23

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

RELACIÓN ENTRE LOS BIENES DURABLES Y EL PODER DEL MONOPOLIO: UN ENFOQUE DE TEORÍA DE JUEGOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

P R E S E N T A:

LUIS LÓPEZ ESTRADA

ASESOR: MTRA. MARÍA DE LA PALOMA ZAPATA LILLO

ACATLÁN, EDO. DE MÉXICO JUNIO DEL 2002

TÍTULO

Relación entre los Bienes Durables y el Poder del Monopolio. Un Enfoque de Teoría de Juegos.

OBJETIVO:

Analizar por medio de la teoría de los juegos repetidos el comportamiento de un monopolio en el mercado de bienes durables. El análisis se realiza a través de dos modelos distintos, comparando los equilibrios de cada uno de ellos.

HIPÓTESIS:

Los modelos de la teoría de juegos son muy adecuados para establecer una discusión precisa sobre la validez de una famosa Conjetura de Ronald Coase sobre un monopolio de bienes durables. Según esta conjetura el comportamiento del monopolio resulta como el de una empresa en un mercado de competencia perfecta, aunque el competidor del monopolio es él mismo.

CAPITULADO

INTRODUCCIÓN

PRIMERA PARTE: Algunas Definiciones y Resultados de la Teoría de Juegos No Cooperativos.

Capítulo I. Juegos en forma Normal o Estratégica. Los Equilibrios de Nash

Las ideas son la moneda del futuro: Solucionan problemas. Crean oportunidades. Entretienen. Derriban barreras. Enriquecen la vida.
Kevin Roberts

INTRODUCCIÓN

En un mercado competitivo los precios son una resultante de las ofertas y de las demandas de todos los agentes: empresas y consumidores. Es decir, tomadas en su conjunto, las decisiones de los agentes determinan los precios, pero cada agente[1], por sí sólo, no influye en dichos precios y por ello no toma decisiones sobre ellos, sino que es un tomador de precios. En un mercado competitivo, los sistemas de precios de equilibrio, aquellos en que las ofertas y demandas se igualan, son de tal manera que el precio de cada mercancía se acerca al costo marginal y la ganancia de la empresa a cero.

Algo muy distinto ocurre con un mercado en el que hay un monopolio[2], pues éste no es un tomador de precios, sino que una de las decisiones importantes que debe tomar para obtener la ganancia más alta posible es el precio a 4que venderá su producto y, en un mercado así, se forma un precio y una ganancia de monopolio.

Ronald Coase, premio Nobel de Economía 1991, desarrolló una conjetura sobre mercados con un monopolio, pero en los que el bien monopolizado dura varios periodos. En una situación así, el monopolio, como siempre no es un tomador de precios, sino que es el que decide a qué precio vende, sin embargo la característica nueva es que los compradores tienen la opción de esperar a que el monopolio baje los precios, cosa que éste estará tentado hacer tratando de vender el producto a todos los compradores potenciales, es decir a los que no pudo vender en un primer periodo. La conjetura de Coase consiste en que la resultante de la negociación del monopolio y sus compradores, cuando el bien dura varios periodos, se parece más a la del mercado competitivo que a la de un mercado con un monopolio, pero donde el bien dura un sólo periodo. Es decir Coase piensa que no se formarían precios y ganancia de monopolio.

El contexto teórico en donde se modela esta situación es el de la teoría de Juegos No Cooperativos y, dentro de ésta, la de juegos repetidos.

---

[1] Agente económico se considera cualquier entidad económica. Esta puede ser un individuo o empresa.

[2] También el monopolio se considera como agente.

La Teoría de Juegos fue creada, como una rama de las matemáticas; por el gran matemático húngaro John von Neuman (1903-1957), como un instrumento ideal para estudiar los conflictos entre los hombres. Esta disciplina parte, como la teoría económica neoclásica, de la racionalidad. Para dicha teoría económica, los seres humanos son absolutamente racionales, cuando toman decisiones económicas. En investigaciones recientes, la teoría de Juegos prescinde de supuestos de racionalidad muy fuerte, para ocuparse de seres comunes y corrientes con racionalidad limitada, lo que seguramente influirá en la teoría económica.

Un aspecto que diferencia a la economía neoclásica de la teoría de Juegos es que, en la primera, la racionalidad de los agentes consiste en que maximicen sus beneficios, sólo bajo las restricciones que les ponen sus recursos escasos o las condiciones tecnológicas existentes. En la forma de plantear dichos problemas de decisión en la que está envuelto cada agente *j* sucede que las decisiones de los demás agentes no parecieran afectar a *j*, pero esto no es así. En la teoría económica, la influencia de las acciones de todos los agentes en la resultante económica se refleja, por ejemplo, cuando las soluciones de los agentes correspondientes a un sistema de precios no son compatibles entre sí, es decir no se igualan ofertas y demandas, entonces, debido a las acciones de todos de todos los agentes, unos precios son presionados a la baja y otros a la alza. Pero al tomar sus decisiones, cada agente no toma en cuenta las posibles acciones de los demás y los resultados que traerían estas, mientras que esto es esencial en la optimización que realizan los agentes de la teoría de juegos.

La Teoría de Juegos se estableció con la intención de confrontar las limitaciones de la teoría económica neoclásica y aportar una teoría de comportamiento económico y estratégico para individuos que se relacionan directamente unos con otros. La palabra **juegos** no es más que una metáfora para referirse a interacciones más complejas de la sociedad humana.

En la Teoría de Juegos los resultados dependen no solamente de nuestras propias estrategias y de las condiciones del mercado, sino también y directamente de las estrategias escogidas por los otros participantes. La decisión individual son las estrategias de ese individuo y el resultado que se obtiene depende de las estrategias escogidas por cada uno de los participantes.

Dentro de la Teoría de Juegos hay dos enfoques para abordar los conflictos: el de la teoría de juegos cooperativos y el de la teoría de juegos no-cooperativos. Un juego es cooperativo si son posibles los acuerdos previos obligatorios sobre las decisiones que tomarán los diversos jugadores. En cambio, en los juegos no cooperativos no existe este tipo de acuerdos, ya que los jugadores pueden llegar a acuerdos previos sobre sus decisiones, pero nadie los puede a obligar a respetar dichos acuerdos. Por ello, los juegos no cooperativos resultan un mejor instrumento para estudiar los conflictos que se desarrollan en la realidad entre los seres humanos.

En este trabajo, se abarcan los conceptos y definiciones de la teoría de juegos en el ámbito no cooperativo. En los juegos no cooperativos se utilizan dos modelos: juegos en forma extensiva y juegos en forma estratégica o normal. Los primeros cuentan con más elementos para una descripción más detallada del juego y sus situaciones; en los segundos se construye el concepto de solución de los juegos no cooperativos, los llamados Equilibrios de Nash[3]. A un juego en forma extensiva se le asocia un juego en forma estrategicas que se llama su forma normal y a través de esto se obtienen equilibrios de Nash de los juegos extensivos y también se pueden definir equilibrios de subjuego perfecto, los que al restringirse a cualquier subjuego se obtiene un equilibrio del subjuego. De todo esto se ocupan los capítulos 1 y 2, además, en cada uno de ellos, aparecen ejemplos de juegos económicos, algunos de ellos clásicos antes del estudio de teoría de juegos, como el modelo de August Cournot desarrollado en 1838, conocido como modelo de Cournot[4], donde productores deben decidir la cantidad a producir de bienes con el fin de maximizar sus ingresos o el modelo de Bertrand donde en lugar de la cantidad a producir, lo que importa es el precio al cual deben vender. En el modelo de Stackelberg, un monopolista impide a otro productor entrar a competir en su área, este modelo fue retomado por Bain (1956) y por Sylos-Labini (1962).

En el capítulo 3 se enfoca a los juegos repetidos, pues la negociación entre el monopolio de un bien durable y sus compradores potenciales se puede entender como un juego que se repite, periodo tras periodo. El famoso ejemplo de Tucker que se conoce como el dilema

[3] Este equilibrio fue descubierto por John Nash en 1953 y que a la postre le dió el premio Nobel de Economía en 1994. Es el concepto solución que ha originado el análisis de modelos económicos importantes

del prisionero fue una motivación en el desarrollo de los juegos repetidos. Cuando un juego Γ se repite, se obtiene un nuevo juego que consiste en repetir Γ. Los jugadores tienen que tomar en cuenta las decisiones que tomaron en un período anterior para poder tomar las actuales, aparecen nuevas estrategias y nuevos pagos. Estos juegos se presentan frecuentemente en el mundo real. Los equilibrios de Nash del juego de una sola vez se conservan en el repetido, pero aparecen otros nuevos. Los llamados teoremas de tradición oral o del folklore son los resultados más importantes de la teoría de los juegos repetidos.

Finalmente, en el capítulo 4 se desarrolla el tema central de esta tesis. El análisis del monopolio con bienes durables. La formalización se establece a través de los conceptos de los capítulos anteriores. Aquí se consideran dos juegos repetidos distintos para estudiar si los equilibrios de Nash de ellos corresponden o no a la Conjetura de Ronald Coase y se modela a través de un ejemplo práctico en México, donde un monopolio de computadoras, potencia en el área de graficación y diseño decide cuándo vender.

El primero de dichos juegos repetidos es matemáticamente más simple, pues tiene un número finito de consumidores y cada jugador (monopolio y consumidores) tiene menos estrategias, pues no considera la historia de lo ocurrido en periodos anteriores al periodo "presente" en cuestión. Los equilibrios de subjuego perfecto de este primer modelo corresponden a la conjetura de Coase.

El segundo juego repetido se basa en matemática más difícil, ya que no sólo es un juego repetido, en el que, como en todos ellos, las estrategias se definen en el conjunto de historias, lo que ya es de por sí complicado, sino que además el número de consumidores es infinito y para la formalización de este modelo se utilizan algunos conceptos de teoría de la medida. Por esto, en la exposición de esta parte se queda en la discusión intuitiva de los conceptos y en el enunciado de los resultados sin meterse en demostraciones. Es en este modelo donde los autores principales, Fudenberg, Levin, Tirole[5], Ausebel y Deneckere[1] han desarrollado la discusión sobre la conjetura de Coase, pues resulta más realista, aunque sea más sofisticado. Las respuestas encontradas en este modelo no son contundentes, pues mientras los tres primeros autores encuentran equlibrios de Nash de subjuego perfecto que corresponden a lo esperado por Coase, las de los dos segundos no corresponden a ello, pues

[4] Tanto el duopolio de Cournot, como el modelo de Bertrand y el modelo de Stackelberg han sido pilares en el análisis de la economía. Cada uno de ellos representa una situación común en varios mercados.

en los equilibrios de Nash que ellos encuentran, sí se forman precios y ganancia de monopolio.

En las conclusiones, se discute la interesante conjetura, que permanece abierta, y posibles rutas para seguir abordándola.

PRIMERA PARTE:

Algunas Definiciones y Resultados de la Teoría de Juegos No Cooperativos.

Conceptos básicos de un juego en su forma normal, estrategias puras y mixtas, pago esperado, equilibrios de Nash, máximo asegurable, y algunos ejemplos económicos interesantes modelados a través de juegos en forma normal.

Conceptos básicos de un juego en forma extensiva, árboles, información, azar. Forma normal de un juego extensivo, algoritmo de Zermelo y juegos de información perfecta, juegos de recuerdo perfecto. Subjuegos y equilibrios de subjuego perfecto. Ejemplos económicos interesantes modelados a través de juegos en forma extensiva.

Capítulo I. Juegos en forma Normal o Estratégica. Los Equilibrios de Nash

La clasificación básica dentro de la Teoría de Juegos es la que existe entre la de Juegos Cooperativos y La de No Cooperativos.

Von Neuman[5] y sus contemporáneos trabajaron ya con ambas teorías. Durante mucho tiempo se consideraba que la diferencia entre ellas consistía en que mientras en la primera, la Cooperativa, se permite la comunicación y la negociación entre los jugadores, en la segunda esto no es posible. La mayoría de los autores más modernos considera que, en ambas, la comunicación y la negociación son posibles y la diferencia estriba en la obligatoriedad de los acuerdos derivados de estas. Es decir en la Teoría de Juegos Cooperativos ocurre como si se hubiera firmado un contrato y la violación de acuerdos conlleva un castigo que no aparece explícitamente en el modelo. En cambio en la Teoría de Juegos No Cooperativos, aunque los jugadores hayan llegado a acuerdos, tienen la libertad de romperlos y actuar en forma distinta a la acordada. En este trabajo se limitará a la Teoría de Juegos No Cooperativos.

En la teoría de juegos no cooperativos se utilizan dos tipos de modelos, los juegos en forma normal o estratégica y los juegos en forma extensiva. En este capítulo se trabajará con los primeros, para hacerlo en el siguiente con los segundos.

1.1 Modelo en forma estratégica

Una forma simple de representar un juego es usar la forma estratégica o forma normal. Para definir un juego en forma estratégica, se necesita especificar el conjunto de jugadores, el conjunto de opciones disponibles para cada jugador j y la forma en que los pagos de los jugadores dependerán de las opciones que todos elijan. Véanse los siguientes ejemplos.

[5] En 1944 John Von Neumann y Oskar Morgenstern publicaron el libro "Theory of Games and Economic Behavior" pilar en el desarrollo de la teoría de juegos. En este abordan la explicación amplia de los juegos de suma cero, la noción de juegos cooperativos: con utilidad transferible, su forma de coalición y conjuntos estables. También abordan la teoría axiomática de utilidad.

para obtener ganancias. De nuevo las decisiones serán simultáneas. Los pagos se representan en la figura 1.1.2.

$$\begin{array}{lc} & \text{J2} \\ & \begin{array}{cc} \text{entrar} & \text{no entrar} \end{array} \\ \text{J1} \quad \begin{array}{r} \text{construir la nueva planta} \\ \text{no construir} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-1) & (2,0) \\ (1.5,1.5) & (3,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.1.2

Los pagos del jugador 2 dependen de la estrategia elegida por el jugador 1, pero no dependen directamente por los costos del jugador 1. La estrategia de entrar a la competencia es rentable para el jugador 2 si y sólo si el jugador 1 no construye la nueva planta.

1.1.3 Auto o autobus

Diario en las mañanas mucha gente sale de su casa ya sea trabajar o la escuela por lo que necesista de un medio de transporte para llegar a su destino. Actualmente lo hacen a través de dos tipos de transporte: por auto propio o por microbus. El problema citadino es el enorme congestionamiento por este parque vehicular que provoca tráfico lento y retardos a los destinos de las personas. Cuando los usuarios que usan auto rebasan algún número q el tráfico se complica notablemente.

La diferencia de este juego a los anteriores es que aqui se tienen una infinidad de jugadores aunque también con dos estrategias.

Entonces se tiene un juego con un número k de jugadores (usuarios que utilizan transporte) con dos estrategias:

C → Usar auto

A→ Usar autobus

Por lo que respecta a los pagos, usar auto propio tienen mejor pago. Pero si todos lo hacen, el resultado hará que todos tengan pagos negativos dado que entre más autos se usen más congestión vial habrá; de igual manera si todos usan microbus se tendrá pagos positivos pero todos querrán mejorar cambiando al uso de auto. La función de pago se puede definir como

1.1.1 Precio alto o Reducido

En una industria participan dos compañías (jugador 1 y jugador 2). Cada una puede elegir un precio "alto" o uno "bajo" para la unidad de producto. Las decisiones tienen que ser simultáneas, sin que ninguna conozca la decisión de su contraparte. Si ambas eligen precios altos, tendrán enormes ganancias, de tres millones de dólares cada una, si las dos escogen precios bajos ganarán dos millones. En cambio si una establece un precio alto y la otra uno bajo, la segunda empresa, la del precio bajo atraerá a una parte importante de los demandantes y obtendrá cuatro millones de dólares, mientras que la primera sólo un millón de dólares. Las ganancias de las dos compañías se pueden expresar mediante la siguiente matriz (fig 1.1.1).

$$\begin{array}{lll} & & \text{precio de la compañía 2} \\ & & \begin{array}{cc}\text{elevado} & \text{reducido}\end{array} \\ \text{precio de la compañía 1} & \begin{array}{l}\text{elevado}\\ \text{reducido}\end{array} & \begin{pmatrix}(3,3) & (1,4)\\ (4,1) & (2,2)\end{pmatrix}\end{array}$$

Figura 1.1.1

En cada casilla, las ganancias de la compañía 1 se encuentran a la izquierda y las de la compañía 2, a la derecha.

1.1.2 Ingresar o no al mercado[6]

En una industria existen dos firmas, pero ahora una de ellas, el jugador 1, lleva un tiempo largo instalada en la industria y hasta el momento la había monopolizado, la otra, el jugador 2, apenas está considerando la conveniencia de ingresar a la industria. Las estrategias del jugador 1 consisten en construir una nueva planta o no hacerlo. El jugador 2, por su lado, debe decidir si entra a competir con 1 o se abstiene de hacerlo. Construir la nueva planta tiene ventajas para 1, sólo en caso de que exista un competidor, pues tendría que realizar una fuerte inversión. Para el jugador 2, entrar a la competencia es conveniente si las cosas no varían, pero es "malo", si la empresa 1 construye una nueva planta que le permita abaratar costos y vender por debajo de precios a los que ella tendría que vender

6 Ejemplo tomado de Bierman y Fernández [2]

para obtener ganancias. De nuevo las decisiones serán simultáneas. Los pagos se representan en la figura 1.1.2.

$$\begin{array}{lc} & \text{J2} \\ & \begin{array}{cc} \text{entrar} & \text{no entrar} \end{array} \\ \text{J1} \quad \begin{array}{r} \text{construir la nueva planta} \\ \text{no construir} \end{array} & \begin{pmatrix} (2,-1) & (2,0) \\ (1.5,1.5) & (3,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.1.2

Los pagos del jugador 2 dependen de la estrategia elegida por el jugador 1, pero no dependen directamente por los costos del jugador 1. La estrategia de entrar a la competencia es rentable para el jugador 2 si y sólo si el jugador 1 no construye la nueva planta.

1.1.3 Auto o autobus

Diario en las mañanas mucha gente sale de su casa ya sea trabajar o la escuela por lo que necesista de un medio de transporte para llegar a su destino. Actualmente lo hacen a través de dos tipos de transporte: por auto propio o por microbus. El problema citadino es el enorme congestionamiento por este parque vehicular que provoca tráfico lento y retardos a los destinos de las personas. Cuando los usuarios que usan auto rebasan algún número q el tráfico se complica notablemente.

La diferencia de este juego a los anteriores es que aqui se tienen una infinidad de jugadores aunque también con dos estrategias.

Entonces se tiene un juego con un número k de jugadores (usuarios que utilizan transporte) con dos estrategias:

C → Usar auto

A→ Usar autobus

Por lo que respecta a los pagos, usar auto propio tienen mejor pago. Pero si todos lo hacen, el resultado hará que todos tengan pagos negativos dado que entre más autos se usen más congestión vial habrá; de igual manera si todos usan microbus se tendrá pagos positivos pero todos querrán mejorar cambiando al uso de auto. La función de pago se puede definir como

$$u_j(\sigma^1,\sigma^2,\ldots,\sigma^n)=\begin{cases}15 & \sigma^j=C \quad k_\sigma\in[0,q]\\ -10 & \sigma^j=C \quad k_\sigma\in(q,1]\\ 10 & \sigma^j=A \quad k_\sigma\in[0,q)\\ 5 & \sigma^j=A \quad k_\sigma\in[q,1]\end{cases}$$

Formalmente se puede definir un juego en forma estratégica como sigue

Definición1.1.1 Un juego en forma estratégica consta de:

Un conjunto N, con al menos dos elementos, para cada j en N, un conjunto D_j, con al menos dos elementos y para cada j en N, una función real u_j definida en el producto cartesiano de los conjuntos D_j.

N es el conjunto de jugadores. D_j es el conjunto de estrategias puras disponibles para el jugador j, a los elementos del producto cartesiano de los D_j se les llama perfiles de estrategia. Por último u_j es la función de pagos del jugador j, es decir la que establece la ganancia que recibe el jugador en cada perfil de estrategias.

Se usará $(N, (D_j)_{j\in N}, (u_j)_{j\in N})$, para denotar al juego con jugadores en N, con conjuntos de estrategias D_j y funciones de pago u_j o en forma resumida simplemente Γ.

Cada vez que se realiza el juego Γ, cada jugador j deberá escoger una de las estrategias en el conjunto D_j.

Se denotará como D el conjunto de todos los posibles perfiles de estrategias, así que $D = X_{j\in N} D_j$. Como se dijo anteriormente, un perfil de estrategias σ es un elemento de $X_{j\in N} D_j$, es decir, una estrategia para cada jugador.

Un juego de forma estratégica es finito si el conjunto de jugadores N y todos los conjuntos de estrategia D_j son finitos.

1.2. Estrategias puras de mejor respuesta para un jugador y Equilibrios de Nash en estrategias puras.

Dado un juego de N jugadores y σ un perfil de estrategias puras, existe para cada uno de ellos una de sus estrategias puras que es la mejor respuesta a σ.

Considere la siguiente matriz de juego:

<table>
<tr><th></th><th>t_1,t_1,t_1,t_1,t_1</th><th>t_1,t_1,t_1,t_1,t_2</th><th>t_1,t_1,t_1,t_2,t_1</th><th>t_1,t_1,t_1,t_2,t_2</th><th>t_1,t_1,t_2,t_1,t_1</th><th>t_1,t_1,t_2,t_1,t_2</th><th>t_1,t_1,t_2,t_2,t_1</th><th>t_1,t_1,t_2,t_2,t_2</th><th>t_1,t_2,t_1,t_1,t_1</th><th>t_1,t_2,t_1,t_1,t_2</th><th>t_1,t_2,t_1,t_2,t_1</th><th>t_1,t_2,t_1,t_2,t_2</th><th>t_1,t_2,t_2,t_1,t_1</th><th>t_1,t_2,t_2,t_1,t_2</th><th>t_1,t_2,t_2,t_2,t_1</th><th>t_1,t_2,t_2,t_2,t_2</th><th>t_2,t_1,t_1,t_1,t_1</th><th>t_2,t_1,t_1,t_1,t_2</th><th>t_2,t_1,t_1,t_2,t_1</th><th>t_2,t_1,t_1,t_2,t_2</th><th>t_2,t_1,t_2,t_1,t_1</th><th>t_2,t_1,t_2,t_1,t_2</th><th>t_2,t_1,t_2,t_2,t_1</th><th>t_2,t_1,t_2,t_2,t_2</th><th>t_2,t_2,t_1,t_1,t_1</th><th>t_2,t_2,t_1,t_1,t_2</th><th>t_2,t_2,t_1,st,s_1</th><th>t_2,t_2,t_1,t_2,t_2</th><th>t_2,t_2,t_2,t_1,t_1</th><th>t_2,t_2,t_2,t_1,t_2</th><th>t_2,t_2,t_2,t_2,t_1</th><th>t_2,t_2,t_2,t_2,t_2</th></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_1,s_1,s_1</td><td colspan="8" rowspan="8">(2,-2)</td><td colspan="8" rowspan="8">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_1,s_1,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_1,s_2,s_1</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_1,s_2,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_2,s_1,s_1</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_2,s_2,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_2,s_2,s_1</td></tr>
<tr><td>s_1,s_1,s_2,s_2,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_1,s_1,s_1</td><td colspan="8" rowspan="8">(0,0)</td><td colspan="8" rowspan="8">(2,-2)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_1,s_1,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_1,s_2,s_1</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_1,s_2,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_2,s_1,s_1</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td><td colspan="4" rowspan="4">(0,0)</td><td colspan="4" rowspan="4">(-2,2)</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_2,s_1,s_2</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_2,s_2,s_1</td></tr>
<tr><td>s_1,s_2,s_2,s_2,s_2</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_1,s_1,s_1</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_1,s_1,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_1,s_2,s_1</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_1,s_2,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_2,s_1,s_1</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_2,s_1,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_2,s_2,s_1</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_1,s_2,s_2,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_1,s_1,s_1</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_1,s_1,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_1,s_2,s_1</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_1,s_2,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_2,s_1,s_1</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_2,s_1,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_2,s_2,s_1</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td rowspan="2">(-2,2)</td><td rowspan="2">(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>s_2,s_2,s_2,s_2,s_2</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td><td>(0,0)</td><td>(2,-2)</td></tr>
</table>

Definición 1.2.2 *En un juego en forma normal $\Gamma = (N, \{D_j\}_{j \in N}, \{u_j\}_{j \in N})$, un perfil de estrategias σ^* es un* ***Equilibrio de Nash en estrategias puras (ENP)****, si para cada jugador j, σ^{*j} es una mejor respuesta pura de j a σ^*.*

Es decir, si σ^* es ENP, entonces

$$u_j(\sigma^*) \geq u_j(\sigma \mid \sigma^j) \forall \sigma^j \in D_j$$

para cada estrategia factible σ^j en D_j

En el juego del último ejemplo, (T, C) es el único perfil de estrategias puras que satisface las condiciones para ser ENP.

Ejemplo 1.2.1 Sean los jugadores: A, B y C

Si el jugador C escoge 1, los pagos son:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jugador B} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{L} & \text{C} & \text{R} \end{array} \\ \text{Jugador A} & \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{M} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3,3) & (3,2,3) & (3,1,3) \\ (2,3,3) & (2,2,3) & (2,1,3) \\ (1,3,3) & (1,2,3) & (1,1,3) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.2.1a

Si el jugador C escoge 2, los pagos son:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jugador B} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{L} & \text{C} & \text{R} \end{array} \\ \text{Jugador A} & \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{M} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3,2) & (3,2,2) & (3,1,2) \\ (2,3,2) & (6,6,6) & (6,5,6) \\ (1,3,2) & (5,6,6) & (5,5,6) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.2.1b

Si el jugador C escoge 3

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jugador B} \\ & & \begin{array}{ccc} \text{L} & \text{C} & \text{R} \end{array} \\ \text{Jugador A} & \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{M} \\ \text{B} \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3,1) & (3,2,1) & (3,1,1) \\ (2,3,1) & (6,6,5) & (6,5,5) \\ (1,3,1) & (5,6,5) & (9,9,9) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.2.1c

Es un equilibrio de Nash que el jugador A escoja el segundo renglón, el jugador B la segunda columna y el jugador C la segunda caja.

Nótese que si el jugador B escoge la segunda columna y el jugador C la segunda caja, entonces el jugador A obtiene 3 al escoger el primer renglón, 6 al escoger el segundo y 5 al escoger el tercero. Por lo tanto, para el jugador A, la segunda hilera es la mejor respuesta a lo que están los demás.

De la misma manera, la segunda columna es la mejor respuesta de B a la elección del segundo renglón por parte de A y de la segunda caja por parte de C, mientras que la segunda caja es la mejor respuesta de C a la elección del segundo renglón por parte de A y a la segúnda columna por parte de B. Otros equilibrios son:

1) A escoge la primer fila, B la primera columna y C la primera caja y
2) A escoge la tercera fila, B la tercera columna y C la tercera caja.

Tal es el criterio de un equilibrio de Nash; cada jugador está buscando la ganancia máxima, por su cuenta, dadas las acciones de los otros. Adviértase el fuerte matiz no cooperativo de esta definición.

En el ejemplo *1.1.1*, las compañías tendrían mejores resultados si establecen precios elevados, pero no actuarían en un equilibrio de Nash y eso quiere decir que cada compañía tendrá un aliciente para abandonar unilateralmente la decisión de tener altos los precios. Si la compañía 1 establece un costo elevado, la mejor opción de la empresa 2 será reducir el suyo: entonces obtendría cuatro millones de dólares en lugar de tres. Y si la compañía 1 establece un costo reducido, la empresa 2 haría lo mismo. Entonces ganarían dos millones de dólares en lugar de uno. Lo mismo se establece para la compañía 1: ésta establece también un precio reducido. Así que ambas eligen costos reducidos, el par (2,2) es un equilibrio de Nash. El único equilibrio de Nash del Juego en estrategias puras es que los dos jugadores escojan precios bajos.

En el ejemplo *1.1.2* no hay ninguna pareja de estrategias que sean equilibrio en estrategias puras.

En el ejemplo *1.1.3* existe un equilibrio de Nash en el momento que los usuarios que conducen auto llegan a una proporción q exacta. El razonamiento es el siguiente:

Sea $k_\sigma = q$ la proporción exacta que usa Coche.

Si j está en C su pago es $u_j(\sigma/C)=15$. Si j decide cambiar a A, entra a la región $[0,q)$ donde su pago cambia a $u_j(\sigma/A)=10$. Dado que no mejora, no le conviene cambiar.

Si j está en A su pago es $u_j(\sigma/A)=5$. Si j decide cambiar a C, entra a la región $(q,1]$ donde su pago cambia a $u_j(\sigma/A)=-10$. Tampoco j mejora, no le conviene cambiar.

Ninguno puede mejorar individualmente al cambiar de q. Esto demuestra que las estrategias son un equilibrio de Nash.

1. 3 Máximo asegurable en estrategias puras

Considérese un juego en forma estratégica $\Gamma = (N, (D_j)_{j\in N}, (u_j)_{j\in N})$.

Definición1.3.1: *$x \in R$ es asegurable en estrategias puras para el jugador j, si existe $\sigma^{*j} \in D_j$ tal que $u_j(\sigma|\sigma^{*j}) \geq x$ para toda $\sigma \in D$. Sea* $A_j^{'} = \{ x \in R / \exists\ \sigma^{*j} \in D_j$ tal que $u_j(\sigma|\sigma^{*j}) \geq x$ para toda $\sigma \in D\}$

Si en un juego rectangular n-personal, el jugador j tiene un conjunto finito de estrategias puras, entonces existe el supremo[7] de $A_j^{'}$ (sup $A_j^{'}$).

Pues si $m_j = \min_{\sigma\in D} u_j(\sigma)$ y $M_j = \max_{\sigma\in D} u_j(\sigma)$ y $\sigma^j \in D_j$, entonces $u_j(\sigma|\sigma^j) \geq m_j$ para toda $\sigma \in D$, por lo tanto $m_j \in A_j^{'}$ y $A_j^{'} \neq \theta$ y M_j es una cota superior de $A_j^{'}$.

En cambio, si en un juego n-personal algún jugador j tiene un conjunto infinito de estrategias puras, no siempre existe el supremo de $A_j^{'}$.

Proposición1.3.2: $v'_j = \max_{\sigma^j\in D_j} \min_{\sigma\in D} u_j(\sigma|\sigma^j)$ Este es el nivel de seguridad para el jugador j en el juego Γ, es decir, el mayor pago esperado que el jugador puede asegurarse independientemente de lo que hagan sus oponentes.

Demostración: Supongase que existen v'_j y $\max_{\sigma^j\in D_j} \min_{\sigma\in D} u_j(\sigma|\sigma^j)$.

---

[7] El supremo de un conjunto es su menor cota superior. Por ejemploel intervalo (0.1) no tiene elemento máximo, pero todos sus elementos son menores que 2. Así, 2 es una cota superior de (0,1). La menor cota superior es 1. Nota extraída de Binmore [3]

Sea $x \in A_j^{\cdot}$, entonces existe $\sigma^{*j} \in D_j$ tal que $u_j(\sigma|\sigma^{*j}) \geq x$ para toda $\sigma \in D$. En particular $\min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{*j}) \geq x$. Pero $\max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j}) \geq \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{*j}) \geq x$ por lo que $\max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j})$ es cota superior de $A_j^{\cdot}$, y

$$v'_j \leq \max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j}) \text{..................} (\text{I})$$

Por otro lado, existe $\sigma^{**j} \in D_j$ tal que $\min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{**j}) = \max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j})$, por lo que $\max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j}) \leq \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{**j})$ para toda σ en D. Es decir, $\max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j}) \in A_j^{\cdot}$, entonces

$$v'_j \geq \max_{\sigma' \in D_j} \min_{\sigma \in D} u_j(\sigma|\sigma^{j}) \text{..................} (\text{II})$$

de (I) y (II) se tiene la igualdad. *Q.D*

Esta proposición nos da un método para calcular la máxima cantidad asegurable si el juego se realiza una sola vez.

1.4 Estrategias mixtas y pago esperado

Considérese el siguiente juego llamado el juego de las monedas

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Jugador 2} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Cara} & \text{Cruz} \end{array} \\ \text{Jugador 1} & \begin{array}{c} \text{Cara} \\ \text{Cruz} \end{array} & \begin{pmatrix} (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (-1,1) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.4

En este juego, los conjuntos de estrategias de los jugadores son {cara, cruz}. Imaginese que cada jugador tiene una moneda y debe decidir si destaparla con cara o cruz. Si ambas monedas son cruz o cara, entonces el jugador 2 gana la moneda del jugador 1; si una es diferente, entonces el jugador 1 gana la moneda a 2. Supongase que el juego se realiza una gran cantidad de veces y que los jugadores intentan maximizar su ganancia media. Supongase que 1 elige cara o cruz de acuerdo con una función. Por complicada que ésta sea, 1 no puede asegurar más que -1 como ganancia media puesto que 2, usando el mismo algoritmo que 1 para seleccionar sus estrategias ganaría 1, en cada partida. También para cada función de elección de 2, existe otra para 1 de tal manera que éste último gana 1 en cada partida.

Considerese que el jugador 1 eligiera su estrategia a través de un mecanismo de azar, tal que con probabilidad q elige cara y con probabilidad $1-q$ elige cruz. Análogamente 2 da probabilidad de r a cara y $1-r$ a cruz. A este tipo de elecciones le les llamará estrategias mixtas.

El pago medio para el jugador 1 sería

$$(-1)qr + (1)\,q(1-r) + (1)(1-q)\,r + (-1)(1-q)(1-r)$$
$$= -4qr + 2q + 2r - 1$$
$$= 2r(-2q + 1) - (-2q + 1).$$

Si 1 elige de tal manera que si $\frac{1}{2} < q < 1$, entonces lo peor que le puede pasar es que 2 elija $r = 1$. El jugador 1 ganaría $(-2q + 1) \leq 0$ que es mayor que -1. Si $0 < q < \frac{1}{2}$, y 2 eligiera la $r = 0$, el jugador 1 ganaría $2q - 1$ que es mayor que -1. Entonces el máximo asegurable para 1, con este tipo de estrategias es mayor que con las estrategias puras. Más aún, si q es $\frac{1}{2}$, 1 ganaría 0, haga lo que haga 2.

Definición 1.4.1: *Dado un juego de forma estratégica,* $\Gamma = (N, \{D_j\}_{j \in N}, \{u_j\}_{j \in N})$ *finito, una estrategia mixta para el jugador j es un vector* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_{mj})$ *tal que* $x_k \geq 0$ *para* $k = 1,2,\ldots,m_j$ *y* $\sum_{k=1}^{mj} x_k = 1$*, donde* m_j *es el número de estrategias puras del jugador j.*

M_j denotará al conjunto de todas las estrategias mixtas del jugador j, y

M a $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$

Los elementos de M se llaman *perfiles de estrategias mixtas.*

Dado un perfil de estrategias mixtas$(X^1, X^2, \ldots, X^j, \ldots, X^n)$ y una estrategia mixta $\hat{X}^j$ del jugador j se denota como $\left(X \middle| \hat{X}^j\right)$ a $(X^1, X^2, \ldots, \hat{X}^j, \ldots, X^n)$.

A cualquier estrategia pura σ^j del jugador j, se le puede asociar la estrategia mixta (0, 0, ..., 1, ..., 0), donde la coordenada con valor 1 corresponde a σ^j. De esta manera se puede pensar que el conjunto de estrategias puras de j está contenida en el conjunto de sus estrategias mixtas.

Definimos la función $E{:}M \rightarrow R^n$ como

$$E(X^1, X^2, ..., X^n) = \sum_{(\sigma^1\sigma^2...\sigma^n)\in D} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} ... x^n_{\sigma^n} u(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n)$$

Observaciones:

- Una estrategia mixta X^j para el jugador j es una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras D_j, x_k es la probabilidad que j asignará a su estrategia k-ésima. Un perfil de estrategias mixtas $X=(X^1, X^2, ..., X^n)$ determina una distribución de probabilidad en el conjunto D de perfiles de estrategias puras, así el perfil de estrategias mixtas X le asigna al perfil de estrategias puras $(\sigma^1, \sigma^2, ..., \sigma^n)$ la probabilidad $x^1_{\sigma^1} . x^2_{\sigma^2} ... x^n_{\sigma^n}$.
- Los conjuntos de estrategias mixtas M_j son compactos[8] y convexos, pues son simplejos unitarios. También M es compacto y convexo.
- La función E es una función lineal en $M \subset R^n$ y por lo tanto continua.
- En un juego infinito, se necesita una sigma álgebra en D_j, para poder definir una estrategia mixta del jugador j como una distribución de probabilidad. Por o tanto, la función de pago será una esperanza matemática.

1.5 Mejores respuestas a perfiles de estrategias mixtas. Equilibrio de Nash en estrategias mixtas

Considérese la fig 1.4, recordando la definición de Equilibrio de Nash (ENP) en estrategias puras, esta matriz no tiene este tipo de equilibrio.

En forma análoga a como se procedió con las estrategias puras se definirá el concepto de equilibrio en estrategias mixtas.

---

[8] Un conjunto de R^n es compacto si es cerrado y acotado. Un conjunto es cerrado si contiene todos sus puntos frontera. Así el intervalo compacto [0,1] es cerrado porque contiene sus puntos frontera 0 y 1. Nota extraída de Binmore [3]

1.5.1 Estrategia de mejor respuesta mixta

Al igual que en estrategias puras, una estrategia mixta de mejor respuesta es aquella que le da un mayor pago a j dadas las estrategias del los oponentes de j. Formalmente se puede definir como:

Definición 1.5.1 *En un juego de forma normal $\Gamma = (N, \{C_j\}_{j\in N}, \{u_j\}_{j\in N})$, si X es un perfil de estrategias mixtas, $\hat{X}^j$ es una estrategia mixta de mejor respuesta de j a X, si*
$E_j(X/\hat{X}^j) \geq E_j(X/X^j)$, para toda estrategia mixta X^j.

Dado un perfil X, para todo jugador j existen estrategias mixtas de mejor respuesta

Definición 1.5.2: *En un juego de forma normal $\Gamma = (N, \{C_j\}_{j\in N}, \{u_j\}_{j\in N})$. de N jugadores, el perfil de estrategias mixtas $(X^{*1}, X^{*2}, \ldots, X^{*n})$ es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas (ENM) si para cada jugador j, X^{*j} es una mejor respuesta al perfil $(X^{*1}, X^{*2}, \ldots, X^{*n})$.*

El teorema fundamental de los juegos no cooperativos finitos se debe a Nash y asegura que todos ellos tienen Equilibrios de Nash en estrategias Mixtas.

Teorema 1.5.3(Teorema de Nash): *En un juego de forma estratégica finito siempre existe un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

La demostración de este teorema que está basada en el Teorema de punto fijo de Brower.

Teorema de Brower *Sea $S \subseteq R^n$ compacto y convexo y $f: S \to S$, entonces existe x en S tal que $f(x)=x$.*

Este teorema es una generalización de un hecho muy conocido que le ocurre a las funciones continuas definidas en $[0,1]$ y que toman valores también en $[0,1]$. Aquí argumentar que existe x^*, $0 \leq x^* \leq 1$, tal que $f(x^*)=x^*$ es fácil, en ese caso. Supongase que $f(0) \neq 0$ y que $f(1) \neq 1$, pues de otra manera ya se habría encontrado a x^*, como $f(0)>0$ y $f(1)<1$, habrá un valor de $0<x<1$, en donde $f(x)=x$. Se Puede observar geométricamente en la figura 1.5.3.

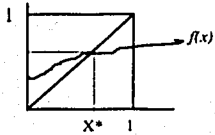


Figura 1.5.3

Proposición1.5.4: *Un equilibrio de Nash en estrategias puras es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas.*

Demostración:

Para hacer esta demostración se denotan otras proposiciones

$$1.\ \textit{Para toda}\ \hat{X}^j \in M_j,\ E_j(X|\hat{X}^j) = \sum_{\sigma^j \in D_j} \hat{x}^j_{\sigma^j} E_j(X \mid \sigma^j)$$

$$2.\ E(\vec{\sigma}) = u(\sigma)\ \text{donde}\ \vec{\sigma}\ \text{es la estrategia mixta correspondiente a}\ \sigma$$

En un equilibrio en ep

$$\forall_j \in N,\ u_j(\sigma^*) \geq u_j(\sigma^* \mid \sigma^j)\ \forall \sigma^j \in D_j$$

considerese $X^j \in M_j$,

$$\forall_j \in N,\ \sum_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j}\ u_j(\sigma^*) \geq \sum_{\sigma^j \in D_j} x^j_{\sigma^j} u_j(\sigma^* \mid \sigma^j)$$

por lo que

$$\forall_j \in N,\ E_j(\vec{\sigma}^*) \geq E_j(\vec{\sigma}^* \mid X^j)\quad Q.D.$$

1.6 Máximo asegurable en estrategias mixtas

Una cantidad es asegurable si existe una estrategia que le de esta cantidad hagan lo que hagan sus oponentes.

Definición 1.6.1 *el real a* ***es una cantidad asegurable en estrategias mixtas para j,*** *si existe una estrategia* $X^{*j} \in M_j$ *tal que para toda* $X \in M$, $E_j(X \mid X^{*j}) \geq a$.

Sea A_j el conjunto de todas las cantidades asegurables en estrategias mixtas para el jugador j. Entonces $M_j = \max_{\sigma \in D} u_j(\sigma)$ es una cota superior *de* A_j, pues para toda $X \in M$ y $X^j \in M_j$,

$$E_j(X / X^j) = \sum_{\sigma \in M} \sum_{\sigma^j \in M_j} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} \ldots x^j_{\sigma^j} \ldots x^n_{\sigma^n} u_j(\sigma | \sigma^j) \leq$$

$$\sum_{\sigma \in M} \sum_{\sigma^j \in M_j} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} \ldots x^j_{\sigma^j} \ldots x^n_{\sigma^n} M_j = M_j.$$

Al mismo tiempo $m_j = \min u_j(\sigma)$ está en A_j pues para cualquier $X^j \in M_j$ y $X \in M$,

$$E_j(X / X^j) = \sum_{\sigma \in M} \sum_{\sigma^j \in M_j} x^1_{\sigma^1} x^2_{\sigma^2} \ldots x^j_{\sigma^j} \ldots x^n_{\sigma^n} u_j(\sigma | \sigma^j) \leq m_j$$

Entonces para toda j, existe el supremo de A_j al que se llamará v_j.

Proposición 1.6.2 Para cada X^j,, existe el $\hat{X}^j$, existe $\min_{X \in M} E_j(X | \hat{X}^j)$.

Demostración: E es continua en M, por lo tanto también lo es $E_j(\ \ / X^j)$, cuando X^j es fija. Además M es un conjunto compacto, entonces para toda $\hat{X}^j$, existe $\min_{X \in M} E_j(X | \hat{X}^j)$. *Q.D.*

Se ha construido una función $h: M_j \to R$ definida como $h(\hat{X}^j) = \min_{X \in M} E_j(X | \hat{X}^j)$. La función h es continua en M_j y este conjunto es compacto, por lo que la función h tiene máximo en M_j

Notación: a $\max_{X^j \in M_j} h(X^j)$, se denota como $\max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j(X | X^j)$.

Al supremo Aj se le llamará v_j. Entonces

Proposición 1.6.2 $v_j = \max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j(X | X^j)$.

Demostración:
Existe un X^{*j} tal que $E_j(X | X^{*j}) > a \ \forall X \in M$, además $\min_{X \in M} E_j(X | X^{*j}) \geq a$

Pero $\max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j(X | X^j) \geq \min_{X \in M} E_j(X | X^{*j}) \geq a$, por lo que $\max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j(X | X^j)$ es una cota superior de A_j y

$$v_j \leq \max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j\left(X \middle| X^j\right) \text{...(I)}$$

Por otro lado, existe $\hat{X}^j \in M_j$ tal que $\min_{X \in M} E_j\left(X \middle| \hat{X}^j\right) = \max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j\left(X \middle| X^j\right)$ entonces

$\max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j\left(X \middle| X^j\right) \leq E_j\left(X \middle| \hat{X}^j\right)$ para toda $X \in M$

Es decir, $\max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j\left(X \middle| X^j\right) \in A_j$ y

$$v_j \geq \max_{X^j \in M_j} \min_{X \in M} E_j\left(X \middle| X^j\right) \text{...(II)}$$

Entonces entre (I) y (II) se da la igualdad. *Q.D.*

1.7 Modelos de estructura de mercado

1.7.1 El dilema del prisionero[9]

Este ejemplo es un clásico en la teoría de juegos. Ha generado interés en la aplicación de fenómenos sociales. Este popular juego involucra dos jugadores en competencia por mejores resultados. El dilema del prisionero puede formularse en diversos contextos, ya sean económicos, como la competencia entre empresas, o políticos, como conflictos electorales y militares, o sociales, como negociaciones obrero patronales y hasta conflictos de pareja. La primera presentación de este juego trata sobre dos jugadores que tienen un conflicto muy artificial y cuyo interés es la aparente paradoja que contiene la solución, pero se pueden plantear dilemas del prisionero con un número arbitrario de jugadores que expresan un tipo de conflictos muy frecuentes en la sociedad y la solución no es sólo una paradoja curiosa, sino que puede ser una catástrofe. La historia original de la cual proviene su nombre la siguiente:

> La policía ha aprehendido a dos individuos sospechosos de haber cometido un delito. Pero carece de las pruebas necesarias para condenarlos y sólo puede hacerlo con una pena mínima (por portar armas, por ejemplo), a menos que uno aporte pruebas contra el otro. Entonces, se mantiene a los dos presos en celdas separadas y les plantea a cada uno de ellos el dilema expresado en la matriz siguiente

$$\text{Prisionero A} \quad \begin{array}{c|cc} & \multicolumn{2}{c}{\text{Presionero B}} \\ & C & NC \\ \hline C & (-3,-3) & (0,-4) \\ NC & (-4,0) & (-2,-2) \end{array} \qquad \begin{array}{l} C \text{ -->Confesar} \\ NC \text{ -->No confesar} \end{array}$$

Figura 1.7.1 Matríz de pago del juego del dilema del prisionero

En muchos casos reales los participantes tiene un pacto moral de no traicionarse en caso de que sean aprehendidos, o una fuerza externa que los obliga a no culparse, si esto sucede se pueden analizar dos conflictos distintos. El primero, la solución del juego es que ningún

[9] Publicado en 1950 por Tucker, inspiró al estudio de muchos juegos, entre ellos los juegos repetidos. Aparentemente Howard Raiffa independientemente hizo experimentos con este juego. Esta es una versión de Kreps [8].

prisionero confesará y entonces pasarían dos años en la carcel; el segundo, si tienen la libertad de violar el pacto lo harán cada uno de ellos ya que se ven motivados hacerlo pues si uno viola el acuerdo y el otro no lo hace, el que culpa sale libre.

El primer enfoque es el de los juegos cooperativos que en las definiciones mismas de solución decretan que los jugadores actuan como si hubiera una fuerza coercitiva externa, o valores morales que tienen una importancia fundamental para los jugadores, que no están explícitos en la descripción del juego. El segundo, en los juegos no cooperativos, los individuos son egoistas y buscan su propio interés. Estos individuos no buscan el bien común y si llega a darse sería como una resultante. Pero también puede darse la desgracia común como sucede en el dilema del prisionero, donde la confesión de los dos jugadores, solución no cooperativa, lleva a una situación peor que si respetarán el acuerdo.

El dilema del prisionero tiene muchas formulaciones, como lo vimos en el ejemplo 1 donde las empresas en lugar de ganar 3 millones de dólares cada una, ganan 2 millones que es la estrategia dictada por el equilibrio.

1.7.2 Modelo del duopolio de Cournot[10]

Cournot (1838) anticipó el equilibrio de Nash, trabajando en un modelo de duopolio, considerado una de las piedras angulares de organización industrial

Sea q_1 y q_2 las cantidades (de un producto homogéneo) producidas por las firmas *1* y *2* respectivamente.

Sea $p(Q) = a - Q$ el precio de mercado cuando la cantidad del conjunto del mercado es $Q = q1 + q2$ (mas precisamente $p(Q) = a - Q$ para $Q < a$ y $p(Q) = 0$ para $Q \geq a$). El costo total para la firma i de producir q es $C_i(q_i) = cq_i$. Esto es, no hay costos fijos y el *costo marginal* [11] es constante en c, donde asumimos $c < a$. Siguiendo Cournot, supóngase que las firmas eligen sus cantidades simultáneamente. Para encontrar el equilibrio de Nash del juego de Cournot, primero se trasladará el problema en un juego de forma normal

Los dos jugadores son las dos firmas. Las estrategias disponibles para cada firma son las diferentes cantidades que deberán producir. Naturalmente los resultados negativos no son

[10] El Modelo de Cournot es un ejemplo clásico de varios autores modernos. Aqui se presenta una versión de Gibbons [7].

factibles. Así, cada estrategia de la firma puede representarse como D_i $[0, \infty)$, una estrategia típica σ_i es una cantidad a elegir, $q_i \geq 0$, $P(Q) = 0$ para $Q \geq a$ y ninguna firma producirá una cantidad $q_i > a$.

Queda especificar el pago para la firma i como una función de las estrategias elegidas por ella y por la otra firma, y definir y resolver el equilibrio. Asumimos que el pago de la firma es simplemente su utilidad. Así el pago $u_i(\sigma_i, \sigma_j)$ en un juego general de dos jugadores y en forma normal puede escribirse como

$$u_i(q_i, q_j) = q_i [p(q_i + q_j) - c] = q_i [a - (q_i + q_j) - c]$$

y su equilibrio de Nash. es

$$\max_{0 \leq q_i < \infty} u_i(q_i, q_j^*) = \max_{0 \leq q_i < \infty} q_i [a - (q_i + q_j^*) - c]$$

Asumimos que $q_j^* < a - c$ la primera condición para el problema de optimización de la firma i, esto produce

$$q_i = \tfrac{1}{2}(a - q_j^* - c) \quad\text{...}(a).$$

Así, si el par de cantidades (q_i^*, q_j^*) es un equilibrio de nash, la cantidad elegida de las firmas debe satisfacer

$$q_1^* = \tfrac{1}{2}(a - q_2^* - c)$$

y

$$q_2^* = \tfrac{1}{2}(a - q_1^* - c)$$

sumando $q_1^* + q_2^* = a - \tfrac{1}{2} q_1^* - \tfrac{1}{2} q_2^* - c$.

$$\frac{3}{2}(q_1^* + q_2^*) = a - c$$

$$q_1^* + q_2^* = \frac{2(a - c)}{3}$$

resolviendo el par de ecuaciones produce

[11] Entiéndase por costo marginal el resultante de la producción adicional de un bien. Mientras el costo fijo es aquél que asume una empresa a corto plazo y no depende del nivel de producción. Estos costos persisten aunque la empresa no esté produciento nada.

$$q_1^* = q_2^* = \frac{(a - c)}{3}$$

por lo tanto

$$q_1^* = \frac{(a - c)}{3} \; ;$$

$$q_2^* = \frac{(a - c)}{3}$$

el cual realmente es menor que $a - c$, como se asumió

La intuición atrás de este equilibrio es simple. Cada firma querrá ser un monopolista en este mercado, en el cual eligirá q_i para maximizar $\pi i\ (q_i\ ,0)$. Esto produciría la cantidad monopolica de $q_m = \frac{(a - c)}{2}$ y ganar la utilidad monopolica $\varphi_i\ (q_m\ ,\ 0) = \frac{(a - c)^2}{4}$. Dado que hay dos firmas, el conjunto de utilidades para el duopolio sería maximizar el conjunto de utilidades $q_1 + q_2$ igual a la cantidad del monopolio q_m, como ocurriría si $q_i = \frac{q_m}{2}$ para cada i, por ejemplo, el problema con este acuerdo es que cada firma tiene un incentivo para desviarse porque la cantidad monopolica es baja, el precio asociado $p(q_m)$ es alto, y en su precio cada firma le gustaría incrementar su cantidad, a pesar del hecho de que tal incremento en producción implica un precio reducido en el mercado. En el equilibrio de Cournot, en contraste, la cantidad total es alta, así que el precio asociado es bajo. Así, la tentación a incrementar la producción es reducida -reducida sólo lo suficiente que cada firma disuade de incrementar su precio por la realización de que el precio del mercado bajará.

Procediendo gráficamente, la figura (1) muestra la ecuación *(a)* que da la mejor respuesta de la firma i a la estrategia del equilibrio de la firma j, q_j^*. Análogamente, éste razonamiento lleva a la mejor respuesta de la firma 2 a una estrategia arbitraria por la firma 1 y la mejor respuesta de la firma 1 a una estrategia de la firma 2. Asumiendo que la estrategia de la firma 1 satisface $q_1 < a - c$, la mejor respuesta de la firma es

$$R_2\,(q_1) = \tfrac{1}{2}\,(a - q_1 - c);$$

como también, si $q_2 < a - c$ entonces la mejor respuesta de la firma 1 es

$$R_1\,(q_2) = \tfrac{1}{2}\,(a - q_2 - c);$$

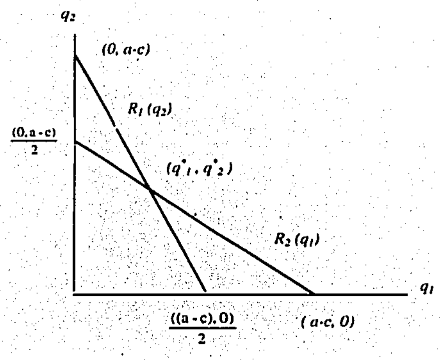


Figura (1)

Como se muestra en la figura 1, las funciones de las mejores respuestas interactúan una sola vez, en el par $(q_1* + q_2*)$, la cantidad en equilibrio.

1.7.3 El conflicto de dos firmas de autos (aplicación del modelo de Cournot)[2]

Existen dos ensambladoras de autos en un mercado común las cuales venden sus unidades a un precio p. La curva de demanda inversa de mercado o precio de mercado está dado por

$$p = 22 - (q_1 + q_2)$$

donde el rendimiento de las dos firmas denotado $q_1 + q_2$, es medido en millones de autos por año. Ambas firmas tienen el mismo costo marginal de \$10 por unidad y no tiene costos fijos dado que si alguna empresa cierra podría reducir sus costos a cero.

La función de costos de la firma 1 es igual a $c_1\ (q_1) = 10 * q_1$ mientras que para la firma 2 es $c_2\ (q_2) = 10 * q_2$ para q_2, $q_1 > 0$.

Ambas firmas deben elegir su rendimiento anual al principio del año sin conocimiento previo de la decisión de la otra firma. La funcion de reacción de la firma i es

$$q_i = ½ (a - q_j* - c), \text{ esto es}$$

$$q_1 = 6 - 0.5 * q_2$$

$$q_2 = 6 - 0.5 * q_1$$

Resolviendo estas ecuaciones se tiene

$$q_1{*} = q_2{*} = (22 - 10)/3$$

$q_1{*} = q_2{*} = 4$, esto es, 4 millones de autos a producir por año con un precio P=22-(4+4)=$14 y una utilidad de ($14*4,000,000 - ($10*4,000,000)) = $16,000,000. Se referirá a este rendimiento como el nivel de rendimiento de Cournot.

Sin embargo, los directores ejecutivos tienen una plática y contemplan un acuerdo donde consideran que si reducen su producción a 3 millones forzarán un precio de mercado P=22-(3+3)=$16 y una utilidad de ($16*3,000,000 - ($10*3,000,000)) = $18,000,000.

Pero que sucede si alguno de los dos rompe el acuerdo. Se tiene un precio de P=22-(3+4)=$15. La utilidad si alguno rompe el acuerdo o "deserta" será de ($15*4,000,000 - ($10*4,000,000)) = $20,000,000 mientras para el que sigue con el acuero o "coopera" es ($15*3,000,000 - ($10*3,000,000)) = $15,000,000. Entonces ninguna empresa querrá cooperar. Con ello se tiene un equilibrio de Nash en el cual ambas desertan y deciden producir 4 millones cada una. El juego en forma estrategica sería el siguiente:

C -->Cooperar
D -->Desertar

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Firma 2} \\ & & \begin{array}{cc} \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{array} \\ \text{Firma 1} & \begin{array}{c} \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} (18,18) & (15,20) \\ (20,15) & (16,16) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 1.7.3. Matríz de pago para las firmas

El problema con este ejemplo es que el par de firmas sólo compiten sólo una vez, pero es más realistico suponer que seguirán interactuando más de una ocasión. Es interesante saber que pasaría cuando el juego se repite más de una ocasión, lo cual se analizará en el capítulos siguiente.

1.7.4 Modelo de Bertrand[7]

Regularmente una firma en el mundo real elije sus precios y los consumidores determinan sus ventas. Esta suposición forma la base del modelo de oligopolio desarrollado por Joseph Bertrand. Este modelo es totalmente diferente al modelo de Cournot ya que una firma elije precio y no cantidad.

Considerense dos firmas que eligen precios p_1 y p_2 respectivamente, la cantidad que los consumidores demandan de la firma; es.

$$q_i(p_i, p_j) = a - pi + bp_j$$

donde $b>0$ refleja la extensión para el cual el producto de la firma i es un substituto al producto de la firma j, los costo fijos de producción y los costos marginales c son constantes, donde $c < a$. Las firmas eligen sus precios simultaneamente.

La primera tarea en el proceso para encontrar el equilibrio de Nash es trasladar el problema a un juego en forma normal. Hay 2 jugadores, las estrategias para cada firma son los diferentes precios a cobrar y las cantidades a producir.

Se asumirá que los precios negativos no son factibles. Entonces el espacio de estrategias de la firma i es $D_i = [0, \infty)$, una estrategia D_i es algùn precio, $p_i \geq 0$.

La función de pago para la firma i es la utilidad cuando elige el precio p_i y su rival elige el precio p_j. Esto es,

$$u_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c]$$

Entonces el par de estrategias (p_i^*, p_j^*) es un equilibrio de Nash si, para cada firma i, p_i^* resuelve.

$$\max u(p_i, p_j^*) = \max [a - p_i + bp_j][p_i - c]$$

La solución al problema de optimización de la firma i es.

$$p_i^* = ½(a + bp_j + c)$$

Por ello, si el par de precios (p_1^*, p_2^*) es un equilibrio de Nash, el precio para la firma 1 y 2 es

$$p_1 = ½(a + bp_2^* + c) \text{ y } p_2 = ½(a + bp_1^* + c)$$

Resolviendo este par de ecuaciones se tiene

$$p^*_1 = p^*_2 = a+c/2-b$$

Resumen

El concepto más importante de este capítulo es el "Equilibrio de Nash" que permite la solución de los juegos en forma estratégica. La base teórica apoyará el desarrollo del tema central de este trabajo y dará pauta para analizar los juegos en forma extensiva que se verán a continuación.

Capítulo II. Juegos en forma Extensiva. Los Equilibrios de Subjuego Perfecto

2.1 Discusión del modelo extensivo

Un juego en forma estratégica es un modelo estático, en el sentido de que los jugadores eligen sus estrategias simultáneamente en una sola ocasión, todo ocurre en un instante, no transcurre el tiempo. El modelo que se presenta a continuación, la forma extensiva de un juego, tiene características más dinámicas que el anterior, pues en él las decisiones de los jugadores se realizan en el tiempo.

La forma extensiva tiene una estructura más detallada para la descripción de un juego y sus situaciones. Este modelo se debe a Kuhn (1953), quien modificó la temprana definición usada por von Neumann y Morgenstern. El esquema describe un juego por medio de un árbol, es decir una gráfica, conexa y sin ciclos, en la que cada situación (tomando en cuenta la historia para llegar a ella) está representada por un vértice o nodo. Si de un vértice A se puede pasar a otro B ya sea por decisión de uno de los jugadores o por la acción de azar, existirá una arista que conecta el vértice A con el B.

2.1.1 Pilas Alcalinas contra Pilas Energía [2]

Considérese el siguiente "conflicto": La empresa "Pilas Alcalinas, una firma de pilas, está considerando la estrategia de mercadotecnia para el uso de un nuevo producto que está actualmente desarrollando. Después de muchas investigaciones, la compañía ha elegido dos campañas que lleven a la venta del producto:

(1) "Poder Ultra" (PU) ó

(2) "Mayor Duración (MD)

Pilas Alcalinas sabe que, después de dos años, las ventas totales de la nueva pila será el mismo con cualquier campaña, pero el número de ventas en cada uno de los dos años sería diferente con cada una de ellas. Si Pilas Alcalinas fuera el único proveedor de pilas, y empleara una campaña PU tendría muy altas ventas en el primer año, como resultado de un bombardeo publicitario, y tendría ventas más pequeñas en el segundo año.

Usando una campaña MD tendría ventas relativamente pequeñas en el primer año, y mejores ventas en el segundo debido a que los resultados hablarian por si mismo. El valor presente de utilidades netas en cada año bajo cualquier campaña se muestra en la tabla 2.1.1

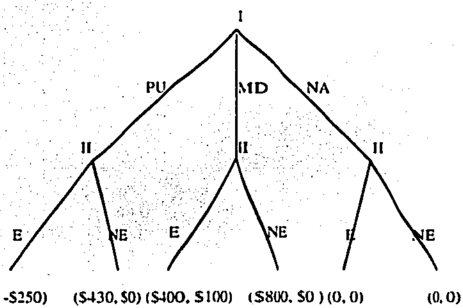
AÑO	CAMPAÑA PU	CAMPAÑA MD
1	$900	$200
2	$100	$800
UTILIDAD BRUTA	$1000	$1000
COSTO DE PUBLICIDAD	$570	$200
UTILIDAD NETA	$430	$800

Tabla 2. 1.1. Utilidad neta de Pilas Alcalinas usando los dos tipos de campaña

Obviamente, si Pilas Alcalinas decide no vender la pila, entonces la utilidad adicional obtenida será cero.

La tabla muestra que la decisión óptima de Pilas Alcalinas sería utilizar la campaña MD por más barata. Pero existe un posible competidor llamado "Pilas Energía" que posee la capacidad técnica para producir una pila parecida dentro de un año de la introducción de la de Pilas Alcalinas con un costo de tiempo de descuento de $300. Si Pilas Energía decide introducir una producto parecido, entonces las dos firmas dividirán el mercado en el segundo año.

Se Puede describir el conflicto con la gráfica siguiente:



Jugadores:
I – Pilas Alcalinas
II- Pilas Energía

Estrategias de I
PU- Campaña Pilas Alcalinas
MD- Campaña Mayor Duración

Estrategias de II
E- Entrar
NE – No entrar

Fig 2. 1.1 Juego extensivo del conflicto entre las firmas de pilas

2.2 Definiciones de gráficas necesarias y definición de juego extensivo

Para dar una rigurosa definición de un juego en forma extensiva, se necesita introducir algunos conceptos de teoría de gráficas.

Definición 2.2.1: Una gráfica es una pareja $(V, \mathcal{A})$ *con* $\mathcal{A} \subset \{ \{x, y\} \mid x, y \in V \}$.

Definición 2.2.2: Una trayectoria es una sucesión de nodos $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ *tal que* $\{x_i, x_{i+1}\} \in \mathcal{A}$ *para toda* $i = 1, ..., m-1$.

Si $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ es una trayectoria, decimos que tal *conecta al nodo* x_1 *con el nodo* x_m.

Se dice que la gráfica $(V, \mathcal{A})$ *es finita, si V es finito.*

Definición 2.2.3 : Un árbol Γ *es una gráfica en la cual cada par de nodos están conectados por una única trayectoria. Un árbol con raíz* (Γ, U) *es aquél en el cual un nodo especial U es designado como la raíz del árbol.*

Se llamará *trayectoria de un nodo* x a la trayectoria que conecta a la raíz con el nodo x.

$z < x$, si z está en la trayectoria de x y decimos que x sigue a z.

Una alternativa en un nodo x de un árbol con raíz es un nodo z que está en la trayectoria de x y además está conectado a x con una arista. Un nodo z sigue inmediatamente a un nodo x, si z es una alternativa en x. Al conjunto de alternativas en x se denotará como Dx.

Un nodo terminal en un árbol con raíz es un nodo sin alternativas. Se Denotará como T al conjunto de nodos terminales.

Una trayectoria de un nodo final es una *partida*. Para los juegos finitos esta es la definición adecuada de partidas, existe una correspondencia biunívoca entre los nodos terminales y las partidas. En ese caso también se pueden identificar como T al conjunto de partidas.

Pero en los juegos infinitos no toda partida tiene un nodo terminal, sólo las finitas. Puede haber juegos infinitos, sin partidas infinitas, como el ejemplo 2.1.3. En un juego infinito una partida es una trayectoria maximal que empieza en la raíz U.

Definición 2.2.4 *Para un conjunto N, con más de un elemento, un juego en forma extensiva Γ, con conjunto de jugadores N, consta de:*

1. Un árbol Γ con raíz ***U***, tal que para cada nodo x, el conjunto de alternativas de x es vacío o tiene más de un elemento.

2.- Una función de etiquetación definida en el conjuto de los nodos no finales de Γ y con valores en $N \cup \{0\}$. S^j es el conjunto de nodos con etiqueta j, con j en N y se llama el conjunto del jugador j. S_0 es el conjunto de nodos con etiqueta cero y se llama el conjunto del azar.

3.- Para cada nodo x en S_0, una distribución de probabilidad en el conjunto de alternativas de x.

4.- Para j distinto de 0, Una función de etiquetación de información que a cada nodo de S^j, le asocia un valor {1,2,..} La función de etiquetación de la información debe cumplir:

a) Para S_j^k el k-ésimo conjunto de información del jugador j, es decir, el conjunto de nodos de S_j en los que la función de etiquetación de información toma el valor k, existe un conjunto de índices I_k^j tal que para cada $x \in S_k^j$ existe una correspondencia biunívoca ***ind***:$Dx \rightarrow I_k^j$.

b) Si un nodo de decisión B sigue a un nodo A, entonces A y B no pueden estar en el mismo conjunto de información.

5.- Una función de pago u que a cada pareja de una partida τ y un jugador j, le asocia un número real, $u(\tau, j)$, se llama el pago para el jugador j en la partida τ. Se usará la notación $u_i(\tau)$.

Observaciones:

- Un juego es finito, si el conjunto de nodos de Γ y el conjunto de jugadores N es finito.
- Si el jugador j tiene un número finito de conjuntos de información, esto puede ocurrir en un juego infinito, las etiquetas que se usan para numerarlos sería $\{1, 2, \ldots, r_j\}$ de tal manera que cada valor sería tomado al menos una vez.

Definición 2.2.5: *Un juego es de información perfecta si cada conjunto de información contiene un sólo nodo.*

En juegos extensivos de información perfecta, en el momento que un jugador toma una decisión, toda la información acerca de las acciones de todos los jugadores es conocida por él. El ejemplo 2.1.1, Pilas Energía toma sus decisiones con conocimiento pleno de la elección de la campaña por parte de Pilas Alcalinas, dado que el juego es de información perfecta, sin nodos de azar, el que se da a continuación es también de información perfecta, pero tiene un vértice de azar.

2.2.1 El póquer simplificado[7]

Al principio de este juego, los jugadores 1 y 2 ponen una moneda en un tarro. Después el azar le entrega al jugador 1 una carta de una baraja en la cual la mitad son cartas rojas y la otra mitad negras.

El jugador 1 mira su carta privadamente y decide si abandona el juego o dobla la apuesta asegurando que tiene una carta roja. Si el jugador 1 abandona muestra la carta al jugador 2, el juego finaliza tomando el dinero del tarro si la carta es roja o el jugador 2 toma el dinero si la carta es negra. Si 1 dobla la apuesta, entonces él agrega otra moneda al tarro y 2 debe decidir si acepta la apuesta para ver la carta de 1 o pasa. Si 2 pasa, entonces el juego finaliza y 1 toma el dinero del tarro. Si 2 acepta la apuesta, debe también agregar otra moneda al tarro, después de lo cuál 1 muestra la carta a 2 y el juego finaliza; en este caso, otra vez, 1 toma el dinero del tarro si la carta es roja, y 2 lo hace si la carta es negra. La gráfica se muestra en la figura (2.1.2).

El diagrama de árbol muestra los posibles eventos (con historia) que podrían ocurrir en ese juego. Los nodos que tienen alternativas, tienen una etiqueta para indicar el jugador que tomará decisiones o si es una jugada de azar, por ejemplo el nodo inicial U es un vértice de azar y tiene la etiqueta 0, mientras que el vértice A es un nodo en el que el jugador 1 de tomar decisiones y por ello tiene la etiqueta 1 y B tiene etiqueta 2, pues allí las decisiones las toma el jugador 2.

Cada una de las dos alternativas siguientes del nodo raíz U, tiene una probabilidad de 0.5, porque la mitad de las cartas son rojas y la mitad son negras.

En el juego de "póquer", figura 2.1.2, hay seis nodos que no tienen alternativas, son los *nodos terminales* y representan las posibles maneras de que ese juego podría finalizar, por ejemplo C y D. Los vectores asociados a estos nodos terminales indican los pagos que obtuvieron los jugadores.

En un juego finito una partida será la sucesión de eventos (con historia) representados por nodos, desde el nodo inicial hasta uno de los vértices terminales, por ejemplo la partida {U, A, B, D} significa que las cosas ocurrieron así.

- El azar le otorgó una carta negra al jugador 1.
- El jugador 1 dobla la apuesta.
- El jugador 2 acepta la apuesta para conocer la carta.
- Los pagos serán -2 para el jugador 1 y 2 para el jugador 2.

En los juegos infinitos, los pagos tienen que asociarse a partidas, pues no siempre se tendrán nodos terminales para representar lo que ocurrió en un juego.

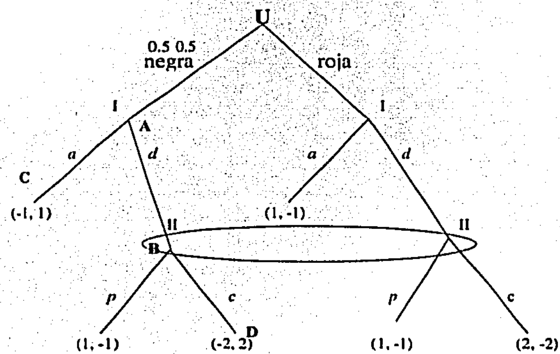


Figura 2.1.2 Modelo extensivo del póquer simplificado

La meta del análisis teórico del juego es tratar de predecir las partidas que tienen probabilidad positiva cuando los jugadores se comportan racionalmente.

2.2.2 Juego infinito con partidas finitas

Una empresa llamada Computadoras Mexicanas (C.M) ha decidido fabricar computadoras ya que actualmente tienen una gran demanda en el mercado. Existen k consumidores dispuestos a comprar una computadora, pero sólo m pueden comprar a un precio alto, V_l

por cada PC, pues su beneficio marginal es mayor al de los n restantes. Los otros n consumidores sólo pueden pagar V_2. El costo para Computadoras Mexicanas al fabricar una computadora es C.

El vendedor tiene un rango de precios entre V_1 y V_2, los cuales puede vender su producto de tal manera que el precio que elija maximize sus ganancias. Por otro lado, los compradores dado su disposición a pagar, deben decidir si comprar o no.

Si los m jugadores están dispuestos a pagar V_1 por cada PC y su comportamiento es uniforme, se pueden considerar como un sólo jugador (C1); de igual manera para los otros n jugadores se pueden considerar como jugador 2 (C2).

Como la empresa no puede dar diferentes precios a los consumidores, su pago es el precio por computadora menos el costo de producirla por la cantidad de consumidores que compraron; mientras que para las consumidores, es el precio que están dispuestos a pagar menos el precio real en qué compraron más algún $\in$ que es el beneficio de tener la computadora.

Sea $P_1 = V_2$ el precio más bajo posible que podría vender su producto y $P_m = V_1$ el precio más alto. Entonces el modelo en forma extensiva sería el siguiente:

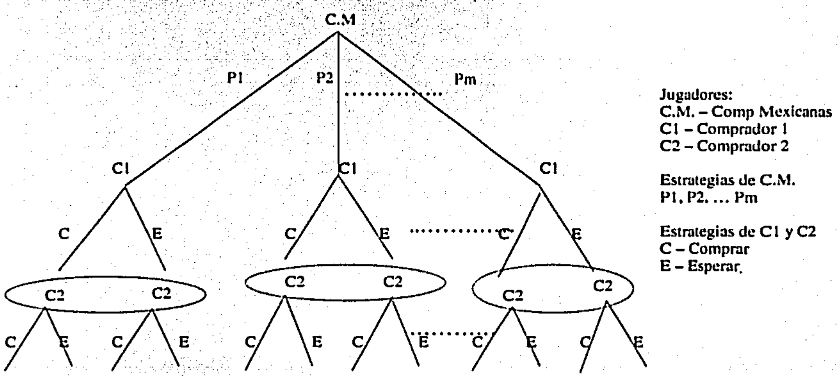


Figura 2.2.2 Modelo extensivo con partidas infinitas

Con función de pago para los consumidores en el tiempo t de

$u_j = (P_t - V_j) + \varepsilon$ para el Comprador j y

$u_{CM} = k(P_t - 1000)$ para la empresa

Un juego es infinito si tiene nodos infinitos. En este juego tiene un final pero sus alternativas lo hacen infinito.

2.2.3 Juego infinito con partidas infinitas

Veáse el ejemplo basado en el juego del póquer, pero los jugadores juegan infinitos periodos. Introducimos una jugada de azar al final del periodo para ver si el juego termina o se repite, recordando los jugadores lo que pasó en la historia al final de cada periodo. La gráfica la muestra la figura 2.1.4

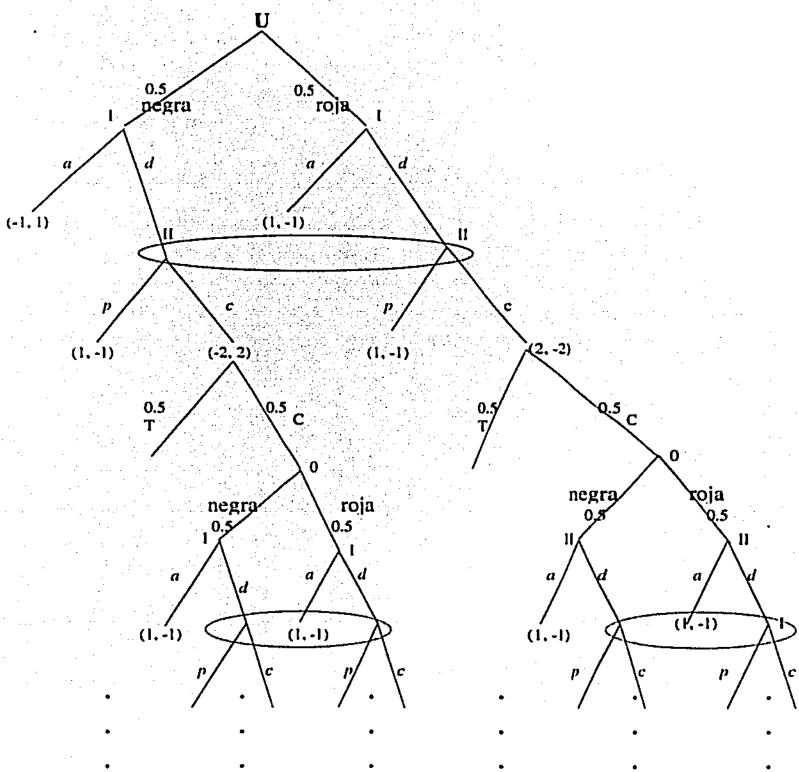


Figura 2.2.3 Modelo extensivo con partidas infinitas

Este juego, a diferencia del anterior no tiene un final, es infinito. Este caso es muy común en la realidad y tiene especial interés su análisis.

2.3 Forma normal de un juego extensivo y estrategias puras, mixtas y equilibrios de Nash en un juego extensivo.

Definición 2.3.1: *En un juego Γ con raíz* ***U***, ***una estrategia pura para el jugador j*** *es una función σ^j con dominio en la familia S de los conjuntos de información del jugador j y tal que $\sigma^j(S_k^j) \in I_k^j$ para toda k.*

El conjunto de todas las estrategias puras de *j*, se denotará como D^j, y como *D* al producto cartesiano, igual que en el caso del modelo estratégico.

2.3.1 Modelo del Stackelberg[12]

Considerese una situación general que se presenta en muchos contextos en la economía: Dos empresas venden un producto similar. La teoría de un monopolista que impide a otro productor entrar a competir en su área, este modelo fue desarrollado por Bain (1956) y por Sylos-Labini(1962). El diagrama es la figura 2.1.5.

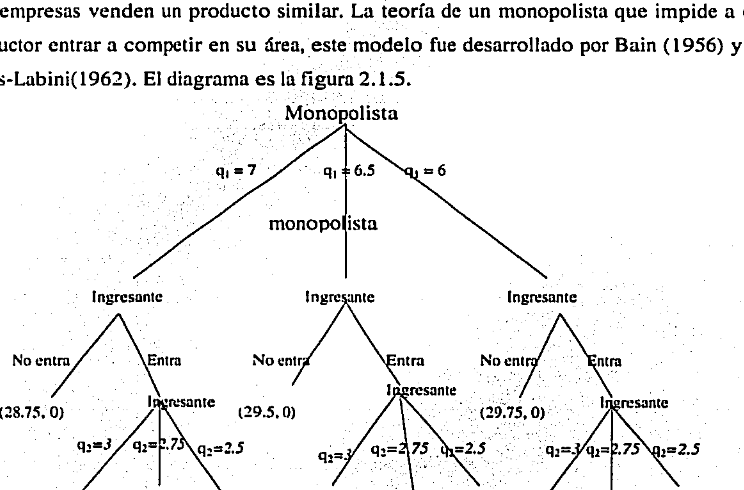


Figura 2.3.1 Modelo extensivo de Stackelberg

En este juego, el jugador 1 tiene un sólo conjunto de información y tres alternativas, así que tiene tres estrategias puras. El jugador 2 tiene 6 conjuntos de información: los tres primeros, 2 alternativas cada conjunto, y los otros tres con 3 cada uno por lo que tiene 2x2x2x3x3x3 = 216 estrategias puras. En resumen, en un juego extensivo finito, el número de estrategias puras de *j* es:

$$\prod_k \#(I^j_k)$$

Teorema 2.3.2: ***En un juego extensivo finito, si se tiene una estrategia para cada jugador, queda determinada una distribución de probabilidad entre los puntos terminales.***

Demostracion. Dado un perfil de estrategias σ en D y un nodo x en el árbol de juego, defínase $P(x/\sigma)$ como la probabilidad de que la trayectoria de juego pasará a través del nodo x, si los jugadores escogen σ.

Si x es un nodo raíz del árbol de juego, entonces $P(x/\sigma)=1$.

Supongase que x sigue del nodo z y está definida la probabilidad $P(z/\sigma)$, se tienen dos casos:

a) z es de azar y q es la probabilidad de la arista (z, x), entonces $P(x/\sigma)= qP(z/\sigma)$.

b) z es un nodo de decisión del jugador j que pertenece al conjunto de información S_j^k, entonces $P(x/\sigma)=P(z/\sigma)$, si $\sigma_j(S_j^k) = ind(x)$, y $P(x/\sigma)=0$ si $\sigma_j(S_j^k)$ distinto de $ind(x)$.

Con este método se ha asociado un número a cada nodo.

En los juegos finitos, a cada partida τ corresponde un nodo terminal x, se llamará $w_j(x)$ al pago para el jugador j en la partida τ del juego extensivo, es decir $w_j(\tau)=w_j(x)$ y $w(\tau)=w(x)$.

Denotese como T^* el conjunto de todos los nodos terminales del juego y como $\mathcal{T}^*$ al conjunto de partidas. Se puede construir un juego estratégico que "represente" al juego extensivo.

[12]Versión tomada de Kreps [8]. Este ejemplo se verá más adelante, en modelos de mercados. Aquí sólo se ilustra para mostrar las estrategias de un juego extensivo

*Definición 2.3.3 Sea Γ, un juego finito en forma extensiva, cuyo conjunto de jugadores es N. **La forma normal** de Γ es el juego estratégico $\Gamma = (N, \{D_j\}_{j \in N}, \{u_j\}_{j \in N})$, con D_j el conjunto de estrategias de j en Γ, y*

$$u(\sigma) = \sum_{x \in T^*} P(x/\sigma) w(x)$$

En forma equivalente $u(\sigma) = \sum_{\tau \in T^*} P(\tau/\sigma) w(\tau)$

Es decir, $w_j(\sigma)$ es el pago esperado para el jugador j en el juego extensivo cuando todos los jugadores implementan sus estrategias designadas por σ.

En un juego infinito no siempre se puede construir la forma normal, se necesitan condiciones sobre los elementos del juego para convertir al conjunto de partidas en un sigma anillo y estudiar, para que cada perfil de estrategias puras determine una distribución de probabilidad y para que exista la esperanza de pago.

No siempre es conveniente pasar a la forma normal a un juego extensivo, pero a través de ella se pueden definir equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas y el máximo asegurable para cada jugador.

***Definición 2.3.4** Sea Γ un juego extensivo finito, una estrategia mixta X^j del jugador j en Γ es una estrategia mixta en el sentido de su forma normal.*

Una estrategia mixta de un jugador en el juego extensivo finito Γ especifica una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras de ese jugador en el juego Γ. Un perfil de estrategias mixtas en un juego extensivo Γ especifica una distribución de probabilidad sobre el conjunto total de estrategias puras en el juego Γ.

Para los juegos infinitos se tiene que construir un sigma anillo en el conjunto de estrategias puras para poder definir estrategias mixtas como distribuciones de probabilidad en ese sigma anillo.

***Definición 2.3.5:** Sea Γ un juego extensivo que tiene forma normal, entonces σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras de Γ, si σ^* es un equilibrio de Nash en estrategias puras de su forma normal.*

X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de Γ, si X^* es un equilibrio de Nash en estrategias mixtas de su forma normal.

V_j es el máximo asegurable del jugador j en Γ, si es el máximo asegurable en su forma normal.

Considérese otra vez el juego del póquer simplificado en forma extensiva.

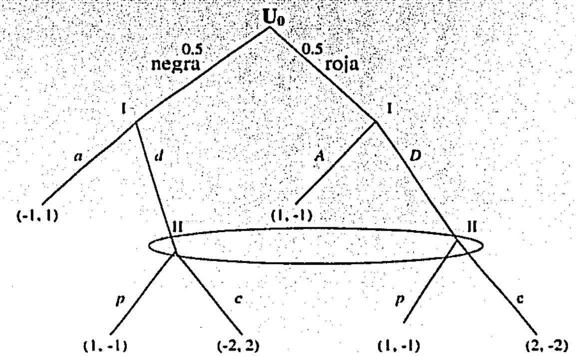


Fig 2.1.6 Juego del póquer en forma extensiva

El conjunto de estrategias para el jugador 1 en el juego en forma extensiva es D_1={(a, A), (a, D), (d, A), (d, D)}, donde la primer letra (la minúscula) significa la elección, cuando su carta es negra y la segunda (la mayúscula) la elección cuando es roja Cuando al jugador 2, le toca decidir, no sabe si el jugador 1 tiene carta roja o negra, sólo sabe que ha doblado su apuesta y en esas condiciones debe decidir si conocer o pasar. Así, el conjunto de estrategias para el jugador 2 es D_2={C, P} donde C denota la estrategia conocer, y P la estrategia Pasar, cuando 1 dobla la apuesta". La forma normal es:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{jugador 2} \\
 & \begin{array}{cc} \text{Pasar} & \text{Conocer} \end{array} \\
\text{jugador 1} \quad \begin{array}{c} (a,A) \\ (a,D) \\ (d,A) \\ (d,D) \end{array} & \begin{pmatrix} (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (.5,-.5) \\ (1,-1) & (-.5,.5) \\ (1,-1) & (0,0) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Forma Normal del juego del póquer

Examinando la forma normal de este juego, se puede deducir que el jugador 1 no usará sus estrategias (a, A) y (d, A), pues cualquiera que sea la elección de 2, 1 ganará más con (a, D) y con (d, D) que con las otras dos. Pero se pueden decir más cosas, se pueden buscar los equilibrios de Nash en la forma normal, en este caso no hay equilibrios en estrategias puras, pero existen uno en estrategias mixtas.

Equilibrio.

Si los jugadores escogen las estrategias mixtas (p, 1-p) y (q, 1-q) respectivamente se tiene:

Para el jugador 1

$$p(0) + (1-p)(1) = .5(p) + (1-p)(0)$$
$$1 - p = .5p$$
$$p = 2/3$$

Entonces la estrategia mixta es (2/3(a, D), 1/3(d, D)) con pago esperado $E_1 = 1/3$.

Para el jugador 2

$$q(0) + (1-q)(-.5) = q(-1) + (1-q)(0)$$
$$0.5q - .5 = -q; \quad 3/2q = 1/2$$
$$q = 1/3$$

la estrategia mixta es (1/3P, 2/3C) con pago esperado $E_2 = -1/3$.. El equilibrio es ((2/3(a, D), 1/3(d, D)), (1/3P, 2/3/C)).

Considérese la forma normal del juego de las firmas de pilas. Las estrategias de Pilas Alcalinas son PU, MD, y NA. Pilas Energía tiene tres conjuntos de información cada uno con 2 estrategias por lo que en total son 8 las estrategias. El juego en forma normal sería el siguiente:

Pilas Energía

$$\text{Pilas Alcalinas}\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} (E,E,E) & (E,E,NE) & (E,NE,E) & (E,NE,NE) & (NE,E,E) & (NE,E,NE) & (NE,NE,E) & (NE,NE,NE) \end{array} \\ \begin{array}{c} PU \\ MD \\ NA \end{array} & \begin{pmatrix} (380,-250) & (380,-250) & (380,-250) & (430,0) & (380,-250) & (430,0) & (430,0) & (430,0) \\ (400,100) & (400,100) & (800,0) & (400,100) & (800,0) & (400,100) & (400,100) & (800,0) \\ (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) & (0,0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Forma Normal del juego de las firmas de pilas

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son cinco. Si el jugador Pilas Alcalinas escoge la campaña PU entonces el jugador Pilas Energía puede ya sea utilizar (E, NE, NE), (NE, E, NE) o (NE, NE, E) con los cuales obtiene las mismas ganancias de cero. Pero si Pilas Alcalinas escoge MD entonces el jugador 2 le conviene elegir (E, E, E) o (E, E, NE) con la cual obtiene un pago de 100.

Considérese el siguiente juego

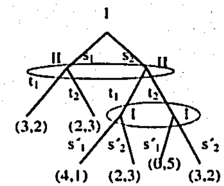


Fig. (a)

Observese que el jugador I tiene en su primer conjunto de información dos estrategias; s1 y s2; mientras que en su segundo conjunto de información, como el juego es de información perfecta, tiene dos opciones s'1, s'2, por lo que tiene cuatro estrategias en el juego completo. El jugador II tiene un sólo conjunto de información con dos opciones, por lo que tiene dos estrategias. Su forma normal es

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (t_1 & t_2) \end{array} \\ \begin{array}{c} (s_1, s'_1) \\ (s_1, s'_2) \\ (s_2, s'_1) \\ (s_2, s'_2) \end{array} & \begin{pmatrix} (3,2) & (2,3) \\ (3,2) & (2,3) \\ (4,1) & (0,5) \\ (2,3) & (3,2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Forma Normal de la fig (a)

Este juego no tiene equilibrio en estrategias puras, pero si en estrategias mixtas. Dado que al jugador le da lo mismo usar (s_1, s'_1) que (s_1, s'_2) se elimina alguna de ellas.

Existen diferentes maneras de calcular el equilibrio y algunas de ellas son más apropiadas que otras o son únicas. Para juegos de 2x2 el mejor metodo es el de cruz gamada pero la situación se complica cuando el número de jugadores crece.

En el juego anterior, el jugador 1 debe de elegir aleatoriamente entre (s_1, s'_1), (s_2, s'_1) y (s_2, s'_2) de tal manera que obtenga el mayor pago. De la misma manera el jugador 2 debe elegir aleatoriamente entre t_1 y t_2. La suma de las probabilidades de sus estrategias debe ser 1.

Para calcular el equilibrio se puede usar el metodo algebraico dando una probabilidad de cero a una de las estrategias del jugador 1 y trabajar el juego como si fuera de 2x2 jugadores. Este método podría no ser el indicado, pero probemos.

Supógase que $X^1_3 = 0$, y sea p la probabilidad que se le da a X^1_1 y $(1 - p)$ a X^1_2 para el jugador 1; el jugador 2 le da una probabilidad de q a X^2_1 y $(1 - q)$ a X^2_2, se obtiene $X^1 = (4/3, -1/4, 0)$ para el jugador 1, lo que es suficiente para descartarla ya que ninguna estrategia puede tener probabilidad negativa.

Ahora, sea $X^1_2 = 0$, el jugador 1 tendrá las estrategias $X^1 = (1/2(s_1, s'_1), 0, 1/2(s_2, s'_2))$ y el jugador 2, $X^2 = (1/2\ t_1, 1/2\ t_2)$. Cada jugador obtiene un pago esperado de 5/2.

Por último, sea $X^1_1 = 0$, el jugador 1 tendrá las estrategias $X^1 = (0, 1/5(s_2, s'_1), 4/5(s_2, s'_2))$ y el jugador 2, $X^2 = (3/5t_1, 2/5t_2)$. El jugador 1 obtiene un pago esperado de 12/5 y el jugador 2 de 13/5.

Se puede ver que el equilibrio es cuando $X^1_2 = 0$, ya que el jugador 1, al usar cualquier otra estrategia su pago no mejora. De la misma forma pasa con el jugador 2.

Para juegos con más jugadores es imposible usar este metodo. Para estos, existen algoritmos más sofisticados tales como el de Scarf(1973) y Wilson(1971)

2. 4. Algoritmo de Zermelo o inducción hacia atrás

El algoritmo de Zermelo[13] o inducción hacia atrás para juegos finitos y de información perfecta es el siguiente:

1. Se inicia con todos los nodos terminales del árbol que tengan un nodo padre común. (nodo que los precede) Si *B* es el nodo padre encontrado, *B* es un nodo de decisión para algún jugador *j* o *B* es una jugada de azar.

2. Si B es de algún jugador *j*, se encuentra la decisión óptima para dicho jugador *j* en el nodo B.

3. Construimos un nuevo juego que borra todos los vértices mayores que *B*, aristas, pagos, etc y que tenga como vértice terminal a *B*, en todo lo demás el nuevo juego coincide con Γ.

[13] En 1913 se establece el primer teorema de teoría de juegos conocido como el "Teorema de Zermelo". Este teoremas establece que el ajedrez está estrictamente determinado. es decir, tiene un sólo perfil de pagos individualmente racional en estrategias puras.

4. Asignar un pago para cada jugador en B, de la siguiente manera:

a) Si B es del conjunto de decisiones del jugador j, se asigna el vector de pagos que estaba en el nodo final elegido por j.

b) Si A es de azar, se asigna el vector $\sum_{\substack{f\in T_{i,q}\\ f>B}} p(f|B)u(f)$.

5. Se tiene ahora un nuevo juego, con menos nodos que el original. Si este nuevo juego consta de un sólo nodo, el proceso de inducción hacia atrás ha terminado.

6. Si el nuevo árbol aún tiene más de un nodo, habrá nodos terminales con un padre común y se reinicia el proceso desde el paso 1.

7. Para cada jugador j, se construye la estrategia que a cada S_j^k, es decir a cada uno de los nodos de S_j, le asocia el elemento de I_j^k que corresponde al óptimo que se encuentra en alguno de los pasos 2.

Considerese el siguiente juego

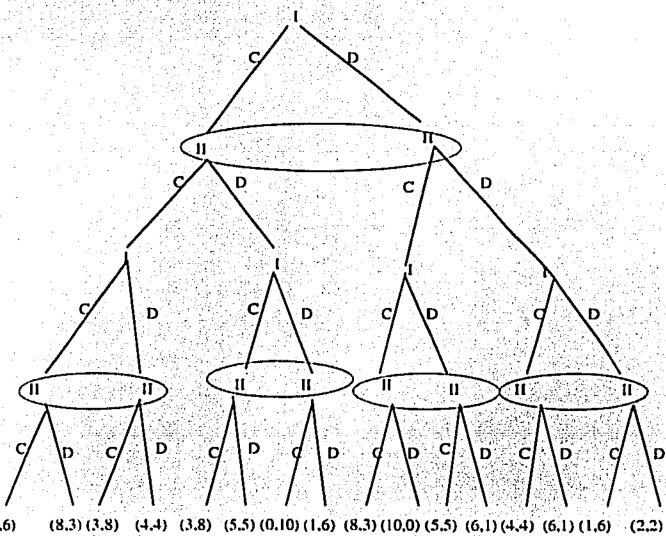


Fig 2.4.1a Juego extensivo de dos etapas

En este ejemplo de dos etapas, los nodos de decisión corresponden al jugador II y en cada uno de ellos debe buscar su decisión óptima. Por ejemplo en el primer nodo, en la alternativa etiquetada con C, tiene un pago de 6, mientras que en la segunda un pago de 3 por lo que la alternativa C es la decisión óptima en ese nodo. De la misma manera, en el nodo 2 la alternativa C tiene mejor pago que D, entonces esta es su mejor decisión. Asi se continua con todos los nodos de decisión del jugador II de tal manera que el árbol quede de la siguiente forma

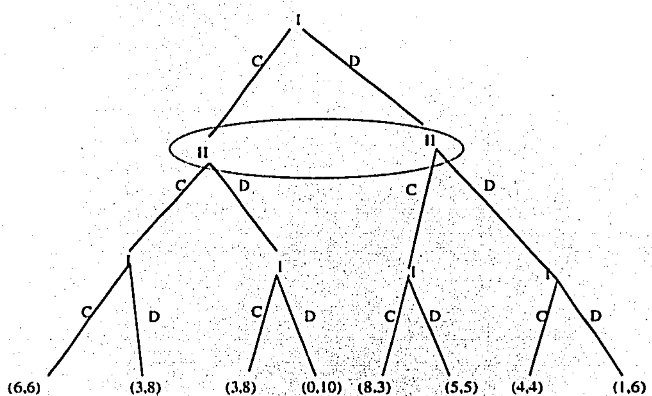


Fig 2.4.1 Juego extensivo podadó por el jugador II

Ahora al jugador I debe elegir su decisión óptima de la misma manera: para el primer nodo, la alternativa C es mejor que D dado que 6 es mejor que 3 y asi sucesivamente. El árbol queda de una sola etapa.

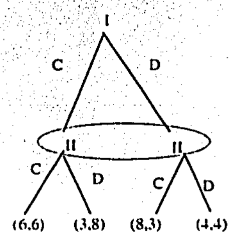


Fig 2.4.1 Juego extensivo a la primer etapa

Este es un nuevo juego, con nuevos nodos terminales y con los nuevos pagos. Si se continua podando se tiene que el mejor pago para el jugador II es (3,8) y (4,4) de cada nodo de decisión y para el jugador I (4,4) es mejor que (3,8). Entonces (4,4) es la decisión óptima para cada jugador, este es un equilibrio de Nash.

Proposición 2.4.2 *En un juego de información perfecta finito, el algoritmo de Zermelo construye un equilibrio de Nash en estrategias puras.*

Corolario 2.4.3 *Todos los juegos finitos de información perfecta tienen equilibrio de Nash en estrategias puras.*

Sin embargo, el algoritmo de Zermelo sólo funciona en forma segura para juegos finitos y de información perfecta. Para los demás juegos infinitos y/o de información no perfecta, el algoritmo se puede generalizar sólo en algunos casos que se irán examinando a lo largo del trabajo. En los juegos infinitos, en algún paso del algoritmo, se pueden encontrar algún nodo de decisión de uno de los jugadores que es padre de vértices terminales, pero en el que no exista óptimo.

Cuando en un juego de información perfecta existen partidas infinitas no se podrá analizar el juego directamente con Zermelo pues no tienen vértice terminal. Se buscan formas de remediar el asunto para algunos casos, por ejemplo Rubinstein [ ] estudia juegos para los que se puede construir una sucesión de juegos, sin partidas infinitas que "converge" al juego original, suponiendo que en cada uno a cada uno de los juegos de la sucesión se puede aplicar Zermelo, se obtendría una sucesión de equilibrios de Nash, si esta sucesión converge, se demuestra que el perfil obtenido es un equilibrio del juego original .

Por otro lado en cuanto a juegos que no tienen información perfecta se abordarán pasando a la forma normal pedazos convenientes del juego original y construyendo un algoritmo que generaliza el análisis de atrás hacia delante que significa el algoritmo de Zermelo. Es decir, se buscan los equilibrios de Nash en estrategias puras de esos "pedazos de juego", el problema es que no siempre existen equilibrios en estrategias puras y eso sería otra falla del algoritmo generalizado. Con estrategias mixtas se tendrá mejor suerte.

2.5 Subjuegos. Equilibrios de Subjuego Perfecto en Estrategias Puras. Generalización del Algoritmo de Zermelo.

Reinhard Selton, introdujo el concepto de subjuego. Un subjuego es esencialmente una parte de un juego extensivo Γ que cumple todas las propiedades para ser un juego extensivo. Para que una parte de un juego pueda considerarse en sí misma un juego, todos los jugadores saben cuando ellos están jugando dicho subjuego, es decir no confunden ninguno de los nodos del subjuego en cuestión con otros nodos que no pertenecen a él, cada conjunto de información que contiene un nodo de decisión del subjuego no contiene nodos de decisión que no sean parte del subjuego. Un subjuego tiene un nodo inicial, el cual que se llamará una subraíz del juego Γ. Los nodos del subjuego serán la subraíz y todos los nodos mayores que ésta.

Un subjuego del juego extensivo es un juego que puede derivarse de este cortando todos los nodos y rutas que preceden a la subraíz x y haciendo este nodo la raíz del juego.

Definición 2.5.1: *Se dice que Γ se puede cortar en el nodo x, si para todo conjunto de información S_k^j que contiene a los nodos y y z, tales que $y \geq x$, entonces $z \geq x$.*

En un nodo x en donde Γ se puede cortar se puede definir el subjuego Γ_x de Γ que empieza en x.

Definición 2.5.2: *Sea x un nodo donde Γ se puede cortar. El subjuego Γ_x es el juego extensivo siguiente:*

$V_x = \{ y \in V / y \geq x \}$

$\mathcal{A}_x = \{ (y, z) \in \mathcal{A} / y, z \in V_x \}$

$U_x = x$

$S_{0x} = \{ y \in V_x / y \in S_0 \}$

La distribución de probabilidad en el conjunto de alternativas de un vértices de azar de Γ_x es la misma que en Γ.

Para todo jugador j, $S^j_x = \{ y \in V_x / y \in S^j, j = 1, 2, \ldots n \}$

$S_k^j{}_x = S_{k'}^j$ para algún $S_{k'}^j$ de j en Γ. Es claro que los nodos de $S_{k'}^j$ son mayores o iguales que x.

$T_x = \{ y \in V_x \ / \ y$ *es terminal de* $\Gamma \}$. Las partidas de Γ_x son trayectorias maximales de Γ que empiezan en x.

$w_x = w \ / \ T_x$

Los conjuntos de índices I/k_x y la función que pone índice son los mismos que en Γ.

Estas condiciones nos dicen que el conjunto de jugadores, el orden de jugar, el conjunto de posibles acciones, y los conjuntos de información en el juego original son preservados en el subjuego. Un subjuego de Γ puede no tener nodos etiquetados con la etiqueta de alguno de los jugadores, es decir S^j puede ser vacío, pero la función de pago en Γ_x tendrá un pago para el jugador j.

Cada juego es un subjuego trivial de sí mismo.

Un subjuego de juego de las firmas de pilas se muestra en la siguiente figura

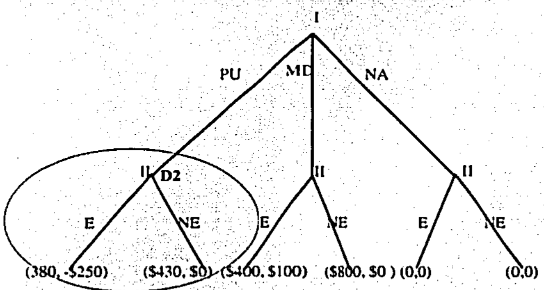


Figura 2.5.1 Subjuego comenzado en la raíz D2

Este subjuego comienza con el nodo D2 e incluye los dos nodos terminales subsecuentes T_1 y T_2, las dos aristas entre esos tres nodos, y los pagos ($380, -$250) y ($430, $0).

En los juegos de información perfecta, tal como este juego, cada nodo no terminal es una subraíz posible. En cambio en los juegos de información no perfecta, existen nodos no terminales tales que no son subraíces posibles. Por ejemplo en el juego del póquer simplificado, el vértice B no puede ser raíz, ver figura 2.1.2.

Cuando un juego Γ se corta en un nodo x, no sólo se da lugar al juego extensivo Γ_x, sino que el resto de Γ es, a su vez, casi un juego extensivo, si se le agrega x y un pago en x se obtiene un juego extensivo completo.

Definición 2.5.3: *Sea x un nodo donde Γ se puede cortar y d un vector en R^n. El juego cortado en x con pago d, $\Gamma_{/x}(d)$, es el juego extensivo siguiente:*

$V_{/x} = (V - V_x) \cup \{x\}$

$\mathcal{A}_x = \{ (y,z) \in \mathcal{A} \,/\, y,z \in V_{/x} \}$

$U_{/x} = U$

$S_{0/x} = \{ y \in V_{/x} \,/\, y \in S_0 \}$

La distribución de probabilidad en el conjunto de alternativas de un vértices de azar de $\Gamma_{/x}$ es la misma que en Γ.

Para todo jugador j, $S_{j/x} = \{ y \in V_{/x} \,/\, y \in S_j$, $j=1,2,..n \}$

$S_k{}^j{}_{/x} = S_{k'}{}^j$ para algún $S_{k'}{}^j$ de j en Γ. Es claro que los nodos de $S_{k'}{}^j$ no son mayores o iguales que x.

$T_{/x} = \{ y \in V_{/x} \,/\, y$ *es terminal de* Γ *ó* $y=x \}$. Las partidas de $\Gamma_{/x}$ son trayectorias maximales de Γ que no pasan por x y τ_x, la trayectoria que une a U con x.

$w_{/x} = w \,/\, T_{/x}$ para las partidas que no pasan por x y $w_{/x}(\tau_x) = d$

Una estrategia $\hat{\sigma}^j$ del jugador j es una función con dominio en la familia de conjuntos de información de dicho jugador, entonces tiene sentido hablar de *la restricción de* $\hat{\sigma}^j$ *a una subfamilia de conjuntos de información.* Cuando se corta un juego Γ en el nodo x y se obtiene el subjuego Γ_x, restringiendo las estrategias del jugador j en Γ a los conjuntos de información de Γ_x se obtienen estrategias de j en Γ_x y restringiendo las estrategias de dicho jugador en Γ a los conjuntos de información de $\Gamma_{/x}$ se obtienen estrategias de j en $\Gamma_{/x}$.

Definición 2.5.4 *Decimos que σ^*, un equilibrio de Nash en estrategias puras de Γ, es un Equilibrio de subjuego perfecto puro, si para todo nodo x, en donde Γ se puede cortar, la restricción de σ^* a Γ_x es un equilibrio de Nash de este subjuego.*

Si se tiene un juego que se puede cortar en el nodo x, y σ^{j*} es una estrategia de j en Γ_x y σ^{j**} es una estrategia del mismo jugador j en $\Gamma_{/x}$, se pueden componer en forma natural σ^{j*} y σ^{j**} para formar una estrategia de Γ. Sea $(\sigma^{j*}, \sigma^{j**})$ dicha composición.

Todos los conceptos que se han introducido en esta sección son válidos tanto en juegos finitos como infinitos.

Proposición 2.5.5 Si Γ es un juego extensivo que se puede cortar en el nodo x, $\sigma*$ un equilibrio de Nash en Γ_x y $\sigma**$ un equilibrio de Nash en $\Gamma_{/x}(u_x(\sigma*))$, entonces la composición $(\sigma*, \sigma**)$ es un equilibrio de Nash de Γ.

Demostración:

Sea $\sigma_\Gamma^* = (\sigma*, \sigma**)$

Para cualquier estrategia σ^j del jugador j tenemos

$$E_j(\sigma^*/\sigma^j) = E_{j/x}(((\sigma^*/\sigma^j)_{/x}, (\sigma^*/\sigma^j)_x)) =$$

$$\sum_{\substack{F\in T \\ F\leq x}} P(F/((\sigma^*/\sigma^j)_{/x}, (\sigma^*/\sigma^j)_x)\Pi_j(F) + P(x/((\sigma^*/\sigma^j)_{/x})E_{jx}((\sigma^*/\sigma^j)_x) \leq$$

$$\sum_{\substack{F\in T \\ F\leq x}} P(F/((\sigma^*/\sigma^j)_{/x}, (\sigma^*/\sigma^j)_x)\Pi_j(F) + P(x/((\sigma^{**}/\sigma^j{}_{/x})E_{jx}((\sigma^*)_x)$$

$$E_{j/x}((\sigma^{**})/(\sigma^j_{/x}), \sigma^j_x) \leq E_{j/x}(\sigma^{**}/\sigma^*) = \sigma^*$$

Es decir σ_Γ^* es un equilibrio de Nash en Γ *QD*

Para construir un equilibrio de Nash de subjuego perfecto, se utiliza la técnica de inducción hacia atrás, es decir se generaliza el algoritmo de Zermelo.

Algoritmo de Zermelo Generalizado:

Sea Γ un juego sin partidas infinitas.

1. Si Γ no se puede cortar se pasa a 5, si se puede cortar se identifica un nodo x tal que Γ_x no se puede cortar
2. Se considera la forma normal de Γ_x y se encuentra un equilibrio de Nash de Γ_x
3. A x se le asigna el vector de pago correspondiente al equilibrio encontrado en el paso 2.
4. Se reinicia el proceso, desde 1, con $\Gamma=\Gamma_{/x}$
5. Se encuentra la forma normal de Γ y un equilibrio de Nash de dicho juego.
6. Se componen todos los equilibrios encontrados y se termina con un perfil de estrategias del juego.

Si en el proceso de llevar a cabo el algoritmo con un juego Γ, se encuentra un primer paso que no sea posible, se dice que el algoritmo fracasó.

Es claro, que si el algoritmo no fracasa, construye un equilibrio de subjuego perfecto. Como en un juego de información perfecta finito, el algoritmo nunca fracasa, se tiene el corolario siguiente:

***Corolario 2.5.6** Un juego extensivo finito de información perfecta siempre tiene un equilibrio de subjuego perfecto.*

***Observación:** No todo equilibrio de Nash en estrategias puras de un juego extensivo es de subjuego perfecto puro.*

En cuanto a los equilibrios en estrategias mixtas que siempre existen, cuando la forma normal es finita, lo que no quiere decir que en otros casos no exista, se podría construir un algoritmo de Zermelo generalizado y el concepto de equilibrio de subjuego perfecto mixto, sin embargo, trabajar con el concepto de estrategia de comportamiento es mucho más fácil de manejar, pues no requiere que se tenga en mente la forma normal del juego completo, sino se describe en cada conjunto de información, al estilo de las estrategias puras. Las estrategias mixtas y las de comportamiento "coinciden" en el caso de los juegos de recuerdo perfecto que es el caso que va a tratar este trabajo, pues los juegos repetidos son un caso particular de éstos. Será en el capítulo 3, en el que aparecerá esta problemática y se finaliza este capítulo con algunos ejemplos de juegos que representan famosos problemas de estructura de mercado.

2.6 Juegos de mercado

La teoría de juegos es una disciplina que permite modelar conflictos económicos en forma extensiva como una alternativa a los modelos tradicionales. Algunos de los modelos de mercado más interesantes se presentan a continuación.

2.6.1 Ejemplo: Juego del patente [2]

Situémonos en el ramo de productos electrónicos. Existen dos fábricas interesadas en la producción de DVD's. Cada una debe decidir qué tipo de DVD producir. Una de las firmas es potencial activo en el mercado, ya tiene experiencia y prestigio en el ramo; la otra, es ingresante[14] y nueva en el campo y fabricará su producto con la mejor calidad al nivel de la primera. La primera se llamará "ocupante"; la segunda, "ingresante".

La firma ocupante entrará primero al mercado, con su diseño y tendrá la opción de patentar su producto. La patente da una protección legal contra la imitación, pero esto no es suficiente para evitar que la segunda firma produzca un diseño igual o parecido.

En cualquiera de los dos casos, patente o no patente, la segunda firma debe decidir si entrar o no al mercado, y si entra, que diseño producir. Las decisiones de las firmas quizá lleven a una guerra que quizá llegue a la corte. Sin embargo, debido a que el éxito en la corte no puede asegurarse, la firma 2 puede correr el riesgo. Si la entrada ocurre y la imitación se produce, la firma 1 debe decidir si demandará o no a la firma entrante. Dado que el litigio es muy caro y el éxito no puede asegurarse, la firma ocupante puede decidir racionalmente no demandar. El árbol de juego es el siguiente:

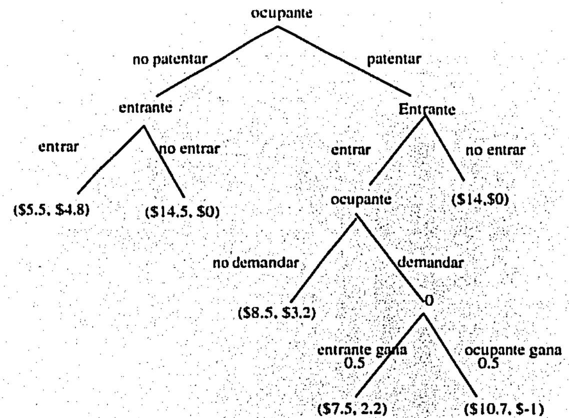


Fig 2.4.1 Juego extensivo del patente

La firma ocupante comienza el juego eligiendo simultáneamente la complejidad de la DVD y si patentará o no su producto. Subsecuentemente, la firma 2 elige si entrar o no, y si es así, que tipo producir si la firma 1 decide no patentar su producto, entonces el juego finaliza. El juego también finaliza si la firma ocupante patenta su producto y la entrada ocurre, entonces esta tiene la opción de demandar a la firma entrante. Si no hay demanda, entonces el juego finaliza; pero si la entrada ocurre existe una probailidad de 50% de que gane cada quien.

Si utilizamos el algoritmo de Zermelo, se observa que el pago de equilibrio es (8.5, 3.2) y se da cuando el ocupante decide patentar y no demanda, mientras que la frima 2 decide entrar.

Cuando se producen conflictos en los tribunales, el resultado no es seguro, lo que hacen entonces los participantes en un conflicto es considerar las estadísticas de lo que ha ocurrido en la historia reciente de conflictos semejantes y dentro del modelo, al llegar el momento de decisión de las instancias legales, se introduce una jugada de azar, antes de los vértices finales con sus pagos respectivos.

[14] No se confunda el "Ingresante" de este modelo con el de Stackelberg. Aunque el modelo es en forma cierta similar, el interés de el juego de patente es precisamente el de patentar el producto.

2.6.2 El Modelo de Von Stackelberg[8]

Este monopolista afronta una curva de demanda de pendiente negativa. Imaginese que si el monopolista fija el precio p, la cantidad demandada q está dada por $p(q_1) = 13 - p$ con un costo de es $c = q_1 + 6.25$ para $q_1 > 0$. Es decir, existe un costo fijo de 6.25 y un costo marginal constante de 1 por unidad.

En el modelo del Cournot las firmas eligen los niveles de producción q_i para el jugador i. Para el juego de Stackelberg, el jugador 1 elige q_1 primero, el jugador 2 observa antes de hacer su elección q_2. La teoría convencional del monopolio diría lo siguiente: si el monopolista produce q unidades, su ingreso total será $(13 - (q_1 + q_2))q_i - c$, de modo que la función de pago para i es

$$u_i(q_1, q_2) = [13 - (q_1 + q_2)]q_i - q_i - 6.25 \quad \text{.............................. } (a)$$

Se tiene entonces que las estrategias de la firma 2 pueden mapearse $\sigma_2: Q_1 \to Q_2$ (donde Q_1 es el espacio factible para q_1 y Q_2 el espacio de q_2). Mientras que las estrategias del jugador 1 son q_1. Dado el perfil de estrategias puras, el resultado es el vector $(q_1, \sigma_2(q_1))$ con pagos $u_i(q_1, \sigma_2(q_1))$

El beneficio total para el jugador 2 es

$$[13 - (q_1 + q_2)]q_2 - q_2 - 6.25$$
$$= 13q_2 - q_1 q_2 - q_2^2 - q_2 - 6.25$$

La maximización de esta expresión en q_2 significa igualar a 0 la derivada del beneficio total $max_{q'2}\, u_2(q_1, q'_2)$, o sea

$$12q_2 - q_1 q_2 - q_2^2 - 6.25 = 0$$
$$12 - q_1 - 2q_2 = 0$$
$$q_2 = r_1(q_1) = 6 - q_1/2$$

El jugador 2 observa la elección del jugador 1, o sea q_1 antes de elegir q_2. Para el jugador 1 entonces se tiene

$$[13 - (q_1 + q_2)]q_1 - q_1 - 6.25$$
$$= 13q_1 - q_1^2 - q_1 q_2 - q_1 - 6.25$$

De igual manera se maximiza $max_{q_1}\ u_1(q_1,\ r_2(q_1))$

$$12q_1 - q_1 q_2 - q_1^2 - 6.25 = 0$$

$$12 - q_2 - 2q_1 = 0$$

$$q_1 = 6 - q_2/2$$

Pero $q_2 = 6 - q_1/2$ entonces,

$$q_1 = 6 - (6 - q_1/4) = (24 - 6 + q_1)/4$$

$$= (18 + q_1)/4$$

$$q_1 = 6$$

Las estrategias σ_2 del jugador 2 es elegir para cada q_1 el nivel q_2 que satisface $max_{q'2}\ u_2(q_1,\ q'_2)$ con pagos $r_2(q_1) = 6 - q_1/2$. Entonces $q^*_1 = 6$ es la estrategia del jugador 1 que maximiza su pago dado σ_2. Este resultado es la solución a $max_{q_1}\ u_1(q_1,\ r_2(q_1))$. Por lo tanto el resultado de equilibrio es (6, 3).

Se puede considerar que el monopolista entonces obtendrá

$$u_1(q_1,\ q_2) = [13 - (q_1 + q_2)]q_1 - q_1 - 6.25 = 12q_1 - q_1 q_2 - q_1^2 - 6.25$$

con un beneficio de 11.75 esto considerando las 3 unidades producidas por la firma 2. Mientras la firma 2 si planea producir q_2 unidades, obtendrá un beneficio de

$$u_2(q_1,\ q_2) = [13 - (q_1 + q_2)]q_2 - q_2 - 6.25 = 12q_2 - q_1 q_2 - q_2^2 - 6.25.$$

Entonces con $q_2 = 3$ los beneficios son de 2.75.

En cambio, si el monopolista produce $q_1 = 7$ unidades entonces la firma 2 produce $q_2 = 5/2$. La firma 1 obtiene beneficos netos de 28.75 mientras que el jugador 2 con beneficios netos iguales 0.

Si el monopolista produce $q_1 = 7$ unidades en lugar de $q^*_1 = 6$ le cuesta una unidad de beneficio, en relación con lo que obtendría si produjera la cantidad óptima de 6. Pero la producción de 7 unidades impide la entrada, y la preservación del monopolio genera mayores beneficios a largo plazo que extraer hasta el último centavo al mercado en el corto plazo.

Veáse el modelo en forma extensiva:

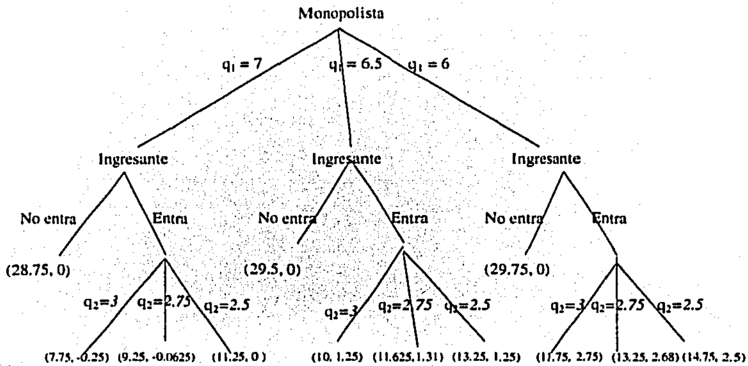


Fig 2.6.2 Juego extensivo del modelo de Von Stackelberg

El monopolista mueve primero, escogiendo su cantidad. El ingresaste observa esta elección de cantidad y luego decide si entrará y, en caso afirmativo, qué cantidad producirá.

2.6.3 El Modelo del patrón y los trabajadores [8]

El juego comienza con un trabajador B que decide si acepta o no trabajar para el patrón A y éste decide si lo explota o no. Si el trabajador acepta y no es explotado el pago para cada uno es de 1; pero si B decide trabajar y A lo explota, el pago para B es –1 y 2 para A. El juego es una secuencia de trabajadores que toman una decisión en cada periodo de tiempo.

Supóngase que A no juega sòlo con B, sino con una secuencia de B; primero con B_1, luego con B_2, y asi sucesivamente. Cada B està interesado sólo en su pago por esta interacciòn con A. En cambio, para A, un resultado es una secuencia infinita de resultados. A evalùa la secuencia infinita de pagos $u_1 + au_2 + a^2u_3 + \ldots$para algùn número $a \in [0,1]$, y es crucial que el empleado B_n cuando decide sobre su empleo con A, y està consciente de la historia de A respecto al trato que otorga a sus trabajadores.

La siguiente figura se muestra las primeras etapas:

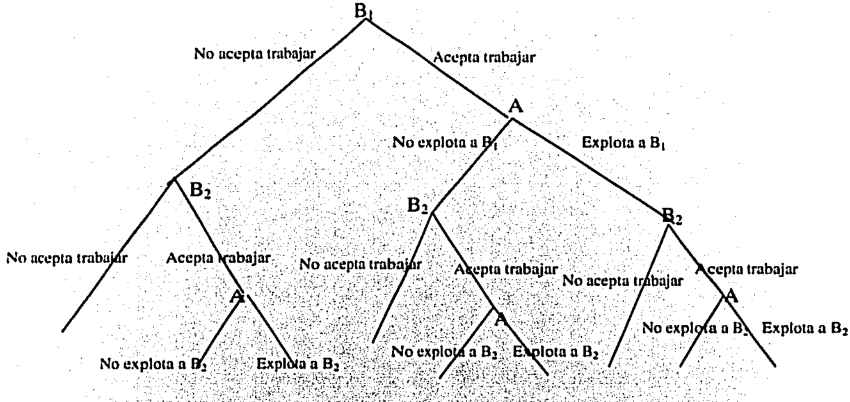


Fig 2.6.3 Juego extensivo del modelo de Von Stackelberg

Este es un juego de información perfecta y completa con nùmero infinito de jugadores, A y todos los B_n y el àrbol completo es de partidas infinitas con una funciòn de pago para cada jugador y para cada posible secuencia infinita de acciones.

B_2 sabe si B_1 acepto trabajar o no para A, y en caso afrimativo, còmo fue tratado por A, mientras que B_3 sabe todo esto acerca de B_2 y B_1. Dado que el nùmero de jugadores es infinito las estrategias para Bn es $2^{3^{n-1}}$, y el nùmero de estrategias para A es infinito. En este juego no se puede aplicar la inducciòn hacia atràs porque el àrbol no es finito; no hay nodo final para empezar.

Equilibrio de Nash

Un equilibrio de Nash se produce cuando A explota a todo B que se emplea con él, y cuando todo B se niega a trabajar para A.

Otro equilibrio consiste en que en la etapa *n*, si A no ha explotado jamàs a un trabajador en el pasado, la respuesta de B_n es aceptar el empleo y por otra parte, en cuanto A explote a un trabajador, el siguiente y de ahi en adelante rechazar el empleo. Si A ha explotado a un trabajador en el pasado, entonces no tendrà la oportunidad de explotar al trabajador B_n, pero incluso si por alguna razon obtuviera esa oportunidad explotarìa a B_n, porque de todas maneras nadie volverà a confiar en él. El perfil de estrategias descrito es un Equilibrio de Subjuego Perfecto.

Resumen

Sin duda alguna el trabajar con juegos extensivos permite un análisis más detallado del juego. Además de que la inducción hacia atrás o Algoritmo de Zermelo nos dan la solución de estos juegos, aparecen los equilibrios de subjuego perfecto, tan importante en el análisis de los juegos repetidos que es el tema del capítulo siguiente.

SEGUNDA PARTE:

Los Juegos Repetidos y la Conjetura de Coase.

Conceptos de los juegos repetidos finitos e infinitos, con enfásis en los infinitos. Comparación entre los equilibrios de Nash del juego estado y el juego repetido Las estrategias de comportamiento evitan tener que pasar todo el juego completo a su forma normal. Los teoremas de Tradición Oral aseguran la existencia de un conjunto de equilibrios de Nash del juego repetido inesperados si sólo se considera el juego estado.

Análisis con el uso de los juegos repetidos del comportamiento monopolista en el mercado de bienes durables a través de dos modelos diferentes. En este contexto teórico se puede estudiar adecuadamente la Conjetura de Coase. Teorema de Tradición Oral respecto a los pagos del monopolio.

Debemos sumergirnos en la experiencia,
y luego pensar en el significado de ésta.
Si sólo reflexionamos y no vivimos,
nos volvemos locos; si sólo vivimos
y no reflexionamos, somos irracionales
Goethe.

Capítulo III. Los Juegos Repetidos. Los Teoremas de Tradición Oral

3.1 Planteamiento del Problema.

Muchos de los juegos contemplados anteriormente, y otras muchas situaciones reales requieren de interacciones repetidas. Se Negocia, una y otra vez, con el mismo empleado, repetidamente se compran o se venden los mismos bienes, diversas firmas tienen ante sí, periodo tras periodo el problema de conveniencia o no de entrar a un mercado a competir contra un monopolista, los países deben renegociar, año tras año, sus tarifas o aranceles. Cada uno de esos conflictos, cuando se realiza una vez, da lugar a un juego, pero la situación es muy distinta si se repite vez tras vez, se tendrá entonces un juego repetido y el resultado puede ser muy distinto en uno u otro caso.

En muchos juegos de una sola vez, como por ejemplo el dilema del prisionero, los jugadores racionales hacen a un lado las ventajas de la cooperación, en ausencia de medidas coercitivas que obliguen a respetar los acuerdos previos al juego. Sin embargo, esta dificultad puede desaparecer cuando el juego se repite. En un juego de 2 jugadores, si el jugador I falta a su palabra sobre un acuerdo previo, y el juego se repite en más de una ocasión, entonces el jugador II tiene la oportunidad de castigarlo por su acción. Esto puede conducir a que el jugador I decida escoger no romper acuerdos si los beneficios futuros que se derivarán de la relación de cooperación continuada con el jugador II pesan más que las ventajas momentáneas que se pueden obtener al romper por una vez el acuerdo. Entonces hay un proceso de autorregulación en el juego, sin recurrir a la coerción externa.

A los juegos que se forman con base en un juego "estado" que se repite en más de una ocasión se llamarán ***juegos repetidos.***

Los jugadores tomarán decisiones en cada período consistente en el juego estado, y los pagos de los jugadores en el juego repetido serán la suma de los pagos en todos los períodos.

En los juegos repetidos, cada jugador puede tomar en cuenta, en un período dado, la experiencia de los períodos anteriores. En estos juegos, los jugadores tienen muchas más estrategias que en los juegos que se realizan una sola vez. Cuando en un juego repetido, en cada periodo los jugadores actúan de acuerdo a un equilibrio de un juego estado, se obtiene un equilibrio del juego repetido. Pero la repetición de un juego puede introducir "nuevos" equilibrios, es decir, equilibrios que no se obtienen por jugar con un equilibrio en cada periodo.

Dentro de la teoría de juegos repetidos, existe un tipo de teoremas a los que se les da el nombre de "Teoremas de Folk"[2]. Estos teoremas describen algunos equilibrios de subjuego perfecto a los que se les puede calificar de "eficientes".

Como se decía en el capítulo anterior, en los juegos repetidos no es usual construir la forma normal y pensar en estrategias mixtas, sino en estrategias de comportamiento, que se definen para los conjuntos de información, en forma análoga a como se procede con las estrategias puras. Para esos juegos, los dos conceptos coinciden. Por ello, antes de entrar al tema de juegos repetidos propiamente, se introducirá el concepto de estrategia de comportamiento, se caracterizará a los juegos para los que este concepto es útil y se generalizará el análisis de atrás hacia delante o algoritmo de Zermelo para este tipo de estrategias.

3.2 Estrategias de comportamiento. Equilibrios de Nash en estrategias de comportamiento. Juegos de recuerdo perfecto y algoritmo de Zermelo

Una estrategia mixta de un jugador j en un juego extensivo Γ determina una distribución de probabilidad sobre el conjunto de estrategias puras de j. A diferencia de esto una estrategia de comportamiento de j en Γ determina para cada conjunto de información de j una distribución de probabilidad sobre el conjunto de índices asociado a dicho conjunto de información. Es decir una estrategia mixta considera los planes globales que significan las estrategias puras y las probabilidades que dichos planes determinan sobre las partidas y se olvida del juego extensivo. En realidad es un concepto propio de la forma normal de Γ. En

[2] Los "Teoremas de Folk o folclore" para juegos repetidos afirma que si los jugadores son lo suficientemente pacientes entonces los pagos factibles e individualmente racionales pueden alcanzarse por un equilibrio. La intuición es que el beneficio que obtiene un jugador al desviarse es menor que el que se obtiene si sigue las estrategias de equilibrio.

cambio las estrategias de comportamiento son en sí mismas planes globales para el juego extensivo, al estilo de las estrategias puras. Sólo que el tipo de planes que construyen las estrategias de comportamiento no determinan en cada conjunto de información uno sólo de los índices permitidos, sino que pueden dar peso positivo a más de uno de estos índices.

Definición 3.2.1. *Dado un juego extensivo Γ, una estrategia de comportamiento del jugador j en Γ es una función definida en la familia de conjuntos de información de j, de tal manera que al conjunto de información S_k^j le asocia una distribución de probabilidad en I_k^j*

Un perfil de estrategias de comportamiento b es un elemento del producto cartesiano de los conjuntos de estrategias de comportamiento de los jugadores.

Un perfil de estrategias de comportamiento determina una distribución de probabilidad entre los vértices finales, si el juego es finito o en el espacio de partidas si el juego es infinito, en forma análoga a lo que sucede con las estrategias puras.

Definición 3.2.2 *Dado un perfil de estrategias de comportamiento b, la esperanza de pago del jugador j en el perfil de estrategias de comportamiento b es la función Ec (b) $= \sum_{F \text{ final}} p_b(F)\pi(\tau)$; si el juego es finito, Ec (b) $= \sum_{\tau \text{ partida}} p_b(\tau)\pi(\tau)$ si es infinito y la sumatoria tiene sentido.*

En una estrategia de comportamiento de un jugador, las probabilidades elegidas en los conjuntos de información son independientes.

El conjunto de perfiles de estrategias de comportamiento del juego extensivo Γ se puede representar como

$$X_{s\in S^*}\Delta(I_k^j) = X_{j\in N}\, X_{s\in S_k^j}\Delta(I_k^j)$$

donde I_k^j es el conjunto de alternativas disponibles en el conjunto de información S, S^* es la unión de todos los conjuntos de información y Δ es una distribución de probabilidad.

Considérese el siguiente ejemplo,

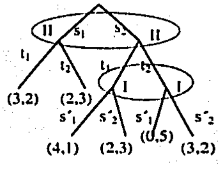


Fig. (a)

Las estrategias de comportamiento otorgan en cada conjunto de información del jugador *j*, una probabilidad a cada elemento del conjunto de índices, por ejemplo en el primer conjunto de información de I puede darle ½ de probabilidad a s_1 y ½ de probabilidad a s_2 y en el segundo conjunto de información puede darle ½ de probabilidad a s'_1 y ½ de probabilidad a s'_2.

El conjunto de estrategias puras del jugador j es $\{(s_1, s'_1), (s_1, s'_2), (s_2, s'_1), (s_2, s'_2)\}$, cada estrategia mixta es una distribución de probabilidad en dicho conjunto. La estrategia de comportamiento anterior da como resultado una probabilidad de ¼ para cada una de las estrategias puras del jugador *j* como ocurre con la estrategia mixta (¼ , ¼ , ¼ , ¼).

Así la estrategia de comportamiento $((p_1, 1-p_1), (p_2, 1-p_2))$ determina la misma probabilidad que la estrategia mixta $(p_1p_2, p_1(1-p_2), (1-p_1)p_2, (1-p_1)(1-p_2))$.

Por otro lado, pueden existir estrategias mixtas distintas que tengan el mismo efecto que una misma de comportamiento, en el sentido de que dada una estrategia pura del otro jugador determinan la misma probabilidad en los vértices finales. Véase este otro ejemplo,

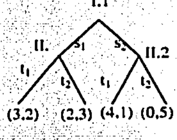


Fig. (b)

Aquí el jugador II tiene cuatro estrategias puras: $\sigma^1_2 = (t_1, t_1)$, $\sigma^2_2 = (t_1, t_2)$, $\sigma^3_2 = (t_2, t_1)$ y $\sigma^4_2 = (t_2, t_2)$. Ahora considerense dos estrategias mixtas x^1_2 = (¼, ¼, ¼, ¼) con probabilidad de ¼ cada estrategia pura, y x^2_2 = (½, 0, 0, ½) con probabilidad de ½ para σ^1_2

y ½ para σ^4_2. ambas estrategias mixtas tienen el mismo efecto que la estrategia de comportamiento tal que $b_2(S_2^1) = b_2(t_2 / S_2^2) = (½, ½)$ o $b_2 = ((½, ½), (½, ½))$.

En el juego anterior, además, dada b_j una estrategia del jugador j existe una estrategia mixta que conduce a la misma distribución de probabilidad sobre nodos terminales, supuesta una estrategia pura para el otro jugador. Sin embargo, no siempre se puede encontrar esta relación entre estrategias de comportamiento y mixtas.

Considérese el siguiente ejemplo:

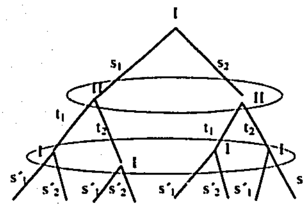


Fig. (c)

Obsérvese que en este es un juego en el que el jugador I no recuerda sus elecciones anteriores. I tiene cuatro estrategias puras: $\sigma^1_1 = (s_1, s'_1)$, $\sigma^2_1 = (s_1, s'_2)$, $\sigma^3_1 = (s_2, s'_1)$ y $\sigma^4_2 = (s_2, s'_2)$. Ahora considérese la estrategia mixta $x^1_1 = (½, 0, 0, ½)$. En el juego anterior, dicha estrategia, supuesta una estrategia pura para II, tenía el mismo efecto en los vértices finales que la estrategia de comportamiento $b_1 = ((½, ½), (½, ½))$.

Pero en el nuevo juego, b_l no es "equivalente" a x^1_1. Considérese la estrategia $\sigma^2 = t_1$ para el jugador II. Entonces (x^1_1, t_1) genera una probabilidad de ½ del nodo terminal correspondiente a (s_1, t_1, s'_1), y un ½ para el correspondiente a (s_2, t_1, s'_2). Sin embargo, ya que las estrategias de comportamiento describen aleatorizaciones independientes en cada conjunto de información, (b_1, t_1) asigna probabilidad de ¼ a cada una de las cuatro rutas (s_1, t_1, s'_1), (s_1, t_1, s'_2), (s_2, t_1, s'_1) y (s_2, t_1, s'_2). Entonces ya que s_1 (o s_2) y s'_1 (o s'_2) son elecciones hechas por el jugador I, la forma estratégica x^1_1 puede tener la propiedad de que s_1 y s_2 tengan probabilidad positiva, pero s'_1 se juega cuando se juega s_1, mientras que s_2' cuando se juega s_2. Como las estrategias mixtas están construidas sobre la forma normal estratégica, el jugador I toma todas sus decisiones a la vez, permitiendo que las decisiones en los diferentes conjuntos de información estén correlacionadas. Las

estrategias de comportamiento no pueden producir esta correlación en ejemplos como el último que ha aparecido, ya que cuando el jugador I decide elegir entre s'_1 y s'_2 en su segundo conjunto de información, él ha olvidado si eligió s_1 ó s_2 en su primer conjunto. Si se cambia el juego de tal manera que sea de recuerdo perfecto (particionando el segundo conjunto de información del jugador I en dos, correspondiendo a su elección de s_1 ó s_2), es fácil ver que cada estrategia mixta es equivalente a una estrategia de comportamiento.
Lo que hace la diferencia en este problema es si los jugadores recuerdan o no sus jugadas anteriores.

Los juegos de recuerdo perfecto son aquellos en que todos los jugadores recuerdan sus decisiones anteriores.

Formalmente:

Definición 3.2.3 *Decimos que un juego extensivo Γ es de* ***recuerdo perfecto,*** *si para cualesquiera dos vértices A y B del jugador j y tales que $A \le B$ y $A \in S_j^{k_1}$ y $B \in S_j^{k_2}$, entonces $S_j^{k_2} \subseteq L_\varepsilon$, donde L_ε es el conjunto de vértices mayores o iguales que aquellas alternativas de vértices de $S_j^{k_1}$ que tienen el mismo índice ε.*
Para los juegos de recuerdo perfecto, se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.2.5: *En un juego de recuerdo perfecto, las estrategias mixtas y las estrategias de comportamiento del jugador j determinan la misma probabilidad sobre el conjunto de partidas, supuesto cualquier perfil estrategias puras de los jugadores restantes.*
Demostración

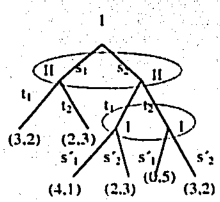


Fig. (d)

El perfil de estrategias puras $((s_1, s'_1), t_2,)$ no es un equilibrio en estrategias de comportamiento. Es cierto que si el jugador II cambia su estrategia por t_1, en lugar de recibir 3 recibiría 2 y por lo tanto lo mismo sucedería que cuando el jugador I cambia en uno sólo de sus conjuntos de información de s_1 a s_2 reducirá su pago de 2 a 0 y su cambio en el segundo, si no se altera en el primero no altera el pago. Sin embargo, si el jugador I espera que el jugador elija t_2, entonces su mejor respuesta sería elegir s_2 en su primer conjunto de información y s'_2 en el segundo, es decir existe una estrategia de comportamiento.

Un equilibrio de un juego extensivo Γ en estrategias de comportamiento también es un equilibrio en su representación normal. Así por ejemplo, el único equilibrio en estrategias de comportamiento del juego extensivo de la figura (a) es $(\frac{1}{2} s_2 + \frac{1}{2} s_1, \frac{1}{2} t_2 + \frac{1}{2} t_1, s'_2)$.

Definición 3.2.6: *En un juego extensivo Γ, un perfil de estrategias de comportamiento b^* es un equilibrio de Nash si para cada jugador $j \in N$ se tiene*

$$Ec\,(b/b^*) \geq Ec\,(b/b^j) \text{ para cada } b^j \in j$$

Definición 3.2.7 *Un equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento b del juego extensivo Γ es un equilibrio de subjuego perfecto, si la restricción de b a cualquier subjuego de Γ es equilibrio de Nash en estrategias de comportamiento del subjuego.*

Para todos los juegos extensivos de recuerdo perfecto finitos y para algunos infinitos, que no tienen partidas infinitas, se puede generalizar el algoritmo de Zermelo y sería esencialmente igual que en el caso de estrategias puras para los juegos de información perfecta. Cuando el algoritmo de Zermelo tiene éxito, construye un equilibrio de subjuego perfecto.

3.3 Los Juegos repetidos

Como se mencionó anteriormente, los juegos repetidos son aquellos donde el juego estado se repite más de una ocasión. Los resultados del juego de una sola etapa o juego estado pueden ser distintos a los del juego repetido ya que los integrantes involucrados se comportan diferente cuando se enfrentan otra vez en el mismo conflicto con los mismos rivales, como se verá a continuación.

3.3.1 Ejemplo introductorio

Veáse como repetir un juego "estado" puede llevar una situación distinta al juego "estado" mismo, pensando en el sencillo juego estado Γ siguiente.

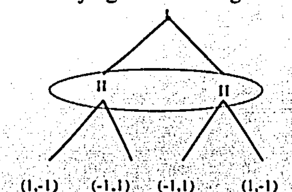


Fig. 3.3.1. Juego estado o de una sola etapa

Este juego es el de las monedas visto en el capítulo anterior. Es un juego de dos jugadores I y II con dos estrategias cada uno, para el jugador I $\{s_1,s_2\}$, para el jugador II $\{t_1,t_2\}$. El único equilibrio de Nash del juego es el perfil $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$.

Supóngase que el juego Γ se repite 2 veces y los pagos son la suma de lo obtenido en los dos periodos. Dependiendo de la información de los jugadores sobre el primer período, se tendrían varios juegos extensivos distintos. Considerense 3 casos:

En la primera de ellas, ninguno de los 2 jugadores está informado de lo que ocurrió en el primer período, cuando juegan el segundo. El árbol sería el siguiente.

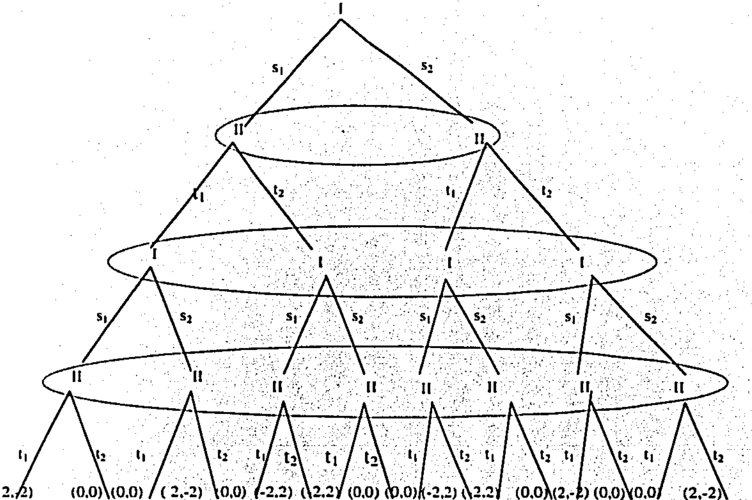


Fig. 3.3.2. Juego extensivo de dos periodos donde los jugadores no recuerdan lo que pasó en el primer etapa

Su forma normal sería la siguiente

$$
\begin{array}{c}
 \\
s_1s_1 \\
s_1s_2 \\
s_2s_1 \\
s_2s_2
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\mathbf{t_1\ t_1} & \mathbf{t_1\ t_2} & \mathbf{t_2\ t_1} & \mathbf{t_2\ t_2}
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
(2,-2) & (0,0) & (0,0) & (-2,2) \\
(0,0) & (2,-2) & (-2,2) & (0,0) \\
(0,0) & (-2,2) & (2,-2) & (0,0) \\
(-2,2) & (0,0) & (0,0) & (2,-2)
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Forma normal del juego extensivo, fig 3.3.2

Que tiene más de un equilibrio de Nash. Por ejemplo, ((¼,¼,¼,¼), (¼,¼,¼,¼)) y ((0,½,½,0), (0,½,½,0)).

Otro caso es aquél en el que cada jugador recuerda la elección que el mismo tomó pero no tiene información de lo que escogió el jugador contrario:

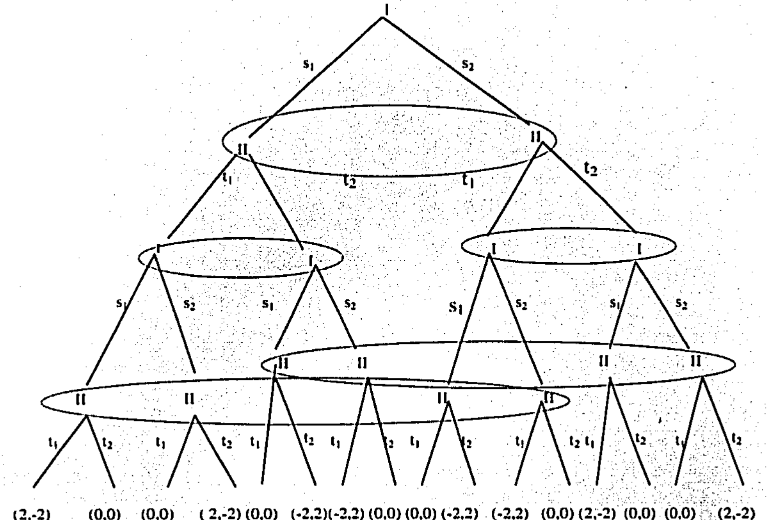


Fig. 3.3.3 Forma extensiva de un juego de dos periodos donde el jugador *j* sabe sus decisiones anteriores pero no las de su rival

Una estrategia de comportamiento del juego para el jugador I sería escoger una terna de números del intervalo cero 1, pues con esto estaría escogiendo una distribución de probabilidad dentro del conjunto de índices de cada conjunto de información.

Un equilibrio en estrategias de comportamiento de este juego sería que cada jugador otorgara probabilidad un medio a cada una de las alternativas de cada uno de sus conjuntos de información.

El caso más interesante al repetir un juego es en el que los 2 jugadores están informados de lo que pasó en el primer período. En general, en los juegos repetidos se supone que todos los jugadores tienen la información de lo que ocurrió en cada uno de los períodos anteriores y gracias a ello acumulan experiencia y aprendan de ella.

En el ejemplo que se está examinando del juego de las monedas repetido durante dos periodos, el modelo extensivo tiene la forma de la figura siguiente.

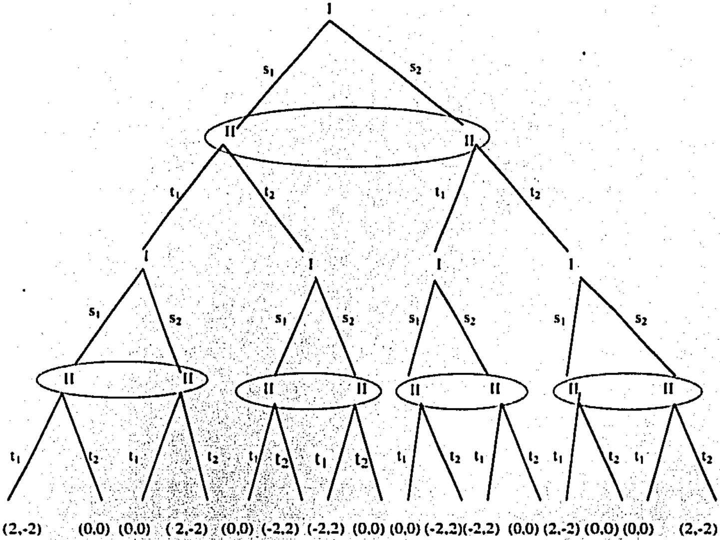


Fig. 3.3.4 Forma extensiva de un juego de dos periodos donde ambos jugadores recuerdan sus decisiones anteriores

La forma normal de este juego sería una matriz de 32 x 32, que se representa como sigue:

Eliminando estrategias dominadas[15] se obtiene la matriz de 8X8 siguiente.

	(t_1,t_1,t_1,t_1,t_1)	(t_1,t_1,t_2,t_2,t_2)	(t_1,t_2,t_1,t_1,t_1)	(t_1,t_2,t_2,t_2,t_2)	(t_2,t_1,t_1,t_1,t_1)	(t_2,t_1,t_1,t_1,t_2)	(t_2,t_2,t_2,t_2,t_1)	(t_2,t_2,t_2,t_2,t_2)
(s_1,s_1,s_1,s_1,s_1)	(2,-2)	(2,-2)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(-2,2)	(-2,2)
(s_1,s_1,s_2,s_2,s_2)	(2,-2)	(2,-2)	(0, 0)	(0, 0)	(-2,2)	(-2,2)	(0, 0)	(0, 0)
(s_1,s_2,s_1,s_1,s_1)	(0, 0)	(0, 0)	(2,-2)	(2,-2)	(0, 0)	(0, 0)	(-2,2)	(-2,2)
(s_1,s_2,s_2,s_2,s_2)	(0, 0)	(0, 0)	(2,-2)	(2,-2)	(-2,2)	(-2,2)	(0, 0)	(0, 0)
(s_2,s_1,s_1,s_1,s_1)	(0, 0)	(-2,2)	(0, 0)	(-2,2)	(2,-2)	(2,-2)	(2,-2)	(0, 0)
(s_2,s_1,s_1,s_1,s_2)	(0, 0)	(-2,2)	(0, 0)	(-2,2)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(2,-2)
(s_2,s_2,s_2,s_2,s_1)	(-2,2)	(0, 0)	(-2,2)	(0, 0)	(2,-2)	(2,-2)	(2,-2)	(0, 0)
(s_2,s_2,s_2,s_2,s_2)	(-2,2)	(0, 0)	(-2,2)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(2,-2)

Algunos equilibrios serían ((1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8), (1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,1/8)) ó ((0,¼,0,¼,0,¼,0,¼), (0,¼,0,¼,0,¼,0,¼)); como también ((¼,0,¼,0,¼,0,¼,0), (¼,0,¼,0,¼,0,¼,0)).

En los juegos repetidos no es conveniente pasar a la forma normal ya que como se vió, se construyen matrices muy grandes y difíciles de trabajar.

En estos juegos, los equilibrios se describen en estrategias puras o de comportamiento, por ejemplo en el juego repetido de dos periodos, un equilibrio sería aquel en el que cada uno de los jugadores da probabilidad un medio a cada uno de los índices correspondientes a cada uno de sus conjuntos de información.

Para formalizar el concepto de juego repetido, se hará antes con el de historia

Definición 3.3.1: *Sean $(N, \{D_i\}_{j\in N}, u_{j\in N})$, un juego en forma estratégica y $t \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, h_t es una historia de tamaño t, si pertenece a D^t.*

$$H^t = \{h^t\};\ H = \bigcup_t H^t$$

En el dilema del prisionero dado algún período t, existen decisiones previas tomadas por los jugadores, es decir, existen varias historias hasta el período t. Para el período 1, tenemos

$$H^1 = \{(\{C\},\{NC\}), (\{NC\},\{C\}), (\{C\},\{C\}), (\{NC\},\{NC\})\}$$

[15] Una estrategia dominada se basa en el supuesto de que el jugador j no escogerá la estrategia x, pues tiene alguna otra estrategia y que le da mayor pago. Así sus rivales llegan a la conclusión de que es improbable que j juegue x.

Están son todas las historias posibles en este período y un elemento de H^1 es una posible historia h^1, es decir, alguna combinación del par ({C}, {NC}).

Para un segundo período tenemos el siguiente conjunto

$$H^2 = \left\{ \left(\left(\frac{C}{C}\right), \left(\frac{NC}{NC}\right) \right), \left(\left(\frac{C}{NC}\right), \left(\frac{NC}{C}\right) \right), \ldots, \left(\left(\frac{NC}{NC}\right), \left(\frac{NC}{NC}\right) \right) \right\}$$

con 2^4 posibles historias. Así, cada período siguiente tendrá muchas más historias.

Definición 3.3.2: Dado el juego rectangular Γ, *el juego repetido con horizonte finito que tiene como juego estado a Γ*, consta, para cada j en N, de:

los conjuntos $\overline{\Sigma}_j = \{\overline{\sigma}^j : H \to D_j\}$ y $\overline{M}_j = \{\overline{x}^j : H \to M_j\}$, con todas las historias de un tamaño menor o igual a un cierto k, y la función de pago

$\overline{E}_j : \overline{M}_1 \times \overline{M}_2 \times \ldots \times \overline{M}_n \to R$, *definida como*

$$\overline{E}\left(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n\right) = \sum_{h(t) \in H(t)} p\left(h(t) \middle| \overline{X}\right) \sum_{\sigma \in D} \overline{x}^1(h(t))\left(\sigma^1\right) \overline{x}^2(h(t))\left(\sigma^2\right) \ldots, \overline{x}^n(h(t))\left(\sigma^n\right) \rho_j(\sigma).$$

El juego repetido con horizonte infinito (Γ, δ) que tiene como juego estado a Γ y como factor de descuento o probabilidad de continuación a δ en (0, 1) consta, para cada j en N, *de:*

los conjuntos $\overline{\Sigma}_j = \{\overline{\sigma}^j : H \to D_j\}$ y $\overline{M}_j = \{\overline{x}^j : H \to M_j\}$ y la función de pago

$\overline{E}_j : \overline{M}_1 \times \overline{M}_2 \times \ldots \times \overline{M}_n \to R$, *definida como*

$$\overline{E}\left(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^n\right) =$$

$$= (1-\delta)\left(\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \sum_{h(t) \in H(t)} p\left(h(t) \middle| \overline{X}\right) \sum_{\sigma \in D} \overline{x}^1(h(t))\left(\sigma^1\right) \overline{x}^2(h(t))\left(\sigma^2\right) \ldots, \overline{x}^n(h(t))\left(\sigma^n\right) \rho_j(\sigma)\right),$$

si el límite existe.

En ambos casos, a los elementos de $\overline{\sigma}^j$ se les llaman estrategias puras de j en el juego repetido, mientras a los elementos de $\overline{M}^j$ se les llama estrategias mixtas de j en dicho juego.

Definición3.3.3: En un juego repetido una estrategia $\underline{X}^* \in \underline{M}_j$ es un equilibrio de Nash de (Γ, δ), si se cumple: para toda $j \in N$, $\underline{E}_j(\underline{X}^*) \geq \underline{E}_j(\underline{X}^*/\underline{X}^j)$ para toda $\underline{X}^j \in \underline{M}_j$.
Dentro de un juego repetido, se puede cortar en cualquier historia en forma semejante a lo que se hace en los juegos extensivos y considerar el juego repetido que empieza en dicha historia y sería un subjuego del original. Un equilibrio de Nash $\underline{X}^*$ de un juego repetido es de *subjuego perfecto*, si al restringirlo a cada subjuego posible, se obtiene un equilibrio de Nash del subjuego.

Definición 3.3.4 Un vector w de R^n es *factible* en Γ, si existe un perfil de estrategias mixtas de Γ tal que el vector de pago esperado es w.

3.4 Juegos repetidos con horizonte finito y teoremas del Folklore.

Los teoremas del Folklore o Folk aseguran que para todo vector de pago v alcanzable para los jugadores y que tengan la propiedad de dar a cada jugador un pago mayor que su minmax (o algún otro tope máximo que le puedan poner los demás jugadores) se puede construir un perfil de estrategias que tiene como vector de pago v. Sin embargo, cuando algún jugador desvía de las estrategias dictadas por el perfil, los demás vuelven al perfil que les da su minmax. Un equilibrio que siempre se conservará será el siguiente.

Teorema 3.4.1 (Selten): *Si un juego Γ con un único equilibrio se repite un número finito de veces, construyendo el juego repetido $^{o}\Gamma$, entonces $^{o}\Gamma$ tiene un único equilibrio de subjuego perfecto.*

Demostración: Sea $P(n)$ la proposición que afirma que el teorema es cierto para el juego $^{o}\Gamma$ repetido n veces. Se demostrará el teorema por inducción.
Sea $n = 1$, $P(1)$ es cierto pues el juego $^{o}\Gamma$ es Γ. Supóngase que $P(n)$ se cumple para algún valor particular de n y considerese el juego repetido $n+1$ veces. Supóngase que se ha alcanzado la última etapa después de una historia de juego h. Si el jugador j había conseguido un pago x_k en la k-ésima etapa, habrá acumulado un pago total de $x(h)=x_1+x_2+...+x_n$ cuando llegue el momento de jugar la $(n+1)$-ésima y final etapa.

Entonces se tienen los pagos iniciales de Γ más $x(h)$ acumulado a la etapa $n+1$ y por lo tanto las mismas preferencias que el juego original

Si se aplica el algoritmo de Zermelo a la etapa $n+1$ que es uno de los subjuegos del juego repetido se tiene que el equilibrio es el mismo que el del juego estado. Posteriormente se puede para cada etapa que queda hasta llegar a $P(1)$ y se cumple que $P(n) = P(n+1)$ para toda $n=1, 2, 3,...$ y asi, el equilibrio permanece y es de subjuego perfecto *Q.D.*

Este teorema no significa que no existan otros equilibrios para estos juegos como se vio en el primer ejemplo. Puede haber otros equilibrios, pero estos no son de subjuego perfecto.

3.4.1 El dilema del prisionero

Considerese el dilema del prisionero que se describió en los capítulos anteriores, este dilema no sólo es una situación interesante, para motivar la discusión de los juegos repetidos, sino que en gran medida dio lugar a ellos.

En el capítulo 1 y 2, sólo se abordó para dos jugadores, pero se pueden describir este tipo de dilemas para cualquier número de jugadores. El juego se caracteriza por ser simétrico, con dos estrategias para cada uno de los jugadores, una de ellas es estrictamente dominante y además en el único equilibrio de Nash del juego, el perfil en que todos escogen su estrategia dominante, cada uno de los jugadores tiene un pago menor que el que tendría, si todos hubieran escogido la otra estrategia. La matriz siguiente es un dilema del prisionero para dos personas.

$$\begin{array}{ccc} & & \textbf{Prisionero B} \\ & & \begin{array}{cc} \textbf{Confiesa} & \textbf{No confiesa} \end{array} \\ \textbf{Prisionero A} & \begin{array}{c} \textbf{C} \\ \textbf{NC} \end{array} & \begin{pmatrix} (-3,-3) & (0,-4) \\ (-4,0) & (-2-2) \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 3.4.1 Matríz de pago en el dilema del prisionero

Se puede considerar como el juego estado de un juego repetido. El único equilibrio de Nash del juego estado es (C, C).

Considerese, ahora que ese dilema del prisionero se repite un número finito de veces, si se desarrolla el algoritmo de Zermelo, se puede advertir que el único resultado posible de este algoritmo, para cualquier número de periodos es que cada jugador elige Confesar en cada uno de sus conjuntos de información.

La razón es inmediata, antes de llegar a la última etapa del juego repetido, es posible creer que un jugador no escogería Confesar por miedo a que el oponente se tome el desquite en etapas sucesivas del juego. Pero en la etapa final, no hay desquite posterior posible. Puesto que Confesar domina a No confesar, ambos jugadores escogerán confesar en la n-ésima y última etapa, cualquiera que haya sido la historia previa del juego. Es de esa última etapa de donde partiría el algoritmo de Zermelo.

Considérese entonces, la penúltima etapa. Ambos jugadores saben que, independientemente de su elección en esta etapa, jugarán (Confesar, Confesar) en la última etapa. Por tanto, nadie puede ser castigado por jugar Confesar en la penúltima etapa porque el peor castigo que el oponente puede infligir en la última etapa es jugar Confesar.

Pero el oponente ya está planeando jugar Confesar en la última etapa pase lo que pase, independientemente de lo que ocurra previamente. Ambos jugadores usaran, pues Confesar en la etapa anterior a la última. El mismo argumento se puede aplicar a la etapa anterior a la penúltima y así sucesivamente.

Se Podría haber pensado que el problema en que se encontraban los jugadores en un dilema del prisionero era que se encontraban en un juego de una sola tirada y que con la repetición los jugadores podían llegar a convencerse de que no habría motivo para aferrarse a la estrategia no cooperativa. Pero el teorema de Selten nos asegura que si el número de periodos es finito no existe otro equilibrio de subjuego perfecto. Entonces, si no nos gusta la solución no cooperativa que se obtiene, se tendría que considerar un número de periodos infinito y es lo que se hará en la sección siguiente, no sólo para el dilema del prisionero, sino para otros juegos con características semejantes. Por lo pronto, veáse un teorema que es una versión del teorema del folklore para juegos repetidos finitos.

Teorema 3.4.2 (tradición oral para juegos repetidos un número finito de veces).

Si Γ es un juego tal que para cada jugador j existe un equilibrio de Nash $\sigma^{*(j)}$ cuyo pago correspondiente a j es mayor que $\underline{m}_j$, el minmax de j, entonces cada vector de pago w, factible e individualmente racional es límite de vectores de pago promedio de equilibrios de subjuego perfecto de juegos en los que se repite k veces el juego estado $(N,\{D_j\}, u)$, cuando k tiende a infinito.

Demostración : Si se establece una fase de premio terminal en el que cada jugador gana estrictamente más que su *minmax* y que consiste de varios periodos. Para hacerlo considerese el ciclo de premio α que consiste en la sucesión de equilibrios del juego estado, σ^{*1}, $\sigma^{*2}, \ldots, \sigma^{*n}$ tal que σ^{*j} permite a j ganar más que su *minmax* . Para un número entero K se considerará que el ciclo se repite K veces.

Un R-ciclo es un equilibrio de subjuego perfecto para cualquier subjuego de tamaño R. En este subjuego, el R-ciclo le otorga a cualquier jugador un promedio de pago estrictamente mayor que su minmax, pues $\forall i \in N, \sigma^{*i}$ determina un pago de al menos v_j y su σ^{*j} un pago estrictamente mayor.

Considerese a w, un pago factible individualmente racional, a σ, el perfil que garantiza el vector de pagos w y a K, un número suficientemente grande, para que j prefiera recibir v_j seguido de un ciclo de premio terminal, a desviarse de esta estrategia para ganar una vez lo más grande posible y conformarse después con su *minmax* durante nxK periodos.

Dada $\varepsilon > 0$, existe T tal que el ciclo de estrategias $\{\sigma(t)\}$, como las arriba descritas, de tamaño T-nxK tiene un promedio de pago que dista de v menos que ε.

Construimos σ^{**} tal que los jugadores usan el ciclo $\{\sigma(t)\}$hasta que alguien se desvíe y haya más de nxK periodos por delante, si algún jugador j se desvía, en un momento así, de esa trayectoria, entonces todos los demás jugadores castigan a j obligándolo a ganar su *minmax* de allí en adelante. Si la desviación se produce cuando faltan a lo más n periodos, se sigue con el ciclo $\{\sigma(t)\}$. *Q.D.*

3.5 Juegos repetidos con horizonte infinito y teoremas de Folklore

El famoso economista J.. M. Keynes decía que en el largo plazo todos estaremos muertos tratando de reforzar la idea de que, para él, los problemas interesantes de la economía se dan en el corto o cuando mucho el mediano plazo y en este trabajo se habla de juegos que se repiten infinitamente. ¿No resulta esto una situación demasiado irreal? ¿Cómo puede un individuo, con una vida que durará un número finito de años, pensar en participar en un juego que dura un número infinito de periodos, en donde cada uno de ellos dura el mismo lapso de tiempo, un año, un mes, un día o lo que se quiera? Supóngase que una persona se pasa la vida entera jugando dilemas del prisionero, pero que después de cada periodo hay una probabilidad positiva, menor que uno, de que no siga vivo para llegar a un nuevo periodo, es decir que se puede pensar que antes de cada periodo mayor que 1 hay una jugada de azar que con probabilidad $1-p$ el juego continúa y con probabilidad p, el juego se suspende por causas de fuerza mayor $(0 < p < 1)$. En ese caso se tendría un juego "infinito", pero realista, pues la probabilidad de que una persona juegue infinitos periodos es cero, como ocurre en la realidad. En un dilema del prisionero repetido, con horizonte infinito, como el que se acaba de describir, se tendrán otros equilibrios de Nash de subjuego perfecto que no consisten en que los jugadores confiesan en cada una de las situaciones que enfrentan, como se presenta a continuación.

Considérese que dos personas enfrentan un dilema del prisionero, con horizonte infinito y que la probabilidad de que el juego continúe después de una etapa cualquiera siempre es $\delta = 2/3$. Por tanto, al empezar el juego la probabilidad de alcanzar la etapa t-ésima es $(2/3)^{t-1}$.

Supóngase que cada uno de los dos jugadores decide empezar el juego repetido con la estrategia NC, *no confesar,* y continuar con esta estrategia, periodo tras periodo, siempre y cuando su oponente corresponda jugando también *no confesar.* Si, por el contrario, el oponente deja de escoger NC una primera vez, entonces la estrategia que utilizará, el jugador, de ahí en adelante será *confesar.* Si ambos jugadores eligen la estrategia que se acaba de describir, ocurrirá que en cada periodo los dos no confesarán y el pago esperado de cada jugador será

$$G_1 = -2-2(2/3)-\ldots-2(2/3)^{t-1}-2(2/3)^{t}-2(2/3)^{t+1}-2(2/3)^{t+2}-\ldots$$

Si el jugador se desvía alguna vez jugando confesar en la etapa (t+1)-ésima, a lo sumo conseguirá

$$G_2 = -2-2(2/3)-\ldots-2(2/3)^{t-1}-0(2/3)^{t}-3(2/3)^{t+1}-3(2/3)^{t+2}-\ldots$$

Si $G_1 \geq G_2$, entonces no es beneficioso desviarse,

$$G_1 - G_2 = (-2-0)(2/3)^{t} + (-2-(-3))\,(2/3)^{t+1} + (-2-(-3))\,(2/3)^{t+2} + \ldots$$
$$= (2/3)^{t}\,[-2 + (2/3) + (2/3)^{2}\ldots]$$
$$= (2/3)^{t}\left\{-2+\frac{2/3}{1-2/3}\right\} = 0$$

dado que el beneficio es 0, entonces no es conveniente desviarse, si el oponente mantiene la estrategia NC. Luego el perfil de estrategias descrita, al que se conoce como "ojo por ojo, diente por diente" es un equilibrio de Nash que provoca que los jugadores cooperen constantemente en el juego de horizonte infinito. "Ojo por ojo, ..." es un equilibrio de subjuego perfecto.

El equilibrio que se construyó consta de una forma de comportamiento de cada jugador que determina una trayectoria "deseada", en este caso NC en cada periodo, y un castigo, para el caso de que uno de los jugadores se desvíe de dicha trayectoria, escoger C, desde la primera vez que alguien se desvía de NC. Esta forma de construir un equilibrio que tenga un resultado menos catastrófico para los jugadores en el dilema del prisioneros se puede generalizar a otros juegos repetidos, cuyo juego estado tiene ciertas propiedades.

Los teoremas del folklore aseguran que para un juego Γ con la propiedad de que existe un vector de pagos v factible que domina para cada jugador a su máximo asegurable (o al vector de pagos correspondiente a algún equilibrio de Nash de X^* del juego Γ), existe un factor de descuento (o probabilidad de seguir jugando) δ y un equilibrio de Nash de subjuego perfecto de (Γ, δ) tales que el vector de pago correspondiente a este equilibrio es v.

Aquí se demostrará una versión del teorema del folklore debida a Friedman y que es una generalización directa del dilema del prisionero repetida. Considerese un juego Γ que tiene la característica de tal dilema, consistente en que el vector de pago correspondiente a alguno de sus equilibrios de Nash está dominado por un vector factible, es decir hay un equilibrio relativamente "malo" en el juego. En el caso del dilema del prisionero el pago en (C, C), único equilibrio del juego está dominado por el pago en (NC, NC). Entonces el teorema afirma que existe δ un real tal que el juego repetido (Γ, δ) tiene un equilibrio de Nash en el que cada jugador obtiene v y este equilibrio es un "ojo por ojo, diente por diente", al estilo del que construimos para el dilema del prisionero. Esto es, cada jugador cooperará con los demás tratando de que se alcance el vector v, mientras sus oponentes hagan lo mismo, y jugará con su estrategia correspondiente al equilibrio "malo" si alguno de sus oponentes rompe el acuerdo de cooperación. Se demostrará antes una generalización del teorema de Selten[16]:

[16] Selten , pionero de la teoría de juegos, también ganó el premio Nobel de 1994 en economía junto con Nash y Jonh C. Harsanyi

Teorema 3.5.2: Si X^{**} es un equilibrio de Nash del juego Γ, entonces, $\underline{X}^j\ (h^t) = X^{**j}$ para toda h^t es un equilibrio de (Γ, δ).

Esto indica que un equilibrio de Nash del juego Γ seguirá siendo equilibrio de Nash de (Γ, δ) en cada período h del juego infinito, y (Γ, δ) tendrá al menos un equilibrio de subjuego perfecto.

Teorema 3.5.3 (Teorema de Friedman): *Sea $\Gamma = (N, \{Di\}, u)$ un juego que tiene un equilibrio de Nash en estrategias mixtas X^{**} y un vector factible v tales que $v \geq E(X^{**})$, entonces existen δ en $(0, 1)$ y $\overline{X}^*$ un equilibrio de subjuego perfecto de (Γ, δ), con $\overline{E}(\overline{X}^*) = v$.*

Demostración : Como v es factible, existe un perfil de estrategias mixtas $\hat{X}$ en Γ de tal manera que el vector de pago correspondiente es v, ahora construyase el perfil de estrategias $\overline{X}^*$ de (Γ, δ) que para toda *j en N* se describe como,

$$\overline{X}^{*j}(h(0)) = \hat{X}^j \text{ y para } k = 1,2\ldots, \overline{X}^{*j}(h(k)) = \begin{cases} \hat{X}^j, \ si\ \forall i \in N \ y\ \forall\ h(t), \ con\ t < k \ y\ p(h(t)|X^*) > 0 \\ \qquad X^{*i}(h(t)) = \hat{X}^i \\ \\ X^{**j}, \ en\ cualquier\ otra\ historia. \end{cases}$$

A $\overline{X}^*$ se le puede llamar el perfil de estrategias "ojo por ojo, diente por diente", se hará ver que $\overline{X}^*$ es un equilibrio de Nash de (Γ, δ) que tiene asociado el vector de pago v, para valores adecuados de δ.

Con dicho perfil de estrategias, los jugadores empezarían el período 0 con $\hat{X}$ y con éste seguirían en cada período pues ninguno encontraría motivo para desviarse en algún momento, es decir la probabilidad de llegar a cualquier historia que contenga decisiones distintas de $\hat{X}$ sería cero y entonces el pago para cada jugador j sería:

$$E_j(X^*) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{h(t)\in H(t)}\delta^t p(h(t)|\hat{X})E_j(\hat{X}) = (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t E_j(\hat{X})\sum_{h(t)\in H(t)} p(h(t)|\hat{X}) =$$
$$= (1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t E_j(\hat{X}) = (1-\delta)E_j(\hat{X})\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t = (1-\delta)E_j(\hat{X})(1-\delta)^{-1} = E_j(\hat{X}) = v_j$$

En la fórmula se está omitiendo las historias con probabilidad cero.

Si todos los jugadores menos el jugador k se mantienen aplicando la ley del talión en sus estrategias y el jugador k decide abandonarla y elegir $\overline{Y}^k$, donde $\overline{Y}^k$ (h(t))= $\hat{X}^k$ para t< $\tilde{\tau}$ y $\overline{Y}^k(h(t)) = X^k_{h(t)}, para\ t \geq \tilde{\tau},\ con\ X^k_{h(t)} \in M_k$ y por lo menos para una h($\tilde{\tau}$) difiere de la estrategia con gorro de *k*, entonces

$$\overline{E}_k\left(\overline{X}^*\middle|\,\overline{Y}^k\right) = (1-\delta)(\textstyle\sum_{t=0}^{\tilde{\tau}-1}\delta^t v_k + \delta^{\tilde{\tau}} \displaystyle\sum_{h(\tilde{\tau})} p(h(\tilde{\tau})|(\overline{X}^*|\overline{Y}^k))\ E_k\left(\hat{X}\middle|X^k_{h(\tilde{\tau})}\right)$$
$$+ \textstyle\sum_{t=\tilde{\tau}+1}^{\infty}\delta^t \displaystyle\sum_{h(t),t>\tilde{\tau}} p(h(t)|(\overline{X}^*|\overline{Y}^k))E_k\left(X^{**}\middle|X^k_{h(t)}\right)).$$

Y

$$E_k(X^*) - E_k\left(X^*\middle|\overline{Y}^k\right) = (1-\delta)(\textstyle\sum_{t=\tilde{\tau}+1}^{\infty}\delta^t((v_k - \displaystyle\sum_{h(t)} p(h(t)|(\overline{X}^*|\overline{Y}^k))E_k(X^{**}|X^k_{h(t)}))$$
$$+\delta^{\tilde{\tau}}(v_k - \sum_{h(\tilde{\tau})} p(h(\tilde{\tau})E_k\left(\hat{X}\middle|X^k_{h(\tilde{\tau})}\right)) =$$
$$(1-\delta)(\delta^{\tilde{\tau}+1}(\textstyle\sum_{t=0}^{\infty}\delta^t(v_k - \displaystyle\sum_{h(t),con\,t>\tilde{\tau}} p(h(t)|(\overline{X}^*|\overline{Y}^k))E_k\left(X^{**}\middle|X^k_{h(t)}\right)))$$
$$+(1-\delta)(v_k - \sum p(h(\tilde{\tau})|(\overline{X}^*|\overline{Y}^k)E_k\left(\hat{X}\middle|X^k_{\tilde{\tau}}\right))$$
$$\geq \delta^{\tilde{\tau}+1}(v_k - E_k(X^{**})) + (1-\delta)\delta^{\tilde{\tau}}(v_k - \sum_{h(\tilde{\tau})} p(h(\tilde{\tau})|(\overline{X}^*|\overline{Y}^k)E_k\left(\hat{X}\middle|X^k_{h(\tilde{\tau})}\right)) \geq$$
$$\delta^{\tilde{\tau}+1}(\max_{X^k\in M_k} E_k\left(\hat{X}\middle|X^k\right) - E_k(X^{**})) + \delta^{\tilde{\tau}}(v_k - \max_{X^k\in M_k} E_k\left(\hat{X}\middle|X^k\right)),\ entonces$$
$$E_k(X^*) - E_k(X^*|\overline{Y}^k) \geq 0 \Leftrightarrow \delta(\max_{X^k\in M_k} E_k\left(\hat{X}\middle|X^k\right) - E_k(X^{**})) + (v_k - \max_{X^k\in M_k} E_k\left(\hat{X}\middle|X^k\right)) \geq 0,$$
$$es\ decir,\ E_k(X^*) - E_k(X^*|\overline{Y}^k) \geq 0 \Leftrightarrow 1 > \delta \geq \frac{\max_{X^k\in M_k} E_k\left(\hat{X}\middle|X^k\right) - v_k}{\max_{X^k\in M_k} E_k\left(\hat{X}\middle|X^k\right) - E_k(X^{**})} \geq 0.$$

Es decir, si el factor de descuento δ satisface la desigualdad anterior, el juego repetido (Γ, δ) tiene un equilibrio de Nash de subjuego perfecto que tiene como vector de pago al vector *v. Q.D.*

3.6 Modelo de Cournot

De nuevo considerese el ejemplo del duopolio de Cournot del capítulo uno, dos empresas ensambladoras de automoviles. La matriz de juego es la siguiente:

C -->Cooperar
D -->Desertar

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Firma 2} \\ & & \begin{array}{cc} \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \text{Firma 1} & \begin{array}{c} \text{C} \\ \text{D} \end{array} & \begin{pmatrix} (18,18) & (15,20) \\ (20,15) & (16,16) \end{pmatrix} \end{array}$$

Fig. 3:6.1 Matriz de pagos del modelo de Duopolio de ensambladoras de autos repetido dos veces

Recuerdese que si estas empresas juegan el juego una sola vez, el equilibrio de Cournot es $q_1^* = q_2^* = 4$ millones de autos. El precio de mercado es \$14 cada unidad, y cada empresa obtiene un beneficios de \$16 millones. Pero si ambos jugadores deciden cooperar en cada período y producen 3 millones de unidades, obtienen una utilidad de 18 millones de dólares menos el factor de descuento en cada periodo. Sea δ igual a ½,

$$18 + 18(\tfrac{1}{2}) + \ldots + 18(\tfrac{1}{2})^{t-1} + 18(\tfrac{1}{2})^{t} + 18(\tfrac{1}{2})^{t+1} + 18(\tfrac{1}{2})^{t+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G_1)$$

Esto daría un nuevo equilibrio, un equilibrio cooperativo. Pero ¿qué pasa si algún jugador rompe el acuerdo?.

Supongase ahora que la la firma i intenta desviarse en el periodo t para mejorar sus beneficios. Esta empresa obtendría una utilidad de \$18 millones antes del período en que se desvia, en el periodo t obtendrá \$20 millones y en los siguientes períodos 15 dado que su oponete jugará el rendimiento de Cournot por siempre. Esto es

$$18 + 18(\tfrac{1}{2}) + \ldots + 18(\tfrac{1}{2})^{t-1} + 20(\tfrac{1}{2})^{t} + 15(\tfrac{1}{2})^{t+1} + 15(\tfrac{1}{2})^{t+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (G_2)$$

Si la utilidad obtenida jugando el equilibrio de Cournot es mayor que la obtenida cuando i se desvia, entonces no es conveniente desviarse. Es decir,

$$G_1 - G_2 = (-2)(\tfrac{1}{2})^{t} + (3)(\tfrac{1}{2})^{t+1} + (3)(\tfrac{1}{2})^{t+2} + \ldots \geq 0$$

$$= (\tfrac{1}{2})^{t}\, [-2 + 3((\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{2})^{2} + \ldots +)]$$

$$= (\tfrac{1}{2})^t \left\{-2+(3)\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right\} > 0$$

Entonces se tienen las siguientes estrategias que son equilibrios:

1. Cada empresa produce cuatro millones de autos cada período independientemente de lo que haga su oponente.

2. Cada empresa envia 3 millones mientras el oponente haga lo mismo, pero si éste se desvía entonces elegir el rendimiento de Cournot por siempre. Es decir si algún jugador en algún período deserta, entonces su oponente desertará por siempre. Esto es, jugará el rendimiento de Cournot.

Resumen

Como se dijo anteriormente, los juegos repetidos arrojan soluciones que pueden ser distintas a los juegos que se realizan una vez. Estas situaciones son más realísticas, y es de considerar los Teoremas de Folk o Tradicion Oral que permiten a los jugadores tomar en cuenta periodos anteriores y posteriores que les puede conducir a obtener un mejor pago.

Con la base teórica de los primeros dos capítulos y los juegos repetidos, se puede dar inicio al desarrollo de los modelos aplicados al monopolio de bienes durables.

A veces no basta comprender
los principios generales que
gobiernan la interacción economica,
sino cuan bien podamos usar este
conocimiento para resolver sus conflictos
Alvin Roth

Capítulo IV. Bienes durables y poder de monopolio

4.1 Planteamiento del problema.

Cuando una firma es competitiva, lo es en un mercado competitivo al lado de otras firmas, produciendo bienes o servicios similares. Una economía en la cual existe un mercado perfectamente competitivo para cada producto es socialmente eficiente. Sin embargo, tales mercados son difíciles de encontrar en la práctica ya que existen factores externos que pueden provocar costos o beneficios involuntarios (externalidades). En algunos casos, la competencia puede ser inestable y generar el dominio de una o más firmas que pueden eliminar a otros competidores, tomar el control e incurrir en acciones de monopolio.

La competencia perfecta es un resultado de un mercado en el cual todas las firmas tiene las mismas condiciones de competencia, no tienen barreras para entrar o salir. Los productores y los consumidores tienen toda la información relevante acerca del mercado incluyendo el precio y calidad del producto. En un mercado competitivo, los agentes no pueden influenciar individualmente el precio en el cual el producto puede ser vendido o comprado. El precio es determinado por el mercado, así cada comprador o vendedor toma el precio como dado. Ninguna firma puede incrementar su precio por encima del precio de mercado sin incurrir en pérdidas ya que alguna otra ofrecería un precio más atractivo para los compradores.

Cuando la competencia es efectiva, la producción es eficiente, se producen innovaciones técnicas y los resultados son justos para la sociedad; en contraste, el poder de monopolio usualmente es lo contrario, mina la eficiencia, provoca que la innovación sea lenta, cambia la abundancia o riqueza de la sociedad en bienestar para unos cuantos y reduce la libertad de elección.

A diferencia de una empresa competitiva que toma el precio como dado, una empresa que ejerce el poder de monopolio sobre cierto mercado puede elevar su precio por encima de su costo marginal, sin perder a todos sus clientes. Este comportamiento conduce a un precio demasiado alto y una pérdida de bienestar para la sociedad. El monopolio es el único proveedor de algún producto que no tiene substituto. Un monopolio da un precio sin temor a que alguna firma rival le haga competencia.

Sin embargo, una firma puede competir contra sí misma aún siendo un monopolio y esto puede reducir su potencia de mercado, puede crear su propia competencia. Existen teorías[17] las cuales dicen que aún con la presencia de monopolios, mercados incompletos y otros factores externos se pueden presentar situaciones favorables para los consumidores. Una de ellas es de Ronald Coase que afirma que ciudadanos y firmas deben ser legalmente libres de negociar algún acuerdo. Él asume que la interacción de comprador-vendedor provoca un regateo que da pauta a un resultado eficiente en el que el precio a que se ve obligado a vender el monopolio puede ser muy cercano a su costo marginal lo que provoca beneficios para el consumidor.

Generalmente, la reiteración de la compra-venta produce un vínculo dinámico entre vendedores y consumidores. Es más probable que un consumidor quien ha comprado un bien hoy, lo compre de nuevo mañana. Sin embargo, la situación cambia cuando el bien dura más de un periodo (bien durable), entonces la demanda del bien no es tan frecuente, lo que perjudica al monopolista. Éste debe pensar en qué momento debe vender a cada tipo de consumidor para maximizar sus ganancias.

Se precisará un poco la diferencia entre los tres tipos de mercados que se están comparando: El mercado competitivo, el de bienes perecederos en el que hay un monopolio y el de bienes durables con un monopolio.

4.1.1 Economía de mercado

Una economía de mercado está compuesta por el espacio de bienes y 2 clases de agentes: los consumidores y las empresas. Los primeros son aquellos que compran bienes y los segundos los que las producen.

Los consumidores se caracterizan por su psicología ante los bienes y su riqueza. Un modelo de psicología del consumidor esta dado por un relación binaria de preferencia $\preceq_j$ definida en R^n_+, a través de los siguientes axiomas.

[17] Ronald Coase, además de su trabajo sobre su teorema, fue un analista social buscando siempre el bienestar de la sociedad. Veáse sus trabajo en "Durability and Monopoly", Journal of law and Economics 15 (1972) p.p 113-149. Otra teoría relacionada se encuentra en "Durable Good Monopolies with Rational Expectations and

1.Completitud: para toda $x, y \in R^n_+$, $x \preceq_j y$ ó $y \preceq_j x$

2.Reflexividad: para toda x, $x \preceq_j x$

3.Transitividad: si $x \preceq_j y$, $y \preceq_j z \Rightarrow x \preceq_j z$.

4.Continuidad: para toda $x^* \in R^n_+$ $\{x \in R^n_+ / x \preceq_j x^*\}$ *y* $\{x \in R^n_+ / x^* \preceq_j x\}$ => *son cerrados*

Si se cumplen estos axiomas existe una función de utilidad continua $U_j : R_+^n \dashrightarrow R$ tal que $x \preceq_j y$ si sólo si $U(x) \leq U(y)$. La función de utilidad va a representar las preferencias del consumidor

Los consumidores siempre están limitados por la cantidad finita de dinero o riqueza de que pueden disponer. Por otro lado, también se enfrentan a unos precios dados, P = $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ de n mercancias. Dado que el ingreso del consumidor j es el recurso con que cuenta para comprar cantidades de las n mercancias y que si la relación de preferencia cumple al menos los axiomas 1-4, dicha relación se puede representar con una función de utilidad U, entonces el consumidor k debe resolver el problema A:

$$\max U$$

$$\text{s.a.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} P_i X_i \leq I_j(p)$$

Si la relación de preferencia cumple los 4 axiomas anteriores, el problema del consumidor tiene solución, pero quizá no es única. Si sobre $\preceq_j$, se agregan 2 axiomas más a los cuatro anteriores, el de no saciedad y el de convexidad, para cada p y cada ingreso existirá una solución única al problema del consumidor. Si el ingreso está dado, se tendrá una función demanda de j

$$d_j: R^n_+ \rightarrow R^n_+$$

Tal que si $x^* = d_j(P)$, x^* resuelve el problema mencionado.

Los axiomas que requerimos son

5- No saciedad: *Para toda* $x \in R^n_+$ existe un $\varepsilon > 0$ y una $y \in R^n_+$ tal que $|x - y| < \varepsilon$, y $x \prec_j y$.

Replacement Sales", de Erick Bond y Larry Samuelson en Rand Journal of Economics 15 (1984) p.p 336-345. Nota extraída de Bierman y Fernández[2]

6- Convexidad: *Para toda* $x, y \in R^n_+$, si $y \preceq_j x$, entonces $y \prec_j [tx + (1-t)y]$ para cualquiera que sea t talque $0 < t < 1$

El supuesto de saciedad nos dice que cerca de cualquier plan de consumo existe un plan de consumo preferido; mientras que el de convexidad, si el consumo x es preferido a y, entonces todo el consumo intermedio (con ponderaciones positivas) resulta preferido a y.
La demanda del mercado de una mercancia se deriva a partir de las demandas de cada consumidor. La suma de las demandas de cada consumidor se puede considerar la demanda de mercado de la mercancia. Esta será una función de los precios y del ingreso de cada uno de los consumidores. Si este ingreso está dado, la demanda del mercado es

$$D: R^n_+ \rightarrow R^n_+$$

$$D(P) = \sum_{j \text{ consumidor}} d_j(P)$$

Esto es la demanda total final

Teoría de la empresa
La empresa k parte de $Y^k \subseteq R^n$, la cual es su conjunto de tecnología, es decir el conjunto de sus posibles planes de producción y, esto es

$$Y^k \rightarrow R^n; \; y \in Y^k$$

Si $y_j < 0$, entonces la mercancia j es un insumo en el plan y, si $y_j > 0$, entonces j se obtiene como producto. Los axiomas del conjuto de tecnología

1 - Y^k *cerrado y convexo,*
2 - $R^n \cap Y^k = \{0\}$
3 - *Si* $x \in Y^k$ *y* $x' \leq x$, *entonces* $x' \in Y^k$

Para cada sistema de precios, el objetivo de la empresa es obtener el mayor beneficio posible, con la restricción que le pone su tecnología. La Función beneficio de la empresa k, dado $P \in R^n_+$ es

$$g(P, y) = P.Y$$

la empresa debe resolver el problema B:

$$\max g(p, y)$$
$$s.a \ y \in Y^k$$

Los axiomas 1-3 provocan que para cada P, existe una solución única para el problema B y con ello queda determinada la demanda y la oferta de la empresa para cada una de las mercancías. Si y^* es el vector en Y^k que resuelve el problema, si $y^*_j < 0$, entonces la empresa demanda $|y^*_j|$ unidades de mercancía j como insumo, si $y^*_j > 0$, entonces j ofrece y^*_j unidades de j

La función de demanda-oferta de la empresa k se puede expresar como

$$do^k: R^n_+ \rightarrow R^n.$$

La demanda-oferta del conjunto de las empresas es la función $DO^k: R^n_+ \rightarrow R^n$,

$$DO(P) = \sum_{k\ empresa} d^k(P)$$

Equilibrio de mercado perfectamente competitivo

Definición 4.1.1 P^* en R^n es un sistema de precios de equilibrio de la economía, $D(P^*) + DO(P^*) \leq 0$ y *si* $D_j(P^*) + DO_j(P^*) < 0$, entonces $P_j = 0$

Las empresas tienen las mismas funciones de costo marginal y costo medio a largo plazo *(CMA) y (CME)*. Dado P^* cada empresa maximiza el beneficio mediante la producción de y_j^* al nivel más alto de producción para que $P^* = g(p, y) = (CMA) = (CME)$, ninguna empresa obtiene beneficios en el equilibrio a largo plazo.

Si el conjunto de empresas ofrece y^* unidades y cada empresa produce y_j^*, el número de empresas tiene que ser $N^* = Q^*/q^*$, y ninguna otra desea entrar pues no hay beneficiosy entrará cuando la demanda de mercado se incremente.

Funciones de demanda e ingreso de un monopolio

La diferencia escencial entre la empresa perfectamente competitiva y el monopolio estriba en que la empresa monopolista no es tomadora de precios, sino que toma decisiones no sólo en cuánto producir y cómo, sino en cuánto venderá las mercancías que monopoliza.

Generalmente el problema del monopolio se trabaja, aislando el mercado del bien en el que hay un monopolio del resto de los bienes, es decir el equilibrio en un mercado con monopolio no es un equilibrio general, aunque si hay trabajos que consideran al bien monopolizado en su relación con todos los otros bienes construyendo un equilibrio general para ese tipo de mercados.

Si se considera aislado el bien monopolizado, se tendría que si el monopolio toma la decisión de vender a p la unidad del bien en cuestión, quedaría determinada una demanda D(p) de todos los consumidores, entonces el monopolio produciría exactamente D(p). Pues si produce más desperdiciaría insumos en producto que no se vendería y su ganancia sería menor que al producir D(p) y si produce menos no podría vender a algunos consumidores que desean comprar y su ganancia sería menor que al producir D(P).

Dados los precios de los bienes que son insumos, el precio de equilibrio en el mercado del bien i con un monopolio es p_j* que resuelve el problema C:

$$Max\ PY$$
$$s.a$$
$$Y \varepsilon Y^{k}\ y\ Y_j = D(p_j)$$

El precio de equilibrio p_j* no tiene porque ser el costo marginal de j y la ganancia del monopolio no tiene porque ser cero, como sucede en un mercado competitivo. La conjetura que estableció Ronald Coase es que cuando el bien dura más de un periodo, a pesar de haber un monopolio, la situación se parecerá a un mercado competitivo y no a un mercado con monopolio, pensado en un sólo periodo.

4.1.2 El monopolio de bienes Durables

En la literatura de bienes durables, una empresa busca adoptar una perspectiva dinámica y sacrificar parte de los beneficios presentes para aumentar los futuros, al vender hoy, piensa en la demanda de mañana. Cuando los consumidores se interesan en comprar un bien durable, están interesados no sólo en el precio de hoy, sino también en el precio de mañana, en el del siguiente año, en el de la siguiente década, etc. Si estos piensan que el precio de un bien probablemente baje en un futuro no muy lejano, entonces esperarán y no comprarán el bien ahora. Los clientes, aun aquellos con muy altos deseos de comprar un bien estarán conscientes que el monopolista tendrá eventualmente un fuerte incentivo para vender bienes a un bajo precio. Como resultado, aun los consumidores dispuestos a pagar mucho por un bien tendrán un incentivo para esperar que el precio baje. El monopolista está en un dilema, porque en un futuro querrá cobrar un precio bajo para vender más bienes.

Veáse un ejemplo claro como lo muestra Jean Tirol[12] en su libro "Organización Industrial": Supóngase que la vida del bien excede del período básico (es decir, el espacio de tiempo entre dos revisiones de precio). Supongase que hay siete consumidores. Estos consumidores tienen disposición a pagar valoraciones o precios de reserva v = 1,2..., 7 respectivamente; v representa algún valor o beneficio al consumidor quien adquiere un bien. Cada consumidor puede obtener utilidad sólo de una unidad del bien duradero. Supongase, además, que el costo de producir el bien es nulo y que el tiempo de duración del bien es infinito.

Supóngase que para algún periodo t=1 el monopolista hace una oferta considerando que el juego sólo contempla este período. Entonces el monopolista tratará de sacar la mayor ganancia desde el primer periodo, esto es resolverá el problema siguiente:

$max\,(n+1-p)p$ donde $n=7$ es el número de consumidores y

$p=1,2,...,7$ los posibles precios a cargar por parte del monopolio

Entonces la ganancia máxima de monopolio es de 16 con un precio p_m=4, vendiendo a los consumidores con valoración de 4 a 7.

Pero el monopolista puede considerar que aún faltan los consumidores dispuestos a pagar precios 1, 2 o 3 Ahora considerese el modelo con 2 periodos. Pero ahora la ganancia será afectada por un factor de descuento, pues no es lo mismo comprar o vender en un período que otro posterior. Este factor de descuento es denotado por δ.

Al inicio del segundo período, el monopolista se encuentra con una demanda residual compuesta por consumidores con valoraciones de 1 a 3. Si este período es el último en el cual el monopolista vende, entonces también buscará maximizar sus ganancias contemplando la demanda residual, esto es

$max\,(n+1-p)p$ donde n = 3; p =1, 2, 3

Esta la obtiene con un precio óptimo de p_m=2 y una ganancia de 4.

Ahora considerese qué ocurre cuando los consumidores el periodo 1 se dan cuenta de que el monopolista tendrá, un incentivo a bajar el precio en el periodo 2. Los consumidores con valoración alta pueden que todavía acepten pagar 4 porque están deseosos de adquirir el bien. Sin embargo, el consumidor con valoración 4, por ejemplo, no compra en el período 1, porque obtendría un excedente nulo, mientras que esperando podría obtener un excedente positivo. Así pues, la expectativa de que los precios en el futuro sean menores reduce la demanda del periodo 1. Un consumidor comprará el bien si y sólo si se satisface $v - 4 \geq \delta(v - 2)$. Tales v existen cuando el factor de descuento δ está muy próximo a cero, esto es, cuando los consumidores están impacientes.

Al hacer un análisis, se debe encontrar una sucesión de precios y de expectativas de los consumidores tales que las expectativas sean racionales dado el comportamiento de la empresa, y tales que el comportamiento de la empresa sea óptimo dadas las expectativas de los consumidores. Este análisis adopta la forma de una sucesión decreciente de precios. Por tanto, el monopolista discrimina, en el tiempo, con el precio: primero carga un precio alto y vende sólo a los consumidores más deseosos de comprar el bien. Después baja el precio para conseguir clientes algo menos deseosos, y así sucesivamente. Este tipo de comportamiento es llevado a cabo a menudo en la práctica.

La flexibilidad del monopolista para ajustar su precio en el tiempo, de hecho le perjudica. El potencial cliente comprará el bien sólo si el monopolista puede convencer de que no bajará el precio en un futuro cercano. Por supuesto, esta promesa de no bajar el precio debe ser creíble. Esto se explica porque los consumidores esperan el día en que el monopolista baje el precio. Se puede demostrar que la pérdida de beneficio para el monopolista si no se compromete es muy grande cuando los ajustes en los precios son frecuentes. La mencionada conjetura debida a Coase afirma que cuando los ajustes en los precios se hacen más frecuentes, el beneficio del monopolista converge a cero. Todo intercambio tiene lugar casi instantáneamente, a precios muy próximos al costo marginal. Esta conjetura afirma que el productor de un bien infinitamente duradero pierde todo su poder de monopolio cuando la duración de los períodos entre sus ajustes de precios tiende a cero.

Un caso extremo de este problema lo representa la siguiente situación: supongase que tanto el monopolista como los consumidores viven durante infinitos periodos, y que el bien es infinitamente duradero. Los consumidores tienen demandas unitarias. En este caso, el

precio de reserva del bien para cada consumidor representa el valor presente descontado de los servicios ofrecidos por el bien desde la fecha de su compra en adelante. Supóngase que el precio de reserva de los consumidores se distribuye en $[c, +\infty)$ de acuerdo con alguna función de densidad continua, donde c es el costo unitario de producir el bien. Sea $\delta = e^{-r\Delta}$ donde r es el tipo de interés y Δ, el tiempo transcurrido entre dos ajustes en los precios. La conjetura de Coase afirma que cuando Δ tiende a cero, el beneficio intertemporal tiende a cero. En otras palabras, un monopolista que puede cambiar el precio rápidamente (como sería de esperar) pierde por completo su poder de monopolio. En equilibrio, los consumidores esperarán que el monopolista fije precios muy próximos al precio competitivo c en cualquier momento futuro y, dado que pueden esperar a la siguiente oferta sin incurrir en demasiados costos por el retraso, no pueden ser inducidos a comprar cuando los precios son altos. Por tanto, el monopolista acaba cargando precios próximos al precio competitivo, confirmando así, las expectativas de los consumidores.
La discusión de la Conjetura de Coase encuentra un terreno idóneo para su discusión dentro de la teoría de los juegos repetidos que se estudiaron en el capítulo 3

4. 2 Un primer juego para la discusión de la Conjetura de Coase

En esta sección y la 4.3 se basa en un ejemplo numérico de Bierman, Fernández [2]y en la formulación general del ejemplo y el análisis de sus equilibrios de Zapata [13].
Considerese una empresa monopolista que vende un bien durable, por ejemplo computadoras que se suponen servirán por un periodo ilimitado. La empresa debe decidir a que precio va a vender cada computadora en cada periodo, considerando el número y tipo de consumidores que hay en dicho periodo. Por su lado, los consumidores deben decidir si compran una computadora al precio de ese periodo, sabiendo que bajará en periodos posteriores o esperan a que los precios sean más bajos. Este juego se repite periodo tras periodo bajo las mismas condiciones, excepto por un factor de descuento en el pago de todos los participantes.
En general, no todos los consumidores son del mismo tipo, cada uno tiene un ingreso distinto, unos necesitan la computadora mucho más que los otros, o como dirían los economistas los consumidores tienen diferentes beneficios marginales por poseer una PC y también diversos descuentos marginales. Por beneficio marginal se entiende la importancia

de tener una PC, en la unidad de tiempo, y por descuento marginal la depreciación del bien en relación a su uso.

Cada comprador j recibe de la computadora, por cada período que la posee, una utilidad V_j, descontada a una tasa r_j entonces su utilidad total es:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{V_j}{(1+r_j)^t} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{V_j}{(1+r_j)^t} - V_j = V_j\left(\left(1-\frac{1}{1+r_j}\right)^{-1} - 1\right) = \frac{V_j}{r_j}$$

Entonces j no aceptará pagar, en ningún periodo, un precio mayor a $\frac{V_j}{r_j}$. Es decir, sus estrategias son de tal manera que no compran por encima de un precio $\frac{V_j}{r_j}$.

Si se llama C al costo de producir una PC, la ganancia que obtendrá el monopolio cuando decide vender al precio P es igual a $k(P - C)$, donde k es el número de compradores dispuestos a pagar P por la PC.

Supongase que sólo hay dos tipos de consumidores: aquellos que están dispuestos a comprar a un precio alto y aquellos que lo pueden hacer a un precio bajo, esto implica que la empresa tendrá que escoger, para cada periodo, un precio en el intervalo $[b, a]$, con

$$a = \frac{V_1}{r_1} \text{ y } b = \frac{V_2}{r_2}.$$

Se asumirá que hay $s + m$ compradores de los cuales s son del tipo 1 y m del tipo 2. Considerese primero en un juego Γ de $s + m + 1$ personas que se realiza en una sola ocasión. La máxima disposición a pagar por parte de un comprador j será de $\frac{V_j}{r_j}$. El pago para el comprador j, cuando la estrategia de M es p y el consumidor decide comprar, es $\frac{V_j}{r_j}$ menos el precio al que compró, cuando j elige no comprar, su pago es cero.

La forma extensiva de Γ (sin pagos) se muestra en la figura (a).

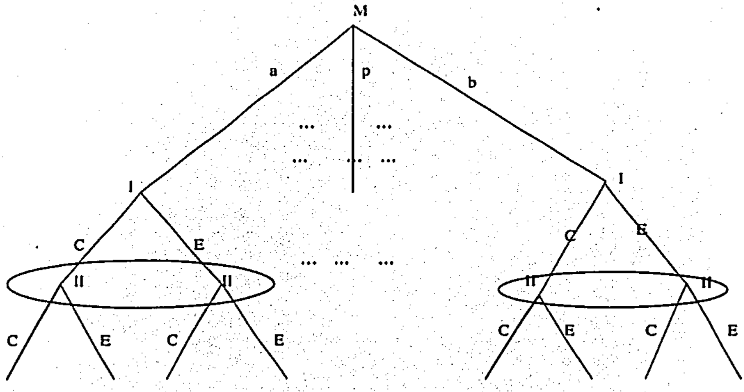


Fig. 4.2.1 Forma extensiva del juego de una sola etapa

Con la función de pago definida como:

$u_M(p, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{s+m}) = (k_1 + k_2)(p - c)$, donde k_j es el número de compradores del tipo j que si compraron al precio p_j.

Para cualquier comprador ***j***.

$$u_l(p, \sigma^1, \sigma^2, \dots, \sigma^{s+m}) = \begin{cases} (a-p); & \text{si k es del tipo 1 y } \sigma^k \ \ \textit{es} \ \ \textit{comprar} \\ 0 & \text{si k es del tipo 1 y } \sigma^k \ \ \textit{es} \ \ \textit{no comprar} \\ & \\ (b-p); & \text{si k es del tipo 2 y } \sigma^k \ \ \textit{es} \ \ \textit{comprar} \\ 0 & \text{si k es del tipo 2 y } \sigma^k \ \ \textit{es} \ \ \textit{no comprar} \end{cases}$$

Supongase que $(p' - b) > (b - c)m/s$, entonces los siguientes son equilibrios de Γ del juego de sólo un periodo:

$(p', (c_{\text{omprar sólo si } p \le p'}), (c_{\text{omprar sólo si } p \le p'})), \dots, (c_{\text{omprar sólo si } p \le p'}), (nc_{p \ne b}, c_b), (nc_{p \ne b}, c_b), \dots, (nc_{p \ne b}, c_b))$ y

$(b, (nc_{p \ne b}, c_b), (nc_{p \ne b}, c_b), \dots, (nc_{p \ne b}, c_b), (nc_{p \ne b}, c_b), (nc_{p \ne b}, c_b), \dots, (nc_{p \ne b}, c_b))$

El único de ellos que es un equilibrio de subjuego perfecto es el de p´=a. En cambio para los otros equilibrios existen subjuegos para los que la restricción no es equilibrio de dicho subjuego. Si examinos esos subjuegos, es fácil darse cuenta que la amenaza de un jugador del tipo 1, de no comprar, si el precio es mayor que p´ (a > p´ ≥ b), es no creíble. El equilibrio de subjuego perfecto es el que le conviene al monopolio.

El juego para un periodo sería muy simple, la empresa daría el precio, a su vez los compradores decidirían simultáneamente comprar o no en ese momento y el juego entonces finalizaría.

Veáse como afecta a los equilibrios la repetición del conflicto en el tiempo, pero considerese no en un juego repetido usual, sino en aquel en que los jugadores toman decisiones en el tiempo, tomando en cuenta únicamente, el número de compradores c_{1t} y c_{2t} potenciales en el tiempo t; y el precio dado por M en t en el caso de los compradores. Las funciones de pago en este nuevo juego serán afectadas por tasas de descuento, pues no es lo mismo comprar o vender en un período que otro posterior. Para el caso de la empresa su pago es

$$u_M(\sigma) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r_m)^t}(p_t - c)(c_{1t} + c_{2t})$$

El juego que se ha construido conduce a que en cada vértice del juego se tenga un número infinito de alternativas, pues M tiene un intervalo de posibilidades.

La función de pago para los compradores es

$$u_j(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \text{ no compra nunca} \\ \dfrac{1}{(1+r_j)^t}\left(\dfrac{V_j}{r_j} - p_t\right), & \text{si } j \text{ compra en } t \end{cases}$$

El perfil de estrategias σ especifica tanto los precios que escoge M en cada período, como el período t en que cada jugador j compra, o si no lo hace nunca. Los jugadores compran en t, permanecen inactivos en todos los períodos siguientes. M elige precios en el intervalo $[b, a]$ con $b = \dfrac{V_2}{r_2}$ y $a = \dfrac{V_1}{r_1}$.

Hagamos algunas reflexiones para conjeturar cómo podrían ser algunos de los equilibrios del juego. Es claro que a los compradores del tipo 2 les conviene, comprar en el periodo t si M escoge b y no comprar si no es así.

La estrategia de los compradores de tipo 1 es más complicada. Es claro que si en el tiempo t no hay compradores del tipo 2, no tiene esperanzas de que M baje posteriormente el precio y decidirán comprar al precio que sea, pues éste nunca será superior a $\frac{V_1}{r_1}$= (a), aunque seguramente no será mas bajo. En cambio, si uno de estos compradores cree que M puede bajar los precios, considerará preguntas como cuál es el precio más alto que estaría dispuesto a pagar en el tiempo t, si sabe que en el periodo siguiente M venderá al precio b?. Esta pregunta nos lleva a la desigualdad

$$a-p \geq \frac{1}{1+r_1}(a-b) \text{, por lo que } p \leq \frac{1}{1+r_1}(b-a)+a$$

Sea $p_{0l}=\frac{1}{1+r_1}(b-a)+a$. Este precio es un tope máximo que el comprador 1 está dispuesto a pagar en t, si tiene esperanza de que M venderá cada computadora al precio b en el periodo siguiente.

Supóngase que en el periodo t no se espera que en $t+1$ los precios alcancen el tope de los compradores tipo 2, aunque hay esperanza de que dentro de k periodos esto sucederá, pues en el mercado todavía existen compradores activos de este tipo. Cuál es el precio máximo de que aceptarían los consumidores del tipo 1 en t, en ese caso? La pregunta nos lleva a la desigualdad:

$$a-p \geq \frac{1}{(1+r)^K}(a-b) \text{, y sea } p_{lk}=\frac{1}{(1+r)^k}(b-a)+a$$

Es claro que $p_l \leq p_{ls+l}$ y que la sucesión converge a a.

Veáse ahora la forma de actuar de M, es claro que si en el periodo t no hay compradores de tipo 1, M venderá a b, en cambio, si no existen compradores de tipo 2, el precio que exigirá es a. El problema más complicado que tiene M es fijar el precio en t cuando hay compradores de los dos tipos. Preguntémonos primero ¿cuándo le conviene a M lograr vender en t a todos los compradores, aunque tenga que cargarles el precio más bajo posible ($b = \frac{V_2}{r_2}$), en lugar de vender en t, sólo a los de tipo 1 al precio p_{01} y esperar a $t+1$ para poner el precio en b y venderles a los de tipo 2? Esto nos conduce a la desigualdad

$$(b-C)(c_{1t}+c_{2t}) \geq (p_{01}-C)c_{1t} + \frac{1}{1+r_m}(b-C)c_{2t}$$

La desigualdad es válida si y sólo si la relación entre los compradores activos del tipo 2 y los del tipo 1 cumple

$$\frac{c_{2t}}{c_{1t}} \geq \frac{(p_{01}-b)}{(b-C)}\frac{(1+r_m)}{r_m} \qquad \text{.................................}(a)$$

Por lo que $p_{0m} = b$, (a) vale.

Si por el contrario, se tiene que $\frac{c_{2t}}{c_{1t}} < \frac{(p_{01}-b)}{(b-c)}\left(\frac{1+r_m}{r_m}\right)$, M no escogería b en t, aunque a ese precio compren todos, sino que esperará algunos períodos para bajar hasta allí y en t buscará un precio que estén dispuestos a pagar inmediatamente los de tipo 1, aún a sabiendas de que en unos cuantos periodos el precio llegará a b. Mientras, dentro de los k periodos, t y siguientes, haya un comprador de tipo 1, el precio elegido M no será b. Claro que si M logra deshacerse de los 1 antes de llegar a $t+k$, M venderá a los 2 a precio b.

$$\frac{1}{(1+r_m)^t}(p_{1t+k}-c)c_{1t} + \frac{1}{(1+r_m)^{t+k}}(b-c)c_{2t} \geq \frac{1}{(1+r_m)^t}(p_{1t+k-1}-c)c_{1t} + \frac{1}{(1+r_m)^{t+1}}(b-c)c_{2t}$$

es decir

$(p_{1k}-c)c_{1t} + \frac{1}{(1+r_m)^k}(b-c)c_{2t} \geq (p_{1k-1}-c)c_{1t} + \frac{1}{(1+r_m)}(b-c)c_{2t}$, que se cumple si y sólo si

$$\frac{c_{2t}}{c_{1t}} \geq \frac{(p_{1k}-p_{1k-1})}{(b-c)}\left(\frac{1}{(1+r_m)} - \frac{1}{(1+r_m)^k}\right)^{-1}, \qquad \text{..............}(b)$$

si k tiende a infinito, el lado derecho de la desigualdad tiene el mismo límite que

$\frac{(p_{1k}-p_{1k-1})}{(b-c)}-(1+r_m)$, que tiende a cero.

Entonces para cualquier $\frac{c_{2t}}{c_{1t}}<\frac{(p_{01}-b)}{(b-c)}\left(\frac{1+r_m}{r_m}\right)$, se pueden encontrar números k tales que se cumpla *(b)*, considerese la menor *k* tal que cumpla la desigualdad y definimos $P_M(c_{1t}, c_{2t}) = p_{1k}$

Se puede entonces conjeturar que el perfil σ* de estrategias puras descrito a continuación es un equilibrio de subjuego perfecto de este juego repetido especial.

La estrategia para *M*, $\sigma^{M}*$ se comporta asi

$$P^{Mt}=\begin{cases}\frac{V_2}{r_2} & \text{Si } c_{1t}=0, \text{ó } c_{1t}>0 \text{ y } \frac{c_{2t}}{c_{1t}}\geq\omega \\ p_{1k} & , k \text{ periodos mientras en ellos } c_{1t>0}, \text{ si } \frac{c_{2t}}{c_{1t}}<\omega \text{ y } k \text{ es la menor tal que } \frac{c_{2t}}{c_{1t}}>f_k, \\ \frac{V_1}{r_1} & \text{Si } c_{2t}=0\end{cases}$$

Donde $\omega=\frac{(p_{01}-b)}{(b-C)}\frac{(1+r_m)}{r_m}$ y $f_k=\frac{(p_{1k}-p_{1k-1})}{(b-C)}\left(\frac{1}{1+r_m}-\frac{1}{(1+r_m)^k}\right)^{-1}$

Estrategia de compradores de tipo 2

$$\sigma_t^2*=\begin{cases}\text{Comprar ahora si } pt\leq\frac{V_2}{r_2} \\ \text{Esperar en otro caso}\end{cases}$$

Estrategia de compradores de tipo 1

$$\sigma_t^1 * = \begin{cases} \textit{Comprar ahora si } c_{2t} \geq sc_{1t} \text{ y } p_{Mt} \leq p_{0t} \\ \\ \textit{Comprar ahora si } sc_{1t} > c_{2t} > 0,\ c_{2t} \geq f_k c_{1t},\ k \textit{ la menor así y } p_{Mt} \leq p_{1k} \\ \\ \textit{Comprar si } c_{2t} = 0 \text{ y } p_{Mt} \leq a \\ \\ \text{Esperar en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Proposición. ***σ^* es un equilibrio de subjuegos perfecto.***

Demostración: Supongase un subjuego que corresponde a un periodo t, tal que la relación del número de compradores del tipo 2 es mayor o igual que s veces el número de compradores del tipo 1.

Al restringir σ^* a dicho subjuego, M ofrecerá a todos los compradores el precio más bajo, $b = \dfrac{V_2}{r_2}$, y todos comprarán en t.

Es claro que la restricción de σ^* es equilibrio de Nash, pues como la empresa ofrece el precio más bajo posible, ninguno de los compradores mejoraría si decide esperar. Cambios en periodos posteriores de los compradores, no afectarían su pago, pues el juego no llegaría nunca a esas situaciones. Por otro lado, si M no ofrece al inicio el precio b, sino un precio mayor, pero menor o igual que p_{0t} vendería sólo a los de tipo 1, teniendo que esperar a periodos posteriores el venderle a los 2 y no mejoraría su pago. Si por el contrario elige un precio mayor que p_{0t}, nadie comprará y en el periodo próximo se encontrará en la misma situación, pero ya con una pérdida de tiempo, por lo tampoco mejoraría. Los cambios en los periodos siguientes no afectan el pago de M. Es decir la restricción de σ^* es equilibrio en ese subjuego.

Considerese ahora un subjuego que corresponde a un t, en donde la relación entre los compradores activos del tipo 2 y los de tipo 1 es menor que s, entonces se tiene un k, tal que M venderá a p_{1s}. Los compradores del tipo 2 no tienen más remedio que esperar en t y comprar en cuanto el precio sea b. Si los de tipo 1 deciden esperar, tendrán que hacerlo por k periodos y p_{1s} es un precio tal que no mejorarían con esa espera, aunque compren en t+k al precio b, (cambios en periodos posteriores no afectan el pago). M tampoco tiene cambios que le hagan mejorar. También venderá en el periodo 2, a cada comprador de los 2, una computadora a precio b. *Q.D.*

4.3 Conclusiones del primer juego.

En el juego considerado en la sección 4.2, si la relación entre los compradores de los dos tipos es distinta que la que allí supusimos, pueden existir equilibrios de subjuego perfecto que convienen a M y fastidian a los consumidores.

Por ejemplo, si $a+\delta mb>(m+1)b$, es decir, si $m(1-\delta)<(a-b)/b$, σ^{**} consistente en que M ofrezca cada computadora en el precio más alto posible, es decir a, mientras exista por lo menos un comprador activo de tipo 1, y bajar al precio b en cuanto éstos no existan más en el mercado. Para el comprador del tipo 1, su componente en σ^{**} será comprar en cualquier t a un precio menor o igual a a, y los 2 como siempre sólo comprarán en t al precio b y esperarán de otra manera. Si los de tipo 1 cambian, tendrán que esperar por siempre y su pago será cero. M no mejorará cambiando de estrategia, pues con este vende a los 1, en el precio más alto y lo más rápido posible, y a los 2 les puede vender, en el periodo 2. σ^{**} es un equilibrio de subjuego perfecto.

Si se debilita la condición sobre el número de compradores de tipo 2 cambiándola por $as+\delta mb>(m+s)b$, es decir $(1-\delta)m<s(a-b)/b$, entonces σ^{**} es equilibrio, pero no de subjuego perfecto, pues en los vértices para los que $c_{2t}>c_{1t}(a-b)/b(1-\delta)$, la restricción de σ^{**} no sería equilibrio. En ambos casos, con el equilibrio σ^{**}, la ganancia del monopolio es aún mayor que en el mejor de los equilibrios del juego de una sola etapa. Sin embargo se podría decir que la situación benéfica para el monopolio consiste en que hay "pocos" compradores de tipo 2 que son los que arrastran el precio hacia abajo y que lo realista es que este tipo de compradores sean muchos relativamente a los de tipo1.

Con el equilibrio encontrado en la sección 4.2, en donde la situación es que los consumidores de tipo 2 son muchos relativamente a los de tipo 1, el monopolio pierde su poder. Si además el precio b es suficientemente cercano al costo unitario C, se tendría que se cumple la conjetura de Coase. Sin embargo, se debe reconocer que el modelo que se ha estado examinando tiene varios problemas que sesgan las cosas a favor de los consumidores. El sesgo más fuerte consiste en que al ser un número finito de consumidores, cada uno de ellos tiene influencia sobre los precios. Además el monopolio puede basarse para construir su política de precios en mayor información que el número de consumidores de cada tipo que hay en el periodo, puede llevar la historia de esos números y de la de los precios, por lo menos por un número más o menos grande de periodos. Además el Monopolio puede decidir hacer largo o corto el lapso transcurrido entre los periodos de cambio de precios, si esto le conviene. Así que debería ser una variable que aparezca en el modelo.

Fudenberg, Levine, Tirole [5], Ausebel y Denéckere [1] establecieron la discusión de la conjetura de Coase dentro de un modelo que resuelve dichos problemas, aunque deja abierto otros problemas. En la sección siguiente se dará un breve panorama de los resultados de estos autores, sin profundizar en el tema.

4.4 Un juego repetido con un número infinito de consumidores para estudiar a un monopolio de bienes durables.

Situemos ahora el problema de bienes durables monopolizados a través de un modelo distinto. Este modelo sería una variación del anterior con situaciones más realistas o más comunes, el cual se abordará sin profundizar en él, se tratará de señalar los distintos caminos tanto del monopolio como de los consumidores.

Como antes, considerese un bien infinitamente durable, pero no divisible, cuando un consumidor compra una unidad del bien, sale para siempre del mercado. Las ventas de este bien, también como antes, están controladas por un monopolio M, pero en lugar de tener dos tipos de compradores, se tiene una infinidad de ellos. A diferencia del ejemplo anterior, las estrategias de M y las de los consumidores toman en cuenta, no sólo el conjunto de compradores activos en un periodo y los precios de dicho periodo, sino toda la historia anterior de precios y ventas.

El objetivo de trabajar con un conjunto infinito de consumidores consiste en lograr que cada consumidor. Por sí sólo no tenga influencia sobre el precio, sea un tomador de precios, lo que suele ser una hipótesis tanto de los mercados competitivos como en los que existen monopolio. Se supondrá que los consumidores están en correspondencia biunívoca con el intervalo $[0, 1]$ y se considerará una medida α definida en los subconjuntos de $[0, 1]$ y con valores en [0. 1], de tal manera que para todo consumidor q es decir q en [0, 1], se tiene que $\alpha(\{q\})=0$ y $\alpha([0, 1])=1$. Si S es un subconjunto de consumidores, $\alpha(S)$ la medida de S. se puede entender como el poder que S tiene sobre los precios, si S es cero no influye sobre los precios. Pedir que $\alpha(\{q\})=0$, significa que cada consumidor por sí mismo no tiene ningún poder para alterara los precios, es un tomador de precios como se necesitaba. En cambio todos los consumidores juntos tienen todo el poder sobre los precios.

Para describir, como en el primer modelo, el beneficio marginal que obtiene cada consumidor por poseer una computadora, se tiene una función $f:[0, 1]\rightarrow[0, 1]$. El intervalo [0, 1] como conjunto imagen se interpreta como el conjunto de precios posibles, es decir se consideran precios normalizados . Entonces, como en el modelo de la sección 4.2, para el consumidor q, $f(q)$ es el máximo precio que estaría dispuesto a pagar, si sólo hubiera un periodo de transacciones. Es decir, $f(q)$ es una generalización de V_q/r_q.

Se puede considerar que la correspondencia entre los consumidores y el intervalo [0, 1] es de tal manera que entre dos consumidores, el que queda colocado más cercano a cero tiene una valoración del bien mayor o igual que el otro, entonces la función f es una función decreciente.

Para simplificar la notación, sin perder generalidad, supongase que el costo marginal del monopolio es cero. Considérese que no hay margen entre el costo marginal y la valoración mínima de los consumidores o lo que es lo mismo $f(1) = 0$. También para facilitar el trabajo matemático se supone que f cumple ciertas propiedades de continuidad, en las que no se considerarán demostraciones y otros aspectos técnicos.

Las ventas se realizan en tiempo discreto, como en 4.2, pero, ahora aparecerá z, el lapso de tiempo entre dos periodos que no tiene porque ser igual en todos los modelos, sino que será un parámetro que siempre será el mismo dentro de un modelo, pero varía de modelo a modelo y se estudian los resultados obtenidos cuando z es suficientemente. Por lo que cada periodo es de la forma zn, es decir $t=0, z, 2z, \ldots$

En el periodo t, el monopolista fija el precio p_t, entonces los consumidores que todavía no han comprado, deciden si lo hacen o no, ellos son tomadores de precio. Los que compran abandonan el mercado, se convierten en compradores inactivos, es decir, de ahí en adelante su única decisión es no comprar. Después de z unidades de tiempo el proceso se repite.

Una historia de este juego, desde el punto de vista del monopolio, es la sucesión de los precios que han ocurrido en los periodos anteriores y la sucesión de los conjuntos de consumidores que han comprado a dichos precios. Las estrategias puras del monopolio asocian un precio a cada una de estas historias. Cuando un consumidor q tiene que tomar su decisión, además de los precios y los conjuntos de compradores de los periodos anteriores, ha ocurrido la elección, por parte del monopolista, del precio del periodo que está corriendo, entonces una estrategia pura, para el consumidor consiste en la decisión de comprar o no comprar en cada historia de este tipo.

Entonces para $t = nz$, cada historia H_n es de tamaño n, pues han ocurrido n periodos, por lo que M ha escogido n precios, uno por periodo, y se han generado n conjuntos de consumidores que han comprado, también uno por periodo.

Para los consumidores, las historias h'_n contienen, además del precio que el monopolio ha dado para el periodo n, las estrategias de los consumidores se describirán como si todos ellos fueran un sólo jugador .

El juego repetido para este modelo consta de:

($[0, 1]$, Ω, α) el conjunto de consumidores activos que son tomadores de precios., por lo que $\alpha\{q\}=0$, para toda q en $[0, 1]$; la función de beneficio marginal f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ decreciente y continua por la izquierda y $f(1) = 0$.

Respecto al monopolio se supone que el costo es igual a cero.

Las estrategias puras de los jugadores:

Una estrategia pura σ para el monopolio es de la forma

$$\sigma = \{\sigma^n\}_{n=0}^{\infty}, \text{ con } \sigma^n(\{p_j\}_{j=0}^{n-1}, \{Q_j\}_{j=0}^{n}) \in [0, f(0)]$$

Una estrategia pura para todos los consumidores es de la forma

$$\tau = \{\tau^n\}_{n=0}^{\infty}, \text{ con } \tau^n(\{p_j\}_{j=0}^{n-1}, p_n, \{Q_j\}_{j=0}^{n}, q) \in \{0, 1\} \text{ tal que si } q \in \textstyle\bigcup_{j=1}^{n-1} Q_j \text{ , } q \text{ elige cero.}$$

Si se fija la variable q, se tendría la estrategia de un sólo consumidor q.

Las funciones de pago de los jugadores:

Considerese que existe una tasa de descuento δ única para todos los jugadores, entonces la función de pago para M es igual a

$$\pi(\sigma,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta^{n}p_{n}\alpha(Q_{n}),\text{ donde }\{p_{n}\}\text{ y }\{Q_{n}\}\text{ están determinadas por }\sigma\text{ y }\tau$$

y para el consumidor q

$$\phi_{q}(\sigma,\tau)=\begin{cases}\delta^{n}(f(q)-p_{n}) & \text{si compra en } nz\\ 0 & \text{si no compra nunca}\end{cases}$$

Una estrategia pura σ para M es una sucesión de funciones $\{\sigma^{n}\}_{n=0}^{\infty}$. σ^{n} fija el precio en el periodo nz como función de los precios que se han dado en los periodos anteriores y de las estrategias anteriores de los consumidores que se pueden representas con los conjuntos Q_j, de los que compran en el periodo j y salen desde ese momento del mercado.

Dado que los consumidores se describen como si fueran un sólo jugador, una estrategia pura para los ellos es una sucesión de funciones $\{\tau^{n}\}_{n=0}^{\infty}$ de tal manera que en el periodo n, a cada sucesión de precios de tamaño n, conjunto de consumidores que ya han abandonado el mercado, en los n periodos anteriores, precio del periodo n y consumidor q, la estrategia τ^{n} escoge si el consumidor q compra, que se representa como 1, o no lo hace que se representa como 0.

Sea Σ el espacio e todas las estrategias puras del monopolio y Υ el conjunto de estrategias puras de los consumidores. Como el juego no tiene azar, para cada (σ,τ), perfil. de estrategias queda determinada una trayectoria infinita única de precios y ventas.

En la función de pago para el consumidor q, τ determina que él compra en el tiempo t igual a nz y σ determina que M eligió el precio p_t. En la función de pago para M, α es la medida del conjunto de consumidores dispuesto a comprar en el periodo nz. $\{p_{n}\}y\{Q_{n}\}$ se van generando de acuerdo a (σ,τ).

Un equilibrio de Nash del juego en estrategias puras es como siempre un perfil (σ^*, τ^*), tal que $\pi(\sigma^*, \tau^*) \geq \pi(\sigma, \tau^*)$ para toda $\sigma \in \Sigma$ y

Para toda q $\in [0, 1]$, $\phi_q(\sigma^*, \tau^*) \geq \phi_q(\sigma^*, \tau)$ para toda $\tau \in \Upsilon$, tal que en τ sólo hay cambios por parte de q y todos los demás consumidores actúan de acuerdo a τ^*. Un equilibrio (σ^*, τ^*) es de subjuego perfecto si para cada par de historias h_n y h'_n, las restricciones $(\sigma^* \mid h_n, \tau^* \mid h_n)$ y $(\sigma^* \mid h'_n, \tau^* \mid h'_n)$ son equilibrios de los subjuegos que empiezan en en h_n y h'_n respectivamente. Dado que los consumidores son tomadores de precios, la desviación de un conjunto de consumidores de medida cero no puede alterar la conducta del monopolio o de los otros consumidores, en particular la actitud de un sólo consumidor no afecta a los demás, por ejemplo a la conducta dictada por los equilibrios de subjuego perfecto influyen en su conducta.

La forma de los conjuntos de compradores activos a lo largo de la trayectoria determinada por un equilibrio estacionario.

***Proposición 4.4.1**: Dado (σ^*, τ^*), un equilibrio de subjuego perfecto estacionario, h_n, una historia de tamaño n y p, un precio para el periodo n, existe un consumidor q, tal que, te acuerdo a τ^*, un consumidor activo q' compra si y sólo si está en [0, q].*

Es decir, después de historias en donde los consumidores no se han desviado de la acción dictada por un equilibrio de subjuego perfecto estacionario, el conjunto de consumidores activos es de la forma *(q, 1]*, con $0 \leq q \leq 1$.

Fundenberg, Levine y Tirole se interesaron, dentro de este nuevo modelo, por un tipo de estrategias de los jugadores que se les pueden llamar estacionarias y que recuerdan a las que se trabajaron en la sección 2. Es decir estrategias en las que el monopolio sólo se preocupa del conjunto de consumidores activos que hay en un periodo, para elegir el precio del periodo en cuestión y no le interesa la historia de precios y ventas que ha conducido a dicho conjunto de compradores activos. A los consumidores, por su lado, además del conjunto de compradores activos le interesarían los precios escogidos por M en el periodo. Los conjuntos de consumidores activos pueden ser muy complicados y entonces Fundenberg, Levine y Tirole se limitan a describir estrategias estacionarias que juntas formen un equilibrio de subjuego perfecto, al que se llamará equilibrio de subjuego estacionario, que como nos explica la proposición 4.4.1 son muy sencillos, pues son de la forma *(q, 1]*.

Para describir la estrategia de los consumidores en un equilibrio de subjuego perfecto estacionario se puede construir una función decreciente de precios de reserva

$$P:[0,1] \dashrightarrow [0, f(0)].$$

De tal manera que en un periodo t dado, q aceptaría comprar al precio p_t, si

$$p_t \leq P(q).$$

Como la conducta de q es de equilibrio, se debe cumplir que

$$f(q) - P(q) \geq \delta(f(q) - p_{t+1})$$

donde p_{t+1} es el precio que cargaría M en el período siguiente, si el conjunto de consumidores activos es *(q, 1]*.

De este modo, el monopolio buscaría maximizar su ganancia en cada historia a lo largo de la trayectoria del equilibrio, tomando en cuenta los precios de reserva de los consumidores. Es decir en el actual periodo, M buscaría un precio óptimo, que correspondería al máximo que estaría dispuesto a pagar un consumidor activo y^* en (q, 1], de tal manera que M maximizaría su ganancia a través de una función recursiva R, donde

$$R(q) = \max_{y \in [q,1]} [P(y)(y - q) + \delta R(y)]$$

Proposición 4.4.2: Sean P y R funciones reales definidas en $[q^*, 1]$, $0 \leq q^* < 1$. P y R continuas por la izquierda y P decreciente y no negativa, decimos que *(P, R)* soporta un equilibrio estacionario en $[q^*, 1]$ para la función f, si para toda q en $[q^*, 1]$

$$f(q) - P(q) = \delta\,(f(q) - P(y^*) \text{ con } y^* \text{ tal que } R(q) = [P(y^*)(y^* - q) + \delta R(y^*)]$$

La condición de optimización de los consumidores consiste en que la utilidad del consumidor, si compra en el periodo actual, es igual a la del siguiente periodo, comprando al precio óptimo *P(y*) que M* cargaría en ese siguiente periodo. Es decir M escoge *P(y*)* si hay (q, 1] compradores activos y alcanzara su ganancia máxima; mientras q compra en el periodo n si $P(q) \leq P(*^{*})$.

El teorema de Fundenberg, Levine y Tirole (F, L y T) sobre estos equilibrios es el siguiente:

Teorema 4.4.3: *Para f, función de demanda inversa, δ tasa de descuento positiva y z positivo lapso entre dos periodos consecutivos, existe (P, R) que soporta un equilibrio de subjuego perfecto estacionario en [0,1] para f.*

O expresado en otra forma:

Teorema 4.4.4: *Para cada f, δ y z existe un equilibrio de subjuego perfecto estacionario*

Fundenberg, Levine y Tirol pudieron encontrar para un amplio conjunto de funciones f y para z suficientemente pequeña que los equilibrios de subjuego perfecto estacionario cumplen con la conjetura de Coase.

La familia de funciones en la que se puede establecer el resultado de Coase es la de aquellas que al restringirlas o "reescalarlas" se obtienen funciones que pertenecen a dicha familia.

Definimos $\xi_{L,M,\alpha}$ como el conjunto de funciones de demanda inversa f

Dados $L \geq 1$, $M \in (0, 1]$ *y* $\alpha > 0$, $\xi_{L,M,\alpha} = \{f \mid M(1-x)^{\alpha} \leq f(x) \leq L(1-x)^{\alpha} \ \forall x \in [0, 1]\}$

y $\xi = \{f \mid M(1-x)^{\alpha} \leq f(x) \leq L(1-x)^{\alpha} \ \forall x \in [0, 1]$, para algunas L, M, α, con $L \geq 1$, $M \in (0, 1]$, $\alpha > 0\}$

Teorema 4.4.5 (conjetura uniforme de Coase): Para toda f en ξ y $\varepsilon > 0$, $\exists\ \underline{z} > 0$ tal que en todo σ^{*} equilibrio de subjuego perfecto estacionario, correspondiente a f y a z, $0 < z < \underline{z}$, el monopolista escoge un precio inicial menor o igual que ε y su ganancia es también menor o igual que ε.

Para este tipo de funciones y z suficientemente pequeña, existen equilibrios de Nash para los que se cumple la suposición de Ronald Coase, esto es el monopolio perderá su poder. Sin embargo, como se verá en la sección siguiente se pueden usar estos "equilibrios coasianos" como una amenza de castigo que obligarían al monopolio a ser firme y cuidar su reputación, al estilo de los teoremas del folklore y construir como en estos una ruta de precios de equilibrio que favorezcan al monopolio. Es decir, M puede encontrar políticas de precios y ventas de acuerdo a su interés y sentirse obligado a seguir esas políticas por la amenaza de los consumidores de ceñirse a sus precios de reserva, si M se sale de sus políticas. Este tipo de ideas fueron desarrolladas por Ausebel y Deneckere [1] para construir sus equilibrios de reputación que se expondrán en la sección 4.6.

4.5 Equilibrios de reputación

Describamos la idea intuitiva del artículo de Ausebel y Deneckere[1]: Ya que el orden de los consumidores en [0, 1] es de tal manera que los que están dispuestos a pagar un precio más alto están más cerca de cero, una política de M, para llevar a cabo sus ventas, podría consistir en partir a la población de consumidores a través de una sucesión $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$ y proponerse vender en el primer periodo a todos los consumidores que están entre q_0 y q_1, quedando activos $(q_1, 1]$ para el segundo periodo. En este periodo tratará de venderle a los del intervalo $(q_1, q_2]$ y así sucesivamente. El instrumento para lograr esas ventas son los precios. El monopolio puede anunciar esa política y por ningún motivo salirse de ella, pues tiene la amenaza de los consumidores de aferrarse a sus precios de reserva..

Estos equilibrios que construyen Ausebel y Deneckere son del tipo que llaman un "equilibrio reputacional", es decir de los que consisten en una ruta central, en este caso la ruta de precios y ventas trazada por *M* y además de una ruta de castigo que está determinada, en este caso, por algún equilibrio coasiano. La ruta principal puede empezar con un precio arbitrario que genera las ventas más grandes de todos los periodos, en el primero, y en los demás periodos habrá ventas cada vez más pequeñas, pero positivas. En las rutas en que ha habido desviaciones importantes de los jugadores de las estrategias de la ruta principal, ya sea relativo a los precios que ha elegido *M* o que conjuntos de medida positiva de consumidores no hayan actuado optimamente, los jugadores seguirían un equilibrio coasiano predeterminado. Este tipo de perfiles de estrategias, descritos gruesamente son los equilibrios de reputación de Ausebel y Deneckere. Si el precio que escogiera *M* para el primer periodo fuera cercano al de un monopolio M´de un bien que dura un periodo, desde ese periodo M obtendría una ganancia cercana a la de M′ e iría aumentando sus ganancias, poco a poco, periodo tras periodo.

Concretando un poco como sería el equilibrio de reputación, describamos primero como es la sucesión de ventas $\varphi = \{q_n\}_{n=0}^{\infty}$. El primer término de la sucesión seria el consumidor $q_0 = 0$ y después se escoge cualquier $q_1 \in [0,1)$. Los siguientes términos de la sucesión responderán a una política de ventas tal que $(q_{n+1}, 1]$, el conjunto de compradores activos en el periodo n+1, cumple con $1 - q_{n+1} = e^{-nz}\eta(z)(1 - q_1)$, a $\eta(z)$ se le llama la tasa de descenso de ventas, supogase que es decreciente y converge a cero cuando z tiende a cero. Si se da valor a q_1 y forma se escoge la función $\eta(z)$, la sucesión φ quedaría completa.

También la sucesión de precios $\mathbf{p} = \{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ queda determinada, después de escoger q_1 y $\eta(z)$, pues en cada periodo n, la P_n correspondiente debe hacer que los consumidores en $(q_{n-1}, q_n]$ compren, en n. Para toda n, se logra que los consumidores del intervalo mencionado optimicen comprando, si se cumple:

$$f(q_{n+1}) - P_n = \delta\,(f(q_{n+1}) - P_{n+1}),\ \text{por lo que}\ P_n = (1-\delta)\sum_{k=0}^{\infty}\delta^k f(q_{n+1+k}).$$

Sin embargo los jugadores se pueden salir de estas previsiones, la primera vez que el monopolio se desvíe (o lo haga un conjunto de medida positiva de consumidores), los consumidores lo castigarán (o se animarán a seguir su ejemplo) imponiendo la estrategia τ_z del equilibrio coasiano (σ_z, τ_z) que tienen preparada. La reputación para el monopolista es importante ya que el castigo puede llegar a ser realmente severo, esto desalienta al monopolista respecto a desviarse de las políticas que ha trazado.

Ausebel y Deneckere encuentran una función $\eta(z)$, con las propiedades requeridas, de tal manera que si z es suficientemente pequeña, el perfil determinado por $q_1 \in [0, 1)$ y por un equilibrio coasiano es equilibrio de Nash. Además π_n la ganancia de M desde el periodo n, siguiendo la política de precios trazada, es mayor o igual que π_n^z, la ganancia desde el periodo n, usando las estrategias del equilibrio coasiano, por lo que los perfiles construidos por Ausebel y Deneckere son equilibrios de subjuego perfecto.

¿Cómo es la ganancia de M en un equilibrio de reputación?.

Sea $\pi^* = sup\{q\,f(q) \mid 0 \le q \le 1\}$ y q^* tal que $\pi^* = q^* f(q^*)$.

Esta ganancia es la de un monopolio de un bien que dura sólo un periodo.

Para z y δ suficientemente pequeñas y $\varepsilon > 0$ arbitraria, si $q_1 = (\pi^* - \varepsilon)/\pi^*)q^*$, se demuestra que

$$P_0 > (\pi^* - \varepsilon)/\pi^*)f(q^*) \text{ y entonces } P_0 q_1 > \pi^* - \varepsilon .$$

Es decir si M escoge como q_1 a $(\pi^* - \varepsilon)/\pi^*)q^*$ obtiene una ganancia cercana a la de un monopolio de un bien que dura un periodo.

Al mover q_1 en el intervalo [0, 1), se obtiene un intervalo de ganancias de M, con lo que Ausubel y Deneckere obtienen un teorema tipo de tradición oral para las ganancias de M.

Teorema 4.5.1 (de tradición oral): *Sea $\xi_{L,M,\alpha}$, r tasa de descuento positiva y π^* la ganancia estática de monopolio. Dada $\varepsilon > 0$, existe $z^* > 0$ y una tasa de descenso de ventas tales que para todo intervalo de tiempo z positivo, menor que z^*, algún equilibrio de reputación correspondiente a $\Im$, r y z le da una ganancia al monopolio de c en $[\varepsilon, \pi^* - \varepsilon]$.*

4.6 Conclusiones del segundo modelo.

En el contexto de juegos repetidos usuales, usando el mismo juego repetido, se ha visto que se puede demostrar la existencia de diferentes equilibrios de Nash de subjuego perfecto. Algunos de ellos, al realizarse, le darían validez a la conjetura de Coase, son los encontrados por Fudenberg, Levin y Tirole, otros en cambio, que también existen siempre, los llamados *de reputación* de Ausebel y Deneckere, al realizarse niegan la validez de dicha conjetura, pues los pagos para el monopolio de bienes durables se puede acercar tanto como se quiera a la ganancia de un monopolio de un bien que dura un sólo periodo. Entonces en el contexto del nuevo modelo ya no queda establecida la validez del pensamiento de Coase. Sin embargo, el acertijo original de Coase concerniente al precio óptimo monopolico permanece sin resolver. Si la firma introduce el bien durable a un precio monopolico estático y el precio en ventas desciende lentamente de tal manera que mantiene su credibilidad, se puede preservar el subjuego perfecto. Esto permite al proveedor ganar casi las utilidades de monopolio estático.

Por otro lado, si la oferta inicial del monopolista desciende hacia el costo marginal (y sus utilidades se aproximan a cero) cuando el intervalo de tiempo entre períodos se reduce a cero, una vez que una cantidad inicial de bienes ha sido vendida, el monopolista está siempre tentado a vender bienes adicionales y esto puede provocar que el nivel competitivo es alcanzado. Se podría llamar este tema como "Los bienes durables ya no son tan durables o, como las cosas ya no duran como antes" como lo dice la Maestra Paloma Zapata[13], pero este sería otro tema tan extenso de analizar.

4.7 Aplicación: Un Monopolio de Computadoras

Considerese que una compañia llamada M, "El gigante de la computación", ha decidido lanzar al mercado un novedoso modelo de PC. Esta empresa, aunque tiene un poderoso rival, es fuerte en el área de diseño y graficación pero aún así no ha tenido las ventas que se espera. Este monopolio (puede considerarse así ya que controla el mercado de pcs para diseño y graficación) quiere vender al mayor número de consumidores su nuevo modelo de PC y así obtener las mejores utilidades y reconocimiento en México. Existe un gran número de consumidores en adquirir el bien, pero están indecisos si comprar ahora o esperar un poco, pues tienen razones para creer que la empresa baje el precio en un futuro.

Los clientes, aún aquellos con muy altos deseos de comprar el bien están consientes de que el monopolista puede bajar el precio, pues esperán que pasando la fiebre del nuevo producto, saben que después de un primer periodo querrá vender a los consumidores con menor valoración.

Cada consumidor que existe en el mercado, difiere en la máxima cantidad que está dispuesto a pagar, pues no es lo mismo un computadora para un ejecutivo o profesionista que puede ser su herramienta de trabajo o un estudiante que tiene la opción de usar el laboratotio de su escuela.

Si se contemplan millón y medio de usuarios activos potenciales clientes de este producto aquí en el país, podemos segmentarlos en dos poblaciones: la primera está dispuesta a pagar hasta 20000 pesos y los segundos nadamás 6000. El costo de producir la PC es de 1000 pesos.

A los consumidores que pueden pagar $20,000 por cada producto, se les llamará consumidores del tipo 1 y son 500 mil. Los que pueden pagar $6000 son del tipo 2, y son un millón. El juego termina cuando ya no hay consumidores activos.

Juego estado o de una sola etapa

Estrategias

El conjunto de estrategias de M es el intervalo [6000, 20,000]; mientras que para cada consumidor una función f:[6000, 20000] --> {comprar, no comprar}.

Pagos

La función de pago para M queda

$U_M(p, \sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{s+m}) = (n_1 + n_2)(p-c)$ donde n_i es el número de jugadores que compraron en p

y para cualquier comprador

$$U_j(p, \sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{s+m}) = \begin{cases} (p_i - p) + \varepsilon; & si\ \sigma^j compra\ en\ p \\ \\ 0 & si\ \sigma^j es\ no\ comprar \end{cases}$$

Equilibrios de Nash del juego estado

La estrategia para los consumidores del tipo 2, de comprar en cuanto el precio sea 6000 y esperar para precios mayores es óptima en cada punto del juego, hagan lo que hagan los demás jugadores.

Veáse un equilibrio en el cual los consumidores toman la iniciativa y el monopolio se adapta a ellos, como si hubiera un pacto entre los consumidores, entonces el monopolio se ve obligado a vender al precio más bajo. El equilibrio σ^* sería

σ^* =(6000, (comprar, si y sólo si p = 6000),...,(comprar, si y sólo si p = 6000),
(comprar, si y sólo si p = 6000),...,(comprar, si y sólo si p = 6000)))

La empresa obtiene una utilidad de 7.5 billones de pesos, cada consumidor de tipo 1, $14{,}000 + \varepsilon$ de utilidad y ε para el consumidor de tipo 2.

Sin embargo, este equilibrio encierra una amenaza no creíble por los consumidores de tipo1, ya que están dispuestos a pagar hasta 20,000 pesos.

Otro equilibrio sería en el cual la empresa toma la iniciativa y decide vender al precio máximo de 20,000 a todos.

Para que este equilibrio sea de subjuego perfecto, los consumidores deben comprar al precio menor o igual al que están dispuestos a pagar. Este sería

σ^* =(20000, (comprar, para todo p),..., (comprar, para todo p),
(comprar, si y sólo si p=6000)..... (comprar, si y sólo si p=6000))

De los compradores activos sólo comprarían los del tipo 1, M tendría una utilidad de 9.5 billones que es mayor a la que obtiene cuando vende a todos a 6000.

Este equilibrio es de subjuego perfecto, pues no encierrar amenazas creíbles[18]. Pero uno de los objetivos de la empresa es llegar al mayor número de usuarios y con éste sólo le compran a los que pueden pagar más.

Juego repetido estacionario

Ahora considerese el juego repetido donde los mismos jugadores tomán en cuenta el tiempo de manera infinita.

Jugadores

M, 500,000 compradores de tipo 1 y 1,000,000 de compradores de tipo 2.

Sean c_{1t} y c_{2t} los compradores activos de tipo 1 y 2 respectivamente

Estrategias

Para *M* es una función tal que en cada periodo debe tomar en cuenta el número de compradores activos para dar su precio el cual estará entre $6,000 y $20,000. Esto es

$$f_M : \{(c_{1t}, c_{2t})\} --> [6000,2000]$$

Para los consumidores es una función tal que en cada periodo, además de tomar en cuenta el número de compradores activos, también considera el precio al cual da el monopolio. Esto es

$$f_{C_i} : \{(c_{1t}, c_{2t}, p_t)\} --> \{comprar\ en\ t, esperar\}$$

[18] Supongamos que tenemos σ, un perfil de estrategias, las instrucciones que se desprenden de σ pueden provocar que no se atraviese por alguna situación del juego. llamemos x una de esa situaciones, σ puede ser un quilibrio de Nash y, sin embargo, ocurrir que un jugador tiene una mala instrucción en x, pues eso no afectaría su pago. En un caso así diríamos que σ encierra una amenaza no creíble del jugador para la situación x

En este juego, sólo se consideran los compradores c_{1t} y c_{2t} activos en t; los que ya obtuvieron una unidad salen para siempre del mercado, también es importante el precio dado por M.

Los pagos en este nuevo juego serán afectados por tasas de descuento $\delta_c = 0.10$ para los consumidores y $\delta_M = 0.15$ para la empresa,

$$u_M(\sigma) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\delta)^t}(p_t - c)(c_{1t} + c_{2t}) = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1.15)^t}(p_t - 1000)(c_{1t} + c_{2t})$$

La función de pago para el comprador 1 es

$$u_1(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si no compra nunca} \\ \dfrac{1}{(1.10)^t}(20000 - p_t) + \varepsilon, & \text{si compra en } t \end{cases}$$

Para el jugador 2

$$u_2(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si no compra nunca} \\ \dfrac{1}{(1.10)^t}(6000 - p_t) + \varepsilon, & \text{si compra en } t \end{cases}$$

El perfil de estrategias σ especifica tanto los precios que escoge M en cada período, como el período t en que cada jugador j compra, o si no lo hace nunca.

M elige precios en el intervalo [6000, 20000]. Es claro que a los compradores del tipo 2 les conviene, comprar en el periodo t si M escoge 6000 y no comprar si no es así.

Para los consumidores de tipo 1, si en el tiempo t no hay compradores del tipo 2, M cargará a lo máximo 20,000 y decidirán comprar al precio que sea, pues éste nunca será superior, aunque seguramente no será mas bajo. En cambio, si uno de estos compradores cree que M puede bajar los precios, considerará el precio más alto que estaría dispuesto a pagar en el tiempo t, si sabe que en el periodo siguiente M venderá al precio 6000 Esto es,

El jugador 1 comprará en t mientras $u_1(p_{0t}, c_{1t}, c_{2t}) \geq u_1(P_{t+1}, c_{1t}, c_{2t})$ esto es

$$\frac{(20000-p_{01})}{(1.10)^t} \geq \frac{(20000-6000)}{(1.10)^{t+1}}$$

$$20000 - P_{01} \geq \frac{14000}{1.10} \rightarrow P_{01} \leq 20000 - \frac{14000}{1.10}$$

$$P_{01} \leq 7{,}272.72$$

El precio tendrá que ser menor o igual a \$7,272.72. Éste se le puede llamar como el precio de reserva en t del jugador 1.

Supóngase que en el periodo t no se espera que en $t+1$ los precios alcancen el tope de los compradores tipo 2, aunque hay esperanza de que dentro de k periodos esto sucederá, pues en el mercado todavía existen compradores activos de este tipo. El precio máximo de que aceptarían los consumidores del tipo 1 en t sería

$$a-p \geq \frac{1}{(1+\delta)}(a-b)\text{, y sea } p_{1k} = \frac{1}{(1+\delta)^k}(b-a)+a$$

Es claro que $p_1 \leq p_{1s+1}$ y que la sucesión converge a a.

Por otro lado, M tiene que fijar el precio en t cuando hay compradores de los dos tipos. A M le conviene vender en t a todos los compradores, aunque tenga que cargarles el precio más bajo posible, en lugar de vender en t, sólo a los de tipo 1 al precio p_{01} y esperar a $t+1$ para poner el precio en 6000 y venderles a los de tipo 2

La empresa dará un precio de \$6000 en t si y sólo si

$$\frac{(c_{1t}+c_{2t})(6000-1000)}{(1.15)^t} \geq c_{1t}\frac{(7272.72-1000)}{(1.15)^t} + c_{2t}\frac{(6000-1000)}{(1.15)^{t+1}}$$

$$(c_{1t}+c_{2t})(5000) \geq 6272.72c_{1t} + \frac{5000}{1.15}c_{2t}$$

$$652.17c_{2t} \geq 1272.72_{c1t}$$

$$c_{2t} \geq \frac{1272.72}{652.17}c_{1t} \geq 1.95c_{1t}$$

$$\frac{c_{2t}}{c_{1t}} \geq 1.95$$

Si por el contrario, se tiene que $\frac{c_{2t}}{c_{1t}} < 1.95$, M no cargaría 6000 en t, aunque a ese precio compren todos, sino que esperará algunos períodos para bajar hasta allí y en t buscará un precio que estén dispuestos a pagar inmediatamente los de tipo 1, aún a sabiendas de que en unos cuantos periodos el precio llegará a 6000

Equilibrio de subjuego perfecto

Es claro que la estrategia de c_{2t} es óptima en cada punto del juego y que las estrategias de M y c_{1t} dependen del número de compradores activos tanto del tipo c_{1t} y c_{2t}. Verifiquese entonces los otros dos casos. Las siguientes estrategias son equilibrio de Nash y de Subjuego perfecto

Estrategias de *M*.

$$\sigma^{M} * = \begin{cases} \$6000 & \text{si } c_{1t} = 0 \text{ ó } c_{1t} > 0 \text{ y } c_{2t} \geq 1.95 * c_{1t} \\ p(c_{1t}, c_{2t}) \ , & 1.95 * c_{1t} > c_{2t} > 0 \\ \$20000 & \text{Si } c_{2t} = 0 \end{cases}$$

Estrategias para los consumidores de tipo 1

$$\sigma^{1} * = \begin{cases} comprar & p_m \leq \$7272.72 \text{ y } c_{2t} \geq 1.95 * c_{1t} \\ \quad \text{Si} & p_m \leq p(c_{1t}, c_{2t}) \text{ y } 1.95 * c_{1t} > c_{2t} > 0 \\ & p = \$20000 \text{ y } c_{2t} = 0 \\ Esperar & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

Estrategias para los consumidores de tipo 2 activos

$$\sigma^{2} * \begin{cases} Comprar & P = \$6000 \\ Esperar & \text{En cualquier otro caso} \end{cases}$$

Demostración:

La estrategia de equilibrio de M es cobrar un precio que dependa del número relativo de c_{1t} y c_{2t} activos. El precio nunca estará por abajo de \$6000 y por encima de \$20,000, y es una una función creciente del número relativo de c_{1t}.

La estrategia de los c_{2t} es esperar hasta que el precio baje a su máxima disposición a pagar que es \$6000 y entonces comprar inmediatamente.

La estategia de los c_{1t} es la más compleja. Su precio de reserva más bajo es \$7,272.72 y el más alto es \$20000. Ellos adoptarán su más bajo precio de reserva siempre que los c_{2t} sean más de 1.95 compradores activos y ellos adopten su más alto precio de reserva cuando no haya c_{2t} entre los compradores activos restantes. Cuando la proporción de c_{2t}, entre los compradores activos es positivo, pero menor a 1.95, el precio de reserva y la probabilidad de compra a este precio depende de la proporción de c_{1t} y c_{2t} entre los compradores activos.

Veamos el equilibrio para los consumidores de tipo 1:

Si $6000 \leq p_{0m} \leq 7272.72$ y c_{1t} espera, entonces para el período $t+1$ $c_{2t+1} \geq 1.95 * c_{1t+1}$ y $p_{1m} = 6000$ en el período $t+1$ entonces

$$u_1(c_{1t+1}) = (20000 - 6000)/1.10^{t+1} \leq (20000 - 7272.72.63)/1.10^{t}$$

Veámos el caso para M. Si la empresa da un precio de \$6000 inicialmente obtiende 7.5 billones de pesos

Si $P \in [6000, 7272.72]$ sólo c_{1t} comprará, entonces M obtendrá 3,636,360,000.00

$$u_E(P^t(c_{1t}, c_{2t})) = (c_{1t}(7272.72 - 1000))/(1.15)$$

Si M da un precio $P \geq 7272.72$, entonces los compradores siguiendo su estrategia de equilibrio no comprarán y $u_E(p(c_{1t}, c_{2t})) = 0$ en ese período y $c_{1t} = c_{1t+1}$, $c_{2t} = c_{2t+1}$, como resultado M tendrá que que dar un precio de 6000 en el período $t+1$ lo cual reduciría sus ganancias.

Conclusiones

Es claro que este ejemplo se adecua a una situación donde los consumidores toman la iniciativa y donde su poder de compra hace que se comporten como si se hubieran puesto de acuerdo. Como los consumidores de pocos recursos son mucho más que los que tienen mayor poder de compra, influyen en la decisión del monopolio. Se podría decir que estos consumidores tienen la palabra y obligarían a M a dar su computadora casi a su costo marginal. En tal caso se está cumpliendo la conjetura de Coase y habría muchos estudiantes felices con su nueva PC.

Pero como se ha dicho anteriormente, el monopolio tiene poder de decisión. Este ejemplo se ha planteado como una situación propicia en México. Dado que los bienes durables ahora son menos durables (y mucho menos las computadoras), se puede pensar que M querrá vender su producto al mayor número de personas y que en poco tiempo sacará al mercado una nueva computadora con mejoras y querrá vender además de nuevos consumidores, aquellos que ya compraron anteriormente, el ciclo se repite. Ahí es cuando se podría decir que el tiempo entre dos revisiones de precio será corto, pues con la intención de vender su producto a todos tentará a M vender rapidamente. Se podría decir que se cumple la Conjetura de Coase.

Conclusiones Generales.

La conclusión de este trabajo muestra que es difícil derrotar al monopolio, aun en la teoría, y que por algo son tan comunes en cualquier mercado. La teoría de juegos pemite un adecuado análisis, ya que a diferencia de modelos determinísticos, el enfoque teórico – probabilístico es una alternativa que compromete a los entes en el conflicto considerar más allá de sus propias decisiones, las de sus rivales.

Se ha concluido que además del análisis de los dos modelos planteados en el objetivo de este trabajo, se dejó ver que existen un sin número de posibilidades del monopolio y de los consumidores y depende muchas veces de las condiciones de mercado y población, como se vió en el ejemplo numérico aqui en México.

Sobre el objetivo inicial sólo se puede decir que no hay una respuesta contundente al problema. Cuando cada consumidor tiene al menos una pequeña influencia en los precios, aunque estos no sean parte de sus decisiones (como se modeló en el ejemplo), y no tienen una necesidad vital del producto y, además estos consumidores son relativamente más que los que tienen una valoración mayor por el bien, resulta válida la conjetura a discusión.

El segundo modelo estudiado, representa a consumidores tomadores de precios, sin ninguna influencia individual sobre éstos, ese es el contexto en que Coase plantea su conjetura. Como es natural, el lapso entre periodos tiene mucha influencia en el resultado que se obtiene, es claro que si ese lapso es muy largo, el monopolio de bienes durables se encontraría en una situación muy parecida a la del monopolio de bienes que duran un sólo periodo, la conjetura de Coase no tendría sentido y se obtendrían los precios y la ganancia usuales en un mercado con monopolio. Para que tenga sentido la tan citada conjetura y se pueda hablar de su validez, es necesario que el lapso de tiempo entre períodos sucesivos debe ser muy pequeño, es decir, los precios deben bajar a corto plazo. Pero para z suficientemente pequeñas, dentro del segundo modelo, se demuestra que existen equilibrios estacionarios que de darse apoyarían la conjetura de Coase y también equilibrios de reputación que la contradirían. Para completar la discusión dentro del segundo modelo, se tendría que aplicar alguno de los criterios de selección de equilibrios, construidos dentro de la teoría, cosa que requeriría un trabajo tan largo como éste, hay que basarse en la intuición y el sentido común para prever cuál equilibrio se puede esperar que se realice.

Desde este punto de vista, los equilibrios estacionarios de Fundenberg-Levin-Tirol [5] implican que el monopolio se adapta a los consumidores, toma como dados los precios de reserva de éstos y optimiza respecto a dichos precios, mientras que los equilibrios de reputación de Ausubel-Deneckere[1] implican que el monopolio tome la iniciativa sobre las ventas y escoja precios para que estas ventas se hagan realidad, es decir obliga a los consumidores a que sean ellos los que se adapten a sus deseos. Estos nos parecen argumentos en contra de la validez de la conjetura de Coase.

Esta discusión intuitiva se ve más realista que la del primero modelo. Sin embargo, si de lo que se trata es de examinar lo que dice la realidad, es muy evidente en ella que cada vez los bienes son fabricados con una duración menor, no cabe duda que el desarrollo tecnológico podría lograr hacer mucho más durables los llamados durables que tienden a convertirse en desechables, trátese de artículos electrodomésticos, automóviles, computadoras, etc. Lo que nos habla de que es más redituable para las empresas, especialmente para los monopolios el dedicarse a los bienes perecederos y no a los durables, o lo que es lo mismo volver perecederos los durables. Sería otra lectura de la conjetura de Coase, otra forma de cumplir su validez.

Realmente en el mercado de bienes durables, por ejemplo el de computadoras, las empresas no dan por perdidos a los consumidores que ya han comprado una unidad del bien, sino que tratan de volver a atraerlos introduciendo cambios que provoquen deseos por desechar el bien adquirido y obtener el mejorado. Las empresas pueden, mientras, seguir vendiendo a los consumidores menos interesados o con menos recursos el bien sin mejoras, hasta que a todo el mundo le parezca obsoleto y no exista ninguna demanda sobre él.

BIBLIOGRAFÍA

1. Ausubel Lawrence M. and Deneckere Raymond J. "Reputation in bargaining and durable goods monopoly" Económétrica U.S.A (1989) (57), 511-531.

2. Bierman, Scott H. and Fernandez, Luis, "Game Theory with Economic Applications" Addison-Wesley. U.S.A (1993)

3. Bimmore, Ken (1994) Trad Antoni, M. Tomás, "Teoría de Juegos" McGrawHill, Madrid España (1994).

4. Fundenberg, Drew and Tirole, J. (1991) "Game Theory" Cambridge MIT Press U.S.A (1991)

5. Fundenberg, D. and Levin, D. and Tirole, J. "Infinite Horizont Models of Bargaining with One – Side Incomplete Information", en A. Roth Game Theoretic Models of Bargaining. Cambridge University Press. U.S.A (1985)

6. Fundenberg, Drew and Maskin, Eric "The folk theorem in repeated games with descounting or with incomplete information" Económétrica U.S.A (1986) (54), 533-554.

7. Gibbons, Robert, "Game Theory for applied Economist" Princenton University Press, New Jersey. U.S.A (1992)

8. Kreps, David M, Trad. Suárez, Eduardo L. "Teoría de juegos y modelación económica" Fondo de Cultura Económica, México. D.F (1994)

9. Myerson, B. Roger, "Game Theory Analysis of Conflict"
Harvard University Press Cambridge, Massachusetts, London England (1991)

10. Osborne, Martin and Rubinstein, Ariel "A course in Game Theory"
Cambridge, MIT Press. U.S.A (1993)

11. Owen, Guillermo, "Game Theory"
Academic Press U.S.A (1982)

12. Tirole, Jean, "The Theory of Industrial Organization".
Cambridge, MIT Press. U.S.A(1988)

13. Zapata, Paloma, "La conjetura de Coase sobre Monopolios en Bienes Durables". Aportaciones Matemáticas (2001) (25), Sociedad Matemática Mexicana. México D.F. (2001)

14. Zapata, Paloma, "Los juegos no cooperativos"
Notas de clase. México D.F (2000)