1 20485

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES ACATLAN

MAESTRIA EN EDUCACION MATEMATICA

# LAS MATEMATICAS Y EL ARTE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN EDUCACION MATEMATICA**

P R E S E N T A :

**ING. GENARO ALTAMIRANO GARCIA**

ASESOR: MTRO. SERGIO CRUZ CONTRERAS

MEXICO, D.F. **2002**

# *AGRADECIMIENTOS*

- A LAS PROFESORAS Y PROFESORES DE LA MAESTRÍA, POR TODO LO QUE COMPARTIERON CON NOSOTROS, SUS ESTUDIANTES.
- A MI ASESOR DE LA TESIS: PROFESOR **SERGIO CRUZ CONTRERAS**, POR SU PACIENCIA, PROPUESTAS Y POR TODO LO QUE APRENDÍ DURANTE EL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN.
- A MIS COMPAÑEROS Y COMPAÑERAS ESTUDIANTES DE LA MAESTRIA.
- AL PROFESOR DE MÚSICA: **ANTELMO (*TEMO)* PÉREZ**. POR LAS ASESORÍAS SOBRE LA MÚSICA.
- AL PROFESOR DE MÚSICA: **JAVIER SILVETTI** POR EL APOYO EN LOS TEMAS MUSICALES.
- A **YOLANDA F. GODINEZ** POR EL APOYO EN LA ESCRITURA Y EL DISEÑO DEL TRABAJO DE TESIS.
- A TOD@S MIS COMPAÑER@S, AMIG@S, A MIS ALUMN@S DE LA FES ZARAGOZA, FAMILIARES, ..., CUYOS NOMBRES NO CABRÍAN EN ESTE BREVE ESPACIO. A TODOS USTEDES,

¡GRACIAS Y SALUDOS!

**GENARO ALTAMIRANO GARCÍA**

# CONTENIDO

Página

# I
# Introducción

# I. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo es un estudio acerca de la relación existente entre las matemáticas y el arte, particularmente sobre la **música y la plástica.**

Este estudio es de tipo bibliográfico y de campo, aunque la parte empírica está hecha de una forma modesta. Este segundo aspecto se realizó con la intención de observar el uso didáctico de la relación matemáticas/arte, en la enseñanza/ aprendizaje (de las matemáticas y/o el arte) en algunas escuelas.

Al inicio de este reporte se presenta un marco teórico conceptual en el que se sustenta la necesidad de un estudio de esta naturaleza, desde un enfoque pedagógico, filosófico y epistemológico (teoría del conocimiento).

En este capítulo no se hace un estudio demasiado profundo, sino que éste representa una breve justificación teórica de la importancia de la Educación Matemática haciendo uso de la interdisciplina: pedagogía - matemáticas - arte.

Más adelante, se presenta una breve historia de la relación entre las matemáticas y el arte, desde la antigüedad hasta nuestros días, pasando, necesariamente, por el Renacimiento.

Sin llegar demasiado al detalle, en el capítulo IV se plantea en lo particular la relación íntima entre las matemáticas y la música.

Se describen conceptos generales de la física del sonido, así como de los instrumentos musicales, su tesitura, la afinación, etc. Al final del capítulo se narra la elección histórica de las notas musicales existentes en relación con principios matemáticos.

En el capitulo V, se describe la relación particularizada: matemáticas/plástica; aquí se explica el origen del *número de oro* y la aplicación de éste, en las artes visuales. También se explica la importancia de la geometría en estas artes así como la necesidad histórica de la matematización en el realismo pictórico.

Una vez mostrada la conexión matemáticas/arte, en el capitulo VI, se sugieren algunas ideas que podrían ser desarrolladas en la enseñanza de las matemáticas.

Previo a las ideas didácticas que se sugieren, en este apartado, se muestran los resultados de algunas encuestas y entrevistas que se le hicieron a estudiantes y maestros que tiene relación con el tema que estamos tratando: enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el arte.

Dado que en la etapa de la investigación bibliográfica se encontró bastante información en artículos, la mayor parte de los cuales eran de experiencias de otros países, el objetivo de ir a visitar algunas escuelas de arte, fue contrastar lo que han escrito investigadores e historiadores de otras latitudes, con lo que en concreto se enseña en las escuelas que uno supone deben saber sobre el tema, actualmente

El estudio *de campo* no fue muy profundo, pero los resultados obtenidos, aunque modestos, son sintomáticos del nivel de aplicación de las matemáticas en la enseñanza del arte, y viceversa: el uso del arte en la enseñanza de las matemáticas.

Es importante enfatizar que los temas expuestos en este apartado no son propuestas pedagógicas terminadas, como son entendidas en el lenguaje de la Educación Matemática; es decir, los temas didácticos no son un diseño experimental (en lo cualitativo/cuantitativo) para poner en evidencia que se obtienen mejores resultados en el aprendizaje de las matemáticas haciendo uso de medios artísticos, aunque sobre esto sí han concluido de manera directa otros autores, precisamente aquellos que se encontraron en la bibliografía, casi todos de otros países.

Al final de este capítulo se sugieren temas que podrían ser desarrollados con mayor profundidad y con elementos más detallados. Esto sería parte de un proyecto a futuro más ambicioso, con condiciones óptimas de trabajo que permita el desarrollo de investigaciones *más finas* en la educación matemática.

En el presente trabajo los objetivos concretos son los de hacer un análisis general de la vinculación arte-matemáticas, y a partir de esto, mostrar que hay un potencial para desarrollar líneas de investigación en este campo, pues según se encontró, este tipo de estudios interdisciplinarios es nuevo en México.

No obstante lo anterior, se sugieren algunas ideas sobre formas prácticas y sencillas, pero reales, en las que se puede experimentar en ese laboratorio del conocimiento que es el salón de clases.

Al final del documento, se exponen las conclusiones de la investigación, sobre la base de estos planteamientos.

# I.1. PROPÓSITO DEL TRABAJO.

El Objetivo Fundamental de este trabajo es poner en evidencia la conexión entre **MATEMÁTICAS / ARTE** (en la plástica y la música) para utilizarla de diferentes formas en nuestro quehacer pedagógico del proceso enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

Es decir, el propósito es **estudiar, en la forma más general, la relación matemáticas y el arte, y mostrar que existe un potencial para mejorar el aprendizaje de las matemáticas a partir de esta vinculación.**

# II
# Marco Teórico Conceptual

# II.1 SITUACIÓN DE LA EDUCACIÓN EN MÉXICO

Actualmente hay una profunda crisis en la formación de los campos científico y humanístico.[1] En este país con 100 millones de habitantes, apenas hay 51 alumnos de ciencias de la cultura, 101 estudiantes de ciencias humanas, 237 que van para arqueólogos y 571 para licenciados en literatura.

Tres mil 92 pretenden ser filósofos y 4 mil 517 estudian historia. Pero los hay menos: sólo 19 personas estudian ciencias marítimas, 38 quieren ser biólogos ecólogos y sólo 2 por ciento de la población escolar está en el área de ciencias naturales y exactas, según datos de la Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES).

Si en México no se fomentan las ciencias – afirma una investigadora[2]- estamos condenados a ser un país maquilador, o tenemos que seguir armando productos. Y si no se cultivan las humanidades, se corre el peligro de que se debilite nuestra gran tradición cultural, de que se pierda parte de lo que somos, nuestra historia, nuestra filosofía, áreas que permiten la crítica y la reflexión profunda. Pues si sigue este patrón de demanda de carreras, en muy poco tiempo en México no habrá historiadores que construyan nuestra memoria nacional ni filósofos que analicen quiénes somos y hacia dónde vamos. Hoy la mayoría de los alumnos cursa una carrera de presunta "riqueza y fama".

Para la maestra Beristáin "las humanidades son el fundamento de las ciencias exactas, si deseamos que la investigación científica rinda frutos, que no destruyan el planeta, que no alimenten la violencia, la guerra, el neocolonialismo depredador. El cultivo de las humanidades es lo único capaz de repercutir en el animal humano que somos, haciéndonos más humanos y menos animales" (Beristain H. En: Avilés, 2001).

El neoliberalismo a nivel mundial, y el Estado neoliberal mexicano, en particular, ha desalentado la formación en dichas disciplinas y con ello se ha abierto paso a una crisis que se refleja en la disminución alarmante del número de alumnos que estudian alguna carrera científica o humanística. Datos de la ANUIES confirman lo anterior: 50 % de la matrícula nacional a nivel licenciatura se concentra en el área administrativa y de ciencias sociales, y 32.5 % en el área de ingeniería y tecnología, en contraste sólo 2 % de la población escolar está en una carrera del área de ciencias naturales y exactas y únicamente 3.9 % en una disciplina del área de las humanidades y la educación[3].

Esta crisis se inició en los años 80's, a la par de la aplicación de la política neoliberal en México. El Lenguaje neoliberal todo lo quiere traducir a "costo-beneficio", como si la cultura,

---

[1,2,3] Avilés, K. (2001)

los valores y la visión social que representan las universidades públicas pudieran medirse con parámetros inmediatistas[4].

Algunos especialistas indican que comenzó a finales de los 60, en el periodo diazordacista, cuando el Estado vio como enemigo potencial del sistema priísta a la capacidad crítica que se genera en los espacios universitarios.

De cualquier manera, se trata de un fenómeno en el que intervienen varios factores. Uno de ellos se relaciona directamente con que las universidades públicas no han tenido un crecimiento como el que sí han registrado las privadas y los institutos tecnológicos, en donde las humanidades y las ciencias -en la mayoría de ellos- no son una prioridad por razones de "mercado". Tan solo en los últimos 10 años, la UNAM redujo su matrícula en 70 mil alumnos[5]. A pesar de eso, las instituciones públicas aportan 99 % de conocimiento científico del país.

Otro de los factores importantes de la crisis educativa en México es el índice de deserción: de cada 100 niños que estudian la primaria un 0.4 % termina una maestría. 0.1 % de la población total mexicana estudia un posgrado (100 mil estudiantes en todo el país). Y solo el 19 % de jóvenes (entre 18 y 25 años) tienen posibilidades de estudiar una carrera.

Esto mantiene al pais en una "catástrofe silenciosa"[6], el analfabetismo funcional. El promedio de lectura por habitante en México es de 2.8 libros anuales, y en una lista de 108 países elaborada por la UNESCO, ocupa el penúltimo lugar de lectura, mientras que Noruega la encabeza con 47 títulos *per capita*. Esto resulta insultante, más todavía si se considera que la población en nuestro país alcanza ya los 100 millones de habitantes, contra los apenas 4 millones 382 mil de aquella nación nórdica.

La educación, y con ello la lectura, representa un asunto prioritario para los países del Primer Mundo, los cuales no escatiman recursos en invertir en ese ámbito, al que consideran uno de los principales detonadores de la economía, y factor de productividad.

En 1997, de los 93 millones de habitantes en México, alrededor de 79 millones no asistieron a una biblioteca el año anterior, de ellos, 39 millones están alfabetizados y se encuentran en plena edad productiva. El 9.8 por ciento de la población es analfabeta[7]. En México hay un potencial de sólo 15 millones de lectores, el resto de la gente no lee, pues, "leer chatarra no es leer", dice Juan Villoro (en: Paul, C. y Vargas, A., 2001). El índice nacional de analfabetismo simple de los mexicanos mayores de 15 años, fue de 10.6 por ciento; esto significa que el analfabetismo funcional rebasa por mucho esta cifra, lo que refleja sólo la punta del *iceberg* de la catástrofe silenciosa.

---

[4] Herrera, C. e Ibarra, M. (2001)
[5] Avilés, K. (2001)
[6] Paul, C. y Vargas, A. (2001)
[7] SEP: Programa de Desarrollo Educativo (1995-2000)

No se pretende hacer aquí un estudio social de esta situación. Sino aportar el estudio de un aspecto de la educación matemática en un contexto histórico, filosófico y concreto.

En un contexto histórico porque la educación matemática tiene su propia epistemología producto del desarrollo histórico de esta ciencia. Filosófico, por que la actividad educativa va a lo más profundo de las reflexiones que se plantea el hombre: ¿qué soy yo, ser humano?, ¿cuál es mi papel en la sociedad y en la historia?, ¿el por qué y para qué de la educación?, ¿qué es el ser y el deber ser?, etc. Y concreto, porque no se trata "sólo de interpretar el mundo, sino de transformarlo", desde nuestro ámbito de la educación.

Los profesores de matemáticas no tenemos como objeto de estudio la producción de nuevas matemáticas, sino el de ser "facilitadores" del aprendizaje en los estudiantes.

Y ya a partir de aquí, vamos fijando nuestra posición y marcando una distancia de las teorías que afirman que el conocimiento *se transmite*, o peor aún, de las teorías conductistas que se siguen aplicando como dogma, sin una reflexión.

Según Carlos Zarzar Charur, en 1994 el 90 % de los profesores de la UNAM no tenían una formación pedagógica, y su práctica educativa es intuitiva y empírica, de su experiencia directa en su proceso de formación profesional personal[8]. A siete años de distancia, es imposible que haya cambiado significativamente esta situación.

El que escribe esto, al igual que Zarzar, se ubica en la tendencia de profesores que afirman que el conocimiento *se construye* (creer en esto no significa necesariamente ser consecuente, sino que se está en un proceso de constante aprendizaje y experimentación). Es decir, los docentes, además de conocer profundamente la disciplina de estudio (conocer los contenidos) y saber enseñarla, debemos propiciar en lios alumnos aprendizajes significativos, sobre la base de conocer y saber utilizar, mínimamente, las cinco habilidades básicas para la docencia, a saber:

- Definir claramente los objetivos de aprendizaje.
- Diseñar el plan de trabajo de un curso escolar y redactar el programa para los alumnos.
- Desarrollar el encuadre de las primeras sesiones.
- Diseñar e instrumentar actividades de aprendizaje y de evaluación de los aprendizajes.
- Integrar y coordinar equipos de trabajo y grupos de aprendizaje.

La mayor parte de los profesores no desarrollamos una planeación de los contenidos temáticos de nuestras clases con suficiente tiempo y organización y nos resistimos a integrar y coordinar equipos de trabajo y grupos de aprendizaje. La consecuencia de esto es que no se obtienen óptimos rendimientos de nuestro quehacer educativo.

A continuación, un brevísimo bosquejo acerca de la visión que se ha tenido en diferentes épocas acerca de la vinculación entre las matemáticas y el arte

[8] Zarzar, CH. (1994)

**Las matemáticas y el arte**

*"Contempladas en sus auténticos valores, las matemáticas no sólo poseen verdad, sino suprema belleza,... es sublimemente pura, y susceptible de la perfección severa que sólo el arte más grande puede exhibir"*[9]

En esta epoca, cuando la especialización significa aislamiento, puede resultar sorprendente escuchar que las matemáticas y el arte están íntimamente relacionadas; no obstante que ambas han sido estrechamente identificadas desde la antigüedad, y en el Renacimiento,

Aunque el capitalismo se ha encargado de separar y debilitar esta relación (el taylorismo del trabajo intelectual), los cambios revolucionarios recientes en ambos campos, el arte y las matemáticas, han abierto nuevas posibilidades para la interacción sin debilitar el papel potencial de cada una como servidora e inspiración una de la otra.

Para empezar, las artes visuales al estar en el espacio, son, por definición, artes del espacio. Por lo tanto, no es sorprendiente que la Geometría Euclideana, está evidentemente en la arquitectura clásica.

El análisis de grandes pinturas revelan las estructuras basadas en líneas, círculos y en general figuras geométricas.

Platón afirmaba que "todas las cosas que integran una obra artística, participan de alguna manera en la medición de la obra misma". Registros y monumentos antiguos testifican los cálculos efectivos y la medición precisa de longitudes y ángulos. Al menos, en el quinto siglo a. C., los artistas buscaban las proporciones ideales y principios matemáticos de la composición.

Los pitagóricos tenían una tendencia mística de relacionar los números con la belleza. La sección de oro fue conocida por los pitagóricos pero aparece primero con Euclides en la construcción del pentágono regular. Euclides proporciona un método de corte de un segmento lineal (una "sección") tal que la razón del segmento completo a la parte mayor es la misma que la parte mayor a la menor. La razón común es un número irracional,

$$(\sqrt{5} + 1)/2,$$

con ciertas propiedades que siguen sorprendiendo a los matemáticos de nuestros días. En el Renacimiento continuaron las discusiones filosóficas y el uso de la sección de oro en el arte de la pintura.

[9] Russell, B., (1980)

Las matemáticas y el arte están mutuamente vinculadas en el área de la perspectiva. Siglos de experiencia artística precedieron a la *Optica* de Euclides, en la cual se explican las ilusiones visuales, incluyendo la convergencia aparente de lineas paralelas. Después de un largo periodo de ignorancia y carencia de interés, se perfeccionó una ciencia de la perspectiva por los artistas y matemáticos del Renacimiento – principalmente Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca, Pacioli, y Durero.

En los últimos cien años ha tenido un desarrollo la geometría proyectiva, "la creación matemática más original de los últimos 17 siglos"[10] . Las nuevas matemáticas y el nuevo arte son tal su relación íntima que superarán la época del Renacimiento. Ya se está viviendo esto en la computación como medio de relación.

Sullivan (John William Navin), 1886-1937, consideraba a la ciencia como un arte, al igual que la música o la pintura. Admitía que hay obras científicas que no son arte; pero las estructuras teóricas de Gauss, Einstein o Maxwell son respuestas originales, individuales, y expresiones exactamente del mismo tipo que las obras creadoras de Beethoven o Dostoievsky. Una teoría científica es, en palabras de Sullivan, la manifestación de un cierto tipo de "conciencia". Es una conciencia que posee elementos de libertad y de sujeción, de escepticismo, una conciencia que no es solamente pasiva, sino que hace realmente el mundo tal como lo entendemos. Puesto que las matemáticas son una actividad totalmente libre, sin condicionar por el mundo exterior, es más justo llamarlas un arte que una ciencia, - afirmaba Sullivan -.

Las matemáticas, tanto como la música, o cualquier otro arte, constituyen uno de los medios por los cuales nos elevamos a una completa autoconciencia. Es cierto que la función real del arte consiste en aumentar nuestra propia conciencia; hacernos más sensibles a lo que somos, y por ello de lo que realmente es el Universo en que vivimos. Y puesto que las matemáticas, a su propia manera, realizan también esta función, no sólo son estéticamente encantadoras, sino profundamente significativas. Son un arte y un gran arte[11].

Además de formar a seres humanos especializados (que son muy necesarios) en una rama del conocimiento, es preponderante formar estudiantes integrales que comprendan su responsabilidad en este momento histórico que les ha tocado vivir. Humanizar a las matemáticas a través del arte, también contribuye a este proceso.

[10] Kline, M. (1953)
[11] Newman, J.R. (1994)

## II.2. FIN DE LA EDUCACIÓN

Al plantearnos en qué consiste el fenómeno educativo, nos aparece con insistencia el para qué del proceso educativo. Es decir, estamos planteando el problema del fin.

El problema del fin, desborda el campo específico de la Pedagogía para entrar en el terreno de la Filosofía, puesto que se instala en el "deber ser". No es que no le competa, sino que "el problema del fin toca las cuestiones más profundas del problema de la educación". [12]

La idea de perfección, de intencionalidad, etc., son un acercamiento al problema teleológico. En el centro de la educación está el hombre, y todo proceso de perfección de este hombre requiere previamente contestarse las cuestiones fundamentales sobre su existencia, esencia, origen y fin. Y estos son problemas filosóficos.

A la Educación le es ineludiblemente necesario el partir del conocimiento de estas cuestiones fundamentales. Por eso interesan al campo de la educación. Sin ellas no tiene sentido la educación misma.

Si la educación pretende "perfeccionar" al hombre, ésta sólo estará justificada en razón de la concepción del hombre; en definitiva, el sentido de la vida misma. Estamos ante problemas de la más cepa filosófica.

La pedagogía tiene que partir de la idea del Hombre, de la idea de la vida, del para qué de su existencia y el sentido que ésta tiene, para extraer de ahí principios racionales que justifiquen el proceso educativo.

En la moderna literatura pedagógica, aparecen los términos fin y objetivo, utilizados indistintamente. El fin es aquello que se pretende alcanzar en último término, como síntesis de todas las aspiraciones del proceso educativo. Podemos decir que el fin de la educación es "perfeccionar al hombre".

Dado que todo acto educativo no sólo está integrado en el proceso, sino que además es voluntariamente realizado como conducente al fin, es intencional; en definitiva, el proceso educativo debe ser ordenado, planificado y programado por la razón.

Cuando se habla de objetivos de la educación, nos referimos a aquello que se intenta alcanzar en una o varias dimensiones concretas y que deben confluir "necesariamente", además de estar sometidas al fin de la educación. La educación, trata de perfeccionar al hombre, esto es, hacerlo más valioso unitariamente y en sus múltiples manifestaciones. Educar es, desde una perspectiva axiológica, incitar al hombre a la realización de valores. Proyectar y realizar la vida es preferir, seleccionar, estimar como paso previo a su

[12] Mantovani, (1960)

realización. El construir un proyecto de vida supone una constante valoración de la realidad, al tiempo que una adscripción comprometida a unos valores.

La educación actual se orienta por una serie de principios que la definen y concretan. La educación tiene los siguientes principios.

1. Principio de la individualización.
2. Principio de la socialización.
3. Principio de la autonomía.
4. Principio de la creatividad.
5. Principio de la actividad.

El término "individualización" hace referencia a lo individual, no al individualismo. Esto es, lo que nos pertenece a cada uno, lo que "nos" es propio y exclusivo desde alguna perspectiva, aquello que nos hace particulares y únicos. El principio educativo de la individualización reclama, que el centro de acción educativa sea el sujeto, irrepetible y único, y que a su peculiar condición se adapten intereses y procedimientos. Todo individuo reclama en tanto que sujeto educable la máxima perfección, y esto sólo es posible si la educación incide en él de modo diferenciado, porque se educa singularmente. Desarrollar las virtudes individualizadas exige una educación individualizada. El excelente profesor es, y ha sido, aquel capaz de comunicarse cálidamente con cada alumno. Lo fundamental y primero en la acción educativa es el conocimiento previo del alumno. Conocido el sujeto será posible adaptar desde la primera comunicación la educación a sus características personales.

El principio de la socialización es porque se educa "por" la comunidad, "en" la comunidad, y "para" la comunidad; única realidad en la que el sujeto encuentra los apoyos necesarios para vivir.[13] El hombre es con los demás. "Nuestro bien depende del bien común". [14]

La educación proporciona al hombre conciencia de su lugar en la sociedad. El hombre, individualmente considerado, es pura abstracción, y aún más, una quimera.

El término autonomía hace referencia estricta a la capacidad del hombre de autogobernarse. De ser dueño de uno mismo en el sentido de determinar sus propias acciones. Se es autónomo en la medida en que se es libre. La libertad es sobre todo elección, lo que supone iniciativa en la acción, expresión patente de la autonomía. Es preciso educar "en" libertad, para conseguir que el sujeto sea libre.

La importancia de la creatividad queda patente cuando se contempla el impulso que han dado a las investigaciones en torno a este tema. El desarrollo del principio de la actividad a nivel práctico en las instancias educativas, ha dado lugar a la aparición de conjunto de técnicas que podemos denominar activas y que son prácticamente ilimitadas.

---

[13] Abbagnano, (1964)
[14] García H. (1963).

# II. 3 FUNDAMENTO FILOSOFICO

Nuestra concepción de la educación está sustentada en la Filosofía del Materialismo Dialéctico. Se llama materialismo dialéctico porque para estudiar la naturaleza, la sociedad humana y el pensamiento, emplea el método dialéctico, y porque su teoría filosófica es el materialismo rigurosamente científico.

Marx y Engels, creadores del materialismo dialéctico, se apoyaron en todas las grandes adquisiciones del pensamiento de su época. Todo lo mejor creado por la filosofía, fue revisado por ellos con espíritu crítico. Consideraban el materialismo dialéctico como el producto del desarrollo anterior de las ciencias y de la filosofía. Toman de Hegel la parte racional, desechando la corteza idealista, imprimiéndole un carácter científico. El materialismo de Feuerbach era inconsecuente, metafísico y antihistórico, Marx y Engels no tomaron de él sino su médula central – la solución materialista del problema de la relación entre pensamiento y el ser y desecharon las superposiciones idealistas, éticas y religiosas-, impulsando el materialismo y creando una forma superior de materialismo: el Materialismo Dialéctico.

El marxismo, como toda teoría, no es un dogma, como algunos erróneamente lo creen, sino es *una guía para la acción*, que Lenin sintetiza con su "**sin teoría** revolucionaria **no hay práctica** revolucionaria". El marxismo es el sucesor natural de lo mejor que la humanidad creó en el siglo XIX: **La filosofía alemana, la economía política inglesa y el socialismo francés**, estas son las tres *fuentes* del marxismo que son a la vez sus tres *partes integrantes*.[15] No nos detendremos a desarrollar estos aspectos, pues esto nos llevaría por otro camino que no es el fin del presente trabajo, sólo agregaremos que esta cosmovisión ha sido enriquecida por muchos filósofos, economistas, matemáticos, pedagogos e intelectuales honestos de todo el mundo, a lo largo de más de 150 años. Aunque los filósofos idealistas nieguen esta concepción materialista del mundo, la "terca" realidad la va reivindicando.

## EL CONCEPTO DE HOMBRE

En el materialismo histórico y dialéctico, el *espíritu* es sólo un producto – si se quiere muy especializado – del cerebro. Pero esta materia evoluciona constantemente de acuerdo con unas leyes determinadas. El hombre (hablando como género humano), es el resultado de esta evolución El hombre es sobre todo un hombre - sociedad, es decir, aislado no es hombre. Su esencia es el *ser social*. Se es hombre con los demás, y son los demás, esto es, la sociedad de la que forma parte, quienes determinan y posibilitan esta humanidad. Y el ingrediente socializante que permite superar y ser a la vez sociedad es el trabajo.[16]

---

[15] Lenin, V. (1986)
[16] Castillejos, (1976)

Esta unión trabajo-educación, va a ser una de las grandes ideas fundamentales de la pedagogía marxista. De manera muy general, en este planteamiento se precisan ciertos elementos constituyentes: la instrucción intelectual, el adiestramiento técnico, la educación física, y el trabajo productivo, es decir, **la educación integral.** El sistema educativo recogerá estos elementos y los conjugará de acuerdo con los siguientes criterios: graduación, adaptación a la capacidad y nivel de los alumnos. Piaget diría que el nivel de enseñanza debe estar acorde a la estructura cognitiva de los estudiantes.

La filosofía marxista trata de recuperar al hombre destruido, "alienado" por una sociedad desequilibrada e injusta que es la capitalista, posmodernamente llamada *Neoliberalismo*, que no es más que la etapa superior del capitalismo: *el imperialismo*, ya previsto por Lenin en su *El Imperialismo y los imperialistas* a principios del siglo XX, cuyos rasgos fundamentales son[17]:

1) La concentración de la producción y del capital llegada hasta un grado tan elevado de desarrollo que ha creado los monopolios, los cuales desempeñan un papel decisivo en la vida económica.
2) La fusión del capital bancario con el industrial y la creación sobre la base de este "capital financiero", de la oligarquía financiera.
3) La exportación de capitales, a diferencia de la exportación de mercancías, adquiere una importancia particularmente grande
4) La formación de asociaciones internacionales monopolistas de capitales, las cuales se reparten el mundo, y
5) La terminación del reparto territorial del mundo entre las potencias capitalistas más importantes.

El fin de la educación entonces es conseguir un hombre "desalienado" que encuentre en la sociedad el fin de su existencia. A la sociedad *perfecta* se llegará también por la educación, es la sociedad la que plantea las exigencias, y a ella debe atender la educación. El trabajo servirá en la escuela para conseguir el enlace con la sociedad y con la naturaleza y, a la vez, lo más importante, la "desalienación" del hombre, vale decir: convertir al hombre en un ser libre, pleno e integral.

Pero esto no es fácil, hay mucha gente, inclusive progresista, que sigue usando el premio y el castigo como medio de enseñanza. Paulo Freire a lo largo de su vida desarrolló una alternativa a esta teoría conductista, la llamada *Pedagogía Liberadora* (q. v., a manera de ejemplo: Pedagogía del Oprimido, 1984). Existe un extenso bagaje bibliográfico de esta filosofía.

Este trabajo es una investigación interdisciplinaria porque toca temas de Matemáticas, del Arte, la Pedagogía y la Filosofía, entre otras. Va de la mal llamada *ciencia dura*, a las

[17] Lenin, V. (1978)

humanidades. El que escribe no cree que un buen profesionista es el que saca muy buenas calificaciones y nada más; sino aquél que tiene una amplia cosmovisión del momento histórico que le tocó vivir. Por eso es que, como sujetos de la educación debemos reflexionar profundamente sobre la influencia que tenemos sobre los estudiantes, y antes de instruir (o además de) es fundamental formar seres humanos integrales, plenos, cultos y por lo tanto libres –como diría José Martí-.

En otras palabras, el autor de esta investigación, coincide en la necesidad de la *construcción* de un *Hombre Nuevo* (genéricamente hablando), concepto acuñado por los clásicos del marxismo y profundizado por Ernesto Guevara[18]. Este trabajo va en esta línea. Un *Hombre Nuevo* que desarrolle todas sus potencialidades humanas: intelectuales, físicas, artísticas, afectivas, ..., aunque para ello se entre en franca contradicción con los que defienden el paradigma neoliberal: adiestrarse en una especialización para servir a los intereses del mercado.

Este trabajo es una pequeña contribución en la búsqueda de una alternativa a la pedagogía del neliberalismo, esa estructura que está por encima de los gobiernos, de los estados – nación, de la humanidad.

Un ejemplo de este Estado global en lo económico, son los ingresos combinados de los quinientos gigantes que alcanzaron en 1994 la suma de 10245.3 billones de dólares, es decir el 50 % mayor que el producto interno Bruto (PIB) estadunidense; 10 veces mayor (el 1100 %) que el PIB de América Latina y del Caribe en 1990, ¡43 veces mayor que el PIB de México (237.750 mmd)[19]!

Reafirmamos la idea de que el fin último de la educación es lograr la plenitud del hombre y la mujer, alcanzar un ser humano desalienado, que "salga del reino de la necesidad para entrar al reino de la libertad", al margen de los preceptos del gran capital, cuyo móvil sustancial es la ganancia.

---

[18] Guevara, E. (1977)
[19] Chomsky, N. y Dieterich, H. (1995)

# II.4. TEORÍA DEL CONOCIMIENTO

## CIENCIA Y EPISTEMOLOGÍA

**La crítica epistemológica de la educación**

El objeto de la epistemología es el conocimiento científico y desde la práctica, la epistemología busca las condiciones que hacen posible conocer algo y está ligada siempre a los procesos de investigación, nos lleva a entenderla como una reflexión crítica abierta[20].

En esta investigación se pretende hacer un estudio general de la relación existente entre las Matemáticas y el Arte (con la música y con la plástica), con un análisis desde la óptica epistemológica de la totalidad con un enfoque genético estructural que pregunta por las causas de los fenómenos, su interrelación, su historia, su proceso de cambio, movimiento, contradicciones.

La Ciencia es el conocimiento ordenado de los fenómenos naturales, económicos y sociales en sus relaciones mutuas. El conocimiento científico busca mediante el análisis los nexos entre los elementos y partes de la totalidad así como las regularidades (leyes) que se presentan en la naturaleza, para poder prever los acontecimientos.

El análisis científico parte del conocimiento previo elaborado por generaciones pasadas y se levanta sobre él para aportar, ordenar y sistematizar nuevos conocimientos. El Objetivo de la ciencia es conocer el medio que rodea al ser humano; pasar del conocimiento superficial de los fenómenos, a la esencia de los mismos. Identificar las causas y los efectos, las interacciones, interrelaciones, interpretaciones: la concatenación universal.

La ciencia parte de la realidad y termina siempre en ella. Empieza y acaba siempre en la naturaleza, en una realidad objetiva la cual existe independientemente del pensamiento, no está exenta de errores, pero tiende siempre a superarlos mediante el perfeccionamiento de la práctica, de la investigación científica.

Las teorías (conjunto de conocimientos lógicos y ordenados que explican algún fenómeno de la naturaleza o de la sociedad), las leyes (regularidades), las hipótesis (respuestas tentativas de un fenómeno que está por investigarse, pero que parte del conocimiento existente), los conceptos (ideas que nos hacemos y definimos de los objetos que vamos conociendo), las categorías (conceptos con que definimos los fenómenos más abstractos) y el método (el procedimiento utilizado en el análisis), son todos elementos de la ciencia y permiten el conocimiento más completo de la realidad.

[20] Foucault, M. (1979)

Sin estudio, sin análisis de la realidad, el hombre está condenado a ser víctima de su propia ignorancia, de la explotación, la mentira y la prepotencia de las clases dominantes.

La ciencia exige precisión en los conceptos, rigurosidad en el análisis y coherencia lógica en la teoría. La ciencia es el único instrumento que le permite al hombre comprender su realidad para pasar de ser dominado por las circunstancias, a ser constructor de su propia historia.

El marxismo no sólo aporta el método materialista dialéctico, *es la Ciencia* que estudia las regularidades (leyes) del capitalismo, hoy dominante y hegemónico a nivel mundial. Por lo tanto, si el sistema permea todas las relaciones sociales y entre ellas a la educación, a la conciencia que nos hacemos del mundo; entonces es responsabilidad de los educadores conocer las leyes fundamentales que rigen dicho sistema para comprender el contexto amplio de nuestra labor educativa.

Si bien la burguesía de los siglos XVII y XVIII recurrió a la ciencia para echar abajo los dogmas religiosos que le impedían desarrollar el comercio y la producción a gran escala debido a las trabas que le imponía la iglesia católica, aliada a la corrupta y despilfarradora aristocracia feudal; ahora las condiciones han cambiado y en la medida en que las fuerzas productivas chocan con los intereses sociales, tiene necesidad de alentar todo tipo de fanatismos y mentiras para defender sus privilegios.

La pregunta fundamental de la epistemología en términos generales, es: ¿cuáles son aquellas condiciones que hacen posible el conocimiento de las ciencias.[21] Como bien sabemos, hay muchos tipos de ciencias. Para cada una de estas ciencias le corresponde una epistemología particular. O sea, un modo de conocer la realidad de esa ciencia. Esto significa que hay una epistemología de la Sociología, de la Economía, de la Historia, de la Psicología, de la Física, de la Biología. También hay una epistemología de la Educación Matemática.[22]

La epistemología de las ciencias de la educación, en general, se pregunta por la racionalidad del proceso que hacemos para investigarlas[23]. Para conocer algo de la realidad, hacemos primero una investigación por medio de varios recursos: preguntamos, observamos, experimentamos, verificamos, realizamos conclusiones, etc. Entonces, la epistemología es una segunda reflexión, pero, ¿cuál es esa segunda reflexión? "Es el estudio crítico de los principios, hipótesis y resultados de las diversas ciencias, con el fin de determinar su origen lógico, su valor y alcance y objetivos".[24]

Esto significa que la epistemología consiste en hacer una reflexión sobre los principios, prejuicios, valores, ideas, etc., que usamos para ver, sentir e investigar la realidad, la manera como hacemos las hipótesis y cómo formulamos los resultados.

---

[21] Bachelard, G. (1974)
[22] Skemp , (1993): 17. Ver también a Orton, A. (1984)
[23] Arroyo, A.s/f.: 1. Giménez, G. (1978)
[24] Luengo, E. (1982)

La persona que estudia la epistemología busca la respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué es conocer?, ¿cómo se conoce?, ¿cuáles son los objetos y los sujetos de ese conocimiento?. Sin embargo, la epistemología pregunta por un tipo especial de conocimiento: **el científico**, y desde una práctica: la de las diversas maneras o procesos que hacemos para investigar las diversas ciencias.

Así, una cuestión básica y primera de la epistemología se refiere a: ¿qué es la ciencia de la educación?. No solo se plantea esta pregunta, sino que va más allá: ¿cuáles son las condiciones de posibilidad?. En la relación que existe entre sujeto (la persona) y objeto real (la cosa que se quiere conocer) nos preguntamos: ¿cuál es ese proceso de investigación - acción que realizamos para que el sujeto (o la persona) conozca al objeto?. En otras palabras: ¿cuáles son los pasos que hacemos para conocer algo?. Esta pregunta puede además descomponerse en los dos extremos:

1. Desde el punto de vista del sujeto (la persona): ¿qué hace posible que la persona pueda realizar un acto de conocimiento?. ¿Cómo es que ella puede conocer?.

2. Desde el punto de vista del objeto (la cosa): ¿qué hace posible en el objeto para que lo podamos conocer?. ¿Cómo es que hacemos para que el objeto sea aprehendido?.

Aquí estamos hablando de la relación entre: Concepto (la idea que nos hacemos de algo), y realidad (las cosas); y, desde otro punto de vista, sujeto cognoscente (la persona que conoce) y objeto aprehensible y que se puede transformar [25] (la cosa que se conoce).

La epistemología no se pregunta únicamente por las condiciones que hacen posible el proceso científico para conocer algo. También se pregunta por aquello que nos *estorba* para conocer algo y que es causa de caer en los errores. En este sentido, la epistemología es un análisis para encontrar lo que hace posible la equivocación.[26] **¡Es la investigación de los errores!.**

El error es la escuela de la ciencia, porque gracias a los errores las ciencias avanzan. Para ello necesitamos una continua reflexión epistemológica para descubrir errores. Si no fuera *así, los nuevos descubrimientos de las ciencias dependerían de la puntería de los puros* genios, que hay pocos.[27]

Esta manera de entender la epistemología como siempre ligada a los procesos de investigación y en este caso de educación, nos lleva a entenderla como una reflexión crítica abierta.

[25] Luengo, E. (1982)
[26] Bourdieu, P. (1975)
[27] Bachelard, G. (1974)

Esto no significa que necesariamente tenemos que seguir un camino igual para todo. En cada investigación reflexionada críticamente, la epistemología puede dotarse de nuevas conclusiones o de matices a las ya logradas. También se pueden lograr nuevos avances no *sólo del error, sino de la verificación de los aciertos.* Puede incluso discutir o contradecir avances anteriores y que no han sido tan acertados.

Por tanto, la epistemología busca las condiciones que hacen posible conocer algo, así como las condiciones que estorban al conocimiento científico.

**Relación entre epistemología y metodología.**

Podemos entender por metodología: la estrategia de investigación en la que se coordinan varias técnicas para alcanzar y transformar un objetivo de conocimiento.

Para una postura epistemológica se desprende una metodología, y para la pedagogía una teoría sociológica educativa.[28]

En otras palabras: si hay una teoría sobre la educación es por que hay una ciencia pedagógica que la formula, si hay una metodología es por que hay una postura epistemológica para conocer la realidad.

Ya dijimos que la epistemología es una segunda reflexión. De esta reflexión nos surgen una serie de conclusiones generales sobre las condiciones que hicieron posible los conocimientos científicos. Estas conclusiones las usaremos en todas las investigaciones que hagamos después como presupuestos epistemológicos de los métodos particulares.

De esta forma nos encontramos a la epistemología como elemento previo a una nueva investigación y así sucesivamente. Estar inmersos en el proceso de enseñanza aprendizaje, es una manera de ser investigadores de la educación.

Con esta postura o respuesta a las preguntas epistemológicas fundamentales, construimos principios metodológicos básicos.

El conjunto articulado y coherente de principios y la selección de técnicas apropiadas a él, formarán la estrategia general o metodología. Así, tomamos en cuenta a la epistemología en los presupuestos previos de una investigación y también como una acción posterior a ella.

Podemos formular entonces un esquema de relación entre la metodología y la epistemología:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Presupuestos epistemológicos | ⇒ | Criterios metodológicos | ⇒ | Aplicación metodológica | ⇒ | Crítica epistemológica del proceso realizado. |

[28] Luengo, E. (1982)

Trataremos de explicar los principales presupuestos epistemológicos que están presentes en nuestra metodología del estudio.

**Los obstáculos del conocimiento y la metodología**

La sistematización epistemológica que han realizado diversas ciencias nos señala que en el proceso del conocimiento nos enfrentamos con barreras y entorpecimientos, con causas de estancamiento y de retroceso en el conocimiento de una realidad. Los obstáculos epistemológicos, ¡son el origen de los errores! Especialmente hacia ellos será dirigida la crítica epistemológica.

En el proceso histórico de las ciencias, el conocimiento no se ha conquistado en forma lineal y sin dificultades. El saber y el conocimiento que hemos ido logrando no han sido por la simple acumulación de ellos. Las ciencias se han ido abriendo paso en una constante lucha contra las apariencias[29] en contra de los errores que están disfrazados de verdades o certezas.

Todo eso lo desarrolló a profundidad el epistemólogo francés Gastón Bachelard, a través de su concepto **de obstáculo epistemológico.**[30]

Según Bachelard "se conoce en contra de un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal adquiridos " o "prejuicios" o conocimientos "ya constituidos" e incluso, "costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas". Para el historiador, todo "hecho mal interpretado" se convierte en un obstáculo para entender otros hechos, ya que se partió en falso. Nuestra nueva actitud científica implica estar atentos a descubrir los errores iniciales y "derribar los obstáculos acumulados por la vida cotidiana". Por ejemplo, cuando decimos que sabemos matemáticas por que me aprendí de memoria 20 ecuaciones y por eso "saqué nueve", y no nos cuestionamos de fondo el significado de aprender, nos quedamos con una falsa idea de lo que es saber matemáticas. Es decir, necesitamos una ruptura entre el contra pensamiento y el pensamiento. Por todo lo anterior, si descubrimos los obstáculos epistemológicos nos ayudará a encontrar los modos para atacarlos. Para Bachelard es importante investigar la "psicología del error, de la ignorancia y de la reflexión" que son las fuentes de un conocimiento mal adquirido.

La tarea científica implicará, entonces, encontrar y reflexionar sobre los obstáculos para el conocimiento: ¿cuáles son y por qué impiden el conocimiento? Hacer esto permitirá desarrollar un trabajo más crítico. Se pretende aprender del error y de la reflexión.

Por tanto, hay barreras epistemológicas en la relación sujeto cognoscente (persona que conoce) – objeto conocible y transformable (la cosa que queremos conocer y transformar) y podemos encontrar preconceptos atrapados muchas veces en valoraciones no criticadas ni

---

29 Kosik, K. (1981

30 Althusser, L. (1979)

analizadas. En el proceso que hacemos para conocer algo aparecen los "entorpecimientos y las confusiones"[31].

Kosik distingue entre las representaciones o categorías del "pensamiento ordinario" o *sentido común* y *concepto*[32]. Siguiéndolo, aquí hablaremos de **preconceptos** y de **conceptos**. Al hablar de las valoraciones no criticadas como obstáculos, no estamos diciendo que debemos evitar los juicios de valor como regla epistemológica. Nos referimos aquí a las valoraciones como: "adhesiones inmediatas a un objeto concreto, captado como un bien, utilizado como un valor", a la búsqueda de "satisfacciones íntimas"[33], no de reconstrucción teórica y transformación real de un objeto. Estas valoraciones pueden ser conscientes o inconscientes y generalmente surgen en las necesidades de la vida cotidiana y no son trabajadas teóricamente. Por ello son "no criticadas". Bachelard propone el siguiente esquema de relación entre obstáculo epistemológico y metodología:

(A) VALORACIONES Y PRECONCEPTOS COMO OBSTÁCULOS

↓

(B) PROCESO DE INVESTIGACIÓN

↓

(C) CONCLUSIONES ERRONEAS Y CORRECTAS.

↓

(D) CRÍTICA EPISTEMOLÓGICA DE A, B Y C

↓

(E) CONCLUSIÓN: DETECCIÓN DE OBSTÁCULOS

↓

(F) PRECISIÓN DE LOS PRESUPUESTOS EPISTEMOLÓGICOS

↓

(G) METODOLOGÍA

El esfuerzo propiamente crítico estará en:

[31] Bachelard, G. (1974)
[32] Kosik, K. (1981); Bourdieu, P. (1975)
[33] Bachelard, G. (1974)

1. Descubrir cuáles son los preconceptos y las valoraciones (momentos D y E) que se han convertido en obstáculos para el avance del aprendizaje (de la matemática).
2. Con el fin de concluir en los presupuestos epistemológicos (momentos F), y
3. Poder desarrollar un proceso metodológico serio y sistemático (momento G).

Si queremos aprender/enseñar matemáticas, debemos encontrar las barreras que dificultan e impiden el análisis concreto en el momento que hacemos esta investigación.

**La óptica epistemológica de la totalidad.**

Si no queremos quedarnos en las apariencias que nos estorban para conocer bien la realidad, necesitamos hacer un análisis.

Por análisis proponemos entender, en primer término, lo que señala la raíz de la palabra: descomposición o separación teórica de algo en sus elementos fundamentales. Para no confundir hacia delante, totalidad y estructura será lo mismo en esta sección. Entonces, no es difícil entender que la realidad educativa es una totalidad compleja, con muchas dimensiones y elementos.

Existen 3 teorías que pretenden darnos la explicación de esa totalidad [34].

1. LA FUNCIONALISTA. La función es lo que aporta un elemento para la organización del conjunto. Cada aspecto de la sociedad cumple una función vital. Busca el equilibrio del sistema social vigente. Cuando hay alteraciones o disfunciones se adapta o se ajusta a los individuos o instituciones para que cumplan con su papel. Al análisis funcionalista se aplica la función y procura que se mantenga. O sea, si las "minorías" (indígenas, ancianos, ...) no se adaptan al paradigma neoliberal, habrá que *deshecharlos*. Igual haremos con los alumnos que "no tienen cabeza para las matemáticas".
2. ESTRUCTURALISTA. El conjunto de elementos de la totalidad social independientes, interrelacionados. Lo cambiante es resultado de la novedad. Si hay un desajuste se aplican "programa sectoriales", "pactos", "programas de amortiguamiento o de reajuste económico". El análisis estructuralista le llama a esto "cambios estructurales". El Programa nacional de Solidaridad, es un ejemplo.
3. GENÉTICO ESTRUCTURAL O CRÍTICO DIALÉCTICA. Se pregunta por las causas de los fenómenos, su interrelación, su teoría, el proceso de cambio, el movimiento, sus contradicciones (antagónicas y secundarias). Analiza el modo de producción de la

[34] Giménez, G. (1978); Ver también :Morales, D. (1990)

sociedad concreta, con condiciones específicas. Paulo Freire contribuyó a enriquecer esta concepción materialista dialéctica de la educación [35].

Este trabajo está sustentado en esta tercer teoría, adecuado a las particularidades del momento histórico: de tiempo y espacio.

En síntesis: como el objeto que queremos conocer, lo concreto, es la "unidad de lo diverso"[36], necesitamos establecer: 1) cuáles son los elementos de la diversidad. 2) cómo están relacionados de tal manera que constituyan una unidad contradictoria. El objeto de estudio debe ser comprendido bajo la óptica de una totalidad compleja (o "rica totalidad"), compuesta de diferente elementos articulados entre sí. Se trata de una "óptica epistemológica" que permite reconstruir el objeto de estudio desde un recorte de la realidad: el de la totalidad[37]. Podemos plantear un esquema de esto último:

EL SUJETO ENFRENTA UN OBJETO
(TOTALIDAD REAL)

↓

LO CAPTA INICIALMENTE COMO UN TODO CAÓTICO

↓

ABSTRAE LAS DIVERSIDADES DE LA UNIDAD ESTUDIADA

↓

RECONSTRUYE UNA TOTALIDAD PENSADA
(UNIDAD DE LA DIVERSIDAD)

↓

SE CAPACITA PARA TRANSFORMAR LA TOTALIDAD REAL.

Totalidad no significa todos los hechos sino un todo que: tiene estructura, es un proceso en desarrollo, se va creando, es histórico.

[35] Freire, P. (1977)
[36] Marx, C. (1977)
[37] Zemelman, H. (1978)

**La óptica epistemológica de la praxis.**

Este trabajo de investigación se supone que es *para* y *en* la práctica.

Para la práctica, porque su objetivo es modificar la situación. En la práctica porque se hace desde una posición específica en la totalidad social.

La práxis tiene estas características:

Tiene una dirección, un *hacia dónde* consciente: práctica orientada a un fin[38] que incluye en todo momento a la conciencia.

Es una unión de momentos más compleja que la mera "acción": ¡es teoría y práctica interrelacionadas dialécticamente!

Es transformadora, pero está condicionada por la existencia de esta *materia prima* social[39], la totalidad social ya construida (desde lo que ya existe).

Desde esta óptica, el docente (**sujeto** cognoscente o la persona que conoce) no está frente a un **objeto** de estudio ajeno. No hay una separación entre sujeto y objeto. Por lo que no hay neutralidad posible.

**Aspectos epistemológicos de la enseñanza de las matemáticas a través del arte.**

Barbara Badulescu y Mayra Martínez[40] realizaron una investigación acerca de la enseñanza de la matemática a través del arte. El Objetivo era enseñar matemáticas a través del dibujo y la apreciación de la pintura, generando a través de la geometría relacionada íntimamente con estas actividades, la parte algebraica del lenguaje matemático. En la investigación de campo que realizaron se tomaron como muestra cuatro grupos (140 alumnos) de 5º grado de primaria. Se usaron diversas pruebas para medir diferentes componentes: rotación mental, orientación espacial, percepción forma, etc. Cuyas conclusiones fueron muy halagüeñas. A continuación se hace un resumen de esta investigación, llamada:

La enseñanza de las matemáticas a través del arte.

Las autoras afirman que en nuestra educación actual, -producto de una sociedad donde la epistemología (estudio del conocimiento)-, se ha convertido en sinónimo de filosofía de la ciencia, pone énfasis en el aprendizaje de las matemáticas, dejando otras asignaturas *(especialmente aquellas relacionadas con el arte) como materias de segunda clase, sin* ningún valor. Esta dicotomía del conocimiento: lo científico y lo no científico, ha creado una

[38] Marx, C. (1980)
[39] Valencia, E. (1982)
[40] Badulescu, B. y Martínez, M. (1995)

división artificial en la forma de concebir el aprendizaje y ha pretendido separar la relación que hay entre distintas disciplinas, como el arte y la ciencia.

La Psicología como disciplina científica está interesada en el proceso a través del cual conocemos, así reconoce que la percepción sensorial juega un papel importante en el proceso de construcción de la realidad, y que este proceso se explica a través de factores estructurales y factores culturales.

Por lo que, el estudio de la forma particular en que los individuos organizan, seleccionan y responden a su medio ambiente ha sido llamado *Estilos de Aprendizaje.*

En este reporte, las investigadoras afirman que Algunos autores hablan de formas de procesamiento de información: simultáneo y secuencial. El procesamiento simultáneo se refiere a la representación espacial de la información, en donde todo el sistema es monitoreable al mismo tiempo. Es una representación holística de los datos. El procesamiento secuencial, se refiere a la representación serial de los datos, donde un componente del sistema activa al siguiente.

Las autoras toman como referencia a Luria[41], la cual habló de tres áreas funcionales del cerebro y mostró que la unidad de procesamiento de información en el ser humano está espacialmente diferenciada, en el hemisferio izquierdo ocurre el procesamiento secuencial y en el derecho, el procesamiento simultáneo. Las funciones del hemisferio izquierdo están relacionadas con la codificación verbal, análisis temporal y percepción de los detalles. Las del hemisferio derecho con la codificación de la información en forma visual, relaciones espaciales y percepción gestáltica. Esta dicotomía hemisférica sigue vigente más como una distinción respecto al modo de procesamiento de la información que como una distinción verbal versus no verbal, pues como se ha demostrado, entre más complejas sean las funciones mentales en el ser humano, más están involucrados ambos hemisferios.

Así, la educación debería estar dirigida al desarrollo integral del ser humano y no al entrenamiento explícito del modo secuencial, analítico y el descuido del aprendizaje holístico, global, espacial.

Esta especialización en un modo de procesamiento secuencial de información, sin observar la relación que existe con el modo simultáneo, para el desarrollo de funciones mentales complejas, ha influido también el ámbito de la enseñanza de la matemática. Se observa al respecto que en el currículum académico la parte algebraica recibe mayor atención y énfasis que la parte geométrica.

A pesar de que las matemáticas, junto con la lógica, son el metalenguaje de las ciencias, y de la importancia que tienen en el currículum educativo, son asignaturas, que comparadas

---

[41] Luria, A. (1966); en: Badulescu, B., y Martínez, M. (1995)

con otros cursos, cuentan con un alto porcentaje de fracasos y están asociados a factores emocionales negativos o poco motivantes.

Esta contradicción entre lo que se desea enseñar y los resultados que se obtienen, puede deberse, entre otros factores, a que como ya se dijo, nuestros sistemas educativos están diseñados para favorecer ciertas formas de procesamiento y dejan de lado el entrenamiento espacial holístico, que se ha encontrado, está asociado con el aprendizaje de la ciencia y la matemática.

La habilidad espacial se reconoce también como un componente importante de la habilidad intelectual.

Badulescu y Martínez coinciden en que nuestros sistemas educativos deben entrenar el procesamiento simultáneo, pues está relacionado con la habilidad espacial y se ha demostrado la vinculación que existe entre esta habilidad y la comprensión de la ciencia y las matemáticas.

Parte importante de la habilidad espacial, es la habilidad viso espacial, que involucra varios componentes y se define como la capacidad de procesar, transformar y generar información visual presentada espacialmente, Los componentes considerados por diferentes autores varían. Aquí se toman los siguientes:

- Rotación mental: capacidad de girar mentalmente objetos en dos o tres dimensiones.
- Orientación espacial: capacidad de incluir y arreglar elementos dentro de un patrón de estimulación visual, reconociendo cambios en la orientación dada una configuración. Ejemplos de esto serían, sentido de dirección y percepción de lo vertical. El componente kinestésico y la lectura de mapas son parte de la habilidad espacial en términos más generales.
- Visualización. Proceso multivariado de manipulación de la información presentada espacialmente. Solo algunos autores consideran este componente en su análisis de la habilidad viso espacial y Mac Gregor[42] es el único que, en su prueba del índice perceptual, enumera sus elementos. Para este trabajo se tomó esta categorización.
- Habilidad para percibir: distancia, figuras ocultas, percepción de la forma, percepción de similitudes y diferencias y percepción del contorno.

Los componentes de la habilidad viso espacial están asociados principalmente con el funcionamiento del hemisferio derecho, sin embargo, como ya se mencionó, mientras más altas en la jerarquía se encuentren las funciones mentales que un individuo desarrolla, más estarán involucrados ambos hemisferios. Así la percepción, ligada al proceso de conocer y al desarrollo de procesos cognoscitivos es vital. Es necesario modificar nuestra clasificación

[42] Mac Gregor, R. (1972); en: Badulescu, B., y Martínez, M. (1995)

jerárquica con respecto a la importancia de la experiencia perceptual y darle el valor que tiene. La vista es uno de los sentidos más importantes, por lo tanto, es relevante percibir nuestro entorno geométrico, y el entrenamiento de habilidades viso espaciales es una manera de lograrlo. Como lo ha señalado Piaget[43], los procesos de asimilación y acomodación (incorporación y modificación de nuestro conocimiento) requieren de las estructuras cognoscitivas apropiadas para que el sujeto interprete la realidad que percibe y la comprenda, pero a su vez las estructuras cognoscitivas en su génesis requieren de la percepción. Recientemente se ha reconocido la importancia de la visualización en la comprensión del Cálculo.

Existen varias formas de entrenamiento que parecen estar asociadas con el desarrollo de habilidades viso espaciales. Los estudios de género han mostrado una correlación entre habilidad viso espacial y haber estado expuesto a actividades como carpintería, diseño con bloques, modelado y tiro al dardo. El entrenamiento en Geometría ha mostrado ser una herramienta para aumentar las habilidades viso espaciales.

Programas computacionales han mostrado ser eficaces en el entrenamiento de la habilidad viso espacial. Sin embargo, sería un método de entretrenamiento que dejaría fuera a un grupo muy grande de alumnos en países como el nuestro, donde esa tecnología es inaccesible en términos económicos. El aparato de dibujo en espejo de Lafayette, se usó con resultados significativos, combinado con un entrenamiento en imaginación visual para aumentar habilidades viso-motoras [44].

El entrenamiento a través del dibujo y la pintura tiene ventajas sobre otros métodos.

a). No tiene connotaciones de género, así que resulta una actividad apropiada para cualquier sujeto, de todas las edades y de cualquier cultura.

b). Puede enseñarse a todos los niveles educativos, lo único que variaría sería el grado de dificultad.

c). Es una actividad relativamente barata que no requiere de tecnología cara.

d). El dibujo involucra imaginación visual y habilidades motoras, dos componentes que han demostrado ser útiles en el desarrollo de habilidades viso espaciales.

Así, en el arte, en particular en la pintura y el dibujo, se muestran como herramientas ideales para desarrollar los componentes de la habilidad espacial y a través de la geometría presente en toda nuestra realidad visual, e ir generando el lenguaje numérico y algebraico.

De esta manera, las autoras realizaron un estudio comparativo, la enseñanza de las matemáticas a través del arte, cuyo objetivo era enseñar matemáticas a través del dibujo y la

---

[43] Piaget J. (1954); en Badulescu, B., y Martínez, M. (1995)
[44] Koslow, R. (1987); en: Badulescu, B., y Martínez, M. (1995)

apreciación de la pintura, generando a través de la geometría relacionada íntimamente con estas actividades, la parte algebraica del lenguaje matemático. Los detalles de la metodología se puede encontrar en la bibliografía que se hace referencia al inicio del documento.

# III
# Breve Historia de la Relación entre las Matemáticas y el Arte

# III.1. LOS ORÍGENES

La relación entre los matemáticos y los artistas inició desde los tiempos remotos de la humanidad debido a que son actividades fundamentalmente humanas, y ambas, tratan de conocer y explicar la naturaleza física, y al hombre mismo como parte de esta naturaleza.

Como docentes debemos explorar estas conexiones en nuestras aulas, como otra alernativa para la enseñanza de las matemáticas. La simetría y las repeticiones, entre otros, son elementos fundamentales de las matemáticas y las artes.

En muchos estadíos, las matemáticas y el arte (y otras disciplinas, por supuesto), se han visto como un todo universal, que en su cosmovisión más amplia ha buscado la armonía entre la naturaleza y las distintas capacidades (posibilidades) del ser humano.

Hoy en día, el Capitalismo como sistema que requiere estar en constante "desarrollo" (si no, estaría en peligro su existencia misma), ha tenido la imperiosa necesidad de crear la especialización a lo largo de cada unos de las etapas en los procesos productivos. En lo general, esta especialización ha significado aislamiento, y ante esto, alguien se podría sorprender al oir que las Matemáticas y el Arte están íntimamente relacionadas. Pero ya desde la Antigüedad (a. de C.), como en el Renacimiento, estas disciplinas se habían vinculado estrechamente.

En no pocos aspectos, las matemáticas y el arte tuvieron un mismo origen[1].

Aunque en la época del imperio romano tendió a debilitarse esta relación, ha sido reforzada nuevamente en los últimos siglos y los cambios revolucionarios recientes en ambos campos han abierto nuevas posibilidades para la interacción sin debilitar el papel potencial de cada una como sirviente e inspiración de la otra.

Los pitagóricos (500 años a. C.) desarrollaron las matemáticas y algunos conceptos musicales, muchos de ellos todavia vigentes hasta nuestros tiempos. En general, muchos de los los griegos de aquella época sabían y debatían acerca de la medicina, la oratoria, la política, la filosofía etc.

[1] Alberti, A. (1996)

De la misma manera, en el Renacimiento los pintores que eran a su vez matemáticos e ingenieros, ..., y viceversa, no eran una excepción. Después, el capitalismo se desarrolló y el Hombre se quedó... viendo la televisión.

Los orígenes de las ideas matemáticas son mucho más singulares y sorprendentes de lo que se suele creer. Es indudable que, muy frecuentemente, los problemas prácticos y los científicos abren a la exploración nuevas regiones. Pero hay también otras fuentes, de alguna de las cuales han surgido las ramas principales de las matemáticas, muchas de las cuales han terminado por convertirse en los insustituibles instrumentos de ciertas tareas científicas y prácticas. Las preguntas que se hicieron los pintores mientras trabajaban en las matemáticas de la perspectiva ocasionaron que ellos mismos y, más tarde, los matemáticos profesionales desarrollaran la materia conocida como Geometría Proyectiva. Esta que es ahora una de las principales ramas de las matemáticas, fue la creación más original del siglo XVII,

Las artes visuales, son artes espaciales por definición. Por lo tanto no es sorprendente que en la geometría euclideana se hace evidente su aplicación en la arquitectura clásica, y que la regla y el compás son herramientas familiares de los artistas y los artesanos. El análisis de grandes pinturas revelan estructuras basadas en líneas y círculos. En los tiempos modernos las figuras clásicas simples se han vuelto una obsesión.

Platón dice en el *Estadista* que todas las cosas que están dentro de la esfera del arte en cierto sentido comparten mediciones[2]. Registros antiguos y monumentos testifican los cálculos efectivos y mediciones precisas de longitudes y ángulos. Por lo menos, 500 años a. C., los artistas fueron investigadores de la proporción ideal y de los principios matemáticos de la composición. Muchas tendencias y tradiciones en esta búsqueda son mezclas difíciles de desenmarañar. Una tradición empírica y humanística está tipificada por la escultura griega, quienes hicieron mediciones muy cuidadosas de las proporciones humanas como base del diseño. Una tendencia mística se le puede adjudicar a los pitagóricos, quienes asignaron realidad y belleza a los números. Esta tradición se manifiesta en la deidificación virtual de relaciones numéricas especiales, tal como las razones de enteros pequeños, recíprocos de raíces cuadradas de enteros pequeños y ciertas razones, como la llamada "sección dorada".

[2] Kenneth, O. (1967)

La *sección de oro* pudo haber sido conocida por los pitagóricos, pero apareció primero en la geometría euclideana preliminar a la construcción de un pentágono regular. Euclides proporciona un método de corte de un segmento de línea (de ahí la palabra "sección") tal que la razón del todo a la parte mayor es la misma que la parte más larga a la parte más corta. La razón común es un número irracional,

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \text{RAZÓN DE ORO}}$$

con propiedades que han intrigado a los matemáticos hastas nuestros días. Un rectángulo cuyos lados están aproximadamente en esta relación (tal como las tarjetas comerciales que están en la relación 8 a 5), se reconoció como estético ya desde la época de Euclides.

Tanto las tradiciones místicas como empíricas permanecieron vivas durante la época del oscurantismo, como fue testificado por el trabajo enciclopédico de Vitruvio (s. II d. C.), pero con nada nuevo se contribuyó hasta mil años después cuando Leonardo da Vinci y Alberto Durero nuevamente hicieron mediciones cuidadosas del cuerpo humano y en el estilo del Renacimiento típico se fusionaron las tradiciones con el conocimiento existente. En este período, la sección de oro jugó un papel central al menos en la discusión filosófica y en el diseño práctico. Ramus *lo* asoció con *la* Santa *Trinidad. Pacioli* con *lo* "divino", y Kepler *la* consideró una "joya preciosa".

En el siglo XIX hubo un nuevo surgimiento del interés en el problema de las proporciones ideales.

Las matemáticas y el arte, por otra parte, están íntimamente vinculadas en el área de la perspectiva. Los siglos de experiencia artística iniciada en la *Óptica* de Euclides, en el cual se explica las ilusiones visuales, incluyendo la convergencia *aparente de líneas paralelas. Después de un largo periodo de oscurantismo y de* falta de interés, se perfeccionó una ciencia de la perspectiva por los artistas y matemáticos del Renacimiento, los más notables fueron Brunelleschi, Alberti, Piero della Francesca, Pacioli, y Durero.

Antes de que transcurriera un siglo, el arte pagó con creces la deuda con las matemáticas al desarrollarse la Geometría Proyectiva iniciada por Desargues, "la creación matemática más original del siglo XVII", según M. Kline[3], y luego, la geometría proyectiva sentó las bases de la Geometría Descriptiva moderna.

La simetría proporcionó un vínculo mucho más profundo que el nivel visual. Aunque las simetrías están parcialmente justificadas por necesidades estructurales, pareciera como si los artistas a través de las diferentes épocas, con sus ornamentos, modelos teselados, estrellas poligonales, espirales y diseños balanceados, han estado expresando relaciones, sólo que ahora son completamente explicadas por la teoría matemática de grupos, un desarrollo de los siglos, XVIII y XIX. Por ejemplo no fue sino hasta 1891, que el cristalógrafo ruso E. S. Federov demostró que hay precisamente 17 modelos bidimensionales esencialmente diferentes. Los diseños fascinentes de M. C. Escher son particularmente agradables para los matemáticos como por los artistas que saben del uso de la teoría de grupos.

Un matemático, como un pintor o un poeta, es un productor de modelos. Los modelos matemáticos, como los del pintor o del poeta, deben ser estéticos; las ideas como los colores o las palabras deben conservar una armonia. La belleza es la primer prueba. Aunque su medio es diferente –ideas expresadas en símbolos especiales- el matemático es libre para crear modelos (teorías) que representan el mundo observable de una manera obvia (por ejemplo, en física matemática) o expresa relaciones más sutiles en la naturaleza (incluyendo al hombre y su curiosidad caprichosa). Incluso lo aparentemente sin forma y el azar son analizados matemáticamente en la teoría de la probabilidad y estadística, y se *expresa artísticamente en sucesos conscientemente dirigidos.*

Dado que las matemáticas y las artes frecuentemente son tratadas con el mismo fundamento en diferentes idiomas, sólo los estudios más cuidadosos pueden revelar esto.

Las revoluciones en el arte y las matemáticas sólo han profundizado las relaciones entre ellas, y esto se confirma por las personas profesionales de ambos campos; es decir, matemáticos que estudian el arte y artistas que aplican las matemáticas a su quehacer.

---

[3] Kline, M. (1953)

Se ha observado algo común entre el manejo emocional necesario para la creación y la satisfacción de éxito, pues son las mismas si se construye un objeto artístico o una teoría matemática.

Un teórico de la estética define belleza como el aspecto cualitativo de la relación perfecta de las partes de un todo, y describe las relaciones de transitividad, conexión, simetría, seriación, correlación, adición, multiplicación, conmutación, asociación, distribución y dependencia; y sugiere que estos elementos deberían servir para analizar a las matemáticas así como al arte.

En ambas áreas el proceso creativo involucra la observación y la experimentación, el juicio y rechazo, intuición y sensaciones, cálculos cuidadosos y análisis, ocurrencias, y posiblemente resultados que son emocionantes, satisfactorios y útiles a ambos.

Las nuevas matemáticas y las artes nuevas son capaces de intimar de tal forma de lo que no hemos visto desde el Renacimiento

La Geometría, tal como la han forjado los matemáticos durante largos siglos desde Euclides, es una geometría sintética de una lógica elegante. Los bellos trabajos de Poncelet y de Chasles sobre la proyección, la homología, la homografía, lanzaron una nueva luz sobre la geometría de Euclides. Dotaron a esta ciencia de uno de los primeros ejemplos de transformaciones generales de las figuras que, de hecho, sirven de base a nuestra geometría superior moderna.

La existencia misma de la geometría implica la noción de movimiento. Si existiera un ser pensante, condenado a una inmovilidad absoluta en medio de un universo igualmente rígido e inmutable, ese ser no podría, no importa que tan poderoso fuese su pensamiento, imaginar ninguna geometría, pues para él sería absolutamente imposible comparar dos longitudes. La Geometría es la ciencia de la comparación de las figuras y esta comparación no es posible sino bajo la condición de que podamos desplazar los objetos sobre los cuales razonamos para ifdentificar en ellos las dimensiones comunes[4].

Después de haber realizado un largo rodeo en el dominio de la abstracción de la mano de Euclides, regresaremos a lo concreto. Nuestras ideas habrán descrito un ciclo, siguiendo la ley general de la evolución humana, pero este ciclo no está cerrado pues lo describimos como un tornillo que se ajusta a su tuerca y avanza a cada vuelta.

---

[4] Kline, M. (1953)

De la geometría pura a la geometría descriptiva no hay sino un paso, pues la segunda es una aplicación directa de la primera a los problemas de la práctica.

La geometría descriptiva ha pasado por las mismas etapas que la geometría pura. Después de surgir a la vida en los trazos empíricos de los antiguos constructores, fue sistematizada y erigida en ciencia por los geómetras y particularmente por Monge y su escuela.

Nos encontramos en presencia de dos escuelas: una teórica que pone la geometría descriptiva en fórmulas y la aplica a objetos irreales; la otra práctica que no quiere perder de vista el objeto técnico del dibujo geométrico y lo limita a trazos útiles.

El principal objetivo de la geometría descriptiva y de la geometría del espacio consiste en la representación en trozos de piedra, piezas de madera, partes de máquinas, detalles y conjuntos arquitectónicos de manera clara y precisa que permita su ejecución. El artista, al cual se transmitirá el dibujo, debe poder, de un vistazo, reconocer la forma y los detalles de aquello que debe ejecutar. El papel – *el deber* - del diseñador es presentar los objetos de una manera simple. No debe elegir al azar los planos de proyección ni un modo de representación, sino que debe elegirlos juiciosamente, para alcanzar el mayor efecto posible. Debe *hacer ver*; y para eso, hace falta que primero *él vea.*

# III.2. CONEXIONES MATEMÁTICAS – ARTE EN EL RENACIMIENTO

El gran artista alemán Alberto Durero (1471-1528) es mejor conocido por sus grabados en madera, pinturas y grabados en cobre, así como por los miles de libros y artículos que se han escrito acerca de él y su trabajo. Sin embargo, las matemáticas en el trabajo de Durero no han tenido un adecuado reconocimiento, excepto por los historiadores ocasionales del arte y de las matemáticas quienes han apreciado las relaciones importantes que Durero realizó entre estos dos campos[5].

Durante los siglos XV y XVI, después del oscurantismo de la edad media, ocurrió el resurgimiento de la matemática, además de un renacimiento de las artes. Se ha documentado que los humanistas y artistas del Renacimiento dedicaron mucha atención a las matemáticas[6]. El resurgimiento de la geometría euclideana fue motivada en parte por su relevancia en los tres problemas clásicos de las matemáticas: (a) La trisección del ángulo, (b) la duplicación del cubo, y (c) la cuadratura del círculo. Con el crecimiento de la demanda en la ciencia y de las necesidades prácticas también incrementaron la importancia de las matemáticas. Los avances hechos por la navegación y por los astrónomos de la ciencia óptica, contribuyeron a la aplicación de las matemáticas. Como los escritos de Euclides fueron traducidos a muchos idiomas y circularon a lo largo y ancho del planeta, los artistas importantes del Renacimiento como Leonardo da Vinci, Miguel Angel, así como Durero, tuvieron oportunidad de leer en las matemáticas el instrumento para resolver problemas prácticos como tratar de representar escenas de gente, objetos (reales) tridimensionales en lienzos de dos dimensiones.

Durero llevó a sus contemporáneos al restablecimiento de la noción platónica de la figura humana ideal. Experimentaron con las fórmulas matematicas puras derivadas de Euclides y con proporciones para la forma humana ideal, tal como lo desarrollado siglos antes por el arquitecto romano Vitruvio. Leonardo da vinci consideró a la pintura que era una ciencia. Desde el inicio del Renacimiento italiano, el arte fue acompañado por la teoría.

---

[5] Doyle, K. (1980)
[6] Conway, W. (1958); en: Doyle, K. (1980)

## Durero el geómetra[7]

Durero viajó a Italia para estudiar matemáticas y perspectiva. Estudió el trabajo de Euclides y visitó Bologna para aprender los secretos del arte de la perspectiva, probablemente de Fra Luca Pacioli, un amigo de Leonardo da Vinci. A su regreso a Alemania Durero publicó *Underweysung der Messung,* Nuremberg, en 1525, el cual contenía problemas de geometría lineal, figuras bidimensionales, cuerpos tridimensionales, y perspectiva teórica. Intentó que su trabajo fuera usado no solo por pintores sino también por orfebres, escultores, talladores de piedra, carpinteros, evanistas y todos los que requerían mediciones.

La geometría dominó el espíritu de los tiempos, y Durero fue un geómetra natural. En su primer libro sobre la medición contiene su teoría de la belleza encontrado en el alfabeto y diseños para monumentos así como la selección de problemas en geometría aplicada. Su búsqueda para reducir la forma humana a principios matemáticos se ilustra en cientos de esbozos como el que se muestra en la figura 3.1.

Estos estudios de la proporción ilustran su intento para dibujar la figura humana usando métodos científicos.

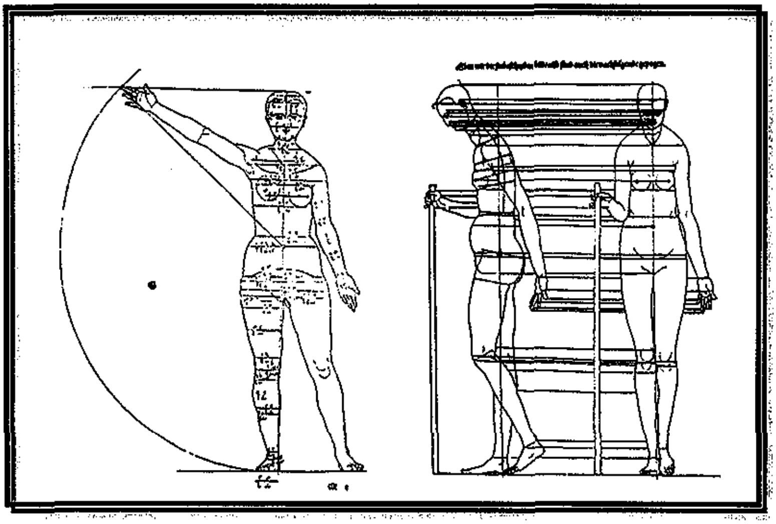
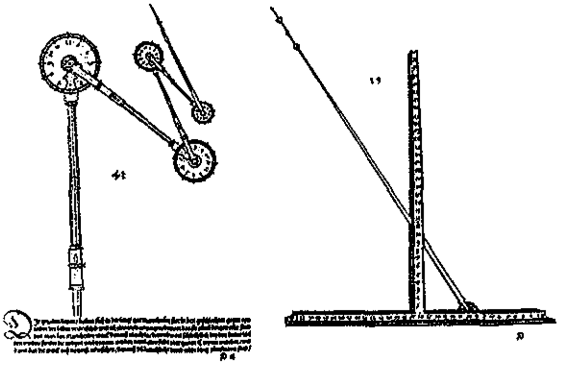


Fig. 3.1 Bosquejo de Durero del cuerpo humano como un estudio de la proporción. Fuente: Doyle, K. (1980)

[7] Conway, W. (1958); en: Doyle, K. (1980)

Instrumentos de dibujo matemático

El interés manifiesto durante el Renacimiento sobre los dibujos de la parábola, la elipse, la hipérbola, etc., y sus relaciones, fue incorporado por los matemáticos como Federico Commandino, entre otros. El renacimiento de las matemáticas estimuló el desarrollo de instrumentos matemáticos que podían realizar el dibujo de varias secciones cónicas y de dispositivos que dependían de la teoría de las cónicas. El reloj de sol usó proyecciones de la elipse y la hipérbola; la demanda de mapas estimuló el interés en proyecciones cartográficas; y la teoría de cónicas se aplicó para desarrollar espejos parabólicos. Durero diseñó tres instrumentos para la construcción de ovalos y de elipses. El instrumento con engranes, ver figura 3.2 a, fue diseñado por Durero para dibujar espirales y epicicloides, y la figura 3.2 b muestra un instrumento para dibujar elipses.



(a) (b)

Fig. 3.2 Instrumentos diseñados por Durero para dibujar espirales y epicicloides (a) y elipses (b). Fuente: Doyle, K. (1980)

Dibujos en perspectiva

Los pintores del Renacimiento se preocuparon por la interpretación realista del espacio tridimensional en lienzos bidimensionales, y sus estudios condujeron al restablecimiento de la geometría proyectiva. La construcción geométrica de la figura 3.3 ilustra una proyección cónica. El centro *V* de proyección representa el ojo observando una escena en el plano a´. El lienzo está representado por el plano a, el cual se supone que es transparente. Si *V* se considera una superficie puntual de luz, un punto *P* y *una linea l en el plano a se proyecta sobre el plano* a´como un punto *P´* y línea *l´*, respectivamente. En general la intersección de dos líneas *l* y m en el plano a se proyecta en la intersección de dos líneas *l´* y m´ en el plano a´. La excepción importante de estas reglas ocurre cuando un plano paralelo al plano a´se dibuja a través del punto *V*. Este plano intersecta al plano a en línea *v*, el cual es llamada la línea de fuga, por una razón obvia. *P* en *v* proyecta en un punto sobre a´ porque la línea *VP* no intersecta el plano a´ sino que es paralelo a a´. Además, las líneas en el plano a´ que son paralelas a una línea dada *l´* son imágenes de líneas del plano a, el cual intersecta a un punto fijo, *Q*, sobre la línea de fuga *v*.

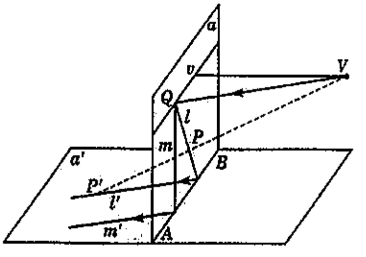



Figura 3.3 Ilustración de la proyección cónica.
Fuente: Doyle, K. (1980)

Podemos seguir el desarrollo de los principios fundamentales del dibujo en perspectiva de los artistas del Renacimiento como Leon Battista Alberti, en su *Trattato della pintura* (1435) y del pintor Piero Della Francesca en *Prospectiva Pingendi* (1470) o los trabajos del siglo XVI de Leonardo, Rafael y Durero. Un grabado en madera de Durero en su libro *Underweysung der Messung,* ilustra un instrumento que él inventó para representar los objetos tridimensionales en dibujos *bidimensionales (ver figura* 3.4)

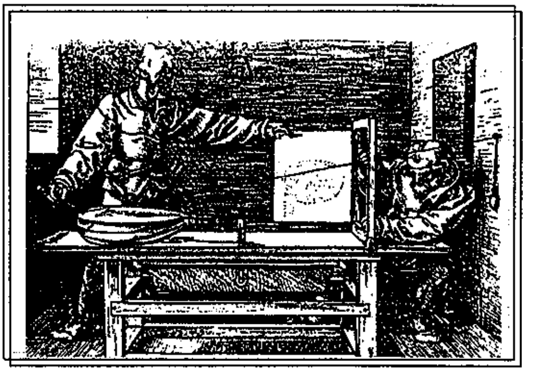


Fig. 3.4 Grabado en madera de Durero donde se ilustra su dispositivo para representar objetos tridimensionales, en el dibujo bidimensional.
Fuente: Doyle, K. (1980)

Un artista se sienta frente a su dibujo el cual está montado sobre un marco vertical con bisagras colocado sobre una mesa que tiene su objeto, un laúd. Como su asistente gira el dibujo al lado, el artista observa a lo largo de una cuerda, con el extremo libre del cual se junta a una parte del laúd. La cuerda pasa a través del marco en un punto que el artista fija cruzando dos ejes, uno horizontal y uno vertical. Luego la cuerda se suelta y el dibujo regresa al marco, de tal forma que el artista puede registrar los puntos marcados por los ejes. El dibujo es girado hacia fuera nuevamente, entonces el asistente coloca la cuerda en otra parte del laúd, y el proceso se repite. Gradualmente, el artista realiza un contorno exacto del laúd en perspectiva exacta.

A los estudiantes se podría enriquecer la enseñanza del tema de proyección central y sus principios fundamentales dandole a cada alumno una copia del famoso gravado de Durero *San Jerónimo en su celda.* Usando regla y lápiz, los estudiantes pueden localizar las intersecciones de las líneas l1, m1 y n1 en un punto Q1, como se ilustra en la figura 3.5. Similarmente podrían trazar segmentos, l2, m2, y n2 para localizar el punto de intersección Q2. La línea Q1 Q2 es la línea de fuga v como se describió anteriormente.

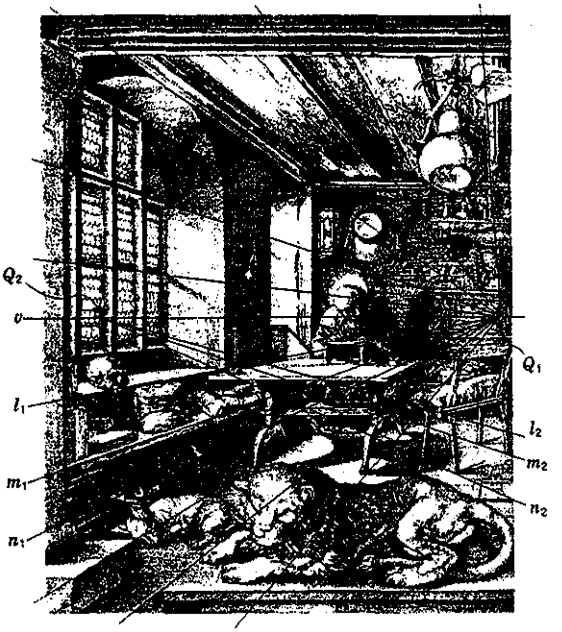



Figura 3.5 Localizar los puntos de fuga en el grabado de Durero *San Jerónimo en su celda.* Fuente: Doyle, K. (1980)

# III.3. EL DESARROLLO MUSICAL. PITÁGORAS

La figura de Pitágoras está envuelta en un halo de leyenda, misticismo y hasta de culto religioso. Y no es tan extraño si pensamos que fue contemporáneo de Buda, de Confucio y de Lao-Tse (los fundadores de las principales religiones orientales)

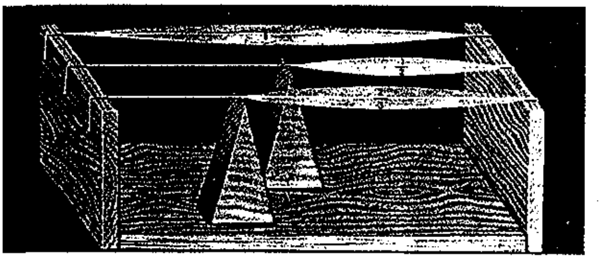
El término "matemática", al igual que el de "filosofía", se la debemos a él.

¿Cuáles son las principales aportaciones matemáticas de la escuela pitagórica?. La primera y quizás la más importante, el introducir la necesidad de demostrar las proposiciones matemáticas de manera inmaterial e intelectual, al margen de su sentido práctico. Los pitagóricos dividieron el saber científico en cuatro ramas: la aritmética o ciencia de los números - su lema era "todo es número" -, la geometría, la música y la astronomía.

## ARMONÍA MUSICAL


Pitágoras propuso que existía una estrecha relación entre la armonía musical y la armonía de los números.

Si pulsamos una cuerda tirante obtenemos una nota. Cuando la longitud de la cuerda se reduce a la mitad, es decir en relación 1:2 obtenemos *una octava*. Si la longitud era 3:4 obtenemos *la cuarta* y si es 2:3 obtenemos *la quinta*.



Al menos desde la Antigua Mesopotamia (milenios IV y III a. C.) el ser humano se plantea con qué criterio la música admite unos sonidos y rechaza otros. Las teorías más arcaicas justificaron esta elección con razonamientos meramente religiosos o estéticos, consiguiendo con eso que durante muchos siglos la afinación fuese considerada una criba "caprichosa".

Ya en el primer milenio antes de Cristo, los caldeos relacionaron muy estrechamente la música con la astrología y las matemáticas. Así, quienes estudiaban las estrellas explicaban el destino de los hombres y la armonía del Universo, entrelazando la especulación matemática con los simbolismos. Esto dió lugar a que numerosos fenómenos cósmicos fueran representados por comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes. De este modo aparecieron cuatro relaciones que, por su importancia, tomaron nombres propios. Estas son:[8]

1/1 (unísono), 1/2 (octava), 2/3 (quinta), 3/4 (cuarta).

Se sabe que para los caldeos, el estudio de las propiedades de los números resultó fundamental en la predicción de los sucesos, y en este sentido destacaron fundamentalmente el 4 y el 7, siendo este último, probablemente, el número de notas de la antigua escala caldea.

Aunque el conocimiento de tales materias nos ha llegado por conducto de varios autores clásicos (Filón y Plutarco entre otros), hay poderosas razones para creer que *Pitágoras de Samos* (580-500 a. C), tras un largo periodo de estudio en las escuelas mesopotámicas, llevó a Grecia las teorías de la música y los principios de la afinación.

Pitágoras, sin duda, fue el primer pensador occidental que atribuyó a la música, y al resto de las cosas un carácter numérico. Dedujo que un sonido musical producido por una cuerda vibrante varía en razón inversa a su longitud, esto es: "cuanto más corta sea la cuerda, tanto más aguda será la nota producida". Con ello fijó matemáticamente el concepto de octava que los músicos venían usando en los siguientes términos: "un sonido es una octava más alto que otro si la cuerda que lo produce es la mitad de larga que la del primero". Y estos sonidos no sólo reciben el mismo nombre, sino que, para todos los efectos, se considera que son equivalentes.

El sistema de afinación pitagórico se fundamentaba en tres principios:

a) La música se basa en 7 notas. El hecho de que sean siete los sonidos fundamentales no representa una originalidad pitagórica, puesto que los

[8] En *Historia General de la Música* de A. Robertson y D. Tevens (1988), ed. Alpuerto S. A. se justifica cómo relacionaban estas cuatro fracciones con las estaciones del año.

caldeos ya lo consideraban así. Sin embargo, la novedad está en utilizar este número para reforzar la idea de la armonía de las esferas celestes[9].

b) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada por o dividida entre 3, el número de veces que se quiera. Es decir, que la longitud de las cuerdas puede ser multiplicada o dividida por 3 cualquier número de veces,

c) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por 2 cualquier número de veces. Con esto lo que haríamos es ir subiendo o bajando octavas respectivamente.

d) Con estos tres axiomas se dispone de suficiente criterio para determinar las notas musicales.

Así pues, la estrecha relación entre las matemáticas y la música se conoce desde la antigüedad griega con mayor claridad. Se sabe que la Escuela pitagórica elaboró una teoría de la música, muy elogiada, que se basaba en los números. Sin embargo, no todo fueron elogios para esta concepción matemática de la música. Por ejemplo, en la *Metafísica* de Aristóteles se censura a los pitagóricos porque afirmaron *"... que muchos atributos de los números pertenecían a los cuerpos sensibles; postularon que... los atributos de los números existían en las notas musicales, en los cielos y en otras muchas cosas".*

No obstante, a pesar de las críticas, la teoría numérica musical de Pitágoras se ha aceptado durante muchos siglos. Será a partir del Barroco cuando se empieza a distinguir claramente entre la música como ciencia y la música como arte: frente a G. Zarlino y sus leyes matemáticas, Vicenzo Galilei, padre de Galileo Galilei, sostiene que la palabra y la emoción humana son las guías de la música.

Intentar resolver esta discusión histórica resultaría pretencioso por nuestra parte, por ello no se ha intentado abordar el estudio matemático de la música de manera profunda.

Desde finales del siglo XVII, algunos teóricos de la acústica (entre ellos destaca fundamentalmente Andreas Werckmeister), conscientes de la dificultad de la afinación pitagórica, propusieron sistemas que establecían subintervalos de

---

[9] Según afirma F. Vera en *Historia de la Ciencia,* Ed. Barcelona (1937), los tonos de la armonía universal están relacionados con las distancias interplanetarias de la forma siguiente: las distancias Mercurio-Venus, Luna-Marte y Marte-Júpiter son de ½ tono; las de Venus –Sol, Júpiter-Saturno y Saturno-Zodiaco son de 1 + ½ tonos; y la distancia Tierra-Luna es de 1 tono. Si se suman todas ellas se obtienen los siete tonos

frecuencias de la misma longitud, consistía en fijar a priori la cantidad de notas que se debe manejar, y con esto obtener los números adecuados dentro de un intervalo (1,2).

Por otra parte, las funciones trigonométricas dieron al hombre el primer chispazo de comprensión de la naturaleza de los sonidos musicales, y este conocimiento se utilizó en el proyecto de dispositivos como el teléfono, el fonógrafo, la radio y las películas sonoras.

Después de los pitagóricos, los matemáticos y los físicos estuvieron convencidos de que los sonidos musicales tenían importantes propiedades matemáticas, y la música, junto con la aritmética, la geometría y la astronomía, se volvió parte del cuadrivio (o conjunto de las cuatro artes matemáticas, que son las acabadas de mencionar,. incluída la música como tal). Estas cuatro materias se estudiaron conjuntamente durante toda la Edad Media. Si bien los griegos, los arabes y los matemáticos del medievo continuaron investigando los sonidos musicales y escribieron libros de música, en esencia sus trabajos se limitaron a la elaboración de nuevos sistemas de escalas para música instrumental y vocal.

Fueron los matemáticos y los físicos del siglo XVII quienes iniciaron otra clase de investigaciones y efectuaron la siguiente serie de descubrimientos importantes. Nombres familiares, como los de Galileo, su discípulo y colega francés el padre Marin Mersenne (1588-1648), Hooke, Halley, Huygens y Newton, están asociados a resultados nuevos y trascendentes. Mientras que los pitagóricos estudiaron cuerdas de diferentes longitudes pero tensiones iguales, Mersenne estudió el efecto de cambiar la tensión y la masa de una cuerda y encontró que un incremento de la masa y un decremento de la tensión producen notas más bajas en una cuerda de longitud dada.

Este descubrimiento fue de los más importantes con respecto a los instrumentos de cuerda, tales como el violín, y el piano Para hacer factible la amplia gama de sonidos que producen estos instrumentos con meras variacionesde la longitud de sus cuerdas, se habría necesitado que estas fueran grandes con exageración. Galileo y Hooke demostraron experimentalmente que cada sonido musical se caracterizaba por un número definido de vibraciones en el aire por segundo. La determinación de la velocidad del sonido (de aproximadamente 333 m/seg en el aire) fue otra de las realizaciones de la época.

Los mejores matemáticos del siglo XVIII, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli (1700-1782), Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) y Joseph Louis Lagrange, estudiaron cuerdas vibrantes, como las del violín, y discutieron entre sí vigorosamente si las funciones trigonométricas se prestaban o no para representar las vibraciones.

Luego vino el análisis matemático de las ondas sonoras y resultó ser el instrumento principal del dominio teórico de los sonidos musicales. Es fácil ver por qué las matemáticas fueron de inestimable utilidad en estas investigaciones, pues la observación del aire, aún del aire durante el proceso de propagación del sonido, no revela nada.

Estamos interesados en el análisis de los sonidos musicales en contraposición a los ruidos. Sin embargo, en el contexto presente, el término "sonido musical" se utiliza en sentido técnico e incluye no solo los sonidos que comúnmente se entienden como música sino también los sonidos del habla ordinaria. En realidad, a lo que el físico se refiere en este caso sería representado más correctamente por término sonido inteligible. También, se debe distinguir entre el sonido como movimiento del aire y el sonido como sensación que experimentan los seres humanos. El primero es un fenómeno físico que ocurre en el espacio y cuyas propiedades físicas y matemáticas son físicas. Por otro lado, las sensaciones que el ser humano percibe porque el aire en movimiento llega a sus oídos y estimula ciertos nervios que dependen de su sentido de la audición y varían de una persona a otra. Hay por ejemplo, sonidos físicos que los hombres son incapaces de oír. No obstante que algo se tendría que decir sobre la percepción del sonido, el interés primordial es el de entender el fenómeno físico.

# III. 4. EL GRAFISMO INFORMÁTICO

Tres son las actividades en que podemos localizar los orígenes de las matemáticas: el conteo, la medición y las artes visuales[10]. De las tres, las dos primeras son las que han recibido mayor atención. Disponemos de textos antiguos donde se tratan los problemas de conteo y medición, textos que constituyen registros palpables de las matemáticas primitivas, aunque se cuentan con inumerable muestras de las artes del tejido, la arquitectura, la cerámica, la orfebrería, y muchas otras, tan sólo podemos inferir en ellas una relación implícita con las matemáticas. A lo largo de los siglos, la importancia de la matemática explícita en el campo artístico ha crecido y menguado y vuelto a crecer. Philip,J. Tiene la impresión de que el artista es con frecuencia inconscientemente matemático, que descubre y redescubre ideas de distribución espacial, de simetría, de periodicidad, de naturaleza combinatoria o transformacional; que descubre, en sentido visual e intuitivo, teoremas de geometría. En cambio son pocos los periodos de matematización consciente.

En el Renacimiento, la pintura tuvo muchas veces una cualidad Matemática. Los pintores estaban interesados por la geometría del espacio, por los problemas de la perspectiva y del escorzo. "Nadie lea mis obras que no sea matemático", escribió Leonardo da Vinci en su *Trattato della pintura*. Algunos de los grabados de Durero muestran al pintor trabajando con cuadrículas coordenadas trazadas con regla, de manera que la coordinación entre mano y ojo se refuerce automática y matemáticamente.

El artista de más vigoroso atractivo matemático y generalizada popularidad de años recientes es, sin duda, el holandés M. C. Escher (1898-1972). Escher era un geómetra intuitivo, que en sus años últimos trabajó con matemáticos profesionales. Su obra ha recibido el espaldarazo de convertirse en el piso de patios. Escher expone gráficamente las paradojas de la autoalusión y los misterios y amenidades metafísicos que emanan de estas paradojas.

En el fondo, el arte gráfico no es más que cierta cantidad de pintura extendida sobre un lienzo o un poco de tinta depositada en papel. A través del sentido de la vista y de su interacción con la imaginación, es común asociar estas manchas y puntos con otros objetos del mundo físico o mental.

---

[10] Tomadas algunas partes de Philip, J. (1989)

El arte siempre se nutre de la tensión entre metaniveles, entre el ser y el no ser. Las paradojas de Escher son parte del amplio arsenal de ilusiones e imaginerías de que dispone el artista. La escalera sin fin de su dibujo *Ascenso y descenso* induce a confusión espacial y suscita la risa, y, en consecuencia, padece el generalizado juicio estético que tiende a situar el ingenio, la frase aguda, la ironía y la comedia a nivel inferior que la tragedia, la temerosa admiración, o la sugerencia de lo trascendente.

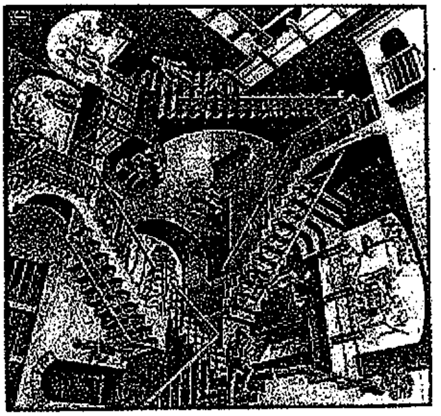


Fig. 3.6 *Ascenso y descenso.* Escher

Bastante más sutil es la estética de *Cielo y agua* de Escher. Encontramos en ella una división regular del plano, un grupo de sutiles transformaciones de la figura en sí misma, una forma tan ingeniosa como inteligente de utilizar el humor visual, en la cual el espacio comprendido entre las figuras va siendo a su vez organizado en figura secundaria de creciente importancia.

Esta clase de intelectualidad le resulta sumamente atractiva al matemático, que ve en la figura una aplicación de la teoría de grupos y la descompone en trasla-ciones, simetrías, inversiones, giros, etc. Al lego matemático, la figura le produce la misma grata impresión que todas las obras que exhiben regularidad suficiente para manifestar grupos de simetrías.

Fig.3.7 *Cielo y agua.* Escher

Las necesidades de los científicos en materia de grafismos no pasan, con mucha frecuencia, de la mera gráfica de una función matemática de una variable, $y = f(x)$, representada sobre unos ejes cartesianos rotulados con una leyenda explicativa. A veces se necesita una función de dos variables, $z = f(x, y)$ que puede ser mostrada en forma de secuencia de curvas unidimensionales, o como proyección de una superficie bidimensional sobre un plano. En ocasiones, las necesidades gráficas de la ciencia van más allá, y se hace preciso ensamblar figuras muy complicadas combinando elementos simples, como sucede al mostrar la organización espacial de los átomos que componen la molécula.

El diseño geométrico asistido por computadora (CAGD) es una nueva rama de la informática matemática cuyo objeto es la creación y manipulación de las formas y perfiles de las superficies adecuadas para la producción industrial.

En las últimas dos décadas se ha desarrollado una línea de investigación, iniciada por Benoit Mandelbrot, cuyo tema son los objetos llamados fractales. Un objeto que presenta la misma estructura al cambiársele indefinidamente la escala de observación recibe el nombre de fractal. En la naturaleza existen muchos fenómenos de carácter fractal, por ejemplo la trayectoria que sigue una partícula que realiza movimiento browniano (en zigzag); también los paisajes naturales presentan características de los fractales[11].

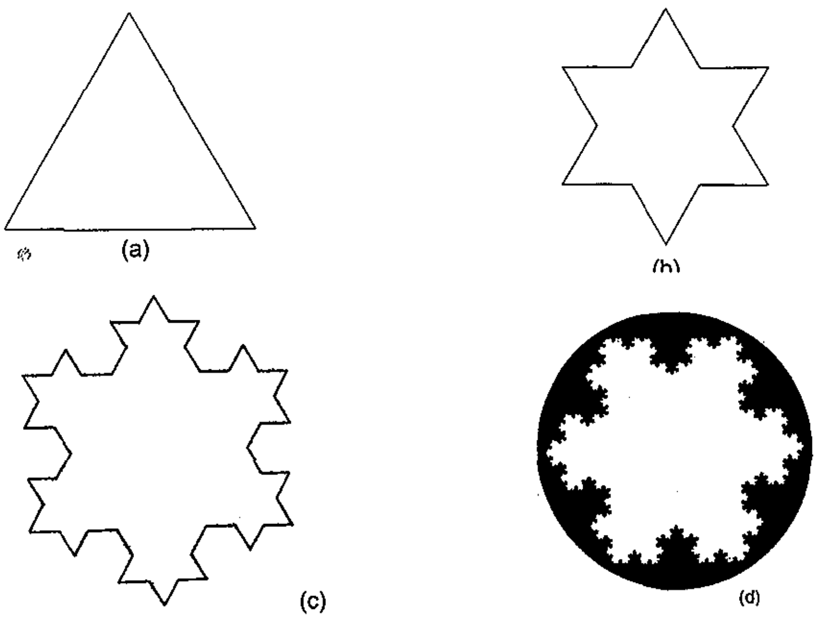
Se puede construir un tipo de figuras fractales siguiendo el siguiente ejemplo: Tomemos un triángulo equilátero cualquiera (figura 3.8 (a)) al que denominaremos iniciador, Divídanse cada lado en tres partes iguales. En las partes intermedias de cada lado añádanse dos lados de un triángulo equilátero cuyo lado sea igual a la tercera parte del lado original. Se obtiene así la figura 3.8 (b). En seguida divídase, otra vez, cada uno de los lados de la figura así formada en tres partes iguales, y en cada parte intermedia añádanse dos lados de un triángulo equilátero cuyo lado sea igual a la longitud resultante. Se encuentra así la forma mostrada en la figura 3.8 (c). Si se continúa indefinidammente este procedimiento se encontrara una forma parecida a la mostrada en la figura 3.8 (d). La curva de la figura 3.8 (d) se llama curva de Koch.

Los matemáticos, que han creado figuras de dimensión fractal, que han revelado mundos visuales insospechados que acechaban ocultos en sencillas fórmulas; los procesadores de imágenes, que se han afanado y convertido en tratables sus técnicas de Fourier; los expertos en el campo de la visión, que nos informan de lo

[11] Braun, E. (1996)

que vemos en el borde de un objeto, han contribuido todos a la creación de un grafismo informático de la más asombrosa variedad y calidad visual.

Fig. 3.8 Pasos que se siguen para construir el fractal llamado *Curva de Koch.*




A continuación se presentan diversos fractales generados por computadora. En cada caso se ha utilizado un procedimiento repetitivo diferente, como el anterior. Fuente: Braun, E., (1999).

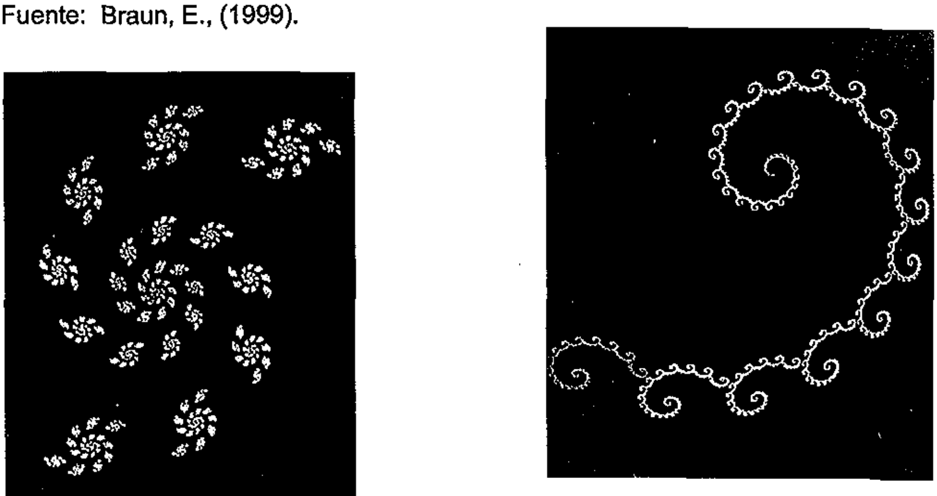


Fig. 3.9

En las primeras etapas del arte por computadora, sus adeptos habían de poseer una importante preparación matemática formal (y no meramente intuitiva). En aquella época, los elementos visuales básicos eran especificados matemáticamente. Los lenguajes en ordenador en los que se efectuaba la programación eran de nivel bajo o intermedio. A mediados de la década de 1970 el impulso se dio en el sentido de trasladar la técnica a lenguajes de más alto nivel y a liberar la componente artística de las componentes matemática y programática. La introducción con éxito del lápiz óptico, de la tableta de esbozos y de la palanca universal de mando (*joystick*); disponible ya en lenguaje de alto nivel, el artista podía actuar casi (aunque no del todo) como si se valiera de lápiz, pluma o pincel: el artista informático puede dibujar sobre la superficie de la pantalla, o sobre la tableta, a la manera convencional. Puede *mojar* su *pincel* en una *paleta* de colores, indicar el matiz deseado, su intensidad y saturación. Están a su disposición centenares de colores, ofrecidos en el *menú*. Resulta fascinante ver trabajar a un artista diestro con un programa PAINT y comparar su coordinación mano/ojo con la del pintor de acrílicos o de óleos.

La década de 1970 vio también un pujante desarrollo de los dibujos animados realizados por computadora. En el caso de figuras humanas o de sus caricaturas, se requiere una cierta sutileza matemática para hacer que el ordenador interpole automáticamente entre una figura inicial y la final.

En la actualidad, los grafos y la animación por computadora, combinados con las técnicas convencionales de animación, fotografía, de efectos especiales están produciendo fantásticos desarrollos. ¿Cuál es la relación entre las matemáticas y un grafismo informático plenamente maduro?. En la etapa actual de la tecnología resulta difícil separar el producto de la técnica. Toda la componente de programación, el *software*, está todavía en fluctuación continua. El propio artista está estableciendo y estabilizando programas. Como la programación es algo abierto e inconcluso, el artista se encuentra en conflicto. ¿Debe dedicar su tiempo a la creación de arte por alguna de las vías ya disponibles, o debe desarrollar estructuras adicionales de *software* para atender las necesidades presentes o futuras?. El grafismo informático es aún un medio joven.

**La arquitectura y el espíritu matemático**

*A menudo me encuentro más cerca de los matemáticos que de mis colegas los artistas. Todos mis trabajos son juegos. Juegos serios. M. C. ESCHER.*

La arquitectura, la escultura, y la pintura dependen específicamente del espacio, están obligadas a la necesidad de administrar el espacio, cada una de ellas por sus medios apropiados. La clave de la emoción estética es una funcion espacial.

Acción de la obra (arquitectura, estatua o pintura) sobre lo que la rodea; ondas, gritos o clamores (el Partenón sobre la Acrópolis de atenas), rasgos que saltan como radiaciones, como accionados por un explosivo; el lugar, próximo o lejano, es sacudido, afectado, dominado o acariciado por ellos.

La precisión exigible aquí en todos los actos destinados a provocar una emoción de calidad es de orden matemático. Hay una palabra que expresa su resultado: armonía. La armonía es la coexistencia feliz de las cosas, coexistir implica una doble o múltiple presencia, por consiguiente requiere relaciones y acuerdos. ¿De qué acuerdos? Del acuerdo entre nosotros y el medio, entre el espíritu del hombre y el espíritu de las cosas, entre la matemática existente y la que queda por desarrollar.

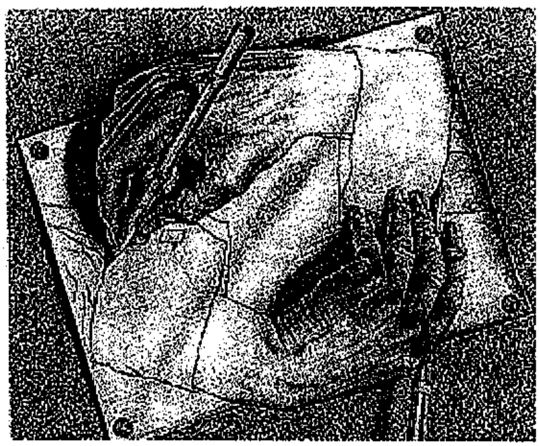


Fig. 3.10 *Dibujando Manos.* Escher

Las matemáticas no son, para el artista, operaciones. No se trata forzosamente de cálculos, sino de presencia de una realidad; de una ley de resonancia, consonancia y ordenación infinitas. El rigor es tal que de ella resulta verdaderamente la obra de arte, ya se trate de un dibujo de Leonardo, de impresionante exactitud del Partenón – comparable con la talla de su mármol a la talla de las máquinas herramientas-, del implacable e impecable juego constructivo de la catedral o de la unidad que da Cézanme a la ley que determina el árbol, el esplendor unitario de las raíces, del tronco, de las ramas, de las hojas y de los frutos. No hay ningún azar en la naturaleza. Si se comprende qué es la matemática en el sentido filosófico se la discierne en todas sus obras. El rigor, La exactitud, son los medios de la solución, la causa del carácter, la razón de la armonía.

Signo da una medida. Dar la medida, tomar la medida, hacer reinar la medida, son actos inevitables de la ordenación, son los medios del orden.

Las medidas y la medida conducen a proporcionar las cosas. Las leyes administran las proporciones que producen los caracteres. Nuestros pintores y escultores actuales deberían de conocer la fecunda e inagotable sección áurea.

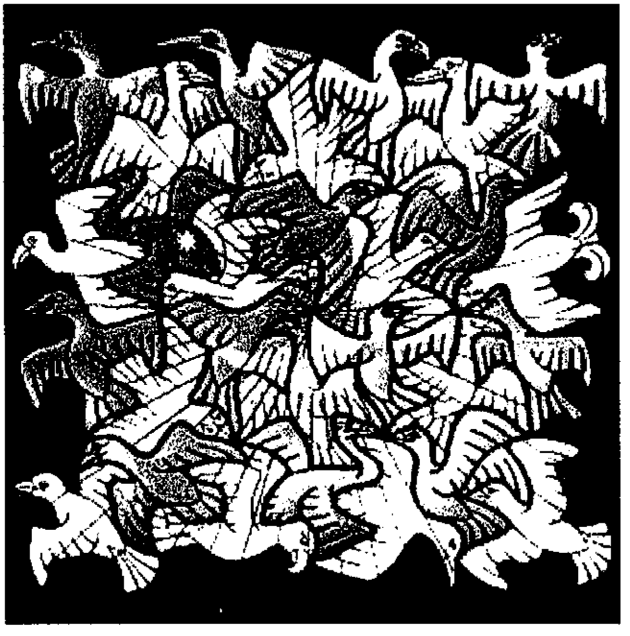


Fig 3.11 *Sol y Luna*. Escher[12]



[12] Los dibujos de Escher, reproducidos aquí, fueron bajados de internet.

Teselados.

La palabra teselado viene del latín *tessellae* (mosaico) que era el nombre que daban los romanos a los pequeños azulejos usados en los pavimentos y los muros de la antigua Roma. Un teselado o mosaico regular se hace repitiendo la misma forma una y otra vez. En seguida se muestra un método para obtener teselados tipo Escher.

Se empieza con una forma simple a partir de la cual se obtengan teselados simples. Se quita un pedazo pequeño y se añade al lado opuesto. Siguiendo este procedimiento varias veces y con un poco de imaginación se van convirtiendo en figuras.

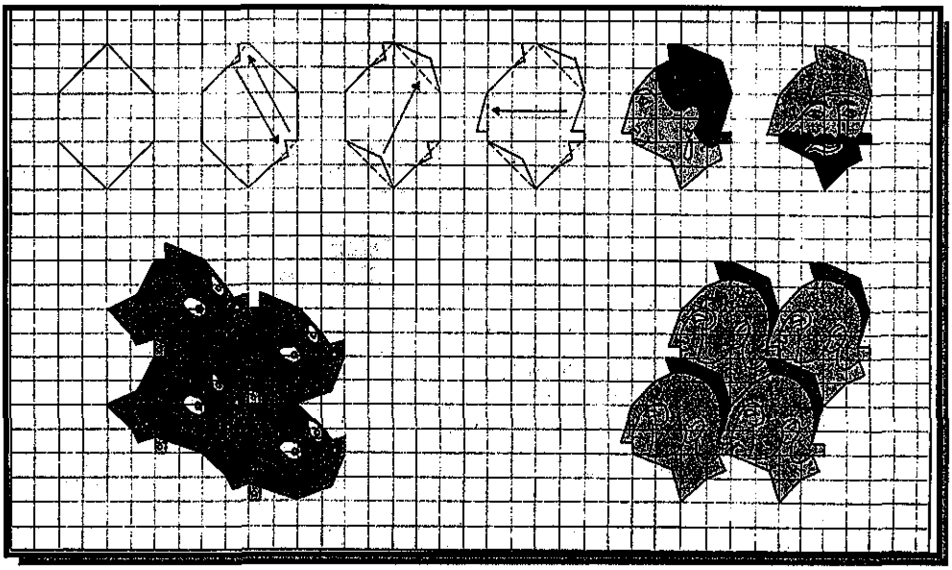


Fig. 3.12 Pasos para obtener Teselados
Fuente: Langdon, N. y Snapes, Ch. (1995)

# IV

# Las Matemáticas y la Música

# IV.1. EL VINCULO FUNDAMENTAL

Leibniz escribió alguna vez: "la música es un ejercicio de aritmética secreta y el que se entrega a ella ignora que maneja números". En efecto, el vínculo entre la musica y ciertas partes de las matemáticas es muy estrecho y esto se debe principalmente a las razones siguientes:

1. El efecto de un sonido musical sobre nuestro oído depende ante todo de su altura (los físicos dicen de su "frecuencia", es decir, del número de vibraciones por segundo del cuerpo que emite el sonido). Decir que oímos la nota musical $Do_5$ o decir que nuestro oído registra 256 vibraciones por segundo significa lo mismo.

2. Cuando oímos dos sonidos simultáneos esto equivale a percibir una relación de dos números. Oír Do y Sol de la misma gama equivale a "oir" la relación 3/2, que es la de sus frecuencias. Ahora bien, la experiencia musical demuestra que el efecto estético de un acorde depende casi exclusivamente de la relación de sus frecuencias. Todo el problema de la armonía es, pues, el de una elección de relaciones

3. A estas dos razones (melodia y armonía[1]), se añade el del ritmo (otro elemento de la música) que es de naturaleza esencialmente artimética.

Los colores, que también se diferencian por su frecuencia, desempeñan con respecto a la vista el mismo papel que los sonidos con respecto al oído; nuestro ojo y nuestro oído son contadores de frecuencias. Sin embargo, hay una diferencia enorme entre la utilización de los colores y la utilización de los sonidos: un pintor puede colocar sobre su lienzo colores de cualquier frecuencia (*color*), pero un compositor musical no puede poner en sus obras sonidos de altura (frecuencias por segundo) arbitraria. ¿por qué?

Primero porque tiene que escribir su música. Haría falta un número infinito de signos para designar todas las alturas de los sonidos; el desciframiento de esta escritura sería casi imposible y en todo caso muy lenta. Por otra parte, la música está hecha para ser ejecutada y la gran mayoría de nuestros instrumentos no puede emitir más que un número limitado de sonidos.

Además, nuestro oído es incapaz de percibir la diferencia entre dos sonidos muy cercanos. Este "poder separador", varía evidentemente entre los individuos, pero en

[1] Más adelante se desarrollará con detalle cada uno de estos términos.

general, no permite distinguir, por ejemplo sobre el violín, una diferencia de posición de los dedos del orden de los 2 milímetros. Por estas razones, es inútil el empleo de todas las frecuencias. No obstante, se admite que un oído ejercitado puede discriminar en la extensión de una octava alrededor de 300 sonidos: pero sigue siendo demasiado para la escritura musical y para los instrumentos (un piano de 8 octavas tendría que tener 2400 teclas).

Con fines musicales, esto ha obligado a no utilizar más que un número restringido de sonidos en cada octava, que es el intervalo de base natural. Se dice que dos notas están a la octava si la frecuencia de una de ellas es el doble de la frecuencia de la otra.

La cuestión planteada, pues, desde que la música se convirtió en un arte es la siguiente: ¿cómo elegir entre los 300 sonidos discernibles (por el ser humano) de una octava, una gama de unos pocos sonidos?

Es importante que se comprenda todo lo que esta cuestión tiene de importante; esto determinaría la suerte de la música durante milenios, si no es que para toda la eternidad.

Para entrarle al desarrollo de esto que es la esencia de la relación entre la música y las matemáticas, en seguida vamos a definir algunos conceptos de la Música, la Física y las Matemáticas, y después, finalizaremos con el proceso histórico de la música que tiene que ver con la Filosofía misma.

# IV. 2 LA ACÚSTICA

La acústica es parte de la Física que trata de la formación y la propagación del sonido.

La música utiliza al sonido como su materia prima, para transmitir pensamientos e inquietudes.

El sonido es una perturbación de una onda que viaja a través de un medio y que es capaz de excitar el oído, originando la percepción auditiva. Su naturaleza está dada como un movimiento ondulatorio longitudinal perceptible al oído.

Desde el punto de vista de la Física, los sonidos se clasifican según la forma de la onda: en ruidos y sonidos musicales.

Los ruidos son aquellos sonidos originados por una serie irregular de vibraciones que producen sensaciones desagradables al oído, físicamente hablando, son ondas no periódicas; por ejemplo, el sonido del escape de un auto. Los sonidos musicales son los que se originan en una serie regular de vibraciones u ondas periódicas capaces de producir en nuestro oído una sensación agradable; por ejemplo, el sonido producido por *una cuerda de guitarra.*

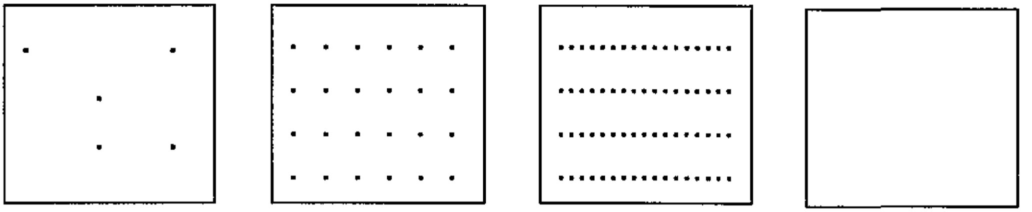
Las vibraciones son movimientos oscilatorios que ejecutan los cuerpos sonoros o elásticos. El sonido es el resultado de las vibraciones que ejecutan las moléculas de un cuerpo elástico o sonoro por efecto de percusión o frotamiento.

El sonido se percibe a través de ondas sonoras pero requiere de un medio de transmisión.

**Medios de transmisión del sonido**

La materia, en cualquiera de sus estados fundamentales es el medio en que se transmite el sonido. Entre más compacta está la materia, más rápido transmite el sonido. Fig. 4.1

Fig. 4.1



| Gaseoso | Líquido | Sólido | Vacío |
| --- | --- | --- | --- |
| Partículas | Partículas | Partículas | No hay materia |
| Muy separadas. | menos separada | Muy juntas | No se transmite el sonido. |

El desencadenamiento de choque de las moléculas de un cuerpo sonoro se realiza más rápido cuando se encuentran más juntas unas de otras. Fig. 4.2

Fig. 4.2

Estas moléculas se desplazan más despacio y por lo tanto, tardan más tiempo en transmitir el sonido

Estas moléculas tardan menor tiempo en transmitir el sonido

En el estado sólido, la transmisión del sonido es más rápida, pero desde el punto de vista musical, el medio más usual es el gaseoso, a través del aire (el cual está formado por 21 % de oxígeno, 78 % de nitrógeno y el resto de gas carbónico, inertes, polvo y contaminantes).

Cuando llueve y simultáneamente truena, primero percibimos el relámpago y posteriormente escuchamos su sonido. De esta manera, podemos observar que el sonido producido tarda cierto tiempo para llegar a nosotros.

El sonido se propaga con movimiento uniforme a través de medios elásticos y su velocidad depende de la densidad del medio. A mayor densidad, mayor velocidad del sonido. En la tabla 4.1 se muestra la velocidad del sonido en diferentes medios.

Experimentalmente, se ha observado que la velocidad de propagación del sonido en el aire varía 0.6 m/seg por cada grado de temperatura que se eleve. Sin embargo, se usa como valor promedio de la velocidad del sonido en el aire, 340 m/seg.

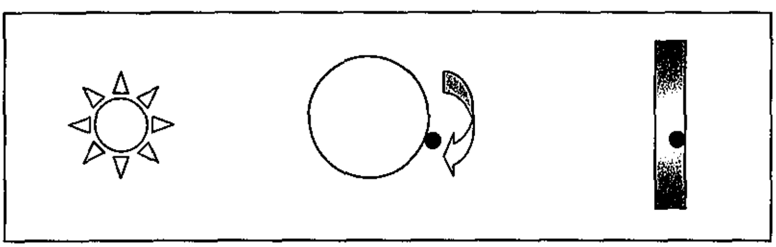
| **Medio** | **Temperatura (° C)** | **Velocidad (m/seg)** |
|---|---|---|
| Aire | 21 | 344 |
| Agua | 15 | 1480 |
| Acero | 20 | 5130 |
| Aire | 0 | 331 |
| Oxígeno | 0 | 317 |
| Caucho | 0 | 540 |
| Aluminio | 20 | 5100 |
| Vidrio | 0 | 5200 |
| Alcohol | 0 | 213 |

Tabla 4.1

**Representación gráfica del sonido**

El origen de cómo se produce el sonido puede ser representado de manera semejante al movimiento armónico simple (M.A.S.). El M.A.S. es la proyección de un punto que gira con velocidad uniforme alrededor de una circunferencia. Fig. 4.3

Fig. 4.3



Fuente luminosa — Punto que gira con Velocidad uniforme — Sombra del punto en la pantalla

Al proyectar linealmente este movimiento utilizando una frecuencia en el tiempo transcurrido, obtenemos el movimiento ondulatorio simple que es como se representan las vibraciones de un cuerpo elástico que produce sonido. Fig. 4.4

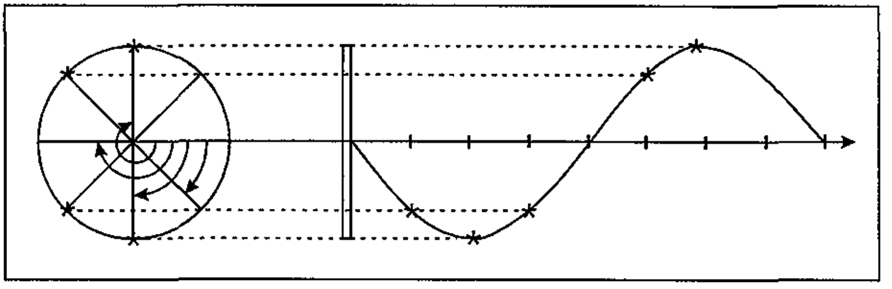
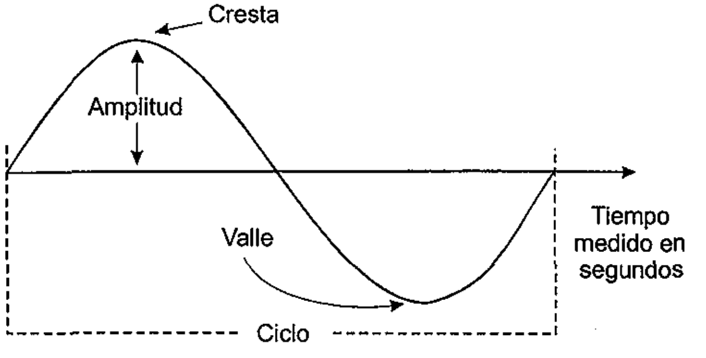


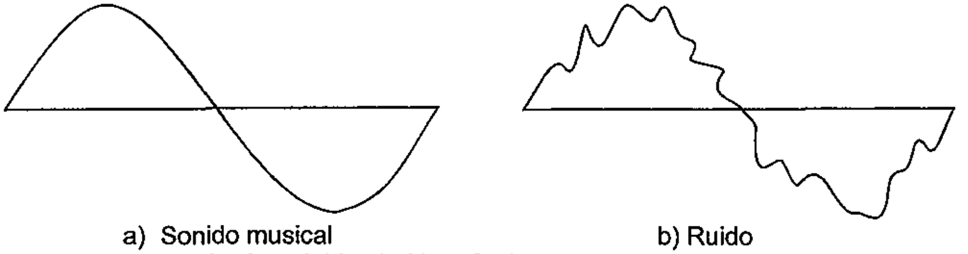
Fig. 4.4




Fig, 4.5 Onda sonora

Los fenómenos acústicos llamados ruidos, son sonidos también, ondas producidas por vibraciones sólo que por su gran cantidad de vibraciones secundarias, molestan al oído humano ya que son difíciles de separar y simplificar. Ejemplo, ver Fig. 4.5

Fig. 4.6 El Sonido



a) Sonido musical
Onda sonora simple. Agradable al oído

b) Ruido
Onda sonora irregular. Desagrable al oído

Las ondas sonoras se estudian y se miden de acuerdo a su frecuencia.

Frecuencia es el número de ciclos o vibraciones que se producen en un segundo; y Hertz es la medida de frecuencias por segundo, o vibraciones por segundo. Hertz = Hz = número de vibraciones / segundo.

La velocidad de propagación del sonido se puede calcular conociendo la distancia recorrida de la onda X, y el tiempo en recorrerla, t; ésto es:

$$V = X / t$$

Donde V es la velocidad de la onda.

Si se conoce la longitud de onda L, y el período T, entonces se puede emplear la ecuación:

$$V = L / T$$

Ejemplo. Un rayo cae a 1700 m distante de un grupo de personas que escucharon un trueno 5 segundos después de observar el brillo del relámpago. ¿Con qué velocidad se manifiesta la onda sonora?

Resolución.

Como V = X / t, entonces solo basta sustituir en la ecuación; por lo tanto, V = 1700 m / 5 seg = 340 m =seg.

## IV.3 CUALIDADES DEL SONIDO.

Se denominan cualidades del sonido a aquellas caracteristicas o propiedades que lo acompañan y que nos permiten distinguir unos sonidos de otros. Desde el punto de vista físico, estas cualidades se llaman: tono, intensidad y timbre.

Tono.

Es la cualidad que nos hace distinguir un sonido grave de uno agudo, y esta cualidad está directamente relacionada con la frecuencia (número de ciclos por segundo – Hertz). Los tonos graves tienen bajas frecuencias y los tonos agudos poseen altas frecuencias , de ahí que a los sonidos graves se les llame también como "bajos" y a los agudos como "altos".

Se ha determinado, con mediciones experimentales, que el oído humano percibe únicamente sonidos cuyas vibraciones (frecuencias) se encuentran aproximadamente entre 20 y 20000 ciclos por segundo (Hz). Este rango es variable de acuerdo a las capacidades auditivas de las personas.

Las ondas con frecuencias menores a 20 Hz son llamadas ondas infrasónicas. Las ondas con frecuencias superiores a 20000 hz, son llamadas ondas ultrasónicas o ultrasonidos. Estas ondas son muy utilizadas en comunicaciones, en la industria y en la medicina moderna para tratamientos musculares, ecografías, terapias, etc.

Para su manejo y estudio, el rango o banda de frecuencias audibles (20-20000 Hz) se ha dividido en 3 grupos o subbandas, a saber: los sonidos graves, medios y agudos.

Se llaman tonos graves o bajos a aquellos cuyas frecuencias están comprendidas entre 20 y 500 Hz; tonos medios son aquellos cuyas frecuencias están entre 500 y 5000 Hz, y agudos o altos los que tienen frecuencias entre 5000 y 20000 Hz

La figura, 4.6 a), muestra el espectro auditivo dentro de rangos normales de audición y la figura 4.6 b) nos permite diferencias físicamente la forma de la onda, cuando el tono es grave o bajo y cuando es alto o agudo.

Como la frecuencia está relacionada con la velocidad de propagación y con su longitud de onda, se puede escribir a continuación una expresión que contiene estas tres variables

$$F = V / L$$

Donde F es la frecuencia en hertz, V es la velocidad depropagación de la onda, en metros sobre segundo y L, la longitud de onda expresada en metros.

La ecuación nos muestra que la longitud L, es inversamente proporcional a la frecuencia. A mayor frecuencia menor es la longitud de onda.

Ejemplo. ¿Cuál es la frecuencia de un sonido que viaja en el agua, si su longitud de onda es de 0.4 m?

Resolución. Como la velocidad promedio de un sonido en el agua es de 1480 m/seg, entonces al reemplazar los valores, se tiene:

$$F = 1480\ m / seg\ /\ 0.4\ m. = 3700\ Hz$$

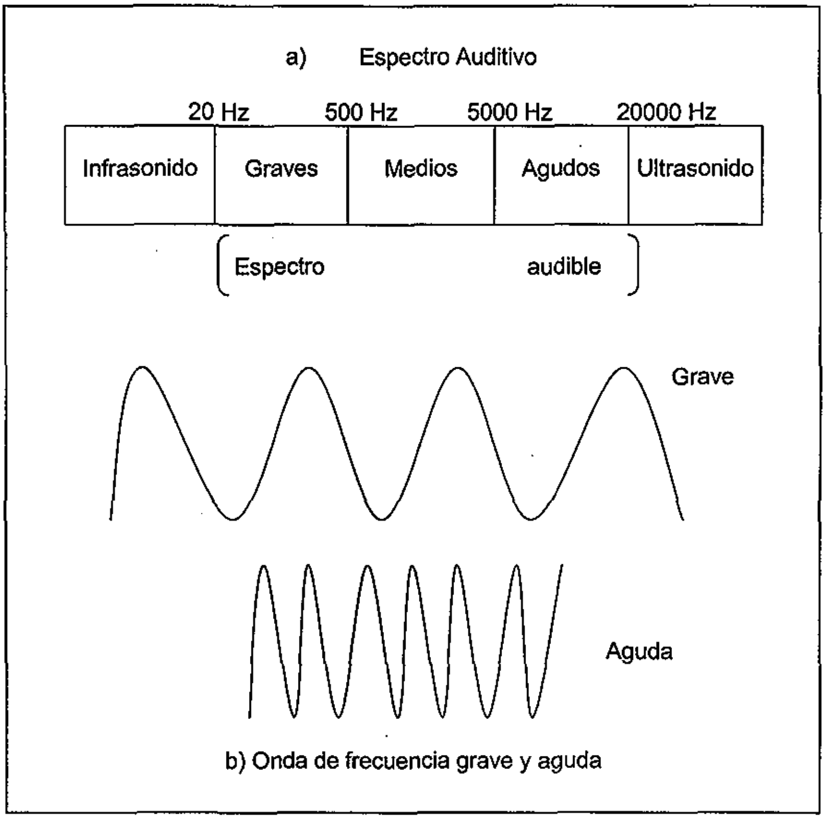
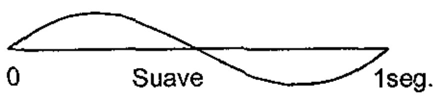
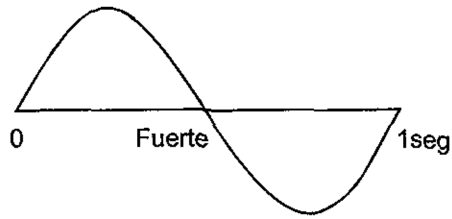



Fig. 4.7

Intensidad.

La intensidad es otra cualidad del sonido que nos hace diferenciar un sonido suave de uno fuerte, y es la amplitud de onda lo que determina la intensidad, una vibración con una amplitud grande será percibido como fuertre y viceversa.

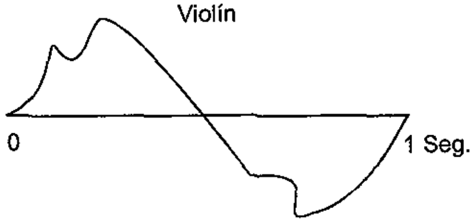



Timbre

Nos ayuda a distinguir instrumentos o fuentes sonoras diferentes. El timbre está determinado por las vibraciones secundarias que acompañan a un sonido.

Las vibraciones secundarias de un sonido se llaman armónicos, la manera en que se combinan y actúan los armónicos es lo que hace que escuchemos sonidos diferentes. Fig 4.7



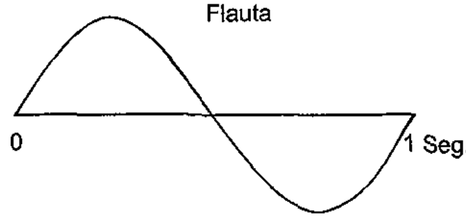




Fig. 4.7

# IV.4. INSTRUMENTOS MUSICALES

El objetivo de un instrumento musical es producir sonidos placenteros al oído. Los instrumentos musicales modernos se clasifican en acústicos y eléctricos. Los primeros producen sonidos por métodos físicos, mientras que los segundos lo hacen recurriendo a técnicas electrónicas de simulación. Los instrumentos acústicos, pueden ser de cuerda, de viento y de percusión.

Los instrumentos de cuerda generan sonidos como resultado de la fuerza de tensión ejercida sobre una cuerda estirada. Al tensionar una cuerda estirada y soltarla, esta última retrocede, pero debido a que tiene una masa y una inercia, no retorna a su posición de reposo, sino que continúa en su movimiento curvándose en el sentido opuesto. Ver figura 4.8

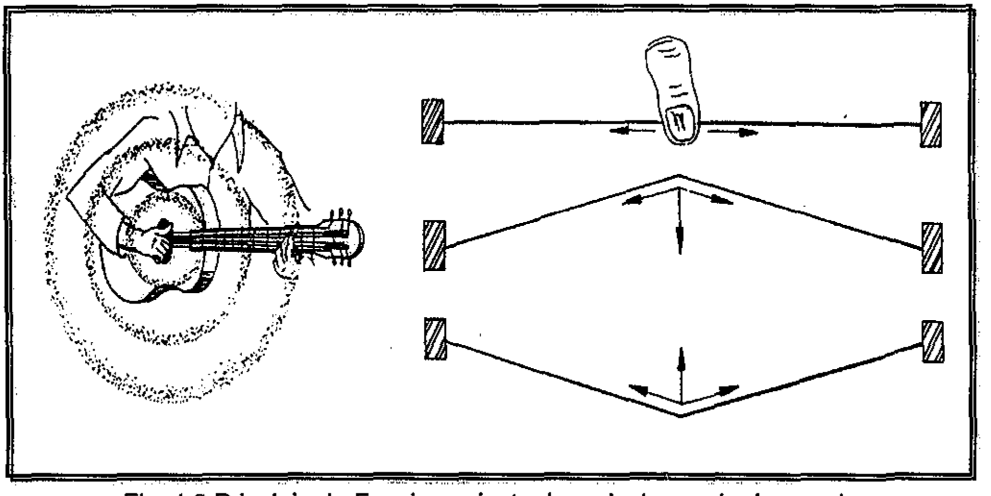


Fig. 4.8 Principio de Funcionamiento de un instrumento de cuerda.
Fuente: CEKIT, (1992)

En este caso, la tension actúa en sentido contrario y vuelve a empujar a la cuerda hacia atrás. Como resultado de esta vibración y del movimiento del aire circundante, se produce un sonido característico que es amplificado mediante una caja de resonancia acoplada al instrumento. Ejemplos de instrumentos de cuerda son el arpa, el violín, la guitarra, la viola, el violoncello, el contrabajo, etc. La voz humana se considera un instrumento sonoro. El proceso de formación de la voz se inicia desde los pulmones, los cuales impulsan una corriente de aire hacia las cuerdas vocales ubicadas en la laringe. Durante la inspiración los pulmones se llenan de aire, y en la exhalación las cuerdas vocales se tensan y se acercan entre sí, vibrando al paso del aire a una frecuencia que depende de su propia masa, longitud y tensión.

Los instrumentos de viento se basan en las propiedades de los llamados tubos sonoros, ver fig. 4.9, los cuales resuenan a frecuencias relacionadas armónicamente dependiendo de la forma que da a sus labios el intérprete y de la estructura propia de cada instrumento.

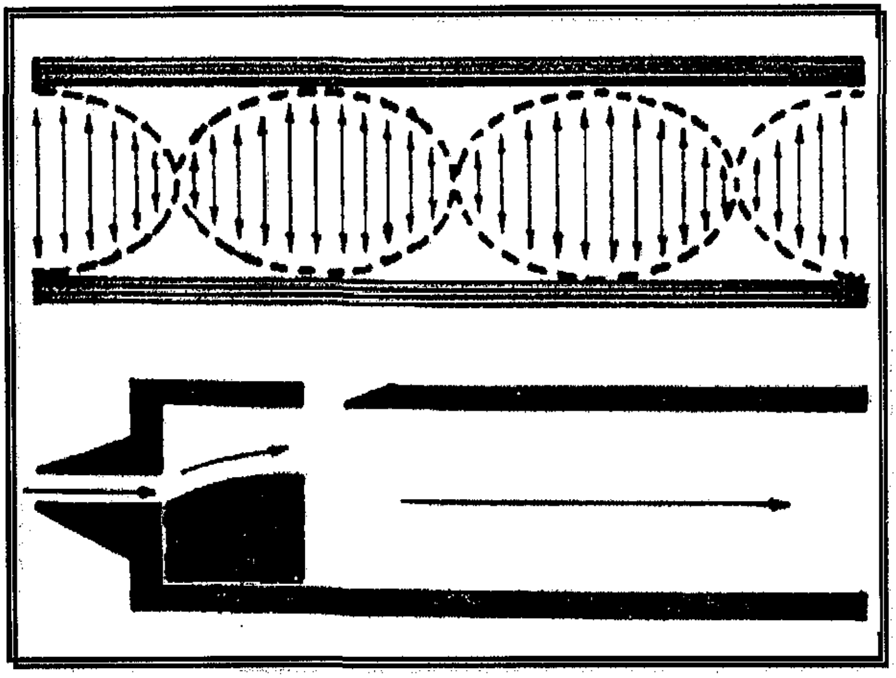


Fig. 4.9 Principio de funcionamiento de un instrumento de viento.

Fuente. CEKIT, (1992)

Un tubo de longitud L, por ejemplo, abierto en ambos extremos, vibra a una frecuencia, $f = V/2L$, siendo V la velocidad del sonido.

Un tubo cerrado en un extremo produce un sonido una octava más grave que un tubo abierto de la misma longitud. Ejemplos de instrumentos de viento son la ocarina, el fagot, el saxofón, el clarinete, el corno inglés, las zampoñas, etc.

Los instrumentos de percusión generan sonidos como resultado de un movimiento o golpeteo que se repite secuencialmente. Ejemplos de instrumentos de percusión son los timbales, las campanas, el xilófono, el bombo, el tambor, los platillos, la marimba, el piano, etc.

Tanto la voz humana, como los instrumentos musicales, tienen cada uno su propio espectro de frecuencias. Estos rangos se ilustran en la figura 4.10.

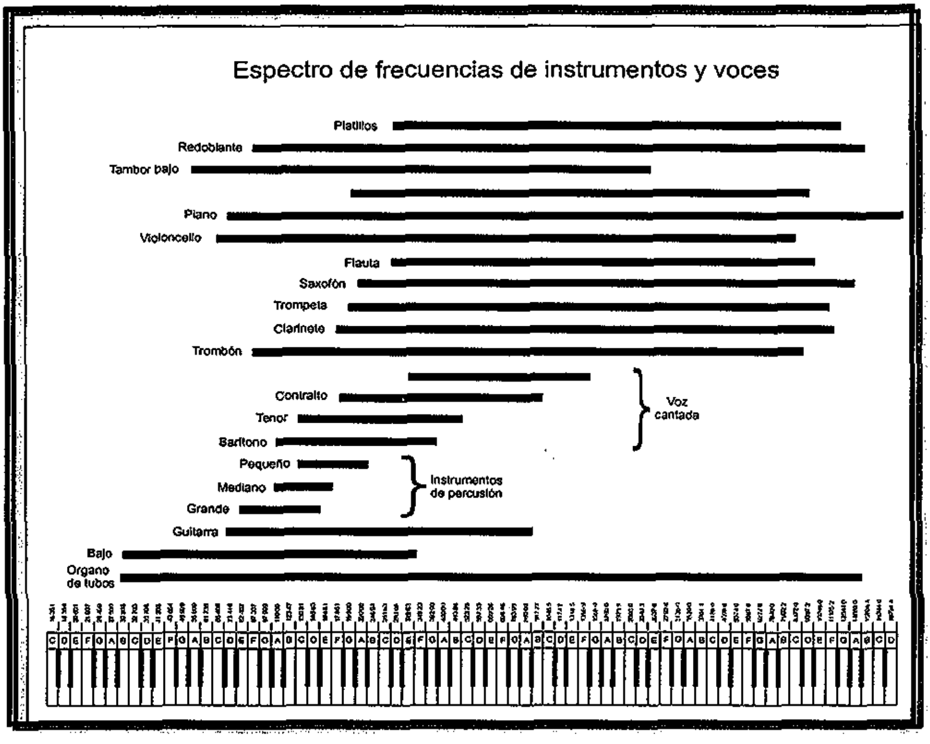
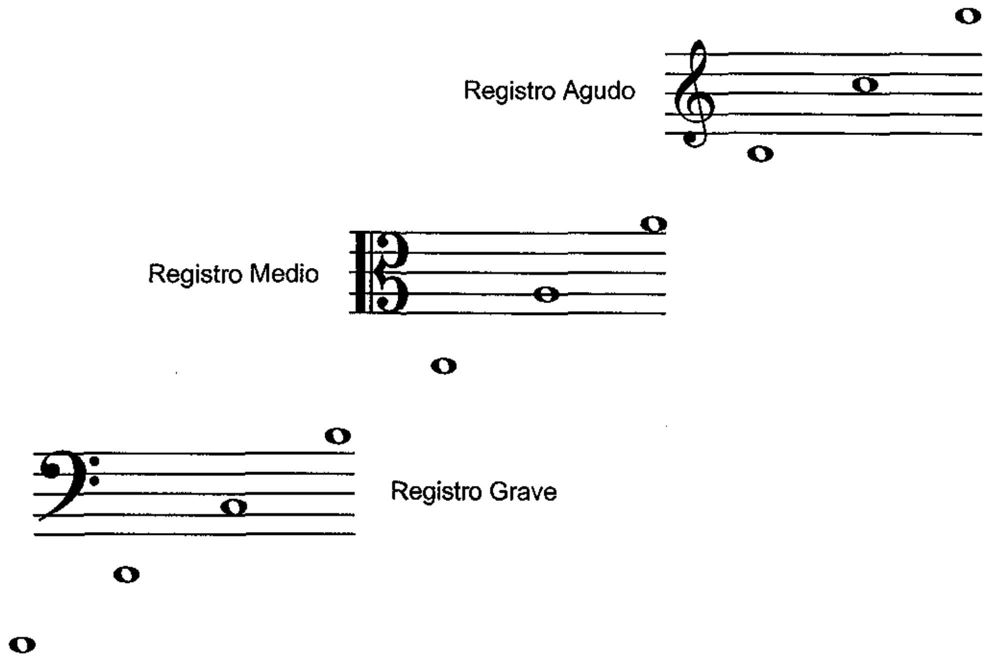



Fig. 4.10




| Do1 | Do2 | Do3 | Do4 | Do5 | Do6 | Do7 | Do8 | Do9 | Do10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 hz | 32 hz | 64 hz | 128 hz | 256 hz | 516 hz | 1024 hz | 1048 hz | 4096 hz | 8192hz |

Cuando al inicio del pentagrama:

Se coloca la clave de Sol se está en registro agudo

si se coloca la clave de Do se está en el registro medio

si se coloca la clave de Fa se está en el registro grave

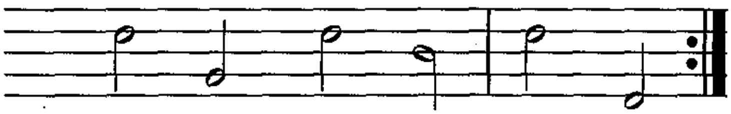
A continuación, daremos algunos elementos fundamentales de la música:

- *Música es el arte de combinar los sonidos y los silencios*
- Una obra musical completa que exprese más claramente sus mensajes está organizada y constituida por los tres elementos fundamentales que son: Melodía, Ritmo y Armonía.

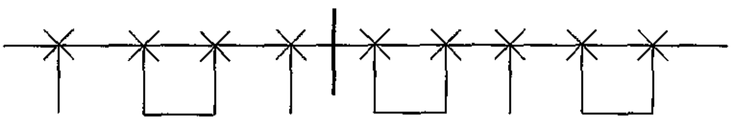
- ❖ Melodia es la Combinación de sonidos simples puestos sucesivamente, o sea, se ejecuta uno después de otro en una cadena horizontal y es la melodía la que expresa la idea principal de la obra.
- ❖ Ritmo es la combinación y el control de las diferentes duraciones de los sonidos y silencios organizando su acentuación.
- ❖ Armonía es la formación y encadenamiento de los acordes. Un acorde es la combinación de tres o más sonidos ejecutados simultáneamente. Es una cadena de sonidos verticales.

Elementos de la música

**Melodía**



**Ritmo**



**Armonía**

Tabla de figuras de duración de un sonido musical:

| Símbolo | Nombre | Duración | | Símbolo | Nombre | Duración |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 𝅝 | Redonda | 4 tiempos | | 𝅘𝅥𝅯 | Semicorchea | ¼ tiempo |
| 𝅗𝅥 | Blanca | 2 tiempos | | 𝅘𝅥𝅰 | Fusa | 1/8 tiempo |
| ♩ | Negra | 1 tiempo | | 𝅘𝅥𝅱 | Semifusa | 1/16 tiempo |
| ♪ | Corchea | ½ tiempo | | | | |

# IV.5. LA ELECCIÓN HISTÓRICA DE LAS NOTAS MUSICALES

Supongamos que los músicos de una cierta época hayan decidido dividir la octava en 10 intervalos de la manera siguiente: el sonido fundamental está dado por una cuerda de un metro, luego la octava por una cuerda de 50 centímetros y las notas intermedias por cuerdas de 55, 60, 65, etc., centímetros. Aparentemente esto es bastante entendible. Sin embargo, un fragmento escrito con esta gama no puede transcribirse a nuestra escritura actual, aún con ayuda de los sostenidos, bemoles, dobles sostenidos o dobles bemoles. Además solo algunos instrumentos, entre ellos el violín podrían interpretar ese fragmento de sonidos.

La música de esa época sería para nosotros completamente inutilizable, y por tanto estaría como *muerta*.

La continuidad de la vida de la música exige entonces, en las condiciones instrumentales que han prevalecido hasta ahora, la utilización eterna de una misma gama o de gamas tales que las diferencias sean prácticamente despreciables. De hecho es lo que ha ocurrido en la historia de nuestra música.

Si los músicos y los filósofos reflexionan sobre esto, se sentirán quizas espantados por la responsabilidad que incumbió a los primeros teóricos de la música cuando descompusieron la octava en partes definitivas. En ningún otro arte tenía tal decisión semejante importancia, y aquí viene un hecho: **sin matemáticas no habría música**[2]. El título de gloria más bello y verdaderamente eterno de los griegos es que crearon la gama musical *al mismo tiempo que creaban las matemáticas*.

Si luego alguna otra gama, auditivamente diferente, hubiese resultado ser más estética, se habrían producido tentativas para imponerla y a pesar de las dificultades que se han señalado se habría llegado a través de los siglos a abandonar una gama considerada anticuada. Pero han transcurrido cerca de 2500 años y las gamas actuales, de hecho no son sino variantes de la griega. Una misma escritura sirve para todas, las notas tienen el mismo nombre y un fragmento se compone, se escribe, se ejecuta, se canta sin especificar la gama. Si bien no son completamente equivalentes desde el punto de vista de la Física, se les utiliza y se les considera como tales.

Dentro de la filosofía de la estética, la cuestión del valor eterno de la gama griega es pues inquietante. Trataremos de aclarar parcialmente este misterio y para ello precisemos ante todo la naturaleza de las tres gamas que han sido más usadas: la

---

[2] Lara, A. (1971)

gama diatónica o de Pitágoras, la gama de Zarlino o de los físicos y la gama templada inmortalizada por Bach.

Como se hablará del intervalo determinado por dos notas, hay que entender la razón de las frecuencias de estas dos notas. Tomemos, por ejemplo, las notas correspondientes a 400, 600 y 800 vibraciones por segundo; el intervalo de las dos primeras es 600 : 400 o sea 3/2; el intervalo de las dos últimas, 800 :600, o sea 4/3. **La diferencia (algebraica) de las frecuencias es la misma, pero los intervalos no son iguales**. Esto es fundamental para lo que sigue.

1. La gama griega.

Tomemos una cuerda que dé el sonido Fa, considerado como el comienzo de la octava. Los 2/3 de esta cuerda darán una nota más aguda que será llamada, por definición, la quinta de Fa: será nuestro Do de la misma octava . Los 2/3 de la cuerda de Do darán igualmente una nueva quinta: el Sol de la octava inmediatamente superior; doblando la octava de este Sol, se volverá al Sol de la octava inicial, y así sucesivamente de quinta en quinta. Las notas obtenidas, lo son en el orden: Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si, que reducidas a la octava inicial se presentan en el orden: Do, Re, Mi, Fa, Sol, La Si, Do. Esta sucesión de quintas, continuada más allá del Si, no vuelve a dar Fa, sino una nota llamada Fa sostenido, luego Do sostenido, etc., y continuada por debajo del Fa inicial da los bemoles. La concepción de esta gama es la llamada pitagórica.

2. La gama de los físicos o de Zarlino.

Su principio es totalmente diferente, consiste en afirmar *a priori*, que dos sonidos serán más agradables al oído (sobre todo si se les oye simultáneamente), cuanto más armónicos comunes tengan. Un sonido inicial tiene como armónicos aquellos que corresponden a una frecuencia doble, triple, cuádruple, etc., de la del primero, se habla entonces de los armónicos 2, 3, 4, etc.

Tomamos el ejemplo de las frecuencias 400 y 500, que corresponden a un intervalo de 5/4: el armónico 5 del primer sonido, coincidirá con el armónico 4 del segundo (o sea, 2000 vibraciones por segundo); sus armónicos 10 y 8, respectivamente, coincidirán de nuevo, etc. A la coincidencia de armónicos lejanos corresponden, pues, intervalos complicados y si las frecuencias son inconmensurables (números irracionales), los dos sonidos no tendrán armónicos comunes.

De esta manera se determinan intervalos muy poco numerosos. Entre éstos, se encuentran algunos que figuran en la gama griega (9/8 para el intervalo Do - Re, ¾ para Do - Fa, 3/2 para Do - Sol). Otros no figuran ahí, pero son bastante próximos a los intervalos pitagóricos como para que puedan sustituirlos y recibir el mismo nombre.

El intervalo Do-Mi en las dos gamas no es el mismo, pero la diferencia es prácticamente insensible.

Se forman los sostenidos multiplicando las frecuencias por 25/24 y los bemoles multiplicando por 24/25, lo que da sostenidos y bemoles muy cercanos a sus correspondientes de la gama griega.

3. La gama templada.

Las dos gamas precedentes definen (identificando las notas muy próximas, como Do sostenido y Re bemol, etc.) 12 intervalos, que además son ligeramente desiguales. La gama templada divide también la gama en 12 intervalos, pero iguales *a priori.*

Resulta de ello que la potencia 12 de cada uno de estos intervalos iguales es igual a 2: es el intervalo de octava. Dicho de otra manera, el intervalo fundamental es la duodécima de 2 y las frecuencias de las doce notas están en progresión geométrica. Si la primera nota es Do, la segunda se llamará a la vez Do sostenido y Re bemol, etc. , que serán en esta gama dos notas idénticas.

La manera más simple de determinar el intervalo fundamental, raíz duodécima de dos, consiste en apelar a los logaritmos. Este intervalo fundamental es un número irracional. De esto resulta que la gama templada no posee *ningún intervalo simple*. No obstante, las notas de esta gama son bastante cercanas a las de las dos precedentes como para recibir los mismos nombres, aunque ninguna coincide exactamente con su homónima.

La gama templada es, pues, de una concepción matemáticamente más complicada que las otras y no pudo ser ideada antes de la invención de los logarítmos.

Juan sebastián Bach, que fue el primero en utilizar la "gama templada", solo pudo hacerlo porque Neper la había precedido e inventó los logaritmos poco después del año 1600. Esta gama se convirtió naturalmente en aquella por la cual se afinan los instrumentos de sonido fijo.

Aparte de estas tres gamas, se han desarrollado otras. Los partidarios fanáticos de la sección áurea han tratado de aplicarla a la longitud de las cuerdas. Estas investigaciones, aunque muy interesantes, no han logrado destronar a las gamas anteriormente descritas, que siguen siendo las únicas en uso.

Nos queda por intentar la crítica matemático-filosófica de estas tres gamas y ver si no sería posible que los matemáticos participaran en la renovación del arte de los sonidos.

Su valor estético no esta a discusión; es un hecho establecido por la potencia emotiva de la música. Se plantean entonces las cuestiones siguientes:

1° ¿De dónde proviene este valor estético?

2° ¿Agotan estas gamas las posibilidades de expresión de la música?

3° ¿No sería posible e interesante utilizar otros sonidos que los que estas gamas nos proponen?

Las gamas de Pitágoras y de Zarlino son para los matemáticos de idéntica concepción: ambas se reducen a relaciones simples. La gama templada, que utiliza relaciones irracionales, se puede derivar su valor emotivo exclusivamente del frágil argumento de que cuenta con intervalos iguales. Pues, entonces, se habría podido plantear a sus creadores la siguiente pregunta: ¿por qué 12 intervalos en una octava y no 7 o 15, etc? Pues porque mediante la división en 12 intervalos, se obtienen sonidos prácticamente identificables con los de la gama griega. La gama templada ha sido creada, a semejanza de la gama griega. La misma observación es válida para la gama de Zarlino, que entre los sonidos que permite tener en cuenta no utiliza más que los ya identificados por Pitágoras.

El problema estético de las gamas vuelve a recaer íntegramente, por lo tanto, sobre la gama griega.

Su valor artístico reside en la siguiente concepción, admitida para las artes en general: **las relaciones simples son elementos creadores de belleza.** Es también un hecho establecido por la existencia de obras de arte concebidas según este principio. Podemos afirmar (con toda la prudencia que debe acompañar a tales afirmaciones): nuestras gamas son bellas porque participan del principio griego de armonía basado en la utilización de *relaciones simples.*

Aquí el matemático se plantea el problema relativo a la recíproca de esta afirmación: ¿la belleza no puede ser creada más que por relaciones simples? La respuesta es No. Por ejemplo, el canto del ruiseñor es hermoso, pero es imposible tratar de transcribirla a nuestra gama, la música ancestral en algunas partes de Africa no corresponde, con nuestros signos. No obstante estas melodias emocionan a esos pueblos. 2500 años de atavismo musical no se desenraizan tan fácilmente, pero no por esto tenemos derecho a deducir que están desprovistas de estética.

Por otra parte, nuestras gamas y la mayoría de nuestros instrumentos musicales impiden la utilización de los sonidos de variación continua, de los cuales hallamos ejemplos en la sirena, en el dominio de los sonidos más bien desagradables, o en las modulaciones del viento en los árboles o debajo de las puertas.

De esto resulta que nuestra música no agota, y no puede agotar puesto que todos los recursos del arte son los sonidos y la combinación de estos es enorme. No hay que concluir de esto que nuestro arte musical está viciado de pobreza original; de acuerdo a esa parte de las matemáticas que es el Análisis Combinatorio, hay más de 400 millones de maneras (posibilidades) de agrupar las 12 notas de la gama (sin tener en cuenta las repeticiones posibles y la diversidad del ritmo. Si tomamos en cuenta la repetición, tendríamos casi 9 millones de millones de posibilidades). Los compositores gozan de enorme libertad.

Pero, nada impide concebir una nueva utilización de los sonidos. No se está planteando una nueva gama para destronar a la otra, con la cual nos liga estrechamente toda la tradición musical. Se trata de completar las posibilidades actuales con otras en las cuales las matemáticas podrían tener un papel que desempeñar.

Nadie prohíbe que un músico pida a un matemático que le construya, por ejemplo, una gama de intervalos iguales, pero de 14 notas, en lugar de 12. La cuestión se resuelve fácilmente, como se ha visto, con la ayuda de los logaritmos. El músico podría (después de una adaptación de la que un buen artista debe ser capaz) hacer ejecutar un pedazo de esa gama, de acuerdo a la cual se podrían afinar los instrumentos de cuerdas y algunos instrumentos de viento. No subestimamos la dificultad pues el ser humano ha superado otras peores. Una de las gamas que podrían obtenerse así sería quizas la del ruiseñor o la de los pájaros en general. Además, observemos que la escritura musical no es más que un gráfico de dos variables: la duración de la nota y su altura.

En resumen, hace 2500 años la música se identificaba con las matemáticas de entonces: la escuela pitagórica creó a ambas con los mismos principios. Luego, las relaciones entre las matemáticas y la música disminuyeron. La gama templada fue, hace 250 años, el último resultado de su colaboración. No hay que inferir de esto que esa colaboración ha terminado. Aún reserva indiscutibles posibilidades que quizas utilicen los músicos futuros.

# V

# Las Matemáticas y la Plástica

# V.1. UNA NECESIDAD HISTÓRICA

Comparemos la ilustración de la figura 5.1 con *la de la figura 5.2. La primera es una imitacion* de una antigua pintura egipcia. Todo en ella es plano, y cada parte parece que se ha puesto encima de las otras partes; es difícil poder decir a la primera mirada qué elementos de la pintura están más cerca o más lejos del observador.

Fig. 5.1. Fuente: Adler, I. (1974)

La otra ilustración es una pintura del artista italiano Jacopo Robusti detto il Tintoretto. Podemos ver claramente que las personas que allí aparecen están más cerca del observador que la catedral. También podemos apreciar en este cuadro que hay un sentido de las distancias entre los elementos que lo componen. El espacio en el cuadro de Jacopo es mucho más real que el de la pintura egipcia, porque el pintor italiano empleó las matemáticas al hacer el bosquejo de la composición de su obra.

El gran artista alemán Alberto Durero afirmaba que la "geometría es el cimiento adecuado de la pintura". Para hacer que un cuadro parezca real, el artista tiene que pensar en su tela como si fuera una ventana, a través de la cual mira lo que está más allá de ella. El pintor razona de este modo: "cada punto de la escena envía un rayo de luz hacia la persona que lo está mirando. Estos rayos de luz pasan por la ventana que está entre el ojo y la escena. El lugar en que el rayo de luz cruza la ventana, es el sitio en el que el punto de donde procede aparecerá en el cuadro".

Los rayos que van de la escena al ojo se llaman *rayos de proyección*. La pintura o imagen formada en donde la ventana cruza la proyección, se llama *plano de proyección*. Calcular cómo se ve el corte, es un problema de *perspectiva*. Las regla de la perspectiva fueron formuladas con la ayuda de la geometría.

En el cuadro de Tntoretto vemos cómo empleó el artista dos de las reglas de la perspectiva: mientras más lejos esté un objeto, más pequeño se verá; las líneas paralelas que se alejan del cuadro, como las rectas de la vía del ferrocarril, parece como si llegaran a un punto. Las matemáticas han sido de gran utilidad al arte pictórico y al escultórico, mediante la perspectiva. Y el arte ha pagado su deuda, porque el estudio de la perspectiva hizo que se desarrollara una nueva rama de las matemáticas: la *geometría descriptiva*.

La geometría descriptiva fue creada por Gaspar Monge. Nacido en Beaune, Francia en 1746, era hijo de un agente viajero que lo puso interno con los padres del Oratorio de su ciudad natal. A la edad de 14 años trazó un plano de Beaune que llamó la atención de un jefe de los servicios estratégicos, el cual le envió a continuar sus estudios en Méziéres, Francia.

Fig. 5.2. Fuente: Mondadori, A. (1958)

Además de la geometría descriptiva, la que no había estado autorizado a divulgar inmediatamente, por temor a que la utilizara el enemigo (designado por Napoleón para formar parte de la expedición a Egipto, fue el alma de las investigaciones científicas), este gran matemático había hecho dos desarrollos de capital importancia: la ley que se conoce como Principio de Continuidad y el Grado de las Ecuaciones Diferenciales Parciales.

# V.2. EL NÚMERO *DE ORO*

Leonardo de Pisa, mejor conocido por su apodo Fibonacci (que significa *hijo de Bonacci*), nació en la ciudad italiana de Pisa y vivió de 1170 a 1250. Leonardo se hacía llamar "Billogo", que quiere decir "bueno para nada". Vivió y estudió en Argelia, donde su padre Guglielmo Bonacci era representante comercial de la próspera ciudad italiana de Pisa. Se sabe poco de su vida, pero en el prefacio de uno de sus libros más importantes, el *Liber Abaci* (libro sobre el ábaco), Leonardo cuenta que fue su padre quien le enseñó la aritmética y lo animó a estudiar matemáticas.

Con ese libro se inició el Renacimiento Matemático del mundo occidental. En esa obra Fibonacci mostraba, entre otras cosas, las ventajas del sistema de numeración indoarábigo que todo el mundo usa hoy sin dificultades. Decidió llevar este sistema a Italia, y de ser posible a toda Europa, en donde aún se usaban los números romanos y el ábaco.

Hubo que esperar hasta principios del siglo XVI, unos 300 años después de la publicación de su libro, para que el nuevo sistema se hiciera universal

Leonardo de Pisa fue sin duda el matemático más original y hábil de toda la época medieval cristiana, pero buena parte de sus trabajos eran demasiados difíciles para ser bien comprendidos por sus contemporáneos. Aunque parezca imposible, todavía se conservan copias de los siguientes libros: *Liber Abaci* (1202); *Practica Geometriae* (1220); *Filos* (1225) Y *LiberQquadratorum* (1227). Pero muchos más se perdieron al correr de los años.

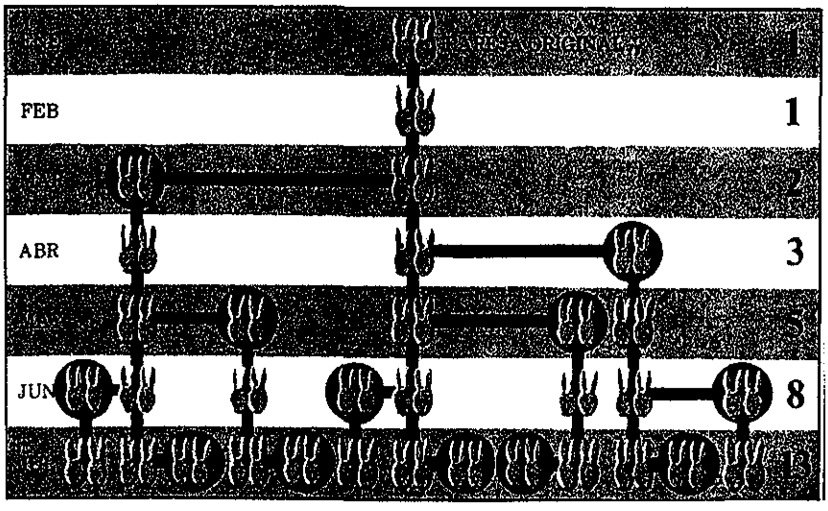
Justamente por ser el *Liber Abaci* su libro más importante, en él se puede dar uno idea de cómo estos tratados fueron fundamentales en la formación de mercaderes y comerciantes aptos en matemáticas y, por tanto, en el surgimiento y desarrollo del capitalismo europeo. Algunos temas que se trataban eran: Lectura y escritura de los números en el sistema indoarábigo; Multiplicación de números enteros; Multiplicación de números enteros por fracciones; Fracciones; La regla de la falsa posición (*régula falsi*); Raíces cuadradas y Raíces cúbicas; etc.

Es en el *Liber Abaci* que Leonardo de Pisa propone el enunciado y la solución del famoso problema de los conejos que dio origen a la "Serie o Sucesión de Fibonacci".

El juego consiste en lo siguiente.

En enero te regalan una pareja de conejos recién nacidos. Después de dos meses ellos procrean una nueva pareja de conejos y siguen procreando una nueva pareja cada mes después de esto. Cada nueva pareja de conejos, después de dos meses, produce una nueva pareja y sigue produciendo una pareja cada mes. ¿Cuántas parejas se tendrán en agosto, en diciembre?

La solución. El diagrama de abajo muestra cómo el número de parejas vivas cada mes forma una sucesión particular, la cual tiene las propiedades curiosas. Cada nuevo numero de la sucesión se encuentra al sumar los dos números anteriores.




Cada término de la sucesión de Fibonacci es la suma de los dos términos anteriores. Así, en agosto se tendrían: 8 (parejas que habían en junio) + 13 (parejas que habían en julio) = 21 (octavo número de Fibonacci).

La serie de Fibonacci es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946,...

Por cierto, uno puede construir sucesiones como la de Fibonacci, es decir, una en la que cada término sea la suma de los dos anteriores. Cuando se dé este caso, la suma de los 10 primeros números será 11 veces el séptimo término, siempre. Esto sucede en la serie de Fibonacci y en cualquier otra que se construya de la misma manera. Por ejemplo, sumando los diez primeros números de Fibonacci nos da 143 y si multiplicamos el séptimo término por 11: 13 x 11 = ¡ **143** ¡ . Si ahora inventamos una serie, por ejemplo:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, etcétera.

A partir del tercer término, éste se obtiene sumando los dos anteriores.

Igual que con la serie de Fibonacci, sumando los diez primeros términos nos da el producto del séptimo término por 11. La suma es: 1 + 3 + 4 + 7 + 11 + 18 + 29 + 47 + 76 + 123 = 319. El producto es: 29 x 11 =319 .

La serie de Fibonacci tiene características aritméticas muy interesantes y aplicaciones importantes.

Ahora vamos a construir otra serie a partir de la de Fibonacci como sigue. Tomamos un número de la serie de Fibonacci y lo dividimos entre el siguiente. Así, tenemos:

$$1/1 = 1$$

luego,

$$1/2 = 0.5$$

y así sucesivamente:

$$2/3 = 0.666$$

$$3/5 = 0.6$$

$$5/8 = 0.625$$

$$8/13 = 0.615$$

$$13/21 = 0.619$$

Etc.

Si seguimos así nos daremos cuenta de que todos los demás cocientes se van acercando al número **0.618**. Este último recibe el nombre de EL NÚMERO DE ORO.

Otra manera de obtenerlo es como sigue:

Sumemos 1con 1, que nos da 2. Tomemos su inverso:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Sumemos 1 a este número: 1+ 0.5 = 1.5

Tomemos el inverso: $\frac{1}{1.5} = 0.666$

Lo que se hizo fue la operación siguiente:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+0.5} = \frac{1}{1.5} = 0.666$$

Ahora repetimos el procedimiento con 0.666. Le sumamos 1, que nos da 1.666 y tomamos su inverso:

$$\frac{1}{1+0.666}$$

Nótese que lo que se ha hecho hasta ahora es:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = 0.6$$

Continuando de esta manera se obtienen las siguientes formas. Le sumamos 1 a 0.6 y obtenemos 1.6. Su inverso es:

Este valor también se puede escribir como sigue:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}} = 0.625$$

Si se continúa con este procedimiento llega un momento en que se obtiene el número 0.618. ¡Otra vez **0.618**! El llamado número áureo, o también, la media dorada.

A este tipo de quebrados se les llama fracciones continuas.

Por lo que, el número de oro se obtiene también desarrollando una fracción continua:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}} = \text{NÚMERO DE ORO} = 0.618$$

Los patrones matemáticos coinciden, muchas veces, con patrones que existen en el arte, en la arquitectura y en la naturaleza. Un ejemplo clásico de esto es el patrón que genera "la razón dorada" o "la proporción áurea".

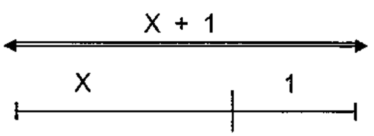
Los griegos ya conocían esta proporción que de hecho aparece mencionada en el libro VI de *Los Elementos* de Euclides y pensaban que era la proporción ideal en la que debían estar los lados de un rectángulo para que éste fuera el más bello, agradable, al ojo humano. La fachada del famoso Partenón es un rectángulo cuyos lados están precisamente en proporción áurea.

El valor numérico de la razón dorada es:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

que es aproximadamente 1.6180339... y es un número irracional.

Este número es el que se obtiene también, cuando se divide un segmento de recta en dos partes de manera que la razón del segmento completo a la parte más larga sea igual a la razón de la parte más larga a la parte más corta; es decir, que si se divide lo que mide el segmento completo entre lo que mide la parte más larga el resultado deberá ser igual a lo que mide la parte más larga entre lo que mide la parte más corta.




Supongamos que el segmento de recta mide x + 1 y que se divide en dos partes que miden x y 1 respectivamente. Entonces lo que debe suceder es:

$$\frac{X+1}{X} = \frac{X}{1}$$

Esto nos lleva a una ecuación de segundo grado:

$$X + 1 = X^2$$
$$X^2 - X - 1 = 0$$

Que tiene dos soluciones:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad y \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De las cuales, la positiva es precisamente "la proporción áurea"

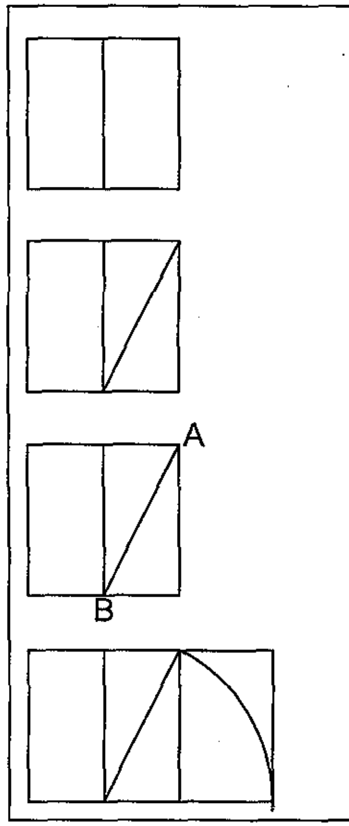
Una vez que se ha construido de esta manera "la razón dorada", construir un rectángulo dorado es muy sencillo:

1. Se empieza trazando un cuadrado. Se divide el Cuadrado en dos partes iguales.

2. Se traza una diagonal en una de las Mitades.

3. Con un compás y poniendo el lápiz en A, se traza un arco desde el punto B.

4. Se prolonga la línea de la base hasta que corte al arco. Desde este punto de intersección se traza una perpendicular hasta la línea de arriba para completar un rectángulo áureo.



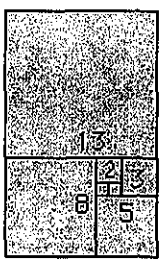




Fig. 5.3 Rectángulo "áureo"

Los antiguos matemáticos griegos no tenían calculadoras para facilitar sus investigaciones. En vez de esto, usaban regla, compás y lápiz. Aún así, ellos pudieron identificar las extraordinarias propiedades del rectángulo áureo de 1 X 1.618 o de 0.618 X 1.

La proporción áurea, el rectángulo dorado y la espiral logarítmica aparecen en muchas forma de la naturaleza: en varios tipos de conchas, en el acomodo de las semillas en algunas flores (el girasol, por ejemplo), en las semillas de los pinos, en las piñas y en muchas más.

¿Qué tienen que ver la razón áurea y la serie de Fibonacci?

Resulta que si tomamos la serie de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...

y vamos dividiendo los términos consecutivos, nos iremos acercando tanto como querramos al valor de la razón dorada:
1/1 = 1
2/1 = 2
3/2 = 1.5
5/3 = 1.666
8/5 = 1.6
13/8 = 1.625
21/13 =1.6153846 ...

... 610/377 = 1.6180371...
987/610 = 1.6180327...
el valor de la razón áurea es 1.6180339.........

El Partenón de la capital griega de Atenas es una de las construcciones más famosas del mundo, este fue construido con la razón áurea. En la figura 5.4 se ve el Partenón construido dentro del cual se ha trazado un rectángulo.

Este rectángulo es muy especial, puesto que es un ejemplo de lo que los griegos llamaban la razón áurea. Este rectángulo, los griegos solo lo podían hacer mediante dibujos.

Las calculadoras modernas pueden calcular la relación áurea ancho:largo con muchas cifras decimales. Los antiguos griegos creían que esta razón, la cual es aproximadamente igual a 1:1.618, según se sabe ahora, producía la forma ideal estética para construir un rectángulo. También pensaban que tenía ciertas propiedades mágicas, al igual que los egipcios, quienes la usaron en la construcción de las pirámides.

Fig. 5.4. El Partenón. Fuente: Langdon, N. (1995)

Por ejemplo, el pentáculo, también llamado "triple triángulo", era la insignea de los pitagóricos. Se consideraba un símbolo universal de salud, belleza y amor: uno de los juegos grabados en las pizarras del tejado del templo de Kurma, en la India (1700 a. C.), es el pentáculo para espantar a Mefistófeles, el demonio.

Esta figura contiene 25 triángulos áureos tales como ADC, AGF, AEB, AEG,DHC,... triángulos áureos son triángulos isóceles con un ángulo de 36º. Contiene también 20 secciones áureas, (ver figura 5.5).

En EGF, por ejemplo, se tiene:

$$\frac{EG}{EF} = \frac{EF}{FG} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618... \text{ (Número de oro)}$$

Se dan otras secciones áureas en EBG, GFB, EFB,...

En el triángulo áureo ADC, por ejemplo, se tiene:

$$\frac{AD}{DC} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618... \text{ (Número de oro)}$$

Si se unen los vértices del pentágono central, se obtiene otro pentáculo, etc., etc.

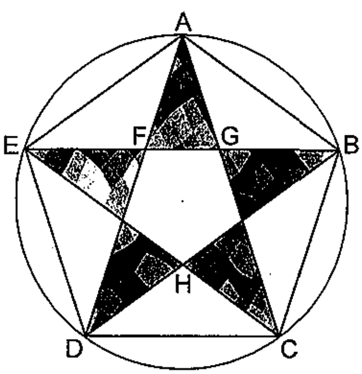



Fig. 5.5.

El triángulo de Pascal y los números de Fibonacci

Existen algunas relaciones entre la serie de Fibonacci y otros famosos arreglos de números, como el triángulo de Pascal.

El triángulo de Pascal es el arreglo de los coeficientes de la expansión de

$$\langle a+b \rangle^{n}$$

mostrado en la siguiente figura:

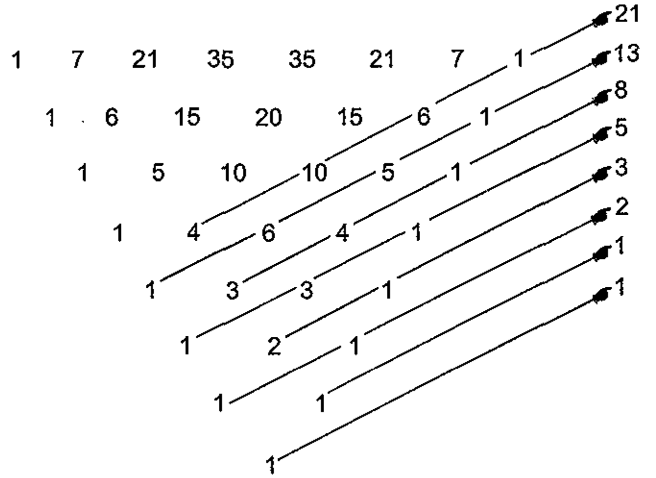



Fig. 5.6. El triángulo de Pascal y los números de Fibonacci.

El triángulo de Pascal se puede obtener por adición o substracción algoritmica, de la misma manera que la serie de Fibonacci. El triángulo se relaciona con la serie de Fibonacci porque los términos de la serie se pueden obtener sumando los elementos del triángulo de Pascal a lo largo de las "diagonales". La figura 5.6 muestra esta característica.

El número de oro en la naturaleza.

Los tallos de apio se acomodan siguiendo una forma de remolino. Los remolinos están ahí debido a que, como la mayoría de las plantas, el apio crece en forma espiral. Cada nuevo tallo crece en la parte de adentro del tallo anterior, de tal manera que la planta forma una espiral. De hecho, en el apio hay tres espirales. La de encima gira en sentido contrario de las manecillas del reloj, las dos siguientes giran en el sentido de las manecillas del reloj al ir hacia adentro.

El crecimiento en espiral no sólo se encuentra en el apio, sino en todos los cactus, coníferas, palmeras, margaritas, girasoles,... y muchos otros.

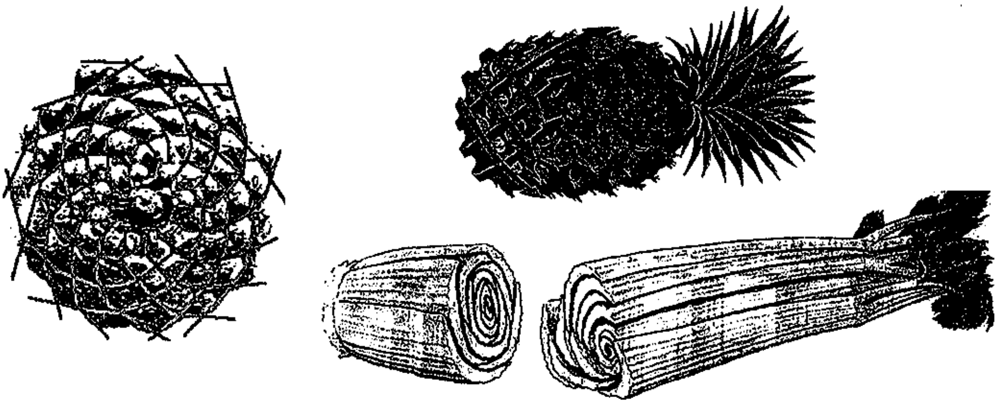


Fig. 5.7 Elementos de la naturaleza en los que se representan algunos números de la serie de Fibonaci. Fuente: Langdon, N. (1995).

En una piña, las escamas forman dos conjuntos de espirales al mismo tiempo. 8 espirales van en el sentido de las manecillas del reloj, viendo la piña desde abajo y 13 espirales van en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Algo interesante es que los números de espirales tanto en el sentido de las manecillas del reloj como en sentido contrario (1 y 2 en el apio; 8 y 13 en la piña; 21 y 34 en el girasol) son parejas vecinas de números de Fibonacci. Los números de Fibonacci que aparecen más frecuentemente son el 5 y el 8. En las coníferas se pueden encontrar espirales en conjuntos de 2 y 3, de 3 y 5, de 5 y 8 , de 13 y 21, etc.

# V.3. EL PUNTO, LA LÍNEA, EL PLANO

Los matemáticos hallan una estética en los conceptos de punto, línea y plano y las relaciones entre ellas. Es común que hagan teoremas y traten de explicarse las interconecciones entre estos conceptos. Otra estética en los puntos, líneas y planos se encuentra en las artes visuales. El arte puede ser usado para presentar conceptos iniciales de geometría, incluyendo la noción del infinito.

Para orientar visualmente a los estudiantes de secundaria y bachillerato, el uso del arte, como un recurso más, puede conducir a su mejor comprensión, y apreciación de la geometría y hacerla aparecer menos abstracta.

De hecho, existe una simbiosis entre los puntos de vista de los artistas plásticos y los matemáticos respecto a los conceptos de punto, línea y plano.

**Modelos geométricos en el arte.**

El Punto.

Euclides inició con "Un punto es aquello que no se puede dividir". Esta introducción al curso de geometría podría ser fatal. Aún por visualización, se podría pensar que un punto es la unidad más pequeña posible en un grupo de tales unidades que construyen un conjunto de sus elementos, esta abstracción viene a ser más real y significativa.

No existe una aplicación práctica de un punto cuando se divorcia de otros elementos geométricos.

Supongamos, por un momento, que el punto no está considerado como un elemento de la geometría pero viene a ser el único elemento digno de estudio. Si los puntos son tan importantes, ¿dónde están?, ¿qué hacen?.
El pintor Georges Seurat sugiere a los estudiantes que los puntos son los "elementos primitivos" que son usados para construir a partir de unirlos, hacer conjuntos de bloques (al estilo de sus pinturas se le conoce como *puntillismo).*
En matemáticas, a punto seconsidera como una representación. Es decir no se piensa en el punto en sí mismo. En el arte, los puntos son importantes y su estudio puede ser de interés a

Fig. 5.8 Técnica de Puntillismo
Fuente: Villegas, C. (1988)

nuestros estudiantes nuevos de matemáticas.

La herramienta de visualización que usaremos será la pintura. Se usarán las artes visuales como una manera de introducción o explicación de las ideas de línea, plano e infinito.

En su libro *Punto y línea frente al plano,* Wassily Kandinsky describe al punto como "un pequeño mundo regularmente aislado por todos lados y casi arrancado de su contorno. Su fusión con el ambiente es mínima y resulta inexistente en los casos de máximo reordenamiento... el punto es, en un sentido tanto exterior como interno, el elemento primario de la obra gráfica"[1].

Se sabe por experiencia cotidiana que el movimiento está íntimamente relacionado con la capacidad perceptual, por ella podemos observar cómo, en todo objeto en movimiento, estructuramos una línea: horizontal, vertical o diagonal. Es esto, en parte, lo que nos permite subrayar la similitud elemental de todas las cosas perceptibles y que es necesario anotar de qué manera difieren. El desarrollo de una danza, de una obra de teatro o de una pieza musical, crea una experiencia muy heterogénea y extiende un concepto de la vida muy diferente que una pintura, escultura o una realización arquitectónica. La estructura de la concha del caracol nos muestra una forma agradablemente rítmica. Las conchas son formas naturales de pequeños corpúsculos espaciales de pasta calcárea, cierta acumulación de puntos orgánicamente necesaria, y que obtiene su figura por los movimientos rítmicos del cuerpo que luego cridtalizaa. Otros ejemplos son las constelaciones de estrellas, estructuras de una superficie de puntos y círculos, algunos de certa alineación.

Los puntos se perciben en todas las artes y su energía interior ha sido comprendida por la conciencia del artista.

En el sonido percibimos claramente la función del punto. En el piano el sonido de cada tecla es corto y cuanto más consistente sea la forma de una unidad, con tanto o más destreza se destacará de su ámbito.

En la cerámica se señala, cómo las fuerzas internas hacen surgir formas que se perciben como deformación de figuras más simples. Un jarro se deriva geométricamente del círculo, cubo y cilindro.

[1] Villegas, M. (1981)

En el tejido, hoy en día, las máquinas cada vez más perfeccionadas, nos proporcionan suaves prendas de vestir en los cuales distinguimos particularmente dos clases de puntos: el punto al derecho, o sea cuando el tejido está formado por una serie de líneas horizontales, diminutas y semejantes a múltiples trazados; y el punto al revés cuando las líneas también horizontales, están combinadas con pequeños arcos alternados.

El punto también lo observamos en la interferencia de varios planos y líneas. En la arquitectura gótica los puntos están sumamente agudizados y los observamos claramente.

Hoy en día las artes gráficas nos ofrecen una riqueza de imágenes, en donde el punto desarrolla fácilmente sus formas internas, donde la herramienta –buril, gubias, bruñidor, recinas , ácidos, etc.- le ofrecen una amplia variedad de formas y tamaños. Siguiendo la técnica de puntillismo, los procedimientos gráficos y la moderna maquinaria, se elaboran actualmente todas aquellas imágenes impresas que podemos apreciar en las revistas, periódicos, carteles, etc.

La línea.

En algunas enciclopedias definen a la línea como una sucesión contínua de puntos que forman un conjunto. Se ha mencionado con anterioridad cómo el dinamismo en el punto, produce una nueva figura; la línea. Si trazamos por medio de nuestra regla y un lápiz, una línea, observaremos por medio de una lente de aumento, una sucesión de puntos con determinada dirección, producto de una fuerza mayor externa que coloca al punto, fuera de su estado de reposo.

El recorrido realizado por el punto, desde su lugar de reposo hasta el lugar donde la fuerza externa lo ha colocado, la Geometría le ha dado el nombre de línea, y la define como la posición de una recta en el espacio determinada por dos puntos geométricos.

La línea, según la claridad con que se le destaque, será la claridad de su expresión. Una línea recta expresará la quietud, la elevación o el movimiento, por su correcta ubicación en el plano material. En un rostro dibujado podemos apreciar la angustia, la felicidad, el enojo o la sorpresa por la definición perceptual de cada uno de los elementos, en lo individual como un conjunto, así como la dirección, posición y luminosidad que dan la correcta expresión a los rasgos lineales.

En una obra musical podemos gozar de las líneas delgadas que nos ofrece el violín, hasta las líneas más gruesas que produce el contrabajo. En la danza notamos cada movimiento del bailarín que es una línea que nuestra vista contempla.

En la escultura, arquitectura e ingeniería, diariamente nuestros ojos advierten la infinidad de formas que nacen de la horizontal y la vertical y sus diferentes variaciones.

El Plano

En nuestro mundo tridimensional, frecuentemente se considera un plano como una región donde se localiza un punto con solo dos números, el sistema coordenado cartesiano, nombre que se debe al matemático francés René Descartes (1596-1650).

En la obra gráfica entendemos como plano el espacio al cual nos enfrentamos al iniciar el planteamiento y desarrollo de nuestro dibujo o pintura.

# V.4. HACIA UNA TEORIA DE LA PINTURA: ARTE, ÓPTICA Y MATEMÁTICAS

Leon Battista Alberti y el arte de lo visible.

León battista nació en Génova el 14 de febrero de 1404. Murió en Roma en 1472. Alberti mostró especial interés en las matemáticas prácticas asociadas con oficios tales como la agrimensura. Este tipo de matemáticas no se enseñaban en las universidades, pero podrían ser aprendidas en las Escuelas de abaco.

La veneración de Aberti por el arte de los antiguos se hace patente en las numerosas referencias que le dedica en los libros II y III de *Della pintura*. También, en el libro I, Alberti decribe los fundamentos racionales de la pintura en la ciencia matemática de la visión. Describe el contenido de su primer libro como "completamente matemático". Entonces, **las artes matemáticas eran: la aritmética, la geometría, la astronomía y la música**, siendo las dos últimas de carácter teórico y no precisamente práctico. Estas cuatro artes matemáticas, conocidas como *cuadrivium* (literalmente significa la "cuádruple vía"), constituían lo que se consideraba eran las matemáticas. Junto con las artes de la gramática, la retórica y la dialéctica (el *trivium*, o la "triple vía"), todas ellas integraban las siete artes liberales que eran el fundamento de toda educación superior.

Fig. 5.9 Ilustración de un método para el trazo en perspectiva.
*El dibujante de la mujer acostada* de Alberto Durero (1525).
Fuente: Kline, M. (1998)

En el siglo XV las universidades jugaron un papel preponderante en determinar lo que era considerado como conocimiento válido y, por consiguiente, digno de ser incorporado al cuerpo de elementos de estudio (como ahora sucede). El tema que ocupa a Alberti en su libro I no es estrictamente matemático pero sí es esencialmente matemático, es lo que se llamaba *perspectiva*, la ciencia de la visión. La perspectiva se ocupaba también de la anatomía del ojo, la naturaleza de la luz, etc.

Las últimas cuestiones matemáticas que aparecen en *Della Pintura* marcan un retorno a algo muy trillado en la agrimensura, a saber, la recomendación de utilizar un aparato para realizar los avistamientos, en este caso un *velo* cuyos hilos sirven como un sistema coordenado para obtener la posición de los puntos de la imagen requerida (ver figura). Este es un proceso al que subyace una práctica de orden matemático, pero al mismo tiempo representa un método para darle la vuelta a una verdadera construcción matemática.

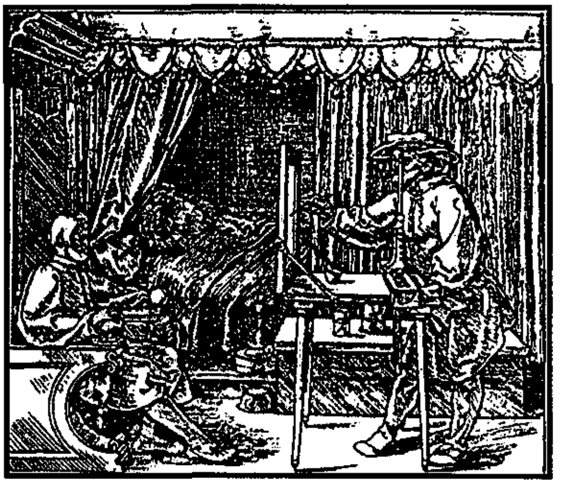


Fig. 5.10 *El dibujante del hombre sentado*
Alberto Durero. Fuente: Kline, M. (1998).

El artífice de la promoción social de los pintores, el gremio artístico más destacado del siglo XV, fue una técnica – primero empírica y posteriormente con un fuerte sustento de carácter matemático – geométrica que permitía situar correctamente en el espacio pictórico a todos los elementos que constiruían la escena representada. Así, tamaño, situación y colorido de personajes y demás objetos que integraban la obra artística, pasaban a quedar determinados por reglas precisas.

Sin embargo, aunque se acepte que la presentación de las reglas de la perspectiva fuera una contribución del Renacimiento italiano, esta empresa era antigua, remontándose a los tiempos de Esquilo, cuando el escenógrafo Agatarco preparaba los espacios y transfondos que enmarcarían las puestas en escena del gran trágico. En parte pérdida, esta tradición que permitiía generar ilusiones espaciales renace en el medievo como un reclamo que en boca de Roger Bacon invita a los artistas a que sus obras simulen el espacio tridimensional que permita convencer a los observadores de que lo que contemplan es una imagen de la realidad[2], la herramienta, en este caso, no guardaba relación alguna con la fe, y sí mucho con la geometría y la óptica. Por ello, en lugar de preocuparse por mostrar las relaciones metafísicas, los nuevos pintores geómetras del Renacimiento dieron paso a lo que sería conocido como una "pintura en perspectiva".

## Artes liberales y artes mecánicas

La importancia del rompimiento de la dicotomía entre artes liberales y artes mecánicas radica en que ambas formaban parte de una de las tradiciones intelectuales más firmemente establecidas.

Corrían los primeros años de la tercera década del siglo XV y los espíritus del artista, del geómetra y del artesano comenzaban a ser uno sólo.

Desde la antigüedad se había plasmado la diferencia entre las artes mecánicas, en las que participa el trabajo del cuerpo y que dan como resultado la transformación de elementos materiales, y las artes liberales, con contenidos altamente intelectualizados que operaban sobre conceptos derivados de una larga historia de análisis y depuraciones. El uso establecido en la Edad Media hizo que el término *artes* designara sólo a las artes liberales, agrupadas en el *trivium* (gramática, retórica y dialéctica) y el *cuadrivium* (astronomía, aritmética, geometría y música).

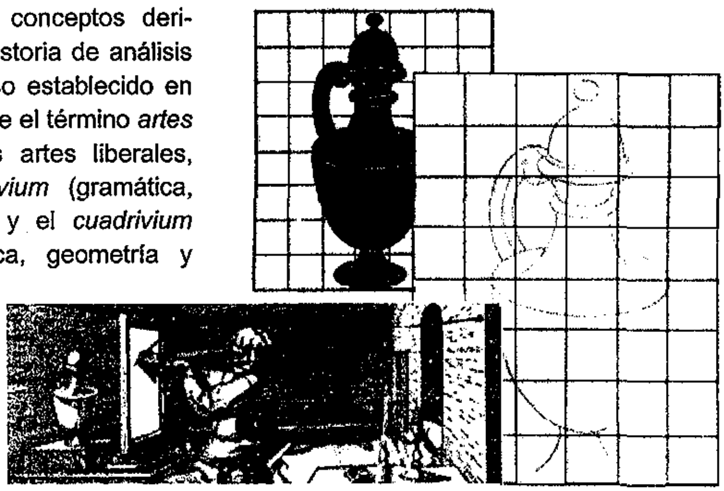


Fig. 5.11 Alberto Durero. Una imagen puede amplificarse mediante dos hojas de papel Cuadriculado. Fuente: Adler, I. (1974).

[2] Edgerton, S., (1991)

En este último grupo las matemáticas eran el eje conductor y por ello proporcionaron los elementos básicos para que pintores y escultores – miembros naturales de los gremios practicantes de las artes mecánicas- adquirieran conciencia de lo necesario que resulta el conocimiento matemático para alcanzar el realismo que reclamaban los grupos económicos más poderosos de la sociedad *quattrocentesca*.

Respaldar el oficio de pintor con elementos de corte intelectual era algo que ya había sido intentado por Vitruvio (s. II d. C.), quien sostenía que el verdadero arquitecto debe "...ser letrado, saber dibujar, estar instruido en la geometría y no ignorar la óptica, haber aprendido la aritmética y haberse alimentado con la lectura de la historia, haber estudiado filosofía y conocer de música, poseer algunos conocimientos de medicina, leyes, astrología y de los movimientos de las estrellas"[3].

Hacia el realismo pictórico.

Quienes pueden ser considerados precursores de una revolución en la representación del espacio pictórico son Giotto, Duccio de Buoninseggna y Ambrogio Lorenzetti.

La ilusión de espacialidad adquiere una connotación muy precisa en Duccio, para quien el espacio queda limitado al frente por la superficie pictórica. Sin embargo, y como se puede apreciar en *La cena del Altar Mayor* (1301-1308), las líneas de profundidad corren de manera que convergen en grupos sobre un eje de simetría y sin que de manera alguna determinen la localización espacial de los apóstoles situados alrededor de la mesa (fig. 5.12). Desde el punto de vista de la perspectiva, esto significa que sólo había logrado la unificación de un plano – el techo- y no la de todo el espacio. La pintura, en su conjunto, no es precisamente un éxito. La mesa parece estar inclinada hacia el frente. Los objetos dispuestos sobre ella parecen encontrarse en primer plano y a punto de resbalar o de volcarse. La mesa y la habitación no están dibujadas desde el mismo punto de vista. Las diversas partes del cuadro están desproporcionadas unas respecto a otras. A este esquema se le llama perspectiva vertical y fue perfeccionado después por otros pintores

[3] Vitruvio, M., (1991)

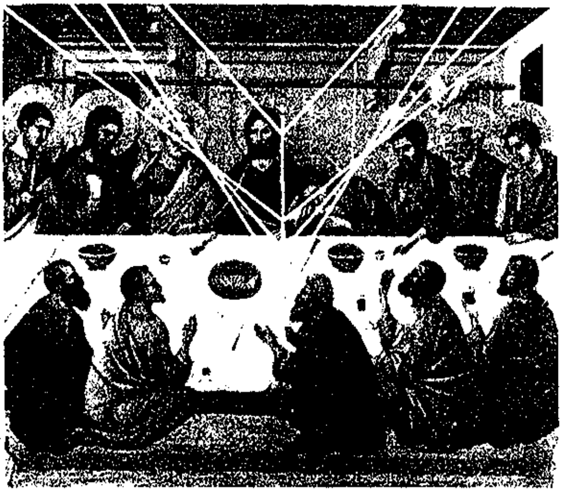


Fig 5.12 *La cena del Altar Mayor -la última cena-* (1301-1308)
Duccio di Buoninsegna, Museo dell'Opera del Duomo, Siena. Fuente: Alberti, L. (1996)

Con Giotto es evidente una unificación espacial más coherente y que puede apreciarse en la manera como los edificios, las plazas y los personajes que aparecen representados están integrados de manera que la escena luce más realista. Fig. 5.13

Fig. 5.13 *Las boda de Caná* (1304-1306). Giotto,
Capilla de Scrovegni, Padua. Fuente. Alberti, L. (1996)

En el Renacimiento el elemento que más llama la atención en lo que se refiere al sustento geométrico de una pintura, el llamado punto de fuga, aparece como un elemento organizador unitario con Ambrogio Lorenzetti, en su *Anunciación* de 1344 (fig. 5.14). Con ello la sensación de profundidad de la escena principal quedaba sugerida como extensión de la representación de los techos reticulados que de manera repetitiva, aparecen en las pinturas italianas de los siglos XIV y XV (fig. 5.14).

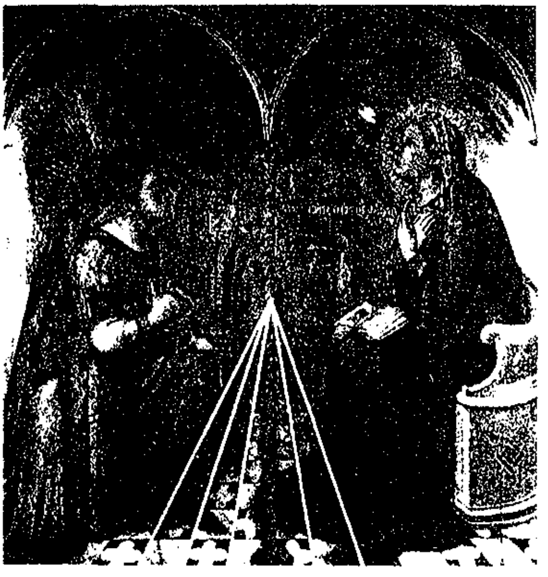


Fig. 5.14 *La Anunciación* (1344).Ambrogio Lorenzetti,
Pinacoteca Siena. Fuente. Alberti, L. (1996)

En la *Anunciación,* por primera vez, las llamadas líneas ortogonales – las que supuestamente corren perpendiculares al plano de la pintura- a la superficie, y que *corresponden a las líneas del piso, están todas orientadas hacia un punto único,* mostrando con ello plena conciencia matemática por parte del artista. Igualmente digno de llamar la atención es el hecho de que ya por primera vez es el plano de la base el que permite distribuir espacialmente los objetos. El piso cuadriculado se convierte en el codificador de los valores espaciales, aplicable tanto a cuerpos como a intervalos. Esta característica da lugar al primer ejemplo de un sistema de coordenadas que vincula elllamado "espacio matemático" con una intuición artística[4].

[4] Panofsky, E. (1985)

Pero a pesar de que esto representaba un gran avance en la posibilidad de una imitación sistemática de la realidad, el proceso aún no había alcanzado la cima de las posibilidades: en el caso anterior no era posible todavía determinar si todo el piso estaba construido utilizando solo un punto de fuga. La razón de ello radica en que las figuras mismas ocultan parte del piso y lo que ocurre sobre las paredes laterales. La relevancia de este hecho, que equivale a cuestionar el grado de conciencia de Lorenzetti poseía sobre el significado de su construcción se hace patente al revisar la *Presentación en el templo* (1342), otra de sus obras. En este cuadro las líneas ortogonales de las paredes laterales no tocan el mismo punto de fuga que las líneas correspondientes al piso y, por lo tanto, la unificación es solo parcial (fig. 5.15). Es significativo que para avanzar se recurriera a la vía matemática, la que tendría como primer producto la *costruzione legittima* o perspectiva lineal, gérmen de lo que casi tres siglos más adelante desembocaría en la geometría de Gaspar Monge.

Fig. 5.15 *Presentación en el templo* (1342).
Ambrogio Lorenzetti. Uffizi, Florencia. Fuente. Alberti, L. (1996).

Los historiadores coinciden en que fue Brunelleschi quien por primera vez elaboró un cuadro que ostentara una perspectiva plana que fuera matemáticamente exacta. *También existe consenso de que la primera justificación matemática aceptable de la* construcción en perspectiva aparece en el tratado de *Prospectiva pingendi*, fruto de Piero della Francesca (1416-92) y ejemplo magnífico de la fusión del artista y del matemático. Entre ambos personajes y su situación se localizan Masaccio (1401-29) y León Battista Alberti, el primero con su cuadro *La Trinidad* (1427) y el segundo con su pequeño manifiesto de la nueva ciencia de la pintura (1435), Ver Fig. 5.16.

Alberti presentó su idea de que el cuadro era la intersección de un plano con la pirámide visiva. Trazadas las líneas de fuga, había que valerse de dicha pirámide y de su manejo geométrico para costruir el alzado lateral y determinar los intervalos de profundidad. Gracias a esta construcción se pudieron determinar los "espacios interiores" de un cuadro y distribuir con las medidas correctas las figuras y los objetos representados.

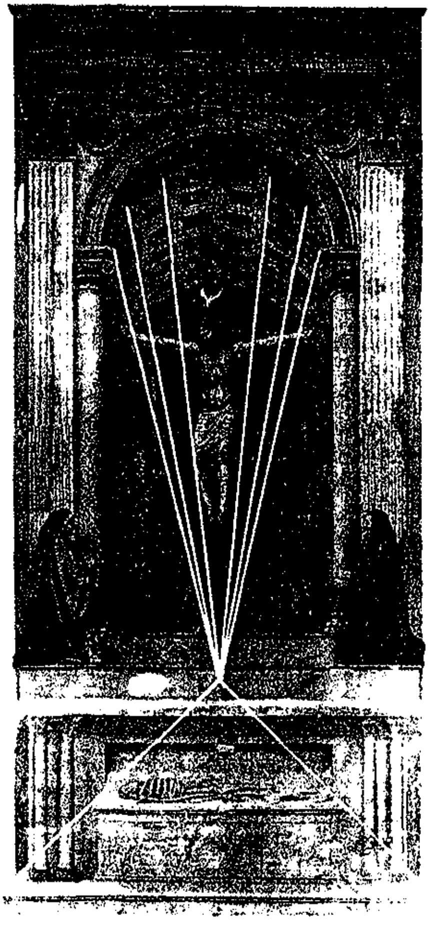


Fig. 5.16 *La Trinidad* (1427). Masaccio, Santa María Novella, Florencia. Fuente. Alberti, L. (1996).

Fue así como el Renacimiento estuvo en condiciones de presentar una imagen espacial unificada y libre de contradicciones en cuanto a las relaciones de proporcionalidad entre los objetos que se acomodaban en una dirección de extensión que podía llegar a ser infinita. La clave de esta posibilidad era la regla matemática que integraba a la totalidad espacial los cuerpos e intervalos que la separaban. Esta etapa en la representación pictórica la resume con brillantez Panofsky al señalar que el espacio de agregados típico de la Edad Media dejó el espacio al espacio sistema. Las matemáticas y el afán creador de los artistas abrieron una de las tantas vías en que la ciencia sustituyó a la religión como sustento del conocimiento de la naturaleza.

Podríamos seguir indefinidamente, ofreciendo muestras de la aplicación del sistema matemático de perspectiva, debidas a pintores del Renacimiento, pero todos los pintores de este periodo en que el arte de la Europa Occidental estuvo en su apogeo aplicaron dicho sistema. Incluso hubo algunos que, como Uccello y Piero, llegaron a obsesionarse por la perspectiva y pintaron escenas observadas desde ángulos inusitados, tan sólo para resolver los problemas matemáticos que ello implicaba. El arte del Renacimiento difiere sustancialmente del de la Edad Media en que capta por primera vez la tercera dimensión, y se caracteriza por la importacia que le adjudicó al realismo, a la representación realista del espacio, la distancia y las formas, lograda por la perspectiva matemática.

El artista del Renacimiento fue hombre de ciencia, y pintar fue ciencia no tan solo por su contenido sumamente técnico y aún matemático, también porque se inspiraba en la finalidad primordial de la ciencia: la comprensión de la naturaleza. El arte y la ciencia no se separaron nunca en el pensamiento y la obra de Ghiberti, Alberti y Leonardo da Vinci. Por ejemplo, en su *Tratado de pintura*, Leonardo dedica un capítulo a la "Pintura y la ciencia", en el que afirma que la pintura persigue las verdades de la naturaleza. El artista en esa época se consideró a sí mismo servidor de la ciencia. Estos hombres que exploraron y representaron la naturaleza con métodos peculiares a sus modos de expresión artística estuvieron motivados precisamente por el espíritu y la objetividad de los científicos que estudiaron astronomía, la luz, el movimiento y otros fenómenos. Por su espíritu y sus fines, fueron los precursores de los grandes físicos de la época moderna y dieron a conocer la verdad en forma tal que le dice mucho más a más gente que los profundos e intrincados análisis de la física matemática de la actualidad.

Las obras de los pintores del Renacimiento se exhiben en los museos de arte; con igual derecho podrían exhibirse en los museos de ciencia. El amante del arte del Renacimiento es, consciente o inconscientemente, amante de la ciencia y las matemáticas.

El Legado de Alberti.

León Battista Alberti, hombre de letras, docto en el cultivo de la sapiencia humanista, ferviente admirador de Plinio y de Cicerón, licenciado en artes y arquitecto, se hermanó con los más destacados practicantes de las artes mecánicas florentinas, y en 1435, dedicado a ellos, publicó en latín un tratado sobre pintura, que sobriamente llamó como *De Pictura* (*De la Pintura)*. Alberti afirma que nadie podía aspirar a ser un buen pintor si no sabía geometría.

Se ha dicho que *De la Pintura* es el libro profético del academicismo. Durante los cuatro siglos posteriores a su aparición, la enseñanza del arte pictórico muestra que todos los rasgos y elementos están contenidos en alguna página del libro de Alberti.

Inmerso en el ambiente del humanismo florentino, a Alberti le resultaba natural creer en la absoluta supremacía de la mente y, por lo tanto, en la urgente necesidad de rescatar a la pintura del nicho en que la había colocado el caduco esquema aristotélico de las artes y las ciencias. Por ser la pintura una actividad mental, más que manual, su sitio natural era al lado de las artes del cuadrivium, mismas que ahora deberían descender al taller del artesano y hacer de éste el artífice de bellas realidades.

El efecto que *De la pintura* tuvo sobre los pintores de la generación de Alberti fue casi nulo. Si acaso en Ucello, en su representación del diluvio y de la embriaguéz de Noé, podemos encontrar rastros de la influencia de Alberti. Es hasta el siglo XVI que los hombres de la talla de Rafael y de Leonardo retoman las doctrinas de Alberti.

Los temas y las reglas de composición espozados en De la pintura remiten de inmediato a Rafael, y no es casualidad que estos mismos elementos, además de las sugerencias sobre ropajes, cabellos y desnudos, sean los mismos con Alberti que con Leonardo, si para ello tomamos la colección de notas recogidas como el *Tratado de la pintura*[5]. Los paralelismos entre ambas obras no se agotan en estos puntos, y tan elocuentes son los pasajes casi idénticos que es indudable que el maestro da Vinci, el genio universal según sus propios contemporáneos, había tomado algo más que inspiración del escrito de Alberti. Esto no resta méritos a Leonardo, si de algo se le puede acusar es de intentar responder al deseo de Alberti, quien al escribir al final del libro III *nulla si truova insieme nato et perfetto*, espera que los hombres de mayor ingenio y sabiduría que le sucedan logren hacer del arte de la pintura una ciencia *absoluta et perfetta*.

En su búsqueda del conocimiento matemático Leonardo recibió consejos: "acude con Messer Fazio para que te enseñe sobre la proporcionalidad". "Ve con el maestro de aritmética para que te muestre cómo cuadrar el círculo". "Intenta leer a Witelo, cuya obra se encuentra en la biblioteca de Pavía y se ocupa de las matemáticas" [6]. Con toda seguridad, si leyó a Filarete, sabría que quienes deseaban dibujar correctamente "deberían acudir con los matemáticos y con Battista Alberti"[7]. Era ya evidente, entonces, que la matemática había invadido muchos ámbitos y que la perspectiva había llegado para cambiar la manera de contemplar el mundo.

Pensando desde la modernidad no es difícil entender que el surgimiento desde la perspectiva fue uno de los primeros pasos en dirección de la elaboración conceptual de la ciencia moderna. Con el uso de la perspectiva cambió lo que para la Edad Media era un objeto, de algo dotado con cualidades simbólicas en las que el sujeto y el objeto

[5] Vinci da, L., (1982)
[6] Hale, J. (1994)
[7] Gadol, J. (1973)

externo tendían a fusionarse, a algo que podía ser sostenido con los brazos extendidos para que, desde ahí, se le metiera a un escrutinio óptico desprovisto de cualquier subjetividad posible. Sólo así podría expresarse la verdadera naturaleza de una superficie que envuelve a un volumen.

Que Alberti era el hombre a quién acudir lo constata Cristóforo Landino en un pasaje de la *Apología de Dante*. El gran músico y poeta se preguntaba en qué categoría se podría colocar a Alberti. Su respuesta no tiene duda: "entre los físicos", dice Landino, y continúa "...de la naturaleza. Pero entonces ¿qué rama de la matemática no le era conocida? Su excelencia abarcaba tanto la geometría y la aritmética como la astronomía y la música... y en cuanto a la perspectiva, un sinfín de maravillas nos mostró".

Así es como el sueño de Alberti une su destino al de Leonardo y al de muchos genios del Renacimiento y, todos ellos, se integran al devenir histórico de las artes. La fama le tocó a Leonardo por causas ajenas a la justicia histórica.

No se cuenta con ninguna versión manuscrita, en latín o italiano, que pueda ser considerada como una versión hológrafa de *De Pictura* o *Della Pittura.* Sin embargo, de los manuscritos que han llegado a nuestros días, se piensa que las versiones en italiano más cercanas al original son el manuscrito Magl. II, IV, 38 depositado en la Biblioteca Nazionale de Florencia, y el que se encuentra en la Bibliothéque Nationale de París. De las pocas versiones en latín que han llegado a nuestros días tres se encuentran en la biblioteca del Vaticano y dos en Florencia, en la Biblioteca Riccardiana y la Biblioteca Nazionale, respectivamente.

"Poderosa es la geometría, aliada con el arte, irresistible" decía Eurípides. Las nuevas corrientes de pensamiento, propias del Renacimiento europeo; la búsqueda de nuevas verdades para reemplazar a las desacreditadas; la vuelta al estudio de la naturaleza como fuente de datos confiables, y la convicción de origen griego, de que la esencia del comportamiento de la naturaleza debería buscarse en las leyes matemáticas, rindieron fruto primero en el campo del arte. Los artistas, particularmente los pintores, revolucionaron su oficio.

Que los pintores acudieran a las matemáticas para dar forma a su nuevo estilo es algo sorprendente, pero el fenómeno tiene explicación. Los pintores de los siglos XIV, XV y XVI fueron los arquitectos e ingenieros de sus épocas. Y al mismo tiempo fueron escultores, inventores, orfebres. Así, Leonardo da Vinci, al ofrecer sus servicios a Ludovico Sforza, soberano de Milán, le prometió que fungiría como ingeniero, constructor de obras militares y proyectista de máquinas de guerra, y también como arquitecto, escultor y pintor. En vista de esta multiplicidad de actividades, era forzoso que el pintor tuviera algo de científico. El pintor del renacimiento estaba influido por las doctrinas de la época, según las cuales debía aprender las verdades de la naturaleza y que la esencia de los fenómenos naturales se expresaba mejor por medio de las matemáticas. Los pintores del Renacimiento llegaron tan lejos en la asimilación de este conocimiento y en su aplicación a la pintura, que produjeron las primeras matemáticas realmente nuevas en Europa. En el siglo XV fueron los primeros matemáticos consumados y también los más originales.

Al principio de la Edad Media, la pintura era una actividad muy extendida. Reyes príncipes y jefes de la Iglesia encargaban obras de arte para embellecer los edificios. Más o menos hasta 1300, los pintores representaban ideas, conceptos. Lo que se proponían era retratar y embellecer los temas principales del drama cristiano. Como lo que intentaban era provocar sentimientos religiosos, y no exponer escenas reales, dibujaban a las personas afectadas y estilizadas; y la impresión general que daba el cuadro era la de algo plano, bidimensional. Las obras de esta epoca tienen el recurso conceptual del medievo, la llamada perspectiva escalonada. Para mostrar un grupo de personas que se hallan a diferentes distancias del observador, las más alejadas se colocan algo por encima de las situadas en primer plano. Hacia fines del siglo XIII, las ideas renacentistas empiezan a influir en los pintores. Persisten los mismos temas (pues la jerarquía eclesiástica sigue dominando), pero en escenarios más realistas. Los pintores observan por primera vez la naturaleza y contemplan el mundo real, los seres materiales, la tierra, el mar y el aire; se esfuerzan por representar el espacio, la profundidad, la masa, el volumen y demás efectos visuales, ante todo mediante el empleo de líneas, planos y otras figuras geométricas. Poco a poco el misticismo da paso al realismo, y el arte se vuelve cada vez más mundano.

Cimabue (1300), Cavallini (1250-1330), Duccio (1255-1318) y Giotto (1266-1337) fueron los iniciadores del movimiento que se propuso imprimir realismo a la pintura e incorporar a ella la belleza de la naturaleza

# V. 5. EL REALISMO CONDUCE A LAS MATEMÁTICAS

En sus esfuerzos por alcanzar el realismo, los pintores dieron un paso más y concluyeron que su función era la de imitar la naturaleza, describir lo que veían de la manera más realista que pudieran. El objetivo de la pintura, decía Leonardo, consistía en reproducir la naturaleza, y su mérito residía en la exactitud de la reproducción. Aquí también los pintores del Renacimiento adoptaron el ideal griego. Hacia el siglo XV habían abrazado la doctrina griega de que en las matemáticas estaba la esencia del mundo real. De ahí que vivieran convencidos de que, para penetrar en la sustancia real de los temas que pretendían plasmar, deberían reducirlos a su contenido matemático. Concluyeron que tenían que encontrar las leyes matemáticas que había detrás de todo esto.

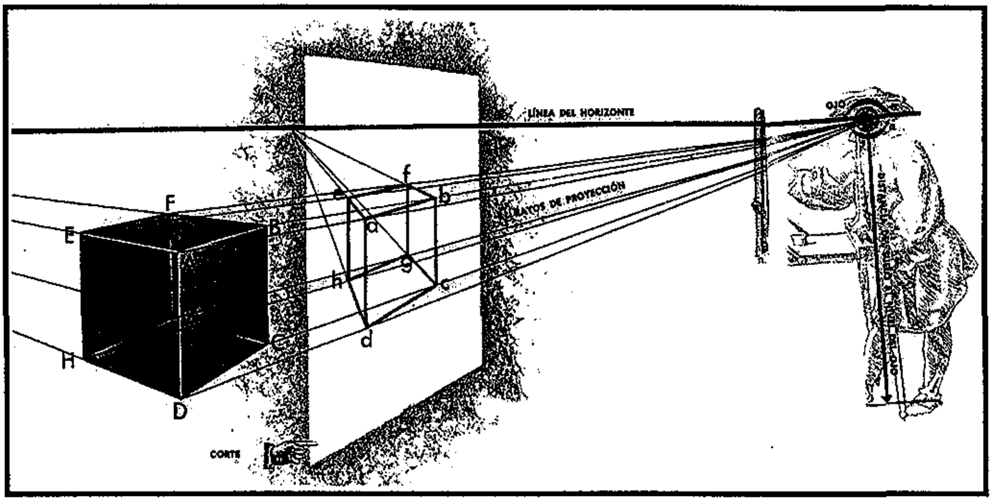



Fig. 5.17 En busca del realismo.
Fuente: Adler, I., (1974).

Pero la pintura realista comprendía mucho más que las propiedades matemáticas de los objetos que se trataba de representar. El ojo ve la pintura, y ésta debe crear en aquél la misma impresión que la escena original. Como participan tanto la visión como la luz que es portadora de la escena, se impone estudiar ambos fenómenos, y el estudio de la luz llevó también a las matemáticas. Desde los tiempos de los griegos había quedado demostrado que la luz está sujeta a leyes matemáticas. A pesar de que los pintores se consagraron a estudiar tanto la física de la luz, el color, la química de los pigmentos, las leyes del movimiento y del equilibrio, el ojo la anatomía, etc., estuvieron dominados ante todo por la creencia de que las matemáticas deberían aplicarse para ejecutar pinturas realistas y que la geometría era la clave para solucionar el problema. Fue así como crearon y perfeccionaron un sistema de perspectiva, matemático y completamente nuevo.

Proporción: La medida del Arte

La proporción, el número, la razón geométrica, la perspectiva, el ritmo y la armonía, todas derivan de la búsqueda de obtener un diseño general de la obra artística.

El Número ha sido de suma importancia desde hace muchos siglos. En la Grecia antigua , los pitagóricos afirmaban que "todas las cosas fueron organizadas de a cuerdo a los números". El orden fundamental, el significado original del cosmos, ha tenido siempre una correspondencia con el macrocosmos. Al todo se le asignaba el 10, y el microcosmos, del hombre, el número 5. Esta fue una manifestación de la relación como una media proporcional entre los dos.

De nuestras propias manos, se puede dar una explicación de la base 10 del sistema de numeración:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, <u>10,</u> 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, <u>20</u>, 21, etc.

La relación de números nos da una medida de la proporción.

La serie de Fibonacci es otro conjunto de números cuya relación de números nos da una proporción, la razón de oro: 1:1.618034... bastante usada en el arte y la arquitectura en la época de la Grecia antigua y en el Renacimiento.

Piero della Francesca: pintor y matemático.

Hoy día Piero della Francesca (c. 1412-1492) es reconocido como uno de los pintores seminales del Renacimiento. Sus obras son consideradas arquetipos de ese portentoso despliegue técnico de quienes comenzaban a dominar la naciente ciencia del trazo en perspectiva. Su figura resalta también excepcional por haberse forjado, de manera independiente a sus talentos artísticos, una reputación como matemático.

Poco se sabe de la vida de Piero, y a pesar de formar parte de la lista de ilustres artistas incluidos en la colección de relatos biográficos debida a Vasari (Vite, 376-380), no es hasta el siglo XIX que el mundo del arte volvió los ojos hacia su obra. Durante el siglo XIX Piero era considerado como autor de varios tratados matemáticos.

A fines del medievo los vínculos más estrechos entre la ciencia y el arte ocurrieron en el seno de lo que se entendía por óptica. Esta disciplina aportó los elementos teóricos para que pintores, escultores y arquitectos desarrollaran técnicas con el fin de generar la ilusión de un espacio consistente y racional donde se distribuian los objetos tridimensionales representados con las proporciones correctas –tamaños relativos- entre unos y otros. Muestra de su pertinencia para la pintura es que los dos primeros escritos teóricos sobre el tema, el *De la pintura* de León Battista Alberti (1435) y los *Comentarii* de Lorenzo Ghiberti (1478), dedicaron una de las tres partes que los componen a discutir los usos de la óptica en el arte.

El de Alberti es un tratado corto donde expone lo que constituye una teoría de la pintura y presenta la ciencia de la perspectiva de los artistas o *perspectiva artificial*, con lo que la distingue de la óptica tradicional conocida en el Renacimiento como perspectiva naturalis o communius. Para algunos, este tratado de arte es el más original y el que mayor influencia ha tenido a lo largo de la historia.

*De la pintura* es un tratado didáctico de corte humanista, compuesto en el espíritu de los escritos de Cicerón, Séneca y Quintiliano y, por lo tanto, leído y estudiado principalmente por una élite intelectual que pululaba en las cortes y que tenía acceso a las nuevas bibliotecas.

El texto de Ghiberti corresponde a otra tesitura y, al igual que *Il libro dell'arte* de Cennino Cennini (1390), está dirifgido primariamente a los nuevos pintores que aprendían el oficio en alguno de los múltiples talleres donde se les entrenabaen cuestiones prácticas y teóricas, mismas que resultaban muy lejanas de lo que las universidades enseñaban.

Por su parte, y hasta donde ha sido posible establecerlo, el *Tratado de pintura* de Leonardo da Vinci no encaja en ninguna de estas categorías, apunta en todas direcciones, busca seducir al rico patrono con las posibilidades de su ingenio. Aconseja al no iniciado sobre el uso de las sombras y los efectos atmosféricos y guía al más experimentado por las complejas rutas de la perspectiva.

Partícipe de estas preocupaciones, Piero escribió un tratado que toca un aspecto de la pintura. Tal y como lo indica su nombre. *De prospectiva pingendi* (Sobre la perspectiva para la pintura) Es un texto donde se abordan con rigor los aspectos matemáticos del dibujo en perspectiva y es, hasta donde se sabe, el primer trabajo en la historia en hacerlo. Si bien coincide con el de Alberti en la importancia que concede al tema y en el respeto que Euclides le merece, ambos tratados difieren en el tono y el tipo de lector al que van dirigidos.

Piero, a lo largo de toda su obra, *De prospectiva pingendi,* muestra su dominio sobre el tema de la construcción geométrica de las configuraciones: avanza paso a paso por cada una de ellas, como si guiara la mano del lector al trazar punto por punto y línea por línea. La preocupación fundamental del autor es el proceso de la construcción de la estructura geométrica de la pintura, sin ocuparse de axiomas ni de casos generales. Sólo excepcionalmente aporta lo que podrían considerarse demostraciones de teoremas.

La matemática y la óptica que maneja Piero della Francesca pertenecen, en cuanto al desarrollo científico, al periodo medieval tardío. Sus afanes matemáticos se inscriben en la tradición de los manuscritos conocidos como libros de ábaco, que adoptaron como modelo el *Liber Abaci* de Leonardo de Pisa –*Fibonaci* (1170-1250); su interés por la öptica lo sitúan más cerca de la *Perspectiva communis* (c. 1279) de John Pecham que de los textos ópticos, más matematizados, de Witelo.

Piero poseía un amplio conocimiento de los trabajos de Euclides, tanto de los *Elementos* como de la *Óptica*, y el que su obra no utilice el estilo eulcideano refleja, por lo tanto, que sus intereses estaban más del lado de las aplicaciones, sin que esto signifique que pasaba por alto el valor del modelo euclideano y el sustento que aportaba la filosofía natural.

## Los tratados matemáticos.

Tres son los tratados de Piero que se conservan y que hoy son conocidos como el *Trattato d´abaco*, el *Libellus de quinque corporibus regularibus* y *De prospectiva pingendi.* El primero sigue el formato de los textos –o notas- utilizados en las escuelas de ábaco y su propósito era enseñar el tipo de matemáticas que resultaban útiles en las actividades comerciales del siglo XV; en lo que concierne a los problemas geométricos, mismos que resultan más numerosos de lo acostumbrado en ese tiempo, hay una gran originalidad, en especial en lo referente a las figuras tridimensionales.

Leonardo hacía que todo lo que salía de su pincel pareciera real y particular, como si lo ilustrado representara un modelo concreto, en tanto que los dibujos de Piero se abocaban más a mostrar la forma matemática en abstracto.

*De prospectiva pingendi* y la geometría del espacio pictórico.

En un sentido muy evidente, *De prospectiva pingendi* difiere de los otros tratados en cuanto a que la mayoría de los problemas que componen el libro no aparecen planteados en términos numéricos. La explicación es muy sencilla: los problemas propuestos se refieren a dibujos y caen por ende en el dominio de lo geométrico más que en el de lo numérico. La pintura consta de tres partes principales, que son dibujo, proporción y coloración. La proporción a la que llamamos perspectiva, mezclando en ello algunas partes relativas al dibujo, ya que sin ellas la perspectiva no puede ser mostrada en acción: líneas ángulos, superficies y cuerpos.

Tradicionalmente, la óptica se ocupaba de estas cuestiones recurriendo a las matemáticas – de ahí el hecho de que se le llegaba a calificar de ciencia mixta-, de donde resultaba que la perspectiva estudiada por Della Francesca debía también sujetarse a los cánones de la tradición erudita en la que se desenvolvía la óptica y que se remontaba al tratado que sobre el tema escribía Euclides. Siguiendo una estructura ya clásica *De prospectiva pingendi* se inicia con el estudio de figuras planas; la primera es el cuadrado, mismo que es subdividido para luego dibujar en su interior varios polígonos regulares. Estos patrones semejan, en varios casos, los mosaicos que Piero incluye en los pisos de algunas de sus pinturas. En el Libro II varias de las figuras planas estudiadas en el Libro I pasan a ser proyecciones de objetos tridimensionales tales como una columna acanalada que es modelada como un prisma poligonal, una casa que es idealizada como un cubo o la estructura superior de un pozo.

El valor que Della Francesca otorgaba a la aplicación de las matemáticas en la pintura se puede apreciar en el Libro III, donde destaca la importancia de obtener la perspectiva correcta en una obra de arte. Las discusiones y los puntos que toca, en particular los referentes a las bases ópticas de la visión –el cono de luz, los rayos luminosos, la pirámide de visión, todos ellos elementos esenciales en cualquier teoría óptica propuesta hasta entonces- muestran su preocupación por alcanzar el conocimiento y, en este caso, su convicción de que el desarrollo de una ciencia matemática le permitiría obtener una representación correcta del cono de visión y, por consiguiente, el mundo visible.

Lo anterior queda de manifiesto en el teorema donde presenta la demostración matemática de que su método de construcción en perspectiva es efectivamente correcto.

En función de sus méritos matemáticos y originalidad, *De prospectiva pingendi* se convirtió en un *best seller* entre los aspirantes a artistas y no pocos matemáticos. Sin embargo, no corrió con fortuna: el texto en si pasó a una oscuridad relativa en las décadas inmediatas a su aparición. Con todo, sus ideas ejercieron un profundo impacto en los textos sobre perspectiva del siglo XVI, todo gracias a que constituyen los fundamentos de dos de los más conocidos libros sobre geometría visual que aparecieron en dicho siglo: el *Underweysung der Messung* (1525) de Durero y *La practica della perspectiva* (1568) de Daniele Barbaro, patrono de las artes visuales y editor de Vitruvio. Esto sin olvidar la conexión que se puede establecer entre Della Francesca y Durero por la vía de Leonardo y Luca Pacioli, a quien aparentemente Durero visitó en Bologna en 1506 para "aprender los secretos de la perspectiva" [8]

El análisis de las pinturas de Piero revela su dominio del oficio de pintor. Su maestria en el uso del color, el debido manejo de los rayos de luz que iluminan o sombrean los espacios pictóricos y su atención por el detalle se coludían con la regla matemática que servía de brida y guía –como diría Leonardo- para la composición del espacio y la proporción de las figuras. Su habilidad como matemático, se dice, es la responsable de ese efecto de quietud o inmovilidad que transmiten sus personajes y que resultan tan característico de sus pinturas. Las situaciones en sus cuadros parecieran referirse a un preciso momento en el que ninguna línea en la pintura sugiere que un instante después habrá un cambio de dirección de alguna de sus partes. Esto solo es posible lograrlo mediante un conocimiento profundo de los elementos matemáticos que participan en la composición.

Contemplar *La flagelación de Cristo* nos lleva, irremediablemente, a pensar en que su autor poseía una extraordinaria capacidad para captar la disposición de los espacios y entender la distribución de las figuras en la pintura. Esta capacidad se basaba en el uso magistral de la ley de la perspectiva. Nunca antes el espacio creado por un pintor se había expresado de manera tan rotunda. Por ello muchos consideran que esta obra es la cumbre del ilusionismo tridimensional del Renacimiento. La construcción matemática del espacio es tan marcada que los estudiosos del tema coinciden en que es el resultado de un ejercicio conducente a demostrar la posibilidad de pintar una escena en la que todos los elementos que intervinieran en ella se sujetarían estrictamente a las reglas impuestas por la perspectiva.

[8] Kemp, M., (1995)

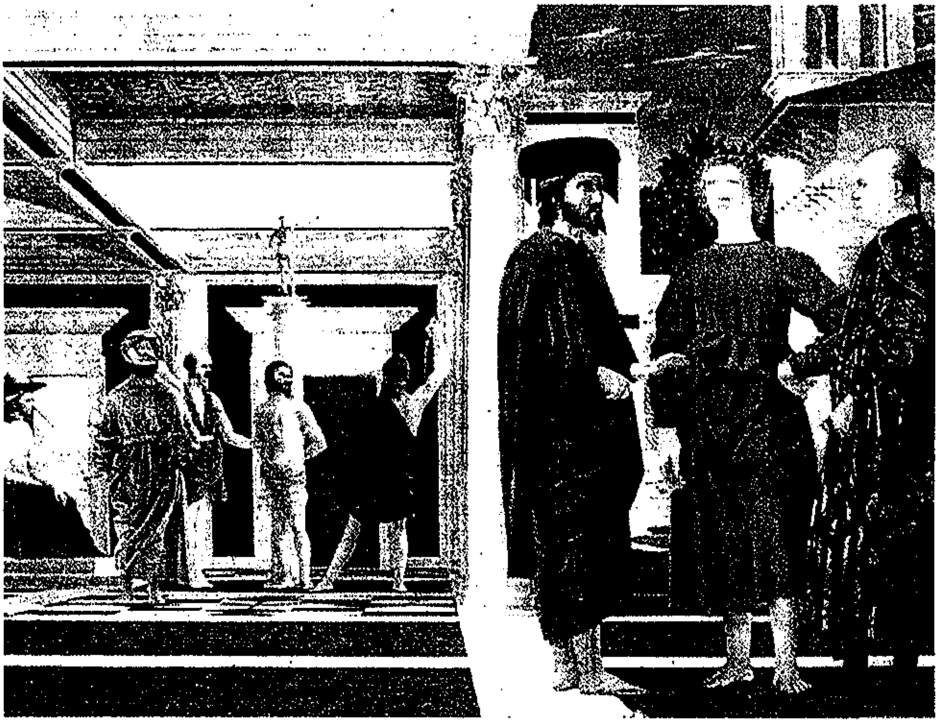


Fig. 5.18 *La flagelación de Cristo*, (1545), Palacio Ducal, Urbino. Obra de Piero della Francesca. Fuente: Felguéres, M., et al (1999).

El trasfondo matemático fue puesto en evidencia en 1953, cuando Wittkower y Carter demostraron que *La flagelación de Cristo* exhibía tal cantidad de información coherente e inequívoca que era posible reconstruir el escenario arquitectónico que cobijaba a los dos conjuntos de personajes. Por primera vez se mostraron las posiciones exactas de las figuras en relación con los edificios y los espacios abiertos, así como la geometría un tanto complicada a la que se ajustaba el piso. El efecto global reviste una gran precisión y efectivamente recrea el espacio real[9]. Sin embargo, si se es estricto, no todo lo que se muestra está correctamente representado. La banda blanca que desde la parte inferior del cuadro se extiende hasta la base de las columnas, y que separa las dos acciones, es más angosta. Ver figura 5.18. La razón de ello es muy sencilla: Piero, como lo hiciera en otras obras, ha de haber considerado que esta manera de proceder

[9] Wittkower, M., (1953)

mejoraba el resultado. Es decir, Piero reconocía la diferencia entre un teorema y una pintura. Dicha actitud no debe sorprender. Forma parte también de la lógica que rige la presentación del Libro *De prospectiva pingendi* donde, haciendo aproximaciones y despreciando ciertas magnitudes, "demuestra" en dos ocasiones afirmaciones que matemáticamente son incorrectas pero que pictóricamente producen en el observador el efecto requerido.

Esto, lejos de poner en duda el talento matemático de Piero della Francesca, reafirma su convicción de que en esta ocasión la verdad estaba al servicio de la belleza.

Piero y la fortuna de la tradición práctica.

Lo que distingue el arte del siglo XV del producido por las generaciones precedentes es el sometimieinto de los datos observacionales a un orden racional definible en términos matemáticos. Uno de los logros del Renacimiento fue sentar las bases para una nueva comunicación de lo visual que eventualmente contribuyó al desarrollo de nuevas formas de entender y explicar el mundo. Con las matemáticas aprendidas en la escuela del ábaco y con sus imaginativas exploraciones en el terreno de la geometría griega, Piero construyó una obra, tanto artística como matemática, que lo hace depositario de la fama a la que según León Battista Alberti se debía aspirar.

La tradición práctica en la que se inscribe Piero, y que gracias a gente como él se hermanó con los afanes prácticos de quienes recibían una educación universitaria, desembocó en el siglo XVI en el establecimiento y desarrollo del álgebra como disciplina independiente de la aritmética. Poco después el álgebra y la geometría tuvieron un fructífero encuentro en la *Géométrie* (1637) de Descartes que, décadas más tarde, serviría como uno de los puntos de partida de Newton para llegar a lo que sería su cálculo infinitesimal. La misma tradición práctica, ahora con su vertiente, atrajo la atención de matemáticos del calibre de Federigo Commandino (1509-1575) y G. Battista Benedetti (1530-1590), autores de trabajos que resultaron el embrión de una geometría, hoy conocida como geometría proyectiva, y que tuvo su presentación en el llamado *proyecto Brouillon* (1639) de Girard Desargues.

Esta historia, ciertamente, nos lleva a reconsiderar el divorcio entre las ciencias y las artes. Más aún, se demuestra la interdependencia de ambas en el devenir histórico, en la que una a la otra se necesitan para explicarse mutuamente en algunos aspectos.

# VI
# Temas Didácticos

# VI.1. ENCUADRE

En este capítulo trataremos de acercarnos a la concreción del cumplimiento del objetivo de este trabajo que, cabe recordar, se mencionó en la Introducción del mismo:

> *"El Objetivo Fundamental de este trabajo es poner en evidencia la conexión entre **MATEMÁTICAS / ARTE** (en la plástica y la música) para utilizarla de diferentes formas en nuestro quehacer pedagógico del proceso enseñanza/aprendizaje de las matemáticas; estudiar,* en la forma más general, *la relación matemáticas y el arte, y mostrar que existe un potencial para mejorar el aprendizaje de las matemáticas a partir de esta vinculación".*

Bien, una vez que en los capítulos anteriores se ha hecho un estudio particularizado entre las matemáticas y la música, y las matemáticas y la plástica (pintura y dibujo), enseguida, se darán sugerencias sobre algunos temas en donde se vincula la música y la plástica en la enseñanza de las matemáticas. Dichas sugerencias el autor las ha desarrollado a partir de dos fuentes:

a. De bibliografía analizada para el estudio de esta investigación y,
b. De recomendaciones de algunos profesores que, de manera directa o indirecta, han aplicado en su quehacer educativo.

Es importante enfatizar que estos temas son sólo ideas o sugerencias para orientar el proceso enseñanza aprendizaje, no son pues una propuesta didáctica *científicamente* instrumentada pues esto rebasa los propósitos originales de esta investigación

La metodología que se siguió fue la de acudir a varias escuelas de música y/o artes plásticas. Se entrevistó a profesores, y se hizo una encuesta a 25 estudiantes de la Escuela Nacional de Música (ENM) y a 25 estudiantes de la Escuela Nacional de artes Plásticas (ENAP), de la UNAM. También se acudió a la Academia Novarte, esta es una escuela particular de arte.

El objetivo de asistir a varias escuelas y entrevistar a estudiantes y profesores, fue para observar con los sujetos *in vivo*, o protagonistas reales, de qué manera se enseña o se aplica lo que se ha investigado: el desarrollo histórico de la relación matemáticas/arte, así como de la posible enseñanza de cada una haciendo uso de esta vinculación.

Ambas encuestas realizadas a los 25 estudiantes de la ENM y los 25 de la ENAP, se hicieron con un muestreo aleatorio simple: se acudió a las escuelas y al azar, en el patio se eligió a los primeros 25 estudiantes que pasaron. En los cuestionarios se hizo la pregunta acerca de su primera elección de la carrera elegida y sobre la opinión que tenían de las matemáticas para observar su actitud hacia ésta.

En particular, a los estudiantes de la ENM se preguntó si consideran que existe alguna vinculación entre las matemáticas y la música, y si esto lo han aprendido en alguna asignatura de la carrera, y cuál era esa o esas asignaturas. También se preguntó sobre la relación existente entre la afinación de instrumentos musicales y las matemáticas, así como la construcción de estos instrumentos y los cálculos matemáticos; se les pidió que sus respuestas las ampliaran lo más posible.

A los estudiantes de la ENAP, de la misma manera, se les preguntó acerca de la vinculación entre las matemáticas y las artes plásticas que estudian en su carrera. Qué tan fuerte, y cómo se manifiesta esta relación, y en qué asignaturas o semestre lo han aprendido. Así como de qué manera hacen uso de las matemáticas en el diseño de sus trabajos artísticos.

Todas estas preguntas se realizaron para conocer de viva voz de los estudiantes cuál es su opinión sobre la vinculación matemáticas- arte y si en estas escuelas de la Universidad Nacional (ENM y ENAP) los alumnos aprenden esto en sus materias que son parte del plan de estudios.

*En la* ENM, *en particular, se asistió al laboratorio de computo y al taller de* laudería, esta última materia forma parte de las optativas en las diferentes carreras de esta escuela.

Los profesores tanto de la ENM, ENAP como de la Academia Novarte, informaron acerca de material bibliográfico quien esto escribe, proporcionaron bibliografía que forma parte de su material didáctico, de sus respectivas asignaturas. Al final de este capítulo, en el anexo, se muestran los modelos de cuestionarios aplicados, y en seguida se muestran los resultados obtenidos de las entrevistas

## VI. 2. INFORME DE RESULTADOS.

A) Sobre los estudiantes de la ENM.

El 90 % fueron de la carrera de instrumentista y los demás de otras carreras. La mitad iba a media carrera, la otra mitad se repartía en partes iguales (25 % en cada caso) entre los primeros y los últimos semestres, incluyendo a 2 pasantes.

El 100% contestó afirmativamente la primera pregunta; la segunda no fue necesario contestarla. En la pregunta: "¿te gustan las matemáticas?", el 75 % contestó SÍ, el 25 % NO. La pregunta 4 todos la contestaron: SI. Para la pregunta 5 las respuestas se repartieron de la siguiente manera: contestaron *Solfeo* todos, además algunos agregaron *ritmo* (5 estudiantes), 10 más *armonía* y otros 6 *contrapunto, escala pit, análisis*, etc. La pregunta 6 todos la contestaron SÍ. La respuesta a la pregunta 7 hubo ejemplos variados, pero la respuesta fundamental es *TODO* (es decir, la relación que existe entre los instrumentos musicales y las matemáticas).

B). Sobre los estudiantes de la ENAP.

El 100% eran de la carrera de Diseño y Comunicación Visual: 20 % del primer año, 20 % del segundo año, 20 % del tercero, 20 % del cuarto año y 20 % pasantes.

El 100 % de los estudiantes contestó la pregunta 1 afirmativamente. La respuesta 2 no fue necesario responder. En la respuesta 3, 77 % respondieron SÍ, 11 % No y 11 % se abstuvieron. La pregunta 4 todos la contestaron con un SÍ. La pregunta 5 todos contestaron *Orden Geométrico*, además algunos ampliaron a *Diseño, Dibujo, Fotografía,* etc. La pregunta 6, el 100 % de estudiantes la respondieron *en todo*, además, algunos dieron detalles. La pregunta 7 todos la respondieron, la mitad dando particularidades acerca de la sección áurea, su valor, la historia del origen de ésta, etcétera. En la tabla 6.1 se resumen estos resultados.

Tabla 6.1. Distribución de frecuencias de las respuestas obtenidas en:

(a) ESCUELA NACIONAL DE MÚSICA, UNAM

| Número de pregunta | Respondieron SI (%) | Respondieron NO (%) | Otras respuestas (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 25 (100%) | 0 | 0 |
| 2 | - | - | - |
| 3 | 19 (75%) | 6 (25%) | 0 |
| 4 | 25 (100%) | 0 | 0 |
| 5 | - | - | **Solfeo**: los 25 est.<br>**Ritmo**: 5 est.<br>**Armonía**: 10 est.<br>**Contrapunto, escala pit, análisis**, etc,: 6 estudiantes<br><br>Nota: *esta es una pregunta abierta, donde se podía dar más de una respuesta.* |
| 6 | 25 (100%) | 0 | 0 |
| 7 | - | - | **EN TODO** (la relación que existe entre los instrumentos musicales y las matemáticas) |

(b) ESCUELA NACIONAL DE ARTES PLÁSTICAS, UNAM

| Número de pregunta | Respondieron SI (%) | Respondieron NO (%) | Otras respuestas (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | 25 (100%) | 0 | 0 |
| 2 | - | - | - |
| 3 | 19 (75%) | 3 (11%) | 3 (11%) abstenciones |
| 4 | 25 (100%) | 0 | 0 |
| 5 | - | - | **Orden geométrico**: los 25 estudiantes, además, la mitad amplió a: **Diseño, Dibujo y Fotografía.** |
| 6 | - | - | **EN TODO,** contestaron los 25 alumnos Además, 16 dieron detalles: **en escalas, en formatos, proporciones, en redes,** |
| 7 | - | - | Todos contestaron la pregunta, 13 de manera muy escueta y 12 dieron detalles, como **el valor numérico de la sección áurea**, la **historia** de ésta, su **origen**, elementos que se presentan en la naturaleza con esta curiosa relación, etc. Nota: *Las tres últimas preguntas fueron abiertas,* |

C). Sobre la colaboración de profesores.

Un profesor de música de la Academia Novarte nos apoyó en la búsqueda de información sobre las técnicas que utilizan algunos lauderos, en la construcción de sus instrumentos de cuerdas. Aquí se encontró que la mayor parte de los diseñadores construyen sus instrumentos empíricamente, *de oído*, y el conocimiento se transmite familiarmente de generación en generación. Por ejemplo, para la construcción de instrumentos de cuerdas que tienen trastes, como la guitarra, los lauderos tienen una *plantilla* con la que construyen el instrumento; o se usan guitarras ya construidas como modelo de las dimensiones de las nuevas y, como ya se dijo, *de oído* van afinando y ajustando las mediciones. Y aunque muchas veces se van alterando las medidas del patrón original, en la socialización del conocimiento, se va teniendo una especie de *regresión* a las medidas "exactas" aunque muchos lauderos no tienen una explicación teórica del diseño de construcción. (¡Pero que hermosos instrumentos y qué música crean!).

Aquí el profesor nos proporcionó bibliografía sobre este tópico[1].

La mayoría de las guitarras acústicas de cuerdas de acero y tapa plana tienen una longitud de escala de entre 61 cm y 66 cm. Las posiciones de los trastes se determinan mediante una fórmula matemática llamada "la regla del dieciocho", aunque en términos estrictos se le debería llamar "del 17.835". Más adelante, en la parte que se habla de la *escala temperada* se detalla el uso de esta regla.

Otro profesor de música, de la Escuela Novarte, nos orientó en la explicación de la construcción de algunos instrumentos musicales como la guitarra y las zampoñas. Sobre esto preparamos algunas ideas didácticas para estudiar las relaciones existentes entre las matemáticas y la afinación de un instrumento de viento.

Sobre la experiencia que ha tenido este profesor en la construcción de quenas y zampoñas en particular, el autor de este escrito diseñó una especie de propuesta para la construcción de las zampoñas en donde se ponga de manifiesto la relación matemáticas (la geometría del cilindro) y las notas musicales. Suponemos que podría representar un asunto de motivación el

[1] Denyer, R., (1988)

construir un instrumento "sencillo" de tocar (como son las zampoñas), para estudiar algunos conceptos de álgebra y geometría.

El mismo profesor nos facilitó unas notas o apuntes, escritos por el estudioso de la música, Ítalo Besa Tonussi[2], respecto a la Escala Temperada y Microtonalismo. El que escribe esto hizo una pequeño resumen del capítulo 1 de este libro, *Escala Temperada,* el cual también puede resultar interesante desde el punto de vista de la educación matemática haciendo uso de elementos musicales. Más adelante se detalla esta idea.

Respecto a la construcción de instrumentos, precisamente, en el taller de laudería de la ENM de la UNAM nos informaron los responsables del espacio, que la teoría y bibliografía sobre la construcción de instrumentos era una especie de secreto entre los fabricantes de estos aparatos; el que esto escribe, pudo comprobar que, en la misma biblioteca de esta escuela, después de toda una tarde de búsqueda, no se halló bibliografía respecto a este tema, lo que se podría concluir que estos son asuntos de especialistas pero que, en la educación musical, a nivel licenciatura no parece ser muy importante. Incluso, tuvimos oportunidad de conseguir en esa biblioteca el libro de Julián Carrillo[3] , *Sonido 13,* y pudimos comprobar que también este no es un tema fácil de entender por parte de los estudiantes de licenciatura de la ENM, pues requiere de conocimientos de física y matemáticas que no siempre manejan dichos alumnos.

En la misma ENM, en el taller de computación, se enseña a producir sonidos musicales y con esto, a componer música electrónicamente aunque para el uso de estos paquetes de cómputo no se requiera necesariamente por parte de los usuarios saber matemáticas. Pero es muy cierto que los programadores de dichos paquetes deben de tener conocimientos serios en ambas disciplinas.

Por otra parte, el profesor de artes plásticas de la Escuela de Cultura Popular, nos proporcionó material didáctico y apuntes sobre sus conocimientos de la vinculación matemáticas - artes plásticas, aunque muy poco es utilizado en su práctica en la enseñanza, pues el profesor manifiesta que los estudiantes carecen de una preparación adecuada en las matemáticas, y para los alumnos, lo fundamental es *entrar en ación* pintar, producir. Es comprensible, que en una escuela no especializada, en la que acude gente común, no haya interés en explicarse con mayor rigor las relaciones existentes entre las matemáticas y la pintura, sobre la perspectiva, etc. En los temas propuestos sobre la enseñanza

---

[2] Besa, I., (1990)

[3] Carrillo, J., (1948)

de las matemáticas en la relación con la plástica se tomaron algunas propuestas de los siguientes libros: *Matemáticas para los estudiantes de Humanidades*, de Morris kline[4] , y el *Teaching Mathematics and Art,* que es una especie de antología editada por Lesley Jones.

Finalmente, podemos afirmar que de acuerdo a los cuestionarios, a las entrevistas con profesores de las escuelas, etc., existe una mediana conciencia y una relativa aplicación de las matemáticas en el arte (sobre todo en la plástica), y viceversa, pero queda mucho por hacer, es bastante todavía lo que se puede enseñar y aprender, haciendo uso de la vinculación estrecha entre ambas.

A continuación se proporcionan cinco propuestas para ser desarrolladas en el salón de clases, como una forma de experimentación en la enseñanza de las matemáticas, haciendo uso de la vinculación matemáticas/arte. Como mencionamos anteriormente, no son propuestas didácticas detalladas pero son ideas interesantes que concretizan todo lo que hasta ahora se ha desarrollado.

---

[4] Kline, M., (1998)

# VI. 3. EL TONO MUSICAL Y LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

En el estudio de *Funciones*, un tipo particular de estas es la Función Exponencial, cuya forma general es: $y = a\, b^x$, donde a y b son los parámetros de dicha función: a es la ordenada al origen y b es la constante de crecimiento o decrecimiento de la variable dependiente y; x es la variable independiente.

La función exponencial tiene aplicaciones en Economía (en el interés compuesto); en Ingeniería (en la desintegración de un isótopo radioactivo como, el carbono 14); en Biología (en el crecimiento de algún tipo de población),... y por supuesto, también en la música.

Al estudiar la función exponencial, se podría buscar la inquietud y curiosidad de los estudiantes al informarles que las tonalidades musicales presentan una relación exponencial y que la construcción de un instrumento de cuerdas con trastes, como la guitarra, presenta una relación (función) exponencial.

Por ejemplo, el tono de una nota musical está determinado por la frecuencia de la vibración que la ocasiona. El Do central en el piano, por ejemplo, corresponde a una vibración de 263 hertz (263 ciclos por segundo). Una nota de una octava arriba del Do central vibra a 526 hertz, y otra de dos octavas arriba del Do central vibra a 1052 hertz. Ver la tabla 6.2.

Tabla 6.2. Tono de notas arriba del Do central

| Número, n de octavas Arriba del Do central | Número de hertz $V = f(n)$ |
|---|---|
| 0 | 263 |
| 1 | 526 |
| 2 | 1052 |
| 3 | 2104 |
| 4 | 4208 |

Nótese que: $526 / 263 = 2$

$1052 / 526 = 2$

$2104 / 1052 = 2$

Y así sucesivamente. En otras palabras, cada valor de V vibraciones, es el doble del valor anterior, así que:

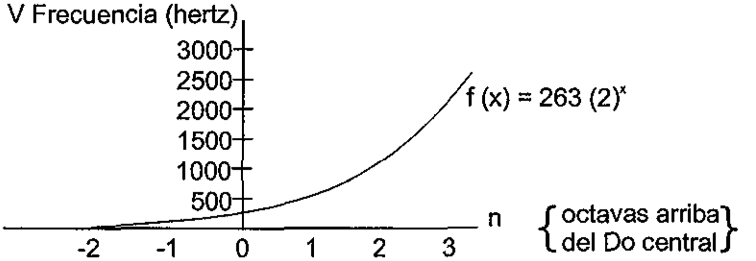
$$f(1) = 526 = 263\,(2) = 263\,(2)^1$$
$$f(2) = 1052 = 263\,(4) = 263\,(2)^2$$
$$f(3) = 2104 = 263\,(8) = 263\,(2)^3$$

En general: $V = f(n) = 263\,(2)^n$

La base 2 representa el hecho de que al subir una octava, la frecuencia de vibración se duplica. Nuestros oídos pueden escuchar una nota como una octava más alta (aguda) que otra precisamente porque vibra con el doble de rapidez.

Aún cuando $V = f(n) = 263\,(2)^n$ tiene sentido en términos musicales sólo para valores de n enteros, se pueden calcular valores de la función $f(x) = 263\,(2)^x$ para toda x real, y su gráfica tiene la forma exponencial típica. Ver la figura 6.1.

Figura 6.1 La función exponencial de base 2 y las notas musicales.




De la misma manera, se puede establecer una relación (función) exponencial, entre las notas musicales y los trastes de una guitarra. Por ejemplo, la primera cuerda de la guitarra (o la sexta), al tocarse al aire se trata de la nota Mi. Si en particular tocamos la prima, entonces se escucha la nota $Mi_5$, que corresponde a las 329.63 frecuencias por segundo; si avanzamos 12 trates, (es decir exactamente a la mitad de la longitud de la cuerda), ahora estaremos en el traste que corresponde a la nota $Mi_6$, o sea, 659.26 frecuencias por segundo (el doble de la anterior). Si seguimos en esta lógica, estaremos construyendo la función exponencial de base dos, cuya representación gráfica se representa en la figura 6.1.

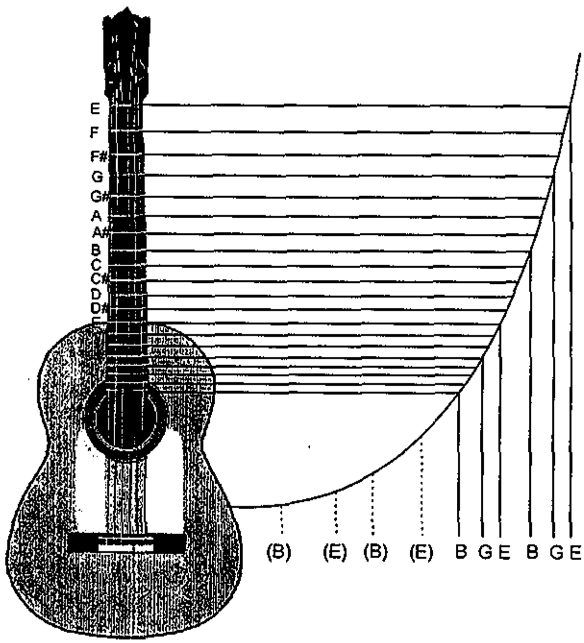



Fig. 6.2 la primera cuerda de la guitarra, nota $Mi_5$ al aire, y la función exponencial de base 2.

# VI.4. LA MÚSICA Y SUS MATERIALES

Vicente Liern Carrión presentó una experiencia que fue desarrollada con alumnos de bachillerato de Valencia[5], "la idea es utilizar la atracción que la música despierta en nuestros alumnos para hacer una revisión de conceptos matemáticos", afirma el autor. La mayor parte de la música que escuchamos ha salido de un ordenador e incluso los micrófonos que utilizan los cantantes pasan por una mesa de mezclas que modifican la entonación. Se trata de utilizar estas ideas y los instrumentos con los que se escucha música (cintas, discos, etc.) para obtener conceptos matemáticos.

Esta investigación hecha por Liern, es muy semejante a lo que pudimos comprobar que realizan en el laboratorio de computación de la ENM de la UNAM, para experimentar y producir nueva música.

Ha sido estructurada en los cuatro apartados siguientes:

a) Una explicación de las escalas mediante tipos de números.

b) Música y vectores.

c) Distancia entre sonidos. Utilizando logaritmos.

d) Música y funciones.

Cada uno de los apartados ha sido desarrollado en tres o cuatro sesiones de una hora con grupos de veinte alumnos. En cada apartado se da un listado del material que se ha empleado; en general, con calculadoras, una computadora y audiocintas es suficiente para realizar esta experiencia.

Desarrollo de la actividad.

**a) Tipos de números.**

Una explicación utilizando escalas

Mediante una grabación en la que suenan simultáneamente un piano y un clarinete bien afinados (o cualquier otro instrumento de viento) que ejecutan una octava, puede comprobarse que parece haber notas en las que ambos instrumentos desafinan. Esto es debido a que no en todos los instrumentos se entiende la octava de igual manera. Esta circunstancia nos permitirá prácticas muy interesantes en la clase de matemáticas, para ello necesitaremos el siguiente material:

---

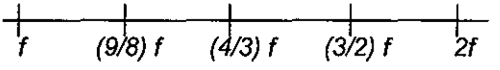
[5] Liern, V., (1994)

- Una audiocinta capaz de grabar y reproducir.
- Una computadora.
- Una calculadora.

*Fundamento teórico.*

El único concepto que se impone a cualquier instrumento y cualquier época, es que ***un sonido de frecuencia f y el de frecuencia 2 f son el principio y fin de una octava***. Tenemos así un intervalo [ $f$, $2f$ ].

Cualquier partición de este intervalo determina una octava (tenga o no sentido en la música actual). Por ejemplo:




Las divisiones en subintervalos pueden hacerse con cualquier criterio, pero según trabajamos con múltiplos racionales o irracionales de $f$ obtendremos tipos de escala que sean conocidos o no.

Desarrollo de sesiones.

*Primer paso.*

Fijamos una frecuencia arbitraria, por ejemplo, $f$ = 264 Hz, y calculamos $2f$ = 528 Hz. Entre estas dos frecuencias determinamos valores intermedios formando así escalas. Vemos dos ejemplos:

1. Con números irracionales

... $(1f =)\ f, 2^{1/12}f,\ 2^{2/12}f,\ 2^{3/12}f,\ 2^{4/12}f,\ 2^{5/12}f,\ 2^{6/12}f,\ 2^{7/12}f,\ 2^{8/12}f, 2^{9/12}f,\ 2^{10/12}f,\ 2^{11/12}f, 2^{12/12}f\ (= 2f)$ ,...

Obtenemos así el sistema temperado que es en el que afinan los pianos y las arpas.

2. Con números racionales

Multiplicando por fracciones ($3^i / 2^j$): i, j = 1, 2, ...10, se obtiene

... $f$, (258/243) $f$, (9/8) $f$, (32/27) $f$, (81/64) $f$, (4/3) $f$, (729/512) $f$, (3/2) $f$, (128/81) $f$, (27/16) $f$, (16/9) $f$, (243/128) $f$, $2f$, ...

Que es el sistema pitagórico en el que siguen afinando la mayor parte de instrumentos de cuerdas.

*Segundo paso*

Una vez calculadas las divisiones de la escala podemos escucharlas con ayuda del ordenador. En este caso se usó lenguaje gw-basic y logo en un ordenador PC, así:

En BASIC

*SOUND frecuencia, duración* hace que en el ordenador suenen las distintas notas, por ejemplo:

```
10 SOUND 130.810, 10
20 SOUND 146.830, 10
30 SOUND 164.810, 10
40 SOUND 174.610, 10,
etc.
```

En LOGO

*TONE frecuencia, duración* sirve para lo mismo:

```
TONE 130.810, 10
TONE 146.830, 10,
etc.
```

Ambos hacen que suenen durante diez segundos las notas cuya frecuencia hemos prefijado

**b) Música y vectores.**

En estas sesiones hemos de convencer a los alumnos de la necesidad de manejar los sonidos como vectores y no como escalares, puesto que en ellos hay al menos tres magnitudes que debemos tener en cuenta independientemente:

1. La **intensidad** que es la medida de lo fuertes o débiles que son los sonidos. Por extraño que parezca es difícilmente apreciable por el oído si no están en el mismo tono.

2. El **tono** determina la altura de un sonido, es decir lo grave o agudo que éste es.

3. El **timbre** es la cualidad que nos permite distinguir sonidos idénticos emitidos por instrumentos distintos.

Material

- Audiocinta con ecualizador digital
- Audiómetro. (Se utilizan en los laboratorios de física y no es muy caro)

Fundamento teórico. Teniendo en cuenta que el sonido es un vector, vamos a definir las tres cualidades que lo determinan en lenguaje vectorial, y con ello ya estaremos en el campo matemático, pudiendo así trabajar con ellos en clase de matemáticas.

Si un sonido es un vector,

**S** = $(S_1, \ldots, S_n) \in \mathbb{R}^n$, tenemos definidas las siguientes magnitudes:

Donde:

**S** es el vector y $S_1$, $S_2$,.. es su componente 1, 2 etc.,

La **intensidad** de **S** es || **S** ||

El **tono** de **S** es su primera componente $S_1$

El **timbre** de **S** es el vector formado por el resto de componentes, es decir $(S_2, S_3, \ldots, S_n)$

Desarrollo de las sesiones.

Se trata de escribir los vectores que corresponden a un sonido dado, para ello se propone hacer tres actividades:

Intensidad

Para calcularla no hace falta más que conectar el audiómetro y anotar la intensidad de estos en decibeles.

Tono

Debemos prefijar de antemano el sistema en que están afinados los instrumentos, y con ello podemos saber cuál es la frecuencia que corresponde a cada tono, por ello es importante realizar primero las prácticas del apartado 3.

Timbre

Es la práctica más atractiva porque en ella se maneja el concepto de vector y base.

Hacemos sonar en una Audiocinta con ecualizador digital sonidos patrones que han sido grabados previamente. Cuando estos suenan, utilizamos las barras del ecualizador como si se tratase de la base de un espacio vectorial, así midiendo cada una de las partes iluminadas de las distintas barras del ecualizador, obtenemos un vector de tantas coordenadas como barras haya, como lo habitual es que hayan cinco, suelen obtenerse vectores del tipo: (2, 0, 5, 2,1).

Las tres actividades propuestas son conceptuales, porque en la práctica, resulta muy difícil trabajar en bachillerato con vectores de más de tres coordenadas, por eso, lo más práctico es escribir los sonidos como vectores de dos componentes:

$\mathbf{S} = (S_1, S_2)$

En donde $S_1$ es la intensidad y $S_2$ el tono. El timbre podemos considerarlo como cualidad asociada a cada instrumento.

c) **Distancia entre sonidos. Utilización de logaritmos**

Cuando escuchamos cualquier tipo de música, y sobre todo si tenemos en cuenta el carácter vectorial de los sonidos, comprobamos que hay piezas en las que parece que no hay casi altibajos, mientras que hay otras en las que los saltos son la práctica predominante. Esto significa que de algún modo todos intuimos una distancia entre los sonidos. En este sentido se han desarrollado varios trabajos en los que destacaremos dos:

1) Joan Girbau

En la Revista catalana de Matemátiques, identificando los sonidos con su tono es decir con su frecuencia, establece la siguiente distancia entre sonidos:

Dados dos sonidos $f_1$, $f_2$, la distancia entre ellos está dada por :

$d(f_1, f_2) = |\log(f_1 / f_2)|$

2) La Ley de Weber- Fechner

Este autor asegura que "la sensación que provoca un sonido de intensidad I, es función lineal del logaritmo de la excitación", y esto permite definir la sensación acústica como

$\mathcal{S} = 10 \log (I / Io)$

Donde Io es la sensación umbral para oír.

Teniendo en cuenta estos dos estudios, vamos a definir una función distancia en el espacio vectorial de los sonidos.

Material

- Calculadora.
- Grabaciones de música de distintos tipos.

Fundamento teórico.

Desde el punto de vista matemático se trata de construir una función distancia entre los vectores de $\mathbb{R}^n$, con lo cual tenemos la seguridad de que cualquiera que esta sea será equivalente a la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, esto no puede manejarse con nuestros alumnos, ni será un reflejo fiel de la idea intuitiva de distancia entre sonidos. Por ello vamos a definir una distancia como la siguiente:

$\mathbf{S}_1 = (a_1, b_1, \mathbf{c}_1)$, $\quad \mathbf{S}_2 = (a_2, b_2, \mathbf{c}_2)$, donde los componentes $a_i$

representan el tono, los $b_i$ la intensidad y $\mathbf{c}_i$ los timbres.

$d(\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = a\,|\log(a_1/a_2)| + b\,|\log(b_1/b_2)| + c\,\|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2\|$.

a, b y c son constantes cuyo valor se fija en la práctica.

En esta distancia el primer sumando mide la diferencia entre tonos, el segundo entre intensidades, y el tercero de algún modo mide la diferencia de timbres.

Desarrollo de las sesiones.

Como hemos expuesto en el punto anterior expresamos algunos sonidos en forma vectorial, y con esto, podemos utilizar la función distancia que hemos definido anteriormente.

Con esta práctica no solo afianzaremos el concepto de crecimiento logarítmico al contraponerlo al de crecimiento lineal, sino que además podremos persuadir a los alumnos de la libertad que nos deja el poder determinar el valor de las constantes a, b y c empíricamente. Por ejemplo, si se trata de una música muy rítmica en la que lo fundamental es el contraste entre los planos sonoros, haremos mayor el segundo sumando, es decir daremos un valor grande a b. Si la música es intimista y nos interesa destacar el timbre, aumentaremos el valor de c.

e) Música y funciones.

Igual que en matemáticas las funciones suponen la utilización de la mayoría de conceptos previos (escalares, vectores, operaciones, etc.), la música significará la utilización de todos los elementos anteriores expuestos.

La definición de música que se utiliza desde la antigüedad es: *Música es el arte de combinar el silencio y los sonidos en el tiempo.*

Está claro que esta definición puede interpretarse como *una función que tiene por variable independiente el tiempo y cuyo conjunto imagen, es el conjunto de los sonidos (un subconjunto de $\mathbb{R}^n$).*

Material:

- Calculadoras
- Papel milimétrico
- Audiómetro
- *Si se quiere computadora para la representación de funciones.*

Fundamento teórico

Llamaremos música a una función ***M*** definida de un intervalo de $\mathbb{R}$ en un conjunto de vectores (sonidos). En esta función el dominio y el rango verifican algunas propiedades obviamente:

1) El dominio puede ser considerado un intervalo: [ 0 , H ] porque no tiene sentido una música que suene infinitamente.

2) El conjunto imagen está acotado, porque el hombre no puede oír fuera del intervalo [16, 20000 ] Hertz en cuanto a frecuencias, y tampoco es capaz de oír por encima de los 160 decibelios de intensidad sin dañar sus oídos.

Desarrollo de las sesiones.
Para trabajar con sonidos vamos a utilizar vectores de dos componentes
**S** = $(S_1, S_2)$ en los que $S_1$ es el tono y $S_2$ la intensidad.
La música será una función escalonada de este tipo

$$M = \begin{cases} (261,60) & \text{si } t \in (0,4) \\ (291,40) & \text{si } t \in (4,6] \\ (261,40) & \text{si } t \in [6,8) \\ (0,0) & \text{si } t \in (8,12) \\ (252,30) & \text{si } t \in (12,16) \end{cases}$$

Las frecuencias han sido medidas en hertz y la intensidad en decibeles. En un pentagrama usual resultaría:

Conceptualmente la idea no es demasiada complicada y permite seguir extrayendo consecuencias.

- Que dos sonidos suenen ligados (es decir que uno sea continuación de otro) que los intervalos en los que varía t en ambas notas son cerrados, mientras que si las notas no son ligadas los intervalos son abiertos.
- La continuidad en la función música se traduce al escucharla en que el instrumento pasa por todos los sonidos intermedios entre dos dados, es decir, lo que hace un trombón de varas al interpretar un glissado.
- La derivabilidad en la función música significaría suavidad al oír esta música.

Otra práctica:

El proceso también puede hacerse en ambos sentidos, es decir dada una música saber qué tipo de función es la que la origina y al revés, dada una función cuya gráfica conocemos (logarítmica, parábolas, polinomios,...) qué música sonaría con esa función.

En cualquier caso, estas sesiones permiten entender cómo un ordenador puede crear música, y porqué simplemente dibujando con el ratón de un ordenador se puede componer. (En este sentido es de destacar que existen programas muy completos para composición por ordenador, por ejemplo FINALE para ordenadores Machintosh, NOTATOR para ordenadores Atari,...)

Con estas propuestas de trabajo se comprueba la capacidad que tienen los alumnos cuando una actividad los motiva. La mayoría de alumnos en el laboratorio de cómputo pasan muchas horas convirtiendo sonidos en vectores, viéndose sorprendidos de que en este caso un vector no lleve inevitablemente asociada una dirección y un sentido, sin que por ello dejen de ser vectores.

Después de trabajar con funciones que responden a un modelo de la vida cotidiana, conceptos como el de continuidad o derivabilidad llegan a verse como una necesidad de catalogar algunas situaciones que realmente existen.

La mayoría de alumnos llegan a comprender que las matemáticas no son una ciencia estancada en la que no cabe la opinión que ellos puedan tener, o en la que ya no queda nada nuevo por decir.

# VI.5. LA GEOMETRÍA Y EL DIBUJO

1. Usando la reproducción de una pintura, por ejemplo del Renacimiento, trazar las principales características en la composición y descubrir las cualidades particulares de simetría, figuras geométricas, proporciones armónicas, la sección dorada etc.

2. Tomar la imagen de alguna construcción de la antigüedad griega o romana y analizar sus proporciones. Luego diseñar una construcción propia basada en la raíz cuadrada, cúbica o en la sección dorada usando solo compás y regla, inclusive considerar la proporción de su volumen en el espacio. Tomar los elementos básicos de tu propio diseño o el de algún compañero y tratar de mejorar las proporciones y con esto la estética, la armonía.

3. Sobre la base de la serie de Fibonacci, inventar otra serie semejante, es decir, una en la que cada término sea la suma de los dos anteriores y comprobar que se cumple inexorablemente la expresión:

$$\sum_{i=1}^{10} X_i = 11\,X_7 \ , \quad (X_7 = 7^{o} \text{ término})$$

   Esto significa: sumando los diez primeros números de dicha serie inventada nos debe dar lo mismo que se obtiene multiplicando el séptimo término por 11.

4. Usar la reproducción de muchas pinturas y localizar la línea de horizonte y el punto de fuga, tratar de plantear la época de elaboración del cuadro a partir del uso que se hizo (para construir la pintura) de las matemáticas y la tecnología.

5. Realizar un dibujo haciendo uso de figuras geométricas: circunferencias, triángulos cuadrados pentágonos, etc.

6. Reproducir un dibujo a escala haciendo uso del método del cuadriculado.

7. Hacer uso del pantógrafo de Sylvester para reproducir a diferentes escalas una imagen de interés. Estudiar las relaciones matemáticas y tratar de descubrir el principio en el que se basa dicho instrumento de dibujo.

8. Construir un geoplano y por medio de material elástico como ligas, tratar de redescubrir los principios que se hallan en las figuras geométricas y sus interrelaciones, como el círculo, triángulos, ángulos, etc.

9. Elaborar cuadros pictóricos o dibujos en los que se haga uso de los siguientes elementos: que contenga la línea de horizonte, el punto de fuga, que existan elementos simétricos, etc.

10. Dibuja la pared posterior y las porciones visibles de las laterales, el cielo raso y el piso de un cuarto como lo vería un observador situado dentro de la habitación y cuyo ojo estuviera viendo directamente hacia la pared posterior.

11. Añade, al dibujo del ejercicio anterior una mesa cuadrada, dos de cuyos bordes sean paralelos a la pared posterior.

12. Dibuja un cubo colocado del tal modo que una de sus aristas dé hacia ti y que las aristas vecinas formen ángulos de 45 ° y 135 °, respectivamente, con la tela (o la superficie, cualquiera que sea, en donde realices el dibujo).

# VI.6. ESCALA TEMPERADA[6].

*Los siguientes son apuntes de didáctica de laudería (lo relativo a instrumentos musicales de cuerda), en donde se manifiesta la vinculación entre la música y sus relaciones matemáticas. Dichos apuntes fueron proporcionados por el profesor de música de la Escuela de Cultura Popular A. C. Aquí se pueden tomar muchos elementos para la preparación de clases de matemáticas.*

En la escala temperada utilizada en la música occidental, todos los tonos y semitonos son iguales; no existen tonos de 9 : 8 y 10 : 9, ni diferencias entre los semitonos. Como es conocido, esta escala contiene la octava dividida en doce semitonos iguales, con el fin de aplicarse en aquellos instrumentos que, como el piano, necesitan una afinación fija que sirva para cualquier grado de cualquier tonalidad.

Se pondrá un ejemplo con la cantidad de vibraciones de cada sonido de la escala cromática, esta vez temperada. La relación se obtuvo con la cifra 16.8171, que refleja con exactitud la división de una octava en doce partes iguales.

La cifra 16.8 es bastante aproximada, pues da un sobrante de una vibración entre 1466 vibraciones. Si se aumenta una centésima (16.81) el sobrante es una vibración entre 58656, con 16.8171 el sobrante es de una entre 293333, con 16.8171 es una vibrante entre 8800000. Como la nota más aguda empleada en la orquesta tradicional es el $Do_9$ del flautín (salvo excepciones de algunos armónicos del violín), la cifra de 16.81 puede ya considerarse exacta, pues resulta una vibración sobrante entre 5866 y la referida nota del flautín tiene 4186 (según la escala del próximo ejemplo)[7].

La operación empleada en el ejemplo 1 es la siguiente: se divide la cantidad de vibraciones de un sonido determinado entre 16.8171; el resultado será la diferencia de vibraciones entre ese sonido y su inmediato superior, quiere decir que si al sonido se le suma el cociente, se obtendrá la cantidad de vibraciones del segundo sonido. Así se cumple la finalidad de la escala temperada: dividirla exactamente en doce partes iguales. Van algunas notas.

---

[6] La escala temperada fue propuesta por el español Bartolomé Ramos de Parejas en su libro *Música Tractatus*, editado en Bolonia en 1482. Algunas versiones dicen que fue propuesta por Aristoxenes, 350 años antes de nuestra era.

[7] La búsqueda del factor 16.81 la efectuó Ítalo Besa Tonussi en 1963.

| Nota (tono): | **La** $_4$ ... | Sol $_5$ | **La** $_5$ | Si $_5$ | Do $_6$ | Do $_6$ # | Re $_6$ | Re $_6$ # |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vibraciones: | **220** ... | 415.3 | **440** | 493.883 | 523.251 | 554.365 | 587.33 | 622.254 |

| Nota: | Mi $_6$ | Fa $_6$ | Fa $_6$ # | Sol $_6$ | Sol $_6$ # | **La** $_6$ | La $_6$ # ... | **La** $_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Vibr. | 659.255 | 698.457 | 739.99 | 783.992 | 830.611 | **880** | 932.327 ... | **1760** |

Aquí nada es100 % exacto; por lo que, se llega a la conclusión que la afinación perfecta no existe, sino que simplemente, afina más el que desafina menos.

En otros textos de acústica se toma como punto de partida el Do normal (el que corresponde al La normal de 435 vibraciones).

Aquí se parte del La "brillante" de 440 (aunque en la actualidad se emplea un La un poco más brillante aún, de 442 a 444). Si se quiere utilizar el La más brillante, se procederá en igual forma con el 16.8 y fracción antes explicado, pero partiendo de un La de 442, 443 o 444.

Instrumentos con trastes.

El procedimiento de 16.8 y fracción es de gran utilidad en la construcción de instrumentos con trastes, en lo que se refiere a su ubicación. Hay algunos que construyen, por ejemplo, una guitarra, y le ponen los trastes tomando como modelo a otra guitarra; así, los trastes quedarán colocados la mayoría de las veces aproximadamente, y si la guitarra "modelo" fue hecha a su vez por aproximación a otro modelo... incluso puede suceder que el largo de la cuerda, de la cejilla al puente, no coincida exactamente entre la guitarra modelo y la que se está construyendo.

La colocación de los trastes sería así: se mide con exactitud el largo de la cuerda desde la cejilla al puente. En la mitad de la cuerda se colocará el traste 12.

La cifra que resultó ser la mitad de la cuerda se divide entre 16.8 (o 16.81) y se obtendrá la distancia que debe haber entre el traste 12 y el 11.

Esta última cifra más de la mitad de la cuerda (es decir la distancia que hay entre el traste 11 y el puente), se divide entre 16.8 y se hallará la distancia que hay entre el traste 11 y el 10.

La distancia que hay entre el traste 10 y el puente se divide entre 16.8 y se hallará la distancia entre el traste 10 y el 9. Y siguiendo este procedimiento, se obtendrán los trastes: 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 y 1.

La distancia que hay entre la cejilla y el traste1 dividida entre 2, resulta la que hay entre el traste 13 y el 14.

La distancia que hay entre el traste 1 y 2 dividida entre 2, resulta la que hay entre el traste 13 y el 14. Y así, el traste 15 dista del 14 la mitad que el 3 del 2, 1l 16 dista del 15 la mitad del 4 al 3, etcétera.

Tratándose de una cuerda de guitarra de 66 cm de longitud, las operaciones matemáticas serían las siguienes:

66 : 2 = 33 cm (lugar del traste 12)

33 : 16.81 = 1.963 cm (distancia entre el traste 12 y 11)

1.963 + 33 = 34.963 cm (distancia del traste 11 al puente)

34.963 : 16.81 = 2.079 cm (distancia del traste 11 y 10)

2.079 + 34. 963 = 37.043 cm (distancia del traste 10 al puente)

37.043 : 16.81 = 2.203 cm (distancia entre el traste 10 y el 9)

.,..Y así sucesivamente.

Con estas operaciones hay un sobrante de una décima de milímetro, por lo que puede considerarse exacto. No obstante, si se quiere mayor exactitud, puede emplearse la cifra 16.817 y utilizar más decimales.

# VI.7. CONSTRUCCIÓN DE UNAS ZAMPOÑAS.

*Introducción.*

Las Zampoñas es un instrumento musical de viento de origen andino. Es un chirimbolo autóctono formado por un conjunto de carrizos cilíndricos que correctamente organizados y formados forman un bello sonido musical basado en el flujo de aire.

Las zampoñas, por las características intrínsecas de su construcción y por el material de fácil acceso para su elaboración, representan un material adecuado para poner de manifiesto dos particularidades que nos interesan en esta ocasión para la aplicación de un laboratorio de esta propuesta didáctica:

a. La Función *f(x)* que existe entre el flujo de aire (volumen) de los cilindros de la Zampoña y el sonido producido (frecuencia por segundo, hertz) en este proceso.

b. Las relaciones matemáticas involucradas en la construcción y afinación de este instrumento musical.

*Características particulares de este instrumento.*

Ya habíamos visto en el capítulo IV (*Las Matemáticas y la Música*) que el sonido es una onda que viaja a través de un medio y que es capaz de excitar el oído, originando la percepción auditiva. Su naturaleza está dada como un movimiento ondulatorio longitudinal perceptible al oído.

Son muchos e innumerables los sonidos que existen en nuestro medio. Los sonidos musicales son los que se originan en una serie regular de vibraciones u ondas periódicas, capaces de provocar en nuestro oído una sensación agradable. Por ejemplo, el sonido producido por una cuerda de guitarra, un violín, una orquesta o un cantante.

Los instrumentos de viento se basan en las propiedades de los llamados tubos sonoros, los cuales resuenan a frecuencias relacionadas armónicamente dependiendo de la forma que da a los labios el intérprete y de la estructura propia de cada instrumento. Un tubo de longitud L, por ejemplo, abierto en ambos extremos, vibra a una frecuencia $f = v / 2L$, siendo v la velocidad del sonido.

Un tubo cerrado en un extremo produce un sonido una octava más grave que un tubo abierto de la misma longitud. Ejemplos de instrumentos de viento son la ocarina, el fagot, la quena, el flautín, la trompeta, las zampoñas, etc.

La sonoridad o cantidad de sonido que se produce en la fuente depende de la fuerza y de la vibración de su masa, longitud y tensión.

Además del aire, los sólidos y los líquidos son medios de propagación para el sonido. El sonido se propaga con movimiento uniforme a través de medios elásticos y su velocidad depende de la densidad del medio.

*Propuesta de procedimiento*

Objetivos:

1. Los alumnos determinarán la función matemática existente entre las dimensiones (volumen) de un tubo sonoro y el tono (frecuencia de onda por segundo, hertz).
2. Los alumnos diseñarán unas zampoñas (instrumento musical), afinado en la escala de Re sostenido, nota tónica, común de la música tradicional andina.

Material:

- Una veintena de carrizos de bambú de diferente tamaño y de diférente diámetro. La longitud mínima será de cinco centímetros y la máxima de 50 cm. El diámetro será entre 1.25 cm (1/2plg) y 2.52 cm (1 plg).
- También se puede manejar como material alternativo, tubos de PVC que se consigue en tiendas de materiales de plomería comerciales, con las mismas características en las dimensiones (diámetro-longitud) que los carrizos de bambú.

Instrumentos de trabajo:

- Un vernier
- Una regla de medición de 50 cm y otra de 20 cm.
- Un afinador electrónico o un sonómetro. (Aquí también puede ser utilizado un teclado electrónico).

- 20 metros de hilo cáñamo de diferentes colores
- Una navaja.
- una cegueta
- Una lija para madera del número 00

Metodología

Por la cantidad de trabajo que se requiere y por las características del trabajo, se propone que esta actividad se realice en equipos de trabajo de 2 o 3 alumnos, como se prefiera. El nivel de estudio que deben tener se recomienda para alumnos de los primeros años de alguna carrera de ingeniería o afín, que ya hayan tomado un curso de Funciones y de preferencia que sepan realizar ajuste de curvas con algunos métodos como el de mínimos cuadrados o haciendo uso de la calculadora.

1. Los alumnos medirán con el vernier y la regla, las dimensiones (diámetro y longitud) de todos y cada uno de los tubos (de PVC o de bambú) que se les proporcionó. Cada tubo deberá estar tapado de un extremo y el otro permanecerá abierto.

2. Para cada uno de los tubos se producirá un sonido haciéndoles pasar aire con la boca y se medirán (con el afinador electrónico) la frecuencia sonora (los ciclos por segundo) producidos por la masa de aire fluida en los tubos. Se les pedirá a los alumnos que dicho flujo sea lo más constante y permanente posible para que la medición sea lo menos imprecisa. Así, mientras un estudiante manipula los objetos, el otro (o los otros), puede hacer las mediciones y anotaciones pertinentes.

3. Se realizará una tabla que contenga las siguientes variables. Diámetro del tubo, Longitud del tubo, Volumen del tubo, Frecuencias por segundo (Hertz). La siguiente tabla muestra una posible muestra de resultados.

| Longitud, L (cm) | Diámetro, D (cm) | Volumen (1/4)π $D^2L$ | Frecuencia (Hz) | Tono (aproximado). | observaciones |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 0.5 | - | | | - |
| | 1.0 | - | | | - |
| | 1.25 | | | | |
| | 1.8 | | | | |
| | 2.52 | | | | |
| | Etc. | | | | |
| | | | | | |

4. Realizar un diagrama de dispersión con las variables: Volumen vs Frecuencia. Ajustar a un modelo matemático, lineal y/o exponencial, por mínimos cuadrados.

5. Realizar un diagrama de dispersión con las variables tono (por ejemplo el Do central) tomado como n al número de octavas arriba de este Do central vs la frecuencia y ajustar a un modelo exponencial

6. Analizar los datos registrados en las tablas y gráficas, y obtener conclusiones.

7. Con las conclusiones anteriores diseñar y construir una zampoñas en escala de Re mayor sostenido de 2 octavas.

Análisis de resultados.

Como se ha mencionado anteriormente, el tono de una nota musical está determinado por la frecuencia de la vibración que la ocasiona. Por ejemplo, el Do central en el piano, corresponde a una vibración de 263 hertz. Una nota de una octava arriba del do central vibra a 526 hertz, y otra de dos octavas arriba del Do central vibra a 1052 hertz. Ver la tabla 6.3:

TABLA 6.3. Tono de notas arriba del Do central

| Número, n, de octava arriba del Do central | Número de hertz $V = f(n)$ |
|---|---|
| 0 | 263 |
| 1 | 526 |
| 2 | 1052 |
| 3 | 2104 |
| 4 | 4208 |

Obsérvese que 526 / 263 = 2, 1052 / 526 = 2 y 2104 / 1052 = 2 .

Y así sucesivamente. En otras palabras, cada valor de V es el doble del valor anterior, así que:

$V = f(1) = 526 = 263\,(2)^1$

$V = f(2) = 1052 = 263\,(2)^2$

$V = f(3) = 2104 = 263\,(2)^3$

V es la vibración.

En general:

$F = f(n) = 263\,(2)^n$

Aún cuando $V = f(n) = 263\,(2)^n$ tiene sentido en términos musicales solo para ciertos valores de n, se pueden calcular valores de la función $f(x) = 263\,(2)^x$ para toda la x real, y su gráfica tiene la forma exponencial típica. A este tipo de conclusiones tendrán que llegar los alumnos.

Estos resultados enriquecerán y afirmarán los conceptos de variables (dependientes, independientes), funciones (lineales, exponenciales), etc.

Para alcanzar adecuadamente la consecución de los objetivos de esta actividad, es muy importante saber manejar adecuadamente los conceptos y la herramienta matemática de las funciones exponencial y logarítmica.

Finalmente, para el diseño de las zampoñas, se concluye que se requieren 13 carrizos de bambú para diseñar unas zampoñas en Re # mayor (410 hertz). El tubo más grande (la nota tónica), requiere de un volumen de unos 48 cm cúbicos –aproximadamente- (1.5 cm de diámetro y 27 cm de longitud) y el carrizo más pequeño Re # (1630 hertz) requiere un volumen de unos 5.5 cm cúbicos (1 cm de diámetro y 7 de longitud).

# VI.8. ANEXO

---

CUESTIONARIO
PARA ESTUDIANTES DE LA E.N.M.

El portador de este cuestionario, es tesista de la ***Maestría en Educación Matemática*** de la E. N. E. P. .Acatlan. Su tema de tesis se llama "Las matemáticas y el arte (en la música y en la plástica)". El objetivo de este cuestionario es "aterrizar" (complementar) el estudio teórico sobre la vinculación matemáticas –música, a partir de la opinión de la comunidad de la E. N. M. y de otros análisis.

Nombre:______________________________Carrera:__________________________

Semestre actual que estudias__________________________

**PREGUNTAS**:

1. ¿Estás en la carrera que elegiste?

a) Sí b) No

2. Si la respuesta anterior fue NO, ¿cuál era tu elección?

3. ¿Te gustan las Matemáticas?

a) Sí b) No

4. ¿Existe alguna asignatura en tu carrera en la que se evidencie alguna vinculación entre las Matemáticas y la Música?.
a) Sí b) No

5. Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿cómo se llama la asignatura y de qué manera se manifiesta esa vinculación?

6 ¿Existe alguna relación entre la afinación de instrumentos musicales y las matemáticas?

7. Qué relación existe entre la construcción de instrumentos musicales y las matemáticas

---

CUESTIONARIO
PARA ESTUDIANTES DE LA E. N. A. P.

El portador de este cuestionario, es tesista de la ***Maestría en Educación Matemática*** de la E.N.E.P. Acatlan. Su tema de tesis se llama "Las matemáticas y el arte (en la música y en la plástica)". El objetivo de este cuestionario es "aterrizar" (complementar) el estudio teórico sobre la vinculación matemáticas – la plástica, a partir de la opinión de la comunidad de la E. N. A. P. y de otros análisis.

Nombre:______________________________ Carrera:________________________

Semestre actual que estudias_________________________

**PREGUNTAS**:

1. ¿Estás en la carrera que elegiste?

a) Sí b) No

2. Si la respuesta anterior fue NO, ¿cuál era tu elección?

3. ¿Te gustan las Matemáticas?

a) Sí b) No

4. ¿Existe alguna asignatura en tu carrera en la que se evidencie alguna vinculación entre las Matemáticas y la Artes Plásticas?.
a) Sí b) No

5. Si la respuesta anterior es afirmativa, ¿cómo se llama la asignatura y en qué forma se manifiesta esa vinculación?

6. ¿De qué manera aplicas las matemáticas en el diseño de tus trabajos artísticos?

7. ¿Qué sabes acerca del número áureo?

# VII
# Conclusiones

# VII. CONCLUSIONES.

Sobre la base de la presente investigación:

1. Es evidente la conexión histórica entre las matemáticas y el arte (por lo menos en la música y en la plástica). Esta relación se pone de manifiesto a lo largo del devenir histórico de las matemáticas y el arte; inclusive, hubo periodos de la historia de la humanidad en que se fundían ambas disciplinas y una motivaba a la otra, y viceversa.

2. Es importante aprovechar el gusto y el interés que los jóvenes, en general, tienen por el arte, para mostrar en el salón de clases el vínculo de éste con las matemáticas.

3. Es necesario explorar otras posibilidades, como la vinculación entre las matemáticas y la música, y las matemáticas y la plástica, para lograr en nuestros alumnos aprendizajes significativos en las matemáticas.

4. No menos importante es romper con esquematismos, dogmas y demás prejuicios acerca de las ideas y creencias que se tienen de las matemáticas para, mínimamente, lograr una actitud diferente ante estas. El arte puede ser un vehículo para lograr esta transformación tanto en estudiantes como en docentes.

5. Sin embargo, es necesario reconocer que en México estamos a la zaga, en relación con otros países, en el estudio de estas posibilidades interdisciplinarias de construcción de aprendizajes. Ante esto es preponderante desarrollar el potencial de los recursos, principalmente humanos.

6. En las Escuelas, Nacional de Música y de Artes Plásticas de la UNAM, de acuerdo al estudio que se realizó, se observa que los estudiantes tienen sólo una idea muy general de la vinculación entre las matemáticas y el arte; por lo que, si ni aún en esas escuelas de arte está explícita dicha relación, en las escuelas de bachillerato y de otras carreras es más difícil que la conozcan.

7. Por lo anterior, a primera vista se ven obstáculos a los que nos enfrentamos para llevar al salón de clase la propuesta de hacer uso de recursos artísticos para la enseñanza de las matemáticas, algunos de ellos son:

- ❖ En México no es muy común la formación interdisciplinaria, y esta es una situación real y compleja.

- ❖ Los docentes y estudiantes, requerimos un cierto nivel mínimo de conocimientos en la música y en la plástica.

- ❖ Existen limitaciones, desconocimiento, pobreza de información y formación de una cultura artística, esto es parte de un analfabetismo funcional de nuestro sistema educativo. Los estudiantes tienen, en lo general, una idea muy vaga sobre las matemáticas y el arte.

- ❖ Diseñar una propuesta pedagógica con estas ideas, Implica un acto doble de creatividad: el diseño en sí, y esta se debe adaptar a las necesidades de los programas de estudio de nuestras asignaturas, en tiempo, forma y contenido.

8. A pesar de estas dificultades, es factible hacer uso de la relación matemáticas-arte como una alternativa del proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, así lo muestran las investigaciones. Para superar estas dificultades se debe realizar bastante estudio y trabajo.

9. Finalmente, el producto de esta investigación se puede implementar en talleres, materias optativas, en cursos cortos inter semestrales, en conferencias, en actividades de extensión, etcétera. Evidentemente, también en las mismas asignaturas curriculares.

# VII
# BIBLIOGRAFÍA

# VII. BIBLIOGRAFÍA


**ABBAGNANO (1964).** HISTORIA DE LA PEDAGOGÍA., *México, FCE.*

**ADLER, I. (1974).** MATEMÁTICAS, La ciencia de los números. Grupo *Editorial Novaro. México, D. F.*

**ALBARN, K., et al. (1999).** TEACHING MATHEMATICS AND ART. Editado por: LESLEY JONES Goldsmiths´ College, University of London.

**ALBERTI, L., (1996).** DE LA PINTURA. Facultad de Ciencias UNAM. *México. Colección MATHEMA .*

**ALTHUSSER, L. (1979).** LA REVOLUCIÓN TEÓRICA DE MARX. *México. Ed Siglo XXI.*

**ARROYO, A.,** LA TEORÍA DEL CONOCIMIENTO CIENTÍFICO. mimeo, S/F.

**AUSTIN, J. (1996).** Mathematizing string art. MATHEMATICS AND COMPUTER EDUCATION . 30 ( 3 ). Pp. 272-277.

**AVILES, K.** CRISIS EN LA FORMACIÓN DE CAMPOS CIENTÍFICO Y HUMANÍSTICO, ASEGURAN INVESTIGADORES. ***La Jornada***. México. 2 de enero de 2001, Pag. 30.

**BACHELARD, G. (1974).** LA FORMACIÓN DEL ESPÍRITU CIENTÍFICO. *Buenos Aires. Ed. Siglo XXI,*

**BADULESCU, B. Y MARTÍNEZ, M. (1995).** LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA a TRAVÉS DEL ARTE, en: MEMORIAS DEL V Simposio Internacional en Educación. Matemática "Elfriede Wenzelburger". Pp.116-122. México, Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.

**BELTRAN, V. Y BRAUN, E. (1984).** PRINCIPIOS DE FÍSICA. *México, D. F.Editorial Trillas,*

**BESA, I., (1990).** ESCALA TEMPERADA Y MICROTONALISMO. *Editorial Pueblo y Educación, La Habana, Cuba. .*

**BONILLA, R. E. (1992).** Lenguaje y cultura en la educación matemática de grupos indígenas. EDUCACIÓN MATEMÁTICA .. *Vol 5. Nm. 1, Abr/93, pp. 108-109.*

**BOURDIEU, P., Et al, (1975).** EL OFICIO DEL SOCIÓLOGO. *Ed. Siglo XXI. Buenos Aires.*

**BOURLET, M., (1997).** La geometría descriptiva en el conservatorio de artes y oficios de paris. EDUCACIÓN MATEMÁTICA., *9 (2). Pp.* |

**CARRILLO, J., (1948). SONIDO 13. Fundamento Científico e Histórico.** Impreso en los talleres Gráficos de la Nación, México.

**CASTELNUOVO E. (1997).** DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA MODERNA. *Ed. Trillas, 2ª.edición.. México.*

**CASTILLEJOS, (1976).** NUEVAS PERSPECTIVAS EN LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN. *Ediciones Anaya. España.*

**CEKIT (1992).** CURSO PRÁCTICO DE LUZ Y SONIDO. *Compañía Editorial Electrónica. Colombia.*

**CHOMSKY, N. y DIETERICH, H. (1995).** LA SOCIEDAD GLOBAL. *Editorial Joaquín Mortiz, S. A. de C. V. 1ª. ed., México, D. F.*

**COLEMAN, D. B. (1.989)** The silver ratio: a vehicle for generalization.,. MATHEMATICS TEACHER. *Jan. /1989, 54-59* Chicago and London: The University of Chicago Press.

**DAVIS, Ph. y HERSCH, R. (1989).** EL SUEÑO DE DESCARTES. En: EL Mundo según las matemáticass. Editorial Labor, S. A. *Ministerio de Educación y Ciencia.*

**DENYER, R., (1988).** MANUAL DE GUITARRA. *Santander España, Ed. Raices, 34-48.*

**DICKEY, E., (1993).** The golden ratio. MATHEMATICS TEACHER. *86 (7). Pp. 554-557.*

**DIDOMENICO, A., (1997).** From fibonacci numbers to geometric sequences and the binet formula by the golden ratio! THE MATHEMATICS TEACHER. *90 (5). Pp. 386-389.*

**DOYLE, K. W. (1994).** Albrecht Dürer's renaissance connections between mathematics and art. MATHEMATICS TEACHER, *87 (4). Pp. 278-282.*

**EDGERTON, S., (1991).** THE HERITAGE OF GIOTTO'S GEOMETRÍA. ART AND SCIENCE IN THE EVE OF THE SCIENTIFIC REVOLUTION. Ithaca and London: Cornell University Press.

**FARKAS, T. y ÉRDI P. (1985).** Impossible forms: experimental graphics and theorical associations., LEONARDO. *18 (3 ),. Pp. 179-183.*

**FELGUÉRES M., et al. (1999).** UNIVERSIDAD DE MÉXICO. *Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México. El Universo de las matemáticas. Marzo/Abril de 1999. Núm. 578-579.*

**FOUCAULT, M, (1979).** MICROFÍSICA DEL PODER. *Ed. La Piqueta, 2ª. Edición, Madrid..*

**FREIRE, P. (1994).** PEDAGOGÍA DEL OPRIMIDO. *México, Siglo XXI, 45 ed..*

**FUENTES, A. (1991).** Desarrollo en fracción contínua simple infinita de las potencias enteras del número de oro. EDUCACIÓN MATEMÁTICA. *3 (1)1, Abr/9. Pp., 19-38.*

**GADOL, J., (1973).** LEON BATTISTA ALBERTI. UNIVERSAL MAN OF THE EARLY RENAISSANCE.

**GAGGI, S. (1986).** Sculpture, theater and art performance: notes on the convergence of the arts., LEONARDO. *19(1), 45-52, 1986.., 18,(1). 45-49, 1985. 18(2), 93-95, 1985.*

**GARCÍA ,H., (1963).** CUESTIONES DE FILOSOFÍA INDIVIDUAL Y SOCIAL DE LA EDUCACIÓN. *Ed. Rialp, Madrid.*

**GIMENEZ, G, (1978).** CONDICIONAMIENTOS ESTRUCTURALES DEL PROCESO DE LIBERACIÓN SOCIAL. *CSPA-UIA, México.*

**GONZÁLEZ, M. D. (1988).** Fun with fibonacci; or, what to do after the bc calculus exam. MATHEMATICS TEACHER. *81(5 ),.Pp. 398-400.*

**GREVSMÜHL, U., (1986)** Mathematics and modern art: combinatorics. ,MATHEMATICS TEACHER. *Vol 127, pp. 42-49.*

**GREVSMÜHL, U. (1978).** Mathematics and modern art: computer graphics., MATHEMATICS TEACHER. **Vol.***128. Pp. 29-35.*

**GUEVARA, E. (1977).** ESCRITOS Y DISCURSOS. *Editorial de Ciencias, La Habana..*

**HALE, J., (1994).** THE CIVILIZATION OF EUROPE IN THE RENAISSANCE. *New York: Atheneum.*

**KANDINSKY, W., (1956).** DE LO ESPIRITUAL EN EL ARTE. *Editorial Nueva Visión, Buenos Aires.*

**KEMP, M., (1995).** THE EARLY FORTUNA OF THIS HIS THEORY OF PERSPECTIVA. University Press of New England, Washington. En: UNIVERSIDAD de México, revista de la UNAM. Marzo-abril 1999. P. 35.

**KENNETH, O., (1967).** Mathematics and art. MATHEMATICS TEACHER, *60 ( 6). Pp.* 568-572

**KLINE, M., (1998),** MATEMÁTICAS PARA LOS ESTUDIANTES DE HUMANIDADES. *Fondo de Cultura Económia – CONACYT. México*

**KOSIK, K., (1981).** DIALÉCTICA DE LOS CONCRETO. *Ed. Grialbo. México.*

**LANGDON, N. y SNAPES, CH. (1995).** TESELADOS, en: EL FASCINANTE MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS. *Ed. Limusa, México, pp.13, 18-25.*

**LARA, A., (1971). LECTURAS UNIVERSITARIAS. Antología de matemáticas. UNAM., México.**

**LAWLIS, F., (1967).** The basis of music-mathematics. MATHEMATICS TEACHER, *Vol. LX, Núm. 6 Pp. 593-596.*

**LENIN, V. I., (1978).** EL IMPERIALISMO Y LOS IMPERIALISTAS. *Ed. Progeso. Moscú..*

**LENIN, V. L., (1986).** LAS TRES FUENTES Y TRES PARTES INTEGRANTES DEL MARXISMO. *Ed. Progreso. Moscú.*

**LIERN, V., (1994).** Algoritmos matemáticos y afinación musical.EDUCACIÓN MATEMÁTICA. *6.(2), ago/94.pp. 45-55.*

**LIERN, V., (1994).** La música y sus materiales: una ayuda para las clases de matemáticas. SUMA, REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. *s. 14-15/1994. Pp. 60-64.*

**LIERN, V., (1994).** Métodos numéricos en música. EPSILON REVISTA DE LA SAEM THALES, *10 (3). Pp. 51-60.*

**LUENGO, E., (1982).** PROBLEMAS METODOLÓGICOS DE LA SOCIOLOGÍA CONTEMPORÁNEA. *TICOM-UNAM. Xochimilco-UIA. México.*

**MACDONELL, J. (1984).** LEONARDO, Rulled surfaces: the mathematics of three straight-line-generated constructions. *17.(2) , pp. 104-107.*

**MANTOVANI, J., (1960).** LA EDUCACIÓN Y SUS TRES PROBLEMAS. *El Ateneo, Buenos Aires.*

**MARTELL, G. (1990).** CURSO INTRODUCCIÓN A LA MÚSICA. *Ed. G.Martell and Co. Inc. México. 2ª. Edición. México, D, F.*

**MARX, K., (1977).** INTRODUCCIÓN GENERAL A LA CRÍTICA DE LA ECONOMÍA POLÍTICA (1857). *Ed. Pasado y Presente – Siglo XXI. México.*

**MARX, K., (1980).** EL CAPITAL, TOMO I. *Ed. Siglo XXI. México. 1977. 5ª. edición.*

**MILLER, W., y CLASON, R., (1994).** MA Golden triangles, pentagons and pentagrams.,THEMATICS TEACHER. *87 (5). Pp. 338-341.*

**MILLMAN, R., y SPERANZA, R., (1991).** The artist's view of points and lines. MATHEMATICS TEACHER. *Feb. /1991, pp. 133-138.*

**MITCHELL, CH. (1989).** Henry wadsworth longfellow, poet extraordinaire. MATHEMATICS TEACHER. *May/1989 Pp. 378-379.*

**MONDADORI, A. (1958), EPOCA, Settimanale, anno IX, n. 383. *Venezia, Italia.***

**NEWMAN, J. R. (1994).** EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS *Enciclopedia sigma, ed. Grialbo.*

**NEWMAN, J. R. (1994).** EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS. *A. Grijalbo,. Cap. 7.*

**O'SHEA T. (1979).** Geometric transformations and musical composition. MATHEMATICS TEACHER. *72 (7) Oct/1979, Pp. 523-528.*

**OLIVERAS, C., (1984).** Etnomatemáticas en trabajos de artesanía andaluza. Implicaciones para la formulación de profesores y la innovación del currículo matemático escolar. EPSILON, *Núm. 36, Pp. 447-450.*

**ORTON, A. (1984).** DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS. Cuestiones, teoría y práctica en el aula. Ediciones Morata, España. *Traducido Por: Guillermo Solana..*

**OX, J. y FRANK, P., (1984).** The systematic translation of musical composition into paintings. LEONARDO, *17 (3),9 Pp. 152-158,*

**PANOFSKY, E. (1985).** LA PERSPECTIVA COMO FORMA SIMBÓLICA. *Barcelona: Tusquets Editores, cuadernos marginales, 31.*

**PAUL, C., y VARGAS, A.** MÉXICO, INMERSO EN EL ANALFABETISMO FUNCIONAL, UNA "CATÁSTROFE SILENCIOSA". *La Jornada. México. 15 de Enero de 2001.*

**PHILIP, J., (1989). EL SUEÑO DE DESCARTES. El mundo según las matemáticas. Editorial Labor, S. A.. Ministerio de Educación y Ciencia.**

**PIAGET, J. (1954).** THE MECHANISMS OF PERCEPTION. *New York. Basic Books.*

**RAUSCHENBACH, B., (1985).** PERSPECTIVE PICTURE AND VISUAL PERCEPTION.

**REIF, D. K. (1996).** Architecture and mathematics. MATHEMATICS TEACHER, *89 (6). Pp. 456-458.*

**RUSSELL, B., (1980)** ANÁLISIS DEL ESPÍRITU. ***Ed. Paidos, Buenos Aires.***

**SANCHEZ, V., (1973).** LA FILOSOFÍA DE LA PRAXIS. *Ed. Grijalbo. México.*

**SANDI, L. (1977).** INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LA MÚSICA: *Curso completo para segunda enseñanza.*

**SARHANGI, R. Y DANIEL, D. (1999).** SYMMETRY AND REPETITION IN THE ART: MATHEMATICS IN ACTION, En: Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática ELFRIEDE WENZELBURGER. 27, 28, 29, OCT. 1999. México. Pp. 134-139.

**SKEMP, R., (1993).** PSICOLOGÍA DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS._*Ed. Morata, Madrid..*

**SNYDER, R., (1985).** VIDEO COLOR CONTROL BY MEANS OF AN EQUAL-TEMPERED KEYBOARD.

**SPENCER, P., (1991).** Egyptian fractions: ahmes to fibonacci to today. MATHEMATICS TEACHER,. *October/1991, Pp. 561-568.*

**TANG, P., (1984).** On the similarities between scientific discovery and musical creativity: a philosophical analysis. LEONARDO, *17(4), Ppp. 261-268.*

**VALENCIA, E., (1982).** PRÁCTICA CONDICIONADA Y TRANSFORMADORA. *Tesis, Instituto Libre de Filosofía, México.*

**VARNADORE, J., (1991).** THE MATHEMATICS TEACHER. Pascal's triangle and fibonacci numbers., *Abril /1991.* VII Simposio Internacional en Educación Matemática "Elfriede Wenzelburger". *Grupo Editorial Iberoamérica. UPN-UNAM.*

**VILLEGAS, M. (1981).** TALLER DE EXPRESIÓN GRÁFICA. *Ed. UNAM. CCH Vallejo, México, D. F.*

**VINCI, DA L., (1982).** TRATADO DE LA PINTURA. *Madrid: Editora Nacional.*

**VINCENT, P., (1987).** The fibonacci sequence and the golden ratio. MATHEMATICS TEACHER, *80 (5), Pp. 357-358.*

**VITRUVIO, M., (1991).** LOS DIEZ LIBROS DE ARQUITECTURA. *Trad., pról. Y notas de A. Blánquez. Barcelona: Editorial Iberia.*

**WIELENBERG, P. (1990).** Octagons at monticelo. MATHEMATICS TEACHER. *Jan. /1990, Pp. 58-61.*

**WINITZKY, S., (1993).** Los grafos y el diseño.,EDUCACIÓN MATEMÁTICA . *5 (1). Pp. 73-84.*

**WITTKOWER, R. Y B. CARTER, (1953).** JOURNAL OF THEWARBURG AND COURTAULD INSTITUTIONS. The perspective of piero de francesca's "flagelation". Vol. 16, pp. 292-302. En: UNIVERSIDAD de México, *revista de la UNAM. Marzo-abril 1999. P. 36.*

**ZARZAR, Ch. C. (1994).** HABILIDADES BÁSICAS PARA LA DOCENCIA. *Ed Patria, México.*

**ZBIEK, R., (1996).** Multiple connections. MATHEMATICS TEACHER. *89 (8). Pp. 628-634.*

**ZEMELMAN, H., (1987).** USO CRÍTICO DE LA TEORÍA, 1. *COLMEX-ONU, México.*

**ZOUNI, O., (1985).** Space through colour and illusion. LEONARDO, *18 (2), Pp.96-99,*