30

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Flujos Hamiltonianos de Anosov

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MATEMÁTICO.

P R E S E N T A:

Tonatihu Valdez Hernández

DIRECTOR DE TESIS: Dr. Héctor Fidencio Sánchez Morgado

2002

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Flujos Hamiltonianos de Anosov"

realizado por Tonatihu Valdez Hernández

con número de cuenta 09550460-9 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con muestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Héctor Fidencio Sánchez Morgado	F. Sánchez M
Propietario	Dr. Eugenio Garnica Vigil	
Propietario	Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco	
Suplente	Dr. Pablo Padilla Longoria	Pablo Padilla L
Suplente	Dr. Santiago López de Medrano Sánchez	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

A la memoria de mi primo Iván.

AGRADECIMIENTOS

A Dios por su presencia en toda mi vida.

A mi asesor, Dr. Héctor Sánchez Morgado, por su paciencia e inalcanzable entusiasmo.

A mis padres: Clara y Roberto; a mis abuelos: Juanita, Ángel, María Luisa y Daniel, por sostenerme en todo momento.

Al Dr. Oscar Palmas por la cuidadosa lectura de este trabajo y a todos sus comentarios.

Al Dr. Eugenio Garnica.

A la Dra. Catherine García-Reimbert por todo su apoyo y comprensión.

A Miguel Ángel Chávez por su compañía.

A mi hermano Ángel Eduardo por toda su ayuda.

A Galo y a Ferrán por sus comentarios y pláticas constructivas.

A Norma.

A mis amigos: Jorge Mayans, Laura Juárez, Pablo Mijangos, Fátima Caudillo, Antonio Carranza, Claudia Palacios, Raúl Cordero, Ana, Miguel, José Luis, Alejandro, Ricardo, Narciso, Jorge, Yesenia, Álgebra y José Luis.

Índice General

Introducción

Es bien conocido que en su trabajo *"Geodesic flows on closed manifolds of negative curvature"*, Anosov demostró que el flujo geodésico de una variedad riemanniana con curvatura seccional negativa, tiene una estructura hiperbólica.

Posteriormente, los flujos que poseen esta estructura hiperbólica fueron bautizados con el nombre Anosov y han sido objeto de estudio para una gran cantidad de matemáticos.

Eberlein se planteó el problema de caracterizar los flujos geodésicos que son Anosov. Para comenzar, una condición necesaria para que un flujo geodésico sea Anosov es que a lo largo de ninguna geodésica haya puntos conjugados. Bajo la hipótesis de la ausencia de puntos conjugados, Green construyó un par de subhaces del haz tangente del haz tangente unitario. Los haces de Green contienen la dirección del flujo y Eberlein demuestra que el flujo es Anosov cuando la intersección de dichos haces coincide con la dirección del flujo, y los haces de Green resultan ser los haces estable e inestable débiles.

El resultado de Eberlein fue generalizado al contexto de sistemas hamiltonianos en haces cotangentes por Contreras e Iturriaga, y el objetivo de esta tesis es presentar este resultado.

Para una variedad compacta M, consideramos hamiltonianos $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ que son convexos en cada fibra T_p^*M, y el flujo hamiltoniano correspondiente φ_t. En cada punto de T^*M, el subespacio vertical es el espacio tangente a la fibra.

Para que un flujo hamiltoniano sean Anosov en un nivel de energía Σ, es necesario que para cada $\theta \in \Sigma$, la órbita $\varphi_t(\theta)$ no tenga puntos conjugados. Esto quiere decir que bajo la derivada del flujo $D\varphi_t$, el subespacio vertical en θ se transforma siempre en un subespacio transversal al vertical en $\varphi_t(\theta)$.

Buscamos subespacios $E^s(\theta)$, $E^u(\theta)$ que sean contraidos exponencialmente por $D\varphi_t$ cuando t se va $+\infty$ y a $-\infty$ respectivamente. Con esto en mente, consideremos los subespacios $E_t(\theta)$ y $F_t(\theta)$ que mediante $D\varphi_t$ y $D\varphi_{-t}$ se transforman en los espacios verticales en $\varphi_t(\theta)$ y $\varphi_{-t}(\theta)$ respectivamente.

Claramente, la hipótesis de la ausencia de puntos conjugados, implica que los espacios $E_t(\theta)$ y $F_t(\theta)$ son transversales al vertical. Se demuestra que los límites cuando t se va a infinito, existen, son transversales al vertical y son tangentes al nivel de energía. Estos subespacios límite son los subespacios de Green.

Se prueba que los vectores con la propiedad de que, la norma de la imagen bajo la derivada del flujo permanece acotada a lo largo de la órbita, pertenecen a ambos subespacios de Green. Por otra parte, para cualquier vector no nulo en el subespacio vertical, la norma de la imagen bajo la derivada del flujo nunca permanece acotada.

El resultado principal de la tesis es que, una condicón necesaria y suficiente para que el flujo hamiltoniano sea Anosov en un nivel de energía es que, en cada uno de sus puntos, los subespacios de Green sean transversales en el tangente al nivel de energía. Como los subespacios de Green tiene la misma dimensión que M, la condición de transversalidad es equivalente a que, los únicos vectores cuya imagen bajo la derivada del flujo permanece acotada a lo largo de la órbita, sean múltiplos del vector del campo hamiltoniano.

CAPíTULO 1

Álgebra lineal simpléctica

1.1. Formas bilineales

Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Una función $\beta : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ se llama una forma bilineal si para cualesquiera vectores u_1, u_2, v y cualquier escalar a , se cumple que

$$\beta(au_1 + u_2, v) = a\beta(u_1, v) + \beta(u_2, v)$$
$$\beta(v, au_1 + u_2) = a\beta(v, u_1) + \beta(v, u_2)$$

Si V tiene dimensión finita y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base ordenada de V, $\beta_{ij} = \beta(v_i, v_j)$ son las entradas de la matriz $B = [\beta_{ij}]_{\mathcal{B}}$ asociada a la forma bilineal β en la base ordenada $\mathcal{B}$. Para toda $u \in V$ se puede definir la función lineal $f_u : V \longrightarrow \mathbb{K}$ como $f_u(v) = \beta(u, v)$ con la u fija, obteniendo así una transformación lineal $T_\beta : V \longrightarrow V^*$ definida por $T_\beta(u) = f_u$. Una pregunta natural es, cuándo T_β es un isomorfismo? Por resultados de Álgebra Lineal sabemos que $\dim V = \dim V^*$, por lo que T_β es un isomorfismo si y sólo si el núcleo $\mathrm{Nuc}\,(T_\beta) = \{0\}$. Es decir, si y sólo si la función lineal $f_u \equiv 0$ sólo proviene de $u = 0$.

1.1.1. **Definición.** Sean V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ y β una forma bilineal. Decimos que β es no degenerada si $\beta(u, v) = 0$ para toda v en V implica que $u = 0$.

Cuando T es un operador lineal sobre V y β es una forma bilineal, se dice que T preserva β si $\beta(Tu, Tv) = \beta(u, v)$. Si S y T son dos operadores lineales que preservan β, también su composición $S \circ T$ la preserva, ya que $\beta(STu, STv) = \beta(Tu, Tv) = \beta(u, v)$.

Si β es una forma bilineal no degenerada sobre un espacio vectorial de dimensión finita V, todos los operadores lineales sobre V que preservan β constituyen un grupo bajo la operación composición.

Ya se vió que la operación es cerrada, se sabe que la composición de operadores es asociativa, el operador identidad I preserva β; y veamos que para todo operador T que preserva β, existe un operador T^{-1} que preserva β y $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$. Sea T un operador que preserva β, tómese u del $\mathrm{Nuc}\,(T)$, es decir $T(u) = 0$, $\beta(u, v) = \beta(Tu, Tv) = \beta(0, Tv) = 0$ para toda v de V, como β es no degenerada entonces $u = 0$, esto es que $\mathrm{Nuc}\,(T) = \{0\}$, por lo tanto T es invertible.Como $\beta(T^{-1}u, T^{-1}v) = \beta(TT^{-1}u, TT^{-1}v) = \beta(u, v)$ entonces T^{-1} preserva β. Sean $\mathcal{B}$

una base, B la matriz asociada a la forma bilineal no degenerada β y A la matriz asociada al operador lineal T sobre V que preserva β, entonces: $A^T B A = B$. (A^T indica la transpuesta de A).

1.1.2. **Definición.** Sean V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ y β una forma bilineal. Cuando $\beta(u,v) = \beta(v,u)$ para todo u, v de V se dice que β es *simétrica*. Y cuando $\beta(u,v) = -\beta(v,u)$ para todo u, v de V se dice que β es *antisimétrica*.

Toda forma bilineal β se puede descomponer como la suma de una forma simétrica $\gamma(u,v) = \frac{1}{2}\beta(u,v) + \frac{1}{2}\beta(v,u)$ y una antisimétrica $\omega(u,v) = \frac{1}{2}\beta(u,v) - \frac{1}{2}\beta(v,u)$.
Si β es una forma bilineal simétrica, entonces cumple la identidad de polarización:

$$\beta(u+v, u+v) - \beta(u-v, u-v) = 4\beta(u,v)$$

Una consecuencia inmediata de esta identidad es, que si $\beta(v,v) = 0$ para toda v de V, entonces $\beta(u,v) = 0$ para cualesquiera u, v de V. Es decir, si β no es idénticamente nula, existe $w \in V$ tal que $\beta(w,w) \neq 0$. Por otro lado, si β es una forma bilineal antisimétrica entonces $\beta(v,v) = 0$ para toda $v \in V$. En la siguiente proposición, el campo $\mathbb{K}$ se entenderá como los números complejos o los reales.

1.1.3. **Proposición.** *Sea V un espacio vectorial de dimensión m sobre el campo* $\mathbb{K}$.

1. *Si β es una forma bilineal no degenerada y simétrica, entonces existe una base ordenada $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ tal que $\beta(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$ y $\beta(e_i, e_i) \neq 0$.*
2. *Si ω es una forma bilineal no degenerada y antisimétrica, entonces existe una base ordenada $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, d_1, \ldots, d_n\}$ con $m = 2n$ y tal que $\omega(e_i, e_j) = \omega(d_i, d_j) = 0$, $\omega(e_i, d_j) = \delta_{ij}$.*

Demostración:

1. Como β es simétrica y no es idénticamente cero, existe e_1 de V tal que $\beta(e_1, e_1) \neq 0$. Sea E_1 el espacio generado por e_1 y $E_1^\perp = \{v \in V \mid \beta(v, e_1) = 0\}$.
   Observe que $E_1 \cap E_1^\perp = \{0\}$; si $u \in V$ entonces
   $$u - \frac{\beta(e_1, u)}{\beta(e_1, e_1)} e_1 \in E_1^\perp \quad ;$$
   por lo tanto, $V = E_1 \oplus E_1^\perp$. Ahora si β no es idénticamente cero sobre $E_1^\perp$, existe e_2 tal que $\beta(e_2, e_2) \neq 0$, y se continúa con el mismo argumento hasta separar a V en subespacios unidimensionales.
2. Sea $e_1 \neq 0$, como ω es no degenerada entonces existe $v_1 \in V$ tal que $\omega(e_1, v_1) \neq 0$, $d_1 = \dfrac{v_1}{\omega(e_1, v_1)}$.
   Sea W el subespacio generado por e_1 y d_1,
   $$W^\perp = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \quad \forall\, w \in W\}.$$

$W \cap W^{\perp} = \{0\}$ porque si $w = ae_1 + bd_1$, $\omega(w, e_1) = -b$ y $\omega(w, d_1) = a$, como $w \in W^{\perp}$, $-b = 0$ y $a = 0$.

Si $u \in V$ entonces $u - \omega(u, d_1)e_1 + \omega(u, e_1)d_1 \in W^{\perp}$. Por lo tanto $V = W \oplus W^{\perp}$.

Sea $e_2 \neq 0$ en $W^{\perp}$, como ω es no degenerada entonces existe $v_2 \in V$ tal que $\omega(e_2, v_2) \neq 0$; ya que $v_2 = v_W + v_{W^{\perp}}$ con v_W en W y $v_{W^{\perp}}$ en $W^{\perp}$.

Se afirma que $\omega(e_2, v_{W^{\perp}}) \neq 0$,

$$\omega(e_2, v_{W^{\perp}}) = \omega(e_2, v_2 - v_W) = \omega(e_2, v_2) - \omega(e_2, v_W) \neq 0 \ ;$$

por lo tanto ω restringido a $W^{\perp}$ es no degenerada, obteniendo que si $y_2 = v_2 - v_W$, $d_2 = \dfrac{y_2}{\omega(e_2, y_2)}$.

Y se aplica el mismo argumento hasta separar a V en subespacios bidimensionales.

Observemos que es indispensable que la dimensión de V sea par, si se tiene una forma bilineal, ω, no degenerada y antisimétrica.

Supongamos sin pérdida de generalidad que

$$\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, d_1, \ldots, d_n\}$$

no alcanza a generar V, pero $\mathcal{B} \cup \{x\}$ sí. Donde $x \in U^{\perp}$ y U es el subespacio generado por $\mathcal{B}$. Como $\omega(x, ax) = 0$ para toda $a \in \mathbb{R}$, por ser antisimétrica, y además $\omega(x, u) = 0$ para toda $u \in U$, entonces $\omega(x, v) = 0 \ \forall \ v \in V$. Por ser ω no degenerada se tiene que $x = 0$.

□

1.1.4. Ejemplo. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n, d_1, \ldots, d_n\}$ es la base ordenada que se obtiene en la segunda parte de la proposición 1.1.3 para una forma bilineal, antisimétrica y no degenerada ω, entonces la matriz J asociada a ω en la base $\mathcal{B}$ es

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

Así, podemos definir ω_0 en $\mathbb{R}^{2n}$ por $\omega_0(w, z) = w^T J z$. Sea $T : \mathbb{R}^{2n} \to V$ la transformación

$$T(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (x_i e_i + y_i d_i)$$

la cual satisface que $\omega(Tz, Tw) = \omega_0(z, w)$.

1.2. Espacios vectoriales simplécticos

Un espacio vectorial simpléctico real es una pareja (V, ω) donde V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$, y ω es una forma bilineal antisimétrica y no degenerada.

El isomorfismo lineal entre (V, ω) y $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ que preserva la forma simpléctica, es nombrabo *simplectomorfismo* lineal.

En la sección anterior se vió que el conjunto de todas las transformaciones lineales que preservan una forma bilineal no degenerada, tiene una estructura de grupo. En este caso, el *grupo simpléctico* de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ es $Sp(2n) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid A^T JA = J\}$, el cual es isomorfo al grupo simpléctico $Sp(V, \omega)$, que es el de todas las transformaciones lineales de V en sí mismo que preservan ω.

1.2.1. Definición. Si W es un subespacio del espacio vectorial simpléctico (V, ω) se define el complemento simpléctico de W como

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \quad \forall\, w \in W\}.$$

El subespacio W es:

- **Isotrópico** si $W \subseteq W^{\perp}$,
- **Lagrangiano** si $W = W^{\perp}$,
- **Coisotrópico** si $W^{\perp} \subseteq W$ y
- **Simpléctico** si $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

1.2.2. Ejemplo. La base ordenada $B = \{e_1, \ldots, e_m, d_1, \ldots, d_m\}$ de la proposición 1.1.3 se le conoce como base simpléctica de V.

Si W es el subespacio de V generado por $\{e_2, \ldots, e_m\}$, sea $w = a_2e_2 + \cdots + a_me_m$, $\omega(w, d_i) = a_i\omega(e_i, d_i) = a_i$ y $\omega(w, e_i) = 0$, por lo que $W^{\perp}$ es el subespacio generado por $\{e_1, \ldots, e_m, d_1\}$, es decir W es isotrópico.

Ahora si E es el subespacio de V generado por $\{e_1, \ldots, e_m\}$, sea $e = a_1e_1 + \cdots + a_me_m$, $\omega(e, d_i) = a_i\omega(e_i, d_i) = a_i$ y $\omega(e, e_i) = 0$, por lo que E es lagrangiano.

1.2.3. Observaciones. Cuando E y W son dos subespacios de V tales que $W \subset E$, entonces $E^{\perp} \subset W^{\perp}$; porque si $x \in E^{\perp}$, $\omega(x, e) = 0$ para toda $e \in E$, como $W \subset E$, en particular para toda $w \in W$ se cumple que $\omega(x, w) = 0$, por lo tanto $x \in W^{\perp}$. Esto implica que si E es un subespacio lagrangiano de V y W es un subespacio de E, entonces $W \subset E = E^{\perp} \subset W^{\perp}$, por lo tanto W es un subespacio isotrópico de V.

Observe que $(W^{\perp})^{\perp} = W$. W es isotrópico si y sólo si $W^{\perp}$ es coisotrópico. Además, para cualesquiera w_1, $w_2 \in W$, $\omega(w_1, w_2) = 0$ si sólo si W es lagrangiano.

Recordemos que el anulador S^0 de un subconjunto $S \subset V$ es $S^0 = \{f \in V^* \mid f(v) = 0, \forall\, v \in S\}$. Un resultado de Álgebra Lineal dice que si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre el campo $\mathbb{K}$ y W es un subespacio de V, entonces $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

La idea de la demostración es tomar una base $\{v_1, \ldots, v_k\}$ de W y completarla a una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Se toma la base dual correspondiente $\{f_1, \ldots, f_n\}$, y se afirma que $\{f_{k+1}, \ldots, f_n\}$, el complemento de la base dual de W, es una base de W^0. Efectivamente, si $i \geq k+1$ y $v \in W$, entonces $f_i(v) = 0$; además, si $f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)f_i$ está en W^0, se tiene que $f(v_i) = 0$ para $i \leq k$ y así

$$f = \sum_{i=k+1}^{n} f(v_i)f_i.$$

1.2.4. Lema. *Si W es un subespacio del espacio vectorial simpléctico (V, ω), entonces* $\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$.

Demostración:
Se definió $T_\omega : V \to V^*$ como $T_\omega(u) = f_u(v) = \omega(u, v)$, ya que ω es no degenerada, T_ω es un isomorfismo. Es decir, podemos identificar $W^{\perp}$ con el anulador W^0 de W en V^*, pero se tenía que $\dim W + \dim W^0 = \dim V$. □

1.2.5. Lema. *Dados $X, Y \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, se define $Z = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ y se entiende $E =$ Ima (Z), como la imagen de la transformación lineal asociada a la matriz Z.*

E es un subespacio lagrangiano de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ si y sólo si la matriz Z tiene rango n y $X^TY = Y^TX$.

En particular, la gráfica de una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, Graf $(A) = \{(x, Ax) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, *es lagrangiana si y sólo si A es simétrica.*

Demostración:
Sean $u, u_1 \in \mathbb{R}^n$, $z = (Xu, Yu)$ y $z_1 = (Xu_1, Yu_1)$;

$$\omega(z, z_1) = z^TJz_1 = u^T(X^TY - Y^TX)u_1.$$

Así, $X^TY = Y^TX$ si y sólo si $E \subset E^{\perp}$.

Suponiendo que E es lagrangiano, por el lema 1.2.4, se obtiene que Rango $(Z) = \dim E = \frac{1}{2}\dim V$.

Ahora si Z tiene rango n, $\dim E = n$ y $\dim E^{\perp} = n$ entonces $E = E^{\perp}$. Haciendo $X = I$, $Y = A$, se obtiene que A es simétrica si y sólo si Graf (A) es lagrangiana. □

1.2.6. Observaciones. Sea $\varphi \in Sp(2n)$. Si $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ es un subespacio isotrópico, entonces φW es isotrópico. Porque si se toman $x, y \in W$, $\omega(\varphi x, \varphi y) = \omega(x, y) = 0$, por lo tanto φW es isotrópico. También, si E es lagrangiano , entonces φE es lagrangiano. Porque si E es lagrangiano, E es isotrópico, por lo anterior, φE es isotrópico. Como φ es un isomorfismo, $\dim \varphi E = \dim E$. Por lo tanto φE es lagrangiano.

Cuando se tienen dos subconjuntos X, Y de un espacio vectorial V se define $X + Y = \{v \in V \mid v = ax + by, x \in X, y \in Y\}$, con $a, b \in \mathbb{K}$.

1.2.7. Lema. *Sean W, X y Y subespacios del espacio vectorial simpléctico (V, ω).*

1. $(X + Y)^{\perp} = X^{\perp} \cap Y^{\perp}$
2. *Si $W \subset Y$ entonces* $(X + W) \cap Y = (X \cap Y) + W$

Demostración:

1. Como $X \subset X + Y$, entonces $X^{\perp} \supset (X + Y)^{\perp}$, análogamente $Y^{\perp} \subset (X + Y)^{\perp}$, lo que implica que $(X + Y)^{\perp} \subset X^{\perp} \cap Y^{\perp}$.

   Ahora tómese $v \in X^{\perp} \cap Y^{\perp}$, entonces $\omega(v, x) = 0$ para toda $x \in X$ y $\omega(v, y) = 0$ para toda $y \in Y$; por lo tanto $0 = \omega(v, x) + \omega(v, y) = \omega(v, x+y) = \omega(v, z)$ $\forall z \in X + Y$. Esto demuestra que $X^{\perp} \cap Y^{\perp} \subset (X + Y)^{\perp}$.

2. Sea $v \in (X + W) \cap Y$ entonces $v = x + w$ con $x \in X$, $w \in W$ y $v \in Y$; como $W \subset Y$, $w \in Y$, además Y es subespacio, esto implica que $x \in Y$. Por lo que $v = x + w$ con $x \in X \cap Y$ y $w \in W$, es decir $v \in (X \cap Y) + W$.

   Ahora tómese $v \in (X \cap Y) + W$ entonces $v = z + w$ con $z \in X \cap Y$ y $w \in W$; como $z \in X$, $v \in X + W$, además $W \subset Y$, $w \in Y$ y $z \in Y$, Y es subespacio por lo tanto $v \in Y$. Esto implica que $v \in (X + W) \cap Y$.

$\square$

Advierta que $W^{\perp}$ es un subespacio de (V, ω) sin importar que W sea o no subespacio. Alguien podría fijarse en el cociente $V/W^{\perp}$, e investigar su estructura simpléctica, o cuando W es subespacio podría ver el cociente $W/(W \cap W^{\perp})$. Un cociente interesante se obtiene cuando W es coisotrópico, y se conoce como *reducción simpléctica.*

1.2.8. **Proposición.** *Sean (V, ω) un espacio vectorial simpléctico y W un subespacio coisotrópico.*

1. *El cociente $\mathcal{V} = W/W^{\perp}$ es un espacio vectorial simpléctico.*
2. *Si $E \subset V$ es lagrangiano entonces $\mathcal{E} = ((E \cap W) + W^{\perp})/W^{\perp}$ es lagrangiano de $\mathcal{V}$.*

Demostración:

1. Denote $[w] = w + W^{\perp} \in \mathcal{V}$ para $w \in W$. Si W es coisotrópico entonces $W^{\perp}$ es isotrópico. Tómense x, x' en $[x]$ y z, z' en $[z]$, es decir, $x - x' = w_1$ con w_1 en $W^{\perp}$ y $z - z' = w_2$ con w_2 en $W^{\perp}$, $\omega(x, z) = \omega(x' + w_1, z' + w_2) = \omega(x', z')$. Por lo que una manera natural de definir la forma simpléctica en $\mathcal{V}$ es $\Omega([x], [z]) = \omega(x, z)$, ya que no depende ω del elemento de la clase. Si $\Omega([x], [z]) = 0$ para toda $[z] \in \mathcal{V}$ entonces $\omega(x, z) = 0$ para toda $z \in W$ esto implica que $x \in W^{\perp}$, es decir $[x] = [0]$, por lo tanto Ω es no degenerada. Esto prueba que el cociente $\mathcal{V} = W/W^{\perp}$ es un espacio vectorial simpléctico.
2. Usando el lema 1.2.7 se probará que $F = (E \cap W) + W^{\perp}$ es lagrangiano.

$$\begin{aligned} [(E \cap W) + W^{\perp}]^{\perp} &= (E \cap W)^{\perp} \cap W \\ &= (E + W^{\perp}) \cap W \\ &= (E \cap W) + W^{\perp}. \end{aligned}$$

   Es decir, F es lagrangiano. Sea $w \in W$ tal que $\Omega([w], [v]) = 0$ para todo $[v] \in \mathcal{E} = F/W^{\perp}$, como $[v] = v + W^{\perp}$, entonces $\omega(w, v) = 0$ para todo $v \in F$, es decir $w \in F^{\perp} = F$. Por lo tanto si $[w] \in \mathcal{E}^{\perp}$ entonces $[w] \in \mathcal{E}$. Ahora sean $[w]$ y $[v] \in \mathcal{E}$, entonces $\Omega([w], [v]) = \omega(w, v) = 0$ porque F es lagrangiano, es decir $[w] \in \mathcal{E}^{\perp}$. Por lo tanto $\mathcal{E}$ es lagrangiano.

$\square$

1.2.1. **Relación con matrices complejas.** Se puede identificar $\mathbb{R}^{2n}$ con $\mathbb{C}^n$ de la siguiente manera: sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $x + iy := z \in \mathbb{C}^n$. La multiplicación por $i \in \mathbb{C}$ es una transformación lineal de R^{2n} en sí mismo, $iz := -y + ix$, y su matriz asociada es $-J$.

Un elemento A de $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ es $\mathbb{C}$-lineal, cuando $Aiz = iAz$, es decir $A(-Jz) = -JAz$ para todo $z \in \mathbb{C}$: el conjunto de matrices invertibles y $\mathbb{C}$-lineales el cual se denota por $GL(n, \mathbb{C})$ forma un grupo con el producto de matrices.

Para un producto interior en $\mathbb{R}^{2n}$, la matriz identidad I, es la que se asocia a esta forma bilineal no degenerada en una base ortonormal. Su grupo consta de las matrices $A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ tales que $A^TA = I$, el cual se conoce como grupo ortogonal y se indica por $O(2n)$.

Si $A \in GL(n, \mathbb{C}) \cap O(2n)$, entonces $JA = AJ$ y $A^TA = I$, por lo tanto $A^TJA = J$. Pero también se vió que J es la matriz asociada a la forma simpléctica ω_0 de $\mathbb{R}^{2n}$ en su base canónica.

Es decir,

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n) &\subset GL(n,\mathbb{C}) \cap Sp(2n) \\ GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n) &\subset O(2n) \cap Sp(2n). \end{aligned}$$

Si $A \in GL(n, \mathbb{C}) \cap Sp(2n)$, entonces $JA = AJ$ y $A^TJA = J \Rightarrow A^TAJ = J \Rightarrow A^TA = I$, es decir

$$GL(n,\mathbb{C}) \cap Sp(2n) \subset GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n).$$

Si $A \in Sp(2n) \cap O(2n)$, entonces $A^TJA = J$ y $AA^T = I \Rightarrow JA = AJ$, es decir

$$Sp(2n) \cap O(2n) \subset O(2n) \cap GL(n,\mathbb{C}).$$

Por lo tanto,

$$GL(n,\mathbb{C}) \cap Sp(2n) = GL(n,\mathbb{C}) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap O(2n).$$

Esta intersección es llamada el grupo unitario $U(n)$.

1.3. El grupo simpléctico y su álgebra de Lie

1.3.1. **Definición.** Una variedad suave de dimensión n es un conjunto M y una familia numerable $\mathcal{F} = \{(f_i, U_i) \mid i \in I\}$, donde $f_i : U_i \to M$ es una función inyectiva y $U_i \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y conexo, tal que:

1. $\bigcup_{i\in I} f_i(U_i) = M$
2. Cuando $f_i(U_i) \cap f_j(U_j) = W \neq \emptyset$ con $i, j \in I$, los conjuntos $f_i^{-1}(W)$ y $f_j^{-1}(W)$ son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y la función $f_j^{-1} \circ f_i$ es un difeomorfismo.
3. Si $p \in f_i(U)$, $\hat{p} \in f_j(\hat{U})$ son puntos distintos de M, entonces existen subconjuntos $W \subset U$, $\hat{W} \subset \hat{U}$, con $f_i^{-1}(p) \in W$ y $f_i^{-1}(\hat{p}) \in \hat{W}$, tal que $f_i(W) \cap f_j(\hat{W}) = \emptyset$.

El par (f_i, U_i) con $p \in f_i(U_i)$ es llamado parametrización de M en p, mientras que el par $(f_i^{-1}, f_i(U_i))$ se conoce como carta. Las parametrizaciones $f_i : U_i \to V_i \subset M$ inducen en la variedad M la estructura de espacio topológico. A saber, las vecindades son los conjuntos de la forma $f_i(W)$ con $W \subset U_i$ abierto. Estos conjuntos forman una base para la topología sobre M, tal que $V \subset M$ es un abierto si y sólo si para cada $p \in V$, existe una vecindad de p de la forma antes mencionada contenida en V; así, $p \in f_i(W) \subset V$.

En términos de esta topología, el tercer requisito de la definición 1.3.1 de una variedad es parafrasear el axioma de separación de Hausdorff: Si $p \neq \hat{p}$ son puntos en M, entonces existen subconjuntos abiertos V y $\hat{V}$ tal que $p \in V$, $\hat{p} \in \hat{V}$ y $V \cap \hat{V} = \emptyset$.

1.3.2. **Definición.** Dadas dos variedades M_1^n, M_2^m, una transformación $\varphi : M_1 \to M_2$ es diferenciable en $p \in M_1$, si y sólo si para toda $g : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ parametrización en $\varphi(p)$, existe $f : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ parametrización en p tal que $\varphi(f(U)) \subset g(V)$ y la función $g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en el punto $f^{-1}(p)$.

Para una variedad suave M, el conjunto de funciones $f : M \to \mathbb{R}$ diferenciables en p se indica por $\mathcal{D}(M,p)$. Una aplicación suave $x : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to M$ es llamada una *curva suave* en M. Suponga que $x(0) = p \in M$. El vector tangente a la curva x en $t = 0$ es la función $x'(0) : \mathcal{D}(M,p) \to \mathbb{R}$ dada por

$$x'(0)f = \left.\frac{d(f \circ x)}{dt}\right|_{t=0}$$

donde $f \in \mathcal{D}(M,p)$. El vector tangente en p es el vector tangente en $t = 0$ de alguna curva $x : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ con $x(0) = p$. El conjunto de vectores tangentes a M en p será indicado por T_pM.

1.3.3. **Definición.** Para la transformación diferenciable $\varphi : M_1 \to M_2$, en todo $p \in M_1$ y cada $v \in T_pM_1$ se define la derivada $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ de la siguiente manera: dada una curva diferenciable $x : (-\epsilon, \epsilon) \to M_1$ con $x(0) = p$ y $x'(0) = v$, tomando $\alpha = \varphi \circ x$,

$$d\varphi_p v = \alpha'(0)$$

La derivada $d\varphi_p$ está bien definida por ser lineal y no depender de x, una pruba de esto se encuntra en [dC], página 9.

Sean M_1, M_2 dos variedades suaves, y una transformación $\varphi : M_1 \to M_2$, se dice que φ es una *sumersión* en p si $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ es suprayectiva. Un punto $q \in M_2$ es un *valor regular* de φ si es una sumersión en cada punto p tal que $\varphi(p) = q$. La siguiente afirmación, cuya demostración omitiremos, aparece en [GP], página 21.

1.3.4. **Lema.** *Si q es un valor regular de $\varphi : M_1 \to M_2$, entonces la preimagen $N = \varphi^{-1}(q)$ es una subvariedad de M_1. Además,* $\dim N = \dim M_1 - \dim M_2$, *y el* *núcleo de la derivada $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_qM_2$ en cualquier punto $p \in N$ es precisamente el espacio tangente a p, T_pN.*

Usaremos este resultado para mostrar que $Sp(2n)$ es una variedad suave. Para cualquier matriz A, la matriz A^TJA es antisimétrica, ya que $(A^TJA)^T = A^TJ^TA = -A^TJA$.

Además, $\mathcal{A}(2n) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$.

Sea $f : M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{A}(2n)$ definida por $f(A) = A^TJA$. Observemos que $f^{-1}(J) = Sp(2n)$. Mostraremos que J es un valor regular de f; para esto calculemos la derivada de f en A en la dirección de B:

$$\begin{aligned}
df(A)B &= \lim_{s\to 0}\frac{f(A+sB)-f(A)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{(A+sB)^TJ(A+sB)-A^TJA}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{sA^TJB+sB^TJA+s^2B^TJB}{s}\\
&= A^TJB+B^TJA
\end{aligned}$$

Falta ver que $df(A)$ es suprayectiva cuando $A \in f^{-1}(J)$; es decir, para cualquier $C \in \mathcal{A}(2n)$ debe existir una $B \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ que resuelva la ecuación $A^TJB + B^TJA = C$. Como C es antisimétrica se puede escribir $\frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C^T = C$. Tómese $A^TJB = \frac{1}{2}C \Rightarrow B = -\frac{1}{2}AJC$. Verificando

$$\begin{aligned}
df(A)B &= A^TJ(-\frac{1}{2}AJC) + (-\frac{1}{2}AJC)^TJA\\
&= -\frac{1}{2}JJC - \frac{1}{2}C^TJ^TJ = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C^T = C.
\end{aligned}$$

Así, f es una sumersión en cada $A \in f^{-1}(J)$ y J es un valor regular de f. Por lo tanto $Sp(2n)$ es una subvariedad de $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$.

1.3.5. **Definición.** Un grupo de Lie a $r-$parámetros es un grupo G que también tiene la estructura de una variedad suave de dimensión r, de tal manera que las operaciones del grupo

$m : G \times G \to G$, $m(g,h) = gh$ con $g, h \in G$,

$i : G \to G$, $i(g) = g^{-1}$ con $g \in G$,

son aplicaciones suaves entre variedades.

Como la multiplicación entre matrices y el inverso de una matriz son aplicaciones suaves, se tiene que $Sp(2n)$ es un grupo de Lie. El espacio tangente en A, $T_ASp(2n)$ es el núcleo de la derivada $df(A)B = A^TJB + B^TJA$, de modo que en la identidad

I,

$$\mathsf{sp}(2n) = T_I Sp(2n) = \{B \in Sp(2n) \mid B^T J + JB = 0\}.$$

Si $A, B \in \mathsf{sp}(2n)$ entonces, $AB - BA \in \mathsf{sp}(2n)$; pues,

$$J(AB - BA) + (AB - BA)^T J = JAB - JBA + B^T A^T J - A^T B^T J$$

además,

$$JAB = -A^T JB \ y \ -JBA = B^T JA$$

es decir,

$$J(AB - BA) + (AB - BA)^T J = -A^T(JB + B^T J) + B^T(JA + A^T J) = 0$$

Por lo que podemos definir el producto $[A, B] = AB - BA$ en el subespacio $\mathsf{sp}(2n)$.

1.3.6. Observaciones. Las principales propiedades de este producto son las siguientes:

1. $[A, B]$ es bilineal.
2. $[A, B]$ es antisimétrica. Sean $A, B \in \mathsf{sp}(2n)$.
$$[B, A] = BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B].$$
3. Se cumple la identidad de Jacobi:
$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$
Sean $A, B, C \in \mathsf{sp}(2n)$.
$[AB - BA, C] + [BC - CB, A] + [CA - AC, B] = (AB - BA)C + (BC - CB)A + (CA - AC)B - C(AB - BA) - A(BC - CB) - B(CA - AC) = 0$

1.3.7. Definición. Un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{L}$, con una operación $[,] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ que es bilineal, antisimétrica y satisface la identidad de Jacobi.

Observe que $T_I O(m) = \mathcal{A}(m)$ también es un álgebra de Lie con la misma operación $[A, B] = AB - BA$.

Sean $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, para que la matriz $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ esté en $\mathsf{sp}(2n)$ se debe cumplir que B, C sean simétricas y $D = -A^T$.

1.3.8. Lema. *Sean $L : \mathbb{R} \to \mathsf{sp}(2n)$ continua y sea $\Phi : \mathbb{R} \to M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ diferenciable tal que $\Phi' = L\Phi$, $\Phi(0) = I$. Entonces $\Phi(t) \in Sp(2n)$ $\forall\ t \in \mathbb{R}$.*

Demostración:

Ya que, $\frac{d}{dt}(\Phi^T J\Phi) = (L\Phi)^T J\Phi + \Phi^T JL\Phi = \Phi^T(L^T J + JL)\Phi = 0$ entonces, $\Phi^T J\Phi$ es constante en todo $\mathbb{R}$, pero $\Phi^T(0)J\Phi(0) = I^T JI = J$, por lo tanto $\Phi^T J\Phi = J$ en todo $\mathbb{R}$.

□

CAPíTULO 2

Sistemas hamiltonianos lineales

2.1. Sistemas desconjugados

Sean $A, B, C : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ funciones continuas para la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

donde $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Suponiendo que $B(t)$ y $C(t)$ son simétricas, se tiene que la matriz $L(t)$ de este sistema pertenece a $\mathsf{sp}(2n)$.

2.1.1. **Definición.** El sistema (2.1) es llamado *desconjugado en $R \subset \mathbb{R}$* si para cada solución $(x(t), y(t))$ no idénticamente nula, el vector $x(t)$ se anula a lo más una vez en R.

En ocasiones se acostumbra pensar el sistema (2.1) como:

$$\begin{bmatrix} H' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

donde $H, V : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Advierta que $(H(t), V(t))$ es una solución de (2.2) si y sólo si $x(t) = H(t)c$ y $y(t) = V(t)c$ forman una solución de (2.1) para todo vector $c \in \mathbb{R}^n$.

Defínanse los subespacios *vertical* $\mathcal{V} := \{0\} \times \mathbb{R}^n$ y *horizontal* $\mathcal{H} := \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Sea $\Phi : \mathbb{R} \to M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ la solución de $\Phi' = L(t)\Phi$ que satisface $\Phi(0) = I$. Nos interesa buscar una familia $E(t), t \in \mathbb{R}$ de subespacios lagrangianos de $\mathbb{R}^{2n}$ que sea Φ-invariante, es decir, $\Phi(t)E(0) = E(t)$.

El resultado principal de este capítulo es el siguiente:

2.1.2. **Teorema.** *Si el sistema* (2.1) *es deconjugado, los siguientes límites existen*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(0) &= \lim_{t\to+\infty} \Phi(t)^{-1}(\mathcal{V}), \\ \mathbb{F}(0) &= \lim_{t\to-\infty} \Phi(t)^{-1}(\mathcal{V}), \end{aligned}$$

y son subespacios lagrangianos transversales al subespacio vertical. Llamaremos subespacios de Green a estos espacios.

2.1.3. **Observaciones.**

1. Toda solución de (2.2) está dada en la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} H(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \begin{bmatrix} H(0) \\ V(0) \end{bmatrix}.$$

2. Escribiendo

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} * & G(t) \\ * & U(t) \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

consideremos

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} G(t) & H(t) \\ U(t) & V(t) \end{bmatrix} = \Phi(t) \cdot \begin{bmatrix} 0 & H(0) \\ I & V(0) \end{bmatrix}.$$

Del hecho de que $\Phi(t) \in S_p(2n)$ se obtiene:

$$\psi(t)^T J \psi(t) = \psi(0)^T \Phi^T J \Phi \psi(0) = \psi(0)^T J \psi(0), \tag{2.4}$$

y así

$$G^T V - U^T H = -H(0), \quad G^T U - U^T G = 0, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

3. Supongamos que $\det G(t) \neq 0$ para $t \neq 0$,, entonces para $t \neq 0$ existe $X(t)$ tal que $H = GX$. Como $G^T V - U^T H = -H(0)$, se sigue que $V = (G^T)^{-1}(-H(0) + U^T G X)$.

   Ya que $U^T G$ es simétrica, $V = -(G^T)^{-1} H(0) + UX$. Derivando $H = GX$, como $G' = AG + BU$ y $H' = AH + BV$, se tiene que $GX' = -B(G^T)^{-1} H(0)$, obteniendo:

$$X(t) = X(c) + \int_t^c G^{-1} B (G^T)^{-1} H(0) \tag{2.5}$$

$$H(t) = G(t) G(c)^{-1} H(c) + Z_c(t) H(0) \tag{2.6}$$

donde

$$Z_c(t) = G(t) \int_t^c G^{-1} B (G^T)^{-1}.$$

4. De la definición de $Z_c(t)$ deducimos que $Z_c(c) = 0$ y de (2.6) calculamos que $\lim\limits_{t \to 0} Z_c(t) = I$. Además

$$\dot{Z}_c(t) = A Z_c + B(U G^{-1} Z_c - (G^T)^{-1}) \quad \forall\, t \neq 0 \tag{2.7}$$

Para $\varepsilon > 0$ se define

$$Z_{-\varepsilon}(t) := G(t) N_c + Z_c(t)$$

donde $N_c := -G^{-1}(-\varepsilon) Z_c(-\varepsilon)$. Inmediatamente se cumple que $Z_{-\varepsilon}(-\varepsilon) = 0$, $Z_{-\varepsilon}(0) = I$, y como $\dot{Z}_{-\varepsilon}(t) = G(t)' N_c + \dot{Z}_c(t)$, también

$$\dot{Z}_{-\varepsilon}(t) = A Z_{-\varepsilon} + B(U G^{-1} Z_{-\varepsilon} - (G^T)^{-1}) \quad \forall\, t \neq 0 \tag{2.8}$$

2.2. Construcción de los subespacios de Green

Para la construcción de estos subespacios se debe suponer que el sistema (2.2) es desconjugado en $\mathbb{R}$, por lo que existe una matriz simétrica $S(t)$ tal que $U(t) = S(t)G(t)$ para toda $t \neq 0$. Entonces $U' = S'G + SG'$, y sustituyendo los valores de G' y U', se obtiene

$$S' = C - A^T S - SBS - SA \tag{2.9}$$

que se conoce como ecuación de Ricatti.

2.2.1. Pretensión. La matriz $G^{-1}(t)Z_c(t)$ es simétrica para toda $t \neq 0$. En particular, N_c es simétrica para todo $c > 0$.

Demostración:
Sustituyendo $U = SG$ en (2.7) y usando la ecuación de Ricatti, veamos que

$$\begin{aligned} h_c(t) &= Z_c(t) \\ v_c(t) &= S(t)Z_c(t) - (G^T(t))^{-1} \end{aligned}$$

es una solución del sistema (2.2) para toda $t \neq 0$.

En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= S'Z_c + S\dot{Z}_c + (G^T)^{-1}(G')^T(G^T)^{-1} \\ &= CZ_c - A^T(SZ_c - (G^T)^{-1}) - S(BSZ_c + AZ_c - B(G^T)^{-1}) + S\dot{Z}_c \\ &= Ch_1 - A^T v_1. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} h_2(t) &= Z_{-\varepsilon}(t) \\ v_2(t) &= S(t)Z_{-\varepsilon}(t) - (G^T(t))^{-1} \end{aligned}$$

es una solución del sistema (2.2) para toda $t \neq 0$.

Calculando, $\omega((h_c, v_c), (h_2, v_2)) = -(G^{-1}Z_c)^T + G^{-1}Z_c + N_c$ para toda $t \neq 0$. Evaluando para $t = -\varepsilon$, obtenemos $-(G^{-1}Z_c)^T(-\varepsilon) + G^{-1}Z_c(-\varepsilon) + N_c = N_c^T$. Como se preserva la forma simpléctica,

$$-(G^{-1}Z_c)^T + G^{-1}Z_c + N_c = N_c^T \tag{2.10}$$

para toda $t \neq 0$. Evaluando ahora para $t = c$, se tiene que, $N_c = N_c^T$. Usando de nuevo (2.10) se tiene que $G^{-1}Z_c = (G^{-1}Z_c)^T$. ☐

2.2.2. **Definición.** Sea $K \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica. K es *positiva* si y sólo si para toda $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, $x^T K x > 0$.

2.2.3. Pretensión. Si $B(t)$ es positiva para toda $t \in \mathbb{R}$, entonces N_c es positiva para toda $c > 0$.

Demostración:

Basta probar que N_c^{-1} es positiva, porque si $y^T N_c^{-1} y > 0$ con $y \neq 0$, entonces escribiendo $y = N_c x$, $x^T N_c N_c^{-1} N_c x > 0$.

$$\frac{d}{dt}(-Z_c^{-1}(t)G(t))\big|_{t=0} = Z_c^{-1}\dot{Z}_c Z_c^{-1} G - Z_c^{-1} G'\big|_{t=0} = -B(0).$$

Así, para toda $x \neq 0$ la función real $t \mapsto -x^T Z_c^{-1}(t)G(t)x$ es decreciente cerca de $t = 0$, pero $-Z_c^{-1}(0)G(0) = 0$. Por el resultado 2.2.1, la matriz $-Z_c^{-1}(t)G(t)$ es simétrica para toda $t < 0$ y positiva para $t < 0$ próxima a cero, en particular para $t = -\varepsilon$. Por lo tanto N_c^{-1} es positiva. □

2.2.4. **Definición.** Se define el orden parcial $\rhd$ en $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ escribiendo $K_1 \rhd K_2$ si y sólo si $B(0)^{-1}(K_1 - K_2)$ es positiva.

Recordemos que

$$\dot{Z}_c = -B(t)(G(t)^T)^{-1} + G'(t)\int_t^c G^{-1}B(G^T)^{-1}$$

consiguiendo así

$$\dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0) = B(0)\int_1^c G^{-1}B(G^T)^{-1}, \tag{2.11}$$

$$Z_d(t) - Z_c(t) = G(t)B(0)^{-1}(\dot{Z}_d(0) - \dot{Z}_c(0)), \tag{2.12}$$

con $0 < c < d$.

2.2.5. Pretensión.

1. $\lim_{c\to\infty} \dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0) = Q$ existe y es simétrica.
2. $\lim_{c\to\infty} Z_c(t) = D(t)$ existe (uniformemente en intervalos acotados de t) y

$$\begin{aligned} h(t) &= D(t) \\ v(t) &= S(t)D(t) - (G^T(t))^{-1} \qquad t \neq 0 \end{aligned}$$

es una solución del sistema (2.2) tal que $D(0) = I$, $\dot{D}(0) = Q + \dot{Z}_1(0)$ y $\det D(t) \neq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$.

Demostración:

1. Definamos la función

$$f_c(x) = x^T B(0)^{-1}[\dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)]x \quad c > 1.$$

Por (2.11), $B(0)^{-1}(\dot{Z}_d(0) - \dot{Z}_c(0))$ es positiva, de modo que si $c < d$, entonces

$$\dot{Z}_d(0) - \dot{Z}_1(0) \rhd \dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0),$$

es decir, $f_d(x) > f_c(x)$.

Por el resultado 2.2.3, N_c es positiva. Entonces

$$B(0)N_c + (\dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)) \rhd \dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0),$$

y como además $\dot{Z}_{-\varepsilon}(0) - \dot{Z}_c(0) = B(0)N_c$, se tiene que

$$\dot{Z}_{-\varepsilon}(0) - \dot{Z}_1(0) \rhd \dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)$$

para toda $c > 1$, es decir, $f_{-\varepsilon}(x) > f_c(x)$.

Como $c \mapsto f_c(x)$ es monótonamente creciente y acotada superiormente para toda $x \in \mathbb{R}^n$, se sigue que

$$\lim_{c\to\infty} f_c(x) = f(x)$$

existe para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

Además, $\dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0) = B(0)G(1)^{-1}Z_c(1)$ para $c > 1$, y así por el resultado 2.2.1 se cumple que $B(0)^{-1}[\dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)]$ es simétrica. Usando la identidad de polarización se define la forma bilineal simétrica

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \frac{1}{4}[f(x+y) - f(x-y)] \\ &= \lim_{c\to\infty} x^T B(0)^{-1}[\dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)]y \end{aligned}$$

Existe R simétrica tal que $g(x,y) = x^T Ry$. Por lo tanto, $Q = B(0)R$ es simétrica y es igual a $\lim_{c\to\infty} \dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)$.

2. Como $\lim_{c\to\infty} \dot{Z}_c(0) - \dot{Z}_1(0)$ existe, $\forall\, \eta > 0$, $\exists\, r$ tal que, si $c, d > r$ entonces $|\dot{Z}_d(0) - \dot{Z}_c(0)| < \eta$. De la ecuación(2.12), se deduce que

$$|Z_d(t) - Z_c(t)| < |G(t)||B(0)^{-1}|\eta.$$

Para intervalos acotados de t, existe $M > 0$ tal que $|G(t)| < M$ para toda t en ese intervalo. Por lo tanto $Z_c(t)$ es uniformemente de Cauchy, y así uniformemente convergente para intervalos acotados de t. Como $\lim_{c\to\infty} Z_c(t) = D(t)$, $(h(t), v(t))$ es una solución del sistema (2.2). Por el cuarto apartado de las observaciones 2.1.3, $D(0) = I$; y por el inciso anterior $\dot{D}(0) = Q + \dot{Z}_1(0)$.

□

Así, las hipótesis de que el sistema (2.2) sea desconjugado en $\mathbb{R}$, que $C(t)$ sea simétrica, y que $B(t)$ sea simétrica y positiva, implican que

$$\mathbb{E}(t) := \text{Ima} \begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \text{Graf}\ \mathbb{S}(t), \quad \mathbb{S}(t) = S(t) - (G^T)^{-1}D(t)^{-1},$$

es el límite de los subespacios $E_c(t) := \text{Ima} \begin{bmatrix} h_c(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$.

Observemos que $G^{-1}Z_c$ es simétrica por el resultado 2.2.1. Por lo tanto $\lim_{c\to\infty} G^{-1}Z_c = G^{-1}D$ es simétrica, y entonces $D^{-1}G$ es simétrica. Esto implica que $(G^T)^{-1}D^{-1} = (G^{-1})^T[D^{-1}G]G^{-1}$ es simétrica.

Ya que $\mathbb{S}(t) = S(t) - (G^T)^{-1}D(t)^{-1}$ es simétrica, por el lema 1.2.5, $\mathbb{E}(t)$ es un subespacio lagrangiano conocido como subespacios *"estable"* de Green. Tomando

Φ del lema 1.3.8, recordemos que la solución $(h(t), v(t))$ de (2.2) se puede escribir $(h(t), v(t)) = \Phi(t)(h(0), v(0))$, donde $v(0) := \lim_{t\to 0} v(t)$ es simétrica. Así,

$$\mathbb{E}(t) := \text{Ima}\begin{bmatrix} h(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \text{Ima}\ \Phi(t)\begin{bmatrix} h(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \Phi(t)\mathbb{E}(0).$$

Por lo tanto la familia $\mathbb{E}(t)$ es Φ-invariante.

Análogamente, considerando soluciones del sistema (2.2) con el tiempo en reversa, se obtienen los subespacios *"inestables"* de Green $\mathbb{F}(t)$. En este caso, para $c > 1$, $c \mapsto \dot{Z}_{-c}(0) - \dot{Z}_{-1}(0)$ es monótona decreciente y acotada inferiormente por $\dot{Z}_{\epsilon}(0) - \dot{Z}_{-1}(0)$. También obtenemos que $\mathbb{F}(t)$ es Φ-invariante.

2.2.6. **Proposición.** *Sean $A(t)$, $B(t) = B^T(t)$, $C(t) = C^T(t)$ continuas en $R \subset \mathbb{R}$ y $B(t)$ positiva. Sea $\Psi(t) = \Phi(t)\Phi(a)^{-1}$, donde $\Phi(t)$ es la transformación dada por el lema 1.3.8*

1. *Si R es un intervalo $[a, \delta[$, $\delta \leq \infty$, entonces* (2.1) *es desconjugado en R si y sólo si, existe E lagrangiano tal que $\Psi(t)E \cap \mathcal{V} = \{0\}$ para todo $t \in]a, \delta[$.*
2. *Si* (2.1) *es desconjugado en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que* (2.1) *es desconjugado en $[a - \epsilon, b + \epsilon]$.*
3. *Si R es un intervalo cerrado y acotado, o un intervalo abierto, entonces* (2.1) *es desconjugado en R si y sólo si, existe E lagrangiano tal que $\Psi(t)E \cap \mathcal{V} = \{0\}$ para todo t en R.*

Demostración:

1. Pongamos

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} G(t) & H(t) \\ U(t) & V(t) \end{bmatrix}, \quad \text{Ima}\begin{bmatrix} H(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = \Psi(t)\mathcal{V}. \tag{2.13}$$

Dada cualquier solución (x, y) de (2.1) que es vertical en $t = a$, hay un vector $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $x(t) = H(t)c$, $y(t) = V(t)c$. Si (2.1) es desconjugado en R, entonces $\det H(t) \neq 0$ para $a < t < \delta$, pues si existe un $c_0 \neq 0$ tal que $H(t)c_0 = 0$, entonces $x(t) = H(t)c_0$ se anula en $t = a$ y en $t = t_0$. Así el espacio lagrangiano deseado es $E = \mathcal{V}$.

Recíprocamente, sea E un subespacio lagrangiano con $\Psi(t)E \cap \mathcal{V} = \{0\}$. Sea $\Psi(t)E = \text{Ima}\begin{bmatrix} G(t) \\ U(t) \end{bmatrix}$, entonces $\det G(t) \neq 0$ para $a < t < \delta$. Definamos una solución de (2.2) por

$$\begin{aligned} Z_d(t) &= G(t)\int_t^d G^{-1}B(G^T)^{-1} \\ V_d(t) &= -UG^{-1}Z_d(t) - (G^T)^{-1}(t) \end{aligned}$$

Como B es positiva, $G^{-1}B(G^T)^{-1}$ también lo es, de aquí se sigue que $\det Z_d(t) \neq 0$ para $d < t < \delta$. Si $\big(x(t), y(t)\big) \neq 0$ es una solución de (2.1) que es vertical en

$t = d$, entonces debe ser de la forma $\big(x(t), y(t)\big) = \big(Z_d(t)c, V_d(t)c\big)$, de modo que $x(t)$ no se anula para $d < t < \delta$.

Falta mostrar que si $\big(x(t), y(t)\big) \neq 0$ es una solución de (2.1) tal que $x(a) = 0$, entonces $x(t) \neq 0$ para $a < t < \delta$. Para esto, basta probar que si $a < d < \delta$, enonces existe una solución $\big(H(t), V(t)\big)$ de (2.2) tal que $H(a) = 0$, $H^T V = V^T H$ y $\det H(t) \neq 0$ para $a < t \leq d$. Expresemos

$$G_1(t) = G(t)\big[-I - G^{-1}(t)Z_d(t)\big] \tag{2.14}$$

tal que $G_1(t), U_1(t) = B^{-1}(G_1' - AG_1)$ es una solución de (2.2) y $G_1^T U_1 = U_1^T G_1$. Ya que B es positiva, el factor $-I - G^{-1}(t)Z_d(t)$ de la fórmula (2.14) es negativo para $a < t \leq d$. Por lo tanto el $\det G_1(t) \neq 0$ para $a < t \leq d$.

Análogamente,

$$G(t) = G_1(t)\Big[-I - \int_d^t G_1^{-1}B(G_1^T)^{-1}\Big],$$

y por consiguiente,

$$\Big[-I + \int_d^t G^{-1}B(G^T)^{-1}\Big] \cdot \Big[-I - \int_d^t G_1^{-1}B(G_1^T)^{-1}\Big] = I.$$

Puesto que el primer factor es negativo para $a < t \leq d$, el segundo factor (que es el inverso del primero) es negativo. Definiendo $K_1 \succeq K_2$ si y sólo si $K_1 - K_2$ es positiva, tenemos que

$$P(t) := -\int_d^t G_1^{-1}B(G_1^T)^{-1} = \int_t^d G_1^{-1}B(G_1^T)^{-1}$$

es decreciente para $a < t \leq d$ y además $I \succeq P(t)$. De aquí se sigue que:

$$P(a) = \lim_{t\to a^+} P(t) = \int_a^d G_1^{-1}B(G_1^T)^{-1} \tag{2.15}$$

existe. Escribiendo

$$H(t) = G_1(t)\int_a^t G_1^{-1}B(G_1^T)^{-1}, \tag{2.16}$$

se tiene que $H(t), V(t) = B^{-1}(H' - AH)$ es una solución de (2.2) tal que $H^T V = V^T H$, $H(a) = 0$ y $\det H(t) \neq 0$, para $a < t \leq d$.

2. Si (2.1) es desconjugado en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $\Psi(t)\mathcal{V} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ para $a < t \leq b$. Por transversalidad, existe $\epsilon > 0$ tal que $\Psi(t)\mathcal{V} \cap \mathcal{V} = \{0\}$ para $a < t \leq b + \epsilon$. Por el primer inciso de esta proposición, usando $E(t) = \Psi(t)\mathcal{V}$, el sistema (2.1) es desconjugado en $a < t \leq b + \epsilon$. Por el mismo argumento, usando ahora que $E(t) = \Psi(b + \epsilon - t)\mathcal{V}$, se muestra que existe ϵ_0 tal que el sistema (2.1) es desconjugado para $a - \epsilon_0 \leq t \leq b + \epsilon$.

3. Si R es un intervalo cerrado $[a,b]$, podemos extender $A(t), B(t), C(t)$ continuamente sobre un intervalo $[a-\epsilon, b+\epsilon] \supset R$ tal que $B = B^T, C = C^T$ y $B(t)$ sea positiva. Si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeña, entonces (2.1) es desconjugado en $[a-\epsilon, b+\epsilon]$ si y sólo si es desconjugado sobre R. Ya que $[a,b] \subset [a-\epsilon, b+\epsilon[$, el caso $R = [a,b]$ de la proposición se sigue del primer inciso.

   Considere R abierto. El argumento usado en el caso $[a,\delta[$ muestra que si existe E lagrangiano tal que $\Psi(t)E \cap \mathcal{V} = \{0\}$, para $t \in R$, entonces (2.1) es desconjugado en R.

$\square$

2.2.7. **Proposición.** *Supongamos que existen $t_0 > 0$ y $k > 0$ tales que $\|S(t)\| < k$ y $\|\mathbb{S}(t)\| < k$ para toda $|t| > t_0$. , entonces para todo $R > 0$ existe $T = T(R) > 0$ tal que $|G(t)u| > R|v|$ para todo $|t| > T$ y todo $v \neq 0$.*

Demostración: Sea

$$M(t) := \int_t^{\infty} G^{-1}(s)B(s)\left(G^T(S)\right)^{-1} ds.$$

Como

$$Z_c(t) = G(t)\int_t^{c} G^{-1}(s)B(s)\left(G^T(S)\right)^{-1} ds$$

y $D(t) = \lim_{c\to\infty} Z_c(t)$, tenemos que $D(s) = G(s)M(s)$ para $s > 0$. Consideremos las soluciones $S(t)$, $\mathbb{S}(t)$ de la ecuación de Ricatti (2.9), luego

$$\mathbb{S}(t) - S(t) = -G^T(t)^{-1}M(t)^{-1}G(t)^{-1} \quad t > 0.$$

Para $|x| = 1$ y $t > t_0$,

$$|<M(t)^{-1}G(t)^{-1}x, G(t)^{-1}x>| \leq |<S(t)x, x>| + |<\mathbb{S}(t)x, x>| \leq 2k.$$

Sea $\lambda(t)$ el valor propio más grande de $M(t)$, $t > 0$. Ya que $M(t)$ es positiva, tenemos $\lambda(t) > 0$ y $\|M(t)\| = \lambda(t)$. Además,

$$2k \geq |<M(t)^{-1}G(t)^{-1}x, G(t)^{-1}x>| \geq \frac{1}{\lambda(t)}|G(t)^{-1}x|^2 ,$$

$$|G(t)^{-1}x| \leq \left(2k\|M(t)\|\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, |x| = 1\,,\ t > t_0\,.$$

, entonces si $|v| = 1$, tenemos que

$$|G(t)v| \geq \frac{1}{\|G(t)^{-1}\|} \geq \frac{1}{\left(2k\|M(t)\|\right)^{\frac{1}{2}}} \quad t > t_0$$

Ya que $M(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$, dado $R > 0$ existe $T > t_0$ tal que $\sqrt{2k\|M(t)\|} < 1/R$ para todo $t > T$ y entonces $|G(t)v| > R$ para todo $t > T$ y $|v| = 1$. $\square$

CAPíTULO 3

Sistemas hamiltonianos sin puntos conjugados

3.1. El haz cotangente

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Una función lineal sobre el espacio tangente a M en un punto q se llama vector cotangente a M en q. El conjunto de todos los vectores cotangentes a M en q forma un espacio vectorial de dimensión n, dual al espacio tangente T_qM. Este espacio dual se denota por T_q^*M y se llama espacio cotangente de M en q.

La unión de los espacios cotangentes a la variedad en todos sus puntos es llamado haz cotangente de M y se denota por T^*M. Una $1-$forma en M, es una función $\omega : M \to T^*M$ tal que para toda $q \in M$, $\omega_q \in T_q^*M$. Por ejemplo, si $f : M \to \mathbb{R}$, entonces df es una $1-$forma en M.

Si $(q_1, \ldots, q_n)$ es una elección de coordenadas locales en M, entonces las $1-$formas $dq_1, \ldots, dq_n$ forman, en cada punto de la vecindad coordenada, una base para el espacio cotangente y definen una colección de coordenadas locales en T^*M mediante

$$(q_1, \ldots, q_n, v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} v_i dq_i$$

Así, T^*M tiene una estructura natural de variedad diferenciable con dimensión $2n$. Hay una proyección natural $\pi : T^*M \to M$ definida enviando cada 1-forma en T_qM al punto q. La proyección π es diferenciable y suprayectiva. La preimagen de un punto $q \in M$ bajo π es el espacio cotangente T_q^*M.

3.1.1. Definición. Sea M^{2n} una variedad diferenciable de dimensión par. Una estructura simpléctica sobre M^{2n} es una 2-forma diferencial ω sobre M^{2n}, la cual es cerrada, o sea $d\omega = 0$, y no degenerada. La pareja (M^{2n}, ω) es llamada variedad simpléctica.

Un ejemplo es $\mathbb{R}^{2n}$ con coordenadas $(q,p) = (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ y la forma simpléctica ω_0 se define

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i.$$

3.1.2. Proposición. *El haz cotangente T^*M tiene una estructura simpléctica natural. Esta estructura está dada localmente por la fórmula*

$$\omega = dq \wedge dp \tag{3.1}$$

Demostración:

Primero definamos una 1-forma distinguida sobre T^*M. Sea $v \in T_p(T^*M)$, con $p \in T_q^*M$. Con la derivada $d\pi : T(T^*M) \to TM$ de la proyección natural $\pi : T^*M \to M$, se obtiene un vector $d\pi(v) \in T_qM$. Ahora, definamos una 1−forma Θ sobre T^*M por la relación $\Theta(v) = p(d\pi(v))$. En las coordenadas locales descritas arriba, esta forma es $\Theta = pdq$. Si $\omega := -d\Theta$, entonces $\omega = dq \wedge dp$. Por lo tanto ω es una 2−forma cerrada y no degenerada.

□

3.1.3. **Definición.** Sean (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \to \mathbb{R}$ una función C^3. El campo vectorial X determinado por la condición

$$\omega(X, v) = dH(v)\,, \tag{3.2}$$

se conoce como el campo vectorial hamiltoniano y H es su función energía.

3.1.4. **Proposición.** *Si ω es la estructura simpléctica natural de T^*M, el campo hamiltoniano X se escribe en coordenadas como*

$$X = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right) \tag{3.3}$$

donde $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \dfrac{\partial H}{\partial p_n}\right)$ *y* $\dfrac{\partial H}{\partial q} = \left(\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots, \dfrac{\partial H}{\partial q_n}\right)$.

Demostración:

Definamos X por $X = \left(\dfrac{\partial H}{\partial p}, -\dfrac{\partial H}{\partial q}\right)$ y verifiquemos que $\omega(X, v) = dH(v)$.

Por construcción, $dq_i(X) = \dfrac{\partial H}{dp_i}$ y $dp_i(X) = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$.

Así,

$$\begin{aligned}
\omega(X, v) &= \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i(X, v) \\
&= \sum_{i=1}^{n} dq_i(X)dp_i(v) - \sum_{i=1}^{n} dq_i(v)dp_i(X) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i(v) + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i(v) = dH(v).
\end{aligned}$$

□

Dados una variedad $\mathcal{M}$ y un campo vectorial Y en $\mathcal{M}$, para cada $p \in \mathcal{M}$ sea I_p el intervalo maximal donde hay una curva integral $c : I_p \to \mathcal{M}$ de Y con $c(0) = p$ y sea $\mathcal{D} = \{(p, t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R} : t \in I_p\}$. Se puede demostrar que $\mathcal{D}$ es abierto en $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$ y que existe una única transformación $\varphi : \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ tal que $t \mapsto \varphi(p, t)$ es una curva integral en p, para todo $p \in \mathcal{M}$. Esta transformación φ se conoce como la *integral* de

Y, la curva $t \mapsto \varphi(p,t)$ es la curva integral maximal de Y en p. El campo vectorial Y es *completo* si $\mathcal{D} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$ y en tal caso, φ es llamado el flujo de Y.

En lo sucesivo, X es el campo vectorial hamiltoniano asociado a una función H.

3.1.5. **Proposición.** *Si $c(t)$ es una curva integral para X, entonces $H(c(t))$ es constante en t.*

Demostración:
Por la regla de la cadena y (3.2), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}H(c(t)) &= dH(c(t)) \cdot \dot{c}(t) \\
&= dH(c(t)) \cdot X(c(t)) \\
&= \omega\big(X(c(t)), X(c(t))\big) = 0
\end{aligned}$$

□

3.1.6. **Definición.** Sea M una variedad de Riemann, un hamiltoniano $H : T^*M \to \mathbb{R}$ es:

- **convexo**, si en todo punto de T^*M la matriz hessiana H_{pp} es positiva definida;
- **superlineal**, si

$$\lim_{|p|\to\infty} \frac{H(q,p)}{|p|} = +\infty.$$

Los conjuntos de nivel $\Sigma = H^{-1}\{c\}$ se conocen también como niveles de energía de H. Si M es compacta y el hamiltoniano superlineal, entonces los niveles de energía son subvariedades compactas. Además, como el campo vectorial hamiltoniano X es Lipschitz, las soluciones están definidas para todo $\mathbb{R}$. La afirmación anterior se sigue de un resultado de la teoría de ecuaciones diferenciales, que se puede encontrar en [AM], (teorema 2.1.18, página 70).

Como X es completo, definimos la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times T^*M \to T^*M$ conocida como el flujo hamiltoniano de H, y denotaremos $\varphi_t := \varphi(t,\cdot)$ para este flujo hamiltoniano sobre T^*M.

3.1.7. **Ejemplo.** Dadas una función $U : M \to \mathbb{R}$, una métrica riemanniana $<,>$ y una 1-forma ω en M, consideremos el hamiltoniano electromagnético

$$H(x,p) = \frac{1}{2}|p - \omega(x)|^2 + U(x). \tag{3.4}$$

Las ecuaciones de Hamilton son

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= < p - \omega(x), \cdot > \\
\frac{D}{dt}(p - \omega(x)) &= d\omega(x)(\dot{x}, \cdot) - dU(x).
\end{aligned}$$

donde $\frac{D}{dt}$ es la derivada covariante para la conexión de Levi-Civitta definida por la métrica riemanniana. La función U y su derivada dU representan el potencial y campo eléctricos, mientras que $d\omega$ representa el campo magnético.

3.1.8. Definición. Si π es la proyección canónica, $\pi : T^*M \to M$, y $x \in T^*M$,

- se entenderá por **subespacio vertical** a
$$V(x) = \text{Nuc}\,(d\pi_x) = \{v \in T_xT^*M \mid d\pi_x v = 0\},$$
- el punto x se llamará **desconjugado,** si
$$d\varphi_t\big(V(x)\big) \cap V(\varphi_t(x)) = \{0\}\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

La órbita de un punto $x \in T^*M$, es el conjunto $\varphi_t(x) = \{(p,q) \in T^*M \mid (p,q) = \varphi_t(x)\ \forall\, t \in \mathbb{R}\}$ y se nombra desconjugada si todo punto $(p,q) \in \varphi_t(x)$ es desconjugado.

En adelante, supondremos que $M \subset \mathbb{R}^N$ y por consiguiente $T^*M \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N*}$. Observe que $T_{(q,p)}(T^*M) = T_qM \times T_p^*(T_qM) \cong T_qM \times T_q^*M$; así, el subespacio vertical es $V(q,p) = \{0\} \times T_q^*M$ y el subespacio horizontal es $\mathcal{H}(q,p) = T_qM \times \{0\}$.

Sea $U \subset \mathbb{R}^N$ una vecindad tubular de M, denotemos con $\nu : U \to M$ la proyección canónica, con $\rho : \mathbb{R}^N \to M$ una extensión suave de ν, y con $\iota : M \to U$ a la inclusión canónica. Sean $x \in \mathbb{R}^N$, $y \in \mathbb{R}^{N*}$, observe que la función $y \circ d\iota_{\rho(x)} : T_{\rho(x)}M \to \mathbb{R}$, es un elemento de $T^*_{\rho(x)}M$. La extensión $\underline{\text{H}} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N*} \to \mathbb{R}$ del hamiltoniano H, se define
$$\underline{\text{H}}(x,y) := H(\rho(x), y \circ d\iota_{\rho(x)})\,.$$
Recordemos que el campo vectorial X es una aplicación, de T^*M a $T(T^*M)$, en la que cada $\theta \in T^*M$ se le asocia un $X(\theta) \in T_\theta(T^*M) \subset T_\theta(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*})$; y se logró escribir $X(\theta) = (H_p, -H_q)$, donde

$$\begin{aligned} H_p &= D_2\underline{\text{H}}\big|_{T_q^*M} \\ H_q &= D_1\underline{\text{H}}\big|_{T_qM} \end{aligned}$$

3.2. Los haces de Green

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado:

3.2.1. Teorema. *Supóngase que la órbita de $\theta \in T^*M$ es desconjugada y $H(\theta) = c$ es un valor regular de H. Entonces existen dos subhaces lagrangianos φ_t−invariantes $\mathbf{E}, \mathbf{F} \subset T(T^*M)$ a lo largo de la órbita de θ dados por*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta) &= \lim_{t\to+\infty} d\varphi_{-t}\big(V(\varphi_t(\theta))\big) \\ \mathbf{F}(\theta) &= \lim_{t\to+\infty} d\varphi_t\big(V(\varphi_{-t}(\theta))\big) \end{aligned}$$

Además, $\mathbf{E}(\theta) \cup \mathbf{F}(\theta) \subset T_\theta\Sigma$, $\mathbf{E}(\theta) \cap V(\theta) = \mathbf{F}(\theta) \cap V(\theta) = \{0\}$ *y* $\langle X(\theta) \rangle \subseteq \mathbf{E}(\theta) \cap \mathbf{F}(\theta)$, *donde* $X(\theta) = (H_p, -H_q)$ *es el campo vectorial hamiltoniano y* $\Sigma = H^{-1}\{c\}$.

Sea φ_t el flujo de X, por lo que la ecuación de Jacobi del hamiltoniano es:

$$\frac{d}{dt} D\varphi_t(\theta) = \begin{bmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{bmatrix} D\varphi_t(\theta) \quad . \tag{3.5}$$

Sean $\gamma(t) = \varphi_t(\theta) = (q(t), p(t))$ una curva integral de X y $g(t) : \mathbb{R}^n \to T_{q(t)}M$ una familia diferenciable de isometrías; obteniendo $g^*(t) : T^*_{q(t)}M \to \mathbb{R}^{n*}$. Defínase $\Gamma(t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \to T_{q(t)}M \times T^*_{q(t)}M \cong T_{\gamma(t)}(T^*M)$, como

$$\Gamma(t) := \begin{bmatrix} g(t) & 0 \\ 0 & g^*(t)^{-1} \end{bmatrix} .$$

El siguiente diagrama define una curva de simplectomorfismos $\Phi(t)$:

$$\begin{tikzcd} T_\theta(T^*M) \arrow[r, "d\varphi_t(\theta)"] & T_{\gamma(t)}(T^*M) \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \arrow[u, "\Gamma(0)"] \arrow[r, "\Phi(t)"'] & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \arrow[u, "\Gamma(t)"'] \end{tikzcd}$$

Sea $\mathrm{F}(t) = \Phi'(t)\Phi(t)^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathsf{sp}(2n)$, es decir, $\Phi'(t) = \mathrm{F}(t)\Phi(t)$. En el diagrama se ve que $\Gamma(t)\Phi(t) = d\varphi_t(\theta)\Gamma(0)$. Derivando y utilizando la ecuación de Jacobi (3.5)

$$\begin{aligned} \Gamma'(t)\Phi(t) + \Gamma(t)\mathrm{F}(t)\Phi(t) &= \begin{bmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{bmatrix} d\varphi_t(\theta)\Gamma(0) \\ &= \begin{bmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{bmatrix} \Gamma(t)\Phi(t) \end{aligned}$$

y entonces

$$\mathrm{F}(t) = \Gamma(t)^{-1} \begin{bmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{bmatrix} \Gamma(t) - \Gamma(t)^{-1}\Gamma'(t),$$

$$\mathrm{F}(t) = \begin{bmatrix} g^{-1}H_{pq}g - g^{-1}\dfrac{dg}{dt} & g^{-1}H_{pp}g^{*-1} \\ -g^*H_{qq}g & -g^*H_{qp}g^{*-1} - g^*\dfrac{d}{dt}g^{*-1} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Por lo tanto; $B = g^{-1}H_{pp}g^{*-1}$, es decir, B es positiva si y sólo si H_{pp} lo es.

Sea $\mathcal{V} := \{0\} \times R^{n*}$, y observemos que

$$d\varphi_t^{-1}\big(V(\varphi_t(\theta))\big) = d\varphi_t^{-1}(\theta)\Gamma(t)\mathcal{V} = \Gamma(0)\Phi(t)^{-1}\mathcal{V} \tag{3.7}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}(\theta) = \lim_{t\to+\infty} d\varphi_t^{-1}\big(V(\varphi_t(\theta))\big) = \Gamma(0)\lim_{t\to+\infty}\Phi(t)^{-1}\mathcal{V} = \Gamma(0)\mathbb{E}(0) \tag{3.8}$$

Como B y C son simétricas, por la la construcción de los subespacios de Green hecha en la subsección 2.2, podemos concluir que el límite anterior existe. Análogamente,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\theta) = \lim_{t\to+\infty} d\varphi_t\big(V(\varphi_{-t}(\theta))\big) &= \lim_{t\to-\infty} d\varphi_t^{-1}\big(V(\varphi_t(\theta))\big)\\ &= \Gamma(0)\lim_{t\to-\infty}\Phi(t)^{-1}\mathcal{V} = \Gamma(0)\mathbb{F}(0)\end{aligned}$$

que también se sabe que existe.

Obsérvese que

$$\mathbf{E}(\varphi_s(\theta)) = \lim_{t\to+\infty} d\varphi_t^{-1}\big(V(\varphi_{t+s}(\theta))\big) = d\varphi_s\mathbf{E}(\theta) \tag{3.9}$$

$$= \Gamma(s)\Phi(s)\mathbb{E}(0) = \Gamma(s)\mathbb{E}(s) \tag{3.10}$$

y analogamente para $\mathbf{F}$

3.2.2. **Ejemplo.** Se define la equivalencia $\sim$ en $\mathbb{R}^2$ mediante

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_2 - x_1 \in \mathbb{Z},\ y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}.$$

El cociente $\mathbb{R}^2/\sim$ se conoce como el toro plano $\mathbb{T}^2$. Si se tiene el hamiltoniano $H(q,p) = \frac{1}{2}|p|^2$, donde $q = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $p \in T_q^*\mathbb{T}^2$. Se tiene el sistema:

$$\begin{bmatrix}\dot q\\ \dot p\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ p\end{bmatrix}.$$

La linealización del campo a lo largo de cualquier trayectoria satisface la ecuación de Jacobi:

$$\begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$

con el flujo

$$D\varphi_t(d,c) = \begin{bmatrix}ct + d\\ c\end{bmatrix}.$$

Observe que $ct + d$ sólo se anula en un valor de t, por lo que no hay puntos conjugados. La solución que al tiempo T se hace vertical es aquella que tiene como condición inicial:

$$\begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d\\ -d/T\end{bmatrix},$$

tomando los límites cuando $T \to \pm\infty$ se obtienen los haces de Green, que coinciden ambos con el espacio horizontal.

3.2.3. Ejemplo. Sea S una superficie con una métrica riemanniana $<,>$. Utilizando la metrica para identificar TM con T^*M, consideremos el hamiltoniano $H(x,v) = \frac{1}{2} < v, v >$. Las ecuaciones de Hamilton se reducen a la ecuación de las curvas geodésicas

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = 0,$$

La ecuación de Jacobi a lo largo de la geodésica γ, se reduce a

$$\frac{D^2Y}{dt^2} + R(\dot{\gamma}(t), Y(t))\dot{\gamma}(t) = 0 \tag{3.11}$$

Un campo Y que satisface (3.11) es llamado campo de Jacobi a lo largo de γ.

Sea N un campo paralelo a lo largo de la geodésica γ y perpendicular a ella. Separemos los campos de Jacobi en sus componente tangente a la geodésica, $a(t)\dot{\gamma}$, y perpendicular a ella, $J(t)N$. Si en $\gamma(t)$ la curvatura es negativa, es decir, igual a $-K^2$, se tienen las ecuaciones:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = 0 \tag{3.12}$$

$$\frac{d^2J}{dt^2} = K^2J. \tag{3.13}$$

Si K es constante, las soluciones de (3.12) son

$$\begin{bmatrix} a(t) \\ J(t) \\ a'(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} bt + c \\ b_1e^{Kt} + c_1e^{-Kt} \\ b \\ b_1Ke^{Kt} - c_1Ke^{-Kt} \end{bmatrix}$$

Observe que $bt + c$ y $b_1e^{Kt} + c_1e^{-Kt}$ sólo se anulan en un valor de t, por lo que no hay puntos conjugados. La solución que al tiempo T se hace vertical es aquella que tiene como condición inicial:

$$\begin{bmatrix} a(0) \\ J(0) \\ a'(0) \\ J'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c_1 - c_1e^{-2KT} \\ -c/T \\ -Kc_1 - c_1Ke^{-2KT} \end{bmatrix}.$$

Tomando el límite cuando $T \to \infty$, se obtiene el espacio de Green "estable" $\mathbb{E} = \{(c,\ c_1,\ 0,\ -Kc_1) : c, c_1 \in \mathbb{R}\}$. Analogamente se obtiene el espacio de Green "inestable" $\mathbb{F} = \{(c,\ b_1,\ 0,\ Kb_1) : c, b_1 \in \mathbb{R}\}$.

Volvamos a la demostración del Teorema 3.2.1.

Considérese E^* un subespacio lagrangiano de $T_\theta T^*M$. Supóngase que para t en algún intervalo $]-\epsilon, \epsilon[$ tenemos que

$$d\varphi_t(E^*) \cap V(\varphi(t)) = \{0\}. \tag{3.14}$$

El subespacio $E = \Gamma(0)^{-1}E^*$ es lagrangiano y aplicando $\Gamma(t)^{-1}$ a (3.14) tenemos que

$$\Phi(t)(E) \cap \mathcal{V} = \{0\}$$

y así $\Phi(t)(E) = \text{Graf } S(t)$ donde $S(t)$ es una solución de la ecuación de Ricatti (2.9). Si se define $\hat{S}(t) := g^*(t)^{-1}S(t)g(t)^{-1}$, $\hat{S}$ satisface la ecuación de Ricatti:

$$\hat{S}' + \hat{S}H_{pq} + \hat{S}H_{pp}\hat{S} + H_{qp}\hat{S} + H_{qq} = 0 \tag{3.15}$$

Como $g(t)$ y por consiguiente $g^*(t)$ son isometrías, $\|\hat{S}(t)\| = \|S(t)\|$.

$$\begin{tikzcd} T_{q(t)}M \arrow[r, "\hat{S}(t)"] & T^*_{q(t)}M \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "g(t)"] \arrow[r, "S(t)"'] & \mathbb{R}^{n*} \arrow[u, "g^*(t)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Sea $\begin{bmatrix} G(t) \\ U(t) \end{bmatrix}$ la solución del sistema (2.2)

$$\begin{bmatrix} H' \\ V' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(t) & B(t) \\ C(t) & -A^T(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ V \end{bmatrix}$$

tal que $G(0) = 0$ y $U(0) = I$. Sea $S_0(t)$ la solución de la ecuación de Ricatti (2.9) dada por $U(t) = S_0(t)G(t)$. Defínase $Y(t) := g(t)G(t)g^*(0)$,

$$\begin{tikzcd} T^*_{q(t)}M \arrow[r, "Y(t)"] \arrow[d, "g^*(0)"'] & T_{q(t)}M \\ R^{n*} \arrow[r, "G(t)"'] & R^n \arrow[u, "g(t)"'] \end{tikzcd} , \tag{3.16}$$

entonces $\dot{Y} = (H_{pq} + H_{pp}\hat{S}_0)Y$, $Y(0) = 0$ y $\dot{Y}(0) = H_{pp}$. Además, considérese $\hat{Z}_c(t) := g(t)Z_c(t)g(0)^{-1}$.

Como $\mathbb{E} = \text{Graf } \mathbb{S}_\theta = \text{Ima} \begin{bmatrix} I \\ \mathbb{S}_\theta \end{bmatrix}$, obtenemos que

$$\mathbf{E}(\varphi_t(\theta)) = \Gamma(t)\mathbb{E}(t) = \text{Ima} \begin{bmatrix} g(t) \\ g(t)^{*-1}\mathbb{S}_\theta(t) \end{bmatrix} = \text{Graf } \hat{\mathbb{S}}_\theta(t) \tag{3.17}$$

Por lo tanto es conveniente definir $\mathbf{S}(\varphi_t(\theta)) = \hat{\mathbb{S}}_\theta(t)$.

3.2.4. **Lema.** *La función $w(t) = R\coth(Rt - d)$, con $R > 0$ satisface:*

1. $\dot{w} + w^2 - R^2 = 0$
2. $\dot{w} < 0$, $w(-t + \frac{d}{R}) = -w(t + \frac{d}{R})$
3. $$\lim_{t\to\infty} w(t) = R\,, \quad \lim_{t\to-\infty} w(t) = -R$$

4.

$$\lim_{t\to\frac{d}{R}^+} w(t) = +\infty \ , \qquad \lim_{t\to\frac{d}{R}^-} w(t) = -\infty$$

3.2.5. Proposición. *Cualquier solución simétrica*

$$\hat{S}(\theta,t) : T_{\pi\varphi_t(\theta)}M \to T^*_{\pi\varphi_t(\theta)}M$$

de la ecuación de Ricatti definida para $t > 0$, está acotada uniformemente en $t \geq 1$, es decir, existe $A > 0$ tal que:

$$||\hat{S}(\theta,t)|| < A \quad \forall\, \theta \in \Sigma\,, \quad t > 1$$

Demostración:
Por el teorema espectral, basta probar, que $<\hat{S}(\theta,t)x, x>$ está acotada uniformemente para $||x|| = 1$ y $t > 1$.

Ya que $H^*_{pq} = H_{qp}$ y $\hat{S}^* = \hat{S}$, tenemos que

$$\dot{\hat{S}} + \hat{S}^* H_{pp}\hat{S} + H^*_{pq}\hat{S} + \hat{S}^* H_{qp} + H_{qq} = 0$$

Sean $K_0 := (H_{pp})^{-1}H_{pq}$ y $V_\theta(t) := \hat{S}(\theta,t) + K_0(\varphi_t(\theta))$. Entonces .

$$\dot{V} + V^* H_{pp} V = K_0^* H_{pp} K_0 + \dot{K}_0 - H_{qq}.$$

Ahora, defínase $K := H_{qq} - K_0^* H_{pp} K_0 - \dot{K}_0$, así

$$\dot{V} + V^* H_{pp} V + K = 0 \quad .$$

Puesto que $K_0(\theta)$ y $K(\theta)$ son continuas, están acotadas uniformemente sobre el nivel de energía. Por lo tanto basta probar que $<x, V_\theta x>$ está acotada uniformemente sobre $t > 1$ y $\theta \in \Sigma$. Observe que $V_\theta(t)$ no es necesariamente simétrica.

Como $<y, H_{pp}y>$ es positivo y Σ es compacta, existe un entero M tal que:

$$<y, H_{pp}(\theta)y> \geq \frac{1}{M}||y||^2 \quad \forall\, \theta \in \Sigma\ . \tag{3.18}$$

Escójase $R > 0$ tal que:

$$|<x, K(\theta)x>| \leq MR^2 \quad \forall\, \theta \in \Sigma, \quad ||x|| = 1\ . \tag{3.19}$$

Observemos que $|<x, V_\theta(t)x>| \leq MR\coth(R)$ para todo $\theta \in \Sigma$. Sean $\theta_0 \in \Sigma$, $||x|| = 1$. Escribamos $V(t) := V_{\theta_0}(t)\,, \quad H_{pp}(t) := H_{pp}(\varphi_t(\theta_0))$.

1. Supongamos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$<x, V(t_0)x> > MR\coth(R)$$

Existe $d_0 \in \mathbb{R}$ tal que $MR\coth(Rt_0 - d_0) = <x, V(t_0)x>$. Observe que $d_0 > 0$ y $t_0 > \dfrac{d_0}{R} > 0$. Escriba $w(t) := R\coth(Rt - d_0)$ entonces $w(t)$ es solución de $\dot{w} + w^2 - R^2 = 0$ para $t > \dfrac{d_0}{R}$. En particular $M\dot{w} + Mw^2 - MR^2 = 0$.

Sea $f(t) = <x, V(t)x> - Mw(t)$, entonces $f(t_0) = 0$ y

$$f'(t) + \left(<V(t)x, H_{pp}V(t)x> - Mw(t)^2\right) + \left(<x, K(t)x> + MR^2\right) = 0,$$

Usando la desigualdad de Schwartz y (3.18),

$$\begin{aligned} Mw^2(t_0) &= \frac{1}{M}(Mw(t_0))^2 = \frac{1}{M}\left(<x, V(t_0)x>\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{M}\|V(t_0)x\|^2 \leq <V(t_0)x, H_{pp}(t_0)V(t_0)x> \quad . \end{aligned}$$

Lo anterior y (3.19), implican que $f'(t_0) < 0$. El mismo argumento puede aplicarse para cada tiempo t tal que $f(t) = 0$.

Por lo tanto $<x, V(t)x> \leq Mw(t)$ para todo $t > t_0$ y $<x, V(t)x> \geq Mw(t)$ para toda $\frac{d_0}{R} < t < t_0$. Entonces

$$\lim_{t \to \frac{d_0}{R}^+} <x, V(t)x> \geq \lim_{t \to \frac{d_0}{R}^+} Mw(t) = +\infty$$

Ya que $\frac{d_0}{R} > 0$, se contradice la existencia de $V(t)$ para $t > 0$.

Por lo tanto, tal t_0 no existe y $<x, V(t)x> \leq MR\coth(R)$ para todo $t > 0$.

2. Ahora supongamos que existe $t_1 \in \mathbb{R}$, $\|x\| = 1$ tal que

$$<x, V(t_1)x> < -MR\ .$$

Comparemos $<x, V(t)x>$ con $Mw_1(t)$, donde $w_1(t) := R\coth(Rt - d_1)$ es tal que $Mw_1(t_1) = <x, V(t_1)x>$. Observe que $w_1(t)$ está definida para $t < \frac{d_1}{R}$ y en este caso $d_1 > 0$ y $\frac{d_1}{R} > t_1 > 0$. Un argumento similar al del inciso anterior muestra que $<x, V(t)x> \leq Mw_1(t_1)$ para $t_1 \leq t < \frac{d_1}{R}$.

Ya que

$$\lim_{t \to \frac{d_1}{R}^-} w_1(t) = -\infty\ ,$$

se contradice el hecho de que $V(t)$ esté definida para toda $t > 0$.

$\square$

3.2.6. Corolario.

1. *La solución $\hat{S}_\theta(t)$ en la ecuación:*

$$\dot{Y} = (H_{pq} + H_{pp}\hat{S}_\theta)Y\ , \quad Y(0) = 0\ , \quad \dot{Y}(0) = H_{pp} \tag{3.20}$$

está acotada uniformemente para $|t| > 1$.

2. *Las soluciones $\mathrm{S}(\varphi_t(\theta))$, $\mathrm{U}(\varphi_t(\theta))$ correspondientes a los haces de Green están acotadas uniformemente en Σ.*
3. *Las soluciones $S_\theta(t)$, $\mathbb{S}_\theta(t)$ están acotadas uniformemente en $\theta \in \Sigma$.*

La siguiente proposición establece que

$$\lim_{|t|\to\infty} \|d\pi \circ d\varphi_t(\theta)\big|_{V(\theta)}\| = +\infty \quad \forall\, \theta \in \Sigma\,.$$

3.2.7. Proposición. *Para todo $R > 0$ existe $T = T(R,\theta) > 0$ tal que $|Y_\theta(t)u| > R|u|$ para todo $|t| > T$ y para todo $u \in T_\theta M - \{0\}$.*

Demostración:

Como $Y(t) = g(t)G(t)g^*(0)$, y $g(t)$, $g^*(0)$ son isometrías, el enunciado es equivalente a que para todo $R > 0$ existe $T = T(R) > 0$ tal que $|G(t)v| > R|v|$ para todo $|t| > T$ y para todo $v \neq 0$, lo cual fue probado en la Proposición 2.2.7. □

Para $\theta \in T^*M$, se define:

$$\mathcal{B}(\theta) := \{\, \xi \in T_\theta(T^*M) \;\big|\; \sup_{t\in\mathbb{R}} |d\varphi_t(\theta)\cdot\xi| < +\infty \,\}$$

3.2.8. Proposición. *Si la φ-órbita de $\theta \in T^*M$ es desconjugada, entonces $\mathcal{B}(\theta) \subseteq \mathbf{E}(\theta) \cap \mathbf{F}(\theta)$.*

Demostración:

Sean $\xi \in \mathcal{B}(\theta)$ y $\zeta_T \in E_T(\theta) := d\varphi_{-T}\big(V(\varphi_T(\theta))\big)$ tal que $d\pi(\theta)\zeta_T = d\pi(\theta)\xi$, en particular $\xi - \zeta_T \in V(\theta)$.

Ya que $\lim_{T\to+\infty} E_T(\theta) = \mathbf{E}(\theta)$ y $\mathbf{E}(\theta) \pitchfork V(\theta)$, se sigue que

$$\zeta := \lim_{T\to+\infty} \zeta_T \in \mathbf{E}(\theta)$$

existe. Además, $d\pi \circ d\varphi_T(\xi - \zeta_T) = d\pi \circ d\varphi_T(\xi)$. Ya que $d\pi \circ d\varphi_T(\xi)$ está acotado para $T > 0$, por la proposición 3.2.7,

$$\lim_{T\to+\infty} (\xi - \zeta_T) = 0$$

Ya que $\zeta_T \to \zeta \in \mathbf{E}(\theta)$, tenemos que $\xi \in \mathbf{E}(\theta)$.
Similarmente, si $\eta_T \in F_T := d\varphi_T\big(V(\varphi_{-T}(\theta))\big)$ es tal que $d\pi(\theta)\eta_T = d\pi(\theta)\xi$, entonces

$$\lim_{T\to+\infty} \eta_T \in \mathbf{F}(\theta) \quad , \quad \lim_{T\to+\infty} (\xi - \eta_T) = 0\,.$$

□

3.2.9. Corolario. *Si la órbita de θ es desconjugada entonces:*

1. $\langle X(\theta) \rangle \subseteq \mathbf{E}(\theta) \cap \mathbf{F}(\theta)$
2. $\mathbf{E}(\theta) \cup \mathbf{F}(\theta) \subseteq T_\theta\Sigma$

Demostración:

El primer inciso es una consecuencia directa de proposición 3.2.8.
Recuerde que $\omega(X,\xi) = dH(\xi)$ y entonces

$$T_\theta\Sigma = \{\xi \in T_\theta T^*M \mid \omega(X(\theta),\xi) = 0\}\,.$$

Ya que $\mathbf{F}(\theta)$ es lagrangiano y $X(\theta) \in \mathbf{F}(\theta)$, se tiene $\omega(X(\theta),\xi) = 0$ para todo $\xi \in \mathbf{E}(\theta)$. Por lo tanto $\mathbf{F}(\theta) \subseteq T_\theta\Sigma$. Similarmente $\mathbf{E}(\theta) \subseteq \Sigma$.

□

3.3. Sistemas lineales periódicos

Consideremos $P : \mathbb{R} \to M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ continua y periódica, es decir, existe $T > 0$ tal que $P(t+T) = P(t)$, para

$$\Phi' = P(t)\Phi \,. \tag{3.21}$$

3.3.1. **Proposición.** *Cualquier solución fundamental $\Phi(t)$ de (3.21) se puede representar como:*

$$\Phi(t) = Z(t)e^{tR}\,, \tag{3.22}$$

donde $Z(t+T) = Z(t)$ y R es una matriz constante.

Si $\Phi(0) = I$, entonces $Z(0) = I$, y así $\Phi(mT) = e^{mTR} = \Phi(T)^m$.

Sea $E^s(E^c, E^u)$ la suma de los espacios propios generalizados correspondientes a los valores propios de R con parte real negativa (cero, positiva). Se tiene la escisión

$$\mathbb{R}^{2n} = E^s \oplus E^c \oplus E^u \tag{3.23}$$

invariante bajo $\Phi(T)$ y tal que

$$v \in E^s \oplus E^c \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m} \log\left|\Phi(T)^m v\right| \leq 0$$
$$v \in E^u \oplus E^c \quad \Rightarrow \quad \lim_{m\to-\infty} \frac{1}{m} \log\left|\Phi(T)^m v\right| \leq 0$$

3.3.2. **Proposición.** *Sean $P : \mathbb{R} \to \mathrm{sp}(2n)$ continua y periódica, $\mathbb{E}(0), \mathbb{F}(0)$ los subespacios de Green y $\mathbb{R}^{2n} = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ la escisión* (3.23) *correspondientes. Entonces*

1. $E^s \subseteq \mathbb{E}(0) \subseteq E^s \oplus E^c$
2. $E^u \subseteq \mathbb{F}(0) \subseteq E^u \oplus E^c$

Demostración: Sólo probaremos

$$E^u \subseteq \mathbb{F}(0) \subseteq E^u \oplus E^c\,, \tag{3.24}$$

pues las otras inclusiones son similares.

Primero se probará la segunda inclusión. Observe que para $\overline{v} = (0, v) \in \mathcal{V}$, se tiene que $\Phi\overline{v} = (G(t)v, *)$. Copiando la prueba de la Proposición 3.2.5, se demuestra que las hipótesis de la Propósición 2.2.7 se satisfacen y, entonces $\mathcal{V} \cap E^s = \{0\}$. Existe un subespacio $R \subset E^u \oplus E^c$ y una transformación lineal $L : R \to E^s$ tal que $\mathcal{V} = \text{Graf } L$.

Sea $0 < \eta < 1 < \lambda < \eta^{-1}$ tal que

$$\|\Phi(mT)\big|_{E^s}\| < \eta^m \quad , \quad \|\Phi(-mT)\big|_{E^s\oplus E^c}\| < \lambda^m\,. \tag{3.25}$$

Sea $V_{-m} := \Phi(mT)\mathcal{V}$. Entonces

$$\begin{aligned} V_{-m} &= \Phi(mT)\,\text{Graf } L \\ &= \text{Graf } \left[\Phi(mT)L\Phi(-mT)|_R\right] \end{aligned}$$

Ya que $\Phi(-mT) \subseteq E^u \oplus E^c$, por (3.25) tenemos que:

$$\|\Phi(mT)L\Phi(-mt)|_R\| \leq \eta^{mT}\lambda^{mT}\|L\|$$

Y como $\eta^{mT}\lambda^{mT} \to \infty$, obtenemos:

$$\mathbb{F}(0) = \lim_{t\to+\infty} V_{-m} = \lim_{t\to+\infty} \Phi(Tm)R \subseteq E^u \oplus E^c .$$

Ahora probaremos la primera inclusión. Sea $\{e_1, \cdots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{F}(0)$ y defínase $e_{n+i} = Je_i$ para $i = 1, ..., n$. Como el subespacio $\mathbb{F}(0)$ es lagrangiano, $\{e_1, \cdots, e_{2n}\}$ es una base simpléctica. La matriz $\Phi(mT)$ con respecto a esta base es:

$$\Phi(mT) = \begin{bmatrix} X_m & G_m \\ Y_m & U_m \end{bmatrix}$$

con $U_m^T = X_m^{-1}$ y $U_m^T G_m$ simétrica.

Ya que $\mathbb{F}(0) \subseteq E^u \oplus E^c$, se sigue que

$$\lim_{m\to\pm\infty} \frac{1}{m}\log\|U_m^{-T}w\| = \lim_{m\to\pm\infty} \frac{1}{m}\log\|X_m w\|$$

para todo $w \in \mathbb{R}^n$. Esto implica que

$$\lim_{m\to\pm\infty} \frac{1}{m}\log\|U_m^{-T}w\| \geq 0 . \tag{3.26}$$

Supóngase que $E^u \not\subset \mathbb{F}(0)$. Tómese $v \in E^u - \mathbb{F}(0)$, entonces $v = w + z$ con $z \in \mathbb{F}(0)$ y $0 \neq w \in J\mathbb{F}(0)$. Tenemos que $\Phi(-t)v = u_{-t} + (*, U_m^{-1}w)$ con $u_{-t} \in \mathbb{F}(0) \subset E^u \oplus E^c$. Ya que $U_m^{-1}w \in J\mathbb{F}(0)$, y $\mathbb{F}(0)$, $J\mathbb{F}(0)$ son ortogonales, tenemos que $\|\Phi(-t)v\| \leq \|U_m^{-1}w\|$.

De que $\displaystyle\lim_{m\to\pm\infty} \frac{1}{m}\log\|U_m^{-T}w\| \geq 0$, obtenemos que

$$\lim_{m\to\pm\infty} \frac{1}{m}\log\|\Phi(-t)v\| \geq 0 .$$

Esto contradice la elección de $v \in E^u$. □

3.4. La transformación exponencial

Sea q un valor regular de la restricción de $\pi : T^*M \to M$ a un nivel de energía Σ. Se define la transformación exponencial del hamiltoniano,

$$\exp_q : T_q^*M \to M , \quad \exp_q(t\theta) = \pi\big(\varphi_t(\theta)\big) ,$$

donde $\theta \in \Sigma \cap T_q^*M$.

En Geometría, para un punto $p \in M$ y un vector $v \in T_pM$, se consideraba la geodésica $\gamma(t, p, v)$ que en el instante $t = 0$ pasa por $p$con velocidad v, y se definía la aplicación $\exp_p : U \to M$, con $U \subset TM$ un abierto con ciertas características, como $\exp_p(v) := \gamma(1, p, v)$. Si M es una variedad de Riemann completa, simplemente conexa y con curvatura seccional $k(p, \sigma) \leq 0$, para todo $p \in M$ y todo $\sigma \subset T_pM$; Hadamard demuestra que la exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ es un difeomorfismo, la demostración de este hecho se tiene en la sección 7.3 de [dC].

Por lo que, un problema interesante es ver, si el levantamiento de la exponencial hamiltoniana $\exp_q : T_q^*M \to \tilde{M}$ a la cubierta universal, es un difeomorfismo en un nivel de energía sin puntos conjugados, en particular, si la cubierta universal $\tilde{M}$ es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. En esta sección se ve bajo que condiciones la exponencial hamiltoniana sobre T_q^*M es una inmersión.

Otro corolario de la proposición 3.2.8 dice que la proyección de un nivel de energía, es la variedad M.

3.4.1. **Corolario.** *Si M es conexa y Σ es un nivel de energía regular sin puntos conjugados, entonces $\pi(\Sigma) = M$.*

Demostración:

Para $\theta \in \Sigma$, $d\pi(\theta) : \mathbf{F}(\theta) \to T_{\pi(\theta)}M$ es un isomorfismo; por el corolario 3.2.9, $\mathbf{F}(\theta) \subset T_\theta\Sigma$. Por lo tanto, $\pi : \Sigma \to M$ es una transformación abierta. Ya que M es conexa, entonces $\pi(\Sigma) = M$.

□

3.4.2. **Proposición.** *Para $\theta \in \Sigma$, se define*

$$W(\theta) := \big(V(\theta) \cap T_\theta\Sigma\big) \ominus \langle X(\theta)\rangle .$$

Si la órbita de θ es desconjugada, entonces para toda $t \neq 0$ se tiene que

$$d\varphi_t\big(W(\theta)\big) \cap V\big(\varphi_t(\theta)\big) = \{0\}.$$

Demostración: Supóngase que existe $b > 0$ tal que

$$(0, w_b) \in d\varphi_t\big(W(\theta)\big) \cap V\big(\varphi_t(\theta)\big) \neq \{0\} .$$

Sea $(k_0, w_0) := d\varphi_{-b}(0, w_b) \in W(\theta)$. Ya que el segmento $\{\varphi(\theta) \big| t \in [0, \infty[\}$ no tiene puntos conjugados, se sigue que $k_0 \neq 0$.

Escriba $H_p(t) := H_p(\varphi(\theta))$, $H_q(t) := H_q\big(\varphi_t(\theta)\big)$. Ya que

$$W(\theta) = \big(V(\theta) \cap T_\theta\Sigma\big) \ominus \langle X(\theta)\rangle,\ X(\theta) = (H_p(0), -H_q(0)) ,$$

tenemos que $k_0 = \alpha H_p(0)$ para algún $\alpha \neq 0$. Dividiendo w_b por α, podemos suponer que $\alpha = 1$.

Sea $\big(h(t), v(t)\big) := d\varphi_t\big(X(\theta) - (k_0, w_0)\big) \in d\varphi_t\big(W(\theta)\big) \subset T_{\varphi_t(\theta)}\Sigma$, entonces $h(0) = H_p(0) - k_0 = 0$, $v(0) \neq 0$ y

$$h(b) = d\pi\big[X\big(\varphi_b(\theta)\big) - (0, w_b)\big] = H_p(b). \tag{3.27}$$

Ya que $(h(0), v(0)) \in T_\theta\Sigma$, obtenemos

$$0 = dH\big(h(0), v(0)\big) =< H_q(0), h(0) > + < H_p(0), v(0) >=< H_p(0), v(0) > . \tag{3.28}$$

De acuerdo con (3.17), el haz de Green estable está dado como

$$(3.29)\qquad \mathbf{E}(\varphi_t(\theta)) = \Gamma(t)\mathbb{E}(t) = \operatorname{Ima}\begin{bmatrix} g(t)D(t) \\ g(t)^{*-1}\mathbb{S}_0(t)D(t)\end{bmatrix} = \operatorname{Ima}\begin{bmatrix} \mathbf{D}(t) \\ \mathbf{S}(\varphi_t(\theta))\mathbf{D}(t)\end{bmatrix}$$

donde $D(t)$ está definida en la Pretensión 2.2.5 y $\mathbf{D}(t) = g(t)D(t)g(0)^{-1}$.

Si ponemos $(x(t), y(t)) = \Gamma(t)^{-1}(h(t), v(t))$, tenemos que

$$x(t) = D(t)\int_0^t D^{-1}(s)B(s)(D^T(s))^{-1}y(0)ds$$

Como además $v(0) \neq 0$, tenemos que

$$(3.30)\quad \begin{aligned} <\mathbf{D}(b)^{-1}h(b), v(0)> &= <D(b)^{-1}x(b), y(0)> \\ &= \int_0^b <B(s)(D^T(s))^{-1}y(0), (D^T(s))^{-1}y(0)>ds > 0 \quad . \end{aligned}$$

Ya que $X(\varphi_t(\theta)) \in \mathbf{E}(\varphi_t(\theta))$,

$$\begin{aligned} \big(H_p(b), -H_q(b)\big) = X\big(\varphi_b(\theta)\big) &= d\varphi_b\big(X(\theta)\big) \\ &= d\varphi_b\big(H_p(0), \mathbf{S}(\theta)H_p(0)\big) \\ &= \big(\mathbf{D}(b)H_p(0), \mathbf{S}(\varphi_b(\theta))\mathbf{D}(b)H_p(0)\big) \end{aligned}$$

De la primera componente obtenemos que $H_p(0) = \mathbf{D}(b)^{-1}H_p(b) = \mathbf{D}(b)^{-1}h(b) = H_p(0)$. Remplazando esta ecuación en (3.30), obtenemos que $<H_p(0), v(0)> > 0$. Esto contradice la ecuación (3.28). □

3.4.3. Corolario. *Sea $H : T^*M \to \mathbb{R}$ convexo. $\Sigma = H^{-1}\{c\}$, $q \in \pi(\Sigma)$ y suponga que para todo $\theta \in T_q^*M \cap \Sigma$ la órbita $\{\varphi_t(\theta) \mid t \geq 0\}$ no tiene puntos conjugados. Entonces la transformación exponencial $\exp_q : T_q^*M \to M$ es una inmersión.*

Demostración: Para $\theta \in \Sigma_q = \pi^{-1}\{q\} \cap \Sigma$, tenemos que $\exp_q(t\theta) = \pi \circ \varphi_t(\theta)$. Considérese la escisión

$$T_{t\theta}(T_q^*M) \cong T_q^*M = T_\theta(\Sigma_q) \oplus \langle\theta\rangle.$$

La derivada $d\exp_q(t\theta) : T_q^*M \to T_{\pi\varphi_t\theta}M$ está dada por:

$$\begin{aligned} d\exp_q(t\theta)\Big|_{V(\theta)\cap T_\theta\Sigma} &= d\pi \circ d\varphi_t(\theta)\Big|_{V(\theta)\cap T_\theta\Sigma} \\ d\exp_q(t\theta)\Big|_{\langle\theta\rangle} &= d\pi\Big(X\big(\varphi_t(\theta)\big)\Big) = d\pi \circ d\varphi_t\big(X(\theta)\big). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} d\exp_q(t\theta)(T_q^*M) &= d\pi \circ d\varphi_t\Big(\big(V(\theta) \cap T_\theta\Sigma\big) \oplus \langle X(\theta)\rangle\Big) \\ &= d\pi \circ d\varphi_t\big(W(\theta)\big). \end{aligned}$$

Observe que $\dim d\varphi_t(W^*(\theta)) = \dim W^*(\theta) = n$. Por la proposición 3.4.2,

$$d\varphi_t(W^*(\theta)) \cap V^*(\varphi_t(\theta)) = \{0\}.$$

De donde, $d\pi : d\varphi_t(W^*(\theta)) \to T_{\pi\varphi_t\theta}M$ es un isomorfismo lineal. Como

$$d\exp_q(t\theta)(T_q^*M) = d\pi \circ d\varphi_t(W^*(\theta)),$$

$d\exp_q(t\theta)$ es un isomorfismo lineal para todo $t > 0$, $\theta \in \Sigma_q$.

□

CAPÍTULO 4

Hiperbolicidad

4.0.4. Definición. Sea Y un campo vectorial completo en la variedad $\mathcal{M}$ con flujo φ, y sea Ω un conjunto compacto, invariante bajo φ. Se dice que Ω es ***hiperbólico*** para φ si existen, una métrica riemanniana en una vecindad de Ω, una escisión

$$T_\theta\mathcal{M} = E^u(\theta) \oplus E^s(\theta) \oplus \langle Y(\theta)\rangle, \quad \theta \in \Omega,$$

y números $c, \lambda > 0$ tales que:

1. $d\varphi_t\, E^u(\theta) = E^u(\varphi_t(\theta))$, $d\varphi_t\, E^s(\theta) = E^s(\varphi_t(\theta))$
2. $\left|d\varphi_t(\theta)\,\xi\right| \leq ce^{-\lambda t}|\xi| \quad \forall\, t > 0,\ \xi \in E^s(\theta)$
3. $\left|d\varphi_t(\theta)\,\xi\right| \leq ce^{\lambda t}|\xi| \quad \forall\, t < 0,\ \xi \in E^u(\theta)$

Los subespacios $E^s(\theta)$ y $E^u(\theta)$ se conocen como subespacio ***estable e inestable fuertes*** respectivamente, mientras que $E^s(\theta) \oplus \langle Y(\theta)\rangle$ y $E^s(\theta) \oplus \langle Y(\theta)\rangle$ se conocen como subespacios *estable e inestable débiles.*

Cuando $\Omega = \mathcal{M}$ decimos que φ_t es un flujo de Anosov.

En este capítulo demostraremos el resultado principal de la tesis

4.0.5. Teorema. *Sea $\Sigma = H^{-1}\{c\}$ un nivel de energía regular sin puntos conjugados. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\varphi_t\big|_\Sigma$ *es Anosov.*
2. *Para todo $\theta \in \Sigma$, $\mathbf{E}(\theta)$ y $\mathbf{F}(\theta)$ son transversales en $T_\theta\Sigma$.*
3. *Para todo $\theta \in \Sigma$, $\mathbf{E}(\theta) \cap \mathbf{F}(\theta) = \langle X(\theta)\rangle$.*
4. *Para todo $\theta \in \Sigma$, $v \in T_\theta\Sigma \setminus \langle X(\theta)\rangle$, $\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|d\varphi_t(\theta)v\right| = \infty$.*

4.1. Formalismo canónico

Sean Σ una variedad suave de dimensión $2m+1$ y Θ una $1-$forma sobre Σ. Se define $T_Q\Sigma^\perp = \{\xi \in T_Q\Sigma \mid d\Theta(\xi,\eta) = 0 \quad \forall\, \eta \in T_Q\Sigma\}$. En cada punto $Q \in \Sigma$, existe una dirección; es decir, una recta $\{c\xi\}$ en el espacio tangente $T_Q\Sigma$, con la propiedad de que $\xi \in T_Q\Sigma^\perp$.

Supóngase además que la $2-$forma $d\Theta$ cumple que la $\dim T_Q\Sigma^\perp = 1$. Entonces la dirección ξ es única, y llamamos a esta la *dirección característica* de la $1-$forma Θ. Las curvas integrales del campo definido por las direcciones características son llamadas las *líneas características* de la $1-$forma Θ.

4.1.1. Observaciones.

1. Si γ_1 es una curva cerrada en Σ, las líneas características mueven los puntos de γ_1, formando un tubo. Las integrales de Θ a lo largo de dos curvas que encierran el mismo tubo característico son iguales
$$\oint_{\gamma_1} \Theta = \oint_{\gamma_2} \Theta$$
Si $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, donde σ es una pieza del tubo característico, tenemos por la fórmula de Stokes, que
$$\oint_{\gamma_1} \Theta - \oint_{\gamma_2} \Theta = \int_{\partial\sigma} \Theta = \int_{\sigma} d\Theta$$
Pero el valor de $d\Theta$ para cualquier par de vectores tangentes al tubo característico es igual a cero. Porque estos dos vectores están en un plano que contiene a la dirección característica y $d\Theta$ se anula en este plano. Así, $\int_\sigma d\Theta = 0$.
2. Sean (Q, P, T) coordenadas locales para Σ, y $K : \Sigma \to \mathbb{R}$ una función C^3. Podemos construir la $1-$forma local
$$\Theta = PdQ - KdT \ .$$
Las líneas características de esta $1-$forma Θ tienen una proyección inyectiva al eje T; es decir, están dadas por funciones $P = P(T)\,, Q = Q(T)$. Estas funciones satisfacen el sistema:
$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \frac{dP}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q} \tag{4.1}$$
Esto es así, porque la diferencial de la $1-$forma $PdQ - KdT$ es igual a
$$d\Theta = \sum_{i=1}^{m} \left(dP_i \wedge dQ_i - \frac{\partial K}{\partial Q_i} dQ_i \wedge dT - \frac{\partial K}{\partial P_i} dP_i \wedge dT \right)$$
La matriz asociada a la $2-$forma $d\Theta$, en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial Q_i}, \frac{\partial}{\partial P_i}, \frac{\partial}{\partial T} \right\}$, es
$$\begin{bmatrix} 0 & -I & -K_Q^* \\ I & 0 & -K_P^* \\ K_Q & K_P & 0 \end{bmatrix}$$
El rango de esta matriz es $2m$. Puede verificarse directamente que el vector $(K_P, -K_Q, 1)$ está en el núcleo. Esto significa que da la dirección de las líneas características de la $1-$forma Θ. Pero el vector $(K_P, -K_Q, 1)$ es también el vector velocidad del flujo del sistema (4.1). Así, las curvas integrales de (4.1) son las líneas características de la $1-$forma $\Theta = PdQ - KdT$.
3. Suponga que dos curvas γ_1 y γ_2 rodean el mismo tubo formado por el flujo del sistema (4.1). Entonces las integrales de $\Theta = PdQ - KdT$ a lo largo de

estas curvas coinciden:

$$\oint_{\gamma_1} PdQ - KdT = \oint_{\gamma_2} PdQ - KdT$$

4.2. Comportamiento transversal

Continuemos con el estudio de un nivel energia Σ sin puntos conjugados. Dado $\theta \in \Sigma$ considere $H_p(\theta) = d\pi X(\theta)$, el cual no se anula ya que $X(\theta) \in \mathbf{E}(\theta)$ y $\mathbf{E}(\theta) \pitchfork V(\theta)$. Defina $\mathbf{N}(\theta) \subset T_\theta\Sigma$ por:

$$\mathbf{N}(\theta) := \{\xi \in T_\theta\Sigma \mid <d\pi\xi, d\pi X(\theta)>_{\pi\theta} = 0\},$$

entonces $\mathbf{N} \oplus \langle X(\theta)\rangle = T_\theta\Sigma$.

Fijemos $\theta_0 \in \Sigma$. Sean $e_2(t), \ldots, e_n(t)$ campos vectoriales suaves a lo largo de $c(t) = \pi(\varphi_t(\theta_0))$ tales que para cada $t \in \mathbb{R}$ forman una base ortonormal de $d\pi\mathbf{N}(c(t))$. La transformación

$$(q_1, q_2, \ldots, q_n, t) \mapsto (\exp_{c(q_1)}(q_2e_2(q_1) + \cdots + q_ne_n(q_1)), t) \tag{4.2}$$

define un sistema de coordenadas en una vecindad W de Graf c in $M \times \mathbb{R}$ tal que

$$\left.\frac{\partial}{\partial q_1}\right|_{(c(t),t)} = d\pi X(\varphi_t(\theta_0)) \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial q_i}\right|_{(c(t),t)} = e_i(t), \quad i = 2, \ldots, n \tag{4.4}$$

Denotemos por $p_1, \ldots, p_n$ las coordenadas correspondientes en las fibras T_q^*M.

Sea $Y = (X, 1)/H_{p_1}$. La órbita de $(\theta, 0)$ es la curva $T \mapsto (\phi_T(\theta), \tau(T, \theta))$, donde $\phi_T(\theta) = \varphi_{\tau(T,\theta)}(\theta)$. Note que $dq_1(Y) = 1$ y que $Y = (X, 1)$ a lo largo de la Graf c.

Las coordenadas $Q = (q_2, \cdots, q_n)$, $P = (p_2, \cdots, p_n)$ identifican cada variedad $\Sigma_c = \{x \in \Sigma : q_1(x) = c\}$ con un abierto U_c de $\mathbb{R}^{2n-2}$.

A lo largo de la orbita $\theta_T = \varphi_T(\theta_0)$, el isomorfismo $d(Q, P)_{\theta_T} : T_{\theta_T}\Sigma_c = N(\theta_T) \to \mathbb{R}^{2n-2}$ transforma $V(\theta_T) \cap N(\theta_T)$ en $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Como ϕ_T lleva Σ_c en Σ_{c+T}, podemos representar $\phi_T : \Sigma_0 \to \Sigma_T$ por una transformación $\psi_T : U_0 \to \mathbb{R}^{2n-2}$.

4.2.1. **Lema.** *Las curvas $\psi_T(z) = (Q(T), P(T))$, que corresponden a las órbitas $(\phi_T(\theta), \tau(T, \theta)) \in W$ de Y, satisfacen las ecuaciones*

$$\frac{dQ}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P} \quad , \quad \frac{dP}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q}$$

donde $K(Q, P; T)$ se define por $H(T, q_2, \cdots, q_n, -K, p_2, \ldots, p_n) = h$.

Demostración:

La curva $\gamma(t) = (\varphi_t(\theta), t)$ es una línea característica de $\Theta = pdq - Hdt$. Como $dH(\dot\gamma) = 0$,

$$0 = d\Theta(\dot\gamma, \cdot) = dp \wedge dq(X(\varphi_t(\theta)), \cdot) + dH.$$

Así, $\varphi_t(\theta)$ es una línea característica de $pdq = PdQ - KdT$ sobre Σ.

□

Se sigue del Lema 4.2.1, que la derivada $d\psi_T(z)$ satisface la ecuación de Jacobi

$$\frac{d}{dT} d\psi_T(z) = \begin{bmatrix} K_{PQ} & K_{PP} \\ -K_{QQ} & -K_{QP} \end{bmatrix} \cdot d\psi_T(z)$$

4.2.2. Lema. *A lo largo de la órbita $\theta_T := \phi_T(\theta_0)$, la matriz hessiana $D^2K(\theta_T)$ está acotada y $K_{PP}(\theta_T)$ es uniformemente positiva definida.*

Demostración:
Como $p_1 = -K(T, Q, P)$ está definido implícitamente por $H(T, Q, -K, P) = e$, donde $T = q_1$. Derivando implícitamente, tenemos la fórmula

$$K_P = \frac{H_P}{H_{p_1}} \,,$$

volviendo a derivar y utilizando que $\dot q_1 = H_{p_1} = 1$ a lo largo de la órbita,

$$K_{PP} = H_{PP} - H_P^* H_{p_1 P} - (H_{Pp_1} - H_{p_1 p_1} H_P^*) H_P \,.$$

El cálculo de las demas componentes de Hess $K(\theta_T)$ es similar.
Para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v \neq 0$,

$$vK_{PP}v^* = (-H_P v, v) H_{pp} (-H_P v, v)^* \geq R|v|^2 \,,$$

ya que $H_{pp}(\theta_T)$ es uniformemente positiva definida, donde $p = (p_1, P)$.

□

Ya que para $\vartheta \in W = \{(\varphi_t(\theta_0, t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $\phi_T(\vartheta) = \varphi_{\tau(T,\vartheta)}(\vartheta)$, entonces:

$$d\phi_T(\vartheta) \cdot \xi \;=\; d\varphi_{\tau(T,\vartheta)} \cdot \xi \;+\; \Big(\frac{\partial \tau}{\partial \vartheta}\Big|_{(T,\vartheta)} \cdot \xi\Big) \frac{d}{dt}\varphi_t(\vartheta)\Big|_{T,\vartheta} \tag{4.5}$$

$$\;=\; d\varphi_{\tau(T,\vartheta)} \cdot \xi \;+\; \alpha(T, \xi) X(\phi_T(\vartheta)) \,, \tag{4.6}$$

donde $\alpha(T, \xi) = \frac{\partial \tau}{\partial \vartheta}\Big|_{(T,\vartheta)} \cdot \xi$.

Sea $\Upsilon(\varphi_t(\theta_0)) : T_{\varphi_t(\theta_0)}\Sigma \to \mathrm{N}(\varphi_t(\theta_0)) \subset T_{\varphi_t(\theta_0)}\Sigma$, la proyección a lo largo de la dirección del campo vectorial, es decir,

$$\Upsilon\xi = \xi + \beta(\xi) X(\varphi_t(\theta_0)) \quad , \beta(\xi) \in \mathbb{R} \,,$$

con $\Upsilon\xi \in \mathrm{N}(\varphi_t(\theta_0))$.

4.2.3. Proposición. *A lo largo de la órbita $\theta_T = \phi_T(\theta_0)$ tenemos:*

1. *La órbita de ϕ_T en θ_0 no tiene puntos conjugados.*

2. *Existen los haces de Green para $d\phi_s|_{\mathbf{N}(\theta_T)}$:*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\top}(\theta_T) &= \lim_{s\to+\infty} d\phi_{-s}\big(V(\theta_{T+s})\cap\mathbf{N}(\theta_{T+s})\big)\\ \mathbf{F}^{\top}(\theta_T) &= \lim_{s\to-\infty} d\phi_{-s}\big(V(\theta_{T+s})\cap\mathbf{N}(\theta_{T+s})\big)\end{aligned}$$

Además $\mathbf{E}^{\top}(\theta)=\mathbf{E}(\theta)\cap\mathbf{N}(\theta)$ y $\mathbf{F}^{\top}(\theta)=\mathbf{F}(\theta)\cap\mathbf{N}(\theta)$ para todo $\theta\in\Sigma$.

3. *Para todo $R>0$ existe $S=S(R,\theta_T)>0$ tal que para toda $|s|>S(R,\theta_T)$ y todo $\xi\in\mathbf{N}(\theta_T)\cap V(\theta_T)$ tenemos que*

$$|d\pi\big(d\phi_s(\theta_T)\cdot\xi\big)|>R|\xi|.$$

4. *Si se define*

$$B^{\top}(\theta_T)=\{\xi\in\mathbf{N}(\theta_T)\mid \sup_{s\in\mathbb{R}}|d\pi\cdot d\varphi_s\cdot\xi|<+\infty\},$$

entonces $B^{\top}(\theta_T)\subseteq\mathbf{E}^{\top}(\theta_T)\cap\mathbf{F}^{\top}(\theta_T)$.

Demostración:
Sea $U(\theta_T):=V(\theta_T\cap\mathbf{N}(\theta_T))=V(\theta_T)\cap T_{\theta_T}\Sigma$. Por (4.6) tenemos que:

$$d\phi_T(\theta_0)\cdot\xi=d\varphi_T(\theta_0)\cdot\big[\xi+\alpha(T,\xi)X(\theta_0)\big].$$

Por lo tanto $d\phi_T\big(U(\theta_0)\big)\subseteq d\varphi_T(W(\theta_0))$, donde $W(\theta):=\big(V(\theta)\cap T_\theta\Sigma\big)\oplus\langle X(\theta)\rangle$. De la proposición 3.4.2,

$$U(\theta_T)\cap d\varphi_T\big(U(\theta_0)\big)\subseteq V(\theta_T)\cap d\varphi_T\big(W(\theta_0)\big)=\{0\}\quad\forall T\neq 0\,.$$

Esto demuestra el primer inciso.

Por el lema 4.2.2, la primera parte del inciso 2 y los incisos 3 y 4 se demuestran de manera similar al teorema 3.2.1 y a las proposiciones 3.2.7 y 3.2.8 respectivamente.

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\top}(\theta_0) &= \lim_{T\to+\infty} d\phi_{-T}\big(V(\theta_T)\cap\mathbf{N}(\theta_T)\big)\\ &= \Upsilon(\theta_0)\lim_{T\to+\infty} d\varphi_{-T}\big(V(\theta_T)\cap T_{\theta_T}\Sigma\big)\\ &\subseteq \Upsilon(\theta_0)\cdot\mathbf{E}(\theta_0)\subseteq\mathbf{E}(\theta_0),\end{aligned}$$

dando que $X(\theta_0)\in\mathbf{E}(\theta_0)$. Así $\mathbf{E}^{\top}(\theta_0)\subseteq\mathbf{E}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)$. Ya que $\dim\mathbf{E}^{\top}(\theta_0)=\dim U=n-1=\dim\big(\mathbf{E}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)\big)$, tenemos que $\mathbf{E}^{\top}(\theta_0)=\mathbf{E}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)$. La ecuación $\mathbf{F}^{\top}(\theta_0)=\mathbf{F}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)$ se prueba de manera análoga. Esto completa la prueba del segundo inciso.

$\square$

4.2.4. **Definición.** Sea Y un campo vectorial sobre una variedad $\mathcal{M}$ con integral $\varphi:\mathcal{D}\subset\mathcal{M}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}$. Una *sección transversal local* de Y en el punto $p\in\mathcal{M}$, con $Y(p)\neq 0$, es una subvariedad $S\subset\mathcal{M}$ tal que $\dim S=\dim\mathcal{M}-1$ y $\forall\ s\in S$, $Y(s)\notin T_sS$.

2. *Existen los haces de Green para* $d\phi_s|_{\mathbf{N}(\theta_T)}$*:*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta_T) &= \lim_{s\to+\infty} d\phi_{-s}\big(V(\theta_{T+s})\cap \mathbf{N}(\theta_{T+s})\big)\\ \mathbf{F}^{\mathsf{T}}(\theta_T) &= \lim_{s\to-\infty} d\phi_{-s}\big(V(\theta_{T+s})\cap \mathbf{N}(\theta_{T+s})\big)\end{aligned}$$

Además $\mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta) = \mathbf{E}(\theta)\cap\mathbf{N}(\theta)$ *y* $\mathbf{F}^{\mathsf{T}}(\theta) = \mathbf{F}(\theta)\cap\mathbf{N}(\theta)$ *para todo* $\theta\in\Sigma$.

3. *Para todo* $R>0$ *existe* $S=S(R,\theta_T)>0$ *tal que para toda* $|s|>S(R,\theta_T)$ *y todo* $\xi\in\mathbf{N}(\theta_T)\cap V(\theta_T)$ *tenemos que*

$$|d\pi\big(d\phi_s(\theta_T)\cdot\xi\big)| > R|\xi|.$$

4. *Si se define*

$$B^{\mathsf{T}}(\theta_T) = \{\xi\in\mathbf{N}(\theta_T)\mid \sup_{s\in\mathbb{R}}|d\pi\cdot d\varphi_s\cdot\xi| < +\infty\},$$

entonces $B^{\mathsf{T}}(\theta_T)\subseteq \mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta_T)\cap\mathbf{F}^{\mathsf{T}}(\theta_T)$.

Demostración:
Sea $U(\theta_T) := V(\theta_T\cap\mathbf{N}(\theta_T)) = V(\theta_T)\cap T_{\theta_T}\Sigma$. Por (4.6) tenemos que:

$$d\phi_T(\theta_0)\cdot\xi = d\varphi_T(\theta_0)\cdot\big[\xi+\alpha(T,\xi)X(\theta_0)\big].$$

Por lo tanto $d\phi_T\big(U(\theta_0)\big)\subseteq d\varphi_T(W(\theta_0))$, donde $W(\theta) := \big(V(\theta)\cap T_\theta\Sigma\big)\oplus\langle X(\theta)\rangle$. De la proposición 3.4.2,

$$U(\theta_T)\cap d\varphi_T\big(U(\theta_0)\big)\subseteq V(\theta_T)\cap d\varphi_T\big(W(\theta_0)\big) = \{0\}\quad \forall T\neq 0\,.$$

Esto demuestra el primer inciso.

Por el lema 4.2.2, la primera parte del inciso 2 y los incisos 3 y 4 se demuestran de manera similar al teorema 3.2.1 y a las proposiciones 3.2.7 y 3.2.8 respectivamente.

Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta_0) &= \lim_{T\to+\infty} d\phi_{-T}\big(V(\theta_T)\cap\mathbf{N}(\theta_T)\big)\\ &= \Upsilon(\theta_0)\lim_{T\to+\infty} d\varphi_{-T}\big(V(\theta_T)\cap T_{\theta_T}\Sigma\big)\\ &\subseteq \Upsilon(\theta_0)\cdot\mathbf{E}(\theta_0)\subseteq\mathbf{E}(\theta_0),\end{aligned}$$

dando que $X(\theta_0)\in\mathbf{E}(\theta_0)$. Así $\mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta_0)\subseteq\mathbf{E}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)$. Ya que $\dim\mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta_0) = \dim U = n-1 = \dim\big(\mathbf{E}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)\big)$, tenemos que $\mathbf{E}^{\mathsf{T}}(\theta_0) = \mathbf{E}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)$. La ecuación $\mathbf{F}^{\mathsf{T}}(\theta_0) = \mathbf{F}(\theta_0)\cap\mathbf{N}(\theta_0)$ se prueba de manera análoga. Esto completa la prueba del segundo inciso.

$\square$

4.2.4. **Definición.** Sea Y un campo vectorial sobre una variedad $\mathcal{M}$ con integral $\varphi:\mathcal{D}\subset\mathcal{M}\times\mathbb{R}\to\mathcal{M}$. Una *sección transversal local* de Y en el punto $p\in\mathcal{M}$, con $Y(p)\neq 0$, es una subvariedad $S\subset\mathcal{M}$ tal que $\dim S = \dim\mathcal{M}-1$ y $\forall\ s\in S$, $Y(s)\notin T_sS$.

Sea γ una órbita cerrada de Y con periodo τ y S una sección transversal local de Y en $p \in \gamma$. Una *aplicación de Poincaré* de γ es una transformación

$$F : W_0 \to W_1$$

donde:

1. W_0, $W_1 \subset S$ son vecindades abiertas de $p \in S$, y F es un difeomorfismo.
2. Existe una función continua $\delta : W_0 \to \mathbb{R}$ tal que $\forall s \in W_0$, $(s, \tau - \delta(s)) \in \mathcal{D}$ y $F(s) = \varphi(s, \tau - \delta(s))$.
3. Si $t \in (0, \tau - \delta(s))$ entonces $\varphi(s,t) \notin W_0$.

La existencia y unicidad de esta aplicación de Poincaré se demuestra en [AM] , página 521.

4.2.5. **Teorema.** *Sea γ una órbita periódica sin puntos conjugados. Entonces γ es hiperbólica (en su nivel de energía) si y sólo si*

$$\mathbf{E}(\theta) \cap \mathbf{F}(\theta) = \langle X(\theta) \rangle \tag{4.7}$$

para algún $\theta \in \gamma$. En este caso $\mathbf{E}(\theta)$ y $\mathbf{F}(\theta)$ son los subespacios estable e inestable débiles respectivamente.

Demostración:

Sea $\theta_0 \in \gamma$ y sea $\tau > 0$ el periodo de θ_0. Escojamos los campos $e_2(t) \dots, e_n(t)$, periódicos de periodo τ y denotemos por $e_1(t)$ al vector unitario en la dirección de $d\pi X(\gamma(t))$. Tenemos definida entonces una familia suave y periódica de isometrías $g(t) : \mathbb{R}^n \to T_{\pi(\gamma(t))}M$. Como

$$\begin{bmatrix} H_{pq}(\gamma(t)) & H_{pp}(\gamma(t)) \\ -H_{qq}(\gamma(t)) & -H_{qp}(\gamma(t)) \end{bmatrix}$$

es τ-periódica, también lo es la función $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathsf{sp}(2n)$ definida en (3.6).

Supóngase que γ es hiperbólica; entonces, por la proposición 3.3.2,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\theta_0) &\subseteq E^s(\theta_0) \oplus \langle X(\theta_0) \rangle \\ \mathbf{F}(\theta_0) &\subseteq E^u(\theta_0) \oplus \langle X(\theta_0) \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{E}(\theta_0) \cap \mathbf{F}(\theta_0) = \langle X(\theta_0) \rangle$$

Consideremos el sistema de coordenadas definido por la transformación (4.2). Entonces $d\phi_\tau(\theta_0) : \mathbf{N}(\theta_0) \hookleftarrow$ es la derivada de la transformación de Poincaré del flujo φ_t, correspondiente a la sección transversal $q_1 = 0$.

Supongamos que $\mathbf{E}(\theta_0) \cap \mathbf{F}(\theta_0) = \langle X(\theta_0) \rangle$. Por los incisos 1 y 2 de la proposición 4.2.3 tenemos que:

$$B^\top(\theta_0) \subseteq \mathbf{E}^\top(\theta_0) \cap \mathbf{F}^\top(\theta_0) = \langle X(\theta_0) \rangle \cap \mathbf{N}(\theta_0) = \{0\}.$$

Esto implica que γ es hiperbólica. □

4.3. Acciones cuasi hiperbólicas

Sea B un espacio métrico compacto y $\pi : E \to B$ un haz vectorial provisto de una norma continua $|\,|_p$ sobre cada fibra $\pi^{-1}\{p\}$.

4.3.1. Definición. Ψ es una $\mathbb{R}$−acción, si cumple con:

1. Existe un flujo continuo ψ_t sobre B tal que $\pi \circ \Psi_t = \psi_t \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Psi_t"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[r, "\psi_t"'] & B \end{tikzcd}$$

2. $\Psi_t : E(p) \to E(\psi_t(p))$ es un isomorfismo lineal, donde $E(p) := (\pi\big|_E)^{-1}\{p\}$, $p \in B$.
3. $\Psi_{s+t} = \Psi_s \circ \Psi_t$.

4.3.2. Definición. Decimos que la acción Ψ_t es *cuasi hiperbólica* si

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\Psi_t(\xi)\right| = +\infty \tag{4.8}$$

para todo $\xi \in E$, $\xi \neq 0$.

Supóngase que la acción Ψ es cuasi hiperbólica. Para $p \in B$, defínanse:

$$\begin{aligned} E^s(p) &:= \{v \in E(p) \,|\, \sup_{t>0} |\Psi_t(p)(v)| < +\infty\} \\ E^u(p) &:= \{v \in E(p) \,|\, \sup_{t<0} |\Psi_t(p)(v)| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Observe que por la cuasi hiperbolicidad tenemos que $E^s(p) \cap E^u(p) = \{0\}$, para todo $p \in B$.

4.3.3. Lema. *Existe $\tau > 0$ tal que para todo $p \in B$.*

$$\|\Psi_\tau\big|_{E^s(p)}\| < \frac{1}{2}\,, \quad \|\Psi_{-\tau}\big|_{E^u(p)}\| < \frac{1}{2} \quad \forall\, p \in M\,. \tag{4.9}$$

Demostración:

Supóngase que el lema es falso para E^s. La prueba para E^u es similar. Entonces existen unas sucesiones $x_n \in B$, $v_n \in E^s(x_n)$, $|v_n| = 1$ tales que $|\Psi_n(v_n)| \geq \frac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se afirma que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sup_{t\geq 0} \|\Phi\| < c < +\infty \quad \forall\, p \in B.$$

Supongase que la afirmación es verdadera. Sean $w_n := \Psi_n(v_n)$ y $y_n := \psi_n(x_n)$. Tenemos que $\frac{1}{2} \leq |w_n| \leq c$, para todo n y $|\Psi_t(w_n)| = |\Psi_{t+n}(v_n)| \leq c$, para todo $t \geq -n$. Ya que B es compacto, existe una subsucesión convergente de (y_n, w_n). Si $y_n \to y$ y $w_n \to w$, tenemos que $y \in B$, $w \in E(y)$, $|w| \geq \frac{1}{2}$ y $|\Psi_t(w)| \leq c$, para toda $t \in \mathbb{R}$. Esto es una contradicción.

Ahora se probará la afirmación. Supóngase que es falsa, entonces existe $x_n \in B$, $t_n \geq 0$, $v_n \in E^s(x_n)$, $|v_n| = 1$ tal que:

$$\sup_n \left|\Psi_{t_n}(v_n)\right| = +\infty. \tag{4.10}$$

Sea $s_n > 0$ tal que,

$$\left|\Psi_{s_n}(v_n)\right| > \frac{1}{2}\sup_{s\geq 0}\left|\Psi_s(v_n)\right| \geq \frac{1}{2}\left|\Psi_{t_n}(v_n)\right| . \tag{4.11}$$

Por (4.10) se tiene que $s_n \to +\infty$. Sea $y_n := \varphi_{s_n}(x_n)$ y

$$w_n := \frac{\Psi_{s_n}(v_n)}{|\Psi_{s_n}(v_n)|}.$$

Entonces $|w_n| = 1$, y si $t > -s_n$, se tiene

$$\left|\Psi_t(w_n)\right| = \frac{|\Psi_{t+s_n}(v_n)|}{|\Psi_{s_n}(v_n)|} \leq \frac{2|\Psi_{t+s_n}(v_n)|}{\sup_s \geq 0|\Psi_s(v_n)|} \leq 2 . \tag{4.12}$$

Ya que $|w_n| = 1$ y $y_n \in B$, existe una subsucesión convergente $(y_n, w_n) \to (y, w)$. Tendriamos que $y \in B$, $w \in E(y)$, $|w| = 1$ y $|\Psi_t(w)| \leq 2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Esto es una contradicción.

□

4.3.4. **Lema.** *Existe $K > 0$ tal que para todo $x \in B$, $v \in E(x)$*

$$\left|\Psi_t(v)\right| < K\big(|v| + |\Psi_s(v)|\big) \quad \forall\, 0 \leq t \leq s \tag{4.13}$$

Demostración:

Supóngase que es falso, entonces existen $x_n \in B$, $0 \neq v_n \in E(x_n)$ y $0 \leq t_n \leq s_n$, tales que:

$$\left|\Psi_{t_n}(v_n)\right| \geq n\big(|v_n| + |\Psi_{s_n}(v_n)|\big).$$

Entonces $t_n \to +\infty$ y $s_n - t_n \to +\infty$ cuando $n \to +\infty$.

Podemos suponer que

$$\left|\Psi_{t_n}(v_n)\right| = \sup_{0\leq t\leq s_n}\left|\Psi_t(v_n)\right| .$$

Sea

$$w_n := \frac{\Psi_{t_n}(v_n)}{|\Psi_{t_n}(v_n)|} .$$

Para $-t_n < t < s_n - t_n$ tenemos que:

$$\left|\Psi_t(w_n)\right| = \frac{|\Psi_{t+t_n}(v_n)|}{|\Psi_{t_n}(v_n)|} \leq \frac{1}{|\Psi_{t_n}(v_n)|}\sup_{0\leq t\leq s_n}|\Psi_t(v_n)| = 1 .$$

Tomando subsucesiones si es necesario, podemos suponer que x_n converge a x y que w_n converge a $w \in E(x)$. Entonces $|\Psi_t(w)| \leq 1 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$, con $|w| = 1$. Esto es una contradicción.

□

4.3.5. Definición. El conjunto *no errante* $\Omega(\phi)$ de ϕ es el conjunto de puntos $b \in B$ tales que para cada vecindad $U \ni b$ existe $T > 1$ tal que $\phi_T(U) \cap U \neq \emptyset$.

4.3.6. Proposición. *Sean $\pi : E \to B$ un haz vectorial continuo y $\Psi : \mathbb{R} \to Isom(E, E)$ una $\mathbb{R}-$acción continua con el flujo inducido $\phi_t : \pi \circ \Psi_t = \phi_t \circ \pi$. Si Ψ es cuasi hiperbólico y $\Omega(\phi|_B) = B$, entonces Ψ es hiperbólico.*

Demostración:

Dado $x \in B$, existen $x_n \to x$ y $s_n \to +\infty$ tales que $\phi_{s_n} x_n \to x$, ya que $x \in \Omega(\phi|_B)$.

Sea E_n un subespacio de $E(x_n)$ tal que $\dim E_n = \dim E(x) - \dim E^s(x)$, $E^s \oplus \lim E_n = E(x)$. Afirmamos que existe $c > 0$ tal que:

$$\|\Psi_{-t}|_{\Psi_{s_n}(E_n)}\| \leq c \quad \forall\, 0 \leq t \leq s_n \,.$$

Supóngase que la afirmación es verdadera. Tomando una subsucesión si es necesario, podemos suponer que el límite $\lim \Psi_{s_n}(E_n)$ existe. Entonces

$$\|\Psi|_{\lim \Psi_{s_n}(E_n)}\| \leq c \quad \forall\, t > 0 \,.$$

Entonces $\lim \Psi_{s_n}(E_n) \subset E^u(x)$ y

$$\dim E^u(x) + \dim E^s(x) \geq \dim E_n + \dim E^s(x) = \dim E(x) \,.$$

Ya que $E^s(x) \cap E^u(x) = \{0\}$, esto completa la prueba.

Ahora probaremos la afirmación; supóngase que es falsa, entonces existen $v_n \in \Psi_{s_n}(E_n)$, $|v_n| = 1$ y $0 < t_n < s_n$, tales que $|\Psi_{-t_n}(v_n)| \geq n$. Por el lema 4.3.4, tenemos que:

$$n \leq |\Psi_{-t_n}(v_n)| \leq k(|\Psi_{-s_n}(v_n)| + |v_n|) \,.$$

Por lo tanto,

$$|\Psi_{-s_n}(v_n)| \geq \frac{n-k}{k} \,.$$

También tenemos que del lema 4.3.4,

$$\frac{|\Psi_t(\Psi_{-s_n}(v_n))|}{|\Psi_{-s_n}(v_n)|} \leq k + \frac{k}{|\Psi_{-s_n}(v_n)|} \quad para \quad 0 < t < s_n \,.$$

Sea $w_n := \frac{\Psi_{-s_n}(v_n)}{|\Psi_{-s_n}(v_n)|}$. De la estimación anterior se tiene que,

$$|\Psi_t(w_n)| \leq k + \frac{k^2}{n-k} \quad para \quad 0 < t < s_n \,. \tag{4.14}$$

Si $w_n \to w$, entonces $|w| = 1$ y $w \in \lim E_n$, así $w \notin E^s(x)$. Pero $|\Psi_t(w)| \leq k$ para todo $t \leq 0$. Esto es una contradicción.

□

Demostración del Teorema 4.0.5

Para $\theta \in \Sigma$, sean

$$\mathbf{N}(\theta) := \{\xi \in T_\theta\Sigma \mid <d\pi\xi, d\pi X(\theta)>_{\pi(\theta)} = 0\} ,$$

y $\Lambda(\theta) : T_\theta\Sigma \to \mathbf{N}(\theta)$ la proyección a lo largo de la dirección de $X(\theta)$:

$$\Lambda(\theta)\cdot\xi = \xi + \beta(\xi)X(\theta)$$

tal que $\Lambda(\theta)\cdot\xi \in \mathbf{N}(\theta)$. Sea $\Psi_s(\theta) = \Lambda(\Psi_s(\theta)) \circ d\Psi_s\big|_{\mathbf{N}(\theta)}$. Por el corolario 4.2.3, Ψ_s define una $\mathbb{R}-$acción sobre el haz vectorial $\pi_0 : \mathbf{N} \to \Sigma$. Supóngase que los haces de Green satisfacen $\mathbf{E}(\theta)\cap\mathbf{F}(\theta) = \langle X(\theta)\rangle$ en Σ. Entonces, por el corolario 4.2.3,

$$B^{\top}(\theta) \subseteq \mathbf{E}^{\top}(\theta)\cap\mathbf{F}^{\top}(\theta) = \mathbf{E}(\theta)\cap\mathbf{F}(\theta)\cap\mathbf{N}(\theta) = \{0\} .$$

Por lo tanto la acción Ψ_s es cuasi hiperbólica. Ya que φ_s preserva la medida de *Liouville*, que es positiva sobre conjuntos abiertos, entonces $\Omega(\varphi\big|_\Sigma) = \Sigma$. Por lo tanto Ψ_s es una acción hiperbólica.

Esto implica que ϕ_t es Anosov, de donde obtenemos que φ_t es Anosov. Aquí esbozamos la prueba. Para $\theta \in \Sigma$ sea $\mathcal{E}^u(\theta) \subseteq \mathbf{N}(\theta)$ el subespacio dado por: $|\Psi_t(\xi)| \le ce^{-\lambda t}|\xi|$, para todo $t > 0$ y $\xi \in \mathcal{E}^u$. Entonces $\mathcal{E}^u$ es un subhaz continuo de $T\Sigma$. Defínase

$$\mathcal{F} := \{L : \mathcal{E} \to \mathbb{R} \text{ continuo} : \ L(\theta) : \mathcal{E}^u(\theta) \to \mathbb{R} \text{ es lineal } \forall\, \theta \in \Sigma\} .$$

A cada funcional $L \in \mathcal{F}$ esta asociado un subhaz W_L de $T\Sigma$ por:

$$\begin{aligned} W_L(\theta) : &= \operatorname{Graf}(L(\theta)) \\ &= \{\xi + (L(\theta)\cdot\xi)X(\theta) \mid \xi \in \mathcal{E}^u(\theta)\} . \end{aligned}$$

Sea $\tau > 0$ tal que $ce^{-\lambda\tau} < e^{-\lambda} < 1$. Considere la transformación "entre gráficas" $T : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, correspondiente a $W_{TL} = d\varphi_\tau(W_L)$ y definida por:

$$d\varphi_\tau(\xi + L(\xi)X(\theta)) = \Psi_\tau(\xi)[T(L)(\Psi_\tau(\xi))]X(\varphi(\theta))$$

$\theta \in \Sigma$ y $\xi \in \mathcal{E}^u(\theta)$.

Afirmamos que T es una contracción. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \left|\frac{T(L_1 - L_2)(\Psi_\tau\xi)}{\|\Psi_\tau\xi\|}\right| \|X(\varphi_\tau\theta)\| &\le \frac{\|d\varphi_\tau[(L_1\xi - l_2\xi)X(\theta)]\|}{e^{\lambda}\|\xi\|} \\ &\le \frac{|(L_1 - L_2)\xi|}{e^{\lambda}\|\xi\|}\|X(\varphi_\tau(\theta))\| . \end{aligned}$$

Por lo tanto $\|T(L_1) - T(L_2)\| \le e^{-\lambda}\|L_1 - L_2\|$. El punto fijo L_* de T proporciona el haz inestable (fuerte) de φ_t. Efectivamente, si $E^u = W_L$, entonces E^u es $d\phi_t-$invariante. Además, si $\zeta \in E^u(\theta)$, entonces

$$\zeta = \xi + (L_*\xi)X(\theta)$$

con $\xi = \Lambda\zeta \in \mathcal{E}^u(\theta)$.

Ya que L_* es continua, entonces existe $Q_1 > 0$ tal que $|\zeta| \le Q|\xi| = Q|\Lambda|$, para toda $\zeta \in \mathcal{E}^u$. Ya que $\mathbf{N}(\theta)$ es transversal a $\langle X(\theta)\rangle$ y ambos son subhaces continuos de $T\Sigma$, entonces el ángulo $\angle(X(\theta), \mathbf{N}(\theta))$ está acotado por abajo y por lo tanto existe $Q_2 > 0$ tal que $\frac{1}{Q_2}|\Lambda\zeta| = \frac{1}{Q_2}|\xi| < |\zeta|$. Entonces

$$\begin{aligned} |d\varphi_t(\zeta)| &= |\Psi(\xi) + (T(L_*) \cdot \xi)X(\varphi_t(\theta))| \\ &\geq \frac{1}{Q_2}|\Psi_t(\xi)| \\ &\geq \frac{e^{\lambda t}}{cQ_2}|\xi| \\ &\geq \frac{e^{\lambda t}}{cQ_1Q_2}|\zeta| \,. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\dim E^u = \dim \mathrm{Graf}\,(L_*) = \dim \mathcal{E}^u = n - 1 \,.$$

La existencia de un subhaz continuo estable (fuerte) de dimensión $n-1$ se prueba similarmente.

$\square$

Bibliografía

[AM] R. Abraham & J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Perseus Books, 1978.

[Ar] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics Vol. 60, Springer. New York, 1989.

[CI] G. Contreras & R. Iturriaga. *Convex Hamiltonians without Conjugate Points*. Ergod. Th. & Dynam. Sys, Vol. 19, 1999. pag. 901-952.

[dC] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[E] P. Eberlein. *When is a geodesic flow of Anosov type?I*. J. Diff. Geom. Vol. 8 1973. pag. 437-463.

[GP] V. Guillemin & A. Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.

[Ha] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, Inc., 1973.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt *Modern introduction to the theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press 1995.

[MS] D. McDuff & D. Salomon. *Introduction to Simplectic Topology*. Oxford University Press, 1998.