sea L un arco, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $t \in \mathbb{N}$ y subarcos $A_0, A_1, ..., A_t$ de L tales que $A_0 \cup A_1 \cup .... \cup A_t = L$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ y diam $(A_i) < \frac{1}{n}$, para toda $i \in \{0, 1, ..., t\}$.*

Demostración. Como L es una arco, existe un hoemomorfismo $h : [0, 1] \to L$, de modo que por la continuidad uniforme de h, existe $t \in \mathbb{N}$ que cumple que si diam $(B) \leq \frac{1}{t}$, entonces diam $(h(B)) < \frac{1}{n}$. Entonces los intervalos

$B_i = [\frac{i}{t}, \frac{i+1}{t}]$, cumplen con que $[0,1] = B_0 \cup B_1 \cup ... \cup B_t$, $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ y diam $(B_m) \leq \frac{1}{t}$. Sea $A_i = h(B_i)$. Como h es un homeomomorfismo, entonces $L = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ y diam $(A_i) < \frac{1}{n}$.

■

Lema 2.50 *Si X es un continuo hereditariamente indescomponible y A, B son subcontinuos de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $A \subset B$ ó $B \subset A$.*

Demostración. Sean A, B subcontinuos de X tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Supongamos por el contrario que $A \not\subseteq B$ y que $B \not\subseteq A$, entonces existe $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$. De modo que $A \cup B$ es un subcontinuo de X que puede ser descompuesto en dos subcontinuos propios, A y B, lo cual contradice que X es hereditariamente indescomponible. Por tanto $A \subset B$ ó $B \subset A$.

■

Lema 2.51 *Sean X un continuo hereditariamente indescomponible y A^0, $A^1, ..., A^t$ subcontinuos de X tales que $A^i \cap A^{i+1} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{0, 1, ..., t-1\}$. Entonces existe $j \in \{0, 1, ..., t-1\}$ tal que $A^j = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t$.*

Demostración.

Como X es hereditariamente indescomponible y $A^1 \cap A^2 \neq \emptyset$, entonces por el Lema 2.50, $A_1 \subset A^2$ ó $A^2 \subset A^1$. Así que $A^1 \cup A^2 = A^1$ ó $A^1 \cup A^2 = A^2$. Supongamos que existe $j \in \{0, 1, ..., k-1\}$ tal que $A^j = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^{k-1}$, entonces $A^{k-1} \subset A^j$, y como $A^{k-1} \cap A^k \neq \emptyset$, entonces $A^k \cap A^j \neq \emptyset$, de modo que por el Lema 2.50, $A^k \subset A^j$ ó $A^j \subset A^k$. Si $A^k \subset A^j$, entonces $A^j = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^k$, si $A^k = A^j \cup A^k = (A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^{k-1}) \cup A^k$ por lo que existe $j \in \{0, 1, ..., k\}$ tal que $A^j = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^k$.

■

Lema 2.52 *Sea $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ un pseudoarco con diámetro mayor o igual a uno y sea $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de arcos en $\mathbb{R}^3$ tal que $L_n \to \mathcal{P}$. Entonces, para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ con la propiedades: $m_n \geq n$ y si K es un subarco de L_n y $g : K \to L_{m_n}$ es una función continua tal que $d(p, g(p)) < \frac{1}{24}$ para toda $p \in K$, entonces $diam(g(K)) < \frac{1}{2}$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe un número $n \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $m \geq n$, existe un arco $K'_m \subset L_n$ y una función continua $g_m : K'_m \to L_m$ tal que $d(p, g_m(p)) < \frac{1}{24}$, para cada $p \in K'_m$ pero $\operatorname{diam}(g_m(K'_m)) \geq \frac{1}{2}$.

Ya que, para cada $m \geq n$, $\operatorname{diam}(g_m(K'_m)) \geq \frac{1}{2}$, tienen que existir puntos $t_m, s_m \in g_m(K'_m)$ tales que $d(t_m, s_m) = \frac{1}{2}$.

Por el Lema 2.46, existen puntos $p_m, q_m \in K'_m$ tales que $r(p_m) = t_m$, $r(q_m) = s_m$ y $r(p_m q_m) = t_m s_m$.

Hacemos $K_m = p_m q_m$. Ya que diam $(g_m(K_m)) \geq \frac{1}{2}$ y g_m tiene la propiedad de que para toda $p \in K'_m$, $d(p, g(p)) < \frac{1}{24}$, y por otra parte $d(p_m, g(p_m))$, $d(q_m, g(q_m)) < \frac{1}{24}$, entonces por el Lema 2.47, tenemos que diam $(K_m) \geq \frac{1}{2} - \frac{2}{24} = \frac{5}{12}$, por tanto diam $(K_m) \geq \frac{5}{12}$.

Por el Lema 2.48, podemos suponer que $K_m \to K$, que las sucesiones $\{p_m\}_{m=n}^{\infty}$ y $\{q_m\}_{m=n}^{\infty}$ convergen a puntos p y q de K, respectivamente y que $K = pq$. Ya que $\operatorname{diam}(K_m) \geq \frac{5}{12}$ y la función diámetro es continua en el hiperespacio de L_n, tenemos que $\operatorname{diam}(K) \geq \frac{5}{12}$.

Ya que K es un arco, existen vecindades abiertas y conexas U y V de K tales que $p \in U \subset B_{\frac{1}{48}}(p)$ y $q \in V \subset B_{\frac{1}{48}}(q)$. Como $d(p, q) = \lim d(p_m, q_m)$ y $\frac{1}{2} = d(t_m, s_m) = d(r(p_m), r(q_m)) \leq d(r(p_m), p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, r(q_m))$ $< d(p_m, q_m) + \frac{1}{12}$, concluimos que $d(p, q) \geq \frac{5}{12}$, así que $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Como $p_m \to p$ y $q_m \to q$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $m \geq N$, $p_m \in U$ y $q_m \in V$. Ya que U y V son abiertos conexos del arco K, entonces $\overline{U}$ y $\overline{V}$ son arcos, uno de los extremos de $\overline{U}$ es p, al otro le llamamos p', uno de los extremos del arco $\overline{V}$ es q y a su otro extremo le llamamos q'. Entonces, para toda $m \geq N$, el punto p_m está en el arco pp' y el punto q_m está en el arco qq'. Así que $p'q' \subset p_m q_m = K_m$. Notemos que $\frac{5}{12} \leq d(p, q) \leq d(p, p') + d(p', q') + d(q', q) \leq \frac{1}{48} + d(p', q') + \frac{1}{48}$, de manera que $\frac{3}{8} \leq d(p', q')$. Entonces $\frac{3}{8} \leq d(p', q') \leq d(p', g_m(p')) + d(g_m(p'), g_m(q')) + d(g_m(q'), q') < \frac{1}{24} + d(g_m(p'), g_m(q')) + \frac{1}{24}$, de manera que $\frac{1}{4} \leq d(g_m(p'), g_m(q'))$ por tanto, $\operatorname{diam}(g_m(p'q')) \geq \frac{1}{4}$.

Por el Lema 2.49, existen subarcos $A_0, A_1, ..., A_t$ de $p'q'$ tales que $A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t = p'q'$, $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ y $\operatorname{diam}(A_i) < \frac{1}{12}$, para toda $i \in \{0, 1, ..., t\}$. Como diam $(A_i) < \frac{1}{12}$, entonces $\operatorname{diam}(g_m(A_i)) < \frac{1}{12} + \frac{2}{24}$. De modo que $\operatorname{diam}(g_m(A_i)) < \frac{1}{6}$.

Ahora la sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $L_n \to \mathcal{P}$ de modo que existe una subsucesión $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ que cumple que $g_{m_n}(A_i) \to A^i \subset \mathcal{P}$ donde A^i es un subcontinuo de $\mathcal{P}$, y esto ocurre para toda $i \in \{0, 1, ..., t\}$. Como diam $(g_{m_n}(A_i)) < \frac{1}{6}$ y diam es una función continua en el hiperespacio, entonces diam $(A^i) \leq \frac{1}{6}$ para toda $i \in \{0, 1, ..., t\}$. Además como $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, entonces $A^i \cap A^{i+1} \neq \emptyset$. De modo que $A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t \subset \mathcal{P}$ que es un subcontinuo hereditariamente indescomponible y se cumple también que $A^i \cap A^{i+1} \neq \emptyset$. Utilizando el Lema 2.51, obtenemos que existe $j \in \{0, 1, ..., t\}$ tal que $A^j = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t$, y como diam $(A^j) < \frac{1}{6}$, entonces diam $(A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t) < \frac{1}{6}$.

Ahora pensemos en el arco $p'q' = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_t$, como diam $(p'q') \geq \frac{3}{8}$, entonces diam $(g_{m_n}(p'q')) \geq \frac{3}{8} - \frac{2}{24} > \frac{1}{4}$. Podemos suponer que $g_{m_n}(p'q') \to A$ para un subcontinuo A de $\mathcal{P}$.

Como la función diam es una función continua, entonces diam $(A) \geq \frac{1}{4}$.

Observemos que $g_{m_n}(p'q') = g_{m_n}(A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t) = g_{m_n}(A^0) \cup g_{m_n}(A^1) \cup ... \cup g_{m_n}(A^t)$.

De modo que $\lim\limits_{n\to\infty} g_{m_n}(A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t) = \lim\limits_{n\to\infty} g_{m_n}(A^0) \cup g_{m_n}(A^1) \cup ... \cup g_{m_n}(A^t) = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t$.

Entonces $A = A^0 \cup A^1 \cup ... \cup A^t = A^j$ para alguna $j \in \{0, 1, ..., t\}$, por lo que diam $(A) =$ diam $(A^j) < \frac{1}{6}$.

Hemos visto que diam $(A) \geq \frac{1}{4}$ y diam $(A) < \frac{1}{6}$, lo cual es una contradicción. Esta contradicción nació de suponer que el lema no era cierto. Por tanto el lema es cierto y con esto terminamos nuestra demostración.

■

2.4.1 Construcción del segundo ejemplo

Consideremos los arcos L_n de la Definición 2.31. Recordemos que por el Lema 2.38, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un homeomorfismo $\kappa_n : L_n \to J_n$ que cumple que $d(K_n, L_n) = \min\{d(x, y) : x \in L_n,\ y \in J_n\} = \frac{1}{2^{n+1}}$. Por el Corolario 2.45, sabemos que $X = \overline{(\bigcup_{n\geq 0} J_n)}$ es una compactación del rayo cuyo residuo pseudoarco $(\mathcal{P})$. Ahora probaremos un lema que nos ayudará en la construcción del ejemplo.

Lema 2.53 *La sucesión* $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ *cumple que* $L_n \to \mathcal{P}$ *y diam* $(\mathcal{P}) \geq 1$.

Demostración. Como por el Corolario 2.45 y Lema 2.39 (iii). $X = \overline{(\bigcup_{n\geq 0} J_n)}$ es una compactación métrica del rayo con residuo $\mathcal{P}$, y $\lim_{n\to\infty} J_n = \mathcal{P}$.

Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_1$ se cumple que $H(J_n, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora $\min\{d(x,y) : x \in L_n,\ y \in J_n\} = \frac{1}{2^{n+1}}$ y $\max\{d(x,y) : x \in L_n,\ y \in J_n\} = \frac{1}{2^n}$. Por lo que $H(L_n, J_n) \leq \frac{1}{2^n}$.

Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N_2$ se cumple que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

De manera que para toda $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ se cumple que $H(L_n, \mathcal{P}) \leq H(L_n, J_n) + H(J_n, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Con lo que hemos probado que $L_n \to \mathcal{P}$.

Ahora recordemos que por el Lema 2.32 (ii), se tiene que Θ, $(1,0) \in L_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De modo que Θ, $(1,0) \in \mathcal{P}$. Por lo que diam $(\mathcal{P}) \geq 1$.

■

Consideremos la sucesión de arcos $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$. Por el Lema 2.53, $L_n \to \mathcal{P}$ y $\mathrm{diam}(\mathcal{P}) \geq 1$. También tenemos que por el Lema 2.52, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \geq n$ tal que si K es un subarco de L_n y $g : K \to L_{m_n}$ es una función continua que cumple que $d(p, g(p)) < \frac{1}{24}$ para cada $p \in K$, entonces $\mathrm{diam}(g(K)) < \frac{1}{2}$.

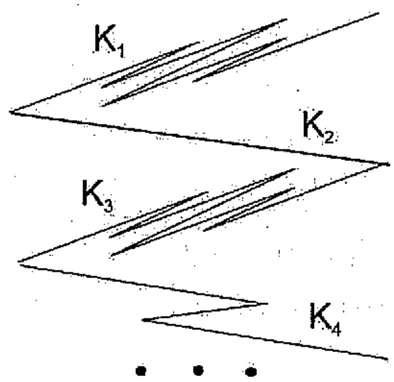
Vamos ahora a construir una compactación métrica del rayo. Consideremos las funciones $\alpha_n, \beta_n : \mathbb{R}^2 \to R^3$ definidas de la siguiente forma:

$$\alpha_n(x,y) = (x, y, x(\tfrac{1}{2^{2n-1}}) + (1-x)(\tfrac{1}{2^{2n-2}}))\ \text{y}$$
$$\beta_n(x,y) = (x, y, x(\tfrac{1}{2^{2n-1}}) + (1-x)(\tfrac{1}{2^{n}})).$$

Notemos que por definición $d((x,y), \alpha_n(x,y))$, $d((x,y), \beta_n(x,y)) < \frac{1}{2^n}$.
Ahora definamos los arcos K_n de la siguiente manera.

$$K_n = \begin{cases} \alpha_{\frac{n+1}{2}}(L_{m_{\frac{n+1}{2}}}), & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \beta_{\frac{n}{2}}(L_{\frac{n}{2}}), & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Consideremos $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Esto se ve de la siguiente manera.



Como la sucesión $L_0, L_1, L_2, \ldots$ converge a $\mathcal{P}$ (Lema 2.53) y $m_n \geq n$, entonces la sucesión $L_{m_1}, L_1, L_{m_2}, L_2, \ldots$ converge a $\mathcal{P}$ y por construcción la sucesión $K_1, K_2, K_3, \ldots$ converge a $\mathcal{P}$.

Sea $Y = \overline{((\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)}$.

Lema 2.54 *Y es una compactificación métrica del rayo $[0,\infty)$, con residuo $\mathcal{P}$ y $Y \simeq [0,\infty) \cup \mathcal{P}$.*

Demostración. La demostración de este lema se hace de manera análoga a como se demostro que $X = \overline{(\bigcup_{n\geq 0} J_n)}$ es una compactación métrica del rayo. Teorema 2.44.

■

Vamos a ver ahora que Y no tiene la propiedad *RNT*. Para esto supondremos que sí la tiene y llegaremos a una contradicción. La prueba en muchos aspectos es muy parecida a la prueba del Teorema 2.44, en que probamos que $X = \overline{(\bigcup_{n\geq 0} J_n)}$ tiene la propiedad *RNT*, por lo que no nos detendremos a probar todos los detalles minuciosamente.

Teorema 2.55 *El continuo Y no tiene la propiedad RNT.*

Demostración. Supongamos por el contrario que Y tiene la propiedad *RNT*. Entonces para $\varepsilon = \frac{1}{96}$, existe $\delta > 0$ tal que, si T es un árbol contenido en X y $H(T, X) < \delta$, entonces existe una ε-retracción r de X en T.

Como $Y = \overline{((\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)}$, existe un entero positivo impar i, tal que $\frac{1}{2^{i-2}} < \frac{1}{96}$ y tal que el árbol $T = \bigcup_{n=1}^{i} K_n$ satisface que $H(T, X) < \delta$.

Por la elección de δ existe an ε-retracción $r : X \to T$.

Notemos que por construcción, $K_i \cap K_{i+1} = (1, 0, \frac{1}{2^{i-1}})$. Como r es una retracción, $r(K_{i+1}) \cap K_i \neq \emptyset$. Ahora consideremos $f : \mathbb{R}^3 \to R^2$ dada por $f(x, y, z) = (x, y)$. Entonces $f|K_n : K_n \to L_{m_{\frac{n+1}{2}}}$, si n es impar y $f|K_n : K_n \to L_{\frac{n}{2}}$, si n es par son homeomorfismos y $d((x, y, z), (f|K_n)(x, y, z)) < \frac{1}{2^{n-2}}$.

Definamos $g : L_{\frac{i+1}{2}} \to L_{m_{\frac{i+1}{2}}} \cup L_{\frac{i-1}{2}} \cup ... \cup L_1$ como $g(p) = (f \circ r \circ \beta_{\frac{i+1}{2}})(p)$.

Tenemos que $\beta_{\frac{i+1}{2}} : L_{\frac{i+2}{2}} \to K_{i+1}$ es un homeomorfismo y por la definición de $\beta_{\frac{i+1}{2}}$, se cumple $d(p, \beta_{\frac{i+1}{2}}(p)) < \frac{1}{2^i}$.

Otra cosa que tenemos es que $r : X \to T$ es una $\frac{1}{48}$-retracción y por tanto se cumple que $d(\beta_{\frac{i+1}{2}}(p), r(\beta_{\frac{i+1}{2}}(p))) < \frac{1}{48}$.

Como $T = \bigcup_{n=1}^{i} K_n$ se cumple que $f(\bigcup_{n=1}^{i} K_n) = L_{m_{\frac{i+1}{2}}} \cup L_{\frac{i-1}{2}} \cup ... \cup L_1$ y también se cumple que $d(r(\beta_{\frac{i+1}{2}}(p)), f(r(\beta_{\frac{i+1}{2}}(p)))) < \frac{1}{2^{i-2}}$, si $r(\beta_{\frac{i+1}{2}}(p)) \in K_i$.

Ahora utilizando g podemos considerar dos casos.

Caso 1. $r(K_{i+1}) \subset K_i$. En este caso $g(L_{\frac{i+1}{2}}) = f(r(\beta_{\frac{i+1}{2}}(L_{\frac{i+1}{2}}))) = f(r(K_{i+1})) \subset f(K_i) \subset L_{m_{\frac{i+1}{2}}}$, como $d(p, g(p)) < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{48} + \frac{1}{2^{i-2}} < \frac{3}{2^i} < \frac{3}{96}$, entonces $d(p, g(p)) < \frac{1}{24}$ para cada $p \in L_{\frac{i+1}{2}}$ y $\operatorname{diam}(L_{\frac{i+1}{2}}) \geq 1$, entonces $\operatorname{diam}(g(L_{\frac{i+1}{2}})) \geq 1 - \frac{2}{24} = \frac{11}{12}$ que es una contradiccion a la elección de $m_{\frac{i+1}{2}}$, pues por el Lema 2.52, si $g|L_{\frac{i+1}{2}} : L_{\frac{i+1}{2}} \to L_{m_{\frac{i+1}{2}}}$ es continua y cumple que $d(p, g(p)) < \frac{1}{24}$ para toda $p \in L_{\frac{i+1}{2}}$, entonces diam $(g(L_{\frac{i+1}{2}})) < \frac{1}{2}$.

Caso 2. $r(K_{i+1})$ no está contenido en K_i. Sean $u, v \in Y$ tales que $K_{i+1} \cap K_i = \{u\}$ y $K_i \cap K_{i-1} = \{v\}$. En este caso existe un punto $q \in K_{i+1}$ tal que $r(q) = v$ y si K' es el subarco de K_{i+1} que une u y q, entonces $r(K') = K_i$. Sea $K = f(K') \subset L_{\frac{i+1}{2}}$. Así que $\beta_{\frac{i+1}{2}}(K) = K'$. Entonces la función continua $g|K : K \subset L_{\frac{i+1}{2}} \to L_{m_{\frac{i+1}{2}}}$ es sobre y $d(p, g(p)) < \frac{1}{24}$ para cada $p \in K$, entonces $\operatorname{diam}(g(K)) \geq 1$ que es una contradicción a la elección de $m_{\frac{i+1}{2}}$. (Lema 2.52).

En ambos casos, obtenemos una contradicción. Por tanto Y no tiene la propiedad RNT y con esto terminamos la prueba del teorema.

■

Corolario 2.56 *No todas las compactaciones del rayo con residuo pseudoarco son homeomorfas.*

Demostración. Sea $X = \overline{(\bigcup_{n\geq 0} J_n)}$ el ejemplo de la Sección 2.3.2, y sea $Y = \overline{((\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n)}$, el ejemplo de la Sección 2.4.1. Por el Teorema 2.44, X tiene la propiedad RNT. Por el Teorema 2.55, Y no tiene la propiedad RNT. De modo que X y Y son dos compactaciones del rayo con residuo pseudoarco que no son homeomorfas, por lo que no todas las compactaciones del arco con residuo pseudoarco son homeomorfas.

CAPÍTULO 3

Una Familia de Compactaciones

En el capítulo anterior, utilizando la propiedad RNT, constuimos dos compactaciones métricas del rayo con residuo pseudoarco que no eran homeomorfas. Ahora vamos a construir una familia no numerable de compactaciones métricas del rayo con residuo pseudoarco tal que cualesquiera dos de ellas no son homeomorfas.

Recordaremos alguna definiciones que utilizamos en el Capítulo 2, sobre cadenas, y daremos una serie de resultados auxiliares que nos ayudarán a construir esta familia.

3.1 Preliminares

Definición 3.1 *Sea X un espacio topológico. Una* cadena *es una familia finita de abiertos $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ que cumple que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. A los elementos C_i de una cadena los llamamos* eslabones.

Definición 3.2 *Una* cadena cerrada *es una familia finita de cerrados $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ que cumple que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ si y sólo si $|i-j| \leq 1$. A los elementos de una cadena cerrada también se les llama* eslabones.

Definición 3.3 *Dada $\varepsilon > 0$ una ε-*cadena *(cerrada) es una cadena (cerrada) en la que el diámetro de cada eslabón es menor que ε.*

Definición 3.4 *Un continuo es* encadenable *(resp. encadenable por cerrados) si para toda $\varepsilon > 0$, existe una ε-cadena (resp. ε-cadena cerrada) tal que X es la unión de los eslabones. Es decir si existe $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$*

(resp., $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_m\}$) tal que $X = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n$ (resp., $X = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$) y cada C_i es abierto (resp., cada D_i es cerrado).

Definición 3.5 *Una cadena $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ es una* cadena conexa *si cada eslabón C_i es conexo.*

Definición 3.6 *Sean X un espacio topológico, y p, q dos puntos en X. Decimos que $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ es* una cadena de p a q, *si $\mathcal{C}$ es una cadena, $p \in C_1 \setminus C_2$ y $q \in C_n \setminus C_{n-1}$.*

Definición 3.7 *Sea $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ una cadena. Denotamos $\overline{\mathcal{D}}$ al conjunto $\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{D_1}, ..., \overline{D_n}\}$.*

Definición 3.8 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ y $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_n\}$ cadenas. Decimos que $\mathcal{D}$ es una* subcadena *de $\mathcal{C}$ si cada eslabón de $\mathcal{D}$ es un eslabón de $\mathcal{C}$. De manera que si $\mathcal{D}$ es una subcadena de $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{D}$ es de la forma $\mathcal{D} = \{C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j\}$ con $i \leq j$. Otra manera de denotar a $\mathcal{D}$ es de la forma $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{(i,j)} = \{C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j\}$ que es la subcadena de $\mathcal{C}$ que va del eslabón i al eslabón j.*

Definición 3.9 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ y $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_m\}$ cadenas. Decimos que $\mathcal{D}$* refina a $\mathcal{C}$ *si para toda $j \in \{1, 2, ..., m\}$ existe $i \in \{1, 2, ..., n\}$ tal que $\overline{D_j} \subsetneq C_i$.*

Definición 3.10 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_n\}$ y $\mathcal{D} = \{V_1, ..., V_m\}$ cadenas. Decimos que $\overline{\mathcal{D}}$ refina a $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{D}}$ es una cadena cerrada*

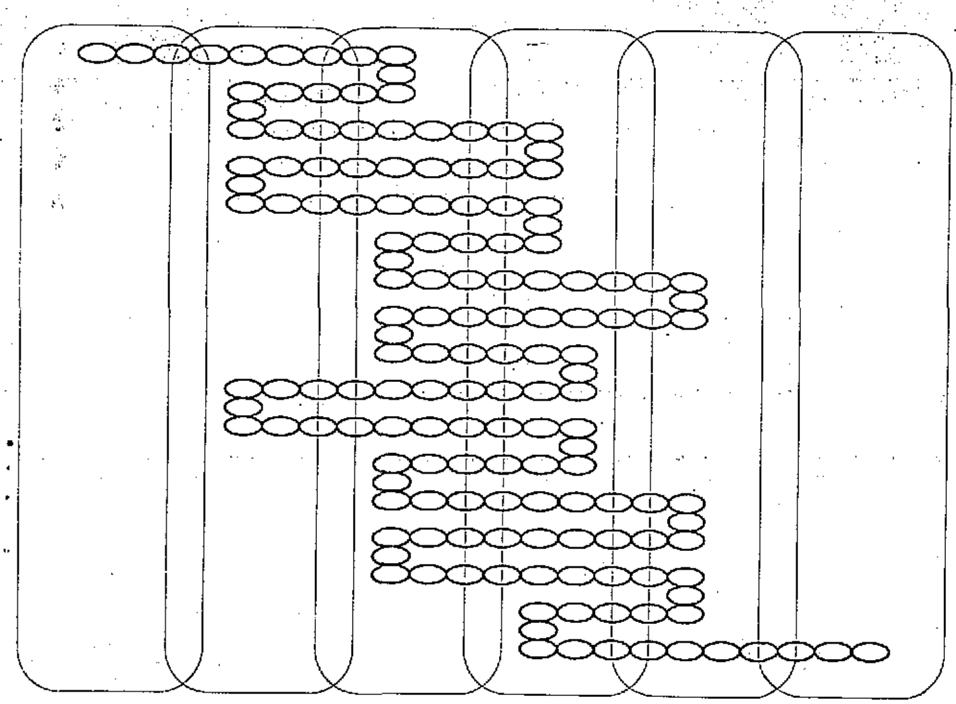
Definición 3.11 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ una cadena y $\mathcal{D} = \{D_1, ..., D_t\}$ un refinamiento de $\mathcal{C}$. Decimos que $\mathcal{D}$ se retuerce en $\mathcal{C}$ si $\mathcal{D}$ refina a $\mathcal{C}$ y si para cualesquiera índices i, j, m y n con $m < n - 2$ que cumplen que $D_i \cap C_m \neq \emptyset$, $D_j \cap C_n \neq \emptyset$, entonces existen índices k y l con $i < k < l < j$ (ó $i > k > l > j$)) tales que $D_k \subset C_{n-1}$ y $D_l \subset C_{m+1}$.*

Definición 3.12 *Para una cadena $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ definimos $\mathcal{C}^* = \bigcup \mathcal{C}$ $= \{C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_s\}$.*

Lema 3.13 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ una cadena (cerrada) y A un continuo tal que $A \subset \mathcal{C}^*$ y $A \cap C_1 \neq \emptyset \neq A \cap C_s$, entonces $A \cap C_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., s\}$.*

Demostración. Sabemos que $A \cap C_1 \neq \emptyset \neq A \cap C_s$. Supongamos por el contrario que existe $i \in \{2, .., s-1\}$ tal que $A \cap C_i = \emptyset$, entonces sea $U = A \cap (C_1 \cup .. \cup C_{i-1})$ y $V = A \cap (C_{i+1} \cup ... \cup C_s)$. Por la definición de cadena (cerrada), U y V son abiertos(cerrados), ajenos, y como $A \cap C_1 \subset U$ y $A \cap C_s \subset V$, entonces U y V son no vacios. Como $A \subset C^*$ y $A \cap C_i = \emptyset$, entonces $A = U \cup V$, lo cual implica que A no es conexo, lo cual es una contradicción, pues A es un continuo. Por tanto $A \cap C_i \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., s\}$ y el lema queda demostrado. ■

En la siguiente figura se ilustra un ejemplo simple de como se retuerce una cadena en otra.



Recordemos que en el Capítulo 2, definimos el pseudoarco como un continuo encadenable, hereditariamente indescomponible (Definición 2.22).

Ahora, utilizando todas estas definiciones relacionadas con cadenas, construiremos el pseudoarco.

3.2 Construcción del pseudoarco

Sean, p y q puntos en el plano, $p \neq q$ y sea $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de cadenas cerradas y conexas en el plano tales que para toda $n \in \mathbb{N}$.
(1) $\mathcal{C}_n$ es una cadena conexa de p a q,
(2) $\mathcal{C}_n$ es una $\frac{1}{2^n}$-cadena cerrada,
(3) $\overline{\mathcal{C}_{n+1}}$ refina a $\mathcal{C}_n$,
(4) $\mathcal{C}_{n+1}$ está retorcida en $\mathcal{C}_n$, y
(5) los eslabones de las cadenas $\mathcal{C}_n$ son convexos.

Sea $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^*$. Probaremos que $\mathcal{Q}$ es un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible y por la definición del pseudoarco (Definición 2.22) estaremos probando que $\mathcal{Q}$ es el pseudoarco $\mathcal{P}$.

Lema 3.14 *El conjunto* $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^*$ *es un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Primero notemos que como para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}_n$ es una cadena conexa y cerrada, entonces $\mathcal{C}_n^*$ es un continuo y como $\mathcal{C}_{n+1}$ refina a $\mathcal{C}_n$, tenemos que $\mathcal{C}_{n+1}^* \subset \mathcal{C}_n^*$. De manera que $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^*$ es una intersección anidada de continuos y por tanto un continuo.

Para ver que $\mathcal{Q}$ es encadenable, probaremos que $\mathcal{Q}$ admite ε-funciones al intervalo. (Teorema 2.18, Capítulo 2).

Sea $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{3}$, como $\mathcal{Q} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^*$ entonces $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}_k^*$ y $\mathcal{C}_k^*$ es una $\frac{\varepsilon}{3}$-cadena cerrada, $\mathcal{C}_k = \{C_1, C_2, ..., C_m\}$ donde cada $C_i = \overline{C_i}$ y es conexo. Podemos suponer que $m \equiv 0(\text{mod } 3)$. Por el Lema de Urysohn, (Lema 2.17, Capítulo 2), para cada $i \in \{1, 2, ..., m : i \equiv 1 \bmod 3\}$, existe una función continua $f_i : C_i \cup C_{i+1} \cup C_{i+2} \to [i-1, i+2]$ tal que $f^{-1}(i-1) = C_i$, $f^{-1}(i+2) = C_{i+2}$, de modo que f_i es una ε-función para toda $i \in \{1, 2, ..., m : i \equiv 1 \bmod 3\}$. Sea $f : \mathcal{Q} \to [0, m]$ dada por $f(x) = f_i(x)$, si $x \in C_i \cup C_{i+1} \cup C_{i+2}$. Como f es continua en los cerrados de una familia localmente finita y coincide en las intersecciones, entonces f es continua y como $\text{diam}(f^{-1}(x)) = \text{diam}(f_i^{-1}(x)) < \varepsilon$ para alguna $i \in \{1, 2, ..., m : i \equiv 1 \bmod 3\}$, entonces f es una ε-función al intervalo $[0, m]$. Ahora consideremos un homeomorfismo

$g : [0,m] \to [0,1]$, entonces $(g \circ f) : \mathcal{Q} \to [0,1]$ es una ε-función de X en el intervalo $[0,1]$. Por tanto $\mathcal{Q}$ admite ε-funciones al intervalo $[0,1]$ para toda $\varepsilon > 0$, por el Teorema 2.18, $\mathcal{Q}$ es un continuo encadenable.

Ahora probaremos que $\mathcal{Q}$ es hereditariamente indescomponible.

Supongamos que $\mathcal{Q}$ contien un subcontinuo descomponible Y. Entonces $Y = A \cup B$, donde A y B son subcontinuos de $\mathcal{Q}$ tales que A no está contenido en B y B no está contenido en A. De manera que existen puntos $a \in A \setminus B$ y $b \in B \setminus A$.

Sean $\varepsilon = \min\{d(a,B), d(b,A)\}$, e $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{4}$.

Como $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}_{i+1}$ y $\mathcal{C}_{i+1}$ refina a $\mathcal{C}_i$, entonces existen índices, m', m, n' y n tales que $a \in C_m^{i+1} \subset C_{m'}^i$ y $b \in C_n^{i+1} \subset C_{n'}^i$. Como $\operatorname{diam}(C_j^i) < \frac{1}{2^i}$ para toda j, entonces $|m' - n'| \geq 3$. Supongamos que $m' < n'$ (el caso $m' > n'$ es análogo), entonces $m' < n' - 2$. Como $\mathcal{C}_{i+1}$ se retuerce en $\mathcal{C}_i$, existen índices l y k con $m < l < k < n$, (ó $m > l > k > n$) tales que $C_l^{i+1} \subset C_{n'-1}^i$ y $C_k^{i+1} \subset C_{m'+1}^i$..

Afirmación 1. $C_l^{i+1} \cap A = \emptyset$.

Como $C_l^{i+1} \subset C_{n'-1}^i \subset B_{\frac{2}{2^i}}(b) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b)$ y $\varepsilon \leq d(b,A)$, entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(b) \cap A = \emptyset$. Por tanto $C_l^{i+1} \cap A = \emptyset$.

Afirmación 2. $C_k^{i+1} \cap B = \emptyset$.

Como $C_k^{i+1} \subset C_{m+1}^i \subset B_{\frac{2}{2^i}}(a) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a)$ y $\varepsilon \leq d(a,B)$, entonces $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(a) \cap B = \emptyset$. Por tanto $C_k^{i+1} \cap B = \emptyset$.

Ahora $A \cup B$ es un continuo contenido en C_{i+1}^* que cumple que $(A \cup B) \cap C_m^{i+1} \neq \emptyset$ y $(A \cup B) \cap C_n^{i+1} \neq \emptyset$ como $m < l < k < n$ (ó $m > l > k > n$) Por el Lema 3.13 tenemos que $(A \cup B) \cap C_l^{i+1} \neq \emptyset \neq (A \cup B) \cap C_k^{i+1}$.

Como $C_l^{i+1} \cap A = \emptyset$, entonces $C_l^{i+1} \cap B \neq \emptyset$, y como $b \in C_n^{i+1}$ tenemos que $C_n^{i+1} \cap B \neq \emptyset$. Como los índices l, m y n cumplen que $l < k < n$ (ó $l > k > n$) por el Lema 3.13 tenemos que $C_k^{i+1} \cap B \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción a la Afirmación 2. Esta contradicción nace de suponer que $\mathcal{Q}$ contiene un subcontinuo descomponible, por tanto $\mathcal{Q}$ es hereditariamente indescomponible.

Hemos probado que $\mathcal{Q}$ es un continuo encadenable y hereditariamente indescomponible, por la Definición 2.22, sabemos entonces que el continuo $\mathcal{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^*$ es el pseudoarco $\mathcal{P}$, y el lema queda demostrado.

■

Utilizando esta construcción daremos un par de definiciones que nos serán de gran utilidad más tarde para la construcción de la familia de compactaciones del rayo con residuo pseudoarco.

Definición 3.15 *Sean p y q dos puntos en el plano $p \neq q$, y sea $\mathcal{C}$ una cadena de p a q, decimos que L es una arco derecho en $\mathcal{C}$ si:*
(a) L es un arco de p a q,
(b) $L \subset \mathcal{C}^*$,
(c) si $x, y \in L \cap C$ para algún eslabón C de $\mathcal{C}$, entonces el subarco xy de L está contenido en C.

Definición 3.16 *Consideremos las cadenas $\mathcal{C}_n$ de la construcción del pseudoarco ($\mathcal{P}$). Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos L_n como un arco derecho en $\mathcal{C}_n$ que tenga la propiedad de que $L_n \cap (\{0\} \times [0,1]) = \{p_0\}$ y $L_n \cap (\{1\} \times [0,1] = \{q_0\}$.*

Lema 3.17 *La sucesión $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple que $L_n \to \mathcal{P}$.*

Demostración. Sea $\{L_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente de $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n_k \geq K$, $\frac{1}{2^{n_k}} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Notemos que como $\mathcal{P} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n^*$ (Lema 3.14), entonces $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}_{n_k}^*$ y si $\mathcal{C}_{n_k} = \{C_1^{n_k}, C_2^{n_k}, ..., C_{s_{n_k}}^{n_k}\}$, entonces $\mathcal{P} \cap C_i^{n_k} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., s_{n_k}\}$ (Lema 3.13). Como $\operatorname{diam}(C_i^{n_k}) < \frac{1}{2^{n_k}}$, tenemos que $H(\mathcal{C}_{n_k}^*, \mathcal{P}) < \frac{1}{2^{n_k}}$. Además como L_{n_k} va derecho en $\mathcal{C}_{n_k}$, entonces $L \cap C_i^{n_k} \neq \emptyset$ para toda $i \in \{1, 2, ..., s_{n_k}\}$ (Lema 3.15), por lo que $H(\mathcal{C}_{n_k}, L_{n_k}) < \frac{1}{2^{n_k}}$. Por tanto para toda $n_k \geq K$ tenemos que $H(L_{n_k}, \mathcal{P}) \leq H(L_{n_k}, \mathcal{C}_{n_k}) + H(\mathcal{C}_{n_k}, \mathcal{P}) < \frac{2}{2^{n_k}} < \varepsilon$. Por tanto la subsucesión $\{L_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ cumple que $L_{n_k} \to \mathcal{P}$, y esto es para cualquier subsucesión convergente de $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto $L_n \to \mathcal{P}$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.18 *Si $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son cadenas tales que $\mathcal{A}$ refina a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ se retuerce en $\mathcal{C}$, entonces $\mathcal{A}$ se retuerce en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_{n_1}\}$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_{n_2}\}$ y $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_{n_3}\}$. Supongamos que $A_{i'} \cap C_m \neq \emptyset$ y $A_{j'} \cap C_n \neq \emptyset$. con $m < n - 2$. Como $\mathcal{A}$ refina a $\mathcal{B}$, existen índices i e j tales que $A_{i'} \subset B_i$ y $A_{j'} \subset B_j$. De manera que $B_i \cap C_m \neq \emptyset$ y $B_j \cap C_n \neq \emptyset$. Como $m < n - 2$

y $\mathcal{B}$ está retorcida en $\mathcal{C}$, entonces existen índices k y l con $i < k < l < j$ (ó $i > k > l > j$), supongamos, por ejemplo, que $i < k < l < j$, tales que $B_k \subset C_{n-1}$ y $B_l \subset C_{m+1}$. Fijémonos en la subcadena de $\mathcal{B}$ que va del eslabón i al eslabón j, $\mathcal{B}_{(i,j)} = \{B_i, B_{i+1}, ..., B_{k-1}, B_k, ..., B_{l-1}, B_l, ..., B_{j-1}, B_j\}$.

Ahora supongamos que $i' < j'$ (el caso $i' > j'$ es análogo) y consideremos la subcadena $\mathcal{A}_{(i',j')}$ de $\mathcal{A}$. De esta subcadena $\mathcal{A}_{(i',j')}$, sea $A_{k'}$ el último eslabón contenido en la subcadena $\mathcal{B}_{(i,k)}$. Como $A_{i'} \subset B_i$ y $A_{j'} \subset B_j$, entonces $i' \leq k' < j'$.

Veamos que $A_{k'} \subset B_k$. Como $A_{k'+1}$ no está contenida en $\mathcal{B}_{(i,k)}$y como $\mathcal{A}$ refina a $\mathcal{B}$, entonces $A_{k'+1} \subset B_t$ para algún $t \geq k+1$ ó $t \leq i$. El caso en que $t \leq i$ no se puede dar pues $j' \geq k'+1$ y $A_{j'} \subset B_j$ lo cual querría decir que existe un indice r' tal que $k'+1 < r' < j'$ tal que $A_{r'} \subset B_i$ y esto es una contradicción a la elección de k'. Por tanto $A_{k'+1} \subset B_t$ con $t \geq k+1$ y $A_{k'} \subset B_s$ con $i \leq s \leq k$, si $s < k$, entonces $B_s \cap B_t = \emptyset$ y por lo tanto $A_{k'} \cap A_{k'+1} = \emptyset$ lo cual es una contradicción a la definición de cadena, por lo que $s = k$ y $A_{k'} \subset B_k$.

Ahora de la subcadena $\mathcal{A}_{(k',j')}$ sea $A_{l'}$ el último eslabón contenido en la subcadena $\mathcal{B}_{(k+1,l)}$. Como $A_{k'+1} \subset B_{k+1}$ y $A_{j'} \subset B_j$, entonces $k'+1 \leq l' < j'$. De igual manera que en el caso anterior podemos probar que $A_{l'} \subset B_l$ de manera que la subcadena $\mathcal{A}_{(i',j')}$ es de la forma $\mathcal{A}_{(i',j')} = \{A_{i'}, A_{i'+1}, ..., A_{k'-1}, A_{k'}, ..., A_{l'-1}, A_{l'}, ..., A_{j'-1}, A_{j'}\}$ con $A_{i'} \subset B_i$, $A_{k'} \subset B_k$, $A_{l'} \subset B_l$, $A_{j'} \subset B_j$ e $i' < k' < l' < j'$, y como $B_k \subset C_{n-1}$ y $B_l \subset C_{m+1}$, entonces $A_{k'} \subset C_{n-1}$ y $A_{l'} \subset C_{m+1}$, por tanto $\mathcal{A}$ se retuerce en $\mathcal{C}$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.19 *Sea $\{\mathcal{C}_n\}$ una sucesión de cadenas tales que para toda $n \geq 2$, $\mathcal{C}_n$ se retuerce en $\mathcal{C}_{n-1}$, entonces para toda $M \in \mathbb{N}$, si $k > M$ se tiene que $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$.*

Demostración. Haremos esta prueba por inducción. Si $k = M+1$, tenemos que $\mathcal{C}_{M+1}$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$. Ahora supongamos que $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$, probaremos que $\mathcal{C}_{k+1}$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$.

Como $\mathcal{C}_{k+1}$ se retuerce en $\mathcal{C}_k$, en particular $\mathcal{C}_{k+1}$ refina a $\mathcal{C}_k$ y como $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$, entonces por el Lema 3.18 tenemos que $\mathcal{C}_{k+1}$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$. De modo que hemos probado que para toda $k > M$, $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$, y el lema queda demostrado.

■

Definición 3.20 *Sea $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ una cadena de p a q. Decimos que el arco L se retuerce en $\mathcal{C}$ si:*
(a) $L \subset \mathcal{C}^*$,
(b) Si existen puntos p_m, p_n tales que $p_m \in L \cap C_m$ y $p_n \in L \cap C_n$ con $m < n-2$, entonces existen puntos p_l y p_k, del arco $p_m p_n$ con $p_m < p_l < p_k < p_n$ (o $p_m > p_l > p_k > p_n$) en el orden natural del arco $p_m p_n$ tales que $p_l \in C_{n-1}$ y $p_k \in C_{m+1}$.

Lema 3.21 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ una cadena, L un arco que se retuerce en $\mathcal{C}$ y L' un subarco de L, entonces L' se retuerce en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Como L' es un subarco de L y L se retuerce en $\mathcal{C}$, entonces $L \subset \mathcal{C}^*$ y $L' \subset \mathcal{C}^*$.

Ahora si $L' \cap C_m \neq \emptyset$ y $L' \cap C_n \neq \emptyset$ con $m < n-2$, entonces existen puntos $p_m \in L' \cap C_m \subset L \cap C_m$ y $p_n \in L' \cap C_n \subset L \cap C_n$. Como L se retuerce en $\mathcal{C}$ existen puntos p_l y p_k del arco $p_m p_n$ con $p_m < p_l < p_k < p_n$ (ó $p_m > p_l > p_k > p_n$) en el orden natural del arco $p_m p_n$ tales que $p_l \in C_{n-1}$ y $p_k \in C_{m+1}$.

Como $p_m, p_n \in L'$, entonces el arco $p_m p_n$ está contenido en L' y por tanto $p_k, p_l \in L'$, con esto hemos probado que L' se retuerce en $\mathcal{C}$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.22 *Sean $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ y $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, ..., D_r\}$ cadenas tales que $\mathcal{D}$ se retuerce en $\mathcal{C}$ y L un arco contenido en $\mathcal{D}^*$, entonces L se retuerce en $\mathcal{C}$.*

Demostración. Supongamos que $L \cap C_m \neq \emptyset$ y $L \cap C_n \neq \emptyset$, con $m < n-2$, entonces existen puntos p_m, $p_n \in L$ tales que $p_m \in L \cap C_m$ y $p_n \in L \cap C_n$, como $L \subset \mathcal{D}^*$, existen eslabones D_i y D_j de $\mathcal{D}$ tales que $p_m \in D_i$ y $p_n \in D_j$, como $D_i \cap C_m \neq \emptyset$, $D_j \cap C_n \neq \emptyset$ y $\mathcal{D}$ se retuerce en $\mathcal{C}$, entonces existen índices k, l tales que $i < k < l < j$ y $D_k \subset C_{n-1}$ y $D_l \subset C_{m+1}$. Como $L \subset \mathcal{D}^*$, existe un punto p_k en el arco $p_m p_n$ tal que $p_k \in D_k$ y por la misma razón existe un punto $p_l \in p_k p_n$ tal que $p_l \in D_l$. De modo que $p_m p_n = p_m p_k \cup p_k p_l \cup p_l p_n$ con $p_m < p_l < p_k < p_n$, además tenemos que $p_k \in D_k \subset C_{n-1}$ y $p_l \subset D_l \subset C_{m+1}$, por lo que tenemos que L se retuerce en $\mathcal{C}$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.23 *Sea* $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de cadenas tal que para toda* $n \geq 2$, $\mathcal{C}_n$ *se retuerce en* $\mathcal{C}_{n-1}$, *y sea* $\{L_n\}$ *una sucesión de arcos, tales que para toda* $n \in \mathbb{N}$, L_n *va derecho en* $\mathcal{C}_n$, *entonces para toda* $M \in \mathbb{N}$, *si* $k > M$ *se tiene que* L_k *se retuerce en* $\mathcal{C}_M$.

Demostración. Por el Lema 3.18, tenemos que para toda $k > M$, $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$. Como L_k va derecho en $\mathcal{C}_k$ y $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$, entonces por el Lema 3.22 tenemos que L_k se retuerce en $\mathcal{C}_M$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.24 *Sean* $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, ..., C_s\}$ *una cadena cerrada, tal que cumple que* $diam(C_i) < \varepsilon$ *y* L *un arco derecho en* $\mathcal{C}$ *tal que* $L \cap C_1 \neq \emptyset$ *y* $L \cap C_s \neq \emptyset$. *Entonces* L *se puede descomponer en la forma* $L = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_s$ *donde para cada* $i \in \{1, 2, ..., s\}$, D_i *es un arco,* $diam(D_i) \leq \varepsilon$ *y* $D_i \cap D_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$.

Demostración. Consideremos $D_i = L \cap C_i$. Como L va derecho en $\mathcal{C}$, entonces por la Definición 3.15 (b) tenemos que $L \subset \mathcal{C}^*$ y $L = L \cap \mathcal{C}^* = L \cap (C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_s) =$

$(L \cap C_1) \cup (L \cap C_2) \cup ... \cup (L \cap C_s) = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_s$.

Por la Definición 3.15 (c) si x, $y \in D_i$, entonces el subarco xy de L está contenido en C_i, por lo que $L \cap C_i$ es un subconjunto arco conexo del arco L, con lo cual tenemos que $D_i = L \cap C_i$ es un subarco del arco L. Tenemos también que diam$(C_i) < \varepsilon$, entonces diam$(L \cap C_i) \leq \varepsilon$, por lo que diam$(D_i) \leq \varepsilon$, y esto ocurre para toda $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Además si $y \in D_i \cap D_j$, entonces $y \in L \cap (C_i \cap C_j)$, así que $y \in C_i \cap C_j$, pero esto sólo es posible si $|i - j| \leq 1$ por la definición de cadena (Definición 3.1). con esto terminamos la prueba del lema. Por otra parte, cada conjunto de la forma $C_i \cap C_{i+1}$ tiene la propiedad de que $(C_1 \cup ... \cup C_i) \cap (C_{i+1} \cup ... \cup C_n) = C_i \cap C_{i+1}$, por lo que si $(C_1 \cup ... \cup C_i) \setminus (C_i \cap C_{i+1}) \neq \emptyset$, entonces $C_i \cap C_{i+1}$ separa a estos conjuntos. Esto implica que L intersecta a cada conjunto de la forma $C_i \cap C_{i+1}$. Por tanto $D_i \cap D_{i+1} \neq \emptyset$.

■

Consideremos la sucesión $\{\mathcal{C}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de la construcción del pseudoarco $(\mathcal{P})$ y los arcos L_n de la Definición 3.16. Probaremos ahora un lema que es de suma importancia. En este lema probaremos ciertas propiedades de estos arcos, y de la manera como se comportan cuando existen encajes de un arco L_n en un arco L_m.

Lema 3.25 *Sean L' y L dos arcos y $h : L' \to L$ un homeomorfismo. Supongamos que $L' = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_s$ con $s \leq n$, donde cada D_i es un arco y $D_i \cap D_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |i-j| \leq 1$. Supongamos que L contiene $n+1$ arcos A_1, $A_2, ..., A_n$, A_{n+1}, ajenos dos a dos, entonces existen $j \in \{1, 2, ..., n+1\}$ e $i \in \{1, 2, ..., s\}$ tales que $A_j \subset h(D_i)$.*

Demostración. Como h es homeomorfismo, los conjuntos $h^{-1}(A_1), h^{-1}(A_2), ..., h^{-1}(A_{n+1})$ son arcos de L' ajenos entre sí.

Podemos suponer que $h^{-1}(A_1) < h^{-1}(A_2) < ... < h^{-1}(A_{n+1})$ en el sentido de que si le damos un orden a L', entonces $h^{-1}(A_1)$ está a la izquierda de $h^{-1}(A_2)$, etc. Sean d_0, d_{n+1} los extremos del arco L', con $d_0 < d_{n+1}$. Entonces existen puntos $d_1, ..., d_n \in L'$ tales que $h^{-1}(A_i) \subset [d_{i-1}, d_i]$ para toda $i \in \{1, ..., n+1\}$. Notemos que $d_0, d_1, ..., d_{n+1}$ son $n+2$ puntos en $L' = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_s$ y $s \leq n \leq n+2$. Por el principio de las casillas, existen $i, j \in \{0, ..., n+1\}$ tales que $d_i, d_j \in D_k$ para alguna $k \in \{1, ..., s\}$ y $j < i$. Entonces $h^{-1}(A_{j+1}) \subset [d_j, d_{j+1}] \subset [d_j, d_i] \subset D_k$. Esto termina la prueba del lema.

■

Lema 3.26 *Sea $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de arcos de la Definición 3.16. Para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $m_n \in \mathbb{N}$, tal que si $k \geq m_n$, L' es un subarco de L_n y h es un encaje $h : L' \to L_k$, entonces se cumple alguna de las siguientes dos afirmaciones:*

(a) $diam(h(L')) < \frac{1}{4}$ ó

(b) existen puntos x, $y \in L'$ tales que $||x, y|| < \frac{1}{n}$ y $||h(x), h(y)|| \geq \frac{1}{8}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que L_n va derecho por la cadena $\mathcal{C}_n = \{C_1^n, C_2^n, ..., C_{s_n}^n\}$. Donde s_n es un número fijo que representa el número de eslabones de la cadena $\mathcal{C}_n$. Sea $M \in \mathbb{N}$ que cumpla con las siguientes condiciones:

(i) $\frac{3s_n+2}{2^M} < \frac{1}{4}$, y

(ii) $\frac{s_n}{2^M} + \frac{1}{2^M} < \frac{1}{16}$

Entonces para toda $m \geq M$ se cumple que $\frac{3s_n+3}{2^m} < \frac{1}{4}$ y $\frac{s_n}{2^m} + \frac{1}{2^m} < \frac{1}{16}$.

Sea $m_n = M + 1$. Veamos que si $k \geq m_n$, L' es un subarco de L_n y h es un encaje $h : L' \to L_k$, entonces se cumple (a) ó (b).

Supongamos que no se cumple (a), entonces $\text{diam}(h(L')) \geq \frac{1}{4}$, por lo que existen puntos x, $y \in h(L') \subset L_k$ tal que $||x - y|| \geq \frac{1}{4}$.

Consideremos el arco $xy \subset L_k$ como $L_k \subset C_k^*$ y $C_k^* \subset C_M^*$; entonces $xy \subset C_M^*$.

Sea C_i^M el primer eslabón de $\mathcal{C}_M$ tal que $xy \cap C_i^M \neq \emptyset$ y C_j^M el último eslabón de $\mathcal{C}_M$ tal que $xy \cap C_j^M \neq \emptyset$, entonces si consideramos la subcadena $\mathcal{C}_{M(i,j)}$, $xy \subset \mathcal{C}^*_{M(i,j)}$ y como $xy \cap C_i^M \neq \emptyset \neq C_j^M \cap xy$, entonces por el Lema 3.13, tenemos que $xy \cap C_l^M$ es diferente del vacío para toda $l \in \{i, i+1, ..., j-1, j\}$.

Recuerde que $\mathcal{C}^*_{M(i,j)} = C_i^M \cup C_{i+1}^M \cup ... C_{j-1}^M \cup C_j^M$

Afirmación 1. $|i-j| > 3s_n + 3$.

Supongamos por el contrario que $|i-j| \leq 3s_n + 3$, entonces tenemos que

$$||x-y|| \leq \operatorname{diam}(xy) \leq \operatorname{diam}(\mathcal{C}^*_{M(i,j)}) \leq \tfrac{|i-j|}{2^M} \leq \tfrac{3s_n+3}{2^M} < \tfrac{1}{4}.$$

Lo cual es una contradicción, pues el diam$||x-y|| \geq \frac{1}{4}$. Por tanto $|i-j| > 3s_n + 3$.

Notemos que L_k va derecho por $\mathcal{C}_k$ y como $k > M$, tenemos por el Lema 3.18 que $\mathcal{C}_k$ se retuerce en $\mathcal{C}_M$ y por el Lema 3.22 podemos concluir que L_k se retuerce en $\mathcal{C}_M$. Como xy es un subarco de L_k, tenemos por el Lema 3.21 que xy se retuerce en $\mathcal{C}_M$.

Consideremos la subcadena $\mathcal{C}_{M(i,j)} = \{C_i^M, C_{i+1}^M, ..., C_{j-1}^M, C_j^M\}$ de $\mathcal{C}_M$. Podemos suponer que $i < j$ (ya que i y j juegan papeles simétricos) y como por la Afirmación 1, $|i-j| \leq 3s_n + 3$, entonces $j > i + 3s_n + 3$.

Ahora consideremos la subcadena $\mathcal{C}_{M(i+s_n, j-(s_n+1))} = \{C^M_{i+s_n}, C^M_{i+(s_n+1)}, ..., C^M_{j-(s_n+2)}, C^M_{j-(s_n+1)}\}$ de $\mathcal{C}_{M(i,j)}$. Como $j-(s_n+1) > i + 3s_n + 3 - (s_n+1) = i + 2s_n + 2$, esta subcadena existe.

Afirmación 2. El diam$(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n, j-(s_n+1))}) > \frac{1}{8} + \frac{2}{2^M}$

Supongamos por el contrario que diam$(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) \leq \frac{1}{8} + \frac{2}{2^M}$. Como diam$(\mathcal{C}^*_{M(i,i+s_n-1)})$ =diam$(C_i^M \cup C_{i+1}^M \cup ... \cup C^M_{i+s_n-2} \cup C^M_{i+s_n-1}) \leq \frac{|i-(i+s_n-1)|}{2^M} = \frac{s_n-1}{2^M} < \frac{1}{16} - \frac{1}{2^M}$ y diam$(\mathcal{C}^*_{M(j-s_n,j)})$ =diam$(C^M_{j-s_n} \cup C^M_{j-(s_n+1)} \cup ... \cup C^M_{j-1} \cup C^M_j) \leq \frac{|j-(j-s_n)|}{2^M} = \frac{s_n}{2^M} < \frac{1}{16} - \frac{1}{2^M}$. Entonces el diam$(\mathcal{C}^*_{M(i,j)})$ =diam$(\mathcal{C}^*_{M(i,i+s_n-1)} \cup \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))} \cup \mathcal{C}^*_{M(j-s_n,j)}) \leq$diam$(\mathcal{C}^*_{M(i,i+s_n-1)})+$ diam$(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))})+$ diam$(\mathcal{C}^*_{M(j-s_n,j)}) < \frac{1}{16} - \frac{1}{2^M} + \frac{1}{8} + \frac{2}{2^M} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2^M} = \frac{1}{4}$, lo cual es una contradicción pues $xy \subset \mathcal{C}^*_{M(i,j)}$ y $||x-y|| \geq \frac{1}{4}$, con lo que tenemos que diam$(\mathcal{C}^*_{M(i,j)}) \geq \frac{1}{4}$. Por tanto diam$(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) > \frac{1}{8} + \frac{2}{2^M}$.

Afirmación 3. $h(L') \subset L_k$ y $h(L')$ contiene s_n+1 arcos $A_1, A_2, ..., A_{s_n+1}$, ajenos dos a dos y tales que el diam$(A_i) \geq \frac{1}{8}$ para toda $i \in \{1, 2, ..., s_n+1\}$.

Tenemos que $xy \subset h(L') \subset L_k$, sabemos que L_k va derecho en C_k y que C_k se retuerce en C_M. Por tanto L_k se retuerce en C_M (Lema 3.22), y como $xy \subset L_k$, tenemos que xy se retuerce en C_M (Lema 3.21). También sabemos que $xy \subset \mathcal{C}^*_{M(i,j)}$.

Ahora como $xy \cap C_i \neq \emptyset \neq C_j \cap xy$, entonces existen puntos p_1, p_j de xy tales que $p_1 \in C_i$ y $p_j \in C_j$, como p_1 y p_j son puntos de xy, entonces p_1p_j es un subarco de xy.

Ahora como $p_1p_j \subset xy \subset \mathcal{C}^*_{M(i,j)}$ y $j > i + 3s_n + 3$, tenemos que $i + 3s_n + 1 < j - 2$, así que como xy se retuerce en $\mathcal{C}^*_{M(i,j)}$, por la Definición 3.20, existen puntos p_2 y $p^{(1)}_{j-1}$ tales que $p_1 < p^{(1)}_{j-1} < p_2 < p_j$ tales que $p^{(1)}_{j-1} \in C_{j-1}$ y $p_2 \in C_{i+1}$. De modo que el arco $p_1p^{(1)}_j = p_1p^{(1)}_{j-1} \cup p^{(1)}_{j-1}p_2 \cup p_2p_j$. Sea $A_1 = p_1p^{(1)}_{j-1}$, entonces $p_1p_j = A_1 \cup p^{(1)}_{j-1}p_2 \cup p_2p_j$.

Ahora consideremos el arco p_2p_j, este arco cumple que $p_2p_j \cap A_1 = \emptyset$, además como $p_2 \in C_{i+1}$, $p_j \in C_j$, y como xy se retuerce en $\mathcal{C}_{M(i,j)}$, entonces existen puntos $p^{(2)}_{j-1}$ y p_3 del arco p_2p_j tales que $p_2 < p^{(2)}_{j-1} < p_3 < p_j$ y $p^{(2)}_{j-1} \in C_{j-1}$ y $p_3 \in C_{i+3}$. De modo que el arco $p_2p_j = p_2p^{(2)}_{j-1} \cup p^{(2)}_{j-1}p_3 \cup p_3p_j$. Sea $A_2 = p_2p^{(2)}_{j-1}$, entonces $p_2p_j = A_2 \cup p^{(2)}_{j-1}p_3 \cup p_3p_j$ y $p_1p_j = A_1 \cup p^{(1)}_{j-1}p_2 \cup A_2 \cup p_3p_j$, donde $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Puesto que $i + s_n < j - 2$, podemos aplicar este proceso s_{n+1} veces y obtener que $p_1p_j = A_1 \cup p^{(1)}_{j-1}p_2 \cup A_2 \cup p^{(2)}_{j-1}p_3 \cup A_3 \cup ... \cup p^{(s_n)}_{j-1}p_{s_n+1} \cup A_{s_{n+1}} \cup p^{(s_n+1)}_{j-1}p_{s_n+2} \cup p_{s_n+2}p_j$, donde $A_t \cap A_s = \emptyset$ para cualesquiera $t \neq s$.

Notemos que para cada $t \in \{1, 2, ..., s_n + 1\}$, $A_t = p_tp^{(t)}_{j-1}$ donde $p_t \in C_{i+(t-1)}$ y $p^{(t)}_{j-1} \in C_{j-1}$, de manera que por el Lema 3.13, tenemos que $A_t \cap C_l \neq \emptyset$ para todo eslabón C_l tal que $C_l \in \mathcal{C}_{M(i+(t-1),j-1)}$. Ahora $i + (t-1) \leq i + s_n$ y $j - 1 > j - (s_n + 1)$, de modo que $\mathcal{C}_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$ es una subcadena de $\mathcal{C}_{M(i+(t-1),j-1)}$.

Consideremos $A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$, como $\mathcal{C}_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$ es cerrada, entonces $A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$ es cerrado.

Veremos que

$$H(A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}, \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) \leq \tfrac{1}{2^M}.$$

Como $A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))} \subset \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$ tenemos que

$$A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))} \subset N(\tfrac{1}{2^M}, \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}).$$

Sea $u \in \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$, entonces $u \in C_s$ para algún eslabón C_s de $\mathcal{C}_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$. Sabemos $A_t \cap C_l \neq \emptyset$ para todo eslabón de la cadena $\mathcal{C}_{M(i+(t-1),j-1)}$ y como $C_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$ es una subcadena de $\mathcal{C}_{M(i+(t-1),j-1)}$, entonces $A_t \cap C_s \neq \emptyset$ por lo que existe $v \in A_t \cap C_s$. Como $\operatorname{diam}(C_s) < \frac{1}{2^M}$, entocnes $||u-v|| < \frac{1}{2^M}$, de manera que acabamos de probar que para toda $u \in \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$, existe $v \in A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}$ tal que $||u-v|| < \frac{1}{2^M}$, por tanto $\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))} \subset N(\frac{1}{2^M}, A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))})$. De las dos contenciones obtenemos que $H(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}, A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) < \frac{1}{2^M}$.

Por la Afirmación 2, sabemos que $\operatorname{diam}(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) > \frac{1}{8} + \frac{2}{2^M}$, como $H(\mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}, A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) < \frac{1}{2^M}$, entonces $\operatorname{diam}(A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) \geq (\frac{1}{8} + \frac{2}{2^M}) - \frac{2}{2^M} = \frac{1}{8}$.

Tenemos entonces que $\operatorname{diam}(A_t \cap \mathcal{C}^*_{M(i+s_n,j-(s_n+1))}) \geq \frac{1}{8}$ y por tanto $\operatorname{diam}(A_t) \geq \frac{1}{8}$ para toda $t \in \{1, 2, ..., s_n+1\}$. De modo que hemos probado que el arco $xy \subset h(L')$ contiene s_n+1 arcos $A_1, A_2, ..., A_{s_n+1}$, ajenos dos a dos tales que $\operatorname{diam}(A_t) \geq \frac{1}{8}$ para toda $t \in \{1, 2, ..., j-1\}$.

Ahora por el Lema 3.24 sabemos que $L_n = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_{s_n}$ donde D_i es un arco, $\operatorname{diam}(D_i) \leq \frac{1}{2^n}$ y $D_i \cap D_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |i-j| \leq 1$. Sea $K_i = D_i \cap D_{i+1}$ y d_i el punto medio de K_i y sean d_0 y d_n los extremos del arco L_n, podemos suponer que $d_0 \in D_1$ y $d_n \in D_{s_n}$. Entonces $L_n = d_0d_1 \cup d_1d_2 \cup ... \cup d_{n-1}d_n$, $L' = L' \cap (d_0d_1 \cup d_1d_2 \cup ... \cup d_{n-1}d_n)$ y sea $D'_i = L' \cap d_{i-1}d_i$ es un arco o el conjunto vacío. Sea i' el primer índice tal que $D'_{i'} \neq \emptyset$ y j' el último índice tal que $D'_{j'} \neq \emptyset$, entonces $D'_k \neq \emptyset$ para toda $i' \leq k \leq j'$ e $|i'-j'| \leq s_n$, de modo que L' contiene a lo mas s_n arcos D'_i. y $\operatorname{diam}(D'_i) \leq \frac{1}{2^n}$.

Como $h: L' \to h(L')$ es un homeomorfismo y por la Afirmación 3, $h(L')$ contiene s_n+1 arcos $A_1, A_2, ..., A_{s_n+1}$ ajenos dos a dos, entonces por el Lema 3.25, tenemos que existen $k \in \{1, 2, ..., s_{n+1}\}$ y $l \in \{i', i'+1, ..., j'\}$ tal que $A_k \subset h(D'_l)$. Como por la Afirmación 3, $\operatorname{diam}(A_k) \geq \frac{1}{8}$, y como $\operatorname{diam}(D'_l) < \frac{1}{2^n}$ tenemos entonces que existen puntos $x_n, y_n \in L'$ tales que $||x_n - y_n|| < \frac{1}{n}$ y $||h(x_n) - h(y_n)|| \geq \frac{1}{8}$.

Por tanto hemos probado que si $k \geq m_n$ y $h: L' \subset L_n \to L_k$ es un encaje entonces

(a) $\operatorname{diam}(h(L')) \geq \frac{1}{4}$ ó

(b) existen dos puntos $x_n, y_n \in L'$ tal que $||x_n, y_n|| < \frac{1}{n}$ y $||h(x_n), h(y_n)|| \geq \frac{1}{8}$.

Con esto acabamos la prueba del lema.

■

Acabamos de probar un lema (Lema 3.26) que es de suma importancia para la construcción de la familia no numerable de compactaciones con residuo pseudoarco. Ahora vamos a generalizar un poco más este lema. Para ello necesitamos una serie de definiciones y resultados que a continuación desarrollaremos.

Definición 3.27 *Sea $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de arcos de la Definición 3.16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n : L_n \to [0, \frac{1}{32}]$ una función continua tal que para todo $p, q \in L_n$ se tiene que $|\alpha_n(p) - \alpha_n(q)| \leq ||p - q||$ y sea $J_n = \{(p, \alpha_n(p)) : p \in L_n\}$.*

Lema 3.28 *Consideremos la sucesión de arcos $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m_n \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq m_n$, si J' es un subarco de J_n y h es un encaje $h : J' \to J_k$, entonces alguna de las siguientes condiciones se cumple:*
(a) diam $(h(J')) \leq \frac{1}{3}$ o
(b) existen dos puntos $x_n, y_n \in J_n$ tales que $||x_n - y_n|| \leq \frac{2}{n}$ y $||h(x_n) - h(y_n)|| \geq \frac{1}{8}$.

Demostración. Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, dada por $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$. Como $L_n \subset \mathbb{R}^2$, cada punto $p \in L_n$, lo podemos ver como $(p, 0) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

Afirmación 1. La función π, cumple que $(\pi|J_n) : J_n \to L_n$ es un homeomorfismo y $||\overline{x} - \pi(\overline{x})|| \leq \frac{1}{32}$.

Claramente $(\pi|J_n)$ es una función continua y biyectiva entre compactos y por tanto es un homeomorfismo. Sea $\overline{x} \in J_n$, entonces $\overline{x} = (p, \alpha_n(p))$, donde $p \in L_n$, y $\pi(\overline{x}) = \pi(p, \alpha_n(p)) = p = (p, 0)$ y por tanto $\pi(J_n) = L_n$. Ahora $||\overline{x} - \pi(\overline{x})|| = ||(p, \alpha_n(p)) - (p, 0)|| \leq |\alpha_n(p) - 0| \leq \frac{1}{32}$.

Afirmación 2. La función $(\pi|J_n)^{-1}$ cumple que $(\pi|J_n)^{-1} : L_n \to J_n$ es un homeomorfismo y $||p - \pi^{-1}(p)|| \leq \frac{1}{32}$ para toda $p \in L_n$.

Como por la Afirmación 1, $(\pi|J_n)$ es un homeomorfismo, su inversa lo es. Sea $p \in L_n$, entonces $(p, \alpha_n(p)) \in J_n$ y $(\pi|J_n)^{-1}(p) = (p, \alpha_n(p))$. De modo que $||p - \pi^{-1}(p)|| = ||(p, 0) - (p, \alpha_n(p))|| \leq |\alpha_n(p) - 0| \leq \frac{1}{32}$.

Por el Lema 3.26 para toda $n \in \mathbb{N}$, existe m'_n tal que si $k \geq m'_n$, L' es un subarco de L_n y $h' : L' \to L_k$ es un encaje, entonces:
(a) $\text{diam}(h'(L')) \leq \frac{1}{4}$ o
(b) existen puntos x', $y' \in L'$ tales que $||x' - y'|| < \frac{1}{n}$ y $||h'(x'_n) - h'(y'_n)|| \geq \frac{1}{8}$

Sean $m_n = m'_n$, $k \geq m_n$ y $h : J' \to J_k$ un encaje. Llamaremos $\pi_n = \pi|J_n : J_n \to L_n$, $\pi_k = \pi|J_k : J_k \to L_k$ y sea $L' = \pi_n(J')$. Claramente L' es un subarco de L_n. Consideremos $h' : L' \to L_k$ dada de la siguiente manera $h' = \pi_k \circ h \circ (\pi_n)^{-1}|L'$. Como $(\pi_n)^{-1}|L' : L' \to J'$, $h : J' \to J_k$ y $\pi_k : J_k \to L_k$, entonces h' está bien definida, y como es composición de encajes con homeomorfismos, h' es un encaje.

Afirmación 3. Supongamos que la condición (a) del Lema 3.26 se satisface, es decir que $\operatorname{diam}(h'(L')) \leq \frac{1}{4}$, entonces $\operatorname{diam}(h(J')) \leq \frac{1}{3}$.

Sean $x, y \in J'$ dos puntos cualesquiera, entonces $\pi_n(x)$, $\pi_n(y) \in L'$, como $\operatorname{diam}(h'(L')) \leq \frac{1}{4}$, entonces $||h'(\pi_n(x)) - h'(\pi_n(y))|| \leq \frac{1}{4}$, como por la Afirmación 1, $||\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(x)) - h'(\pi_n(x))|| \leq \frac{1}{32}$ y $||\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(y)) - h'(\pi_n(y))|| \leq \frac{1}{32}$, entonces
$||\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(x)) - \pi_k^{-1}(h'(\pi_n(y))|| \leq ||\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(x)) - h'(\pi_n(x))|| + ||h'(\pi_n(x)) - h'(\pi_n(y))|| + ||\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(y)) - h'(\pi_n(y))|| \leq \frac{1}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} = \frac{10}{32} \leq \frac{1}{3}$.

Pero $h' = \pi_k \circ h \circ \pi_n^{-1}$, entonces $\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(x))) = h(x)$ y $\pi_k^{-1}(h'(\pi_n(y))) = h(y)$, por tanto tenemos que para toda $x, y \in J'$ se cumple que $||h(x) - h(y)|| \leq \frac{1}{3}$ y por tanto $\operatorname{diam}(h(J')) \leq \frac{1}{3}$.

Afirmación 4. Sean u, v puntos cualesquiera de L' y w,z puntos cualesquiera de L_k, entonces $||\pi_n^{-1}(u) - \pi_n^{-1}(v)|| \geq ||u - v||$ y $||\pi_k^{-1}(w) - \pi_k^{-1}(z)|| \geq ||w - z||$.

Sean $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $z = (z_1, z_2)$ y $w = (w_1, w_2)$, entonces $\pi_n^{-1}(u) = (u_1, u_2, \alpha_n(u))$ y $\pi_n^{-1}(v) = (v_1, v_2, \alpha_n(v))$, entonces

$$||\pi_n^{-1}(u) - \pi_n^{-1}(v)|| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (\alpha_n(u) - \alpha_n(v))^2} \geq \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2} = ||u - v||.$$

De la misma manera $\pi_k^{-1}(w) = (w_1, w_2, \alpha_k(w))$ y $\pi_k^{-1}(z) = (z_1, z_2, \alpha_k(z))$, entonces

$$|\pi_k^{-1}(w) - \pi_k^{-1}(z)|| = \sqrt{(w_1 - z_1)^2 + (w_2 - z_2)^2 + (\alpha_n(w) - \alpha_n(z))^2} \geq \sqrt{(w_1 - z_1)^2 + (w_2 - z_2)^2} = ||w - z||.$$

Afirmación 5. Supongamos ahora que la condición (b) del Lema 3.26 se satisface, es decir que existen puntos x'_n, $y'_n \in L'$ tales que $||x'_n - y'_n|| < \frac{1}{n}$ y $||h'(x'_n) - h'(y'_n)|| \geq \frac{1}{8}$, entonces existen puntos $x_n, y_n \in J'$ tal que $||x_n - y_n|| < \frac{2}{n}$ y $||h(x_n) - h(y_n)|| \geq \frac{1}{8}$.

Sean $x_n = \pi_n^{-1}(x'_n) = (x'_n, \alpha_n(x'_n))$ y $y_n = \pi_n^{-1}(y'_n) = (y'_n, \alpha_n(y'_n))$, entonces por la Afirmación 4, $||x'_n - y'_n|| \leq ||x_n - y_n||$ y como $||x_n - y_n|| = ||(x'_n, \alpha_n(x'_n)) - (y'_n, \alpha_n(y'_n))|| \leq ||x'_n - y'_n|| + |\alpha_n(x'_n) - \alpha_n(y'_n)|$ y por la Definición 3.27, $|\alpha_n(x'_n) - \alpha_n(y'_n)| \leq ||x'_n - y'_n||$, tenemos que $||x_n - y_n|| \leq 2||x'_n - y'_n||$ y por tanto si $||x'_n - y'_n|| < \frac{1}{n}$, entonces $||x_n - y_n|| < \frac{2}{n}$.

Ahora si $||h'(x'_n) - h'(y'_n)|| \geq \frac{1}{8}$, como $h' = \pi_k \circ h \circ \pi_n^{-1}$ entonces, $h'(x'_n) = \pi_k(h(\pi_n^{-1}(\pi_n(x_n)))) = \pi_k(h(x_n))$ y $h'(y'_n) = \pi_k \circ h \circ \pi_n^{-1}(\pi_n(y_n)) = \pi_k(h(y_n))$. Además $||h(x_n) - h(y_n)|| = ||\pi_k^{-1}(\pi_k(h(x_n))) - \pi_k^{-1}(\pi_k(h(y_n)))||$, por la Afirmación 4, sabemos que $||\pi_k^{-1}(\pi_k(h(x_n))) - \pi_k^{-1}(\pi_k(h(y_n)))|| \geq ||\pi_k(h(x_n)) - \pi_k(h(y_n))|| = ||h'(x'_n) - h'(y'_n)|| \geq \frac{1}{8}$. Por tanto si $||h'(x'_n) - h'(y'_n)|| \geq \frac{1}{8}$, entonces $||h(x_n) - h(y_n)|| \geq \frac{1}{8}$.

De modo que si $x'_n y'_n \in L'$ son tales que $||x'_n - y'_n|| < \frac{1}{n}$ y $||h'(x'_n) - h'(y'_n)|| \geq \frac{1}{8}$, entonces existen $x_n, y_n \in J'$ tales que $||x_n - y_n|| < \frac{2}{n}$ y $||h(x_n) - h(y_n)|| \geq \frac{1}{8}$.

De las afirmaciones 3 y 5 obtenemos lo que buscabamos y con esto terminamos la prueba del lema.

■

3.3 Una Familia no Numerable de Compactaciones

Ahora estamos listos para comenzar la construcción de una familia no numerable de compactaciones del rayo con residuo pseudoarco. Lo primero que haremos será definir inductivamente una sucesión creciente de enteros positivos $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Definición 3.29 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ considérese un número m_n como en el Lema 3.26. Sea $n_1 = 1$ y para toda $k \in \mathbb{N}$ sea $n_{k+1} = m_{n_k}$.*

Notemos que como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n < m_n$, entonces $n_1 < n_2 < ....$

Ahora dado un subconjunto infinito T de $\{n_1, n_2, n_3, ...\}$ construimos una compactación S_T del rayo $[0, \infty)$ de la siguiente manera.

Definición 3.30 *Supongamos que $T = \{j_1, j_2, j_3, ...\}$, donde $j_1 < j_2 < ....$ Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_i : L_{j_i} \to [0, \frac{1}{32}]$ dada por*

$$\alpha_i(x,y) = \begin{cases} x(\frac{1}{2^{i+5}}) + (1-x)(\frac{1}{2^{i+4}}), & \text{si } i \text{ es impar,} \\ x(\frac{1}{2^{i+4}}) + (1-x)(\frac{1}{2^{i+5}}), & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Lema 3.31 *La función $\alpha_i : L_{j_i} \to [0, \frac{1}{32}]$ es una función continua que cumple que para toda p, $q \in L_{j_i}$ se tiene que $|\alpha_i(p) - \alpha_i(q)| \leq ||p-q||$.*

Demostración. Sea $p = (x_1, y_1)$ y $q = (x_2, y_2)$ y supongamos que i es impar, entonces $|\alpha_i(p) - \alpha_i(q)| = |x_1(\frac{1}{2^{i+5}}) + (1-x_1)(\frac{1}{2^{i+4}}) - x_2(\frac{1}{2^{i+5}}) - (1-x_2)(\frac{1}{2^{i+4}})| = |(x_1 - x_2)\frac{1}{2^{i+5}} - (1 - x_1 - 1 + x_2)\frac{1}{2^{i+4}}| = |(x_1 - x_2)\frac{1}{2^{i+5}} - (x_1 - x_2)\frac{1}{2^{i+4}}| = |(x_1 - x_2)(\frac{1}{2^{i+5}} - \frac{1}{2^{i+4}})| = |(x_1 - x_2)(-\frac{1}{2^{i+5}})| = \frac{1}{2^{i+5}}|x_1 - x_2|$.

Ahora $||p-q|| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} \geq \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1 - x_2| > \frac{1}{2^{i+4}}|x_1 - x_2| = |\alpha_i(p) - \alpha_i(q)|$. Por tanto si i es impar entonces $|\alpha_i(p) - \alpha_i(q)| \leq ||p-q||$, el caso en que i es par, se demuestra de manera análoga y así el lema queda demostrado.

■

Ahora estamos listos para definir nuestra compactación $\mathcal{S}_T$ del rayo con residuo pseudoarco.

Definición 3.32 *Sean $J(j_i) = \{(p, \alpha_i(p)) \in \mathbb{R}^3 : p \in L_{j_i}\}$, $\mathcal{R}_T = \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}\}$ y finalmente sea $\mathcal{S}_T = \overline{\mathcal{R}_T}$.*

Lema 3.33 *Dado un subconjunto infinito T de $\{n_1, n_2, ...\}$ las siguientes condiciones se satisfacen*
(a) $\mathcal{R}_T$ es homeomorfo al rayo $[0, \infty)$,
(b) $\lim J(j_i) = \mathcal{P}$ (con la métrica de Hausdorff),
(c) $\mathcal{S}_T = \mathcal{R}_T \cup \mathcal{P}$,
(d) $\mathcal{S}_T$ es una compactación métrica del rayo con residuo pseudoarco.

Demostración. (a) Para demostrar este inciso construiremos un homeomorfismo $h : [0, \infty) \to \mathcal{R}_T$. Sea $h_i : [i-1, i] \to J(j_i)$ un homeomorfismo que cumple con lo siguiente:

$$h_i(i-1) = \begin{cases} (p_0, \alpha_i(p_0)), & \text{si } i \text{ es impar,} \\ (q_0, \alpha_i(q_0)), & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases} \quad \text{y}$$

$$h_i(i) = \begin{cases} (q_0, \alpha_i(q_0)), & \text{si } i \text{ es impar,} \\ (p_0, \alpha_i(p_0)), & \text{si } i \text{ es par.} \end{cases}$$

Sea $h : [0, \infty) \to \mathcal{R}_T$ dada por $h(x) = h_i(x)$ si $x \in [i-1, i]$. Veamos que la función h está bien definida. Si $x \in [0, \infty) \setminus \mathbb{N}$ no tenemos ningún problema, ahora sea $x = i \in \mathbb{N}$, entonces $h(x) = h_i(x)$ puesto que $x \in [i-1, i]$ y $h(x) = h_{i+1}(x)$ puesto que $x \in [i, i+1]$. Analizaremos el caso en que i es impar, y el caso en que i es par es análogo. Sea i impar, entonces $h(x) = h_i(i) = (q_0, \alpha_i(q_0)) = ((1,0), \frac{1}{2^{i+5}})$, ahora como i es impar, entonces $i+1$ es par, de modo que $h_{i+1}(x) = h_{i+1}(i) = (q_0, \alpha_{i+1}(q_0)) = ((1,0), \frac{1}{2^{(i+1)+4}}) = ((1,0), \frac{1}{2^{i+5}})$. De modo que h está bien definida.

Probaremos que h es continua, inyectiva, suprayectiva y abierta.

Afirmación 1. La función h es continua e inyectiva.

Como h es continua en cada cerrado de una familia localmente finita y coincide en las intersecciones, entonces h es una función continua. Para ver que h es inyectiva, sean $x, y \in [0, \infty)$, $x \neq y$. Si existe $i \in \mathbb{N}$, tal que $x, y \in [i-1, i]$, entonces $h(x) = h_i(x)$ y $h(y) = h_i(y)$ y como h_i es un homeomorfismo de $[i-1, i]$ en $J(j_i)$, entonces $h(x) \neq h(y)$. Ahora si para toda i se tiene que $x, y \notin [i-1, i]$ y $x < y$, entonces $x \in [m-1, m]$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ y $y \in (m, \infty)$, de modo que $h(x) = h_m(x) \in J(j_m)$ y $h_i(y) \in \bigcup\limits_{n \geq m} J(j_n)$.

Notemos que cada número de la forma $\alpha_i(u, v)$ es una combinación convexa de $\frac{1}{2^{i+5}}$ y $\frac{1}{2^{i+4}}$, por lo que $J(j_i) \in [0,1]^2 \times \{\frac{1}{2^{m+5}}\}$. Entonces $h(x) = h(y) \in [0,1]^2 \times \{\frac{1}{2^{m+5}}\}$. Pero si $h_m(x) = (u, v, \alpha_m(u, v))$, entonces $h(x) = h_m(x) = (u, v, u\frac{1}{2^{m+5}} + (1-u)\frac{1}{2^{m+4}})$, así que $u = 1$. Pero el único punto de L_{j_m} que tiene su primera coordenada igual a 1 es q_0. De modo que $(u, v) = q_0$ y $x = m$. Similarmente $y = m$. De manera que si $x \neq y$, entonces $h(x) \neq h(y)$ y por tanto h es inyectiva.

Afirmación 2. La función $h : [0, \infty) \to \bigcup\limits_{n \geq 0} J_n$ es suprayectiva.

Sea $p \in \bigcup\limits_{n \geq 0} J_n$, entonces $p \in J_n$ para alguna $n \geq 0$, de modo que como $h_n : [n, n+1] \to J_n$, es un homeomorfismo, para cada n, tenemos que existe $x \in [n, n+1]$ tal que $h_n(x) = p$, entonces $h(x) = h_n(x) = p$, por tanto existe $x \in [0, \infty)$ tal que $h(x) = p$, lo que prueba que h es una función suprayectiva.

Afirmación 3. La función h es abierta

Como h es continua, inyectiva y suprayectiva, por el Lema 2.40, sólo es necesario ver que para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $h([0,n)) \cap \overline{h([n,\infty))} = \emptyset$.

Ya que $h([i-1,i]) = J(j_i) \subset [0,1]^2 \times [\frac{1}{2^{i+5}}, \frac{1}{2^{i+4}}]$ para toda $i \in \mathbb{N}$, tenemos que $\overline{h([n,\infty))} = h([n,n+1]) \cup \overline{h([n+1,\infty))} \subset ([0,1]^2 \times [\frac{1}{2^{n+5}}, \frac{1}{2^{n+4}}]) \cup ([0,1]^2 \times [0, \frac{1}{2^{n+5}}])$. De manera que $h([0,n)) \cap \overline{h([n,\infty))} \subset h([n-1,n)) \cap h([n,n+1]) = \emptyset$, pues ya mostramos que h es inyectiva. Por tanto h es abierta.

De modo que por las Afirmaciones 1, 2 y 3 hemos probado que h es un homeomorfismo de $[0,\infty)$ en $\bigcup\limits_{n\geq 0} J(j_n)$.

Por tanto $h([0,\infty)) \simeq \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}\}$ y con esto terminamos la prueba del inciso (a).

(b) Para probar que $\lim J(j_i) = \mathcal{P}$, notemos primero que como $J(j_i) = \{(p, \alpha_i(p)) : p \in L_{j_i}\}$ y como $\alpha_i(L_{j_i}) \subset [\frac{1}{2^{i+5}}, \frac{1}{2^{i+4}}]$, entonces $H(J(j_i), L_{j_i}) \leq \frac{1}{2^{i+4}} < \frac{1}{2^{i+3}}$.

Ahora sea $\varepsilon > 0$, como por el Lema 3.17, $\lim L_n = \mathcal{P}$, entonces $\lim L_{j_i} = \mathcal{P}$, de modo que existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i \geq N_1$, $H(L_{j_i}, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $N_2 \in \mathbb{N}$ que cumple que para toda $i \geq N_2$, $\frac{1}{2^{i+3}} < \frac{\varepsilon}{2}$ y sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces, para toda $i \geq N$, se tiene que $H(J(j_i), \mathcal{P}) \leq H(J(j_i), L_{j_i}) + H(L_{j_i}, \mathcal{P}) < \frac{1}{2^{i+3}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por tanto $\lim J(j_i) = \mathcal{P}$ y el inciso (b) queda demostrado.

(c) Sabemos que $\mathcal{S}_T = \overline{\mathcal{R}_T}$ y como por el inciso (a) $\mathcal{R}_T = \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{S}_T = \overline{\bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}\}}$. Veamos entonces que $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{R}_T} \setminus \mathcal{R}_T$.

Como por (b), $\lim J(j_i) = \mathcal{P}$, tenemos que $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{R}_T}$. Ahora como para toda $x \in \mathcal{R}_T$, $x \in \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}\}$ tenemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in J(j_i) \subset [0,1] \times [-1,1] \times [\frac{1}{2^{i+5}}, \frac{1}{2^{i+4}}]$, y como $\mathcal{P} \subset [0,1] \times [-1,1] \times \{0\}$, entonces $\mathcal{P} \cap \mathcal{R}_T = \emptyset$. Por tanto $\mathcal{P} \subset \overline{\mathcal{R}_T} \setminus \mathcal{R}_T$.

Para probar la otra contención, sean $y \in \overline{\mathcal{R}_T} \setminus \mathcal{R}_T$ y $\varepsilon > 0$. Dada $n \in \mathbb{N}$, $y \notin J(j_1) \cup ... \cup J(j_n)$, así que existe $\delta > 0$ tal que $\delta < \varepsilon$ y $B_\delta(y) \cap \mathcal{R}_T \neq \emptyset$, así que toda $\varepsilon > 0$ y toda $n \in \mathbb{N}$, existe $i > n$ tal que $B_\varepsilon(y) \cap J(j_i) \neq \emptyset$. Esto implica que $B_\varepsilon(y) \cap J(j_k) \neq \emptyset$ para una infinidad de números k. Lo cual implica que $y \in \lim(J(j_i)) = \mathcal{P}$, por tanto $\overline{\mathcal{R}_T} \setminus \mathcal{R}_T \subset \mathcal{P}$. De estas dos contenciones obtenemos que $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{R}_T} \setminus \mathcal{R}_T$ y por tanto $\mathcal{S}_T = \overline{\mathcal{R}_T} = \mathcal{R}_T \cup (\overline{\mathcal{R}_T} \setminus \mathcal{R}_T) = \mathcal{R}_T \cup \mathcal{P}$, y el inciso (c) queda demostrado.

(d) Como por (a) $\mathcal{R}_T$ es homeomorfo al rayo $[0,\infty)$, entonces $\mathcal{S}_T$ es una compactación métrica del rayo $[0,\infty)$ y como por (c) tenemos que $\mathcal{S}_T = \mathcal{R}_T \cup \mathcal{P} = \overline{\mathcal{R}_T}$, entonces tenemos que el residuo de dicha compactaciónel es el pseudoarco. Con esto terminamos la prueba del inciso (d) y del lema.

■

Lema 3.34 *Sean $T = \{j_1, j_2, ...\}$ un subconjunto infinito de $\{n_1, n_2, ...\}$ y T' un subconjunto infinito de T de la forma $\{j_k, j_{k+1}, j_{k+2}, ...\}$. Entonces $\mathcal{S}_T \simeq \mathcal{S}_{T'}$.*

Demostración. Por el Lema 3.33 (d) $\mathcal{S}_T = \mathcal{R}_T \cup \mathcal{P} = \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}\} \cup \mathcal{P}$ y $\mathcal{S}_{T'} = \mathcal{R}_{T'} \cup \mathcal{P} = \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N},\ i \geq k\} \cup \mathcal{P}$. Entonces $\mathcal{S}_T = J(j_1) \cup J(j_2) \cup ... \cup J(j_{k-1}) \cup J(j_k) \cup \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N},\ i \geq k+1\} \cup \mathcal{P}$ y $\mathcal{S}_{T'} = J(j_k) \cup \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N},\ i \geq k+1\} \cup \mathcal{P}$.

Si k es impar $J(j_k)$ es un arco con extremos en los puntos $(0, 0, \frac{1}{2^{k+4}})$, $(1, 0, \frac{1}{2^{k+5}})$ y si k es impar $J(j_k)$ es un arco con extremos en los puntos $(1, 0, \frac{1}{2^{k+4}})$, $(0, 0, \frac{1}{2^{k+5}})$. Como $J(j_k)$ es un arco y $J(j_1) \cup J(j_2) \cup ... \cup J(j_k)$ también lo es, de manera que existe un homeomorfismo $h' : J(j_k) \to J(j_1) \cup J(j_2) \cup ... \cup J(j_k)$ que cumple que:

$h'((0, 0, \frac{1}{2^{k+4}})) = (0, 0, \frac{1}{2^5})$ y $h'((1, 0, \frac{1}{2^{k+5}})) = (1, 0, \frac{1}{2^{k+5}})$ si k es impar o

$h'((1, 0, \frac{1}{2^{k+4}})) = (0, 0, \frac{1}{2^5})$ y $h'((0, 0, \frac{1}{2^{k+5}})) = (0, 0, \frac{1}{2^{k+5}})$ si k es par.

Definamos entonces $h : \mathcal{S}_{T'} \to \mathcal{S}_T$ como:

$$h(x) = \begin{cases} h'(x), & \text{si } x \in J(j_k), \\ x, & \text{si } x \in \bigcup\{J(j_i) : i \in \mathbb{N}, i \geq k+1\}. \end{cases}$$

Como h' es un homeomorfismo y

$$J(j_k) \cap J(j_{k+1}) = \begin{cases} \{(1, 0, \frac{1}{2^{k+5}})\}, & \text{si } k \text{ es impar}, \\ \{(0, 0, \frac{1}{2^{k+5}})\}, & \text{si } k \text{ es par}. \end{cases},$$

entonces h está bien definida y claramente es un homeomorfismo. Por tanto $\mathcal{S}_{T'} \simeq \mathcal{S}_T$ y el lema queda demostrado.

■

Lema 3.35 *Sean $\mathcal{S}_T = \mathcal{R}_T \cup \mathcal{P}$ y $\mathcal{S}_Q = \mathcal{R}_Q \cup \mathcal{P}$ dos compactaciones del rayo con residuo pseudoarco, y sea $h : \mathcal{S}_T \to \mathcal{S}_Q$ un homeomorfismo, entonces $h(\mathcal{R}_T) = \mathcal{R}_Q$ y $h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.*

Demostración. Como $\mathcal{S}_T$ es localmente conexo en todos los puntos de $\mathcal{R}_T$ y como $\mathcal{P}$ es el residuo de la compactación, entonces por el Lema 2.8, $\mathcal{S}_T$ no es localmente conexo en ningún punto de $\mathcal{P}$. De igual manera $\mathcal{S}_Q$ es localmente conexo en todos los puntos de $\mathcal{R}_Q$ y $\mathcal{S}_Q$ no es localmente conexo en ningún punto de $\mathcal{P}$. De manera que como h es un homeomorfismo y preserva las propiedades topológicas podemos concluir que $h(\mathcal{R}_T) = \mathcal{R}_Q$ y $h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

■

Ahora sí estamos listos para desarrollar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 3.36 *Sean T y Q conjuntos infinitos de $\{n_1, n_2, ...\}$ con la característica de que $T \cap Q$ es un conjunto finito. Entonces $\mathcal{S}_T$ y $\mathcal{S}_Q$ son compactaciones no homeomorfas del rayo con residuo pseudoarco.*

Demostración. Sean $T = \{j_1, j_2, ...\}$ y $Q = \{k_1, k_2, ...\}$, como $T \cap Q$ es un conjunto finito existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $T' = \{j_N, j_{N+1}, j_{n+2}, ...\}$ y $Q' = \{k_N, k_{n+1}, k_{n+2}, ...\}$ entonces $T' \cap Q' = \emptyset$. Como por el lema $\mathcal{S}_T \simeq \mathcal{S}_{T'}$ y $\mathcal{S}_Q \simeq \mathcal{S}_{Q'}$ podemos suponer entonces que $T \cap Q = \emptyset$.

Ahora supongamos por el contrario que existe un homeomorfismo $h : \mathcal{S}_T \to \mathcal{S}_Q$, entonces por el Lema 3.35 tenemos que $h(\mathcal{R}_T) = \mathcal{R}_Q$ y $h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{R}_i^- = \bigcup\{J(k_l) : k_l < j_i\}$ y $\mathcal{R}_i^+ = \bigcup\{J(k_l) : k_l > j_i\}$.

Afirmación 1. Para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{R}_Q = \mathcal{R}_i^- \cup \mathcal{R}_i^+$, $\mathcal{R}_i^-$ es un arco o el conjunto vacío, $\mathcal{R}_i^+$ es un rayo y si $\mathcal{R}_i^-$ es diferente del vacío, entonces $\mathcal{R}_i^- \cap \mathcal{R}_i^+$ es un punto.

Sea $i \in \mathbb{N}$, como $T \cap Q = \emptyset$, entonces $j_i \neq k_l$ para toda $l \in \mathbb{N}$, entonces para toda $l \in \mathbb{N}$ se tiene que $j_i > k_l$ ó $j_i < k_l$. Como $\mathcal{R}_Q = \bigcup\{J(k_l) : l \in \mathbb{N}\}$, entonces $\mathcal{R}_Q = \bigcup\{J(k_l) : k_l < j_i\} \cup \bigcup\{J(k_l) : k_l > j_i\} = \mathcal{R}_i^- \cup \mathcal{R}_i^+$.

Como $\{k_1, k_2, ...\}$ es un subconjunto creciente de los naturales, existe $l' \in \mathbb{N}$ tal que $k_{l'} > j_i$. Sea l' exactamente el primer natural con esta propiedad, si $l' = 1$, entonces $\mathcal{R}_i^- = \emptyset$ y si $l' > 1$ tenemos que $\mathcal{R}_i^- = \bigcup\{J(k_l) : 1 \leq l < l'\}$ que es la imagen homeomorfa del intervalo $[0, l' - 1]$ y por tanto $\mathcal{R}_i^-$ es un arco.

Por otro lado $\mathcal{R}_i^+ = \bigcup\{J(k_l) : l \geq l'\}$ que es la imagen homeomorfa del rayo $[l' - 1, \infty)$ y por tanto $\mathcal{R}_i^+$ es un rayo.

Si $\mathcal{R}_i^- \neq \emptyset$, entonces $\mathcal{R}_i^- = \bigcup\{J(k_l) : 1 \leq l < l'\}$ y $\mathcal{R}_i^+ = \bigcup\{J(k_l) : l \geq l'\}$ pero por la manera en que se construyó $\mathcal{R}_Q$, $J(k_l) \cap J(k_m) \neq \emptyset$ si y sólo si

$|l-m| \leq 1$ de manera que $\mathcal{R}_i^- \cap \mathcal{R}_i^+ = J(k_{l'-1}) \cap J(k_{l'})$ y ya hemos visto que esta intersección consta de un solo punto.

Con esto terminamos la prueba de la Afirmación 1.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ sea $A_i = h^{-1}(\mathcal{R}_i^-) \cap J(j_i)$ y $B_i = h^{-1}(\mathcal{R}_i^+) \cap J(j_i)$.

Afirmación 2. Para cada $i \in \mathbb{N}$ se tiene que $J(j_i) = A_i \cup B_i$, donde uno de los conjuntos A_i y B_i es un arco y el otro es un arco, un punto o el conjunto vacío.

Notemos primero que $h(J(j_i)) \subset \mathcal{R}_Q$, así que $h(J(j_i)) = (h(J(j_i)) \cap \mathcal{R}_i^-) \cup (h(J(j_i)) \cap \mathcal{R}_i^+)$. Por tanto $J(j_i) = h^{-1}(h(J(j_i))) = h^{-1}((h(J(j_i)) \cap \mathcal{R}_i^-)) \cup h^{-1}((h(J(j_i)) \cap \mathcal{R}_i^+)) = A_i \cup B_i$.

Tomemos en cuenta también que A_i y B_i son continuos o el conjunto vacío cuya unión es un arco, por tanto uno de ellos en un arco, y el otro es un arco, un punto o el conjunto vacío.

Afirmación 3. Existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $i, l \geq M_1$ se tiene que $\mathrm{diam}(J(j_i))$, $\mathrm{diam}(J(k_l))$, $\mathrm{diam}(h(J(j_i)))$, $\mathrm{diam}(h^{-1}(J(k_l))) \geq \frac{2}{3}$.

Por la continuidad de la función diam :definida en los subconjuntos cerrados de $[0,1]^3$ tenemos que para $\varepsilon = \frac{1}{6}$ existe $\delta > 0$ tal que si K es un subconjunto cerrado de $[0,1]^3$ y $H(K, \mathcal{P}) < \delta$, entonces $|\mathrm{diam}(K) - \mathrm{diam}(\mathcal{P})| < \frac{1}{6}$. Como $J(j_i) \to \mathcal{P}$ y $J(k_l) \to \mathcal{P}$ por la continuidad de h y h^{-1}, tenemos que $h(J(j_i)) \to h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ y $h^{-1}(J(k_l)) \to h^{-1}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. De manera que existe $M_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $i, l \geq M_1$, entonces $H(J(j_i), \mathcal{P})$, $H(J(k_l), \mathcal{P})$, $H(h(J(j_i)), \mathcal{P})$, $H(h(J(k_l)), \mathcal{P}) < \delta$, con lo que tenemos que $|\mathrm{diam}(J(j_i)) - \mathrm{diam}(\mathcal{P})|$, $|\mathrm{diam}(J(k_l)) - \mathrm{diam}(\mathcal{P})|$, $|\mathrm{diam}(h(J(j_i))) - \mathrm{diam}(\mathcal{P})|$, $|\mathrm{diam}(h^{-1}(J(k_l))) - \mathrm{diam}(\mathcal{P})| < \frac{1}{6}$ como $\mathrm{diam}(\mathcal{P}) \geq 1$, entonces para toda $i, l \geq M_1$ se tiene que $\mathrm{diam}(J(j_i))$, $\mathrm{diam}(J(k_l))$, $\mathrm{diam}(h(J(j_i)))$, $\mathrm{diam}(h^{-1}(J(k_l))) \geq \frac{2}{3}$.

Afirmación 4. Existe $\delta > 0$ tal que si $||p-q|| < \delta$ y $||u-v|| < \delta$, entonces $||h(p) - h(q)|| < \frac{1}{8}$ y $||h^{-1}(u) - h^{-1}(v)|| < \frac{1}{8}$.

Esto es una consecuencia inmediata de la continuidad uniforme de las funciones h y h^{-1}.

Afirmación 5. Existe $M_2 \in \mathbb{N}$, tal que $M_2 \geq M_1$ y si $i, l \geq M_2$, entonces $\frac{2}{k_l}, \frac{2}{j_i} < \delta$.

Como $k_l \to \infty$ y $j_i \to \infty$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i, l \geq M$ se tiene que $\frac{2}{k_l}, \frac{2}{j_i} < \delta$. Sea $M_2 = \max\{M, M_1\}$, entonces si $i, l \geq M_2$ se cumple que $\frac{2}{k_l}, \frac{2}{j_i} < \delta$.

Afirmación 6. Existe $M_3 \in \mathbb{N}$ tal que $M_3 \geq M_2$ y si $i \geq M_3$ y $h(J(j_i)) \cap J(k_l) \neq \emptyset$, entonces $l \geq M_2$.

Como $h(J(j_i)) \to \mathcal{P}$, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq M$, $h(J(j_i)) \subset \bigcup\{J(k_l) : l \geq M_2\}$. Sea $M_3 = \max\{M, M_2\}$, entonces si $i \geq M_3$ y $h(J(j_i)) \cap J(k_l) \neq \emptyset$, se tiene que $l \geq M_2$.

Afirmación 7. Para toda $i \geq M_3$, $\operatorname{diam}(A_i) \leq \frac{2}{3}$.

Sea $i \geq M_3$ y sea $l \in \mathbb{N}$ tal que $D = h(A_i) \cap J(k_l)$ es no degenerado. Entonces D es un subarco de $J(k_l)$, por la manera en que se defininió A_i, tenemos que $k_l < j_i$ y por la manera en que fue construida la sucesión $n_1, n_2, ...$, tenemos que $j_i \geq m_{k_l}$.

Consideremos $h^{-1}|D : D \to J(j_i)$, entonces $h^{-1}|D$ es un encaje de un subarco de $J(k_l)$ en $J(j_i)$, donde $j_i \geq m_{k_l}$. Por tanto $h^{-1}|D$ cumple con las condiciones del Lema 3.28. Por tanto tenemos que:
(a) $\operatorname{diam}(h^{-1}(D)) \leq \frac{1}{3}$ ó
(b) existen puntos $u, v \in D$ tales que $||u - v|| < \frac{2}{k_l}$ y $||h^{-1}(u) - h^{-1}(v)|| \geq \frac{1}{8}$.

Como $D = h(A_i) \cap J(k_l) \subset h(J(j_i)) \cap J(k_l)$ y D es no vacío, tenemos por la Afirmación 6, que $l \geq M_2$, entonces si u, v son puntos de $J(k_l)$ tales que $||u-v|| < \frac{2}{k_l}$, entonces por la Afirmación 5, $||u-v|| < \delta$ y por la Afirmación 4, tenemos que $||h^{-1}(u) - h^{-1}(v)|| < \frac{1}{8}$, con lo que concluimos que la condición (b) del Lema 3.28 no se cumple y por tanto $\operatorname{diam}(h^{-1}(D)) \leq \frac{1}{3}$.

Ahora como $l \geq M_1$, por la Afirmación 3, sabemos que $\operatorname{diam}(h^{-1}(J(k_l))) \geq \frac{2}{3}$ y como $\operatorname{diam}(h^{-1}(D)) \leq \frac{1}{3}$, podemos concluir que $D \neq J(k_l)$.

Hemos mostrado entonces que si $h(A_i) \cap J(k_l)$ es no degenerado, entonces $h(A_i) \cap J(k_l) \neq J(k_l)$ y $\text{diam}(h^{-1}(h(A_i)) \cap J(k_l)) = \text{diam}(h^{-1}(D)) \leq \frac{1}{3}$, lo cual prueba que $h(A_i)$ no puede contener un arco de la forma $J(k_l)$. De manera que $h(A_i)$ está contenido en un arco de la forma $J(k_l) \cup J(k_{l+1})$. Con esto tenemos que $\text{diam}(A_i) = \text{diam}(h^{-1}(h(A_i))) = \text{diam}(h^{-1}(h(A_i) \cap (J(k_l) \cup J(k_{l+1})))) = \text{diam}(h^{-1}(h(A_i) \cap (J(k_l))) \cup h^{-1}(h(A_i) \cap J(k_{l+1}))) \leq \text{diam}(h^{-1}(h(A_i) \cap J(k_l)))+ \text{diam}(h^{-1}(h(A_i) \cap J(k_{l+1}))) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Por tanto $\text{diam}(A_i) \leq \frac{2}{3}$ y la afirmación queda demostrada.

Afirmación 8. Para toda $i \geq M_3$, $\text{diam}(h(B_i)) \leq \frac{2}{3}$.

Sea $i \geq M_3$ y supóngase que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $E = h(B_i) \cap J(k_l)$ es no degenerado. Notemos que E es un subaro de $J(k_l)$ y por definición de B_i, tenemos que $j_i < k_l$. Por la manera en como construimos la sucesión $n_1, n_2, ...$ tenemos que $k_l \geq m_{j_i}$.

Consideremos $h|h^{-1}(E) : h^{-1}(E) \to J(k_l)$, entonces $h|h^{-1}(E)$ es un encaje de un subarco de $J(j_i)$ en $J(k_l)$ donde $k_l \geq m_{j_i}$. Por tanto $h|h^{-1}(E)$ cumple con las condiciones del Lema 3.28. Por tanto tenemos que:
(a) $\text{diam}(h(h^{-1}(E))) = \text{diam}(E) \leq \frac{1}{3}$ ó
(b) existen puntos $p, q \in h^{-1}(E)$ tales que $||p - q|| < \frac{2}{j_i}$ y $||h(p) - h(q)|| \geq \frac{1}{8}$.

Como $i \geq M_2 \geq M_3$, tenemos que, si $p, q \in J(j_i)$ y $||p - q|| < \frac{2}{j_i}$, entonces por la Afirmación 5, $||p - q|| < \delta$ y por la Afirmación 4 tenemos que $||h(p) - h(q)|| < \frac{1}{8}$ por lo que la condición (b) del Lema 3.28 no se cumple y por tanto tenemos que $\text{diam}(h(h^{-1}(E))) \leq \frac{1}{3}$.

En particular $\text{diam}(h(B_i) \cap J(k_l)) \leq \frac{1}{3}$, como por la Afirmación 6, $l \geq M_2 \geq M_1$, entonces por la Afirmación 3, $\text{diam}(J(k_l)) \geq \frac{2}{3}$ por lo que podemos concluir que $h(B_i) \cap J(k_l) \neq J(k_l)$. Hemos mostrado entonces que, si $h(B_i) \cap J(k_l)$ es no degenerado, entonces $h(B_i) \cap J(k_l) \neq J(k_l)$ y $\text{diam}(h(B_i) \cap J(k_l)) \leq \frac{1}{3}$. Por tanto $h(B_i)$ no puede contener un arco de la forma $J(k_l)$ y de hecho $h(B_i)$ está contenido en un arco de la forma $J(k_l) \cap J(k_{l+1})$.

De manera que $\text{diam}(h(B_i)) = \text{diam}(h(B_i) \cap (J(k_l) \cap J(k_{l+1}))) \leq \text{diam}(h(B_i) \cap (J(k_l))+ \text{diam}(h(B_i) \cap J(k_{l+1})) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ y esto completa la prueba de la afirmación.

Ahora sí, estamos listos para terminar la prueba del teorema. Sea $\{A_{i_t}\}_{t=1}^{\infty}$ y $\{B_{i_t}\}_{t=1}^{\infty}$ subsucesiones de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$, respectivamente, tales que lim $A_{i_t} = A$ y lim $B_{i_t} = B$, donde A y B son subcontinuos de $\mathcal{P}$.

Como $J(j_{i_t}) = A_{i_t} \cup B_{i_t}$ (Afirmación 2) y lim $J(j_{i_t}) = \mathcal{P}$, entonces tenemos que $\mathcal{P} = A \cup B$. Como $\mathcal{P}$ es un continuo indescomponible, tenemos que $A = \mathcal{P}$ ó $B = \mathcal{P}$.

Por la Afirmación 7 tenemos que para toda $i \geq M_3$ diam$(A_i) \leq \frac{2}{3}$ por tanto diam$(A) \leq \frac{2}{3}$. Como diam$(\mathcal{P}) \geq 1$, entonces $A \subsetneq \mathcal{P}$ y por tanto $B = \mathcal{P}$. De modo que lim $B_{i_t} = \mathcal{P}$ y lim $h(B_{i_t}) = h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$, pero por la Afirmación 8 tenemos que diam(lim$(h(B_{i_t}))) \leq \frac{2}{3}$, lo cual es una contradicción pues diam$(\mathcal{P}) \geq 1$. Esta contradicción nace de suponer que existe un homeomorfismo $h : \mathcal{S}_T \to \mathcal{S}_Q$. Por tanto $\mathcal{S}_T$ y $\mathcal{S}_Q$ son compactaciones métricas del rayo con residuo pseudoarco no homeomorfas, y el teorema queda demostrado.

■

Lema 3.37 *Sea M un conjunto infinito numerable, entonces existe una familia no numerable de subconjuntos infinitos $\{M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de M tales que la intersección de cualesquiera dos de ellos tiene cardinalidad finita (i.e $|M_\lambda \cap M_\beta| < \infty$ para todo $\lambda \neq \beta$).*

Demostración. Como M es un conjunto infinito numerable, existe una biyección $f : M \to \mathbb{Q} \cap [0,1]$. De manera que podemos suponer que $M = \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Sea $\Lambda = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, es decir Λ es el conjunto de irracionales en el intervalo $[0,1]$. Para cada irracional $\lambda \in \Lambda$, existe una sucesión de puntos diferentes $\{x_i^\lambda\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $x_i^\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y $x_i^\lambda \to \lambda$. Entonces $M_\lambda = \{x_i^\lambda : i \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto infinito de $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \mathbb{M}$.

Sea $\beta \in \Lambda$, con $\lambda \neq \beta$, entonces las sucesiones $\{x_i^\lambda\}$ y $\{x_i^\beta\}$ convergen a dos puntos diferentes por lo que sólo pueden coincidr en un número finito de elementos. Por tanto $M_\lambda \cap M_\beta = \{x_i^\lambda : i \in \mathbb{N}\} \cap \{x_i^\beta : i \in \mathbb{N}\}$ es finito. Esto termina la prueba del lema.

■

Teorema 3.38 *Existe una cantidad no numerable de compactaciones métricas del rayo que tienen residuo pseudoarco y que no son homeomorfas.*

Demostración.

Consideremos el conjunto $\{n_1, n_2, ...\}$ de la Definición 3.29. Por el Lema 3.37, existe una familia no numerable $\{T_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de

$\{n_1, n_2, ...\}$ tal que para toda $\lambda \neq \beta$ se tiene que $T_\lambda \cap T_\beta$ es finita. Sea $\mathcal{F} = \{\mathcal{S}_{T_\lambda} : \lambda \in \Lambda\}$, donde $\mathcal{S}_{T_\lambda}$ es la compactación métrica del rayo con residuo pseudoarco definida en 3.32. Si $\lambda \neq \beta$, entonces por el Teorema 3.36, tenemos que $\mathcal{S}_{T_\lambda}$ no es homeomorfa a $\mathcal{S}_{T_\beta}$. De modo que $\mathcal{F}$ es una familia no mumerable de compactaciones métricas del rayo con residuo pseudoarco que no son homeomorfas, y el teorema queda demostrado.

■

Con este resultado terminamos el capítulo y el estudio de las compactaciones métricas del rayo.

CAPÍTULO 4

Selecciones Abiertas

En este capítulo estudiaremos qué tipos de dendroides admiten selecciones abiertas. Una selección abierta es una función $\sigma : C(X) \to X$ tal que para todo $A \in C(X)$ se cumple que $\sigma(A) \in A$ y $\sigma(\mathcal{U})$ es un abierto de X para todo abierto $\mathcal{U}$ de $C(X)$. En [Nd&Wd] Ward y Nadler probarón que los únicos continuos que admiten selecciones son los dendroides. Nosotros estudiamos ahora este tipo de funciones pero pidiendo que sean abiertas. Aunque de entrada esto pudiera parecer una pregunta fácil para dendritas muy simples como son los n-odos simples, definir una selección abierta en este tipo de espacios es muy complicado. Nosotros lo que haremos será mostrar algunas dendritas que sí admiten selecciones abiertas y decir porque los abanicos suaves (que no son dendritas) no admiten este tipo de funciones.

4.1 Selecciones en el Intervalo

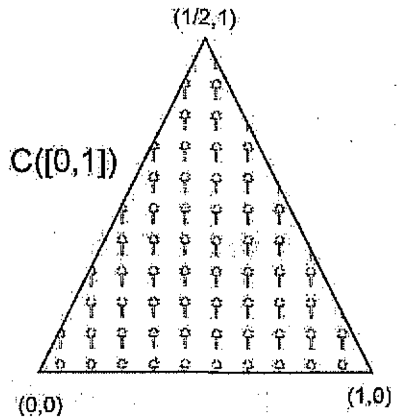
Primero trataremos de definir este tipo de selecciones en el dendroide más simple, el intervalo.

Definición 4.1 *Dado un dendroide X, una* selección abierta *es una función continua y abierta $\sigma : C(X) \to X$ que cumple que $\sigma(A) \in A$ para toda $A \in C(X)$.*

4.1.1 El hiperespacio del intervalo.

Consideremos el intervalo $[0,1]$ entonces cada subcontinuo del intervalo es un subintervalo $[a,b]$ donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. Consideremos $h : C([0,1]) \to \mathbb{R}^2$

dado por $h([a,b]) = (\frac{a+b}{2}, b-a)$. Es fácil convencerse de que h es un encaje y que $h(C([0,1])$ es un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2},1)$.



De hecho $C([0,1])$ queda definido por el triángulo Δ. Donde $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 2x, y \geq 0 \text{ y } y \leq 2-2x\}$.

Donde los puntos $(a,0)$ representan los singulares $\{a\}$ del intervalo $[0,1]$ o dicho de otra forma, los subintervalos de la forma $[a,a]$. Cada punto de la recta $y = 2x$ representa un intervalo de la forma $[0,b]$ y cada punto de la recta $y = 2-2x$ representa un intervalo de la forma $[a,1]$ y el punto $(\frac{1}{2},1)$ representa al intervalo $[0,1]$.

4.1.2 Selecciones abiertas para el intervalo

Definición 4.2 *Para el intervalo* $[0,1]$ *definimos* $\sigma_1 : C([0,1])$ *en* $[0,1]$ *de la siguiente manera* $\sigma_1([a,b]) = a$. *para todo* $[a,b] \subset [0,1]$.

Teorema 4.3 *La función* σ_1 *es una selección abierta de* $C([0,1]) \to [0,1]$.

Demostración. Primero veamos que σ_1 es una función continua. Sea $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C([0,1])$ tal que $[a_n,b_n] \to [a,b]$, entonces $a_n \to a$ y $b_n \to b$ de manera que como $\sigma_1([a_n,b_n]) = a_n$ y $\sigma_1([a,b]) = a$, tenemos que $\sigma_1([a_n,b_n]) \to \sigma_1([a,b])$ y por tanto σ_1 es una función continua.

Como para toda $A = [a,b]$ se tiene que $\sigma_1(A) = a \in A$, se tiene entonces que σ_1 es una selección.

Veamos ahora que σ_1 es una función abierta. Sea $A = [a,b] \in C([0,1])$. Consideremos la vecndad $B_\varepsilon^H(A)$, donde $\varepsilon < |a-b|$, si $a \neq b$. Sabemos que $\sigma_1(A) = a$, veamos que $\sigma_1(B_\varepsilon^H(A)) = B_\varepsilon(a)$.

$\subseteq$) Sea $B \in B_\varepsilon^H(A)$. Entonces $B = [x, y]$, como $H(A, B) < \varepsilon$, entonces $d(x, a) < \varepsilon$, de manera que $x \in B_\varepsilon(a)$ y como $\sigma_1(B) = x$, entonces $\sigma_1(B) \in B_\varepsilon(a)$ de manera $\sigma_1(B_\varepsilon^H(A)) \subset B_\varepsilon(a)$.

$\supseteq$) Sea $x \in B_\varepsilon(a)$. Entonces $[x, b] \in B_\varepsilon^H(A)$ y $\sigma_1([x, b]) = x$. Si $a = b$ y $a < x$ entonces $[x, x] \in B_\varepsilon^H(A)$ y $\sigma_1([x, x]) = x$. De manera que para toda $x \in B_\varepsilon(a)$, se tiene que existe $B \in B_\varepsilon^H(A)$ tal que $\sigma_1(B) = x$. Por tanto $B_\varepsilon(a) \subset B_\varepsilon^H(A)$.

De las dos contenciones obtenemos que, para toda $A \in C([0, 1])$, existe $\delta > 0$ tal que para toda $0 < \varepsilon < \delta$ se tiene que $\sigma_1(B_\varepsilon^H(A)) = B_\varepsilon(a)$. Por tanto σ_1 es una selección abierta.

■

De manera que una selección abierta no es más que una función abierta y continua del triángulo en el intervalo $[0, 1]$. La función σ_1 no es más que la proyección de cada punto (x, y) usando por la recta $y = 2x - 2a$, sobre el eje x y claramente esta función es continua y abierta.

Por tanto el intervalo admite selecciones abiertas.

4.2 Selecciones en el Triodo.

Definición 4.4 *Definimos un triodo simple como la unión de tres intervalos que se intersectan por un solo punto. Otra manera de verlo es la unión de los vectores básicos unitarios e_1, e_2 y e_3 de $\mathbb{R}^3$.*

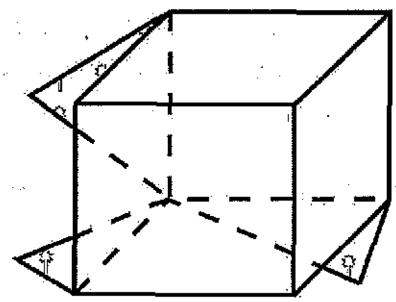
En esta sección sólo trabajaremos con triodos simples de manera que los llamaremos triodos.

4.2.1 El hiperespacio de continuos del triodo

El triodo lo podemos ver como la unión de tres segmentos de longitud uno pegados por un punto p. Llamaremos I_1, I_2 e I_3 a estos tres segmentos y veremos un modelo para $C(X)$. Notemos que en el triodo hay dos tipos de continuos los que tienen a p y los que no lo tienen. Estos últimos tienen que estar contenidos en uno de los segmentos $I_j \backslash \{p\}$ de X. Entonces podemos dividir a los elementos de $C(X)$ en dos clases, los que tienen a p y los que están contenidos en alguno de los segmentos I_j.

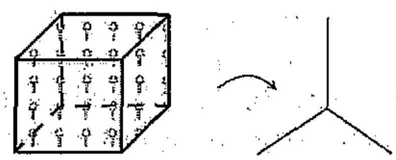
Si $A \in C(X)$ tiene a p, entonces A es la unión de $A \cap I_1$, $A \cap I_2$ y $A \cap I_3$. Cada uno de estos tres conjuntos es un segmento (posiblemente degene- rado) que contiene a p, de manera que cada uno de ellos está completamente determinado por su longitud. De manera que A queda determinada exactamente por tres longitudes a saber, la longitud a de $A \cap I_1$, la longitud b de $A \cap I_2$ y la longitud c de $A \cap I_3$. Por tanto, a A le podemos asociar la terceta (a, b, c). No es defícil convencerse de que la asociación $A \to (a, b, c)$ es una función continua inyectiva sobre y de inversa continua del conjunto $\mathcal{A} = \{A \in C(X) : p \in A\}$ en $C = I \times I \times I$. De manera que $\mathcal{A}$ es homeomorfo al cubo sólido $\mathcal{C}$.

A este cubo nos falta añadirle, los elementos de $C(X)$ contenidos en I_1, I_2 e I_3. Es decir nos falta añadirle $C(I_1)$, $C(I_2)$ y $C(I_3)$. Ya sabemos que cada uno de estos espacios es un triángulo. Para saber cómo tenemos que pegar estos tres triángulos, tenemos que ver, por ejemplo, que hay de común en $\mathcal{A}$ y $C(I_1)$. Notemos que $A \in \mathcal{A} \cap C(I_1)$ tiene que ser un subintervalo de I_1 que tenga a p. Por lo que A esta representado en $\mathcal{C}$ como un punto de la forma $(a, 0, 0)$ y en $C(I_1)$ está representado como un punto de una de las orillas del triángulo (Sección 4.1.1). De manera que una de las orillas del triángulo $C(I_1)$ debe pegarse a la arista de C que corresponde al eje x. $C(I_2)$ y $C(I_3)$ se pegan de forma similar a C. Entonces $C(X)$ queda representado finalmente así:



4.2.2 Funciones continuas y abiertas del cubo en el triodo.

Como acabamos de ver, el hiperespacio del triodo es un cubo con alas. Para definir una función abierta del cubo en el triodo necesitamos lo siguiente.



Como sabemos, los elementos que tienen al vértice son precisamente los que están en el cubo, nos concentraremos en definir una función en estos elementos, es decir daremos una función abierta y continua del cubo en el triodo.

Para que podamos entender la función que vamos a definir, vamos a suponer que tenemos dicha función y veamos que propiedades tiene.

Sea $h : \mathcal{C} \to$ *triodo* una función continua, abierta y sobre, veamos cómo son las imágenes inversas. Llamaremos v, al vértice del triodo, es decir v es el punto de intersección de los tres segmentos que tefinen al trioda. $h^{-1}(v)$ es un cerrado en $\mathcal{C}$, tenemos también que $h^{-1}(I_1\backslash\{v\})$, $h^{-1}(I_2\backslash\{v\})$ y $h^{-1}(I_3\backslash\{v\})$ son abiertos ajenos en $\mathcal{C}$ y que $\mathcal{C} = h^{-1}(v) \cup h^{-1}(I_1\backslash\{v\}) \cup h^{-1}(I_2\backslash\{v\}) \cup h^{-1}(I_3\backslash\{v\})$, donde estos cuatro conjuntos son ajenos dos a dos.

Dados un punto $p \in h^{-1}(v)$, y un abierto $\mathcal{U}$ en $[0,1]^3$, tales que $p \in \mathcal{U}$, como h es abierta, $v \in h(\mathcal{U})$ y $h(\mathcal{U})$ es abierto, por lo que , para cada $i \in \{1,2,3\}$, $h(\mathcal{U}) \cap (I_i\backslash\{v\}) \neq \emptyset$. Así que existe un punto $u \in \mathcal{U} \cap h^{-1}(I_i\backslash\{v\})$. Esto muestra que $p \in \overline{h^{-1}(I_i\backslash\{v\})}$. Por tanto $h^{-1}(v) \subset \overline{h^{-1}(I_i\backslash\{v\})}$.

De manera que todo punto de $h^{-1}(v)$ está en la cerradura de tres regiones abiertas y ajenas que son las imágenes inversas de $h^{-1}(I_j\backslash\{v\})$.

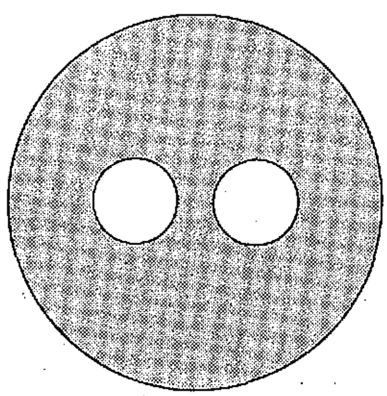
De manera que al cubo $\mathcal{C}$ lo tenemos que dividir en cuatro zonas ajenas dos a dos, donde tres son abiertas, una es cerrada y cada punto de la zona cerrada está en la cerradura de las otras tres regiones abiertas.

Para poder dividir al cubo en dichas secciones utilizaremos una he rramienta llamada Lagos de Wada.

4.2.3 Lagos de Wada

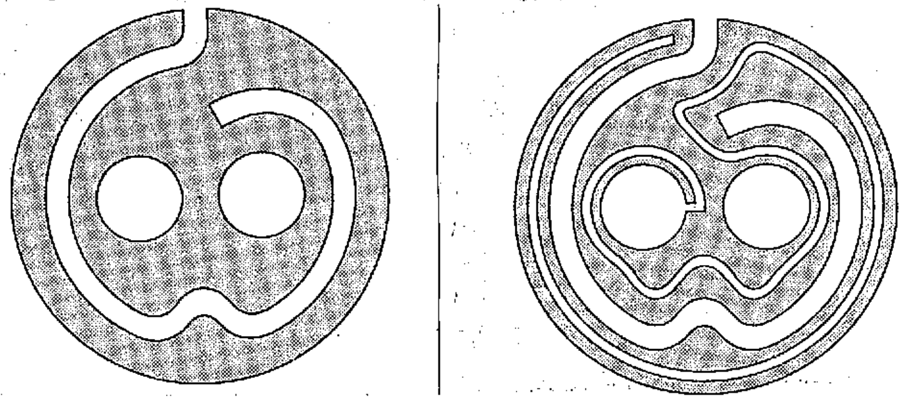
En 1917 K. Yoneyama publicó un artículo llamado *Theory of Continuous sets of points* en [KY] en donde se construía un continuo indescomponible conocido como Lagos de Wada, una modificación de este ejemplo se construye en [H&Y, pág 143, 144]. La construcción se hace de la manera siguiente.

Consideremos el doble anillo



Imaginemos que lo podemos ver como una isla con dos lagos, un lago de agua azul y otro de agua verde.

En el tiempo $t = 0$, construimos un canal que empieza en el oceano que lleva agua salada a todos los puntos de la isla (sin lagos) a una distancia menor o igual a uno.



En el tiempo $t = \frac{1}{2}$ cavamos un canal del lago azul que lleva agua azul a todos los puntos de la isla (sin lagos) a distancia menor o igual a un medio.

En el tiempo $t = \frac{2}{3}$ cavamos un canal que lleve agua del lago verde a todos los puntos de la isla (sin lagos) a distancia menor o igual a un tercio.

En el tiempo $t = \frac{3}{4}$ cavamos un canal del final del primer canal para que lleva agua salada a todos los puntos de la isla (sin lagos) a distancia menor o igual a un cuarto.

Continuamos con este proceso que puede ser descrito de la siguiente manera. Tomamos en cuenta el canal 1, como el canal de agua de mar, el canal 2, como el canal azul y el canal 3 como el canal de agua verde. En el tiempo $t = \frac{n}{n+1}$ alargamos el canal $j+1$ donde $n \equiv j(\mathrm{mod}\ 3)$ para que lleve agua a todos los puntos de la isla a distancia menor o igual a un eneavo.

Si pensamos en estos canales como conjuntos abiertos en el tiempo $t = 1$ lo que queda en la isla es un continuo en el que cada punto es un punto frontera de los tres lagos.

Esta construcción tiene mucho en común con lo que nosotros necesitamos pues cada punto de lo que queda en la isla está en la cerradura de tres regiones abiertas. Tomando como base esta construcción vamos a hacer una construcción parecida en el cubo y a partir de ahí podremos definir una selección abierta del hiperespacio de subcontinuos del triodo en el triodo.

4.2.4 Túneles de Wada

Consideremos el cubo $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$
como si fuera nuestra isla, y tomaremos en cuenta los siguientes tres puntos $p_1 = (\frac{53}{54}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{53}{54}, \frac{1}{2})$ y $p_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{53}{54})$.

La región 1 consiste en el interior de la envolvente convexa de la unión del cuadrado $\{1\} \times [0,1] \times [0,1]$ y p_1 y a esto le unimos la media esfera con centro $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio$\frac{1}{27}$.

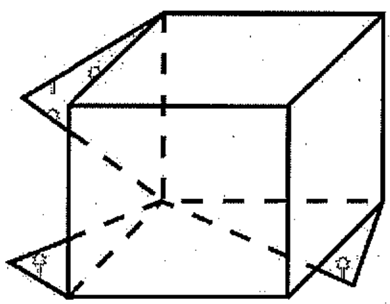
La región 2 consiste en el interior de la envolvente convexa de la unión del cuadrado $[0,1] \times \{1\} \times [0,1]$ y p_2 y a esto le unimos la media esfera con centro $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$ y radio$\frac{1}{27}$.

La región 3 consiste en el interior de la envolvente convexa de la unión del cuadrado$[0,1]\times$ $[0,1] \times \{1\}$ y p_3 y a esto le unimos la media esfera que resulta de intersectar al cubo $[0,1]^3$ con la esfera con centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ y radio $\frac{1}{27}$.

El interior de la región j en el cubo va a ser mi Lago j para $j \in \{1,2,3\}$. Notemos entonces que el Lago j es un abierto en el cubo y que si $i \neq j$, entonces el Lago i no intersecta al Lago j.

Ahora estamos listos para comenzar los Túneles de Wada.

En el tiempo $t = 0$, construimos un túnel que empieza en el Lago 1 que lleva agua a todos los puntos de la isla (sin lagos) a una distancia menor o igual a uno.



En el tiempo $t = \frac{1}{2}$ cavamos un túnel del Lago 2 que lleva agua a todos los puntos de la isla (sin lagos) a distancia menor o igual a un medio.

En el tiempo $t = \frac{2}{3}$ cavamos un túnel que lleve agua del Lago 3 a todos los puntos de la isla (sin lagos) a distancia menor o igual a un tercio.

En el tiempo $t = \frac{3}{4}$ cavamos un túnel del final del primer túnel para que lleve agua a todos los puntos de la isla (sin lagos) a distancia menor o igual a un cuarto.

Continuamos con este proceso que puede ser descrito de la siguiente manera. Tomamos encuenta el túnel 1, como el túnel que comenzó en el Lago 1, el túnel 2, como el túnel que comenzó en el Lago 2 y el túnel 3 como el túnel que comenzó en el Lago 3. En el tiempo $t = \frac{n}{n+1}$ alargamos el túnel $j+1$ donde $n \equiv j (\mathrm{mod}\ 3)$ para que lleve agua a todos los puntos de la isla a distancia menor o igual a un eneavo.

Si pensamos en estos túneles como conjuntos abiertos, en el tiempo $t = 1$, lo que queda en la isla es un continuo, puesto que es la intersección anidada de continuos, en el que cada punto es un punto frontera de los tres lagos.

Podemos decir entonces que el cubo $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$, donde $\mathcal{T}$ es el complemento de los túneles, y $\mathcal{T}_j$ es el túnel j en el tiempo $t = 1$.

Además de construir así los túneles a estos le vamos a pedir que tengan ciertas condiciones.

Primero pediremos que cada tunel $\mathcal{T}_j$ no toque las aristas del cubo, es decir que cumpla con que $\mathcal{T}_j \cap (B_1 \times B_2 \times B_3) = \emptyset$ donde $B_i \in \{\{0\}, \{1\}, [0,1]\}$ y si $B_i = [0,1]$, entonces $B_k \neq [0,1]$ para todo $k \neq i$.

La segunda condición que le vamos a pedir a los túneles $\mathcal{T}_j$ tienen que ver con qué tan gruesos pueden ser. Dada $j \in \{1,2,3\}$, consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ al conjunto $\mathcal{C}_n^{(j)} = A_1 \times A_2 \times A_3$, donde $A_i = [0,1]$ si $i \neq j$ y $A_j = [0, \frac{1}{n}]$. El comienzo de los lagos se construyen como hemos descrito, pero para construir el resto de cada túnel vamos a tomar en cuenta lo siguiente, el pedazo del túnel $\mathcal{T}_j$ que está en la región $\mathcal{C}_n^{(j)} \backslash \mathcal{C}_{n+1}^{(j)}$ tiene que cumplir que su diámetro es menor que $\frac{1}{(n+1)27}$.

Notemos que con lo que acabamos de pedir, en cada tunel $\mathcal{T}_j$ existe un sólo punto que es precisamente el punto p_j tal que $d(p_j, \mathcal{T}) = \frac{1}{27}$ y para todo $q \in \mathcal{T}_j \backslash \{p_j\}$ se tiene que $d(q, \mathcal{T}) < \frac{1}{27}$. (aquí d denota la distacia usual de $\mathbb{R}^3$).

De manera que ya hemos construido en el cubo $\mathcal{C}$ nuestros túneles abiertos, ahora sí estamos listos para definir nuestra selección abierta de $C(X)$ en X donde X es el triodo.

4.2.5 Selecciones abiertas en el triodo

El triodo X está formado por los intervalos I_1, I_2 e I_3 pegados en el origen que llamaremos el punto v. Otra manera de pensar el triodo es como la unión de los vectores básicos unitarios e_1, e_2, e_3.

Recordemos que $C(I_j)$ es un triángulo y recordemos la selección abierta σ_1 que definimos para intervalos en la Sección 4.1.2, donde si $[a,b] \subset I_j$

entonces $\sigma_1([a,b]) = a$, donde a es el punto más cercano al origen, de manera que $\sigma_1([0,b]) = \{0\}$ que en este caso no es más que el vértice del triodo, es decir v.

Para los elementos contenidos en I_j consideraremos la selección $\sigma_1^{(j)}$ definida en la Sección 4.1.2 identificando al 0 con v,y de esta manera estamos listos para definir una selección abierta $\sigma_3 : C(X) \to X$, donde X es el triodo. Si $A \in C(X)$, entonces A está en alguna de las alitas o A está en el cubo $\mathcal{C}$, si A está en alguna de las alitas, entonces $A \subset I_j$ para alguna $j \in \{1,2,3\}$, si A no está en las alitas, entonces A está en el cubo $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$, y lo que haremos es dar una regla para A dependiendo de si $A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}_j$ para alguna $j \in \{1,2,3\}$.

Definición 4.5 *Sea X el triodo, definimos $\sigma_3 : C(X) \to X$ por:*

$$\sigma_3(A) = \begin{cases} \sigma_1^{(j)}(A), & \textit{si } A \subset I_j \textit{ para alguna } j \in \{1,2,3\}, \\ v, & \textit{si } A \in \mathcal{T}, \\ 27d(A,\mathcal{T})e_j, & \textit{si } A \in \mathcal{T}_j. \end{cases}$$

Veamos entonces que σ_3 es efectivamente una selección abierta.

Teorema 4.6 *Sea X el triodo, la función $\sigma_3 : C(X) \to X$ es una selección abierta.*

Demostración.

Afirmación 1. La función σ_3 está bien definida y es continua.

Para ver que σ_3 está bien definida sólo basta ver qué ocurre en los elementos que están tanto en el cubo como en las alitas. Sea $A \in C(X)$ tal que A está en el cubo intersección alguna de las alitas, como está en el cubo, quiere deccir que $v \in A$, y como está en alguna alita quiere decir que $A \subset I_j$, de manera que A es de la forma $[0,b] \subset I_j$, ahora tenemos que ver qué valor toma $\sigma_3(A)$. Por un lado $\sigma_3(A) = \sigma_1^{(j)}([0,b]) = v$, por otro lado A está contenido en las aristas del cubo, y una de las condiciones que pedimos para construir los túneles, es que las aristas del cubo, no estuvieran en ningún túnel, por tanto $A \in \mathcal{T}$ y por tanto $\sigma_3(A) = v$, de manera que σ_3 está bien definida.

Veamos entonces que σ_3 es una función continua. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de continuos en $C(X)$ tal que $A_n \to A$. Aquí tenemos tres posibilidades.

Caso 1. A está en alguna de las alitas y no está en $\mathcal{C}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(A)$ está totalmente contenida en la alita I_j, por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $A_n \subset B_\varepsilon(A)$ y en la alita la función que tomamos es la función $\sigma_1^{(j)}$ que es continua, por tanto $\sigma_3(A_n) \to \sigma_3(A)$

Caso 2. $A \in \mathcal{C}$ y no está en ninguna de las alitas.

Si $A \in \mathcal{T}_j$ para alguna j, entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{T}_j$ pues éste es abierto y por tanto existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $A_n \subset B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{T}_j$ y la función que estamos utilizando para este caso es la función distancia, y esta función es continua, por tanto $\sigma_3(A_n) \to \sigma_3(A)$.

Si $A \in \mathcal{T}$, entonces basta considerar las siguientes dos posibilidades.

(i) Para toda $n \geq N$ se tiene que $A_n \subset \mathcal{T}$. En este subcaso $\sigma_3(A_n) = v = \sigma_3(A)$, de manera que se cumple que $\sigma_3(A_n) \to \sigma_3(A)$.

(ii) $A_n \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3$. Como $A_n \to A$, entonces $d(A_n, A) \to 0$, y por tanto $d(A_n, \mathcal{T}) \to 0$ de manera que $\sigma_3(A_n) \to v = \sigma_3(A)$.

Caso 3. A está en la intersección de $\mathcal{C}$ con alguna alita. Pero ya sabemos que en esta parte σ_3 está bien definida y es continua en la alita y en el cubo, por tanto $\sigma_3(A_n) \to \sigma_3(A)$.

Hemos probado entonces que σ_3 es una función continua.

Afirmación 2. La función σ_3 es abierta.

Sea $\mathcal{V}$ un abierto de $C(X)$ y sea $\rho_i = \{te_i : 0 \leq t \leq 1\}$. Tenemos tres casos.

Caso (i) Si $\mathcal{V}$ está contenida en alguna alita I_j y $\mathcal{V}$ no intersecta a $\mathcal{C}$, entonces $\sigma_3(\mathcal{V}) = \sigma_1^{(j)}(\mathcal{V})$ y como σ_1 es abieta, entonces $\sigma_1(\mathcal{V})$ es un abierto del triodo, de hecho es un abierto contenido en el intervalos I_j.

Caso (ii) Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{C}$, sea $p \in \sigma_3(\mathcal{V})$, si $p \in I_j \backslash \{v\}$ para alguna j, entonces $p \in \sigma_3(\mathcal{T}_j)$, es decir que existe $A \in \mathcal{T}_j$ tal que $\sigma_3(A) = p$. Aquí tenemos dos casos: si $A = \{p_j\}$, como A está en el interior del túnel $\mathcal{T}_j$ y $\mathcal{T}_j$ es abierto en $\mathcal{C}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{T}_j \cap \mathcal{V}$. Como $\mathcal{C}$ es localmente conexo, existe un abierto conexo $\mathcal{W}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{T}_j \cap \mathcal{V}$, entonces $\sigma_3(\mathcal{W})$ es un conexo en el triodo que contiene al punto $p = a_j$ (donde a_j es punto extremo del triodo y del intervalo I_j) y no contiene al punto v, es decir $\sigma_3(\mathcal{W})$ es un conexo contenido en $I_j \backslash \{v\}$. Dado que el único máximo en el túnel $\mathcal{T}_j$ es el punto $A = p_j$ y $\mathcal{T}_j$ se va haciendo más angosto y no existe un mínimo local que sea absoluto para la función $d(A, \mathcal{T})$, tenemos entonces que $\sigma_3(\mathcal{W})$ es un intervalo abierto de la forma $[a_j, x) \subset I_j \backslash \{v\}$ y por tanto abierto, además $\sigma_3(\mathcal{W}) \subset \sigma_3(\mathcal{V})$ y por tanto p está en el interior de $\sigma_3(\mathcal{V})$.

Ahora si $A \neq \{p_j\}$, como A está en el interior del túnel $\mathcal{T}_j$ y $\mathcal{T}_j$ es abierto en $\mathcal{C}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A) \subset (\mathcal{T}_j \cap \mathcal{V}) \backslash \{p_j\}$. Como $\mathcal{C}$ es localmente conexo, existe un abierto conexo $\mathcal{W}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{T}_j \cap \mathcal{V} \backslash \{p_j\}$, entonces $\sigma_3(\mathcal{W})$ es un conexo en el triodo que contiene al punto p y no contiene a los puntos v y a_j, es decir $\sigma_3(\mathcal{W})$ es un conexo contenido en $I_j \backslash \{v, a_j\}$. Dado que el túnel $\mathcal{T}_j$ se va haciendo más angosto y no existen ni un mínimo ni un máximo locales que sean absolutos para la función $d(A, \mathcal{T})$, tenemos entonces que $\sigma_3(\mathcal{W})$ es un intervalo abierto en $I_j \backslash \{v, a_j\}$ y por tanto abierto,además $\sigma_3(\mathcal{W}) \subset \sigma_3(\mathcal{V})$ y por tanto p está en el interior de $\sigma_3(\mathcal{V})$. De hecho lo que mostramos es que $\sigma_3|\mathcal{T}_j$ es una función abierta para toda $j \in \{1, 2, 3\}$.

Nos falta ver que ocurre si $v \in \sigma_3(\mathcal{V})$. En este caso existe $A \in \mathcal{T}$ tal que $\sigma_3(A) = v$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{V}$, y como $\mathcal{C}$ es localmente conexo, existe un abierto conexo $\mathcal{W}$ tal que $A \in \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$. De la densidad de los abiertos $\mathcal{T}_j$ podemos elegir tres puntos $k_j \in \mathcal{T}_j \cap \mathcal{W}$ y $\sigma_3(k_j) \neq v$ y para cada j podemos elegir un segmento con puntos extremos A y k_j que esté contenido en $\mathcal{W}$. De manera que $\sigma_3(Ak_j)$ es un conexo que tiene a v y a un punto en la patita $I_j \backslash \{v\}$ de manera que $\sigma_3(\mathcal{W})$ contiene a un subintervalo abierto no degenerado de I_j para toda $j \in \{1, 2, 3\}$, entonces $v = \sigma_3(A)$ está contenido en el interior de $\sigma_3(\mathcal{W}) \subset \sigma_3(\mathcal{V})$ y por tanto $\sigma_3|\mathcal{C}$ es una función abierta.

Caso (iii) $\mathcal{V}$ intersecta a una o más alitas y $\mathcal{V} \cap \mathcal{C} = \emptyset$. Entonces $\mathcal{V} = (\mathcal{V} \cap C(I_1)) \cup (\mathcal{V} \cap C(I_2)) \cup (\mathcal{V} \cap C(I_3)) \cup (\mathcal{V} \cap \mathcal{C})$, pero sabemos que $(\mathcal{V} \cap C(I_j))$ es un abierto de $C(I_j)$ para toda $j \in \{1, 2, 3\}$ y $(\mathcal{V} \cap \mathcal{C})$ es abierto de $\mathcal{C}$ de manera que $\sigma_3(\mathcal{V}) = \sigma_3(\mathcal{V} \cap C(I_1)) \cup \sigma_3(\mathcal{V} \cap C(I_2)) \cup \sigma_3(\mathcal{V} \cap C(I_3)) \cup \sigma_3(\mathcal{V} \cap \mathcal{C})$ es la unión de cuatro abiertos donde $\sigma_3(\mathcal{V} \cap C(I_j))$ es un abierto de I_j (caso i) y $\sigma_3(\mathcal{V} \cap \mathcal{C})$ es un abierto de en el triodo (caso ii).

Afirmación 3. La función σ_3 es una selección.

Tenemos que σ_3 es continua (Afirmación 1), sólo falta ver que $\sigma_3(A) \in A$ para todo $A \in C(X)$.

Sea $A \in C(X)$, entonces $v \in A$ ó $v \notin A$, si $v \notin A$, entonces $A \subset I_j \backslash \{v\}$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$, y entonces $\sigma_3(A) = \sigma_1^{(j)}(A)$, y como por el Teorema 4.3, $\sigma_1^{(j)}$ es una selección, entonces $\sigma_3(A) = \sigma_1^{(j)}(A) \in A$.

Si $v \in A$, entonces $A \in \mathcal{C}$, así que $A \in \mathcal{T}$ o $A \in \mathcal{T}_j$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$. Si $A \in \mathcal{T}$, entonces $\sigma_3(A) = v \in A$, de manera que sólo nos falta ver qué ocurre si $A \in \mathcal{T}_j$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$. Como $A \in \mathcal{C}$, entonces $A \in \mathcal{C}_n^{(j)} \backslash \mathcal{C}_{n+1}^{(j)}$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, entonces $A \subset A_1 \times A_2 \times A_3 \backslash B_1 \times B_2 \times B_3$ donde $A_i, B_i = [0, 1]$ si $i \neq j$, $A_j = [0, \frac{1}{n}]$ y $B_j = [0, \frac{1}{n+1}]$. Entonces A es un punto en $\mathcal{C}$ cuya coordenada j-ésima toma valores en el intervalo $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, de manera que $A = (x_1, x_2, x_3)$ donde $x_j \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Como $v \in A$, tenemos que el arco $vx_j \subset A$ y por tanto $v(\frac{1}{n+1})e_j \subset A$, y como $A \in \mathcal{T}_j \cap (\mathcal{C}_n^{(j)} \backslash \mathcal{C}_{n+1}^{(j)})$, entonces $d(A, \mathcal{T}) < \frac{1}{(n+1)27}$. De manera que $\sigma_3(A)$ es un punto $p \in I_j \backslash \{v\}$ tal que $d(p, v) < \frac{1}{n+1}$, de manera que p es un punto del intervalo $v(\frac{1}{n+1})e_j \subset vx_j \subset A$, de manera que $\sigma_3(A) \in A$. Con esto terminamos la prueba de la afirmación.

Por las Afirmaciones 1y 3 tenemos que σ_3:$C(X) \to X$ es una selección y por la Afirmación 2 sabemos que σ_3 es abierta y con esto terminamos la prueba del teorema. ■

4.3 Selecciones Abiertas en n-odos

Consideremos un n-odo X_n como la unión de los vectores $e_1, e_2, ..., e_n$ en $\mathbb{R}^n$ donde $e_k = (x_1, x_2, ..., x_k, ..., x_n)$ donde $x_j = 0$ si $j \neq k$ y $x_k = 1$. También lo podemos pensar como la unión de los intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ pegados en el origen que llamaremos el punto v.

De manera análoga en la que construimos el hiperespacio del triodo (Sección 4.2.1) podemos construir el hiperespacio del n-odo y lo que obtendremos es una n-celda con alas, donde las alas son triángulos que representan lo continuos contenidos en un intervalo del n-odo. Cada una de estas alas, donde el ala k, que representa los subcontinuos del intervalo I_k o del vector e_k, se pega en la n-celda por la arista de la forma $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ donde $B_j = \{0\}$ si $j \neq k$ y $B_k = [0, 1]$.

La n-celda la pensamos como $[0, 1]^n$

Si X_n es el n-odo, lo que queremos ahora es definir una selección abierta de $C(X_n)$ en X_n, y para hacer esto, lo que haremos es generalizar lo que hicimos en el triodo.

Llamaremos $\mathcal{C}^n$ a la n-celda y definiremos una selección σ de $\mathcal{C}^n$ en el n-odo y lo que haremos es utilizar la herramienta de los túneles de Wada, sólo que ahora tenemos que construir n túneles.

Consideremos la n-celda $[0, 1]^n$ como si fuera nuestra isla.

La región 1 consiste en la envolvente convexa de la $n-1$ celda $\{1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times ... \times [0, 1]$ y el punto $p_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$ y a esto le unimos la media n-esfera con centro en p_1 y radio$\frac{1}{n^n}$

En general la región k consiste en la envolvente convexa de la $n-1$ celda $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$ donde $B_k = \{1\}$ y $B_j = [0,1]$ si $j \neq k$ y el punto $p_k = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde $x_k = 1$ y $x_j = \frac{1}{2}$ si $j \neq k$ y a esto le unimos la media n-esfera con centro p_k y radio $\frac{1}{n^n}$.

El interior de la región k en la n celda, va a ser mi Lago k para $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Notemos entonces que el Lago k es un abierto en la n celda y que si $i \neq k$, entonces el Lago i no intersecta al Lago k.

Ahora estamos listos para comenzar los Túneles de Wada en la n celda $\mathcal{C}^n$.

En el tiempo $t = 0$, construimos un túnel $\mathcal{T}_1$ que es un conjunto abierto de $\mathcal{C}^n$ que empieza en el Lago 1 que pasa a distancia menor que uno de todos los puntos de la n celda (sin lagos).

En el tiempo $t = \frac{1}{2}$ cavamos un túnel $\mathcal{T}_2$ que es un conjunto abierto de $\mathcal{C}^n$ que empieza en el Lago 2 que pasa a distancia menor que un medio de todos los puntos de la n celda (sin lagos).

En general en el tiempo $t = 1 - \frac{1}{k}$ con $k \leq n$ cavamos un túnel $\mathcal{T}_k$ que es un conjunto abierto de $\mathcal{C}^n$ que empieza en el Lago k que pasa a distancia menor que $\frac{1}{k}$ de todos los puntos de la n celda (sin lagos).

Continuamos con este proceso que puede ser descrito de la siguiente manera. En el tiempo $t = \frac{1}{k}$ con $k > n$ alargamos el túnel $\mathcal{T}_j$ donde $k \equiv j(\text{mod } n)$ para que pasa a distancia menor que $\frac{1}{k}$ de todos los puntos de la n celda (sin lagos).

Notemos que en el tiempo $t = 1$ lo que hemos construido son n túneles $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, ..., \mathcal{T}_n$ que son n abiertos ajenos dos a dos en $\mathcal{C}^n$. Ademas si $\mathcal{T} = \mathcal{C}^n \backslash (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup ... \cup \mathcal{T}_n)$ tenemos que $\mathcal{T}$ es un continuo en $\mathcal{C}^n$ pues es la intersección anidada de continuos, $\mathcal{C}^n = (\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup ... \cup \mathcal{T}_n) \cup \mathcal{T}$ donde $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_k = \emptyset$ para toda $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y para todo punto $A \in \mathcal{T}$ se tiene que A está en la frontera de $\mathcal{T}_k$ para toda k.

Además de construir así los túneles a estos le vamos a pedir que tengan ciertas condiciones.

Primero pediremos que cada tunel $\mathcal{T}_k$ no toque las aristas de la n celda, es decir que cumpla con que $\mathcal{T}_k \cap (B_1 \times B_2 \times ... \times B_n) = \emptyset$ donde $B_i \in \{\{0\}, \{1\}, [0,1]\}$ y si $B_i = [0,1]$, entonces $B_j \neq [0,1]$ para todo $j \neq i$.

La segunda condición que le vamos a pedir a los túneles $\mathcal{T}_k$ tienen que ver con que tan gruesos pueden ser. Dada $k \in \mathbb{N}$,consideremos para cada $m \in \mathbb{N}$ al conjunto $\mathcal{C}_m^{(k)} = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, donde $A_k = [0, \frac{1}{m}]$ y $A_i = [0,1]$ si $i \neq k$. Al Lago donde comienza cada región lo vamos a dejar de la manera en que lo construimos, pero para construír el resto de cada túnel vamos a tomar en cuenta lo siguiente, el pedazo del túnel $\mathcal{T}_k$ que está en la región $\mathcal{C}_m^{(k)} \backslash \mathcal{C}_{m+1}^{(k)}$ tiene que cumplir que su diámetro es menor que $\frac{1}{(m+1)n^n}$.

Notemos que non lo que acabamos de hacer en cada tunel $\mathcal{T}_k$, existe un sólo punto que es precisamente el punto p_k tal que $d(p_k, \mathcal{T}) = \frac{1}{n^n}$ y para toda $q \in \mathcal{T}_k \backslash \{p_k\}$ se tiene que $d(q, \mathcal{T}) < \frac{1}{n^n}$.

De manera que ya hemos construido en la n celda $\mathcal{C}$ nuestros túneles abiertos, ahora si estamos listos para definir nuestra selección abierta de $C(X_n)$ en X_n donde X_n es el n-odo.

Si $A \in C(X_n)$, entonces A está en alguna de las alitas o A está en la n celda $\mathcal{C}^n$, si A está en alguna de las alitas, entonces $A \subset I_j$ para alguna $j \in \{1, 2, 3\}$, si A no está en las alitas, entonces A está en el cubo $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup ... \cup \mathcal{T}_n$, y lo que haremos es dar una regla para A dependiendo de si $A \in \mathcal{T}$ ó $A \in \mathcal{T}_k$ para alguna $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definición 4.7 *Sea X_n el n-odo, definimos $\sigma_n : C(X_n) \to X_n$ dada por:*

$$\sigma_n(A) = \begin{cases} \sigma_1(A) & \text{si } A \subset I_j \text{ para alguna } j \in \{1,2,3\} \\ v & \text{si } A \subset \mathcal{T} \\ n^n d(A, \mathcal{T}) e_k & \text{si } A \in \mathcal{T}_k \end{cases}.$$

Como podemos notar lo que hemos hecho hasta ahorita no es mas que generalizar lo que hicimos en el triodo para un n-odo, de manera que la prueba del siguiente teorema no la escribiremos pues se prueba de manera análoga al Teorema 4.6.

Teorema 4.8 *Para toda $n \in \mathbb{N}$, sea X_n el n-odo, la función $\sigma_n : C(X_n) \to X_n$ es una selección abierta.*

Demostración. Generalización a la prueba del Teorema 4.6. ■

Con esto terminamos nuestro estudio de selecciones abiertas en árboles, nos quedan aún muchas preguntas por resolver, pero no sabemos que hacer si complicamos un poco mas estas graficas, pues la manera de definir estas selecciones fue constructiva y no sirve si aumentamos los puntos de ramificación. De manera que nos quedan las siguentes preguntas.

Pregunta. ¿Existen más gráficas que admiten selecciones abiertas?

Pregunta. ¿Se pueden caracterizar a los árboles que admiten selecciones abiertas?

Pregunta. ¿Existen dendritas que no son árboles que admiten selecciones abiertas?

Es con esto que terminamos esta tesis, como podra darse cuenta todavía queda mucho campo abierto en estos temas para la investigación.

Bibliografía

[Du] DUGUNDJI, JAMES *Topology., Allyn and Bacon, Inc., 1966.* [H &Y] HOCKING, JOHN AND YOUNG, GAIL *Topology., Dover Publications, New York, 1988.*

[AI] A. ILLANES *A retractible nonlocally connected dendroid., Comment. Math. Univ. Carolinae 39 (1998), 797-807*

[W.L] W. LEWIS *The pseudo-arc., Bol. Soc Mat. Mexicana(3) Vol. 5, (1999), 26-77..*

[Nd] NADLER, JR. SAM B. *Continuum theory: an introduction., Marcel Dekker, Inc. 1992.* [Nd&Wd] NADLER, JR. SAM B.AND L. E. WARD, JR. *Concerning continuous selections, Proc. Amer. Math. Soc., 25(1970), 369-374.*

[VT] MARTÍNEZ DE LA VEGA Y MANSILLA VERÓNICA. *El hiperespacio de continuos con la topología producto, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 1998.*