



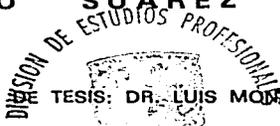
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRENZAS DE COLORES Y CONFIGURACIONES AFINES

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
PABLO SUAREZ SERRATO

DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS MONTEJANO PEIMBERT



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

2002



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
ALFREDO BARRERA  
ALBA

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**

Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Trenzas de Colores y Configuraciones Afines"  
realizado por Pablo Suarez Serrato

con número de cuenta 9850974-4 , quién cubrió los créditos de la carrera de  
Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. Luis Montejano Peimbert

Propietario

Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario

Dr. Francisco Javier Gonzalez Acuña

Suplente

Dra. Lorena Armas Sanabria

Suplente

Dr. Jorgw Arocha Perez

Consejo Departamental de  
Matemáticas



FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE  
DE  
MATEMÁTICAS

M. en C. Jose Antonio

# Trenzas de Colores y Configuraciones Afines

**Pablo Suárez Serrato**

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo lo pude concluir gracias a mucha gente, pero primero quiero agradecer a los que me animaron a ser matemático, Lynette Bush y Alan Downie, que vieron en mí algo que yo mismo no veía.

A mi familia le agradezco el haberme apoyado siempre.

A los amigos que siempre entienden, Alan, Mema, Chris y Poncho.

A los cuates de la carrera, que hicieron estos cuatro años divertidos, Galo, Isabel, Camille, Mariano, Octavio, Tere y todos los hijos de Paez.

A toda la banda de becarios del Instituto, y muy en particular a Sacl, Cruz, Yudico, Elohim, Elsa, y Edgar. Gracias por sus consejos, ayuda, chistes y compañía. Fue un placer poder escuchar de vez en cuando las locuras de alguien más y saber que no estaba solo.

A los profesores de Cuernavaca, que durante el conflicto nos echaron la mano y salvaron mi carrera en la UNAM.

A Luis Montejano, por saber la importancia de los sueños y dejarme soñar.

A Tania, por aguantarme tantas por tanto tiempo.

## **DEDICATORIA**

**A mi familia, pase lo que pase, siempre los amaré, JC, mamá, papá.**

# Indice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Trenzas</b>	<b>7</b>
2.1	¿Que es una trenza?	7
2.2	Las trenzas son un Grupo	11
2.3	Subgrupos Interesantes	18
2.4	Las Trenzas Puras y el Grupo Fundamental	21
2.5	Curiosidades de $B_n$	25
<b>3</b>	<b>Espacios de Configuraciones Afines</b>	<b>27</b>
3.1	¿Qué son las configuraciones?	27
3.2	Transformaciones Afines	28
3.3	El Espacio de Configuraciones de 4 puntos en $\mathbf{R}^2$	28
3.4	Espacios de Configuraciones de $n$ puntos en $\mathbf{R}^2$	34
3.5	Espacios de Configuraciones de $n$ puntos en $\mathbf{R}^m$	36
<b>4</b>	<b>Grupos Fundamentales</b>	<b>41</b>
4.1	La Topología de las Transformaciones Afines	41
4.2	Grassmanianas	43
4.3	Trenzas Puras y Configuraciones	47
<b>5</b>	<b>Trenzas Afines</b>	<b>51</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>55</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Todo empezó hace un año y medio. En ese entonces estábamos terminando un curso de Topología y después de una clase, Luis nos invitó a un Seminario que empezaba a organizar junto con Roli y Arocha. Así que fuimos un lunes Isabel, Omar y yo y empezamos a ver, poquito a poquito, de que se trataban las configuraciones. Cada lunes nos vemos aún todavía. Ya somos diez los que vamos al Seminario de Configuraciones.

Uno de estos lunes yo seguro no estaba entendiendo algo y me puse mejor a pensar en si se podrían relacionar las configuraciones con los nudos. Empecé a pensar primero que si barrera un nudo con un plano tendría muchas configuraciones con que jugar. Pero eso no tiene mucho sentido, porque al barrer el nudo se obtienen patrones de puntos con un número variable de elementos. Si en cambio tomamos un plano con ciertos puntos, dejamos que los puntos se muevan en tiempo y que el plano se mueva también, de arriba a abajo, lo que obtenemos es una trencita. Así es como se vería un lazo en un espacio de configuraciones de puntos en el plano, claro, sin detalles.

Un par de semanas después fui a una escuela de Geometría y Topología en Cuernavaca, en donde hubo un par de pláticas sobre trenzas. Tuve la oportunidad de hablar con Jacob y Xico. Me recomendaron libros de trenzas donde pudiera encontrar algo similar. Jacob notó algo que Roli también había visto: el centro de las trenzas puras jugaría un papel interesante.

Leí los libros y revisé varios artículos que eran relevates, tenía un par de ideas. Estas ideas las pude desarrollar con Luis hasta que maduraron y llegaron a teoremas, con pruebas que también fueron madurando hasta la versión actual. En donde se vé claramente como se benefician mutuamente las trenzas y las configuraciones, colándose por ahí las Grassmanianas.

Uno de los últimos pasos en este trayecto fué a la vez angustiante y benéfico. Fico se dió cuenta que lo que yo proponía estaba mal, resultó estar mal solo en el caso  $n = 4$  y el resto se salvó. Este error hizo que revisáramos los cálculos y pudimos ver que existen 4-trenzas triviales en  $P_4$  que para desenredarse, sus hilos se deben alinear.

El contenido preciso de este trabajo es el siguiente.

En el segundo capítulo estudiamos las trenzas. Partiendo de objetos geométricos llegamos a expresiones algebraicas. Probamos algunas propiedades y relacionamos las trenzas puras con el grupo fundamental de cierto espacio.

El tercer capítulo trata sobre configuraciones afines. Explicamos lo que queremos decir por *configuración*, para luego desarrollar el caso de 4 puntos orientados en el plano. Vemos finalmente que los espacios de configuraciones de puntos en  $\mathbf{R}^m$  son homeomorfos a las Grassmanianas de  $m$ -espacios en  $\mathbf{R}^{n-1}$ .

El cuarto capítulo se lo dedicamos a los grupos fundamentales. Empezamos calculando el grupo fundamental de las transformaciones afines, llegando a que es el grupo libre con un generador. Haciendo uso de las configuraciones afines calculamos de manera nueva y sencilla el grupo fundamental de las Grassmanianas orientadas, llegando a que estos son triviales. Pidiendo ahora que los puntos en los espacios de configuraciones sean distintos, tenemos un nuevo espacio de configuraciones y probamos que su grupo fundamental es isomorfo al grupo de trenzas de colores, módulo su centro. Damos una presentación para este grupo en términos de los generadores de las trenzas de colores y sus relaciones.

En el quinto capítulo, encontramos que existen trenzas de 4 hilos que para desenredarse se tienen que alinear. Es decir, los puntos de la intersección de dicha trenza con un plano que la barra de arriba abajo se tienen que alinear en algún momento. Todos estos resultados son el fruto de combinar dos teorías, las trenzas y las configuraciones afines, para encontrar propiedades interesantes y útiles en ambas.

Para terminar, en el sexto capítulo vislumbramos algunas ramificaciones, generalizaciones y ampliaciones que podría tener este enfoque, junto con los problemas que hay para hacerlo.

# Capítulo 2

## Trenzas

### 2.1 ¿Que es una trenza?

Estamos acostumbrados a ver el cabello largo peinado en trenzas, de tres o cuatro hebras y casi todos podríamos hacer una trenza así. El uso decorativo de las trenzas en el pelo o en otras artes es sólo la faceta más conocida de estos extraños bichos. En realidad las trenzas se encuentran entre las invenciones más antiguas del hombre. Han sido usadas desde las primeras civilizaciones para hacer cuerdas y tejidos.

Como objetos matemáticos fueron introducidos por el matemático alemán Emil Artin en 1925, aunque la idea se encontraba implícita en un artículo de Hurwitz en 1891. Una de estas trenzas se piensa como un sistema de  $n$  hilitos o hebras que van bajando en el espacio, de tal manera que se enredan los hilitos pero nunca se cruzan. El propósito de Artin fué usar las trenzas para estudiar nudos y enlaces. Hoy en día existen aplicaciones de las trenzas a varias ramas de la matemática: topología, geometría, teoría de singularidades, sistemas dinámicos, álgebras de operadores, etc. , por mencionar algunos.

Consideremos dos planos paralelos al plano  $XY$  en  $\mathbb{R}^3$ , digamos  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ . Una  $n$ -trenza  $\alpha$  es un sistema de  $n$  arcos descendientes y ajenos en  $\mathbb{R}^3$ , que empiezan en  $\Pi_1$  y acaban en  $\Pi_2$ . Es decir  $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$ , en donde  $A_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es una curva encajada con las siguientes propiedades,

- $A_i(0) = P_i \in \Pi_1$ ,  $A_i(1) = P'_i \in \Pi_2$ . Es decir, las trenzas empiezan en el plano  $\Pi_1$  y terminan en el plano  $\Pi_2$ .

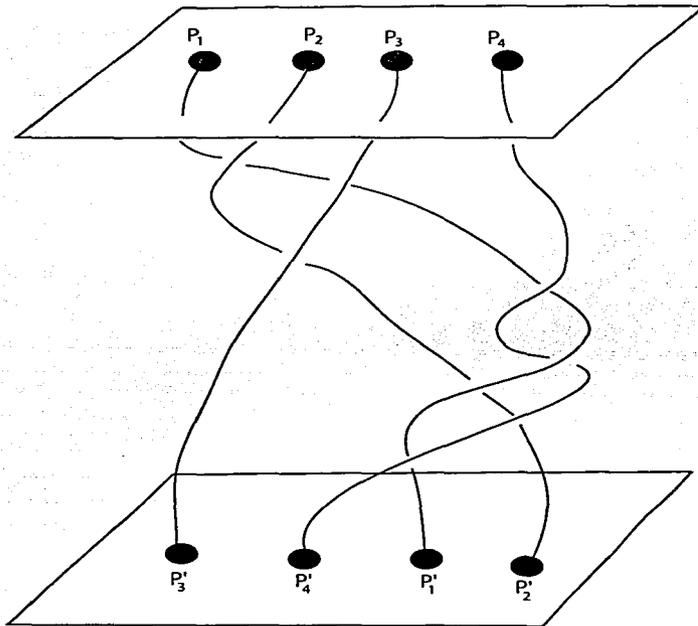


Figure 2.1: Sistema de Arcos

- $p_3(A_i(r)) < p_3(A_i(s))$ , cuando  $r > s$ , donde  $p_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es la proyección en la tercera coordenada,  $(x, y, z) \mapsto z$ . Esta condición hace que los hilos de la trenza sean descendientes.
- $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad i \neq j \quad A_i[0, 1] \cap A_j[0, 1] = \emptyset$ . Esto quiere decir que los hilos de la trenza no se intersectan.
- Finalmente el conjunto  $\{P'_i\}_1^n \subset \Pi_2$  es una traslación paralela del conjunto  $\{P_i\}_1^n \subset \Pi_1$ . Es decir, los puntos  $\{P_i\}$  son los mismos puntos, como conjunto, que los puntos  $\{P'_i\}$  pero trasladados y posiblemente con los índices permutados. (Ver figura 2.1).

A cada trenza se le asocia esta permutación, que es un elemento de  $S_n$ , el grupo de las permutaciones de  $n$  elementos.

Lo primero que nos interesa es poder decir cuando dos trenzas son equivalentes, es decir, cuando las vamos a considerar la misma.

Dadas dos  $n$ -trenzas  $\alpha = \{A_1, \dots, A_n\}$  y  $\beta = \{A'_1, \dots, A'_n\}$ , vamos a decir que estas dos trenzas son equivalentes si podemos mover continuamente una a la otra manteniendo  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$  y los puntos extremos fijos y sin que se crucen jamás nuestros arcos. Como una película cortita, de diez segundos, donde al principio, en el segundo cero, empezemos en la primera trenza. Al avanzar el tiempo los arcos se mueven, dejando siempre fijos los puntos de arriba y abajo, hasta llegar a coincidir exactamente con la segunda trenza, justo al llegar al segundo diez.

Para que esto se cumpla necesitamos que existan  $n$  funciones continuas

$$F_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que cumplan lo siguiente:

$$F_i(t, 0) = A_i(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$F_i(t, 1) = A'_i(t) \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$F_i(0, s) = P_i(t) \quad 0 \leq s \leq 1$$

$$F_i(1, s) = P'_i(t) \quad 0 \leq s \leq 1$$

Como último requisito vamos a pedir también que para cada tiempo  $s \in [0, 1]$  el conjunto de los arcos  $\{F_i([0, 1], s) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3\}$ , sea una trenza.

Estas funciones pueden ser vistas como homotopías, relativas a los puntos iniciales y finales, entre los hilos correspondientes. Una noción equivalente

es pedir que exista una isotopía ambiental entre las dos trenzas<sup>1</sup>. Es fácil ver que esta relación es una relación de equivalencia.

Ya identificadas las trenzas equivalentes vamos a hablar libremente de una trenza cuando en realidad estemos haciendo alusión a su clase de equivalencia. De la misma manera dos trenzas van a ser distintas si se encuentran en distintas clases de equivalencia.

Para simplificar aún más las cosas, pensemos en un plano perpendicular a  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , proyectemos la trenza sobre este para obtener un *diagrama*. En este diagrama conservamos la información en cada cruce de qué hebra debe ir por arriba y cual por abajo. Notemos que en este nuevo diagrama los puntos iniciales y finales se encuentran alineados, mientras que en  $\Pi_1$  y en  $\Pi_2$  no necesariamente estaban alineados. Este es un detalle que nos interesará mas tarde.

Teniendo ya el diagrama de una trenza, vamos ahora a *peinar* esta trenza. Lo que queremos hacer es partir de un diagrama cualquiera de una trenza y llegar a uno que este *peinado*, donde podamos ver la trenza de arriba a abajo y veamos cada uno de los cruces a diferente altura. Para peinar una trenza pensemos en colocar un número finito de planos paralelos a  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ , entre estos dos planos, de tal forma que estos nuevos planos separen los cruces de la trenza, y entre cada dos planos en el diagrama sólo haya un cruce en el que dos arcos intercambien lugares. Una manera de convencerse que toda trenza puede peinarse es pensar que estiramos el diagrama hasta tener suficiente espacio para poder bajar y subir las hebras hasta poder separar los cruces como queremos, nunca rompiendo los hilos ni cruzando uno en frente de otro. Como todas estas operaciones se pueden expresar en términos de funciones continuas y respetan las homotopías que nos marcan las equivalencias entre las trenzas, entonces podemos asegurar que toda trenza se puede peinar. (Ver figura 2.2)

---

<sup>1</sup>ver [Bir]

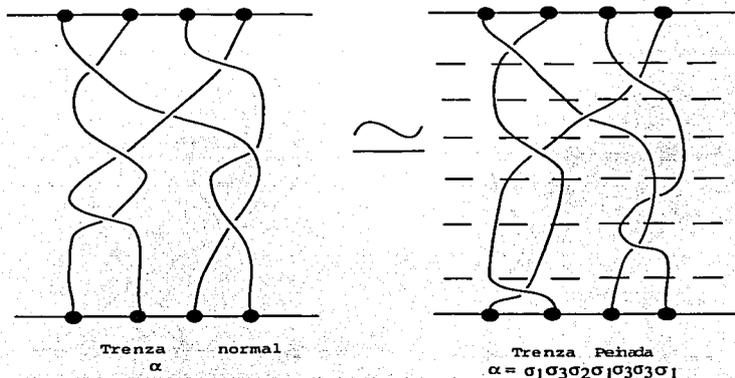


Figure 2.2: Peinado de Trenzas

## 2.2 Las trenzas son un Grupo

Un grupo es un conjunto  $G$  con una función *producto*;

$$\bullet : G \times G \rightarrow G$$

$$(x, y) \mapsto xy$$

en donde se cumple que,

- El producto sea asociativo,  $(xy)z = x(yz) \quad \forall x, y, z \in G$
- Existe un elemento neutro,  $\exists e \in G$  tal que  $\forall x \in G \quad xe = ex = x$
- Todos los elementos tienen un inverso,  $\forall x \in G \quad \exists (x^{-1}) \in G$  tal que  $x(x^{-1}) = (x^{-1})x = e$

Se define el producto de dos trenzas simplemente poniendo una abajo de la otra y reparametrizando los arcos, tal y como se muestra en la figura 2.3.

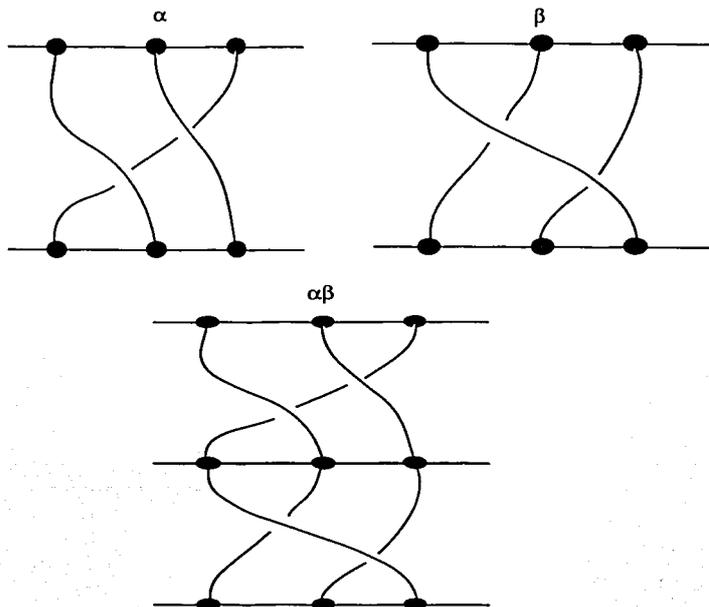


Figure 2.3: Producto de dos Trenzadas

a  $\alpha\beta$  pues podemos usar las mismas homotopías entre  $\alpha$  y  $\alpha'$ , y entre  $\beta$  y  $\beta'$ , solo hace falta reparametrizarlas. Esta misma idea se puede usar para mostrar que el producto es asociativo.

Teniendo ya un producto bien definido hace falta darle un elemento neutro, la trenza trivial. La  $n$ -trenza trivial puede pensarse como  $n$  hebras que van cada una de  $P_i$  bajando directo y recto a  $P'_i$ . Su diagrama esta dado por  $n$  hilos paralelos que bajan sin enredarse.

Dada una trenza  $\alpha$  su inversa esta dada por la reflexión de  $\alpha$  respecto al plano  $\Pi_2$ . Esta es la llamada *imagen especular*, respecto al plano  $\Pi_2$ . Podemos revisar así que toda trenza tiene un inverso. (Ver figura 2.4).

Juntando estas propiedades llegamos a que las  $n$ -trenzas forman un grupo, llamado por convención<sup>2</sup>  $B_n$ .

Este grupo se puede describir de manera sencilla usando generadores y relaciones. Ya que toda trenza se puede peinar, podemos pensar que todas las trenzas están bien dibujadas en un diagrama ya peinadas. Esto nos lleva a definir una *trenza elemental*. Sea  $\sigma_i$  la  $n$ -trenza en la que sólo el  $i$ -ésimo hilo cruza por arriba al  $(i + 1)$ -ésimo hilo. (Ver figura 2.5).

Esto prueba que toda trenza peinada es producto de trenzas elementales,  $\sigma_i$ . Como toda trenza es peinable, resulta que toda trenza es producto de trenzas elementales. Es decir,  $B_n$  está generado por las trenzas elementales  $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ . Así expresada una trenza es más sencillo ver que la imagen especular es la inversa.

Además de tener los generadores explícitamente, tenemos un par de relaciones dadas en términos de las trenzas elementales,

- $R_1$  : Primero tenemos que cuando los hilos involucrados en las trenzas elementales estan lejos, conmutan, es decir,

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

siempre y cuando  $|i - j| \geq 2$  y  $1 \leq i, j \leq n - 1$ . (Ver figura 2.6).

- $R_2$  : Además nos encontramos con una especie de conjugación,

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

para todo  $1 \leq i \leq n - 2$ . (Ver figura 2.7).

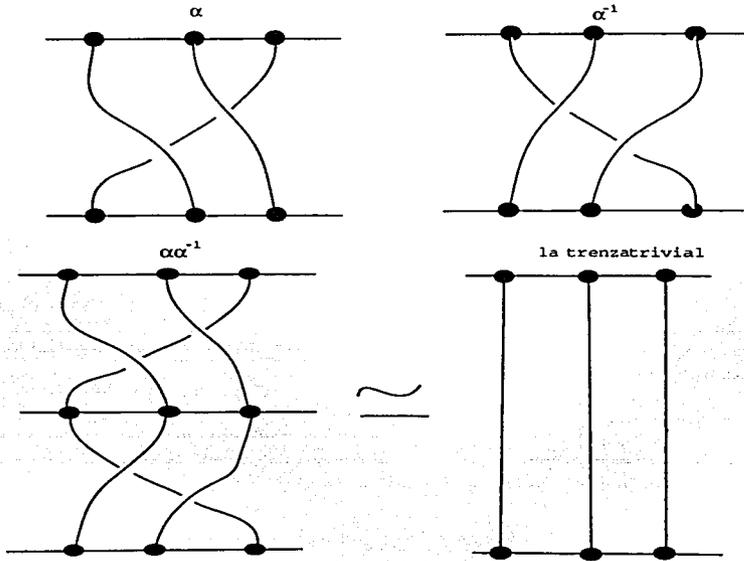


Figure 2.4: Así se define el inverso de una trenza

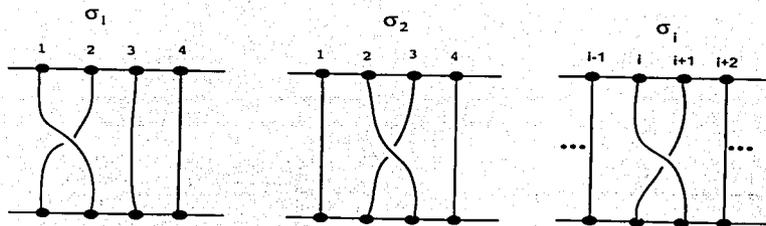


Figure 2.5: Las Trenzas Elementales

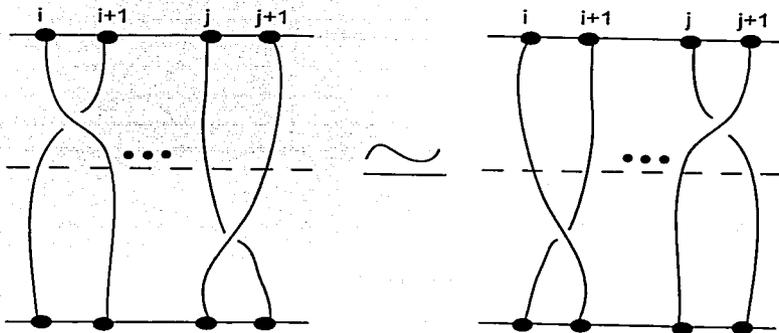


Figure 2.6: Relaciones de Trenzas

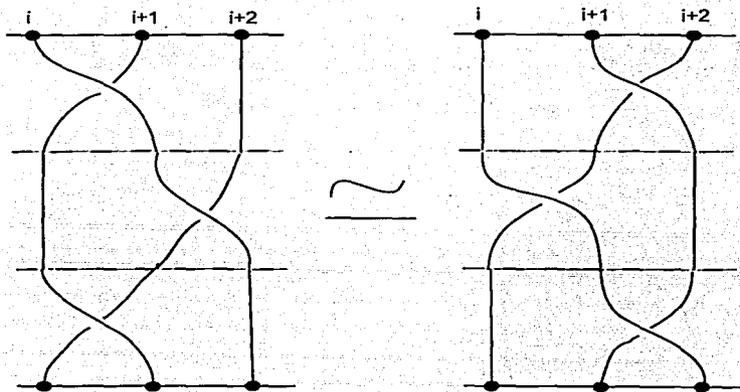


Figure 2.7: Relaciones de Trenzaz

Artin mostró en 1925 que  $B_n$  admite una presentación con las trenzas elementales como generadores y  $R_1$  y  $R_2$  como únicas relaciones.

$$B_n \simeq \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid R_1, R_2 \rangle$$

---

<sup>2</sup>trenza en inglés es *braid* de ahí que el grupo de  $n$ -trenzas sea  $B_n$

## 2.3 Subgrupos Interesantes

Dado un grupo  $G$  un subgrupo  $G'$  de  $G$  es un subconjunto de  $G$  que sea cerrado bajo el producto. El grupo  $B_n$  tiene varios subgrupos importantes. A nosotros nos van a interesar en particular dos. El primero es el grupo de  $n$ -trenzas de colores o trenzas puras. Sus elementos son las trenzas que tienen como permutación asociada la identidad. Es decir, si seguimos una hebra de arriba a abajo el punto en el que comienza y en el que termina se encuentran en la misma posición. Por esto se llaman trenzas de colores, porque podríamos darle una coloración con un cierto orden específico a los vértices de arriba y la misma a los de abajo y los hilos la respetarían. De modo que cuando hacemos el producto de trenzas la coloración se respeta, nunca llegaríamos a tener un hilo que se tuviera que pegar con otro de distinto color. A este subgrupo se le denomina  $P_n$ .<sup>3</sup>

Podemos describir todos y cada uno de los elementos de  $P_n$  usando únicamente las trenzas en las que se enreda sólo una cuerda con otra y regresa a su posición original. Así pues, denotaremos por  $A_{i,j}$  la trenza que enreda el elemento  $i$ -ésimo con el  $j$ -ésimo. (Ver figura 2.8). Podemos describir estos elementos en términos de los generadores de  $B_n$ , de modo que, tal y como es evidente en la figura 2.8,

$$A_{i,j} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}$$

donde  $i < j$  para  $j = 1, \dots, n$

Tenemos que se cumplen ciertas equivalencias al hacer el producto de trenzas puras que dan lugar a las siguientes relaciones;

$$r_1 : A_{r,s}A_{i,k}A_{r,s}^{-1} = A_{i,k} \quad \text{si } s < i \text{ o } k < r$$

$$r_2 : A_{k,s}A_{i,k}A_{k,s} = A_{i,s}^{-1}A_{i,k}A_{i,s} \quad \text{si } i < k < s$$

$$r_3 : A_{r,k}A_{i,k}A_{r,k}^{-1} = A_{i,k}^{-1}A_{i,r}^{-1}A_{i,k}A_{i,r}A_{i,k} \quad i < r < k$$

$$r_4 : A_{r,s}A_{i,k}A_{r,s}^{-1} = A_{i,s}^{-1}A_{i,r}^{-1}A_{i,s}A_{i,r}A_{i,k}A_{i,r}^{-1}A_{i,s}^{-1}A_{i,r}A_{i,s} \quad i < r < k < s$$

---

<sup>3</sup>Nuevamente la notación viene del inglés *pure*.

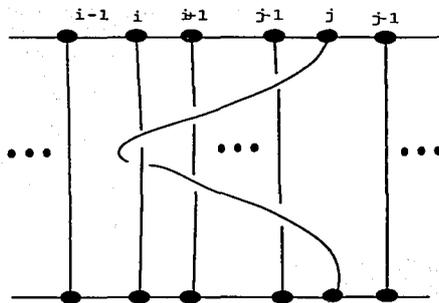


Figure 2.8: Generadores de Trenzas Puras

Con todo esto, podemos ahora decir, aunque no sea evidente, que las trenzas de colores aceptan la siguiente presentación,

$$P_n \simeq \langle \{A_{i,j}\} | r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle$$

Veamos los primeros ejemplos. El grupo  $P_1$  consta solo de un hilo, como este no puede enredarse con ningún otro podemos concluir que este grupo es isomorfo al grupo trivial, el que tiene solo el elemento identidad.

El grupo  $P_2$  consta de dos hilos, que además siempre tienen que regresar a su posición original, el primero a la primera y el segundo a la segunda. En principio hay tres casos que considerar, que el primer hilo se enrede en el segundo  $r$  vueltas, que el segundo se enrede en el primero  $s$  vueltas o que haya una combinación de enredos entre el primero y el segundo. Pero si estiramos el segundo hilo hasta que quede recto, solo el primer hilo quedará enredado, pues al estirar el segundo las combinaciones se cancelan. Esto pasa en cualquiera de los casos que mencionamos. Por lo que podemos identificar cada trenza con el número de vueltas que le da el primer hilo al segundo, viendo si son positivas o negativas las vueltas. Esta es una manera sencilla e intuitiva de ver que  $P_2$  es isomorfo al grupo libre con un generador  $\mathbb{F}_1$ .

De aquí en adelante las cosas se complican. Antes de seguir necesitamos un poco más de teoría sobre grupos. Sobre todo necesitamos saber como definir un par de productos de grupos.

Supongamos que tenemos dos grupos  $G$  y  $H$  cada uno con su producto  $\times_G$  y  $\times_H$ . Podemos definir el *producto directo* de  $G$  y  $H$ , tomando como conjunto a  $G \times H$  y la operación dada por :

$$\begin{aligned} \bullet : (G \times H) \times (G \times H) &\rightarrow G \times H \\ (g, h) \bullet (g', h') &\mapsto (g \times_G g', h \times_H h') \end{aligned}$$

Como estamos utilizando los productos de los grupos originales,  $G \times H$  resulta ser también un grupo.

De la presentación dada arriba para  $P_n$ , con  $n = 3$  se puede demostrar que  $P_3$  es isomorfo al producto directo de  $\mathbb{F}_1$  y  $\mathbb{F}_2$ , es decir los grupos libres de rango uno y dos (Ver [Ar]). Como habíamos visto  $P_2 \simeq \mathbb{F}_1$  de donde podemos obtener el siguiente isomorfismo.

$$P_3 \simeq P_2 \times \mathbb{F}_2$$

Teniendo ya identificado el grupo de trenzas de colores y conociendo las equivalencias con otros grupos más familiares, podemos ahora hablar de otro subgrupo de  $B_n$ , que de hecho es subgrupo de  $P_n$ , su *centro*.

En general en cualquier grupo  $G$ , el conjunto de elementos del grupo que conmutan con todos los demás elementos del grupo se llama el *centro* de  $G$ , se denota por  $Z(G)$ . Es decir,

$$Z(G) := \{g \in G \mid ga = ag \quad \forall a \in G\}$$

El primero en calcular el centro de las trenzas puras fué Chow en 1948 (ver [Gar]). El probó que el centro de las trenzas de colores lo podemos describir de manera sencilla, como el grupo generado por la trenza  $\gamma_n$  en la que todos los hilos dan una vuelta completa alrededor de los demás hilos, de arriba a abajo. (Ver figura 2.9 y [Han] o [Bir]). Por lo tanto  $Z(P_n)$  es isomorfo al grupo libre de un generador  $\mathbb{F}_1$ . En este subgrupo cada elemento se puede pensar como la trenza que dá un giro completo de las hebras, un número entero de veces.

$$\gamma_n = (A_{1,2})(A_{1,3}A_{2,3}) \dots (A_{1,n} \dots A_{n-1,n})$$

$$\Rightarrow Z(P_n) = \langle \gamma_n \rangle \simeq \mathbb{F}_1$$

Nosotros aquí solo haremos notar que toda trenza descrita en el párrafo anterior se encuentra en el centro. Para tal propósito bastará demostrar que

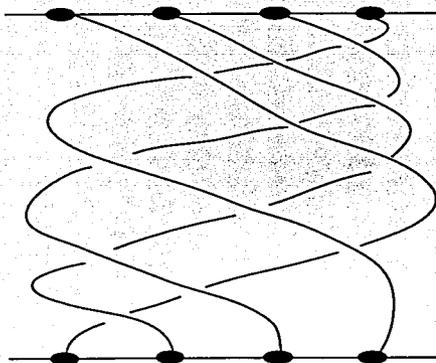


Figure 2.9: Generador del Centro de las Trenzas de Colores

si  $\alpha$  es una trenza cualquiera y  $g$  es un giro entonces  $g\alpha g^{-1} = \alpha$ . Para ver esto en el diagrama de la izquierda de la figura 2.10 simple y sencillamente giremos el cuadrado de  $\alpha$  un número entero de veces para obtener el diagrama de la derecha.

A estos dos grupos, las trenzas de colores  $P_n$  y su centro  $Z(P_n)$ , los vamos a relacionar con los objetos que vamos a estudiar en el siguiente capítulo. Nos van a interesar mucho al relacionarlos con propiedades topológicas de los espacios de configuraciones afines de puntos en el plano.

## 2.4 Las Trenzas Puras y el Grupo Fundamental

En esta sección probaremos que el grupo de trenzas puras es de hecho el grupo fundamental del espacio de  $n$  puntos distintos en el plano.

Consideremos ahora el espacio de todos los conjuntos de  $n$  puntos distintos y ordenados en el plano.

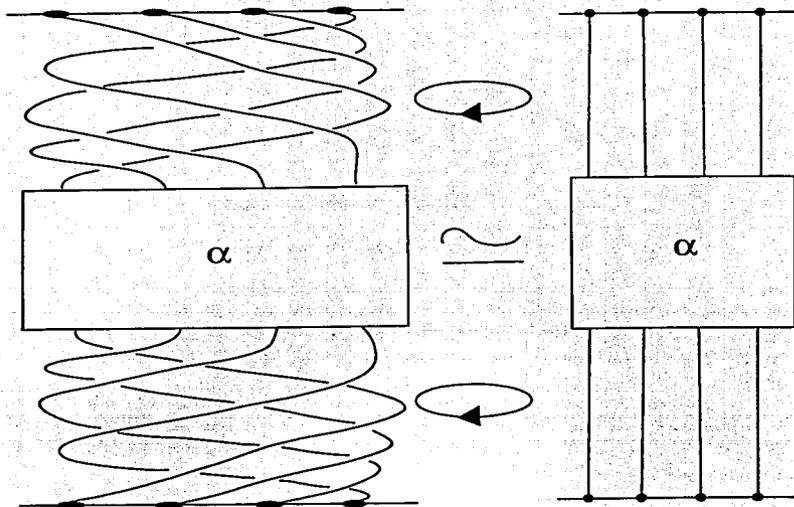


Figure 2.10: Los Giros estan en el Centro de las Trenzas Puras

$$E'_n = \{(p_1, p_2, \dots, p_n) : p_i \in \mathbb{R}^2 | p_i \neq p_j \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j\}$$

Vamos a ver que el grupo de trenzas de colores  $P_n$  es isomorfo al grupo fundamental de  $E'_n \subset (\mathbb{R}^2)^n$ . Sea  $\bar{p} \in E'_n$  fijo,  $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ , entonces,

$$\pi_1(E'_n, (p_1, p_2, \dots, p_n)) \simeq P_n$$

Esto fué notado por el matemático americano Ralph Fox en 1962, ver [FN].

**Teorema 1**  $\pi_1(E'_n, (p_1, p_2, \dots, p_n)) \simeq P_n$

**Demostración :**

Ya que los hilos de una trenza son descendientes, los podemos describir de la siguiente manera. Tomemos una  $n$ -trenza pura  $[\alpha] \in P_n$ , entonces pensemos a  $\alpha$  como una colección de funciones del intervalo  $[0, 1]$  en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha = (A_1, \dots, A_n)$ , en donde  $A_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Además como las trenzas son descendientes sin pérdida de generalidad podemos pensar que  $A_i(t) = (\alpha_i(t), 1 - t) \in \mathbb{R}^2$ , donde  $\alpha_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Es decir,  $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^n$  son  $n$  puntos distintos en el plano y por lo tanto la función  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : I \rightarrow E'_n$  esta bien definida. Visualmente estamos pintando la trenza desde el plano  $z = 1$ , moviendo los puntos  $\alpha_i(t)$  hacia abajo hasta parar en el plano  $z = 0$ . Usando esta notación el  $i$ -ésimo hilo de la trenza es  $A_i(t)$ , además los puntos iniciales y finales  $p_i$  cumplen que  $p_i = \alpha_i(0) = \alpha_i(1)$ , por ser  $\alpha$  una trenza pura.

Usando todo lo anterior definimos el isomorfismo  $f$ ,

$$f : P_n \rightarrow \pi_1(E'_n, (p_1, p_2, \dots, p_n))$$

$$f([\alpha]) = [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)] \in \pi_1(E'_n, (p_1, p_2, \dots, p_n))$$

Esta función esta bien definida, pues al dar una trenza  $\beta$  en la clase de homotopía de  $\alpha$  estamos dando también las homotopías que mueven los hilos  $\alpha_i(t)$  a  $\beta_i(t)$  lo cual implica que  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \simeq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  y por tanto,

$$f([\alpha]) = [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)] = [(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)] = f([\beta])$$

Además  $f$  es un morfismo de grupos, ya que intuitivamente resulta lo mismo pensar en la multiplicación de dos trenzas para luego ver sus hilos como puntos moviéndose en el plano, que ver para cada trenza como se mueven sus puntos en el plano y después componer estos lazos. Este fenómeno se expresa así,

$$\begin{aligned} f([\alpha][\beta]) &= [(\alpha_1 \circ \beta_1, \alpha_2 \circ \beta_2, \dots, \alpha_n \circ \beta_n)] = \\ &= [(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)][(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)] = f([\alpha])f([\beta]) \end{aligned}$$

Para concluir nos resta dar una inversa para  $f$ . Sea  $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n) : I \rightarrow E'_n \subset (\mathbb{R}^2)^n$ , un lazo en  $E'_n$ , y sea  $g$  definida como sigue,

$$g : \pi_1(E'_n, (p_1, p_2, \dots, p_n)) \rightarrow P_n$$

$$g([\tilde{\alpha}]) = g([\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n]) = [(A'_1(I), A'_2(I), \dots, A'_n(I))] \in P_n$$

donde ahora  $A'_i : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , está dada por  $A'_i(t) = (\tilde{\alpha}_i(t), 1 - t)$ . Entonces  $A'_i(I)$  es la trayectoria del  $i$ -ésimo punto dentro del plano, mientras que el plano vá bajando de  $z = 1$  hasta  $z = 0$ .

Análogamente que para  $f$  se prueba que  $g$  es un morfismo bien definido. Finalmente por construcción de  $f$  y  $g$  se verifica que ;

$$f \circ g = Id_{\pi_1(E'_n, (p_1, p_2, \dots, p_n))}$$

$$g \circ f = Id_{P_n}$$

Lo cual demuestra el teorema.  $\square$

## 2.5 Curiosidades de $B_n$

Los grupos de trenzas son bastante interesantes por sí solos, pero además tienen vínculos fuertes con otras áreas de la matemática. Algunas propiedades al respecto son:

- El grupo de 3-trenzas  $B_3$  es isomorfo al grupo fundamental del complemento del nudo trébol  $T$  en la esfera  $S^3$ .

$$B_3 = \langle a, b \mid aba = bab \rangle \simeq \langle x, y \mid x^2 = y^3 \rangle = \pi_1(S^3 \setminus T)$$

- Dada una trenza no trivial  $\alpha$  no existe un número entero  $n$  tal que  $\alpha^n$  se desenrede. Es decir que sea equivalente a la trenza trivial. Dicho de otra manera,  $B_n$  no tiene elementos de orden finito no triviales.
- Sea  $A$  un conjunto finito de  $n$  puntos en el disco  $D^2$  y denotemos por  $Homeo_{\partial D}^+(D^2 \setminus A)$  el grupo de homeomorfismos de  $D^2 \setminus A$  que preservan orientación y que dejan fija la frontera de  $D^2$ . Entonces podemos caracterizar al grupo de  $n$ -trenzas  $B_n$  mediante el siguiente isomorfismo,

$$B_n \simeq Homeo_{\partial D}^+(D^2 \setminus A)$$

- Usando esta última caracterización se prueba que  $B_n$  acepta un orden que es compatible con su estructura de grupo. Podemos comparar dos trenzas y decir cual es *mayor* que la otra. Esto fué demostrado primero usando exclusivamente herramientas de lógica por Dehornoy en 1992<sup>4</sup>. En [SW] se encuentra una prueba más geométrica y topológica. En el contexto de los homeomorfismos mencionados arriba, la idea de esta prueba se le atribuye a Thurston.
- Podemos convertir cualquier trenza en un enlace<sup>5</sup> pegando el  $i$ -ésimo vertice de arriba con el  $i$ -ésimo vertice de abajo. A esto se llama la *cerradura* de una trenza. Más aún, en 1923 Alexander demostró que todo enlace es la cerradura de alguna trenza.

<sup>4</sup>Afirmación hecha por Hamish Short.

<sup>5</sup>Un enlace es una colección de nudos anudados, o no, entre sí

- El Teorema Fundamental de Cirugía, probado independientemente por Lickorish y Wallace en los 60's. Este afirma que toda 3-variedad conexa, orientable y cerrada se obtiene por cirugía de Dehn sobre un enlace en  $S^3$  que proviene de la cerradura de una  $n$ -trenza pura. Por medio de este teorema las trenzas de colores se relacionan con uno de los problemas abiertos más viejos y famosos, la Conjetura de Poincaré. La cual propone que si una 3-variedad conexa, orientable y cerrada tiene grupo fundamental trivial, entonces es homeomorfa a la esfera  $S^3$ . Esta es la primera aproximación a una clasificación de los espacios de 3 dimensiones, pero es una pregunta que lleva más de cien años sin responder. El lector interesado podrá encontrar más información en [Rol].

## Capítulo 3

# Espacios de Configuraciones Afines

### 3.1 ¿Qué son las configuraciones?

En esta sección vamos a estudiar las distintas maneras en las que podemos encontrar acomodados subespacios afines en algún otro espacio afín. Esto es a grandes rasgos lo que se llama una configuración afín, una colección finita de subespacios lineales<sup>1</sup> trasladados, de la misma dimensión, dentro de otro espacio afín. Vamos a ver uno de los primeros casos. Queremos comprender las diversas formas en las que se pueden acomodar  $n$  puntos en el plano. Esto parece a primera impresión algo muy fácil, pero pronto veremos que no es así y que la herramienta que se requiere para manejar esta clase de problemas es sofisticada.

En principio queremos poder decir cuando dos conjuntos finitos de puntos van a ser considerados el mismo y cuando distintos. Para esto nos va a importar el orden y la orientación de los conjuntos. Antes necesitamos establecer que queremos decir por una transformación afín.

---

<sup>1</sup>Estos pueden ser puntos, líneas, planos o hiperplanos.

### 3.2 Transformaciones Afines

Una transformación afín, es una función que manda líneas en líneas. Podemos definir a las funciones afines de dimension  $n$  como,<sup>2</sup>

$$Af(n) := GL(n) \bowtie \mathbb{R}^n$$

donde  $GL(n)$  denota el grupo lineal de dimension  $n$ , las matrices invertibles de tamaño  $n$  por  $n$ .

Así definido  $Af(n)$  tiene una estructura de grupo, pues al tomar dos funciones afines  $f, g \in Af(n)$  podemos primero observar que si  $f = F + \hat{f}$  y  $g = G + \hat{g}$ , donde  $F, G \in GL(n)$  y  $\hat{f}, \hat{g} \in \mathbb{R}^n$ , entonces el producto de  $f$  y  $g$  lo podemos definir por la composición,

$$f \cdot g := f(g) = f(G + \hat{g}) = FG + F(g) + \hat{f}$$

definiendo  $(F(g) + f) =: h \in \mathbb{R}^n$  y  $FG = H \in GL(n)$ , llegamos a que,

$$f \cdot g = FG + F(\hat{g}) + f = H + h \in Af(n)$$

De la definición podemos distinguir que hay esencialmente dos clases importantes de transformaciones. Las que preservan la orientación y las que la invierten. Estas corresponden a las que tienen componente lineal con determinante positivo o negativo respectivamente.

Denotando a las matrices invertibles de determinante positivo por  $SL(n)$ , podemos definir un subgrupo de  $Af(n)$ , las transformaciones afines que preservan la orientación  $Af_+(n)$ .

$$Af_+(n) := \{F + \hat{f} \in Af(n) \mid F \in SL(n)\}$$

### 3.3 El Espacio de Configuraciones de 4 puntos en $\mathbb{R}^2$

Pensemos ahora en las distintas maneras de acomodar cuatro puntos en un plano, de tal manera que como conjunto estos cuatro puntos generen afínmente el plano. Esencialmente hay dos distintas, que tres de ellos formen un triángulo y el cuarto se encuentre en el centro, o que formen los vértices de un cuadrilátero.

<sup>2</sup>El símbolo  $\bowtie$  denota el *producto semidirecto*, como conjunto es el producto cartesiano.

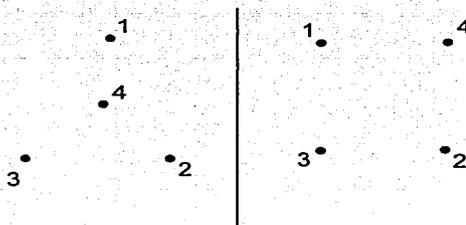


Figure 3.1: Esencialmente hay dos maneras de colocar 4 puntos en el plano

Para hablar con precisión, empecemos fijándonos en conjuntos de cuatro puntos que generen el plano afínmente. Llamemos a este espacio  $E_4$ , es decir,

$$E_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_i \in \mathbb{R}^2 \text{ y } \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = \mathbb{R}^2\}$$

Vamos a decir que dos conjuntos ordenados de cuatro puntos  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  son *afínmente equivalentes* sí y sólo sí existe una transformación  $f \in Af_+(2)$  tal que  $f(x_i) = y_i$ .

$$X \sim Y \Leftrightarrow \exists f \in Af_+(2) \text{ tal que } f(x_i) = y_i$$

Esta es una relación de equivalencia, pues claramente es simétrica, reflexiva y transitiva. Haciendo el cociente de  $E_4$  bajo esta relación obtenemos el espacio de configuraciones afines orientadas de 4 puntos en el plano. Esto es, hacemos cociente bajo la acción del grupo.

$${}^0_4A_+^2 := E_4 / \sim$$

Lo que queremos es describir este espacio,  ${}^0_4A_+^2$ , en términos geométricos, topológicos y combinatorios. Empecemos con los dos casos que habíamos identificado, el triángulo y el cuadrilátero. En cada uno podemos parametrizar dicha configuración usando coordenadas del plano.

Primero notemos que cualesquiera dos tercias de puntos en el plano que formen los vértices de un triángulo son afínmente equivalentes. Ya que para cada dos parejas de vectores en el plano existe una matriz que transforma la primera pareja en la segunda. Por lo tanto, en el primer caso, podemos

parametrizar la configuración usando las coordenadas baricéntricas del punto que se encuentra en medio del triángulo.

Si en cambio tenemos el caso en que los puntos forman vértices de un cuadrilátero podemos parametrizar la configuración usando el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero.

Dado que queremos distinguir las configuraciones que tengan distinto orden y distinta orientación, podemos ver que surgen 8 posibles triángulos distintos y 6 cuadriláteros distintos. Un momento de reflexión nos revela que podemos movernos continuamente entre estos triángulos y cuadriláteros. Empezando de alguno podríamos llegar a cualquier otro. Esto se puede visualizar moviendo continuamente los puntos hasta llegar a la configuración deseada.

A grandes rasgos lo que esto nos dice es que  ${}^0_4A_+^2$  tiene dimensión dos, es conexo por trayectorias y por lo tanto conexo.

Pero veamos con más detalle como se relacionan estos dos casos esenciales y como podemos construir  ${}^0_4A_+^2$  partiendo de ellos.

En el primer caso, fijándonos en las distintas posibilidades que tiene el punto 4 dentro del triángulo, vemos que hay tres. Puede ser que de hecho coincida con otro de los puntos, en cuyo caso este subconjunto como espacio tiene dimensión cero, pues consta sólo de tres puntos aislados que son los vértices del triángulo de configuraciones correspondiente.

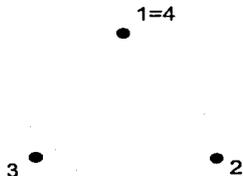


Figure 3.2: Dos de los puntos coinciden

El siguiente caso que nos interesa ocurre cuando tres de los puntos se encuentran en una línea. Al hacer el cociente por  $Af_+(2)$  la colinealidad se conserva, ya que las transformaciones afines preservan colinealidad. Como espacio tiene dimensión uno, pues tiene un solo grado de libertad, que consiste en moverse a lo largo de la recta de colinealidad de los tres puntos. Nótese

que este caso contiene al anterior, pues la recta pasa por los dos vértices del triángulo, cada uno de esos dos vértices corresponden a configuraciones en las que los puntos correspondientes coinciden. A dicho lado del triángulo se le dá una etiqueta, correspondiente a leer los puntos que yacen sobre la recta, en la orientación de las manecillas del reloj.

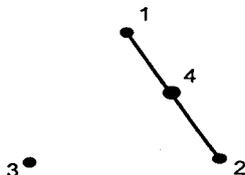


Figure 3.3: Tres de los puntos son colineales

Por último tenemos el caso en el que el punto se encuentre dentro del triángulo. De aquí en adelante podemos etiquetar cada uno de los vértices pues son los casos en los que los puntos coinciden y las aristas corresponden a que tres puntos se encuentren sobre esa recta. Como espacio tiene dimensión dos y contiene toda la información de los casos anteriores. Ver figura 3.4 .

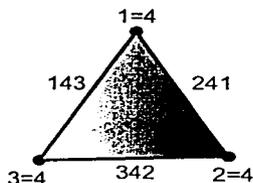


Figure 3.4: El triángulo etiquetado

Ahora veamos cuales son las distintas configuraciones empezando con un cuadrilátero cualquiera. Veamos que si tenemos 4 puntos así, mediante una transformación afín los podemos mandar a 4 puntos cuyas diagonales sean perpendiculares y de distancia unitaria. Es decir, podemos pensar que las diagonales entre los vértices son paralelas a los lados del cuadrado  $I \times I$ , y

que están contenidas dentro de él. Así pues el punto de intersección de estas diagonales parametriza una configuración de este estilo, que están dadas por los puntos en los extremos de las diagonales. Cuando una diagonal coincide con el lado del cuadrado, tres de los vértices son colineales como en el triángulo. O sea que regresamos a uno de los casos descritos arriba, en el que tres puntos son colineales. Si ambas diagonales coinciden con lados del cuadrado la configuración corresponde a que dos de los vértices sean el mismo. Ver figura 3.5.

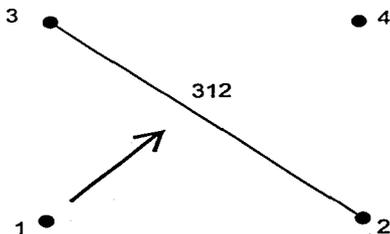


Figure 3.5: Los cuadriláteros se vuelven aristas de un triángulo

Así pues, a cada arista del cuadrilátero le podemos asignar un orden de colinealidad. Es decir, podemos etiquetar cada arista con las colinealidades que le corresponden al uno de los vértices moverse hasta ser colineal con otros dos. Más aún, podemos también admitir que dos vértices vecinos por una arista coincidan. Para tomar en cuenta esta situación etiquetemos ahora los vértices con las igualdades correspondientes. Habiendo hecho todo esto llegamos a la figura 3.6.

Una vez habiendo identificado las etiquetas correspondientes para cada una de estas piezas podemos ver que se pueden pegar. Es decir, podemos ir continuamente de una configuración en un triángulo a una de un cuadrilátero, así que, en vez de tener muchos triángulos y cuadriláteros regados por todos lados, mejor los pegamos. Este pegado se hace con aristas correspondientes y recordando todo el tiempo que hay que preservar la orientación.

Continuamos etiquetando todos los posibles triángulos y cuadriláteros, cuando los tenemos todos, los pegamos. Recordemos que teníamos en total 8 triángulos y 6 cuadriláteros, al identificar todos los que podamos en un

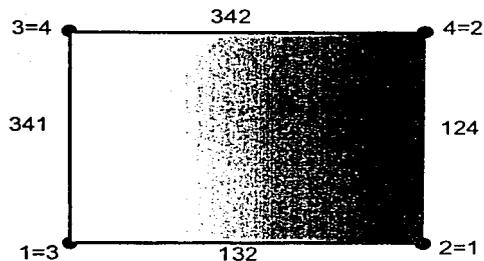


Figure 3.6: El cuadrilátero etiquetado

plano llegamos a un polígono cuyas aristas se deben identificar por pares. Esta es otra razón por la cual este espacio es una superficie. Al identificar todas las piezas restantes construimos el poliedro conocido como el *cubo truncado*. Topológicamente este espacio es la esfera  $S^2$  y esta descomposición en configuraciones induce una triangulación sobre su superficie.

Este es un espacio que tomaremos como modelo a seguir. Pues aquí llegamos a una descripción completa de la topología del espacio, de la combinatoria de las configuraciones y la relación entre ambas que se cristaliza en la triangulación descrita anteriormente.

Esto es lo que buscamos en general al estudiar las configuraciones.

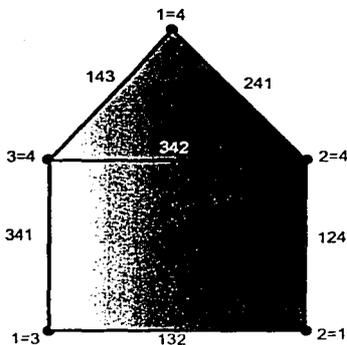


Figure 3.7: El triángulo y el cuadrilátero pegados

### 3.4 Espacios de Configuraciones de $n$ puntos en $\mathbb{R}^2$

En esta sección veremos como son en general los espacios de configuraciones afines de  $n$  puntos en el plano. Quisieramos poder dar una descripción tan completa como la del caso de 4 puntos, pero en realidad de ahí en adelante la situación se complica. Para empezar,  ${}^0_4A_2^2$  es el único espacio que podemos dibujar, pues en los casos siguientes la dimensión del espacio es demasiado grande. Notemos que  $Af_+(2)$  tiene dimensión seis, pues tiene seis grados de libertad, las cuatro entradas en la matriz y dos coordenadas del vector de traslación. Para definir en general el espacio de configuraciones orientadas de  $n$  puntos en el plano, tomamos primero  $E_n$ , el espacio de puntos en  $\mathbb{R}^n$  que generan el plano. El grupo  $Af_+(2)$  actúa libremente sobre este espacio. Ya que si un conjunto de puntos genera afinmente el plano y una transformación lineal lo deja fijo, la transformación deja fijo todo el plano. Ahora hacemos cociente bajo la acción de  $Af_+(2)$ .<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Podríamos también olvidarnos de la orientación haciendo cociente todo  $Af(2)$ , pero esa es otra historia que será contada en otra ocasión.



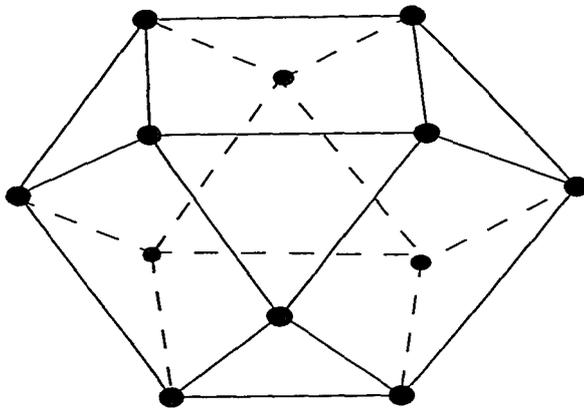


Figure 3.9: El cubo truncado

### 3.5 Espacios de Configuraciones de $n$ puntos en $\mathbb{R}^m$

Así como pensamos en espacios de configuraciones de  $n$  puntos en el plano, podemos pensar en general en configuraciones de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^m$ .

Cambiando un poco los ingredientes;

$$Af(m) = GL(m) \rtimes \mathbb{R}^m$$

$$E_{n,m} = \{(p_1, \dots, p_n) \mid p_i \in \mathbb{R}^m, \langle p_1, \dots, p_n \rangle = \mathbb{R}^m\}^4$$

Ahora  $Af(m)$  actúa libremente sobre  $E_{n,m}$ , y podemos pensar en el cociente bajo esta acción y llamarlo  ${}^0_n A^m$

Si además queremos que las configuraciones estén orientadas, usamos  $Af_+(m) = SL(m) \rtimes \mathbb{R}^m$ . En este caso obtenemos  ${}^0_n A^m_+$ , el espacio de configuraciones afines orientadas de  $n$  puntos en  $\mathbb{R}^m$ .

<sup>4</sup>Aquí  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle = \mathbb{R}^m$  quiere decir que la clausura afín de  $(p_1, \dots, p_n)$  es  $\mathbb{R}^m$ .

$${}^0_n\mathbf{A}_+^m := E_{n,m}/Af_+(m)$$

Recordemos que las *Grassmanianas* o variedades de Grassman son los espacios que tienen por elementos a los subespacios lineales de dimensión  $k$  dentro de  $\mathbf{R}^d$ .

$$G(k, d) = \{V \subset \mathbf{R}^d \mid V \text{ es un subespacio lineal de } \mathbf{R}^d\}$$

Podemos pensar también en subespacios orientados,  $G_+(k, d)$ ,

$$G_+(k, d) = \{V \subset \mathbf{R}^d \mid V \text{ es un subespacio lineal orientado de } \mathbf{R}^d\}$$

Como cada  $k$ -subespacio lineal  $V$  de  $\mathbf{R}^d$  tiene un espacio ortogonal  $V^\perp$  de dimensión  $d - k$ , encontramos que existe dualidad entre las Grassmanianas. Es decir, al mandar un espacio a su ortogonal efectivamente definimos un homeomorfismo;

$$\perp: G_+(k, d) \rightarrow G_+(d - k, d) \quad , \quad \Rightarrow G_+(k, d) \simeq G_+(d - k, d)$$

Haciendo uso de estas propiedades estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente,

**Teorema 2** *El espacio de configuraciones orientadas de  $n$  puntos en  $\mathbf{R}^m$ , es homeomorfo a la Grassmaniana de espacios lineales orientados de dimensión  $m$  en  $\mathbf{R}^{n-1}$ .*

$${}^0_n\mathbf{A}_+^m \simeq G_+(m, n - 1)$$

**Demostración :**

Sea  $P = (p_1, \dots, p_n) \in {}^0_n\mathbf{A}_+^m$ , sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $p_1 = 0$ . Definimos  $f_P: \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow \mathbf{R}^m$  como la extensión lineal de las ecuaciones,

$$f_P(e_i) = p_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 1$$

donde  $e_i$  denota el  $i$ -ésimo vector de la base canónica de  $\mathbf{R}^m$ . Sea  $\ker f$  el núcleo de  $f$  y definimos  $\Phi : {}_n^0\mathbf{A}_+^m \rightarrow G_+(n-1-m, n-1)$ , dada por  $\Phi(P) = \ker f_P$ , que está bien definida.<sup>5</sup>

Además como  $P = (p_1, \dots, p_n)$  genera afinmente, tenemos que  $(p_1, \dots, p_n)$  genera linealmente, por lo cual  $f_P$  es suprayectiva y entonces la dimensión de su núcleo  $\ker f_P$  es  $n-1-m$ , i.e.  $\dim(\Phi(P)) = n-1-m$ . A  $\Phi(P)$  le damos la orientación de  $P$ .

Demostremos primero la suprayectividad de  $\Phi$ . Sea  $V \in G_+(n-1-m, n-1)$ , consideremos su complemento ortogonal  $V^\perp$ , de dimensión  $m$ . Proyectemos ortogonalmente  $\Pi_V : \mathbf{R}^{n-1} \rightarrow V^\perp$ , entonces tenemos que  $P = (0, \Pi_V(e_1), \dots, \Pi_V(e_{n-1}))$  es una configuración de  $n$  puntos en  $V^\perp$ , ya que  $\Pi_V$  es sobre. Ahora al tomar cualquier isomorfismo lineal entre  $V^\perp$  y  $\mathbf{R}^m$  obtenemos una configuración en  $\mathbf{R}^m$ . Por construcción tenemos que  $f_P = \Pi_V$ , de modo que  $V = \ker f_P = \Phi(P)$ . Por lo tanto  $\Phi$  es sobre.

Ahora veamos la inyectividad, sean  $P = (p_1, \dots, p_n)$  y  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  dos configuraciones en  ${}_n^0\mathbf{A}_+^m$  tales que  $\Phi(P) = \Phi(Q)$ , esto es que  $\ker f_P = \ker f_Q$ . Nuevamente sin pérdida de generalidad podemos tomar  $p_1 = 0 = q_1$  y a  $p_2, \dots, p_m$  como base de  $\mathbf{R}^m$ .

Definimos  $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$  una transformación lineal tal que  $g(p_i) = q_i$  para  $i = 2, \dots, m$ . Nos queda demostrar que  $g(p_j) = q_j$  para  $j > m$ .

Sean  $\lambda_2, \dots, \lambda_m$  tales que,

$$p_j = \sum_{i=2}^m \lambda_i p_i \quad \text{para } j > m$$

Por definición de  $f_P$  tenemos que,

$$\begin{aligned} p_j &= f_P(e_j) = \sum_{i=2}^m \lambda_i f_P(e_i) \\ \Rightarrow \left( \sum_{i=2}^m \lambda_i f_P(e_i) \right) - f_P(e_j) &= 0 \\ \Rightarrow f_P \left( \sum_{i=2}^m \lambda_i e_i - e_j \right) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $\Phi(P) = \Phi(Q)$  tenemos que,

<sup>5</sup>Esto se demuestra con lujo de detalle en [Str]

$$\sum_{i=2}^m \lambda_i e_i - e_j \in \text{nuc}(f_P) = \text{nuc}(f_Q)$$

entonces,

$$f_Q\left(\sum_{i=2}^m \lambda_i e_i - e_j\right) = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^m (\lambda_i f_Q(e_i) - f_Q(e_j)) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^m \lambda_i q_i &= \sum_{i=2}^m \lambda_i f_Q(e_i) = f_Q(e_j) = q_j. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(p_j) &= g\left(\sum_{i=2}^m \lambda_i p_i\right) = \sum_{i=2}^m \lambda_i g(q_i) = \sum_{i=2}^m \lambda_i q_i = q_j \\ &\Rightarrow g(p_j) = q_j \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\Phi$  es inyectiva y biyectiva. Es claro que  $\Phi$  es bicontinua, pues al cambiar continuamente la configuración  $P$ , variamos continuamente  $V$ . Por lo tanto hemos mostrado un homeomorfismo entre  ${}^0_n A_+^m$  y  $G_+(n-1-m, n-1)$ .

Para concluir recordemos la dualidad de las Grassmanianas,  $G_+(k, d) \simeq G_+(d-k, d)$ . Haciendo uso de este otro homeomorfismo llegamos a que,

$${}^0_n A_+^m \simeq G_+(n-1-m, n-1) \simeq G_+(n-1, m)$$

Concluyendo la demostración.  $\square$

Los espacios de configuraciones afines orientadas de  $n$  puntos en el plano tienen otra propiedad interesante que vamos a utilizar. Recordemos que  $Af_+(2)$  actúa libremente en  $E_n$ . Resulta que el cociente  $q: E_n \rightarrow {}^0_n A_+^2$ , es un espacio fibrado principal. Donde para cada configuración  $C \in {}^0_n A_+^2$ , la fibra es el grupo de transformaciones afines  $Af_+(2)$ , es decir,  $q^{-1}(C) \simeq Af_+(2)$ .



# Capítulo 4

## Grupos Fundamentales

### 4.1 La Topología de las Transformaciones Afines

Estudiaremos ahora un aspecto de la topología de las funciones afines, a saber, su grupo fundamental.

Además de jugar un papel importante como funciones, resulta que las transformaciones afines tienen propiedades interesantes.

En particular, nos interesa conocer el grupo fundamental de estas transformaciones porque este va a jugar un papel importante en determinar otros grupos fundamentales.

Para poder saber quién es  $\pi_1(Af(2), T_0)$  vamos a ver que el tipo de homotopía de  $Af(2)$  es el mismo que el de dos copias ajenas de una circunferencia,  $S^1 \sqcup S^1$ . Como dos espacios que tienen el mismo tipo de homotopía tienen grupos fundamentales isomorfos, esto nos basta para poder calcular  $\pi_1(Af(2), T_0)$ .

**Teorema 3** *El grupo de transformaciones afines  $Af(2)$  tiene el mismo tipo de homotopía que dos copias ajenas de una circunferencia,  $S^1 \sqcup S^1$ .*

**Demostración :**

Primero recordemos que  $Af(2) = GL(2) \rtimes \mathbf{R}^2$ , y como conjunto es  $GL(2) \times \mathbf{R}^2$ . Como  $\mathbf{R}^2$  es un espacio que podemos contraer a un punto, podemos concluir que  $GL(2) \rtimes \mathbf{R}^2$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $GL(2)$ .

Aquí vamos a usar el proceso de ortogonalización de Gramm-Schmidt para retraer  $GL(2)$  a  $O(2)$ , el grupo de matrices ortogonales de tamaño  $2 \times 2$ .

Sea  $U \in GL(2)$ ,  $U = (u_1, u_2)$ , donde  $u_i$  es la  $i$ -ésima columna. Demos una homotopía en dos pasos de  $U$  a una matriz  $V \in O(2)$ . Sea  $H_1 : GL(2) \times I \rightarrow GL(2)$  la siguiente función:

$$H_1(U, t) = ((1-t)u_1 + t \frac{u_1}{\|u_1\|}, u_2)$$

$$\Rightarrow H_1(U, 0) = U \quad , \quad H_1(U, 1) = \left( \frac{u_1}{\|u_1\|}, u_2 \right)$$

Ya que normalizamos la primera columna  $u_1$ , proyectamos  $u_2$  sobre la recta generada por  $u_1^\perp$ , el ortogonal a  $u_1$ . A la imagen de dicha proyección la llamamos  $v$ . Habiendo encontrado  $v$ , definimos una nueva función  $H_2 : GL(2) \times I \rightarrow O(2)$ , dada por,

$$H_2(U, t) = \left( \frac{u_1}{\|u_1\|}, (1-t)u_2 + t \frac{v}{\|v\|} \right)$$

$$\Rightarrow H_2(U, 0) = \left( \frac{u_1}{\|u_1\|}, u_2 \right) \quad , \quad H_2(U, 1) = \left( \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{v}{\|v\|} \right)$$

A lo largo de todo este proceso no se cambia el determinante de la matriz, por lo tanto hemos retraído  $GL(2)$  a  $O(2)$ . Ahora bien, los elementos de  $O(2)$  que preservan la orientación del plano son rotaciones respecto al origen y tienen determinante positivo. Denotemos un elemento de esta forma por  $V_\theta$  donde  $\theta$  es el ángulo de rotación. Los elementos que invierten la orientación son los de determinante negativo. Por lo tanto, podemos identificar cada matriz en  $O(2)$  con su ángulo de rotación, que lo podemos pensar como un elemento de la circunferencia  $S^1$ . Sea  $f : O(2) \rightarrow S^1 \sqcup S^1$ , dada por  $f(V_\theta) = \theta \in S^1$ , si la matriz tiene determinante positivo la mandamos a la primera copia de  $S^1$ , sino a la segunda.

Por lo tanto  $Af(2)$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $S^1 \sqcup S^1$ .  $\square$

Sabemos que el grupo fundamental de  $S^1 \sqcup S^1$  es isomorfo a los enteros  $\mathbf{Z}$ . Esto es porque al seleccionar un punto base para los lazos en las clases de homotopía del grupo fundamental nos restringimos a una sola copia de  $S^1$ , y el grupo fundamental de  $S^1$  es un grupo libre con un generador  $\mathbb{F}_1$ , que sabemos es isomorfo a  $\mathbf{Z}$ . Así que como corolario tenemos que el grupo fundamental de las transformaciones afines es también isomorfo a los enteros.

$$\pi_1(Af(2), T_0) \simeq \pi_1(S^1 \sqcup S^1, \theta_0) \simeq \mathbf{Z}$$

## 4.2 Grassmanianas

En esta sección vamos a utilizar el homeomorfismo que describimos en la sección 3.3 para probar que la familia de Grassmanianas orientadas son simplemente conexas, es decir, que cualquier lazo dentro de alguna de estas Grassmanianas lo podemos jalar de regreso hasta el punto donde lo lanzamos.

Como mencionamos antes, el cociente  $q : E_n \rightarrow {}_n^0\mathbb{A}_+^2$ , es un espacio fibrado, que tiene la propiedad de levantamiento de homotopías. Por lo tanto podemos usar el siguiente teorema:

**Teorema 4** Sea  $p : E \rightarrow B$  un espacio fibrado,  $x_0 \in p^{-1}(b_0) = F$ , la fibra de  $p$  sobre  $b_0 \in B$ . Entonces existe un morfismo de grupos  $\partial : \pi_1(B, b_0) \rightarrow \pi_0(F, x_0)$  tal que la siguiente sucesión de grupos es exacta,<sup>1</sup>

$$\pi_1(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, x_0)$$

Aplicando directamente este resultado a lo que nosotros tenemos, llegamos a que la siguiente sucesión de grupos es exacta,

$$\pi_1(Af_+(2), p_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E_n, p_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1({}_n^0\mathbb{A}_+^2, [p_0]) \xrightarrow{\partial} \pi_0(Af_+(2), p_0)$$

Como corolario de lo que vimos en la sección 3.1, podemos afirmar que  $Af_+(2)$  tiene el mismo tipo de homotopía que la circunferencia  $S^1$ . Esto nos dice en particular que  $\pi_0(Af_+(2), p_0)$  es trivial, ya que en general siendo  $X$  un espacio topológico conexo por trayectorias, tenemos que  $\pi_0(X, x)$  es trivial. De donde nuestro problema se reduce a estudiar la siguiente sucesión exacta;

$$\pi_1(Af_+(2), p_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E_n, p_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1({}_n^0\mathbb{A}_+^2, [p_0]) \xrightarrow{\partial} 0$$

Por ser exacta, tenemos que  $\ker \partial = \text{im } q_*$ . Por lo que concluimos que  $q_*$  es sobre, ya que  $\ker \partial = \pi_1({}_n^0\mathbb{A}_+^2, [p_0])$  implica que  $\text{im } q_* = \pi_1({}_n^0\mathbb{A}_+^2, [p_0])$ . Por lo tanto, por el primer teorema de morfismos de grupos, para calcular  $\pi_1({}_n^0\mathbb{A}_+^2, [p_0])$  tenemos que fijarnos en el cociente de  $\pi_1(E_n, p_0)$  por  $i_*(\pi_1(Af_+(2), p_0))$ .

Entonces lo que nos hace falta para poder utilizar la sucesión exacta que encontramos usando el Teorema 4, es estudiar  $\pi_1(E_n, p_0)$ . Para lo cual

<sup>1</sup>Ver [Hus] pag. 8

haremos uso de otro teorema bien conocido, que enunciaremos aquí sin demostración

**Teorema 5** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y  $N \subset M$  una subvariedad diferenciable de dimensión  $n$  con  $m - n \geq 3$ . Sea  $i : (M \setminus N) \hookrightarrow M$  la inclusión, entonces  $i_* : \pi_1(M \setminus N, p) \rightarrow \pi_1(M, p)$  es un isomorfismo.*

Para poder aplicar este teorema veamos primero que  $E_n$  es un abierto de  $\mathbf{R}^{2n}$ , ya que si tomamos una  $n$ -ada de puntos en el plano,  $C \in E_n$  podemos encontrar una vecindad de  $C$  que se quede completamente contenida en  $E_n$ . Además  $E_n$  se obtiene al quitar de  $\mathbf{R}^{2n}$  los conjuntos de  $n$  puntos que no generan afinmente el plano, llamémosle  $N$  al espacio de estos conjuntos. Este espacio  $N$  es una subvariedad de  $\mathbf{R}^{2n}$  que es una variedad diferenciable, por lo tanto  $N$  hereda la estructura diferenciable y la podemos pensar como una subvariedad diferenciable de  $\mathbf{R}^{2n}$ .

A los elementos de  $N$  los podemos describir de manera explícita, ya que si no generan afinmente el plano quiere decir que los  $n$  puntos se encuentran en una recta, alineados dentro de ella. Cada punto se puede mover solo dentro de esta recta, por lo tanto  $N$  tiene dimensión al menos  $n$ . Además debemos tomar en cuenta que la recta se puede estar moviendo dentro del plano. Pero recordemos que a toda recta  $R$  situada libremente dentro del plano le podemos hacer corresponder un plano por el origen  $P$  en  $\mathbf{R}^3$ . Pensemos que la recta  $R$  es la intersección de  $P$  con el plano  $z = 1$ , esta asignación esta bien definida y es de hecho un homeomorfismo. Ahora el espacio de todos los planos por el origen en  $\mathbf{R}^3$  lo conocemos bien, es el plano proyectivo  $\mathbf{RP}^2$ , que tiene dimensión 2. Por lo tanto  $N$  tiene dimensión  $n + 2$ .

Por definición tenemos que  $E_n = \mathbf{R}^{2n} \setminus N$ , así que tomando  $M = \mathbf{R}^{2n}$ , aplicamos el Teorema 5 y llegamos a que,

$$\pi_1(E_n, p) = \pi_1(\mathbf{R}^{2n} \setminus N, p) \xrightarrow{i_*} \pi_1(\mathbf{R}^{2n}, p)$$

es un isomorfismo cuando  $2n - (n + 2) \geq 3 \Leftrightarrow n \geq 5$ . Ahora notemos que  $\pi_1(\mathbf{R}^{2n}, p)$  es trivial, de donde  $\pi_1(E_n, p)$  es trivial para  $n \geq 5$ .

Aquí todavía no se acaban las ramificaciones de este resultado, pues esto último implica que el morfismo  $q_*$  hace que  $\pi_1({}_n^0\mathbf{A}_+^2, [p_0])$  sea también trivial para  $n \geq 5$ , pues ya vimos que  $q_*$  es sobre.

Usando el homeomorfismo entre  ${}_n^0\mathbf{A}_+^2$  y la Grassmaniana orientada  $G_+(2, n-1)$ , llegamos a que  $\pi_1(G_+(2, n-1), P)$  es trivial, pues cuando dos espacios son homeomorfos, sus grupos fundamentales son isomorfos.

Así es que se desprenden los siguientes resultados cuando  $n \geq 5$  ;

$$\begin{aligned}\pi_1(E_n, p) &= 0 \\ \pi_1({}_n^0\mathbf{A}_+^2, [p_0]) &= 0 \\ \pi_1(G_+(2, n-1), P) &= 0\end{aligned}$$

Es decir, usando todo el trabajo desarrollado en este capítulo hemos llegado a probar que toda la familia de espacios de configuraciones afines orientadas de puntos en el plano tiene grupo fundamental trivial.

Además, ya que  $G_+(2, 3)$  es la esfera  $S^2$ , tenemos que todas las Grassmanianas orientadas de 2 planos en  $\mathbf{R}^{n-1}$  también tienen grupo fundamental trivial.

Pero de la misma manera en la que generalizamos el homeomorfismo entre los espacios de configuraciones y las Grassmanianas, generalicemos ahora estos resultados.

Sea  $E_{n,m}$ , como antes, el espacio de conjuntos de  $n$  puntos, ahora en  $\mathbf{R}^m$ , que generan afinmente  $\mathbf{R}^m$ .

$$E_{n,m} = \{(p_1, \dots, p_n) | p_i \in \mathbf{R}^m, \langle p_1, \dots, p_n \rangle = \mathbf{R}^m\}^2$$

Y recordemos que definimos el espacio de configuraciones afines orientadas de  $n$  puntos en  $\mathbf{R}^m$  como ;

$${}_n^0\mathbf{A}_+^m := E_{n,m}/Af_+(m)$$

Apliquemos el mismo razonamiento que para el caso de  $\mathbf{R}^2$  y veamos a donde llegamos.

El cociente  $q : E_{n,m} \rightarrow {}_n^0\mathbf{A}_+^m$  es un espacio fibrado por las mismas razones de antes, es el cociente de una acción libre principal. Por lo tanto tenemos asegurada la siguiente sucesión exacta;

$$\pi_1(Af_+(m), p_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E_{n,m}, p_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1({}_n^0\mathbf{A}_+^m, [p_0]) \xrightarrow{\theta} \pi_0(Af_+(m), p_0)$$

Aquí primero tenemos que ver que  $\pi_0(Af_+(m), p_0)$  es trivial, para estar seguros de que  $q_*$  es sobre. Pero de la misma manera en la que retrimos

---

<sup>2</sup>Aquí  $\langle p_1, \dots, p_n \rangle = \mathbf{R}^m$  quiere decir que la clausura afin de  $(p_1, \dots, p_n)$  genera a  $\mathbf{R}^m$ .

$Af_+(2)$  a  $SO(2)$ , retracemos  $Af_+(m)$  a  $SO(m)$ , que tiene el tipo de homotopía de  $S^{n-1}$ . Por lo tanto  $\pi_0(Af_+(m), p_0)$  es trivial.

Entonces regresamos a la sucesión;

$$\pi_1(Af_+(m), p_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E_{n,m}, p_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1({}_nA_+^m, [p_0]) \xrightarrow{\partial} 0$$

De nueva vez, para calcular  $\pi_1({}_nA_+^m, [p_0])$  basta ver que hace  $q_*$ .

Siguiendo exactamente los mismo pasos que antes, llamémosle  $N_m$  al espacio de los conjuntos de  $n$  puntos en  $\mathbf{R}^m$  que no generan afinmente  $\mathbf{R}^m$ .

Calculemos pues la dimensión de  $N_m$ . Si un conjunto  $C$  de  $n$  puntos en  $\mathbf{R}^m$  no genera afinmente  $\mathbf{R}^m$ , es por que todos sus puntos se deben quedar dentro de un  $(m-1)$ -espacio de  $\mathbf{R}^m$ . Por lo tanto  $N_m$  tiene dimensión al menos  $n(m-1)$ , pues estos  $n$  puntos tienen cada uno  $m-1$  grados de libertad para moverse dentro del  $(m-1)$ -espacio. Además este  $(m-1)$ -espacio se puede mover libremente dentro de  $\mathbf{R}^m$ , llevándose junto con él a  $C$ , y a lo largo de todo este movimiento  $C$  se queda dentro de  $N_m$ . Es decir, que además le tenemos que sumar a la dimensión de  $N_m$  el hecho de que el  $(m-1)$ -espacio se mueva libremente dentro de  $\mathbf{R}^m$ .

Analogamente a como procedimos antes, recordemos que un  $(m-1)$ -espacio libre dentro de  $\mathbf{R}^m$  lo podemos pensar como un  $m$ -espacio por el origen dentro de  $\mathbf{R}^{m+1}$ . Como ya sabemos bien, el espacio de todos los  $m$ -espacios por el origen dentro de  $\mathbf{R}^{m+1}$ , es el espacio proyectivo  $\mathbf{R}P^m$  que tiene dimensión  $m$ . Todo lo cual nos lleva a la conclusión que  $N_m$  tiene dimensión  $n(m-1) + m$ .

Observemos que  $N_m$  es una subvariedad diferenciable de  $\mathbf{R}^{nm}$ , y que  $\mathbf{R}^{nm}$  tiene grupo fundamental trivial. Por lo tanto, haciendo uso nuevamente del Teorema 5, llegamos a que los grupos fundamentales de  $E_{n,m}$  y  $\mathbf{R}^{nm}$  son isomorfos cuando tengamos que,

$$(nm) - [n(m-1) + m] \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq m + 3$$

Por lo tanto cuando  $n \geq m + 3$  tenemos que,

$$\pi_1(E_{n,m}, p_0) \simeq \pi_1(\mathbf{R}^{nm}, p) = 0$$

Pero como  $q_*$  es sobre, esto implica que,

$$\pi_1({}_nA_+^m, [p_0]) = 0$$

Además tenemos el homeomorfismo entre los espacios de configuraciones orientadas y Grassmanianas orientadas, lo que nos dá como fruto,

$$\pi_1(G_+(m, n-1), P) = 0$$

cuando  $n-1 \geq m+2$ .

Así que, usando las relaciones que encontramos en el segundo capítulo, mas el hecho de que  $G_+(n-2, n-1)$  es igual a la esfera  $S^{n-2}$ , pudimos llegar a demostrar que toda la familia de Grassmanianas orientadas tienen grupo fundamental trivial.

### 4.3 Trenzas Puras y Configuraciones

En esta sección relacionaremos los grupos de trenzas puras con el grupo fundamental de un espacio de configuraciones. Sea,

$$E'_n = \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \in \mathbb{R}^2, p_i \neq p_j \quad \forall i \neq j\}$$

Recordemos que el grupo de  $n$ -trenzas puras  $P_n$  es isomorfo al grupo fundamental de  $E'_n$ . Denotemos por  $F_n$  el espacio de  $n$  puntos *distintos* en  $\mathbb{R}^2$  y que además generan afinmente  $\mathbb{R}^2$ , es decir,

$$F_n = \{(p_1, \dots, p_n) : p_i \in \mathbb{R}^2, \langle p_1, \dots, p_n \rangle = \mathbb{R}^2, p_i \neq p_j \quad \forall i \neq j\}$$

Aquí volvemos a hacer uso del Teorema 5, pensando en la inclusión  $i : F_n \rightarrow E'_n$ . Para asegurar que el morfismo inducido  $i_*$  es un isomorfismo sólo hay que ver la dimensión de  $E'_n \setminus F_n$ . Siguiendo el mismo razonamiento que antes, un elemento en  $E'_n \setminus F_n$  es un conjunto de  $n$  puntos distintos en el plano que no lo generan afinmente. Por lo tanto los  $n$  puntos se encuentran alineados y por lo tanto  $\dim(E'_n \setminus F_n) = n+2$ . Por lo que si  $n \geq 5$ ,  $i_*$  es isomorfismo. Entonces,

$$\pi_1(F_n, p) \simeq \pi_1(E'_n) \simeq P_n$$

Como  $F_n$  es subconjunto de  $E_n$ ,  $Af_+(2)$  actúa libremente sobre  $F_n$ . Veamos que sucede aquí cuando hacemos cociente  $F_n$  bajo esta acción. Sea  ${}^0_n\mathbb{D}_+^2$  este cociente.

$${}^0_n\mathbb{D}_+^2 =: F_n / Af_+(2)$$

Igual que antes,  $q : F_n \rightarrow_n^0 \mathbb{D}_+^2$  es un espacio fibrado. Por lo que nuevamente podemos utilizar la sucesión exacta,

$$\pi_1(Af_+(2), p_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(F_n, p_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1({}_n^0 \mathbb{D}_+^2, [p_0]) \xrightarrow{\partial} 0$$

Por lo tanto  $q_*$  es sobre y tenemos que,

$$\pi_1({}_n^0 \mathbb{D}_+^2, [p_0]) = \frac{\pi_1(F_n, p_0)}{i_*(\pi_1(Af_+(2), p_0))}$$

Sabemos además que  $\pi_1(Af_+(2), p_0)$  es isomorfo al grupo libre de un generador  $\mathbb{F}_1$ , i.e.  $\pi_1(Af_+(2), p_0) = \langle g \rangle$ . Por lo cual nos basta ver el grupo generado por  $i_*(g)$ . Ya que  $\langle i_*(g) \rangle = i_*(\pi_1(Af_+(2), p_0))$ , pues se mandan generadores en generadores.

Ahora bien,  $g$  corresponde a un camino de matrices que van dando una vuelta al plano y al regresar al inicio el plano dió en total una vuelta completa. Entonces  $i_*(g)$  es el elemento en el que los  $n$  puntos en el plano inicial estan fijos, al bajar el plano empiezan a rotar, dando una vuelta completa al terminar. Esto implica que  $i_*(g) = \gamma_n$ , donde  $\gamma_n$  era la trenza cuyos hilos daban una vuelta completa al bajar. Recordemos que el grupo generado por  $\gamma_n$ , es el centro de las trenzas puras,  $\langle \gamma_n \rangle = Z(P_n)$ . Por lo tanto,

$$i_*(\pi_1(Af_+(2), T)) = \langle i_*(g) \rangle = \langle \gamma_n \rangle = Z(P_n).$$

De donde podemos concluir que si  $n \geq 5$ , entonces el grupo fundamental del espacio de configuraciones orientadas de  $n$  puntos distintos en el plano,  ${}_n^0 \mathbb{D}_+^2$ , es el grupo de trenzas puras módulo su centro,  $P_n/Z(P_n)$ .

$$\pi_1({}_n^0 \mathbb{D}_+^2, [p_0]) \simeq \frac{P_n}{Z(P_n)}$$

La descripción de este grupo la podemos hacer todavía más explícita, pues tenemos una presentación de  $P_n$  y sabemos como es  $\gamma_n$  en terminos de estos generadores.

De la sección 3 del capítulo 2, recordemos que,

$$P_n \simeq \langle \{A_{i,j}\} | r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle.$$

El generador del centro de las trenzas de colores es,

$$\gamma_n = (A_{1,2})(A_{1,3}A_{2,3}) \dots (A_{1,n} \dots (A_{n-1,n}),$$

si ahora llamamos  $I$  a la trenza trivial y  $r_5$  a la siguiente relación,

$$r_5 : (A_{1,2})(A_{1,3}A_{2,3}) \dots (A_{1,n} \dots (A_{n-1,n}) = I$$

obtenemos pues una presentación para  $\frac{P_n}{Z(P_n)}$ ,

$$\frac{P_n}{Z(P_n)} \simeq \langle \{A_{i,j}\} | r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \rangle .$$

Por lo tanto,

**Teorema 6** *Sea  ${}^0D_+^2$  el espacio de configuraciones de  $n$  puntos distintos en el plano. Entonces,*

$$\pi_1({}^0D_+^2, \{p_0\}) \simeq \langle \{A_{i,j}\} | r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 \rangle .$$

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA



# Capítulo 5

## Trenzas Afines

Hemos visto que para  $n \geq 5$  encontramos el isomorfismo  $\pi_1({}^0\mathbb{D}_+^n, [p_0]) \simeq \frac{\mathbb{F}_n}{\mathbb{Z}\langle p_n \rangle}$ . ¿Que pasa cuando  $n < 5$ ? Los casos  $n = 1$ ,  $n = 2$ , no tienen mucho sentido y si  $n = 3$  el espacio  ${}^0\mathbb{D}_+^3$  es un solo punto, puesto que 3 puntos que generen el plano son afinmente equivalentes a cualesquiera otros 3 puntos que generen el plano.

Para  $n = 4$  ya vimos que  ${}^0\mathbb{A}_+^2$  es homeomorfo a la esfera  $S^2$ . Sea,

$$E'_4 = \{(p_1, \dots, p_4) | p_i \in \mathbb{R}^2, p_i \neq p_j, \forall i \neq j\}$$

entonces,

$$\pi_1(E'_4, p) \simeq P_4.$$

Por otro lado, sea,

$$F_4 = \{(p_1, \dots, p_4) | p_i \in \mathbb{R}^2, \langle p_1, \dots, p_4 \rangle = \mathbb{R}^2, p_i \neq p_j, \forall i \neq j\}$$

entonces el espacio de configuraciones de 4 puntos distintos en el plano está definido como,

$${}^0\mathbb{D}_+^4 := F_4 / Af_+(2)$$

Podemos obtener  ${}^0\mathbb{D}_+^4$  quitando de  ${}^0\mathbb{A}_+^2$  las configuraciones que corresponden a que dos puntos sean el mismo. Esto quiere decir que tenemos que quitar los vértices del cubo truncado. Entonces  ${}^0\mathbb{D}_+^4$  es  $S^2$  menos doce puntos, lo cual implica que  $\pi_1({}^0\mathbb{D}_+^4, p) \simeq \mathbb{F}_{11}$ , donde  $\mathbb{F}_{11}$  denota el grupo libre con once generadores.

Veamos las dimensiones de los espacios involucrados,  $E'_4 \subset (\mathbb{R}^2)^4$ , de hecho es un abierto de  $(\mathbb{R}^2)^4$ , entonces  $\dim(E'_4) = 8$ . Haciendo un cálculo análogo a los anteriores llegamos a que  $\dim(E'_4 \setminus F_4) = 4 + 2 = 6$ ,

$$\Rightarrow \dim(E'_4) - \dim(E'_4 \setminus F_4) = 8 - 6 = 2.$$

Es decir, el espacio de conjuntos de 4 puntos en el plano que no lo generan tiene codimensión 2 en  $E'_4$ . Esto nos dice que pueden haber lazos no triviales en  $F_4$  que son triviales en  $E'_4$ . Veamos las consecuencias.

Llamemos  $T_4$  a  $\pi_1(F_4, p)$ , un elemento  $\tau \in T_4$  es llamada una trenza afín y puede pensarse como 4-trenza tal que los conjuntos de 4 puntos en los planos que la barren nunca se alinean. Dos de estas trenzas afines son equivalentes si podemos ir continuamente deformando una en la otra por medio de trenzas afines. Usando la sucesión exacta descrita en la sección anterior, tenemos que,

$$\mathbb{F}_{11} \simeq \pi_1(\mathbb{Q}\mathbb{D}_+^2, p) \simeq \frac{T_4}{\langle g \rangle}$$

donde  $g$  es el giro completo del plano.

Vamos a mostrar que existen trenzas que son equivalentes en  $P_4$  y dejan de serlo en  $T_4$ . De lo cual concluimos que para pasar de una trenza a otra existe un momento en el que los 4 puntos de la intersección de la trenza con un plano que la barre, se alinean.

Recordando la notación del primer capítulo,  $A_{i,j}$  denota la trenza pura donde el  $i$ -ésimo hilo le dá vuelta al  $j$ -ésimo y regresa. De las relaciones de  $P_n$  tenemos que  $A_{1,2}A_{3,4} = A_{3,4}A_{1,2}$  en  $P_4$ .

Sean  $\alpha = A_{1,2}$  y  $\beta = A_{3,4}$  pensadas ahora en  $T_4$ . Supongamos que  $\alpha$  y  $\beta$  conmutan en  $T_4$ , es decir,  $\alpha\beta = \beta\alpha$ . Esto implica que sus clases correspondientes  $[\alpha]$  y  $[\beta]$  conmutan en el cociente  $\frac{T_4}{\langle g \rangle}$ , es decir  $[\alpha][\beta] = [\beta][\alpha]$ . Ahora  $\frac{T_4}{\langle g \rangle}$  es un grupo libre, de hecho es  $\mathbb{F}_{11}$ , y si dos elementos en un grupo libre conmutan, deben ser potencias de un mismo elemento. Entonces existe  $[c] \in \frac{T_4}{\langle g \rangle}$  tal que,

$$[\alpha] = [c]^n \quad \text{y} \quad [\beta] = [c]^m$$

lo cual implica que,

$$c^n = \alpha g_1 \quad \text{y} \quad c^m = \beta g_2$$

donde  $g_1$  y  $g_2$  son giros.

$$\Rightarrow \alpha^m g_1^m = (\alpha g_1)^m = c^{mn} = (\beta g_2)^n = \beta^n g_2^n$$

$$\therefore \alpha^m = \beta^n g_3$$

Donde  $g_3 = g_2^n g_1^{-m}$ . Pero  $\alpha^m$  solo enreda los primeros dos hilos y nunca el primero y el segundo con el tercero y el cuarto como lo hace  $\beta^n g_3$ , a menos de que  $g_3$  sea el giro trivial. Por lo tanto  $\alpha^m = \beta^n$ , esto es claramente una contradicción, pues de nuevo  $\alpha^m$  enreda solo los primeros dos hilos y  $\beta^n$  enreda solo los últimos dos.

$$\therefore \alpha\beta \neq \beta\alpha \text{ en } T_4$$

Esto mismo quiere decir que  $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ , que se desenreda en  $P_4$ , no es trivial en  $T_4$ . Por lo tanto para desenredarse, los puntos en el plano que barre a la trenza se deben alinear en algún momento. Este es un hecho geométrico, nada obvio, que aquí demostramos usando las interpretaciones algebraicas a las que llegamos.

Más aún, la inclusión  $i : F_4 \hookrightarrow E'_4$  induce el morfismo  $i_* : T_4 \rightarrow \pi_1(E'_4, p) \simeq P_4$ . Cuyo núcleo,  $\ker i_*$ , es un subgrupo de  $\pi_1(F_4, p)$ , y contiene elementos que para desenredarse en  $P_4$ , los puntos del plano que barre la trenza se deben alinear.



# Capítulo 6

## Conclusiones

Hemos visto que existe una relación muy estrecha entre las trenzas y las configuraciones afines de puntos. Llegamos a describir el grupo fundamental de un espacio de configuraciones afines orientadas de puntos distintos en el plano, en términos de la presentación del grupo de trenzas puras. Lo cual resultó ser interesante pues si no pedimos que los puntos sean distintos, el grupo fundamental es trivial. Analicemos esto desde un punto de vista un poco más abstracto. Tomamos objetos de dimensión cero, puntos, y vimos que su grupo fundamental se podía expresar usando trenzas, una colección de objetos de dimensión uno.

Si ahora nos preguntamos que sucede con espacios de configuraciones de rectas distintas, la intuición nos dice que geoméricamente un elemento de su grupo fundamental debe ser una colección de superficies regladas y entrelazadas, es decir, trenzadas o anudadas. Donde además la intersección de un hiperplano con esta colección de superficies nos da una configuración de rectas. Claro que habría que precisar la dimensión del espacio en el que están metidas estas rectas y del hiperplano. También habría que pensar las consecuencias que tiene hacer cociente en este caso con el grupo afín, ya que en las trenzas puras lo que nos hizo falta fue hacer cociente con el centro.

La generalización de esta situación podría ser que el grupo fundamental de un espacio de configuraciones de  $m$ -planos, es decir, hiperplanos de dimensión  $m$ , sea un grupo cuyos elementos son objetos geoméricos de dimensión  $m + 1$  que se trenzan entre sí, módulo cierta consideración análoga al hacer cociente el centro de las trenzas puras.

Por otro lado podríamos ver qué sucede con toda la sucesión exacta de grupos de homotopía, no solo con el final. Es decir, estudiar.

$$\dots \rightarrow \pi_k(Af_+(m), p) \rightarrow \pi_k(E_{n,m}, p) \rightarrow \pi_k({}_n^0A_+^m, [p]) \rightarrow \pi_{k-1}(Af_+(m), p) \rightarrow \dots$$

Solo para darnos una idea, observemos que  $Af_+(m)$  lo podemos retraer a  $SO(m)$ , el grupo de matrices ortogonales de determinante positivo. El problema es que en general  $SO(m)$  no tiene el tipo de homotopía de  $S^{m-1}$ , como en el caso  $m = 2$ . En general, calcular el grupo fundamental de  $SO(m)$  es un problema difícil. Mucho más complicado todavía es pensar en qué grupo es  $\pi_k(SO(m), p_0)$ , que es isomorfo a  $\pi_k(Af_+(m), p_0)$ . Por lo tanto es mas delicado usar la sucesión exacta como lo hicimos para el caso  $k = 1$ . Sin embargo podemos afirmar que hay una relación entre  $\pi_k(SO(m), p_0)$  y los grupos de homotopía de las familias de Grassmanianas que estudiamos en el capítulo anterior, así como los grupos de homotopía de los espacios de configuraciones afines orientadas  ${}_n^0A_+^m$ .

# Bibliografía

- [Ad] C.C. Adams, *The Knot Book*, W.H. Freeman and Company, New York, (1994)
- [Ar] L. Armas Sanabria, *Grupos de Trenzas y Cerraduras de Trenzas Puras*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico D.F. (2000)
- [Art] E. Artin, *Theory of Braids*, Annals of Mathematics, No.48, (1947), 101-126
- [Big] S. Bigelow, *Braid Groups are Linear*, Journal of the American Mathematical Society, Vol.14, No.2, (2001), 471-486
- [Bir] J. Birman, *Braids. Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, N.J. (1974), Annals of Mathematics Studies, No.82
- [BMO] J. Bracho, L. Montejano, D. Oliveros, *The Topology of the Space of Transversals through the Space of Configurations*, Topology and its Applications, Vol.120, No.1-2, (2002), 92-103
- [Bur] W. Burau, *Über Verkettungsgruppen*, Abh. Mathem. Seminar Hamburg, (1936), 171-178
- [FN] R. Fox, L. Neuwirth, *The Braid Groups*, Math. Scand., No.10, (1962), 119-126
- [FR] M. Falk, R. Randell, *Pure Braid Groups and Products of Free Groups*, Contemporary Mathematics, Vol.78, (1988), 271-228
- [FRZ] R. Fenn, D. Rolfsen, J. Zhu, *Centralisers in the Braid Group and Singular Braid Monoid*, L'enseignement Mathématique t.45, (1996), 75-96

- [Gar] F.A. Garside, *The Braid Group and Other Groups*, Quarterly Journal of Mathematics Oxford Second Series, Vol.20, No.8, (1989)
- [Han] V.L. Hansen, *Braids and Coverings*, London Mathematical Society Student Texts 18, Cambridge University Press, (1989)
- [Hir] D. Hirsch, *Differential Topology*, Springer Verlag, New York, (1994), Graduate Texts in Mathematics, 20
- [Hus] D. Husemoller, *Fibre Bundles*, Springer Verlag, New York, (1964), Graduate Texts in Mathematics, 20
- [Lic] W.B.R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer Verlag, New York, (1997), Graduate Texts in Mathematics, 175
- [LP] D. Long, M. Patton, *The Burau Representation Is Not Faithful For  $n \geq 6$*  Topology, Vol.32, No.2, (1998), 439-447
- [Rol] D. Rolfsen, *Knots and Links*, Mathematical Lecture Series 7, Publish or Perish, Houston, (1976)
- [Mau] M. Mauvois Romero, *Espacios de Configuraciones*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, México D.F. (2001)
- [MB] S. MacLane, G. Birkhoff, *Algebra*, Chelsea Publishing Company, N.Y., (1967)
- [SW] S. Hamish, W. Bert, *Orderings of mapping class groups after Thurston*, Enseign. Math. (2) 46 (2000), no. 3-4, 279-312.
- [Str] Ricardo Strausz Santiago, *Separoides: El Complejo de Radon*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional Autónoma de México, Mexico D.F. (2001)