34

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EFECTO CASIMIR EN MEDIOS DIELECTRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

FRANCISCO JAVIER LOPEZ RODRIGUEZ

CIENCIAS

DIRECTOR DE TESIS: DR. RAUL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT (IFUNAM)

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

CIUDAD UNIVERSITARIA, MARZO DEL 2002

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Efecto Casimir en Medios Dieléctricos

realizado por Francisco Javier López Rodríguez

con número de cuenta 9306744-9 , quién cubrió los créditos de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. RAUL PATRICIO ESQUIVEL SIRVENT	Esquivel
Propietario	DR. LUIS MOCHAN BACKAL	
Propietario	DR. JULIO JAVIER MARTINELL BENITO	
Suplente	DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN	Carlos Villarreal
Suplente	DR. GERARDO CARMONA RUIZ	

Consejo Departamental de FISICA

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE

DEPARTAMENTO DE FISICA

Para todos los que de alguna
manera infuyeron en mi formación
científica y social. En especial
para mis hermanos y mis padres.

Índice general

Introducción

El estudio de la física es una aventura interesante y estimulante para cualquier persona que quiera conocer más acerca de todo lo que la rodea, es quizá una de las actividades más excitantes del conocimiento. Entre los objetos de estudio podemos citar los átomos, las galaxias, el espacio, el tiempo y una gran cantidad de fenómenos más. En ocasiones algunos objetos de estudio parecieran salir de un texto de ciencia ficción, puesto que son poco intuitivos y muy sorprendentes.

A principios del siglo pasado había una serie de problemas fundamentales que no podían ser analizados en el contexto de las teorías físicas existentes. Esta situación condujo a un cuestionamiento de las propias teorías. La intensa crisis sacudió la convicción reinante en el sentido de que la física era ya una ciencia prácticamente completa en lo que a principios se refiere.

Una gran revolución científica fué desarrollada por una multitud de científicos, entre quienes destacan figuras muy brillantes, y que culminó con el establecimiento de una nueva teoría física para describir el comportamiento de microsistemas (electrones, átomos, etc.). Esta nueva teoría es la mecánica cuántica. Con el desarrollo de esta teoría surgieron nuevos campos de estudio como la electrodinámica cuántica y predicciones de fenómenos debidos a esta nueva área de investigación.

En 1948 estudiando los efectos de las fluctuaciones de vacío cuántico Casimir encontró que dos superficies conductoras perfectas no cargadas colocadas en el vacío sentían una atracción. Esta fuerza es una consecuencia de la electrodinámica cuántica. Para dos placas planas separadas una distancia a esta fuerza por unidad de área tiene la siguiente magnitud:

$$F_C = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 \mathrm{a}^4}.$$

En artículos recientes se ha profundizado más en el estudio de este efecto de vacío tomando en consideración que las placas que intervienen en el cálculo son en general dieléctricas. El resultado es la obtención de una expresión para la fuerza de Casimir en medios dieléctricos.

El estudio de la fuerza de Casimir y la capacidad de modificar su valor ha tomado una relevancia importante, debido a los avances a pasos agigantados en la miniaturización de sistemas electromecánicos. La influencia que esta fuerza puede tener sobre una estructura con un tamaño del orden de micrómetros, es tal que puede llegar incluso a cambiar su forma.

En este trabajo nos planteamos el problema de modificar la magnitud de la fuerza de Casimir mediante la manipulación de las propiedades dieléctricas y geométricas de las placas paralelas que intervienen en el cálculo de dicha fuerza. Con este fin realizamos cálculos numéricos y analizamos los resultados obtenidos.

En el primer capítulo damos un panorama de las ideas básicas para la comprensión de este efecto de vacío. En el segundo introducimos al lector en una teoría más desarrollada, en la que se obtiene la fuerza de Casimir entre placas dieléctricas, tomandose en cuenta efectos de dispersión y disipación del medio. Se explica la teoría de Lifschitz sobre la fuerza entre placas dieléctricas y se puntualizan las diferencias existentes con la teoría de Casimir.

En el tercer capítulo presentamos los cálculos realizados numéricamente de la fuerza entre placas dieléctricas de silicio (Si), placas metálicas de magnesio (Mg) ó aluminio (Al) y el caso en que una placa es dieléctrica y la otra metálica (Si y Al respectivamente). Hacemos un análisis de los resultados obtenidos.

En el capítulo final presentamos las conclusiones del trabajo realizado y los posibles nuevos estudios que pudieran realizarse sobre el efecto Casimir.

Capítulo 1

Aspectos históricos, experimentales y teoría básica del efecto Casimir

Una de las predicciones más importantes de la electrodinámica cuántica obtenida por Casimir en 1948 es que dos placas conductoras perfectas colocadas en el vacío sienten una atracción mutua.

En el presente capítulo se presenta una reseña histórica de las ideas y hechos que concluyeron con los estudios de Casimir sobre las fluctuaciones de energía de punto cero. Presentamos además los esfuerzos experimentales realizados inicialmente por Sparnnay y continuados por Lamoreaux, Mohideen y Chan para mostrar la existencia de la fuerza de Casimir y la importancia que esta fuerza tiene a escalas del orden de micrómetros. En la parte final del capítulo introducimos al lector en los conceptos básicos de la teoría del efecto Casimir tales como cuantización de campo electromagnético, energía de punto cero, energía de Casimir y reproducimos el cálculo clásico hecho por Casimir para obtener la expresión de la fuerza entre dos placas conductoras perfectas.

1.1. Historia del Efecto Casimir

En la década de los 40, J. T Overbeck en los laboratorios de la Philips llevó a cabo una serie de experimentos con polvo de cuarzo usado en la manufactura. Los resultados indicaban que la teoría de la estabilidad de coloides que había sido desarrollada junto con E. J. Verwey no era enteramente correcta y que la interacción partícula - partícula decaía más rápidamente de lo que ellos pensaban originalmente. Overbeek sugirió que esto tenía que ver con la propagación finita de la luz. Pronto, H. B. G. Casimir y D. Polder [1] en los mismos laboratorios estudiaron el problema reconsiderando la interacción de Van der Waals.

Encontraron que la sugerencia de Overbeek era correcta. Como una consecuencia del retardo, la energía decaía como r^{-7} para separaciones intermoleculares grandes. Esto probablemente habría sido el final de la historia, sólo que Casimir quedó intrigado por la simplicidad del resultado obtenido con Polder y sugirió otra explicación. Casimir encontró que calculando las fluctuaciones de la energía de punto cero con la presencia de dos átomos llegaba a los mismos resultados que los que él y Polder habían encontrado usando la teoría de Van der Waals.
En 1947, Casimir mencionó sus resultados a Niels Bohr, quien lo alentó a continuar con sus estudios diciéndole que esos resultados eran algo excelente y muy nuevo.

Para mayo de 1948 Casimir presentó un artículo cuyo título fué *On the attraccion between two perfectly conducting plates* [2] a la Academia de Ciencias y Artes en Holanda. En éste, Casimir obtenía la fuerza entre dos placas perfectamente conductoras, neutras, colocadas en el vacío y que es a lo que usualmente los físicos denotan con el nombre de efecto Casimir. Una definición más moderna de la fuerza de Casimir es que ésta se origina de las fluctuaciones de la energía de punto cero por la presencia fronteras metálicas o dieléctricas. La asociación que hizó Casimir del efecto con la energía electromagnética de punto cero fué un hecho fascinante y continua siéndolo. Fascinante también es que al mismo tiempo que Casimir pensaba en un efecto debido a la energía de punto cero, en Estados Unidos de Norteamerica Welton y Weisskopf deducían que el efecto Lamb podía ser una consecuencia del punto cero de energía.

La expresión para la fuerza de Casimir por unidad de área entre dos placas conductoras perfectas, obtenida por Casimir es:

$$F(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}, \tag{1.1}$$

donde d es la distancia de separación entre las placas. Esta fuerza es muy pequeña comparada con la fuerza de Coulomb para mantener al electrón en el átomo de hidrógeno o la atracción gravitacional entre dos pesos separados una distancia determinada. El efecto Casimir no involucra masas ni cargas es una consecuencia de la electrodinámica cuántica. Más adelante se presentará una deducción de la Ec. (1.1).

1.2. Experimentos sobre el efecto Casimir

Avances recientes en microsistemas electromecánicos (MEMS por sus siglas en inglés) y la capacidad de medir fuerzas del orden de ato-newtons han abierto el camino para el estudio de efectos de fuerzas que se vuelven relevantes a escalas del orden de micrómetros. La fuerza de Casimir entre dos placas (Ec.(1.1)) separadas una distancia de un micrómetro es de aproximadamente $1{,}3\times 10^{-3}\frac{N}{m^2}$. No obstante ha sido confirmada experimentalmente.

La literatura experimental acerca del efecto Casimir es poca aunque ha comenzado a despertar un mayor interés en la comunidad científica . El primer intento por medir la fuerza de Casimir entre dos placas fué el que llevo acabo Sparnaay en 1958 [4]. En este experimento se media la fuerza entre dos placas metálicas de cromo ó aluminio colocadas dentro de una cámara de vacío que posteriormente era llenada con gas de nitrógeno. La fuerza era determinada de la deflexión de un resorte conectado a un brazo de aluminio pegado a una de las placas. La deflexión era medida del cambio en la capacitancia de un capacitor conectado al brazo. Los resultados obtenidos fueron, sin embargo poco satisfactorios, mostraban una fuerza atractiva consistente con la teoría, pero con una incertidumbre del 100 % en sus mediciones.

En un segundo experimento hecho en 1996 se obtuvieron resultados más precisos pudiendo demostrar así la presencia del la fuerza de Casimir. Este experimento fué realizado en la Univerdad de Washington por Lamoreaux [5] usando un sistema electromecánico basado en un péndulo de torsión . Debemos mencionar que en su experimento Lamoreaux usa una placa plana y una esfera, puesto que esto le facilita su realización. Por supuesto cuando se cambia la geometría de las superficies la expresión para la fuerza de Casimir cambia. Lamoreaux tomó en cuenta además dos correciones a la fuerza de Casimir. Estas son la temperatura finita a la que éste es realizado y la conductividad finita de las placas.

Continuando cronológicamente con los experimentos realizados acerca de este tema el que sigue fué el realizado por U. Mohideen y Anushree Roy [7] en 1998 donde los autores usan un microscopio de fuerza atómica (AFM por sus siglas en inglés), para medir la fuerza entre una placa plana y una esfera de poliestireno cubiertas con una capa de 300nm de aluminio y por otra capa de 20nm de una una mezcla de oro y plomo. El esquema del experimento lo mostramos en la figura 1.1.

La fuerza sobre el brazo pegado a la esfera es medida por la rotación de su punta con un microscopio de fuerza atómica AFM. Un rayo láser es enviado sobre la punta del brazo y reflejado, entonces una fuerza sobre la esfera resultará en un giro del brazo produciéndose una diferencia en la señal entre los fotodiodos A y B. Se hacen varias mediciones acercando la esfera a la placa en pasos de 3.6nm. Los resultados obtenidos usando este instrumento fueron bastante buenos, ya que obtuvieron una precisión en sus mediciones del orden del 1 % comparada con la teoría dejando claramente demostrado que se produce una atracción entre la placa y la esfera.

Otros tipos de experimentos han sido realizados por los investigadores comenzado en el estudio de la fuerza de Casimir en sistemas microelectromecánicos. En ese sentido se encuentra el llevado a cabo por Chan [8]. El experimento consiste en medir la rotación de una placa cuadrada de unos cuantos centenares de micras. La placa de polisilicon se coloca sobre un eje de rotación. Dos electrodos fijos de polisilicon son colocados a una pequeña distancia debajo de la placa y una esfera metálica fijada en la punta de un alambre de cobre es puesta exactamente arriba de uno los extremos de la placa. Una fuerza atractiva entre la esfera y la placa producirá una rotación de la placa. El esquema experimental de este experimento se muestra en la figura 1.2.

Para detectar la rotación de la placa , los autores del experimento miden la

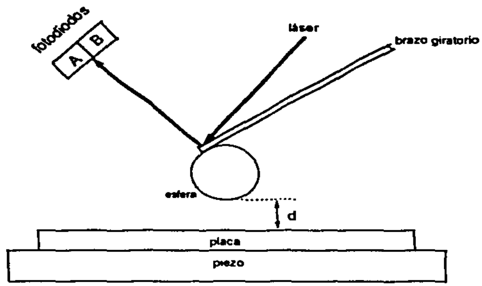

Figura 1.1: Esquema del dispositivo experimental usado por U. Mohideen y A. Roy. (Una fuerza sobre la esfera produce un giro en el brazo.)

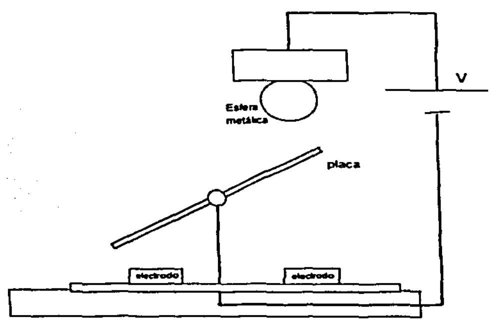

Figura 1.2: Microsistema torsional usado por H. B. Chan et al.

diferencia de capacitancias entre la placa y ambos electrodos, de esa manera se obtienen dos mediciones. La primera en el punto en que la separación entre la placa y uno de los elecrótodos es máxima, que es en el extremo en que se encuentra la esfera y la segunda que es cuando la separación es mínima, es decir, en el extremo opuesto. Debemos mencionar que este sistema proporciona mediciones tan buenas como las de un AFM. Esto es, se pueden llegar a hacer mediciones a muy pequeña escala. Es por esto que los resultados de este experimento son tan buenos como los del experimento llevado a cabo por Mohideen y Anushree Roy. Existen más experimentos relacionados con el efecto Casimir, sin embargo no nos extenderemos más y solo mencionaremos que estos experimentos ratifican que este efecto cuántico juega un papel importante a escalas de nanómetros.

1.3. Energía de punto cero

El punto cero de energía aparece por primera vez en la teoría de radiación de cuerpo negro de Planck y poco después, éste fué derivado con las matrices de Heisenberg en 1925.

La expresión obtenida por Planck para el valor promedio de la energía de un oscilador de frecuencia ω en equilibrio con radiación a temperatura T es:

$$U = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega. \tag{1.2}$$

Cuando $T \longrightarrow 0$, $U \longrightarrow 1/2\ (\hbar\omega)$ que indica la persistencia de un punto cero de energía a un temperatura en la que clásicamente todos los movimientos cesan. Planck estaba convencido de que esta constante no era una consecuencia física. Einstein, sin embargo quedo intrigado por la idea. En un artículo publicado junto con Stern en 1913, notó que el punto cero de energía era necesario puesto que la ecuación (1.2) debe de proporcionar la formula clásica $U = kT$ en el límite en que $kT >> \hbar\omega$. En este límite se tiene:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &\approx \frac{\hbar\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} + \frac{1}{2}(\frac{\hbar\omega}{kT})^2 - 1} + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \frac{kT}{1 + \frac{1}{2}\frac{\hbar\omega}{kT}} + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &\approx kT - \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega. \end{aligned} \tag{1.3}$$

El punto cero de energía es entonces necesario para obtener la energía correcta en el límite clásico. Por esta y otras razones Einstein y Stern concluyeron, "La existencia del punto cero de energía es probable"[3] y [12].

El punto cero de energía fué un tema muy estudiado en la década posterior a la mecánica de las matrices de Heisenberg y la mecánica de ondas de Schrödinger, principalmente por el gran interés en fenómenos a bajas temperaturas tales como superconductividad.

1.4. El concepto de la energía de Casimir

Como hemos mencionado anteriormente el efecto Casimir se debe a las fluctuaciones de campo electromagnético de vacío y a los efectos de energía de punto cero. Sin embargo existen algunos problemas conectados con esta definición debido a que al hacer el cálculo de dicha energía se obtienen divergencias. Una cuestion fundamental es contestar si estos infinitos tienen algún significado físico. En una situación real en que se tienen fronteras con características físicas determinadas, la energía de Casimir (energía de vacío) puede ser renormalizada resultando en general finita. La energía de Casimir se define como la diferencia entre la energía de punto cero modificada por la presencia de fronteras y la energía de punto cero en el espacio libre:

$$E_c = <\Omega \mid H \mid \Omega>_{fronteras} - <\Omega \mid H \mid \Omega>_{espacio-libre} . \qquad (1.4)$$

Un cambio asociado a las condiciones de frontera produce un cambio en la energía de Casimir. Es importante mencionar aquí que la energía física de vacío dada por la fórmula (1.4), puede se entendida como el valor de expectación del hamiltoniano en el estado base.

Existen dos métodos para calcular la energía de Casimir: (i) La suma directa sobre todos los modos con sus propios esquemas de renormalización (que es precisamente como Casimir lo hizo) ó (ii) Calculando el tensor de energía momento de vacío $T^{\mu\nu}(r)$ haciendo posteriormente la diferencia entre el cálculo del tensor en el espacio libre y con fronteras.

1.5. Cuantización de Campo Electromagnético [18]

Para cuantizar el campo electromagnético primero mostramos que un modo de campo es equivalente a un oscilador armónico. Las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre son:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (1.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{1.8}$$

En función del potencial escalar Φ y vectorial $\mathbf{A}$, en la norma de Coulomb definida por $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, con $\Phi = 0$, podemos escribir a partir de la ecuación (1.8) que:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.9}$$

Resolviendo la Ec. (1.9) por separación de variables obtenemos soluciones monocromáticas dadas por:

$$\mathbf{A}(r,t) = \alpha(t)\mathbf{A}_o(r) + \alpha^*(t)\mathbf{A}_o^*(r),$$

$$= \alpha(0)e^{-i\omega t}\mathbf{A}_o(r) + \alpha^*(0)e^{i\omega t}\mathbf{A}_o^*(r), \tag{1.10}$$

donde la parte espacial satisface la ecuación de Helmholtz,

$$\nabla^2 \mathbf{A}_o(r) + \kappa^2 \mathbf{A}_o(r) = 0 \qquad \left(\kappa = \frac{\omega}{c}\right), \tag{1.11}$$

y la parte temporal satisface $\ddot{\alpha}(t) = -\omega^2\alpha(t)$. El campo eléctrico y magnético estan dados por:

$$\mathbf{E}(r,t) = -\frac{1}{c}[\dot{\alpha}(t)\mathbf{A}_o(r) + \dot{\alpha}^*(t)\mathbf{A}_o^*(r)], \tag{1.12}$$

y

$$\mathbf{B}(r,t) = \alpha(t)\nabla \times \mathbf{A}_o(r) + \alpha^*(t)\nabla \times \mathbf{A}_o^*(r). \tag{1.13}$$

La energía electromagnética se puede escribir de la siguiente manera:

$$H_F = \frac{1}{8\pi}\int d^3r(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{1}{8\pi c^2}\dot{\alpha}(t)^2\int d^3r\mathbf{A}_o(r)^2$$

$$+\frac{1}{c^2}\dot{\alpha}^*(t)^2\int d^3r\mathbf{A}_o^*(r)^2 + \frac{2}{c^2}\mid\dot{\alpha}(t)\mid^2\int d^3r\mid\mathbf{A}_o(r)\mid^2 + \alpha(t)^2\int d^3r[\nabla\times\mathbf{A}_o(r)]^2$$

$$+\alpha^*(t)^2\int d^3r[\nabla \times \mathbf{A}_o^*(r)]^2 + 2\mid\alpha(t)\mid^2\int d^3r[\nabla \times \mathbf{A}_o(r)]^2. \tag{1.14}$$

Utilizando la identidad:

$$\int d^3r[\nabla \times \mathbf{A}_o(r)]^2 = \kappa^2\int d^3r\mathbf{A}_o^2(r), \tag{1.15}$$

y notando que $\dot{\alpha}(t)^2 = -\omega^2\alpha(t)^2$ esto debido a $\dot{\alpha}(t) = -i\omega\alpha(t)$ podemos simplificar la expresión (1.14) como:

$$H_F = \frac{1}{8\pi}\int d^3r(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{\kappa^2}{2\pi} \mid \alpha(t) \mid^2, \tag{1.16}$$

donde, la "función de modo $\mathbf{A}_o(r)$"esta normalizada,

$$\int d^3r \mid \mathbf{A}_o(r) \mid^2 = 1. \tag{1.17}$$

Ahora definimos la cantidades reales:

$$q(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) - \alpha^*(t)], \tag{1.18}$$

$$p(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{4\pi}}[\alpha(t) + \alpha^*(t)], \tag{1.19}$$

en términos de tales variables la energía H_F (1.16) puede escribirse como:

$$H_F = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \tag{1.20}$$

A partir de las definiciones (1.18) y (1.19) se tiene que $\dot{q} = p$ y $\dot{p} = -\omega^2 q$ que son las ecuaciones de Hamilton por lo que concluimos que p y q son variables canónicas y H_F es un hamiltoniano tipo oscilador armónico.

Introduciendo los operadores de creación y aniquilación, tenemos que el proceso de cuantización de campo electromagnético es equivalente a reemplazar la variable clásica $\alpha(t)/c\sqrt{4\pi}$ por el operador cuántico $[\hbar/2\pi]^{1/2}a(t)$ ó $\alpha(t)$ por $(2\pi\hbar c^2/\omega)^{1/2}a(t)$ y $\alpha^*(t)$ por $(2\pi\hbar c^2/\omega)^{1/2}a^\dagger(t)$ [18].

El potencial vectorial clásico es entonces reemplazado por el operador:

$$\mathbf{A}(r,t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}\right)^{1/2}[a(t)\mathbf{A}_o(r) + a^\dagger(t)\mathbf{A}_o^*(r)], \tag{1.21}$$

por lo tanto los operadores correspondientes a el campo eléctrico y magnético son:

$$\mathbf{E}(r,t) = i(2\pi\hbar\omega)^{1/2}[a(t)\mathbf{A}_o(r) - a^\dagger(t)\mathbf{A}_o^*(r)], \tag{1.22}$$

$$\mathbf{B}(r,t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega}\right)[a(t)\nabla \times \mathbf{A}_o(r) + a^\dagger(t)\nabla \times \mathbf{A}_o^*(r)]. \tag{1.23}$$

El Hamiltoniano (1.20) para un modo cuántizado se escribe como:

$$H_F = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2). \tag{1.24}$$

Necesitamos aún generalizar el resultado anterior para una situación en que el campo electromagnético esta compuesto por muchos modos. Consideremos el campo en el espacio libre sin fronteras físicas, en tal caso el número de modos es infinito. $\mathbf{A}_o(r)$ satisface la ecuación de Hemholtz. Si definimos las funciones de modo como:

$$\mathbf{A}_{\kappa\lambda}(\mathbf{r}) = V^{(-1/2)}\mathbf{e}_{\kappa\lambda}e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}} \tag{1.25}$$

donde vector unitario $\mathbf{e}_{\kappa\lambda}$, toma valores reales y especifica la polarización de cada modo. La condición $\kappa\cdot\mathbf{e}_{\kappa\lambda} = 0$ significa que hay dos polarizaciones independientes. El subíndice λ representa las polarizaciones, tomamos pues $\lambda = 1, 2$.

En términos de de las funciones de modo (1.25), el potencial vectorial (1.21) se transforma en:

$$\mathbf{A}_{\kappa\lambda}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}\right)^{1/2}[a_{\kappa\lambda}(t)e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}} + a^{\dagger}_{\kappa\lambda}(t)e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}}]\mathbf{e}_{\kappa\lambda}, \tag{1.26}$$

con $\omega_\kappa = \kappa c$ y $a_{\kappa\lambda}$, $a^{\dagger}_{\kappa\lambda}$ son respectivamente los operadores de creación y aniquilación para los modos con vector de onda κ y de polarización λ. Utilizando el principio de superposición y sumando sobre el número infinito de modos tenemos que el potencial vectorial es:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\kappa\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}\right)^{1/2}[a_{\kappa\lambda}(t)e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}} + a^{\dagger}_{\kappa\lambda}(t)e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}}]\mathbf{e}_{\kappa\lambda}. \tag{1.27}$$

Cada modo cumple con la condición de normalización:

$$\int d^3r\,\mathbf{A}_{\kappa\lambda}(r)\cdot\mathbf{A}^{*}_{\kappa'\lambda'}(r) = \delta^3_{\kappa\kappa'}\delta_{\lambda\lambda'}. \tag{1.28}$$

A partir del potencial vectorial (1.26) obtenemos las expresiones para el campo eléctrico y magnético:

$$\mathbf{E}(r, t) = i\sum_{\kappa\lambda}(2\pi\hbar\omega_k)^{1/2}[a_{\kappa\lambda}(t)e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}} - a^{\dagger}_{\kappa\lambda}(t)e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}}]\mathbf{e}_{\kappa\lambda}, \tag{1.29}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = i\sum_{\kappa\lambda}\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_k}\right)^{1/2}[a_{\kappa\lambda}(t)e^{i\kappa\cdot\mathbf{r}} - a^{\dagger}_{\kappa\lambda}(t)e^{-i\kappa\cdot\mathbf{r}}]\kappa\times\mathbf{e}_{\kappa\lambda}, \tag{1.30}$$

esto debido a que las funciones de onda planas de cada modo $A_{\kappa\lambda}(r)$ forman un conjunto completo de soluciones que satisfacen las condiciones de contorno y por lo tanto cualquier modo de campo electromagnético puede ser expresado en términos de estas funciones.

Siguiendo un proceso similar al anterior se tiene que el hamiltoniano es:

$$H_F = \sum_{\kappa\lambda}\hbar\omega_\kappa(a^{\dagger}_{\kappa\lambda}a_{\kappa\lambda} + 1/2). \tag{1.31}$$

Este es el Hamiltoniano para un número infinito de osciladores armónicos desacoplados. Los diferentes modos de campo son independientes, además se satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[a_{\kappa\lambda}, a^{\dagger}_{\kappa'\lambda'}] = \delta^3_{\kappa\kappa'}\delta_{\lambda\lambda'}, \tag{1.32}$$

$$[a_{\kappa\lambda}, a_{\kappa'\lambda'}] = [a^{\dagger}_{\kappa\lambda}, a^{\dagger}_{\kappa'\lambda'}] = 0.$$

La cuantización de campos electromagnéticos muestra que cuando estos son descritos por la mecánica cuántica los niveles de energía permitidos son $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$, $n = 0, 1, 2, 3, ...$ como los de cualquier otro oscilador armónico. En el caso del campo electromagnético, el entero n corresponde al número de fotones. El término $\frac{1}{2}\hbar\omega$ es el punto cero de energía e implica las fluctuaciones de campo electromagnético en el vacío.

En el espacio libre o en una cavidad cuyas dimensiones sean mucho más grandes que la longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, el número de modos por unidad de volumen en un intervalo de frecuencias $[\omega, \omega + d\omega]$ asociado es $dN_\omega = (\omega^2/\pi^2 c^3)d\omega$ [22]. Puesto que cada modo tiene un punto cero de energía cero $\frac{1}{2}\hbar\omega$ entonces la energía de punto cero de campo electromagnético por unidad de volumen es:

$$\rho_0(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}(\frac{1}{2}\hbar\omega)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3}d\omega, \tag{1.33}$$

en el intervalo $[\omega, \omega + d\omega]$. El total de energía electromagnética de punto cero: $E_0 = \int_0^\infty \rho_0(\omega)d\omega$, es por ende infinito.

1.6. Fuerza de Casimir entre placas conductoras perfectas [13]

En esta sección reproduciremos el cálculo clásico de Casimir para la fuerza entre placas conductoras perfectas. Supongase que se tiene un paralelepipedo con paredes perfectamente conductoras de longitud $L_x = L_y = L$ y L_z. Las frecuencias permitidas de la radiación atrapada en el paralelepipedo estan restringidas a valores discretos. Esto significa que el punto cero de energía es afectado por la presencia del paralelepipedo y es diferente de la energía de punto cero cuando el espacio está libre.

Para paredes perfectamente conductoras las funciones de modo $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = A_x(\mathbf{r})\mathbf{i} + A_y(\mathbf{r})\mathbf{j} + A_z(\mathbf{r})\mathbf{k}$, satisfacen que la componente tangencial de el campo eléctrico se desvanece sobre las paredes, entonces:

$$A_x(\mathbf{r}) = (\frac{8}{V})^{1/2} a_x cos(\kappa_x x) sen(\kappa_y y) sen(\kappa_z z), \tag{1.34}$$

$$A_y(\mathbf{r}) = (\frac{8}{V})^{1/2} a_y sen(\kappa_x x) cos(\kappa_y y) sen(\kappa_z z), \tag{1.35}$$

$$A_z(\mathbf{r}) = (\frac{8}{V})^{1/2} a_z sen(\kappa_x x) sen(\kappa_y y) cos(\kappa_z z), \tag{1.36}$$

donde $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1$, $V = L^2 L_z$, y

$$\kappa_x = \frac{l\pi}{L}, \kappa_x = \frac{m\pi}{L}, \kappa_x = \frac{n\pi}{L_z}, \tag{1.37}$$

con l, m, n valores enteros positivos, además del cero. Para satisfacer la condición transversal $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, también se requiere:

$$\kappa_x A_x + \kappa_y A_y \kappa_z A_z = \frac{\pi}{L}(lA_x + mA_y) + \frac{\pi}{L_z}(nA_z) = 0. \tag{1.38}$$

Entonces hay dos diferentes polarizaciones, salvo en el caso en que uno de los enteros l,m ó n sea cero. En tal caso (1.38) indica que hay solo una polarización. Es sencillo checar que las ecuaciones (1.34), (1.35), (1.36) definen funciones de modo transversales que satisfacen la ecuación de Helmoltz Ec.(1.11) asi como, la condición de que las componentes transversales de $\mathbf{E}$ se desvanescan sobre las paredes de la cavidad. Las funciones de modo son ortogonales y satisfacen la condición de normalización:

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^{L_z} dz(A_x^2\mathbf{r} + A_y^2\mathbf{r} + A_z^2\mathbf{r}) = 1 \tag{1.39}$$

Las frecuencias permitidas estan dadas por la expresión:

$$\omega_{lmn} = \pi c \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L_z^2}\right)^{1/2}, \tag{1.40}$$

El punto cero de la energía en la caja es entonces:

$$\begin{aligned} E(d) &= \sum_{l,m,n} (2)\frac{1}{2}\hbar\omega_{lmn} \\ &= \sum_{l,m,n} \pi\hbar c \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{L_z^2}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{1.41}$$

El factor de 2 esta relacionado con las 2 diferentes polarizaciones de los modos con $l, m, n \neq 0$.

Estamos interesados en el caso en que $L >> L_z = d$, podemos entonces reemplazar las sumas sobre l y m por integrales, obteniendo:

$$E(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \sum_n \int_0^\infty d\kappa_x \int_0^\infty d\kappa_y \left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}\right)^{1/2}. \tag{1.42}$$

Ahora si no hay placas y hacemos d arbitrariamente grande. la suma sobre n puede ser reemplazada por una integral, por tanto la energía de punto cero sería:

$$E(\infty) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2}\frac{d}{\pi} \int_0^\infty d\kappa_x \int_0^\infty d\kappa_y \int_0^\infty d\kappa_z (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{1/2}. \tag{1.43}$$

La energía potencial del sistema cuando las placas estan separadas una distancia d es $E_c(d) = E(d) - E(\infty)$, la energía necesaria para traer las placas desde el infinito hasta colocarlas a una separación d:

$$E_c(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2}[\sum_n \int_0^\infty d\kappa_x \int_0^\infty d\kappa_y \left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2}\right)^{1/2}$$
$$-\frac{d}{\pi}\int_0^\infty d\kappa_x \int_0^\infty d\kappa_y \int_0^\infty d\kappa_z (\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2)^{1/2}]. \tag{1.44}$$

Introduciendo la variable $r^2 = x^2 + y^2$ la energía se escribe como:

$$E_c(d) = \frac{L^2 \hbar c}{\pi^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty drr\left(r^2 + \frac{n^2\pi^2}{d^2}\right) - \left(\frac{d}{\pi}\right)\int_0^\infty d\kappa_z \int_0^\infty drr(r^2 + \kappa_z^2)^{1/2}\right], \tag{1.45}$$

de donde definiendo las nuevas variables de integración $x = r^2 d^2/\pi^2$ y $\kappa = \kappa_z d/\pi$ obtenemos:

$$E_c(d) = \frac{L^2 \hbar c}{4\pi}\frac{\pi^3}{d^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty dx(x + n^2)^{1/2} - \int_0^\infty d\kappa \int_0^\infty dx(x + \kappa^2)^{1/2}\right). \tag{1.46}$$

Para evaluar la expresión anterior reescribámosla como:

$$E_c(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3}L^2\left[\frac{1}{2}G(0) + \sum_{n=1}^{\infty}G(u) - \int_0^\infty d\kappa G(u)\right], \tag{1.47}$$

donde u puede ser n o κ y $G(u)$ se define como:

$$G(u) = \int_0^\infty dx(x + u^2)^{1/2}. \tag{1.48}$$

Existen varios caminos para evaluar esta diferencia de infinitos. Como la fórmula de Euler-Maclaurin:

$$\sum_{n=1}^{\infty}G(n) - \int_0^\infty d\kappa G(\kappa) = -\frac{1}{2}G(0) - \frac{1}{12}G'(0) + \frac{1}{720}G'''(0) + \ldots \tag{1.49}$$

que nos permite obtener la diferencia entre la suma y la integral. Debemos mencionar que las primas denotan derivadas, tenemos pues que $G'(\kappa) = -2\kappa^2$, por lo tanto $G'(0) = 0$,luego la única derivada que nos da un resultado distinto de cero es $G'''(0) = -4$, todas las derivadas de orden mayor se hacen cero. Por ende $\sum_{n=1}^{\infty} G(n) - \int_0^\infty d\kappa G(\kappa) = -\frac{1}{2}G(0) - \frac{4}{720}$. La expresión final para la energía queda por lo tanto como:

$$E_c(d) = \frac{\pi^2 \hbar c}{4d^3}L^2(-\frac{4}{720}) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{720 d^3}L^2. \tag{1.50}$$

Esto implica que fuerza por unidad de área es:

$$F(d) = -E_c'(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}, \tag{1.51}$$

que es precisamente la misma fuerza la obtenida por Casimir en su artículo [2].

Capítulo 2

Efecto Casimir en medios absorbentes y disipativos

La cuantización de campo electromagnético en presencia de un medio dieléctrico es un problema importante y complicado. La dificultad se encuentra en que el medio puede ser en general nolineal, inhomogeneo, dispersivo y disipativo.

El proposito de este capítulo es calcular la fuerza de Casimir entre placas dieléctricas, tomando en cuenta que el medio es dispersivo y disipativo. Para llevar a cabo la cuantización de campo electromagnético consideramos el medio dieléctrico compuesto por átomos modelados como osciladores armónicos interactuando con un reservorio que representa al sistema que absorbe energía. Explicamos también en qué consiste la teoría de Lifschitz sobre la fuerza entre placas dieléctricas y puntualizamos las diferencias existentes con la teoría de Casimir.

2.1. Teoría de Lifshitz sobre la Fuerza entre Dieléctricos [6]

Lifshitz fué él primero que desarrolló la teoría para la fuerza atractiva entre dos medios semi-infinitos hechos de un material con cualquier susceptibilidad eléctrica. Su trabajo fué motivado por lo resultados experimentales de la fuerza medida entre cuerpos diélectricos que no podían ser explicados únicamente con la teoría de Van der Waals. Los resultados de Lifshitz muestran que la fuerza atractiva es una función de las propiedades principales del material (constantes diélectricas) y la separación de los planos. Para el caso de conductores perfectos el resultado obtenido con la teoría de Lifshitz es identico a la Ec. (1.1). La diferencia conceptual consiste en que desde el punto de vista de Casimir se asocia a las fluctuaciones de campo electromagnético de vacío como hemos mencionado en reiteradas ocasiones, por tanto la fuerza de Casimir es una propiedad intrin-

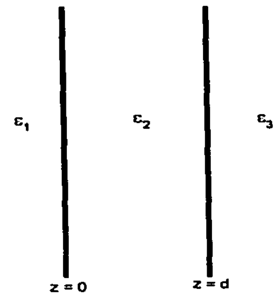

Figura 2.1: Geometría para la derivación de la expresión de Lifshitz. Dos placas semi-infintas separadas por una capa con constante dieléctrica ϵ_2.

seca del espacio. Mientras que desde el punto de vista de Lifshitz la fuerza sólo se debe a las interacciones entre los materiales.

La complejidad en el cálculo realizado por Lifshitz llevó a que se desconfiara de su validez, sin embargo el mismo resultado ha sido obtenido por otros métodos más sencillos y transparentes. El cálculo se desarrolla a partir de considerar cargas y corrientes fluctuantes. Esas fluctuaciones sirven como fuentes en las ecuaciones de Maxwell, es decir campos clásicos, sujetos a las condiciones de frontera presentadas por las superficies dieléctricas. En un pequeño cubo, las fluctuaciones de corriente y de polarización pueden determinarse usando el teorema de fluctuación-disipación, observandose que las fluctuaciones persisten a temperatura cero. El resultado de la fuerza se obtiene de resolver las ecuaciones de Maxwell con los repectivos términos estocásticos y se obtiene en términos del tensor de esfuerzos de Maxwell. La expresión obtenida por Lifshitz para el caso en el que un medio con constante dieéctrica ϵ_3 se encuentra entre dos placas semi-infinitas con constantes dieléctricas ϵ_1 y ϵ_2 (Fig. 2.1).

es:

$$F(d) = -\frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}\int_1^\infty dp p^2 \int_0^\infty d\xi \xi^3 \epsilon_3^{3/2}\Big(\Big[\frac{\epsilon_3 s_1 + \epsilon_1 p}{\epsilon_3 s_1 - \epsilon_1 p}\frac{\epsilon_3 s_2 + \epsilon_2 p}{\epsilon_3 s_2 + \epsilon_2 p}$$

$$\times e^{2\xi p\sqrt{\epsilon_3 d/c}} - 1\Big]^{-1} + \Big[\frac{s_1 + p}{s_1 - p}\frac{s_2 + p}{s_2 - p}e^{2\xi p\sqrt{\epsilon_3 d/c}} - 1\Big]^{-1}\Big), \qquad (2.1)$$

donde $\epsilon_j = \epsilon_j(i\xi)$ es la constante dieléctrica de la región j evaluada en la frecuencia imaginaria $i\xi$ y $s_{1,2} \equiv (p^2 - 1 + \epsilon_{1,2}/\epsilon_3)^{1/2}$.

La expresión de Lifshitz se reduce a la Ec.(1.51) tomando el límite $\epsilon_{1,2} \rightarrow \infty$ y $\epsilon_3 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} F(d) &= -\frac{\hbar}{2\pi^2 c^3}\int_1^\infty dp p^2 \int_0^\infty d\xi \xi^3 \frac{2}{e^{2\xi p d/c} - 1} \\ &= -\frac{\hbar c}{16\pi^2 d^4}\int_1^\infty dp p^{-2}\int_0^\infty \frac{dx x^3}{e^x - 1} \\ &= -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2. Efecto Casimir para medios dieléctricos [10]

El cálculo de Lifshitz es válido para medios semi-infinitos. En el caso de placas de ancho finito el cálculo se complica. En está sección presentaremos el cálculo de la fuerza de Casimir para placas finitas.

2.2.1. Efecto Casimir para dos placas conductoras en una dimensión

El cálculo que se presenta a continuación es una derivación sencilla de la fuerza entre dos placas metálicas finitas en una dimensión. Por una dimensión entendemos que sólo se consideran aquellos modos cuyo vector de onda es perpendicular a las placas. Este resultado servirá para tener una base con la cual comparar los resultados obtenidos en la derivación posterior de la fuerza entre dos placas semiconductoras, en la que se tomaran en cuenta efectos de disipación y dispersión.

Supongase que se tienen dos placas conductoras separadas una distancia a, colocadas como se muestra en la figura 2.2.

La energía de Casimir puede expresarse como:

$$E_c = \frac{2L}{\pi}\int_0^\infty dk\hbar\omega + \sum_{k=0}^{\infty}\hbar\omega - \frac{2L+a}{\pi}\int_0^\infty dk\hbar\omega, \tag{2.3}$$

donde $\omega = kc$ y la suma corre sobre $k = \frac{l\pi}{a}, (l = 0, 1, 2, ...)$. El primer término corresponde a la energía de punto cero en las regiones I y III, donde para L grande la suma sobre todos los modos es reemplazada por una integral. El segundo término da la energía de punto cero en la región II y el último es la energía de punto cero en ausencia de placas.

Observamos, sin embargo que la energía de Casimir será divergente debido a la suma y la integral infinita sobre k. Es aqui donde interviene la situación física real, sabemos que para frecuencias mayores que la frecuencia de plasma (ω_c) las

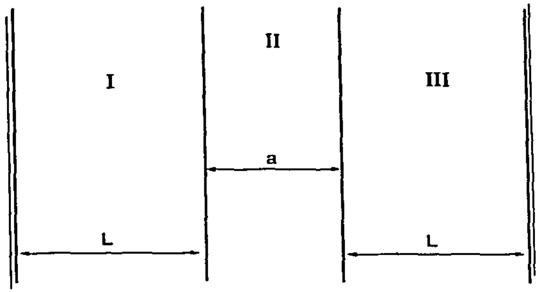

Figura 2.2: Placas metálicas separadas una distancia a.

placas se vuelven transparentes y por tanto no contribuyen a la fuerza de Casimir. Para obtener una renormalización de la energía de Casimir introducimos una función de corte definida por:

$$\chi(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega >> \omega_c \end{cases}, \tag{2.4}$$

luego entonces la energía de Casimir es:

$$E_c = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar\omega\chi(\omega) - \frac{a}{\pi}\int_0^{\infty} dk\hbar\omega\chi(\omega). \tag{2.5}$$

Si elegimos la función de corte $\chi(\omega)$ como una exponencial $\chi(\omega) = e^{(-\lambda\omega/c)}$ entonces, podemos calcular los valores de la suma y la integral, sustituyendo ω por $\frac{l\pi c}{a}$ se encuentra que:

$$\int_0^{\infty} dlle^{\frac{-\lambda l\pi}{a}} = \left(\frac{\lambda\pi}{a}\right)^{-2}, \tag{2.6}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} le^{\frac{-\lambda l\pi}{a}} &= -\frac{a}{\pi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{l=1}^{\infty} e^{\frac{-\lambda l\pi}{a}} \\ &= \frac{e^{\frac{-\lambda\pi}{a}}}{[1-e^{\frac{-\lambda\pi}{a}}]^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\sim \left(\frac{\lambda\pi}{a}\right)^{-2} - \frac{1}{12} + O(\lambda^2).$$

En el límite en que $\lambda \longrightarrow 0$ se recupera el caso ideal, la energía de Casimir es:

$$E_c = -\frac{\hbar c\pi}{12a}, \tag{2.8}$$

resultando finalmente la siguiente fuerza atractiva:

$$F_c = \frac{\hbar c\pi}{12a^2}. \tag{2.9}$$

Hay que mencionar que la diferencia entre las expresiones (2.9) y (1.1) se debe a que en el caso de la última deducción se consideran sólo vectores de onda perpendiculares a las interfaces.

2.2.2. Cuantización del campo electromagnético en presencia de dieléctricos

Abordemos ahora el problema del efecto Casimir para dos placas de ancho finito en el caso en que hay dieléctricos presentes. Planteamos el problema en 3 dimensiones, sin embargo, posteriormente lo reduciremos a una dimensión. En ausencia de fuentes las ecuaciones de Maxwell en presencia de un medio dieléctrico toman la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0, \tag{2.10}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{2.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.12}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \tag{2.13}$$

Suponiendo que las relaciones materiales son lineales es decir: $\mathbf{D} = \epsilon(r)\mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ y tomando la norma $\Phi = 0$ y $\nabla \cdot (\epsilon(r)\mathbf{A}) = 0$, además de:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{2.15}$$

que al ser substituidas en las ecuaciones de Maxwell (2.10),(2.11),(2.12) y (2.13) resultan en:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \tag{2.16}$$

cuya solución puede expresarse en la siguiente forma:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} c[\frac{2\pi\hbar}{\omega_\mu}]^{1/2}[\beta_\mu(t)\mathbf{f}_\mu(\mathbf{r}) + \beta_\mu(t)^*\mathbf{f}_\mu(\mathbf{r})^*]. \tag{2.17}$$

El factor en el que aparece la dependencia temporal - espacial se escribe de esa manera por conveniencia para la cuantización futura y el parámetro μ puede tomar valores continuos o discretos. Las amplitudes $\beta_\mu(t)$ y las funciones $f_\mu(r)$ obedecen las ecuaciones:

$$\frac{\partial^2 \beta_\mu(t)}{\partial t^2} + \omega_\mu^2 \beta_\mu(t) = 0, \tag{2.18}$$

y

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{f}_\mu(\mathbf{r})) + \frac{\epsilon(\mathbf{r})\omega_\mu^2}{c^2}\mathbf{f}_\mu(\mathbf{r}) = 0, \tag{2.19}$$

con sus respectivas condiciones de frontera y con la condición de norma:

$$\nabla \cdot [\epsilon(r)\mathbf{f}_\mu(r)] = 0. \tag{2.20}$$

Las soluciones de las ecuaciones (2.18) y (2.19) forman un conjunto completo de soluciones en el espacio de las funciones que satisfacen la condición de norma (2.20). Estas soluciones al ser un conjunto completo de soluciones satisfacen las condiciones de ortonormalidad.

$$\int d^3r\epsilon(\mathbf{r})\mathbf{f}_\mu(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{\mu'}(\mathbf{r}) = \delta_{\mu\mu'}, \tag{2.21}$$

y

$$\int d^3r \nabla \times \mathbf{f}_\mu(\mathbf{r}) \cdot \nabla \times \mathbf{f}_{\mu'}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_m^2}{c^2}\delta_{\mu\mu'}. \tag{2.22}$$

El hamiltoniano expresado en términos de β_μ toma la forma:

$$H = \int \frac{d^3r}{8\pi}[\frac{\epsilon(\mathbf{r})\dot{\mathbf{A}}^2}{c^2} + (\nabla \times \mathbf{A})^2] = \frac{1}{2}\sum_{\mu}(\beta_\mu\beta_\mu^* + \beta_\mu^*\beta_\mu)\hbar\omega_\mu. \tag{2.23}$$

La cuantización se hace de la misma manera que en el caso del espacio libre. Las amplitudes clásicas β_μ y β_μ^* son reemplazadas por los operadores de creación y aniquilación b_μ y $b_\mu^\dagger$ [1] que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[b_\mu, b_{\mu'}^\dagger] = \delta_{\mu\mu'}, \tag{2.24}$$

[1] b y $b^\dagger$ son operadores para la creación de fotones virtuales y son distintos que los operadores a y $a^\dagger$ para los fotones libres.

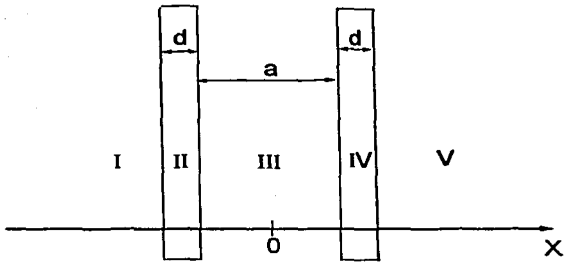

Figura 2.3: Configuración de las placas dieléctricas.

$$[b_\mu, b_{\mu'}] = 0. \tag{2.25}$$

La evolución temporal de los operadores de creación y aniquilación está dada por:

$$\dot{b}_\mu = \frac{1}{i\hbar}[b_\mu, H] = -i\omega_\mu b_\mu. \tag{2.26}$$

El potencial vectorial se convierte en un operador, en una dimensión se puede escribir como:

$$\mathbf{A}(x,t) = \sum_\lambda \left[\int_0^\infty + \int_{-\infty}^0\right] dk \frac{1}{2\pi} c[\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}]^{1/2} \mathbf{e}_\lambda [b_{k\lambda} e^{-i\omega_k t} f_k(x) + b^\dagger_{k\lambda} e^{i\omega_k t} f^*_k(x)], \tag{2.27}$$

donde la primera integral representa las ondas que vienen de izquierda a derecha y la segunda las de derecha a izquierda. El parámetro $\lambda = 1, 2$ representa las dos posibles polarizaciones de las ondas. Aplicando ahora lo descrito arriba para resolver el problema con dos placas dieléctricas paralelas cada una de espesor d, separadas una distancia a en el espacio libre. El índice de refracción entre las placas se toma constante (n=1).

Para determinar totalmente el potencial vectorial $\mathbf{A}(x,t)$ necesitamos determinar completamente el operador de potencial vectorial por tanto tenemos que encontrar las $f_k(x)$ que en una dimensión satisfacen la ecuación: .

$$\frac{d^2 f_k(x)}{dx^2} + \frac{\omega_k \epsilon(x)}{c^2} f_k(x) = 0, \tag{2.28}$$

donde $\epsilon(x)$ es una función constante por tramos. Para la configuración de placas dieléctricas (fig. 2.3) tenemos:

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-\infty, -a/2 - d] \\ \epsilon & x \in [-a/2 - d, -a/2] \\ 1 & x \in [-a/2, a/2] \\ \epsilon & x \in [a/2, a/2 + d] \\ 1 & x \in [a/2 + d, \infty] \end{cases} . \tag{2.29}$$

La solución de la ec (2.28) para la función de modos en cada región es:

$$f_k(x) = \begin{cases} k > 0 & k < 0 \\ I: e^{ikx} + R_k e^{-ikx} & T_k^* e^{ikx} \\ II: A_k e^{iknx} + B_k e^{-iknx} & E_k^* e^{iknx} + F_k^* e^{-iknx} \\ III: C_k e^{ikx} + D_k e^{-ikx} & C_k^* e^{ikx} + D_k^* e^{-ikx} \\ IV: E_k e^{iknx} + F_k e^{-iknx} & A_k^* e^{iknx} + B_k^* e^{-iknx} \\ V: T_k e^{ikx} & e^{ikx} + R_k^* e^{-ikx} \end{cases} , \tag{2.30}$$

donde $n = \sqrt{\epsilon}$ es el índice de refracción. Los coeficientes $R_k, T_k, A_k, B_k, C_k, D_k, E_k$ y F_k se obtienen de las condiciones de continuidad de las $f_k(x)$ y sus derivadas en las fronteras obteniéndose:

$$\begin{aligned} R_k &= \left[r + \frac{t^2 r e^{2ika}}{1 - r^2 e^{2ika}} \right] e^{-ik(a+2d)}, \\ A_k &= \frac{t(1 + r r_d e^{2ika})}{t_d(1 - r^2 e^{2ika})} e^{-ik[(a/2)+d]} e^{ikn/2}, \\ B_k &= \frac{t(r_d + r e^{2ika})}{t_d(1 - r^2 e^{2ika})} e^{2ika} e^{-ik[(a/2)+d]} e^{-ikn/2}, \\ C_k &= \frac{t e^{-ikd}}{1 - r^2 e^{2ika}}, \\ D_k &= \frac{t e^{-ikd}}{1 - r^2 e^{2ika}}, \\ E_k &= \frac{t^2}{(1 - r^2 e^{2ika}) t_d} e^{ik[(a/2)-d]} e^{-ikn[(a/2)+d]}, \\ F_k &= \frac{t^2 r_d}{(1 - r^2 e^{2ika}) t_d} e^{ik[(a/2)-d]} e^{-ikn[(a/2)+d]}, \\ T_k &= \frac{t^2 e^{-2ikd}}{1 - r^2 e^{2ika}}, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión para una placa:

$$r = \frac{r_d(e^{2iknd} - 1)}{1 - r_d^2 e^{2iknd}},$$

$$t = \frac{4n}{(n+1)^2} \frac{r_d e^{iknd}}{1 - r_d^2 e^{2iknd}}, \tag{2.32}$$

y donde r_d y t_d son las ecuaciones de Fresnel para incidencia normal:

$$r_d = \frac{n-1}{n+1},$$

$$t_d = \frac{2n}{n+1}. \tag{2.33}$$

Una vez conocidas las funciones de modo y en consecuencia el potencial vectorial se construye el tensor de energía momento como se muestra a continuación.

2.2.3. Expresión Clásica para la Presión de Radiación

Con la expresión explícita de las funciones de modo , podemos entonces calcular la fuerza de Casimir. En este caso derivaremos la fuerza como un efecto de la presión de radiación de vacío. Veamos pues el problema de la presión de radiación en electrodinámica clásica. Los primeros resultados conectados con este efecto mecánico de la luz se deben a Maxwell quien en 1873 predijo que la luz ejerce una presión sobre cualquier medio material proporcional a la densidad de energía de la onda, en particular proporcional a $1+R$, donde R es el coeficiente de reflexión. Maxwell también obtuvo una ley de conservación para un sistema compuesto del campo electromagnético y partículas libres:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = (\rho \mathbf{E} + j \times \mathbf{B}), \tag{2.34}$$

donde $\mathbf{g} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B}/4\pi c)$ es la densidad de momento de campo electromagnético, $f_v = \rho \mathbf{E} + j \times \mathbf{B}$ es la fuerza electromagnética por unidad de volumen y:

$$T^{ij} = -\frac{1}{8\pi}[2E^i E^j + 2B^i B^j - (E^2 + B^2)\delta ij], \tag{2.35}$$

es el tensor de esfuerzos de Maxwell, cuyas componentes dan el flujo de densidad de momento.

En el caso estático donde el momento del campo electromagnético incidente sobre nuestro sistema no cambia, la fuerza por unidad de área es $F = \int \nabla \cdot T dV$ de donde:

$$F^i = -\int T^{ij} n^j dS. \tag{2.36}$$

En nuestro caso la presión sobre las placas paralelas es la diferencia entre las componentes T_{zz} del tensor de Maxwell en la región externa a las placas y entre las placas. Calculada sobre la superficie es decir :

$$F = T_{zz}(x = \frac{-a}{2} - d) - T_{zz}(x = \frac{-a}{2}). \tag{2.37}$$

Para el caso unidimensional T_{zz} es igual a la densidad de energía:

$$T_{zz} = T_{00}(x) = \frac{1}{8\pi}[\mathbf{E}^2(x) + \mathbf{B}^2(x)]. \tag{2.38}$$

2.2.4. Fuerza de Casimir para placas dieléctricas

La expresión para la fuerza de Casimir se obtiene de reemplazar los campos clásicos por los operadores cuánticos y calcular el valor esperado de la energía de vacío. Por supuesto que el valor de T_{zz} será divergente, sin embargo la diferencia (2.37) después de una apropiada renormalización, resultará finita. El proceso llevado a cabo nos proporciona una idea más sencilla de el por qué de la fuerza atractiva entre las placas. Los modos de campo electromagnético son discretos entre las placas y continuos en las regiones de afuera. La densidad de energía es por tanto mayor en el exterior que en el interior y por ende las placas son empujadas una hacia la otra.

Continuemos con el problema que nos habíamos planteado, necesitamos la energía de punto cero en las regiones I y III. Las expresiones para los campos magnético y eléctrico obtenidas de la Ec.(2.27) y de las relaciones (2.14) y (2.15) son:

$$\mathbf{E}(x) = \sum_{\lambda} \int_0^{\infty} dk \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}\right)^{1/2} e_{\lambda}[b_{k\lambda} i\omega_k e^{-i\omega_k t}(e^{ikx} + R_k e^{-ikx}) + H.c.]$$

$$+ \sum_{\lambda} \int_{-\infty}^{0} dk \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}\right)^{1/2} e_{\lambda}[b_{k\lambda} i\omega_k e^{-i\omega_k t} e^{-ikx} T_k^* + H.c.], \tag{2.39}$$

$$\mathbf{B}(x) = \int_0^{\infty} dk \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}\right) e_2[b_{k1} e^{-i\omega_k t}(ike^{ikx} - ikR_k e^{-ikx}) + H.c]$$

$$+ \int_0^{\infty} dk \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}\right) e_1[b_{k2} e^{-i\omega_k t}(-ike^{ikx} + ikR_k e^{-ikx}) + H.c.]$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} dk \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}\right) e_2[b_{k1} e^{-i\omega_k t} ike^{ikx} T_k^* + H.c.] \tag{2.40}$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} dk \frac{1}{2\pi} c \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_k}\right) e_1[b_{k2} e^{-i\omega_k t}(-ik) e^{ikx} T_k^* + H.c.],$$

luego el valor esperado de la energía de punto cero en la región I es:

$$< \Omega \mid T \mid \Omega >_I = \frac{1}{2}\sum_\lambda \int_0^\infty dk(1+ \mid R_k \mid^2)\hbar\omega_k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_\lambda \int_{-\infty}^0 dk\frac{1}{2\pi} \mid T_k^* \mid^2 \hbar\omega_k, \qquad (2.41)$$

donde $\mid \Omega >$ es el estado de vacío y satisface que $b_{\kappa\lambda} \mid \Omega >= 0$. Tomando en cuenta que $T_k^* = T_{-k}$ y $\mid R_k \mid^2 + \mid T_k \mid^2 = 1$ podemos transformar (2.41) en:

$$< \Omega \mid T_{00} \mid \Omega >_I = \frac{1}{2}\sum_\lambda \int_0^\infty dk\frac{\hbar\omega_k}{2\pi}[1+ \mid R_k \mid^2 + \mid T_k \mid^2]$$

$$= 2\hbar c \int_0^\infty dk\frac{k}{2\pi}, \qquad (2.42)$$

Similarmente para la región entre las placas :

$$< \Omega \mid T_{00} \mid \Omega >_{III} = \sum_\lambda \int_0^\infty dk\frac{\hbar\omega_k}{2\pi}(\mid C_k \mid^2 + \mid D_k \mid^2)$$

$$= 2\hbar c \int_0^\infty dk\frac{k}{2\pi}(\mid C_k \mid^2 + \mid D_k \mid^2). \qquad (2.43)$$

Finalmente la expresión para la fuerza de Casimir sobre cada una de las placas es:

$$F_c = < \Omega \mid T_{00} \mid \Omega >_I - < \Omega \mid T_{00} \mid \Omega >_{III}$$

$$F_c = \frac{\hbar c}{\pi} \int_0^\infty dk\frac{k}{2\pi}(1 - (\mid C_k \mid^2 + \mid D_k \mid^2)), \qquad (2.44)$$

usando la forma explicita de los coeficientes C_k y D_k se obtiene:

$$F_c = \frac{\hbar c}{\pi} \int_0^\infty dk \left[1 - \frac{1- \mid r \mid^4}{\mid 1 - r^2 e^{2ika} \mid^2}\right] k. \qquad (2.45)$$

Esta expresión es infinita, sin embargo en el caso de placas metálicas puede ser renormalizada usando una función de corte. La expresión entre los brackets oscila rápidamente y esta determinada por dos frecuencias características; una conectada con las resonancias de el coeficiente r y determinada por el espesor efectivo nd y la otra contectada con las resonancias en el espacio entre las placas determinada por la distancia a (Fig. 2.3). Si $d >> a$ (es decir cuando las placas son muy gruesas ó cuando las separación entre las placas es pequeña) las oscilaciones de r son mucho más rápidas y entonces podemos reemplazar r por su valor promedio $-r_d$. Después de hacer el cambio de variable $u = 2\kappa a$ tenemos:

$$F_c = \frac{\hbar c}{4\pi a^2}\int_0^\infty du f(u) u e^{-\lambda u}, \tag{2.46}$$

donde

$$f(u) = 1 - \frac{1-r_d^4}{\mid 1 - r_d^2 e^{iu}\mid^2} = 1 - \frac{1-r_d^4}{1+r_d^4-2r_d^2 cosu}. \tag{2.47}$$

Evaluemos la fuerza de Casimir en el caso en que las placas son metálicas, es decir para $r_d \to 1$ (Ecs.(2.33)). El segundo término en la Ec. (2.47) es no cero solo para $u_n = 2\pi n, n = 0, 1, 2, ...$ Para u cercana a las resonancias podemos escribir este término asi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{r_d\to 1}\frac{1-r_d^4}{1+r_d^4-2r_d^2 cosu} \approx \lim_{r_d\to 1}\frac{1-r_d^4}{1+r_d^4-2r_d^2[1-\frac{1}{2}(u-u_n)^2]}\\
&= \lim_{r_d\to 1}\frac{1+r_d^2}{r_d}\frac{(1-r_d^2)/r_d)}{(1-r_d^2)^2/r_d^2+(u-u_n)^2} = 2\pi\delta(u-u_n).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

En este límite la fuerza de Casimir se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
F_c &= \frac{\hbar c}{4\pi a^2}\int_0^\infty du\left[1 - 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\delta(u-u_n)\right] u e^{-\lambda u}\\
&= \frac{\hbar c}{4a^2}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du u e^{-\lambda u} - 2\sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-\lambda u n}\right]\\
&= \frac{\hbar c\pi}{a^2}\left[\int_0^\infty dn n e^{-\lambda n} - \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda n}\right],
\end{aligned} \tag{2.49}$$

cuya estructura es la misma que en la expresión para las placas metálicas (2.5). Usando los resultados anteriores obtenemos:

$$F_c = \frac{\hbar c\pi}{12a^2}. \tag{2.50}$$

2.3. Efecto Casimir en medios disipativos y dispersivos [11]

En la sección anterior se consideran medios dieléctricos, sin embargo no se toma en cuenta características muy importantes acerca de este tipo de medios entre las que podemos mencionar que en general son no lineales, inhomogeneos, dispersivos y disipativos. Un problema fundamental es cómo tomar en cuenta estas características, cuestión en general muy difícil. En esta sección se pretende abordar este problema tomando en cuenta que los medios dieléctricos son dispersivos y disipativos. Para tomar en cuenta esto consideramos que el medio esta compuesto de átomos modelados como osciladores armónicos interactuando con un baño térmico (reservorio). Las posiciones y los momentos de los átomos se describen por los operadores $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ que satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[r_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}')] = \frac{i\hbar}{\eta}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta_{ij}, \tag{2.51}$$

donde η es la densidad del número de átomos. El reservorio representa al sistema que absorbe energía (por ejemplo, fonones) y puede ser descrito con la ayuda una constante de amortiguamiento γ y de fuerzas de Langevin $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ que son fuerzas estocásticas [21] . El sistema campo electromagnético más átomos interactuando con un baño térmico queda descrito en la representación de Heisenberg por:

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{m}, \tag{2.52}$$

$$\dot{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, t) = -m\omega_o^2\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) - \gamma m\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \tag{2.53}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\frac{\partial\mathbf{P}_\perp(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \tag{2.54}$$

Este tipo de modelo de interración de osciladores con un baño térmico ha sido discutido en [14]. El operador $\mathbf{P}_\perp(\mathbf{x}, t)$ la parte transversal de la polarización $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)$ del medio es:

$$P_\perp(\mathbf{x}, t) = \eta e r(\perp(\mathbf{x}, t). \tag{2.55}$$

El campo eléctrico y magnético puede obtenerse a partir de las relaciones (2.14) y (2.15) con el potencial vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$.

Las fuerzas de Langevin satisfacen las relaciones de conmutación:

$$[F_i(\mathbf{x}, t), F_j(\mathbf{x}', t')] = \frac{2m\gamma}{\eta}i\hbar\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\frac{\partial}{\partial t}\delta(t-t'), \tag{2.56}$$

lo que garantiza que la relación de conmutación (2.51) se mantenga. Las fuerzas de Langevin satisfacen además:

$$< \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) >= 0, \tag{2.57}$$

$$< F_i(\mathbf{x}, t)F_j(\mathbf{x}', t') >= \frac{\gamma m\hbar}{\eta\pi}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\int_0^\infty d\omega\omega e^{-i\omega(t-t')}, \tag{2.58}$$

De las ecuaciones (2.57) y (2.58) se sigue:

$$< F_i(\mathbf{x}_1, \omega_1)F_j(\mathbf{x}_2, \omega_2) >= \frac{4\pi m\gamma\hbar}{\eta}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)$$

$$\times\int_0^\infty d\omega\omega\delta(\omega-\omega_1)\times\delta(\omega+\omega_2), \tag{2.59}$$

de donde se obtiene:

$$< F_i(\mathbf{x}_1,\omega_1), F_j^{\dagger}(\mathbf{x}_2,\omega_2) >= \frac{4\pi m\gamma\hbar}{\eta}\delta_{ij}\delta(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\omega_1\delta(\omega_1-\omega_2). \qquad (2.60)$$

Como en el caso de medio no absorbente, la fuerza de Casimir para la configuración de la Fig.(5) es la diferencia entre las componentes T_{zz} del tensor de esfuerzos de Maxwell en las regiones I y III, es decir, la diferencia de la densidad de energía $e(x) =< (1/8\pi)[\mathbf{E}^2+\mathbf{B}^2] > endichasregiones:$

$$F_c = e^I(x = \frac{-a}{2} - d) - e^{III}(x = \frac{-a}{2}). \qquad (2.61)$$

El cálculo se hace al igual que en la otra sección en una dimensión, lo que significa reestringirlo a modos con vector de onda perpendicular a la superficie de las placas como mencionamos anteriormente. Esto nos permitirá poder hacer la comparación con los resultados obtenidos anteriormente. Asi pués tomando la transformada de Laplace de las ecuaciones (2.52), (2.53), (2.54) y eliminando las variables de momento y posición se obtiene:

$$c^2\frac{\partial^2 A(x,s)}{\partial x^2} - s^2[1+\frac{4\pi e^2\eta}{m}\frac{1}{s^2+\omega_o^2+\gamma s}]A(x,s) =$$

$$sA(x,0)+\dot{A}(x,0)-\frac{4\pi ec\eta}{m}\frac{sF(x,s)}{s^2+\omega_o^2+\gamma s}. \qquad (2.62)$$

La ecuación en este caso se ve modificada, a diferencia del caso en que no se toma en cuenta la disipación, por la presencia de la parte inhomogénea de la fuerza de Langevin y de la presencia de un índice de refracción complejo:

$$n(s) = 1+\frac{4\pi e^2\eta}{m}\frac{1}{s^2+\omega_o^2+\gamma s}. \qquad (2.63)$$

Buscamos una solución de la Ec.(2.62), con las condiciones iniciales:

$$\mathbf{A}(x,0) = \sum_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dkc\left(\frac{\hbar}{\omega_\kappa}\right)\mathbf{e}_\lambda[b_{\kappa\lambda}(0)e^{i\kappa x}+b_{\kappa\lambda}(0)e^{-i\kappa x}],$$

$$\dot{\mathbf{A}}(x,0) = \sum_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dkc\left(\frac{\hbar}{\omega_\kappa}\right)\mathbf{e}_\lambda[-i\omega_\kappa b_{\kappa\lambda}(0)e^{i\kappa x}+i\omega_\kappa b_{\kappa\lambda}(0)e^{-i\kappa x}],$$

$$\omega_\kappa = c\mid\kappa\mid, \qquad (2.64)$$

$$< b_{\kappa\lambda}(0) >=< b_{\kappa\lambda}^{\dagger} >=< b_{\kappa'\lambda'}^{\dagger}(0)b_{\kappa\lambda}(0) >= 0,$$

$$< b_{\kappa\lambda}(0) b_{\kappa'\lambda'}(0) >= \delta(\kappa - \kappa')\delta_{\lambda\lambda'}.$$

La solución de la ecuación (2.62) tiene la forma:

$$\mathbf{A}(x,t) = \mathbf{A}_V(x,t) + \mathbf{A}_L(x,t), \tag{2.65}$$

donde se distinguen dos contribuciones: $\mathbf{A}_L(x,t)$, que depende linealmente de las fuerzas de Langevin y que es la solución de la ecuación inhomogénea (2.62), y $\mathbf{A}_V(x,t)$ formada por la modificación de los modos de vacío y que es la solución particular de la ecuación homogénea asociada a la Ec.(2.62). De la misma manera hay dos partes de la Fuerza de Casimir:

$$F_C = F_V + F_L, \tag{2.66}$$

donde F_V y F_L son respectivamente las contribuciones de el vacío y de las fuerzas de Langevin.

2.3.1. Contribución del Vacío

La solución para $A_V(x,t)$ tiene la forma:

$$\mathbf{A}_V(x,t) = \sum_\lambda \left[\int_0^\infty + \int_{-\infty}^0\right] dkc \left[\frac{\hbar}{\omega_\kappa}\right]^{1/2}$$

$$\times \mathbf{e}_\lambda [b_{\kappa\lambda}(0) e^{-i\omega_\kappa t} f_\kappa(x) + b^+_{\kappa\lambda}(0) e^{i\omega_\kappa t} f^*_\kappa(x)]. \tag{2.67}$$

La primera integral corresponde a las ondas de izquierda a derecha y la segunda integral las ondas de derecha a izquierda como en el caso no disipativo. Las funciones de modo $f_k(x)$ satisfacen las mismas ecuaciones que en el caso de medios no absorbentes (2.28) por lo tanto se obtienen los mismos coeficientes R_κ, C_κ,D_κ y T_κ que en la sección (2.2.2), expresados en las ecuaciones (2.31) y (2.32). La diferencia consiste en que en este caso el índice de refracción no es constante sino que ahora esta dado por:

$$n^2(\omega_\kappa) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega_k^2 - i\gamma\omega_k}, \tag{2.68}$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma:

$$\omega_p = \frac{4\pi e^2 \eta}{m}. \tag{2.69}$$

En este caso debido a la disipación las relaciones $\mid R_\kappa \mid^2 + \mid T_\kappa \mid^2 = 1$ y $\mid r \mid^2 + \mid t \mid^2 = 1$ no son válidas. Por lo tanto no obtenemos las mismas contribuciones de la energía de vacío en las regiones I y III sino que encontramos:

$$e_V^I = \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi} \hbar\omega_\kappa (1 + \mid R_\kappa \mid^2) + \int_{-\infty}^0 \frac{d\kappa}{2\pi} \hbar\omega_\kappa \mid T_{-\kappa} \mid^2$$

$$= \int_0^\infty dk \frac{\hbar\omega_k}{2\pi}[1+ \mid R_k \mid^2 + \mid T_k \mid^2], \qquad (2.70)$$

$$e_V^{III} = \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi}\hbar\omega_\kappa(\mid C_\kappa \mid^2 + \mid D_\kappa \mid^2) + \int_{-\infty}^0 \frac{d\kappa}{2\pi}\hbar\omega_\kappa(\mid C_{-\kappa} \mid^2 + \mid D_{-\kappa} \mid^2)$$

$$= \int_0^\infty dk \frac{\hbar\omega_k}{2\pi} 2(\mid C_k \mid^2 + \mid D_k \mid^2). \qquad (2.71)$$

Como resultado la contribución de la modificación de los modos iniciales de vacio a la fuerza de Casimir toma la forma:

$$F_c = \int_0^\infty dk \frac{\hbar\omega_k}{2\pi}[1+ \mid R_k \mid^2 + \mid T_k \mid^2 - 2(\mid C_k \mid^2 + \mid D_k \mid^2), \qquad (2.72)$$

en el caso en el que el espesor de las placas es muy grande ($d \to \infty$). Tenemos que $\mid T_\kappa \mid^2 \to 0$, $\mid C_\kappa \mid^2 \to 0$ y $\mid D_\kappa \mid^2 \to 0$ es decir toda la energía es absorbida en la primera placa por lo tanto:

$$F_v^{d\to\infty} = \int_0^\infty dk \frac{\hbar\omega_k}{2\pi}[1+ \mid R_k \mid^2]. \qquad (2.73)$$

2.3.2. Contribución de las Fuerzas de Langevin

A cualquier tiempo la solución de la Ec. (2.62) es:

$$\mathbf{A}_L(x,t) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\mathbf{A}_L(x,\kappa)e^{-i\omega t}, \qquad (2.74)$$

en las regiones I y III que son las de nuestro interés se tiene:

$$\mathbf{A}_L^I(x,\kappa) = \mathbf{W}_1(\kappa)e^{-i\kappa x}, \qquad (2.75)$$

$$\mathbf{A}_L^{III}(x,\kappa) = \mathbf{W}_2(\kappa)e^{ikx} + \mathbf{W}_3(\kappa)e^{-i\kappa x}, \qquad (2.76)$$

donde $\mathbf{W}_1(\kappa)$, $\mathbf{W}_2(\kappa)$ y $\mathbf{W}_3(\kappa)$ son:

$$\mathbf{W}_1(\kappa) = W(\kappa)e^{\imath\kappa nd}e^{-i\kappa(a+d)}[\mathbf{K}(1 + rr_n e^2 i\kappa a) +$$

$$+\mathbf{L}(r_n + re^{2i\kappa a}) + \mathbf{M}te^{i\kappa(a-nd)} + \mathbf{N}tr_n e^{i\kappa(a+nd)}].$$

$$\mathbf{W}_2(\kappa) = W(\kappa)[\mathbf{K}r_n e^{2i\kappa nd} + \mathbf{L} + \mathbf{M}re^{i\kappa a} + \mathbf{N}rr_n e^{i\kappa(a+2nd)}],$$

$$\mathbf{W}_3(\kappa) = W(\kappa)[\mathbf{K}rr_n e^{i\kappa(a+2nd)} + \mathbf{L}re^{i\kappa a} + \mathbf{M} + \mathbf{N}r_n e^{2i\kappa nd}],$$

$$\mathbf{K} = e^{i\kappa na/2}\int_{-a/2-d}^{-a/2} \mathbf{G}(x,\omega)e^{i\kappa nx}dx,$$

$$\mathbf{L} = e^{-i\kappa na/2}\int_{-a/2-d}^{-a/2} \mathbf{G}(x,\omega)e^{-i\kappa nx}dx,$$

$$\mathbf{M} = e^{-i\kappa na/2}\int_{a/2}^{a/2+d} \mathbf{G}(x,\omega)e^{i\kappa nx}dx, \tag{2.77}$$

$$\mathbf{N} = e^{i\kappa na/2}\int_{a/2}^{a/2+d} \mathbf{G}(x,\omega)e^{-i\kappa nx}dx,$$

$$\mathbf{G}(x,\omega) = \frac{4\pi e\eta}{m}\frac{\mathbf{F}(x,\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega},$$

$$W(\kappa) = \frac{we^{i\kappa a/2}}{2n(1 - r^2e^{2i\kappa a}},$$

$$w = \frac{2n/(n+1)}{1 + r_n e^{2i\kappa nd}},$$

$$r_n = \frac{n-1}{n+1},$$

además de que r y t son los coeficientes de reflexión y transmisión para una sola placa Ecs.(2.32) y $n^2 = n^2(\omega)$ Ec.(2.68).

Las expresiones (2.77) junto con las ecuaciones que nos proporcionan las correlaciones de la Fuerza de Langevin (2.59) y (2.60) son suficientes para obtener el valor promedio de la densidad de energía de campo electromagnético debido a las fuerzas de Langevin. Siguiendo la siguiente notación:

$$n = n_1 + in_2,$$

$$e^{2ikn_1d} = e^{iz_1}, \tag{2.78}$$

$$e^{2kn_2d} = e^{z_2}.$$

La contribución de las fuerzas de Langevin a la densidad de energía en la región I puede escribirse como:

$$e_L^I = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k \frac{|\omega|^2 e^{-z_2}}{|n|^2|1-r^2e^{2ika}|^2}\{n_1(e^{z_2}-1)\mid 1+rr_ne^{2ika}\mid^2 + n_1(1-e^{-z_2})\mid r_n+re^{2ika}\mid^2$$

$$\times[in_2(e^{-iz_1}-1)(1+rr_ne^{2ika})(r_n^*+r^*e^{-2ika})+c.c.] + n_1\mid t\mid^2(e^{z_2}-1)$$

$$+n_1\mid tr_n\mid^2(1-e^{-z_2}) + [in_2\mid t\mid^2 r_n^*(e^{-iz_1}-1)+c.c.]\}, \tag{2.79}$$

para la región entre las placas región III tenemos:

$$e_L^{III} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k \frac{2(1+\mid r\mid^2)\mid\omega\mid^2}{|n|^2|1-r^2e^{2ika}|^2}\{n_1\mid r_n\mid^2(1-e^{-z_2})e^{-z_2}$$

$$+n_1(1-e^{-z_2}) + [in_2(e^{-z_2}-e^{2iknd})r_n + c.c.]\}, \tag{2.80}$$

La contribución de las fuerzas de Langevin sobre la fuerza de Casimir es $F_L = e_L^I + e_L^{III}$.

2.3.3. Fuerza de Casimir en el Caso $d \to \infty$

En esta sección vamos a mostrar que el modelo propuesto nos proporciona en límite $d \to \infty$ los mismos resultados que en el caso no disipativo y no dispersivo. La presencia del factor $e^{-2\kappa n_2 d}$ y de t que es proporcional a $e^{-2\kappa n_2 d}$ nos permite simplificar las Ecs.(2.79) y (2.80) encontrándose:

$$F_V(d\to\infty) = e_V^I(d\to\infty) = \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi}\hbar\omega_\kappa(1+\mid r_n\mid^2), \tag{2.81}$$

$$e_V^{III}(d\to\infty) = 0, \tag{2.82}$$

$$e_L^I(d\to\infty)\lim_{d\to\infty}\int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi}\hbar\omega_\kappa \frac{\mid\omega\mid^2 n_1}{|n|^2|1-r^2e^{2i\kappa a}|^2}$$

$$\times\mid 1+rr_ne^{2i\kappa a}\mid^2$$

$$= \int_0^\infty \frac{d\kappa}{2\pi}\hbar\omega_\kappa \mid \frac{2}{n+1} \mid^2 n_1$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k (1- \mid r_n \mid^2), \tag{2.83}$$

$$e_L^{III}(d \to \infty) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k \frac{2(1- \mid r_n \mid^4)}{\mid 1 - r_n^2 e^{2ika} \mid^2}, \tag{2.84}$$

en donde las dos últimas ecuaciones se simplifican con la identidad $\mid n+1 \mid^2 - \mid n-1 \mid^2 = 4n_1$.

El total de la densidad de energía en la región I es igual a:

$$e^I = e_V^I + e_L^I = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} 2\hbar\omega_k \tag{2.85}$$

lo que es exactamente la densidad energía del espacio libre.

Aunque ambas contribuciones de la fuerza de Casimir son infinitas, la suma $(F_V + F_L)$ dan un resultado finito:

$$F_C = F_V + F_L = (e_V^I - e_V^{III}) + (e_L^I - e_L^{III})$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k 2 \left[1 - \frac{(1- \mid r_n \mid^4)}{\mid 1 - r_n^2 e^{2ika} \mid^2}\right]. \tag{2.86}$$

Comparando con Ec.(2.45), observamos que obtenemos la misma estructura que en caso en un medio no absorbente y no disipativo. La expresión(2.86) tiene la ventaja de que no es necesario usar funciones de corte puesto que debido a la absorción del medio el resultado que se obtiene del cálculo de la fuerza de Casimir es finito. Notamos que la Ec. (2.86) es equivalente a:

$$F_C = -\frac{2\hbar}{\pi c} Re \int_0^\infty d\omega\omega \frac{r_n^2 e^{2i(\omega/c)a}}{1 - r_n^2 e^{2i(\omega/c)a}}. \tag{2.87}$$

Ahora podemos reemplazar la integral sobre el eje real por la integral sobre la parte positiva del eje imaginario (el integrando no tiene singularidades en la parte superior del plano). Obtenemos entonces:

$$F_C = -\frac{2\hbar}{\pi c} Re \int_{i0}^{i\infty} d\omega\omega \frac{r_n^2 e^{2i(\omega/c)a}}{1 - r_n^2 e^{2i(\omega/c)a}}, \tag{2.88}$$

Haciendo el cambio de variable $\omega = is$ la Ec.(2.86) es equivalente a:

$$F_c = \frac{2\hbar}{\pi c} \int_0^\infty dss \frac{r_n^2(is)e^{-(2sa/c)}}{1 - r_n^2(is)e^{-(2sa/c)}}. \tag{2.89}$$

Teniéndola en esta forma es sencillo verificar que nos da el mismo resultado obtenido anteriormente Ec.(2.50). Para distancias largas ($a \geq c/\omega_0$) (donde ω_0 es una frecuencia característica del medio) entre las placas la principal contribución a la fuerza de Casimir se debe a frecuencias pequeñas donde n es constante y podemos hacer la aproximación:

$$Fc \approx \frac{2\hbar}{\pi c} \int_0^\infty dss \frac{r_n^2(0) e^{-(2sa/c)}}{1 - r_n^2(0) e^{-(2sa/c)}}$$

$$= \frac{\hbar c}{2\pi a^2} r_n^2(0) \int_0^\infty d\xi \frac{\xi e^{-\xi}}{1 - r_n^2(0) e^{-\xi}}, \qquad (2.90)$$

la última ecuación puede ser evaluada usando la función Φ definida de la siguiente manera:

$$\Phi(z, s, v) = \sum_0^\infty (v + m)^{-s} z^m = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \frac{t^{s-1} e^{-vt}}{1 - ze^{-t}}. \qquad (2.91)$$

La expresión para la fuerza de Casimir toma la forma:

$$F_C \approx \frac{\hbar c}{2\pi a^2} r_n^2(0) \Phi(r_n^2(0), 2, 1)$$

$$= \frac{\hbar c}{2\pi a^2} r_n^2(0) \sum_{m=0}^\infty \frac{[r_n^2(0)]^m}{(1+m)^2}$$

$$= \frac{\hbar c}{2\pi a^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{r_n^{2m}}{m^2}. \qquad (2.92)$$

La suma que aparece es sencilla de evaluar puesto que es un resultado calculado por Euler. Se encuentra que en el caso de placas metálicas $r_n \to 1$ la fuerza de Casimir tiene la misma expresión de la Ec.(2.50) obtenida por otro método y en el que no se considera la disipación y absorción del medio.

2.3.4. Fuerza de Casimir Para un Espesor Finito de las Placas

En esta sección generalizaremos el resultado para la fuerza de Casimir en el caso en que las placas tienen un espesor cualquiera. Acordandonos de (2.71) la contribución de la energía de vacío en la región entre las placas puede escribirse usando explicitamente C_κ y D_κ como:

$$e_V^{III} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \hbar\omega_k \frac{2(1+ \mid r \mid^2) \mid t \mid^2}{\mid 1 - r^2 e^{2ika} \mid^2}. \qquad (2.93)$$

La contribución de la parte asociada a las fuerzas de Langevin en esa misma región a la densidad de energía Ec.(2.80) es equivalente a:

$$e_L^{III} = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k \frac{2(1+ \mid r \mid^2)}{\mid 1 - r^2 e^{2ika} \mid^2}(1- \mid r \mid^2 - \mid t \mid^2). \tag{2.94}$$

Tomando en cuenta que en la región de afuera de las placas (región I) la relación (2.85) es válida, encontramos finalmente que:

$$F_c = F_V + F_L = (e_V^I - e_V^{III}) + (e_L^I - e_L^{III})$$

$$= \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi}\hbar\omega_k 2\left[1 - \frac{(1- \mid r \mid^4)}{\mid 1 - r^2 e^{2ika} \mid^2}\right]. \tag{2.95}$$

Observamos que la expresión obtenida en el caso en el que el índice de refracción depende de la frecuencia donde se toma en cuenta la absorción y disipación debida al medio, tiene la misma forma que la Ec.(2.45) obtenida para el caso de índice de refracción constante . La diferencia se encuentra en que el caso en que el índice de refracción es constante se necesita introducir una función de corte que represente las características del medio, obteniéndose al hacer el cálculo una fuerza finita, mientras que en este caso el resultado del cálculo es finito ya que de manera natural $r(\omega_\kappa) \to 0$ cuando $\omega_\kappa \to \infty$. Otra diferencia significativa es la conceptual. Un índice de refracción real significa que no hay amortiguamiento de de los electrones que componen al medio y también que no hay fuerzas de Langevin. En la situación real el medio es dispersivo y disipativo, el índice de refracción es en general complejo y hay perdidas de energía. Acordándonos de la teoría cuántica, el amortiguamiento está acompañado de las fuerzas de Langevin. La presión de radiación del campo radiado debido a los átomos se suma a la presión de radiación debida a la modificacion de los modos de vacío.

2.4. Fuerza de Casimir para placas diélectricas con índices de refracción diferentes [9]

Consideramos una región en el espacio en la que se encuentran dos placas separadas un distancia a. Cada placa tiene un espesor determinado y una función diélectrica que denotamos como $\epsilon_i(\omega)$, donde el subíndice $i = 1, 2$ se refiere a la primera o segunda placa. La geometría del sistema se muestra en la Fig. 2.4. Por simplicidad restringiremos el cálculo a dos dimensiones (espacio-tiempo), es decir, los vectores de onda son siempre perpendiculares a las placas. Esto nos permitirá también hacer la comparación con los resultados anteriores.

El campo eléctrico y magnético $\Phi^{(E)}$ y $\Phi^{(B)}$ en la norma de Coulomb satisfacen la ecuación

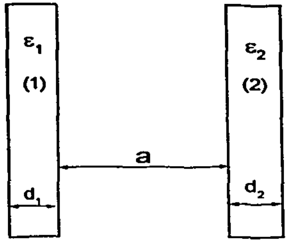

Figura 2.4: Geometría usada en el cálculo. Cada placa puede caracterizarse por su función dieléctrica.

$$\frac{\partial^2 \Phi^{(E,B)}}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi^{(E,B)}}{\partial t^2}, \tag{2.96}$$

donde las superíndices E y B se refieren a el campo eléctrico o magnético respectivamente. Las funciones de Green respectivas $G^{E,B}(x,x')$ asociadas con la Ec.(2.96) satisfacen la ecuación:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2\right) G^{(E,B)}_{\kappa^2}(x,x') = \delta(x - x'), \tag{2.97}$$

donde x y x'son puntos entre las placas. Las funciones de Green satisfacen las apropiadas condiciones de frontera en $x = 0$ y en $x = a$.

La solución de la Ec.(2.97) es:

$$G^{(E,B)}(x,x') = \frac{\Phi^{(E,B)}_{<}(x_<)\Phi^{(E,B)}_{>}(x_>)}{W^{(E,B)}(x)}, \tag{2.98}$$

donde $x_>(x_<)$ es la mayor(o menor) entre x y x'y el Wronskiano (W) esta dado por:

$$W^{(E,B)}(x) = \Phi^{(E,B)}_{<}(x)\frac{d\Phi^{(E,B)}_{>}(x)}{dx} - \frac{d\Phi^{(E,B)}_{<}(x)}{dx}\Phi^{(E,B)}_{>}(x). \tag{2.99}$$

La solución de las ecuaciones (2.96) en la región entre las placas es:

$$\Phi_{<}^{(E,B)}(x) = e^{-i\kappa x} + r_1 e^{i\kappa x},$$

$$\Phi_{>}^{(E,B)}(x) = e^{i\kappa(x-a))} + r_2 e^{-i\kappa(x-a)}, \tag{2.100}$$

donde r_1 y r_2 son en general coeficientes de refracción dependientes de la frecuencia. Con la función de Green para el campo eléctrico y magnético, la densidad local de estados entre las placas puede calcularse como [20]:

$$\rho_{\kappa^2} = -\frac{1}{2\pi} Im(G^E(x,x') + G^B(x,x')). \tag{2.101}$$

Substituyendo las Ecs. (2.100) y (2.98) en la ecuación anterior se obtiene la siguiente expresión para la densidad de estados:

$$\rho_{\kappa^2}(x) = \frac{1}{2\pi\kappa} \frac{1 - \mid r_1 r_2 \mid^2}{\mid 1 - r_1 r_2 e^{2i\kappa a} \mid^2}. \tag{2.102}$$

Ahora calcularemos la fuerza de Casimir como el flujo de momento entre las placas. Un fotón moviéndose perpendicularmente a las placas lleva un momento $\hbar\kappa$ y una velocidad c. El flujo de momento en una dirección dada es $\rho\hbar\omega$. En el estado base los fotones son generados debido a las fluctuaciones del vacío cuántico, además el campo se cuantiza como $\hbar\omega/2$. Entonces la fuerza por unidad de área debida a los fotones entre las placas es:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty \rho_{\kappa^2}(x) 2\kappa \frac{\hbar c\kappa}{2} d\kappa \\ &= \int_0^\infty d\kappa \frac{\hbar\kappa c}{2\pi} \frac{1 - \mid r_1 r_2 \mid^2}{\mid 1 - r_1 r_2 e^{2i\kappa a} \mid^2}. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Finalmente, la fuerza en la región externa a las placas tiene que ser substraída a la expresión anterior. En este caso la densidad de estados es la del vacío $(1/\pi)$, obtenida de la Ec.(2.101), por lo tanto la fuerza entre las placas es:

$$F = \int_0^\infty d\kappa \frac{\hbar\kappa c}{2\pi} \left(\frac{1 - \mid r_1 r_2 \mid^2}{\mid 1 - r_1 r_2 e^{2i\kappa a} \mid^2} - 1 \right). \tag{2.104}$$

En la derivación asumimos que los coeficientes r_1 y r_2 son en general dependientes de la frecuencia, como en el caso de medios aborsobentes y dispersivos.Observamos además que la expresión (2.104) es válida en el caso de en que las placas tienen el mismo coeficiente de refracción $r_1 = r_2$(placas del mismo material), obteniendose el mismo resultado que en secciones anteriores Ec.(2.45) y es también válida en el caso en que las placas tienen diferente índice de refracción $r_1 \neq r_2$, es decir, las placas pueden ser de materiales distintos.

Capítulo 3

Resultados y Análisis modificando la magnitud de la Fuerza de Casimir

En este capítulo se presentan los resultados de cálculos numéricos, mostrando como puede llegar a modificarse la fuerza de Casimir cambiando las propiedades estructurales(propiedades dieléctricas) y geométricas (grosor) de las placas que intervienen en el cálculo. Se estudia el caso en que las dos placas paralelas son dieléctricas ó metálicas (caso simétrico), además de hacerse un estudio detallado en el caso en que se tiene una placa metálica y la otra dieléctrica (caso asimétrico).

Presentamos el análisis de la dependencia funcional de la fuerza de Casimir Ec.(2.104) y Ec.(2.95) con el ancho de las placas, en particular estudiaremos el caso en que las placas son del mismo material, es decir, placas dieléctricas o metálicas y el caso en con placas de diferente material. Se presentan los resultados obtenidos de manera numérica [1].

En primer lugar debemos mencionar que en todas las gráficas que presentaremos se graficará la fuerza relativa de Casimir $F_r = \frac{F_C}{F_0}$, así todos los resultados serán comparados con $F_0 = \frac{\hbar c \pi}{12a^2}$. De esta manera el caso ideal corresponderá a $F_r = 1$. Debemos notar que F_r puede ser constante aun cuando la separación $a \rightarrow \infty$ si F_C y F_0 tienen la misma dependencia funcional. por otra parte, $F_r \rightarrow 0$ cuando $a \rightarrow 0$ para sistemas no ideales, la dependencia funcional cambia de $1/a^2 \rightarrow 1/a$, debido a la falta de efectos de retardo.

[1]El programa utilizado en los cálculos numéricos realizados se encuentra en el apéndice A.

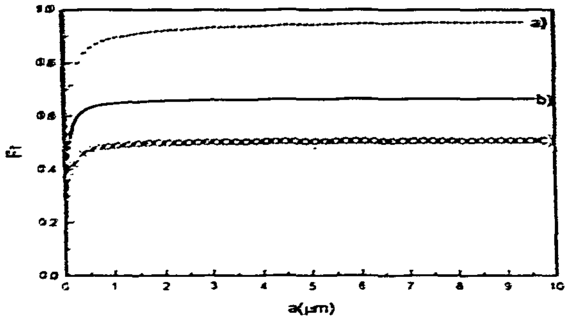

Figura 3.1: Fuerza relativa de Casimir F_r para dos placas hechas de magnesio como función de la separación entre placas a. En a) el ancho de cada una de las placas es $d = 0{,}5\mu m$, en b) es de $d = 0{,}02\mu m$ y en c) $d = 0{,}01\mu m$.

3.1. Configuración simétrica (placas del mismo material)

3.1.1. Placas metálicas

En primer lugar estudiaremos el caso en que las placas son metálicas. Las placas usadas en este caso son de magnesio (Mg). La función dieléctrica que describe al magnesio es:

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \tag{3.1}$$

que se obtiene a partir del modelo de Drude [2] . Para el magnesio, la frecuencia de plasma es $\omega_p = 1{,}6176 \times 10^{16} s^{-1}$ y el parámetro de amortiguamiento es $\gamma = 9{,}70 \times 10^{14} s^{-1}$ [19].

La gráfica mostrada en la figura 3.1 se obtiene de manera numérica como mencionamos anteriormente, usando la expresión (2.95) donde la integral es finita debido a que $r(\epsilon, \omega) \to 0$ cuando $\omega \to \infty$ y la integración se hace en términos de la variable $x = i\omega$. Debemos mencionar que se grafica F_r como función de la separación entre las placas.

[2] La teoría acerca de este modelo y del de Lorenz se encuentra en el apéndice B.

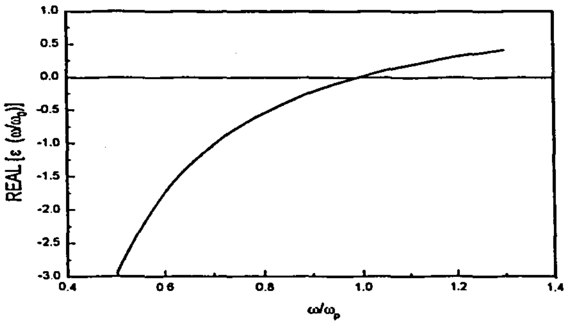

Figura 3.2: Parte real de la función dieléctrica del magnesio.

Observamos que existe una separación muy específica a_c donde hay un punto singular alrededor de él cual la fuerza se incrementa ó decrece significativamente.

Hagamos ahora un análisis más concienzudo para determinar cual es la región en la que la fuerza se incrementa y cual la región en la que la fuerza decrece. Con ese fin presentamos la gráfica (Fig. 3.2) de la parte real de la función dieléctrica del magnesio.

Vemos que la parte real de la función dieléctrica es negativa para $\omega/\omega_p < 1$, es decir, $\omega < \omega_p$. En esa región la reflectividad del material es alta. En el caso en que $\omega/\omega_p > 1$, que es cuando $\omega > \omega_p$, la curva toma valores positivos, por lo que la reflectividad es baja y el material transmitirá modos de campo electromagnético.

Ahora determinemos para qué valor se encuentra la separación crítica y cómo está ésta relacionada con la frecuencia de plasma del magnesio. Para encontrar ese valor presentamos la gráfica de la fuerza relativa de Casimir como función de la variable adimensional $a\omega_p/\pi c$ (Fig. 3.3).

Observamos que el punto singular se encuentra aproximadamente alrededor de 1, es decir, $a_c\omega_p/c\pi \approx 1$, entonces el valor crítico de la separación entre las placas es $a_c \approx c\pi/\omega_p$. Este hecho es de fundamental importancia debido a que nos permite explicar el hecho importantísimo de cómo es que la fuerza está relacionada con los modos de vacío entre las placas, los modos de vacío en las regiones externas a estas y la presión de radiación que estos modos ejercen sobre las placas.

Para los modos que caben entre las placas existen frecuencias características que estan relacionadas con la separación a de la siguiente manera:

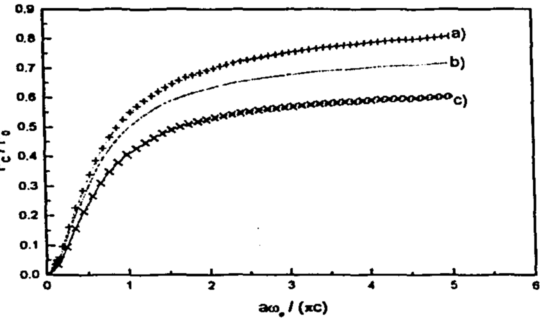

Figura 3.3: La fuerza relativa de Casimir es mostrada como función de la variable adimensional $a\omega_p/\pi c$. Cada una de las curvas corresponde a diferentes anchos de las placas para a) $d = 0{,}5\mu m$, para b) $d = 0{,}02\mu m$ y en el caso c) $d = 0{,}01\mu m$.

$$\omega = \kappa_n c \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{3.2}$$

donde $\kappa_n = \pi n/a$, asi pues entre las placas hay una cantidad discreta de modos. Esto corrobora la idea expresada en un capítulo precedente de cómo es que se produce la fuerza de Casimir. Los modos de campo electromagnético son discretos entre las placas y continuos en las regiones exteriores. La densidad de energía y la presión de radiación es por tanto mayor en el exterior que en el interior, por ende las placas son empujadas una hacia la otra.

Por último sabemos que la frecuencia crítica ω_p (frecuencia de plasma del magnesio) esta relacionada con la separación crítica de la siguiente manera $a_c \approx \pi c/\omega_p$. Luego entonces es posible determinar para qué intervalos de las separaciones entre las placas la fuerza aumenta ó decae abruptamente. Cuando $\omega = \pi c/a > \omega_p = \pi c/a_c$, es la región en que el material transmite modos de vacíío dando como resultado una fuerza de Casimir gradualmente menor, es decir, para el intervalo $a < a_c$, F_r disminuye como se observa en la figura 3.1.

En el caso $\omega_p = \pi c/a_c > \omega = \pi c/a$, el intervalo correspondiente es $a > a_c$, es la región en que la reflectividad del material es alta, por lo tanto habrá mayor cantidad de modos confinados y la fuerza tenderá a incrementarse al observar la figura 3.1, esto es precisamente lo que sucede.

Podemos concluir entonces que el comportamiento de la fuerza esta determinado principalmente por la frecuencia de plasma del metal, asi pues para frecuencias debajo de la frecuencia de plasma la reflectividad es alta (el material se comporta como conductor perfecto), dando como resultado una apreciable presión de vacío sobre las placas y por ende una mayor fuerza sobre estas. Para frecuencias por arriba de la frecuencia de plasma las placas se vuelven transparentes, por lo tanto la fuerza decrece.

Un hecho adicional es el relacionado con los anchos de las placas, para grosores mayores de las placas, la magnitud de la fuerza se incrementa alcanzando valores más cercanos al caso ideal. Esto se debe a que cuando las placas son muy anchas no se transmiten modos de volumen (la profundidad de penetración es pequeña). Se produce entonces una presión de radiación de vacío originada del confinamiento de tales modos, siendo mayor por lo tanto la fuerza de Casimir.

3.1.2. Placas dieléctricas

Estudiemos ahora el caso en el que tenemos placas dieléctricas. Las placas que utilizamos son de silicio (Si). La función dieléctrica que describe al silicio es aproximada con una resonancia lorenziana simple obtenida a partir del modelo de Lorenz [3]:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_{\infty} + \frac{\omega_0^2(\epsilon_{st} - \epsilon_{\infty})}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \tag{3.3}$$

donde ω_0 es una frecuencia de resonancia asociada a las transciones atómicas, ϵ_{∞} es la frecuencia límite para la constante dieléctrica y $\epsilon_{st} = \epsilon(\omega = 0)$ es la constante dieléctrica estática. Los parámetros para el silicio tomados de la literatura [19], son $\epsilon_{st} = 11{,}68$, $\epsilon_{\infty} = 1$, $\omega_0 = 2\times 10^{15}s^{-1}$ y $\gamma = 9{,}859\times 10^{12}s^{-1}$. Haciendo la substitución del coeficiente de reflexión en la Ec.(2.95) y realizando integración numérica en términos de la nueva variable $x = i\omega$, se obtienen las curvas correpondientes a diferentes anchos de las placas de silicio, figura 3.4 en donde F_r está en función de la separación entre las placas.

Tenemos que F_r tiene un máximo en todas las curvas a una separación a_0 y tiende a cero para valores mayores y menores que a_0.

Al igual que en el caso de placas metálicas haremos un análisis de las propiedades ópticas del silicio a partir de su función dieléctrica. A continuación presentamos la gráfica de la parte real e imaginaria de la función dieléctrica del silicio (figura 3.5).

Observamos de la parte real de la función dieléctrica que las placas son transparentes en la región $\omega/\omega_0 < 1$, puesto que toma valores positivos. En la región entre ω_0 y ω_L, la curva de la parte real de la función dieléctrica toma valores negativos lo que significa que la reflectividad del material es alta. Finalmente para el intervalo $\omega > \omega_L$ el material transmite modos de campo electromagnético siendo transparente de nueva cuenta.

De la parte imaginaria de $\epsilon(\omega)$ tenemos que tiene un máximo en ω_0, por lo tanto la profundidad de penetración de modos de campo electromagnético en el material para esa frecuencia será muy pequeña.

[3] La teoría respecto de este modelo se encuentra en el apéndice B.

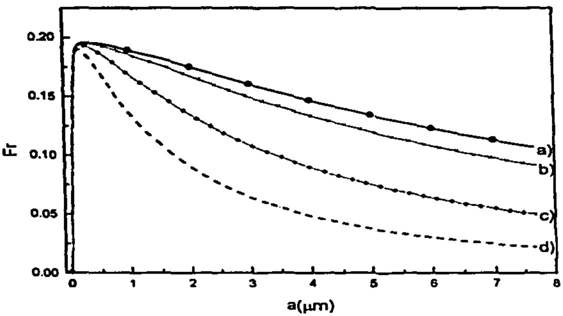

Figura 3.4: Fuerza relativa de Casimir F_r para dos placas hechas de silicio como función de la separación entre placas a. En a) el ancho de cada una de las placas es $d = 5\mu m$, en b) es de $d = 4\mu m$, en c) $d = 2\mu m$ y en d) $d = 1\mu m$.

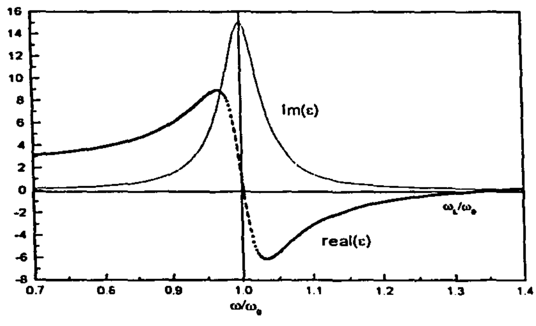

Figura 3.5: Parte real e imaginaria de la función dieléctrica del silicio.

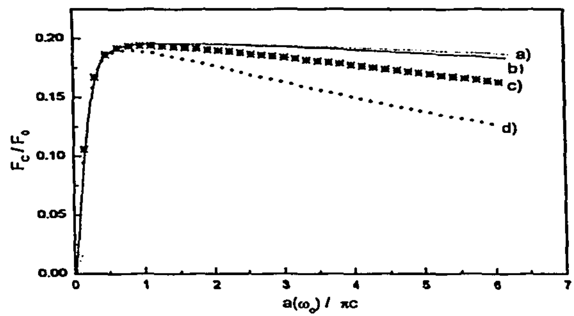

Figura 3.6: La fuerza relativa de Casimir es mostrada como función de la variable adimensional $a\omega_0/\pi c$. Cada una de las curvas corresponde a diferentes anchos de las placas para a) $d = 5\mu m$, para b) $d = 4\mu m$, en c) $d = 2\mu m$ y en el caso d) $d = 1\mu m$.

A partir de la gráfica F_r como función de la variable adimensional $a\omega_0/\pi c$ (figura 3.6). Podemos encontrar la relación entre la frecuencia ω_0 y la separación a_0 al igual que en el caso anterior.

Observamos que el máximo se encuentra alrededor de 1, es decir, $a_0\omega_0/\pi c \approx 1$, lo que nos da una separación crítica $a_0 \approx \pi c/\omega_0$. Este hecho esta relacionado con los modos de vacío como hemos explicado reiteradamente y se manifiesta notoriamente a la separación a_0 debido a relación que existe con ω_0. En esta frecuencia la parte imaginaria de la función dieléctrica tiene un máximo, lo que resulta en que la profundidad de penetración de modos de vacío sea pequeña habiendo por tanto más modos confinados. Es de esperarase que el máximo en todas las gráficas se encuentre en el mismo punto en todas las gráficas puesto que este hecho esta relacionado con lo que hemos mencionado en este parrafo.

Para frecuencias menores que ω_0, es decir, en el intervalo $a < a_0$ el material es transparente, por lo que en esa región la fuerza de relativa de Casimir es pequeña. Lo mismo sucede para frecuencias mayores que ω_L. cuyo intervalo correspondiente es $a_L < a$ esto lo observamos claramente en la figura 3.4. La fuerza tenderá a cero para separaciones entre placas grandes. El único intervalo que nos falta por discutir es cuando tenemos frecuencias entre ω_0 y ω_L, para ese intervalo el material tiene una reflectividad grande, es por esta razón que la fuerza tiene una magnitud mayor comparada con los casos en que las placas son transparentes, pero menor que en el punto a_0 donde se alcanza el máximo.

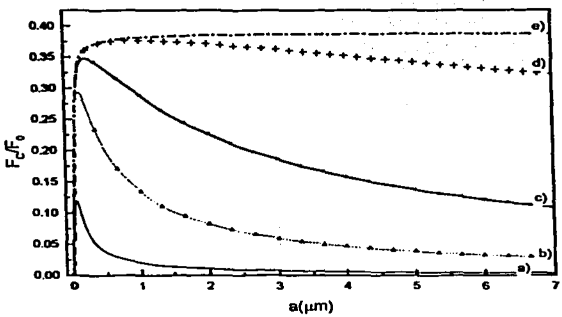

Figura 3.7: Fuerza relativa de Casimir como función de la separación entre placas, para una configuración en la que una de las placas es de silicio y la otra de magnesio. En todos los casos el ancho de la placa de aluminio es de $10\mu m$ y el ancho de la placa de silicio varía siendo para cada una de las curvas el siguiente en a)$d = 0{,}02\mu m$, en b)$d = 0{,}2\mu m$, en c)$d = 1\mu m$, en d)$d = 10\mu m$ y finalmente en e)$d = 100\mu m$.

3.2. Configuración asimétrica (una placa dieléctrica y otra metálica)

El cálculo numérico se hace usando la expresión (2.104)[4], obtenida en la sección (2.4). La función dieléctrica para la placa de silicio es la misma que en el caso anterior con los mismos parámetros, para la constante dieléctrica estática ϵ_{st}, la frecuencia de resonancia ω_0, la frecuencia límite ϵ_∞ y el parámetro de amortiguamiento γ. Para la placa metálica ahora de aluminio (Al), la función dieléctrica es obtenida a partir del modelo de Drude Ec.(1.66), donde para el aluminio la frecuencia de plasma es $\omega_p = 2{,}308 \times 10^{16} s^{-1}$ y el parámetro de amortiguamiento es $\gamma = 1{,}385 \times 10^{15} s^{-1}$ [19].

Los resultados obtenidos se presentan en la figura 3.7. La placa de aluminio tiene un espesor de $10\mu m$ y cada curva corresponde a diferente ancho en la placa de silicio.

Para la curva e), la placa de silicio tiene un espesor de $100\mu m$, el comportamiento dominante es de tipo metálico y su magnitud de alrededor del 40 % con respecto al caso en que se tienen placas conductoras perfectas. Debido a que

[4] El programa usado en el cálculo numérico esta en el apéndice A.

$\omega_0 < \omega_p$, tenemos una región de frecuencias para la que ambas placas tienen una reflectividad alta, además de que el ancho de la placa de silicio es grande lo que produce una alta reflectividad, por lo tanto la magnitud de la fuerza de Casimir es grande.

Las otras curvas corresponden a anchos en la placa de silicio que van desde $10\mu m$ en la curva d) hasta un ancho de $0{,}02\mu m$ en la curva a).

Las curvas tienen un un comportamiento parecido al caso en que las dos placas son dieléctricas. La fuerza esta determinada por las propiedades ópticas de los materiales que son descritas por sus funciones dieléctricas, sabemos que para $\omega_0 < \omega_p$ la placa metálica no transmite modos de vacío y que para la frecuencia ω_0 el material dieléctrico tiene una reflectividad alta. Es de esperarse que el máximo en las curvas este en la región $\omega < \omega_p$ y a una frecuencia alrededor de ω_0.

Los máximos en las gráficas se encuentran a diferentes distancias de separación. Esto está relacionado con la profundidad de penetración de los modos de vacío en las placas. Por lo tanto, los máximos de la fuerza se encuentran a separaciones entre placas menores que en el caso puramente dieléctrico.

La región en que se encuentran los máximos es relativamente pequeña, es decir, los máximos están más o menos en el mismo punto.

En cada una de las curvas la magnitud de la fuerza decrece sustancialmente con respecto al caso ideal, puesto que cuando el espesor de la placa de silicio es menor la reflectividad sobre esa placa disminuye.

Capítulo 4

Conclusiones

El desarrollo de las ideas sobre el efecto Casimir ha permitido obtener una base teórica más sencilla con la cual es posible además de entender de una mejor manera los conceptos físicos detras de este efecto de vacío, realizar cálculos de la fuerza entre materiales metálicos, dieléctricos ó una combinación de ambos.

En este trabajo hemos presentado los conceptos básicos sobre la teoría del efecto Casimir, la teoría del efecto Casimir en medios absorbentes y disipativos en la que se presentó una deducción bastante simple para obtener la fuerza entre placas con índices de refracción diferentes.

En un principio nos planteamos el problema de modificar la magnitud de la fuerza de Casimir mediante la manipulación de las propiedades dieléctricas y el grosor de las placas que intervienen en el cálculo. El cálculo realizado es, sin embargo, limitado puesto que las expresiones que se usaron en la integración númerica fueron obtenidas tomando en cuenta sólo vectores de onda perpendiculares a las interfaces.

La magnitud de la fuerza se calcula entre medios caracterizados por su función dieléctrica. La función dieléctrica de los materiales es el factor que tiene mayor importancia en la determinación de el comportamiento de la fuerza de Casimir.

Para placas metálicas la magnitud de la fuerza es menor que en el caso ideal donde el cálculo de la fuerza se hizó entre conductores perfectos y cuya expresión esta dada por:

$$F_0 = \frac{\hbar c \pi}{12a^2}$$

La frecuencia de plasma característica del material metálico en este caso magnesio determina las zonas en las que las placas propogan o no modos de vacío, en consecuencia obtenemos que la fuerza aumenta asintóticamente hasta un valor máximo y tiende a cero para valores menores que una cierta separación de las placas lo que indica que la fuerza de Casimir en materiales reales tiene una divergencia más suave que en el caso ideal. Para placas de silicio la frecuencia de resonancia ω_0 determina en qué punto se encuentra el máximo de la fuerza y las zonas en que la fuerza decrece.

En el caso no simétrico la fuerza tiene un comportamiento parecido al caso donde las dos placas son dieléctricas. El máximo y la magnitud de la fuerza alcanzan una mayor magnitud cuando el ancho y la placa de silicio es grande y van disminuyendo en magnitud conforme disminuimos el grosor de la placa de silicio. La disminución en la magnitud es más drástica en los casos simétricos. El máximo en la fuerza se encuentra a diferentes distancias de separación a diferencia del caso puramente dieléctrico donde el máximo se encuentra aproximadamente en el mismo punto.

En todos los casos cuando el espesor de las placas es reducido, la reflectividad disminuye con lo que la magnitud de la fuerza es menor.

Las aportaciones más importantes hechas por este trabajo es que además de que se puede introducir a estudiantes en el estudio de la fuerza de Casimir con el uso de este texto. Es también precursor en el cálculo númerico de la fuerza de Casimir para diferentes materiales aun cuando el cálculo sea limitado.

Un problema importante que podría plantearse es generalizar los resultados anteriores al caso en que se toman en cuenta las componentes transversales de los vectores de onda de los campos de vacío. Otro aspecto interesante sería realizar cálculos con medios caracterizados por funciones dieléctricas en las que se tomen en cuenta efectos de impurezas, debido a que ningun material es completamente puro. Finalmente e igualmente importante es el diseño y la realización de experimentos para comparar con las predicciones teóricas.

Apéndice A

En el capítulo 3 mencionamos que los resultados se obtenian de manera númerica, aquí presentamos el programa usado. Este programa esta hecho en Fortran y fué usado en todos los casos salvo pequeñas modificaciones. El caso que presentamos es en el que se toma en cuenta que las placas tienen índices de refracción diferentes.

```
 module variable
        real*8 :: a,d,d1,d2,a0,af,dela
        real*8 :: g1,wp1,g2,wp2,n,tol
        real*8 :: g3,wr,es,ein
        integer :: nl,imetal
      end module variable
      program principal
      use variable
  implicit none
INTEGER  ::  IRULE, NOUT

      REAL*8  ::     Ai, ABS, B, ERRABS, ERREST, ERROR, ERRREL, EXACT, EXP,MAXSU
       Real*8 ::      bb,F,RESULT
      INTRINSIC  ABS, EXP
      EXTERNAL   F, QDAG

open(unit=10,file="intega.dat",status="unknown")
open(unit=20,file="param8.dat", status="unknown")
open(unit=30,file="densidad.dat", status="unknown")

read(20,*) d1,d2,a0,af,dela
read(20,*) g1,wp1,g2,wp2
read(20,*) g3,wr,es,ein
read(20,*) n,nl,tol,imetal

! los anchos en micras
write(*,*) "estoy corriendo"
```

```
! se normaliza a w0=10^14,
d1=d1*(1./3.d0)
d2=d2*(1./3.d0)


  dela=dela*(1./3.d0)
  a0=a0*(1./3.d0)
  af=af*(1./3.d0)
         do a=a0,af,dela



!                                         Get output unit number
  MAXSUB=1000.d0

!                                          limites of integracion
      Ai = 0.d0
      B = 30.d0
!
!                                          error tolerancias
      ERRABS = 0.0d0
      ERRREL = 0.001d0
!                                         Parametro para funcion
!                                         no oscilatoria
      IRULE = 6


!  La funci\'on DQDAG que usamos corresponde a las librerias IMSL



   CALL DQDAG (F, Ai, B, ERRABS, ERRREL, IRULE, RESULT, ERREST)
!                                          Imprime los resultados


       write(10,*)   a,real(result)*(24.*a*a/((3.1415925)**2))

      end do
      END
!
      REAL*8 FUNCTION f (X)
      use variable


implicit none
        real*8:: fu,x;
```

```
real*8:: pi,n1,n2,rs1,r1,rs2,r2;

!
n1=sqrt(1+wp1*wp1/(x*x+g1*x))
if (imetal.eq.1) then
n2=sqrt(1+wp2*wp2/(x*x+g2*x))
else
   n2=sqrt(ein+wr*wr*(es-ein)/(wr*wr+x*x+g3*x))

   end if



rs1=(n1-1.d0)/(n1+1.d0)

rs2=(n2-1.d0)/(n2+1.d0)


r1=(rs1*(exp(-2.d0*x*n1*d1)-1.d0))/(1.d0-rs1*rs1*exp(-2.d0*x*n1*d1))

r2=(rs2*(exp(-2.d0*x*n2*d2)-1.d0))/(1.d0-rs2*rs2*exp(-2.d0*x*n2*d2))

if((2.*x*a) > tol) then
   fu=0
   else
fu=(x*r1*r2*exp(-2.d0*x*a)/(1.d0-r1*r2*exp(-2.d0*x*a)))
f=fu
end if
return
end
```

Apéndice B

En este apéndice se describe la teoría de interacción entre campos electromagnéticos con sólidos [15],[16] y [17]. Se obtienen las funciones dieléctricas para el caso de metales y para el caso de dieléctricos.

Los campos electromagnéticos incidentes en un material producen momentos dipolares en éste, dado que las cargas son desplazadas de sus posiciones de equilibrio. La aceleración de las cargas oscilantes radía ondas nuevas del campo. Este nuevo campo, interfiriendo con el incidente, produce un campo distinto que es equivalente a tener un cambio de fase de la onda original. Debido a que este cambio de fase es proporcional al espesor del material, el efecto es equivalente a tener una velocidad de fase diferente en el material.

A causa de la masa muy grande del núcleo en comparación con la del electrón, es una buena aproximación suponer que los núcleos permanecen en reposo cuando una onda electromagnética incide en un material determinado. En consecuencia, se necesita considerar sólo el comportamiento de los electrones. Supongamos que hay N partículas por unidad de volumen en el material de estudio. Usamos un modelo de átomo o molécula en el que el electrón esta ligado con una fuerza proporcional a su desplazamiento (como si el electrón estuviera sujeto a su lugar por un resorte) es decir, $\mathbf{F}_d = -m_e\omega_0^2\mathbf{x}$, donde ω_0 es la frecuencia natural de oscilación de el electrón. Se supone además la posibilidad de una fuerza de amortiguamiento que corresponde a una resistencia al movimiento proporcional a la velocidad del electrón, esto es, $\mathbf{F}_A = -m_e\gamma\dot{\mathbf{x}}$, donde γ es un parámetro de atenuación. Finalmente, la onda electromagnética incidente origina una fuerza de Lorentz sobre los electrones que está dada por $\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$. Se considera que el campo eléctrico incidente en el material es pequeo(la velocidad $\dot{\mathbf{x}}$ es por este hecho también pequea), en tal caso la fuerza eléctrica $\mathbf{F}_E = e\mathbf{E}$ es mucho mayor que la fuerza magnética $\mathbf{F}_M = e(\dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B})$, por lo tanto, podemos despreciar este último término. El desplazamiento del electrón x será paralelo a $\mathbf{E}$ y por lo tanto la ecuación de movimiento es entonces unidimensional, escribimosla entonces de la siguiente manera:

$$m_e\ddot{x} = - - m_e\omega_0^2 x - m_e\gamma\dot{x} - eE. \tag{B.1}$$

de donde

$$m_e(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x) = -eE. \tag{B.2}$$

Tomamos una onda linealmente polarizada. Si el campo eléctrico varía sinusoidalmente con el tiempo :

$$E = E_0 e^{i\omega t} \qquad E_0 \in R, \tag{B.3}$$

entonces el desplazamiento del electrón oscilará con la misma frecuencia y podemos suponer:

$$x = x_0 e^{i\omega t}. \tag{B.4}$$

sustituyendo $\dot{x} = i\omega x$ y $\ddot{x} = -\omega^2 x$ en Ec.(B.2), podemos despejar x en función de **E**:

$$x = \frac{e/m_e}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \tag{B.5}$$

El momento dipolar inducido p es ex o, usando la Ec.(B.5):

$$p = \frac{e^2/m_e}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} E. \tag{B.6}$$

Como **p** es proporcional a E, escribimos:

$$p = \epsilon_0 \alpha(\omega) E, \tag{B.7}$$

donde α se llama polarizabilidad atómica. Con esta definición, tenemos:

$$\alpha = \frac{e^2/m_e\epsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \tag{B.8}$$

B.0.1. Ondas en un dieléctrico

Ahora queremos hallar qué clase de ondas electromagnéticas pueden existir en un material dieléctrico en donde no hay otras cargas adicionales que las ligadas a los átomos. Tomamos, pues a $\rho = \nabla \cdot \mathbf{P}$ y $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P}/\partial t$. Las ecuaciones de Maxwell se transforman entonces en:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, \tag{B.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{B.10}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} + \mathbf{E}\right), \tag{B.11}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{B.12}$$

Podemos resolver estas ecuaciones de la siguiente manera. Empezamos tomando el rotacional de la Ec.(B.10), luego usamos la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$ y también sustituimos $\nabla \times \mathbf{B}$, usando la Ec.(B.11) y la Ec.(B.9) para $\nabla \cdot \mathbf{E}$, obtenemos:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) + \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \text{(B.13)}$$

Así, en lugar de la ecuación de onda, ahora obtenemos que el dalambertiano de $\mathbf{E}$ es igual a dos términos donde interviene la polarización $\mathbf{P}$.

Sin embargo, como $\mathbf{P}$ depende de $\mathbf{E}$, la ecuación(B.13) puede tener soluciones ondulatorias. Ahora nos limitaremos a dieléctricos isótropicos, de modo que $\mathbf{P}$ siempre esta en la misma dirección que $\mathbf{E}$. Tratemos de hallar una solución en la que la onda viaja en la dirección z. Luego, el campo eléctrico debe variar como $e^{i(\omega t - kz)}$. También supondremos que la onda está polarizada en la dirección x es decir:

$$\mathbf{E} = \hat{e}_x E_x = \hat{e}_x E_0 e^{i\kappa(z-\omega/\kappa t)}, \tag{B.14}$$

así que la Ec.(B.14) representa una onda con velocidad de fase $v_f = \omega/\kappa$. el índice de refracción n se define como, $v_f = c/n$, entonces la Ec.(B.14) se transforma en:

$$\mathbf{E} = \hat{e}_x E_x = \hat{e}_x E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}. \tag{B.15}$$

Luego entonces podemos hallar n buscando que valores de κ se requieren para que la ecuación (B.13) satisfaga las ecuaciones de campo apropiadas y usando luego la relación:

$$n = \frac{kc}{\omega}. \tag{B.16}$$

En un material isotrópico, solamente habrá la componente x de la polarización, entonces $\mathbf{P}$ no tiene variación con la coordenada x, así que $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$. Además, como estamos suponiendo un dieléctrico lineal, P_x variará como $e^{i\omega t}$ y $\partial P_x/\partial t^2 = -\omega^2 P_x$. El laplaciano en la Ec.(B.13) se transformará simplemente en $\partial E_x/\partial z^2 = -\kappa^2 E_x$, obteniendose finalmente:

$$-\kappa^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2}E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2}P_x. \tag{B.17}$$

Ahora $\mathbf{P}$ es proporcional a $\mathbf{E}$ tenemos:

$$P_x = \epsilon_0 N\alpha E_x. \tag{B.18}$$

de donde sustituyendo en la ecuación (B.17) encontramos:

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(1 + N\alpha). \tag{B.19}$$

Hemos encontrado que una onda como la de la ecuación (B.14) con el número de onda dado por la ecuación (B.19) es solución de las ecuaciones de Maxwell. De la ecuación (B.16), el índice de refracción está dado por:

$$n^2 = 1 + N\alpha, \tag{B.20}$$

tomando α de la ecuación (B.8), podemos escribir la Ec.(B.20) como:

$$n^2 = 1 + \left[\frac{Ne^2}{m_e\epsilon_0}\right] \frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \tag{B.21}$$

B.0.2. Ondas en metáles

La teoría que hemos utilizado en esta sección para materiales sólidos también se puede aplicar a buenos conductores, como los metales, con muy pocas modificaciones. En los metales, algunos de los electrones no tienen fuerza alguna que los sujete a un átomo en particular. Son estos electrones libres los responsables de la conductividad. Hay otros electrones que están ligados y la teoría anterior es aplicable directamente a ellos. No obstante, su influencia generalmente es superada por los efectos de los electrones de conducción. Ahora consideremos solamente los efectos de los electrones libres.

Si no hay fuerza restauradora sobre un electrón, pero aún hay alguna resistencia a su movimiento, su ecuación de movimiento difiere de la ecuación (B.2) solamente por que falta el término en $\omega_0^2 x$ (modelo de Drude). Así pues todo lo que tenemos que hacer es poner $\omega_0^2 = 0$ en el resto de nuestra derivación. Por lo tanto, la fórmula para el índice de refracción es muy parecida a la Ec.(B.21), la diferencia se encuentra en que en este caso $\omega_0 = 0$, de este modo:

$$n^2 = 1 + \frac{\omega_p^2}{-\omega^2 + i\gamma\omega}, \tag{B.22}$$

donde $\omega_p^2 = Ne^2/\epsilon m_e$ es el cuadrado de la frecuencia de plasma.

Bibliografía

[1] H. B. G. Casimir and D. Polder, Phys. Rev. **73**, 360 (1948).

[2] H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).

[3] Einstein and O. Stern, Ann. Phys. **40**, 551 (1913).

[4] M. J. Sparnaay, Physica (Utretch) **24**, 751 (1958).

[5] S. K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. **78**, 5 (1997).

[6] S. K. Lamoreaux, Am. J. Phys. **67**, 850 (1999).

[7] U. Mohideen and A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998). B. W. Harris, F. Chen and U Mohideen, Phys. Rev. A **62**, 052109-1 (2000).

[8] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R.N Kleiman, D. J. Bislop and F. Cappaso, Science **291**, 1942 (2001).

[9] R. Esquivel Sirvent, C. Villarreal, L. W. Mochan and G. H. Cocoletzi, Physica Status Solidi **230**, 409 (2002).

[10] D. Kupiszewska and J. Mostowski, Phys. Rev. A **41**, 4636 (1990).

[11] D. Kupiszewska, Phys. Rev. A **46**, 2286 (1992).

[12] P. W. Milloni and M. L. Shish, Am. J. Phys. **59**, 684 (1991).

[13] P. W. Milloni and M. L. Shish, Contemporary Physics **33**. 313 (1992).

[14] G. W. Ford, J. T. Lewis, R. F. O'Connell, Phys. Rev. A **37**. 4419 (1988).

[15] Feyman, Física, Vol.II Electromagnetismo y materia (Adisson-Wesley Iberoamericana, México D. F., 1987).

[16] Wagness, Campos electromagnéticos (Limusa, México D. F.. 1996).

[17] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, (John Wiley & Sons, New York, 1998).

[18] Peter W. Milloni, The Quantum Vacuum, An Introduction to Quantum electrodynamics, (Academic Press Inc., San Diego, 1994).

[19] S. Adachi, Optical Constants of Crystalline and Amorphous Semiconductors, (Kluwer Academic Publishers, Massachussetts, 1999).

[20] Giuseppe Grosso and Giuseppe Pastori Parravicini, Solid State Physics, (Academic Press, 2000).

[21] Donald A. McQuarrie, Statistical Mechanics, (Haper Row Publishers, New York, 1976).

[22] Ryogo Kubo, Statistical Mechanics, (North-Holland Personal Library, Netherlands, 1999).