20

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

PANORAMA DE LEYES DE LOGARITMO ITERADO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I O

P R E S E N T A :

JORGE HUMBERTO DEL CASTILLO SPINDOLA

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA EMILIA CABALLERO ACOSTA

2002

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Panorama de Leyes de Logaritmo Iterado

realizado por Jorge Humberto Del Castillo Spíndola

con número de cuenta 09107917-2 , quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. María Emilia Caballero Acosta	
Propietario	Dra. Eliane Regina Rodrigues Caloni	Eliane Regina Rodrigues
Propietario	Dra. Ana Meda Guardiola	A. Meda
Suplente	Act. Jaime Vazquez Alamilla	
Suplente	Dr. Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

Panorama de Leyes de Logaritmo Iterado

Jorge Humberto Del Castillo

Agredecimientos

Quisiera primero dar las gracias y el reconocimiento a toda la gente que de alguna manera ha estado conmigo a lo largo de mi carrera y en la elaboración de este trabajo.

Antes que otra cosa agradezco a la Dra. María Emilia Caballero Acosta toda su ayuda y gran paciencia en la realización de esta tesis, asi como su apoyo y gran influencia en mi gusto por la probabilidad y los procesos estocásticos. Muchas gracias Ma. Emilia.

Agradezco a la Dra. Ana Meda por su gran disposición en la revisión de este trabajo y por sus atinados comentarios, observaciones y correcciones.

Con mucho cariño a la Dra. Eliane Rodrigues por la revisión de este trabajo, pero principalmente por todo su apoyo y su amistad.

A el Dr. Pablo Padilla le agradezco no solo la revisión de este trabajo, si no la confianza, apoyo y amistad que me ha brindado y la cual tengo en una alta estima.

A el Act. Jaime Vazquez por sus buenos comentarios acerca de este trabajo y por su gran amistad.

Quiero agradecer y dedicar con mucho amor este trabajo a mi familia, ya que sin su gran apoyo, empuje y confianza no hubiera sido posible.
Con todo mi amor a los que dieron todo el apoyo y motivación en la etapa final, muchas gracias Rosalinda y Emilio. A mi mama y abue por tanto apoyo, dedicación y amor. También con amor a mi hermano Ricardo y compañia (Demiana y Demian). Con muchísimo cariño a mis tios y primos por tanta ayuda.

También quiero dedicar este trabajo a excelentes profesores que me han influenciado y/o han creído en mi y que los aprecio mucho: Pilar Martinez, Sergio Hernández, Paloma Zapata, Margarita Chavez, Begoña Fernández, Beatriz Rodriguez, Rafael del Río, Jaqueline Cañetas, Gilberto Flores, Guillermo Grabynski y muchos mas.

Mención aparte merece Alberto Molina quien ha sido un excelente amigo y maestro. Gracias por tu ayuda en la elaboración de mi tesis.

Un agradecimiento especial por su ayuda y calidad humana a Elena de Oteyza y a Adelina.

También quiero dedicar este trabajo a toda la gente que convivió conmigo durante este tiempo, pero con especial cariño a mis amigos:Alejandro por tanta aventura, Juan por tu amistad, Diana L. por todo tu apoyo, Javier por tu gran compañia y amistad, Mauricio por tu amistad, Bubu(Lourdes) por tu sinceridad y apoyo en todo, a todos mis compañeros de Calculo, en especial a Breno, Rodrigo (Pinz), Adriana y Greta; a David P. por su amistad, a Uri, Andrés, Tavo, Luis, Juan (cepillo), Herbé, Roy, Ulises, Paquito, Lisset, Karlita, con

mucho cariño a Montserrat y Pablito, a Jaque y a todos mis alumnos.

A la UNAM

Contenido

INTRODUCCIÓN

De los grandes resultados obtenidos en la teoría de la probabilidad, destacan de manera particular los teoremas límite. Uno de ellos es la Ley de los Grandes Números (Kolmogorov 1928), la cual dice que si tenemos variables aleatorias X_i independientes e iédenticamente distribuidas y denotamos a $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ entonces,

$$E(X_i) < \infty \quad \text{y} \quad E(X_i) = \mu \quad \text{si y solo si} \quad \frac{S_n}{n} \to \mu \quad \text{casi seguramente}$$

El siguiente gran resultado es el Teorema del Límite Central, el cual dice que si la varianza σ^2 es finita entonces $n^{\frac{1}{2}} \frac{(\frac{S_n}{n} - \mu)}{\sigma}$ converge en distribución a la ley normal estandar Φ y viceversa, es decir

$$Var(X_i) = \sigma^2 \quad \text{y} \quad E(X_i) = \mu \quad \text{si y solo si} \quad \frac{(S_n - n\mu)}{\sigma n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \Phi$$

Pero que es lo que pasa entre ambos resultados?. Es decir, cuando es posible obtener un comportamiento límite no trivial normalizando con una función intermedia en tamaño entre la n de la Ley de los Grandes Números y la $n^{\frac{1}{2}}$ del Teorema del Límite Central.
El comportamiento límite de S_n fué estudiado en detalle primero por Hausdorff en 1913. Un año después en 1914, Hardy y Littlewood mejoraron la estimación y en 1924 Khintchine dió la mejora final.
En el Capítulo 1 de este trabajo, se presentan los resultados necesarios acerca del comportamiento de S_n que permitirán acceder en el Capítulo 2 a las versiones de la Ley del Logaritmo Iterado (el comportamiento límite intermedio entre la Ley de los Grandes Números y el Teorema del Límite Central) obtenidas por Hausdorff, Hardy y Littlewood y Khintchine. Estos resultados preliminares incluyen tanto resultados clásicos y sumamente útiles (como se verá a lo largo de este trabajo) como el Lema de Borel-Cantelli, asícomo cotas superiores mas refinadas de ciertas probabilidades que las obtenidas con Chebyshev por ejemplo.
En el Capítulo 2, se presentan de manera detallada las pruebas de las estimaciones arriba mencionadas (Hausdorff etc.) por orden cronológico.
Una vez que son obtenidas estas primeras versiones y del hecho de poder obtener un proceso límite continuo no trivial (el llamado Movimiento Browniano) a partir de la caminata aleatoria $\{S_n\}$, el próximo paso es preguntarse si las características que hereda este proceso (incrementos independientes y estacionarios) permiten acceder a una versión de la Ley del Logaritmo Iterado para las trayectorias del mismo. Esto es posible y en el Capítulo 3 se expone de manera heurística la obtención del Movimiento Browniano a partir de la caminata aleatoria simétrica y se presenta la prueba de la Ley del Logaritmo Iterado para el Movimiento Browniano.
Por último, en el Capítulo 4 se obtiene una generalización mas y se prueba la versión correspondiente a un proceso con incrementos independientes y estacionarios (conocidos como procesos de Lévy) en su versión que toma valores positivos: el llamado subordinador (de hecho el Movimiento Browniano es un ejemplo de proceso de Lévy, asícomo lo es el proceso

Poisson y el Cauchy).
Para finalizar, una vez que hemos visto que la Ley del Logaritmo Iterado nos da la tasa de convergencia de la Ley de los Grandes Números, es importante mencionar que la variedad de aplicaciones es muy grande. Por ejemplo, si en estadística tenemos que μ es la media poblacional y es desconocida, la Ley de los Grandes Números dice que la media muestral $\frac{S_n}{n}$ es un estimador consistente, el Teorema del Límite Central da su distribución límite y la Ley del Logaritmo Iterado da su tasa de convergencia casi segura.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Como ya ha sido mencionado en la introducción, este primer capítulo trata acerca de resultados preliminares que servirán para poder desarrollar las versiones de logaritmo iterado del capítulo siguiente. Los resultados contenidos aquí, permiten establecer cotas superiores e inferiores acerca del comportamiento de sumas de variables aleatorias, de las cuales se obtiene una cada vez mejor aproximación a la velocidad de convergencia obtenida en la ley de los grandes números.

Además de la importancia que revisten estos resultados para la obtención de las versiones de logaritmo iterado, es relevante notar que no deben ser considerados como resultados secundarios ó auxiliares únicamente; si no como un conjunto de resultados de suma utilidad acerca del comportamiento que se tiene para sumas de variables aleatorias. Por ejemplo, el primer teorema expuesto en este capítulo es de gran importancia en si mismo y es una pieza clave para obtener una demostración bastante sencilla de la ley de los grandes números así como de una cota de donde se obtiene de manera inmediata la versión de logaritmo iterado de Hausdorff de 1913. Este primer teorema, se presenta en este trabajo de una manera muy constructiva lo cual permite comprender el comportamiento de fondo del valor esperado de sumas de variables aleatorias. Es poco frecuente ver en los libros su demostración, precisamente por lo elaborada que es, asi que a pesar de ser un resultado muy útil, su demostración es poco conocida.

Así mismo, se enuncian resultados sencillos, pero que se usan mucho en la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos como lo son el lema 1.1, que es una caracterización del comportamiento de una sucesión de variables aleatorias no negativas a partir del conocimiento que se tiene de la serie formada por los valores esperados de las variables; y el famoso lema de Borel-Cantelli que nos permite saber con que certeza ó probabilidad ocurren una infinidad de eventos aleatorios de interés; esto es, el límite superior de una sucesión de eventos; mediante el conocimiento que se tiene de la serie numérica formada por las probabilidades de los eventos.

Por último, se obtienen refinamientos muy precisos de las cotas superiores e inferiores que se utilizarán para versiones mas precisas y fuertes de logaritmo iterado (Lemas 1.3 y 1.4).

Así pues, comencemos con el primer teorema, que nos permite obtener una primera cota superior para la esperanza de una suma de variables aleatorias elevada a la $2p$ con p un natural.

Teorema 1.1. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media cero y con momentos hasta del orden $2p$. Definimos $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Entonces, para toda $p \geq 1$ se tiene que $E({S_n}^{2p}) \leq C_p n^p$ donde C_p depende de p pero no de n.

PRUEBA.

$$\begin{aligned} E({S_n}^{2p}) &= E((X_1 + X_2 + \cdots + X_n)^{2p}) \\ &= E\left(\sum_{(p_1+\cdots+p_n)=2p} \frac{(2p)!}{p_1!p_2!\cdots p_n!} {X_1}^{p_1} {X_2}^{p_2} \cdots {X_n}^{p_n} \right) \\ &= \sum_{(p_1+\cdots+p_n)=2p} \frac{(2p)!}{p_1!p_2!\cdots p_n!} E({X_1}^{p_1}) E({X_2}^{p_2}) \cdots E({X_n}^{p_n}) \end{aligned}$$

Donde se utilizó el teorema multinomial, la linealidad de la esperanza y la independencia de las variables.

Ahora bien, como las X_i's tienen media cero, podemos eliminar los casos donde $p_l = 1$ para algúna l.

$$\begin{array}{llllll} (1) & p_i = 2p & p_j = 0 & & & j \neq i \\ (2) & p_i = 2p-1 & p_j = 1 & p_k = 0 & & \forall k \neq i,j \\ (3) & p_i = 2p-2 & p_j = 2 & p_k = 0 & & \forall k \neq i,j \\ (4) & p_i = 2p-2 & p_j = 1 & p_k = 1 & p_m = 0 & \forall m \neq i,j,k \\ (5) & p_i = 2p-3 & p_j = 3 & p_k = 0 & & \forall k \neq i,j \\ (6) & p_i = 2p-3 & p_j = 2 & p_k = 1 & p_m = 0 & \forall m \neq i,j,k \\ (7) & p_i = 2p-4 & p_j = 4 & p_k = 0 & & \forall k \neq i,j \\ (8) & p_i = 2p-4 & p_j = 3 & p_k = 1 & p_m = 0 & \forall m \neq i,j,k \\ (9) & p_i = 2p-4 & p_j = 2 & p_k = 2 & p_m = 0 & \forall m \neq i,j,k \end{array}$$

y así sucesivamente. Podemos observar que en los casos del tipo (2), (4), (6), (8) los sumandos correspondientes se vuelven cero y entonces

$$
\begin{aligned}
E(S_n{}^{2p}) &= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^{2p}) \\
&+ \frac{2p(2p-1)}{2!}\sum_{i\neq j} E(X_i{}^{2p-2})E(X_j{}^2) \\
&+ \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{3!}\sum_{i\neq j} E(X_i^{2p-3})E(X_j^3) \\
&+ \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{4!}\sum_{i\neq j} E(X_i^{2p-4})E(X_j{}^4) \\
&+ \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{2!2!}\sum_{i\neq j\neq k} E(X_i{}^{2p-4})E(X_j{}^2)E(X_k{}^2) \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{(2p)!}{(2p-p)!p!}\sum_{i\neq j} E(X_i{}^{2p-p})E(X_j{}^p) \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

y en consecuencia

$$
\begin{aligned}
E(S_n{}^{2p}) &\leq \sum_{i=1}^{n} E(|X_i|^{2p}) \\
&+ \frac{2p(2p-1)}{2!}\sum_{i\neq j} E(|X_i|^{2p-2})E(|X_j|^2) \\
&+ \frac{2p(2p-1)(2p-2)}{3!}\sum_{i\neq j} E(|X_i|^{2p-3})E(|X_j|^3) \\
&+ \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{4!}\sum_{i\neq j} E(|X_i|^{2p-4})E(|X_j|^4) \\
&+ \frac{2p(2p-1)(2p-2)(2p-3)}{2!2!}\sum_{i\neq j\neq k} E(|X_i|^{2p-4})E(|X_j|^2)E(|X_k|^2) \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{(2p)!}{(2p-p)!p!}\sum_{i\neq j} E(|X_i|^{2p-p})E(|X_j|^p) \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

Ahora, recordemos que la desigualdad de Hölder afirma que

$$E(|YZ|) \leq E(|Y|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}} E(|Z|^{q_2})^{\frac{1}{q_2}}$$

donde q_1 y q_2 son exponentes conjugados.

Entonces, podemos observar que si se toma $Y = {X_1}^{k_i}$ y $Z = 1$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} E(|X_1|^{k_i}) &= E(|{X_1}^{k_i}|) \\ &= E(|{X_1}^{k_i}1|) \\ &\leq E(|{X_1}^{k_i}|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}} E(1^{q_2})^{\frac{1}{q_2}} \\ &= E(|X_1|^{k_i q_1})^{\frac{1}{q_1}} \end{aligned}$$

Si quiero que $k_i q_1 = 2p$ obtengo que $q_1 = \frac{2p}{k_i} > 1$ y en consecuencia $\frac{1}{q_1} = \frac{k_i}{2p}$ para toda $i = 1, 2, \ldots$ [1]

Ahora, también

$$\begin{aligned} E(|X_1|^{2p-k}) &= E(|{X_1}^{2p-k}|) \\ &= E(|{X_1}^{2p-k}1|) \\ &\leq E(|{X_1}^{2p-k}|^{q_1})^{\frac{1}{q_1}} \\ &= E(|X_1|^{(2p-k)q_1})^{\frac{1}{q_1}} \end{aligned}$$

y en este caso $q_1 = \frac{2p}{2p-k} \geq 1$ de donde $\frac{1}{q_1} = \frac{2p-k}{2p}$

Por lo tanto, obtenemos que

$$E(|X_1|^{2p-k})E(|X_1|^{k_1})\cdots E(|X_1|^{k_r}) \leq E(|X_1|^{2p})^{\frac{2p-k}{2p}} E(|X_1|^{2p})^{\frac{k_1}{2p}} \cdots E(|X_1|^{2p})^{\frac{k_r}{2p}}$$

al sustituir cada valor esperado por su correspondiente cota obtenida de la desigualdad de Hõlder.

Pero observemos que

$$\begin{aligned} \frac{2p-k}{2p} + \frac{k_1}{2p} + \cdots + \frac{k_r}{2p} &= \frac{2p - k + \sum_{n=1}^{r} k_n}{2p} \\ &= \frac{2p-k+k}{2p} \\ &= 1 \end{aligned}$$

entonces concluimos que

$$E(|X_1|^{2p-k})E(|X_1|^{k_1})\cdots E(|X_1|^{k_r}) \leq E(|X_1|^{2p})$$

[1]Es importante observar en este punto que para cada i se tiene un q_1 y un q_2

y por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} E(S_n{}^{2p}) \leq\ & E(|X_1|^{2p})\Big\{\sum_{i=1}^{n} 1 \\ & +\frac{(2p)!}{(2p-2)!2!}\sum_{i\neq j} 1 \\ & +\frac{(2p)!}{(2p-3)!3!}\sum_{i\neq j} 1 \\ & +\cdots \\ & +\frac{(2p)!}{(2p-p)!p!}\sum_{i\neq j} 1 \\ & +\frac{(2p)!}{(2p-4)!2!2!}\sum_{i\neq j\neq k} 1 \\ & +\cdots \\ & +\frac{(2p)!}{2!2!2!\cdots 2!}\sum_{i_s} 1\Big\} \end{aligned}$$

donde, en la última suma $s \in \{1,\ldots,p\}$ $i_t \neq i_r$ $t \neq r$

Ahora bien, en los componentes (sumandos) con 2 elementos, como por ejemplo

$$\frac{(2p)!}{(2p-2)!2!}\sum_{i\neq j} E(|X_i|^{2p-2})E(|X_j|^2)$$

podemos observar que el número de sumandos es $n(n-1)$ ya que para i hay n posibilidades para escoger a x y una vez fija quedan $(n-1)$ para la j.

Así mismo, para los componentes con 3 elementos como por ejemplo

$$\frac{(2p)!}{(2p-4)!2!2!}\sum_{i\neq j\neq k} E(|X_i|^{2p-4})E(|X_j|^2)E(|X_k|^2)$$

observamos que el número de sumandos es $n(n-1)(n-2)$.

Haciendo un razonamiento análogo hasta el componente con p elementos

$$\frac{(2p)!}{2!2!\cdots 2!}\sum \underbrace{E(|X_i|^2)E(|X_j|^2)\cdots E(|X_t|^2)}_{p\quad factores}$$

tenemos que hay $n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))$ sumandos.

En consecuencia

$$\begin{aligned}
E(S_n{}^{2p}) &\leq E(|X_1|^{2p})\{n + \frac{(2p)!}{(2p-2)!2!}n(n-1) \\
&+\frac{(2p)!}{(2p-3)!3!}n(n-1) + \cdots \\
&+\frac{(2p)!}{(2p-p)!p!}n(n-1) + \frac{(2p)!}{(2p-4)!2!2!}n(n-1)(n-2) \\
&+\cdots \\
&+\frac{(2p)!}{2!2!\cdots 2!}n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))\} \\
&= E(|X_1|^{2p})\{n + n(n-1)[\frac{(2p)!}{(2p-2)!2!} + \cdots + \frac{(2p)!}{(2p-p)!p!}] \\
&+n(n-1)(n-2)[\frac{(2p)!}{(2p-4)!2!2!} + \frac{(2p)!}{(2p-6)!2!4!} + \cdots] \\
&+\cdots \\
&+n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))[\frac{(2p)!}{2!2!\cdots 2!}]\} \\
&= E(|X_1|^{2p})\{n + n(n-1)[C_p^1] + n(n-1)(n-2)[C_p^2] \\
&+\cdots \\
&+n(n-1)\cdots(n-(p-1))[C_p^{(p-1)}]\}
\end{aligned}$$

Si definimos $\overline{C_p} = \max\{C_p^1, C_p^2, \ldots, C_p^{(p-1)}\}$ entonces obtenemos que

$$\begin{aligned}
E(S_n{}^{2p}) &\leq E(|X_1|^{2p})\overline{C_p}\{n + n(n-1) + \cdots + (n(n-1)\cdots(n-(p-1)))\} \\
&\leq E(|X_1|^{2p})\overline{C_p}\{\underbrace{n^p + n^p + \cdots + n^p}_{p \quad sumandos}\} \\
&= E(|X_1|^{2p})\overline{C_p}\{pn^p\}
\end{aligned}$$

Si definimos, por último, $C_p = E(|X_1|^{2p})\overline{C_p}p$ obtenemos el resultado deseado.

$$E(S_n{}^{2p}) \leq C_p n^p$$

■

Una vez demostrado este primer teorema veamos ahora un lema muy importante que, con ayuda del teorema 1.1, nos permitirá obtener, de manera muy sencilla, la ley fuerte [2]de los grandes números.

Lema 1.1. Sean Y_1,Y_2,... variables aleatorias no negativas tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n) < \infty$$

Entonces, $Y_n \to 0$ con probabilidad 1 (i.e. $Y_n \to 0$ casi seguramente)

[2]En este contexto, la palabra "fuerte" hace referencia a que la convergencia es casi segura.

PRUEBA.
Definamos $Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$, entonces $\{Z_n\}$ es una sucesión creciente de funciones.

Denotemos su límite como $Z \leq \infty$ $\quad (Z = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n)$

Por el teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\begin{aligned} E(Z) &= \lim_{n\to\infty} E(Z_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E(Y_k) \\ &< \infty \end{aligned}$$

entonces Z es integrable y en consecuencia es finita excepto en un conjunto de medida cero. Pero $Z = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ y los términos de una serie convergente deben tender a cero. Por lo tanto $Y_n \to 0$ casi seguramente. ∎

Ahora si estamos en posibilidades de obtener uno de los resultados mas importantes de la teoría de la probabilidad, el cual afirma que con probabilidad 1 el límite de los promedios de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, es exactamente la media común de estas variables aleatorias.

Como ya se mencionó, una vez obtenido este resultado, la pregunta de interés es saber con que velocidad se da esta convergencia y a esta pregunta se le ha contestado con las versiones de leyes del logaritmo iterado que se presentan mas adelante en este trabajo.

Teorema 1.2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media común μ y varianza común σ^2 y con momentos hasta de orden 4. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu \quad \text{casi seguramente}$$

PRUEBA.
Definamos

$$Y_n = \frac{(S_n - n\mu)^4}{n^4}$$

y observemos que

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \frac{1}{n^4} E((S_n - n\mu)^4) \\ &= \frac{1}{n^4} E\Big(\Big(\sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)\Big)^4\Big) \\ &\leq \frac{Cn^2}{n^4} \quad \text{por el teorema 1.1} \\ &= \frac{C}{n^2} \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(Y_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2} < \infty$$

y en consecuencia, al aplicar el lema 1, obtenemos que $Y_n \to 0$ c.s.

Es decir,

$$\frac{S_n - n\mu}{n} \to 0 \quad \text{c.s.}$$

Por lo tanto

$$P\Big(\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \mu\Big) = 1$$

∎

Una vez obtenidos estos primeros resultados, avoquémonos a obtener cotas que nos permitan estudiar la velocidad de convergencia asociada a la ley de los grandes números.

En realidad una primera cota ya ha sido obtenida (teorema 1.1), pero para poder progresar en la estimación y dar una aproximación mas precisa, es necesario obtener cotas mas refinadas.

Lema 1.2. Sean X_1,X_2,... variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas. Supongamos que $|X_k| \leq M$ c.s. para alguna constante M y sea σ^2 la varianza de X_k.

Entonces, para x tal que $0 \leq x \leq \frac{2}{M}$ se tiene

$$E(\exp(xS_n)) \leq \exp\left\{\frac{1}{2} n x^2 \sigma^2 \left(1 + \frac{xM^3}{\sigma^2}\right)\right\}$$

Prueba.
Las variables aleatorias $\exp(xX_k)$ son independientes y tienen una distribución común; entonces,

$$\begin{aligned} E(\exp(xS_n)) &= E(\exp\{x(X_1 + \cdots + X_n)\}) \\ &= E(\exp(xX_1)\exp(xX_2)\cdots\exp(xX_n)) \\ &= E(\exp(xX_1))E(\exp(xX_2))\cdots E(\exp(xX_n)) \\ &= [E(\exp(xX_1))]^n \end{aligned}$$

Pero observemos que, debido al acotamiento de $|X_1|$ y a que $E(X_1) = 0$, se obtiene que para

$x \geq 0$:

$$\begin{aligned} E(\exp(xX_1)) &= E\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^kX_1^k}{k!}\Big) \\ &= 1+0+\frac{x^2\sigma^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^kE(X_1^k)}{k!} \\ &\leq 1+\frac{x^2\sigma^2}{2}+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{x^kM^k}{k!} \\ &\leq 1+\frac{x^2\sigma^2}{2}+\frac{x^3M^3}{6}\Big(1+\frac{xM}{3}+\frac{x^2M^2}{3^2}+\cdots\Big) \\ &= 1+\frac{x^2\sigma^2}{2}+\frac{x^3M^3}{6}\Big(\frac{1}{1-\frac{xM}{3}}\Big) \end{aligned}$$

Ahora bien, como $x \leq \frac{2}{M}$ entonces $\frac{xM}{3} \leq \frac{2}{3}$ de donde $1-\frac{xM}{3} \geq \frac{1}{3}$ con lo que se obtiene que $\frac{1}{1-\frac{xM}{3}} \leq 3$. Entonces,

$$E(\exp(xX_1)) \leq 1+\frac{x^2\sigma^2}{2}\Big(1+\frac{xM^3}{\sigma^2}\Big)$$

Ahora, del hecho de que $1+x < \exp(x)$ concluimos que

$$E(\exp(xX_1)) < \exp\Big\{\frac{1}{2}x^2\sigma^2\Big(1+\frac{xM^3}{\sigma^2}\Big)\Big\}$$

Por lo tanto

$$E(\exp(xS_n)) \leq \exp\Big\{\frac{1}{2}nx^2\sigma^2\Big(1+\frac{xM^3}{\sigma^2}\Big)\Big\}$$

■

Una vez obtenido este lema, estamos en posibilidades de obtener, junto con la desigualdad de Chebyshev en su forma exponencial

$$P(X \geq b) \leq \exp(-cb)E(\exp(cX)) \qquad c > 0$$

un corolario que nos permitirá mejorar la tasa de convergencia de S_n[3]

Corolario 1.1. Dada $a_n = o(n)$ cuando $n \to \infty$ entonces

$$P(S_n \geq a_n) \leq \exp\Big(-\frac{a_n^2}{2n\sigma^2}+O\Big(\frac{a_n^3}{n^2}\Big)\Big)$$

PRUEBA.
Primero aplicamos la desigualdad de Chebyshev en su forma exponencial con $X = S_n$, $b = a_n$, $c = x$

$$\begin{aligned} P(S_n \geq a_n) &\leq \exp(-xa_n)E(\exp(xS_n)) \\ &\leq \exp(-xa_n)\exp\Big(\frac{1}{2}nx^2\sigma^2\Big(1+\frac{xM^3}{\sigma^2}\Big)\Big) \end{aligned}$$

[3]Este corolario se utiliza en la Estimación 2 del capítulo 2.

debido al lema anterior para toda $x \leq \frac{2}{M}$.

Como esta desigualdad vale para todos los valores de x menores o igual a $\frac{2}{M}$, escojamos su valor de tal manera que minimize de manera aproximada esta cota superior.

Para esto, primero juntemos la expresión en una sola exponencial

$$P(S_n \geq a_n) \leq \exp\left(-xa_n + \frac{1}{2}nx^2\sigma^2\left(1 + \frac{xM^3}{\sigma^2}\right)\right) \quad \text{para toda} x \leq \frac{2}{M}$$

ahora, solo consideremos a

$$-xa_n + \frac{1}{2}nx^2\sigma^2$$

al derivar esta expresión respecto a x e igualar a 0

$$-a_n + nx\sigma^2 = 0$$

pero esto sucede cuando $x = \frac{a_n}{n\sigma^2}$. Aún mas, este valor de x satisface $x \leq \frac{2}{M}$ para n suficientemente grande debido a que $a_n = o(n)$.

Entonces, al substituir en la cota obtenemos

$$\begin{aligned}
P(S_n \geq a_n) &\leq \exp\left(-\frac{a_n^2}{n\sigma^2} + \frac{1}{2}n\frac{a_n^2}{n^2(\sigma^2)^2}\left(\sigma^2 + \frac{a_n}{n\sigma^2}M^3\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{a_n^2}{n\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{a_n^2}{n\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{a_n^3 M^3}{n^2(\sigma^2)^3}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{a_n^2}{n\sigma^2} + \frac{1}{2}\frac{a_n^3 M^3}{n^2(\sigma^2)^3}\right) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{a_n^2}{n\sigma^2} + O\left(\frac{a_n^3}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

■

Antes de continuar en busca de cotas mas refinadas, veamos un resultado clásico (y poderoso) de la teoría: el lema de Borel-Cantelli, el cual también será de gran utilidad para poder desarrollar las estimaciones de los siguientes capítulos.

Proposición 1.1. (Lema de Borel-Cantelli) Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos y definamos B como sigue

$$B = \limsup_{n\to\infty}(A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

entonces

i) si $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ se tiene que $P(B) = 0$

ii) si $A_1, A_2, \ldots$ son independientes y $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \infty$ entonces $P(B) = 1$.

Prueba.

Recordemos que una medida de probabilidad cumple con la siguiente propiedad, si $\{A_n\}$ es creciente (i.e. $A_n \subset A_{n+1} \quad \forall n$) se tiene que $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ y si $\{A_n\}$ es

decreciente (i.e. $A_n \supset A_{n+1} \quad \forall n$) se tiene que $P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.
Definamos a $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ entonces, $B_n \supset B_{n+1}$ para toda n y en consecuencia

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= P(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

con lo que queda probado (i).
Ahora, para (ii)

$$\begin{aligned}
P(B) &= \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} [1 - P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c)]
\end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
P(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c) &= \prod_{k=n}^{\infty} P(A_k^c) \quad \text{por la independencia} \\
&= \prod_{k=n}^{\infty} (1 - P(A_k)) \\
&\leq \prod_{k=n}^{\infty} \exp(-P(A_k)) \quad \text{ya que} \quad 1 - x \leq \exp(-x) \\
&= \exp(-\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)) \\
&= 0 \quad \text{ya que} \quad \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = \infty \quad \forall n
\end{aligned}$$

■

Una vez obtenido este resultado tan importante que nos permite saber la probabilidad de ocurrencia que tienen una infinidad de A_n[4] a partir del conocimiento de la serie formada

[4] Claramente $\omega \in \limsup(A_n) \Leftrightarrow \omega \in A_n$ para una infinidad de n's

con las probabilidades de los eventos, cerremos este primer capítulo con un par de lemas que nos permiten obtener cotas mas refinadas (tanto superior como inferiormente) para nuestra estimación de la velocidad de convergencia.

Lema 1.3. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con media cero y varianzas σ^2. Entonces, para cualquier $a > 0$

$$P(\max_{1\leq k\leq n}(S_k) \geq a) \leq 2P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2})$$

PRUEBA.
Sean

$$A = \{\omega | \max_{1\leq k\leq n}(S_k) \geq a\}$$

$$A_k = \{\omega | S_j < a \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, k-1 \quad \text{y} \quad S_k \geq a\}$$

Claramente $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$, aún mas $\bigcup A_k = A$ ya que si $\omega \in \bigcup A_k$ entonces existe un k tal que $\omega \in A_k$ y en consecuencia $S_j(\omega) < a \quad j = 1, \ldots, k-1$ y $S_k(\omega) \geq a$ pero entonces $\max_{1\leq l\leq n} S_l(\omega) \geq S_k(\omega) \geq a$ de donde $\omega \in A$.

Para la otra contención, vemos que si $\omega \in A$ entonces $\max_{1\leq l\leq n} S_l(\omega) \geq a$ pero de la definición de máximo tenemos que existe k de tal manera que $S_k(\omega) \geq a$ y $S_j(\omega) < a$ si $j = 1, \ldots, k-1$ en consecuencia $\omega \in A_k$, luego entonces $\omega \in \bigcup A_k$.

Ahora,

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap (\{S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}\} \cup \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\})) \\
&= P(A \cap \{S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) + P(A \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \\
&= C + D
\end{aligned}$$

Como $(A \cap \{S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \subset \{S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}\}$
tenemos que $C \leq P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2})$
Por otra parte

$$\begin{aligned}
D &= P(A \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \\
&= P((\cup A_k) \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) \\
&= P(\cup_{k=1}^{n}(A_k \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\})) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\})
\end{aligned}$$

Ahora bien, en A_k tenemos que $S_k \geq a$ y en consecuencia

$$(A_k \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}) \subset (A_k \cap \{S_n - S_k < -\sqrt{2n\sigma^2})$$

de donde

$$\begin{aligned}
P(A_k \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) &\leq P(A_k \cap \{S_n - S_k < -\sqrt{2n\sigma^2}\}) \\
&\leq P(A_k \cap \{|S_n - S_k| \geq \sqrt{2n\sigma^2}\})
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad debido al hecho de que

$$\{S_n - S_k < -\sqrt{2n\sigma^2}\} \subset \{|S_n - S_k| \geq \sqrt{2n\sigma^2}\}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} P(A_k \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) &\leq P(A_k \cap \{|S_n - S_k| \geq \sqrt{2n\sigma^2}\}) \\ &= P(A_k)P(|S_n - S_k| \geq \sqrt{2n\sigma^2}) \end{aligned}$$

el último paso debido a la independencia.

Ahora bien, utilizando la desigualdad de Chebyshev en su versión

$$P(|X - E(X)| \geq b) \leq \frac{V(X)}{b^2}$$

donde $V(X)$ es la varianza de X con $X = S_n - S_k$ obtenemos que

$$P(A_k)P(|S_n - S_k| \geq \sqrt{2n\sigma^2}) \leq P(A_k)\frac{(n-k)\sigma^2}{2n\sigma^2}$$

de donde

$$\begin{aligned} P(A_k \cap \{S_n < a - \sqrt{2n\sigma^2}\}) &\leq P(A_k)\frac{(n-k)\sigma^2}{2n\sigma^2} \\ &\leq \frac{1}{2}P(A_k) \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} D &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}P(A_k) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \\ &= \frac{1}{2}P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \\ &= \frac{1}{2}P(A) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(A) &= C + D \\ &\leq P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2}) + \frac{1}{2}P(A) \end{aligned}$$

en consecuencia

$$P(A) \leq 2P(S_n \geq a - \sqrt{2n\sigma^2})$$

■

Lema 1.4. Si $|X_k| \leq M$ c.s. para alguna M y $\{b_n\}$ es tal que $b_n = o(n)$ pero $\frac{b_n}{\sqrt{n}} \to \infty$. Entonces, para cualquier $\eta > 0$

$$P(S_n \geq b_n) \geq \exp(-\frac{b_n^2}{2n\sigma^2}(1+\eta))$$

para n suficientemente grande

La prueba de este resultado no se presenta en este trabajo debido a que es larga y utiliza algunos resultados de grandes desviaciones y de función generadora, lo cual no es objetivo de la tesis. Una prueba del resultado puede encontrarse en Billingsley 1995[5].

[5] ver referencia [4]

Capítulo 2 15

Ley del Logaritmo Iterado. Primeras versiones

En el capítulo 1 recordamos que la ley fuerte de los grandes números dice que $\frac{S_n}{n} \to 0$ (si la media común es $\mu = 0$) cuando $n \to \infty$ ó en otras palabras $|S_n| = o(n)$ c.s. Ahora, como ya se planteó en la introducción, es natural preguntarse que tan rápido se da esta convergencia.

El primer caso que fué estudiado supone que X_n toma los valores $+1, -1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$ cada uno. El espacio de probabilidad es el intervalo unitario con la medida de Lebesgue, y entonces el enésimo digito b_n en la expansión binaria de un número x en el intervalo nos da un modelo para X_n de acuerdo con la relación[1]

$$X_n(x) = 2b_n(x) - 1$$

En este contexto los resultados siguientes acerca de las sumas parciales $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ son ciertos, pero es posible generalizarlos de manera importante.

A lo largo de este capítulo, $X_1, X_2, \ldots$ serán variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con media cero.

Estimación 2.1. (Hausdorff 1913) Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con media cero y momentos de todos los ordenes. Entonces,

$$\forall \epsilon > 0 \qquad |S_n| = o(n^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \qquad \text{c.s.}$$

Prueba.
Del teorema 1.1 del capítulo 1 sabemos que

$$E(S_n^{2k}) \leq Cn^k$$

de donde

$$E\left(\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)^{2k}\right) \leq \frac{Cn^k}{n^{2k\alpha}}$$

y en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\left(\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)^{2k}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Cn^k}{n^{2k\alpha}}$$

[1] Las X_n son conocidas como funciones de Rademacher.

pero observemos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Cn^k}{n^{2k\alpha}} \quad \text{converge si} \quad \alpha > \frac{k+1}{2k}.$$
Entonces, para valores de $\alpha > \frac{k+1}{2k}$ obtenemos por el lema 1.1 que
$$\left(\frac{S_n}{n^\alpha}\right)^{2k} \to 0 \quad \text{c.s., es decir} \quad \frac{S_n}{n^\alpha} \to 0 \quad \text{c.s.}$$
Para concluir, si se escoge k suficientemente grande el resultado es válido para cualquier $\alpha > \frac{1}{2}$. Por lo tanto
$$|S_n| = o(n^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \quad \text{c.s.} \quad \forall \quad \epsilon > 0$$
■

Para poder mejorar esta estimación, debemos usar resultados que involucran momentos mas altos de S_n; la forma de lograr esto es reemplazando el uso del teorema 1.1 por un mejor resultado, el cual es el lema 1.2 y su correspondiente corolario.

Estimación 2.2. (Hardy y Littlewood 1914) Si las variables aleatorias X_k independientes e identicamente distribuidas con media cero son acotadas c.s. por una constante M, entonces
$$|S_n| = O(\sqrt{n\ln(n)}) \qquad \text{c.s.}$$

PRUEBA.
Defínase $a_n = J\sqrt{n\ln(n)}$, donde J es cualquier número positivo. Entonces, del corolario 1.1
$$\begin{aligned} P(S_n \geq a_n) &\leq \exp\left(-J^2\frac{n\ln(n)}{2n\sigma^2} + O\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}(\ln(n))^{\frac{3}{2}}J^3}{n^2}\right)\right) \\ &= \exp(-J^2\frac{\ln(n)}{2\sigma^2} + o(1)) \end{aligned}$$
este último paso se debe a que si
$$f(n) = O\left(\frac{n^{\frac{3}{2}}(\ln(n))^{\frac{3}{2}}J^3}{n^2}\right)$$
entonces
$$\frac{|f(n)|}{\sqrt{\frac{(\ln(n))^3}{n}}} \leq C \qquad \forall n$$
y en consecuencia
$$|f(n)| \leq C\sqrt{\frac{(\ln(n))^3}{n}} \qquad \forall n$$
pero $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n))^3}{n} = 0$ ya que $\ln(x) = o(x^\alpha)$ para $\alpha > 0$ cuando $x \to \infty$ y entonces $\lim_{n\to\infty} |f(n)| = 0$ es decir $f(n) = o(1)$

Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} P(S_n \geq a_n) &\leq \exp(\ln(n^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}}) + o(1)) \\ &\leq \exp(\ln[(1+\epsilon)n^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}}]) \\ &= (1+\epsilon)n^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\epsilon)n^{-\frac{J^2}{2\sigma^2}}$ converge si $J > \sqrt{2}\sigma$ entonces, para estos valores de J, se concluye por el lema de Borel-Cantelli que solo un número finito de los eventos

$$A_n = \{S_n \geq J\sqrt{n\ln(n)}\}$$

pueden ocurrir con probabilidad 1.

Como todo el argumento puede ser repetido para $-S_n$, obtenemos el resultado deseado. ■

Ahora bien, para poder refinar este resultado no es suficiente hallar una mejor cota superior (i.e. no basta mejorar el resultado del corolario 1.1); de hecho, esta cota es una muy buena aproximación. El problema consiste en que los eventos $A_n = \{S_n \geq J\sqrt{n\ln(n)}\}$ están altamente correlacionados[2] y en consecuencia la probabilidad del limsup es sobreestimada al sumar las probabilidades. La forma de manejar este problema es trabajando con grupos grandes de términos, de tal manera que solo se necesite que una subserie pequeña de $\sum P(A_n)$ converja. Usaremos esta técnica junto con el lema 1.3 para obtener

Estimación 2.3. (Khintchine 1924) Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con media cero y acotadas c.s. por una constante M, entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n\ln(\ln(n))}} \leq \sqrt{2}\sigma \qquad \text{c.s.}$$

PRUEBA.
Defínase $a_n = (1+\epsilon)\sigma\sqrt{2n\ln(\ln(n))}$. Entonces, bastará mostrar que solo un número finito de eventos $A_n = \{S_n \geq a_n\}$ ocurre para cualquier $\epsilon > 0$. (De igual manera para $\{-S_n\}$). Para esto, sería suficiente mostrar que $\sum P(A_n) < \infty$, pero esto no es cierto.

Entonces, tomemos $d > 1$ y hagamos $n_k = [d^k]$, con lo que obtenemos $\{n_k\}$ que es aproximadamente una subsucesión geométrica de los enteros para la cual $\sum P(A_{n_k}) < \infty$ y en consecuencia

$$P(S_{n_k} \geq a_{n_k} \quad \text{una infinidad de veces}) = 0$$

Este resultado nos da la conclusión deseada del crecimiento de S_n solo para la subsucesión $\{n_k\}$. Pero si usamos esta aproximación y el resultado del lema 1.3 podremos concluir la estimación.

Del lema obtenemos:

$$P(\max_{1\leq j\leq n_k} S_j \geq a_{n_k}) \leq 2P(S_{n_k} \geq a_{n_k} - \sqrt{2n_k\sigma^2})$$

[2]ver referencia [3]

pero observemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\sigma^2}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n\sigma^2}}{(1+\epsilon)\sigma\sqrt{2n\ln(\ln(n))}} = 0$$

es decir $\frac{\sqrt{2n\sigma^2}}{a_n} = o(1)$, de donde $\sqrt{2n\sigma^2} = a_n(o(1))$ con lo que obtenemos que

$$a_{n_k} - \sqrt{2n_k\sigma^2} = a_{n_k}(1 - o(1)) \qquad \text{si} \quad k\to\infty$$

de donde

$$P(\max_{1\le j\le n_k} S_j \ge a_{n_k}) \le 2P(S_{n_k} \ge a_{n_k}(1-o(1)))$$

y usando de nuevo el corolario 1.1 para estimar el lado derecho[3] obtenemos

$$P(\max_{1\le j\le n_k} S_j \ge a_{n_k}) \le 2\exp\left(-\frac{(a_{n_k})^2}{2\sigma^2 n_k}[1+o(1)]\right)$$

Sumando sobre k el lado derecho, observemos que

$$\begin{aligned}
&\sum_k 2\exp(-\frac{(1+\epsilon)^2\sigma^2 2n_k\ln(\ln(n_k))}{2\sigma^2 n_k}[1+o(1)])\\
&= \sum_k 2\exp(-(1+\epsilon)^2\ln(\ln(n_k))[1+o(1)])\\
&\le \sum_k 2C(\ln(n_k))^{-(1+\epsilon)^2}\\
&= \sum_k \frac{2C}{(\ln(n_k))^{(1+\epsilon)^2}}
\end{aligned}$$

en este punto es importante observar lo siguiente: como $\ln(n) \le \sqrt{n}$ entonces

$$\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^{(1+\epsilon)^2} \ge \left(n^{\frac{(1+\epsilon)^2}{2}}\right)^{-1}$$

y como consecuencia para ϵ pequeña $\frac{(1+\epsilon)^2}{2} \le 1$ entonces

$$\sum (n^{\frac{(1+\epsilon)^2}{2}})^{-1} \quad \text{diverge}$$

y en consecuencia

$$\sum \frac{1}{(\ln(n))^{(1+\epsilon)^2}}$$

diverge como se había comentado al principio.

[3] Así como se hizo en la prueba de la estimación 2.2

Pero, para la subsucesión $\{n_k\}$ tenemos que

$$(d-1)^k \leq [d^k] \leq d^k$$

y en consecuencia

$$k\ln(d-1) \leq \ln([d^k]) \leq k\ln(d)$$

de donde

$$\left(\frac{1}{k\ln(d-1)}\right)^{(1+\epsilon)^2} \geq \left(\frac{1}{\ln([d^k])}\right)^{(1+\epsilon)^2}$$

y como

$$\sum_k \left(\frac{1}{k\ln(d-1)}\right)^{(1+\epsilon)^2} < \infty$$

obtenemos que

$$\sum_k \left(\frac{1}{\ln([d^k])}\right)^{(1+\epsilon)^2} < \infty$$

y entonces el lema de Borel-Cantelli nos dice que solo un número finito de eventos A_{n_k} pueden ocurrir, es decir

$$P(\max_{1\leq j\leq n_k} S_j < a_{n_k} \quad \text{para } k \text{ grande}) = 1$$

Ahora, como $\sqrt{x\ln(\ln(x))}$ es monótona creciente, para k grande tal que $n_{k-1} < j \leq n_k$ la anterior probabilidad implica que

$$\frac{S_j}{\sqrt{j\ln(\ln(j))}} < \frac{a_{n_k}}{\sqrt{n_{k-1}\ln(\ln(n_{k-1}))}}$$

Pero

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\sqrt{n_{k-1}\ln(\ln(n_{k-1}))}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{(1+\epsilon)\sigma\sqrt{2n_k\ln(\ln(n_k))}}{\sqrt{n_{k-1}\ln(\ln(n_{k-1}))}} \\ &= (1+\epsilon)\sigma\sqrt{2d}\end{aligned}$$

ya que $n_k = [d^k]$

En consecuencia

$$\frac{S_j}{\sqrt{j\ln(\ln(j))}} < (1+\epsilon)\sigma\sqrt{2d}(1+\eta) \quad \forall\eta > 0 \quad j \text{ grande}$$

con probabilidad 1.

Si escojemos $(1+\epsilon)$, d y $(1+\eta)$ suficientemente cercanos a 1 obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(\ln(n))}} \leq \sqrt{2}\sigma \quad \text{c.s.}$$

y un argumento análogo nos da el resultado para $\{-S_n\}$. ■

Ahora bien, la última versión de logaritmo iterado que nos falta presentar en esta sección es aquella donde obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(\ln(n))}} \geq \sqrt{2}\sigma \quad \text{c.s.}$$

es decir, aquella que complementa a la estimación 3 en el sentido de que afirma que el limsup no es menor que $\sqrt{2}\sigma$. Esta versión, se obtiene con un argumento similar simplemente utilizando una cota inferior (lema 1.4) en lugar de la cota superior (corolario 1.1) que utilizamos en la estimación anterior.

Estimación 2.4. (Khintchine 1924) Bajo las mismas hipótesis de la estimación 3.

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(\ln(n))}} \geq \sqrt{2}\sigma \quad \text{c.s.}$$

PRUEBA.
Hágase $a_n = (1-\epsilon)\sigma\sqrt{2n\ln(\ln(n))}$. Esta vez, hay que mostrar que una infinidad de eventos $A_n = \{S_n \geq a_n\}$ ocurren con probabilidad 1 para cualquier $\epsilon > 0$.

Sea $n_k = [D^k]$ para algún número D. Definamos los eventos $B_k = \{\omega | S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq a_{nk}\}$ de incrementos de $\{S_n\}$ los cuales, claramente están formados por bloques ajenos de variables aleatorias X_n. En consecuencia, debido a que $\{X_n\}$ son independientes obtenemos que $\{B_k\}$ son independientes.

Ahora bien,

$$P(B_k) = P(S_{n_k} - S_{n_{k-1}} \geq a_{n_k})$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-\epsilon)\sigma\sqrt{2n\ln(\ln(n))}}{n} = 0 \quad \text{es decir} \quad a_{n_k} = o(n)$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\epsilon)\sigma\sqrt{2n\ln(\ln(n))}}{\sqrt{n}} \to \infty$$

usando el lema 1.4 para $S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
P(B_k) &\geq \exp\left(-\frac{{a_{n_k}}^2}{2n_k\sigma^2}(1+\eta)\right) \quad \forall\eta > 0 \\
&= \exp\left(-\frac{(1-\epsilon)^2\sigma^2 2n_k\ln(\ln(n_k))}{2n_k\sigma^2}(1+\eta)\right) \\
&= \exp(-(1-\epsilon)^2\ln(\ln(n_k))(1+\eta)) \\
&= \exp(\ln(\ln(n_k)^{-(1+\eta)(1-\epsilon)^2})) \\
&= \left(\frac{1}{\ln(n_k)}\right)^{(1+\eta)(1-\epsilon)^2} \\
&\geq \left(\frac{1}{k\ln(D)}\right)^{(1+\eta)(1-\epsilon)^2} \quad \text{ya que} \quad [D^k] \leq D^k
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_k P(B_k) \ \geq \ \sum_k \left(\frac{1}{k\ln(D)}\right)^{(1+\eta)(1-\epsilon)^2}$$
$$= \ \infty$$

ya que $\forall\epsilon$ suficientemente pequeña $\exists\eta > 0$ tal que $(1+\eta)(1-\epsilon)^2 < 1$ y entonces del lema de Borel-Cantelli podemos concluir que

$$P(S_{n_k} \geq a_{n_k} + S_{n_{k-1}} \quad \text{para una infinidad de k's}) = 1$$

Ahora, de la Estimación 2.3 sabemos que $\forall\delta > 0$

$$|S_{n_{k-1}}| \leq \sqrt{2}\sigma(1+\delta)\sqrt{n_{k-1}\ln(\ln(n_{k-1}))}$$

con probabilidad 1 para k grande. Sustituyendo esto y los valores de a_{n_k} y n_k obtenemos que

$$S_{n_k} \geq (1-\epsilon)\sigma\sqrt{2n_k\ln(\ln(n_k))} - \sqrt{2}\sigma(1+\delta)\sqrt{n_{k-1}\ln(\ln(n_{k-1}))}$$

con probabilidad 1 para k grande.

De donde, recordando que $n_k = [D^k]$, concluimos que

$$S_{n_k} \geq \sqrt{2}\sigma\sqrt{n_k\ln(\ln(n_k))}\left\{1 - \epsilon - \frac{1+\delta}{\sqrt{D}}\right\}$$

para una infinidad de $k's$.

Ahora bien, como D puede ser escogida arbitrariamente grande, entonces una infinidad de $A_n's$ deben ocurrir (claro utilizando un valor de ϵ un poquito mas grande).

Por lo tanto

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n\ln(\ln(n))}} \geq \sqrt{2}\sigma \quad \text{c.s.}$$

■

Ley del Logaritmo Iterado para el Movimiento Browniano

Una vez que han sido vistos los resultados preliminares y las versiones de leyes del logaritmo iterado para sumas de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas, es decir, para algunos procesos estocásticos en tiempo discreto $X = \{X_t(\omega) : t \in \mathbb{N}\}$ pasemos al caso de algunos procesos estocásticos en tiempo continuo y veamos que resultados de velocidad de convergencia podemos obtener ahora.

Este capítulo está dedicado a la obtención de una ley de logaritmo iterado para un proceso estocástico de suma importancia en la teoría y la práctica, el llamado Movimiento Browniano ó proceso de Wiener.

Comencemos por considerar la caminata aleatoria simétrica para la cual, en cada unidad de tiempo, es igualmente probable ir una unidad a la derecha ó a la izquierda. Si nosotros aceleráramos este proceso de tal manera que se fueran tomando pasos cada vez mas pequeños en intervalos de tiempo cada vez mas pequeños en una proporción adecuada, en el límite obtendríamos un proceso continuo no trivial con características ó propiedades heredadas de la caminata aleatoria.

De manera mas precisa, para cada Δt unidad de tiempo se da un paso de tamaño Δx con igual probabilidad de ser a la izquierda ó a la derecha.

Sea $X(t)$ la posición al tiempo t, entonces

$$X(t) = \Delta x(X_1 + X_2 \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$$

donde

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si el paso i-ésimo de longitud } \Delta x \text{ es a la derecha,} \\ -1 & \text{si es a la izquierda} \end{cases}$$

donde las X_i son consideradas independientes y

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= P(X_i = -1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 1P(X_i = 1) + (-1)P(X_i = -1) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V(X_i) &= E(X_i^2) \\ &= (1)^2 P(X_i = 1) + (-1)^2 P(X_i = -1) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \quad \forall i \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(\Delta x(X_1 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})) \\ &= \Delta x E(X_1 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]}) \\ &= \Delta x \sum_i E(X_i) \\ &= \Delta x(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} V(X(t)) &= V(\Delta x(X_1 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})) \\ &= (\Delta x)^2 V(X_1 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]}) \\ &= (\Delta x)^2 \sum_i V(X_i) \\ &= (\Delta x)^2 [\frac{t}{\Delta t}] \end{aligned}$$

Ahora, la idea sería hacer tender Δx y Δt a cero.

Si se considera $\Delta x = \Delta t$ e hiciéramos tender Δt a cero se tendría que $E(X(t))$ y $V(X(t))$ tenderían a cero de donde se obtendría que $X(t)$ sería cero con probabilidad 1.

Para evitar que este proceso límite sea trivial hágase $\Delta x = c\sqrt{\Delta t}$ para alguna constante c positiva, entonces

$$E(X(t)) = 0$$

$$V(X(t)) \to c^2 t$$

$$\text{cuando} \quad \Delta t \to 0$$

Veamos intuitivamente que propiedades tiene este proceso límite.

Como $X(t) = \Delta x(X_1 + \cdots + X_{[\frac{t}{\Delta t}]})$ se concluye del teorema del límite central que

(i) $X(t)$ es variable aleatoria normal con media 0 y varianza $c^2 t$.

Ahora, como los cambios en los valores que toma la caminata aleatoria en intervalos de tiempo no traslapados son independientes, se obtiene que

(ii) $\{X(t) : t \in [0, \infty)\}$ tiene incrementos independientes.

Por último, como la distribución del cambio en la posición de la caminata aleatoria en cualquier intervalo de tiempo depende solo de la longitud del intervalo se tendría que

$$(iii) \quad \{X(t) : t \in [0,\infty)\} \quad \text{tiene incrementos estacionarios.}$$

Ahora estamos listos, a la luz de todo esto, para dar la siguiente definición

Definición 3.1. Un proceso estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ se dice que es un movimiento Browniano si

- (i) $X(0) = 0$
- (ii) $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios.
- (iii) para cada $t > 0$, $X(t) \sim N(0, c^2 t)$

La interpretación del movimiento Browniano como límite de caminatas aleatorias sugiere que $X(t)$ debiése ser continua como función de t; de hecho, es posible probar que las trayectorias del movimiento Browniano son continuas casi seguramente. De igual manera, $X(t)$ siempre es puntual y en consecuencia no es función suave; de hecho, puede ser probado que $X(t)$ no es diferenciable en ningun punto casi seguramente.

Pero, de donde proviene el nombre de "movimiento Browniano"? Este nombre se debe al botánico inglés Robert Brown, de quien fué tomado el nombre para describir el fenómeno físico que descubrió en el siglo XIX y que consiste en describir el movimiento continuo e irregular descrito por una partícula pequeña suspendida en un fluido (líquido o gas).

La primer teoría para explicar este fenómeno fué dada de manera probabilistica por Albert Einstein entre 1905 y 1906 y fué basada en varios supuestos simples. X_t denota una coordenada de la partícula al tiempo t y para tener una referencia se toma $X_0 = 0$. Como los movimientos solo se conocen estadísticamente, la posición de la partícula, es decir X_t, se considera una variable aleatoria. El desplazamiento neto que tiene la partícula del tiempo s al tiempo t será la suma de un gran número de pequeñas contribuciones aproximadamente independientes resultado de impactos individuales de las moléculas del fluido (es importante aclarar que cada colisión de manera individual tiene un efecto despreciable, pero de manera acumulada estos impactos producen el movimiento de la partícula) y entonces, por el teorema del límite central, es razonable esperar que el incremento $X_t - X_s$ se distribuya normal. Ahora, si el fluido es suficientemente viscoso cualquier velocidad adquirida por la partícula será amortiguada de manera casi instantánea y en consecuencia puede suponerse que los desplazamientos en intervalos de tiempo no traslapados serán independientes. Por último, si las condiciones físicas son isotrópicas y constantes en tiempo y espacio, podemos esperar que $E(X_t) = 0$ y que $V(X_t) = E((X_{t+s} - X_t)^2) = f(s)$; de hecho $f(s) = cs$ para alguna constante c positiva (esta constante es la c^2 obtenida en la interpretación de límite de caminatas aleatorias). Cuando $c = 1$ el proceso es llamado movimiento Browniano estándar y del hecho de que cualquier movimiento Browniano puede convertirse en uno estándar considerando $\frac{X(t)}{c}$, supondremos que $c = 1$.[1]

Una vez dada esta teoría, se observo que desde el punto de vista matemático dejaba mucho que desear y el modelo fué descrito completamente de manera matemática por Norbert

[1] Esta constante es importante en la interpretación física. Einstein derivó una relación entre ella y el número de Avogadro.

Wiener en una serie de artículos entre 1918 y 1923; de ahí que también se le conozca como proceso de Wiener. El trabajo de Wiener permite establecer la siguiente definición que será utilizada en el resto de este capítulo.

Definición 3.2. Un movimiento Browniano estándar (ó proceso de Wiener) es un proceso estocástico $X = \{X_t(\omega) : t \geq 0\}$ que toma valores reales definido en algún espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ que satisface:

(i) $X_0 = 0$

(ii) si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, entonces las variables aleatorias $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$ son independientes

(iii) para cada $s, t \geq 0$, la variable aleatoria $X_{t+s} - X_t$ se distribuye normal con media 0 y varianza s

(iv) La función $X_t = X_t(\omega)$ es continua en t para casi toda $\omega \in \Omega$

Como observaciones finales antes de encaminarnos a nuestro objetivo, es importante señalar que mas o menos por el mismo tiempo en que Einstein explicaba el fenómeno del movimiento de la partícula en el fluido, el matemático francés Louis Bachelier sugirió un modelo matemático muy similar en su tesis doctoral "Théorie de la spéculation" (1900) para explicar las fluctuaciones de los precios en el mercado de stocks de la bolsa de valores. También cabe destacar que este proceso ha sido utilizado con éxito en diferentes áreas como lo son: la estadística, para probar bondades de ajuste; así mismo, para analizar los niveles de precios en el mercado de stocks y en otros instrumentos financieros (por ejemplo en las opciones) y en la mecánica cuántica, sin dejar de mencionar el importante papel que juega en la teoría de la integración estocástica.

Ahora si, comencemos nuestro estudio del comportamiento de las trayectorias del movimient Browniano. Como es de esperarse, la propiedad de los incrementos independientes nos indica que las trayectorias del movimiento Browniano crecen de la misma manera que sumas de variables aleatorias independientes; es decir, realmente tenemos un equivalente a la ley del logaritmo iterado de sumas de variables aleatorias independientes para las trayectorias del movimiento Browniano.

Antes de establecer el resultado, veamos unos resultados previos que serán de utilidad en la demostración.

Lema 3.1. Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes con media cero y varianza σ^2. Entonces, si las distribuciones de las variables X_k son simétricas alrededor de cero[2], se tiene que para cualquier $a > 0$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} S_k > a) \leq 2P(S_n > a)$$

PRUEBA.
Sean

$$A = \{\omega | \max_{1 \leq k \leq n} S_k > a\}$$

[2]Este resultado es simplemente una mejora del lema 1.3 para distribuciones simétricas alrededor de cero.

y

$$A_k = \{\omega | S_j \leq a \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, k-1 \quad \text{pero} \quad S_k > a\}$$

Claramente $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $\bigcup A_k = A$[3]
Para cada $k \leq n$ defínase

$$S_n^{(k)} = S_k - X_{k+1} - \cdots - X_n$$

Entonces, debido a la independencia y a la simetría, la ley de probabilidad conjunta de las n variables $(X_1, \ldots, X_n)$ es la misma que la de $(X_1, \ldots, X_k, -X_{k+1}, \ldots, -X_n)$ y en consecuencia S_n y $S_n^{(k)}$ tienen la misma ley.
Entonces, se tiene que

$$P(A_k \cap \{S_n > a\}) = P(A_k \cap \{S_n^{(k)} > a\}) \qquad (\bigstar)$$

y además

$$A_k = [A_k \cap \{S_n > a\}] \cup [A_k \cap \{S_n^{(k)} > a\}] \qquad (\bigstar\bigstar)$$

ya que si no fuera cierto existiría $\omega \in A_k$ tal que

$$S_n(\omega) \leq a \quad \text{y} \quad S_n^{(k)}(\omega) \leq a$$

lo que implicaría que

$$S_n(\omega) + S_n^{(k)}(\omega) \leq 2a$$

pero claramente

$$S_n(\omega) + S_n^{(k)}(\omega) = 2S_k(\omega)$$

y en consecuencia se tendría que

$$S_k(\omega) \leq a$$

lo cual es una contradicción con la definición de A_k.
En consecuencia

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P([A_k \cap \{S_n > a\}] \cup [A_k \cap \{S_n^{(k)} > a\}]) \quad \text{debido a} \quad (\bigstar\bigstar) \\ &\leq P([A_k \cap \{S_n > a\}]) + P([A_k \cap \{S_n^{(k)} > a\}]) \quad \text{por la desigualdad de Boole} \\ &= 2P([A_k \cap \{S_n > a\}]) \quad \text{debido a} \quad (\bigstar) \quad k = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\cup_{k=1}^n A_k) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) \\ &\leq 2\sum_{k=1}^n P(A_k \cap \{S_n > a\}) \\ &= 2P(S_n > a) \end{aligned}$$

■

[3] A_k es el evento: la caminata aleatoria S_j supera el nivel a por primera vez en el tiempo k

Lema 3.2. Si $\{Z_k\}$ son variables aleatorias normal estándar, entonces

$$|Z_k| = O(k^\epsilon) \quad \text{casi seguramente} \qquad \text{para cualquier} \quad \epsilon > 0$$

PRUEBA.
Como Z_k es normal, tiene momentos de todos los ordenes y en consecuencia se puede utilizar la versión de la desigualdad de Chebyshev siguiente

$$P(|X| \geq b) \leq \frac{E(|X|^k)}{b^k} \quad \text{donde} \quad b > 0 \quad \text{y} \quad k > 0$$

Entonces,

$$P(|Z_k| \geq k^\epsilon) \leq \frac{E(Z_k^{2N})}{k^{2\epsilon N}}$$

Pero observemos que

$$E(Z_k^n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$$

entonces claramente si n es impar por simetría se tiene que $E(Z_k^n) = 0$.

Pero si n es par, es decir $n = 2q$ con q un numero natural se obtiene al integrar por partes de manera repetida que $E(Z_k^{2q}) = (1)(3)(5)\cdots(q)$.

Entonces se concluye que

$$P(|Z_k| \geq k^\epsilon) \leq \frac{(1)(3)(5)\cdots(N)}{k^{2\epsilon N}}$$

Ahora, para cualquier $\epsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)(3)(5)\cdots(N)}{k^{2\epsilon N}} < \infty$$

si se toma N suficientemente grande.

En consecuencia, por el lema de Borel-Cantelli se tiene que solo un número finito de eventos $\{|Z_k| > k^\epsilon\}$ ocurrirá con probabilidad 1; es decir,

$$P(|Z_k| = O(k^\epsilon)) = 1 \quad \text{para cualquier} \quad \epsilon > 0$$

■

Lema 3.3. Para cualquier $a > 0$ y $X = \{X_t : t \geq 0\}$ movimiento Browniano se tiene que

$$P(\max_{0 \leq t \leq 1} X_t > a) \leq 2P(X_1 > a)$$

PRUEBA.
Sea n un número natural cualquiera y observemos que

$$X_{\frac{k}{2^n}} = \sum_{j=1}^{k} (X_{\frac{j}{2^n}} - X_{\frac{(j-1)}{2^n}})$$

es decir, se puede escribir a $X_{\frac{k}{2^n}}$ como la suma de k variables aleatorias independientes, cada una distribuida normal con media cero y varianza $\frac{j}{2^n} - \frac{j-1}{2^n} = \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$.

Entonces, aplicando el lema 3.1 se obtiene que

$$P(\max_{k\leq 2^n} X_{\frac{k}{2^n}} > a) \leq 2P(X_1 > a)$$

Pero cuando n crece, los eventos $\{\max_{k\leq 2^n} X_{\frac{k}{2^n}} > a\}$ también se incrementan (debido a que el máximo se toma sobre un conjunto mas grande) mientras que la cota $2P(X_1 \geq a)$ no depende de n.

En consecuencia, esta misma cota sirve para

$$\bigcup_n \{\max_{k\leq 2^n} X_{\frac{k}{2^n}} > a\}$$

pero,

$$\bigcup_n \{\max_{k\leq 2^n} X_{\frac{k}{2^n}} > a\} = \{X_t > a \quad \text{para algún } t \text{ racional diádico entre 0 y 1}\}$$

y $\forall\omega$ tal que $X_t(\omega)$ es continua en t esto es lo mismo que $\max_{t\in(0,1)} X_t > a$.

En consecuencia, como las trayectorias son continuas casi seguramente tenemos que

$$P(\max_{0\leq t\leq 1} X_t > a) \leq 2P(X_1 > a)$$

■

Finalmente, una vez que se han visto estos resultados, establezcamos nuestro teorema.

Teorema 3.1. Sea $X = \{X_t(\omega) : t \geq 0\}$ un movimiento Browniano. Entonces

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t(\omega)}{\sqrt{t\ln(\ln(t))}} = \sqrt{2} \quad \text{casi seguramente}$$

PRUEBA.
Si t es un número natural, este es simplemente un caso especial de las versiones 2.3 y 2.4 del capítulo 2 con $S_n = X_n$ es decir, debiése escogerse $X'_k = X_k - X_{k-1}$, las cuales son variables aleatorias independientes que se distribuyen normal estándar y que permiten que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} X'_k \\ &= (X_1 - X_0) + (X_2 - X_1) + \cdots + (X_n - X_{n-1}) \\ &= X_n - X_0 \\ &= X_n \end{aligned}$$

En otras palabras

$$P(\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t(\omega)}{\sqrt{t\ln(\ln(t))}} = \sqrt{2}) = 1$$

cuando $t \to \infty$ a través de valores naturales.

Lo que quisiera probarse es que este límite superior es el mismo cuando t es restringido a los naturales que cuando t toma valores reales positivos. Esto no es obvio de entrada, debido a que presumiblemente si la trayectoria tiene "grandes excursiones" para valores de t entre los enteros pudiese hacer el límite superior mas grande en el caso continuo (el limsup solo puede incrementarse si se permite que t crezca tomando valores reales positivos).

Veamos que esta no es una posibilidad. Sea

$$m_n = \max_{n-1 \leq t \leq n} (X_t - X_{n-1})$$

Entonces, aplicando el lema 3.3 a cada variable aleatoria m_n tenemos que

$$\begin{aligned} P(m_n > a) &\leq 2P(X_n - X_{n-1} > a) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty \exp(-\frac{u^2}{2}) du \end{aligned}$$

que conjuntamente con el lema 3.2 se tiene que

$$m_n = O(n^\epsilon) \quad \text{con probabilidad 1}$$

entonces, en particular

$$P(m_n = o(\sqrt{n \ln(\ln(n))})) = 1$$

ya que $\frac{m_n}{n^\epsilon} \leq C \quad \forall n$ de donde $m_n \leq Cn^\epsilon$ y en consecuencia

$$\frac{m_n}{\sqrt{n \ln(\ln(n))}} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{2}-\epsilon}\sqrt{\ln(\ln(n))}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

lo que nos indica que las trayectorias no toman valores entre los naturales que afecten la validez del resultado.

Por lo tanto

$$P(\limsup_{t\to\infty} \frac{X_t(\omega)}{\sqrt{t \ln(\ln(t))}} = \sqrt{2}) = 1$$

■

Capítulo 4

Ley del Logaritmo Iterado para Subordinadores

Comencemos este último capítulo con algunas definiciones y conceptos acerca de un tipo de proceso estocástico muy importante, el proceso de Lévy. Su importancia radica tanto en su valor teórico, como en las múltiples aplicaciones de que es objeto en la actualidad. Del lado teórico, puede ser pensado como una caminata aleatoria en tiempo continuo (lo cual quedará claro al ver la definición). Aún mas, los procesos de Lévy forman la clase de procesos de Markov de espacio-tiempo homogéneo y son semimartingalas también. Por la parte de aplicaciones, son usados en la modelación y estudio de riesgos de seguro y mas recientemente en las matemáticas financieras. Los ejemplos más importantes y conocidos de procesos de Lévy son el proceso de Poisson, el movimiento Browniano y el proceso de Cauchy.

En todo este capítulo se considera a Ω como

$$\begin{aligned}\Omega &= D([0,\infty), \mathbb{R}\cup\{\vartheta\}) \\ &= \{\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}\cup\{\vartheta\} \quad \text{con} \quad \zeta(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \omega(t) = \vartheta\}\}\end{aligned}$$

La trayectoria ω es continua por la derecha en $[0,\infty)$ y con límite por la izquierda denotado por $\omega(s-)$ para cualquier $s \in (0,\infty)$ y tal que $\omega(t) = \vartheta$ para toda $t \geq \zeta(\omega)$. A $\zeta(\omega)$ se le conoce como tiempo de vida y $\Im$ es la σ-álgebra de Borel de Ω.

Definición 4.1. Sea P medida de probabilidad en $(\Omega, \Im)$ con $P(\zeta = \infty) = 1$. Decimos que X es un proceso de Lévy para $(\Omega, \Im, P)$ si para toda $s, t \geq 0$, el incremento $X_{t+s} - X_t$ es independiente del proceso $(X_\nu, 0 \leq \nu \leq t)$ y tiene la misma ley que X_s. En particular, $P(X_0 = 0) = 1$.

En otras palabras, X es un proceso de Lévy si tiene incrementos estacionarios (u homogéneos) e independientes.

Definición 4.2. Una función característica es llamada infinitamente divisible si y solo si para cada natural $n \geq 1$ existe una función característica f_n tal que $f = (f_n)^n$. En términos de funciones de distribución esto se convierte en

$$F = \underbrace{F_n * F_n * \cdots * F_n}_{n-factores}$$

donde $*$ denota convolución.
En téminos de variables aleatorias esto significa que para cada $n \geq 1$ existen variables aleatorias X y X_{m_j} $1 \leq j \leq n$, donde las X_{m_j} son independientes entre si, tales que X tiene función característica f, X_{m_j} tiene función característica f_n y

$$X = \sum_{j=1}^{n} X_{m_j}$$

Ahora, es sabido que si una distribución es infinitamente divisible, entonces su función característica no se anula en ningún punto y puede ser expresada como sigue: Existe una única función continua $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ llamada el exponente característico tal que $\psi(0) = 0$ y $E(\exp(i\lambda X)) = \exp(-\psi(\lambda))$.

Veamos que un proceso de Lévy (X_t) tiene ley infinitamente divisible.

Primero, si $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = (X_n - X_{n-1}) + (X_{n-1} - X_{n-2}) + \cdots + (X_2 - X_1) + (X_1 - X_0)$$

de donde

$$\exp(i\lambda X_n) = \prod_{k=1}^{n} \exp(i\lambda(X_k - X_{k-1}))$$

entonces

$$\begin{aligned} E(\exp(i\lambda X_n)) &= E(\prod_{k=1}^{n} \exp(i\lambda(X_k - X_{k-1}))) \\ &= \prod_{k=1}^{n} E(\exp(i\lambda(X_k - X_{k-1}))) \\ &= \prod_{k=1}^{n} E(\exp(i\lambda X_1)) \\ &= (E(\exp(i\lambda X_1)))^n. \end{aligned}$$

Ahora, para $X_{\frac{1}{n}}$

$$X_1 = X_{\frac{1}{n}} + (X_{\frac{2}{n}} - X_{\frac{1}{n}}) + \cdots + (X_{\frac{n}{n}} - X_{\frac{(n-1)}{n}})$$

de donde

$$\begin{aligned} E(\exp(i\lambda X_1)) &= \prod_{k=1}^{n} E(\exp(i\lambda(X_{\frac{k}{n}} - X_{\frac{(k-1)}{n}}))) \\ &= (E(\exp(i\lambda X_{\frac{1}{n}})))^n. \end{aligned}$$

y entonces

$$E(\exp(i\lambda X_{\frac{1}{n}})) = (E(\exp(i\lambda X_1)))^{\frac{1}{n}}.$$

Continuemos con $X_{\frac{p}{q}}$

$$X_{\frac{p}{q}} = X_{\frac{1}{q}} + (X_{\frac{2}{q}} - X_{\frac{1}{q}}) + \cdots + (X_{\frac{(p-1)}{q}} - X_{\frac{(p-2)}{q}}) + (X_{\frac{p}{q}} - X_{\frac{(p-1)}{q}})$$

de donde

$$\begin{aligned} E(\exp(i\lambda X_{\frac{p}{q}})) &= \prod_{k=1}^{p} E(\exp(i\lambda(X_{\frac{k}{q}} - X_{\frac{(k-1)}{q}}))) \\ &= E(\exp(i\lambda X_{\frac{1}{q}})))^{p}. \end{aligned}$$

y entonces

$$E(\exp(i\lambda X_{\frac{p}{q}})) = E(\exp(i\lambda X_1)))^{\frac{p}{q}}.$$

Por último, si $t \geq 0$

$$\begin{aligned} E(\exp(i\lambda X_t)) &= E(\lim_{r_n \searrow t} \exp(i\lambda X_{r_n})) \quad \text{con } r_n \in \mathbb{Q} \\ &= \lim_{r_n \searrow t} E(\exp(i\lambda X_{r_n})) \quad \text{por el teo. de la convergencia dominada} \\ &= \lim_{r_n \searrow t} (E(\exp(i\lambda X_1)))^{r_n} \\ &= (E(\exp(i\lambda X_1)))^{t} \end{aligned}$$

Con lo que obtenemos el resultado deseado.

Entonces, X_t tiene distribución infinitamente divisible y su función característica está dada por

$$E(\exp(i\lambda X_t)) = \exp(-t\psi(\lambda))$$

Donde la función ψ es el exponente característico del proceso de Lévy.

Definición 4.3. Un subordinador $\sigma = \{\sigma_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy que toma valores en $[0, \infty)$ (lo cual implica que sus trayectorias son crecientes).

Un hecho importante es que al tomar valores positivos, se tiene que $|\exp(-\lambda X)| \leq 1$ y podemos trabajar con la transformada de Laplace en lugar de la transformada de Fourier.

Como el subordinador (σ_t) tiene ley infinitamente divisible, entonces la transformada de Laplace puede ser expresada en la forma

$$E(\exp(-\lambda\sigma_t)) = \exp(-t\phi(\lambda)) \quad (\lambda \geq 0)$$

donde $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es llamado el exponente de Laplace.

Definición 4.4. Definimos el tiempo local del subordinador σ como

$$L(x) = L_x = \inf\{t > 0 : \sigma_t > x\}$$

Antes de continuar, veamos algunos resultados auxiliares:

Lema 4.1. Sea φ el inverso del exponente de Laplace ϕ de un subordinador σ. Défínanse $t_n = \frac{\ln(n)}{\varphi(\exp(n)\ln(n))}$ y $a_n = f(t_n)$ donde $f(u) = \frac{\ln(\ln(\phi(\frac{1}{u})))}{\phi(\frac{1}{u}\ln(\ln(\phi(\frac{1}{u}))))}$.

Entonces,

i) $(t_n)_{n\geq 2}$ es decreciente

ii) $a_n \simeq \exp(-n)$ para n suficientemente grande

iii) $\sum_n P(L_{t_n} > 3a_n)$ converge.

PRUEBA.
Como ϕ es creciente y cóncava, entonces observamos que φ es creciente y convexa con $\varphi(0) = 0$.
En consecuencia

$$\varphi(\lambda a + (1-\lambda)0) \leq \lambda\varphi(a) + (1-\lambda)\varphi(0)$$

es decir

$$\varphi(\lambda a) \leq \lambda\varphi(a) \quad \text{para toda} \quad \lambda \in (0,1) \quad a > 0$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t_n} &= \frac{\varphi(\exp(n)\ln(n))}{\ln(n)} \\
&= \frac{1}{\ln(n)}\varphi\left(\frac{1}{e}\exp(n+1)\ln(n)\right) \\
&\leq \frac{1}{e\ln(n)}\varphi(\exp(n+1)\ln(n)) \quad \text{con} \quad \lambda = \frac{1}{e} \\
&\leq \frac{1}{\ln(n+1)}\varphi(\exp(n+1)\ln(n)) \quad \bigstar \\
&\leq \frac{\varphi(\exp(n+1)\ln(n+1))}{\ln(n+1)} \quad \text{ya que } \varphi \text{ es creciente} \\
&= \frac{1}{t_{n+1}}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $(\frac{1}{t_n})_{n\geq 2}$ es creciente; de donde obtenemos *i)*. Solo faltaría verificar que realmente $\bigstar$ se cumple para $n \geq 2$

$$\frac{1}{e\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \quad \text{si y solo si} \quad \ln(n+1) \leq \ln(n^e)$$

es decir, si $n^e - n - 1 \geq 0$ para $n \geq 2$

Observemos la función $f(x) = x^e - x - 1$ para $x \geq 2$. Claramente $f(2) \geq 0$ y

$$f'(x) = ex^{e-1} - 1 \geq ex - 1 \geq 0 \quad \text{si} \quad x \geq 2$$

de donde $n^e - n - 1 \geq 0$ si $n \geq 2$.

Ahora observemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\phi\left(\frac{1}{t_n}\right) &= \phi\left(\frac{\varphi(\exp(n)\ln(n))}{\ln(n)}\right) \\
&\leq \phi(\varphi(\exp(n)\ln(n))) \quad \text{ya que } \phi \text{ es creciente} \\
&= \exp(n)\ln(n)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\phi\left(\frac{1}{t_n}\right) &= \phi\left(\frac{\varphi(\exp(n)\ln(n))}{\ln(n)}\right) \\
&\geq \frac{1}{\ln(n)}\phi(\varphi(\exp(n)\ln(n))) \quad \text{ya que } \phi \text{ es cóncava} \\
&= \exp(n)
\end{aligned}
$$

En consecuencia

$$\exp(n) \leq \phi(\frac{1}{t_n}) \leq \exp(n)\ln(n)$$

de donde

$$\ln(\ln(\exp(n))) \leq \ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \leq \ln(\ln(\exp(n)\ln(n)))$$

es decir

$$\ln(n) \leq \ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \leq \ln(n + \ln(\ln(n)))$$

Dejemos pendientes estas desigualdades y observemos el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n + \ln(\ln(n)))}{\ln(n)}$$

Para calcularlo, utilizemos la función auxiliar

$$f(x) = \frac{\ln(x + \ln(\ln(x)))}{\ln(x)}$$

Utilizando L'hôpital varias veces, calculemos $\lim_{x\to\infty} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+\ln(\ln(x)))}{\ln(x)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+\ln(\ln(x))}\left(1+\frac{1}{x\ln(x)}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \text{por L'hôpital} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+\ln(\ln(x))}+\frac{1}{x\ln(x)(x+\ln(\ln(x)))}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x\ln(x)+1}{x\ln(x)(x+\ln(\ln(x)))}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\ln(x)+1}{\ln(x)(x+\ln(\ln(x)))} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)+x\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}(x+\ln(\ln(x)))+\ln(x)\left(1+\frac{1}{x\ln(x)}\right)} \quad \text{por L'hôpital} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)+1}{1+\frac{\ln(\ln(x))}{x}+\ln(x)+\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\frac{1}{x\ln(x)}x-\ln(\ln(x))}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}} \quad \text{por L'hôpital} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\frac{1}{\ln(x)}-\ln(\ln(x))+x-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}-\ln(\ln(x))+x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{-1}{x(\ln(x))^2}-\frac{1}{x\ln(x)}+1} \quad \text{por L'hôpital} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+\ln(\ln(n)))}{\ln(n)} = 1$$

de donde concluimos que

$$\ln(n+\ln(\ln(n))) \simeq \ln(n) \quad \text{para } n \text{ grande}$$

que junto con las desigualdades que dejamos pendientes nos dan que

$$\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \simeq \ln(n) \quad \text{para } n \text{ grande}$$

Entonces, tenemos que

$$\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \simeq \frac{1}{t_n}\ln(n) = \varphi(\exp(n)\ln(n))$$

y como ϕ es creciente y cóncava la estimación se respeta

$$\phi\left(\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))\right) \simeq \phi(\varphi(\exp(n)\ln(n))) = \exp(n)\ln(n)$$

de donde

$$a_n = \frac{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))}{\phi\left(\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))\right)} \simeq \frac{\ln(n)}{\exp(n)\ln(n)} = \exp(-n)$$

que es la conclusión *ii*) del lema.

Por último chequemos la validéz de *iii*)

$$\begin{aligned}
P(L_{t_n} > 3a_n) &= P(\sigma_{3a_n} < t_n) \\
&= P[\exp(\lambda\sigma_{3a_n}) \leq \exp(\lambda t_n)] \\
&= P[\exp(-\lambda\sigma_{3a_n}) \geq \exp(-\lambda t_n)] \\
&\leq \frac{1}{\exp(-\lambda t_n)} E[\exp(-\lambda\sigma_{3a_n})] \quad \text{por desig. de Chebyshev} \\
&= \exp(\lambda t_n) E[\exp(-\lambda\sigma_{3a_n})] \\
&= \exp(\lambda t_n)\exp(-3a_n\phi(\lambda)) \quad \text{por la def. del exp. de Laplace} \\
&= \exp(\lambda t_n - 3a_n\phi(\lambda))
\end{aligned}$$

escojemos $\lambda = \varphi(\exp(n)\ln(n))$ para $n \geq 2$
entonces

$$\begin{aligned}
\lambda t_n &= t_n\varphi(\exp(n)\ln(n)) \\
&= \ln(n)
\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda) &= \phi(\varphi(\exp(n)\ln(n))) \\
&= \exp(n)\ln(n)
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\begin{aligned}
P(L_{t_n} > 3a_n) &\leq \exp(\ln(n) - 3a_n\exp(n)\ln(n)) \\
&= \exp(\ln(n))\exp(-3a_n\exp(n)\ln(n)) \\
&= n\exp(-3a_n\exp(n)\ln(n)) \\
&\simeq n\exp(-3\ln(n)) \quad \text{ya que} \quad a_n \simeq \exp(-n) \\
&= (n)(n^{-3}) \\
&= n^{-2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_n P(L_{t_n} > 3a_n) \quad \text{converge.}$$

■

Pasemos ahora a otro lema que junto con el que acaba de ser demostrado, nos permitirá concluir la versión de la ley de logaritmo iterado para las trayectorias de un subordinador.

Lema 4.2. Sean

$$s_n = \frac{2\ln(n)}{\varphi(2\exp(n^2)\ln(n))} = \frac{\ln(n^2)}{\varphi(\exp(n^2)\ln(n^2))} = t_{n^2}$$

y

$$b_n = f(s_n) = f(t_{n^2}) = \frac{\ln(\ln(\phi(\frac{1}{t_{n^2}})))}{\phi(\frac{1}{t_{n^2}}\ln(\ln(\phi(\frac{1}{t_{n^2}}))))}$$

Entonces

i) $b_n \simeq \exp(-n^2)$ para n suficientemente grande

ii) $\sum_n P(\sigma(\frac{b_n}{3}) < \frac{2s_n}{3}) = \infty$

Prueba.
i) es consecuencia inmediata del lema anterior inciso *ii)* para la subsucesión $b_n = a_{n^2}$.

Para *ii)* primero observemos que

$$\begin{aligned} P(\sigma_b \geq s) &= P[\exp(\lambda\sigma_b) \geq \exp(\lambda s)] \quad \lambda > 0 \\ &= P[\exp(-\lambda\sigma_b) < \exp(-\lambda s)] \\ &= P[-\exp(-\lambda\sigma_b) > -\exp(-\lambda s)] \\ &= P[1-\exp(-\lambda\sigma_b) > 1-\exp(-\lambda s)] \\ &\leq \frac{1}{1-\exp(-\lambda s)} E[1-\exp(-\lambda\sigma_b)] \quad \text{por desig. de Chebyshev} \end{aligned}$$

Aplicando esta desigualdad a $b = \frac{b_n}{3}$ y $s = \frac{2s_n}{3}$

$$P(\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) \geq \frac{2s_n}{3}) \leq \frac{E[1-\exp(-\lambda\sigma(\frac{b_n}{3}))]}{1-\exp(-\lambda\frac{2s_n}{3})}$$

entonces

$$\begin{aligned} P(\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) < \frac{2s_n}{3}) &\geq 1 - \frac{E[1-\exp(-\lambda\sigma(\frac{b_n}{3}))]}{1-\exp(-\lambda\frac{2s_n}{3})} \\ &= 1 - \frac{1-\exp(-\frac{b_n}{3}\phi(\lambda))}{1-\exp(-\lambda\frac{2s_n}{3})} \quad \text{por la def. del exp. de Laplace} \\ &= \frac{\exp(-\frac{b_n}{3}\phi(\lambda)) - \exp(-\frac{2s_n}{3}\lambda)}{1-\exp(-\frac{2s_n}{3}\lambda)} \end{aligned}$$

Elegimos $\lambda = \varphi(\exp(n^2)\ln(n^2))$ con lo que obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{2s_n}{3}\lambda &= \frac{2}{3}\frac{\ln(n^2)}{\varphi(\exp(n^2)\ln(n^2))}\varphi(\exp(n^2)\ln(n^2)) \\ &= \frac{2}{3}\ln(n^2) \\ &= \frac{4}{3}\ln(n)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{3}\phi(\lambda) &= \frac{b_n}{3}\phi(\varphi(\exp(n^2)\ln(n^2))) \\ &= \frac{b_n}{3}\exp(n^2)\ln(n^2) \\ &\simeq \frac{\exp(-n^2)}{3}\exp(n^2)\ln(n^2) \quad \text{ya que} \quad b_n \simeq \exp(-n^2) \\ &= \frac{\ln(n^2)}{3} \\ &= \frac{2}{3}\ln(n)\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned}P(\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) < \frac{2s_n}{3}) &\geq \frac{\exp(-\frac{b_n}{3}\phi(\lambda)) - \exp(-\frac{2s_n}{3}\lambda)}{1-\exp(-\frac{2s_n}{3}\lambda)} \\ &\simeq \frac{\exp(-\frac{2}{3}\ln(n)) - \exp(-\frac{4}{3}\ln(n))}{1-\exp(-\frac{4}{3}\ln(n))} \\ &= \frac{n^{\frac{-2}{3}} - n^{\frac{-4}{3}}}{1-n^{\frac{-4}{3}}} \\ &= \frac{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}}{1-\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}} \\ &= \frac{n^{\frac{2}{3}}-1}{n^{\frac{4}{3}}-1} \\ &= \frac{n^{\frac{2}{3}}-1}{(n^{\frac{2}{3}}-1)(n^{\frac{2}{3}}+1)} \\ &= \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}+1}\end{aligned}$$

y como $\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}+1}$ diverge, podemos concluir que

$$\sum_n P(\sigma(\frac{b_n}{3}) < \frac{2s_n}{3}) = \infty$$

■

Ahora si, una vez establecidos estos previos, enunciemos el resultado principal que nos concierne: La ley del logaritmo iterado para subordinadores.

Teorema 4.1. Sea ϕ el exponente de Laplace del subordinador σ. Entonces, $\exists \quad C_\phi > 0$ tal que

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{L_t \phi\left(\frac{1}{t}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))\right)}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))} = C_\phi \quad \text{casi seguramente}$$

PRUEBA.
El inciso *iii*) del lema 4.1 asegura que $\sum P(L_{t_n} > 3a_n)$ es convergente. En consecuencia, Borel- Cantelli nos garantiza que $L_{t_n} \leq 3a_n$ c.s. si n es grande; es decir, $\frac{L_{t_n}}{a_n} \leq 3$ c.s. si n es grande. Substituyendo el valor de a_n obtenemos

$$\frac{L_{t_n}\phi\left(\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))\right)}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))} \leq 3$$

Entonces, al igual que en las versiones discretas y en el Movimiento Browniano, tenemos que asegurarnos que los valores tomados entre la subsucesión (t_n) no alteran el resultado; es decir, no hay "excursiones" que alteren el valor del límite.
Para rellenar los huecos observemos lo siguiente

$$\text{si} \quad t \in [t_{n+1}, t_n] \quad \text{(recordemos de } i) \text{ del lema 4.1 que } (t_n) \text{ es decreciente)}$$

entonces

$$\frac{1}{t_n} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{t_{n+1}}$$

de donde

$$\phi\left(\frac{1}{t_n}\right) \leq \phi\left(\frac{1}{t}\right) \leq \phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)$$

por lo que

$$\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \leq \ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right))) \leq \ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))$$

y entonces

$$\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \leq \frac{1}{t}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right))) \leq \frac{1}{t_{n+1}}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))$$

por lo que concluimos que

$$\phi\left(\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))\right) \leq \phi\left(\frac{1}{t}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))\right) \leq \phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))\right)$$

Entonces obtenemos que

1) $\dfrac{1}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))} \leq \dfrac{1}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))} \leq \dfrac{1}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))}$

2) $\phi\left(\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))\right) \leq \phi\left(\frac{1}{t}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))\right) \leq \phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))\right)$

de donde deducimos que

$$\frac{\phi\left(\frac{1}{t_n}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))\right)}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))\right)}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))}$$

ya que

$$f(t) = \frac{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))}{\phi\left(\frac{1}{t}\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t}\right)))\right)}$$

y en consecuencia

$$\frac{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))}\frac{1}{f(t_n)} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{f(t_{n+1})}\frac{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_{n+1}}\right)))}{\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right)))}$$

Ahora bien, recordando la prueba del inciso i) del lema 4.1 sabíamos que

$$\ln(\ln(\phi\left(\frac{1}{t_n}\right))) \simeq \ln(n) \quad \text{para } n \text{ grande}$$

Definamos $u_n = \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$. Entonces, para n grande

$$u_n\frac{1}{f(t_n)} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{1}{f(t_{n+1})}\frac{1}{u_n}$$

pero observemos que

$$u_n \to 1 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

entonces $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$. Es decir, $2e \geq \frac{e}{u_n} \geq \frac{2e}{3}$ si $n \geq N$. En consecuencia $\frac{1}{2e} \leq \frac{u_n}{e} \leq u_n$ si $n \geq N$ (ya que $e > 1$), de donde obtenemos que para n grande

$$\frac{1}{2e}\frac{1}{f(t_n)} \leq u_n\frac{1}{f(t_n)} \leq \frac{1}{f(t)} \qquad (*)$$

También recordemos que del inciso *ii*) del lema 4.1 $a_n = f(t_n) \simeq e^{-n}$. Entonces, para n grande

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(t)} &\leq \frac{1}{f(t_{n+1})}\frac{1}{u_n} \\
&= \frac{1}{f(t_n)}\frac{f(t_n)}{f(t_{n+1})}\frac{1}{u_n} \\
&\simeq \frac{1}{f(t_n)}\frac{e^{-n}}{e^{-(n+1)}}\frac{1}{u_n} \\
&= \frac{1}{f(t_n)}\frac{e}{u_n} \\
&\leq \frac{1}{f(t_n)}2e \qquad (**)
\end{aligned}$$

Juntando $(*)$ y $(**)$ llegamos a:

$$\frac{1}{2e}\frac{1}{f(t_n)} \leq \frac{1}{f(t)} \leq \frac{2e}{f(t_n)}$$

En consecuencia

$$\frac{L_t}{f(t)} \leq \frac{L_t 2e}{f(t_n)} \leq \frac{L_{t_n} 2e}{f(t_n)} \leq 3(2e) \quad \text{si } n \text{ es grande}$$

(claramente si $t \leq t_n$ entonces $L_t \leq L_{t_n}$), es decir

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{L_t}{f(t)} \leq 3c \qquad (c = 2e)$$

Para concluir el resultado del teorema, ahora verifiquemos la otra desigualdad ($\geq$). Para esto, definamos los siguientes conjuntos:

$$A_n = \left\{\left(\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) - \sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right)\right) < \frac{2s_n}{3}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

y

$$B_n = \left\{\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) < \frac{2s_n}{3}\right\} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Como σ toma valores positivos, es claro que $B_n \subset A_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Aún mas, al tener σ incrementos independientes observamos que $\{A_n\}_{n\geq 0}$ es una familia independiente. Entonces, por el inciso *ii*) del lema 4.2 tenemos que

$$\sum P(A_n) \geq \sum P(B_n) = \sum P\left(\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) < \frac{2s_n}{3}\right) = \infty$$

y aplicando el inciso *ii*) del lema de Borel-Cantelli obtenemos que

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$$

es decir

$$P(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n) = 1$$

esto es, para casi toda $\omega \in \Omega$, $\omega \in \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n$. Entonces, para casi toda $\omega \in \Omega$ se tiene que

$$\forall m \quad \exists n \geq m \quad \text{tal que} \quad \frac{\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) - \sigma\left(\frac{b_n+1}{3}\right)}{s_n}(\omega) < \frac{2}{3}$$

de donde se puede concluir que para casi toda $\omega \in \Omega$

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right) - \sigma\left(\frac{b_n+1}{3}\right)}{s_n}(\omega)\right) \leq \frac{2}{3}$$

Recordando que

$$\liminf(a_n + (-b_n)) \geq \liminf(a_n) + \liminf(-b_n)$$

y que

$$\liminf(-b_n) = -\limsup(b_n)$$

podemos concluir que

$$\liminf(a_n) \leq \liminf(a_n + (-b_n)) + \limsup(b_n)$$

Entonces, si admitimos por el momento que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma\left(\frac{b_n+1}{3}\right)}{s_n} \leq \frac{1}{4} \quad \text{casi seguramente}$$

tendremos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right)}{s_n}(\omega) \leq \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$$

Entonces,

$$\exists N \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq N \quad \frac{\sigma\left(\frac{b_n}{3}\right)}{s_n} \leq 1$$

de donde

$$\exists N \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq N \quad \sigma\left(\frac{f(s_n)}{3}\right) \leq s_n$$

y en consecuencia

$$\exists N \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq N \quad L_{s_n} \geq \frac{f(s_n)}{3}$$

de donde se obtiene que

$$\exists N \quad \text{tal que} \quad \forall n \geq N \quad \frac{L_{s_n}}{f(s_n)} \geq \frac{1}{3}$$

Entonces, tomando que $s_{n+1} \leq s \leq s_n$ implica $L_{s_{n+1}} \leq L_s \leq L_{s_n}$ y recordando que

$$b_n = f(s_n) \quad \text{es decreciente para } n \text{ grande}$$

obtenemos que para n grande

$$\frac{1}{3} \leq \frac{L_{s_{n+1}}}{f(s_{n+1})} \leq \frac{L_{s_{n+1}}}{f(s)} \leq \frac{L_s}{f(s)}$$

en consecuencia

$$\limsup_{t \to 0+} \frac{L_t}{f(t)} \geq \frac{1}{3}$$

(ya que si n es grande t es pequeño, debido a que s_n es decreciente).
Ahora verifiquemos que realmente

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right)}{s_n} \leq \frac{1}{4} \quad \text{casi seguramente}$$

Recordemos que en el lema 4.2 se obtuvo que

$$P(\sigma(b) > s) \leq \frac{1}{1 - \exp(-\lambda s)} E[1 - \exp(-\lambda\sigma(b))]$$

Entonces, utilizando $s = \frac{s_n}{4}$, $b = \frac{b_{n+1}}{3}$ y $\lambda = \varphi(2\exp(n^2)\ln(n)) = \frac{2\ln(n)}{s_n}$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
P\left(\sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right) > \frac{s_n}{4}\right) &\leq \frac{E\left[1 - \exp\left(-\lambda\sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right)\right)\right]}{1 - \exp\left(-\lambda\frac{s_n}{4}\right)} \\
&= \frac{1 - \exp\left(-\frac{b_{n+1}}{3}\phi(\lambda)\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n)\right)} \\
&= \frac{1 - \exp\left(-\frac{b_{n+1}}{3} 2\exp(n^2)\ln(n)\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n)\right)} \\
&\leq \frac{2b_{n+1}\exp(n^2)\ln(n)}{3\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n)\right)\right)}
\end{aligned}$$

la última desigualdad debido a que $1 - e^{-x} \leq x$ para x positiva.
Ahora bien, del Lema 4.2 se tiene que para n suficientemente grande $b_n \simeq \exp(-n^2)$ por lo que el numerador esta acotado por arriba por

$$3\exp(n^2 - (n+1)^2)\ln(n)$$

y en consecuencia

$$P\left(\sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right) > \frac{s_n}{4}\right) \le \frac{\exp(n^2 - (n+1)^2)\ln(n)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n)\right)}$$
$$\le \frac{\exp(-n)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\ln(n)\right)}$$

de donde se observa que

$$\sum P\left(\sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right) > \frac{s_n}{4}\right) < \infty$$

Entonces, utilizando el Lema de Borel-Cantelli, obtenemos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma\left(\frac{b_{n+1}}{3}\right)}{s_n} \le \frac{1}{4} \quad \text{casi seguramente}$$

En conclusión, se ha obtenido que

$$\frac{1}{3} \le \limsup_{t\to 0+} \frac{L_t}{f(t)} \le 3(2e) \quad \text{casi seguramente}$$

de donde obtenemos que existe c_ϕ tal que

$$\limsup_{t\to 0+} \frac{L_t}{f(t)} = c_\phi \quad \text{casi seguramente}$$

■

BIBLIOGRAFÍA

46

[1] Adams, Malcolm and Guillemin, Victor. *Measure Theory and Probability.* Birkhäuser. 1996.

[2] Ash, Robert B. *Probability and Measure Theory.* Harcourt Academic Press. 2000.

[3] Bertoin, Jean. *Levy Processes.* Cambridge University Press. 1996.

[4] Billingsley, P. *Probability and Measure.* Wiley. 1995.

[5] Bingham, N. H. *Variants on the Law of the Iterated Logarithm.* Bulletin of the London Mathematical Society 18. 1986. pp. 433-467.

[6] Chung, Kai Lai. *A Course in Probability Theory.* Harcourt, Brace and World, Inc. 1968.

[7] De la Peña, V. and Giné, E. *Probability and its Applications.* Springer. 1999.

[8] Doob, J.L. *Measure Theory.* Springer-Verlag. 1994.

[9] Feller, William. *An Introduction to the Theory of Probability and its Applications.* Wiley. 1968.

[10] Lamperti, John W. *Probability. A Survey of the Mathematical Theory.* Wiley Series in Probability and Statistics. 1996.

[11] Revuz, Daniel and Yor, Marc. *Continuous Martingales and Brownian Motion.* Springer-Verlag. 1980.

[12] Ross, Sheldon M. *Stochastic Processes.* John Wiley and Sons. 1983.

[13] Rudin, Walter. *Principios de Análisis Matemático.* McGraw-Hill. 1980.

[14] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill. 1987.

[15] Tudor, Constantin. *Procesos Estocásticos.* Sociedad Matemática Mexicana. 1997.