

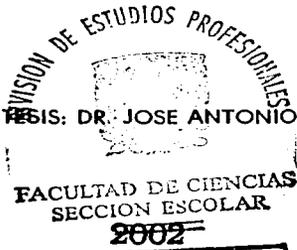
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GAVILLAS ANALITICAS COHERENTES Y HACES VECTORIALES HOLOMORFOS EN ESPACIOS PROYECTIVOS.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A ,
GUALBERTO PADILLA VALLE

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ANTONIO SEADE KURI



TESIS CON FALLA DE ORIGEN





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ACADEMIA NACIONAL
DE MATEMÁTICA
VENEZUELA

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Gavillas analíticas
coherentes y haces vectoriales holomorfos en espacios proyectivos."

realizado por Gualberto Padilla Valle

con número de cuenta 9120800-6 , quién cubrió los créditos de la carrera de
Matemático

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	Dr. José Antonio Seade Kuri
Propietario	
Propietario	Dr. Marcelo Aguilar González
Propietario	Dra. Laura Hidalgo Solís
Suplente	Dr. Herbert Kanarek Blando
Suplente	M. en C. Emigdio Martínez Ojeda

[Handwritten signatures: José Antonio Seade Kuri, Marcelo Aguilar González, Laura Hidalgo Solís, Herbert Kanarek Blando, Emigdio Martínez Ojeda]

Consejo Departamental de Matemáticas



FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL

Índice General

1	Introducción	3
2	Variedades analíticas	5
2.1	Funciones de varias variables complejas	5
2.2	Variedades analíticas	17
3	Gavillas analíticas coherentes	22
3.1	Haces vectoriales holomorfos	22
3.2	Gavillas	30
3.3	Cohomología de gavillas	39
3.3.1	Cohomología de Čech	50
3.4	Gavillas analíticas coherentes	61
4	Gavillas coherentes en espacios proyectivos	73
4.1	El haz de hiperplanos	73
4.2	Teoremas A y B de Serre	79
4.3	Teorema de Grothendieck	86
5	Apéndice	91
5.0.1	Resultados de homología y cohomología singular	91
5.0.2	Cohomología de gavillas y cohomología singular	92

Capítulo 1

Introducción

El objetivo de este trabajo consiste en describir ciertas clases de gavillas analíticas, las gavillas coherentes, en los espacios proyectivos complejos y su relación con haces vectoriales holomorfos; explicar algunos ejemplos de grupos de cohomología asociados a dichos haces, así como presentar los teoremas A y B de Serre y de Grothendieck, este último que da una caracterización de los haces vectoriales holomorfos sobre la recta proyectiva compleja, también conocida como la esfera de Riemann.

Los haces vectoriales son objetos de estudio importantes, tanto por el papel que desempeñan en áreas como la Geometría Algebraica compleja, así como por las aplicaciones que tienen en otras ramas como la Física Teórica. Por ello, un problema importante es el de encontrar criterios que permitan dar una caracterización de haces vectoriales sobre variedades. El problema como tal resulta muy difícil de tratar en toda su generalidad. Así, un campo de estudio de interés es el de la clasificación de haces vectoriales holomorfos sobre una clase especial de variedades complejas, los espacios proyectivos $\mathbb{C}P^n$.

El dar criterios generales de clasificación de haces sobre espacios proyectivos de dimensión arbitraria es, hasta donde sabemos, un problema abierto. Por esto consideramos interesante abordar la cuestión el caso más simple del espacio $\mathbb{C}P^1$ y en donde el mencionado teorema de Grothendieck da una respuesta positiva al problema en cuestión.

El interés de realizar este trabajo es doble por cuanto al abordar el estudio de haces

vectoriales holomorfos sobre espacios proyectivos este estudio se aborda desde la perspectiva de la teoría de cohomología de gavillas analíticas coherentes, con lo que se persigue, de nuestra parte, una modesta ilustración de la importancia de los métodos homológicos en la geometría compleja contemporánea.

Capítulo 2

Variedades analíticas

En este capítulo presentamos los elementos básicos de la teoría de varias variables complejas que nos permitan llegar a tratar con las variedades *analíticas*.

2.1 Funciones de varias variables complejas

Como de costumbre denotaremos por \mathbb{R} al campo de los números reales y por \mathbb{C} el campo de los números complejos. El objetivo de esta sección es el estudio de las funciones de varias variables complejas en el espacio $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}$, el producto cartesiano de n copias de \mathbb{C} . Un punto $z \in \mathbb{C}^n$ está dado por una n -ada de números complejos (z_1, \dots, z_n) , con $z_j = x_j + iy_j$, y donde x_j y y_j son números reales. La norma de un número complejo w se denota por $|w|$, y para $z \in \mathbb{C}^n$, se define la norma

$$|z| = \max\{|z_j| \mid n \geq j \geq 1\}.$$

La norma así definida induce una topología en \mathbb{C}^n que es equivalente a la topología usual de \mathbb{R}^{2n} , via la identificación $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \mapsto (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$.

Un *polidisco abierto* (o *policilindro abierto*) es un subconjunto $\Delta(w; r)$ de \mathbb{C}^n de la

forma

$$\begin{aligned}\Delta(w; r) &= \Delta(w_1, \dots, w_n; r_1, \dots, r_n) \\ &= \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_j - w_j| < r_j, n \geq j \geq 1\}.\end{aligned}$$

El punto $w \in \mathbb{C}^n$ se llama *centro* del polidisco, y

$$r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n, r_j > 0,$$

se llama *poliradio*. La cerradura $\overline{\Delta(w; r)}$ de $\Delta(w; r)$ se llama *polidisco cerrado* con centro en w y poliradio r y usualmente se denota por $\overline{\Delta(w; r)}$. De manera más general, si $D_j \subset \mathbb{C}$ son dominios de \mathbb{C} , es decir, conjuntos abiertos y conexos del plano complejo, el producto $D = D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{C}^n$ se llamará *polidominio abierto*.

Definición 2.1.1 *Se dice que una función f de valores complejos definida en un subconjunto $D \subset \mathbb{C}^n$ es analítica en D si cada punto $w \in D$ tiene una vecindad abierta U tal que f tiene una expansión en serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{v_1, \dots, v_n=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_n} (z_1 - w_1)^{v_1} \dots (z_n - w_n)^{v_n} \quad (2.1)$$

que converge absolutamente para todo z en un disco suficientemente pequeño D_z contenido en U .

Ejemplo 2.1.2 *Los polinomios con coeficientes complejos en las variables z_1, \dots, z_n son funciones analíticas en todo \mathbb{C}^n .*

Decimos que una función $f : U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es *holomorfa* si $f(z_1, \dots, z_n)$ es holomorfa como una función de las variables z_j separadamente. Toda función analítica es holomorfa, pues dejando libre una de las variables y fijando las restantes, se tiene una serie de potencias uniformemente convergente en una variable compleja, que es una función holomorfa. El siguiente resultado es un recíproco de esta observación.

Teorema 2.1.3 Sea f una función \mathbb{C} -valuada continua un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{C}^n$ y es holomorfa en cada variable z_i separada, entonces f es analítica en D .

Demostración: Sea $w \in D$ y $\overline{\Delta}(w; r)$ un polidisco cerrado contenido en D . Como f es holomorfa como una función de la variable z_j , para $j = 1, \dots, n$, en una vecindad abierta de $\overline{\Delta}(w; r)$, se puede iterar la fórmula integral de Cauchy para cada variable z_j . Explicamos esto para el caso $j = 2$, pues el caso general es análogo, pero la notación es más complicada (ver [G2, teorema 2]). Supongamos que f es holomorfa como función de las variables z_1, z_2 . Para $w = (w_1, w_2) \in D \subset \mathbb{C}^2$ existe un disco abierto $\Delta(w; r) \subset D$ que contiene a w con $\overline{\Delta}(w; r) \subset D$ tal que para $(z_1, z_2) \in \Delta(w; r)$

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - w_2| = r_2} \frac{f(z_1, \zeta_2) d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_2 - w_2| = r_2} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta_1 - w_1| = r_1} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1}{\zeta_1 - z_1} \right) \frac{d\zeta_2}{\zeta_2 - z_2}, \end{aligned}$$

y como para un z fijo el integrando es continuo en un dominio compacto de integración, por el teorema de Fubini la integral iterada se puede poner como una integral múltiple

$$f(z_1, z_2) = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{|\zeta - w| = r} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} \quad (2.2)$$

Dado que $\frac{1}{\zeta_i - z_i} = \sum_{v_i=0}^{\infty} \frac{(z_i - w_i)^{v_i}}{(\zeta_i - w_i)^{v_i+1}}$,

$$\frac{1}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} = \sum_{v_1, v_2=0}^{\infty} \frac{(z_1 - w_1)^{v_1} (z_2 - w_2)^{v_2}}{(\zeta_1 - w_1)^{v_1+1} (\zeta_2 - w_2)^{v_2+1}},$$

encontramos que

$$f(z_1, z_2) = \sum_{v_1, v_2=0}^{\infty} a_{v_1 v_2} (z_1 - w_1)^{v_1} (z_2 - w_2)^{v_2},$$

donde

$$a_{v_1 v_2} = \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{|\zeta - w| = r} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2}{(\zeta_1 - z_1)^{v_1+1} (\zeta_2 - z_2)^{v_2+1}}.$$

■

Así que toda función analítica es holomorfa y viceversa. De ahora en adelante nos referiremos a las funciones como analíticas u holomorfas indistintamente.

Toda función analítica f en una vecindad abierta de un polidisco cerrado $\overline{\Delta}(w, r)$ tiene una *representación integral de Cauchy* de la forma 2.2; esta fórmula es una generalización natural de la fórmula integral de Cauchy para funciones holomorfas de una variable compleja. Diferenciando bajo el signo de la integral en 2.2, lo cual es válido para una variable compleja, se tienen las derivadas iteradas en las variables z_j

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f(z)}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}} = \frac{(k_1)! \dots (k_n)!}{(2\pi i)^n} \int_{|\zeta-w|=r} \frac{f(\zeta) d\zeta_1 \dots d\zeta_n}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1+1} \dots (\zeta_n - z_n)^{k_n+1}},$$

donde $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. De esta igualdad se deduce que los coeficientes en el desarrollo de serie de potencias de f están dados por

$$a_{v_1 \dots v_n} = \frac{1}{(v_1! \dots (v_n)!)} \frac{\partial^{v_1+\dots+v_n} f}{\partial z_1^{v_1} \dots \partial z_n^{v_n}}(w).$$

Una consecuencia de estos resultados es que la expansión en serie de potencias de una función analítica en w está determinada de manera unívoca por la función y converge dentro del polidisco $\Delta(w; r)$ contenido en la región de analiticidad de la función.

También existe una extensión de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el plano complejo al caso de varias variables. Para esto introducimos los operadores

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \text{ y } \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right).$$

Es conveniente hacer notar que las expresiones del lado izquierdo están definidas por esas ecuaciones y no tienen un significado independiente. Sin embargo, notemos que

$$\frac{\partial}{\partial z_j} z_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right) (x_j + iy_j) = 1,$$

y por tanto

$$\frac{\partial}{\partial z_j} z_j^n = n z_j^{n-1}.$$

De esto se sigue que cuando el operador $\frac{\partial}{\partial z_j}$ se aplica a funciones holomorfas coincide con la derivada compleja usual para funciones holomorfas.

El siguiente resultado se conoce como *criterio de Cauchy-Riemann*.

Teorema 2.1.4 Una función $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$, con $D \subset \mathbb{C}^n$ un subconjunto abierto, que es continuamente diferenciable como una función de $2n$ variables reales es holomorfa si y sólo si satisface el sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2.3)$$

Demostración: En cada punto de D , consideramos a $f(z)$ como una función de la variable z_j , dejando las otras variables fijas. Descomponiendo a f en sus partes real e imaginaria escribimos $f(z) = u(z) + iv(z)$. Entonces

$$2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) + i \left(\frac{\partial u}{\partial y_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j} \right),$$

y el sistema 2.3 es equivalente a las ecuaciones de Cauchy-Riemann clásicas para cada variable individualmente. Como vimos arriba, esto es equivalente a que la función f sea holomorfa en cada variable individual. Aplicando el teorema anterior se tiene la demostración.

Denotamos por $\mathcal{O}(D)$ al conjunto de funciones analíticas definidas en D .

Como un consecuencia del criterio de las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos la

■

Proposición 2.1.5 Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{C}^n . Entonces:

- i) $\mathcal{O}(D)$ es un anillo bajo las operaciones $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$, $(fg)(z) = f(z)g(z)$.
- ii) Si f está en $\mathcal{O}(D)$ y no se anula en ningún punto, entonces $1/f \in \mathcal{O}(D)$.

Demostración: i) Por un cálculo directo

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(f+g) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j}, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(fg) &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}g + f\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_j};\end{aligned}\tag{2.4}$$

entonces el resultado se cumple por el teorema anterior.

ii) Aplicando 2.4 en el caso $g = f^{-1}$ encontramos que

$$f\frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{z}_j} = 0,$$

lo que implica que $\frac{\partial f^{-1}}{\partial \bar{z}_j} = 0$ y f^{-1} es holomorfa. ■

Una de las propiedades de las funciones holomorfas de una variable compleja es que la composición de dos funciones holomorfas es una función holomorfa; el criterio de Cauchy-Riemann permite extender esta propiedad a las funciones de varias variables complejas. Sean $D \subset \mathbb{C}^n$ y $D' \subset \mathbb{C}^m$ dos dominios; las variables en D se denotarán por $z = (z_1, \dots, z_n)$ y las variables en D' se denotarán por $w = (w_1, \dots, w_m)$. Toda función $F : D \rightarrow D'$ se puede describir por las m funciones

$$w_1 = f_1(z_1, \dots, z_n), \dots, w_m = f_m(z_1, \dots, z_n).\tag{2.5}$$

Se dice que la función F es *holomorfa* si las m funciones f_1, \dots, f_m son funciones holomorfas en D . Si $f(w_1, \dots, w_m) = f(w)$ es cualquier función definida en D' , la composición $f(F(z))$ es una función bien definida en D .

Teorema 2.1.6 Si $f(w)$ es una función holomorfa en D' y si $F : D \rightarrow D'$ es una función holomorfa, entonces la composición $f(F(z))$ es una función holomorfa en D .

Demostración: Se descomponen las funciones 2.5 en sus partes real e imaginaria $f_j(z) = u_j(z) + iv_j(z)$. Dado que todas las funciones involucradas son diferenciables reales,

la regla de la cadena se aplica como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(F(z))}{\partial \bar{z}_j} &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial \bar{z}_j} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} - i \frac{\partial f}{\partial v_k} \right) \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_k} + i \frac{\partial f}{\partial v_k} \right) \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{z}_j} \\ &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial w_k} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} + \frac{\partial f}{\partial \bar{w}_k} \frac{\partial \bar{f}_k}{\partial \bar{z}_j} \right). \end{aligned}$$

Esta última fórmula es la versión compleja de la regla de la cadena. Si f y F son ambas holomorfas, entonces $\partial f / \partial \bar{w}_k = 0$ y $\partial f_k / \partial \bar{z}_j = 0$ para toda k . Entonces, por la fórmula de arriba $\partial f(F(z)) / \partial \bar{z}_j = 0$ para toda j . Por el criterio de Cauchy-Riemann se tiene el resultado. ■

Teorema 2.1.7 (Teorema de Identidad) Si f y g son dos funciones holomorfas definidas en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$, y si $f(z) = g(z)$ para todos los puntos z en un subconjunto abierto no vacío $U \subset D$, entonces $f = g$ en todo D .

Demostración: Sea E el interior del conjunto que consiste de todos los puntos z para los cuales $f(z) = g(z)$. E es un subconjunto abierto de D y es no vacío puesto que $U \subset E$. Basta con demostrar que E es relativamente cerrado en D (es decir, que la cerradura \bar{E} de E es un subconjunto cerrado en D), pues por la conexidad de D esto implicará que $E = D$. Para ver esto, sea $w \in D \cap \bar{E}$ y r un número suficientemente pequeño tal que el polidisco $\Delta(w; r, \dots, r) \subset D$. Como $w \in \bar{E}$, existe un punto $w' \in E$ tal que $|w'_j - w_j| < r/2$, $j = 1, \dots, n$. La función $f - g$ es holomorfa en $\Delta(w'; r/2, \dots, r/2)$, por lo que tiene una expansión en serie de potencias centrada en w' y convergente en este polidisco. Ahora, como $w' \in E$, $f - g$ se anula idénticamente en una vecindad abierta de w' , y dado que

$$a_{v_1 \dots v_n} = \frac{1}{(v_1! \dots (v_n!)) \partial z_1^{v_1} \dots \partial z_n^{v_n}} (w),$$

todos los coeficientes en la dicha serie de potencias son 0; pero entonces $f - g \equiv 0$ en todo $\Delta(w'; r/2, \dots, r/2)$, con lo que $w \in E$ y E es relativamente cerrado en D . ■

Como hemos visto hasta ahora, varios de los resultados básicos de una variable compleja se extienden al caso de varias variables. El Teorema del Módulo Máximo no es una excepción.

Teorema 2.1.8 Si f es una función holomorfa en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$, y existe un punto $w \in D$ tal que $|f(w)| \geq |f(z)|$ para todos los puntos z en una vecindad abierta de w , entonces $f(z) = f(w)$ para todo $z \in D$.

Para una demostración de este teorema ver [G2, pag. 7]. Sin embargo, una diferencia importante con el caso de una variable lo da este importante resultado, que puede verse con más detalle en el libro citado.

Teorema 2.1.9 (Hartog) Toda función holomorfa f definida en una vecindad de $U - V$, donde $V \subset U$ son subconjuntos abiertos que contienen al $0 \in \mathbb{C}^n$, se puede extender a una función holomorfa F definida en todo U .

Demostración: Damos la demostración para el caso $n = 2$, pues el caso general se demuestra de manera similar.

Sin perder generalidad podemos suponer que el abierto U es el polidisco $\Delta(0; r) = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|, |z_2| < r\}$, mientras que V es un polidisco más pequeño $\Delta(0, r')$, $r' < r$, contenido en U .

Para cada hoja $\{z_1 = \text{constante}\}$, la región $U - V$ tiene la forma de un anillo $\{z_2 \mid r' < |z_2| < r\}$ o de un disco $\{|z_2| < r\}$. Procedemos a estender f en cada hoja por medio de la fórmula de Cauchy. Para ello definimos

$$F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_2|=r} \frac{f(z_1, w_2)dw_2}{w_2 - z_2}.$$

Notemos que F está definida en todo U ; es claramente holomorfa en z_2 , y dado que

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_2|=r} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}(z_1, w_2) \frac{dw_2}{w_2 - z_2} = 0,$$

también es holomorfa respecto a z_1 . Además, en la región $\{z_1 \mid |z_1| > r'\}$ de $U - V$, $F(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w_2|=r'} \frac{f(z_1, w_2) dw_2}{w_2 - z_2} = f(z_1, z_2)$, por la fórmula integral de Cauchy. Entonces $F|_{U-V} = f$ y F es la extensión buscada. ■

Teoremas de Weierstrass

Una función holomorfa f de una variable tiene una representación en serie de potencias alrededor de un punto z_0 y por tanto una única representación local de la forma

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

donde g es una función holomorfa definida en una vecindad pequeña de z_0 . De esta última ecuación se desprende que el conjunto de los ceros de f (es decir, los puntos en los que $f = 0$) es discreto, porque por continuidad de g , en toda una vecindad de z_0 , $g \neq 0$. De manera similar, los teoremas de Weierstrass que probamos en esta sección dan una representación local de funciones holomorfas de varias variables complejas.

Supongamos que $f(z_1, \dots, z_{n-1}, w)$ es una función holomorfa en una vecindad del origen en \mathbb{C}^n y que $f(0, \dots, 0) = 0$. Supongamos también que f no se anula idénticamente en el eje w ; es decir, la expansión en serie de potencias de f alrededor de 0 contiene un término de la forma aw^d con $a \neq 0$ y $d \geq 1$. Denotemos por z a (z_1, \dots, z_{n-1}) . Para r, δ y $\varepsilon > 0$ adecuados, si $|w| = r$, $|f(0, w)| \geq \delta > 0$ y por tanto $|f(z, w)| \geq \delta/2$ si $|w| = r$, $|z| < \varepsilon$. Ahora, si b_1, \dots, b_d son los ceros de $f(z, w)$ dentro del disco $|w| < r$. El conjunto de los $b_i(z)$ es en efecto finito porque como se notó arriba, es discreto y está contenido en disco cerrado de radio r , que es compacto. Entonces, por el Teorema del Residuo [A], pág. 150]

$$b_1^d(z) + \dots + b_d^d(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) \frac{w^d dw}{f(z, w)},$$

y la suma $\sum_{i=1}^d b_i(z)^d$ es una función analítica en z dentro del polidisco $|z| < \varepsilon$. Sean $\sigma_1(z), \dots, \sigma_d(z)$ los polinomios simétricos elementales en b_1, \dots, b_d (ver [J, pág. 138]). Los

$\sigma_1, \dots, \sigma_d$ se pueden expresar como polinomios en $\sum_{i=1}^d b_i(z)^n$. Entonces la función

$$g(z, w) = w^d - \sigma_1(z)w^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_d(z)$$

es holomorfa en el conjunto $\{(z, w) \mid |z| < \varepsilon, |w| < r\}$ y por construcción tiene exactamente los mismos ceros que f . La función cociente

$$h(z, w) = \frac{f(z, w)}{g(z, w)}$$

está definida y es analítica en la región $\{(z, w) \mid |z| < \varepsilon, |w| < r\} - \{\text{ceros de } f \text{ y } g\}$. Aun más, para un z fijo, $h(z, w)$ sólo tiene singularidades removibles dentro del disco $|w| < r$, y por el Teorema de Singularidades Removibles de Riemann, h se puede extender a todo $\{(z, w) \mid |z| < \varepsilon, |w| < r\}$, y h es holomorfa en w para cada z fija, así como en el complemento de los ceros. Expresando h en su forma integral

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} \frac{h(z, \zeta) d\zeta}{\zeta - w}$$

se ve que h también es holomorfa en z .

Definición 2.1.10 Un polinomio de Weierstrass en w es un polinomio de la forma

$$w^d + a_1(z)w^{d-1} + \dots + a_d(z), \quad a_1(0) = \dots = a_d(0) = 0.$$

De lo hecho arriba se desprende el siguiente resultado, conocido como el *Teorema de Preparación de Weierstrass*

Teorema 2.1.11 Si f es una función holomorfa alrededor del origen de \mathbb{C}^n y no se anula idénticamente en el eje w , entonces en una vecindad del origen f puede escribirse de manera única como

$$f = gh,$$

donde g es un polinomio de Weierstrass de grado d en w y $h(0) \neq 0$.

La unicidad es clara dado que los coeficientes de cualquier polinomio de Weierstrass g se anulan exactamente donde f se anula y están dados como polinomios en las integrales

$$\int_{|w|=r} \frac{\partial f}{\partial w}(z, w) \frac{w^q dw}{f(z, w)}.$$

Sea \mathcal{O}_z el anillo de funciones holomorfas definidas en una vecindad de $z \in \mathbb{C}^n$. El anillo \mathcal{O}_0 es un dominio entero: sean f y g son funciones holomorfas definidas en una vecindad abierta U del origen tales que $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in U$. Supongamos que $f \neq 0$, por lo que existe un $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) \neq 0$. Por la continuidad de f , existe una vecindad abierta $V \subset U$ que contiene a z_0 y tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in V$; entonces $g = 0$ en todo V , y por el Teorema de Identidad, $g = 0$ en todo U . Pero aún más, de hecho \mathcal{O}_0 es un anillo local, cuyo ideal máximo está dado por $\{f \in \mathcal{O}_0 \mid f(0) = 0\}$. En efecto, para $f \in \mathcal{O}_0$ con $f(0) \neq 0$, $\frac{1}{f}$ está definida y es holomorfa en una vecindad de 0, y f es una unidad.

Proposición 2.1.12 *El anillo \mathcal{O}_0 es de factorización única.*

Demostración: Ver [G-H, cáp. 0] ■

Aprovechamos este resultado para dar la siguiente definición. Sea X una variedad compleja. Una *función meromorfa* f en un abierto $U \subset X$ es una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ que está dada localmente por un cociente de funciones holomorfas. Es decir, si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de U , $f|_{U_i} = g_i/h_i$, donde g_i y h_i son relativamente primos en $\mathcal{O}(U_i)$ y $g_i h_j = g_j h_i$ en $\mathcal{O}(U_i \cap U_j)$. Por la proposición anterior esta definición tiene sentido. En un sentido estricto, una función meromorfa no es una función, pues en los puntos en los que $g_i = h_i = 0$, f no está definida. Volveremos más adelante con esta cuestión en el contexto de las *gavillas*. Al conjunto de funciones meromorfas sobre U lo denotamos por $\mathcal{M}(U)$.

Sea $\mathcal{O}_0[w]$ el anillo de polinomios en w y con coeficientes en \mathcal{O}_0 .

Teorema 2.1.13 (División de Weierstrass) *Sea $g(z, w) = g(z_1, \dots, z_{n-1}, w) \in \mathcal{O}_0[w]$ un*

polinomio de Weierstrass de grado k en w . Entonces, para cada $f \in \mathcal{O}_0$, se puede escribir

$$f = gh + r,$$

con $r(z, w)$ un polinomio en w de grado $< k$.

Demostración: Sean $\varepsilon, \delta > 0$ números suficientemente pequeños. En el polidisco $\{(z, w) \in \mathbb{C}^n \mid |z| < \varepsilon, |w| < \delta\}$ definimos

$$h(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z, \zeta)}{g(z, \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - w}.$$

La función h es claramente holomorfa. Sea $r = f - gh$. Veamos que r es el polinomio buscado.

$$\begin{aligned} r(z, w) &= f(z, w) - g(z, w)h(z, w) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \left[f(z, w) - g(z, w) \frac{f(z, \zeta)}{g(z, \zeta)} \right] \frac{d\zeta}{\zeta - w} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z, \zeta)g(z, \zeta) - g(z, w)f(z, \zeta)}{g(z, \zeta)(\zeta - w)} d\zeta. \end{aligned}$$

Como $(\zeta - w)$ divide a $g(z, \zeta) - g(z, w)$ como un polinomio en w ,

$$p(z, \zeta, w) = \frac{g(z, \zeta) - g(z, w)}{\zeta - w}$$

es un polinomio en w de grado $< k$. Como el factor w individual aparece en p sólo en la expresión para $r(z, w)$, vemos que $r(z, w)$ es un polinomio de grado $< k$ en w . Explícitamente, si

$$p(z, \zeta, w) = p_1(z, \zeta)w^{k-1} + \dots + p_k(z, \zeta),$$

entonces

$$r(z, w) = a_1(z)w^{k-1} + \dots + a_k(z),$$

donde

$$a_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=\delta} \frac{f(z, \zeta)}{g(z, \zeta)} p_i(z, \zeta) d\zeta.$$

■

2.2 Variedades analíticas

En esta sección introducimos el concepto de *variedad analítica* y el respectivo de *subvariedad analítica*.

Definición 2.2.1 Sea M un espacio topológico conexo. Sea dice que M tiene una estructura de variedad compleja n -dimensional si existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de cartas de M tal que

1. ϕ_i es un homeomorfismo de U_i en un subconjunto abierto $\phi_i(U_i)$ de \mathbb{C}^n , para cada $i \in I$.
2. Para cada $i, j \in I$, los cambios de coordenadas $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ son biholomorfismos de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ en $\phi_i(U_i \cap U_j)$.

Una manera equivalente de decir que M es una variedad compleja (de dimensión n) es decir que M posee una *estructura analítica compleja*.

En la definición anterior por lo general se asume que el atlas \mathcal{A} es máximo. Es decir, si (ϕ, U) es cualquier carta de M tal que $\phi \circ \phi_i^{-1}$ es un biholomorfismo para todo $i \in I$, entonces $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.

Es importante notar que una variedad compleja n -dimensional M tiene una estructura de variedad diferenciable real $2n$ -dimensional, ya que como se probó anteriormente, toda función holomorfa es de clase C^∞ .

Ejemplo 2.2.2 El espacio \mathbb{C}^n es una variedad analítica donde la estructura analítica esta dada por la identidad $id : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, que es trivialmente un biholomorfismo.

Ejemplo 2.2.3 Una variedad compleja 1-dimensional se llama superficie de Riemann.

Definición 2.2.4 Denotemos por $\mathbb{C}P^n$ el espacio proyectivo complejo de dimensión n , es decir, el conjunto de las líneas l que pasan a través del origen en \mathbb{C}^{n+1} . Cada línea $l \subset \mathbb{C}^{n+1}$ está determinada por un elemento $z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in l$ distinto de cero. Además, cualquier múltiplo $\lambda z = (\lambda z_1, \dots, \lambda z_{n+1})$ de z , con $\lambda \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, determina la misma recta l , que denotamos como $[z]$. Por tanto, podemos escribir al espacio proyectivo como el cociente

$$\mathbb{C}P^n = \{z \mid z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}\} / \sim,$$

donde “ \sim ” es la relación de equivalencia definida por: $z \sim w$ si y sólo si $w = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Los elementos de $\mathbb{C}P^n$ son las clases de equivalencia $[z] = [z_1, \dots, z_n]$, con $z \neq 0$. Definamos ahora una estructura holomorfa en $\mathbb{C}P^n$. Los conjuntos $U_i = \{[z_0, \dots, z_n] \mid z_i \neq 0\} \subset \mathbb{C}P^n$ son conjuntos abiertos en la topología cociente inducida por la proyección canónica $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$. Los conjuntos U_i tienen como elementos a las líneas que no están contenidas en el hiperplano definido por la ecuación $z_i = 0$. La función $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida como

$$\varphi_i([z]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \dots, \frac{z_n}{z_i} \right)$$

es biyectiva, donde el símbolo $\widehat{}$ significa que el elemento bajo el signo se omite. En el conjunto $\varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^n$ se tiene el cambio de coordenadas

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(z_1, \dots, z_n) = \left(\frac{z_1}{z_j}, \dots, \frac{\widehat{z_j}}{z_j}, \dots, \frac{1}{z_j}, \dots, \frac{z_n}{z_j} \right)$$

que puede verse es claramente holomorfo, lo que demuestra que $\mathbb{C}P^n$ tiene una estructura de variedad analítica n -dimensional con atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_i, U_i\}$. Las coordenadas $[z_0, \dots, z_n]$ se llaman coordenadas homogéneas en $\mathbb{C}P^n$, mientras que las coordenadas por las cartas φ_i se llaman coordenadas Euclidianas. Dado que existe una función continua de la esfera unidad en \mathbb{C}^{n+1} sobre $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ es compacta. Para el caso $n = 1$, $\mathbb{C}P^1$ es la

recta proyectiva compleja, y puede probarse fácilmente que es biholomorfa a la esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ver [Fo, pág. 3]

Toda inclusión $\mathbb{C}^{k+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ induce una inclusión $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. La imagen de la inclusión lineal se llama *espacio lineal* de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. La imagen de un hiperplano en \mathbb{C}^{n+1} se llama de nuevo un *hiperplano*, y en general la imagen de un $\mathbb{C}^{k+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ es un *k-plano*.

Es importante hacer algunas observaciones que serán útiles para lo que se expone más adelante. El conjunto de los hiperplanos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ corresponde con el conjunto $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ de funcionales lineales no-nulos en \mathbb{C}^{n+1} módulo multiplicación por un escalar. También es conveniente considerar a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ como la compactificación de \mathbb{C}^n poniendo un hiperplano H en el punto al infinito. En coordenadas locales, se tiene la inclusión $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ dada por $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [1, z_1, \dots, z_n]$. Definimos a H por medio de la ecuación $z_0 = 0$ y se tiene una identificación $H \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ donde se considera el hiperplano al infinito como las direcciones en las cuales se puede "ir al infinito" en \mathbb{C}^n .

El espacio tangente a una variedad

Sea M una variedad compleja. Denotamos por $T_{\mathbb{R},p}M$ al espacio tangente usual en el punto $p \in M$, donde consideramos a M como una variedad real de dimensión $2n$. Recordemos que $T_{\mathbb{R},p}M$ se puede ver como el espacio de las derivaciones \mathbb{R} -lineales en el anillo de funciones de valores reales de clase C^∞ en una vecindad de p . Si se escribe $z_j = x_j + iy_j$, entonces $T_{\mathbb{R},p}M$ tiene como base al conjunto $\{\partial/\partial x_i|_p, \partial/\partial y_i|_p\}_{i=1, \dots, n}$.

Se define el *espacio tangente complejificado* en el punto $p \in M$ como

$$T_{\mathbb{C},p}M = T_{\mathbb{R},p}M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Este espacio se puede realizar como el espacio de derivaciones \mathbb{C} -lineales en el anillo de funciones de valores complejos de clase C^∞ definidas alrededor de p (ver [G-H, pág. 16]).

Entonces, una base para $T_{\mathbb{C},p}M$ está dada por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \Big|_p \right\}_{i=1, \dots, n}.$$

Definición 2.2.5 Al \mathbb{C} -espacio vectorial generado por el conjunto $\{\partial/\partial z_i|_p\}_{i=1, \dots, n}$ se le llama el espacio tangente holomorfo a M en el punto p y se le denota por $T_p M$.

Sean M, N variedades complejas con \mathcal{A}, \mathcal{B} los atlas respectivos. Se dice que una función $f : M \rightarrow N$ es *holomorfa* o *analítica* si para cada $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ y $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, la composición $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V)$ es analítica. Si f es un homeomorfismo y tanto f como f^{-1} son analíticas, decimos que f es un *biolomorfismo* y que M y N son *biholomorfas* o *analíticamente equivalentes*.

El conjunto $TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$ se llama *haz tangente holomorfo* a la variedad M . El término "haz" tiene un sentido preciso que se explicará más adelante.

Toda función $f : M \rightarrow N$ de clase C^∞ entre variedades complejas (vistas como variedades reales) induce una transformación lineal al nivel de los espacios tangentes, a saber, la diferencial real df de f

$$d_{\mathbb{R},p}f : T_{\mathbb{R},p}M \rightarrow T_{\mathbb{R},f(p)}N,$$

que induce a su vez una transformación

$$d_p f = d_{\mathbb{R},p}f \otimes id : T_{\mathbb{C},p}M \rightarrow T_{\mathbb{C},f(p)}N.$$

Definición 2.2.6 Sea M una variedad compleja m -dimensional con atlas \mathcal{A} y N un subconjunto conexo de M . Decimos que N es una subvariedad compleja n -dimensional de M si para $x \in N$, existe $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ tal que ϕ da un homeomorfismo entre $N \cap U$ y un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n \times \{0\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{m-n} \cong \mathbb{C}^m$.

De esta definición es claro que si N es una subvariedad compleja de M , N tiene una

estructurada variedad compleja, pues las restricciones de las cartas $\phi|_{N \cap U} : N \cap U \rightarrow \phi(N \cap U)$ dan lugar a cambios de coordenadas biholomorfos.

Ejemplo 2.2.7 *Un subconjunto abierto conexo U de una variedad compleja n -dimensional M es una subvariedad compleja n -dimensional de M .*

Vamos a considerar ahora subvariedades cerradas de \mathbb{C}^n .

Proposición 2.2.8 *Sea M una variedad compleja compacta. Entonces $\mathcal{O}(M) = \mathbb{C}$, es decir, las únicas funciones holomorfas definidas en todo M son las constantes.*

Demostración: Sea $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Por ser M compacta $f(M)$ es un subconjunto acotado del plano y alcanza su máximo. Es decir, existe $z_0 \in M$ tal que $|f(z_0)| \geq |f(z)|$ para todo $z \in M$. Por el Teorema del Módulo Máximo, $f(z) = f(z_0)$ y por lo tanto f es constante. ■

Corolario 2.2.9 *Las únicas subvariedades complejas de \mathbb{C}^n son puntos aislados.*

Demostración: Sea M una subvariedad compleja de \mathbb{C}^n . Cada función coordenada $z \rightarrow z_i$, $n \geq i \geq 1$, se restringe a una función analítica en M . Por la proposición anterior, cada z_i es una función constante. Pero esto sólo puede ser posible si M es un conjunto discreto y además finito, por ser M compacto. ■

A la luz de los resultados anteriores resulta que las únicas variedades no triviales de \mathbb{C}^n son las no compactas.

Capítulo 3

Gavillas analíticas coherentes

Este capítulo está dedicado a la introducción de los importantes conceptos de *gavilla analítica coherente* y *haz vectorial holomorfo*. Los haces vectoriales, en tanto que objetos geométricos, son importantes para el estudio de las variedades complejas. Pero como mostramos en esta sección, los haces vectoriales se pueden ver como tipos especiales de gavillas, a saber, las *gavillas localmente libres*. Al proceder a estudiar las gavillas analíticas a través de métodos homológicos se verá que esta es una manera de obtener resultados generales sobre haces vectoriales dentro de un marco más amplio.

3.1 Haces vectoriales holomorfos

Sea X un espacio topológico. Una familia de espacios vectoriales complejos sobre X consta de un espacio topológico E junto con:

- i) una función continua $p : E \rightarrow X$,
- ii) una estructura de espacio vectorial complejo de dimensión finita en cada

$$E_x = p^{-1}(x), \quad x \in X.$$

El espacio topológico E se llama *espacio total*, X se llama el *espacio base* y E_x se

llama la *fibra* sobre $x \in X$. Una familia así usualmente se denota por (E, p, X) .

Un *morfismo* de familias de espacios vectoriales (E, p, X) , (E', p', X) esta dado por una función continua $\varphi : E \rightarrow E'$ tal que

i) $p' \circ \varphi = p$,

ii) para cada $x \in X$ la función restricción $\varphi_x : E_x \rightarrow E'_x$ es lineal.

El morfismo $\varphi : E \rightarrow E'$ se llama *isomorfismo* si φ es biyectiva y φ^{-1} es continua. Sea V un espacio vectorial complejo. La familia $(X \times V, pr_1, X)$, donde $pr_1 : X \times V \rightarrow X$ es la proyección en el primer factor, se llama *familia producto* y una familia de espacios vectoriales complejos isomorfa a la familia producto se llama *familia trivial*.

Sea (E, p, X) una familia sobre X y sea $Y \subset X$ un subespacio topológico. Entonces $(p^{-1}(Y), p|_{p^{-1}(Y)}, Y)$ es una familia de espacios vectoriales complejos sobre Y , llamada la *restricción* sobre Y de la familia (E, p, X) , y se le denota por $E|_Y$.

Definición 3.1.1 *Un haz vectorial complejo (continuo) sobre X es una familia de espacios vectoriales complejos sobre X , $p : E \rightarrow X$, que es localmente trivial, es decir, para cada $x \in X$ existe un subconjunto abierto U de x tal que $E|_U$ es la familia trivial.*

Un *morfismo* de haces vectoriales complejos sobre X es un morfismo de las familias de espacios vectoriales subyacentes.

Sea $p : E \rightarrow X$ un haz vectorial complejo sobre X . La dimensión del espacio vectorial E_x , $x \in X$, es una función localmente constante en X , y es por tanto constante si X es conexo. En este caso, $r = \dim_{\mathbb{C}} E_x$ se llama el *rango* del haz vectorial $p : E \rightarrow X$ y se denota por $\text{rank}(E)$. Supondremos de ahora en adelante que el espacio X es conexo.

Si X y E son variedades diferenciables C^∞ y todas las funciones en la definición de familia son diferenciables, entonces tenemos la noción de *haz vectorial diferenciable*. Análogamente, si X y E son variedades analíticas y las funciones son holomorfas, se tiene la noción de *haz vectorial holomorfo*.

Ejemplo 3.1.2 *Sea X una variedad compleja. La proyección $pr_1 : X \times \mathbb{C}^r \rightarrow X$ es una haz vectorial holomorfo. Cualquier haz vectorial analíticamente equivalente a este haz se llama haz vectorial trivial de rango r .*

Sea ahora $p : E \rightarrow X$ un haz holomorfo de rango r sobre X . De la definición se desprende que es posible encontrar una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de X y biholomorfismos $h_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^r$ sobre U_i tales que para todos los índices i, j , la composición

$$h_{ij} = h_i \circ h_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r$$

es lineal en cada fibra. Entonces, existen funciones

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

tales que

$$h_{ij}(x, v) = (x, g_{ij}(x)v).$$

Las funciones g_{ij} se llaman *funciones de transición* con respecto a las *trivializaciones locales* (U_i, h_i) . Estas funciones de transición resultan ser holomorfas. Para ver esto escribimos $g_{ij}(x) = (g_{kl}^{ij}(x))$, donde $g_{kl}^{ij}(x)$ es la k -ésima coordenada del vector $g_{ij}(x)(e_l)$ ($\{e_k\}$ es la base canónica de \mathbb{C}^r). La función $x \mapsto g_{kl}^{ij}(x)$ se obtiene de la composición de las siguientes funciones holomorfas

$$U_i \cap U_j \xrightarrow{q_i} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{h_{ij}} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \xrightarrow{p_j^*} \mathbb{C}^r \xrightarrow{p_k^*} \mathbb{C}$$

donde $q_i(x) = (x, e_i)$ y p_k es la proyección en la k -ésima coordenada.

Como cada una de las funciones g_{kl}^{ij} es holomorfa, la función de transición $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$ es holomorfa.

En la intersección $U_i \cap U_j \cap U_k$ se tienen las relaciones

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik}, \tag{3.1}$$

llamada de *cociclo* y cumple con que $g_{ii} = 1$, $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$. Este nombre se deriva de una interpretación cohomológica de la relación ?? que se explicará más adelante.

La relación de cociclo tiene un papel fundamental en el estudio de los haces vectoriales. Sea $U = (U_i)$ una cubierta abierta de X y sean

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(r, \mathbb{C})$$

funciones holomorfas que cumplen con $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$. Entonces es posible construir un haz vectorial holomorfo que tenga como funciones de transición precisamente a las funciones g_{ij} . La construcción es como sigue (ver [Fo, pág. 221]). Definimos

$$E' = \bigcup_{i \in I} U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\} \subset X \times \mathbb{C}^n \times I.$$

Dotamos a E' de la topología inducida del espacio producto $X \times \mathbb{C}^n \times I$, donde I tiene la topología discreta. Introducimos en E' la relación

$$(x, v, i) \sim (x', v', i') \text{ si y sólo si } x = x' \text{ y } v = g_{ij}(x)v'.$$

Dado que se cumple $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$, es fácil probar que la anterior es una relación de equivalencia. Denotamos por E al conjunto cociente E'/\sim . Damos a E la topología cociente inducida por la proyección canónica $\pi : E' \rightarrow E'/\sim$. Como la relación de equivalencia " \sim " es compatible con la proyección $E' \rightarrow X$, la proyección inducida $p : E \rightarrow X$ es continua. Las fibras $p^{-1}(x)$ tienen una estructura natural de un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión n . Además

$$E_{U_i} = p^{-1}(U_i) = \pi(U_i \times \mathbb{C}^n \times I)$$

y $\pi|_{U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\}} \rightarrow E_{U_i}$ es un homeomorfismo. Las trivializaciones $h_i : E_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ se definen como las inversas de estos homeomorfismos vía la identificación $U_i \times \mathbb{C}^n \times \{i\} \cong U_i \times \mathbb{C}^n$. Por construcción resulta que las funciones de transición de (h_i) son precisamente las funciones g_{ij} .

Ejemplo 3.1.3 Dada una n -variedad compleja X y un sistema de coordenadas locales (U_i, φ_i) , $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$, definimos en $U_i \cap U_j$ la función g_{ij} como la matriz Jacobiana de los cambios de coordenadas $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$:

$$g_{ij}(p) = \left(\frac{\partial z_i}{\partial z_j} \Big|_p \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Por la regla de la cadena para funciones de varias variables complejas se tiene que las funciones g_{ij} cumplen con la condición de cociclo. El haz vectorial asociado al cociclo (g_{ij}) así definido es isomorfo al haz tangente holomorfo TX mencionado anteriormente.

Ejemplo 3.1.4 Sean $f : Y \rightarrow X$ una función holomorfa entre variedades complejas y E el haz vectorial holomorfo sobre X asociado al cociclo (g_{ij}) sobre una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}$. Las funciones $f^*g_{ij} = g_{ij} \circ f$ cumplen la condición de cociclo para la cubierta $\mathcal{U}' = \{f^{-1}(U_i)\}$ de Y . El haz vectorial asociado al cociclo (f^*g_{ij}) , denotado por f^*E es el haz inducido de E con respecto a la función $f : Y \rightarrow X$.

Operaciones con haces vectoriales

Como sucede en el álgebra lineal, las operaciones que entre espacios vectoriales se pueden extender al caso de haces vectoriales: Si $E \xrightarrow{p} M$ es un haz vectorial complejo de rango k , se puede construir el haz dual $E^* \rightarrow M$, que tiene como fibras $E_x^* = (E_x)^*$. Trivializaciones $h_U : p^{-1}(U) = E_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$ inducen trivializaciones

$$h_U^* : E_U^* \rightarrow U \times \mathbb{C}^{k*} \cong U \times \mathbb{C}^k,$$

en el conjunto $E^* = \bigcup_{x \in M} E_x^*$. Si E tiene funciones de transición $\{g_{ij}\}$ respecto a una cierta cubierta, las funciones de transición $\{g_{ij}^*\}$ de E^* están dadas por

$$g_{ij}^*(x) = {}^t g_{ij}(x)^{-1}.$$

De manera similar, si $E \rightarrow M$ y $F \rightarrow M$ son haces vectoriales complejos de rangos k y l y con funciones de transición $\{g_{ij}\}$ y $\{f_{ij}\}$ respectivamente, entonces se definen los haces

1. $E \oplus F$, cuyas funciones de transición están dadas por

$$h_{ij}(x) = \begin{pmatrix} g_{ij}(x) & \\ & f_{ij}(x) \end{pmatrix} \in GL(k+l, \mathbb{C});$$

2. $E \otimes F$, con funciones de transición

$$h_{ij}(x) = g_{ij}(x) \otimes f_{ij}(x) \in GL(kl, \mathbb{C});$$

3. $\wedge^r E$, cuyas funciones de transición son

$$h_{ij}(x) = \wedge^r g_{ij}(x) \in GL\left(\binom{k}{r}, \mathbb{C}\right).$$

Aquí, $\wedge^r V$ denota la r -ésima álgebra exterior del espacio vectorial V . En particular, $\wedge^k E$ es una haz de líneas dado por

$$h_{ij}(x) = \det g_{ij}(x) \in GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*,$$

llamado el haz determinante de E .

Definición 3.1.5 Un subhaz $F \subset E$ de rango l de un haz vectorial es una colección $\{F_x\}_{x \in M}$ de subespacios $F_x \subset E_x$ tales que $F = \bigcup_{x \in M} F_x$ tiene la estructura de un haz vectorial complejo. Esto es, para cada $x \in M$, existe un abierto U de x y una trivialización

$$h_U : E_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^k$$

de E tal que

$$h_U|_{F_U} : F_U \rightarrow U \times \mathbb{C}^l \subset U \times \mathbb{C}^k$$

es una trivialización para F .

Las funciones de transición g_{ij} de E relativas a estas trivializaciones tienen la forma

$$g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} h_{ij}(x) & k_{ij}(x) \\ & f_{ij}(x) \end{pmatrix}.$$

El haz F tiene funciones de transición h_{ij} .

Para un subhaz F de E definimos el haz cociente E/F como el haz cuyas fibras están dadas por $(E/F)_x = E_x/F_x$ y cuyas funciones de transición son las funciones f_{ij} que aparecen en la matriz anterior.

Como una referencia para operaciones de haces vectoriales ver [G-H, págs. 66-70].

Definición 3.1.6 Una sección holomorfa de un haz vectorial holomorfo $p: E \rightarrow X$ sobre un conjunto abierto $U \subset X$ es una función holomorfa $s: U \rightarrow E$ tal que $p \circ s = id_U$.

La condición $p \circ s = id_U$ significa que s manda a cada $x \in U$ a un elemento $s(x) \in E_x$. Si $h_i: E_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$ es una trivialización local de E , entonces a cada sección s sobre U se le puede asociar una única función holomorfa $s_i: U_i \cap U \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que

$$h_i(s(x)) = (x, s_i(x)), \text{ para cada } x \in U_i \cap U.$$

La función s_i es un representante de la sección s respecto a la trivialización h_{U_i} .

El conjunto de todas las secciones holomorfas de E sobre U tiene una estructura natural de espacio vectorial, y se denota por $\mathcal{O}_E(U)$. Es usual emplear también la notación $\Gamma(E, U)$.

Un marco σ de un haz vectorial E de rango $\text{rank}(E) = k$ sobre un abierto U de M es una colección de secciones $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de E sobre U tales que el conjunto $\{\sigma_1(x), \dots, \sigma_k(x)\}$ es una base para E_x , para todo $x \in U$.

Supongamos que (g_{ij}) es un cociclo de E respecto a las trivializaciones $h_i : E|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^n$, $i \in I$. Los representantes $s_i : U_i \cap U \rightarrow \mathbb{C}^n$ de una sección $s \in \mathcal{O}_E(U)$ satisfacen la relación

$$s_i(x) = g_{ij}(x)s_j(x) \text{ para cada } x \in U_i \cap U_j \cap U. \quad (3.2)$$

Entonces, $\mathcal{O}_E(U)$ es isomorfo al espacio vectorial de todas las familias $(s_i)_{i \in I}$ donde

$$s_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U)^n$$

satisface 3.2. Aquí, como en lo que sigue (y si el contexto es claro) $\mathcal{O}(V)^n$ denota al producto cartesiano $\mathcal{O}(V) \times \cdots \times \mathcal{O}(V)$ de n factores (o equivalentemente, la suma directa $\mathcal{O}(V) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(V)$). Nótese que $\mathcal{O}_E(U_i)$ es isomorfo a $\mathcal{O}(U_i)^n$ y que por tanto, si E holomorficamente trivial, entonces $\mathcal{O}_E(X) \cong \mathcal{O}_X^n$.

Sean $p : E \rightarrow X$, $p' : E' \rightarrow X$ haces vectoriales holomorfos sobre X de rango r y k respectivamente y sea $\varphi : E \rightarrow E'$ un morfismo de haces vectoriales. Tomando un refinamiento si es necesario, podemos suponer que existe una cubierta $\mathcal{U} = (U_i)$ de X para la que E y E' tienen trivializaciones y tal que la función

$$U_i \times \mathbb{C}^r \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^k$$

inducida por las trivializaciones h_i, h'_i respectivas es de la forma

$$(x, v) \mapsto (x, \varphi_i(x)v)$$

donde $\varphi_i : U_i \rightarrow M(k \times r, \mathbb{C})$. Las funciones φ_i satisfacen en $U_i \cap U_j$ la relación

$$\varphi_j g_{ij} = g'_{ij} \varphi_i.$$

Inversamente, si se tiene una colección de funciones (φ_i) que satisface la relación anterior es posible construir un morfismo de haces vectoriales.

3.2 Gavillas

Una buena referencia para el material que se expone en esta sección se encuentra en los libros de [G2] y [H] citados en la Bibliografía.

Definición 3.2.1 Sea X un espacio topológico y τ una topología de X .

Una pregavilla de grupos en X es una colección de grupos $G(U)$, uno para cada abierto $U \in \tau$, junto con homomorfismos de grupos, llamados restricciones, $r_{VU} : G(U) \rightarrow G(V)$ definidos para cada $U, V \in \tau$ con $V \subset U$, y tales que

1. Si $U = \emptyset$, $G(U) = 0$.
2. Para cada $U \in \tau$, r_{UU} es el morfismo identidad.
3. Para cada $U, V, W \in \tau$ con $W \subset V \subset U$ se tiene $r_{WV} \circ r_{VU} = r_{WU}$.

Usualmente una pregavilla se denota por $\{G(U), r_{VU}\}$ o simplemente por G .

Es preciso notar que la noción de pregavilla se puede extender a estructura algebraicas más generales. Es decir, si en vez de "grupo" en la definición anterior se pone "anillo", "módulo", etc. se pueden definir de la misma manera *pregavillas de anillos*, *pregavillas de módulos*, etc.

Ejemplo 3.2.2 Para cada $U \in \tau$ sea $C(U)$ el anillo de funciones continuas \mathbb{C} -valuadas definidas en U . Dados $U, V \in \tau$ con $V \subset U$, se define $r_{VU} : C(U) \rightarrow C(V)$ como la restricción natural de funciones. Entonces $C_X = \{C(U), r_{VU}\}$ es una pregavilla de anillos en X , llamada la pregavilla de funciones continuas \mathbb{C} -valuadas definidas en X .

Ejemplo 3.2.3 Sea X una variedad compleja. Denotamos por $O_X = \{O(U), r_{VU}\}$ a la pregavilla de funciones analíticas \mathbb{C} -valuadas (es decir, holomorfas) en X . La pregavilla O_X usualmente se conoce como la pregavilla estructural de la variedad compleja X y suele escribirse simplemente como O cuando la variedad X queda sobreentendida. Así mismo, $M_X = \{M(U), r_{VU}\}$ es la pregavilla de funciones meromorfas en X .

Ejemplo 3.2.4 Sea Z una subvariedad analítica de una variedad compleja X . Para cada $U \in \tau$, sea $I_Z(U) = \{f \in \mathcal{O}(U) \mid f|_{Z \cap U} \equiv 0\}$. Entonces $I_Z = \{I_Z(U), r_{VU}\}$ es una pregavilla de ideales de \mathcal{O}_X . Para cada abierto U , $I_Z(U)$ es un ideal del anillo $\mathcal{O}(U)$.

Ejemplo 3.2.5 Sea E un haz vectorial holomorfo sobre una variedad compleja X . Para cada $U \in \tau$ denotamos como antes $\mathcal{O}_E(U)$ al espacio de secciones holomorfas de E sobre U . Cada $\mathcal{O}_E(U)$ es un $\mathcal{O}(U)$ -módulo y la pregavilla $\mathcal{O}_E = \{\mathcal{O}_E(U), r_{VU}\}$ es una pregavilla de \mathcal{O}_X -módulos, llamada la pregavilla de secciones holomorfas de E .

Lo que sigue es introducir el importante concepto de gavilla.

Sea $\{R(U), r_{VU}\}$ una pregavilla de anillos en un espacio topológico. Sea $x \in X$. Se introduce una relación de equivalencia \sim_x en los $R(U)$, para cada $x \in U$, como sigue: U, V abiertos que contienen a x y $f \in R(U), g \in R(U)$. Entonces f es \sim_x equivalente a g en x , escrito $f \sim_x g$, si y sólo si existe un abierto W que contiene a x , $W \subset U \cap V$ y tal que $r_{WU}(f) = r_{WV}(g)$. De la definición de pregavilla es inmediato que \sim_x es una relación de equivalencia. Se denota por R_x al conjunto de clases de equivalencia de bajo \sim_x . El conjunto R_x hereda de los $R(U)$, $x \in U$, una estructura natural de anillo de tal manera que la proyección canónica $r_{U,x} : R(U) \rightarrow R_x$ es un homomorfismo de anillos. Si $f \in R(U)$, se escribe $f_x = r_{U,x}(f)$ y se llama *germen* de f en x .

La construcción anterior es un caso particular de una construcción algebraica, llamada *límite directo*, y es denotado por $\varinjlim_{x \in U} R(U)$, donde el límite "corre" sobre los abiertos U que contiene a x . Su definición y algunas propiedades pueden encontrarse en [A, pág. 37].

Ejemplo 3.2.6 Sea \mathcal{O} la pregavilla estructural de una variedad compleja X . Entonces para $x \in X$, \mathcal{O}_x es el anillo de gérmenes de funciones holomorfas en x .

Ejemplo 3.2.7 Igualmente, si M denota la pregavilla de funciones meromorfas en la variedad compleja X , entonces M_x es el campo de gérmenes de funciones meromorfas en x .

Sean $\mathcal{R} = \bigcup_{x \in X} R_x$ y la proyección $\pi : \mathcal{R} \rightarrow X$ que manda a cada elemento de R_x en x . Se introduce en \mathcal{R} una topología de la siguiente manera. Cada $f \in R(U)$ induce una sección $\tilde{f} : U \rightarrow \mathcal{R}$ dada por $\tilde{f}(x) = f_x, x \in U$. La base para la topología inducida en \mathcal{R} está dada por los conjuntos $U_f = \tilde{f}(U)$, para todos los $U \in \tau$ y todos los $f \in R(U)$. Con la topología introducida, las secciones $\tilde{f} : U \rightarrow \mathcal{R}, f \in R(U)$, son continuas. Se puede probar que la proyección $\pi : \mathcal{R} \rightarrow X$ es un homeomorfismo local y que además, la topología inducida en cada $R_x \subset \mathcal{R}$ es discreta. Para mayores detalles ver [H, pág. 19]

El espacio \mathcal{R} introducido anteriormente se llama el *espacio topológico asociado* pre-gavilla $R = \{R(U), \tau_{VU}\}$. El par (\mathcal{R}, π) se llama la *gavilla asociada* a la pre-gavilla $\{R(U), \tau_{VU}\}$. El anillo $\mathcal{R}_x = \pi^{-1}(x)$ se llama el *fibra* sobre x .

El siguiente ejemplo ilustra la correspondencia uno a uno entre las secciones de una gavilla y las funciones definidas en un cierto espacio.

Ejemplo 3.2.8 Sea C la gavilla de anillos asociada a la pre-gavilla C_X . La gavilla C se llama la *gavilla de gérmenes de funciones continuas \mathbb{C} -valuadas en X* . El tallo C_x es el *anillo de gérmenes de funciones continuas \mathbb{C} -valuadas en $x \in X$* . Supongamos que $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ es una sección continua de la gavilla C sobre un abierto U de X . Entonces existe una única $f \in C(U)$ tal que $\tilde{f} = F$. Para ver esto notemos que F determina la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x) = F(x)(x)$. Resta probar que es continua. Sea $x \in U$ arbitrario. Por la definición de la topología de C es posible encontrar una vecindad abierta V de $x, V \subset U$, y una $s \in C(U)$ tal que $\tilde{s} = F|_V$. Pero $s = f|_V$, lo que prueba la continuidad en x . Claramente f es la única función tal que $\tilde{f} = F$, pues el germen de f en x está completamente determinado por el valor de f en x .

Claramente lo dicho en el ejemplo anterior se aplica completamente al caso de la gavilla C_X^k de gérmenes de funciones \mathbb{C} -valuadas de clase C^k en una variedad diferenciable X ; la gavilla \mathcal{D}_X de gérmenes de funciones \mathbb{C} -valuadas de clase C^∞ en una variedad diferencial X y \mathcal{O}_X , la gavilla de gérmenes de funciones holomorfas en una variedad compleja X .

Una de las razones por las cuales es importante considerar el estudio de las gavillas reside en el siguiente hecho. Como se hizo arriba, se puede probar fácilmente que una sección local *continua* de una de las gavillas anteriores, digamos \mathcal{O}_X , sobre un subconjunto abierto U de X corresponde con una única función *holomorfa* en U . Es decir, que el espacio topológico asociado a una pregavilla contiene esencialmente toda la información (local) de la estructura del espacio base. Lo mismo ocurre para \mathcal{D}_X .

Sean (\mathcal{R}, π, X) y (\mathcal{S}, η, X) dos gavillas de anillos en X . Decimos que \mathcal{S} es una *subgavilla* de \mathcal{R} si \mathcal{S} es un abierto de \mathcal{R} , $\pi|_{\mathcal{S}} = \eta$ y para cada $x \in X$, \mathcal{S}_x es un subanillo de \mathcal{R}_x .

Ejemplo 3.2.9 *La gavilla \mathcal{O}_X es una subgavilla de \mathcal{C}_X .*

Arribamos así a la definición general de gavilla

Definición 3.2.10 *Sea \mathcal{F} un espacio topológico y $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ un homeomorfismo local. Se dice que la terna (\mathcal{F}, π, X) es una gavilla (de anillos) en X si se cumple lo siguiente*

1. *Las fibras $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ tienen una estructura de anillo, para cada $x \in X$.*
2. *Las operaciones de anillo son continuas en la topología de \mathcal{F} .*

Explicamos el sentido de la condición 2. Si $\Delta \subset X \times X$ denota la diagonal, $\mathcal{F} \times \mathcal{F}|_{\Delta}$ es la restricción a la diagonal de la función $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow X \times X$. Se pide que las operaciones de sustracción y multiplicación, que son funciones de $\mathcal{F} \times \mathcal{F}|_{\Delta}$ en \mathcal{F} , sean continuas.

De la misma manera como se hizo en el caso de las pregavillas, se pueden definir *gavillas de campos*, *gavillas de módulos*, etc. Si \mathcal{R} es una gavilla de anillos sobre X , decimos que una gavilla \mathcal{S} en X es una *gavilla de \mathcal{R} -módulos* si cada fibra \mathcal{S}_x tiene una estructura de \mathcal{R}_x -módulo y las operaciones de módulo son continuas en el sentido explicado anteriormente. [H, pág. 17-18].

Sea (\mathcal{F}, π, X) una gavilla de anillos. Para cada $U \in \tau$ se denota por $\mathcal{F}(U)$ al conjunto de las secciones continuas en U , es decir, $\{s : U \rightarrow \mathcal{F} | s(x) \in \mathcal{F}(x) \text{ y } s \text{ es continua}\}$. Cada $\mathcal{F}(U)$ es un anillo y si r_{VU} denota la restricción natural al abierto $V \subset U$, $\mathcal{F}' = \{\mathcal{F}(U), r_{VU}\}$ es una pregavilla de anillos en X .

Proposición 3.2.11 Si (\mathcal{F}, π, X) es una gavilla de anillos en X , entonces la gavilla asociada a la pregavilla $\mathcal{F}' = \{\mathcal{F}(U), r_{VU}\}$ es igual a la gavilla \mathcal{F} .

Demostración: Ver [G1, págs. 19-20] ■

Ejemplo 3.2.12 La pregavilla \mathcal{M}' asociada a la gavilla \mathcal{M} de gérmenes de funciones meromorfas en X en general no es igual a la pregavilla \mathcal{M} de funciones meromorfas en X . Sin embargo, tanto \mathcal{M} como \mathcal{M}' tienen como gavilla asociada a \mathcal{M} .

Sea R una pregavilla de anillos en X y \mathcal{R} su gavilla asociada. En vista del ejemplo anterior, es bueno tener una caracterización de aquellas gavillas para las que $\mathcal{R}' = R$. La siguiente proposición, que no es difícil de probar, da una respuesta a esta cuestión.

Proposición 3.2.13 Sea R una pregavilla de anillos en X con gavilla asociada \mathcal{R} . Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{R}' = R$ es que para una familia dada $\{U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ y elementos $s_i \in R(U_i)$ tales que $s_i = s_j$ en $U_i \cap U_j$ para todos $i, j \in I$, exista una única $s \in R(\bigcup_i U_i)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para cada $i \in I$.

Demostración: Ver [G1, págs. 19-20]. ■

Sean (\mathcal{F}, π, X) y (\mathcal{F}', π', X) gavillas de anillos en X . un morfismo de gavillas de \mathcal{F} en \mathcal{F}' es una función continua $F: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ tal que $F_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}'_x$ es un homomorfismo de anillos inducido por F en las fibras para cada $x \in X$. Decimos que F es un *isomorfismo de gavillas* si F es un homeomorfismo y la función inversa F^{-1} es un morfismo de gavillas.

De manera similar se define un morfismo de pregavillas. Supongamos que $R = \{R(U), r_{VU}\}$ y $S = \{S(U), s_{VU}\}$ son pregavillas de anillos en X . Entonces un morfismo $f: R \rightarrow S$ consta de una familia $\{f_U: R(U) \rightarrow S(U) | U \text{ es abierto de } X\}$ de homomorfismos de anillos que son compatibles con los homomorfismos restricción. Esto es, para abiertos U, V de X , se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} R(U) & \xrightarrow{f_U} & S(U) \\ \downarrow r_{VU} & & \downarrow s_{VU} \\ R(V) & \xrightarrow{f_V} & S(V) \end{array}$$

Tomo morfismo de pregavillas $f : R \rightarrow S$ induce un (único) morfismo de gavillas $F : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$, dado por el paso a las fibras $F(x) = f_x : R_x \rightarrow S_x$.

Ejemplo 3.2.14 Sean E y F haces vectoriales holomorfos sobre una variedad compleja X y $f : E \rightarrow F$ un homomorfismo de haces vectoriales. Entonces \underline{E} y \underline{F} son \mathcal{O}_X -módulos y f induce de manera obvia un homomorfismo de \mathcal{O}_X -módulos $\underline{f} : \underline{E} \rightarrow \underline{F}$.

Definición 3.2.15 Una sucesión $\mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H}$ de gavillas es exacta en \mathcal{G} si la sucesión de anillos inducida $\mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}_x$ es exacta para cada $x \in X$.

Una sucesión $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ de gavillas es una sucesión exacta corta si cada una de las sucesiones $0 \rightarrow \mathcal{F}_x \xrightarrow{f_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{H}_x \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.

Ejemplo 3.2.16 Sea $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ una sucesión de morfismo de haces vectoriales holomorfos. Decimos que esta sucesión es exacta si la sucesión inducida la nivel de las fibras $0 \rightarrow E_x \rightarrow F_x \rightarrow G_x \rightarrow 0$ es exacta para cada $x \in X$. Entonces, si la sucesión anterior de haces es exacta, la sucesión de gavillas $0 \rightarrow \underline{E} \rightarrow \underline{F} \rightarrow \underline{G} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta.

Ejemplo 3.2.17 Denotemos por \mathbb{Z} a la gavilla constante con valores en el anillo \mathbb{Z} de enteros. Entonces existe una sucesión exacta de gavillas

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

donde $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}$ es la inclusión natural y $\exp : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^*$ está definido por $\exp_U(f)(x) = \exp(2\pi i f(x))$, para $x \in U$, $f \in \mathcal{O}(U)$. La supreyectividad de \exp se da por el hecho de que \exp_U tiene como inversa a $(2\pi i)^{-1} \log$, donde U es un abierto simplemente conexo.

Definición 3.2.18 Sea $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas y sean $\{f_U\} = \{f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)\}$ es abierto en X los correspondientes morfismos de pregavillas. Se definen las pregavillas núcleo, conúcleo e imagen de f como las pregavillas dadas por la correspondencia $U \mapsto \text{Ker}(f_U)$, $U \mapsto \text{Coker}(f_U)$ y $U \mapsto \text{Im}(f_U)$. Las gavillas asociadas a esta pregavillas se denotarán por $\text{Ker}(f)$, $\text{Coker}(f)$ y $\text{Im}(f)$ respectivamente.

Aldunas de las características de estas gavilla son (ver [F, pág. 77]):

1. Para todo $x \in X$, $Ker(f_x) \cong Ker(f)_x$, $Coker(f_x) \cong Coker(f)_x$ y $Im(f_x) \cong Im(f)_x$.

2. Se dice que f es *inyectivo* (como morfismo de gavillas) si $Ker(f) = 0$. Análogamente, f es *suprayectiva* si $Coker(f) = 0$. Por el punto anterior esto es equivalente a la inyectividad y suprayectividad en el nivel de las fibras.

3. Una sucesión de gavillas $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ es exacta en \mathcal{G} si y sólo si $Im(f) = Ker(g)$, donde tanto $Ker(g)$ y $Im(f)$ se ven como subgavillas de \mathcal{G} .

4. Asociada a un homomorfismo de gavillas $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ se tiene una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow Ker(f) \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{q} Coker(f) \rightarrow 0,$$

donde i y q denotan la inclusión y la función cociente respectivamente.

Supongamos que $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es la inclusión de \mathcal{F} como una subgavilla de \mathcal{G} . Definimos la *gavilla cociente* \mathcal{G}/\mathcal{F} como la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U)$. Se tiene la correspondiente sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{G} \xrightarrow{p} \mathcal{G}/\mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Es importante notar que \mathcal{G}/\mathcal{F} es isomorfa a $Coker(i)$ y que para $x \in X$, $(\mathcal{G}/\mathcal{F})_x \cong \mathcal{G}_x/\mathcal{F}_x$; [F, pág. 78].

Sea $f : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos (\mathcal{F}, π, Y) una gavilla de anillos en Y . Vamos a definir una gavilla de anillos $f^{-1}\mathcal{F}$ en X llamada la *imagen inversa* \mathcal{F} . La fibra de $f^{-1}\mathcal{F}$ en $x \in X$ es igual, como un anillo, a $\mathcal{F}_{f(x)}$. Definimos $f^{-1}\mathcal{F} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_{f(x)}$ y lo dotamos de una topología de la siguiente manera. Una base para la topología de $f^{-1}\mathcal{F}$ consta de las imagenes $s(U)$, donde U es un subconjunto abierto de X y s es una sección de $f^{-1}\mathcal{F}$ tal que $\pi \circ s : U \rightarrow Y$.

Ejemplo 3.2.19 Sea Z un subconjunto de X con la topología inducida y $i : Z \rightarrow X$ la inclusión natural. si \mathcal{F} es una gavilla en X la gavilla $i^{-1}\mathcal{F}$ se llama la *restricción de \mathcal{F}*

a Z . También se usa la notación $\mathcal{F}|_Z$ ó \mathcal{F}_Z .

Ejemplo 3.2.20 Sea \mathcal{F} una gavilla de \mathcal{R} -módulos en Y y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Entonces $f^{-1}\mathcal{F}$ es una gavilla de $f^{-1}\mathcal{R}$ -módulos en X .

Sea ahora $f : X \rightarrow Y$ continua y \mathcal{F} una gavilla de anillos en X . Se define la gavilla imagen directa $f_*\mathcal{F}$ como la gavilla de anillos en Y asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(U))$.

Sea Z un subconjunto cerrado de un espacio topológico X y $i : Z \rightarrow X$ la inclusión natural. Si \mathcal{F} es una gavilla en Z , escribimos $\tilde{\mathcal{F}} = i_*\mathcal{F}$. A $\tilde{\mathcal{F}}$ se le llama la extensión trivial de \mathcal{F} a X .

Proposición 3.2.21 a) $\tilde{\mathcal{F}}_x = 0$ si $x \notin Z$, $\tilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$ si $x \in Z$.

b) $i^{-1}\tilde{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F}$.

Demostración: Ver [F, pág. 87].

■

Definición 3.2.22 Sea \mathcal{R} una gavilla de anillos en X y \mathcal{F}, \mathcal{G} gavillas de \mathcal{R} -módulos.

1. La suma directa $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ es la gavilla de \mathcal{R} -módulos asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$.

2. El producto tensorial $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G}$ es la gavilla de \mathcal{R} -módulos asociada a la pregavilla $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{G}(U)$.

Se puede demostrar ([F, pág. 79]) que se tienen los isomorfismos $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x$ y $(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{R}_x} \mathcal{G}_x$.

Ejemplo 3.2.23 Sean E y F haces vectoriales holomorfos sobre una variedad compleja X . Entonces $\underline{E \oplus F} \cong \underline{E} \oplus \underline{F}$ y $\underline{E \otimes F} \cong \underline{E} \otimes \underline{F}$.

Gavillas localmente libres

Definición 3.2.24 Sea \mathcal{F} una gavilla de \mathcal{R} -módulos en X . Decimos que \mathcal{F} es localmente libre de rango p si \mathcal{F} es localmente isomorfa a \mathcal{R}^p , la suma de directa de p sumandos iguales a \mathcal{R} . Decimos que \mathcal{F} es libre de rango p si $\mathcal{F} \cong \mathcal{R}^p$.

Ejemplo 3.2.25 Sea E un haz vectorial holomorfo de rango $\text{rank}(E) = p$ sobre la variedad compleja X . Entonces la gavilla de gérmenes de secciones holomorfas \underline{E} es localmente isomorfa a \mathcal{O}^p . Esto es, para cada $x \in X$ existe una vecindad abierta U de x tal que $\underline{E}|_U \cong \mathcal{O}_U^p$ (aquí se tienen la gavillas restricción al abierto U).

Proposición 3.2.26 Sea X una variedad compleja. Existe una correspondencia biyectiva entre las clases de isomorfismo de gavillas localmente libres de \mathcal{O} -módulos de rango finito sobre X y haces vectoriales holomorfos sobre X .

Demostración: Como indicamos mas arriba, la gavilla de secciones holomorfas de un haz vectorial holomorfo es una gavilla localmente libre de \mathcal{O} -módulos de rango finito. Supongamos ahora que \mathcal{F} es una gavilla localmente libre de \mathcal{O} -módulos de rango p en X . Entonces se tiene una cubierta abierta $\{U_i\}$ de X y los \mathcal{O}_{U_i} -módulos isomorfismos correspondientes $\phi_i : \mathcal{F}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{O}_{U_i}^p$.

Definimos las funciones $\phi_{ij} : \mathcal{O}_{U_{ij}}^p \rightarrow \mathcal{O}_{U_{ij}}^p$ como $\phi_{ij} = \phi_i \circ \phi_j^{-1}$, donde $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Por la definición, cada ϕ_{ij} es un $\mathcal{O}_{U_{ij}}$ -isomorfismo de $\mathcal{O}_{U_{ij}}^p$ en si mismo, que puede pensarse como una matriz $p \times p$ invertible con entradas en el conjunto de las funciones holomorfas definidas en U_{ij} . Esto es, ϕ_{ij} es una función $\phi_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(p, \mathbb{C})$. Como vimos de la construcción de un haz vectorial a partir de un cociclo, las $\{\phi_{ij}\}$ son las funciones de transición de un haz vectorial holomorfo E en X . Se prueba que $\underline{E} \cong \mathcal{F}$, [F, pág. 80]. ■

Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} gavillas de anillos en una variedad compleja X y $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ la gavilla asociada a la pregavilla $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$, donde $\text{Hom}(\mathcal{F}_U, \mathcal{G}_U)$ es el anillo de homomorfismos de gavillas de \mathcal{F}_U en \mathcal{G}_U . Existe un homomorfismo natural de $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x$ en $\text{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$, que en general no es inyectivo ni suprayectivo [F, pág. 86]. Pero esta "anomalía" desaparece para el caso de una una gavilla localmente libre. En general, sea

X una variedad compleja y \mathcal{F} una gavilla localmente libre de \mathcal{O} -módulos de rango finito en X . Se define la *gavilla dual* \mathcal{F}^* de \mathcal{F} como la gavilla $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{O})$.

Proposición 3.2.27 i) $\mathcal{F}^{**} \cong \mathcal{F}$,

ii) $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{G}$, para cada gavilla de \mathcal{O} -módulos \mathcal{G} ,

iii) $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$ para todo $x \in X$.

Demostración: Ver [F, pág. 86]. ■

3.3 Cohomología de gavillas

En esta sección introducimos una herramienta poderosa para el estudio de las gavillas. La idea central consiste en emplear métodos homológicos para obtener resultados globales sobre variedades analíticas a través de información local. Estas ideas fueron introducidas en el análisis complejo por el matemático francés H. Cartan al rededor de los años 50's. Como una referencia general para esta sección se puede consultar el libro [Go], así como [F], de donde fundamentalmente se extrajeron las demostraciones de las secciones siguientes.

En esta sección convenimos en que todos los espacios en cuestión son Hausdorff y paracompactos, a menos que otra cosa se indique.

Sea

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$$

una sucesión exacta corta de gavillas sobre el espacio X . De los resultados anteriores de gavillas se tiene que para un abierto $U \subset X$ la sucesión de secciones

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U)$$

es exacta, pero no necesariamente se tiene un epimorfismo $\mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$. La

introducción de los grupos de cohomología responde a la necesidad de encontrar una "medida" de la falta de exactitud de dicha sucesión.

Definición 3.3.1 Se dice que una gavilla (\mathcal{F}, π, X) de grupos es blanda si para todos los subconjuntos cerrados K de X y secciones $s \in \mathcal{F}(K)$, s se puede extender a una sección continua de \mathcal{F} sobre todo X . Es decir, que la restricción $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ es suprayectiva.

Proposición 3.3.2 Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{a} \mathcal{G} \xrightarrow{b} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de gavillas sobre X . Si \mathcal{F} es blanda, la sucesión de secciones

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{a} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{b} \mathcal{H}(X) \rightarrow 0$$

es exacta.

Demostración: Sea $s \in \mathcal{H}(X)$. Como $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ es sobre, se puede encontrar una vecindad abierta U_x para cada $x \in X$ y $t_x \in \mathcal{G}(U_x)$ tal que $b(t_x) = s|_{U_x}$, por la definición del límite directo. Por la paracompacidad de X , existe una cubierta abierta localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de X y una familia $\{t_i \in \mathcal{G}(U_i)\}$ tales que $b(t_i) = s|_{U_i}$ para todo $i \in I$. Se escoge un refinamiento $\{V_i\}$ de $\{U_i\}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$, $i \in I$. Sea Λ el conjunto de los pares (g, J) con $J \subset I$ tales que $g \in \mathcal{G}(V_J)$ y $b(g) = s|_{V_J}$, donde $V_J = \bigcup_{j \in J} \bar{V}_j$. El conjunto Λ es no vacío y está parcialmente ordenado por inclusión. Por el lema de Zorn, existe un elemento máximo (t, K) . Basta con probar que $K = I$. Supongamos que $K \subsetneq I$. Sea $i \in I \setminus K$. Entonces $b(t - t_i) = 0$ en $V_K \cap \bar{V}_i$ y existe $r_i \in \mathcal{F}(V_K \cap \bar{V}_i)$ tal que $t - t_i = a(r_i)$. Como \mathcal{F} es suave, r_i se extiende a todo U_i . Pero también $(t, K) \cup (a(r_i) + t_i, i)$ extiende a (t, K) , contradiciendo la maximalidad de (t, K) . Por tanto $K = I$. ■

Corolario 3.3.3 Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{a} \mathcal{G} \xrightarrow{b} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de gavillas. Si \mathcal{F} y \mathcal{G} son blandas, entonces \mathcal{H} es blanda.

Demostración: Sea $K \subset X$ un subconjunto cerrado. Queremos probar que cada $s \in \mathcal{H}(K)$ se extiende a una sección de \mathcal{H} sobre todo X . Notemos primero que la gavilla

restricción \mathcal{F}_K es blanda. Entonces $0 \rightarrow \mathcal{F}_K \xrightarrow{a} \mathcal{G}_K \xrightarrow{b} \mathcal{H}_K \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta de gavillas para la que \mathcal{F}_K es blanda. Aplicando la proposición anterior, existe una sección t de \mathcal{G} sobre K tal que $b(t) = s$. Como por hipótesis \mathcal{G} es blanda, t se extiende a una sección de \mathcal{G} sobre X , lo que da la extensión de s buscada. ■

Corolario 3.3.4 *Sea $0 \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{a_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{a_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{a_2} \dots$ una sucesión exacta larga de gavillas blandas sobre X . Entonces el complejo correspondiente*

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{a_0} \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{a_1} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{a_2} \dots$$

es exacto.

Demostración: Denotemos por \mathcal{K}_i la gavilla $\text{Ker}(a_i)$, para $i \geq 0$. La exactitud de la sucesión exacta larga es equivalente a la exactitud de las sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{F}_i \xrightarrow{a_{i+1}} \mathcal{K}_{i+1} \rightarrow 0$$

para $i \geq 0$. Para $i = 0$, $\mathcal{K}_0 = \mathcal{F}_0$ es blanda. Entonces, por el corolario anterior, \mathcal{K}_1 es blanda. Procediendo por inducción se llega a que cada \mathcal{K}_i es blanda. Así, por la proposición anterior, las sucesiones

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_i(X) \rightarrow \mathcal{F}_i(X) \xrightarrow{a_{i+1}} \mathcal{K}_{i+1}(X) \rightarrow 0$$

son exactas. Pero por lo señalado al principio de la demostración, esto es equivalente a la exactitud del complejo $0 \rightarrow \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{a_0} \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{a_1} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{a_2} \dots$. ■

Un papel importante en la cohomología de gavillas lo juegan las gavillas llamadas *finas*, que definimos a continuación.

Definición 3.3.5 *Una gavilla (\mathcal{F}, π, X) es fina si admite una partición de la unidad del morfismo identidad $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ subordinada a cualquier cubierta abierta localmente*

finita de X . Es decir, dada una cubierta abierta localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$, existen morfismos de gavillas $\eta_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ que satisfacen

1. $\eta_i = 0$ fuera de algún subconjunto cerrado de X que contiene a U_i
2. $\sum_{i \in I} \eta_i = 1_{\mathcal{F}}$.

Todo espacio topológico paracompacto posee una partición de la unidad subordinada a una cubierta abierta localmente finita dada. (ver [H, sección 2.11]).

Ejemplo 3.3.6 Sea E una haz vectorial diferenciable sobre una variedad diferenciable X . Sea $\{U_i\}$ una cubierta abierta localmente finita de X y $\{\eta_i\}$ una partición de la unidad usual subordinada a $\{U_i\}$. Entonces los homomorfismos η_i inducen morfismos $\underline{\eta}_i : \underline{E}_\infty \rightarrow \underline{E}_\infty$, de la gavilla de secciones diferenciables de E en si misma, con lo que la familia $\{\underline{\eta}_i\}$ es una partición de la unidad de $1_{\underline{E}_\infty}$ subordinada a la cubierta $\{U_i\}$. Entonces \underline{E}_∞ es fina.

Ejemplo 3.3.7 Sea \mathcal{F} una gavilla en X . Denotamos por \mathcal{F}^* la gavilla de gérmenes de secciones no necesariamente continuas. Entonces $\mathcal{F}^*(U)$ es el conjunto de todas las secciones de \mathcal{F} sobre U . Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ una cubierta localmente finita de X . Se escogen subconjuntos $K_i \subset U_i$ tales que $K_i \cap K_j = \emptyset$ para $i \neq j$ y $\bigcup_i K_i = X$. Se definen las funciones $\eta_i : \mathcal{F}^* \rightarrow \mathcal{F}^*$ por $\eta_i(s) = s$ si $s \in K_i$, $\eta_i(s) = 0$ si $s \notin K_i$. Las funciones η_i son morfismos de gavillas y de hecho dan una partición de la unidad de \mathcal{F}^* , mostrando que esta gavilla es fina.

Presentamos los siguientes lemas que en si mismos son importantes, pero que a su vez servirán para probar la proposición que sigue.

Lema 3.3.8 Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una cubierta localmente finita de subconjuntos cerrados de X . Supongamos que (\mathcal{F}, π, X) es una gavilla de anillos en X y que para cada $i \in I$ se tienen secciones $s_i \in \mathcal{F}_{M_i}$. Si las s_i satisfacen las condición $s_i = s_j$ en $M_i \cap M_j$, entonces existe $s \in \mathcal{F}(X)$ tal que $s|_{M_i} = s_i$.

Demostración: Lo que tiene que demostrarse es la continuidad de s . Sea $x \in X$. Podemos encontrar una vecindad abierta U de x que intersecta sólo a un número finito de los M_i , digamos M_1, \dots, M_p . Como los M_i son cerrados, podemos suponer que U es tal que $x \in M_1 \cap \dots \cap M_p$. Reduciendo U si es necesario podemos suponer también que existe $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t(x) = s(x) = s_1(x) = \dots = s_p(x)$. Por la definición de la topología de \mathcal{F} , existe una vecindad abierta U_j de x tal que $t = s_j$ en U_j , $1 \leq j \leq p$. Podemos suponer que $U = U_j$, $p \geq j \geq 1$. Entonces s y t son iguales en $U \cap (M_1 \cup \dots \cup M_p) = U$, con lo que se tiene la continuidad de s en x . ■

Lema 3.3.9 *Sea S un subconjunto cerrado de un espacio paracompacto X . Supongamos que \mathcal{F} es una gavilla en X y $s \in \mathcal{F}(S) = \mathcal{F}_S(S)$. Entonces existe una vecindad abierta V de S en X y $\tilde{s} \in \mathcal{F}(V)$ tal que $\tilde{s}|_S = s$.*

Demostración: Por la definición de la topología de \mathcal{F} , podemos encontrar una vecindad abierta U para cada punto $s \in X$ y $t \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t|_{U \cap S} = s$. Así, por la paracompacidad de X , podemos encontrar una cubierta abierta localmente finita $\{U_i\}_{i \in I}$ de S y secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que $s_i|_{U_i \cap S} = s$ para todo $i \in I$. Tomamos un refinamiento $\{V_i\}$ de $\{U_i\}$ tal que $\bar{V}_i \subset U_i$ para todo $i \in I$ y sea W el conjunto de todos los $x \in \bigcup_i \bar{V}_i$ tales que si $x \in \bar{V}_i \cap \bar{V}_j$ entonces $s_i(x) = s_j(x)$. Por el lema anterior aplicado a la gavilla restricción $\mathcal{F}|_W$, el conjunto $\{s_i\}$ define una sección continua \tilde{s} de \mathcal{F} sobre W . Afirmamos que W contiene una vecindad abierta de S . Sea $x \in S$. Entonces existe una vecindad abierta V de x que intersecta a sólo un número finito de los \bar{V}_i 's, digamos $\bar{V}_1, \dots, \bar{V}_p$. Restringiendo V si es necesario, podemos suponer que x está en cada uno de estos conjuntos. Ahora $s_1(x) = \dots = s_p(x)$ y así, restringiendo a V si fuera necesario, podemos suponer que las s_1, \dots, s_p coinciden en todo V . Por la construcción $V \subset W$. ■

Proposición 3.3.10 *Toda gavilla fina es blanda.*

Demostración: Sea \mathcal{F} una gavilla blanda sobre X , $K \subset X$ cerrado y $s \in \mathcal{F}(K)$. Podemos encontrar una vecindad abierta U de K en X y una extensión $\tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ de

s. Tomemos la cubierta abierta $\{U, X \setminus K\}$ y una partición de la unidad $\{\theta, \eta\}$ de $1_{\mathcal{F}}$ subordinada a esta cubierta. Entonces $\theta|_K = 1_{\mathcal{F}}$ y haciendo $\tilde{s} = 0$ fuera de U , se ve que $\theta\tilde{s}$ es la sección de \mathcal{F} buscada. ■

Definición 3.3.11 Sea \mathcal{F} una gavilla en X . Una resolución de \mathcal{F} es una sucesión exacta larga de gavillas

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

Una resolución se llamará blanda (resp. fina) si cada una de las gavillas \mathcal{F}_i es blanda (resp. fina).

Proposición 3.3.12 Cada gavilla \mathcal{F} en X tiene una resolución fina.

Demostración: Sea \mathcal{F}^* la gavilla de gérmenes de secciones no necesariamente continuas de \mathcal{F} y sea $\varepsilon: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$ la inclusión correspondiente. Sea $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}^*$ y definamos $\overline{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}^*/\mathcal{F}$. Observemos que esta gavilla cociente es de nuevo fina, por la construcción de la partición de la unidad de \mathcal{F}^* construida arriba. Se tiene la sucesión exacta $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \xrightarrow{q_0} \overline{\mathcal{F}}_0 \rightarrow 0$. Procediendo por inducción, escribimos $\mathcal{F}_{j+1} = (\overline{\mathcal{F}}_j)^*$ y $\overline{\mathcal{F}}_{j+1} = \mathcal{F}_{j+1}/\mathcal{F}_{j+1}^*$. Para $j \geq 0$ se tienen las sucesiones cortas exactas

$$0 \rightarrow \overline{\mathcal{F}}_j \xrightarrow{\varepsilon_{j+1}} \mathcal{F}_{j+1} \xrightarrow{q_{j+1}} \overline{\mathcal{F}}_{j+1} \rightarrow 0,$$

donde $\overline{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}$. Estas sucesiones exactas cortas inducen la sucesión exacta larga

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \dots$$

donde $d_j = \varepsilon_{j+1} \circ q_j$ y $\varepsilon = \varepsilon_0$. Dado que las gavillas \mathcal{F}_j son todas finas, esta es la resolución fina de \mathcal{F} buscada. ■

Nota 3.3.13 La resolución construida en la demostración anterior se llama resolución canónica de \mathcal{F} .

Todo lo anterior nos permite introducir los grupos de cohomología asociados a una gavilla. Sea \mathcal{F} una gavilla (de grupos) en X y $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{c_0} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \dots$ la resolución canónica de \mathcal{F} . Asociado a esta resolución se tiene un complejo

$$0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{c_0^*} \mathcal{F}_0(X) \xrightarrow{d_0^*} \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{d_1^*} \dots$$

Definición 3.3.14 El grupo $H^p(X, \mathcal{F})$, $p \geq 0$, definido por

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}) &= \text{Ker}(d_0^*) \\ H^p(X, \mathcal{F}) &= \text{Ker}(d_p^*) / \text{Im}(d_{p-1}^*), \quad p > 0, \end{aligned}$$

se llama el p -ésimo grupo de cohomología de X con coeficientes en la gavilla \mathcal{F} .

Nota 3.3.15 Observese que los grupos $H^p(X, \mathcal{F})$ resultan ser abelianos y en principio dependen de la resolución de \mathcal{F} escogida. Mas adelante probaremos que los grupos de cohomología no dependen de la resolución escogida.

Aunque los grupos de cohomología introducidos no resultan en general calculables, el siguiente resultado ilustra la importancia de las gavillas finas para el cálculo de dichos grupos. Para ver aspectos de la demostración remitimos a [Go].

Teorema 3.3.16 Los grupos de cohomología de X satisfacen lo siguiente:

1. Dada una gavilla \mathcal{F} en X se tiene

- i) $H^0(X, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$.
- ii) $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para $p > 0$ si \mathcal{F} es fina.

2. Si $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas sobre X , entonces, para $p \geq 0$ existen homomorfismos inducidos $a^p : H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{G})$ tales que

- i) $a^0 : H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G})$ es el morfismo de secciones inducido por a .
- ii) $1_{\mathcal{F}}^p$ es la identidad para $p \geq 0$, donde $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ es la identidad.
- iii) Si $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ son morfismo de gavillas sobre X , entonces $(b \circ a)^p = b^p \circ a^p : H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{H})$.

3. Si $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{a} \mathcal{G} \xrightarrow{b} \mathcal{H} \rightarrow 0$ es una sucesión exacta corta, entonces, para $p \geq 0$, existe un homomorfismo de conexión $\delta : H^p(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F})$ tal que

i) La sucesión larga de cohomología

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{a^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{b^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{a^1} \dots$$

es exacta.

ii) Dado un diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{a} & \mathcal{G} & \xrightarrow{b} & \mathcal{H} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \eta & & \downarrow \phi & & \downarrow \omega & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{c} & \mathcal{B} & \xrightarrow{d} & \mathcal{C} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

el diagrama de cohomología correspondiente

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{a^0} & H^0(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{b^0} & H^0(X, \mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{a^1} & \dots \\ & & \downarrow \eta^0 & & \downarrow \phi^0 & & \downarrow \omega^0 & & \downarrow \eta^1 & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{A}) & \xrightarrow{c^0} & H^0(X, \mathcal{B}) & \xrightarrow{d^0} & H^0(X, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{A}) & \xrightarrow{c^1} & \dots \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: 1.i) es claro y 1.ii) es una consecuencia directa del corolario previo. Para demostrar el punto 2 usamos las convenciones de notación usadas en la demostración de la proposición anterior. Observemos que un morfismo $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ induce un morfismo $a^0 : \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{G}_0$ y por lo tanto un morfismo $\bar{a}^0 : \bar{\mathcal{F}}_0 \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_0$. Claramente el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & \mathcal{F}_0 & \rightarrow & \bar{\mathcal{F}}_0 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow a^0 & & \downarrow \bar{a}^0 & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G} & \rightarrow & \mathcal{G}_0 & \rightarrow & \bar{\mathcal{G}}_0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

conmuta. Procediendo por inducción, vemos que para $j \geq 0$ tenemos morfismos $a^j :$

$\mathcal{F}_j \rightarrow \mathcal{G}_j, \bar{a}^j : \bar{\mathcal{F}}_j \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_j$ tales que los diagramas

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \bar{\mathcal{F}}_j & \rightarrow & \mathcal{F}_j & \rightarrow & \bar{\mathcal{F}}_{j+1} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{a}^j & & \downarrow a^j & & \downarrow \bar{a}^{j+1} & & \\ 0 & \rightarrow & \bar{\mathcal{G}}_j & \rightarrow & \mathcal{G}_j & \rightarrow & \bar{\mathcal{G}}_{j+1} & \rightarrow & 0 \end{array}$$

conmutan. Así, tenemos una cadena conmutativa de sucesiones exactas largas

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{F}_0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots \\ & & \downarrow a & & \downarrow a^0 & & \downarrow a^1 & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots \end{array}$$

y sus correspondientes diagramas conmutativos de secciones

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{F}_0(X) & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{F}_1(X) & \xrightarrow{d_1} & \dots \\ & & \downarrow a & & \downarrow a^0 & & \downarrow a^1 & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{G}(X) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathcal{G}_0(X) & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}_1(X) & \xrightarrow{d_1} & \dots \end{array}$$

Supongamos ahora que $s \in \text{Ker}(d_j^*)$. La conmutatividad de los diagramas anteriores implica que $d_j^*(a^j s) = a^j d_j^* s = 0$, con lo que $a^j(\text{Ker}(d_j^*)) \subset \text{Ker}(d_j^*)$; análogamente, $a^j(\text{Im}(d_{j-1}^*)) \subset \text{Im}(d_{j-1}^*)$. Entonces a^j induce un homomorfismo $a^j : H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{G})$. Las propiedades 2.i), ii) y iii) se prueban de manera rutinaria a partir de la definición de los morfismos inducidos al nivel de la cohomología y de la naturalidad de las construcciones.

Para probar el punto 3 tomamos resoluciones canónicas de las gavillas \mathcal{F}, \mathcal{G} , y \mathcal{H} . Como se hizo en la demostración del punto 2, se tienen sucesiones entre estas resoluciones y los correspondientes diagramas conmutativos de secciones. Un fragmento

de esos diagramas es el siguiente

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{j-1}(X) & \xrightarrow{\alpha^{j-1}} & \mathcal{G}_{j-1}(X) & \xrightarrow{\beta^{j-1}} & \mathcal{H}_{j-1}(X) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_{j-1} & & \downarrow d_{j-1} & & \downarrow d_{j-1} \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_j(X) & \xrightarrow{\alpha^j} & \mathcal{G}_j(X) & \xrightarrow{\beta^j} & \mathcal{H}_j(X) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_j & & \downarrow d_j & & \downarrow d_j \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{j+1}(X) & \xrightarrow{\alpha^{j+1}} & \mathcal{G}_{j+1}(X) & \xrightarrow{\beta^{j+1}} & \mathcal{H}_{j+1}(X) \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_{j+1} & & \downarrow d_{j+1} & & \downarrow d_{j+1} \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{j+2}(X) & \xrightarrow{\alpha^{j+2}} & \mathcal{G}_{j+2}(X) & \xrightarrow{\beta^{j+2}} & \mathcal{H}_{j+2}(X) \rightarrow 0
 \end{array}$$

Observemos que los renglones en el diagrama son todos exactos dado que las gavillas \mathcal{F}_i , \mathcal{G}_i y \mathcal{H}_i son blandas. Lo que haremos enseguida es dar la construcción del homomorfismo de conexión δ .

Sea $\alpha \in H^j(X, \mathcal{H})$ y $H \in \text{Ker}(d_j) \subset \mathcal{H}_j(X)$ un representante de α . Ahora, $H = \beta^j(G)$ para algún $G \in \mathcal{G}_j(X)$. Dado que $d_j \beta^j = \beta^{j+1} d_j$, se ve que $\beta^{j+1} d_j(G) = 0$ y así existe $F \in \mathcal{F}_{j+1}(X)$ tal que $\alpha^{j+1}(F) = d_j(G)$. Pero $\alpha^{j+2} d_{j+1}(F) = d_{j+1} \alpha^{j+1}(F) = d_{j+1} d_j(G) = 0$. Como α^{j+2} es inyectivo se sigue que $d_{j+1}(F) = 0$, con lo que F define un elemento de $H^{j+1}(X, \mathcal{F})$. Afirmamos que la clase de F en $H^{j+1}(X, \mathcal{F})$ depende sólo de α , y no de la elección de los F, G y H . Supongamos que F', G' y H' son otra elección. Dado que $H - H'$ es el cero de $H^j(X, \mathcal{H})$, existe $\tilde{H} \in \mathcal{H}_{j-1}(X)$, tal que $H - H' = d_{j-1}(\tilde{H})$. Por construcción, $\tilde{H} = \beta^{j-1}(\tilde{G})$ para algún $\tilde{G} \in \mathcal{G}_{j-1}(X)$ y así $\beta^j(G - G' - d_{j-1}(\tilde{G})) = 0$. Por lo tanto $G - G' - d_{j-1}(\tilde{G}) = \alpha^j(\tilde{F})$, para algún $\tilde{F} \in \mathcal{F}_j(X)$. Finalmente, $\alpha^{j+1} d_j(F) = d_j \alpha^j(F) = d_j(G) - d_j(G') = \alpha^{j+1}(F) - \alpha^{j+1}(F') = \alpha^{j+1}(F - F')$, y así, dado que α^{j+1} es inyectivo, $F - F' = d_j(F)$. Por lo tanto F y F' definen la misma clase en $H^{j+1}(X, \mathcal{F})$, y el homomorfismo $\delta : H^j(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{j+1}(X, \mathcal{F})$ está bien definido.

La prueba de 3.i) consiste en una "cacería" de elementos. Para 3.ii) se toma una resolución canónica de las sucesiones y se forma el correspondiente diagrama conmutativo de sucesiones de secciones. La conmutatividad de los cuadrados que no tienen a δ es una consecuencia directa de 2.iii). Para ver la conmutatividad de los demás cuadrados, se

toma $\alpha \in H^j(X, \mathcal{H})$, y se encuentran, como arriba, elementos F, G y H tales que las clases de cohomología de F y H definen $\delta\alpha$ y α respectivamente. Basta observar entonces que la clase de $\omega^j H$ es $\eta^j \alpha$ y que $\omega^j H, \phi^j G$ y $\eta^{j+1} F$ es una sucesión que define $\delta(\omega^j \alpha)$. Así se tiene que $\delta\omega^j = \omega^{j+1} \delta$, lo que termina la demostración. ■

El siguiente teorema, aunque tiene un carácter "teórico", resulta de importancia para realizar cálculos. Esto se verá cuando más adelante se introduzcan otros grupos de cohomología equivalentes a los definidos hasta ahora.

Teorema 3.3.17 Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \dots$ una resolución de una gavilla \mathcal{F} . Supongase que $H^j(X, \mathcal{F}_k) = 0$ para $j > 0, k \geq 0$. Entonces

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong \text{Ker}(d_0^*);$$

$$H^p(X, \mathcal{F}) \cong \text{Ker}(d_p^*) / \text{Im}(d_{p-1}^*), \quad p > 0.$$

Demostración: Sea $\mathcal{K}_j = \text{Ker}(d_j)$, $j \geq 0$. Como señalamos anteriormente, la exactitud de la resolución canónica de \mathcal{F} es equivalente a la exactitud de la sucesión

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_j \rightarrow \mathcal{F}_j \xrightarrow{d_j} \mathcal{K}_{j+1} \rightarrow 0, \quad j \geq 0.$$

Sea

$$0 \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}_j) \rightarrow H^p(X, \mathcal{K}_{j+1}) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(X, \mathcal{K}_j) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}_j) \rightarrow \dots$$

la sucesión exacta larga correspondiente a la sucesión exacta corta. Como $H^p(X, \mathcal{F}_j) = 0$, $p > 0$, se tiene que

$$H^p(X, \mathcal{K}_{j+1}) \cong H^{p+1}(X, \mathcal{K}_j), \quad p > 0, j \geq 0. \quad \dots(*)$$

Si consideramos también el fragmento de la sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}_j) \xrightarrow{d_j^*} H^0(X, \mathcal{K}_{j+1}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{K}_j) \rightarrow 0$$

entonces $H^1(X, \mathcal{K}_j) \cong H^0(X, \mathcal{K}_{j+1})/d_j^* H^0(X, \mathcal{F}_j)$. Como $H^0(X, \mathcal{K}_{j+1}) = \text{Ker}(d_{j+1}^*)$

$$H^1(X, \mathcal{K}_j) \cong \text{Ker}(d_{j+1}^*)/\text{Im}(d_j^*), \quad j \geq 0, \quad \dots (**)$$

Aplicando repetidamente (*) y usando (**) se tiene que para $p > 0$

$$H^p(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{K}_0) \cong H^{p-1}(X, \mathcal{K}_1) \cong \dots \cong H^1(X, \mathcal{K}_{p-1}) \cong \text{Ker}(d_p^*)/\text{Im}(d_{p-1}^*).$$

Finalmente, para $p = 0$ el resultado se sigue de la exactitud de la sucesión

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{c^*} H^0(X, \mathcal{F}_0) \rightarrow H^0(X, \mathcal{K}_1).$$

■

Como una consecuencia de estos resultados tenemos el siguiente

Corolario 3.3.18 *La cohomología de X con coeficientes en \mathcal{F} se puede calcular usando cualquier resolución fina (resp. blanda) de \mathcal{F} . En particular, el teorema previo a este último determina los grupos $H^j(X, \mathcal{F})$ salvo isomorfismo.*

3.3.1 Cohomología de Čech

Para terminar esta sección introducimos la *cohomología de Čech* para los espacios paracompactos. Esta es una cohomología que para muchos de los casos importantes es calculable e isomorfa a la cohomología anteriormente estudiada.

Sean \mathcal{F} una gavilla sobre X , $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X y p un entero no negativo. Dado $s = (s_0, \dots, s_p) \in I^{p+1}$, pongamos $U_s = U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_p}$. Una p -cocadena de \mathcal{U} con valores en \mathcal{F} es una función c que asigna a cada $s \in I^{p+1}$ una sección $c_s \in \mathcal{F}(U_s)$ alternante. Esto es, tal que $c_{(s_0, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_p)} = -c_{(s_0, \dots, s_j, \dots, s_i, \dots, s_p)}$ para $p \geq j > i \geq 0$. Se denota por $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ al grupo abeliano de todas las p -cocadenas de \mathcal{U} con valores en la gavilla \mathcal{F} .

Para $p \geq 0$, definimos un operador cofrontera $D : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dado por

$$(Dc)_s = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j c_{s_0 \dots \widehat{s}_j \dots s_{p+1}}, \quad s \in I^{p+2}.$$

Donde como de costumbre el símbolo $\widehat{}$ indica que el correspondiente índice s_j se omite.

Un cálculo simple demuestra que $D^2 = 0$. Se denota por

$$Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Ker}(D^p) = \{c \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \mid Dc = 0\},$$

$$B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{Im}(D^{p-1}) = \{Dc \mid c \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})\},$$

a los grupos de p -cociclos y p -cofronteras respectivamente. Por definición se tiene $C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ y $B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. Como $D^2 = 0$, $B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es un subgrupo de $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Al grupo cociente

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

se le llama el p -ésimo grupo de cohomología de \mathcal{U} con coeficientes en \mathcal{F} .

Lema 3.3.19 Para cada gavilla \mathcal{F} en X se tiene

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

Demostración: De las definiciones se tiene que $Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Pero si $c \in Z^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $c_i - c_j = 0$ en $U_i \cap U_j$ para todo $i, j \in I$. Entonces se define $f \in \mathcal{F}(X)$ por $f|_{U_i} = c_i$. ■

Un resultado básico y fácil de probar es el siguiente. Ver [F, pág. 108]

Lema 3.3.20 Sea $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas sobre X . Para $p \geq 0$, se tienen homomorfismos inducidos $a_{\mathcal{U}}^p : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ que cumplen las siguientes propiedades

i) $a_{\mathcal{U}}^0 : H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ es el morfismo en las secciones inducido por a .

ii) Si $a = 1_{\mathcal{F}}$, $a_{\mathcal{U}}^p : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es la identidad.

iii) Si $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ y $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ son morfismos de gavillas en X , entonces $(ba)_{\mathcal{U}}^p = b_{\mathcal{U}}^p a_{\mathcal{U}}^p$.

Lema 3.3.21 *Supóngase que \mathcal{F} es una gavilla fina. Entonces $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $p > 0$.*

Demostración: Sea $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ un refinamiento abierto localmente finito de \mathcal{U} de tal manera que existe una función $\phi : J \rightarrow I$ con $\bar{V}_j \subset U_{\phi(j)}$, $j \in J$. Se escoge $\{\eta_j\}$ una partición de la unidad para la gavilla \mathcal{F} subordinada a la cubierta \mathcal{V} . Sea $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Para $j \in J$ se define $b^j \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ por

$$b_s^j = \begin{cases} 0 & \text{si } U_s \cap V_j = \emptyset, \\ (-1)^p \eta_j c_{s_0 \dots \phi(j)} & \text{si } U_s \cap V_j \neq \emptyset \end{cases},$$

donde $\eta_j c_{s_0 \dots \phi(j)}$ se define como 0 fuera de V_j . Un cálculo sencillo muestra que para todo $s \in I^{p+1}$ se tiene

$$(Db^j)_s = \eta_j c_s.$$

Sea $b = \sum_{j \in J} b^j$. Entonces, dado que $\{\eta_j\}$ es una partición de la unidad, $Db = c$, por lo que $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. ■

Uno de los resultados importantes de la cohomología de Čech es el teorema de Leray, pues permite calcular grupos de cohomología de espacios importantes.

Teorema 3.3.22 *Sea \mathcal{F} una gavilla en X y \mathcal{U} una cubierta abierta. Para $p \geq 0$ se tiene un homomorfismo canónico $p(\mathcal{U}) : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$ que satisfacen lo siguiente*

1. Si $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un homomorfismo de gavillas, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{p(\mathcal{U})} & H^p(X, \mathcal{F}) \\ \downarrow a_{\mathcal{U}}^p & & \downarrow a^p \\ H^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) & \xrightarrow{p(\mathcal{U})} & H^p(X, \mathcal{G}) \end{array}$$

conmuta.

2. (Teorema de Leray) Si $H^p(U_s, \mathcal{F}) = 0$ para todo $s \in I^{p+1}$ con $p > 0$, entonces $p(\mathcal{U})$ es un isomorfismo.

Demostración: Pongamos $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}$ y sea $0 \rightarrow \mathcal{F}_{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{F}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{d_1} \dots$ la resolución canónica de \mathcal{F} . Para $s \in I^{p+1}$ tenemos la sucesión exacta de secciones

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_{-1}(U_s) \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{F}_0(U_s) \xrightarrow{d_0} \dots$$

Tomando la suma directa sobre I^{p+1} , tenemos para $p \geq 0$ sucesiones

$$0 \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{-1}) \xrightarrow{d_{-1}} C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}_0) \xrightarrow{d_0} \dots \quad (*)$$

Asociadas a cada una de las gavillas \mathcal{F}_j , $j \geq -1$, tenemos las sucesiones

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_j \xrightarrow{D_{-1}} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_j) \xrightarrow{D_0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \quad (**)$$

Aquí D_{-1} denota la inclusión y D_j es el operador cofrontera para $j \geq 0$. Como las gavillas \mathcal{F}_j son finas, las sucesiones (**) son exactas para $j \geq 0$. Combinando las sucesiones (*) y (**) se obtiene un diagrama conmutativo de sucesiones

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{F}_{-1}(X) & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathcal{F}_0(X) & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{F}_1(X) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow D_{-1} & & \downarrow D_{-1} & & \downarrow D_{-1} \\
 0 & \rightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_0) & \xrightarrow{d_0} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}_1) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow D_0 & & \downarrow D_0 & & \downarrow D_0 \\
 0 & \rightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{-1}) & \xrightarrow{d_{-1}} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_0) & \xrightarrow{d_0} & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_1) \rightarrow \dots \\
 & & \downarrow D_1 & & \downarrow D_1 & & \downarrow D_1 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Las columnas de este diagrama son exactas, a excepción de la primera. El siguiente paso es construir el homomorfismo $p(\mathcal{U}) : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F})$. Sea $c_0 \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un representante del elemento $\alpha \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. La idea es construir inductivamente una

sucesión $c_j \in C^{p-j}(\mathcal{U}, \mathcal{F}_{j-1})$ que cumpla la condición

$$d_{p-j}c_j = D_{p-j+1}c_{j+1}, \quad p \geq j \geq 0.$$

Supongamos que se han construido los c_j , $p+1 > r \geq j$. Entonces $D_{p-r}d_{r-1}c_r = d_{r-1}D_{p-r}c_r = d_{r-1}d_{r-2}c_{r-1} = 0$. Así, por la exactitud de la $(r+1)$ -ésima columna, existe $c_{r+1} \in C^{p-r-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}_r)$ tal que $D_{p-r-1}c_{r+1} = d_{r-1}c_r$, lo que completa el paso inductivo. Sea ahora $c_{p+1} \in \mathcal{F}_p(X)$. Obsérvese que $D_{-1}d_p c_{p+1} = d_p D_{-1}c_{p+1} = d_p d_{p-1}c_p = 0$ y como D_{-1} es inyectivo, $d_p c_{p+1} = 0$. De esto se tiene que $c_{p+1} \in \text{Ker}(d_p)$ define una clase en $H^p(X, \mathcal{F})$. Es fácil ver que por la construcción hecha, esta clase depende sólo de α y no de las elecciones de los c_0, \dots, c_{p+1} . Esto termina la construcción del homomorfismo $p(\mathcal{U})$.

El punto 1 se sigue inmediatamente del hecho de la sucesión c_0, \dots, c_{p+1} va a dar a la sucesión c_0, \dots, c_{p+1} que define $p(\mathcal{U})(a(\alpha))$.

Si la condición del punto 2 se cumple, entonces, tanto los renglones como las columnas del diagrama (incluyendo el primer renglón y la primera columna) son exactas, y por simetría se puede construir una inversa para $p(\mathcal{U})$. ■

Proposición 3.3.23 Sean \mathcal{U}, \mathcal{V} cubiertas abiertas de X y \mathcal{V} un refinamiento de \mathcal{U} . Dada una gavilla \mathcal{F} en X existe un homomorfismo canónico

$$p(\mathcal{U}, \mathcal{V}) : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

que satisface lo siguiente.

1. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{p(\mathcal{U}, \mathcal{V})} & H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \\ \searrow p(\mathcal{U}) & & \swarrow p(\mathcal{V}) \\ & H^p(X, \mathcal{F}) & \end{array}$$

conmuta para $p \geq 0$.

2. Si $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un morfismo de gavillas, se tiene $p(\mathcal{U}, \mathcal{V})a_{\mathcal{U}}^p = a_{\mathcal{V}}^p p(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, $p \geq 0$.

3. Si \mathcal{W} es un refinamiento de \mathcal{V} entonces $p(\mathcal{U}, \mathcal{W}) = p(\mathcal{V}, \mathcal{W})p(\mathcal{U}, \mathcal{V})$.

Demostración: Sean $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ y una función de refinamiento $\phi : J \rightarrow I$ tal que $V_j \subset U_{\phi(j)}$, $j \in J$. Dado $c \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, se define $\tilde{\phi}c \in C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ por

$$(\phi c)_s = c_{\phi(s_0) \dots \phi(s_p)}|_{V_s}, \quad s = (s_0, \dots, s_p) \in I^{p+1}.$$

Como claramente $\tilde{\phi}$ conmuta con el operador cofrontera D , induce una función $\phi_* : H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. Probamos que ϕ_* es independiente de la elección de ϕ . Para ver esto supongamos que ϕ' es otra función de refinamiento. La idea es construir una "homotopía" (en el sentido de complejos de cocadenas) $H : C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ entre $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\phi}'$.

Se da a J un orden total. Entonces si $s_0 < \dots < s_p$ y $c \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ se define

$$(Hc)_s = \sum_{j=0}^p (-1)^j c_{\phi(s_0) \dots \phi(s_j) \phi'(s_j) \dots \phi'(s_p)}.$$

y se extiende por linealidad requiriendo que H sea alternante con respecto a s . Un cálculo directo muestra que

$$HD + DH = \tilde{\phi}' - \tilde{\phi}.$$

Así, si $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, tenemos que $(\tilde{\phi}' - \tilde{\phi})(c) \in B^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$. De esto setiene que $\phi_* = \phi'_*$ y se puede poner $p(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \phi_*$ para cualquier función de refinamiento ϕ . El resto de la demostración son cálculos sencillos. ■

De la proposición anterior se infiere que $\{H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}), p(\mathcal{U}, \mathcal{V})\}$ es un sistema directo. Entonces se puede definir

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}).$$

El grupo $H^p(X, \mathcal{F})$ se llama el p -ésimo grupo de cohomología de Čech de X con coeficientes en \mathcal{F} .

De la primera parte de la proposición anterior vemos que para $p \geq 0$ se tienen homo-

morfismos canónicos

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\mathcal{U}) &: H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}) \\ \mathcal{X} &: H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Estos homomorfismos satisfacen las propiedades usuales de naturalidad: Si $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ es un homomorfismo de gavillas, se tiene un homomorfismo inducido $\alpha^p : H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^p(X, \mathcal{G})$ que satisfacen las condiciones del punto 2 del teorema anterior y $\mathcal{X}\alpha^p = \mathcal{X}\alpha^p$, $p \geq 0$.

Como habíamos dicho antes, los grupos de cohomología introducidos hasta ahora son isomorfos. Por principio es suficiente demostrar que los grupos de Čech satisfacen todas las propiedades del teorema citado. Para ello bastaría con construir una sucesión exacta larga de cohomología para H' . Este es el contenido del siguiente resultado, pero presentado en forma más general.

Teorema 3.3.24 Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{a} \mathcal{G} \xrightarrow{b} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de gavillas en X . Para $p \geq 0$ se tiene un homomorfismo de conexión $\delta : H^p(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F})$ que cumple lo siguiente.

i) La sucesión de cohomología de Čech

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{a^0} H^0(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{b^0} H^0(X, \mathcal{H}) \xrightarrow{\delta} H^1(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{a^1} \dots$$

es exacta.

ii) El diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{a^0} & H^0(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{b^0} & H^0(X, \mathcal{H}) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{a^1} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H^0(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{a^0} & H^0(X, \mathcal{G}) & \xrightarrow{b^0} & H^0(X, \mathcal{H}) & \rightarrow & H^1(X, \mathcal{F}) & \xrightarrow{a^1} & \dots \end{array}$$

conmuta.

Demostración: Sea \mathcal{U} una cubierta abierta de X . Escribimos $\tilde{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = bC^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$. Entonces la sucesión

$$0 \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{G}) \rightarrow \tilde{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

es exacta. Dado que $D\tilde{C}^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \subset \tilde{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ podemos definir el grupo $\tilde{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) = \tilde{Z}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})/\tilde{B}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$. De la misma manera como se hizo en el punto 3 del teorema pasado se define un homomorfismo de conexión $\tilde{\delta} : \tilde{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow \tilde{H}^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y se obtiene una sucesión exacta larga para los grupos de cohomología $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $H^*(\mathcal{U}, \mathcal{G})$ y $\tilde{H}^*(\mathcal{U}, \mathcal{H})$. Como los límites directos respetan la conmutatividad y preserva la exactitud de sucesiones exactas (ver ??), se tiene la sucesión exacta larga de cohomología

$$\dots \rightarrow \tilde{H}^p(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha^{p+1}} H^{p+1}(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\beta^{p+1}} \tilde{H}^{p+1}(X, \mathcal{H}) \rightarrow \dots$$

Afirmamos que $\tilde{H}^p(X, \mathcal{H}) \cong H^p(X, \mathcal{H})$. Para esto es suficiente demostrar que si $h \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{H})$ se puede definir un refinamiento $\mathcal{V} = \{V_j\}$ de $\mathcal{U} = \{U_i\}$ y una función de refinamiento $\phi : J \rightarrow I$ tal que $\tilde{\phi}h \in \tilde{C}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H})$. Como X es paracompacto, podemos suponer que la cubierta \mathcal{U} es localmente finita. Sea $\mathcal{W} = \{W_i\}$ un refinamiento de \mathcal{U} tal que $\bar{W}_i \subset U_i$, $i \in I$. Se escoge una vecindad abierta V_x para cada punto $x \in X$ tal que

- i) Si $x \in W_i$, $V_x \subset W_i$ y si $V_x \cap W_j \neq \emptyset$, entonces $V_x \cap U_j$
- ii) Si $x \in U_s$ y $s \in I^{p+1}$, entonces $V_x \subset U_s$.

Observese que que las condiciones i y ii siguen siendo válidas para vecindades abiertas de x contenidas en V_x . Dado que $b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ es suprayectiva, se puede encontrar (restringiendo a V_x si es necesario) un $g_x^s \in \mathcal{G}(V_x)$ tal que $bg_x^s = h_s|_{V_x}$. Se escoge una función de refinamiento $\phi : X \rightarrow I$ para las cubiertas $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in X}$ y \mathcal{U} tales que $x \in \mathcal{W}_{\phi(x)}$ para todo $x \in X$. Sea $t = (t_0, \dots, t_p) \in X^{p+1}$ y supongamos que $V_i \neq \emptyset$. Por la elección de ϕ , $V_{t_0} \cap \mathcal{W}_{\phi(t_j)} \neq \emptyset$ para $0 \leq j \leq p$, y por i) $V_{t_0} \subset U_{\phi(t_j)}$. Entonces $V_{t_0} \subset U_{\phi(t)}$,

donde $\phi(t) = \phi(t_0) \dots \phi(t_p)$. Para cada $t \in X^{p+1}$, definimos $g_t \in \mathcal{G}(V_t)$ como

$$g_t = g_t^{i_0}.$$

Entonces claramente $bg_t = h_{\phi(t)}|_{V_t}$ y $\tilde{\phi}h \in \tilde{C}^p(\mathcal{V}, \mathcal{H})$.

Lo que resta es demostrar ii). Damos la idea general de la demostración omitiendo ciertos cálculos. Se toman las resoluciones canónicas de \mathcal{F}, \mathcal{G} y \mathcal{H} respectivamente y se fija una cubierta abierta \mathcal{U} de X y se toman los complejos de cocadenas apropiados sobre cada término de las resoluciones canónicas, como en la demostración del teorema ???. Se obtiene así un diagrama "tridimensional" de diagramas conmutativos de sucesiones. Se hace entonces una "cacería" de elementos para verificar que la definición de $\tilde{\delta} : \tilde{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{H}) \rightarrow H^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ es compatible con el homomorfismo de conexión $\delta : H^p(X, \mathcal{H}) \rightarrow H^{p+1}(X, \mathcal{F})$. Lo que se tiene que probar es que las transformaciones $p(\mathcal{U})$ que definen la sucesión para $\tilde{\delta}$ se dan al nivel de las sucesiones definidas por δ . El paso final consiste en tomar límites directos. ■

Sea Y un subconjunto cerrado de un espacio topológico X y $i : Y \rightarrow X$ la inclusión natural. Sea \mathcal{F} una gavilla en Y . Si $\tilde{\mathcal{F}}$ es la extensión trivial de \mathcal{F} a X , entonces

Proposición 3.3.25 *Los grupos de cohomología $H^{i_q}(Y, \mathcal{F})$ y $H^{i_q}(X, \tilde{\mathcal{F}})$ son naturalmente isomorfos.*

Demostración: Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de X . Entonces $\mathcal{U}|_Y = \{U_i \cap Y\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de Y . De hecho toda cubierta abierta de Y se obtiene de esta manera. Para cada conjunto abierto U de X los grupos $\Gamma(U \cap Y, \mathcal{F})$ y $\Gamma(U, \tilde{\mathcal{F}})$ son naturalmente isomorfos. Además, los isomorfismos son compatibles con las restricciones r_{UV} con $V \subset U$. De esto se tiene un isomorfismo

$$C^q(\mathcal{U}|_Y, \mathcal{F}) \cong C^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{F}})$$

para cada q que conmuta con el operador cofrontera respectivo de los complejos de

cocadenas $\{C^q(\mathcal{U}|_Y, \mathcal{F})\}$ y $\{C^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{F}})\}$. Entonces existe un isomorfismo natural

$$H^q(\mathcal{U}|_Y, \mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{F}}).$$

■

Haces de líneas y grupos de cohomología

Sea X una variedad compleja con gavilla estructural \mathcal{O} . Recordemos que \mathcal{O}^* denota a la gavilla (multiplicativa) de funciones holomorfas nunca nulas. Si denotamos por $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(X)$ al grupo (bajo el producto tensorial) de los haces de líneas holomorfos sobre X (es decir, haces vectoriales holomorfos de rango 1), entonces

Teorema 3.3.26 *El grupo $\text{Vect}_{\mathbb{C}}^1(X)$ es canónicamente isomorfo al grupo $H^1(X, \mathcal{O}^*)$.*

Demostración: Sea $\xi \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Como $H^1(X, \mathcal{O}^*) \cong H^1(X, \mathcal{O}^*)$, podemos encontrar una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de X y un cociclo $\{\phi_{ij}\} \in Z^2(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ tal que $\mathcal{X}(\mathcal{U})$ manda a la clase de cohomología de $\{\phi_{ij}\}$ en ξ . La condición de cociclo en $\{\phi_{ij}\}$ implica que $\phi_{ij}\phi_{jk} = \phi_{ik}$. Como $\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, vemos que las $\{\phi_{ij}\}$ son las funciones de transición de un haz lineal holomorfo $L(\xi)$ en X . Se puede probar ([F, pág. 116]), que $L(\xi)$ sólo depende de ξ y no de la elección particular de la cubierta o el cociclo. La correspondencia $\xi \mapsto L(\xi)$ da el isomorfismo buscado. ■

El grado de un haz vectorial

Mas arriba introdujimos operaciones en los haces vectoriales holomorfos sobre una variedad compleja. En particular, si E es un haz vectorial holomorfo de rango $rk(E) = k$ sobre la variedad compleja X , el haz $\wedge^k E$ es un haz holomorfo de rango $rk(\wedge^k E) = 1$, es decir, es un haz de líneas en X , llamado comunmente el haz *determinante* de E . En vista del teorema anterior, podemos pensar a $\wedge^k E$ (o más precisamente a su clase de equivalencia) como un elemento del grupo $H^1(X, \mathcal{O}^*)$. Esto nos permite introducir un

invariante numérico de un haz vectorial, llamado el *grado*. Damos a continuación su construcción.

De la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}^{\text{exp}} \mathcal{O}^* \rightarrow 0,$$

se tiene una sucesión exacta larga

$$\dots \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Si $L \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ es un haz de líneas, se define la *1-clase de Chern de L* como $c_1(L) = -\delta(L)$, donde δ es el homomorfismo de conexión de la sucesión anterior. Para el caso en que X es una variedad compleja compacta de dimensión compleja 1, $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, (ver Apéndice).

Definición 3.3.27 *El grado de un haz de líneas $L \in H^1(X, \mathcal{O}^*)$ se define como la imagen de $c_1(L)$ bajo el isomorfismo $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ y se denota por $\text{deg}(L)$. Si E es un haz de rango k sobre X , se define el grado de E como $\text{deg}(\wedge^k E)$.*

Entonces, como habíamos dicho, el género de un haz de líneas es un entero bien definido, que sólo depende de la clase de equivalencia del haz en cuestión.

Veamos una aplicación de lo anterior para un caso que será de importancia en el último capítulo. En este caso X será la recta proyectiva compleja $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Sea $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$ la cubierta canónica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Consideremos el haz de líneas H definido por las funciones de transición

$$g_{01}(z_0, z_1) = z_1/z_0$$

respecto a la cubierta \mathcal{U} . De la inclusión natural $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ (como gavillas constantes), se tiene una inclusión natural $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$, ([Fo, sección 12]). Dada esta inclusión, podemos ver a $c_1(H)$ como un elemento de $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$. Poniendo

$$a_0(z_0, z_1) = |z_0|^2 / (|z_0|^2 + |z_1|^2)$$

$$a_1(z_0, z_1) = |z_1|^2 / (|z_0|^2 + |z_1|^2).$$

observamos que $|g_{01}|^2 = a_1/a_0$. Entonces un representante ξ para $c_1(H) \in H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{C})$ está dado por $\xi = \{\xi_i\} = \{-\frac{1}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log a_i\}$, [F, pág. 120]. Haciendo el cambio de variable $z_0/z_1 = t$ vemos que

$$\begin{aligned} \xi_1(t) &= -\frac{1}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log \left(\frac{1}{1+|t|^2} \right) \\ &= \frac{dt d\bar{t}}{2\pi(1+|t|^2)^2}. \end{aligned}$$

Como $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es una superficie de Riemann compacta, la integración define un isomorfismo canónico $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$, [Fo, secciones 15.9 y 15.15]) y entonces podemos pensar $\deg(H)$ como un número complejo. Entonces

$$\begin{aligned} c_1(H) &= \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} \xi(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{C}} \xi_1(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{dt d\bar{t}}{2\pi(1+|t|^2)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(1+r^2)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\deg(H) = 1$, y algo más: que H puede verse como un generador del grupo $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^*)$.

3.4 Gavillas analíticas coherentes

En esta sección comenzamos el estudio de gavillas de \mathcal{O}_M -módulos en una variedad compleja M . Una gavilla de \mathcal{O} -módulos (se suprime el subíndice M) sobre una variedad compleja M es una *gavilla analítica*.

Definición 3.4.1 Una gavilla analítica \mathcal{F} en M es de tipo finito si para cada punto x de M se puede encontrar una vecindad abierta U y un número finito de secciones $s_1, \dots, s_k \in \mathcal{F}(U)$ de tal manera que el conjunto $\{s_{1,y}, \dots, s_{k,y}\}$ genera al \mathcal{O}_y -módulo \mathcal{F}_y para cada $y \in U$.

Ejemplo 3.4.2 La gavilla \underline{E} de secciones de un haz holomorfo $E \rightarrow M$ es una gavilla analítica de tipo finito. Para ver esto basta tomar una marco local sobre un abierto suficientemente pequeño.

Proposición 3.4.3 Sea \mathcal{F} una gavilla analítica de tipo finito y f_1, \dots, f_p secciones continuas de \mathcal{F} definidas en una vecindad abierta de $x \in M$ tales que $f_{1,x}, \dots, f_{p,x}$ generan a \mathcal{F}_x . Entonces $f_{1,y}, \dots, f_{p,y}$ generan \mathcal{F}_y para todo y que está en una vecindad de x .

Demostración: Como \mathcal{F} es de tipo finito es posible encontrar una vecindad abierta U de x y secciones $s_1, \dots, s_k \in \mathcal{F}(U)$ tales que $s_{1,y}, \dots, s_{k,y}$ generan a \mathcal{F}_y , para $y \in U$. Por hipótesis existen $a_{i,j} \in \mathcal{O}_x$ tales que

$$s_{i,x} = \sum_{j=1}^p a_{i,j,x} f_{j,x}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Escogiendo un representante a_{ij} de los gérmenes $a_{i,j,x}$, existe una vecindad V de x tal que

$$s_i = \sum_{j=1}^p a_{ij} f_j, \quad i = 1, \dots, k.$$

Entonces se tiene que para cada $z \in V$

$$s_{i,z} = \sum_{j=1}^p a_{i,j,z} f_{j,z},$$

y los $f_{1,z}, \dots, f_{p,z}$ generan a \mathcal{F}_z . ■

Para $q \geq 0$, \mathcal{O}^p denota al producto cartesiano $\mathcal{O} \times \dots \times \mathcal{O}$ de p factores. Entonces \mathcal{O}^p es igual a la gavilla de gérmenes de funciones holomorfas \mathbb{C}^p -valuadas definidas en

M . El \mathcal{O} -módulo \mathcal{O}^p tiene una base canónica dada por

$$E_1(z) = (1, 0, \dots, 0), \dots, E_q(z) = (0, \dots, 0, 1).$$

Sea \mathcal{F} una gavilla analítica en M y f_1, \dots, f_p secciones continuas de \mathcal{F} definidas en un subconjunto abierto U de M . Denotemos por $f = (f_1, \dots, f_p) : \mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{F}_U$ el morfismo de gavillas definido por

$$f(g_1, \dots, g_p) = \sum_{j=1}^p g_j f_{j,z}, \quad (g_1, \dots, g_p) \in \mathcal{O}_z^p, \quad z \in U.$$

El núcleo de f es la subgavilla $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ de \mathcal{O}_U^p llamada *gavilla de relaciones entre* f_1, \dots, f_p .

El siguiente resultado es uno de los fundamentales dentro de la teoría de gavillas coherentes.

Teorema 3.4.4 *Sea U un subconjunto abierto de M y $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}^q(U)$. Entonces la gavilla de relaciones $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ es una subgavilla de \mathcal{O}_U^p de tipo finito.*

Dado que la propiedad de finitud es una propiedad local, es suficiente demostrar el teorema anterior en la siguiente forma ([F, pág. 129])

Proposición 3.4.5 *Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{C}^n y $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{O}(\Omega)^q$. Entonces existe una vecindad abierta U para cada $z \in \Omega$ y un número finito de funciones $C_1, \dots, C_r \in \mathcal{O}(U)^p$ tales que $C_{1,x}, \dots, C_{r,x}$ generan a $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_x$ como un \mathcal{O}_x -módulo, para todo $x \in U$.*

Demostración: Observemos que

$$\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_z = \{ (a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{O}_z^p \mid \sum_{j=1}^p a_j f_{j,z} = 0, \quad z \in \Omega \}.$$

Como \mathcal{O}_z es un anillo Noetheriano, $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_z$ es finitamente generado. Lo siguiente es encontrar generadores de las fibras sobre una vecindad de z .

Para fines de simplicidad en la notación podemos suponer que $0 \in \Omega$. La prueba procede por inducción en q y n . Notemos que el caso $n = 0$ es obvio. Supongamos entonces que el teorema ha sido probado para todo q en el caso de dimensión $n - 1$. Vamos a demostrar que el teorema es cierto para n y $q = 1$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los f_1, \dots, f_p están normalizados en la dirección de z_n , y por el Teorema de Preparación de Weierstrass, podemos suponer a su vez que los f_1, \dots, f_p son polinomios de Weierstrass en z_n con coeficientes en $\mathcal{O}(\Omega')$, donde Ω' es una vecindad abierta de $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$. En lo que sigue vamos a suponer que $\Omega = \Omega' \times \mathbb{C}$. Sea d el máximo de los grados de los polinomios f_1, \dots, f_p . Podemos escribir

$$f_i = \sum_{j=0}^d f_{ij} z_n^j, \quad i = 1, \dots, p,$$

donde $f_{ij} \in \mathcal{O}(\Omega')$. Denotamos por ${}^d\mathcal{O}'[z_n]$ el grupo de polinomios en z_n de grado $\leq d$ cuyos coeficientes están en $\mathcal{O}(\Omega')$. Para $\zeta = (\zeta', \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$, \mathcal{O}'_{ζ} denota el anillo de gérmenes de funciones analíticas en \mathbb{C}^{n-1} en ζ' y ${}^d\mathcal{O}'[z_n]_{\zeta}$ denota los gérmenes de funciones de ${}^d\mathcal{O}'[z_n]$ en ζ . Sea ${}^d\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ el subconjunto de $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ definido por ${}^d\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta} = \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta} \cap {}^d\mathcal{O}'[z_n]_{\zeta}$, para $\zeta \in \Omega$. De esta definición se tiene que ${}^d\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta}$ tiene estructura de un \mathcal{O}' -módulo.

Se demostrará el paso inductivo probando que para $\zeta \in \Omega$, ${}^d\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta}$ generan a $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta}$ como un \mathcal{O}_{ζ} -módulo. Entonces, por la hipótesis de inducción, demostramos que es posible encontrar un conjunto finito de generadores para ${}^d\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ (como un \mathcal{O}' -módulo) sobre una vecindad del cero.

i) El \mathcal{O} -módulo $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta}$ está generado por los elementos de ${}^d\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_{\zeta}$, $\zeta \in \Omega$:

Supongamos que f_p tiene grado d . Por el Teorema de Preparación de Weierstrass, para $\zeta \in \Omega$,

$$f_{p,\zeta} = f' f'',$$

donde $f', f'' \in \mathcal{O}_\zeta$, f' es el germen de un polinomio de Weierstrass en las variables $z_n - \zeta_n$ y $f''(\zeta) \neq 0$. Por lema 3.4.1, f'' es un polinomio en z_n con coeficiente principal 1. Sean d', d'' los grados de f' y f'' respectivamente con respecto a z_n . Dado $(a_1, \dots, a_p) \in \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$, por el teorema de división de Weierstrass podemos escribir

$$a_i = f_{p,\zeta} b_i + c_i, \quad i = 1, \dots, p-1,$$

donde $b_i \in \mathcal{O}_\zeta$ y $c_i \in \mathcal{O}'_\zeta[z_n]$ si es de grado $< d'$. Pongamos

$$c_p = a_p + \sum_{i=1}^{p-1} f_{i,\zeta} b_i$$

notando que se tiene la identidad

$$(a_1, \dots, a_p) = (f_p, 0, \dots, 0, -f_1)_\zeta b_1 + \dots + (0, \dots, 0, f_p, -f_{p-1})_\zeta b_p + (c_1, \dots, c_p) \quad (3.3)$$

Todos los elementos de la identidad anterior, excepto quizá (c_1, \dots, c_p) , están en $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$, por la forma que tienen, de lo que se tiene que $(c_1, \dots, c_p) \in \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$. De esto tenemos

$$\sum_{i=1}^{p-1} c_i f_{i,\zeta} + (c_p f'') f' = 0.$$

Esta suma es de hecho un polinomio en la variable z_n de grado $< d + d'$. Por el teorema de división de Weierstrass, [F, pág. 109] implica que $c_p f''$ es un polinomio en z_n de grado $< d$. Dado que

$$(c_1, \dots, c_p) = \frac{1}{f''} (f'' c_1, \dots, f'' c_p)$$

y cada uno de los $f'' c_1, \dots, f'' c_p$ tienen grado $< d$, de lo que se sigue que $(c_1, \dots, c_p) \in {}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$. Lo anterior junto con 3.3 prueba i).

ii) Es posible encontrar una vecindad abierta U de $0 \in \mathbb{C}^n$ y secciones $C_1, \dots, C_r \in {}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)(U)$ tales que para $\zeta \in U$, $C_{1,\zeta}, \dots, C_{r,\zeta}$ generan a ${}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$ como un \mathcal{O}'_ζ -módulo.

Supongamos que $a = (a_1, \dots, a_p) \in {}^d \mathcal{O}'[z_n]_\zeta$. Entonces

$$a_i = \sum_{j=0}^d c_{ij}(z_n^j)_\zeta, \quad c_{ij} \in \mathcal{O}'_\zeta,$$

con lo que $a \in {}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$ si y sólo si $\sum_{i=0}^p a_i f_i = 0$. De manera equivalente, si y sólo si

$$\sum_{k=0}^d \sum_{j=0}^d \sum_{i=1}^p c_{ij} f_{ik}(z_n^{k+j}) = 0.$$

Igualando los coeficientes de las potencias de z_n a cero vemos que $a \in {}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$ si y sólo si

$$\sum_{j+k=r} \sum_{i=1}^p c_{ij} f_{ik} = 0, \quad r = 0, \dots, 2d.$$

De lo anterior vemos que ${}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ es isomorfo al núcleo del homomorfismo $F = (F_1, \dots, F_{p(d+1)}) : \mathcal{O}^{p(d+1)} \rightarrow \mathcal{O}^{2d+1}$ definido por

$$(F([c_{ij}]))_r = \sum_{i,j} c_{ij} f_{i,r-j}, \quad r = 0, \dots, 2d.$$

Es decir, ${}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ es isomorfo a la gavilla de relaciones $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_{p(d+1)})$, y por la hipótesis de inducción, podemos encontrar una vecindad abierta U' de $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $C_1, \dots, C_r \in \mathcal{O}(U')^{p(d+1)}$ tales que para todo $\zeta', C_{1,\zeta'}, \dots, C_{r,\zeta'}$ generan $\mathcal{R}(F_1, \dots, F_{p(d+1)})_{\zeta'}$. Tomando a U como $U' \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$, vemos que C_1, \dots, C_r da un conjunto de generadores de ${}^d \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ como un \mathcal{O}' -módulo.

Para completar la inducción, vamos a probar que si el teorema es cierto para n y $q = 1$ entonces es cierto para n y $q > 1$.

Pongamos $f_j = (f_{j1}, \dots, f_{jq})$, definimos $\tilde{f}_j = (f_{j1}, \dots, f_{jq-1})$, $j = 1, \dots, p$. Para $\zeta \in \Omega$ tenemos

$$\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta \subset \mathcal{R}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p)_\zeta.$$

Por la hipótesis de inducción para n y $q - 1$, existe una vecindad $V \subset \Omega$ de 0 y $g_1, \dots, g_r \in A(U)^p$ tales que $g_{1,\zeta}, \dots, g_{r,\zeta}$ generan a \mathcal{O}_ζ -módulo $\mathcal{R}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_p)_\zeta$, $\zeta \in V$. De hecho $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta \subset \{\sum_{j=1}^r c_j g_{j,\zeta} \mid c_j \in \mathcal{O}_\zeta\}$. Poniendo $g_j = (g_{j1}, \dots, g_{jp})$, $1 \leq j \leq r$, y tomando componentes vemos que $\sum_{j=1}^r c_j g_{j,\zeta} \in \mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_\zeta$ si y sólo si

$$\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^p c_j (g_{jk} f_{ki})_\zeta = 0, \quad i = 1, \dots, q.$$

Los primeros $q - 1$ términos de estas ecuaciones automáticamente se cumplen, con lo que solo la q -ésima ecuación falta por cumplirse. Por la hipótesis de inducción para n y $q = 1$, existen una vecindad $U \subset V$ de 0 y $h_1, \dots, h_s \in \mathcal{O}(U)^r$ tales que las soluciones $(c_1, \dots, c_r) \in \mathcal{O}_\zeta^r$ del sistema $\sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^p c_j (g_{jk} f_{ki})_\zeta = 0$ están generadas por $h_{1,\zeta}, \dots, h_{s,\zeta}$, $\zeta \in U$. Definiendo $C_1, \dots, C_s \in \mathcal{O}(U)^p$ por $C_i = \sum_{j=1}^r h_{ij} g_j$, $1 \leq i \leq s$, vemos que C_1, \dots, C_s son los generadores buscados para $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)_U$. ■

Definición 3.4.6 Una gavilla analítica \mathcal{F} en una variedad compleja es coherente si las condiciones siguientes se cumplen

- i) \mathcal{F} es de tipo finito,
- ii) Dado un subconjunto abierto U de M y secciones $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{F}(U)$, la gavilla de relaciones $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ es de tipo finito.

Se desprende claramente de la demostración que toda gavilla localmente libre es una gavilla coherente. En vista del teorema anterior tenemos el siguiente resultado

Proposición 3.4.7 Cada subgavilla analítica coherente de \mathcal{O}^p que es tipo finito es coherente.

Dado que la gavilla de relaciones $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ es una subgavilla de \mathcal{O}_U^p de tipo finito, se tiene un corolario inmediato de la proposición anterior

Corolario 3.4.8 Sea \mathcal{F} una gavilla coherente de M , U un subconjunto abierto de M y $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{F}(U)$. Entonces $\mathcal{R}(f_1, \dots, f_p)$ es una gavilla coherente.

Teorema de syzygyas de Hilbert

Teorema 3.4.9 *Si M es un A -módulo finitamente generado y si*

$$0 \rightarrow F \rightarrow E_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow E_1 \rightarrow E_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

es una sucesión exacta de A -módulos donde cada E_i es un módulo libre, entonces F es un módulo libre.

Una demostración de este teorema en el contexto de las gavillas coherentes se puede ver en [K, teorema 3.11].

Proposición 3.4.10 *Sea \mathcal{F} una gavilla coherente en M y $x \in M$. Entonces existe una resolución de \mathcal{F} sobre un subconjunto abierto U de x :*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_U^{p_m} \xrightarrow{s_m} \mathcal{O}_U^{p_{m-1}} \rightarrow \dots \xrightarrow{s_1} \mathcal{O}_U^{p_0} \xrightarrow{s_0} \mathcal{F}_x \rightarrow 0.$$

Demostración: Como \mathcal{F} es de tipo finito, podemos encontrar una vecindad abierta U_0 de x y $s_1^0, \dots, s_{p_0}^0 \in \mathcal{F}(U_0)$ tales que para todo $\zeta \in U_0$, $s_{1,\zeta}^0, \dots, s_{p_0,\zeta}^0$ generan a \mathcal{F}_ζ como un \mathcal{O}_ζ -módulo. Es decir, poniendo $s_0 = (s_1^0, \dots, s_{p_0}^0)$ se tiene la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_{U_0}^{p_0} \xrightarrow{s_0} \mathcal{F}_{U_0} \rightarrow 0.$$

Sea $\text{Ker}(s_0) = \mathcal{R}(s_1^0, \dots, s_{p_0}^0)$, y como $\mathcal{R}(s_1^0, \dots, s_{p_0}^0)$ es de tipo finito, podemos encontrar una vecindad abierta $U_1 \subset U_0$ de x y $s_1^1, \dots, s_{p_1}^1 \in A(U_1)^{p_0}$ tales que $s_{1,\zeta}^1, \dots, s_{p_1,\zeta}^1$ generan $\mathcal{R}(s_1^0, \dots, s_{p_0}^0)_\zeta$, para $\zeta \in U_1$. Poniendo $s_1 = (s_1^1, \dots, s_{p_1}^1)$, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_{U_1}^{p_1} \xrightarrow{s_1} \mathcal{O}_{U_1}^{p_0} \xrightarrow{s_0} \mathcal{F}_{U_1} \rightarrow 0.$$

Procediendo por inducción, después de m pasos se tiene la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_{U_{m-1}}^{p_{m-1}} \xrightarrow{s_{m-1}} \dots \xrightarrow{s_1} \mathcal{O}_{U_{m-1}}^{p_0} \xrightarrow{s_0} \mathcal{F}_{U_{m-1}} \rightarrow 0.$$

Por el teorema de syzygyas de Hilbert, $\text{Ker}(s_{m-1})$ es un \mathcal{O}_y -módulo libre, para $y \in U_{m-1}$. Supongamos entonces que $\text{Ker}(s_{m-1}) \cong \mathcal{O}_x^{p_m}$. Sean E_i , $1 \leq i \leq p_m$, los generadores canónicos de $\mathcal{O}_x^{p_m}$. Como $\text{Ker}(s_{m-1})$ es de tipo finito, se sigue que los E_i generan a $\text{Ker}(s_{m-1})_y$ para y en alguna vecindad U_m de x . Haciendo $U = U_m$, tenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_U^{p_m} \xrightarrow{s_m} \mathcal{O}_U^{p_{m-1}} \rightarrow \dots \xrightarrow{s_2} \mathcal{F}_U \rightarrow 0.$$

Aplicando de nuevo el Teorema de syzygyas de Hilbert, $\text{Ker}(s_m) = 0$. ■

Una consecuencia de este resultado es que toda gavilla coherente es localmente isomorfa al conúcleo de un morfismo de gavillas $\alpha : \mathcal{O}^p \rightarrow \mathcal{O}^q$.

Ejemplo 3.4.11 *La gavilla de secciones holomorfas de un haz vectorial holomorfo E sobre M es una gavilla coherente. De hecho, \underline{E} es localmente isomorfa a \mathcal{O}^p , donde $p = \text{rk}(E)$.*

Teorema 3.4.12 *i) Toda subgavilla analítica de tipo finito de una gavilla coherente es coherente.*

ii) *Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{a} \mathcal{G} \xrightarrow{b} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sucesión exacta corta de gavillas analíticas. Si cualesquiera dos de las gavillas \mathcal{F} , \mathcal{G} ó \mathcal{H} son coherentes, la tercera también lo es.*

iii) *La suma directa de una familia finita de gavillas coherentes es coherente.*

iv) *Sea $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas coherentes. Entonces*

$$\text{Ker}(\alpha), \text{Im}(\alpha) \text{ y } \text{Coker}(\alpha)$$

son coherentes.

v) *Sean \mathcal{F} , \mathcal{G} gavillas coherentes. Entonces la gavilla $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ es coherente.*

Demostración: i) Esto es un resultado directo de la definición.

ii)a. Supongamos que \mathcal{G} , \mathcal{H} son coherentes. Como \mathcal{G} es de tipo finito, para cada punto $x \in M$ podemos encontrar una vecindad abierta U de x y un epimorfismo $c : \mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{G}_U$. Como la subgavilla de relaciones de \mathcal{H} es de tipo finito, $\text{Ker}(b \circ c)$ es de

tipo finito, y por el punto i), $c(Ker(b \circ c))$ es una subgavilla coherente de \mathcal{G}_U . Como a da un isomorfismo entre \mathcal{F}_U y $c(Ker(b \circ c))$, \mathcal{F} es coherente.

b. Supongamos que \mathcal{F} y \mathcal{G} son coherentes. Como \mathcal{G} es de tipo finito y b es un epimorfismo, \mathcal{H} es de tipo finito. Vamos a demostrar que la subgavilla de relaciones de \mathcal{H} es de tipo finito. Para ello tomemos $x \in M$, U una vecindad abierta de x y secciones $s_1, \dots, s_p \in \mathcal{H}(U)$. Restringiendo U si es necesario, podemos encontrar secciones $t_1, \dots, t_p \in \mathcal{G}(U)$ tales que $s_j = b(t_j)$, $j = 1, \dots, p$. A su vez, podemos encontrar $u_1, \dots, u_q \in \mathcal{F}(U)$ tales que $u_{1,y}, \dots, u_{q,y}$ generan a \mathcal{F}_y como un \mathcal{O}_y -módulo para todo $y \in U$. Ahora, dado $y \in U$ y $(f_1, \dots, f_p) \in \mathcal{O}_y^p$, (f_1, \dots, f_p) está en $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ si y sólo si $\sum_{i=1}^p f_i t_i \in \text{Im}(a)$; esto es, si y sólo si existen $g_1, \dots, g_q \in \mathcal{O}_y$ tal que $\sum_{i=1}^p f_i t_i = \sum_{j=1}^q g_j a(u_j)$. Pero $\mathcal{R}(t_1, \dots, t_p, a(u_1), \dots, a(u_q))$ es de tipo finito ya que \mathcal{G} es coherente y dado que $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ es la imagen de $\mathcal{R}(t_1, \dots, a(u_q))$ bajo la proyección canónica de \mathcal{O}^{p+q} en \mathcal{O}^p se sigue que $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_p)$ es de tipo finito.

c. En el caso en que \mathcal{F} y \mathcal{H} son coherentes ver [F, teorema 7.1.9]

iii) La suma directa finita de gavillas coherentes es coherente [F, teorema 7.1.9]

iv) Supongamos que $a : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo de gavillas coherentes. Ahora, $\text{Im}(a)$ es de tipo finito ya que \mathcal{F} es de tipo finito y así, por i), $\text{Im}(a)$ es coherente. Aplicando ii) a y ii)b a las sucesiones exactas

$$0 \rightarrow Ker(a) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \text{Im}(a) \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \text{Im}(a) \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Coker}(a) \rightarrow 0$$

se tiene que $Ker(a)$ y $\text{Coker}(a)$ son coherentes.

v) Sea $x \in M$. Como \mathcal{F} es coherente, existe una vecindad abierta U de x y una sucesión exacta de gavillas

$$\mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{O}_U^q \rightarrow \mathcal{F}_U \rightarrow 0.$$

Tensando esta sucesión con \mathcal{G}_U obtenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{G}_U \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_U^p \rightarrow \mathcal{G}_U \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_U^q \rightarrow (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})_U \rightarrow 0.$$

Pero $\mathcal{G}_U \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_U^p \cong \mathcal{G}_U^p$, $\mathcal{G}_U \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_U^q \cong \mathcal{G}_U^q$, con lo que se obtiene la sucesión exacta

$$\mathcal{G}_U^p \rightarrow \mathcal{G}_U^q \rightarrow (\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})_U \rightarrow 0.$$

Por el punto iii), $\mathcal{G}_U^p, \mathcal{G}_U^q$ son coherentes y por el punto iv), $(\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})_U$ es coherente. Por lo tanto $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{G} \cong \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}$ es coherente. ■

Ejemplo 3.4.13 Sea X una subvariedad compleja de una variedad compleja M . Las gavillas $\mathcal{I}_X, \mathcal{O}_X$ son gavillas coherentes en M . Para probarlo, dada la naturaleza local del problema podemos suponer que X es el subespacio \mathbb{C}^k de $\mathbb{C}^m = M$ definido por las ecuaciones $z_{k+1} = \dots = z_m = 0$. Si $z \notin \mathbb{C}^k$, $\mathcal{I}_{X,z} = \mathcal{O}_z$. Para $z \in \mathbb{C}^k$, $\mathcal{I}_{X,z} = (z_{k+1}, \dots, z_m)$ y claramente los z_{k+1}, \dots, z_m dan un conjunto finito de generadores para \mathcal{I}_X en una vecindad de z . Esto quiere decir que \mathcal{I}_X es de tipo finito y también coherente. Dado que $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_M/\mathcal{I}_X$, \mathcal{O}_X es coherente.

La siguiente es una generalización de un resultado enunciado más arriba para el caso de gavillas localmente libres.

Proposición 3.4.14 Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} gavillas analíticas en M con \mathcal{F} coherente. Entonces, para cada $x \in M$, $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})_x \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_x}(\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x)$. Además, si \mathcal{G} es coherente entonces $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ es coherente.

Demostración: Ver [F, pág. 138] ■

Teorema de Finitud de Cartan-Serre

Presentamos sin demostración el siguiente teorema, conocido como el Teorema de Finitud de Cartan-Serre. Este resultado juega un papel de importancia en la teoría de variedades

complejas compactas, pues la finitud de los grupos de cohomología es un aspecto que permite encontrar invariantes de las variedades estudiadas.

Teorema 3.4.15 *Sea \mathcal{F} una gavilla analítica coherente en una variedad compleja compacta M . Entonces $h^q(M, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^q(M, \mathcal{F}) < \infty$.*

Una demostración de este teorema puede encontrarse en [F].

Capítulo 4

Gavillas coherentes en espacios proyectivos

Este capítulo contiene los resultados principales de este trabajo, donde se explotan las propiedades de las construcciones introducidas en los capítulos anteriores.

4.1 El haz de hiperplanos

Empezaremos esta sección construyendo el importante haz lineal *tautológico* sobre el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Denotaremos por $\mathcal{U} = \{U_i\}$ la cubierta abierta estandar de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ dada por los abiertos $U_i = \{(z_0, \dots, z_n) \mid z_i \neq 0\}$.

Sea $H^* \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ el conjunto $\{(l, z) \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in l\}$. La proyección en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ induce la proyección $\pi : H^* \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. De la definición tenemos que H^* es un haz holomorfo. De hecho su construcción es la del "blowing-up" de la Geometría Algebraica. Una descripción detallada se encuentra en [F 1, pág. 176-178].

Para ver que tiene la estructura de haz de líneas complejo basta observar que para la

cubierta \mathcal{U} de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, las funciones

$$h_i : H^*|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{C}$$

definidas como $h_i((z_0, \dots, z_n, (a_0, \dots, a_n))) = ((z_0, \dots, z_n), a_i)$ definen trivializaciones holomorfas para H^* . Las funciones de transición correspondientes $g_{ij}^{-1} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(1, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ estan dadas por

$$g_{ij}^{-1}(z_0, \dots, z_n) = z_i/z_j.$$

Denotamos por H el haz dual $(H^*)^*$, que tiene funciones de transición $g_{ij}(z_0, \dots, z_n) = z_j/z_i$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$ definimos

$$H^m = \begin{cases} H^{\otimes m} & \text{para } m \geq 0 \\ (H^*)^{\otimes (-m)} & \text{para } m < 0 \end{cases}.$$

Respecto a la cubierta canónica \mathcal{U} , H tiene funciones de transición $g_{ij} = z_j/z_i$ en $U_i \cap U_j$. Entonces H^m , $m \in \mathbb{Z}$, denota al haz cuyas funciones de transición estan dadas por $g_{ij}^m = (z_j/z_i)^m$ en $U_i \cap U_j$.

Denotamos por $\mathcal{O}(m)$ a la gavilla \underline{H}^m de gérmenes de secciones holomorfas de H^m . Una propiedad inmediata de la definición es $\mathcal{O}(m_1) \otimes \mathcal{O}(m_2) \cong \mathcal{O}(m_1 + m_2)$.

La importancia de esta gavilla se ilustra con la siguiente

Proposición 4.1.1 *Para cada $m \geq 0$, el espacio $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$ de secciones holomorfas es isomorfo al espacio $P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1})$ de polinomios homogéneos de grado m en \mathbb{C}^{n+1} . Si $m < 0$, $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = 0$.*

Demostración: Sea $m \geq 0$. Si $s \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m))$, sean $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ las representaciones locales de la sección s relativas a las trivializaciones canónicas de H^m . De la relación $g_{ij}s_j = s_i$ tenemos

$$s_i(z_0, \dots, z_n)z_i^m = s_j(z_0, \dots, z_n)z_j^m.$$

Así, es posible definir la función holomorfa $S : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ por $S(z_0, \dots, z_n) = s_i(z_0, \dots, z_n)z_i^m$, $z_i \neq 0$, que esta bien definida en las intersecciones. Claramente la función es homogénea de grado n . Por el teorema de Hartogs, S se extiende a \mathbb{C}^{n+1} como una función analítica que denotamos por la misma S . De su desarrollo en serie de Taylor alrededor de 0

$$S(z_0, \dots, z_n) = \sum a_{i_0, \dots, i_n} z_0^{i_0} \cdots z_n^{i_n}$$

observamos que sólo contiene términos de grado m . Por lo tanto S es un polinomio homogéneo del mismo grado.

Inversamente, si $S \in P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1})$, definimos las funciones holomorfas $s_i = S/z_i^m$, $i = 1, \dots, n$. Al cumplirse las relaciones $g_{ij}s_j = s_i$, las s_i son las representaciones locales de una sección holomorfa de H^n . Entonces, la correspondencia anterior establece el isomorfismo buscado. ■

Es usual escribir $h^p(X, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} H^p(X, \mathcal{F})$.

Corolario 4.1.2 $h^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(n)) = \binom{m+n}{n}$

De esta proposición se deduce que para el caso $n = 1$, las secciones holomorfas de H se corresponden precisamente con los funcionales lineales definidos en \mathbb{C}^{m+1} . Los conjuntos de ceros de tales secciones son hiperplanos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. De ahí que el haz H sea conocido también como el haz de hiperplanos.

Supongamos ahora que \mathcal{F} es una gavilla coherente en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Dado que cada abierto U_i es biholomorfo a \mathbb{C}^n , \mathcal{U} es una cubierta de Leray de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ para \mathcal{F} . Se sigue del Teorema de Leray, [F, pág. 105], que

$$H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}) = 0, \text{ para } p > n.$$

Presentamos el siguiente lema que será muy útil para lo que sigue.

Lema 4.1.3 Sea Π un hiperplano de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$ existe un \mathcal{O} -morfismo de

gavillas no nulo

$$\varphi_{\Pi} : \mathcal{O}(m) \rightarrow \mathcal{O}(m+1)$$

tal que $\varphi_{\Pi, z} : \mathcal{O}(m)_z \rightarrow \mathcal{O}(m+1)_z$ es 0 si y sólo si $z \in \Pi$. En particular, la restricción $\varphi_{\Pi}|_{\mathbb{C}P^n \setminus \Pi}$ da un isomorfismo de $\mathcal{O}(m)$ en $\mathcal{O}(m+1)$.

Demostración: Supongamos que el hiperplano Π está definido por la ecuación $s(z_0, \dots, z_n) = 0$, donde s es un funcional lineal definido en \mathbb{C}^{n+1} . Definimos φ_{Π} localmente: para $f_i \in \mathcal{O}(m)(U_i)$,

$$\begin{aligned}\varphi_{\Pi}(f_i) &= (sz_i^{-1})f_i \\ &= sf_iz_i^{-1}\end{aligned}$$

Notemos que $f_iz_i^{-1}$ es un representante local de una sección holomorfa de $\mathcal{O}(m+1)$, pues

$$(f_iz_i^{-1})z_i^m = (f_jz_j^{-1})z_j^m,$$

y $\{f_iz_i^{-1}\}$ es una sección. Es claro que fuera de Π , φ_{Π} es un isomorfismo, porque s nunca se anula ahí y φ_{Π} es multiplicación por la función nunca nula s . ■

Como vimos antes

$$H^0(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(m)) \cong \begin{cases} P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1}), & m \geq 0 \\ 0 & , m < 0 \end{cases}$$

donde $P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1})$ es el espacio de polinomios homogéneos de grado m en \mathbb{C}^{n+1} . El siguiente teorema nos permite conocer los grupos de cohomología de $\mathcal{O}(m)$ de ordenes superiores.

Teorema 4.1.4 Para $m \geq 0$,

$$H^p(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(m)) \cong \begin{cases} P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1}), & p = 0 \\ 0 & , p \neq 0 \end{cases}$$

Para $m < 0$,

$$HP(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}(m)) \cong \begin{cases} P^{(-m-n-1)}(\mathbb{C}^{n+1}), & p = n \\ 0 & , p \neq 0 \end{cases}$$

Demostración: Por lo dicho en párrafos anteriores basta probar la afirmación para $n \geq p \geq 1$. Veamos primero el caso $m = 0$, pues el caso $m > 0$ es completamente análogo. (Ver [F, teorema 7.5.2])

Sea $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{O})$, con $c = \{c(s) = c(s_0, \dots, s_p)\}$ y donde $c(s) : U_s \rightarrow \mathbb{C}$ es holomorfo y $s = (s_0, \dots, s_p)$ es un multíndice. Cada $c(s)$ puede pensarse como una función holomorfa homogénea en $U_s \subset \mathbb{C}^{n+1}$ de grado 0. Entonces tiene una expansión en series de Laurent de la forma

$$\begin{aligned} c(s)(z_0, \dots, z_n) &= \sum_{r_0 + \dots + r_n = 0} c(s)_{r_0 \dots r_n} z_0^{r_0} \cdots z_n^{r_n} \\ &= \sum_{|r|=0} c(s)_r z^r. \end{aligned}$$

Los coeficientes $c(s)_{r_0 \dots r_n}$ son cero para $r_j < 0$, con $j \notin \{s_0, \dots, s_p\}$. Queremos definir un elemento $a \in C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$. Para ello definimos

$$a(s_0, \dots, s_{p-1}) = \frac{1}{n-p+1} \sum_{j \notin \{s_0, \dots, s_p\}} c(j, s_0, \dots, s_{p-1})^+,$$

donde $c(j, s_0, \dots, s_{p-1})^+$ es la función holomorfa con serie de Laurent

$$\sum_{\substack{|r|=0 \\ r_j \geq 0}} c(j, s_0, \dots, s_{p-1})_r z^r$$

definida en $U_{s_0} \cap \dots \cap U_{s_{p-1}}$, donde son omitidos los términos de $c(j, s_0, \dots, s_{p-1})$ para los que $r_j < 0$.

Además

$$\begin{aligned}
 (Da)_{s_0 \dots s_p} &= \frac{1}{n-p+1} \left(\sum_{j \notin \{s_0, \dots, s_p\}} (c(j, s_1, \dots, s_p) - \dots \pm c(j, s_0, \dots, s_{p-1}))^+ \right) \\
 &= \frac{1}{n-p+1} \left(\sum_{j \notin \{s_0, \dots, s_p\}} c(s_0, \dots, s_p) \right)^+ \\
 &= c(s_0, \dots, s_p).
 \end{aligned}$$

Entonces $Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = DC^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{O})$ y $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}) = 0$ para $p > 0$. De la misma manera se puede probar que si $p < n$ entonces para $m < 0$, $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) = 0$. Ver [F, pág. 107].

Resta por considerar el caso $p = n$, $m < 0$. Sea la cocadena $c \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m))$. Entonces $c : U_{01 \dots n} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa homogénea de grado m . Entonces $c(z_0, \dots, z_n) = \sum_{|r|=m} c_r z^r$. Descomponemos a c como la suma $c_0 + c_1$, donde c_0 es la suma de los términos $c(s)_{r_0 \dots r_n} z_0^{r_0} \dots z_n^{r_n}$ donde al menos uno de los índices r_j es positivo y c_1 es la suma de los términos donde cada índice r_j es negativo. Si $-m \leq n$ tenemos $c_1 \equiv 0$ y haciendo un cálculo como arriba se puede ver que $c_0 = da$ para alguna $(n-1)$ -cocadena a . Un argumento de series de Laurent muestra que si c_1 es no cero entonces no puede ser una cofrontera. Supongamos ahora que $m \leq -n-1$ y pongamos

$$E = \left\{ \sum_{|r|=m} c_r z^r \mid \text{para } c_r \in \mathbb{C} \text{ y cada } r_j < 0 \right\}.$$

De lo hecho en párrafos anteriores resulta que $E \cong H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m))$. Dado $c \in E$ se puede escribir

$$c = (z_0 \dots z_n)^{-1} \sum_{\substack{r_0, \dots, r_n \leq 0 \\ r_0 + \dots + r_n = m+n+1}} c_r z_0^{r_0+1} \dots z_n^{r_n+1},$$

de lo que se sigue que $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{O}(m)) \cong P^{(-m-n-1)}(\mathbb{C}^{n+1})$. Explícitamente el isomorfismo está dado por

$$P \mapsto c(z_0, \dots, z_n) = (z_0 \dots z_n)^{-1} P(z_0^{-1}, \dots, z_n^{-1}),$$

para $P \in P^{(-m-n-1)}(\mathbb{C}^{n+1})$. ■

4.2 Teoremas A y B de Serre

Dada una gavilla coherente \mathcal{F} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ se define

$$\mathcal{F}(m) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}(m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

La gavilla $\mathcal{F}(m)$ se llama la gavilla "torcida por $\mathcal{O}(m)$ ". Una de las razones para la introducción de la *torcedura* es que la dimensión de $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ es una función creciente de m . Mientras que para $p > 0$, $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ es una función de m decreciente

Ahora veamos una motivación para lo que sigue. Sea $\mathcal{F} \cong \mathcal{O}(q)$. Dado que $\mathcal{O}(q)(m) = \mathcal{O}(q+m)$, se sigue que $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$, $p \geq 1$, $m \geq -q$. Entonces se tiene que todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ genera a $\mathcal{F}(m)_z$. El teorema que probamos a continuación, una generalización del ejemplo anterior, es uno de los teoremas fundamentales en el estudio de las gavillas coherentes en espacios proyectivos.

Teorema 4.2.1 (A y B de Serre) *Sea \mathcal{F} una gavilla coherente en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Entonces existe $m_0 = m_0(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}$ tal que*

A. Para cada $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $\mathcal{F}(m)_z$ es generado por secciones globales. Es decir, existen secciones $s_1, \dots, s_p \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ tales que $s_{1,z}, \dots, s_{p,z}$ generan a $\mathcal{F}(m)_z$ como un \mathcal{O}_z -módulo, para $m \geq m_0$.

B. Si $m \geq m_0$, entonces $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$, para $p \geq 1$.

Demostración: La demostración es por inducción sobre la dimensión de la variedad $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Obsérvese que el teorema es trivial para $n = 0$. El plan de la demostración es el siguiente. Denotemos por A_n la afirmación A para el caso $n = \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y por B_n la afirmación B. Se probará que para $n > 0$, A_{n-1} y B_{n-1} juntos implican A_n y que A_n implica B_n . Pero por las propiedades de las gavillas coherentes, basta probar lo anterior localmente. Dicho de manera precisa: sea $A_n(z)$ (respectivamente $A'_n(z)$) la afirmación "existe $m_0 =$

$m_0(\mathcal{F}, z)$ tal que $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m_0))$, (respectivamente $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$), genera a $\mathcal{F}(m_0)$, (respectivamente $\mathcal{F}(m)_z$, con $m \geq m_0$). Puesto que $\mathcal{F}(m)$ es coherente, $A_n(z)$ implica $A_n(y)$ para y en alguna vecindad abierta V de z .

Además, $A_n(y)$ implica $A'_n(y)$: sea $y \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y $\Pi \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ cualquier hiperplano que no contiene a y . Para $m \in \mathbb{Z}$, sea $\tilde{\phi}_\Pi = 1 \otimes \phi_\Pi : \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{F}(m+1)$, donde ϕ_Π es la transformación del lema 4.1.18. En el complemento $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi$, $\tilde{\phi}_\Pi$ se restringe a un isomorfismo de $\mathcal{F}(m)$ en $\mathcal{F}(m+1)$. Supongamos entonces que $A_n(y)$ se cumple, es decir, que $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m_0))$ genera a $\mathcal{F}(m_0)_z$. Como $\tilde{\phi}_\Pi^{m-m_0} : \mathcal{F}(m_0) \rightarrow \mathcal{F}(m)$ se restringe a un isomorfismo sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \Pi$, manda cualquier conjunto de generadores de $\mathcal{F}(m_0)_y$ en un conjunto de generadores de $\mathcal{F}(m)_z$ vía el morfismo $(\tilde{\phi}_\Pi^{m-m_0})^* : H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m_0)) \rightarrow H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$, con lo que se tiene $A'_n(z)$.

Para ver que esto es suficiente para probar $A_n(z)$, notemos que por la compacidad de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ existen subconjuntos abiertos V_1, \dots, V_k que cubren a $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y tales que $A_n(z)$ implica $A_n(y)$ para $z, y \in V_i$, $i = 1, \dots, k$, con lo que se tendría A_n .

Procedemos ahora a la demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Pi = \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$. Sea $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ y escribamos $\phi = \tilde{\phi}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}} : \mathcal{F}(-1) \rightarrow \mathcal{F}$. Para

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \text{Ker } \phi \\ \mathcal{G} &= \text{Co } \ker \phi. \end{aligned}$$

se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{F}(-1) \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0.$$

Tensando esta sucesión con $\mathcal{O}(m)$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(m) \rightarrow \mathcal{F}(m-1) \xrightarrow{\phi_m} \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{G}(m) \rightarrow 0.$$

Dado que $\phi_m|_{U_0}$ es un isomorfismo para el abierto $U_0 = \mathbb{C}P^n \setminus \mathbb{C}P^{n-1}$, vemos que $\mathcal{K}_{U_0} = \mathcal{G}_{U_0} = 0$. Sea $i : \mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$ la inclusión natural $[z_0, \dots, z_{n-1}] \mapsto [0, z_0, \dots, z_{n-1}]$. Para cualquier gavilla \mathcal{H} en $\mathbb{C}P^n$ denotamos por $\mathcal{H}^* = i^{-1}\mathcal{H}$ la gavilla restricción de \mathcal{H} a $\mathbb{C}P^{n-1}$. Observese que la subgavilla de ideales $\mathcal{I}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}$ actúa trivialmente en \mathcal{K} y en \mathcal{G} . Es decir, si $s_z \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$ y $f_z \in \mathcal{K} = \text{Ker}(\phi)$, entonces $s_z f_z = 0$. Análogamente para \mathcal{G} . Entonces \mathcal{K} y \mathcal{G} tienen estructura de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}/\mathcal{I}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$ -módulos, y por tanto \mathcal{K}^* , \mathcal{G}^* tienen estructura de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}^*/\mathcal{I}_{\mathbb{C}P^{n-1}}^*$ -módulos coherentes. Aún mas, se puede probar (ver [F, pág. 179]) que

- 1) $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^{n-1}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}^*/\mathcal{I}_{\mathbb{C}P^{n-1}}^*$
- 2) \mathcal{K}^* y \mathcal{G}^* son $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^{n-1}}$ -módulos coherentes y
- 3) $\mathcal{K}(m)^* \cong \mathcal{K}^*(m)$, $\mathcal{G}(m)^* \cong \mathcal{G}^*(m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Por construcción, se ve claramente que \mathcal{K} es la extensión (trivial) de la gavilla \mathcal{K}^* , y como $\mathbb{C}P^{n-1}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{C}P^n$, por la proposición 3.3.25, $H^p(\mathbb{C}P^n, \mathcal{K}(m)) \cong H^p(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathcal{K}(m)^*)$, $p \geq 0$; similarmente para $\mathcal{G}(m)$. Aplicando la hipótesis de inducción para \mathcal{K}^* y \mathcal{G}^* , existe $m_1 \in \mathbb{Z}$ tal que para $p \geq 1$

$$\begin{aligned} H^p(\mathbb{C}P^n, \mathcal{K}(m)) &\cong H^p(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathcal{K}^*(m)) = 0, \quad m \geq m_1 \\ H^p(\mathbb{C}P^n, \mathcal{G}(m)) &\cong H^p(\mathbb{C}P^{n-1}, \mathcal{G}^*(m)) = 0, \quad m \geq m_1 \end{aligned}$$

Por otra parte, se tienen las sucesiones exactas

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathcal{K}(m) \rightarrow \mathcal{F}(m-1) \rightarrow \text{Im}(\phi_{m-1}) \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \text{Im}(\phi_{m-1}) \rightarrow \mathcal{F}(m) \rightarrow \mathcal{G}(m) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Tomando las sucesiones de cohomología asociadas a estas sucesiones se tienen los fragmentos

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{F}(m-1)) &\rightarrow H^1(\mathbb{C}P^n, \text{Im}(\phi_{m-1})) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^n, \mathcal{K}(m)), \\ H^1(\mathbb{C}P^n, \text{Im}(\phi_{m-1})) &\rightarrow H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{F}(m)) \rightarrow H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{G}(m)). \end{aligned}$$

Dado que $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{G}(m)) = H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{K}(m)) = 0$ para $m \geq m_1$, vemos que $h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-1)) \geq h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \text{Im}(\phi_{m-1})) \geq h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$, para $m \geq m_1$. Entonces $h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ es una función decreciente de $m \geq m_1$. Pero por el teorema de finitud de Cartan-Serre, $h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) < \infty$, y se deduce de esto que $h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ es constante respecto a m a partir de un cierto m_2 . Para $m \geq m_2$

$$h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m-1)) = h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \text{Im}(\phi_{m-1})) = h^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)).$$

De esto se tiene que el epimorfismo $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \text{Im}(\phi_{m-1})) \rightarrow H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ es un isomorfismo para $m \geq m_2$. Y de la sucesión de cohomología se ve que para $m \geq m_2$, el homomorfismo $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) \rightarrow H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{G}(m))$ es un epimorfismo. Pero $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{G}(m)) \cong H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{G}^*(m))$ y por A_{n-1} vemos que $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{G}(m))$ genera a $\mathcal{G}^*(m)_z = \mathcal{G}(m)_z$ para $m \geq m_0$, donde podemos suponer que $m_0 \geq m_2$. Entonces $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ genera a $\mathcal{G}(m)_z$ para $m \geq m_0$.

Afirmamos que para $m \geq m_0$, $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ genera a $\mathcal{F}(m)_z$. Para ver esto tomemos $z \in U_i$, $i \neq 0$. Sea $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}(1)$ el homomorfismo definido por $\psi(f) = z_1 f$. Como se notó anteriormente, ψ^{-m} se restringe a un isomorfismo entre $\mathcal{F}(m)_{U_i}$ y \mathcal{F}_{U_i} , puesto que el hiperplano $\Pi = \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \mid z_0 = 0\}$ es el complemento del abierto U_i . Con esta identificación, la transformación ϕ corresponde a la multiplicación por $t_0 = z_0/z_i$ y se puede identificar a $\mathcal{G}(m)_z$ con $\mathcal{F}_z/t_0\mathcal{F}_z$. Sea $M_z \subset \mathcal{F}_z$ el submódulo generado por los elementos de $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$. Como $\mathcal{G}(m)_z$ está generado por los elementos de $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$, $m \geq m_0$, la imagen de M_z en $\mathcal{F}_z/t_0\mathcal{F}_z$ es de hecho todo $\mathcal{F}_z/t_0\mathcal{F}_z$. Esto es, $\mathcal{F}_z = t_0\mathcal{F}_z + M_z$. Como $t_0 \in \mathfrak{m}_z \subset \mathcal{O}_z$, donde \mathfrak{m}_z es el ideal máximo de \mathcal{O}_z , se sigue del lema de Nakayama (ver [A, corolario 2.7]) que $\mathcal{F}_z = M_z$.

2. $A_n \implies B_n$: Para el caso $p > n$ se probó que $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$, $p > n$. Así que probaremos B_n por inducción *decreciente* con respecto a $p \square n$, o equivalentemente, por inducción sobre $n - p$. Supongamos que para cada gavilla coherente \mathcal{F} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ existe $m_0 = m_0(\mathcal{F}, p)$ tal que $H^{p+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$ para $m \geq m_0$. Por la afirmación A_n existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ genera a $\mathcal{F}(m)_z$ para todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Escojamos una base

$\{s_1, \dots, s_k\}$ de $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$. Tenemos la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{F}(m) \rightarrow 0,$$

donde $s = (s_1, \dots, s_k)$ y $\mathcal{K} = \text{Ker}(s)$. Tensando con $\mathcal{O}(q)$ se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{K}(q) \rightarrow \mathcal{O}^k(q) \rightarrow \mathcal{F}(m+q) \rightarrow 0$$

y el fragmento correspondiente de la sucesión de cohomología asociada

$$H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^k(q)) \rightarrow H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m+q)) \rightarrow H^{p+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{K}(q)).$$

Por lo dicho en el párrafo anterior al teorema, $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}^k(q)) = 0$ para $p > 0$, $q \geq 0$ y por la hipótesis de inducción, $H^{p+1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{K}(q)) = 0$ para un q suficientemente grande. Por lo tanto $H^p(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m)) = 0$ para m suficientemente grande. ■

Ahora presentamos algunas aplicaciones importantes de este teorema. El siguiente resultado, a cuya demostración referimos al libro de Field, es un hecho en si mismo importante, y que utilizaremos en la demostración del teorema de Grothendieck.

Teorema 4.2.2 *Todo haz vectorial holomorfo E en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ tiene una sección meromorfa no trivial.*

El siguiente es un resultado clásico de la Geometría Algebraica compleja. Los detalles de la demostración pueden consultarse en [F]. Decidimos incluirlo aquí para mostrar una de las varias e importantes aplicaciones de los teorema A y B.

Teorema 4.2.3 *Toda subvariedad analítica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es una variedad algebraica. Es decir, es el conjunto de los ceros de un conjunto (finito) de polinomios homogéneos.*

Demostración: Sea X un subvariedad analítica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con gavilla de ideales \mathcal{I} . Esta gavilla es una subgavilla coherente de \mathcal{O} . Probaremos lo siguiente: dado $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n \setminus X$,

existe un polinomio homogéneo $p = p(z_0, \dots, z_n)$ que se anula en X pero que no se anula en z . Hecho esto, consideramos el conjunto $V(X)$ de todos los polinomios homogéneos que se anulan en X . El conjunto nulo de estos polinomios es precisamente X y por el teorema de la base de Hilbert, [A], se puede elegir un subconjunto finito de $V(X)$ cuyo conjunto nulo es de nuevo X . Esto probaría que X es un subconjunto algebraico.

Pasamos a la demostración. Denotemos por \mathcal{I}_z la gavilla de ideales de $X \cup \{z\}$. Para $m \in \mathbb{Z}$, se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_z(m) \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}(z)(m) \rightarrow 0,$$

donde $\mathbb{C}(z) \cong \mathbb{C}(z)(m)$ es la gavilla rascacielos con soporte en z . Por la parte B del teorema de Serre, existe m_0 tal que $H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_z(m)) = 0$, $m \geq m_0$. Tomando la sucesión de cohomología correspondiente a la sucesión exacta corta tenemos

$$H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m)) \rightarrow H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{C}(z)(m)) \rightarrow 0.$$

Por otra parte, $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathbb{C}(z)(m)) \cong \mathbb{C}$, por lo que existe $p \in H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m))$ tal que $p(z) \neq 0$. Pero $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}$, con lo que $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{I}(m))$ es un subespacio de $H^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m)) \cong P^{(m)}(\mathbb{C}^{n+1})$, que es precisamente el subespacio de polinomios homogéneos de grado m .

■

El siguiente resultado, que nos adentra en el estudio de los haces vectoriales sobre el espacio proyectivo, da una clasificación completa de los haces lineales sobre un espacio proyectivo.

Proposición 4.2.4 *El grupo de haces lineales holomorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es isomorfo al grupo cíclico infinito generado por el haz canónico H .*

Demostración: Demostramos primero que el grupo generado por H es en efecto infinito. Para esto tenemos que ver que si H^p es la identidad $\underline{\mathbb{C}}$ entonces $p = 0$. Supong-

amos que $H^p \cong \mathbb{C}$ y $H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(p)) = \mathbb{C}$. Probamos $H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(p)) \cong P^{(p)}(\mathbb{C}^{n+1})$, pero $P^{(p)}(\mathbb{C}^{n+1}) \cong \mathbb{C}$ si y sólo si $p = 0$. Tomando la sucesión larga de cohomología correspondiente a la sucesión $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}^* \rightarrow 0$ se tiene el fragmento

$$\dots \rightarrow H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}) \rightarrow \dots$$

y dado que $H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}) = H^2(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}) = 0$

$$H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}^*) \cong H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}),$$

donde el isomorfismo está dado por el homomorfismo de conexión δ . Por un resultado de Topología Algebraica básica (ver Apéndice) se tiene que $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ para $n \geq 1$. Consideremos la inclusión natural $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ \downarrow i^* & & \downarrow i^* \\ H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \end{array}$$

Por otra parte, vimos que el haz de hiperplanos es un generador del grupo $H^1(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}^*)$. La transformación inducida i^* manda al haz canónico de $\mathbb{C}P^n$ en el haz canónico de $\mathbb{C}P^1$: de la inclusión natural $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$, $[z_0, z_1] \mapsto [z_0, z_1, 0, \dots, 0]$ se ve fácilmente que las funciones de transición de i^*H son $g_{01}(z_0, z_1) = z_1/z_0$ en $U_0 \cap U_1$, que son precisamente las funciones de transición del haz de hiperplanos en $\mathbb{C}P^1$.

Como δ es un isomorfismo, $\delta i^*(H)$ es un generador de $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z})$. Como el diagrama anterior conmuta, $\delta(H)$ es un generador de $H^2(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ y de nuevo, por ser δ un isomorfismo, H es un generador de $H^1(\mathbb{C}P^n, \mathcal{O}^*)$. ■

4.3 Teorema de Grothendieck

Para finalizar, pasamos a estudiar a los haces vectoriales holomorfos sobre la esfera de Riemann.

Proposición 4.3.1 *Sea E un haz vectorial holomorfo de rango r sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(a_1) \rightarrow \underline{E} \rightarrow \underline{F} \rightarrow 0$$

donde F es un haz vectorial holomorfo de rango $r - 1$ y a_1 es un entero.

Demostración: Sea E un haz como en la proposición. Existe una sección no nula $s \in \mathcal{M}^*(E)$. Para cada $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ se escogen gérmenes $f_z \in \mathcal{M}_z$, $h_z \in \underline{E}_z$ tales que $s_z = f_z h_z$ con $h_z(z) \neq 0$.

Definimos el subconjunto $\mathcal{L}^s \subset \underline{E}$ por $\mathcal{L}_z^s = h_z \mathcal{O}_z$, $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. El conjunto \mathcal{L}^s resulta ser una subgavilla localmente libre de \underline{E} de rango 1. Por ser localmente libre, \mathcal{L}^s es la gavilla de secciones holomorfas de un subhaz lineal holomorfo L^s de E . Por construcción $s_z \in \mathcal{M}^*(L^s)_z$ para todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y s se puede considerar como una sección meromorfa de L^s .

Pongamos $d(s) = \deg(L^s)$. El siguiente paso es probar que $\max\{d(s) \mid s \in \mathcal{M}^*(E)\} < \infty$. Por construcción $\underline{L}^s \cong \mathcal{O}(d(s))$, con lo que $h^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \underline{L}^s) = \dim P^{(d(s))}(\mathbb{C}^2) = \binom{d(s)+1}{1} = d(s) + 1$. Por otra parte $\infty > h^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \underline{E}) \geq h^0(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, \underline{L}^s)$ para toda $s \in \mathcal{M}^*(E)$, de lo que se deduce que el conjunto de los $d(s)$ está acotado y existe $a_1 = \max_{s \in \mathcal{M}^*(E)} \{d(s)\}$. Se escoge el subhaz lineal L de E de grado a_1 , $\underline{L} \cong \mathcal{O}(a_1)$. Se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(a_1) \rightarrow \underline{E} \rightarrow \underline{F} \rightarrow 0,$$

donde F es $\underline{E}/\underline{L}$. ■

Lema 4.3.2 *Sea $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{H} \rightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas analíticas coherentes sobre una variedad compleja M . Supóngase que \mathcal{H} es localmente libre y que $H^1(M, \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{F})) = 0$. Entonces la sucesión se escinde.*

Demostración: Como \mathcal{H} es localmente libre la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \rightarrow 0$$

es exacta (ver [F, pág. 187]). Tomando la sucesión exacta de cohomología correspondiente se tiene el fragmento

$$H^0(M, \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{G})) \rightarrow H^0(M, \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})) \rightarrow 0,$$

pues por hipótesis $H^1(M, \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{F})) = 0$. Entonces por suprayectividad existe $h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que su imagen corresponde a la identidad $1_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, es decir, $gh = 1_{\mathcal{H}}$. ■

Llegamos así al Teorema de Grothendieck:

Teorema 4.3.3 *Sea E un haz vectorial holomorfo de rango r sobre la esfera de Riemann $\mathbb{C}P^1$. Entonces existe una única sucesión de enteros $a_1 \geq \dots \geq a_r$ tales que*

$$\underline{E} \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r)$$

Demostración: La prueba es por inducción sobre el rango r . Supongamos que el teorema ha sido probado para $r - 1$. Por la proposición anterior existe una subhaz lineal holomorfo $L \subset E$ de grado máximo, a_1 , y una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(a_1) \rightarrow \underline{E} \rightarrow \underline{F} \rightarrow 0, \tag{4.1}$$

donde F es una haz holomorfo de rango $r - 1$. Entonces, por hipótesis de inducción se tiene

$$\underline{F} \cong \mathcal{O}(a_2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r), \quad a_2 \geq \dots \geq a_r.$$

Veamos que $a_1 \geq a_2$. Si no fuera así, entonces $a_2 \geq a_1 + 1$ y tensando la sucesión ?? con la gavilla $\mathcal{O}(-a_1 - 1)$ se obtiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \rightarrow \underline{E}(-a_1 - 1) \rightarrow \underline{E}(a_1 - 1) \rightarrow 0.$$

Tomando la sucesión larga de cohomología correspondiente a la sucesión anterior se tiene la sucesión exacta

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{CP}^1, \underline{E}(-a_1 - 1)) \rightarrow H^0(\mathbb{CP}^1, \underline{E}(a_1 - 1)) \rightarrow 0,$$

ya que $H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(-a_1 - 1)) = H^1(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(-a_1 - 1)) = 0$. Ahora, $\underline{E}(-a_1 - 1) = \underline{E} \otimes \mathcal{O}(-a_1 - 1) \cong \bigoplus_{j=2}^r \mathcal{O}(a_j - a_1 - 1)$, y dado que $a_2 - a_1 - 1 \geq 0$, $H^0(\mathbb{CP}^1, \underline{E}(-a_1 - 1)) \cong \bigoplus_{j=2}^r H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(a_j - a_1 - 1)) \neq 0$, con lo que $\underline{E}(-a_1 - 1) \cong \underline{E}(a_1 - 1)$ admite una sección holomorfa no trivial. Entonces podemos encontrar un subhaz lineal holomorfo de $\underline{E}(-a_1 - 1)$ isomorfo a H^p , para algún $p \geq 0$. Tensando la sucesión exacta de haces $0 \rightarrow H^p \rightarrow \underline{E}(-a_1 - 1) \rightarrow H^{p+a_1+1} \rightarrow E$. Es decir, E contiene un haz lineal de grado $\deg(H^{p+a_1+1}) = p + a_1 + 1$, contradiciendo la elección de a_1 . Por lo tanto concluimos que $a_1 \geq a_2$.

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Hom}(\underline{E}, \mathcal{O}(a_1)) &\cong \underline{E}^* \otimes \mathcal{O}(a_1) \cong \left(\bigoplus_{j=2}^r \mathcal{O}(-a_j) \right) \otimes \mathcal{O}(a_1) \\ &\cong \bigoplus_{j=2}^r \mathcal{O}(a_1 - a_j), \end{aligned}$$

y como se probó anteriormente $a_1 - a_j \geq 0$, con lo que se tiene que $H^1(\mathbb{CP}^1, \text{Hom}(\underline{E}, \mathcal{O}(a_1))) = 0$. Entonces podemos aplicar el lema anterior y obtenemos que la sucesión (*) se escinde.

Así

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \bigoplus_{j=2}^r \mathcal{O}(a_j),$$

que da la descomposición buscada.

Finalmente, supongamos que existen dos descomposiciones de \underline{E}

$$\mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_r) \cong \mathcal{O}(b_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(b_r)$$

con $a_1 \geq \dots \geq a_r$ y $b_1 \geq \dots \geq b_r$. Supongamos que $a_1 = b_1, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}$, pero $a_r > b_r$. Tensando la igualdad anterior con $\mathcal{O}(-a_k)$ tenemos que

$$\bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(a_i - a_r) \oplus \mathcal{O} \cong \bigoplus_{i=1}^{r-1} \mathcal{O}(b_i - a_r) \oplus \mathcal{O}(b_r - a_r).$$

Nombremos con \mathcal{A} al lado derecho y con \mathcal{B} al lado izquierdo de este isomorfismo. Como $h^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(b_r - a_r)) = 0$ y $h^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{C}) = 1$, $h^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{A}) > h^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{B})$, lo que es una contradicción. Esto prueba la unicidad de la descomposición y el teorema. ■

Este teorema se le atribuye también a otros matemáticos, como a Garret Birkoff, que en 1913 probó un teorema sobre matrices holomorfas en el plano complejo que es equivalente al teorema de Grothendieck. Por eso también es conocido en la literatura como el teorema de Grothendieck-Birkoff.

Este resultado ya era conocido desde 1908 por Plemelj y aun por Hilbert desde 1905. Sin embargo existe una versión algebraica debida a Dedekin y Weber que data de 1892.

El siguiente corolario da un criterio para la trivialidad de un haz holomorfo sobre la esfera de Riemann.

Corolario 4.3.4 *Sea E un haz vectorial holomorfo sobre \mathbb{CP}^1 . Entonces E es analíticamente trivial si y sólo si $\deg E = 0$ y $H^0(\mathbb{CP}^1, \underline{E} \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$.*

Demostración: Si E es trivial claramente $\deg E = 0$ y $H^0(\mathbb{CP}^1, \underline{E} \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$, porque como se probó, $H^0(\mathbb{CP}^1, \mathcal{O}(-1)) = 0$. Así que supongamos que E tiene grado cero y que $H^0(\mathbb{CP}^1, \underline{E} \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$. Por el Teorema de Grothendieck, existen enteros $a_1 \geq \dots \geq a_k$ tales que

$$E \cong \mathcal{O}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(a_k).$$

Entonces

$$\deg E = \sum_{i=1}^k \deg \mathcal{O}(a_i) = \sum_{i=1}^k a_i = 0 \quad (4.2)$$

y

$$\bigoplus_{i=1}^k H^0(\mathbb{C}P^1, \mathcal{O}(a_i - 1)) \cong H^0(\mathbb{C}P^1, E \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$$

implica que para todo i , $a_i - 1 < 0$, es decir, $0 \geq a_i$. Entonces $a_i = 0$ para $i = 1, \dots, k$ y E es trivial. ■

Apéndice

Resultados de homología y cohomología singular

Para esta sección la referencia es [Gr]

Sea Δ_n el conjunto de los elementos $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum_{i=1}^n z_i = 1$, $z_i \geq 0$.

Sea R un anillo conmutativo con unidad. Para un espacio topológico X se define $S_n(X, R)$ como el grupo abeliano libre generado por todas las funciones continuas $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ y con coeficientes en R . Es decir, un elemento de $S_n(X, R)$ es de la forma $\sum_{\sigma} r_{\sigma} \sigma$, $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$ y $r \in R$. Para cada $n \geq 0$, se define un *operador frontera* $\partial_n : S_n(X, R) \rightarrow S_{n-1}(X, R)$ tal que $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$. Se define $B_n(X, R) = \text{Im } \partial_{n+1}$ y $Z_n(X, R) = \ker \partial_n$. Como $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, se tiene $B_n(X, R) \subset Z_n(X, R)$ y se define el anillo

$$H_n(X, R) = Z_n(X, R)/B_n(X, R),$$

que se llama el *n-ésimo grupo de homología singular* del espacio X .

De manera dual se define el *n-ésimo grupo de cohomología singular*: $S^n(X, R) = \text{Hom}_R(S_n(X, R), R)$ y se tiene un *operador cofrontera* $\delta_n : S^n(X, R) \rightarrow S^{n+1}(X, R)$ tal que $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$. Se define $B^n(X, R) = \text{Im } \delta_{n-1}$ y $Z^n(X, R) = \ker \delta_n$. Entonces

$$H_{\text{sing}}^n(X, R) = Z^n(X, R)/B^n(X, R).$$

Se prueba que si X es un espacio contraíble, $H_0(X, \mathbb{R}) = 0$, $H_n(X, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $n > 0$, [Gr, 9.4].

Para el caso de la cohomología, se prueba que si X es una variedad (real) compacta, para $R = \mathbb{Z}$, $H^2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, [Gr, 23.2].

Cohomología de gavillas y cohomología singular

En esta sección nuestro objetivo es probar que existe un isomorfismo entre los grupos de cohomología con coeficientes en una gavilla y los grupos de cohomología singular. Específicamente, si G es la gavilla constante con valores en el grupo abeliano G , queremos probar que

$$H^p(X, G) \cong H_{\text{sing}}^p(X, G), \quad p \geq 0,$$

donde en el lado derecho G es visto como grupo abeliano.

La idea de la demostración, que procede de [Go] es la siguiente. Sea $S_p(U, G)$ de las p -cadenas singulares con coeficientes en el grupo \mathbb{Z} definidas en el subconjunto abierto U de X . Entonces $S^p(U, G) = \text{Hom}_G(S_p(U, G), G)$ es el grupo de las p -cocadenas singulares con coeficientes en G y definidas en U .

Denotemos por $\Delta = \Delta_p : S^p(U, G) \rightarrow S^{p+1}(U, G)$ el homomorfismo cofrontera. La correspondencia $U \mapsto S^p(U, G)$, $p \geq 0$, define una pregavilla $S^p(G)$ en X ; con $\underline{S}^p(G)$ denotando su gavilla asociada. Como Δ conmuta con las restricciones, se obtiene el siguiente complejo de gavillas

$$0 \rightarrow G \rightarrow \underline{S}^0(G) \xrightarrow{\Delta_0} \underline{S}^1(G) \xrightarrow{\Delta_1} \dots$$

Por definición de los grupos de cohomología

$$H_{\text{sing}}^0(X, G) = \text{Ker}(\Delta_0^*)$$

$$H_{\text{sing}}^p(X, G) = \text{Ker}(\Delta_p^*) / \text{Im}(\Delta_{p-1}^*), \quad p \geq 1.$$

Afirmamos que la resolución anterior es una resolución fina de la gavilla constante G . La exactitud se sigue de que cada punto de X tiene un sistema de vecindades que consta de vecindades de abiertos contraíbles, y como sabemos (ver sección anterior) la cohomología de un espacio contraíble es 0 en dimensión $p \geq 1$. Observemos primero que $\underline{S}^0(G) = G^*$ —la gavilla de gérmenes de secciones discontinuas de G . Entonces $\underline{S}^0(G)$ es fina. Sea ahora $p > 0$ y $s \in \underline{S}^p(G)(K)$, con K subconjunto cerrado de X . Entonces s es la restricción de una sección continua \tilde{s} de $\underline{S}^p(G)$ sobre un abierto U de K . Sea 1_K la sección continua de $\underline{S}^0(G)$ sobre X definida por $1_K|_K \equiv 1$, $1_K|_{X \setminus K} \equiv 0$. Dado que $\underline{S}^p(G)$ es una gavilla de $\underline{S}^0(G)$ -módulos, $1_K \tilde{s}$ es una sección continua de $\underline{S}^p(G)$ sobre X que extiende a s . Así se tiene el isomorfismo buscado entre $H^p(X, G)$ y $H_{\text{sing}}^p(X, G)$.

Bibliografía

- [Al] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis*,
MacGraw-Hill, Inc., 1979.
- [A] M. F. Atiyah y I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*,
Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.
- [F] M. Field. *Several Complex Variables and Complex Manifolds I, II*,
Cambridge University Press, 1982.
- [Fo] O. Forster. *Lectures on Riemann Surfaces*,
Springer-Verlag New York Inc., 1981.
- [Go] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*,
Hermann. Paris, 1958.
- [Gr] M. Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*,
Benjamin. New York, 1966.
- [G-H] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*,
John Wiley & Sons, 1978.
- [G1] R.C. Gunning, *Lectures on Riemann Surfaces*,

- Princeton Univ. Press, Princeton, 1967.
- [G2] R.C Gunning y H. Rosi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*,
Prentice-Hall, Inc.,1965.
- [J] N. Jacobson, *Basic Algebra I*,
W. H. Freeman, Springer-Verlag, 1985.
- [H] F. Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Geometry*,
Springer-Verlag, 1966.
- [K] S. Kobayashi, *Differential Geometry of Complex Vector Bundles*,
Princeton Univ. Press, 1995.