

03094



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTONOMA DE MEXICO

---

---

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIA DE LA TIERRA

CALCULO DE PROPIEDADES EFECTIVAS EN ROCAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DR. EN CIENCIAS

(MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS TERRESTRES)

P R E S E N T A

OSCAR CERAPIO VALDIVIEZO MIJANGOS

DIRECTOR DE TESIS: DR. FEDERICO SABINA CISCAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Agradecimientos

Agradezco el financiamiento otorgado por los proyectos CoNaCyT No. 32237-E y PA-PIIT (DGSCA, UNAM) No. IN103301 para la realización de esta tesis. Al CoNaCyT por la beca que se me otorgo para la realización de los estudios de doctorado. Al Departamento de Matemáticas y Mecánica (IIMAS, UNAM), el apoyo secretarial y logístico prestado por Alma Rosa Rodríguez y Ma. de Lourdes Romero, también el apoyo computacional de Ana Cecilia Arteaga. A los Drs. Julian Bravo Castillero y Reinaldo Rodríguez Ramos y al M.Sc, Raúl Guinovart Díaz sus sugerencias y programas que me permitieron avanzar en el trabajo de tesis. También quiero agradecer a los organizadores del "4th Workshop on Applications of the Physics of Porous Media" la oportunidad de presentar los resultados de esta tesis.

# Índice General

Introducción	iii
<b>1 Termoelasticidad</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción	1
1.2 Coordenadas	1
1.3 Deformaciones	4
1.4 El teorema del transporte	6
1.5 La ecuación de continuidad	8
1.6 Balance de la cantidad de movimiento lineal	9
1.7 Balance de la cantidad de momento angular	11
1.8 Conservación de la energía	13
1.9 Las relaciones constitutivas de la termoelasticidad	15
1.10 La ecuación de conducción del calor generalizada	20
1.11 Casos particulares del tensor de módulos termoelásticos	23
<b>2 Homogeneización</b>	<b>27</b>
2.1 Introducción	27
2.2 Un ejemplo de homogeneización en una dimensión	28
2.3 Homogeneización del problema dinámico en elasticidad	33
2.4 Propiedades efectivas de medios periódicos (celda cuadrada)	38
2.4.1 Planteamiento del problema	38
2.4.2 Relaciones exactas	41
2.4.3 El problema de deformación antiplana ${}_{13}L$	43
2.4.4 El problema de deformación plana ${}_{11}L$	46
2.4.5 El problema antiplano ${}_{12}L$	50
2.5 Propiedades efectivas de medios periódicos (celda hexagonal)	51
2.5.1 Planteamiento del problema	51
2.5.2 Relaciones exactas	52
2.5.3 El problema de deformación antiplana ${}_{31}L$	53
2.5.4 El problema de deformación antiplano ${}_{11}L$	55
2.6 Fibras vacías y completamente rígidas	57
2.7 Consideraciones numéricas	59
2.8 Conclusiones	62

<b>3</b>	<b>El método autoconsistente para un medio termoelástico</b>	<b>65</b>
3.1	Introducción . . . . .	65
3.2	Planteamiento del problema . . . . .	66
3.3	La función de Green de un medio termoelástico . . . . .	68
3.4	El problema de un solo dispersor . . . . .	73
3.5	El cálculo de las integrales sobre una inclusión esférica . . . . .	77
3.6	Las ecuaciones autoconsistentes del problema termoelásticos . . . . .	82
3.6.1	El caso desacoplado . . . . .	85
3.7	Discusión . . . . .	85
3.8	Conclusiones . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Conclusiones generales y problemas abiertos</b>	<b>91</b>
4.1	Método de Homogeneización Asintótica . . . . .	91
4.2	El Método Autoconsistente . . . . .	92
<b>A</b>	<b>Propiedades de las funciones elípticas</b>	<b>95</b>
<b>B</b>	<b>Propagación de ondas en medios termoelásticos</b>	<b>99</b>
<b>C</b>	<b>Anisotropía en elasticidad</b>	<b>101</b>
C.1	Definición . . . . .	101
C.2	Un medio anisótropo simple; una pila de capas isotropas . . . . .	101
C.3	Simetrías en cristales . . . . .	103
C.4	La ecuación de Christoffel . . . . .	108
<b>Anexos</b>		<b>117</b>

# Introducción

El imprecendente incremento tanto de calidad como de cantidad de datos geofísicos ha mejorado dramáticamente nuestro conocimiento acerca de la superficie de la tierra. Este desarrollo no ha sido motivado solamente por el incremento en exploración de yacimientos minerales, reservas de energía (gas, petróleo, energía geotérmica, etc.) sino también por el estudio de sismos naturales y generados por el hombre (detonaciones nucleares). En nuestros días, medidas acústicas, eléctricas y otras son hechas en forma rutinaria por distintas técnicas geofísicas. El objetivo de este trabajo consiste en calcular las propiedades efectivas de rocas las cuales por su misma naturaleza son medios heterogéneos y anisótropos. Las propiedades efectivas son aquellas cantidades medibles en el laboratorio, por ejemplo, la rigidez, la compresibilidad, la densidad, el coeficiente de expansión volumétrica, el calor específico, la conductividad térmica, etc. que describen al medio heterogéneo en forma global. Una vez teniendo estas propiedades es posible conocer las velocidades de propagación de ondas en esta clase de medios, es decir, conocer las velocidades en medios heterogéneos y anisótropos. Y aquí me gustaría citar textualmente lo siguiente:

*“Yet, despite all the problems with velocity, we are reluctant to give up the hope that somewhere, if only we could find it, there must be a master variable connecting velocity and geology - a master variable meaningful to a geologists, and yet leading to the physical property of velocity.”*

Mensaje dirigido por Anstey al “the EAEG/SEG workshop on estimation and practical use of seismic velocities”, Anstey (1990).

Aquí se presentan dos modelos matemáticos con los cuales es posible hallar propiedades efectivas de medios heterogéneos y anisótropos y como consecuencia se puede calcular las velocidades correspondientes a esas propiedades efectivas. Las dos técnicas matemáticas para calcular propiedades efectivas de medios heterogéneos son: El *Método de Homogeneización Asintótica* y el *Método Autoconsistente*. Ambas técnicas han sido utilizadas recientemente para caracterizar medios compuestos. Por ejemplo, el MHA se usó para describir medios que contienen fibras arregladas en forma biperiódica donde los constituyentes, es decir cada uno de los medios que conforman el medio inhomogéneo, son homogéneos (Pobedrya, 1984), transversalmente isotropos (Rodríguez-Ramos, et.al., 2001) y aquí se presentan resultados originales cuando los constituyentes

tienen anisotropía cúbica. Por otro lado, también el Método Autoconsistente se utilizó para hallar propiedades mecánicas que describen un medio heterogéneo donde hay inclusiones de forma esférica distribuidas aleatoriamente (Sabina y Willis, 1988) y en este trabajo se presenta el método autoconsistente para hallar propiedades, además de las elásticas las termoelásticas, es decir, la conductividad térmica, el coeficiente de expansión volumétrica y el calor específico.

En el primer capítulo se establecen las ecuaciones básicas de la termoelasticidad a partir de primeros principios. Para ello se usan las leyes de la mecánica clásica y de la termodinámica debido a que se consideran efectos térmicos. Las ecuaciones constitutivas en este caso son conocidas como las ecuaciones de Duhamel-Neumann. En el caso particular cuando la interacción es puramente elástica se recuperan las ecuaciones de Navier.

En el capítulo segundo se estudia el Método de Homogeneización Asintótica (MHA). Este es un método matemático completamente formal con el cual es posible hallar propiedades globales de medios heterogéneos a partir de su microestructura. Esta técnica parte del hecho de que hay dos escalas, una a nivel microscópico y la otra a nivel macroscópico y ambas están relacionadas por medio de un parámetro pequeño  $\epsilon$ . Para cada una de las variables  $u$  y  $\sigma$ , desplazamiento y esfuerzo respectivamente, se propone un desarrollo asintótico en potencias de  $\epsilon$ . Estas variables se sustituyen en las ecuaciones que gobiernan la microescala, se agrupan las ecuaciones resultantes en potencias de  $\epsilon$  y se van resolviendo a los ordenes más bajos. Después se promedian las ecuaciones a segundo orden en  $\epsilon$  y se toma en cuenta la geometría a nivel microscópico. En este caso se consideran fibras arregladas en forma biperiódica. Lo que conduce a ecuaciones y propiedades que describen el medio inhomogéneo a nivel macroscópico. Las propiedades efectivas están dadas en términos de desplazamientos locales, i.e., de desplazamientos en la microescala, de ahí que las propiedades dependan de la microestructura. En este capítulo se muestran resultados originales cuando los constituyentes tienen anisotropía cúbica y se estudian dos geometrías, una cuando la celda base es cuadrada y la otra cuando es hexagonal. Como caso particular, los constituyentes pueden ser isótropos y las fibras estar llenas de otro sólido o bien de un fluido o bien estar vacías. Aquí se considera que la matriz son rocas de dos tipos y las fibras pueden estar llenas de cuarzo o de aceite, agua, aire, o estar vacías que es el caso de un medio poroso cuyos poros están desconectados. Al final se presentan algunas conclusiones sobre los resultados obtenidos.

En el último capítulo se usa el Método Autoconsistente para obtener propiedades efectivas termoelásticas de medios heterogéneos en la forma como lo hicieron Sabina y Willis (1988) para un medio elástico. El estudio de la propagación de ondas en medios compuestos es muy complicado debido a que hay muchos dispersores, que en este caso sería cada una de las inclusiones. Aquí consideramos solamente un dispersor, es decir, el efecto que tiene una sola inclusión sobre una onda que se propaga en un medio termoelástico. Para ello es necesario calcular la función de Green. Con esta función es

posible describir la dispersión en todo el espacio. Una primera aproximación para hallar la deformación es considerar que el desplazamiento es constante sobre la inclusión (aproximación de Galerkin). Después se propone que exista un medio termoelástico homogéneo con propiedades equivalentes de tal manera que tengan el mismo comportamiento que aquel medio que tiene un dispersor y de esta manera se identifican las propiedades efectivas. Esto conduce a un sistema no lineal de siete ecuaciones con siete incógnitas complejas. En la parte final se presentan ejemplos sintéticos, se compara con datos experimentales y se dan algunas conclusiones.

Al final de este trabajo se presentan algunos problemas abiertos para poder continuar este trabajo de investigación.



# Capítulo 1

## Termoelasticidad

### 1.1 Introducción

En el presente trabajo se hace uso de la teoría de la mecánica de los medios continuos que trata de las deformaciones y los movimientos de los cuerpos bajo la influencia de efectos externos, tales como fuerzas, desplazamientos, cambios térmicos, interacciones químicas, efectos electromagnéticos y otros cambios del medio ambiente. Para el estudio aquí realizado sólo se consideran las fuerzas de origen mecánico y fuentes de calor. Dicha teoría se basa en la hipótesis del continuo. Esta hipótesis desprecia la estructura atómica de la materia, es decir, no toma en cuenta su estructura discreta y supone que es un medio continuo cuyos puntos geométricos se identifican con puntos materiales. Esto equivale, físicamente, a decir que cualquier elemento de volumen contiene un gran número de átomos. Con esta hipótesis estamos considerando fenómenos macroscópicos. Cuando se hable de un elemento de volumen infinitesimal siempre se quiere decir que es muy pequeño en comparación con el volumen del cuerpo que se estudia, pero muy grande en comparación con las distancias entre sus átomos. (Fig. 1.1.1) También las cantidades físicas que se emplean en la teoría, tales como, densidad de masa, desplazamiento, etc. se consideran como funciones continuas de la posición  $\mathbf{x}$  y el tiempo  $t$ .

### 1.2 Coordenadas

Para describir la posición de un punto en el medio continuo se pueden emplear dos tipos de coordenadas que se mencionan a continuación. Los puntos materiales de un medio continuo al tiempo  $t = 0$  ocupan una región  $B$  que consiste del volumen material  $V$  y su superficie  $S$ . La posición de un punto material  $P$  de  $B$  se puede describir usando un sistema de coordenadas cartesianas,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$  ó por el vector  $\mathbf{P}$  que va del origen  $O$  de las coordenadas al punto  $P$  (fig. 1.2.1.a). Después de un tiempo  $t$  los puntos materiales de  $B$  ocupan una región  $b$  (fig. 1.2.1.b) que consiste del volumen espacial  $v$  y su superficie  $s$ . En esta nueva conformación, el punto material  $P$  pasa a

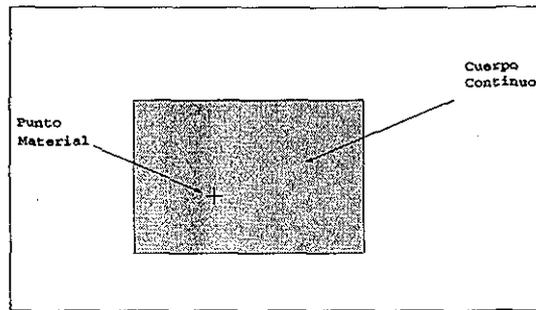


Figura 1.1.1 Un punto material en relación al cuerpo, que se considera continuo y muy grande.

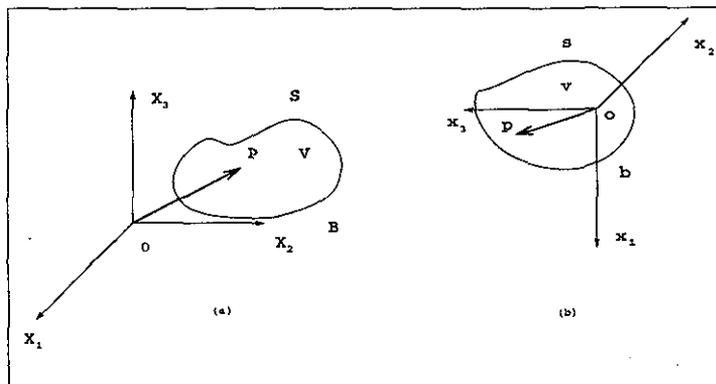


Figura 1.2.1 Sistema de coordenadas cartesianas para ubicar un punto en el cuerpo (a) al tiempo  $t = 0$  antes de la deformación, (b) al tiempo  $t$  después de haber sido deformado.

ocupar un punto espacial  $p$ , que se puede localizar por un vector  $\mathbf{p}$  que va del origen  $o$  de otro marco de coordenadas cartesianas al punto  $p$   $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ . Hasta aquí se han usado dos tipos de coordenadas: las llamadas *materiales* o *lagrangianas*  $\mathbf{X}$  y las *espaciales* o *eulerianas*  $\mathbf{x}$ . Las coordenadas lagrangianas describen el movimiento de las partículas y mientras que las eulerianas describen como se modifican las partículas cuando pasan por un cierto punto en el espacio. En la mecánica de los medios continuos se trabaja generalmente con las coordenadas lagrangianas. Las deformaciones sufridas por el cuerpo y su movimiento lleva a varios puntos materiales a lo largo de varias posiciones espaciales, es decir,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad (1.1)$$

y también recíprocamente

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (1.2)$$

De acuerdo a la ecuación (1.1), el movimiento lleva a un punto material  $P$  de  $B$  al tiempo  $t = 0$  a una posición espacial  $p$  en  $b$  al tiempo  $t$ . El movimiento inverso (1.2)

nos dice que podemos rastrear los puntos materiales que ocupan la posición espacial  $p$  al tiempo  $t$  a una posición original  $P$  (véase fig. 1.2.2).

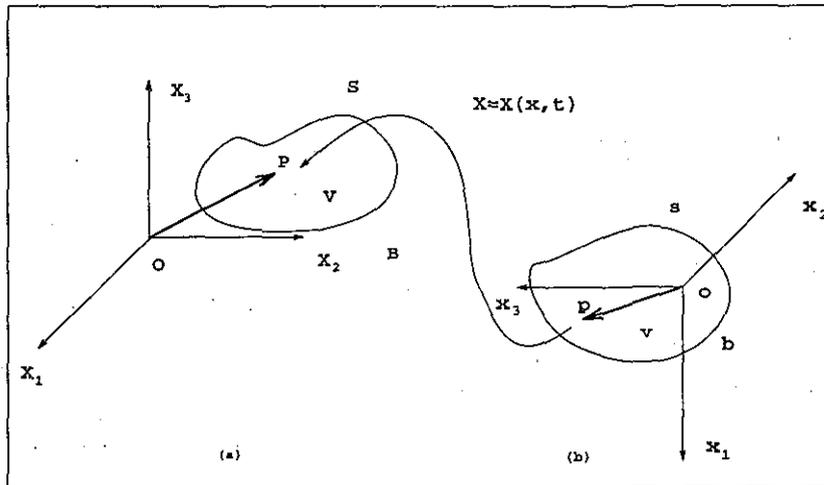


Figura 1.2.2 Con el movimiento inverso se pueden rastrear los puntos materiales que están en  $b$  al tiempo  $t$  a la posición original  $B$ .

### Axioma de continuidad

Suponemos que el mapa dado en la ec. (1.1) es uniforme y que posee derivadas parciales continuas con respecto de sus argumentos de cualquier orden que se necesite, excepto posiblemente, en algunos puntos, curvas y superficies singulares. Esto implica que cada una de las ecuaciones (1.1) y (1.2) son el inverso único de las otras en la vecindad del punto material  $P$ , i.e., la materia es indestructible, o sea, que no es posible deformar un volumen finito de materia en un volumen de tamaño cero o infinito. La materia es impenetrable, o sea, que el movimiento lleva cada región a una región, cada superficie a una superficie, y cada curva a una curva. Una porción de la materia nunca penetra en otra. En la práctica, hay casos en los que este axioma no se cumple, por ejemplo, cuando hay rupturas, etc. En este trabajo no se considerará este caso. En general, el objetivo de la mecánica del medio continuo consiste en hallar la forma explícita de ec. (1.1) cuando los efectos externos y las condiciones iniciales y de frontera se conocen, es decir, si determinamos  $p(t)$  para cada punto material  $P$ , podemos construir la nueva forma y posición del cuerpo a cada tiempo  $t$  relativo al tiempo  $t = 0$ .

El axioma se garantiza a través del *Teorema de la función implícita*. Si para un tiempo fijo  $t$  las funciones  $x_k(X_K, t)$  son continuas y poseen derivadas parciales de primer orden continuas (i.e.,  $x_k \in C^1$ ) en una vecindad  $|X'_K - X_K| < \Delta$  del punto  $p$

y si el jacobiano

$$j \equiv \left| \frac{\partial x_k}{\partial X_K} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix}, \quad (1.3)$$

es diferente de cero en una vecindad del punto  $p$ , entonces existe una función inversa y única de la forma (1.2) en una vecindad  $|x'_k - x_k| < \delta$  de un punto  $p$  al tiempo  $t$ . Nuestro objetivo, en general, consiste en hallar la forma explícita de (1.1) cuando los efectos externos y tanto las condiciones iniciales como las de frontera se conocen, es decir, si determinamos  $\mathbf{p}(t)$  para cada punto material  $P$ , podemos construir la nueva forma y posición del cuerpo a cada tiempo  $t$  relativo al  $t = 0$ . Más frecuentemente en sismología se presenta el problema inverso, o sea que nuestro objetivo es obtener información acerca del interior de la Tierra a partir de los sismógrafos que se obtienen de un terremoto en las estaciones repartidas alrededor del mundo; también se busca determinar las características de la fuente que lo produce. Las ondas sísmicas que se registran en un sismógrafo son portadoras de información acerca de la constitución y de procesos tectónicos del interior de la Tierra.

### 1.3 Deformaciones

Para hacer un análisis de la deformación se localiza a los puntos del cuerpo en los estados sin deformar y deformados por medio del mismo sistema de coordenadas rectangulares  $x_1, x_2$  y  $x_3$ . Sean  $dS$  y  $ds$  las longitudes de los elementos de línea infinitesimales en los estados sin deformar y deformado respectivamente, entonces:

$$dS^2 = dX_k dX_k, \quad (1.4)$$

$$ds^2 = dx_i dx_i, \quad (1.5)$$

a menos que se diga lo contrario en el presente trabajo se usará la convención de suma de Einstein de índices repetidos. *Descripción euleriana de la deformación*, i.e.,  $X_k$  como función de  $\mathbf{x}$  y del tiempo  $t$ .

$$dX_k = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} dx_i \quad (1.6)$$

de (1.4) y (1.6) tenemos

$$dS^2 = \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} dx_i dx_j, \quad (1.7)$$

mientras que

$$ds^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j, \quad (1.8)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l, \\ 0, & \text{si } k \neq l. \end{cases} \quad (1.9)$$

Puesto que  $dS^2 = ds^2$  para todo par de puntos en el cuerpo es una condición necesaria y suficiente para que la transformación (1.1) sea una de movimiento de cuerpo rígido, la diferencia  $ds^2 - dS^2$  es una medida de la deformación. Escribimos

$$ds^2 - dS^2 = 2\eta_{ij}dx_i dx_j, \quad (1.10)$$

donde

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i} \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \right) \quad (1.11)$$

se llama la *deformación euleriana*. Definimos el *vector de desplazamiento*  $\mathbf{u}$  como

$$u_i = x_i - X_i. \quad (1.12)$$

Entonces

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad (1.13)$$

la cual tiene una parte lineal y otra no lineal. *Descripción lagrangiana de la deformación*, i.e.,  $x_i(\mathbf{X}, t)$ .

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} dX_k. \quad (1.14)$$

De (1.5) y (1.14) obtenemos

$$ds^2 = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} dX_k dX_l. \quad (1.15)$$

y de (1.4) se tiene que

$$dS^2 = \delta_{kl} dX_k dX_l. \quad (1.16)$$

Por tanto podemos escribir

$$ds^2 - dS^2 = 2\zeta_{kl} dX_k dX_l, \quad (1.17)$$

donde

$$\zeta_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_l} - \delta_{kl} \right), \quad (1.18)$$

por lo tanto

$$\zeta_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} + \frac{\partial u_i}{\partial X_k} \frac{\partial u_i}{\partial X_l} \right). \quad (1.19)$$

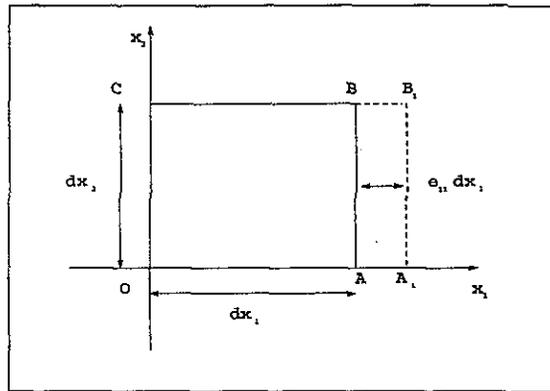
Para una deformación pequeña tal que el gradiente del desplazamiento es pequeño se tiene que  $\zeta_{kl}$  se reduce a la *deformación infinitesimal*  $e_{kl}$  cuando se desprecian en (1.19) términos superiores al de primer orden. O sea que

$$\zeta_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_l} + \frac{\partial u_l}{\partial X_k} \right) \equiv e_{kl}. \quad (1.20)$$

Nótese que  $e_{kl}$  es un tensor de segundo orden simétrico y que a partir de aquí se estará tratando de la teoría de deformaciones pequeñas tales que cada componente del gradiente de desplazamiento es muy pequeño. Para entender mejor el significado del tensor de deformación infinitesimal se pasará a dar una interpretación geométrica. Se pueden distinguir dos tipos de deformación esencialmente diferentes: una que es normal o longitudinal, dada por  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  y  $e_{33}$  y la otra de corte o transversal, dada por,  $e_{12}$ ,  $e_{13}$  y  $e_{23}$ . La primera correspondiente a  $e_{11}$  se puede ver en la fig. 1.3.1. Se puede notar un aumento de longitud en la dirección  $Ox_1$ , el cociente de dicho cambio de longitud entre la longitud inicial, esto es:

$$\frac{OA_1 - OA}{OA} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = e_{11} \quad (1.21)$$

esta es la parte normal o longitudinal de la deformación. La parte cortante o transversal



**Figura 1.3.1.** En el plano  $x_1x_2$ , la sección transversal  $OABC$  de un pequeño elemento de volumen sufre una deformación normal o longitudinal en la dirección  $Ox_1$ . La nueva sección transversal es  $OA_1B_1C$ .

de la deformación  $e_{12}$  se puede ver en la figura 1.3.2. Este es otro tipo de deformación y tiene que ver con las variaciones de los ángulos  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , esto es,

$$\frac{\pi}{2} - \theta_{12} \cong \Gamma_1 + \Gamma_2 \simeq \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2e_{12}. \quad (1.22)$$

Por simetría, este análisis se puede hacer para los demás planos y el razonamiento es el mismo para las otras componentes normales y de corte.

## 1.4 El teorema del transporte

Para obtener la ecuaciones de movimiento de la elasticidad lineal se hace uso de la formulación global de cuatro leyes de conservación que son: masa, cantidad de movimiento lineal, momento angular y energía. También se usa el *teorema de transporte* que a continuación se expone.

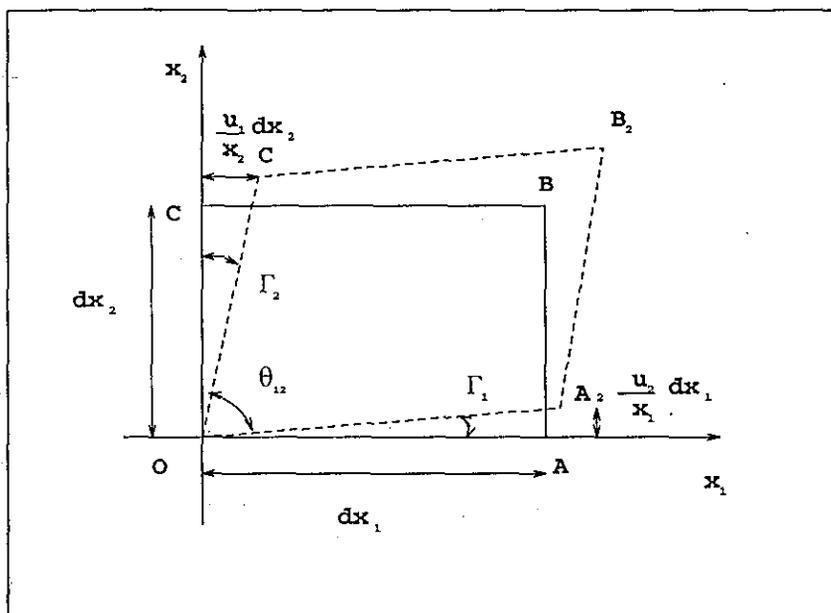


Figura 1.3.2. En el plano  $x_1x_2$ , la sección transversal  $OABC$  de un pequeño elemento de volumen está sujeto a una deformación de corte o transversal en el mismo plano. La nueva sección transversal  $OA_2B_2C_2$  se manifiesta en la variación angular  $\theta_{12}$ .

### Teorema de Transporte

La derivada material de una integral de volumen de cualquier campo  $\phi$  definido en el interior de un volumen material  $v$  cuya frontera es  $s$  está dado por

$$\frac{d}{dt} \int_v \phi dv = \int_v \frac{\partial \phi}{\partial t} dv + \int_s \phi \dot{u}_j n_j ds = \int_v \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\phi \dot{u}_j) \right], \quad (1.23)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal unidad exterior a  $s$ ,  $\dot{u}_j$  es la derivada material de la componente  $j$  de  $\mathbf{u}$ .

Una demostración de este teorema se puede consultar en Eringen (1980) pp. 77. Se deben hacer algunas aclaraciones sobre la función que se está derivando, o sea, si es una función material o si no lo es. Si  $f$  es una función material, es decir

$$f = f(\mathbf{x}, t), \quad (1.24)$$

para  $\mathbf{x}$  independiente de  $t$ , entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.25)$$

En cambio si  $f$  es una función espacial, o sea

$$f = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \quad (1.26)$$

se tiene que

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial t}. \quad (1.27)$$

Esto es debido a que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Al primer término de (1.27) se le llama *razón local o no estacionaria* mientras que al segundo se le conoce como el término *convectivo*. Se usará la notación  $\dot{f} \equiv df/dt$  para indicar la *derivada material*.

## 1.5 La ecuación de continuidad

El principio de conservación de la masa dice que la masa total del cuerpo no cambia durante el movimiento, es decir, que no se crea masa pero tampoco se destruye.

Sean  $\rho(\mathbf{x}, t)$  y  $\rho_0(\mathbf{x}, t)$  las densidades del medio continuo en el sistema espacial y material, respectivamente. Entonces se puede escribir la conservación global o total de la masa como

$$\int_v \rho dv = \int_V \rho_0 dV, \quad (1.28)$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho dv = 0, \quad (1.29)$$

donde  $d/dt$  es la derivada material. En el teorema de transporte (1.23) se identifica a  $\phi = \rho$ . Aplicando el teorema de la divergencia a la integral de superficie se obtiene

$$\int_v \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_j) \right) dv = 0. \quad (1.30)$$

Como esto debe ser válido para cualquier volumen  $v$  se tiene que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_j) = 0. \quad (1.31)$$

Esta es la conservación de la masa local y se le conoce como la *ecuación de continuidad*. Para el caso de una deformación infinitesimal

$$\dot{u}_j = \frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t}, \quad (1.32)$$

se reduce a

$$\dot{u}_j = \frac{\partial u_j}{\partial t}, \quad (1.33)$$

ya que se despreciaron términos de segundo orden. También, al mismo orden de magnitud

$$\frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) = \dot{\epsilon}_{jj}, \quad (1.34)$$

Substituyendo (1.28) en (1.25) se tiene

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \dot{e}_{jj} = 0, \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (1.35)$$

Integrando esta ecuación y tomando en cuenta que  $e_{jj}(0) = 0$  se obtiene

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} = -e_{jj}. \quad (1.36)$$

Como  $e_{jj} \ll 1$ , (1.36) da al primer orden de magnitud

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 - e_{jj}, \quad (1.37)$$

entonces

$$e_{jj} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 1 - \frac{v_0}{v} \equiv \Delta, \quad (1.38)$$

ya que la masa total del medio continuo es la misma antes y después de la deformación.  $\Delta$  se llama la *dilatación cúbica* puesto que da el cambio relativo en el volumen deformado  $v$ . Hay que notar que cuando  $\Delta < 0$  se trata de una compresión.

## 1.6 Balance de la cantidad de movimiento lineal

El principio del balance de la cantidad de movimiento lineal dice que la razón temporal del momento lineal es igual a la fuerza resultante  $\mathbf{F}$  que actúa sobre el cuerpo, es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}} dv = \mathbf{F}. \quad (1.39)$$

En la mecánica de los medios continuos es necesario considerar dos tipos de fuerzas: las de cuerpo y las superficiales. Aquellas que actúan sobre los puntos masa del cuerpo se llaman *fuerzas de cuerpo*; por ejemplo, las fuerzas de la gravedad y electrostática. Mientras que las *fuerzas superficiales* son aquellas que resultan de la acción de un cuerpo sobre otro a través de la frontera. Por ejemplo, la presión hidrostática que actúa sobre la superficie de un cuerpo. Sea  $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$  la tracción, i.e., la fuerza por unidad de área del cuerpo deformado que actúa sobre la cara de un pequeño elemento de superficie cuyo vector normal unitario exterior es  $\mathbf{n}$  y centro de aplicación es  $\mathbf{x}$ . (Ver fig. 1.6.1). Suponemos que  $\mathbf{t}$  es una función continua. Además se cumple que

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}, \mathbf{x}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \quad (1.40)$$

por la tercera ley de Newton. Sea  $\mathbf{F}$  la fuerza de cuerpo externa por unidad de masa. La ecuación de la cantidad de movimiento se escribe como:

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{\mathbf{u}} dv = \int_v \rho \mathbf{F} dv + \int_s \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds \quad (1.41)$$

que al aplicar el teorema de transporte (1.23) al lado izquierdo de (1.41) con  $\phi \equiv \rho \dot{u}_i$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{u}_i dv &= \int_v \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_i) dv + \int_s \rho \dot{u}_i \dot{u}_j n_j ds \\ &= \int_v \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_i \dot{u}_j) \right] dv, \end{aligned} \quad (1.42)$$

por el teorema de la divergencia. Agrupando términos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho \dot{u}_i dv &= \int_v \left\{ \rho \left[ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} + \dot{u}_j \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] + \dot{u}_i \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \dot{u}_j) \right] \right\} dv \\ &= \int_v \rho \ddot{u}_i dv. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Usando la ecuación de continuidad e identificando la derivada total de  $\dot{u}_i$  respecto del tiempo se tiene que

$$\int_v \rho (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}) dv = \int_s \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds. \quad (1.44)$$

Para obtener la ecuación local de conservación de la cantidad de movimiento lineal es necesario expresar a la integral de superficie (1.44) como una integral de volumen. Con este propósito se aplica la ecuación (1.44) a un pequeño volumen tetraedral  $v$  como lo muestra la figura (1.6.1) Sea  $\mathbf{n}$  la normal exterior a la cara inclinada del tetraedro, de

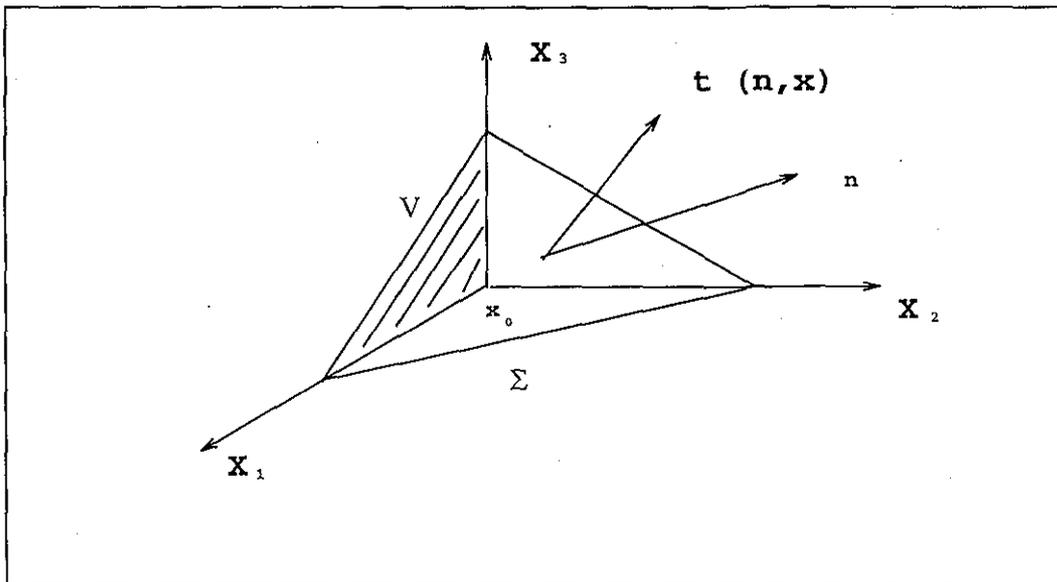


Figura 1.6.1. Pequeño tetraedro de volumen  $v$ . Se muestra la tracción  $\mathbf{t}$  sobre la cara inclinada de área  $\Sigma$  y vector normal unidad  $\mathbf{n}$ .

área  $\Sigma$ , y que dista  $h$  del centro  $\mathbf{x}_0$ . Suponemos que  $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$  es una función continua de

$\mathbf{x}$  y que  $\mathbf{F}$  y  $\ddot{\mathbf{u}}$  son finitas en  $v$ . Aplicando el teorema del valor medio para integrales a la ecuación (1.44) se tiene que:

$$[n_1 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_1, \mathbf{x}_1) + n_2 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_2, \mathbf{x}_2) + n_3 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_3, \mathbf{x}_3) + \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}_4)] \Sigma + \frac{1}{3} h \Sigma \mathbf{k} = 0 \quad (1.45)$$

donde  $\mathbf{k}$  es  $[\rho(\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F})](\theta)$  para algún  $\theta$  que este dentro de  $v$  y además  $\mathbf{k}$  está acotado. El valor de  $\mathbf{k}$  se toma de esta manera debido a que se aplica el teorema del valor medio en ambas partes de la ecuación (1.44).  $\mathbf{i}_i$  son los vectores unidad en las direcciones de los ejes y son perpendiculares a las otras tres caras del tetraedro con vértice  $\mathbf{x}_0$ , donde  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , son puntos en cada una de las caras del tetraedro. En el límite, cuando  $h \rightarrow 0$ , siendo  $\mathbf{x}$  el punto límite correspondiente del tetraedro, se tiene

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}_0) = -[n_1 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_1, \mathbf{x}_0) + n_2 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_2, \mathbf{x}_0) + n_3 \mathbf{t}(-\mathbf{i}_3, \mathbf{x}_0)]. \quad (1.46)$$

Si se escribe

$$\mathbf{t}(-\mathbf{i}_j, \mathbf{x}_0) = -(\sigma_{j1}, \sigma_{j2}, \sigma_{j3}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.47)$$

entonces  $\sigma_{ji}$  es la  $i$ ésima componente de la tracción en la dirección  $\mathbf{x}_j$ . Se tiene entonces que, para cualquier punto  $\mathbf{x}$ ,

$$t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) = \sigma_{ji} n_j \quad (1.48)$$

puesto que  $t_i$  y  $n_i$  son vectores,  $\sigma_{ji}$  es un tensor de segundo orden llamado el *tensor de esfuerzo*. Se ha probado que el estado de fuerzas alrededor de cualquier punto del cuerpo está completamente caracterizado por las nueve componentes cartesianas del tensor de esfuerzo  $\sigma_{ji}$ . La ecuación de conservación de momento lineal queda entonces como

$$\int_v \rho(\ddot{u}_i - F_i) dv = \int_s \sigma_{ji} n_j ds. \quad (1.49)$$

Ahora se aplica teorema de la divergencia y se agrupan todos los términos en una sola integral. Como esto se debe cumplir para todo volumen  $v$  la ecuación que resulta es:

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho F_i, \quad (1.50)$$

que es la ecuación que representa el balance de la cantidad de momento lineal local. Si  $\mathbf{p} = \rho \dot{\mathbf{u}}$  es la *densidad de la cantidad de momento lineal*, la ecuación (1.44) se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{p}} = \text{div} \sigma + \rho \mathbf{F}, \quad (1.51)$$

donde  $\sigma$  es el tensor de esfuerzo cuyas componentes son  $\sigma_{ij}$ .

## 1.7 Balance de la cantidad de momento angular

El principio del balance de la cantidad de momento angular dice que la razón de cambio temporal del momento angular alrededor de un punto fijo 0 es igual a la torca resultante  $\mathbf{M}$  alrededor de 0, esto es

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv = \mathbf{M}, \quad (1.52)$$

donde  $\wedge$  significa el producto cruz. Para obtener una ecuación que represente la conservación local del momento angular se usará el teorema del transporte y de las leyes de conservación hasta aquí obtenidas. Se escribe el lado derecho explícitamente

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv = \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \mathbf{F}) dv + \int_s \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds. \quad (1.53)$$

Utilizando el teorema de transporte en el lado izquierdo de (1.53) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv &= \int_v \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})] dv + \int_s \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) \dot{u}_j n_j ds \\ &= \int_v \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})] + \frac{\partial}{\partial x_j} [\dot{u}_j \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}})] \right\} dv, \end{aligned} \quad (1.54)$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv &= \int_v \left\{ \rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) + \dot{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{u}_j) \right) \right] \right\} dv. \end{aligned} \quad (1.55)$$

En el segundo sumando del lado derecho de esta ecuación, el término entre paréntesis representa la conservación de la masa por lo que es igual a cero. Entonces queda

$$\frac{d}{dt} \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv = \int_v \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dv = \int_v \rho(\mathbf{x} \wedge \ddot{\mathbf{u}}) dv, \quad (1.56)$$

porque  $\dot{\mathbf{u}} \wedge \dot{\mathbf{u}} = 0$ . Así se puede escribir de (1.50) y (1.48)

$$\int_v \rho \mathbf{x} \wedge (\ddot{\mathbf{u}} - \mathbf{F}) dv = \int_s \mathbf{x} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}) ds. \quad (1.57)$$

La ecuación (1.51) se puede escribir en componentes usando (1.50)

$$\int_v \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l} dv = \int_s \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{ik} n_l ds = \int_v \epsilon_{ijk} \left[ \delta_{jl} \sigma_{ik} + x_j \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_l} \right] dv, \quad (1.58)$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor de Levi Chivita es definido por

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si } ijk \text{ es una permutación} \\ & \text{par de 123} \\ 0, & \text{si } ijk \text{ hay dos índices} \\ & \text{repetidos} \\ -1, & \text{si } ijk \text{ es una permutación} \\ & \text{impar de 123} \end{cases} \quad (1.59)$$

entonces

$$\epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0. \quad (1.60)$$

O sea que

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk}. \quad (1.61)$$

Es decir, que el tensor de esfuerzo es simétrico. Esta es la ley local de conservación del momento angular.

## 1.8 Conservación de la energía

La razón de cambio temporal de la suma de las energías cinética  $\mathcal{K}$  e interna  $\mathcal{U}$  es igual a la suma de la potencia  $\mathcal{L}$  de las fuerzas externas más  $dQ/dt$  que es el incremento del calor en el cuerpo

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{K} + \mathcal{U}) = \mathcal{L} + \frac{dQ}{dt}. \quad (1.62)$$

Se calcula explícitamente  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{L} = \int_v \rho F_i \dot{u}_i dv + \int_s t_i(\mathbf{n}, \mathbf{x}) \dot{u}_i ds. \quad (1.63)$$

Sustituyendo  $t_i = \sigma_{ji} n_j$  de (1.48) en (1.63) y aplicando el teorema de la divergencia se tiene que

$$\mathcal{L} = \int_v \left[ \dot{u}_i (\rho F_i + \sigma_{ij,j}) + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right] dv. \quad (1.64)$$

La primera parte de la ecuación anterior es igual a  $\rho d\dot{u}_i/dt$  por el principio del balance de la cantidad de movimiento lineal, de esta manera la ecuación anterior es ahora

$$\mathcal{L} = \int_v \left( \rho \dot{u}_i \frac{d\dot{u}_i}{dt} + \sigma_{ij} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \right) dv, \quad (1.65)$$

identificando a la energía cinética por unidad de tiempo como

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_v \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dv. \quad (1.66)$$

Obsérvese que a través de un elemento de área  $dA$  con vector normal  $\mathbf{n}$  fluye una cierta cantidad de calor  $-q_i n_i dA$ . Aquí,  $\mathbf{q}$  es el vector de flujo de calor. El flujo total de calor que atraviesa la superficie completa  $A$  está dado por la siguiente fórmula

$$\dot{Q} = - \int_a q_i n_i da. \quad (1.67)$$

Haciendo uso del teorema de Gauss se obtiene de la fórmula (1.67)

$$\dot{Q} = - \int_b q_{i,i} dv. \quad (1.68)$$

Ahora introduzcamos la energía libre  $U$  por unidad de volumen.

$$\mathcal{U} = \int_b U dv. \quad (1.69)$$

Sustituyendo ahora las ecuaciones (1.63), (1.66), (1.68) y (1.69) en la ecuación de balance de energía (1.62) se tiene que

$$\int_b (\dot{U} + \rho \dot{u}_i \ddot{u}_i) dv = \int_b F_i \dot{u}_i dv + \int_a t_i \dot{u}_i da - \int_b q_{i,i} dv. \quad (1.70)$$

La integral de superficie puede ser transformada de la siguiente manera:

$$\int_a t_i \dot{u}_i da = \int_a \sigma_{ji} n_j \dot{u}_i da = \int_b (\sigma_{ji} \dot{u}_i)_{,j} dv = \int_b (\sigma_{ji} \dot{u}_{i,j} + \sigma_{ji,j} \dot{u}_i) dv. \quad (1.71)$$

Haciendo uso de la ecuación de movimiento  $\rho \ddot{u} = F_i + \sigma_{j,i,j}$  y las relaciones (1.71) se puede transformar la ecuación (1.70) en la forma

$$\int_b (\dot{U} - \sigma_{ji} \dot{u}_{i,j} + q_{i,i}) dv = 0. \quad (1.72)$$

Esta ecuación es válida para cualquier volumen arbitrario  $b$  del cuerpo considerado. Esto implica la siguiente relación local

$$\dot{U} = \sigma_{ji} \dot{u}_{i,j} - q_{i,i}. \quad (1.73)$$

Obsérvese que

$$\dot{u}_{i,j} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) + \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) = \dot{e}_{ij} + \dot{\omega}_{ij}, \quad (1.74)$$

es decir, que  $\dot{u}_{i,j}$  se puede descomponer en la suma de un tensor simétrico  $\dot{e}_{ij}$  y en un antisimétrico  $\dot{\omega}_{ij}$ . Pero el producto interior de un tensor simétrico por uno antisimétrico es cero,  $\sigma_{ji} \dot{\omega}_{ij} = 0$ . Esto se puede ver de la siguiente manera. Puesto que  $\sigma_{ij} \dot{\omega}_{ij} = -\sigma_{ij} \dot{\omega}_{ji}$  y por otro lado  $\sigma_{ij} \dot{\omega}_{ij} = \sigma_{ji} \dot{\omega}_{ij}$  y ahora intercambiando los índices se llega a que  $\sigma_{ij} \dot{\omega}_{ij} = -\sigma_{ij} \dot{\omega}_{ij} = 0$ . Por lo que la ecuación (1.73) se puede escribir como

$$\dot{U} = \sigma_{ji} \dot{e}_{ji} - q_{i,i}. \quad (1.75)$$

En el caso de materiales reales el principio de conservación de energía debe ser tomado en cuenta por la segunda ley de la termodinámica. Esta ley contiene dos funciones de estado: la entropía  $s$  y la temperatura absoluta  $T$ . Análogamente para la energía interna, la entropía es una única función del estado interno de un sistema termodinámico. La entropía es independiente del camino a lo largo del cual ocurre el proceso. Por esta razón, su diferencial es una diferencial total. La ecuación de balance de la entropía tiene la forma, (ver, por ejemplo, de Groot y Mazur, 1983 cap. 2)

$$T \frac{ds}{dt} = \text{div } \mathbf{q} \quad \text{ó} \quad T \dot{s} = -q_{i,i}. \quad (1.76)$$

Consideremos ahora el volumen del cuerpo  $b$  delimitado por una superficie  $a$ . Entonces la integral

$$\int_b \dot{s} dv = - \int_b \frac{q_{i,i}}{T} dv, \quad (1.77)$$

constituye la razón de cambio de la entropía en el volumen  $v$ , debido al flujo de calor. La expresión (1.77) puede ser transformada como sigue:

$$\int_b \dot{s} dv = \int_b \left( \frac{q_i}{T} \right)_{,i} dv - \int_b \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dv. \quad (1.78)$$

Con la ayuda del teorema de Gauss se obtiene que

$$\int_b \dot{s} dv = - \int_a \frac{q_i n_i}{T} da - \int_b \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dv. \quad (1.79)$$

El primer término del lado derecho constituye un incremento o decremento de la entropía con el tiempo, debido al flujo de calor a través de la superficie  $a$ . De esta manera, esta integral es la razón de intercambio de la entropía con su medio ambiente, que puede ser positiva o negativa. La segunda integral del lado derecho de la ecuación (1.79) constituye una fuente de entropía y describe la razón de su incremento. Lo que nos dice que la entropía siempre es creciente

$$\hat{s} = - \int_b \frac{q_i T_{,i}}{T^2} dv > 0, \quad (1.80)$$

donde  $\hat{s}$  es la fuente de entropía. Regresemos al balance de entropía local (1.76). Eliminando de las ecuaciones (1.75) y (1.76) la cantidad  $q_{i,i}$  obtenemos

$$\dot{U} = \sigma_{ji} \dot{e}_{ji} + T \dot{s}. \quad (1.81)$$

En lo que sigue reemplazaremos la función  $U(e_{ij}, s)$  por la energía libre de Helmholtz  $f = U - sT$ . De esta manera  $U$  depende de las variables  $e_{ij}$  y  $s$  donde  $s$  es la entropía por lo que la derivada total es

$$\dot{f} = \sigma_{ji} \dot{e}_{ji} - s \dot{T}. \quad (1.82)$$

Debido a que  $df$  es una diferencial total

$$\dot{f} = \left( \frac{\partial f}{\partial e_{ij}} \right) \dot{e}_{ij} + \left( \frac{\partial f}{\partial T} \right) \dot{T}. \quad (1.83)$$

Suponiendo que las funciones  $\sigma_{ji}$  y  $s$  no dependen explícitamente de las derivadas temporales de las funciones  $e_{ij}$  y  $T$ , y definiendo la entropía por medio de la relación  $s = -\partial f / \partial T$ , obtenemos, comparando las relaciones (1.82) y (1.83)

$$\sigma_{ji} = \frac{\partial f}{\partial e_{ij}}, \quad s = -\frac{\partial f}{\partial T}, \quad (1.84)$$

Estas relaciones harán posible establecer relaciones entre el esfuerzo, la entropía, la deformación y la temperatura.

## 1.9 Las relaciones constitutivas de la termoelasticidad

Existen varias formas de obtener las relaciones constitutivas, una de ellas puede ser usando flujo y producción de entropía junto con las leyes de conservación y de balance. Una característica importante que tiene esta forma de obtenerlas es que es

posible determinar todas las variables del sistema, es decir, las constantes elásticas, termoelásticas, piezoeléctricas, etc. (ver de Groot y Mazur 1983, cap 4). Aquí presento una forma sencilla de determinar las variables del sistema usando la energía libre de Helmholtz.

Una relación constitutiva es aquella que caracteriza al material que se estudia. Puede ser una relación entre el esfuerzo con la deformación y la temperatura. En general lo que determina esta relación es la observación experimental del material que se desea estudiar.

Conociendo la energía libre estamos en posición para relacionar el tensor de esfuerzo con el tensor de deformación y la temperatura.

Desarrollemos la energía libre  $f(e_{ij}, T)$  como una serie de Taylor en la vecindad de un estado de equilibrio local (cuando  $e_{ij} = 0$  y  $T = \theta_0$ )

$$f(e_{ij}, T) = f(0, \theta_0) + \frac{\partial f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij}} e_{ij} + \frac{\partial f(0, \theta_0)}{\partial T} (T - \theta_0) + \quad (1.85)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} e_{ij} e_{kl} + 2 \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij} \partial T} e_{ij} (T - \theta_0) + \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial T^2} (T - \theta_0)^2 \right] + \dots$$

La cantidad constante  $f(0, \theta_0)$  es la energía en el estado de equilibrio y suponemos que es cero. Más aún, podemos suponer que  $\partial f(0, \theta_0)/\partial T$  es también cero puesto que se puede suponer que la entropía inicial es cero por la relación (1.84), lo que se hace al suponer  $\partial f/\partial T$  y  $f(0, \theta_0)$  iguales a cero es cambiar el estado de referencia

$$\frac{\partial f(e_{ij}, T)}{\partial T} = -s(e_{ij}, T),$$

así

$$\frac{\partial f}{\partial T}(0, \theta_0) = -s(0, \theta_0) = 0. \quad (1.86)$$

Con ayuda de la relación de (1.84) y tomando solamente los términos lineal y cuadrático, obtenemos

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial f}{\partial e_{ij}} = \frac{\partial f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij}} + \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} e_{kl} + \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij} \partial T} (T - \theta_0). \quad (1.87)$$

Esta es una relación lineal válida para pequeñas deformaciones y aquí es necesario hacer la suposición que  $|\theta/\theta_0| \ll 1$  que nos dice que estas ecuaciones son válidas para pequeñas variaciones en la temperatura. En la ecuación (1.87) debemos suponer  $\partial f(0, \theta_0)/\partial e_{ij} = 0$  para el estado natural ( $e_{ij} = 0$ ,  $T = \theta_0$ ) cuando  $\sigma_{ij} = 0$ .

Introduciendo la notación

$$\frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} = C_{ijkl}, \quad \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial e_{ij} \partial T} = -\eta_{ij}, \quad \frac{\partial^2 f(0, \theta_0)}{\partial T^2} = m$$

podemos representar las relaciones (1.85) y (1.87) en la forma

$$f(e_{ij}, T) = \frac{1}{2} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl} - \eta_{ij} e_{ij} \theta + m \frac{\theta^2}{2} \dots \quad (1.88)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \eta_{ij} \theta. \quad (1.89)$$

Obsérvese que

$$\left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial e_{kl}} \right)_T = C_{ijkl}, \quad \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_\epsilon = -\eta_{ij}. \quad (1.90)$$

La ecuación constitutiva (1.89) es la ley de la elasticidad generalizada para la termoelasticidad. Estas son las llamadas relaciones de Duhamel-Neumann para un cuerpo anisótropo las cuales serán usadas en el capítulo 3 en el caso isótropo.

Las constantes  $C_{ijkl}$  las cuales se calculan en el estado isotérmico juegan el rol de constantes del material. Las cantidades  $C_{ijkl}$  son los coeficientes elásticos mientras que  $\eta_{ij}$  son las asociadas con las propiedades termoelásticas de un medio anisótropo. Para un medio isótropo y homogéneo la energía libre puede generalizada ser escrita en una forma simple

$$f(e_{ij}, T) = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{2} e_{kk} e_{nn} - \eta e_{kk} \theta + \frac{1}{2} m \theta^2 + \dots \quad (1.91)$$

Esta expresión proviene de las siguientes consideraciones. Puesto que la energía libre es un escalar, cada término de la ecuación (1.91) es un escalar. Sin embargo, de las propiedades del tensor de deformación, es posible construir solamente dos escalares independientes de segundo grado, llamado el cuadrado de la dilatación  $e_{kk} e_{nn}$  y la suma de los cuadrados  $e_{ij} e_{ij}$  de todos los componentes del tensor  $e_{ij}$ . El tercer término en (1.91) contiene el término lineal  $e_{kk}$  el cual aumenta debido al hecho que existen un sólo escalar lineal construido de las componentes del tensor  $e_{ij}$ , viz, la dilatación  $e_{kk}$ . Las constantes materiales  $\mu$  y  $\lambda$  que aparecen en la ecuación (1.91) son los parámetros de Lamé, mientras que las cantidades  $\eta$  y  $m$  serán definidas más tarde.

En el caso de un medio isótropo la relación (1.89) toma la forma

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} + (\lambda e_{kk} - \eta \theta) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.92)$$

La traza de  $\sigma$  está relacionada con la expansión volumétrica  $e_{kk}$  de la siguiente manera

$$\sigma_{kk} = 3(K e_{kk} - \eta \theta), \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu. \quad (1.93)$$

Resolviendo la ecuación (1.92) para  $e_{ij}$  y la ecuación (1.93) con respecto a  $e_{kk}$ , obtenemos

$$e_{ij} = \frac{\eta}{3K} \theta \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (1.94)$$

$$e_{kk} = \frac{\eta}{K} \theta + \frac{\sigma_{kk}}{3K}. \quad (1.95)$$

Para determinar la cantidad  $\eta$ , consideremos una expansión libre de un elemento de volumen que no tiene tracción en la superficie. Puesto que el esfuerzo se hace cero, las ecuaciones (1.94) y (1.95) implican las relaciones

$$e_{ij}^o = \frac{\eta}{3K}\theta\delta_{ij} \quad , \quad e_{kk}^o = \frac{\eta\theta}{K}, \quad (1.96)$$

donde el superíndice  $o$  indica a esfuerzo cero. Es evidente que un cambio de volumen  $e_{kk}^o$  de este elemento es proporcional a la temperatura, el coeficiente de proporcionalidad corresponde al coeficiente de expansión térmica volumétrica  $\alpha = \eta/K$ . Denotándolo por  $\alpha_t = \alpha/3$ , el coeficiente de expansión térmica lineal, podemos escribir las relaciones (1.96) en la forma

$$e_{ij}^o = \alpha_t\theta\delta_{ij} \quad , \quad e_{kk}^o = 3\alpha_t\theta. \quad (1.97)$$

Estas relaciones describen una propiedad de un medio isótropo: El elemento de volumen de un medio no cambia su forma con el aumento de temperatura; el cambio que manifiesta es en el volumen.

Se ha determinado la cantidad  $\eta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t = 3K\alpha_t$  que aparece en las expresiones para la energía libre y en las relaciones de Duhamel-Neumann.

Obsérvese que las ecuaciones (1.92) y (1.95) implican las relaciones

$$\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}\right)_\epsilon = -\eta\delta_{ij}, \quad \left(\frac{\partial e_{kk}}{\partial\sigma_{kk}}\right)_\theta = \frac{1}{3K}, \quad \left(\frac{\partial e_{kk}}{\partial T}\right)_\sigma = 3\alpha_t. \quad (1.98)$$

Se debe enfatizar que las cantidades  $\mu, \lambda, K$  que aparecen en las fórmulas (1.91)–(1.95) se refieren al estado isotérmico, es decir, son medidas a temperatura constante.

Regresando a la energía libre (1.91) y eliminando en esta expresión todas las potencias mayores a la segunda en la deformación y agrupando todos los términos que dependen solo de la temperatura en un sólo término  $G(\theta)$ , se obtiene

$$f = \mu e_{ij}e_{ij} + \frac{\lambda}{2}e_{kk}e_{nn} - \eta e_{kk}\theta + G(\theta). \quad (1.99)$$

Para la entropía se obtiene la siguiente relación

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T} = \eta e_{kk} - \frac{\partial G}{\partial T}. \quad (1.100)$$

Puesto que  $s = s(e_{ij}, T)$ ,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial e_{ij}}\right)_T de_{ij} + \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_\epsilon dT, \quad (1.101)$$

donde  $ds$  es una diferencial total. La cantidad  $T(\partial s/\partial T)_\epsilon$  constituye una medida de la cantidad de calor generado en una unidad de volumen de un cuerpo, debido al cambio

de temperatura a deformación constante. Esta cantidad es denotada por  $c_e$  y es llamado el calor específico a deformación constante. Por otro lado, por la ecuación (1.100) se tiene

$$ds = \eta de_{kk} - \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} dT.$$

se tiene que

$$c_e = T \left( \frac{ds}{dT} \right)_e = -T \frac{\partial^2 G}{\partial T^2}. \quad (1.102)$$

Integrando una vez la relación (1.102), es decir,

$$- \int \frac{\partial^2 G}{\partial T^2} dT = \int \frac{c_e}{T} dT$$

y teniendo en cuenta que las constantes de integración se hacen cero (en el estado de equilibrio  $s = 0, f = 0$ ), se obtiene

$$-\frac{\partial G}{\partial T} = c_e \ln\left(\frac{T}{\theta_0}\right). \quad (1.103)$$

De esta manera se llega a que la entropía (1.100) toma la forma

$$s = \eta e_{kk} + c_e \ln \frac{T}{\theta_0}. \quad (1.104)$$

Como se mencionó anteriormente  $|\theta/\theta_0| \ll 1$  sobre el campo de temperatura y este hecho va a ser utilizado para encontrar relación sencilla entre la entropía  $s$  y el cambio en la temperatura  $\theta = \theta_0 - T$ . Para esto se desarrolla en serie de Taylor  $\ln(T/\theta_0) = \ln(1 + \theta/\theta_0) = \theta/\theta_0 - (\theta/\theta_0)^2/2 + \dots$  y nos quedamos solamente con el primer término, el cual es lineal

$$s \approx \eta e_{kk} + \frac{c_e}{\theta_0} \theta. \quad (1.105)$$

El primer término de la relación de arriba es debido al acoplamiento de la temperatura y el campo de deformación, mientras que la segunda constituye la entropía generada por la conducción de calor.

Procedamos a calcular la función  $f$  determinando  $G(\theta)$  de la ecuación

$$-\frac{\partial G}{\partial T} = c_e \ln(T/\theta_0) \approx c_e \frac{\theta}{\theta_0}$$

entonces llegamos a la relación para la energía libre de Helmholtz

$$f(e_{ij}, \theta) = \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{\lambda}{2} e_{kk} e_{nn} - \eta e_{kk} \theta - \frac{c_e}{2\theta_0} \theta^2. \quad (1.106)$$

donde los primeros dos términos del lado derecho son puramente elásticos mientras que la última es puramente térmica. Por otro lado, el tercer término es de naturaleza mixta y expresa la interacción entre la deformación y el campo de temperatura.

## 1.10 La ecuación de conducción del calor generalizada

Hace falta una ecuación para tener el sistema completo para la temperatura  $\theta$  y para el desplazamiento  $u$ . Esta última ecuación corresponde a relación que existe entre la entropía y la conducción del calor. La transferencia de calor en un sólido ocurre por medio de la conducción que consiste en transferir calor de lugares con una mayor temperatura a lugares con menor temperatura. Este proceso es espontáneo e irreversible y está estrechamente conectado con la generación de entropía. La ecuación de la conducción de calor se deduce como una consecuencia del principio de conservación de energía y la forma del flujo de la entropía. Esta ley, constituye la forma local de la segunda ley de la termodinámica y tiene la siguiente forma (ver de Groot y Mazur, 1983)

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T}(\text{div } \mathbf{q} - W) \quad \text{ó} \quad \dot{s} = -\frac{q_{i,i}}{T} + \frac{W}{T}, \quad (1.107)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el vector de flujo de energía, en nuestro caso es igual al flujo de calor y  $W$  es la cantidad del calor generado en una unidad de volumen y unidad de tiempo.

La ecuación (1.107) se puede escribir también de la siguiente forma

$$\dot{s} = -\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} + \frac{W}{T} + \hat{s}, \quad \hat{s} = -\frac{q_i T_{,i}}{T^2} > 0, \quad (1.108)$$

donde  $\hat{s}$  se definió en la sección anterior. La fuente de entropía está relacionada con las causas de los procesos irreversibles, las así llamadas *fuerzas termodinámicas*  $f_i$  por medio de la relación

$$\hat{s} = q_i f_i. \quad (1.109)$$

La fuente de entropía es igual a la suma de los productos de las fuerzas termodinámicas con sus flujos. Al comparar las ecuaciones (1.108) y (1.109) se encuentra que

$$f_i = -\frac{T_{,i}}{T^2}. \quad (1.110)$$

En el caso considerado de la conducción del calor, la fuerza termodinámica es el gradiente de temperatura.

Por otro lado, el vector de flujo de calor está relacionado con las fuerzas termodinámicas por medio de la relación funcional

$$q_i = q_i(f_1, f_2, f_3). \quad (1.111)$$

En el caso de la termodinámica irreversible se supone que la relación lineal

$$q_i = L_{ij} f_j \quad (1.112)$$

es válida, es decir, que hay una relación lineal entre  $q_i$  y las fuerzas termodinámicas  $f_i$ . La relación anterior es de naturaleza fenomenológica. Las cantidades  $L_{ij}$  son constantes y satisfacen las relaciones de Onsager

$$L_{ij} = L_{ji}. \quad (1.113)$$

Sustituyendo la ecuación (1.110) en (1.112) se obtiene

$$q_i = -\frac{L_{ij}T_{,j}}{T^2}. \quad (1.114)$$

Esta ecuación está de acuerdo con la ley de Fourier, es decir, que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura. En el caso de un cuerpo isótropo la relación (1.114) toma la forma

$$q_i = -\kappa T_{,i}, \quad \kappa = \frac{L}{T^2} > 0. \quad (1.115)$$

Suponemos que la cantidad  $\kappa = L/T^2$  es constante;  $\kappa$  es el coeficiente de conducción del calor. Sustituyendo la ecuación (1.115) en (1.107) llegamos a la forma final para el cambio en la entropía con respecto al tiempo

$$T \frac{ds}{dt} = \kappa \nabla^2 T + W. \quad (1.116)$$

Combinando la relación (1.115) con la (1.104) se llega a la ecuación

$$\kappa \nabla^2 T + W = \eta \dot{e}_{kk} T + c_e \dot{T}, \quad (1.117)$$

ó

$$\nabla^2 T - \frac{c_e}{\kappa} \dot{T} - \frac{T \eta \dot{e}_{kk}}{\kappa} = -\frac{W}{\kappa}. \quad (1.118)$$

Hemos llegado a una ecuación no lineal en la cual los términos no lineales tienen la forma  $\dot{e}_{kk} T$ .

Usando la definición para el incremento de temperatura  $\theta = T - \theta_0$  se puede escribir la ecuación (1.118) en la forma

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{\lambda_0} \dot{\theta} - \gamma \dot{e}_{kk} \left( 1 + \frac{\theta}{\theta_0} \right) = -\frac{W}{\kappa}, \quad (1.119)$$

donde

$$\lambda_0 = \frac{\kappa}{c_e}, \quad \gamma = \frac{\eta \theta_0}{\kappa}.$$

Suponiendo que  $|\theta/\theta_0| \ll 1$  se puede linealizar la ecuación (1.119) llegando a ser

$$\nabla^2 \theta - \frac{1}{\lambda_0} \dot{\theta} - \gamma \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -\frac{W}{\kappa}, \quad e_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.120)$$

La ecuación de conducción del calor generalizada contiene el término  $\eta \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}}$  que relaciona el cambio de dilatación en el cuerpo que se deforma.

Observe que los parámetros de Lamé  $\mu$  y  $\lambda$  y la expresión para  $\eta$  están referidos al estado isotérmico.

Introduciendo la cantidad  $Q = W\lambda_0/\kappa = W/c_e$  que describe la fuente de calor, se llega a que la ecuación de conducción del calor (1.120) la cual se puede escribir convenientemente de la forma

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\lambda_0} \partial_t\right) \theta - \gamma \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = -\frac{Q}{\lambda_0}. \quad (1.121)$$

El conjunto de ecuaciones diferenciales (1.50) (conservación de momento lineal), (1.89) la relación constitutiva termoelástica, (1.120) la ecuación generalizada del calor, (1.76) balance de entropía y (1.105) la expresión para la entropía que por mayor comodidad reenumeraré

$$\rho \ddot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho F_i, \quad (1.122)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \eta_{ij} \theta \quad (1.123)$$

$$\nabla^2 \theta = \frac{1}{\lambda_0} \dot{\theta} + \gamma \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} - \frac{W}{\kappa}, \quad e_{kk} = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.124)$$

$$T \dot{s} = -q_{i,i}, \quad (1.125)$$

$$s = \eta e_{kk} + \frac{c_e}{\theta_0} \theta, \quad (1.126)$$

forman el conjunto fundamental de ecuaciones termoelásticas. Es fácil ver que se tiene un sistema completo, es decir, el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. Al sustituir la ecuación (1.123) en (1.122) se tienen seis incógnitas, tres desplazamientos  $u_i$ , la temperatura  $\theta$ , la entropía  $s$ , y el flujo de calor  $q$ ; y seis ecuaciones, tres de (1.122), y las (1.124)–(1.126).

Aquí vale la pena hacer algunos comentarios sobre los procesos físicos que ocurren en un medio termoelástico.

La deformación y los campos de temperatura acoplada son originados por las fuerzas de cuerpo y las fuentes de calor, o bien por las fuerzas externas y la interacción térmica del sólido con sus alrededores. El campo de deformación y el campo de temperatura se incrementan como resultado de la acción de cualquiera de estas fuentes.

Si ocurre en el cuerpo un proceso de conducción irreversible debido al gradiente de temperatura, entonces este proceso espontáneo conduce a la deformación elástica del cuerpo. Aquí el fenómeno de deformación es secundario, ocurriendo como resultado de la conducción de energía. El proceso de conducción es identificado con la producción de entropía, contrariamente, el proceso de deformación puede conducir a un decremento

en la entropía (ver ec. 1.105). Sin embargo, la diferencia en el incremento de entropía que se mencionan arriba, es positiva para todos los puntos del cuerpo y conduce a la generación de un calor no compensado que se convierte en disipación de energía.

Contrariamente, si ocurre en el cuerpo un proceso de deformación debido a una carga aplicada externamente al cuerpo o a la acción de fuerzas de cuerpo, entonces esto conducirá a un proceso secundario que es la conducción de energía calorífica.

En ambos casos nos enfrentamos con procesos acoplados, debido al acoplamiento de la deformación con el campo de temperatura. Un medio, el cual es caracterizado por procesos elásticos reversibles y procesos térmicos irreversibles es llamado *medio termoelástico*.

Volviendo a la relación constitutiva (1.123) se puede observar que se compone de dos partes, una que tiene que ver con la deformación elástica  $e_{ij}$  y la otra con la temperatura  $\theta$ . En el capítulo 2 se usará únicamente la parte elástica para el cálculo de propiedades efectivas de medios compuestos mediante el Método de Homogeneización y en el capítulo 3 se usará la relación constitutiva termoelástica completa. A continuación se harán algunas consideraciones que serán utilizados en los capítulos siguiente.

## 1.11 Casos particulares del tensor de módulos termoelásticos

Si la constante de acoplamiento termoelástico  $\eta_{ij}$  es cero en (1.123), se tiene que el esfuerzo depende únicamente de la deformación  $e_{ij}$  y entonces se trata del caso elástico. La relación entre el esfuerzo y la deformación es lineal, la cual se conoce como la ley de Hooke, y se escribe de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl}, \quad (1.127)$$

donde  $C_{ijkl}$  es el llamado *tensor de módulos elásticos*, y es un tensor cartesiano de cuarto orden. En forma simbólica algunos autores la escriben como

$$\sigma = Ce. \quad (1.128)$$

Debido a las simetrías del tensor de esfuerzo (ecuación 1.61) y del tensor de deformación (ecuación 1.20), el tensor de constantes elásticas tiene las siguientes simetrías:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}, \quad (1.129)$$

y el número de componentes independientes que originalmente era de  $3^4 = 81$  se reduce a 21 solamente en el caso más general de un medio anisótropo. Un medio se llama *isótropo* si las propiedades elásticas en cada punto del cuerpo son las mismas en

todas las direcciones en ese punto. La expresión para el tensor de esfuerzo con estas características se puede escribir como:

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \quad (1.130)$$

Los dos coeficientes  $\lambda$  y  $\mu$  se llaman parámetros de Lamé. El tensor de esfuerzo también se puede escribir en términos del módulo de *compresibilidad*  $K$  y de *rigidez*  $\mu$ , esto es,

$$\sigma_{ij} = K e_{ii} \delta_{ij} + 2\mu (e_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{ii}). \quad (1.131)$$

donde  $K$ , en términos de  $\lambda$  y de  $\mu$ , es  $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ .

Un medio con simetría cúbica tiene la propiedad de que si se rota los ejes cristalográficos respecto al origen en  $\pi/2$  las propiedades del material no cambian. Para un material con esta simetría, el tensor de constantes elásticas se puede escribir como:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}, \quad (1.132)$$

en la ecuación anterior se está usando la siguiente notación para los subíndices

$$(11) \rightarrow 1, \quad (32) \rightarrow (23) \rightarrow (4),$$

$$(22) \rightarrow 2, \quad (13) \rightarrow (31) \rightarrow (5),$$

$$(33) \rightarrow 3, \quad (21) \rightarrow (12) \rightarrow (6),$$

puesto que se está escribiendo un tensor de cuarto orden en una matriz de seis por seis. Como ejemplo el coeficiente  $C_{1111}$  se escribe como  $C_{11}$ .

En términos de las constantes elásticas  $K$ ,  $\mu'_c$  y  $\mu$  el tensor de constantes elásticas  $C$  se puede escribir como:

$$C = \begin{pmatrix} K_c + \frac{4}{3}\mu_c & K_c - \frac{2}{3}\mu_c & K_c - \frac{2}{3}\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ K_c - \frac{2}{3}\mu_c & K_c + \frac{4}{3}\mu_c & K_c - \frac{2}{3}\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ K_c - \frac{2}{3}\mu_c & K_c - \frac{2}{3}\mu_c & K_c + \frac{4}{3}\mu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu'_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu'_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu'_c \end{pmatrix}. \quad (1.133)$$

el cual será de utilidad en el capítulo 2 donde se obtienen propiedades efectivas de compuestos cuya simetría es cúbica.

Para un material isótropo la matriz  $C$  toma la forma

$$C = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. \quad (1.134)$$

Regresando a las relaciones constitutivas termoelásticas (1.123), (1.126) y (1.105), también se puede escribir una ley de Hooke termoelástica generalizada de la siguiente manera

$$S = \begin{bmatrix} \sigma \\ s \\ q \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} C & -\eta \\ \eta & c_e/\theta_0 \\ & & -\kappa \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e \\ \theta \\ \nabla T \end{bmatrix}. \quad (1.135)$$

En forma matricial y en términos de  $K$  y  $\mu$  la matriz  $C$  de la ecuación (1.135) se escribe como

$$L = \begin{pmatrix} K + \frac{4}{3}\mu & K - \frac{4}{3}\mu & K - \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{4}{3}\mu & K + \frac{4}{3}\mu & K - \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ K - \frac{4}{3}\mu & K - \frac{4}{3}\mu & K + \frac{4}{3}\mu & 0 & 0 & 0 & -\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & \eta & \eta & 0 & 0 & 0 & c_e/\theta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\kappa \end{pmatrix}. \quad (1.136)$$

En la ecuación (1.136) están incluidos todos los elementos que contribuyen a las deformaciones termoelásticas para un medio isótropo. En el capítulo 3 se usarán estas relaciones constitutivas para hallar los coeficientes efectivos de un medio termoelástico mediante el método autoconsistente.



# Capítulo 2

## Homogeneización

### 2.1 Introducción

El Método de Homogeneización Asintótica (MHA) es una técnica matemática con la cual es posible encontrar ecuaciones y propiedades que gobiernan el comportamiento de un medio heterogéneo a nivel macroscópico a partir del conocimiento de su microestructura. Esto quiere decir que mediante tal teoría, es posible obtener propiedades que sean equivalentes a nivel macroscópico a partir de sus constituyentes microscópicos.

El MHA ha sido utilizado en distintas áreas del conocimiento, por ejemplo en ingeniería mecánica (Parton, 1993), en física aplicada (Mei, et.al., 1997), en medios poroelásticos (Burrige y Keller, 1981), etc. en donde es importante conocer las propiedades efectivas de medios heterogéneos. Cuando las heterogeneidades se expanden sobre una región muy amplia, es casi imposible describir con detalle lo que sucede a nivel local. Una idea natural consiste en reemplazar un medio heterogéneo que tiene variaciones rápidas por un medio homogéneo equivalente. Un camino sencillo para hallar este medio equivalente es partir de la microescala para incluir las heterogeneidades y deducir ecuaciones y propiedades efectivas por medio de un método racional de promediación. Esta es básicamente la idea del MHA.

El uso de varias escalas y un método de promediación racional para obtener propiedades y ecuaciones efectivas ha sido utilizado por distintos autores (Bensoussan, 1978), (Sánchez-Palencia, 1980), (Pobedrya, 1984), (Bakhvalov y Panasenko, 1989), entre otros.

La técnica consiste primero en identificar dos escalas: una pequeña que caracterice los fenómenos en la microescala y otra en la macroescala. Después se propone un desarrollo asintótico para las cantidades desconocidas y por último se define el promedio que nos conduzca tanto a las ecuaciones como a las propiedades que describen el comportamiento macroscópico del medio en estudio.

En la primera parte de este capítulo se resuelve un problema completo unidimensional que consiste en una barra no homogénea cuyo módulo de Young es periódico. En la sección (2.3) se estudia el problema en tres dimensiones. Se encuentra la ex-

presión para calcular las propiedades efectivas así como las ecuaciones que gobiernan el medio heterogéneo. En la sección (2.4) se calculan las propiedades efectivas de un medio periódico que contienen fibras de sección transversal circular cuya celda base tiene forma cuadrada y cuyos constituyentes tienen anisotropía cúbica. En la sección (2.5) se considera el mismo problema pero con una celda base de forma hexagonal. Después, en la sección (2.6) se consideran casos particulares de fibras, cuando la fibra está vacía, cuando es completamente rígida y cuando los constituyentes son isótropos. Finalmente, en la sección (2.7) se muestran algunos resultados numéricos para las propiedades efectivas y velocidades de algunas rocas. Se consideran dos tipos de rocas: granito y calizas las cuales contienen fibras que pueden estar llenas de un sólido, de un fluido o vacías.

## 2.2 Un ejemplo de homogeneización en una dimensión

Un ejemplo en una dimensión nos permite entender claramente qué es y cómo funciona el *método de homogeneización* es uno en una dimensión. Supongamos que se tiene un barra de longitud  $L$  que está compuesta por dos materiales distintos que varían periódicamente, como se muestra en la figura 2.2.1

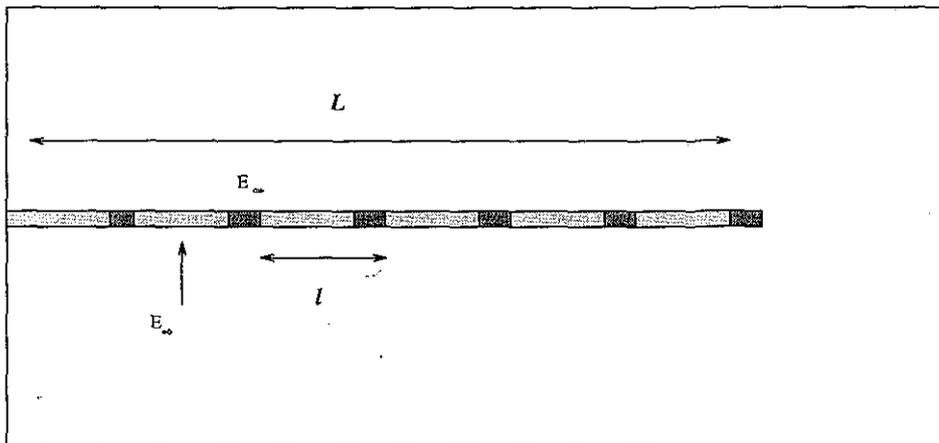


Figura 2.2.1 Barra de longitud  $L$  con una celda periódica de longitud  $l$ .

El módulo de Young  $E$  varía periódicamente. Claramente se puede ver que la barra es un material heterogéneo. Lo que se desea encontrar son las propiedades efectivas así como la ecuación que describe el comportamiento del medio completo. En otras palabras, se quiere hallar un módulo de Young efectivo que permita que el comportamiento del medio se pueda tratar como un medio homogéneo; de ahí que el nombre de homogeneización.

Para el caso unidimensional solamente el término  $C_{11}$  de la relación (1.132) es

diferente de cero por lo que la ecuación diferencial que describe el desplazamiento local  $u$  es la siguiente:

$$\frac{d}{dx} \left( E \frac{du}{dx} \right) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (2.1)$$

donde  $E = C_{11}$  es una función periódica de  $x$  con posibles cambios bruscos en cada interface. La condición en la interface es que el desplazamiento y la tracción sean continuos, es decir,

$$\| u \| = 0, \quad \left\| E \frac{du}{dx} \right\| = 0, \quad (2.2)$$

las barras paralelas significan salto de la función en la interface. La ecuación (2.1) también puede describir la deformación estática de un compuesto laminado formado por dos materiales distintos o bien el flujo de filtración en un medio poroso estratificado periódicamente. En este último,  $u$  representaría la presión del poro y  $E$  la conductividad hidráulica mientras que  $E(du/dx)$  sería la rapidez del flujo del fluido.

Supongamos ahora que estamos más interesados en la variación promedio sobre una región mucho más grande que la de un periodo típico o la variación local en cada capa. ¿Se podrá encontrar una  $E$  efectiva que describa todo el medio? i.e., ¿se podrá encontrar un medio homogéneo equivalente al medio heterogéneo original? La respuesta es sí. A continuación se presenta la manera de hacerlo.

Una característica importante de este problema es la presencia de dos escalas diferentes: una escala a nivel microscópico  $l$ , la que caracteriza el ancho típico de la celda, y una escala macroscópica  $L$ , que caracteriza la dimensión del medio, por lo que se tiene la relación  $l \ll L$ .

El método de perturbaciones de escalas múltiples es particularmente útil para estudiar problemas que involucren escalas contrastantes, como ocurre aquí. Primero transformemos el problema original, que es de una dimensión, a otro más general de dos variables, en donde una variable  $y$  variara a escala  $l$  microscópica y la otra  $x$  a escala  $L$  macroscópica. Esto quiere decir que el desplazamiento  $u$  será una función de las dos variables. Conviene definir el parámetro  $\epsilon$  que relacione las dos diferentes escalas

$$\epsilon = \frac{l}{L},$$

y suponer que  $\epsilon \ll 1$  (parámetro pequeño). Ya que se tiene el problema planteado en dos variables  $x$  y  $y$  vamos a restringirnos a una cierta región del plano, es decir, vamos a relacionar las dos variables mediante el parámetro  $\epsilon$ .

$$y = \epsilon^{-1}x. \quad (2.3)$$

A  $y$  le vamos a llamar variable local y a  $x$  variable global. Tanto  $x$  como  $y$  van a ser tratadas como variables independientes.

El desplazamiento  $u$ , que hasta ahora es desconocido, se supondrá como un desarrollo asintótico en serie de potencias de  $\epsilon$ :

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \epsilon u_1(x, y) + \epsilon^2 u_2(x, y) + \dots \quad (2.4)$$

La derivada con respecto a  $x$  en (2.1) y (2.2) será calculada por medio de la regla de la cadena, i.e.,

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.5)$$

Al sustituir esta nueva representación de la derivada en la ecuación (2.1) se obtiene lo siguiente:

$$\left( \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ E \left( \frac{\partial}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) (u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots) \right] = 0.$$

y desarrollando en detalle esta ecuación

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \epsilon \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \dots \\ & \epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \dots \\ & \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \dots \\ & \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \epsilon^3 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \epsilon^4 \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \dots = 0 \end{aligned}$$

Para encontrar las ecuaciones para  $u_i$  a distintos ordenes en  $\epsilon$ , primero se hace  $\epsilon = 0$ , se encuentra la ecuación a orden cero, después se deriva con respecto a  $\epsilon$  y se evalúa en  $\epsilon = 0$  y así sucesivamente. A orden  $O(\epsilon^0)$ , se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.6)$$

la cual gobierna la variación a microescala de  $u_0$ , sujeto a las condiciones de interface

$$\| u_0 \| = 0, \quad \left\| E \frac{du_0}{dx} \right\| = 0. \quad (2.7)$$

Debido a que se supone que la microestructura es periódica, entonces  $u_0$  también es periódica. La solución general de la ecuación homogénea (2.6) es

$$u_0 = A_1(x) \int_{y_0}^{y_0+y} \frac{dy}{E(x, y)} + A_2(x),$$

donde  $A_1(x)$  y  $A_2(x)$  son constantes de integración. Para asegurar la periodicidad sobre la distancia  $l$ , es decir, que  $u_0(x, y) = u_0(x, y + l)$ , se tiene que cumplir que

$$A_1(x) \int_{y_0+y}^{y_0+y+l} \frac{dy}{E(x, y)} = 0,$$

y para que se cumpla la relación anterior  $A_1(x)$  debe ser cero porque de otra manera se perdería información sobre la microestructura. Esto implica que el desplazamiento a primer orden depende solamente de la macroescala, i.e.,

$$u_0 = u_0(x) = A_2(x). \quad (2.8)$$

Al siguiente orden  $O(\epsilon)$  y ya tomando en cuenta que  $u_0 = u_0(x)$ , la ecuación perturbada es

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ E \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right] = 0, \quad (2.9)$$

con las condiciones en la interface

$$\| u_1 \| = 0, \quad \| E(x) \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \| = 0, \quad (2.10)$$

también  $u_1$  debe ser periódica. Notemos que la ecuación (2.9) es una ecuación no homogénea para  $u_1$ . Una forma de resolver la ecuación diferencial (2.9) es construirla, o bien proponerla. En este caso, debido a que (2.9) es una ecuación diferencial lineal, se propone  $u_1$  como solución de la forma

$$u_1 = Q(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{u}_1(x), \quad (2.11)$$

donde  $Q(x, y)$  debe satisfacer

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ E \left( 1 + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] = 0, \quad (2.12)$$

debido a (2.9). De las condiciones de interface se obtiene

$$\| Q \| = 0, \quad \| E \left( 1 + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \| = 0. \quad (2.13)$$

Por lo tanto  $Q$  también debe ser  $l$ -periódica. De esta manera,  $Q$  es la solución de un problema canónico de un periodo típico. Al resolver (2.12) se llega a que

$$Q = -y + D_1(x) \int_{y_0}^{y_0+y} \frac{dy}{E} + D_2(x), \quad (2.14)$$

donde  $D_1$  y  $D_2$  son constantes de integración. Debido a que  $Q$  debe ser  $l$ -periódica es necesario que

$$D_1 = \left( \frac{1}{l} \int_{y_0}^{y_0+l} \frac{dy}{E} \right)^{-1}. \quad (2.15)$$

Matemáticamente, esta ecuación es la condición para hallar la solución del problema inhomogéneo de  $Q$  ó  $u_1$ , dado que el problema homogéneo tiene una solución no trivial  $u_0$ . Vamos a denotar el valor promedio de  $E^{-1}$  por  $E_e^{-1}$ , entonces

$$\frac{1}{E_e} \equiv \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle \equiv \frac{1}{l} \int_{y_0}^{y_0+l} \frac{dy}{E}. \quad (2.16)$$

Se sigue de (2.11) y (2.14) que

$$u_1 = \left[ -y + D_1 \int_{y_0}^{y_0+y} \frac{dy}{E} + D_2(x) \right] \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{u}_1(x),$$

y al derivar respecto a  $y$  y usar la relación (2.16) para  $E_e$  se llega a

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{E_e}{E} \frac{\partial u_0}{\partial y}. \quad (2.17)$$

El siguiente paso es considerar la ecuación perturbada a orden  $O(\epsilon^2)$ , i.e.,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.18)$$

la cual es una ecuación inhomogénea de  $u_2$  debido a que  $u_0$  y  $u_1$  son conocidas. La condición de interface es

$$\| u_2 \| = 0, \quad \| E(y) \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \| = 0. \quad (2.19)$$

Más aún,  $u_2$  es  $l$ -periódica. Al multiplicar la ecuación (2.17) por  $E$  y luego derivarla respecto de  $x$  se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( E \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( E_e \frac{\partial u_0}{\partial x} \right),$$

por lo que la ecuación (2.18) se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( E_e \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = 0,$$

Al tomar el promedio de la ecuación anterior sobre  $l$  y debido a la periodicidad de  $u_2$  y  $u_1$  se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_e \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.20)$$

Esta ecuación gobierna la variación a escala macroscópica del desplazamiento promedio, mientras que  $E_e$  es el módulo de Young efectivo. Obsérvese que en esta ecuación (2.20) a diferencia de la de la ecuación (2.1) el coeficiente es constante. La función  $u_0$  se puede encontrar, dadas las condiciones de contorno. La variación en la microescala se puede hallar de (2.11) y (2.16). Hasta aquí la única restricción es que  $l \ll L$  y sobre  $E$  no hay ninguna.

Veamos un ejemplo. Se tiene un material que esta compuesto de dos medios distintos con un periodo  $l$ . Los módulos de Young y el ancho de cada uno de los medios son:  $(E_1, E_2)$  y  $(l - nl, nl)$  respectivamente. De la ecuación (2.16) se puede hallar la

propiedad efectiva  $E_e$  al hacer la integral sobre un periodo que en este caso es  $l$ . La propiedad efectiva es:

$$E_e = \left\langle \frac{1}{E} \right\rangle^{-1} = \left( \frac{1-n}{E_1} + \frac{n}{E_2} \right)^{-1} = \frac{E_1 E_2}{(1-n)E_2 + nE_1}.$$

En particular, si  $n$  ó  $n - 1$  no son muy pequeños comparados con la unidad, entonces

$$E_e \approx \frac{E_2}{n},$$

o

$$E_e \approx \frac{E_1}{(1-n)}.$$

Estos resultados pueden ser verificados al resolver el problema en cada una de las capas tomando en cuenta las condiciones de continuidad en la interface para  $u$  y  $E(du/dx)$ .

Hasta aquí se ha resuelto el problema completo de una barra inhomogénea cuyas propiedades cambian periódicamente. Se encontró el módulo de Young efectivo (2.16) y la ecuación que gobierna el comportamiento de la barra completa, ecuación (2.20). La técnica de homogeneización hace precisamente esto, es decir, convierte un problema heterogéneo caracterizado por una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes rápidamente oscilantes en un problema homogéneo caracterizado por una ecuación diferencial parcial con coeficientes constantes y de ahí viene el nombre de *homogeneización*.

En la siguiente sección de este capítulo se tratará esta misma técnica de homogeneización, pero ahora en tres dimensiones y además considerando el problema dinámico en elasticidad.

## 2.3 Homogeneización del problema dinámico en elasticidad

Consideremos un cuerpo elástico anisótropo con una estructura regular que ocupa una región  $\Omega$  en tres dimensiones con una frontera suave definida de la siguiente manera

$$\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega \quad (\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset).$$

Vamos a suponer que la región  $\Omega$  esta constituida por un arreglo periódico cuya celda unitaria es  $Y$  en la forma de un paralelepípedo con dimensiones  $\epsilon Y_i$  con  $i = 1, 2, 3$ . Las ecuaciones de movimiento y las condiciones de frontera del problema lineal de interés de la elasticidad puede escribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(\epsilon)}}{\partial x_j} + P_i = \rho^{(\epsilon)} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{en} \quad \Omega. \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} u_i^{(\epsilon)} &= 0 & \text{sobre} & \partial_1\Omega, & (2.22) \\ \sigma_{ij}^{(\epsilon)} n_j &= t_i^{(\epsilon)} & \text{sobre} & \partial_2\Omega, \end{aligned}$$

$$u_i^{(\epsilon)} = \frac{\partial u^{(\epsilon)}}{\partial t} = 0 \quad \text{al tiempo } t = 0, \quad (2.23)$$

donde la relación entre esfuerzo y deformación es la que ya estudiada ley de Hooke en el capítulo 1 ecuación (1.127)

$$\sigma_{ij}^{(\epsilon)} = C_{ijkl} \left( \frac{x}{\epsilon} \right) e_{kl}^{(\epsilon)},$$

y la deformación está dada por

$$e_{kl}^{(\epsilon)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k^{(\epsilon)}}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l^{(\epsilon)}}{\partial x_k} \right),$$

las cantidades  $P_i$  son independientes de  $\epsilon$  y representan las fuerzas de cuerpo y  $\rho^{(\epsilon)} = \rho(y)$  donde  $y = x/\epsilon$  es la densidad de masa del material inhomogéneo. Es claro que el tensor de constantes  $C_{ijkl}$  elásticas también será una función de  $y$ .

Como se estudió en en el Capítulo 1 ecuación (1.129), el tensor de constantes elásticas satisface las simetrías siguientes

$$C_{ijkl}(y) = C_{klij}(y) = C_{jikl}(y) = C_{ijlk}(y). \quad (2.24)$$

Son funciones periódicas definidas positivas de  $y$  donde  $y = x/\epsilon$ . El tensor  $C_{ijkl}$  puede ser una función continua por pedazos. La figura 2.3.1 muestra una celda unitaria del arreglo periódico.

En la celda unitaria existen dos fases distintas: una la matriz y la otra la fibra. El tensor de módulos elásticos que definen a esta celda unitaria esta dado de la siguiente manera

$$C_{ijkl}^Y(y) = \begin{cases} C_{ijkl}^1 & \text{en } Y_M \\ C_{ijkl}^2 & \text{en } Y_F \end{cases} \quad (2.25)$$

donde  $C_{ijkl}^{(2)}$  y  $C_{ijkl}^{(1)}$  son las constantes elásticas de la fibra y de la matriz, respectivamente. Las condiciones en la interface son las siguientes

$$\| \sigma_{ij}^{(\epsilon)} n_j \| = 0 \quad \text{y} \quad \| u_i^{(\epsilon)} \| = 0, \quad (2.26)$$

que significan continuidad en la tracción y en el desplazamiento.

En la sección anterior se propuso que el desplazamiento  $u$  tuviera un desarrollo asintótico en potencias de  $\epsilon$ , aquí cada una de las cantidades desconocidas  $u$ ,  $e$  y  $\sigma$ , se proponen como un desarrollo asintótico en potencias de  $\epsilon$  de la siguiente manera

$$u_i^{(\epsilon)} = u_i^{(0)}(x, y, t) + \epsilon u_i^{(1)}(x, y, t) + \dots, \quad (2.27)$$

$$e_{ij}^{(\epsilon)} = e_{ij}^{(0)}(x, y, t) + \epsilon e_{ij}^{(1)}(x, y, t) + \dots, \quad (2.28)$$

$$\sigma_{ij}^{(\epsilon)} = \sigma_{ij}^{(0)}(x, y, t) + \epsilon \sigma_{ij}^{(1)}(x, y, t) + \dots, \quad (2.29)$$

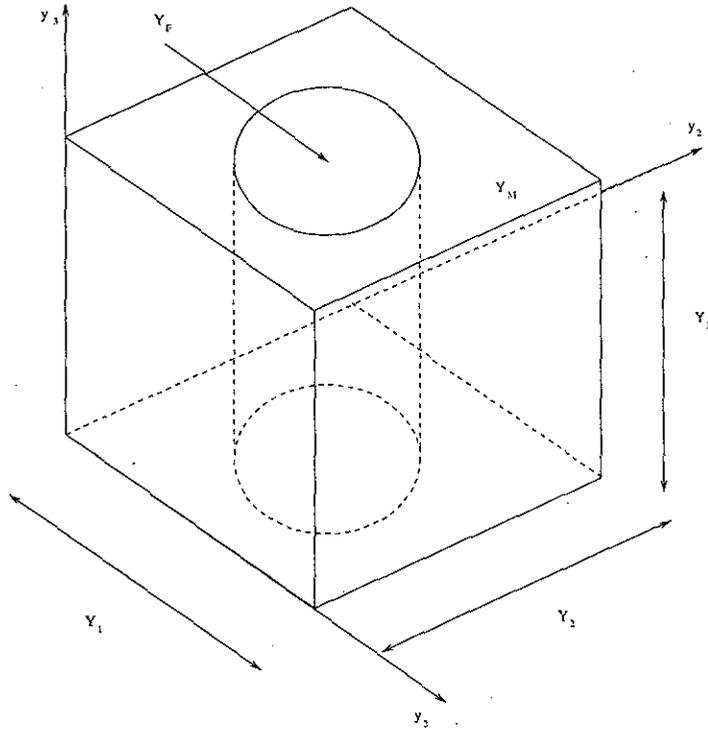


Figura 2.3.1 Una celda unitaria de un compuesto periódico de fibras.

se usa la regla de la cadena dada por (2.5) para encontrar la deformación  $e_{ij}^{(\epsilon)}$ , en este caso el operador derivada parcial con respecto a  $x_j$  se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_j},$$

como en el caso de una dimensión. Para encontrar  $e_{ij}^{(\epsilon)}$  se sustituye el operador derivada en la definición de deformación tanto para  $\partial u_i^{(\epsilon)}/\partial x_j$  como para  $\partial u_j^{(\epsilon)}/\partial x_i$ , es decir,

$$\frac{\partial u_i^{(\epsilon)}(x, y)}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \epsilon \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \epsilon^2 \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_j} + \dots \right) + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial y_j} + \epsilon \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y_j} + \epsilon^2 \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial y_j} + \dots \right),$$

y su parte análoga para  $\partial u_j^{(\epsilon)}/\partial x_i$ . Después de agrupar en potencias de  $\epsilon$  se obtiene que

$$e_{i,j}^{(0)}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial y_i} \right), \quad (2.30)$$

$$e_{i,j}^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial y_i} \right),$$

y de manera similar para el esfuerzo

$$\sigma_{ij}^{(0)}(x, y, t) = C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_l} + C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial y_l}, \quad (2.31)$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y, t) = C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial x_l} + C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_l},$$

al sustituir (2.27) y (2.29) en (2.21), es decir,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \left( \sigma_{ij}^{(0)}(x, t) + \epsilon \sigma_{ij}^{(1)}(x, y, t) + \epsilon^2 \sigma_{ij}^{(2)}(x, y, t) + \dots \right) + P_i \\ = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_i^{(0)}(x, t) + \epsilon u_i^{(1)}(x, y, t) + \epsilon u_i^{(2)}(x, y, t) + \dots) \end{aligned}$$

y quedándose con los términos  $O(\epsilon^{-1})$  y  $O(\epsilon^0)$  se encuentra que

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial y_j} = 0, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} + P_i = \rho^{(\epsilon)} \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}, \quad (2.33)$$

Se sustituye la ecuación (2.31) en (2.32) y se llega a

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ C_{ijkl}(y) \frac{\partial u_k^{(1)}(x, y, t)}{\partial y_l} \right] = - \frac{\partial u_k^{(0)}(x, t)}{\partial x_l} \frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_j}, \quad (2.34)$$

como en el caso unidimensional, es necesario resolver el problema a orden  $O(\epsilon^{-1})$  que en este caso es (2.34). Aquí se propone que la solución sea de la forma  $u_n^{(1)}(x, y, t)$ , considerando que  $x$  y  $t$  son parámetros, de la siguiente manera, por conveniencia cambiaré el subíndice  $k$  por  $n$  y usaré preíndices para evitar confusión

$$u_n^{(1)}(x, y, t) = {}_{kl}U_n(y) \frac{\partial u_k^{(0)}(x, t)}{\partial x_l}, \quad (2.35)$$

donde  ${}_{kl}U_n$  es una función periódica. Al sustituir (2.35) en (2.34) se obtiene los siguientes problemas locales, los cuales se usan para determinar las funciones  $y$ -periódicas  ${}_{kl}U_n(y)$  ( $n, k, l = 1, 2, 3$ ):

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \left[ C_{ijnh}(y) \frac{\partial {}_{kl}U_n}{\partial y_h} \right] = - \frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_j}. \quad (2.36)$$

Se puede introducir la siguiente notación

$${}_{kl}\tau_{ij}(y) = C_{ijnh}(y) \frac{\partial {}_{kl}U_n}{\partial y_h}, \quad (2.37)$$

donde  ${}_{kl}\tau_{ij}$  es el tensor de esfuerzo local, es decir, en una celda unitaria. La ecuación (2.34) se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial {}_{kl}\tau_{ij}}{\partial y_j} = -\frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_j}, \quad (2.38)$$

la cual es muy familiar en la teoría lineal de la elasticidad. El término  $\partial C_{ijkl}(y)/\partial y_j$  actúa como una fuerza externa que depende de  $y$  para el problema local. Al sustituir la ecuación (2.35) en (2.31) se obtiene que

$$\sigma_{ij}^{(0)}(x, y, t) = \left[ C_{ijkl}(y) + C_{ijnh}(y) \frac{\partial {}_{kl}U_n(y)}{\partial y_h} \right] \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}(x, t), \quad (2.39)$$

$$\sigma_{ij}^{(0)}(x, y, t) = [C_{ijkl}(y) + {}_{kl}\tau_{ij}(y)] \frac{\partial u_k^{(0)}(x, t)}{\partial x_l},$$

$$\sigma_{ij}^{(1)}(x, y, t) = C_{ijnh}(y) {}_{kl}U_n(y) \frac{\partial^2 u_k^{(0)}(x, y)}{\partial x_l \partial x_h} + C_{ijkh}(y) \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial y_h}. \quad (2.40)$$

La ecuación de movimiento del medio homogeneizado se puede obtener de la ecuación (2.33), la cual, junto con (2.40) son un sistema de ecuaciones para determinar  $u_k^{(2)}(x, y, t)$  en la celda unitaria  $Y$ . De la ecuación (2.33),  $\partial \sigma_{ij}^{(1)}/\partial y_j$  se puede escribir como

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} = \rho^{(\epsilon)} \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2} - P_i - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j}, \quad (2.41)$$

al tomar el promedio volumétrico sobre una celda unitaria se obtiene

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \left[ \rho^{(\epsilon)} \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2} - P_i - \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \right] dy = 0, \quad (2.42)$$

puesto que

$$\int_Y \frac{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}{\partial y_j} dy = \int_{\partial Y} \sigma_{ij}^{(1)} n_j ds = 0 \quad (2.43)$$

donde  $n_j$  es la componente  $j$  del vector normal unitario a la superficie  $\partial Y$ , y el integrando tiene signos contrarios en lados opuestos a la superficie debido a la periodicidad.

De la ecuación (2.42) se llega a

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle + P_i = \langle \rho \rangle \frac{\partial^2 u_i^{(0)}}{\partial t^2}(x, t), \quad (2.44)$$

donde

$$\langle \sigma_{ij}^{(0)} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \sigma_{ij}^{(0)} dy = \langle C_{ijkl} \rangle \frac{\partial u_k^{(0)}(x, t)}{\partial x_l} \quad (2.45)$$

y

$$\langle C_{ijkl} \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y [C_{ijkl}(y) + {}_{kl}\tau_{ij}(y)] dy, \quad (2.46)$$

son las constantes efectivas de un medio no homogéneo que tiene arreglo periódico y  $\langle \rho \rangle$  el promedio de la densidad de masa sobre una celda unitaria.

Para encontrar las constantes efectivas de esta clase de medios es necesario resolver el problema local (2.38) para el esfuerzo y luego calcular la integral (2.46) sobre una celda unitaria  $Y$ . En la siguiente sección se encontraran el esfuerzo local para un medio con fibras cilíndricas distribuidas periódicamente, primero cuando la celda es cuadrada y luego cuando es hexagonal.

## 2.4 Propiedades efectivas de medios periódicos (celda cuadrada)

Las propiedades elásticas de las rocas dependen de la propiedades de sus constituyentes, de la cantidad de cada una de ellas, de forma cómo están acomodadas en el espacio, etc. En esta parte del trabajo se hallarán propiedades elásticas de medios compuestos, que en particular pueden ser rocas, usando el Método de Homogeneización Asintótica. Estas propiedades obtenidas dependen tanto de la microestructura como de la concentración de sus constituyentes.

Un importante número de ejemplos de medios reforzados y otras características son presentados en (Kalamkarov y Kolpacov, 1997). Recientemente, (Rodríguez-Ramos et.al., 2001) estudiaron el problema de un medio reforzado por fibras que están arregladas en forma periódica cuya celda base es un cuadrado y tanto la matriz como la fibra son transversalmente isótropos. Ellos encontraron fórmulas cerradas para las propiedades efectivas. La técnica matemática que usaron fue el *Método de Homogeneización Asintótica* y esta misma técnica puede ser usada para obtener resultados similares cuando los constituyentes tienen un tipo de anisotropía cúbica. Nótese que la anisotropía cúbica no es un caso particular de las medios transversalmente isótropos. Muchos minerales, por ejemplo, el oro, la plata, el aluminio, el níquel, poseen este tipo de anisotropía. En esta parte del trabajo se presentará la forma de cómo obtener fórmulas cerradas para las propiedades efectivas de esta clase de compuestos además de presentar ejemplos para distintos materiales.

### 2.4.1 Planteamiento del problema

Se considera un material compuesto finito, el cual consiste de dos fases, una dentro de otra la cual tiene forma de fibra cilíndrica y éstas se encuentran perfectamente alineadas. Las dos fases se suponen homogéneas y tienen propiedades elásticas anisótropas de tipo cúbico (fig 2.4.1). Las componentes del tensor de propiedades elásticas de

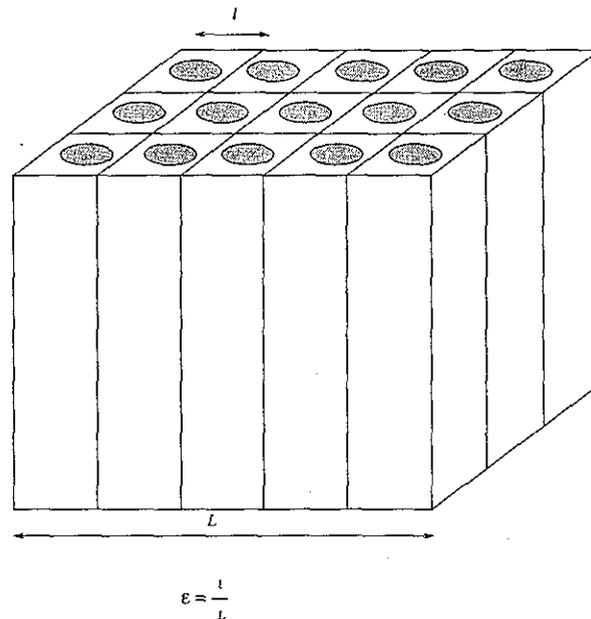


Figura 2.4.1 Medio periódico de longitud  $L$  con una celda base de longitud característica  $l$ .

cuarto orden tanto de la matriz como de las fibras están denotadas por  $C_{ijkl}^{(1)}$  y  $C_{ijkl}^{(2)}$  respectivamente. Las fibras están periódicamente distribuidas sin superponerse en dos direcciones ortogonales  $y_1, y_2$ . El compuesto muestra una simetría cuadrada en ese plano. En principio, la sección transversal de la fibra puede tener una forma arbitraria, incluyendo el caso cuando la fase y la matriz no se encuentran en contacto soldado, es decir, que no hay movimiento de una fase respecto de la otra. Más adelante la sección transversal de la fibra será particularizada a una forma circular para dar algunas fórmulas cerradas para las propiedades efectivas. La celda unitaria periódica se denotará por  $S$  ocupando un cuadrado (Fig. 2.4.1); tal celda está compuesta por dos dominios  $S_1$  y  $S_2$ , donde  $S_1 \cup S_2 = S$  y  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . La interface entre los dos dominios está denotada por  $\Gamma$ . Note que las cantidades relacionadas con la matriz y la fibra usan los subíndices 1 y 2 o los superíndices en los paréntesis (1) y (2), respectivamente. Más aún, la notación de doble barra se usa para denotar el contraste entre las propiedades en la interface  $\Gamma$ , i.e.,  $\|f^{(\Gamma)}\| = f^{(1)}(\mathbf{y}) - f^{(2)}(\mathbf{y})$  para  $\mathbf{y} \in \Gamma$ , tal como se hizo en la ecuación (2.7). El promedio volumétrico sobre una celda unitaria  $|S| = 1$  está definido como

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|S|} \int_S F(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.47)$$

Cuando la dimensión del compuesto es mucho más grande que su periodicidad, el método de homogeneización asintótica se puede usar para obtener las propiedades efectivas, las cuales se pueden obtener con la relación de la sección anterior en la

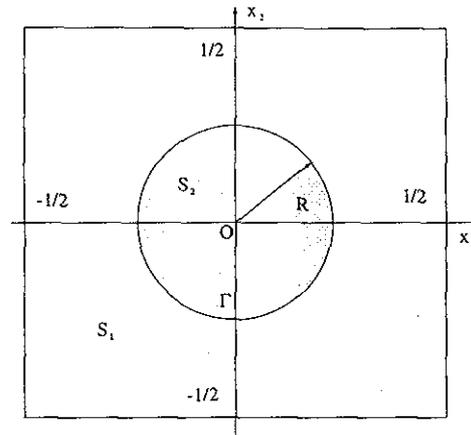


Figura 2.4.1 Una celda unitaria de sección circular.

ecuación (2.46).

$$C_{ijpq}^* = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl} {}_{pq}U_{k,l} \rangle, \quad (2.48)$$

la cual hereda todas las propiedades de simetría del tensor de módulos elásticos como en la ecuación (1.129) del capítulo I.  $C_{ijpq}^* = C_{jipq}^* = C_{pqij}^* = C_{jipq}^*$ . En la ecuación (2.48) la convención de suma sobre índices repetidos se supone sobre los índices latinos, los cuales van de 1 a 3. Las funciones que tienen los preíndices  ${}_{pq}U^{(\Upsilon)}$ ,  $\Upsilon = 1, 2$ , son los desplazamientos sobre una celda unitaria, de aquí que la solución única periódica de los problemas locales  ${}_{pq}L$  está definida como sigue:

$$\begin{aligned} {}_{pq}\sigma_{i\delta,\delta}^{(\Upsilon)} &= 0 \text{ en } S_\Upsilon, \\ \| {}_{pq}U_i^{(\Upsilon)} \| &= 0 \text{ en } \Gamma, \\ \| {}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\Upsilon)} n_\delta \| &= - \| C_{i\delta pq}^{(\Upsilon)} \| n_\delta \text{ sobre } \Gamma, \\ \langle {}_{pq}U \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

donde

$${}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\Upsilon)} = C_{i\delta k\lambda pq}^{(\Upsilon)} U_{k,\lambda}^{(\Upsilon)}, \quad {}_{pq}\sigma_{33}^{(\Upsilon)} = C_{3311pq}^{(\Upsilon)} U_{\alpha,\alpha}^{(\Upsilon)}; \quad (2.50)$$

aquí también se usa la convención de suma sobre índices repetidos sobre los índices minúsculos griegos que van de 1 a 2; la coma denota diferenciación parcial con respecto a la variable rápida  $y_\delta$ , i.e.,  ${}_{pq}\sigma_{i\delta,\delta}^{(\Upsilon)} \equiv \partial_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\Upsilon)} / \partial y_\delta$ ;  $n_\delta$  es el vector normal unitario a  $\Gamma$ . El tipo de solución buscada es doblemente periódica pues las fibras están arregladas en forma biperiódica y la periodicidad de las fibras determina cómo deben ser las funciones a hallar. La función  ${}_{pq}U^{(\Upsilon)}$  es doblemente periódica de periodos  $\omega_1 = (1, 0)$  y  $\omega_2 = (0, 1)$ . Nótese la simetría  ${}_{pq}U^{(\Upsilon)} = {}_{pq}U^{(\Upsilon)}$ . Los términos de la relación esfuerzo-deformación para un medio con simetría cúbica se pueden escribir, tanto para la matriz como para la fibra, en términos de tres parámetros  $K, \mu, \mu'$  como sigue:

$$\sigma_{11} = K(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + \frac{2}{3}\mu(2\epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33}),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22} &= K(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + \frac{2}{3}\mu(2\epsilon_{22} - \epsilon_{33} - \epsilon_{11}), \\
\sigma_{33} &= K(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + \frac{2}{3}\mu(2\epsilon_{33} - \epsilon_{11} - \epsilon_{22}), \\
\sigma_{32} &= 2\mu'\epsilon_{32}, \\
\sigma_{31} &= 2\mu\epsilon_{31}, \\
\sigma_{12} &= 2\mu'\epsilon_{12},
\end{aligned} \tag{2.51}$$

que son las ecuaciones que se mostraron en el capítulo 1 ecuación (1.133). La única diferencia aquí es que están escritas en forma de relación constitutiva.

En la siguiente subsección se encontrarán relaciones exactas entre los coeficientes efectivos y sus contrastes. Éstas son halladas sin resolver ningún problema local y el procedimiento, así como el resultado obtenido, han sido aceptados recientemente para aparecer en Valdiviezo-Mijangos, et.al. (en prensa) anexo no. 1.

### 2.4.2 Relaciones exactas

Como consecuencia de la simetría de la geometría sobre el eje  $Oy_3$ , es fácil mostrar que cada problema local (2.49) se puede desacoplar en dos conjuntos de ecuaciones, que son llamados, sistemas de ecuaciones de deformación plana  ${}_{pq}U_\alpha^{(r)}$  y sistemas de ecuaciones de deformación antiplana  ${}_{pq}U_3^{(r)}$ . Además, los elementos distintos de cero del tensor de módulos elásticos  $C_{i\delta pq}^{(r)}$  del lado derecho de la ecuación (2.49c) significa que el único problema con una solución no trivial corresponde a cuatro problemas planos  ${}_{PP}L$  y  ${}_{12}L$ , y dos problemas de deformación antiplana  ${}_{23}L$  y  ${}_{13}L$ .

Se puede ver fácilmente, de la ecuación (2.49c), que las funciones  ${}_{PP}U_1^{(r)}$ ,  ${}_{12}U_2^{(r)}$  y  ${}_{13}U_3^{(r)}$  son pares respecto a  $\theta$  y  ${}_{PP}U_1^{(r)}$ ,  ${}_{12}U_2^{(r)}$  y  ${}_{PP}U_2^{(r)}$ ,  ${}_{12}U_1^{(r)}$  y  ${}_{23}U_3^{(r)}$  son impares respecto a  $\theta$  por lo que los elementos distintos de cero, de las propiedades efectivas (2.48), se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
k^* &= \langle K + \frac{1}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\
&= \langle K + \frac{1}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}
l^* &= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\
&= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle \\
&= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$n^* = \langle K + \frac{4}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle, \tag{2.54}$$

$$p^* = \langle \mu' + \mu'{}_{32}U_{3,2} \rangle = \langle \mu' + \mu'{}_{31}U_{3,1} \rangle. \tag{2.55}$$

$$m'^* = \langle \mu' + \mu'({}_{11}U_{1,1} - {}_{11}U_{2,2}) \rangle = \langle \mu' - \mu'({}_{22}U_{1,1} - {}_{22}U_{2,2}) \rangle, \quad (2.56)$$

$$m^* = \langle \mu + \mu({}_{12}U_{1,2} + {}_{12}U_{2,1}) \rangle, \quad (2.57)$$

donde las seis constantes independientes  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$ ,  $p^*$ ,  $m^*$  y  $m'^*$  son los coeficientes efectivos de las relaciones de esfuerzo-deformación, llamada simetría tetragonal y que viene dado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= k^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + l^*\epsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= l^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + n^*\epsilon_{33}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= 2m'^*(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}), \\ \sigma_{32} &= 2p^*\epsilon_{32}, \\ \sigma_{31} &= 2p^*\epsilon_{31}, \\ \sigma_{12} &= 2m^*\epsilon_{12}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Esto quiere decir que el medio compuesto por fibras alineadas, que tienen anisotropía cúbica dentro de una matriz que también posee anisotropía del mismo tipo, tiene un nuevo tipo de anisotropía que pertenece a la familia de los medios con simetría tetragonal.

Una relación, que será de mucha utilidad, entre las soluciones de los problemas locales  ${}_{11}L$ ,  ${}_{22}L$  y  ${}_{33}L$ , puede ser encontrada fácilmente a partir de (2.49); es la siguiente

$$\| K - \frac{2}{3}\mu \| ({}_{11}\mathbf{U} + {}_{22}\mathbf{U}) = 2 \| K + \frac{1}{3}\mu \| {}_{33}\mathbf{U}. \quad (2.59)$$

Esta relación implica que el número de problemas a resolver se reduce en uno.

Dos relaciones universales se siguen de las ecuaciones (2.52)-(2.54) y (2.59)

$$\frac{k^* - \langle K + \frac{1}{3}\mu \rangle}{l^* - \langle K - \frac{2}{3}\mu \rangle} = \frac{l^* - \langle K - \frac{2}{3}\mu \rangle}{n^* - \langle K + \frac{4}{3}\mu \rangle} = \frac{\| K + \frac{1}{3}\mu \|}{\| K - \frac{2}{3}\mu \|}. \quad (2.60)$$

Unas relaciones universales similares fueron halladas por Hill (1964) para componentes transversalmente isótropas que contienen fibras cilíndricas perfectamente alineadas que están distribuidas aleatoriamente. Estas relaciones son:

$$\frac{k^* - k_1}{l^* - l_1} = \frac{k^* - k_2}{l^* - l_2} = \frac{l^* - l_v}{n^* - n_v} = \frac{k_1 - k_2}{l_1 - l_2},$$

donde  $k, l$  y  $n$  son las constantes elásticas de un medio transversalmente isótropo y los subíndices 1 y 2 indican propiedades de la fibra y de la matriz respectivamente. (Hill, 1964, ec. 2.1). Las ecuaciones (2.60) tienen la virtud de ser independientes de la solución de los problemas locales y únicamente dependen de sus contrastes que son  $\| K + \frac{1}{3}\mu \|$  y  $\| K - \frac{2}{3}\mu \|$ , y de la fracción de área ocupada por la matriz y por la fibra en la celda. Con estas ecuaciones, dos coeficientes están determinados, una vez que uno

de ellos sea conocido; estas identidades son aplicables a cualquier forma de la interface  $\Gamma$  cumpliendo tan sólo con que la celda periódica sea cuadrada. Estos resultados han sido aceptados para aparecer en Valdiviezo-Mijangos, et.al., (en prensa). Anexo No. 1.

Las integrales de área en (2.52)-(2.57) pueden ser transformadas a integrales de línea usando el teorema de Green. Además usando la continuidad en el desplazamiento (2.49b) sobre  $\Gamma$  y la doble periodicidad de las funciones se llega a

$$\begin{aligned}
 k^* &= K_v + \frac{1}{3}\mu_v - \left\| K + \frac{1}{3}\mu \right\| \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
 l^* &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - \left\| K - \frac{2}{3}\mu \right\| \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
 n^* &= K_v - \frac{4}{3}\mu_v - \frac{\left\| K - \frac{2}{3}\mu \right\|^2}{\left\| K + \frac{1}{3}\mu \right\|} \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
 p^* &= \mu'_v - \left\| \mu' \right\| \int_{\Gamma} {}_{13}U_3^{(1)} dy_2, \\
 m^{*'} &= \mu'_v - \left\| \mu' \right\| \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 + {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
 m^* &= \mu_v - \left\| \mu \right\| \int_{\Gamma} {}_{12}U_2^{(1)} dy_2 - {}_{12}U_1^{(1)} dy_1,
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

donde el subíndice  $v$  denota el promedio aritmético o de Voigt de la propiedad en cuestión, i.e.,  $K_v = V_1 K_1 + V_2 K_2$ , etc., aquí  $V_1$  y  $V_2$  son la fracción de área ocupada por la matriz y la fibra respectivamente. Nótese que  $V_1 + V_2 = 1$ , donde  $V_2 = \pi R^2$  y  $R$  es el radio de la fibra. Solamente es necesario resolver tres problemas locales para obtener todas las propiedades efectivas y esos son  ${}_{11}L$ ,  ${}_{12}L$  y  ${}_{13}L$  como puede apreciarse de las expresiones (2.61).

En la siguiente parte del trabajo se resolverán los problemas locales necesarios para calcular todas las constantes efectivas (2.61).

### 2.4.3 El problema de deformación antiplana ${}_{13}L$ .

El problema de deformación antiplana consiste en encontrar el desplazamiento que es perpendicular al plano de corte ( $y_1 - y_2$ ) en una celda y depende solamente de  $y_1$  y  $y_2$ . Puesto que la forma en que están arregladas las fibras es biperiódica se buscan soluciones dentro de la clase de funciones que son doblemente periódicas y además que satisfagan la ecuación de Laplace. Se proponen las soluciones como un desarrollo en serie de Taylor en la fibra y un desarrollo en serie de Laurent para la matriz. Luego con las condiciones en la interface se hallan los valores de los coeficientes de las dos series.

Las ecuaciones (2.49)-(2.50) para el problema  ${}_{13}L$  se pueden escribir de la siguiente manera

$$\Delta U^{(r)} = 0 \text{ en } S_r,$$

$$\begin{aligned} \| U^{(\Gamma)} \| &= 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ \| \mu'_{\Gamma} U'_{,\alpha} U^{(\Gamma)} n_{\alpha} \| &= - \| \mu'_{\Gamma} \| n_1 \text{ sobre } \Gamma, \\ \langle U \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

donde  $\Delta$  es el laplaciano en dos dimensiones y por comodidad  $U^{(\Gamma)}$  se escribe en vez de  ${}_{13}U_3^{(\Gamma)}$ . Se buscan funciones  $U^{(\Gamma)}$  armónicas que sean doblemente periódicas de la forma

$$\begin{aligned} U^{(1)}(z) &= \text{Re} \left\{ a_1 [\zeta(z) - \pi z] + \sum_{k=3}^{\infty} {}^{\circ} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \\ U^{(2)}(z) &= \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} c_k z^k \right\}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde la  $\zeta(z)$  y  $\zeta^{(k)}(z)$  son las funciones Zeta de Weierstrass cuasiperiódicas y su  $k$ -ésima derivada de periodo  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (ver Grigolyuk y Fil'shtinskii, 1970); el superíndice "o" en el símbolo  $\Sigma$  indica que la suma es sobre los índices impares. Los coeficientes  $a_k$ ,  $c_k$  son reales y deben ser determinados. Como se mencionó antes serán determinados con las condiciones en la interface  $\Gamma$ .

El desarrollo en serie de Laurent  $U^{(1)}(z)$  cerca del origen tiene la forma

$$U^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ -\pi a_1 z + \sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} a_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} {}^{\circ} a_k \sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} \eta_{kl} z^l \right\}, \quad (2.64)$$

donde  $\eta_{kl} \neq \eta_{lk}$  es definido en (A.10c).

Se observa que si las series de Taylor y de Laurent (2.63b) y (2.64) son sustituidas en la integral de línea (2.61d), los únicos términos que quedan son aquellos que tienen el factor  $\cos \theta$  por la ortogonalidad de las funciones trigonométricas. Así se nota inmediatamente que

$$p^* = \mu'_v - \| \mu'_{\Gamma} \| (\pi V_1 a_1 + V_2 \sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} a_l \eta_{l1}). \quad (2.65)$$

Los coeficientes  $a_k$  y  $c_k$  son determinados sustituyendo (2.63b) y (2.64) en las condiciones de interface y (2.62b,c). Después de algunas manipulaciones algebraicas, se llega a un sistema infinito de ecuaciones lineales para los coeficientes  $a_k$ , (ver Kantarovich y Krilov, 1964)

$$a_k = \chi R^{2k} \left[ (1 - \pi a_1) \delta_{1k} + \sum_{l=1}^{\infty} {}^{\circ} a_l \eta_{lk} \right], \quad (2.66)$$

donde

$$\chi = \| \mu'_{\Gamma} \| / (\mu'_1 + \mu'_2). \quad (2.67)$$

Sustituyendo  $k = 1$  en (2.66), la suma infinita puede ser eliminada por (2.65) y (2.66) para obtener una expresión para  $p^*$  en términos de solamente un coeficiente  $a_1$ , i.e.,

$$p^* = \mu'_1(1 - 2\pi a_1). \quad (2.68)$$

Además, una expresión cerrada para  $a_1$  puede ser hallada de (2.66) basado en el hecho que  $\eta_{kl}$  desaparece cuando  $S_{k+l}$  en (A.10c) es cero y esto sucede cuando  $k+l$  no es de la forma  $4t$  para  $t = 1, 2, 3, \dots$  (ver la tabla 1). El sistema infinito (2.66) puede ser descompuesto en tres sistemas parecidos al sustituir  $k = 1$ ,  $k = 4s - 1$  y  $k = 4s + 1$ , sucesivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} (1 + \chi V_2)a_1 &= \chi R^2 \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{4t-1, 1}\right), \\ a_{4s-1} &= \chi R^{2(4s-1)} \left(a_1 \eta_{1, 4s-1} + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t+1} \eta_{4t+1, 4s-1}\right), \\ a_{4s+1} &= \chi R^{2(4s+1)} \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{4t-1, 4s+1}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

para  $s = 1, 2, 3, \dots$  de (2.69), se sigue que

$$a_1 = \frac{\chi R^2}{1 + \chi V_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p}, \quad (2.70)$$

donde el superíndice  $T$  denota transpuesta, el vector  $\mathcal{V}_p(v_s)$ , la matriz  $\mathcal{M}_p(m_{ts})$  y el vector  $\tilde{\mathcal{V}}_p(\tilde{v}_t)$ , son de orden infinito, cuyas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} v_s &= R^{8s} \eta_{1, 4s-1}, \\ m_{ts} &= \delta_{4t-1, 4s-1} - \chi^2 R^{8s} \sum_{i=1}^{\infty} R^{8i} \eta_{4t-1, 4i+1} \eta_{4i+1, 4s-1}, \\ \tilde{v}_t &= \eta_{4t-1, 1}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

La expresión final para  $p^*$ , después de la sustitución (2.70) en (2.68)

$$p^* = \mu'_1 [1 - 2V_2 \|\mu'\| P / (\mu'_1 + \mu'_2)], \quad (2.72)$$

donde

$$P = [1 + \chi V_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \quad (2.73)$$

En el caso que no hubiera fibra, el valor de la propiedad efectiva debería ser el valor de la propiedad de la matriz. Esto es fácil ver puesto que en el caso límite cuando el radio de la fibra tiende a cero, es decir,  $R \rightarrow 0$  la propiedad efectiva  $p^*$  es  $\mu'_1$  que es el valor de la propiedad respectiva de la matriz, tal como se esperaba.

Hasta este momento se ha resuelto el problema antiplano  ${}_{13}L$  con el cual es posible conocer la propiedad efectiva  $p^*$ . En la siguiente subsección se resolverá el problema plano  ${}_{11}L$  con lo que se podrá calcular las propiedades efectivas  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$  y  $m^*$ .

### 2.4.4 El problema de deformación plana ${}_{11}L$ .

Resolver el problema de deformación antiplana consiste en hallar el desplazamiento  $u_1$  y  $u_2$  en el plano de corte sobre la celda. Este desplazamiento sólo depende, de igual manera que en caso antiplano, de las variables  $y_1$  y  $y_2$ . La idea que se usa para hallar este desplazamiento es esencialmente la misma que para el problema  ${}_{31}L$ , pero aquí se usan los potenciales de Kolosov-Muskhelivili (Sokolnikoff, 1956).

Como en el problema anterior, para hacer más clara la notación, en esta parte del trabajo supondremos  $U^{(\Upsilon)} \equiv {}_{11}U^{(\Upsilon)}$  y los preíndices 11 son omitidos de todas las cantidades relevantes, así las ecuaciones (2.49-2.50) llegan a ser

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha\delta,\delta}^{(\Upsilon)} &= 0 \text{ en } S_\Upsilon, \\ \| U_\alpha^{(\Upsilon)} \| &= 0 \text{ sobre } \Gamma, \\ \| \sigma_{\alpha\delta}^{(\Upsilon)} n_\delta \| &= - \| C_{\alpha\delta 11} \| n_\delta \text{ sobre } \Gamma, \\ \langle U_\alpha \rangle &= 0,\end{aligned}\tag{2.74}$$

donde

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(\Upsilon)} &= (K_\Upsilon + \frac{4}{3}\mu_\Upsilon)U_{1,1}^{(\Upsilon)} + (K_\Upsilon - \frac{2}{3}\mu_\Upsilon)U_{2,2}^{(\Upsilon)}, \\ \sigma_{22}^{(\Upsilon)} &= (K_\Upsilon - \frac{2}{3}\mu_\Upsilon)U_{1,1}^{(\Upsilon)} + (K_\Upsilon + \frac{4}{3}\mu_\Upsilon)U_{2,2}^{(\Upsilon)}, \\ \sigma_{12}^{(\Upsilon)} &= \mu'_\Upsilon(U_{1,2}^{(\Upsilon)} + U_{2,1}^{(\Upsilon)}).\end{aligned}\tag{2.75}$$

Las ecuaciones (2.74) y (2.75) se pueden identificar como uno de los problemas de deformación plana. Debido a esto, los métodos de variable compleja  $z$  en términos de dos funciones armónicas  $\varphi_\Upsilon(z)$  y  $\psi_\Upsilon(z)$ , los potenciales complejos de Kolosov-Muskhelishvili, pueden ser usados. Los potenciales están relacionados con las componentes del desplazamiento y del esfuerzo por medio de las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}2m_\Upsilon(U_1^{(\Upsilon)} + iU_2^{(\Upsilon)}) &= \kappa_\Upsilon\varphi_\Upsilon(z) - z\overline{\varphi_\Upsilon(z)} - \overline{\psi_\Upsilon(z)}, \\ \sigma_{11}^{(\Upsilon)} + \sigma_{22}^{(\Upsilon)} &= 2[\varphi'_\Upsilon(z) + \overline{\varphi'_\Upsilon(z)}], \\ \sigma_{22}^{(\Upsilon)} - \sigma_{11}^{(\Upsilon)} + 2i\sigma_{12}^{(\Upsilon)} &= 2[\bar{z}\varphi''_\Upsilon(z) + \psi'_\Upsilon(z)],\end{aligned}\tag{2.76}$$

la prima denota derivada con respecto a  $z$  y la barra arriba el complejo conjugado y

$$\kappa_\Upsilon = 1 + \frac{2\mu'_\Upsilon}{K_\Upsilon + 2\mu_\Upsilon/3}.$$

(ver Sokolnikoff, pp. 264-5, 1956)

Pobedrya, (pp. 200-204, 1984) resuelve un problema similar de deformación plana para medios isotrópos. Usando una notación más natural y clara, los potenciales  $\varphi_1$  y  $\psi_1$  de periodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= a_0z + a_1\zeta(z) + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \sum_{m,n} (z - \mathfrak{J}_{mn})^{-k}, \\ \psi_1(z) &= b_0z + b_1\zeta(z) + a_1Q(z)\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=3}^{\infty} \left[ b_k \sum_{m,n} (z - \beta_{mn})^{-k} + k a_k \sum_{m,n} \bar{\beta}_{mn} (z - \beta_{mn})^{-k-1} \right], \quad (2.77)$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $a_k$  y  $b_k$  son reales e indeterminados,  $\zeta(z)$  es la función Zeta de Weierstrass,  $Q(z)$  es la función de Natanzon,  $\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ , para  $m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , el símbolo sigma prima significa que es doble suma y no incluye el elemento  $m = n = 0$ . Ver el apéndice A para las definiciones y más propiedades de estas funciones. La doble periodicidad y la cuasiperiodicidad de estas funciones conducen a

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi(\kappa_1 - 1)^{-1} b_1, \\ b_0 &= \pi(\kappa_1 + 5S_4/\pi^2) a_1, \end{aligned}$$

donde  $S_4$  esta definido en (A.10a)

Como en el caso anterior para resolver el problema  ${}_{31}L$  se propone un desarrollo en serie de Laurent alrededor del origen de (2.77) el cual es

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \pi(\kappa_1 - 1)^{-1} b_1 z + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta_{kl} z^l, \\ \psi_1(z) &= \pi(\kappa_1 + 5S_4/\pi^2) a_1 z + \sum_{l=1}^{\infty} b_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta_{kl} z^l \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta'_{kl} z^l, \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde  $\eta'_{kl} \neq \eta'_{lk}$  esta dada en (A.10d).

Para los potenciales  $\varphi_2$  y  $\psi_2$  en el interior de  $S_2$ , su representación en serie de Taylor alrededor del origen

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \\ \psi_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Como sucedió en el problema  ${}_{31}L$ , el desarrollo en serie de Taylor y de Laurent (2.78) y (2.79) se usan en (2.76a). Se separan las soluciones  $U_1^{(1)}$  y  $U_2^{(1)}$  y se sustituyen en (2.61 a,b,c, y e) y por la ortogonalidad de las funciones trigonométricas sólo aquellos términos que tienen  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  son distintos de cero. Así se llega a que las constantes efectivas sólo dependen de los coeficientes  $c_1$  y  $a_1$

$$\begin{aligned} k^* &= K_v + \frac{1}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_{\Upsilon} + \frac{1}{3}\mu_{\Upsilon} \parallel (\kappa_2 - 1) c_1/\mu_2, \\ l^* &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_{\Upsilon} - \frac{2}{3}\mu_{\Upsilon} \parallel (\kappa_2 - 1) c_1/\mu_2, \\ n^* &= K_v + \frac{4}{3}\mu_v - V_2 \frac{\parallel K_{\Upsilon} - \frac{2}{3}\mu_{\Upsilon} \parallel^2}{\parallel K_{\Upsilon} + \frac{1}{3}\mu_{\Upsilon} \parallel} (\kappa_2 - 1) c_1/\mu_2, \\ m'^* &= \mu_1 - V_2(1 + \kappa_1) a_1/R^2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Los coeficientes  $a_1$  y  $c_1$  se encontrarán usando las condiciones en la interface (2.49b,c). La segunda de estas condiciones es integrada a lo largo del arco  $\Gamma$ . Cuando estos son escritos en términos de los potenciales complejos, las dos condiciones de interface se escriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \|\ [\kappa_{\Upsilon} \varphi_{\Upsilon}(t) - \overline{t \varphi'_{\Upsilon}(t)} - \overline{\psi_{\Upsilon}(t)}] / \mu_{\Upsilon} \|\ &= 0, \\ \|\ \overline{t \varphi'_{\Upsilon}(t)} + \overline{\psi_{\Upsilon}(t)} + \varphi_{\Upsilon}(t) \|\ &= -t \|\ k_{\Upsilon} \|\ + \bar{t} \|\ \mu_{\Upsilon} \|\ , \end{aligned} \quad (2.81)$$

donde  $t = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Después de algunas manipulaciones algebraicas, se obtiene un sistema de ecuaciones infinitas para  $a_l$ , esto es,

$$\begin{aligned} a_l + \pi(\kappa_1 + 5S_4/\pi^2)BR^{l+1}\delta_{1l}a_1 + R^{2l} \sum_{k=1}^{\infty} (Ar_{kl} + Bg_{kl} + CR^2\eta_{k1}\eta_{1l})a_k \\ = \|\ k_{\Upsilon} \|\ DR^{2l+2}\eta_{1l} + \|\ m_{\Upsilon} \|\ ER^{l+1}\delta_{1l}, \end{aligned} \quad (2.82)$$

para  $l = 1, 3, \dots$ , donde

$$\begin{aligned} r_{kl} &= \sum_{i=1}^{\infty} R^{2i} \eta_{ki} \eta_{il}, \\ g_{kl} &= k \left( \frac{k+l+2}{l+1} R^2 \eta_{k+2-l} + \eta'_{kl} \right); \end{aligned} \quad (2.83)$$

para  $k, l = 1, 3, 5, \dots$ ; las series dobles sobre (2.82),  $\sum_{k,l} g_{kl}$  y  $\sum_{k,l} \eta_{k1}\eta_{1l}$ , y en (2.83a),  $\sum_{k,l} r_{kl}$  son absolutamente convergentes, y las constantes que aparecen en (2.82) son

$$\begin{aligned} A &= (\kappa_1 \chi_m - \kappa_2)B / (\kappa_2 + \chi_m), \\ B &= (1 - \chi_m) / (1 + \kappa_1 \chi_m), \\ C &= [(\kappa_1 - 1)\chi_m - (\kappa_2 - 1)]B / F, \\ D &= (\kappa_2 - 1)B / 2F, \\ E &= B / (1 - \chi_m), \\ F &= V_1 \chi_m + (\kappa_2 - 1)G, \\ G &= 1/2 + V_2 / (\kappa_1 - 1), \\ \chi_m &= m_2 / m_1. \end{aligned} \quad (2.84)$$

El coeficiente  $c_1$  está dado en términos  $a_l$ , i.e.,

$$c_1 = \chi_m \left[ (1 + \kappa_1) \sum_{l=1}^{\infty} a_l \eta_{1l} + V_1 \|\ k_{\Upsilon} \|\ \right] / 2F. \quad (2.85)$$

Las series  $S_{k+l}$  y  $T_{k+l}$  no figuran en la expresión (2.85) debido a las propiedades asociadas a las componentes de las matrices  $\eta_{kl}$  y  $\eta'_{kl}$  así como de las propiedades de las propias series mostradas en la tabla 1. De ellas se sigue que  $r_{kl}$  y  $g_{kl}$  son cero como se muestra en la tabla 2 y 3. Estas propiedades permiten al sistema de ecuaciones infinitas

(2.82) separarse en tres sistemas parecidos. Estos sistemas son semejantes a aquellos que aparecen en (2.66)–(2.69), así la ecuación (2.82) se escribe para  $l = 1, l = 4s - 1$  y  $4s + 1$  y esto conduce a tres sistemas infinitos

$$\begin{aligned}
 (1 + R^2 H^+) a_1 + R^2 \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t+1} (Ar_{4t+1,1} + Bg_{4t+1,1}) &= \| m_\gamma \| ER^2, \\
 \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} [\delta_{4t-1,4s-1} + R^{8s-2} (Ar_{4t-1,4s-1} + Bg_{4t-1,4s-1} + CR^2 \eta_{4t-1,1} \eta_{1,4s-1})] \\
 &= \| k_\gamma \| DR^{8s} \eta_{1,4s-1}, \\
 R^{8s+2} a_1 (Ar_{1,4s+1} + Bg_{1,4s+1}) \\
 + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t+1} [\delta_{4t+1,4s+1} + R^{8s+2} (Ar_{4t+1,4s+1} + Bg_{4t+1,4s+1})] &= 0, \tag{2.86}
 \end{aligned}$$

donde

$$H^\pm = Ar_{11} + B[\pi(\kappa_1 \pm 5S_4/\pi^2) \pm g_{11}]. \tag{2.87}$$

De la ecuación (2.86a,c) se sigue que

$$a_1 = \frac{\| \mu_\gamma \| ER^2}{1 + R^2 H^+ - \mathcal{V}_{m'}^T \mathcal{M}_{m'}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_{m'}}, \tag{2.88}$$

donde el vector  $\mathcal{V}_{m'}(v_s^+)$ , la matriz  $\mathcal{M}_{m'}(m_{ts}^+)$  y el vector  $\tilde{\mathcal{V}}_{m'}(\tilde{v}_t^+)$ , son infinitos, teniendo las siguientes componentes

$$\begin{aligned}
 v_s^\pm &= R^{8s+4} (\pm Ar_{1,4s+1} + Bg_{1,4s+1}), \\
 m_{ts}^\pm &= \delta_{4t+1,4s+1} + R^{8s+2} (Ar_{4t+1,4s+1} \pm Bg_{4t+1,4s+1}), \\
 \tilde{v}_t^\pm &= \pm Ar_{4t+1,1} + Bg_{4t+1,1}, \tag{2.89}
 \end{aligned}$$

para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

El resto de la ecuación (2.86b) y los términos que se hacen cero  $\eta_{11}$  y  $\eta_{4t+1,1}$  para  $t = 1, 2, 3, \dots$  muestran que el coeficiente buscado  $c_1$ , dado en términos de  $a_{4t-1}$  es

$$c_1 = \| k_\gamma \| \chi_m [V_1 + (1 + \kappa_1) DV_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p] / 2F, \tag{2.90}$$

donde las componentes de la matriz de orden infinito  $\mathcal{M}_k(m_{ts})$  están dados por

$$\begin{aligned}
 m_{ts} &= \delta_{4t-1,4s-1} + R^{8s-2} (Ar_{4t-1,4s-1} + Bg_{4t-1,4s-1} \\
 &+ CR^2 \eta_{4t-1,1} \eta_{1,4s-1}), \tag{2.91}
 \end{aligned}$$

para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ . Los vectores,  $\mathcal{V}_p(v_s)$  y  $\tilde{\mathcal{V}}_p(\tilde{v}_t)$ , tienen sus componentes definidos por (2.71a, c) respectivamente.

Las propiedades globales  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$  y  $m^*$  se obtienen de (2.80), (2.88) y (2.90). Las fórmulas para estas componentes son

$$\begin{aligned} k^* &= K_v + \frac{1}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_\gamma + \frac{4}{3}\mu_\gamma \parallel^2 K/\mu_1, \\ l^* &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_\gamma + \frac{4}{3}\mu_\gamma \parallel \parallel K_\gamma - \frac{2}{3}\mu_\gamma \parallel K/\mu_1, \\ n^* &= K_v + \frac{4}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_\gamma - \frac{2}{3}\mu_\gamma \parallel^2 K/\mu_1, \\ m^* &= \mu'_1 - V_2 \parallel \mu'_\gamma \parallel M', \end{aligned} \quad (2.92)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= D[V_1 + (1 + \kappa_1)DV_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]/B, \\ M' &= (1 + \kappa_1)E/[1 + H^+ R^2 - \mathcal{V}_{m'}^T \mathcal{M}_{m'}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_{m'}], \end{aligned} \quad (2.93)$$

Nótese que las relaciones universales (2.60) se obtienen directamente de las ecuaciones (2.92a, b, c). Pobedrya (1984) obtiene fórmulas similares para (2.92) en compuestos cuyas fases son isótropas. En su libro, Pobedrya, no hace referencia a las relaciones universales expresadas en (2.60), lo cual en el presente trabajo se demuestra su validez. Las ecuaciones (2.92) muestran que las cuatro propiedades efectivas  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$  y  $m^*$  son dados en términos de las propiedades de sus constituyentes, la fracción de área ocupada por ellos y el radio de la sección transversal de la fibra. Las dos expresiones  $K$  y  $M'$  en (2.93), de hecho, están relacionadas con dos parámetros de la microestructura  $A_k$  y  $A_m$ , introducidos por Avellaneda y Swart (1998), los cuales tienen una interpretación física sencilla, esto es,  $A_k$  y  $A_m$  representan, respectivamente, la deformación hidrostática transversal promedio y la deformación desviatoria promedio en la inclusión, por unidad de presión aplicada transversal y de cizalladura. Estos son

$$\begin{aligned} A_k &= 1 + \parallel k_\gamma \parallel K/m_1, \\ A_m &= M'. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Las propiedades de la matriz son obtenidas cuando  $R \rightarrow 0$  en (2.92), como en el caso para  $p^*$ , y también cuando las propiedades de la fibra son las mismas que las de la matriz.

Al haber resuelto el problema plano  ${}_{11}L$  se han obtenido cuatro constantes efectivas más, que son las ecuaciones (2.92). Solamente falta por resolver el problema  ${}_{12}L$  para tener todas las constantes efectivas y es lo que se hará en la siguiente subsección.

## 2.4.5 El problema antiplano ${}_{12}L$

La solución del problema local  ${}_{12}L$  es muy parecido al problema  ${}_{11}L$ . Recordando que  ${}_{11}U_1^{(\gamma)}$  y  ${}_{12}U_2^{(\gamma)}$  son funciones impares de  $\theta$ , y  ${}_{11}U_2^{(\gamma)}$  y  ${}_{12}U_1^{(\gamma)}$  son funciones pares, entonces los potenciales complejos  ${}_{12}\varphi_\gamma$  y  ${}_{12}\psi_\gamma$  son escogidos como  $i {}_{11}\varphi_\gamma$  y  $i {}_{11}\psi_\gamma$ ,

respectivamente, donde  ${}_{11}\varphi_\Upsilon$  and  ${}_{11}\psi_\Upsilon$  corresponden a los potenciales del problema  ${}_{11}L$ . Después de algunas manipulaciones algebraicas, se encuentra que

$$\begin{aligned} m^* &= \mu_1 - V_2 \parallel \mu_\Upsilon \parallel M, \\ M &= \frac{(1 + \kappa_1)E}{1 + R^2 H^- - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde la expresión para los coeficiente  $H^-$  está dado en (2.87) y las componentes del vector  $\mathcal{V}_m(v_s^-)$ , la matriz  $\mathcal{M}_m(m_{ts}^-)$  y el vector  $\tilde{\mathcal{V}}_m(\tilde{v}_t^-)$ , de orden infinito están dados por (2.84). El límite, cuando los materiales de la fibra y la matriz en (2.95) son los mismos, se encuentra que  $m^* = \mu_1$  cuando  $R \rightarrow 0$ , como en los casos anteriores.

Al haber resuelto los dos problemas planos y un antiplano se puede decir ahora que ya se tienen todos los coeficientes efectivos. A continuación se presenta la matriz del medio homogeneizado cuyos coeficientes son los efectivos

$$C^* = \begin{pmatrix} k^* + m^* & k^* - m^* & l^* & 0 & 0 & 0 \\ k^* - m^* & k^* + m^* & l^* & & 0 & 0 \\ l^* & l^* & n^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m'^* \end{pmatrix}. \quad (2.96)$$

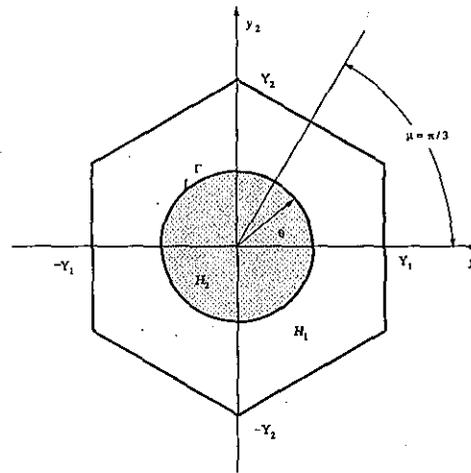
Esta matriz se forma a partir de la relación constitutiva (2.58), las ecuaciones (2.65), (2.92) y (2.95) corresponde a la familia de los materiales cuya anisotropía es tetragonal. Es claro que a partir de este resultado, cuando los constituyentes tienen simetría cúbica, el medio homogeneizado posee una nueva anisotropía caracterizada por seis constantes elásticas independientes lo cual constituye una simetría denominada tetragonal.

## 2.5 Propiedades efectivas de medios periódicos (celda hexagonal)

Las propiedades efectivas calculadas con el Método de Homogeneización dependen en gran medida de la forma de la celda base que se considere debido a que es ahí donde está la información de la microestructura. En esta sección se tomará como base una celda hexagonal (ver fig 2.4.1). El procedimiento que se usará para obtener las propiedades efectivas es básicamente el mismo que el usado en el caso de una celda cuadrada. Con objeto de no ser repetitivo en los argumentos iré señalando las diferencias con respecto al caso anterior. Vale la pena mencionar que en muchas ocasiones la diferencia es solamente un factor de  $\mu_p = \pi/3$  que está relacionado con el periodo de la celda base.

### 2.5.1 Planteamiento del problema

Se considera una celda base en forma hexagonal con las mismas características que el caso de la celda base de forma cuadrada. En este caso los periodos son  $\omega_1 = (1, 0)$  y



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.4.1 Una celda base hexagonal unitaria de sección circular.

$\omega_2 = (\cos \mu_p, \text{sen } \mu_p)$  con  $\mu_p = \pi/3$ .

## 2.5.2 Relaciones exactas

Las constantes efectivas (2.52)–(2.57) para la celda hexagonal se convierten

$$\begin{aligned} k^* &= \langle K + \frac{1}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K + \frac{1}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} l^* &= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$n^* = \langle K + \frac{4}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle, \quad (2.99)$$

$$p^* = \langle \mu' + \mu'_{32}U_{3,2} \rangle = \langle \mu' + \mu'_{31}U_{3,1} \rangle, \quad (2.100)$$

$$m^* = \langle \mu + \mu({}_{12}U_{1,2} + {}_{12}U_{2,1}) \rangle, \quad (2.101)$$

Nótese que aquí sólo son cinco constantes elásticas efectivas a diferencia de las seis del caso anterior. Las relaciones universales (2.60) son las mismas y esto quiere decir que tampoco dependen de si la celda base es cuadrada o hexagonal.

Después de usar el teorema de Green, la doble periodicidad de las funciones  ${}_{pq}U_i^{(\Upsilon)}$  y la continuidad en el desplazamiento en  $\Gamma$  se llega a

$$k^* = K_v + \frac{1}{3}\mu_v - \left\| K + \frac{1}{3}\mu \right\| \left( \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1 \right) / \text{sen } \mu_p,$$

$$\begin{aligned}
l^* &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - \left\| K - \frac{2}{3}\mu \right\| \left( \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1 \right) / \text{sen } \mu_p, \\
n^* &= K_v - \frac{4}{3}\mu_v - \frac{\left\| K - \frac{2}{3}\mu \right\|^2}{\left\| K + \frac{1}{3}\mu \right\|} \left( \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1 \right) / \text{sen } \mu_p, \\
p^* &= \mu'_v - \left\| \mu' \right\| \left( \int_{\Gamma} {}_{13}U_3^{(1)} dy_2 \right) / \text{sen } \mu_p, \\
m^* &= \mu_v - \left\| \mu \right\| \left( \int_{\Gamma} {}_{12}U_2^{(1)} dy_2 - {}_{12}U_1^{(1)} dy_1 \right) / \text{sen } \mu_p,
\end{aligned} \tag{2.102}$$

En estas ecuaciones aparece el factor  $\text{sen } \mu_p$  el cual se debe a la forma hexagonal de la celda base. Observemos que solamente es necesario resolver dos problemas locales, el  ${}_{11}L$  y  ${}_{31}L$ . A continuación se resolverán estos dos problemas.

### 2.5.3 El problema de deformación antiplana ${}_{31}L$

Es el mismo problema (2.62) que el de la celda cuadrada. Las funciones doblemente periódicas que se buscan son ahora de la forma

$$\begin{aligned}
U^{(1)}(z) &= \text{Re} \left\{ a_1 [\zeta(z) - \pi z / \text{sen } \mu_p] + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \\
U^{(2)}(z) &= \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \right\}.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

El desarrollo de  $U^{(1)}(z)$  en serie de Laurent alrededor del origen toma la forma

$$U^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ -\pi a_1 z / \text{sen } \mu_p + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta_{kl} z^l \right\}, \tag{2.104}$$

donde  $\eta_{kl} \neq \eta_{lk}$  está definida en (A.10d). Sustituyendo la ecuación (2.104) en (2.102d) y tomando en cuenta la ortogonalidad de las funciones trigonométricas se llega a

$$p^* = \mu'_v - \left\| \mu'_{\Gamma} \right\| \left( \pi V_1 a_1 / \text{sen } \mu_p + V_2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{k1} \right). \tag{2.105}$$

El sistema infinito de ecuaciones análogo a (2.66) es

$$a_l = \chi R^{2l} \left[ (1 - \pi a_1 / \text{sen } \mu_p) \delta_{1l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \eta_{kl} \right], \tag{2.106}$$

para  $l = 1, 3, 5, \dots$ , donde

$$\chi = \left\| \mu'_{\Gamma} \right\| / (\mu'_1 + \mu'_2), \tag{2.107}$$

y así se llega a

$$p^* = \mu'_1 (1 - 2\pi a_1 / \text{sen } \mu_p). \tag{2.108}$$

que es la relación equivalente a (2.68).

Es claro que el único término que interesa para la propiedad efectiva  $p^*$  es  $a_1$  y este es posible hallarlo resolviendo el sistema infinito (2.106).

Por las propiedades de  $\eta_{kl}$ , el sistema infinito se puede descomponer en cuatro sistemas infinitos para  $l = 1$ ,  $l = 6s - 3$ ,  $l = 6s - 1$  y  $l = 6s + 1$  (ver tabla 4)

$$\begin{aligned}
 (1 + \chi V_2)a_1 &= \chi R^2 \left(1 + \sum_{t=1}^{\infty} a_{6t-1} \eta_{6t-1, 1}\right), \\
 a_{6s-3} &= \chi R^{2(6s-3)} \sum_{t=1}^{\infty} a_{6t-3} \eta_{6t-3, 6s-3}, \\
 a_{6s-1} &= \chi R^{2(6s-1)} \left(a_1 \eta_{1, 6s-1} + \sum_{t=1}^{\infty} a_{6t+1} \eta_{6t+1, 6s-1}\right), \\
 a_{6s+1} &= \chi R^{2(6s+1)} \sum_{t=1}^{\infty} a_{6t-1} \eta_{6t-1, 6s+1},
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

para  $s = 1, 2, 3, \dots$ . De (2.109a, c, d), se llega a que

$$a_1 = \frac{\chi R^2}{1 + \chi V_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p}, \tag{2.110}$$

la cual tiene la misma forma que (2.70) pero las expresiones para los vectores y las matrices de orden infinito es diferente

$$\begin{aligned}
 v_s &= R^{12s} \eta_{1, 6s-1}, \\
 m_{ts} &= \delta_{6t-1, 6s-1} - \chi^2 R^{12s} \sum_{i=1}^{\infty} R^{12i} \eta_{6t-1, 6i+1} \eta_{6i+1, 6s-1}, \\
 \tilde{v}_t &= \eta_{6t-1, 1},
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

La expresión final para  $p^*$  es

$$p^* = \mu'_1 \left[1 - 2V_2 \parallel \mu'_r \parallel P / (\mu_1 + \mu_2)\right], \tag{2.112}$$

donde

$$P = \frac{1}{1 + \chi V_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p}. \tag{2.113}$$

Igual que en el caso de la celda cuadrada, cuando  $R \rightarrow 0$ , el valor de la propiedad efectiva es la de la matriz.

### 2.5.4 El problema de deformación antiplano $_{11}L$

El problema que se tiene que resolver es el (2.74) y se buscan soluciones doblemente periódicas de la forma (2.77). Debido al período  $(1, 0)$ ,  $(\cos \pi/3, \sin \pi/3)$  los nuevos coeficientes  $a_0$  y  $b_0$  son

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi(\kappa_1 - 1)^{-1} b_1 / \sin \pi/3 \\ b_0 &= \pi \kappa_1 a_1 / \sin \pi/3. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Las expresiones para los desarrollos en serie de Laurent alrededor del origen de (2.77) con los nuevos coeficientes son

$$\varphi_1(z) = \pi(\kappa_1 - 1)^{-1} b_1 z / \sin \pi/3 + \sum_{l=1}^{\infty} a_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta_{kl} z^l, \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= \pi \kappa_1 a_1 z / \sin \mu_p + \sum_{l=1}^{\infty} b_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta_{kl} z^l \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sum_{l=1}^{\infty} \eta'_{kl} z^l, \end{aligned} \quad (2.116)$$

donde  $\eta'_{kl} \neq \eta'_{lk}$  esta dada en (A.1d).

Y para los potenciales  $\varphi_2$  y  $\psi_2$  en el interior de  $S_2$  son

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k, \\ \psi_2(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^k. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Las relaciones para los coeficientes efectivos se pueden hallar usando la ortogonalidad de las funciones trigonométricas como en la otra celda

$$\begin{aligned} k^* &= K_v + \frac{1}{3} \mu_v - V_2 \parallel K_{\Gamma} + \frac{1}{3} \mu_{\Gamma} \parallel (\kappa_2 - 1) c_1 / \mu_2, \\ l^* &= K_v - \frac{2}{3} \mu_v - V_2 \parallel K_{\Gamma} - \frac{2}{3} \mu_{\Gamma} \parallel (\kappa_2 - 1) c_1 / \mu_2, \\ n^* &= K_v + \frac{4}{3} \mu_v - V_2 \frac{\parallel K_{\Gamma} - \frac{2}{3} \mu_{\Gamma} \parallel^2}{\parallel K_{\Gamma} + \frac{1}{3} \mu_{\Gamma} \parallel} (\kappa_2 - 1) c_1 / \mu_2, \\ m^* &= \mu'_1 - V_2 (1 + \kappa_1) a_1 / R^2. \end{aligned} \quad (2.118)$$

La relación que corresponde a la segunda condición en la interface es la misma pero el sistema de ecuaciones infinitos es diferente y está dada por

$$a_l + \pi \kappa_1 B R^{l+1} \delta_{1l} a_1 / \sin \pi/3 + R^{2l} \sum_{k=1}^{\infty} (A r_{kl} + B g_{kl} + C R^2 \eta_{k1} \eta_{1l}) a_k$$

$$= \|k_T\| DR^{2l+2}\eta_{ll} + \|m_T\| ER^{l+1}\delta_{ll}, \quad (2.119)$$

para  $l = 1, 2, 3$  donde  $r_{kl}, g_{kl}, A, B, C, D, E, F, G$  y  $\chi_m$  y las relaciones para  $c_1$  son idénticas a las del caso de la celda cuadrada. El sistema infinito (2.119) se puede separar en cuatro sistemas infinitos usando las propiedades  $r_{kl}$  y  $g_{kl}$  que se muestran en las tablas 5 y 6. Las ecuaciones (2.119) se pueden escribir como sucesiones, asignando a  $l = 1, 6s - 3, 6s - 1$  y  $6s + 1$  para  $s = 1, 2, \dots$  y esto conduce a

$$\begin{aligned} (1 + HR^2)a_1 + R^2 \left( \sum_{t=1}^{\infty} Ba_{6t-3}g_{6t-3,1} a_{6t} \right. \\ \left. + \sum_{t=1}^{\infty} Aa_{6t+1}r_{6t+1,1} \right) &= \|m_T\| ER^2, \\ \sum_{t=1}^{\infty} \left[ a_{6t-3} \left( \delta_{6t-3,6s-3} + AR^{12s-6}r_{6t-3,6s-3}B \right. \right. \\ \left. \left. + BR^{12s-6}a_{6t+1}g_{6t+1,6s-3} \right) \right] &= -BR^{12s-6}g_{1,6s-3}a_1, \\ \sum_{t=1}^{\infty} a_{6t-1} \left[ \delta_{6t-1,6s-1} + R^{12s-2} \left( Ar_{6t-1,6s-1} + Bg_{6t-1,6s-1} \right. \right. \\ \left. \left. + CR^2\eta_{6t-1,1}\eta_{1,6s-1} \right) \right] &= \|k_T\| DR^{12s}\eta_{1,6s-1}, \\ \sum_{t=1}^{\infty} \left[ a_{6t+1} \left( \delta_{6t+1,6s+1} + AR^{12s+2}r_{6t+1,6s+1} \right) + BR^{12s+2}a_{6t-3}g_{6t-3,6s+1} \right] \\ a_{6t-3} &= -AR^{12s+2}r_{1,6s+1}a_1 \end{aligned} \quad (2.120)$$

donde

$$H = Ar_{11} + \pi\kappa_1 B / \text{sen } \pi/3. \quad (2.121)$$

De (2.109a, b, d) se llega a

$$a_1 = \frac{\|m_T\| ER^2}{1 + HR^2 - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m}, \quad (2.122)$$

donde el vector  $\mathcal{V}_m(v_s)$ , la matriz  $\mathcal{M}_m(m_{ts})$  y el vector  $\tilde{\mathcal{V}}_m(\tilde{v}_s)$  de orden infinito están dados por

$$\begin{aligned} v_s &= [BR^{12s-4}g_{1,6s-3} \ AR^{12s+4}r_{1,6s+1}]^T, \\ m_{ts} &= \begin{bmatrix} \delta_{6t-3,6s-3} + AR^{12s-6}r_{6t-3,6s-3} & BR^{12s+2}g_{6t-3,6s+1} \\ BR^{12s-6}g_{6t+1,6s-3} & \delta_{6t+1,6s+1} + AR^{12s+2}r_{6t+1,6s+1} \end{bmatrix}, \\ \tilde{v}_t &= [Bg_{6t-3,1} \ Ar_{6t+1,1}]^T, \end{aligned} \quad (2.123)$$

respectivamente para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

Debido a las propiedades de  $\eta_{kl}$ ,  $r_{kl}$  y  $g_{kl}$  ver tablas (4, 5, 6) el coeficiente está en términos de los coeficientes tipo  $a_{6t-1}$  los cuales son hallados de (2.109c) para llegar a

$$c_1 = \| k_{\Upsilon} \| \chi_m R [V_1 + (1 + \kappa_1) D V_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{V}_p] / 2F, \quad (2.124)$$

donde las componentes de la matriz de orden infinito  $\mathcal{M}_k(m_{ts})$  están dadas por

$$m_{ts} = \delta_{6t-1 \ 6s-1} + R^{12s-2} (A r_{6t-1 \ 6s-1} + B g_{6t-1 \ 6s-1} + C R^2 \eta_{6t-1 \ 1} \eta_{1 \ 6s-1}) \quad (2.125)$$

para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ . Los vectores,  $\mathcal{V}_p(v_s)$  y  $\tilde{\mathcal{V}}_p(\tilde{v}_t)$ , de orden infinito están definidos en (2.71a, c). Los coeficientes  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$  y  $m^*$  se siguen de (2.118), (2.122), (2.124) y (2.126). Las fórmulas finales son

$$\begin{aligned} k^* &= K_v + \frac{1}{3} \mu_v - V_2 \| K_{\Upsilon} + \frac{4}{3} \mu_{\Upsilon} \|^2 K / \mu_1, \\ l^* &= K_v - \frac{2}{3} \mu_v - V_2 \| K_{\Upsilon} + \frac{4}{3} \mu_{\Upsilon} \| \| K_{\Upsilon} - \frac{2}{3} \mu_{\Upsilon} \| K / \mu_1, \\ n^* &= K_v + \frac{4}{3} \mu_v - V_2 \| K_{\Upsilon} - \frac{2}{3} \mu_{\Upsilon} \|^2 K / \mu_1, \\ m^* &= \mu'_1 - V_2 \| \mu'_{\Upsilon} \| M', \end{aligned} \quad (2.126)$$

donde

$$\begin{aligned} K &= D[V_1 + (1 + \kappa_1) D V_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{V}_p] / B, \\ M &= \frac{(1 + \kappa_1) E}{1 + H R^2 - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Hasta el momento se has encontrado expresiones cerradas para los coeficientes elásticos efectivos de medios compuestos, cuya microestructura es una celda cuadrada y cuando la celda es hexagonal. Se han encontrado que estas constantes dependen de la concentración de sus constituyentes. Estos resultado se han reportado en Valdiviezo-Mijangos, et. al., (en prensa). Anexo no. 2.

En siguiente subsección mostraremos algunos resultados cuando se toman casos particulares de fibras, es decir, cuando las fibras se encuentran vacías y cuando son completamente rígidas.

## 2.6 Fibras vacías y completamente rígidas

Usando el MHA es posible hallar resultados cuando las fibras que se consideran están vacías o son completamente rígidas. En el primer caso se trata de un medio poroso cuyos poros se encuentran aislados. En Sabina, et. al. (2001) (anexo no. 3) estudiamos esta clase de medios heterogéneos cuando la celda base es cuadrada. Las propiedades elásticas de la matriz y de la fibra son respectivamente  $K_1$ ,  $\mu_1$  y  $K_2$ ,  $\mu_2$ , donde  $K$  es

el coeficiente de compresibilidad y  $\mu$  el de rigidez (ver ecuación 1.131, capítulo I). Al tomar el límite cuando las propiedades de la fibra tiende a cero, es decir, el caso de fibras vacías se tiene que

$$\begin{aligned}
 k_e^* &= (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)V_1 + (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)^2 K_e / \mu_1, \\
 l_e^* &= (K_1 - \frac{2}{3}\mu_1)V_1 - V_2(K_1 + \frac{2}{3}\mu_1)(K_1 - \frac{2}{3}\mu_1)K_e / \mu_1, \\
 n_e^* &= (K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)V_1 - V_2(K_1 - \frac{2}{3}\mu_1)^2 K_e / \mu_1, \\
 p_e^* &= \mu_1(1 - 2V_2P_e), \\
 m_e^* &= \mu_1(1 - V_2M_e), \\
 m_e'^* &= \mu_1(1 - V_2M_e'), \tag{2.128}
 \end{aligned}$$

donde  $K_e$ ,  $M_e$ ,  $P_e$  y  $M_e'$

$$\begin{aligned}
 K_e &= D_i [V_1 + (1 + \kappa_1 D_i \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p)] / B_i, \\
 P_e &= [1 + \chi \mathcal{V}_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \\
 M_e &= (1 + \kappa_1) E_i / [1 + R^2 H_i^- - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m], \\
 M_e' &= (1 + \kappa_1) E_i / [1 + R^2 H_i^+ - \mathcal{V}_{m'}^T \mathcal{M}_{m'}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_{m'}], \tag{2.129}
 \end{aligned}$$

con los coeficientes respectivos

$$\begin{aligned}
 -A_i &= B_i = E_i = \chi = 1, \\
 C_i &= -2D_i = -1/G_i, \\
 \kappa_1 &= (K_1 + \frac{7}{3}\mu_1) / (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1). \tag{2.130}
 \end{aligned}$$

Los coeficientes efectivos para fibras vacías están dadas por las ecuaciones (2.128).

En el caso en que las fibras son completamente rígidas, es decir, cuando los valores de las propiedades de la fibra son muy grandes se llega a

$$\begin{aligned}
 k_r^* &= (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)(1 + V_2K_r), \\
 p_r^* &= \mu_1(1 + 2V_2P_r), \\
 m_r^* &= \mu_1(1 + V_2M_r), \\
 m_r'^* &= \mu_1(1 + V_2M_r'), \tag{2.131}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 K_r &= 1 + (\kappa_1 - 1) [G_i - (1 + \kappa_1) B_i \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p / V_1] / V_1, \\
 P_r &= [1 - V_2 - \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \\
 M_r &= (1 + 1/\kappa_1) / [1 + R^2 H_i^- - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m], \\
 M_r' &= (1 + 1/\kappa_1) / [1 + R^2 H_i^+ - \mathcal{V}_{m'}^T \mathcal{M}_{m'}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_{m'}]; \tag{2.132}
 \end{aligned}$$

y los valores para las constantes que aparecen en las matrices y vectores infinitos son

$$\begin{aligned} A_i &= \chi = -1, \\ B_i &= -1/\kappa'_1 = -(K_1 + \frac{7}{3}\mu_1)/(K_1 + \frac{1}{3}\mu_1), \\ C_i &= -2\mu_1/V_1(K_1 + \frac{7}{3}\mu_1), \end{aligned} \quad (2.133)$$

Los coeficientes efectivos para medios compuestos cuando fibras son completamente rígidas están dadas por las ecuaciones (2.131).

En la siguiente sección se presentan algunos resultados numéricos para distintas combinaciones posibles.

## 2.7 Consideraciones numéricas

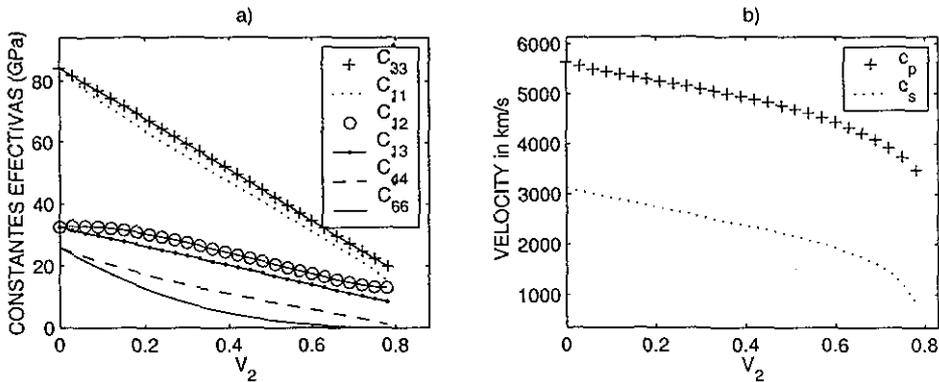
En todos los casos anteriores se ha considera que tanto la matriz como la fibra tienen simetría cúbica. Particularmente la fibra puede ser isótropa o puede contener algún fluido, por ejemplo, agua, gas, aceite, o bien estar vacía, que es el caso de un medio poroso cuyos poros están desconectados. Se mostrarán algunos ejemplos de rocas que contienen fibras con las características que mencione arriba. Las cantidades físicas que se usan para generar los ejemplos sintéticos se presentan en la tabla 2.7.1 y fueron tomados de Schön (1996).

Medio	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$	$\rho$
Granito	67.89	19.85	24.02	2705
Caliza	84.25	32.50	25.87	2658
Cuarzo	72.20	15.90	28.10	2600
Agua	2.241	2.241	0	1000
Aire	0.0111	0.0111	0	1.21
Aceite	1.4469	1.4469	0	877

**Tabla 2.7.1** Datos usados para hacer los ejemplo sintéticos (Schön, 1996). Las constantes elásticas  $C_{ij}$  están dadas en  $GPa$  y la densidad  $\rho$  en  $kg/m^3$ .

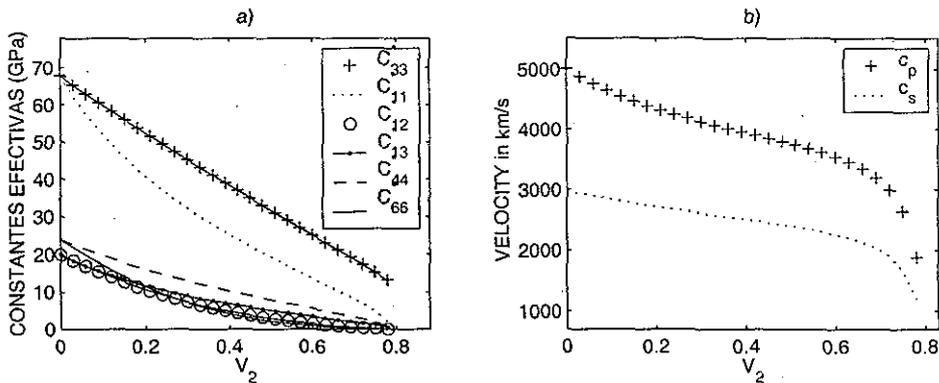
Aquí se presentan algunos experimentos numéricos usando el MHA para calcular las propiedades efectivas de rocas porosas. Los poros pueden estar llenos de aceite, agua, aire, algún mineral o bien estar vacíos. Se utilizan dos tipos de rocas: roca caliza, que es una roca sedimentaria y el granito que es una roca ígnea. Se consideran los dos tipos de microestructura que se estudiaron en este capítulo, i.e., cuando la celda base es cuadrada y cuando es hexagonal.

En cada figura hay dos gráficas en la de lado izquierdo se muestran las constantes elásticas efectivas como función de la concentración y en la del lado derecho la rapidez de la onda  $P$  y de la onda  $S$  también como función de la concentración de fibra. La



**Figura 2.7.1** Fibra llena de aceite en roca caliza con una celda base en forma cuadrada. La gráfica a) representa las propiedades efectivas y la b) la velocidad de la onda  $P$  y de la onda  $S$ .

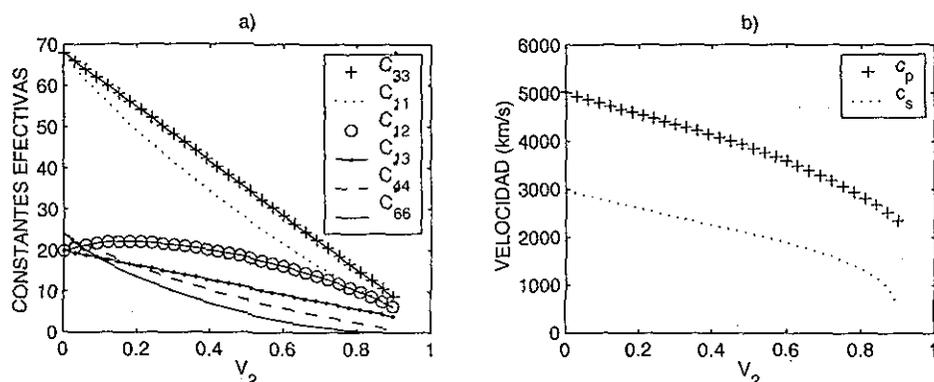
onda  $P$  se propaga a lo largo del eje  $x_1$  y el desplazamiento de la onda  $S$  está sobre el eje  $x_3$ .



**Figura 2.7.2** Fibra llena de aire en una matriz de granito con una celda base en forma cuadrada. La gráfica a) representa las propiedades efectivas y la b) la velocidad de la onda  $P$  y de la onda  $S$ .

Se ha demostrado que el hecho de haber fibras hace que aparezca un tipo de anisotropía, más aún, esta anisotropía es la conocida como transversalmente isotrópica (subsección 2.4.2 y 2.5.2). Esta anisotropía es posible observarla en las gráficas correspondientes a las propiedades efectivas. A concentración cero de fibra se recuperan las propiedades de la matriz, como se esperaba y conforme aumenta la concentración aparecen las seis constantes elásticas que caracterizan un medio transversalmente isotrópico.

En las rocas cuyos poros están llenos de fluidos, (fig. 2.7.1, 2.7.2 y 2.7.3) cada una de las propiedades decrece con la concentración de la fibra excepto para la constante  $C_{12}$  para el caso del granito con fibra llena de agua (fig. 2.7.3). En el caso de aceite en caliza (fig. 2.7.1) se observa que la curva que corresponde a esta constante se incrementa



**Figura 2.7.3** Fibra llena de agua en granito con una celda base en forma hexagonal. La gráfica a) representa las propiedades efectivas y la b) la velocidad de la onda  $P$  y de la onda  $S$ .

ligeramente, después decrece y su concavidad es la opuesta a las demás. En los casos de aire en granito (fig. 2.7.2), de agua en granito (fig. 2.7.3) se observa ligeramente este mismo comportamiento. La magnitud de la constante  $C_{33}$  disminuye y lo hace casi en forma lineal a diferencia de las demás constantes en todos los casos. Las propiedades efectivas decaen desde un 80 % hasta un 100 % respecto de las propiedades de la matriz. La velocidad de la onda  $P$  y de la onda  $S$  decaen con respecto a las velocidades de la matriz. Los cambios más drásticos se dan cuando se excede en un 80 % de la concentración de la fibra.

Cuando la fibra está llena de cuarzo ( $SiO_2$ ) y la matriz es piedra caliza (fig. 2.7.4), no todas las propiedades efectivas decrecen, algunas se incrementan y esto es debido a los contrastes de las propiedades en las distintas direcciones. En el caso de cuarzo en granito, las velocidades de ambas ondas la  $P$  y la  $S$  se incrementan. En el caso de cuarzo en roca caliza la rapidez de la onda  $P$  se incrementa mientras que la de la onda  $S$  decrece. En los dos tipos de rocas la rapidez de las ondas cambia casi en forma lineal con respecto a la concentración. En los incisos c) y d) se comparan los resultados que se encuentran usando el MHA con las cotas de Hashin-Strikman. Se puede ver que ambos métodos predicen prácticamente lo mismo.

Las constantes efectivas de las rocas cuando las fibras están llenas de algún fluido tienen básicamente las mismas características cualitativas, es decir, no importa el tipo de fluido, la respuesta es cualitativamente equivalente excepto en la constante efectiva  $C_{12}$ .

Cuando la fibra está vacía cada una de las propiedades decrece, incluso la  $C_{12}$  (fig. 2.7.5).

Una diferencia importante entre las dos geometrías estudiadas es que los valores mínimos se alcanzan a concentraciones más pequeñas cuando la celda base es cuadrada que cuando la celda base es hexagonal.

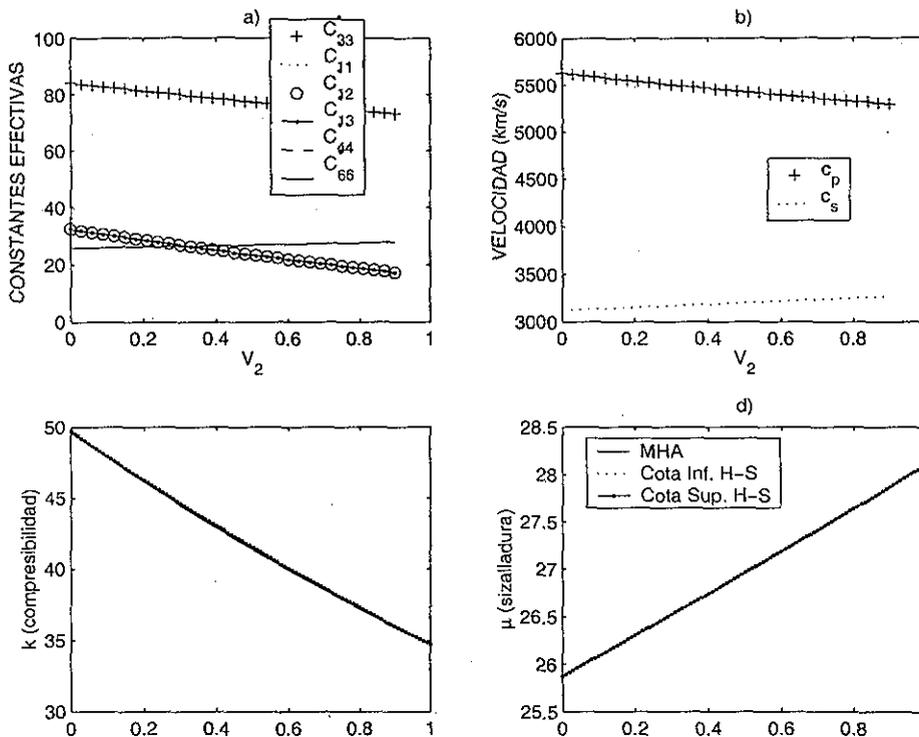


Figura 2.7.4 Fibra llena de cuarzo en caliza con una celda base en forma hexagonal. La gráfica a) representa las propiedades efectivas, la b) la velocidad de la onda  $P$  y de la onda  $S$ . Los incisos c) y d) muestran una comparación con las predicciones de que se obtienen con las cotas de Hashin-Strickman para compresibilidad y el coeficiente de sizalladura efectivos, respectivamente. La notación para la propiedades efectivas es la misma que en la figura 2.7.3 a).

Con MHA es posible calcular propiedades efectivas en forma analítica hasta el punto de contacto entre las fibras. Cuando se va más allá de ese punto ya no es posible decir nada sobre las propiedades efectivas y como consecuencia con este método no se puede decir nada sobre percolación.

## 2.8 Conclusiones

Con base en las secciones anteriores se pueden escribir las siguientes conclusiones

- Se obtuvieron Relaciones Universales, es decir, relaciones entre propiedades macroscópicas sin tener que resolver ningún problema local y sin importar la microestructura (ecuaciones 2.60).
- Es posible hallar propiedades efectivas en forma analítica usando el Método de Homogeneización Asintótica para modelar rocas heterogéneas, ecuaciones (2.92)

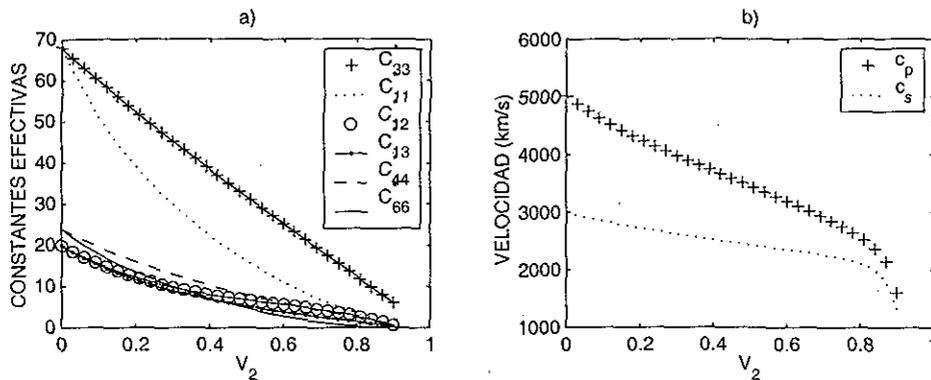


Figura 2.7.5 Fibra vacía en granito con una celda base en forma hexagonal. La gráfica a) representa las propiedades efectivas y la b) la velocidad de la onda  $P$  y de la onda  $S$ .

y (2.126).

- Con las ecuaciones antes citadas, es posible validar resultados numéricos que se encuentren para otras microestructuras.
- El comportamiento de un medio heterogéneo es cuantitativamente y cualitativamente diferente si la fibra está llena de un fluido o de otro sólido. En el caso de todos los fluido estudiado aquí, las propiedades efectivas se comportan de manera semejante.
- Una diferencia importante entre las dos geometrías estudiadas es que los valores mínimos se alcanzan a concentraciones más pequeñas cuando la celda es cuadrada que cuando es hexagonal.
- Cuando las fibras están llenas de algún fluido el comportamiento de las velocidades de ambas ondas  $p$  y  $s$  es semejante, es decir, no importa el fluido, la respuesta del medio es básicamente la misma.



## Capítulo 3

# El método autoconsistente para un medio termoelástico

### 3.1 Introducción

En este capítulo se usará el Método Autoconsistente para obtener propiedades efectivas termoelásticas de medios heterogéneos en la forma como lo hicieron Sabina y Willis (1988) para un medio elástico. El estudio de la propagación de ondas en medios compuestos es muy complicada debido a que hay muchos dispersores, que en este caso sería cada una de las inclusiones. Aquí consideramos solamente un dispersor, es decir, el efecto que tiene una sola inclusión sobre una onda que se propaga en un medio termoelástico. Para ello es necesario calcular la función de Green. Con esta función es posible describir la dispersión en todo el espacio. Una primera aproximación para hallar la deformación es considerar que el desplazamiento es constante sobre la inclusión (aproximación de Galerkin). Después se propone que exista un medio termoelástico homogéneo con propiedades equivalentes de tal manera que tengan el mismo comportamiento que aquel medio que tiene un dispersor y de esta manera se identifican las propiedades efectivas. Esto conduce a un sistema no lineal de siete ecuaciones con siete incógnitas donde cada una es un número complejo. A partir de estas incógnitas, que son las propiedades efectivas, se puede calcular tanto la velocidad de fase como la absorción. En la parte final se presentan ejemplos sintéticos, se compara con datos experimentales y se dan algunas conclusiones.

En la sección (3.2) se presenta el planteamiento del problema, la sección (3.3) muestra un forma de hallar la función de Green para un medio termoelástico, la cual juega un papel muy importante en el cálculo de las propiedades efectivas y será usada en la sección (3.4) para resolver el problema de un sólo dispersor. Más adelante, en la sección (3.5) se halla el promedio del núcleo de la función de Green en una inclusión esférica para hallar las ecuaciones autoconsistentes de la sección (3.6). Finalmente se presentan algunos resultados numéricos comparándolos con experimentos.

### 3.2 Planteamiento del problema

Se considera un medio compuesto que se compone de una matriz cuyo tensor de módulos elásticos es  $L_{n+1}$ , tensor de módulos termoelásticos  $\eta_{n+1}$ , calor específico  $c_{n+1}$ , tensor de coeficientes de conductividad térmica  $\kappa_{n+1}$  y densidad de masa  $\rho_{n+1}$  en la cual se encuentran inmersos  $n$  tipos diferentes de inclusiones distribuidas aleatoriamente sin que se traslapen. La inclusión esférica de tipo  $r$  tiene las propiedades físicas correspondiente denotadas por  $L_r$ ,  $\eta_r$ ,  $c_r$ ,  $\kappa_r$ , y  $\rho_r$ . Estas ocupan un dominio  $x' + \Omega_r$ , donde  $\Omega_r$  define el tamaño de la inclusión y su "centro  $x'$ " está distribuido aleatoriamente. El medio heterogéneo ocupa el dominio  $\Omega = \sum_{r=1}^{n+1} \Omega_r$  y es lo suficientemente grande para contener muchas inclusiones (ver fig 3.1.1).

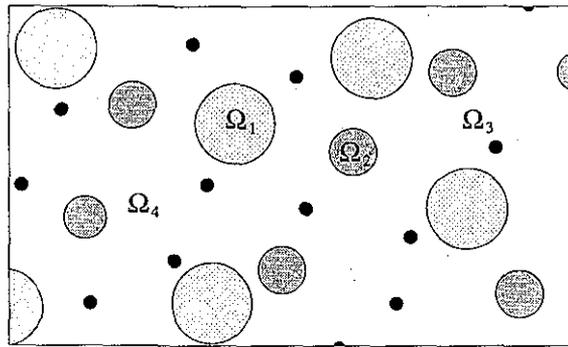


Figura 3.1.1 Medio heterogéneo donde las inclusiones son de forma esférica. Aquí  $r = 4$ .

Las ecuaciones que describen el comportamiento de un medio termoelástico se estudiaron en el capítulo 1 y son las (1.123)–(1.126) que aquí retomaré. En ausencia de fuerzas de cuerpo y fuentes de calor estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} - \dot{p}_i &= 0, \\ q_{i,i} + \dot{S} &= 0,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde  $\sigma_{ij}$  es el campo de esfuerzos,  $p_i$  es la componente  $i$  del vector de densidad de momento,  $q_i$  es la componente  $i$  del vector de flujo de calor y  $S$  es la entropía. Estas cantidades están relacionadas con el tensor de deformación  $e_{ij}$ , la temperatura  $\theta$ , su gradiente  $T_i$  y el vector de velocidad  $v = \dot{u}$  mediante las relaciones constitutivas

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= L_{ijkl}\epsilon_{kl} - \eta_{ij}\theta, \\ S &= \eta_{ij}e_{ij} + \frac{c}{\theta_0}\theta,\end{aligned}\tag{3.2}$$

donde  $\theta_0$  es la temperatura de referencia y

$$\begin{aligned}q_i &= -\kappa_{ij}T_j, \\ p_i &= \rho\dot{u}_i.\end{aligned}$$

Estas relaciones pueden ser escritas en forma simbólica de la siguiente manera.

$$\mathcal{T} = \mathcal{L}S, \quad (3.3)$$

donde

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma \\ S \\ q \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} L & -\eta & & \\ \eta & c/\theta_0 & & \\ & & -\kappa & \\ & & & \rho \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} e \\ \theta \\ T \\ \dot{u} \end{pmatrix}.$$

En esta notación la matriz  $\mathcal{L}$  es considerada un operador lineal el cual transforma el vector  $S$  en otro vector  $\mathcal{T}$ . Con esto en mente, la ecuación (3.3) puede ser vista como la *Ley de Hooke Generalizada* y  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{L}$  y  $S$  como el esfuerzo, los módulos elásticos y la deformación generalizada, respectivamente. En este caso, los requerimientos autoconsistentes trasladados a esta notación para los componentes del compuesto termoelástico son

$$\langle \mathcal{T} \rangle = \mathcal{L}_0 \langle S \rangle, \text{ con } \langle S \rangle = S_0, \quad (3.4)$$

(ver Sabina y Willis, 1988) donde  $S_0$  se obtiene de la onda incidente

$$u_0(x, t) = m e^{i(k_0 x - \omega t)}, \quad (3.5)$$

$$\theta_0(x, t) = \theta e^{i(k_0 x - \omega t)}, \quad (3.6)$$

la cual se propaga en un material de referencia cuyas propiedades son  $\mathcal{L}_0$  aquí  $m$  es el vector de polarización del desplazamiento,  $\theta$  es la magnitud del campo de temperatura, de la onda y  $k_0$  es el número de onda.

Las condiciones de autoconsistencia son la mismas que usan Sabina y Willis (1988) ecuaciones (3.23) las cuales en este caso son

$$\mathcal{L}_0 S_0 = \left\{ \mathcal{L}_{n+1} + \sum_{r=1}^n f_r h_r(k_0 a) h_r(-k_0 a) \left( \mathcal{L}_r - \mathcal{L}_{n+1} \left[ I + \bar{\mathcal{G}}_\xi^{(r)} (\mathcal{L}_r - \mathcal{L}_0) \right]^{-1} \right) \right\} S_0, \quad (3.7)$$

donde  $f_r$  es la fracción volumétrica ocupada por la inclusión  $r$ ,  $I = I_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{lj} + \delta_{il}\delta_{kj})/2$  y

$$h_r(k_0 a) = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{|\Omega_r|} \exp(i k_0 a \cdot x) dx, \quad (3.8)$$

$$\bar{\mathcal{G}}_\xi^{(r)} = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{|\Omega_r|} \bar{\mathcal{G}}_\xi dx \quad (3.9)$$

donde la barra representa el valor promedio sobre la inclusión, el subíndice  $r$  se refiere al tipo de inclusión,  $a$  es el radio de la esfera

$$\mathcal{G}_\xi = \begin{pmatrix} G_{i(k,l)(j)} & -i\omega G_{4(i,j)k} & G_{4(i,j)k} & -i\omega G_{i)k,(j)} \\ G_{k4,i} & -\omega G_{44} & G_{44,k} & -i\omega G_{44} \\ G_{i4,kl} & -i\omega G_{44,i} & G_{44,ik} & -i\omega G_{i4,k} \\ G_{ik,l} & -i\omega G_{4i} & G_{4i,k} & -i\omega G_{ik} \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$



donde \* es el operador convolución,  $G$  es un tensor,  $\gamma$  y  $\Gamma$  vectores y  $g$  un escalar, los cuales satisfacen las siguientes ecuaciones para una fuerza puntual  $\delta_{ij}\delta(x)$  y una fuente de calor  $\delta(x)$ ,

$$\begin{aligned} (\partial_j C_{ijkl} \partial_l + \rho \omega^2 \delta_{ik}) G_{kj} - \partial_\beta \eta_{ij} \Gamma_\beta &= -\delta_{ij} \delta(x), \\ (\partial_j C_{ijkl} \partial_l + \rho \omega^2 \delta_{ik}) \gamma_k - \partial_j \eta_{ij} g &= 0, \\ (\partial_i \kappa_{ij} \partial_j + i\omega c) \Gamma_\alpha + i\omega \theta_0 \eta_{ij} \partial_j G_{i\alpha} &= 0, \\ (\partial_i \kappa_{ij} \partial_j + i\omega c) g + i\omega \theta_0 \eta_{ij} \partial_j \gamma_i &= -\delta(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Al obtener la transformada de Fourier de la ecuación (3.17) se llega a

$$\begin{aligned} [\Lambda_{ik}(k) - \rho \omega^2 \delta_{ik}] G_{kj}(k) + ik_\beta \eta_{ij} \Gamma_\beta &= \delta_{ij}, \\ -i\omega \theta_0 \eta_{ij} ik_j G_{ik}(k) + [k^2 \kappa(k) - i\omega c] \Gamma_k(k) &= 0, \\ [\kappa(k) - i\omega c] g - i\omega \theta_0 \eta_{ij} ik_j \gamma_i(k) &= 1, \\ ik_j \eta_{ij} g(k) + [\Lambda_{ik}(k) - \rho \omega^2 \delta_{ik}] \gamma_k &= 0, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde se usa la siguiente notación

$$\begin{aligned} \Lambda_{ik}(k) &= k^2 \Lambda_{ik}(\xi), \quad \Lambda_{ik}(\xi) = C_{ijkl} \xi_j \xi_l, \quad \xi_j = \frac{k_j}{|k|}, \\ \kappa(k) &= k^2 \kappa(\xi), \quad \kappa(\xi) = \kappa_{ij} \xi_i \xi_j. \end{aligned} \quad (3.19)$$

El sistema de ecuaciones (3.18) puede ser escrito en forma simbólica de la siguiente manera

$$\mathcal{L}(k) \mathcal{G}(k) = \mathcal{I}, \quad (3.20)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(k) &= \begin{vmatrix} \Lambda_{ik}(k) - \rho \omega^2 \delta_{ik} & b_i(k) \\ -i\omega \theta_0 b_k(k) & \kappa(k) - i\omega c \end{vmatrix}, \\ \mathcal{G}(k) &= \begin{vmatrix} G_{kj}(k) & \gamma_k(k) \\ \Gamma_j(k) & g(k) \end{vmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{vmatrix} \delta_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Se sigue de la ecuación (3.20) que

$$\mathcal{G}(k) = \mathcal{L}^{-1}(k),$$

y la representación de la función de Green en términos de las variables  $x, \omega$  se puede hallar con de la transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{G}(x, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{L}^{-1}(k) e^{-k \cdot x} dk, \quad (3.21)$$

Ahora, hallemos las expresiones explícitas para la función de Green de un medio termoelástico isótropo. Las ecuaciones (3.19) se particularizan a

$$\begin{aligned}\Lambda_{ik}(\xi) &= (\lambda + 2\mu)\xi_i\xi_k + \mu\theta_{ik}, \quad \theta_{ik} = \delta_{ik} - \xi_i\xi_k, \quad \xi_i = k_i/|k|, \\ \kappa(\xi) &= \kappa, \quad b_i = ik\xi_i\eta,\end{aligned}$$

y para las dos primeras ecuaciones de (3.18) se tiene que

$$\begin{aligned}\left\{ [k^2(\lambda + 2\mu) - \rho\omega^2]\xi_i\xi_k + (k^2\mu - \rho\omega^2)\theta_{ik} \right\} G_{kj}(k) + ik_i\eta\Gamma_j(k) &= \delta_{ij}, \quad (3.22) \\ -i\omega\theta_0\eta ik_i G_{ij}(k) + (k^2\kappa - i\omega c)\Gamma_j(k) &= 0,\end{aligned}$$

de la segunda de estas ecuaciones se despeja a  $\Gamma_j(k)$

$$\Gamma_j(k) = \frac{i\omega\theta_0\eta}{k^2\kappa - i\omega c} ik_k G_{kj}(k), \quad (3.23)$$

y sustituyendo la ecuación (3.23) en (3.22) se llega a

$$\left\{ \left[ k^2(\lambda + 2\mu) - \frac{i\omega\theta_0\eta^2 k^2}{k^2\kappa - i\omega c} - \rho\omega^2 \right] \xi_i\xi_k + (k^2\mu - \rho\omega^2)\theta_{ik} \right\} G_{kj}(k) = \delta_{ij}, \quad (3.24)$$

Puesto que los tensores  $\xi_i\xi_k$  y  $\theta_{ik}$  son ortogonales se puede escribir a  $G_{ij}$  como la suma de dos partes

$$G_{ij}(k) = G_1(k)\xi_i\xi_j + G_2(k)\theta_{ij}, \quad (3.25)$$

donde

$$\begin{aligned}G_1(k) &= \frac{\kappa(k^2 - q)}{[k^2(\lambda + 2\mu) - \rho\omega^2]\kappa(k^2 - q) - i\omega\theta_0\eta^2 k^2}, \\ G_2(k) &= \frac{1}{k^2\mu - \rho\omega^2}, \quad q = \frac{i\omega c}{\kappa}.\end{aligned}$$

La cantidad  $G_1(k)$  puede ser representada en la forma

$$G_1(k) = \frac{k^2 - q}{(\lambda + 2\mu)(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)}, \quad (3.26)$$

donde  $k_1^2$  y  $k_2^2$  son los números de los distintos tipos de onda que se propagan en un medio termoelástico (ver apéndice B) y corresponden las raíces de la siguiente ecuación cuadrática

$$k^4 - [\alpha^2 + q(1 + \epsilon)]k^2 + q\alpha^2 = 0, \quad (3.27)$$

las cuales son

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \alpha^2 + q(1 + \epsilon) \pm \sqrt{[\alpha^2 + q(1 + \epsilon)]^2 - 4q\alpha^2} \right\}, \quad (3.28)$$

y

$$\epsilon = \frac{m\eta\theta_0}{c}, \quad m = \frac{\eta}{\lambda + 2\mu}, \quad (3.29)$$

con

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2}{v_L^2}, \quad (3.30)$$

donde  $v_L^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$  es la rapidez de las ondas longitudinales en un medio isótropo y homogéneo. Toda esta notación es tomada de Nowacki (1975) pp. 106. Las expresiones para las cantidades  $G_1$  y  $G_2$  pueden reescribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\alpha^2}{k_1^2 - k_2^2} \left( \frac{k_1^2 - q}{k^2 - k_1^2} - \frac{k_2^2 - q}{k^2 - k_2^2} \right), \\ G_2 &= \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\beta^2}{k^2 - \beta^2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{v_T^2} \quad (3.32)$$

y  $v_T^2 = \mu/\rho$  es la rapidez de las ondas transversales en un medio termoelástico isótropo y homogéneo. Debido a la relación

$$\frac{\gamma^2}{k^2(k^2 - \gamma^2)} = \frac{1}{k^2 - \gamma^2} - \frac{1}{k^2},$$

ahora podemos hallar la expresión final para  $G_{ik}$

$$G_{ik}(k) = \frac{1}{\rho\omega^2} \left\{ \frac{\beta^2}{k^2 - \beta^2} \delta_{ik} - k_i k_k \left[ \frac{1}{k^2 - \beta^2} - \frac{\alpha^2}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - q}{k_i^2(k^2 - k_i^2)} \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Usando ahora la relación (3.23) tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_j(k) &= \frac{i\omega\theta_0\eta}{\kappa(k^2 - q)} i k_j G_1(k), \\ &= -i k_j \frac{i\omega\theta_0 m}{\kappa(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{k^2 - k_i^2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Y con el segundo par de ecuaciones (3.18) se llega a

$$\begin{aligned} \kappa(k^2 - q)g(k) - i\omega\theta_0\eta i k_i \gamma_i(k) &= 1, \\ i k_i g(k) + [\Lambda_{ik}(k) - \rho\omega^2 \delta_{ik}] \gamma_k(k) &= 0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

despejando a  $\gamma_i$

$$\gamma_i(k) = \frac{-i k_i \eta}{(\lambda + 2\mu)(k^2 - \alpha^2)} g(k), \quad (3.36)$$

y

$$\kappa \left[ k^2 - q - \frac{i\omega c}{\kappa} \frac{\eta}{\lambda + 2\mu c} \frac{\eta}{k^2 - \alpha^2} \right] g(k) = 1,$$

así se llega a

$$g(k) = \frac{k^2 - \alpha^2}{\kappa(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)} = -\frac{1}{\kappa(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - \alpha^2}{k^2 - k_i^2}, \quad (3.37)$$

y como consecuencia de (3.36)

$$\gamma_i(k) = \frac{imk_i}{\kappa(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{1}{k^2 - k_i^2}. \quad (3.38)$$

Se puede ver de las ecuaciones (3.34) y (3.38) que las expresiones para  $\Gamma_i(k)$  y  $\gamma_i(k)$  son iguales salvo el factor  $-i\omega\theta_0$ , esto es,

$$\Gamma_i(k) = -i\omega\theta_0\gamma_i(k). \quad (3.39)$$

Para tener la representación en el espacio  $x$ ,  $\omega$  para las componentes de la función de Green, hay que obtener la transformada inversa de Fourier, i. e.,

$$\mathcal{G}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{G}(k) e^{-ik \cdot x} dk, \quad (3.40)$$

donde

$$\mathcal{G}(k) = \begin{vmatrix} G_{ik}(k) & \gamma_k(k) \\ -i\omega\theta_0\gamma_i(k) & g(k) \end{vmatrix},$$

Tomando en cuenta la identidad

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{ik \cdot x}}{k^2 - p^2} dk &= \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{k^2 - p^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta, \\ &= \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{r \text{sen}(kr)}{k^2 - p^2} dk = \frac{2\pi^2}{r} e^{ipr} \quad (r = |x|), \end{aligned} \quad (3.41)$$

se obtiene

$$\mathcal{G}(x) = \begin{vmatrix} G_{ik}(x) & \gamma_k(x) \\ -i\omega\theta_0\gamma_i(x) & g(x) \end{vmatrix}, \quad (3.42)$$

donde

$$G_{ik}(x) = \frac{1}{4\pi\rho\omega^2} \left\{ \beta^2 \delta_{ik} \frac{e^{i\beta r}}{r} + \partial_i \partial_k \left[ \frac{e^{i\beta r}}{r} + \frac{\alpha^2}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - q}{k_i^2} \frac{e^{ik_i r}}{r} \right] \right\} \quad (3.43)$$

$$\gamma_i(x) = \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi\kappa(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{e^{ik_1 r}}{r}, \quad (3.44)$$

$$g(x) = -\frac{1}{4\pi\kappa(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i (k_i^2 - \alpha^2) \frac{e^{ik_1 r}}{r}, \quad (3.45)$$

Las ecuaciones (3.43)–(3.45) representan las componentes del tensor de Green para un medio termoelástico.

En la siguiente sección se encuentra el campo de desplazamiento y el de temperatura debido a la presencia de un solo dispersor y para ello se hará uso de la función de Green hallada en esta sección.

### 3.4 El problema de un solo dispersor

El siguiente paso para usar el Método Autoconsistente consiste en hallar el campo de desplazamiento y de temperatura que es originado por un solo dispersor. Como se verá éstos campos están en términos de la función de Green.

Se considerará ahora, un medio infinito, que tiene las propiedades del medio compuesto cuyas características estarán indicadas por el superíndice 0, en donde se encuentra una sola inclusión centrada en el punto  $x$ . El sistema de ecuaciones acoplados para el campo de desplazamiento  $u_i(x)$  y de temperatura  $\theta(x)$  tienen que satisfacer las siguiente ecuaciones

$$\begin{aligned} \partial_j C_{ijkl}(x) \partial_l u_k(x) - \partial_j \eta_{ij}(x) \theta(x) + \rho(x) \omega^2 u_i(x) &= 0, \\ \partial_i \kappa_{ij}(x) \partial_j \theta(x) + i\omega(c(x)\theta(x) + \theta_0 \eta_{ij}(x) \partial_j u_i(x)) &= 0, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde las funciones  $C(x)$ ,  $\eta(x)$ ,  $\rho(x)$  y  $c(x)$  se propone como la suma de dos partes

$$\begin{aligned} C(x) &= C^0 + C^1 V(x), & \eta(x) &= \eta^0 + \eta^1 V_r(x), & c(x) &= c^0 + c^1 V(x), \\ \rho(x) &= \rho_0 + \rho_1 V(x), \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde

$$C^1 = C - C^0, \quad \eta^1 = \eta - \eta^0, \quad c_1 = c - c^0, \quad \rho_1 = \rho - \rho_0$$

y  $V_r(x)$  es la función característica de la inclusión y está definida como

$$V_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \text{inclusión,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con esto en mente la ecuación (3.46) se transforma en

$$\begin{aligned} \partial_j C_{ijkl}^0 \partial_l u_k - \partial_j \eta_{ij}^0 \theta + \rho_0 \omega^2 u_i &= - \left[ \partial_j C_{ijkl}^1 e_{kl} - \partial_j \eta_{ij}^1 \theta + \rho_1 \omega^2 u_i \right] V_r(x), \\ \partial_j \kappa_{ij}^0 \partial_j \theta + i\omega(c_0 \theta + \theta_0 \eta_{ij}^0 e_{ij}) &= - \left[ \partial_j \kappa_{ij}^1 \partial_j \theta + i\omega(c_1 \theta + \theta_0 \eta_{ij}^1 e_{ij}) \right] V_r(x). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Con la ayuda de la función de Green que se introdujo en la sección anterior el sistema de ecuaciones (3.48) se escribe como

$$\begin{aligned} u_i(x) &= u_i^0(x) + \int_V G_{ik,j}(x-x') \left[ C_{kj\alpha\beta}^1 e_{\alpha\beta}(x') - \eta_{kj}^1 \theta(x') \right] dx' + \\ &+ \rho_1 \omega^2 \int_V G_{ik}(x-x') u_k(x') dx' + \int_V \gamma_{i,\alpha}(x-x') \kappa_{\alpha\beta}^1 t_\beta(x') dx' + \end{aligned}$$

$$+ i\omega \int \gamma_i(x-x')[c_1\theta(x') + \theta_0\eta_{\alpha\beta}^1 e_{\alpha\beta}(x')]dx', \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta^0(x) + \int_V \Gamma_{k,j}(x-x') [C_{kj\alpha\beta}^1 e_{\alpha\beta}(x') - \eta_{kj}^1 \theta(x')] dx' + \\ &+ \rho_1 \omega^2 \int_V \Gamma_k(x-x') u_k(x') dx' + \int_V g_{,\alpha}(x-x') \kappa_{\alpha\beta}^1 t_\beta(x') dx' + \\ &+ i\omega \int_V g(x-x') [c_1\theta(x') + \theta_0\eta_{\alpha\beta}^1 e_{\alpha\beta}(x')] dx', \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde

$$e_{\alpha\beta}(x) = u_{(\alpha,\beta)}(x), \quad t_\alpha(x) = \theta_{,\alpha}(x), \quad (3.51)$$

Una representación de  $e(x)$  y  $t(x)$  se puede encontrar al derivar las ecuaciones (3.49) y (3.50)

$$\begin{aligned} e_{ij}(x) &= e_{ij}^0(x) + \int P_{ijkl}(x-x') [C_{klmn}^1 e_{mn}(x') - \eta_{kl}^1(x')] dx' + \\ &+ \rho_1 \omega^2 \int G_{i)k,(j}(x-x') u_k(x') dx' + \int_V \gamma_{(i,j)\alpha}(x-x') \kappa_{\alpha\beta}^1 t_\beta(x') dx' + \\ &+ i\omega \int \gamma_{(i,j)}(x-x') [c_1\theta(x') + \theta_0\eta_{\alpha\beta}^1 e_{\alpha\beta}(x')] dx', \end{aligned} \quad (3.52)$$

y

$$\begin{aligned} t_i(x) &= t_i^0(x) + \int_V \Gamma_{k,ij}(x-x') [C_{kjm\alpha}^1 e_{m\alpha}(x') - \eta_{kj}^1 \theta(x')] dx' + \\ &+ \rho_1 \omega^2 \int \Gamma_{k,l}(x-x') u_k(x') dx' + \int_V g_{,i\alpha}(x-x') \kappa_{\alpha\beta}^1 t_\beta(x') dx' + \\ &+ i\omega \int g_{,i}(x-x') [c_1\theta(x') + \theta_0\eta_{\alpha\beta}^1 e_{\alpha\beta}(x')] dx', \end{aligned} \quad (3.53)$$

Ahora, buscaremos una solución aproximada a este sistema de ecuaciones integrales, tomando las funciones  $u(x)$ ,  $\theta(x)$ ,  $e(x)$  y  $t(x)$  constantes sobre la inclusión la cual es conocida como la aproximación tipo Galerkin. Si también suponemos que la inclusión tiene su centro en el centro de simetría del compuesto entonces todos los tensores de rango par son iguales a cero. El sistema de ecuaciones (3.49)–(3.53) se transforma en

$$u_i = \bar{u}_i^0 + \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{ik} u_k + \bar{\gamma}_{i,\alpha} \kappa_{\alpha\beta}^1 t_\beta, \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} t_i &= \bar{t}_i^0 + \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{k,i} u_k + \bar{g}_{ik} \kappa_{kl}^1 t_l, \\ e_{ij} &= \bar{e}_{ij}^0 + (\bar{P}_{ijkl} C_{klmn}^1 + i\omega \bar{\gamma}_{i,j} \theta_0 \eta_{mn}^1) e_{mn} - \bar{P}_{ijkl} \eta_{kl}^1 + i\omega \gamma_{i,j} c_1 \theta \\ \theta &= \bar{\theta}^0 + (\bar{\Gamma}_{k,j} C_{kjm\alpha}^1 + i\omega \bar{g} \theta_0 \eta_{mn}^1) e_{mn} + (-\bar{\Gamma}_{k,j} \eta_{kj}^1 + i\omega \bar{g} c_1) \theta. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Notemos que la solución de este sistema de ecuaciones con respecto a las funciones  $u$ ,  $t$ ,  $e$  y  $\theta$  es equivalente en complejidad a hallar el operador inverso de la matriz (3.18).

Empecemos por resolver las ecuaciones (3.54)

$$\begin{aligned} (\delta_{ik} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{ik}) u_k - \bar{\gamma}_{i,k} \kappa_{kl}^1 t_l &= \bar{u}_i^0, \\ -\rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{i,k} u_k + (\delta_{il} - \bar{g}_{ik} \kappa_{kl}^1) t_l &= \bar{t}_i^0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Escribiendo la primera de estas ecuaciones en la forma

$$u_k - (\delta_{kr} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{kr})^{-1} \bar{\gamma}_{r,s} \kappa_{sl}^1 t_l = (\delta_{kl} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{kr})^{-1} \bar{u}_r^0, \quad (3.57)$$

multiplicando los dos lados de esta por  $\rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{i,k}$  y sustituyendola en la segunda de (3.56) se obtiene

$$[\delta_{il} - \bar{g}_{lk} \kappa_{kl}^1 - \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{i,k} (\delta_{kr} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{kr}) \bar{\gamma}_{r,m} \kappa_{ml}^1] t_l = \bar{t}_i^0 + \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{i,k} (\delta_{km} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{km})^{-1} \bar{u}_m^0,$$

de la cual llegamos a

$$t_i = T_{ik}^{-1} [\bar{t}_k^0 + \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{k,r} (\delta_{rs} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{rs})^{-1} \bar{u}_s^0], \quad (3.58)$$

donde

$$T_{ik} = \delta_{ik} - \bar{g}_{il} \kappa'_{lk} - \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma}_{il} (\delta_{lr} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{lr})^{-1} \bar{\gamma}_{r,m} \kappa_{mk}^1. \quad (3.59)$$

En forma análoga se obtiene

$$[\delta_{ik} + \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{ik} - \rho_1 \omega^2 \bar{\gamma}_{i,m} \kappa_{ml}^1 (\delta_{lr} - \bar{g}_{l\alpha} \kappa_{\alpha r}^1)^{-1} \bar{\Gamma}_{r,k}] u_k = \bar{u}_i^0 + \gamma_{i,k} \kappa_{kr}^1 (\delta_{rs} - \bar{g}_{rm} \kappa_{ms}^1)^{-1} \bar{t}_s^0,$$

de la cual se sigue que

$$u_i = U_{ik}^{-1} [\bar{u}_k^0 + \bar{\gamma}_{k,l} \kappa_{lr}^1 (\delta_{rs} - \bar{g}_{rm} \kappa_{ms}^1)^{-1} \bar{t}_s^0], \quad (3.60)$$

donde

$$U_{ik} = \delta_{ik} - \rho_1 \omega^2 \bar{G}_{ik} - \rho_1 \omega^2 \bar{\gamma}_{i,m} \kappa_{ml}^1 (\delta_{lr} - \bar{g}_{l\alpha} \kappa_{\alpha r}^1)^{-1} \bar{\Gamma}_{r,k}. \quad (3.61)$$

Antes de resolver el segundo par de ecuaciones (3.55), reescribámoslas de la siguiente manera

$$\begin{aligned} A_{ijkl} e_{kl} + a_{ij} \theta &= \bar{e}_{ij}^0, \\ -B_{ij} e_{ij} + b \theta &= \bar{\theta}^0, \end{aligned} \quad (3.62)$$

donde

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= I_{ijkl} - \bar{P}_{ijkl} C_{klmn}^1 - i\omega \theta_0 \bar{\gamma}_{i,j} \eta_{mn}^1, \\ a_{ij} &= \bar{P}_{ijkl} \eta_{kl}^1 - i\omega \bar{\gamma}_{i,j} c^1, \\ B_{ij} &= \bar{\Gamma}_{r,s} C_{rsij}^1 + i\omega \theta_0 \bar{g} \eta_{ij}^1, \\ b &= 1 + \bar{\Gamma}_{i,j} \eta_{ij}^1 - i\omega \bar{g} c^1, \end{aligned} \quad (3.63)$$

Al resolver el sistema (3.62) con respecto a  $e_{ij}$  y  $\theta$  conduce a

$$\begin{aligned} e_{ij} &= R_{ijkl}^{-1} (\bar{e}_{kl}^0 - \frac{1}{b} a_{kl} \bar{\theta}^0), \\ \theta &= \frac{1}{\Delta_0} (\bar{\theta}^0 + B_{ij} A_{ijkl}^{-1} \bar{e}_{kl}^0), \end{aligned} \quad (3.64)$$

donde

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= A_{ijkl} + \frac{1}{b} a_{ij} B_{kl}, \\ \Delta_\theta &= b + B_{ij} A_{ijkl}^{-1} a_{kl}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Supongamos que el medio compuesto es isótropo con el módulo de compresibilidad  $k_0$  y de cizalladura  $\mu_0$ , coeficiente de esfuerzo térmico  $\eta_0$  y calor específico  $c_0$ . Si además tomamos en cuenta que la inclusión tiene forma esférica, la ecuaciones (3.59) y (3.61) se simplifican. Tomando en cuenta que este es el caso

$$\begin{aligned} T_{ik} &= T \delta_{ik}, \quad T = (1 - \rho_1 \omega^2 \bar{G})^{-1} \left[ (1 - \bar{g}' \kappa_1)(1 - \rho_1 \omega^2 \bar{G}) - \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma} \bar{\gamma} \kappa_1 \right], \\ U_{ik} &= U \delta_{ik}, \quad U = (1 - \bar{g}' \kappa_1)^{-1} \left[ (1 - \rho_1 \omega^2 \bar{G})(1 - \bar{g}' \kappa_1) - \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma} \bar{\gamma} \kappa_1 \right], \end{aligned}$$

donde  $\rho_1 = \rho^1 - \rho^0$ ,  $\kappa_1 = \kappa^1 - \kappa^0, \dots$ ,  $\rho, \kappa^1$  son las propiedades de la inclusión. Podemos escribir

$$\begin{aligned} t_i &= \frac{1}{\Delta_1} \left[ (1 - \rho_1 \omega^2 \bar{G}) \bar{t}_i^0 + \rho_1 \omega^2 \bar{\Gamma} \bar{u}_i^0 \right], \\ u_i &= \frac{1}{\Delta_1} \left[ (1 - \bar{g}' \kappa^1) \bar{u}_i^0 + \bar{\gamma} \kappa^1 \bar{t}_i^0 \right], \\ \Delta_1 &= (1 - \rho^1 \omega^2 \bar{G})(1 - \bar{g} \kappa^1) - \rho^1 \omega^2 \bar{\Gamma} \bar{\gamma} \kappa^1. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Las cantidades  $\bar{\Gamma}$ ,  $\bar{g}$ ,  $\bar{\Gamma}$  y  $\bar{\gamma}$  serán calculadas explícitamente para una inclusión esférica. Bajo la suposición que la inclusión y la matriz son medios isótropos se tiene que

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= \frac{1}{3} (1 - 9\bar{P}_1 k^1 - 3i\omega\theta_0 \bar{\gamma} \eta^1) \delta_{ij} \delta_{kl} + (1 - 2\bar{P}_2 \mu^1) (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}), \\ a_{ij} &= a \delta_{ij}, \quad a = 3\bar{P}_1 \eta^1 - i\omega \bar{\gamma} c^1, \\ B_{ij} &= B \delta_{ij}, \quad B = 3\bar{\Gamma} k^1 + i\omega \theta_0 \bar{g} \eta^1, \\ b &= 1 + 3\bar{\Gamma} \eta^1 - i\omega \bar{g} c^1, \end{aligned} \quad (3.67)$$

y por conveniencia

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= \frac{1}{3} A_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}), \\ A_1 &= 1 - 9\bar{P}_1 k^1 - 3i\omega\theta_0 \bar{\gamma} \eta^1, \\ A_2 &= 1 - 2\bar{P}_2 \mu^1. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_\theta &= b + \frac{3aB}{A_1} = \frac{1}{A_1} (A_1 b + 3aB), \\ R_{ijkl} &= \frac{1}{3} \left( A_1 + \frac{3aB}{b} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}), \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$R_{ijkl}^{-1} = \frac{b}{3(A_1b + 3aB)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{A_2} (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}),$$

$$B_{ij} A_{ijkl}^{-1} = \frac{B}{A_1} \delta_{kl}, \quad \frac{1}{b} R_{ijkl}^{-1} a_{kl} = \frac{a}{A_1b - 3aB} \delta_{ij},$$

y la solución de (3.55) toma la forma

$$e_{ij} = E_{ijkl} \bar{e}_{kl}^0 - \frac{a}{\Delta_2} \delta_{ij} \bar{\theta}^0, \tag{3.70}$$

$$\theta = \frac{1}{\Delta_2} (A_1 \bar{\theta}^0 + B \delta_{ij} \bar{e}_{ij}^0),$$

donde

$$E_{ijkl} = \frac{1}{3} E_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + E_2 (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl})$$

$$E_1 = \frac{b}{\Delta_2}, \quad E_2 = \frac{1}{A_2}, \quad \Delta_2 = A_1b + 3aB.$$

Hasta aquí se ha encontrado el gradiente de temperatura  $T_i$  y el campo de desplazamiento (3.66) y el campo de deformación  $e_{ij}$  y el de temperatura  $\theta$  (3.70) que se originan del hecho de haber un dispersor.

En la siguiente sección se calculará el promedio del núcleo de la función de Green sobre una inclusión de radio  $a$ .

### 3.5 El cálculo de las integrales sobre una inclusión esférica

Para calcular las propiedades efectivas usando el Método Autoconsistente es necesario calcular el promedio de la función de Green sobre la inclusión esférica. Antes que nada consideremos la siguiente integral que es una integral prototipo de muchas que hay que calcular

$$\mathcal{J} = \int_V dx \int_V dx' \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R = |x - x'|, \tag{3.71}$$

sobre el dominio  $V(|x| < a)$  donde  $a$  es el radio de la esfera. Calculemos la integral

$$\mathcal{J}(x) = \int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx', \tag{3.72}$$

es conveniente usar la siguiente expansión que es tomada de Morse y Feshbach, 1953 pp. 1466)

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum_{m=0}^n \epsilon_m \frac{(n-1)!}{(n+m)!} \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times \tag{3.73}$$

$$\times P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} j_n(kr_0) h_n(kr) & r > r_0 \\ j_n(kr) h_n(kr_0) & r < r_0, \end{cases}$$

donde  $\theta, \phi, r$  son las coordenadas esféricas en el punto de observación  $x$ ,  $\theta_0, \phi_0, r_0$  son también las coordenadas esféricas pero ahora en el punto  $x'$  que son las coordenadas de integración,  $\epsilon_n$  es el factor de Newman que es 1 si  $n = 0$  y 2 si  $n > 2$  y  $j_n$  y  $h_n$  son las funciones de esféricas de Bessel. Escogemos el sistema de coordenadas de tal manera que el eje polar es considerado como el vector de observación  $x$ . En este caso tenemos

$$P_n^m(1) = P_n^0(1) = 1 \quad P_n^m(1) = 0, \quad m = 1, 2, \dots,$$

y la expansión (3.73) toma la forma

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n^0(\cos \theta_0) \begin{cases} j_n(kr_0) h_n(kr) & r > r_0, \\ j_n(kr) h_n(kr_0) & r < r_0. \end{cases} \quad (3.74)$$

Ahora podemos escribir

$$\int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx' = ik \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 P_n^0(z) dz \int_0^a f(r, r_0) r_0^2 dr_0, \quad (3.75)$$

donde  $f(r, r_0)$  está definida como

$$f(r, r_0) = \begin{cases} j_n(kr_0) h_r(kr) & r > r_0, \\ j_n(kr) h_r(kr_0) & r < r_0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Tomando en cuenta que  $P_0^0(z) = 1$  y la relación de ortogonalidad

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) P_l^m(z) dz = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl}, \quad (3.77)$$

se obtiene

$$\int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx' = 4\pi ik \mathcal{J}(a, r).$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(k, r) &= h_0(kr) \int_0^r j_0(kr_0) r_0^2 dr_0 + j_0(kr) \int_r^a h_0(kr_0) r_0^2 dr_0 \\ &= \frac{1}{k^3} \left\{ h_0(kr) \left[ z^2 j_1(z) \right]_0^{kr} + j_0(kr) \left[ z^2 h_1(z) \right]_{kr}^{ka} \right\} \\ &= \frac{1}{k^3} \left\{ (kr)^2 \left[ h_0(kr) j_1(kr) - j_0(kr) h_1(kr) \right] + (ka)^2 j_0(kr) h_1(ka) \right\} \end{aligned}$$

Al usar las relaciones para las funciones esféricas de Bessel (Abramowitz y Stegun 1965, p. 439)

$$j_n(z) h_{n-1}(z) - j_{n-1}(z) h_n(z) = \frac{1}{z^2},$$

se obtiene

$$\mathcal{J}(kr) = \left[ i + (ka)^2 j_0(kr) h_1(ka) \right],$$

y finalmente tenemos

$$\int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx' = \frac{4\pi}{k^2} \left[ i(ka)^2 j_0(kr) h_1(ka) - 1 \right].$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_V dx \int_V dx' \frac{e^{ikR}}{r} \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^a r^2 dr \left[ i(ka)^2 j_0(kr) h_1(ka) - 1 \right], \\ &= \frac{16\pi^2}{k^2} \left[ \frac{i(ka)^2}{k^3} (ka)^2 j_1(ka) h_1(ka) - \frac{a^3}{3} \right], \end{aligned}$$

por lo que

$$\mathcal{J}(ka) = \frac{16\pi^2 a^3}{3k^2} \left[ 3ika j_1(ka) h_1(ka) - 1 \right]. \quad (3.78)$$

La segunda integral que hay que calcular para usar el Método Autoconsistente es

$$\mathcal{J}_{ij} = \int_V \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx' \right] dx, \quad (3.79)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.78) se tiene que

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx' = \frac{4\pi}{k^2} i(ka)^2 h_1(ka) \frac{\partial^2 j_0(kr)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.80)$$

Calculando la segunda derivada de la función de Bessel  $j_0$  se llega a

$$\frac{\partial^2 j_0(kr)}{\partial x_i \partial x_j} = -k^2 \left[ \frac{1}{kr} j_1(kr) \delta_{ij} - \xi_i \xi_j j_2(kr) \right], \quad \xi_i = \frac{x_i}{r},$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ij} &= -\frac{4\pi}{k^2} i(ka)^2 h_1(ka) \int_0^a r^2 dr \int_{|\Omega|=1} k^2 \left[ \frac{1}{kr} j_1(kr) \delta_{ij} - \xi_i \xi_j j_2(kr) \right] dS_\xi, \\ &= -\frac{16\pi^2}{3} i(ka)^2 h_1(ka) \int_0^a \left[ \frac{3}{kr} j_1(kr) - j_2(kr) \right] r^2 dr \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Usando la siguiente relación de recurrencia de las funciones esféricas de Bessel

$$\frac{(2n+1)}{z} f_n(z) = f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z),$$

se llega a

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ij} &= -\frac{16\pi^2}{3} i(ka)^2 h_1(ka) \delta_{ij} \int_0^a r^2 j_0(kr) dr \\ &= -\frac{16\pi^2 a^3}{3} i(ka) h_1(ka) j_1(ka) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Ahora consideremos la expresión

$$\mathcal{J}_{ijkl} = \int_V dx \frac{\partial^4}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} \int_V \frac{e^{ikR}}{R} dx', \quad (3.82)$$

y tomando en cuenta las relaciones

$$f_{ij}(kr) = \frac{\partial^2 j_0(kr)}{\partial x_i \partial x_j} = -k^2 \left[ \frac{1}{kr} j_1(kr) \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} j_2(kr) \right],$$

y luego

$$\begin{aligned} f_{ij,k}(kr) &= -k^2 \left[ -\frac{1}{r^2} (\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i) j_2(kr) + k \frac{x_i x_j x_k}{r^3} j_3(kr) \right], \\ f_{ij,kl}(kr) &= -k^2 \left[ -\frac{1}{r^2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) j_2(kr) + \frac{k}{r^3} (\delta_{ij} x_k x_l \right. \\ &\quad + \delta_{ik} x_j x_l + \delta_{jk} x_i x_l + \delta_{il} x_j x_k + \delta_{jl} x_i x_k + \delta_{kl} x_i x_j) j_3(kr) \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{r^4} x_i x_j x_k x_l j_4(kr) \right], \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{ijkl} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \text{sen}\theta f_{ij,kl} d\theta \quad (3.83) \\ &= 4\pi \left[ \frac{k^2}{r^2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) j_2(kr) - \frac{2k^3}{3r} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) j_3(kr) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^4}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) j_4(kr) \right] \\ &= 4\pi k^4 (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) \left\{ \frac{1}{3kr} \left[ \frac{3}{kr} j_2(kr) - j_3(kr) \right] - \frac{1}{15} \left[ \frac{5}{kr} j_3(kr) - j_4(kr) \right] \right\} \\ &= \frac{4\pi k^4}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) \left[ \frac{3}{kr} j_1(kr) - \frac{7}{kr} j_3(kr) + j_4(kr) \right] \\ &= \frac{4\pi k^4}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) \left[ \frac{3}{kr} j_1(kr) - j_2(kr) \right] \\ &= \frac{4\pi k^4}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) j_0(kr). \end{aligned}$$

Después de algunos cálculos se tiene que

$$\int_0^a r^2 j_0(kr) dr = \frac{1}{k^3} (kr)^2 j_1(kr),$$

y obtenemos finalmente

$$\mathcal{J}_{ijkl} = \frac{16\pi^2 a^3}{15} (k^2) i(ka) j_1(ka) h_1(ka) (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}). \quad (3.84)$$

Las expresiones obtenidas permiten ahora hallar los valores promedios de los núcleos de la función de Green sobre las inclusiones esféricas

$$\bar{G}_{ik} = \bar{G}\delta_{ik} \quad (3.85)$$

$$\bar{G} = -\frac{1}{3\rho_0\omega^2} \left[ 3 - 2\epsilon_\beta + \frac{\alpha^2}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - q}{k_i^2} \epsilon_{k_i} \right],$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ik,jl} = & -\frac{1}{15\rho_0\omega^2} \left\{ 5\beta^2 \epsilon_\beta \delta_{ik} \delta_{jl} - \left[ \beta^2 \epsilon_\beta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\alpha^2}{k_1^2 - k_2^2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i (k_i^2 - q) \epsilon_{k_i} \right] (\delta_{ij} \delta_{kl} + 2I_{ijkl}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$\bar{G}_{ik,jl|(ij)(kl)} = \bar{P}_{ijkl} = \bar{P}_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{P}_2 \left( I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (3.87)$$

donde

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{3(3k_0 + 4\mu_0)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - q}{k_1^2 - k_2^2} \epsilon_{k_i}, \quad (3.88)$$

$$\bar{P}_2 = -\frac{1}{5} \left[ \frac{1}{\mu_0} \epsilon_\beta - \frac{2}{3k_0 + 4\mu_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - q}{k_1^2 - k_2^2} \epsilon_{k_i} \right], \quad (3.89)$$

$$\bar{g} = \frac{1}{V} \int_V dx' \int_V dx g(x - x') \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\kappa_0(k_1^2 - k_2^2)} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - \alpha^2}{k_i^2} (\epsilon_{k_i} - 1) \\ &= -\frac{1}{\kappa_0(k_1^2 - k_2^2)} \left[ \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - \alpha^2}{k_i^2} \epsilon_{k_i} + \frac{k_1^2 - \alpha^2}{k_1^2} - \frac{k_2^2 - \alpha^2}{k_2^2} \right] \\ &= -\frac{1}{\kappa_0(k_1^2 - k_2^2)} \left[ \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - \alpha^2}{k_i^2} \epsilon_{k_i} + \frac{\alpha^2(k_1^2 - k_2^2)}{k_1^2 k_2^2} \right] \end{aligned}$$

y de esta manera

$$\bar{g} = -\frac{1}{\kappa_0} \left[ \frac{1}{q} + \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{k_i^2 - \alpha^2}{k_i^2 (k_1^2 - k_2^2)} \epsilon_{k_i} \right] \quad (3.91)$$

debido a  $k_1^2 k_2^2 = \alpha^2 q$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{,ik} &= \bar{g}' \delta_{ik}, \\ \bar{g}' &= -\frac{1}{3\kappa_0} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \frac{\alpha^2 - k_i^2}{k_1^2 - k_2^2} \epsilon_{k_i}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\bar{\gamma}_{i,k} = \bar{\gamma} \delta_{ik}, \quad (3.93)$$

$$\bar{\gamma} = -\frac{m_0}{3\kappa_0} \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^i}{k_1^2 - k_2^2} \epsilon_{k_i}, \quad (3.94)$$

$$\bar{\Gamma}_{i,k} = \bar{\Gamma} \delta_{ik}, \quad \bar{\Gamma} = -i\omega\theta_0 \bar{\gamma}.$$

En la presente sección se calculó el promedio de la función de Green sobre una inclusión esférica (3.85), (3.91) y (3.93) las derivadas de algunos de sus elementos.

En la siguiente sección se usará la función de Green promedio para encontrar las ecuaciones que definen las propiedades efectivas con el Método Autoconsistente.

### 3.6 Las ecuaciones autoconsistentes del problema termoelásticos

Aquí se plantearán las ecuaciones autoconsistentes para un medio compuesto de dos fases y para ello se tomará en cuenta la relación (3.7) con la cual es posible hallar las ecuaciones autoconsistentes para las propiedades efectivas. Consideremos ahora este medio compuesto de dos fases cuyas inclusiones son de forma esférica. De las relaciones constitutivas tenemos

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{ij} \rangle &= C_{ijkl}^2 e_{kl}^0 - \eta_{ij}^2 \theta^0 + p(C_{ijrs}^1 - C_{ijrs}^2) \langle e_{rs} \rangle_1 - p(\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \langle \theta \rangle_1, \\
 \langle s \rangle &= \theta_0 \eta_{ij}^2 e_{ij}^0 + c_2 \theta^0 + p\theta_0(\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \langle e_{ij} \rangle_1 + p(c_1 - c_2) \langle \theta \rangle_1, \\
 \langle q_i \rangle &= -\kappa_{ij}^2 t_j^0 - p(\kappa_{ij}^1 - \kappa_{ij}^2) \langle t_j \rangle_1, \\
 \langle p_i \rangle &= -i\omega\rho_0 u_i^0 - i\omega\rho(p_1 - p_2) \langle u_i \rangle_1,
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  significa el promedio sobre el volumen ocupado por la inclusión ( el superíndice 2 quiere decir que se trata de las propiedades de la matriz y el 1 de la inclusión). Suponemos que el promedio  $\langle u_i \rangle = u_i^0$  y  $\langle \theta \rangle = \theta^0$  son ondas armónicas planas de la forma

$$u_i^0 = m_i \exp[i(k \cdot x - \omega t)], \quad \langle \theta \rangle = \tau \exp[i(k \cdot x - \omega t)]. \tag{3.96}$$

Sustituyendo en el lado derecho de (3.95) en (3.66) y (3.70) después de promediar sobre el volumen ocupado por la inclusión esférica se llega a

$$\begin{aligned}
 \langle \sigma_{ij} \rangle &= C_{ijkl}^2 e_{kl}^0 - \eta_{ij}^2 \theta^0 + ph(k)h(-k) \left\{ (C_{ijrs}^1 - C_{ijrs}^2) (R_{rskl}^{-1} e_{kl}^0 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{b} R_{rskl}^{-1} a_{kl} \theta^0) - (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \left( \frac{1}{\Delta_\theta} \theta^0 + \frac{1}{\Delta_\theta} B_{rs} A_{rskl}^{-1} e_{kl}^0 \right) \right\} \\
 &= \left\{ C_{ijkl}^2 + ph(k)h(-k) \left[ (C_{ijrs}^1 - C_{ijrs}^2) R_{rskl}^{-1} - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \frac{1}{\Delta_\theta} B_{rs} A_{rskl}^{-1} \right] \right\} e_{kl}^0 - \left\{ \eta_{ij}^2 + ph(k)h(-k) \right. \\
 &\quad \left. \left[ (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \frac{1}{\Delta_\theta} + (C_{ijrs}^1 - C_{ijrs}^2) \frac{1}{b} R_{rskl}^{-1} a_{kl} \right] \right\} \theta^0
 \end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
 \langle s \rangle &= \theta_0 \eta_{ij}^2 e_{ij}^0 + c_2 \theta^0 + ph(k)h(-k) \left\{ \theta_0 (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) (R_{ijkl}^{-1} e_{kl}^0 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{b} R_{ijkl}^{-1} a_{kl} \theta^0) + (c_1 - c_2) \left( \frac{1}{\Delta_\theta} \theta^0 + \frac{1}{\Delta_\theta} B_{ij} A_{ijkl}^{-1} e_{kl}^0 \right) \right\} \\
 &= \left\{ \theta_0 \eta_{kl}^2 + ph(k)h(-k) \left[ \theta_0 (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) R_{ijkl}^{-1} + (c_1 - c_2) \frac{1}{\Delta_\theta} B_{ij} A_{ijkl}^{-1} \right] \right\} e_{kl}^0 \\
 &\quad + \left\{ c_2 + ph(k)h(-k) \left[ (c_1 - c_2) \frac{1}{\Delta_\theta} - \theta_0 (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \frac{1}{b} R_{ijkl}^{-1} a_{kl} \right] \right\} \theta^0; \quad (3.98)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle q_i \rangle &= -\kappa_{ij}^2 t_j^0 - ph(k)h(-k) (\kappa_{ik}^1 - \kappa_{ik}^2) (D_{kj} t_j^0 + d_{kj} u_j^0) \quad (3.99) \\
 &= -[\kappa_{ij}^2 + ph(k)h(-k) (\kappa_{ik}^1 - \kappa_{ik}^2) D_{kj}] t_j^0 - ph(k)h(-k) (\kappa_{ik}^1 - \kappa_{ik}^2) d_{kj} u_j^0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle p_i \rangle &= -i\omega \left\{ \rho_0 u_i^0 + ph(k)h(-k) (\rho_1 - \rho_2) (F_{ik} u_k^0 + f_{ik} t_k^0) \right\} \\
 &= i\omega \left\{ \left[ \rho \delta_{ik} + ph(k)h(-k) (\rho_1 - \rho_2) F_{ik} \right] u_k^0 + ph(k)h(-k) (\rho_1 - \rho_2) f_{ik} t_k^0 \right\} \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

Escribamos ahora las ecuaciones (3.97)–(3.100) como las ecuaciones de movimiento promediadas junto con la conductividad térmica

$$\begin{aligned}
 \text{div} \langle \sigma \rangle &= \langle \dot{p} \rangle, \quad (3.101) \\
 \nabla \langle q \rangle + \langle \dot{s} \rangle &= 0,
 \end{aligned}$$

y como resultado tenemos

$$\partial_j C_{ijkl}^0 \partial_l u_k^0 - \partial_j \eta_{ij}^{(1)} \theta^0 = -\omega^2 [\rho_{ik}^0 u_k^0 + ph(k)h(-k) (\rho_1 - \rho_2) f_{ik} \partial_k \theta^0], \quad (3.102)$$

donde

$$C^0 = C^2 + ph(k)h(-k) \left[ (C^1 - C^2) R^{-1} - (\eta^1 - \eta^2) \frac{1}{\Delta_\theta} B A^{-1} \right] \quad (3.103)$$

$$\eta^{(1)} = \eta^2 + ph(k)h(-k) \left[ (\eta^1 - \eta^2) \frac{1}{\Delta_\theta} + (C^1 - C^2) \frac{1}{b} R^{-1} a \right] \quad (3.104)$$

$$\rho_{ik}^0 = \rho_2 \delta_{ik} + ph(k)h(-k) (\rho_1 - \rho_2) F_{ik}. \quad (3.105)$$

La ecuación (3.102) puede ser escrita en la forma

$$\partial_j \left[ C_{ijkl}^0 \partial_l u_k^0 - \eta_{ij}^0 \theta^0 \right] + \omega \rho_{ik}^0 u_k^0 = 0, \quad (3.106)$$

donde

$$\eta_{ij}^0 = \eta_{ij}^2 + ph(-k)h(k) \left[ (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) \frac{1}{\Delta_\theta} + (C_{ijrs}^1 - C_{ijrs}^2) \frac{1}{b} R_{rskl}^{-1} a_{kl} - \omega^2 (\rho_1 - \rho_2) f_{ij} \right]. \quad (3.107)$$

El promedio de la ecuación de la conductividad del calor nos lleva a

$$\partial_i \kappa_{ij}^0 \partial_j \theta^0 + i\omega \left\{ \theta_0 \eta_{ij}^{(2)} e_{ij}^0 + c^0 \theta^0 \right\} + ph(k)h(-k) \partial_j (\kappa_{ik}^1 - \kappa_{ik}^2) d_{kj} u_j^0 = 0, \quad (3.108)$$

donde

$$\kappa_{ij}^0 = \kappa_{ij}^2 + ph(k)h(-k)(\kappa_{ik}^1 - \kappa_{ik}^2) D_{kj}, \quad (3.109)$$

$$\eta_{ij}^{(2)} = \eta_{ij}^2 + ph(k)h(-k) \left[ (\eta_{kl}^1 - \eta_{kl}^2) R_{kl ij}^{-1} + (c_1 - c_2) \frac{1}{\Delta \theta_0} B_{kl} A_{kl ij}^{-1} \right], \quad (3.110)$$

$$c^0 = c_2 + ph(k)h(-k) \left[ (c_1 - c_2) \frac{1}{\Delta \Theta} - \theta_0 (\eta_{ij}^1 - \eta_{ij}^2) R_{ij kl}^{-1} a_{kl} \frac{1}{b} \right]. \quad (3.111)$$

La ecuación (3.108) toma la siguiente forma

$$\partial_i \kappa_{ij}^0 \partial_j \theta^0 + i\omega \left[ \theta_0 \eta_{ij}^0 e_{ij}^0 + c^0 \theta^0 \right] = 0, \quad (3.112)$$

y ahora

$$\begin{aligned} \eta_{ij}^0 &= \eta_{ij}^2 + ph(k)h(-k) \left[ (\eta_{kl}^1 - \eta_{kl}^2) R_{kl ij}^{-1} + (c_1 - c_2) \frac{1}{\Delta \theta_0} B_{kl} A_{kl ij}^{-1} \right] \\ &+ \frac{1}{i\omega \theta_0} (\kappa_{ik}^1 - \kappa_{ik}^2) d_{kj}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Se sigue de las ecuaciones (3.106) y (3.112) que las cantidades  $C^0$ ,  $\eta^0$ ,  $\kappa^0$ ,  $c^0$  y  $\rho^0$  pueden ser considerados como las propiedades globales del medio compuesto. Escribamoslas explícitamente para un medio compuesto isótropo con inclusiones esféricas en una matriz isótropa. Estas cantidades se pueden escribir de la siguiente manera

$$C_{ijkl}^0 = k_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_0 (I_{ijkl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}), \quad (3.114)$$

$$k_0 = k_2 + p \frac{h(k)h(-k)}{\Delta_2} \left[ (k_1 - k_2)b - (\eta_1 - \eta_2)B \right], \quad (3.115)$$

$$\mu_0 = \mu_2 + ph(k)h(-k)(\mu_1 - \mu_2) \frac{1}{A_2}, \quad (3.116)$$

$$b = 1 + 3\bar{\Gamma}(\eta_1 - \eta_0) - i\omega \bar{g}(c_1 - c_0),$$

$$B = 3\bar{\Gamma}(k_1 - k_0) + i\omega \theta_0 \bar{g}(\eta_1 - \eta_0),$$

$$\Delta_2 = A_1 b + 3aB,$$

$$A_1 = 1 - 9\bar{P}_1(k_1 - k_0) + 3\bar{\Gamma}(\eta_1 - \eta_0),$$

$$a = 3\bar{P}_1(\eta_1 - \eta_0) - i\omega \bar{\gamma}(c_1 - c_0),$$

$$A_2 = 1 - 2\bar{P}_2(\mu_1 - \mu_0),$$

$$\eta_{ij}^0 = \eta_0 \delta_{ij}, \quad (3.117)$$

$$\eta_0 = \eta_2 + p \frac{h(k)h(-k)}{\Delta_2} \left[ (\eta_1 - \eta_2)A_1 + 3(k_1 - k_2)a \right] \quad (3.118)$$

$$\begin{aligned}
& - \omega^2 p \frac{h(k)h(-k)}{\Delta_1} (\rho_1 - \rho_2) \bar{\gamma} (\kappa_1 - \kappa_0), \\
\Delta_1 & = [1 - (\rho_1 - \rho_0) \omega^2 \bar{G}] [1 - \bar{g}' (\kappa_1 - \kappa_0)] - (\rho_1 - \rho_0) (\kappa_1 - \kappa_0) \omega^2 \bar{\Gamma} \bar{\gamma}, \\
\kappa_{ij}^0 & = \kappa_0 \delta_{ij}, \tag{3.119}
\end{aligned}$$

$$\kappa^0 = \kappa_2 + p \frac{h(k)h(-k)}{\Delta_1} (\kappa_1 - \kappa_2) \left[ 1 - \omega^2 (\rho_1 - \rho_0) \bar{G} \right], \tag{3.120}$$

$$c_0 = c_2 + p \frac{h(k)h(-k)}{\Delta_2} \left[ (c_1 - c_2) A_1 - 3\theta_0 (\eta_1 - \eta_2) a \right], \tag{3.121}$$

$$\rho_0 = \rho_2 + p \frac{h(k)h(-k)}{\Delta_1} (\rho_1 - \rho_2) [1 - \bar{g}' (\kappa_1 - \kappa_0)]. \tag{3.122}$$

Las ecuaciones (3.115), (3.116), (3.118), (3.120)–(3.122) forman el sistemas de ecuaciones autoconsistentes para las propiedades globales del medio compuesto. Para conocer las propiedades efectivas es necesario resolver este sistema para cada de las frecuencias de interés.

Un caso particular sucede cuando no hay interacción termoelástica, i. e., cuando los procesos elásticos y térmicos no interaccionan. En este caso se recuperan las ecuaciones autoconsistentes puramente elásticas de Sabina y Willis (1988) (5.3)–(5.5).

### 3.6.1 El caso desacoplado

Consideremos el caso cuando no existe un acoplamiento termoelástico.

El caso desacoplado se presenta cuando  $\eta = 0$ ,  $\epsilon = 0$ ,  $k_1^2 = \alpha^2$ ,  $k_2^2 = q$  y las ecuaciones (3.85), (3.88), (3.89), (3.92) y (3.93) conduce a que  $\bar{g} = 0$ ,  $\bar{\gamma} = \bar{\Gamma} = 0$  y

$$\bar{P}_1 = - \frac{\epsilon_\alpha}{3(3k_0 + 4\mu_0)} \tag{3.123}$$

$$\bar{P}_2 = - \frac{1}{5} \left[ \frac{1}{\mu_0} \epsilon_\beta + \frac{2\epsilon_\alpha}{3k_0 + 4\mu_0} \right] \tag{3.124}$$

$$\bar{G} = - \frac{1}{3\rho_0 \omega^2} [3 - 2\epsilon_\beta - \epsilon_\alpha] \tag{3.125}$$

$$\bar{g} = - \frac{\epsilon_{\sqrt{q}}}{3\kappa_0} \tag{3.126}$$

$$\Delta_2 = 1 - 9\bar{P}_1 (k_1 - k_0), \tag{3.127}$$

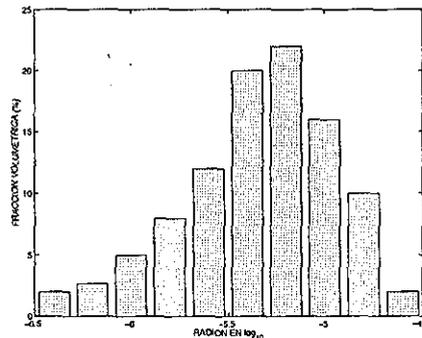
las cuales reproducen las ecuaciones (5.3)–(5.5) de Sabina y Willis (1988) que corresponden a los efectos puramente elásticos.

## 3.7 Discusión

Challis (1998), et al., presentan resultados experimentales para un medio heterogéneo donde la matriz es un epoxy y hay una concentración de inclusiones en forma de

hojuelas de Talc de Luzenac con una distribución de diámetros dada. Aquí se harán algunos comentarios sobre las figuras que aparecen en el artículo antes mencionado y los resultados obtenidos con el Método Autoconsistente.

Se considera una matriz epóxica con inclusiones de forma esférica de Talc de Luzenac. Los radios de las inclusiones tiene una distribución que se muestra en la figura 3.7.1. Los valores de las propiedades termoelásticas de los medios que se utilizarán se



**Figura 3.7.1** Distribución de radios de las inclusiones vs. concentración de volumen de las inclusiones.

presentan en la tabla 3.7.1. Estos datos los presentan Challis (1998), ellos tomaron los valores del vidrio para el Talc de Luzenac debido a que no existen datos en la literatura.

Medio	$c_p(m/s)$	$c_s(m/s)$	$\rho(kg/m^3)$	$\kappa(W/m \text{ } ^\circ K)$	$c(J/kg \text{ } ^\circ K)$	$\alpha(1/^\circ K)$
Epoxy	2675	1198	1190	2.102	0.22	$2.03 \times 10^{-4}$
Tal de Luzenac	5900	3830	2780	10.46	0.18	$2.1 \times 10^{-5}$
Keremid 601	1975	0948	1440	0.230	1.0	$50.0 \times 10^{-6}$
SiO <sub>2</sub>	5271	3291	2600	13.8	1.17	$0.5 \times 10^{-6}$

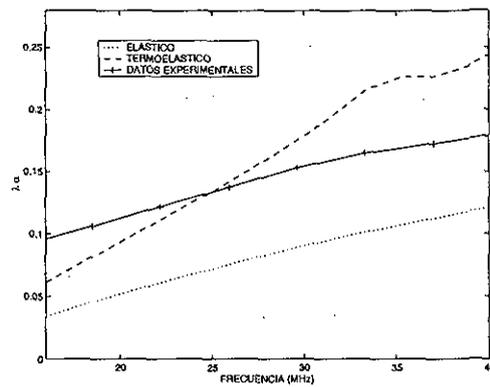
**Tabla 3.7.1** Datos usados para hacer los cálculos numéricos. Epoxy y Tal de Luzenac tomados de Challis (1998). Para el Keremid 601 y el cuarzo tomados de Arridge (1992).

### Descripción de las figuras

En la figura 3.7.2 (figura 4 de Challis, 1998) se presentan la absorción multiplicada por la longitud de onda ( $\alpha\lambda$ ) como función de la frecuencia (MHz).

La absorción  $\alpha$  es la parte imaginaria del número de onda complejo el cual está dado como sigue

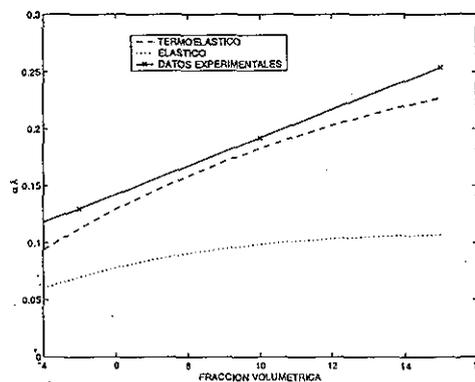
$$k = \frac{\omega}{c_p(\omega)} + i\alpha(\omega),$$



**Figura 3.7.2** Absorción por longitud de onda obtenidos con el Método Autoconsistente considerando dos medios con comportamientos diferentes: uno elástico y otro termoelástico además de datos experimentales como función de la frecuencia.

donde  $c_p$  es la rapidez de la onda  $P$ . La línea continua corresponde a datos experimentales del medio heterogéneo (Challis 1998), la línea discontinua representa los resultados que se obtienen usando el Método Autoconsistente para medios termoelásticos mientras que la punteada son los resultados encontrados con el Método autoconsistente sin incluir efectos termoelásticos.

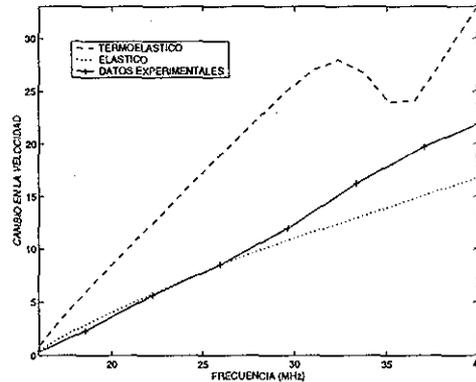
En la figura 3.7.3 se muestra  $\alpha\lambda$  a 40 MHz como función de la concentración. Las cruces representan datos experimentales y para las curvas se considera la misma notación que en la figura anterior.



**Figura 3.7.3** Absorción por longitud de onda obtenidos con el Método Autoconsistente considerando dos medios con comportamiento diferente: uno elástico y otro termoelástico y datos experimentales como función de la concentración de inclusiones.

En la figura 3.7.4 se exhibe el cambio en la velocidad del medio compuesto de

una matriz epóxica con una concentración de 10 % de Talc de Luzenac como función de la frecuencia. El cambio en la velocidad se define como  $v_p - v_r$  donde  $v_r$  es una velocidad de referencia. Para las otras curvas se emplea la misma convención de las figuras anteriores.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 3.7.4 Cambio en la velocidad ( $v_p - v_r$ ) como función de la frecuencia obtenidos con el Método Autoconsistente y datos experimentales.

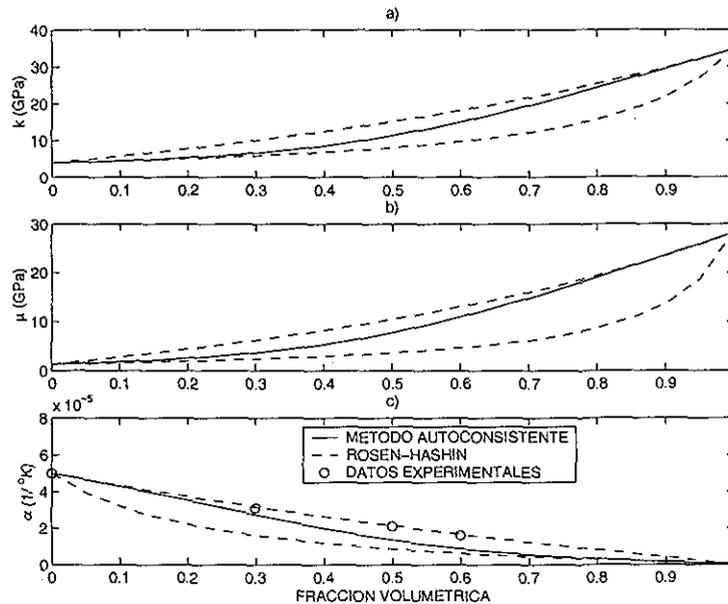
En la figura 3.7.5 se presenta la gráfica de las propiedades efectivas para el compuesto formado por Cuarzo en Keremid 601. Estas propiedades son calculadas con el Método Autoconsistente a frecuencia cero (línea continua), las cotas de Rosen-Hashin (línea discontinua) y datos experimentales (círculos). El inciso a) muestra la compresibilidad, el b) el módulo de sización y el c) el coeficiente de expansión volumétrica como función de la fracción volumétrica de las inclusiones.

### Discusión de las figuras

En la figura 3.7.2 se puede observar que cuando se usa el Método Autoconsistente teniendo en cuenta efectos termoelásticos se aprecia que la cantidad  $\alpha\lambda$  es mayor que cuando se toman únicamente efectos elásticos en casi un 100%. Esto es debido a que hay disipación de energía. Alrededor de la frecuencia de 25 MHz los datos experimentales y los resultados calculados con el Método Autoconsistente termoelástico son parecidos. Se observa que existe un comportamiento cualitativo semejante hasta una frecuencia de 34 MHz.

En la figura 3.7.3 se observa que a mayor concentración de impurezas la cantidad  $\alpha\lambda$  crece. También se puede notar que los resultados que se obtienen con el Método Autoconsistente para el caso termoelástico son más cercanos a los datos experimentales que aquellos cuando no se consideran tales efectos térmicos. Los resultados numéricos para  $\alpha\lambda$  que se encuentran son muy sensibles a cambios en la frecuencia.

El cambio en la velocidad ( $v_p - v_r$ ) figura 3.7.4 es prácticamente creciente hasta una frecuencia de 24 MHz. Se puede observar que los datos experimentales están muy



**Figura 3.7.5** Comparación de los resultados obtenidos usando el Método Autoconsistente y usando las cotas de Rosen-Hashin junto con datos experimentales el coeficiente de expansión volumétrica. El inciso a) muestra la compresibilidad, el b) el modulo de sizalladura y el c) el coeficiente de expansión volumétrica.

cercanos a los resultados que se obtienen con el Método Autoconsistente sin tomar en cuenta efectos térmicos.

Claramente se puede observar que los resultados calculados con el Método Autoconsistente están dentro de las cotas de Rosen-Hashin lo mismo que los datos experimentales. Este ejemplo muestra que hay combinaciones que, por un lado, pueden reforzar ciertas propiedades, por ejemplo la compresibilidad y el módulo de sizalladura, y por otro lado disminuir el coeficiente de expansión volumétrica. Este hecho es muy útil en l diseño y fabricación de placas para circuitos electrónicos.

### 3.8 Conclusiones

Las conclusiones que se obtienen de las secciones anteriores son:

- Los resultado que se encuentran con el Método Autoconsistente incluyen el caso cuando únicamente se consideran efectos elásticos y son las ecuaciones (3.123)-(3.127) (Sabina y Willis, 1998).
- Se tiene un modelo para calcular propiedades termoelásticas efectivas de medios heterogéneos con una distribución radios dada de inclusiones esféricas usando el

## Método Autoconsistente.

- La absorción que se obtiene con las ecuaciones termoelásticas es mucho mayor que aquella que se encuentra con las ecuaciones puramente elásticas (casi el 100%).
- En el caso de la absorción como función de la concentración de las inclusiones los resultados calculados tomando en cuenta efectos termoelásticos están muy cerca de los datos experimentales a 40 MHz.
- Para el cambio en la velocidad  $v_p - v_p$ , el Método Autoconsistente puramente elástico predice con mucha precisión los datos experimentales desde una frecuencia de 16 MHz hasta 28 MHz.

## Capítulo 4

# Conclusiones generales y problemas abiertos

En los capítulos anteriores se presentaron dos modelos matemáticos para describir el comportamiento de medios heterogéneos: uno de ellos el Método de Homogeneización Asintótica y el otro el Método Autoconsistente. Por comodidad retomaré las conclusiones de cada uno de ellos y luego presentaré algunos problemas abiertos con los cuales se puede continuar esta investigación para cada método.

### 4.1 Método de Homogeneización Asintótica

Las conclusiones a las que se llegó usando el MHA son:

- Se obtuvieron Relaciones Universales, es decir, relaciones exactas entre propiedades macroscópicas sin tener que resolver ningún problema local y sin importar la microestructura (ecuaciones 2.60).
- Es posible hallar propiedades efectivas en forma analítica usando el Método de Homogeneización Asintótica para modelar rocas heterogéneas, ecuaciones (2.92) y (2.126).
- Con las ecuaciones antes citadas, es posible validar resultados numéricos que se encuentren para otras microestructuras.
- El comportamiento de un medio heterogéneo es cuantitativamente y cualitativamente diferente si la fibra está llena de un fluido o de otro sólido. En el caso de todos los fluido, las propiedades efectivas se comportan de manera semejante.
- Una diferencia importante entre las dos geometrías estudiadas es que los valores mínimos se alcanzan a concentraciones más pequeñas cuando la celda es cuadrada que cuando es hexagonal.

- Cuando las fibras están llenas de algún fluido el comportamiento de las velocidades de ambas ondas  $p$  y  $s$  es semejante, es decir, no importa el fluido, la respuesta del medio es básicamente la misma.

Algunos de los problemas abiertos con los que se puede continuar este trabajo de investigación son:

- En el capítulo 2 se estudiaron fibras infinitas de sección transversal circular. Un siguiente paso es tomar la forma de la sección transversal de la fibra arbitraria, es decir, que no sea circular. Para ello hay que resolver numéricamente la ecuación de Laplace, sobre la fibra y sobre la matriz tomando en cuenta la nueva interface, de tal manera que la solución sea doblemente periódica. Se tienen resultados analíticos que fueron descritos en el capítulo 2 con los cuales es posible checar los resultados numéricos.
- Considerar un medio periódico en forma de tejido o bien entrelazados y nuevamente resolver las ecuaciones numéricamente, para modelar con más fidelidad las rocas.
- Las propiedades efectivas que se presentan en este trabajo son estáticas, i.e., no dependen de la frecuencia y además no es posible observar atenuación en el medio equivalente. Una manera de observar la atenuación es considerar las propiedades efectivas dinámicas y para ello habría que usar el MHA en las ecuaciones dinámicas de la elasticidad.

## 4.2 El Método Autoconsistente

Las conclusiones a las que se llegaron usando el método autoconsistente son:

- Los resultados que se encuentran con el Método Autoconsistente incluyen el caso cuando únicamente se consideran efectos elásticos y son las ecuaciones (3.123)–(3.127) (Sabina y Willis, 1998).
- Se tiene un modelo para calcular propiedades termoelásticas efectivas de medios heterogéneos con una distribución radiosa dada de inclusiones esféricas usando el Método Autoconsistente.
- La absorción que se obtiene con las ecuaciones termoelásticas es mucho mayor que aquella que se encuentra con las ecuaciones puramente elásticas (casi el 100%).
- En el caso de la absorción como función de la concentración de las inclusiones los resultados calculados tomando en cuenta efectos termoelásticos están muy cerca de los datos experimentales a 40 MHz.

- Para el cambio en la velocidad  $v_p - v_p$ , el Método Autoconsistente puramente elástico predice con mucha precisión los datos experimentales desde una frecuencia de 16 MHz hasta 28 MHz.

Y los problemas abiertos:

- Para hallar la deformación en todo el espacio por el hecho de haber un dispersor se uso la aproximación tipo Galerkin que consiste en suponer que la deformación es constante sobre la inclusión. Los resultados pueden ser mejorados si se considera la deformación exacta sobre la inclusión.
- En el presente trabajo se consideró que las inclusiones tienen forma esférica. También es posible usar este método para estudiar el efecto cuando las inclusiones tienen otras geometrías por ejemplo, elipsoides, elipsoides con una razón de aspecto muy grande, etc., y para estos casos habría que encontrar la función de Green para un medio termoelástico isótropo y de ahí los núcleos de la función integral.



## Apéndice A

# Propiedades de las funciones elípticas

Representación de las funciones Zeta de Weierstrass cuasi-periódicas  $\zeta(z)$ , funciones elípticas de Weierstrass  $\wp$  y la función de Natanzon  $Q(z)$  con periodos  $\omega_1$  y  $\omega_2$ :

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left[ \frac{1}{z - \beta_{mn}} + \frac{z}{\beta_{mn}^2} + \frac{1}{\beta_{mn}} \right], \quad (\text{A.1})$$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left[ \frac{1}{(z - \beta_{mn})^2} - \frac{1}{\beta_{mn}^2} \right], \quad (\text{A.2})$$

$$Q(z) = \sum'_{m,n} \bar{\beta}_{mn} \left[ \frac{1}{(z - \beta_{mn})^2} - \frac{2z}{\beta_{mn}^3} - \frac{1}{\beta_{mn}^2} \right], \quad (\text{A.3})$$

Las funciones  $\zeta(z)$  y  $Q(z)$  son funciones impares mientras que  $\wp(z)$  son pares. Estas funciones y sus derivadas están relacionadas mediante las expresiones

$$\zeta(z + \omega_\alpha) - \zeta(z) = \delta_\alpha, \quad (\text{A.4})$$

$$Q(z + \omega_\alpha) - Q(z) = \bar{\omega}_\alpha \wp(z) + \gamma_\alpha, \quad (\text{A.5})$$

$$Q^{(k)}(z + \omega_\alpha) - Q^{(k)}(z) = \bar{\omega}_\alpha \wp^{(k)}(z) \quad \text{para } k \geq 1, \quad (\text{A.6})$$

$$\wp^{(k)}(z + \omega_\alpha) - \wp^{(k)}(z) = 0 \quad \text{para } k \geq 0, \quad (\text{A.7})$$

$$\wp(z) = -\zeta'(z). \quad (\text{A.8})$$

$$\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1 = 2\pi i,$$

$$\delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1 = \gamma_2 \omega_1 - \gamma_1 \omega_2,$$

donde

$$\begin{aligned} \delta_\alpha &= 2\zeta(\omega_\alpha/2), \\ \gamma_\alpha &= 2Q(\omega_\alpha/2) - \bar{\omega}_\alpha \wp(\omega_\alpha/2). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

## Series relevantes de funciones elípticas asociadas

$$\begin{aligned}
S_{k+l} &= \sum'_{m,n} \beta_{mn}^{-k-l} && \text{para } k+l \geq 2, \\
T_{k+l} &= \sum'_{m,n} \bar{\beta}_{mn} \beta_{mn}^{-k-l-1} && \text{para } k+l \geq 3, \\
\eta_{kl} &= -C_{k+l-1}^l S_{k+l}, \\
\eta'_{kl} &= C_{k+l}^l T_{k+l},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

donde la prima del símbolo  $\sigma$  indica que es la doble suma sobre  $m$  y  $n$  excluyendo  $m = n = 0$ , donde

$$\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2 \quad \text{para } m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_k^l = k!/l!(k-l)!$$

En el caso en que la celda base es cuadrada  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = i$  y las series  $S_{kl}$  y  $\eta_{kl}$  se hace cero cuando  $k+l$  no son de la forma  $4t$  para  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Las series  $T_{kl}$  y  $\eta'_{kl}$  son cero cuando  $k+l$  no son de la forma  $4t-1$  para  $t = 1, 2, 3, \dots$  aquí  $\delta_1 = \pi$ ,  $\delta_2 = -i\pi$ ,  $\gamma_1 = -5S_4/\pi$ ,  $\gamma_2 = 5iS_4/\pi$

En el caso que la celda base es un hexágono  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = e^{i\mu}$ ,  $\mu = \pi/3$ ,  $\delta_1 = \pi/\sin \mu$ ,  $\delta_2 = \delta_1 e^{-i\mu}$ ,  $\gamma_1$  real y  $\gamma_2 = \gamma_1 e^{i\mu}$ .

Las series  $S_{k+l}$  y  $\eta_{kl}$  son cero cuando  $k+l$  no es de la forma  $6t$  para  $t = 1, 2, 3, \dots$ . Las series  $T_{kl}$  y  $\eta'_{kl}$  son cero cuando  $k+l$  no son de la forma  $6t-1$  para  $t = 1, 2, 3, \dots$  (ver, por ejemplo, Grigolyuk y Fil'shtinkii (1970))

Tabla 1.

Para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ , Las componentes que se hacen cero de  $\eta_{kl}$  están dadas por

$k \setminus l$	1	$4s-1$	$4s+1$
1	0	.	0
$4t-1$	.	0	.
$4t+1$	0	.	0

Tabla 2.

Para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ , las componentes cero de  $r_{kl}$  son

$k \setminus l$	1	$4s - 1$	$4s + 1$
1	.	0	.
$4t - 1$	0	.	0
$4t + 1$	.	0	.

Tabla 3.

Las componentes nulas de  $g_{kl}$  son mostradas para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

$k \setminus l$	1	$4s - 1$	$4s + 1$
1	.	0	.
$4t - 1$	0	.	0
$4t + 1$	.	0	.

Tabla 4.

Componentes cero de  $\eta_{kl}$  para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

$k \setminus l$	1	$6s - 3$	$6s - 1$	$6s + 1$
1	0	0	.	0
$6t - 3$	0	.	0	0
$6t - 1$	.	0	0	.
$6t + 1$	0	0	.	0

Tabla 5.

Componentes cero de  $r_{kl}$  para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ 

$k \setminus l$	1	$6s - 3$	$6s - 1$	$6s + 1$
1	.	0	0	.
$6t - 3$	0	.	0	0
$6t - 1$	0	0	.	0
$6t + 1$	.	0	0	.

Tabla 6.

Componentes cero de  $g_{kl}$  para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ 

$k \setminus l$	1	$6s - 3$	$6s - 1$	$6s + 1$
1	0	.	0	0
$6t - 3$	.	0	0	.
$6t - 1$	0	0	.	0
$6t + 1$	0	.	0	0

## Apéndice B

# Propagación de ondas en medios termoelásticos

El objetivo del presente apéndice es mostrar los números de onda que aparecen en un medio termoelástico cuando una onda termoelástica plana se propaga. Se considera un medio termoelástico infinito homogéneo y se parte de las ecuaciones que describen en campo de desplazamiento  $u_i$  y el campo de temperatura  $\theta$  del capítulo I (1.123)–(1.124)

$$\begin{aligned} \partial_j [C_{ijkl}^0 \partial_l u_k^0 - \eta_{ij}^0 \theta^0] + \omega^2 \rho_0 u_i &= 0, \\ \partial_i \kappa_{ij}^0 \partial_j \theta^0 + i\omega [\theta_0 \eta_{ij}^0 e_{ij}^0 + c_0 \theta^0] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Se propone que las soluciones sean ondas planas de la forma

$$u_i^0(x) = U_i e^{ik \cdot x}, \quad \theta^0(x) = T e^{ik \cdot x}, \quad (\text{B.2})$$

donde  $k$  es el número de onda. Después de sustituir (B.2) en (B.1) y de considerar que el medio es isótropo se tiene la siguiente relación de dispersión

$$\begin{aligned} [\Lambda_{ik}^0(k) - \omega^2 \rho_0 \delta_{ik}] U_k + ik_i \eta_0 T &= 0, \\ -i\omega \theta_0 \cdot ik_i \eta_0 U_i + (k^2 \kappa_0 - i\omega C_0) T &= 0, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

despejando a  $T$

$$\begin{aligned} T &= i\omega \theta_0 (k^2 \kappa_0 - i\omega C_0)^{-1} ik_i \eta_0 U_i \\ \Lambda_{ik}^0(k) &= k^2 [(\lambda_0 + 2\mu_0) \xi_i \xi_k + \mu_0 \theta_{ik}], \quad \theta_{ik} = \delta_{ik} - \xi_i \xi_k, \quad \xi_i = \frac{k_i}{k}, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Usando a (B.4) en (B.3) se tiene

$$\left\{ [k^2(\lambda_0 + 2\mu_0) - \rho_0 \omega^2] \xi_i \xi_k + (k^2 \mu_0 - \rho_0 \omega^2) \theta_{ik} - i\omega \theta_0 k^2 \eta_0^2 (k^2 \kappa_0 - i\omega C_0)^{-1} \xi_i \xi_k \right\} U_k = 0. \quad (\text{B.5})$$

Se tienen dos casos, cuando el desplazamiento es paralelo a la propagación de la onda  $u_i \parallel \xi_i$  y cuando  $u_i \perp \xi_i$ . El primero es para la onda  $p$  y el segundo para la onda  $s$  aquí se encontraran ambos. Consideremos el caso cuando  $u_i \parallel \xi_i$

$$\left[ k^2(\lambda_0 + 2\mu_0) - \rho_0\omega^2 \right] \frac{i\omega\theta_0\eta^2 k^2}{k^2\kappa_0 - i\omega c_0} = 0, \quad (\text{B.6})$$

o bien

$$\left[ k^2(\lambda_0 + 2\mu_0) - \rho_0\omega^2 \right] (k^2\kappa_0 - i\omega c_0) - i\omega\theta_0\eta^2 k^2 = 0, \quad (\text{B.7})$$

reescribiendo la ecuación (B.7)

$$k^4 - \left[ \alpha_0^2 + q_0(1 + \epsilon_0) \right] + q_0\alpha_0^2 = 0 \quad (\text{B.8})$$

donde se usa la siguiente notación

$$q_0 = \frac{i\omega c_0}{\kappa_0}, \quad \epsilon_0 = \frac{m_0\eta_0\theta_0}{c_0}, \quad m_0 = \frac{\eta_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}, \quad \alpha_0^2 = \frac{\rho_0\omega^2}{k_0} + \frac{4}{3} \quad (\text{B.9})$$

Los números de onda al cuadrado para la onda  $p$  son

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \alpha_0^2 + q_0(1 + \epsilon_0) \pm \sqrt{[\alpha_0^2 + q_0(1 + \epsilon_0)]^2 - 4q_0\alpha_0^2} \right]. \quad (\text{B.10})$$

Lo cual quiere decir que existen dos tipos de onda  $p$ , una para  $+$  y otra para  $-$ . Si tomamos el caso cuando  $u_i \perp \xi_i$  se obtiene el número de onda para las ondas  $s$ .

$$k^2 = \frac{\rho_0\omega^2}{\mu_0^2} \quad (\text{B.11})$$

Nótese que cuando  $\epsilon_0 = 0$ , es decir, el caso cuando no hay término de acoplamiento termoelástico, se recupera el número de onda asociado con una onda plana que se propaga en un medio puramente elástico.

## Apéndice C

# Anisotropía en elasticidad

### C.1 Definición

Un medio anisótropo es aquel cuyas propiedades físicas cambian de acuerdo a las distintas direcciones. En particular la rapidez de las ondas, varía dependiendo de la dirección de la propagación de la onda. La polarización de una onda elástica dada depende no solo del tipo de onda y de su dirección de propagación, sino también de las propiedades del medio. Es claro que la propagación de ondas elásticas en medios anisótropos es un tema nada fácil de tratar.

Cuando se tiene un grado bajo de simetrías en un cristal, el número de constantes elásticas para caracterizarla se incrementa. Por ejemplo, un medio que tenga simetría triclinica, es altamente anisótropo y es necesario conocer 21 constantes independientes para describirlo. Por otro lado, para un medio que es transversalmente isótropo sólo son necesarias tres constantes elásticas.

Cuando se tienen medios heterogéneos, aparece lo que se le conoce como isotropía aparente, la cual se nota en la macroescala aunque sus componentes sean isótropos. Esto puede ser debido a la forma cómo están arreglados sus constituyentes.

### C.2 Un medio anisótropo simple; una pila de capas isótropas

Vamos a ver un ejemplo donde la anisotropía aparente se puede ver claramente. Consideremos una pila de capas isótropas paralelas donde cada capa tiene rídez  $\mu_1$  y  $\mu_2$  que están presentes alternativamente, como se muestra en la figura C1.

Sea  $u(x, y, z)$  el campo de desplazamiento que está asociado con la deformación elástica. Las ecuaciones que describen la deformación de corte  $\partial u_x / \partial y$  y  $\partial u_y / \partial z$  son

$$\mu_n \frac{\partial u_x}{\partial y} = s_n; \quad n = 1, 2, \quad (\text{C.1})$$

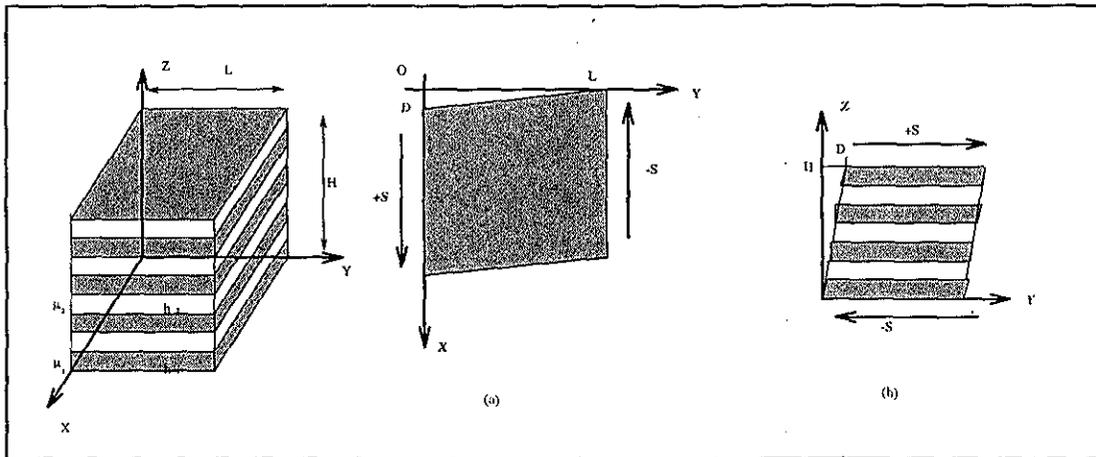


Figura C.1: Deformación elástica de una pila de capas isotrópicas homogéneas bajo dos tipos de esfuerzo de corte; uno a lo largo del eje  $x$  y el otro al del eje  $y$ .

y

$$\mu_n \frac{\partial u_y}{\partial z} = s_n; \quad n = 1, 2, \quad (\text{C.2})$$

donde  $\mu_n$  es la rigidez para la capa  $n$ . Las condiciones de fronteras son diferentes para los casos 1<sub>a</sub> y 1<sub>b</sub>. En (a), la geometría del problema conduce a un campo de desplazamiento uniforme en el plano  $y = 0$  y  $y = L$  donde las fuerzas de corte son aplicadas. La capa con rigidez  $\mu_1$  sufre un esfuerzo  $s_1$  y la de  $\mu_2$ ,  $s_2$ . El promedio del esfuerzo de corte es:

$$\langle s \rangle = (s_1 h_1 + s_2 h_2) / H, \quad (\text{C.3})$$

donde  $H$  es el grueso total de la pila mientras que  $h_1$  y  $h_2$  son el grosor respectivo para cada una de las capas. Al sustituir lo que vale  $s_n$  de (C.1) en (C.3) se obtiene

$$\langle s \rangle = \left( \frac{\mu_1 h_1}{H} + \frac{\mu_2 h_2}{H} \right) \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \text{ó bien } \langle s \rangle = \langle \mu \rangle \frac{D}{L}, \quad (\text{C.4})$$

donde  $D$  es el desplazamiento que se muestra en la figura (C.1a) y  $L$  es el largo de la capa en dirección del eje  $y$ .

La rigidez aparente  $\langle \mu \rangle$  es el promedio aritmético de las dos rigidez locales.

$$\langle \mu \rangle = \mu_1 \frac{h_1}{H} + \mu_2 \frac{h_2}{H}. \quad (\text{C.5})$$

A este tipo de promedio se le conoce como el promedio de Voigt.

Por otro lado, en la figura (C.1b) el esfuerzo de corte es aplicado uniformemente en la parte de arriba así como en la parte de abajo de la pila. El esfuerzo es uniforme

dentro de todo el material mientras que la deformación local  $\partial u_y / \partial z$  varía punto a punto:

$$S = \mu_1 \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{2y}}{\partial z} \quad (\text{C.6})$$

La deformación total  $D/H$  puede ser calculada al dividir el desplazamiento relativo total  $D$  por el grosor  $H$  de la pila, i.e.,

$$\frac{D}{H} = \left( h_1 \frac{\partial u_{1y}}{\partial z} + h_2 \frac{\partial u_{2y}}{\partial z} \right) \frac{1}{H} = \left( \frac{h_1}{\mu_1} + \frac{h_2}{\mu_2} \right) S/H, \quad (\text{C.7})$$

Si ahora definimos la nueva rigidez aparente  $\langle \mu' \rangle$  como

$$\frac{1}{\langle \mu' \rangle} = \left( \frac{h_1}{\mu_1} + \frac{h_2}{\mu_2} \right) H. \quad (\text{C.8})$$

Se obtiene la siguiente relación esfuerzo-deformación entre  $S$  y la deformación global  $D/H$ :

$$S = \langle \mu' \rangle D/H. \quad (\text{C.9})$$

A éste se le conoce como el promedio de Reuss, el cual es más pequeño que rigidez aparente que da el promedio de Voigt.

Existen otros tipos de promediación para definir las propiedades elásticas sobre todo el medio además de las calculadas anteriormente. Los procesos de promediación más usuales son los de Voigt y Reuss. El promedio de Voigt es calculado como el promedio de las constantes elásticas locales y el de Reuss como el promedio de las complianzas. Un tercer tipo de promediación es el de Hill y está definido como el promedio de ambas.

### C.3 Simetrías en cristales

La rigidez  $\langle \mu \rangle$  introducida en la sección anterior es una componente de un tensor más general que relaciona el esfuerzo y la deformación: el tensor de constantes elásticas. Con este tensor se puede describir cualquier cristal con cualquier tipo de simetría.

Vamos a estudiar este tensor para un promedio isótropo arbitrario. Los campos de deformación y esfuerzos son tensores simétricos de segundo orden. Para analizar sus propiedades de simetría hay que estudiar la forma general de la energía libre de deformación de un cristal que es

$$F = \frac{1}{2} c_{iklm} e_{ik} e_{lm}, \quad (\text{C.10})$$

donde  $c_{iklm}$  es el tensor de módulos elásticos y  $e_{ij}$  la deformación. Debido a que la deformación es un tensor simétrico entonces  $e_{ik} e_{lm}$  no cambia si  $i, k$ , ó  $l, m$ , ó  $i, l$  ó  $k, m$  son intercambiados. De aquí el tensor de constantes elásticas tiene las siguientes propiedades:

$$c_{iklm} = c_{kil m} = c_{ikml} = c_{lmik}. \quad (\text{C.11})$$

La condición de arriba permite reducir el número de constantes elásticas independientes de 81 originalmente a 21 para el medio anisótropo más general. El tensor de esfuerzos  $\sigma_{ij}$  es la derivada parcial de la energía libre de deformación respecto de  $e_{ij}$ , es decir,

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}e_{kl}. \quad (\text{C.12})$$

El tensor de esfuerzos es también un tensor simétrico. Dada la simetría del tensor de constantes elásticas, éste lo podemos representar como una matriz de  $6 \times 6$   $C_{ij}$ . La condición de simetría  $c_{ijkl} = c_{jikl}$  nos lleva a considerar seis parejas independientes  $(i, j)$ . Por razones prácticas es conveniente escribir este tensor como una matriz de  $6 \times 6$  aunque no tiene ningún significado físico. Para pasar de  $c_{ijkl}$  a  $C_{ij}$  se usa la convención de

$$(11) \rightarrow 1$$

$$(22) \rightarrow 2$$

$$(33) \rightarrow 3$$

$$(23) \rightarrow 4$$

$$(13) \rightarrow 5$$

$$(12) \rightarrow 6$$

Explícitamente

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} c_{1111} & c_{1122} & c_{1133} & c_{1123} & c_{1113} & c_{1112} \\ c_{2211} & c_{2222} & c_{2233} & c_{2223} & c_{2213} & c_{2212} \\ c_{3311} & c_{3322} & c_{3333} & c_{3323} & c_{3313} & c_{3312} \\ c_{2311} & c_{2322} & c_{2333} & c_{2323} & c_{2313} & c_{2312} \\ c_{1311} & c_{1322} & c_{1333} & c_{1323} & c_{1313} & c_{1312} \\ c_{1211} & c_{1222} & c_{1233} & c_{1223} & c_{1213} & c_{1212} \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

La matriz  $C_{ij}$  es simétrica, es decir, que  $C_{ij} = C_{ji}$ , por lo que el número máximo de entradas de la matriz  $C$  es  $(36-6)/2+6=21$ . En el caso más general de anisotropía, el número de constantes independientes es 21. Este número se puede reducir cuando se cuenta con simetrías, por ejemplo, simetría cúbica, tetragonal, etc. El fluido es un caso particular de un medio elástico cuyo tensor de módulos elásticos se reduce a

$$C_{ijkl} = \kappa \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{C.14})$$

donde  $\kappa$  es el módulo de compresibilidad y  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker: (1 si  $i = j$  y 0 si  $i \neq j$ ). Para un medio isótropo, el tensor de módulos elásticos se puede escribir como

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (\text{C.15})$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  se conocen como los parámetros de Lamé.

En la tabla 1 se muestra el número de constantes necesarias para distintas simetrías y un mineral típico. Los datos fueron tomados [7].

A continuación se muestra la matriz de constantes elásticas. No hay que confundir el número de constantes elásticas distintas de cero con el número de coeficientes de

Tipo de simetría	Número de constantes elásticas independientes	Mineral típico
Triclínico	21	Plagioclase
Monoclínico	13	Hornblende
Orthorombico	9	Olivine
Tetragonal	6	Stishovite
Triagonal I	7	Ilmenite
Triagonal II	6	Quartz
Hexagonal	5	Hielo
Cúbico	3	Garnet
Isótropo	2	Cristal volcánico

Tabla C.1: Número de constantes elásticas independientes para diferentes sistemas de simetrías y minerales típicos.

$C$  diferentes de cero. Por ejemplo, para el tipo de simetría triclínica, se necesitan 21 constantes elásticas diferentes, pero al escoger un sistema de coordenadas adecuadas se pueden reducir a 18 coeficientes no cero (Son necesarios tres ángulos para definir el sistema de referencia).

**Sistema triclínico** 21 constantes distintas

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{C.16})$$

**Sistema monoclínico** 13 constantes.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{46} & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{C.17})$$

**Sistema ortorómbico** 9 constantes.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Sistema tetragonal 6 constantes

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{C.19})$$

Sistema triagonal I 7 constantes

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & -C_{25} & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & C_{25} & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & C_{25} \\ -C_{25} & C_{25} & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & C_{25} & C_{14} & C_{66} \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

con  $C_{46} = C_{25}$ ,  $C_{56} = C_{14}$ ,  $C_{66} = 1/2(C_{11} - C_{12})$ .

Sistema triagonal II 6 constante

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & -C_{14} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ C_{14} & -C_{14} & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{14} & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Sistema hexagonal 5 constantes

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

Sistema cúbico 3 constantes

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{C.23})$$

## Sistema isótropo 2 constantes

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.24})$$

donde  $C_{12} = C_{11} - 2C_{44}$ .

El caso de simetría hexágonal es interesante en sismología debido a su relativa simplicidad y a que pueden aproximarse diversas situaciones reales a esta particular simetría. Notemos que la simetría hexágonal y la cilíndrica alrededor de un sólo eje son equivalentes en las propiedades elásticas. Esto quiere decir que las propiedades elásticas de un cristal con simetría hexágonal son invariantes cuando se rota seis veces alrededor de su eje de simetría. Debido a que las propiedades del cristal sobre el plano perpendicular al eje de simetría no cambian, se le llama transversalmente isótropo. También es llamada anisotropía azimutal.

Otro ejemplo de simetría cilíndrica es una estructura estratificada como la que se vió en la sección anterior.

Un medio isótropo agrietado es otro tipo de medio anisótropo con simetría cilíndrica. Recientemente se le ha dado mucha importancia a tales medios debido a que son de gran interés en la exploración sísmica de campos petroleros en México y en el estudio de áreas de fuentes de temblores. Las propiedades de medios agrietados son importantes en el estudio de campos de esfuerzo tectónico de las capas de la corteza quebradiza profunda, debido a que el campo de esfuerzo pueda abrir grietas preexistentes paralelas a la dirección de esfuerzo compresivo máximo mientras que las grietas perpendiculares a esta dirección, las pueden mantener cerradas.

Aquí se ha estudiado el tensor de constantes elásticas que relaciona el esfuerzo con la deformación. También se puede estudiar el tensor que relaciona la deformación con el esfuerzo, a este tensor se le llama complianza. La forma más fácil para obtener la complianza del tensor de constantes elásticas es escribir la ley de Hooke en notación matricial. Si escribimos los seis componentes de los tensores de esfuerzo y deformación en forma de vector columna con  $e_1 = e_{11}$ ,  $e_2 = e_{22}$ ,  $e_3 = e_{33}$ ,  $e_4 = 2e_{23}$ ,  $e_5 = 2e_{31}$ ,  $e_6 = 2e_{12}$  y por otro lado  $\sigma_1 = \sigma_{11}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_{22}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_{33}$ ,  $\sigma_4 = \sigma_{23}$ ,  $\sigma_5 = \sigma_{31}$ ,  $\sigma_6 = \sigma_{12}$ , la ley de Hooke puede ser escrita como

$$\sigma_n = c_{nm} e_m \quad (\text{C.25})$$

al invertir la matriz  $c_{nm}$  se tiene

$$e_m = s_{nm} \sigma_n \quad (\text{C.26})$$

donde  $s_{nm}$  es la matriz de complianza.

## C.4 La ecuación de Christoffel

Consideramos una onda plana que se propaga en un medio homogéneo anisótropo de la forma:

$$u(r, t) = af(t - n \cdot r/c), \quad (\text{C.27})$$

donde  $u$  es el desplazamiento de una partícula localizada en la posición  $r$  al tiempo  $t$ ,  $f()$  es la dependencia en el tiempo del movimiento de la partícula en un punto fijo es el espacio,  $a$  es el vector que da la amplitud y la polaridad de la onda y  $n$  es la dirección de propagación de la onda. La condición que debe satisfacer el vector  $a$  y la velocidad se obtiene de la ecuación de la elastodinámica para un medio homogéneo. La ecuación de la elastodinámica, que ya se ha estudiado en la Unidad Teórica A, es

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{kl}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{C.28})$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $e_{kl}$  la deformación, se tiene que la deformación es

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad (\text{C.29})$$

al tomar en cuenta la simetría del tensor de deformación y el tensor de constantes elásticas se pueden escribir

$$c_{ijkl} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_l) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_i), \quad (\text{C.30})$$

al sustituir (C.27) en (C.30) se llega a

$$m_{il} a_l = c^2 a_i, \quad (\text{C.31})$$

donde a  $m_{il}$  se le conoce como la matriz de Christoffel y está dada como

$$m_{il} = c_{ijkl} n_j n_k / \rho. \quad (\text{C.32})$$

La ecuación (C.31) es la ecuación de de Christoffel. Esta es una ecuación de valores propios. Los valores propios están relacionados con las distintas velocidades y los vectores propios son las respectivas direcciones. Las simetrías del tensor de constantes elásticas nos llevan a que la matriz de Christoffel es una matriz simétrica por lo que sus vectores propios son mutuamente perpendiculares, excepto en el caso de valores propios degenerados.

La clase más general de sólido anisótropo es el sistema triclinico. Esta clase de medidas no posee ninguna simetría cúbica y el número de constantes elásticas necesarias para describirlo es 21. La matriz de Christoffel para el caso más general es de la siguiente forma:

$$m = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \alpha & \delta & \epsilon \\ \delta & \beta & \xi \\ \epsilon & \xi & \delta \end{pmatrix}, \quad (\text{C.33})$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= c_{11}l_x^2 + c_{66}l_y^2 + c_{55}l_z^2 + 2c_{56}l_y l_z + 2c_{15}l_z l_x + 2c_{16}l_x l_y, \\
 \beta &= c_{66}l_x^2 + c_{22}l_y^2 + c_{44}l_z^2 + 2c_{24}l_y l_z + 2c_{46}l_z l_x + 2c_{26}l_x l_y, \\
 \gamma &= c_{55}l_x^2 + c_{44}l_y^2 + c_{33}l_z^2 + 2c_{34}l_y l_z + 2c_{35}l_z l_x + 2c_{45}l_x l_y, \\
 \delta &= c_{16}l_x^2 + c_{26}l_y^2 + c_{45}l_z^2 + (c_{46} + c_{25})l_y l_z + (c_{14} + c_{56})l_z l_x + (c_{12} + c_{66})l_x l_y, \\
 \epsilon &= c_{15}l_x^2 + c_{46}l_y^2 + c_{35}l_z^2 + (c_{45} + c_{36})l_y l_z + (c_{13} + c_{55})l_z l_x + (c_{14} + c_{56})l_x l_y, \\
 \xi &= c_{56}l_x^2 + c_{24}l_y^2 + c_{34}l_z^2 + (c_{44} + c_{23})l_y l_z + (c_{36} + c_{45})l_z l_x + (c_{25} + c_{46})l_x l_y,
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 l_x &= \frac{n_1}{|n|}, \\
 l_y &= \frac{n_2}{|n|}, \\
 l_z &= \frac{n_3}{|n|},
 \end{aligned} \tag{C.34}$$

Cuando se tiene simetrías, como ya se ha visto, el número de constantes elásticas disminuye. Vamos a estudiar el caso de simetría hexagonal el cual nos permitirá introducir la noción de la onda *s* "splitting" que es una de las más importantes propiedades en anisotropía sísmica. El tensor de constantes elásticas para un cristal con simetría hexagonal tiene 5 constantes elásticas las cuales son

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= C_{2222} = A, \\
 C_{3333} &= C, \\
 C_{3311} &= C_{3322} = F, \\
 C_{2323} &= C_{1313} = L, \\
 C_{1212} &= N,
 \end{aligned} \tag{C.35}$$

Las constantes *A*, *C*, *F*, *L* y *N* se le conocen como los coeficientes elásticos de Love [41]. Escogemos a  $x_3$  como el eje de simetría y examinamos una onda plana a lo largo del eje  $x_1$ . La matriz de Christoffel para una onda que se propaga en la dirección  $x_1$   $e_1 = (1, 0, 0)$  es

$$m = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \tag{C.36}$$

de la ecuación (C.32) y (C.35). La matriz de Christoffel (C.36) para el caso de simetría hexagonal tiene 3 valores propios distintos y tres direcciones de propagación por lo tanto 3 velocidades con distintas direcciones. Las tres velocidades son

$$\lambda_1 = \frac{A}{\rho}, \quad \lambda_2 = \frac{N}{\rho} \quad y \quad \lambda_3 = \frac{L}{\rho}, \tag{C.37}$$

De aquí se ve que que puede hacer tres ondas que se propagan a lo largo del eje  $x_1$ . Cada onda muestra una rapidez y una polarización distinta. Los tres vectores propios asociados a  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  dan las diferentes direcciones de polarización. Estos tres vectores se pueden escoger de la siguiente manera

$$a_1 = (1, 0, 0), \quad a_2 = (0, 1, 0) \quad y \quad a_3 = (0, 0, 1), \quad (C.38)$$

La onda más rápida es la asociada con el vector que es paralelo a la dirección de propagación (onda  $p$ ).

$$\alpha_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{A}{\rho}}, \quad (C.39)$$

Las otras dos ondas están polarizadas perpendicularmente a la onda  $p$ . Si consideramos un medio donde  $N > L$  la segunda onda que se observa es

$$\beta_1 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{N}{\rho}}, \quad (C.40)$$

su vector de polarización está sobre el plano  $(x_1, x_2)$  paralelo al eje  $x_2$ . La tercera onda que se observa es

$$\beta_2 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{\frac{L}{\rho}}, \quad (C.41)$$

esta onda está polarizada paralela al eje de simetría  $x_3$ . Debido a la simetría alrededor del eje  $x_3$ , las propiedades son invariantes en el plano perpendicular al eje  $x_3$ .

La figura C.2 muestra cada una de estas ondas.

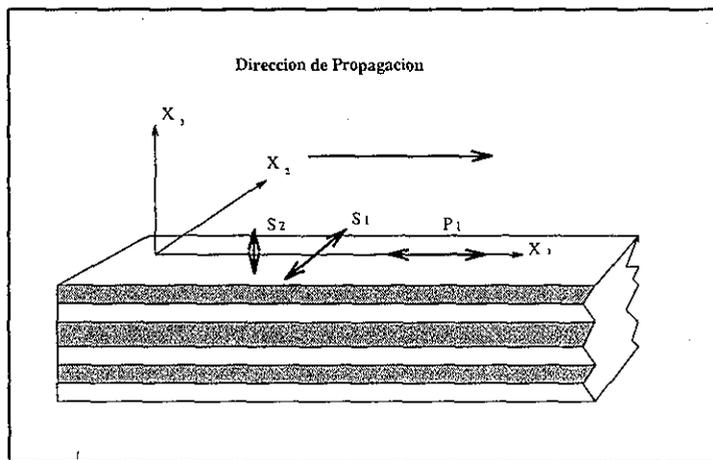


Figura C.2: Tres posibles ondas planas que se propagan en el plano perpendicular al eje de simetría  $x_3$ .

# Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. y Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [2] Amaziane, B., A. Bourgeat y J. Koebbe, Numerical simulation and homogenization of two-phase flow in heterogeneous porous media, *Transport in Porous Media* **6**, 519-547, 1991.
- [3] Anstey, N.A., *Velocity in thin section*, First break, **9**, No. 10, 1990.
- [4] Arridge, R. G. C., The thermal expansion and bulks modulus of composites consisting of arrays of spherical particles in a matrix with body or face-centered cubic symmetry. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, **438**, 291-310, 1992.
- [5] Auld, B. A., *Acoustic Fields and Waves in Solids*, **I**, Jonh Wiley & Sons, New York, 1973.
- [6] Avellaneda, M., Swart, P.J., *J. Acoust. Soc. Am*, **103**, 1449, 1998.
- [7] Babuska, V. y Cara M., *Seismic Anisotropy in the Earth*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.
- [8] Bakhvalov, N. M. y Panasenko, G., *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Medium*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.
- [9] Bensoussan, A., Lions, J. L. y Papanicolau, G., *Asyymptotic Analysis for Periodic Structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- [10] Bourbié, T., Coussy, O. y Zinszner, B., *Acoustic of Porous Media*, Gulf Publishing Company, Houston, 1987.
- [11] Budiansky, B., On the elastic moduli of some heterogeneous materials, *J. Mech. Phys. Solids* **13**, 223-227, 1965.
- [12] Burrige, R., y Keller, J. B., Poroelastic Equations Derived from Microstructure, *J. Acoust. Soc. Am.*, **70** 1140-1146, 1981.
- [13] Corey, A. T., *Mechanics of Heterogenous Fluids in Porous Media*, Water Resourses Publications, Colorado, 1985.

- [14] Challis, R. E., Holmes A. K., Tebutt, J. S. y Cocker R. P., Scattering of ultrasonic compression waves by particulate filler in a cured epoxy continuum, *J. Acoust. Soc. Am.*, **103**, No. 3, 1998.
- [15] Dean, G. D. y Turner, P., The elastic properties of carbon fibers and their composites, *Composites* **4**, 174–180, 1973.
- [16] de Groot, S. R. y P. Mazur, *Non-equilibrium Thermodynamics*, Dover Publications Inc., New York, 1983.
- [17] Dimitrienko, Y.I. (1998a) Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structures 1. Method of asymptotic averaging, *Eur. J. Mech., A/Solids* **17**, 305–319, 1998a.
- [18] Dimitrienko, Y.I., Mechanics of porous media with phase transformations and periodical structures 2. Solution of local and global problems, *Eur. J. Mech., A/Solids* **17**, 321–337, 1998b.
- [19] Dvorak, G.J., On uniform fields in heterogeneous media, *Proc. R. Soc. Lond. A* **431**, 89–110, 1990.
- [20] Eringen, C.A., Robert R. Krieger, *Mechanics of Continua*, Publishing Company, New York, 1980.
- [21] Francfort, G. A. (1984) Homogenization and linear thermoelasticity. *SIAM J. Math. Anal.* **14**, 696–708, 1980.
- [22] Foldy, L. L., Multiple scattering theory of waves, *Phys. Rev.* **67**, 107–119, 1945.
- [23] Galka, A., Telega, J. J. y Wojnar, R., Thermodiffusion in heterogeneous elastic solids and homogenization. *Arch. Mech.* **46**, 267–314, 1994.
- [24] Galka, A., Telega, J.J. and Wojnar, R., Some computational aspects of homogenization of thermopiezoelectric composites. *Comp. Assisted Mech. Engning. Scien.* **3**, 133–154, 1996.
- [25] Gubernatis J. E. y Domany E., Effect of microstructure on the speed and attenuation of elastic waves in porous materials, *Wave Motion*, **6**, 579–589, 1984.
- [26] Guéguen, Y. y Palciauskas, V., *Introduction to the Physics of Rocks*, Princeton University Press, New Jersey, 1994.
- [27] Grigolyuk, E. I. y Fil'shtinskii, L. A. , *Perforated Plates and Shells*, Nauka, Moscu 1970 (en ruso).
- [28] Hassani, B. y Hinton, E., A review of homogenization and topology optimization II-analytical and numerical solution of homogenization equations, *Comp. and Struct.* (**69**), 719–738, 1998.

- [29] Hashin, Z., Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents, *J. Appl. Mech.* **46**, 543–550, 1979.
- [30] Hashin, Z. y Rosen, R. W., The elastic moduli of fiber-reinforced materials, *J. Appl. Mech.* **31**, 223–232, 1964.
- [31] Hill, R., Theory of Mechanical Properties of fiber-strengthened materials: I. Elastic Behaviour, *J. Mech. Phys. Solids* **12**, 199–212, 1964.
- [32] Hill, R., A self-consistent mechanism of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids* **13**, 213–222, 1965.
- [33] Hollister, S. J. y Kikuchi, N., A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites. *Comp. Mech.* **10**, 73–95, 1992.
- [34] Kalamkarov, A. L. y A. G Kolpakov, *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*, Wiley, Chichester, UK, 1997.
- [35] Karal, F. C. y Keller, J. B., Elastic, electromagnetics y other waves in a random medium, *J. Math. Phys.* **5** 537–547, 1964.
- [36] Keller, J. B., Stochastic equations and wave propagation in random media, *Proc. Symposia in Applied Mathematics*, **16**, Stochastic Processes in Mathematical Physics and Engineering, American Mathematical Society, Providence, 145–170, 1964.
- [37] Koishi, M., M. Shiratoni, T. Migoshi y K. Kabe, Homogenization method of dynamic viscoelastic analysis of composite materials, *JSME Int. J. Ser. A: Mech. Mat. Engng.* **40**, 306, 1997.
- [38] Kantarovich, L. V. y Krilov, V. I., *Approximate methods of higher analysis*, Interscience Publishers, New York, 1964.
- [39] Lions, J., *Some Methods in the Mathematical Analysis. Analysis of Systems and their Control*, New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1981.
- [40] Lax, M., Multiple scattering of waves. II. The effective field in dense systems, *Phys. Rev.* **85** 621–629, 1952.
- [41] Love, A. E. H., *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1944.
- [42] Landau, L. D. y Lifshitz, E. M., *Theory of Elasticity*, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [43] Mei, C. C., Auriault, J. L. y Ng, C., *Some Applications of the Homogenization Theory*, en: Hutchinson, J. W. y Wu, T.Y., *Advances in Applied Mechanics* **32**, 277–348, Academic Press, Boston, 1997.

- [44] Meguid, S.A. y Kalamkarov, A.L., Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure. *Int. J. Solids Struct.* **31**, 303-316, 1994.
- [45] Morse, P. M. y Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics: Part 1 y Part2*, McGraw Hill, New York, 1953.
- [46] Nemat-Nasser, S. y Hori, M., *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [47] Nowacki, W., *Dynamic Problems of Thermoelasticity*, Noordhoff International Publishing, The Netherlands, 1975.
- [48] Oleinik, O.A., Shamaev, A.S. y Yosifian, G.A., *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*, North-Holland, Amsterdam, 1992.
- [49] Parton, V. Z. y Kudryavtsev, B. A., *Engineering Mechanics of Composite Structures*, CRC Press, 1993
- [50] Pobedrya, B. E. *Mechanics of Composite Materials*, Moscow State University Press, Moscu, 1984 (en Russo).
- [51] Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F. J., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely constituents-I: Elastic ans square symmetry, *Mech. Mat* en prensa, 2001.
- [52] Rosen, B. W. y Hashin, Z., Effective thermal coefficients and specific heats of composite materials, *International Journal of Engineering Science*, **8**, 1970, 157-173.
- [53] Sabina, F. J. y Willis, J. R., A simple self-consistent analysis of wave propagation in particulate composites, *Wave Motion*, **10**, 127-142, North-Holland, 1988.
- [54] Sabina, F. J., Julián Bravo-Castillero, Raúl Guinovart-Díaz, Reinaldo Rodríguez-Ramos, Oscar C. Valdiviezo-Mijangos, Overall behaviour of two-dimensional periodic composites, *Int. Journal of Solids and Structures* **39**, 483-497 2001.
- [55] Sanchez-Palencia, E., *Non-homogeneous Media and Vibration Thoery*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [56] Sanchez-Palencia, E., *Homogenization Techniques for Composite Media*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [57] Sayers, C. M. y Smith, R.L., Ultrasonic velocity and attenuation in a epoxy matrix containing lead inclusions, *J. Phys. D: Appl. Phys* **16**, 1189-1194, 1983.
- [58] Schön, J. H., *Physical Properties of Rocks, Fundamentals and Principles of Petrophysics*, Pergamon, Oxford, 1996.

- [59] Sokolnicoff, I. S., *Mathematical Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.
- [60] Suquet, P. M. *Elements of Homogenization for Inelastic Solids Mechanics. Homogenization Techniques for Composite Media*, CISM Lectures, Udine, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [61] Talbot, D.R.S. y Willis, J. R., Variational estimates for dispersion and attenuation of waves in random composites I. General theory, *Internat. J. Solids and Structures* 18 673–683, 1982.
- [62] Terada, K., T. Ito y N. Kikuchi, Characterization of the mechanical behaviors of solid-fluid mixture by the homogenization method, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 153, 223–257, 1998.
- [63] Varadan, V. K., V.V. Varadan y Y.H. Pao, Multiple scattering of elastic waves by cylinders of arbitrary cross-section. I. SH waves, *J. Acoust. Soc. Amer.* 63, 1310–1319, 1978.
- [64] Willis, J. R., Variational principles for dynamic problems for inhomogeneous elastic media, *Wave Motion*, 3, 1–11, 1980.
- [65] Willis, J. R., A polarization approach to the scattering of elastic waves. I. Scattering by a single inclusion, *J. Mech. Phys. Solids* 28, 287–305, 1980.
- [66] Valdiviezo-Mijangos, O. C., Sabina, F. J., Bravo-Castillero, J. Rodríguez-Ramos, R. y Guinovart-Díaz, R., Fiber-Reinforced composite with cubic symmetry constituents, *Material Letters* (En prensa).
- [67] Valdiviezo-Mijangos, O. C., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J. Rodríguez-Ramos, R. y Sabina, F. J., Elastic effective coefficients of fibre-reinforced composite with cubic symmetry constituents in a hexagonal arrangement, *Mechanics Research Communications*, (En prensa).
- [68] Yi Y., S. Park y S. Youn, Asymptotic homogenization of viscoelastic composites with periodic microstructures, *Int. J. Solids Struc.* 35, 2039–2055, 1998.
- [69] Ying, C. F. y Truell, R., Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.* 27, 1086–1097, 1956.
- [70] Valdiviezo-Mijangos, O. C., Sabina, F. J., Bravo-Castillero, J. Rodríguez-Ramos, R. y Guinovart-Díaz, R., Fiber-Reinforced composite with cubic symmetry constituents, *Material Letters* (En prensa).
- [71] Valdiviezo-Mijangos, O. C., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J. Rodríguez-Ramos, R. y Sabina, F. J., Elastic effective coefficients of fibre-reinforced composite with cubic symmetry constituents in a hexagonal arrangement, *Mechanics Research Communications*, (En prensa).



# Anexos

Anexo No. 1

J. Sabina et al. J. T.

# FIBER-REINFORCED COMPOSITE WITH CUBIC SYMMETRY CONSTITUENTS.

Oscar C. Valdiviezo-Mijangos<sup>1,2</sup>, Federico J. Sabina<sup>2</sup>,  
Julián Bravo-Castillero<sup>3</sup>, Reinaldo Rodríguez-Ramos<sup>3,4</sup>  
y Raúl Guinovart-Díaz<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Posgrado de Geofísica,

<sup>2</sup>Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas,  
Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 20-726, 01000  
México, D. F., México.

<sup>3</sup>Universidad de la Habana, Facultad de Matemática y Computación,  
San Lázaro y L, Vedado, Habana 4, CP-10400, Cuba.

Telephone number: +537+795 771, (fax) +537+333 373.

E-mail: jbravo@matcom.uh.cu, reinaldo@matcom.uh.cu, guino@matcom.uh.cu

<sup>4</sup>Instituto de Ingeniería,

Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-472,  
Delegación Coyoacán, 04510 México, D.F., México.

Corresponding author: F. J. Sabina, phone: (52) 56 22 35 63, fax: (52) 56 22 35 64,  
e-mail: fjs@uxmym1.iimas.unam.mx

Abbreviated title: Fiber-reinforced composite

March 27, 2001

## Abstract

An elastic material with unidirectional cylindrical fibers periodically distributed is analyzed. Each periodic cell is a binary homogeneous elastic medium with cubic symmetry constituents. Perfect bonding conditions at the interface are considered. Simple closed-form formulae are obtained for the overall properties using the asymptotic homogenization method. The analytical solution of the required resulting plane- and antiplane-strain local problems, which turns out to be only three, makes use of potential methods of a complex variable and properties of Weierstrass elliptic and related functions of periods  $(1,0)$  and  $(0,1)$ . Two new exact relations are derived without solving any local problem and are valid for any shape of the interface compatible with the square symmetry. Some numerical examples are shown.

Keywords: Fiber-reinforced composite; Exact relations; Asymptotic homogenization method; cubic symmetry; Tetragonal symmetry; Elliptic functions; Effective properties

# 1 Introduction

An important technological question is the prediction of the material properties of binary phases based upon the knowledge of the properties of the constituents and their volumetric fractions. Quite a large number of important examples of reinforced materials and other characteristics are presented in [1]. Recently, Rodríguez-Ramos et. al. [2] studied the problem of a fiber-reinforced composite under a square periodic arrangement for transversely isotropic phases and produced closed-form formulae for the effective properties. The same technique, viz., the asymptotic homogenization method, used by them can be utilized to produce similar closed-form formulae when the constituents have cubic symmetry. More references to relevant fibre-reinforced papers and the mathematical technique can be found in [2].

In the present paper, the formulation of the calculation of the effective properties of a fibre-reinforced composite is set up for cubic components. In Section 2, the overall coefficients formulae is set up at the outset as well as the local problems equations. In Section 3, as a consequence of the symmetries of the overall coefficients and a relation among the local problems  $_{11}L$ ,  $_{22}L$  and  $_{33}L$ , two new exact relations are derived assuming an arbitrarily shaped interface compatible with the square symmetry. The solution of the local problems to be solved are taken from [2], so that closed-form formulae for the overall properties are immediately given. Section 4 provides some numerical examples. The paper ends with some concluding remarks in Section 5.

## 2 Statement of the problem

A bonded composite material is considered, in which the embedded phase consists of continuous and perfectly aligned cylindrical fibres. Both phases are assumed to be homogeneous and have cubic elastic properties along the fibre direction, which is taken as the  $Ox_3$  axis. The components of the fourth-order tensor of elastic properties of the matrix and the fibre are denoted by  $C_{ijkl}^{(1)}$  and  $C_{ijkl}^{(2)}$ , respectively. The fibres are periodically arranged without overlapping in two orthogonal directions. Thus the composite exhibits square symmetry in the  $Ox_1$  and  $Ox_2$  directions. Initially, the cross-section of the fibres may be arbitrary, including the case where they may be disjoint. The proof of exact relations among the effective coefficients will be made use of this fact. Later the cross-section will be specialized to a circle in order to give some closed-form formulae for the effective properties. Let the periodic unit cell be denoted by  $S$ , occupying a square (Fig. 1); it is composed of two disjoint domains  $S_1$  and  $S_2$ , they may themselves be disjoint, where  $S_1$  is occupied by the matrix material and  $S_2$  by the fibre,  $S_1 \cup S_2 = S$  and  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ . The common interface between the two domains is denoted by  $\Gamma$ . Note that quantities related to the matrix and the fibre use subindices 1 and 2, or superindices in brackets (1) and (2), respectively. Moreover, the double bar notation is used to denote the contrast in properties across the interface  $\Gamma$ , i.e.,  $\| f^{(\tau)} \| = f^{(1)}(\mathbf{y}) - f^{(2)}(\mathbf{y})$  for  $\mathbf{y} \in \Gamma$ .

The volume average per unit length over the unit cell  $|S| = 1$  is defined as follows:

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|S|} \int_S F(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (2.1)$$

When the dimension of the composite is much larger than its periodicity, the asymptotic homogenization method is widely used to get the effective properties. Without going into the details of the derivation, which can be found elsewhere (see, for instance, [2]), the formulae for the overall coefficients  $C_{ijkl}^*$  is written at the outset,

$$C_{ijpq}^* = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl} {}_{pq}U_{k,l} \rangle, \quad (2.2)$$

which inherits the symmetries of the elastic tensors, viz.,  $C_{ijpq}^* = C_{jipq}^* = C_{pqij}^*$ ,

where the summation convention is understood over Latin indices which run from 1 to 3.

The  $pq$ -functions  ${}_{pq}U^{(\Upsilon)}$ ,  $\Upsilon = 1, 2$ , are displacements, the unique periodic solution of the local problems  ${}_{pq}L$ , which are defined as follows:

$$\begin{aligned} {}_{pq}\sigma_{i\delta,\delta}^{(\Upsilon)} &= 0 \text{ in } S_\Upsilon, \\ \| {}_{pq}U_i^{(\Upsilon)} \| &= 0 \text{ in } \Gamma, \\ \| {}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\Upsilon)} n_\delta \| &= - \| C_{i\delta pq}^{(\Upsilon)} \| n_\delta \text{ on } \Gamma, \\ \langle {}_{pq}U \rangle &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

where

$${}_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\Upsilon)} = C_{i\delta k\lambda}^{(\Upsilon)} {}_{pq}U_{k,\lambda}^{(\Upsilon)}, \quad {}_{pq}\sigma_{33}^{(\Upsilon)} = C_{3311}^{(\Upsilon)} {}_{pq}U_{\alpha,\alpha}^{(\Upsilon)}, \quad (2.4)$$

the summation convention is also applied to Greek lower case indices, which run from 1 to 2; the comma notation denotes partial differentiation relative to the fast variable  $y_\delta$ , i.e.,  ${}_{pq}\sigma_{i\delta,\delta}^{(\Upsilon)} \equiv \partial_{pq}\sigma_{i\delta}^{(\Upsilon)} / \partial y_\delta$ ; the unit normal vector into the matrix material is  $\mathbf{n}$ . The function  ${}_{pq}U^{(\Upsilon)}$  is doubly periodic of periods  $\omega_1 = (1, 0)$  and  $\omega_2 = (0, 1)$ . Note the symmetry  ${}_{pq}U^{(\Upsilon)} = {}_{qp}U^{(\Upsilon)}$ . The non-vanishing terms of the stress-strain relationship for cubic

symmetry may be written for either the matrix or the fibre in terms of three parameters  $K, \mu$  and  $\mu'$  as

$$\sigma_{11} = K(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + \frac{2}{3}\mu(2\epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33}), \sigma_{12} = 2\mu'\epsilon_{12}, \quad (2.5)$$

with other components defined cyclically, where the strain tensor components are  $\epsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  and  $\mathbf{u}$  is the displacement.

### 3 Exact relations

#### 3.1 Elementary considerations

As a consequence of the geometric symmetry about the  $Oy_3$ -axis, it is easy to show that each local problem (2.3) uncouples in two sets of equations, namely, a plane-strain system of equations for  ${}_{pq}U_\alpha^{(\Upsilon)}$  and an antiplane strain equation for  ${}_{pq}U_3^{(\Upsilon)}$ . Moreover, the non-vanishing components of the elastic tensor  $C_{i\delta p q}^{(\Upsilon)}$  on the right-hand side of (2.3c) means that the only non-homogeneous problems with a non-trivial solution correspond to four plane-strain problems  ${}_{PP}L$  and  ${}_{12}L$ , and two antiplane strain ones  ${}_{23}L$  and  ${}_{13}L$ . That the functions  ${}_{PP}U_1^{(\Upsilon)}, {}_{12}U_2^{(\Upsilon)}$  and  ${}_{13}U_3^{(\Upsilon)}$  are even in  $\theta$  and  ${}_{PP}U_2^{(\Upsilon)}, {}_{12}U_1^{(\Upsilon)}$  and  ${}_{23}U_3^{(\Upsilon)}$  are odd can easily be seen by noting the right-hand side of equation (2.3c). Now, the non-zero elements of the effective properties (2.2) can be written as follows

$$\begin{aligned} k^* &= \langle K + \frac{1}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K + \frac{1}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle, \\ l^* &= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$= \langle K - \frac{2}{3}\mu + (K + \frac{1}{3}\mu)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle. \quad (3.2)$$

$$n^* = \langle K + \frac{4}{3}\mu + (K - \frac{2}{3}\mu)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle. \quad (3.3)$$

$$p^* = \langle \mu' + \mu' {}_{32}U_{3,2} \rangle = \langle \mu' + \mu' {}_{31}U_{3,1} \rangle, \quad (3.4)$$

$$m^{*'} = \langle \mu' + \mu' ({}_{11}U_{1,1} - {}_{11}U_{2,2}) \rangle = \langle \mu' - \mu' ({}_{22}U_{1,1} - {}_{22}U_{2,2}) \rangle, \quad (3.5)$$

$$m^* = \langle \mu + \mu ({}_{12}U_{1,2} + {}_{12}U_{2,1}) \rangle, \quad (3.6)$$

where the six independent constants  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$ ,  $p^*$ ,  $m^*$  and  $m^{*'}$  are the coefficients of the effective stress-strain relation, namely, that of tetragonal symmetry given as follows:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) &= k^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + l^*\epsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= l^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + n^*\epsilon_{33}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= 2m^{*' }(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}), \\ \sigma_{32} &= 2p^*\epsilon_{32}, \sigma_{31} = 2p^*\epsilon_{31}, \sigma_{12} = 2m^*\epsilon_{12}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

A relation among certain solutions of the local problems (2.3) can be easily found, viz.,

$$\| K - \frac{2}{3}\mu \| ({}_{11}\mathbf{U} + {}_{22}\mathbf{U}) = 2 \| K + \frac{1}{3}\mu \| {}_{33}\mathbf{U}. \quad (3.8)$$

Two universal relations follow from Eqs. (3.1)-(3.3) and (3.8)

$$\frac{k^* - \langle K + \frac{1}{3}\mu \rangle}{l^* - \langle K - \frac{2}{3}\mu \rangle} = \frac{l^* - \langle K - \frac{2}{3}\mu \rangle}{n^* - \langle K + \frac{4}{3}\mu \rangle} = \frac{\| K + \frac{1}{3}\mu \|}{\| K - \frac{2}{3}\mu \|}. \quad (3.9)$$

Similar universal relations were found by Hill [3] for transversely isotropic components. Eqs. (3.9) have the virtue of being independent of the solution of any local problems, depend on two contrasts, viz.,  $\| K + \frac{1}{3}\mu \|$  and  $\| K - \frac{2}{3}\mu \|$ , and the area fractions occupied

by matrix and fiber materials in the cell. With these universal relations, two coefficients are fixed, once one of them is known: they are applicable to an interface  $\Gamma$  of any shape so long as it complies with the square symmetry. These results are believed to be new.

The area integrals in (3.1)-(3.5) can be transformed into line integrals using, Green's theorem. Furthermore, use of the continuity of displacements (2.3b) across  $\Gamma$  and doubly periodicity of the functions are made to yield

$$\begin{aligned}
k^* &= K_v + \frac{1}{3}\mu_v - \left\| K + \frac{1}{3}\mu \right\| \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
l^* &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - \left\| K - \frac{2}{3}\mu \right\| \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
n^* &= K_v - \frac{4}{3}\mu_v - \frac{\left\| K - \frac{2}{3}\mu \right\|^2}{\left\| K + \frac{1}{3}\mu \right\|} \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 - {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
p^* &= \mu'_v - \left\| \mu' \right\| \int_{\Gamma} {}_{13}U_3^{(1)} dy_2, \\
m'^* &= \mu'_v - \left\| \mu' \right\| \int_{\Gamma} {}_{11}U_1^{(1)} dy_2 + {}_{11}U_2^{(1)} dy_1, \\
m^* &= \mu_v - \left\| \mu \right\| \int_{\Gamma} {}_{12}U_2^{(1)} dy_2 - {}_{12}U_1^{(1)} dy_1,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

where the subindex  $v$  denotes the arithmetic or Voigt average of the concerned property, i.e.  $K_v = V_1 K_1 + V_2 K_2$ , etc., here  $V_1$  and  $V_2$  are the area fractions occupied by the matrix and fiber, respectively. Note that  $V_1 + V_2 = 1$ , where  $V_2 = \pi R^2$ . Only the solution of three local problems are required to get all the effective properties, say,  ${}_{11}L$ ,  ${}_{12}L$  and  ${}_{13}L$ . The derivation of (3.10) is quite general with regard to  $\Gamma$ , i.e., that satisfies the square symmetry.

*The antiplane-strain problem  ${}_{13}L$ .*

Eqs. (2.3)-(2.4) for the problem  ${}_{13}L$  are cast in following way

$$\begin{aligned}
\Delta U^{(\Upsilon)} &= 0 \text{ in } S_{\Upsilon}, \\
\| U^{(\Upsilon)} \| &= 0 \text{ on } \Gamma, \\
\| \mu'_{\Upsilon} U^{(\Upsilon)}_{,\alpha} n_{\alpha} \| &= - \| \mu'_{\Upsilon} \| n_1 \text{ on } \Gamma, \\
\langle U \rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

where  $\Delta$  is the two-dimensional Laplacian,  $U^{(\Upsilon)}$  stands for  ${}_{13}U_3^{(\Upsilon)}$ . A similar problem is solved in [2], using potential methods and properties of doubly periodic functions. The final expression for the solution is therefore

$$p^* = \mu'_1 [1 - 2V_2 \| \mu' \| P / (\mu'_1 + \mu'_2)], \tag{3.12}$$

where

$$P = [1 + \chi V_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \tag{3.13}$$

the superindex  $T$  denotes a transpose vector, the vector  $\mathcal{V}_p(v_s)$ , matrix  $\mathcal{M}_p(m_{ts})$  and vector  $\tilde{\mathcal{V}}_p(\tilde{v}_t)$ , of infinite order, have components given by eq. (3.14) in [2].

### *The plane-strain problem ${}_{11}L$*

Again for the sake clarity, in this section let  $U^{(\Upsilon)} \equiv {}_{11}U^{(\Upsilon)}$  and the 11 preindices are dropped from all the relevant quantities, then equations (2.3)-(2.4) become

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha\delta,\delta}^{(\Upsilon)} &= 0 \text{ in } S_{\Upsilon}, \\
\| U_{\alpha}^{(\Upsilon)} \| &= 0 \text{ on } \Gamma, \\
\| \sigma_{\alpha\delta}^{(\Upsilon)} n_{\delta} \| &= - \| C_{\alpha\delta 11} \| n_{\delta} \text{ on } \Gamma,
\end{aligned}$$

$$\langle U_\alpha \rangle = 0. \quad (3.14)$$

where

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(\Upsilon)} &= (K_\Upsilon + \frac{4}{3}\mu_\Upsilon)U_{1,1}^{(\Upsilon)} + (K_\Upsilon - \frac{2}{3}\mu_\Upsilon)U_{2,2}^{(\Upsilon)}, \\ \sigma_{22}^{(\Upsilon)} &= (K_\Upsilon - \frac{2}{3}\mu_\Upsilon)U_{1,1}^{(\Upsilon)} + (K_\Upsilon + \frac{4}{3}\mu_\Upsilon)U_{2,2}^{(\Upsilon)}, \\ \sigma_{12}^{(\Upsilon)} &= \mu'_\Upsilon(U_{1,2}^{(\Upsilon)} + U_{2,1}^{(\Upsilon)}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

Eqs. (3.14)-(3.15) can be identified with the plane-strain elasticity equations. As in [2], this problem can be solved using potential methods of a complex variable. The solution of (3.14)-(3.15) becomes

$$\begin{aligned} k^* &= K_v + \frac{1}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_\Upsilon + \frac{4}{3}\mu_\Upsilon \parallel^2 K/\mu_1, \\ l^* &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_\Upsilon + \frac{4}{3}\mu_\Upsilon \parallel \parallel K_\Upsilon - \frac{2}{3}\mu_\Upsilon \parallel K/\mu_1, \\ n^* &= K_v + \frac{4}{3}\mu_v - V_2 \parallel K_\Upsilon - \frac{2}{3}\mu_\Upsilon \parallel^2 K/\mu_1, \\ m'^* &= \mu'_1 - V_2 \parallel \mu'_\Upsilon \parallel M', \end{aligned} \quad (3.16)$$

where

$$\begin{aligned} K &= D[V_1 + (1 + \kappa_1)DV_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]/B, \\ M' &= (1 + \kappa_1)E/[1 + H^+ R^2 - \mathcal{V}_{m'}^T \mathcal{M}_{m'}^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_{m'}], \end{aligned} \quad (3.17)$$

where  $H^+$ , the infinite order vector  $\mathcal{V}_{m'}(v_s)$ , matrix  $\mathcal{M}_{m'}(m_{ts})$ , vector  $\tilde{\mathcal{V}}_{m'}(\tilde{v}_t)$  and matrix  $\mathcal{M}_k(m_{ts})$  are given by equations (3.30), (3.32) and (3.34) of [2]. The parameters  $A, B, C, D, E, F, G, \chi_m$  and  $\kappa_j$  here take the values

$$A = (\kappa_1 \chi_m - \kappa_2)B/(\kappa_2 + \chi_m),$$

$$\begin{aligned}
B &= (1 - \lambda_m)/(1 + \kappa_1 \lambda_m), \\
C &= [(\kappa_1 - 1)\lambda_m - (\kappa_2 - 1)]B/F, \\
D &= (\kappa_2 - 1)B/2F, \\
E &= B/(1 - \lambda_m), \\
F &= V_1 \lambda_m + (\kappa_2 - 1)G, \\
G &= 1/2 + V_2/(\kappa_1 - 1), \\
\chi_m &= \mu'_2/\mu'_1, \\
\kappa_\Upsilon &= 1 + 2\mu'_\Upsilon/(k_\Upsilon + \frac{2}{3}\mu_\Upsilon), \Upsilon = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

*The plane-strain problem  ${}_{12}L$*

The solution of the  ${}_{12}L$  problem can be written from (3.38) of [2] as follows

$$\begin{aligned}
m^* &= \mu - V_2 \parallel \mu_\Upsilon \parallel M, \\
M &= (1 + \kappa_1)E/(1 + R^2 H^- - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

where  $H^-$ , vector  $\mathcal{V}_m(v_s^-)$ , matrix  $\mathcal{M}_m(m_{is}^-)$ , vector  $\mathcal{V}_m(v_i^-)$ , of infinite order, are given by Eqs. (3.30) and (3.32) of [2].

## 4 Numerical considerations

As an illustration of the analytical closed-form formulae derived in Section 3, a few numerical calculations are displayed in Figs. 2 to 5, where effective stress components is plotted against volume fraction  $V_2$  for various combinations of fibre and matrix materials

given in Table 1, taken from [4] and [5]. All the figures show the following generic behavior. When  $V_2 = 0$ , the effective stress components are the stress components of the matrix. There are three different intersections with the ordinate axis. As  $V_2$  increases, two curves bifurcate from each of those points, producing six curves which correspond to the six stress components of the composite. This being of tetragonal symmetry. Each figure shows different behaviour of the effective moduli.

The weakest of the three fiber materials considered is Aluminium. Fig. 2 shows the results of considering Aluminium fibers in epoxy matrix. The net effect of the fiber is a weak almost linear increase in the stress components. Also, it can be seen that each of the three pairs of curves is very close to each other. Thus the effective composite is nearly isotropic.

Tungsten, on the other hand, is the strongest of the fiber materials considered. Tungsten fibers in epoxy matrix results are displayed in Fig. 3. The stress components  $n^*$  and  $k^* + m^*$  show the strongest increase in the properties; the remaining four,  $k^* - m^*$ ,  $l^*$  and  $p^*$ ,  $m'^*$  show a weak increase and each pair is close to each other.

The third cubic fiber material, i.e., Iron, is combined with epoxy and polymer. The results are plotted in Figs. 4 and 5, respectively. Four stress components show a strong increase, namely,  $n^*$ ,  $k^* + m^*$ ,  $k^* - m^*$  and  $l^*$ . The remaining two components show a rapid increase for large values of  $V_2$ . Note that, in a certain large  $V_2$  interval,  $k^* - m^* < l^*$  in Fig. 5, whereas in Fig. 4,  $k^* - m^* > l^*$  in the whole of  $V_2$ . This is the effect of the matrix material, on Iron fibers.

## Concluding remarks

Closed-form formulae were obtained for fiber-reinforced materials whose constituents exhibit cubic symmetry. Numerical calculations are easy to perform since powers of the radius  $R$  of the fiber appear in the formulae. Since  $R < 0.5$ , and the rapid convergence of the series involved, it is seen that truncation of the infinite vectors and matrices to two gives results with enough accuracy. Two new exact relations among the effective properties are derived. Some examples of cubic materials in an isotropic material show reinforcement due to the fibers. In the case of Aluminium fibers in epoxy, the symmetry of the composite is nearly isotropic. Not so, for Tungsten and Iron fibers in an epoxy or polymer matrix, whose composite is tetragonal.

## Acknowledgements

This work was sponsored by CONACyT Projects Numbers 32237-E, 27520-A, DGAPA-UNAM under grant IN114999 and Project High Education Ministry of Cuba No. 03.50, 1999. Thanks are due to Miss Ana Pérez Arteaga for computing support. Oscar Valdiviezo Mijangos thanks a scholarship funding by CONACyT.

## References

- [1] Kelly, A. and Zweben, C. (2000). *Comprehensive Composite Materials*. Elsevier, Amsterdam, Vol. 1.
  
- [2] Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., Guinovart-Díaz, R. and Bravo-Castillero, J. (2001). Closed-form expressions for the effective coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and square symmetry, *Mech. Mater.* **33**, 223–235.
  
- [3] Hill, R. (1964). theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. Elastic behaviour, *J. Mech. Phys. Solids* **12**, 199–212.
  
- [4] Auld, B.A. (1973). *Acoustic Fields and Waves in Solids*, vol. I, Wiley, New York, p. 371.
  
- [5] Dunn, M.L. and Taya, M. (1993). Micromechanics predictions of the effective electroelastic moduli of piezoelectric composites, *Int. J. Solids Struct.* **30**, 161–175.

Table 1. Stiffness moduli in GPa

	$C_{1111}$	$C_{1122}$	$C_{2323}$
Aluminium	108.0	61.3	28.5
Iron	237	141.	116
Tungsten	502	199	152
Epoxy	8.0	4.4	1.8
Polymer	3.86	2.57	0.64

## Figure captions

Fig. 1. It shows the unit periodic cell in the  $y_1y_2$ -plane. The matrix (fiber) occupies the domain  $S_1(S_2)$ , with common interface  $\Gamma$ , a circle of radius  $R$  and center 0.

Figs. 2. It displays the effective stress components of the composite in  $GPa$  against volume fractions  $V_2$  for Aluminium fibers in epoxy matrix.

Fig. 3. As Fig. 2, but for Tungsten fibers in epoxy matrix.

Fig. 4. As Fig. 2, but for Iron fibers in epoxy matrix.

Fig. 5. As Fig. 4, except that the matrix is polymer.

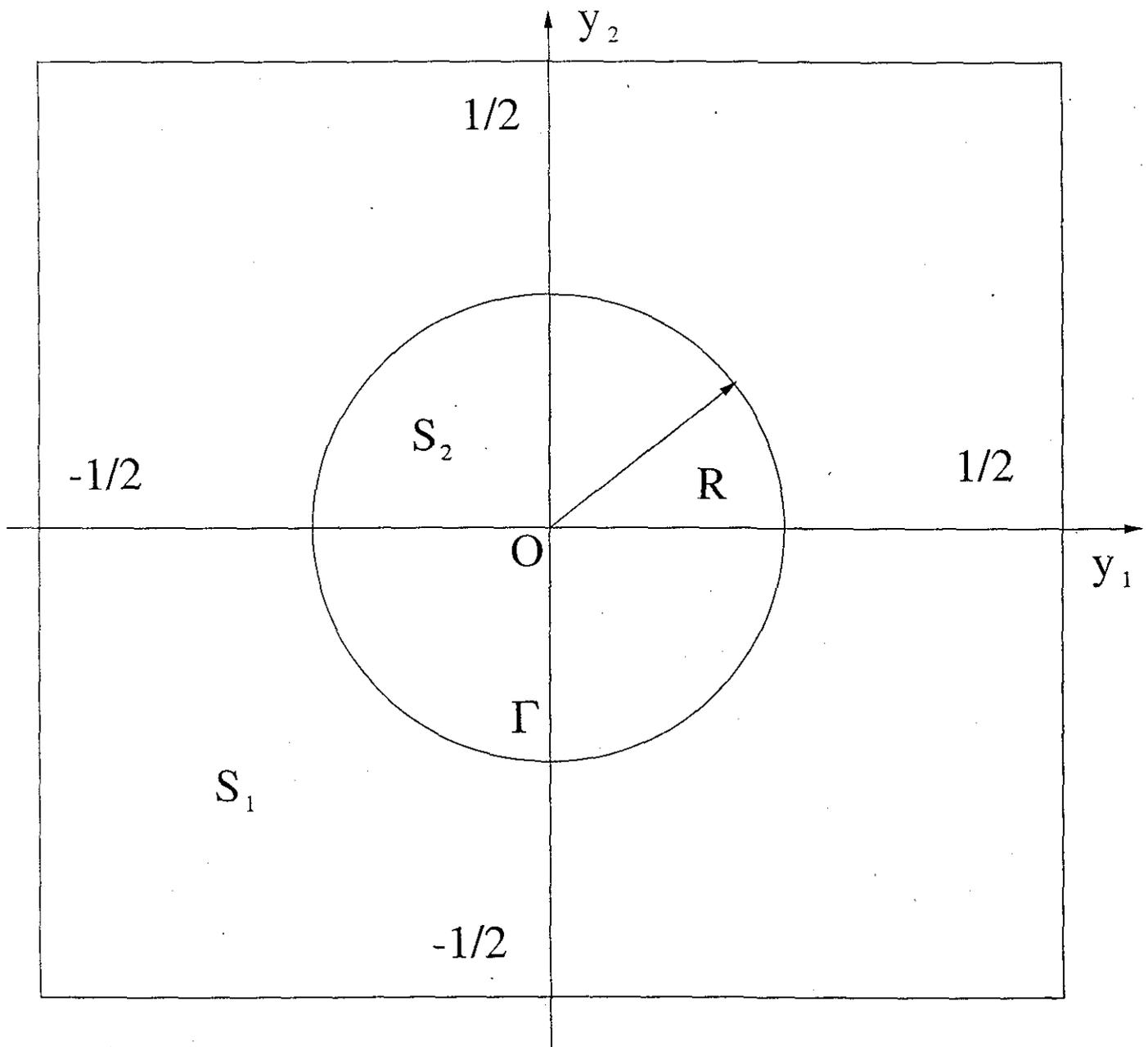


Fig. 1

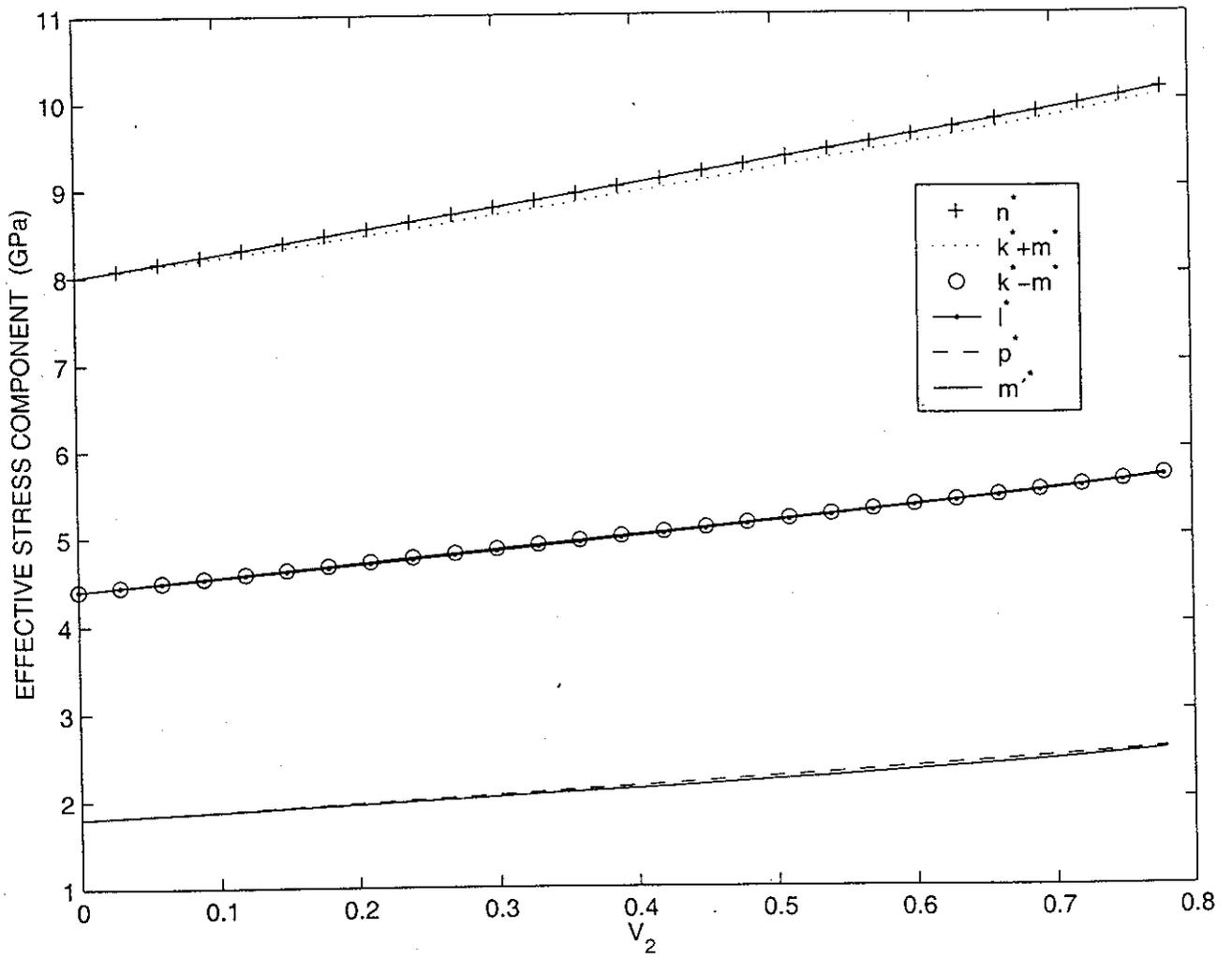


Fig. 2

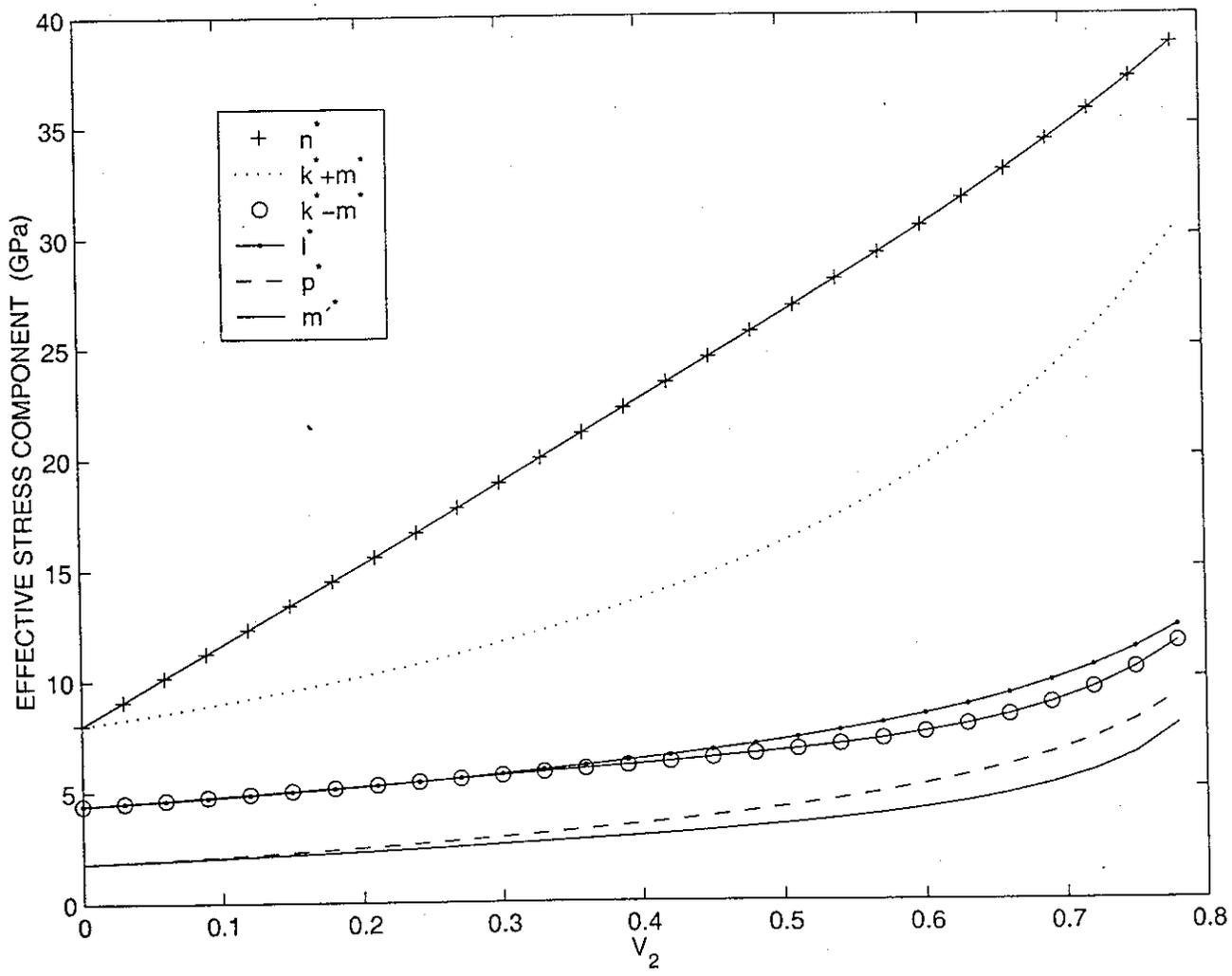


Fig. 3.

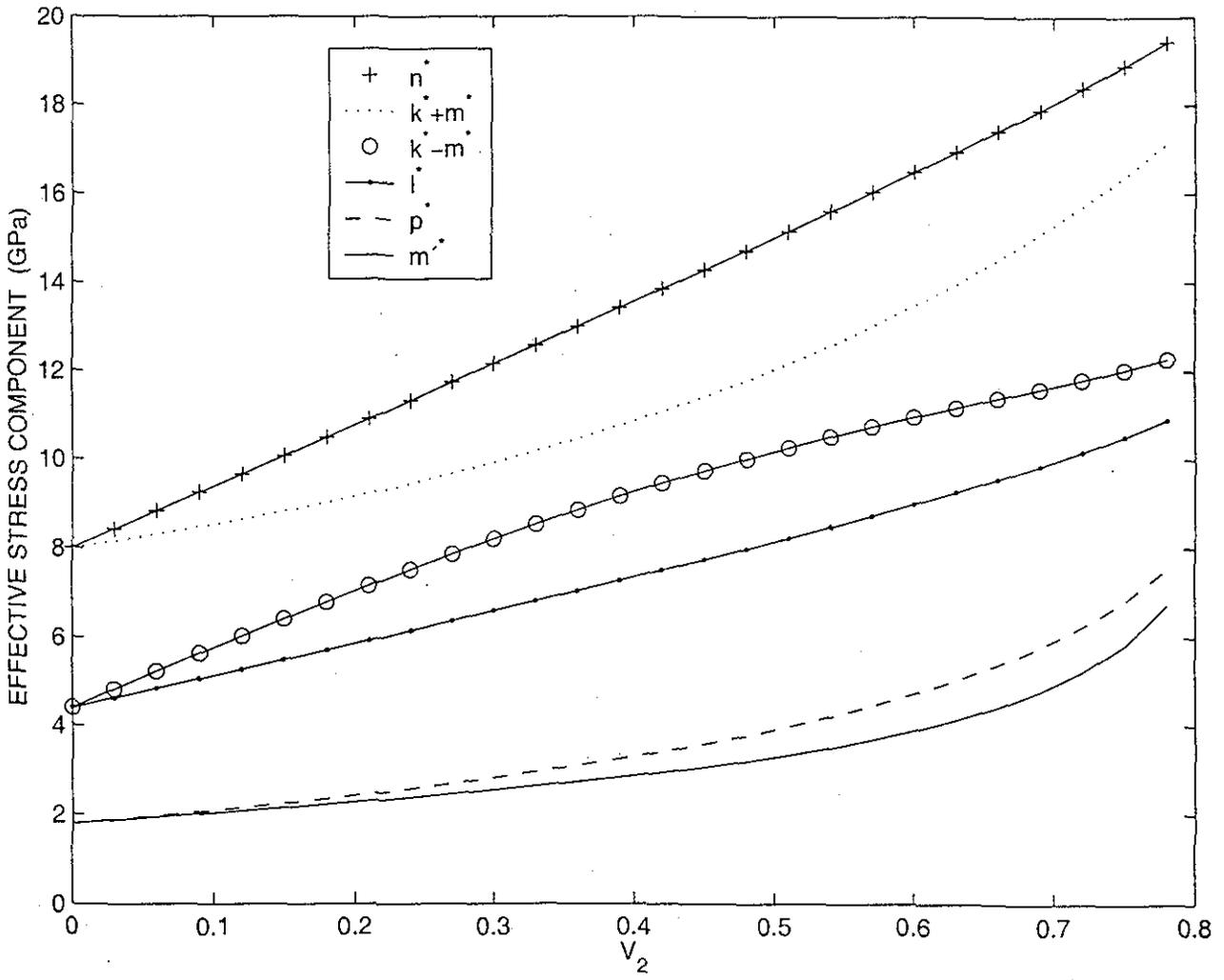


Fig. 4

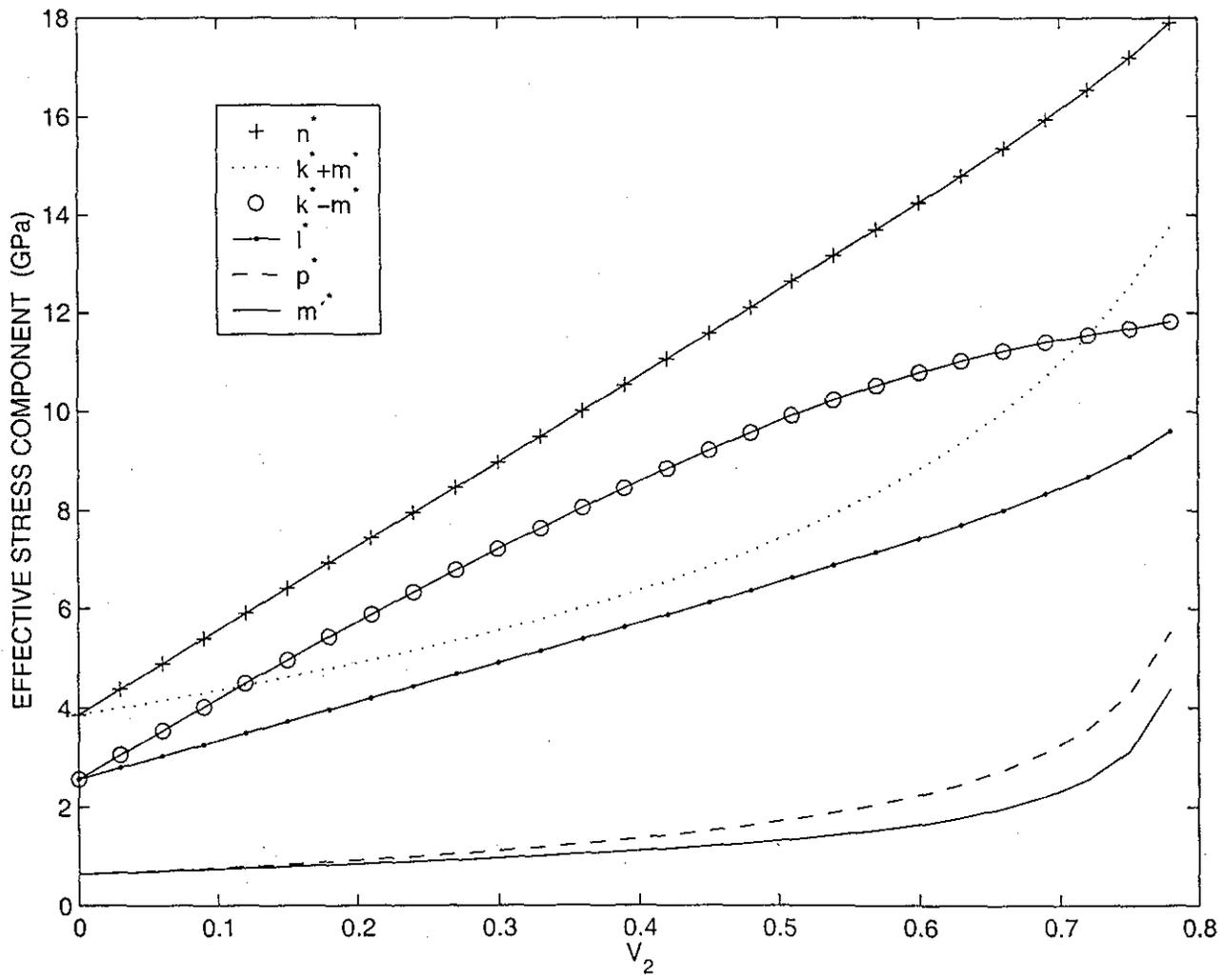


Fig. 5

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Anexo No. 2

# ELASTIC EFFECTIVE COEFFICIENTS OF FIBRE-REINFORCED COMPOSITE WITH CUBIC SYMMETRY CONSTITUENTS IN A HEXAGONAL ARRANGEMENT.

O.C. Valdiviezo-Mijangos<sup>1</sup>, R. Guinovart-Díaz,  
J. Bravo-Castillero, R. Rodríguez-Ramos and F.J. Sabina

<sup>1</sup>Posgrado en Ciencias de la Tierra, UNAM.  
Ciudad Universitaria, 04510 México, D.F. México

December 4, 2001

## Introduction

During the last few years, certain composite materials have been studied and used with periodic structure. Methods based on Fourier analysis may be useful to study their characteristics [1]. Also, the method of asymptotic homogenization has been widely used. Based on a two-scale asymptotic expansion, it is a rigorous mathematical theory for investigating both macroscopic and microscopic properties of such kind of heterogeneous media [2-7]. From a mathematical point of view, this method guarantees that the solution of the original problem with a periodic microstructure converges to the solution of the homogenized problem as the microstructure period goes to zero. In this way, a transition method from the initial problem to a homogeneous body one is indicated, but this requires the solution of the so-called unit cell (or local) problem. The method of asymptotic homogenization has been applied in many areas by means of analytical or numerical solution of the local problems and the corresponding effective moduli of the composite structure have been estimated [8-14]. On the other hand, exact formulae may be useful, besides its theoretical importance, for the checking of numerical codes. The same kind of utility applies to universal relations for the point-wise fields and among some of the properties, for instance, [15-16] in elasticity, and [17-19] in piezoelectricity.

In this paper, the asymptotic homogenization method is applied to obtain simple-closed analytical expressions for the effective elastic coefficients of a fibre-reinforced composite with circular cylindrical shape periodically distributed in the matrix, so that the overall properties of the composite have a hexagonal symmetry. Both matrix and fibre have cubic symmetry properties and they are in welded contact. As in [4,6,8], the potential methods of a complex variable and the properties of doubly periodic Weierstrass elliptic and related functions are used for the solution of the local problems, but here these are applied to hexagonal symmetry and cubic constituents. In [4,6,8], they dealt with the case of square symmetry and isotropic constituents. One important result follows *ab initio* without solving the local problems, that is to say, Hill's universal relations [15] among some of the effective properties. They are easily obtained in what is believed a new and simple way, but here it is apply to a periodic composite with hexagonal symmetry, including the case when the interface shape is arbitrary, not only of circular cross-section.

Use is made of general formulae presented in [10]; references to sections, equations and figures from that paper are given the prefix I.

## Statement of the problem. Local problems

The problem treated in this paper is similarly stated as in section I.2, except that here fibres and matrix have cubic elastic properties. Thus, note that it is not a particular case of that dealt with in [10]. The conventions, notation and consequences of section I.2 also applicable in this case.

The non-vanishing terms of the stress-strain relationship for cubic symmetry may be written for either the matrix or the fibre in terms of three parameters  $K$ ,  $\mu$  and  $\mu'$  as

$$\sigma_{11} = K(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) + 2\mu(2\epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33})/3, \quad \sigma_{12} = 2\mu'\epsilon_{12}, \quad (1)$$

with other components defined cyclically, where the strain tensor components are  $\epsilon_{ij}$ .

Fig. 1 here, which corrects Fig. I.1, shows the periodic cell.

## Exact relations for the effective coefficients

When the dimension of the composite is much larger than its periodicity, the asymptotic homogenization method is widely used to get the effective properties. Without going into the details of the derivation, which can be found elsewhere (see, for instance, [6]), the formulae for the overall coefficients  $C_{ijkl}^*$  is written at the outset,

$$C_{ijpq}^* = \langle C_{ijpq} + C_{ijkl} U_{k,l} \rangle, \quad (2)$$

which inherits the symmetries of the elastic tensors, viz.,  $C_{ijpq}^* = C_{jipq}^* = C_{pqij}^*$ , where the non-zero unique solution  ${}_{pq}U_i^{(\Upsilon)}$  in  $H_\Upsilon$  of equations (I.2.1.a, b, c, d), (I.2.2) must be found among doubly periodic functions of periods  $\omega_1 = 1$  and  $\omega_2 = e^{\pi/3}$ . Note the symmetry  ${}_{pq}U_i = {}_{qp}U_i$ .

As a consequence of the geometric symmetry about the  $Oy_3$ -axis, it is easy to show that each local problem (I.2.1a, b, c, d) uncouples in two sets of equations, namely, a plane-strain system of equations for  ${}_{pq}U_\alpha^{(\Upsilon)}$  and an antiplane-strain equation for  ${}_{pq}U_3^{(\Upsilon)}$ . Moreover, the non-vanishing components of the elastic tensor  $C_{i\delta pq}^{(\Upsilon)}$  on the right-hand side of (I.2.1c) means that the only non-homogeneous problems with a non-trivial solution correspond to four plane-strain problems  ${}_{pp}L$  and  ${}_{12}L$ , and two antiplane strain ones  ${}_{23}L$  and  ${}_{13}L$ . That the functions  ${}_{pp}U_1^{(\Upsilon)}$ ,  ${}_{12}U_2^{(\Upsilon)}$  and  ${}_{13}U_3^{(\Upsilon)}$  are even in  $\theta$  and  ${}_{pp}U_2^{(\Upsilon)}$ ,  ${}_{12}U_1^{(\Upsilon)}$  and  ${}_{23}U_3^{(\Upsilon)}$  are odd can easily be seen by noting the right-hand side of equation (I.2.1c). Now, the non-zero

elements of the effective properties (2) can be written as follows

$$\begin{aligned} k^* &= \langle K + \mu/3 + (K + \mu/3)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K + \mu/3 + (K + \mu/3)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} l^* &= \langle K - 2\mu/3 + (K - 2\mu/3)({}_{11}U_{1,1} + {}_{11}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K - 2\mu/3 + (K - 2\mu/3)({}_{22}U_{1,1} + {}_{22}U_{2,2}) \rangle \\ &= \langle K - 2\mu/3 + (K + \mu/3)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

$$n^* = \langle K + 4\mu/3 + (K - 2\mu/3)({}_{33}U_{1,1} + {}_{33}U_{2,2}) \rangle, \quad (5)$$

$$p^* = \langle \mu' + \mu'_{32}U_{3,2} \rangle = \langle \mu' + \mu'_{31}U_{3,1} \rangle, \quad (6)$$

$$m^* = \langle \mu + \mu({}_{12}U_{1,2} + {}_{12}U_{2,1}) \rangle, \quad (7)$$

where the five independent constants  $k^*$ ,  $l^*$ ,  $n^*$ ,  $p^*$  and  $m^*$  are the coefficients of the effective stress-strain relation, namely, that of 6mm symmetry given as follows:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2 &= k^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + l^*\epsilon_{33}, \\ \sigma_{33} &= l^*(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) + n^*\epsilon_{33}, \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= 2m^*(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}), \\ \sigma_{32} &= 2p^*\epsilon_{32}, \sigma_{31} = 2p^*\epsilon_{31}, \sigma_{12} = 2m^*\epsilon_{12}. \end{aligned} \quad (8)$$

A relation among certain solutions of the local problems can be easily found, similar to (I.3.2), i.e.,

$$\| K - 2\mu/3 \| ({}_{11}\mathbf{U} + {}_{22}\mathbf{U}) = 2 \| K + \mu/3 \| {}_{33}\mathbf{U}. \quad (9)$$

Two universal relations follow from Eqs. (3)–(5) and (9)

$$\frac{k^* - \langle K + \mu/3 \rangle}{l^* - \langle K - 2\mu/3 \rangle} = \frac{l^* - \langle K - 2\mu/3 \rangle}{n^* - \langle K + 4\mu/3 \rangle} = \frac{\| K + \mu/3 \|}{\| K - 2\mu/3 \|}. \quad (10)$$

Similar universal relations were found in [15] for transversely isotropic components. Eqs. (10) have the virtue of being independent of the solution of any local problems, depending on two contrasts, viz.,  $\| K + \mu/3 \|$  and  $\| K - 2\mu/3 \|$ , and the area fractions occupied by matrix and fibre materials in the cell. With these universal relations, two coefficients are fixed, once one of them is known; they are applicable to an interface  $\Gamma$  of any shape so long as it complies with the hexagonal symmetry. These results are believed to be new and were obtained in a simpler manner.

The application of Green's theorem to (3–7) over the periodic cell  $H$ , the doubly periodicity of the functions  ${}_{pq}U_i^{(\Gamma)}$  and the continuity of displacements (I.2.1b) across  $\Gamma$  for each local problem leads after the solution of the local problems [10] to the following effective coefficients

$$p^* = \mu'_1 [1 - 2V_2 \| \mu' \| P/(\mu'_1 + \mu'_2)], \quad (11)$$

where

$$P = [1 + \chi V_2 - \chi^2 \mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \quad (12)$$

the superindex  $T$  denotes a transpose vector, the vector  $\mathcal{V}_p(v_s)$ , matrix  $\mathcal{M}_p(m_{ts})$  and vector  $\tilde{\mathcal{V}}_p(\tilde{v}_t)$ , of infinite order, have components given by eq. (I.3.14).

$$\begin{aligned} k^* &= K_v + \mu_v/3 - V_2 \parallel K_\Upsilon + 4\mu_\Upsilon/3 \parallel^2 K/\mu_1, \\ l^* &= K_v - 2\mu_v/3 - V_2 \parallel K_\Upsilon + 4\mu_\Upsilon/3 \parallel \parallel K_\Upsilon - 2\mu_\Upsilon/3 \parallel K/\mu_1, \\ n^* &= K_v + 4\mu_v/3 - V_2 \parallel K_\Upsilon - 2\mu_\Upsilon/3 \parallel^2 K/\mu_1, \\ m^* &= \mu_1 - V_2 \parallel \mu_\Upsilon \parallel M, \end{aligned} \quad (13)$$

where

$$\begin{aligned} K &= D[V_1 + (1 + \kappa_1)D\mathcal{V}_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_p]/B, \\ M &= (1 + \kappa_1)E/[1 + HR^2 - \mathcal{V}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \tilde{\mathcal{V}}_m], \end{aligned} \quad (14)$$

where  $H$ , the infinite order vector  $\mathcal{V}_m(v_s)$ , matrix  $\mathcal{M}_m(m_{ts})$ , vector  $\tilde{\mathcal{V}}_m(\tilde{v}_t)$  and matrix  $\mathcal{M}_k(m_{ts})$  are given by equations (I.3.29), (I.3.30) and (I.3.32). The parameters  $A, B, C, D, E, F, G, \chi_m$  and  $\kappa_\Upsilon$  here take the values

$$\begin{aligned} A &= (\kappa_1 \chi_m - \kappa_2)B/(\kappa_2 + \chi_m), \\ B &= (1 - \chi_m)/(1 + \kappa_1 \chi_m), \\ C &= [(\kappa_1 - 1)\chi_m - (\kappa_2 - 1)]B/F, \\ D &= (\kappa_2 - 1)B/2F, \\ E &= B/(1 - \chi_m), \\ F &= V_1 \chi_m + (\kappa_2 - 1)G, \\ G &= 1/2 + V_2/(\kappa_1 - 1), \\ \chi_m &= \mu'_2/\mu'_1, \\ \kappa_\Upsilon &= 1 + 2\mu'_\Upsilon/(K_\Upsilon + 2\mu_\Upsilon/3), \Upsilon = 1, 2. \end{aligned} \quad (15)$$

## Numerical results

The final formulae that were derived for the five effective properties of the composite, which are (11) and (13) involve three expressions  $P, K$  and  $M$  that require the truncation of infinite matrices and vectors to a finite order in block groups of order two [20]. It is noted that truncation to second order yields good enough results; they do not change appreciably from truncation to higher orders. Since  $R \leq 0.5$ , the powers of  $R$  in the components of the matrices and vectors play an important role in making the computation simpler.

The material parameters used for the computation were taken from [21] and they are listed in the Table 1.

TABLE 1. Elastic constants of materials.

	Stiffness in GPa		
	$C_{11}$	$C_{44}$	$C_{12}$
Aluminium	108.0	28.5	61.3
Nickel	250.0	118.5	160.
Tungsten	502.0	152.	199.
Epoxy	80.0	18.0	44.0
Polymer	38.6	6.4	25.7

In the Figs. 2 the behavior of the effective coefficients  $n^*$  (with cross lines),  $k^* + m^*$  (dot lines),  $k^* - m^*$  (empty circles),  $l^*$  (dashdot lines) and  $p^*$  (dashed lines) are shown for different combination of materials as a function of the volume concentration  $V_2$ , where the matrix is either epoxy or polymer and the fibres can be tungsten, nickel and aluminium thus the numerical examples carried out were for a cubic symmetric fibres embedded in an isotropic matrix. In all the examples shown below the general behaviour of the cubic symmetry fibres is to reinforce the matrix materials in which they are embedded. Note that, in all cases, the effective properties of the composite at zero concentration coincide with those of the matrix. The examples display the various behaviours which are encountered.

The case of aluminium fibres in epoxy shown in Fig. 2a is interesting because the reinforcement become almost cubic, i.e.,  $n^* \approx k^* + m^*$  and  $l^* \approx k^* - m^*$ . The next example considered consists of tungsten fibres and epoxy matrix. It is shown in Fig. 2b. As the concentration increases, the anisotropy of the effective properties increases monotonically. The overall material is of 6mm symmetry. The most noticeable increase corresponds to  $n^*$ , whereas for the other components the increase is only slight.

The results of considering nickel fibres in epoxy are displayed in Fig. 2c. The components  $n^*$  and  $k^* - m^*$  show the greatest increase whereas for the other remaining components is less great. In Fig. 2a, b, c, the five effective components of stress do not intersect as a function of the volume concentration. The overall composite behaves anisotropically, however, Fig. 2d shows the results of the combination of nickel fibres embedded in polymer. The  $k^* + m^*$  properties is less than  $k^* - m^*$  in  $[0,0.1]$ ; otherwise it is greater.

## Concludings remarks

A fibre-reinforced composite having a hexagonal arrangement has been studied here. The fibres have a circular cross-section. The material properties of matrix and fibres are cubic symmetry. Closed-form expressions for the overall properties of this composite were obtained by means of the asymptotic homogenization method. These are equations (11), (13). The numerical calculation of these is quite simple.

The methods of potential theory for plane- and antiplane-strain elasticity were applied and the properties of Weierstrass elliptic and related functions were used to solve the two resulting local problems. Without the explicit solution of the required local problems, it was found that the overall properties  $k^*$ ,  $l^*$  and  $n^*$  satisfy the universal relations of Hill [15], but here they apply to hexagonal symmetry and periodic media for not only a circular cross-section fibre, but for one which is symmetric with respect to the  $y_1$ - and  $y_2$ - axis. This derivation, which appears to be new and simpler than other algebraic methods, may be found useful in other applications of the asymptotic homogenization method.

## Acknowledgements

This work was sponsored by PAPIIT, DGAPA, UNAM Project Number IN103301 and Project High Education Ministry of Cuba No. 03.50, 1999. One of the authors (FJS) would like to thank the John Simon Guggenheim Memorial Foundation for the award of one of its Fellowships. Thanks are due to Ana Pérez Arteaga for computational support. O.C.V. thanks a scholarship funding by CONACyT.

## References

1. Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (1999) *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, 2nd ed., North-Holland, Amsterdam.
2. Sanchez-Palencia, E. (1980) *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*. Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin.
3. Lions, J. (1981) *Some Methods in the Mathematical Analysis. Analysis of Systems and their Control*. Gordon and Breach Science Publishers, New York.
4. Pobedrya, B. E. (1984) *Mechanics of Composite Materials*. Moscow State University

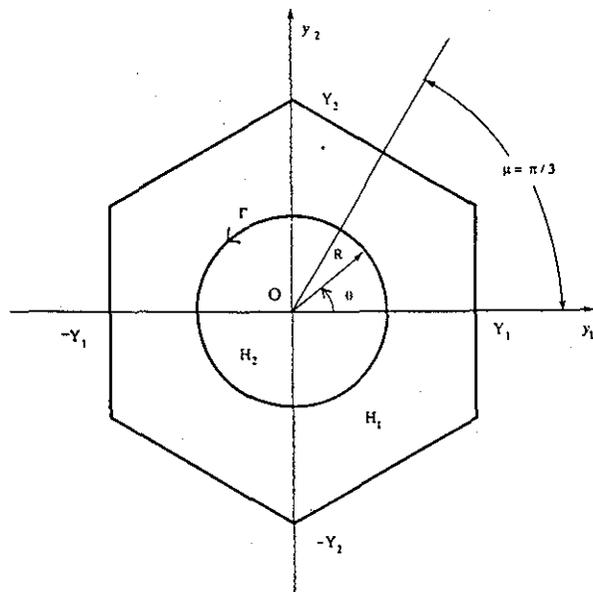
Press, Moscow (in Russian).

5. Bakhvalov, N. S. and Panasenko, G. P. (1989) *Homogenization Averaging Processes in Periodic Media*. Kluwer, Dordrecht.
6. Parton, V.Z. and Kudryavtsev, B.A. (1993) *Engineering Mechanics of Composite Structures*, Boca Raton, CRC Press.
7. Kalamkarov, A.L. and Kolpakov, A.G. (1997) *Analysis, Design and Optimization of Composite Structures*, Wiley, Chichester, U.K.
8. Meguid, S.A. and Kalamkarov, A.L. (1994) *Int. J. Solids Struct.* **31**, 303–316.
9. Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., Guinovart-Díaz, R. and Bravo-Castillero, J. (2001), *Mech. Mat.* **33**, 223–235.
10. Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., Rodríguez-Ramos, R., and Sabina, F.J. (2001) *J. Mech. Phys. Solids*, **49**, 1445–1462.
11. Galka, A., Telega, J.J. and Wojnar, R. (1996) *Comp. Assisted Mech. Engng. Scien.* **3**, 133–154.
12. Pastor, J. (1997) *Mech. Res. Comm.* **24**, 145–150.
13. Castillero, J.B., Guinovart, R., Otero, J.A. and Ramos, R.R. (1997) *Mekh. Komp. Mat.* **33**, 670–680.
14. Castillero, J.B., Otero, J.A., Ramos, R.R. and Bourgeat, A. (1998) *Int. J. Solids Struct.* **35**, 527–541.
15. Hill, R. (1964) *J. Mech. Phys. Solids.* **12**, 199–212.
16. Dvorak, G.J. (1990) *Proc. R. Soc. Lond. A* **431**, 89–110.
17. Benveniste, Y. and Dvorak, G.J. (1992) *J. Mech. Phys. Solids.* **40**, 1295–1312.
18. Schulgasser, K. (1992) *J. Mech. Phys. Solids* **40**, 473–479.
19. Nan, C.W. (1993) *J. Mech. Phys. Solids* **41**, 1567–1570.
20. Kantorovich, L.V. and Krylov, V.I. (1958) *Approximate Methods of Higher Analysis*. Noordhoff, Groningen.
21. Auld, B.A. (1973). *Acoustic Fields and Waves in Solids*, vol. I, Wiley, New York, p. 371.

## Figure Captions

Fig. 1 Hexagonal cell  $H_1 \cup H_2$ . The matrix (fibre) occupies the domain  $H_1(H_2)$ . The common interface  $\Gamma$  is a circle of radius  $R$ .  $Y_1 = 1/2, Y_2 = 3^{-1/2}$

Fig. 2 Effective stress components in  $GPa$  against volume concentration  $V_2$  for (a) aluminium fibres in epoxy; (b) tungsten fibres in epoxy; (c) nickel fibres in epoxy; (d) nickel fibres in polymer.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Fig. L

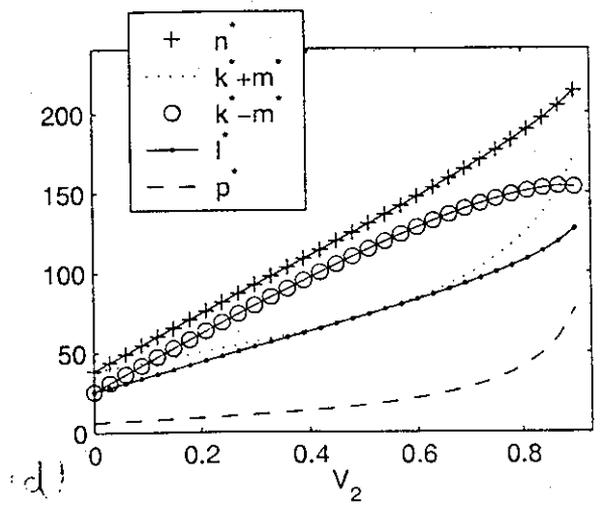
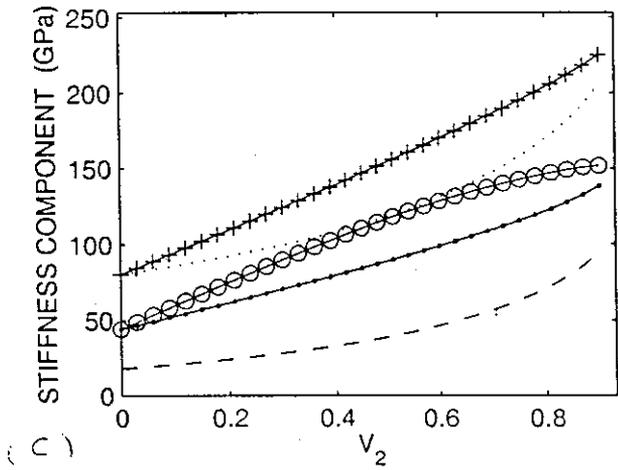
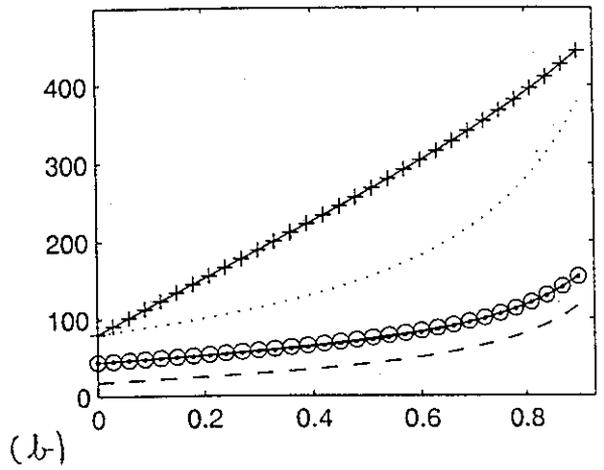
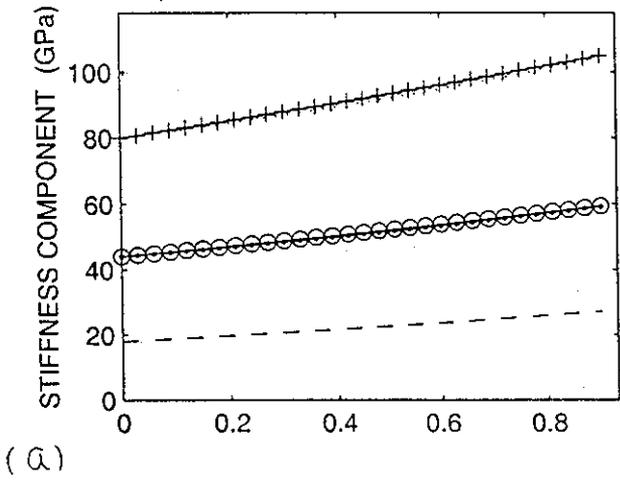


Fig. 2

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Anexo No. 3



## Overall behavior of two-dimensional periodic composites

Federico J. Sabina <sup>a,\*</sup>, Julián Bravo-Castillero <sup>a,b</sup>, Raúl Guinovart-Díaz <sup>b</sup>,  
Reinaldo Rodríguez-Ramos <sup>b,c</sup>, Oscar C. Valdiviezo-Mijangos <sup>a,d</sup>

<sup>a</sup> Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Apartado Postal 20-726, Delegación de Alvaro Obregón, 01000 Mexico D.F., Mexico

<sup>b</sup> Facultad de Matemática y Computación, Universidad de la Habana, San Lázaro y L, Vedado, Habana 4, CP-10400, Cuba

<sup>c</sup> Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Apartado Postal 70-472, Delegación Coyoacán,  
04510 Mexico D.F., Mexico

<sup>d</sup> Posgrado en Geofísica, Mexico

Received 31 August 2000; in revised form 26 March 2001

### Abstract

The overall properties of a binary elastic periodic fiber-reinforced composite are studied here for a cell periodicity of square type. Exact formulae are obtained for the effective stiffnesses, which give closed-form expressions for composites with isotropic components including ones for empty and rigid fibers. The new formulae are simple and relatively easy to compute. Examples show the dependences of the stiffnesses as a function of fiber volume fraction up to the percolation limit. The specific example of glass fibers in epoxy yields new curves, which correct those displayed before by Meguid and Kalamkarov. Comparison with experimental data is very good. Bruno, Hill and Hashin's bounds are compared with the exact solution. In most cases, the latter is very close to a bound in a given interval. A useful fact to know, where the easy formula afforded by the bound is advantageous. Plots of effective properties are also given for values of the shear moduli ratio of the two media. The overall parameters in the cases of empty and rigid fibers are also shown. The exact formulae explicitly display Avellaneda and Schwartz's microstructural parameters, which have a physical meaning, and provide formulae for them. The equations easily lead to Hill's universal relations. © 2001 Published by Elsevier Science Ltd.

**Keywords:** Fiber-reinforced composites; Isotropic components; Empty fibers; Rigid fibers; Asymptotic homogenization; Tetragonal symmetry

### 1. Introduction

Here the concerned problem of finding effective properties is related to materials that have a periodic microstructure. Methods applied to composites with a random distribution of inclusions such as the self-consistent technique can be found in various textbooks (Aboudi, 1991; Christensen, 1991; Nemat-Nasser and Hori, 1999). For periodic media, on the other hand, Fourier series methods have been applied by

\* Corresponding author. Tel.: +52-56-223563; fax: +52-56-223564.

E-mail address: fjs@uxmyml.iimas.unam.mx (F.J. Sabina).

32 Iwakuma and Nemat-Nasser (1983) and more recently by Luciano and Barbero (1994). Also, Aboudi  
33 (1991) introduced the so-called method of cells, which covers a wide range of applications. An alternative  
34 technique, in the absence of exact or numerical solutions, are the bounding methods, which offer the ca-  
35 pability of providing a limited range of possibilities for the relevant property. Thus the bounds of Hashin,  
36 Hill, Hashin and Shtrikman (Christensen, 1991), Bruno (1991) and many others (see, for instance, Nemat-  
37 Nasser and Hori, 1999). The asymptotic homogenization method (Bensoussan et al., 1978; Sánchez-Pa-  
38 lencia, 1980; Lions, 1981; Pobedrya, 1984; Bakhvalov and Panasenko, 1989; Oleinik et al., 1992; Parton and  
39 Kudryavtsev, 1993; Kalamkarov and Kolpakov, 1997) is another technique, which can produce closed-  
40 form solutions (Pobedrya, 1984; Rodríguez-Ramos et al., 2001) or numerical solutions upon solving the so-  
41 called cell problems (see, references in Rodríguez-Ramos et al., 2001). Here the problem of finding the  
42 effective properties of a two-phase fiber-reinforced composite is addressed. Elastic isotropic materials are  
43 considered and fibers distributed periodically along the  $x_1$ - and  $x_2$ -directions are studied by means of the  
44 asymptotic homogenization method. Exact closed-form formulae are provided directly from the formu-  
45 lation of Rodríguez-Ramos et al. (2001) in a manner which is suitable for a relatively easy computation.  
46 The formulae, for the limiting cases of empty and rigid fibers, are also obtained from the original formulae.  
47 It must be mentioned that Pobedrya (1984), Parton and Kudryavtsev (1993) and Meguid and Kalamkarov  
48 (1994) also applied the asymptotic homogenization method to a fiber-reinforced composite with only  
49 isotropic elastic constituents. The former provided closed-form formulae, but not for empty or rigid fibers,  
50 in a complicated notation, whereas the latter two did not get any final closed-form formulae for the effective  
51 properties. In fact it is possible to get the same formulae which is given in this paper through the two  
52 slightly different routes of Pobedrya (1984), which was used in Rodríguez-Ramos et al. (2001), and the  
53 other two. This is not explicitly given here.

54 Parton and Kudryavtsev (1993) did not produce any numerical results and share with Meguid and  
55 Kalamkarov (1994) a “misprint”, which is carried out in latter equations. It says “ $G_M/G_F$ ” where it should  
56 say “ $G_F/G_M$ ” in Eqs. (35) and (9.21), respectively. In fact several plots in Meguid and Kalamkarov (1994)  
57 are incorrect. Here the correct ones are given. Comparison with experimental data, known bounds are  
58 other solutions (Aboudi, 1991; Luciano and Barbero, 1994; Pobedrya, 1984) is done with the exact solution.  
59 It turns out that, in a certain interval of the fiber volume fraction, some bound and the exact solution are  
60 very close to each other thus providing a simple formula, the bound, for its use in the calculation of the  
61 problem involved and giving a greater certainty in the result. See, for instance, Talbot (1999). Also closed-  
62 form expressions are given for the two microstructural parameters of Avellaneda and Swart (1998).

63 Section 2 starts with the statement of the problem, introducing the overall stiffnesses and engineering  
64 constants of the composite. Section 3 has the exact closed-form formulae for the overall properties of the  
65 binary composite with isotropic constituents and square symmetry. Similar formulae are also provided for  
66 two important limiting cases: of empty and rigid fibers. Various examples are considered in Section 4, where  
67 comparison among the exact solution, known bounds (Hashin, Hill and Bruno), other solutions and ex-  
68 perimental data is discussed. Section 5 has some final remarks. The paper ends with two appendices.  
69 Appendix A defines parameters which appear in the exact formulae. Appendix B defines vectors, matrices  
70 and series relevant to the formulae.

## 71 2. Statement of the problem

72 A binary periodic composite is considered here in which aligned cylindrical fibers are embedded in matrix  
73 material. The direction of the fibers, which have a circular cross-section, are parallel to the  $Ox_3$  axis. See  
74 Fig. 1. Both components have isotropic elastic properties. The periodic cell  $S$  of the composite is a square,  
75 that is, the fibers are periodically distributed without overlapping along the directions parallel to the  $Ox_1$   
76 and  $Ox_2$  axes. The effective properties of this composite are tetragonal. The non-vanishing components of

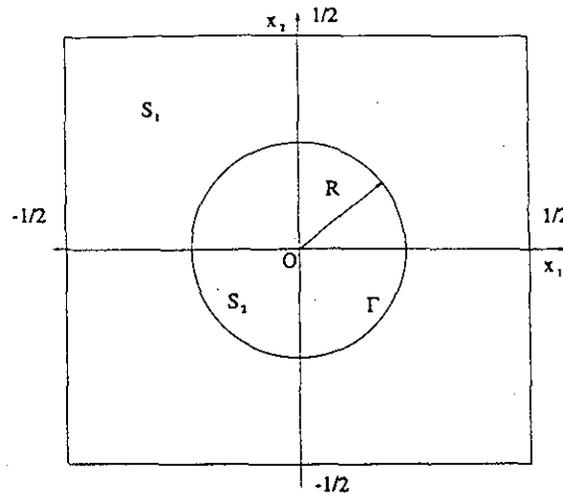


Fig. 1. It shows a cross-section of the unit square cell  $S$  of the composite, which is repeated in the directions of the  $Ox_1$  and  $Ox_2$  axes. The fiber occupies a circular region  $S_2$  of radius  $R$  and center  $O$ , the matrix occupies  $S_1$  so that  $S = S_1 \cup S_2$ . The common interface is  $\Gamma$ .

77 the stress-strain relationship may be written in terms of six independent constants  $\bar{k}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{m}$  and  $\bar{m}'$  as  
 78 follows:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22}) &= \bar{k}(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22}) + \bar{l}\bar{\epsilon}_{33}, \\
 \bar{\sigma}_{33} &= \bar{l}(\bar{\epsilon}_{11} + \bar{\epsilon}_{22}) + \bar{n}\bar{\epsilon}_{33}, \\
 \bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22} &= 2\bar{m}'(\bar{\epsilon}_{11} - \bar{\epsilon}_{22}), \\
 \bar{\sigma}_{32} &= 2\bar{p}\bar{\epsilon}_{32}, \\
 \bar{\sigma}_{31} &= 2\bar{p}\bar{\epsilon}_{31}, \\
 \bar{\sigma}_{12} &= 2\bar{m}\bar{\epsilon}_{12},
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

80 where  $\bar{\sigma}_{ij}$  are the components of the stress tensor, the indices  $i, j$  run from 1 to 3; the components of the  
 81 strain tensor are

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right),
 \tag{2.2}$$

83 here  $\bar{u}_i$  are the components of the displacement vector;  $\bar{k}$  is the plane-strain bulk modulus for lateral di-  
 84 lation without longitudinal extension;  $\bar{l}$  is the associated cross-modulus;  $\bar{n}$  is the modulus for longitudinal  
 85 uniaxial straining;  $\bar{p}$  is the rigidity modulus for shearing in the longitudinal direction;  $\bar{m}$  is the rigidity  
 86 modulus for shearing in any transverse direction. In terms of these parameters, the axial, with subindex a,  
 87 Young's modulus and Poisson's ratio are  $\bar{E}_a$  and  $\bar{\nu}_a$ , in that order; the transverse, with subindex t, Young's  
 88 modulus and Poisson's ratio,  $\bar{E}_t$  and  $\bar{\nu}_t$ , respectively, are related as follows

$$\begin{aligned}
 \bar{E}_a &= \bar{n} - \bar{l}^2/\bar{k} = \bar{n} - 4\bar{k}\bar{\nu}_a^2, \\
 \bar{\nu}_a &= \bar{l}/2\bar{k}, \\
 \bar{E}_t &= 4\bar{k}\bar{m}(\bar{k} + \bar{n}\bar{m}/\bar{E}_a) = 2(\bar{l} + \bar{\nu}_t)\bar{m}, \\
 \bar{\nu}_t &= (\bar{k} - \bar{n}\bar{m}/\bar{E}_a)/(\bar{k} + \bar{n}\bar{m}/\bar{E}_a).
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

90 The bulk and rigidity moduli of the matrix and the fiber are denoted by  $K_1, \mu_1$ , and  $K_2, \mu_2$ , respectively. The  
 91 area fractions occupied by the matrix and the fiber in the  $x_1x_2$ -plane are  $V_1$  and  $V_2$ , in that order, so that  
 92  $V_1 + V_2 = 1$ . Note that the percolation limit is  $V_2 = \pi/4$ , when the fibers are in contact. The arithmetic or  
 93 Voigt average of the above properties is written by

$$\begin{aligned} K_v &= K_1 V_1 + K_2 V_2, \\ \mu_v &= \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

95 in that order.

96 Furthermore, the contrast of the properties  $K$  and  $\mu$  across the interface  $\Gamma$  is written using the double bar  
 97 notation, viz.,

$$\begin{aligned} ||K|| &= K_1 - K_2, \\ ||\mu|| &= \mu_1 - \mu_2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

99 respectively.

100 The main objective of this paper is to give useful closed-form formulae for the calculation of the effective  
 101 properties and its associated engineering moduli.

### 102 3. Closed-form formulae

#### 103 3.1. Two-phase elastic composite

104 Recently, Rodríguez-Ramos et al. (2001) studied a similar fiber-reinforced composite with the same  
 105 geometry except that both elastic media considered had transversely isotropic properties. The effective  
 106 properties of the composite were obtained using the method of asymptotic homogenization, and properties  
 107 of doubly periodic functions. Those results can be specialized to the case of isotropic components to yield  
 108 the following simple expressions:

$$\begin{aligned} \bar{k} &= K_v + \frac{1}{3}\mu_v - V_2 ||K + \frac{1}{3}\mu||^2 K_i / \mu_1, \\ \bar{l} &= K_v - \frac{2}{3}\mu_v - V_2 ||K + \frac{1}{3}\mu|| ||K - \frac{2}{3}\mu|| K_i / \mu_1, \\ \bar{n} &= K_v + \frac{4}{3}\mu_v - V_2 ||K - \frac{2}{3}\mu||^2 K_i / \mu_1, \\ \bar{p} &= \mu_1 [1 - 2V_2 ||\mu|| P_i / (\mu_1 + \mu_2)], \\ \bar{m} &= \mu_1 - V_2 ||\mu|| M_i, \\ \bar{m}' &= \mu_1 - V_2 ||\mu|| M_i', \end{aligned} \tag{3.1}$$

110 where

$$\begin{aligned} K_i &= D_i [V_1 + (1 + \kappa_1) D_i \mathcal{Y}_p^T \mathcal{M}_k^{-1} \bar{\mathcal{Y}}_p] / B_i, \\ P_i &= [1 + \chi \mathcal{Y}_2 - \chi^2 \mathcal{Y}_p^T \mathcal{M}_p^{-1} \bar{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \\ M_i &= (1 + \kappa_1) E_i / [1 + R^2 H_i^- - \mathcal{Y}_m^T \mathcal{M}_m^{-1} \bar{\mathcal{Y}}_m], \\ M_i' &= (1 + \kappa_1) E_i / [1 + R^2 H_i^+ - \mathcal{Y}_m'^T \mathcal{M}_m'^{-1} \bar{\mathcal{Y}}_m'], \end{aligned} \tag{3.2}$$

112 where the parameters  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i, \chi_\mu, \kappa_j$  ( $j = 1, 2$ ) and  $\chi$  are defined in the Appendix A, whereas  
 113 the infinite order vectors  $\mathcal{Y}_p, \bar{\mathcal{Y}}_p, \mathcal{Y}_m, \bar{\mathcal{Y}}_m, \mathcal{Y}_m', \bar{\mathcal{Y}}_m'$  and matrices  $\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_p, \mathcal{M}_m, \mathcal{M}_m'$  are given in  
 114 Appendix B, together with  $H_i^\pm$ . The superindex T denotes a transpose vector.

115 It is worthwhile to see that the effective properties  $\bar{k}$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{n}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{m}$ , and  $\bar{m}'$  in Eq. (3.1) are given in terms of the  
 116 properties of the two constituents, the area fraction occupied by them, the radius  $R$  of the circular cross-  
 117 section and series related to doubly periodic functions of square symmetry. The four expressions  $K_i$ ,  $M_i$ ,  $P_i$ ,  
 118 and  $M'_i$  that appear in Eq. (3.2) are, in fact, relatively easy to compute. Numerical experiments show that  
 119 enough accurate results are obtained, when the infinite order vectors and matrices involved are truncated to  
 120 the second order, because powers of  $R$ , a number less of equal than 0.5, are present and the series that  
 121 appear converge very quickly. It is also interesting to mention that  $K_i$  and  $M'_i$  are related to two micro-  
 122 structural parameters  $A_k$  and  $A_{m'}$ , introduced by Avellaneda and Swart (1998). They have a simple physical  
 123 interpretation, i.e.,  $A_k$  and  $A_{m'}$  represent, respectively, the mean transverse hydrostatic strain and mean  
 124 deviatoric strain in the fiber phase, per unit applied transverse pressure and shear. Therefore,

$$\begin{aligned} A_k &= 1 + \|K - \frac{1}{3}\mu\|K_i/\mu_1, \\ A_{m'} &= M'_i. \end{aligned} \tag{3.3}$$

126 Thus, Eq. (3.3) provides a closed form expression for Avellaneda and Swart (1998) microstructural para-  
 127 meters.

128 Another interesting result follows from the elimination of  $K_i$  in the first three terms of Eq. (3.1), that is to  
 129 say,

$$\frac{\|K + \frac{1}{3}\mu\|}{\|K - \frac{2}{3}\mu\|} = \frac{\bar{k} - K_v - \frac{1}{3}\mu_v}{\bar{l} - K_v + \frac{2}{3}\mu_v} = \frac{\bar{l} - K_v + \frac{2}{3}\mu_v}{\bar{n} - K_v - \frac{4}{3}\mu_v} \tag{3.4}$$

131 the universal relations of Hill (1964) are easily found from the exact formulae.

### 132 3.2. Empty fibers

133 Appropriate closed-form formulae can also be obtained for the case when the fiber is empty. The limit,  
 134 when the properties of the fiber material tends to zero, yield the following closed-form expressions

$$\begin{aligned} \bar{k}_e &= (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)V_1 + (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)^2 K_e/\mu_1, \\ \bar{l}_e &= (K_1 - \frac{2}{3}\mu_1)V_1 - V_2(K_1 + \frac{2}{3}\mu_1)(K_1 - \frac{2}{3}\mu_1)K_e/\mu_1, \\ \bar{n}_e &= (K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)V_1 - V_2(K_1 - \frac{2}{3}\mu_1)^2 K_e/\mu_1, \\ \bar{p}_e &= \mu_1(1 - 2V_2P_e), \\ \bar{m}_e &= \mu_1(1 - V_2M_e), \\ \bar{m}'_e &= \mu_1(1 - V_2M'_e), \end{aligned} \tag{3.5}$$

136 where  $K_e$ ,  $M_e$ ,  $P_e$  and  $M'_e$  are given by Eq. (3.2) upon the substitution there of the values of the parameters  $A_i$ ,  
 137  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $D_i$ ,  $G_i$ ,  $E_i$ ,  $\chi$  and  $\kappa'_1$ , as follows:

$$\begin{aligned} -A_i &= B_i = E_i = \chi = 1, \\ C_i &= -2D_i = -1/G_i, \\ \kappa_1 &= (K_1 + \frac{7}{3}\mu_1)/(K_1 + \frac{1}{3}\mu_1). \end{aligned} \tag{3.6}$$

139 Again the universal relations (3.4) follow with  $K_2 = \mu_2 = 0$ , or by the elimination of  $K_e$  from the first three  
 140 terms of Eq. (3.5).

141 **3.3. Rigid fibers**

142 Closed-form expressions for the overall properties of rigid fibers can also be derived from Eq. (3.2) in the  
 143 limit of very large values of the fiber properties. The relevant quantities become

$$\begin{aligned} \bar{k}_r &= (K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)(1 + V_2K_r), \\ \bar{p}_r &= \mu_1(1 + 2V_2P_r), \\ \bar{m}_r &= \mu_1(1 + V_2M_r), \\ \bar{m}'_r &= \mu_1(1 + V_2M'_r), \end{aligned} \tag{3.7}$$

145 where

$$\begin{aligned} K_r &= 1 + (\kappa_1 - 1)[G_i - (1 + \kappa_1)B_i\mathcal{V}_p^T\mathcal{M}_k^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_p/V_1]/V_1, \\ P_r &= [1 - V_2 - \mathcal{V}_p^T\mathcal{M}_p^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_p]^{-1}, \\ M_r &= (1 + 1/\kappa_1)/[1 + R^2H_i^- - \mathcal{V}_m^T\mathcal{M}_m^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_m], \\ M'_r &= (1 + 1/\kappa_1)/[1 + R^2H_i^+ - \mathcal{V}_m^T\mathcal{M}_m^{-1}\tilde{\mathcal{V}}_m]; \end{aligned} \tag{3.8}$$

147 here, and in the infinite order vectors and matrices

$$\begin{aligned} A_i &= \chi = -1, \\ B_i &= -1/\kappa'_1 = -(K_1 + \frac{1}{3}\mu_1)/(K_1 + \frac{1}{3}\mu_1), \\ C_i &= -2\mu_1/V_1(K_1 + \frac{1}{3}\mu_1), \end{aligned} \tag{3.9}$$

149  $G_i$  is given by Eq. (A.1) and  $H_i^\pm$  by Eq. (B.4).

150 It is interesting to note that a relation exists between  $P_e$  and  $P_r$ , namely,

$$P_e^{-1} - P_r^{-1} = 2V_2, \tag{3.10}$$

152 since  $P_e$  and  $P_r$  are independent of the parameter properties and depend on the square symmetry and the  
 153 radius  $R$  of the fiber only.

154 **4. Numerical examples**

155 **4.1. Two-phase elastic composite**

156 As a first example, the same materials that were considered by Meguid and Kalamkarov (1994), Luciano  
 157 and Barbero (1994), is dealt with. Here the properties are taken from Tsai and Hahn (1980) for the epoxy  
 158 matrix, Young's modulus is  $E_1 = 3.45$  GPa and Poisson's ratio is  $\nu_1 = 0.35$ , whereas the corresponding  
 159 values for the glass fibers are  $E_2 = 73.1$  GPa and  $\nu_2 = 0.22$ . It is believed that these values are representative  
 160 of those used by Meguid and Kalamkarov (1994). They did not give these explicitly.

161 As a function of the fiber volume fraction  $V_2$ , up to the percolation limit of  $\pi/4$ , dimensionless plots of the  
 162 effective transverse Young's modulus  $\bar{E}_t/E_1$ , transverse and axial shear moduli  $\bar{m}/\mu_1$ ,  $\bar{p}/\mu_1$ , axial and  
 163 transverse Poisson's ratio  $\bar{\nu}_a/\nu_1$ ,  $\bar{\nu}_t/\nu_1$  computed using the exact formulae (continuous line) are shown in Figs.  
 164 2–6, respectively. Also, in those figures, two other curves are displayed, viz., upper (dash-dotted line) and  
 165 lower (dotted line) bounds. (the bounds of Hashin (1965) and Hill (1964) (see, also Christensen, 1991) for a  
 166 transversely isotropic medium appear in Figs. 2–6. In Fig. 4, however, those of Bruno (1991) are plotted).  
 167 Fig. 3 also shows the dimensionless modulus  $m'/\mu_1$ .

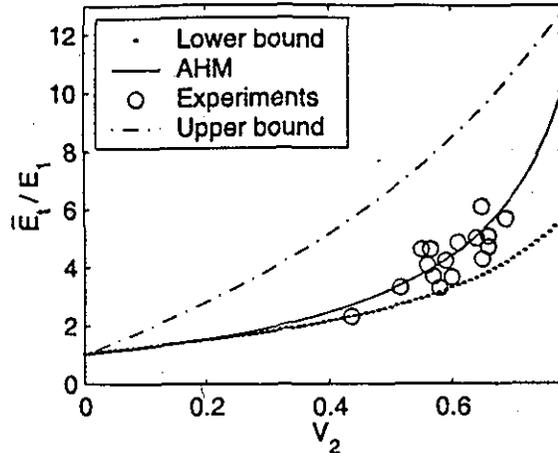
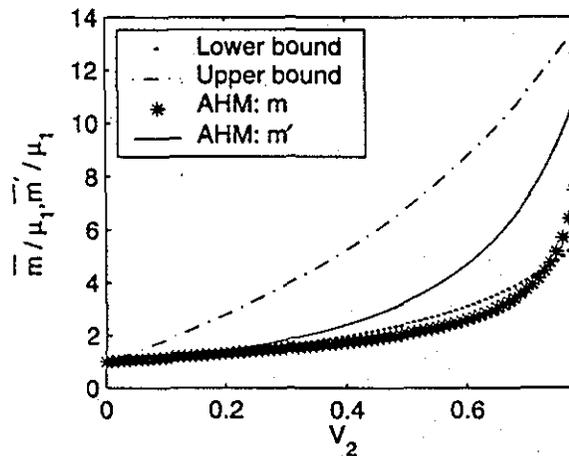


Fig. 2. Plot of the dimensionless overall transverse Young's modulus  $\bar{E}_t/E_1$  against the fiber volume fraction  $V_2$ . The continuous line is computed using the exact formulae, the dash-dotted (dotted) line shows the upper (lower) bounds of Hashin (1965) and Hill (1964). Tsai and Hahn (1980) experimental data are shown as open circles.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Fig. 3. Normalized transverse shear modulus  $\bar{m}/\mu_1$  (star) and  $m'/\mu_1$  (continuous line) against fibre volume fraction  $V_2$  plot, with the same conventions of Fig. 2. Note that the exact solution for  $\bar{m}/\mu_1$  need not be between the bounds.

168 It is found that the exact solution and the bounds coincide for the dimensionless axial Young's modulus  
 169  $\bar{E}_a/E_1$ , like in Meguid and Kalamkarov (1994), showing an almost linear behavior. This figure is not shown  
 170 for brevity. However, the other four parameters in Figs. 2-5 show quite a different behavior from those  
 171 calculated by them. The corrected ones are presented here.

172 The effective transverse Young's modulus  $\bar{E}_t/E_1$ , which lies between the bounds, increases monotonically  
 173 and is closer to the lower bound up to 0.2 of the fibre volume fraction and then it deviates appreciable up to  
 174  $V_2 = \pi/4$ , as it can be seen in Fig. 2. The experimental data, taken from Tsai and Hahn (1980), are also  
 175 shown as the open circles. The agreement is quite good between the experimental values and the exact  
 176 solution, which follows the data through the middle of the data cloud. These results can also be compared  
 177 with those obtained by Aboudi (1991) using the method of cells and those calculated by Luciano and

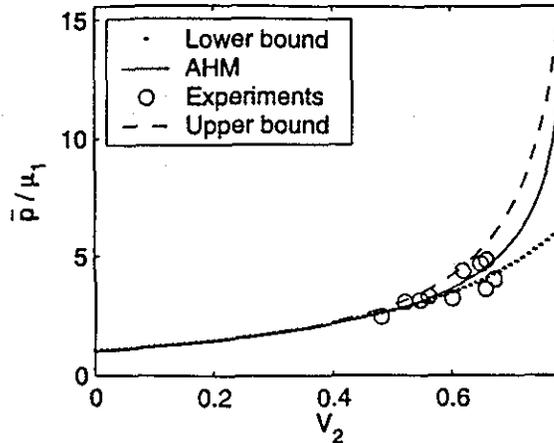


Fig. 4. Dimensionless axial shear modulus  $\bar{\rho}/\mu_1$  versus fibre volume fraction  $V_2$  plot. Same convention as in Fig. 2, but here the bounds are those of Bruno. The exact solution lies between the tight bounds.

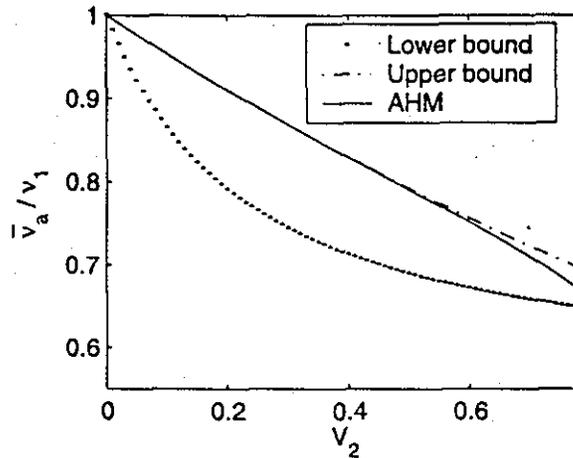


Fig. 5. Plot of the normalized axial Poisson's ratio  $\bar{\nu}_a/\nu_1$  against fibre volume fraction  $V_2$ . Same conventions as in Fig. 2.

178 Barbero (1994), who used a Fourier series technique by considering a piecewise constant eigenstrain. All the  
 179 three curves show the same trend. The latter two curves are not plotted. Their behavior can easily be es-  
 180 tablished in relation with the data. Both curves, viz., Aboudi, Luciano and Barbero, lie next to the lower  
 181 edge of the data cloud and they are close to each other. Aboudi's curve is closer to the exact solution.

182 As it is shown (star) in Fig. 3, the effective transverse shear modulus  $\bar{m}/\mu_1$ , also increases monotonically  
 183 as a function of fibre volume fraction  $V_2$  and is quite close to the lower bound except near the percolation  
 184 limit. It must be recalled that the bounds plotted correspond to a transversely isotropic medium which has a  
 185 different anisotropy from the tetragonal effective medium considered here. There is no reason for the exact  
 186 solution to lie between these bounds. Luciano and Barbero's also computed this parameter. Their curve is an  
 187 underestimate for the exact curve. A plot of  $m'/\mu_1$  against fibre volume fraction  $V_2$  is also shown in Fig. 3.  
 188 The exact solution displays a monotonically increasing value as a function of  $V_2$ , close to the lower bound  
 189 up to  $V_2 = 0.2$ ; it always lies between the two bounds.

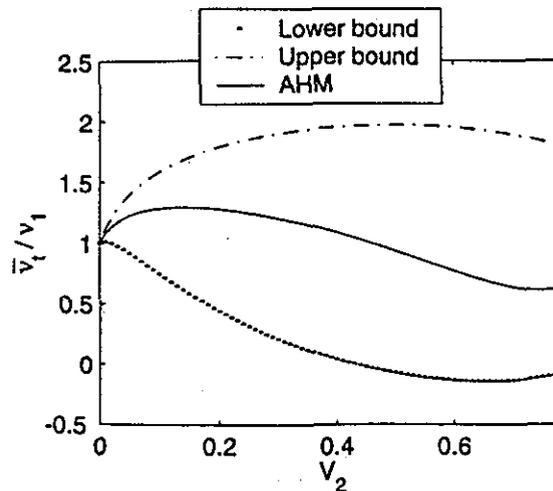


Fig. 6. Plot of the normalized transverse Poisson's ratio  $\bar{\nu}_t/\nu_1$  against  $V_2$ . Same conventions as in Fig. 2.

As for  $\bar{\rho}/\mu_1$ , shown in Fig. 4, the closed-form solution increases monotonically and is closer to the lower bound up to  $V_2 = 0.5$ , where it deviates up to the percolation limit; it always lies between the bounds. The tighter upper bound of Bruno (1991) is also shown in Fig. 4 as the dashed line. The lower bound of Bruno is the same as the Hashin–Hill lower bound. Note that the exact solution is very close to the upper bound of Bruno up to  $V_2 = 0.3$  where it starts to deviate up to  $V_2 = \pi/4$ . This behavior is not shown by Meguid and Kalamkarov (1994) in their Fig. 3(a), where their calculated value, which is clearly wrong, lies closer to the upper Hashin–Hill bound value. Fig. 4 also shows experimental data as open circles from Tsai and Hahn (1980). The agreement of these with the exact solution is quite good, since it goes through the middle of the data cloud. The curves obtained by Aboudi (1991) and Luciano and Barbero (1994), not plotted here, show the same characteristics that were discussed for them in the Fig. 2.

In Fig. 5, the exact expression of  $\bar{\nu}_3/\nu_1$ , which decreases monotonically, is very similar to Luciano and Barbero's curve except near the percolation limit, which lies close to the upper bound up to  $V_2 = 0.5$ , where it deviates; it always lies between the bounds.

An independent check of the correctness of the calculated values using the exact formulae of this paper and tabulated values of Pobedrya (1984) was carried out. He derived formulae for the effective properties of a fiber-reinforced composite with only isotropic elastic constituents using the asymptotic homogenization method. For the ratio  $\mu_2/\mu_1 = 20$ , which is close to the value of 23.45 that corresponds to the materials used in the example of Figs. 2–6, the calculated normalized values here and in Pobedrya's table, have a relative error less than 0.5% except near the percolation value, where the error is larger: less than 3%. For the other values in the table, as a function of  $\mu_2/\mu_1$  and  $V_2$ , the relative error is less than 3% except near the percolation limit and the larger values of  $\mu_2/\mu_1$ . It must be mentioned that the rigid limit has to be taken carefully. Here explicit exact formulae are also given.

The plot of the dimensionless plane Poisson's ratio  $\bar{\nu}_t/\nu$  versus  $V_2$  in Fig. 6 shows that the exact solution lies in between the Hashi bounds, not being close to any of them. It differs from the one calculated by Luciano and Barbero, specially near the percolation limit, in their case, it never is smaller than one as it is the case here beyond approximately  $V_2 = 0.45$ . It is interesting to note two different regimes relative to the matrix value.

Except for the latter parameter, the other properties in Figs. 2–5 show a linear behavior for small values of  $V_2$  and then a rapid monotone one, this is consistent with the concept of a fibre-reinforced material, that

21

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

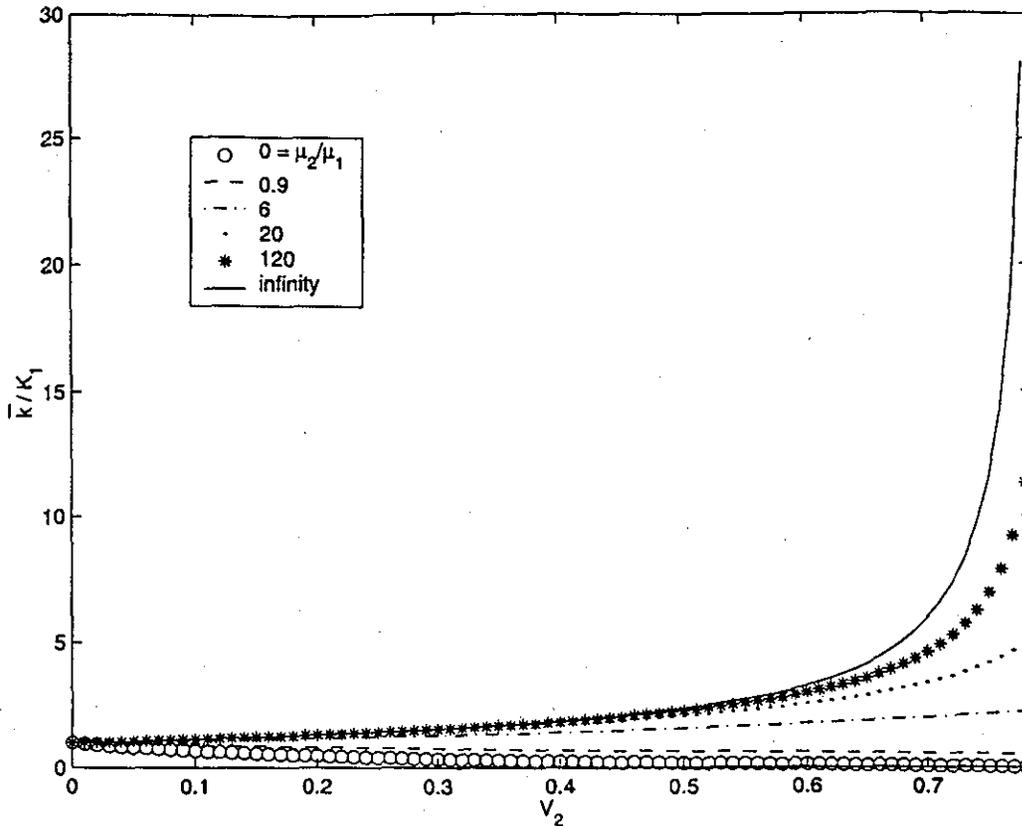


Fig. 7. Normalized overall plane bulk modulus  $\bar{k}/K_1$  versus fiber volume fraction  $V_2$  plot as a function of  $z = \mu_2/\mu_1$ . The shown curves are for  $z = 0$  (empty fibers as open circles), 0.9 (dash), 6 (dash-dot), 20 (dots), 120 (star) and  $\infty$  (rigid fibers as the continuous line).

219 is to say, the composite becomes stiffer as the (stiffer) fiber material increases, with the indicated behavior  
220 relative to  $V_2$ .

221 It is interesting to show the dependence of the overall stiffnesses plotted versus fiber volume fraction  $V_2$  as  
222 a function of the shear modulus ratio of the constituents materials  $z = \mu_2/\mu_1$ . Fig. 7 shows a plot of  $\bar{k}/K_1$ ,  
223 versus  $V_2$  for  $z = 0$  (empty fibers as open circles), 0.9 (dash), 6 (dash-dot), 20 (dot), 120 (star) and  $\infty$  (rigid  
224 fibers as the continuous line). There is no overlap between the curves which either increase (for  
225  $z = 6, 20, 120$  and  $\infty$ ) or decrease (for  $z = 0$  and 0.9) monotonically from the matrix value at zero fiber  
226 volume fraction to the percolation limit. The curves for  $\bar{p}/\mu_1$ ,  $\bar{m}/\mu_1$  and  $\bar{m}'/\mu_1$  have a similar behavior as in  
227 Fig. 7, although these are not shown here for brevity. As a function of  $z$  each curve shows a linear behavior  
228 for small values of  $V_2$  and then a rapid monotone change, either stiffer or weaker according to  $z > 1$  or  
229  $z < 1$ .

230 The exact solution for  $\bar{p}/\mu_1$  is plotted as the continuous line as a function of  $z = \mu_2/\mu_1$  in the range  
231 between 0 and 1 in Fig. 8; In the figure  $V_2 = \pi/4$  is the percolation limit. The upper (dash-dot) and lower  
232 (dot) bounds of Bruno (1991) are also shown. In the interval  $[0, 1]$ , Bruno's lower bound is quite close to the  
233 exact solution and, from about  $z = 0.5$  the three curves almost overlap in an almost linear fashion.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

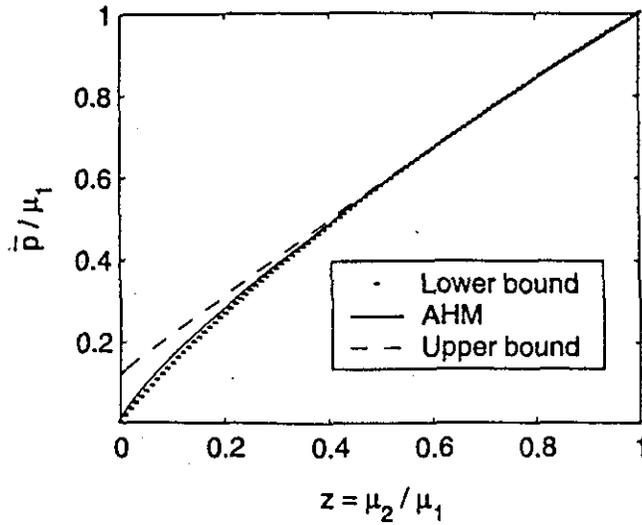


Fig. 8. Plot of normalized overall shear modulus  $\bar{\rho}/\mu_1$  against  $z = \mu_2/\mu_1$  from 0 to 1. The upper (dash-dot) and lower (dot) bounds of Bruno (1991) are also shown.

234 4.2. Empty fibers

235 The next two figures, Figs. 9 and 10 show plots against the volume fraction  $V_2$  of three normalized axial  
236 and transverse effective parameters, respectively. The continuous line corresponds to Young's moduli, the  
237 dotted line to shear modulus and the dash-dotted line to Poisson's ratio, in the same order, in Figs. 9 and

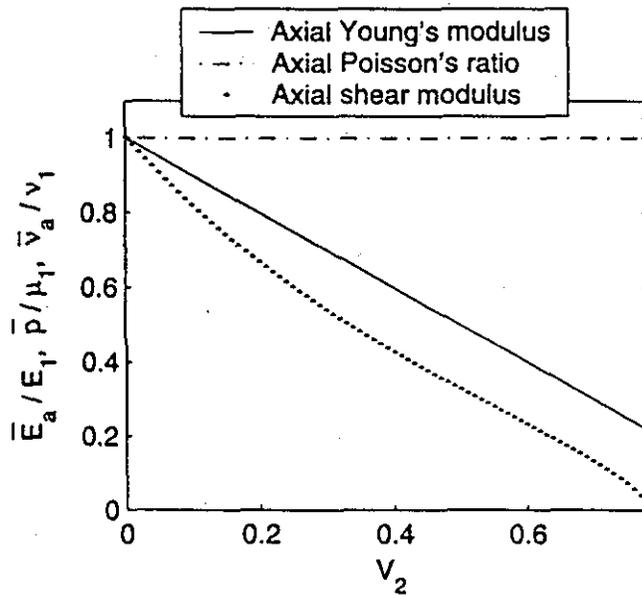


Fig. 9. Axial overall properties for empty fibers against fiber volume fraction  $V_2$ . Young's modulus  $\bar{E}_a/E_1$ , the continuous line; shear modulus  $\bar{\rho}_a/\mu_1$ , the dotted line; Poisson's ratio  $\bar{\nu}_a/\nu_1$ , the dash-dotted line.

23

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

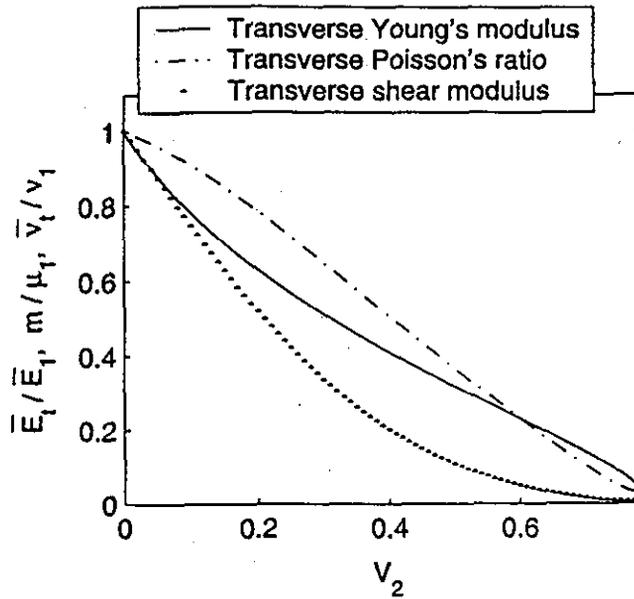


Fig. 10. Transverse effective properties for empty fibers versus fiber volume fraction  $V_2$ . Young's modulus  $\bar{E}_t/E_1$ , the continuous line; shear modulus  $\bar{m}/\mu_1$ , the dotted line; Poisson's ratio  $\bar{v}_t/v_1$ , the dash-dotted line.

238 10. The axial Poisson's ratio is constant in the whole interval. The other five parameters decrease mono-  
 239 tonically from the matrix value. The shear modulus decreases to a near zero value at the percolation limit.  
 240 The other three parameters decrease to a small value, however. It is worthwhile to note that the transverse  
 241 Poisson's ratio reaches a minimum value near the percolation value and this was not shown by Meguid and  
 242 Kalamkarov (1994) in their Fig. 5. In this weakened composite the moduli exhibit the diminishing effect of  
 243 lesser material.

#### 244 4.3. Rigid fibers

245 Fig. 11 displays two plots of dimensionless axial Young's modulus  $\bar{E}_a/E_1$  (continuous line) and Poisson's  
 246 ratio  $\bar{v}_t/v_1$  (dash-dotted line) against fiber volume fraction  $V_2$  for rigid fibers. The Young's modulus in-  
 247 creases monotonically from the matrix value; near the percolation limit, the increase is very rapid producing  
 248 a stiffer composite. On the other hand, Poisson's ratio decreases almost linearly from the matrix value to  
 249 nearly zero at  $V_2 = \pi/4$ .

#### 250 5. Concluding remarks

251 Exact closed-form formulae are given for a two-phase periodic fiber-reinforced composite, whose con-  
 252 stituents are elastic isotropic media. The composite periodicity is square, so that the overall properties are  
 253 tetragonal. Two limiting cases are considered as well, that of empty and rigid fibers for which new formulae  
 254 are also given. The formulae are amenable for relatively easy computation. The series involved converge

24

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

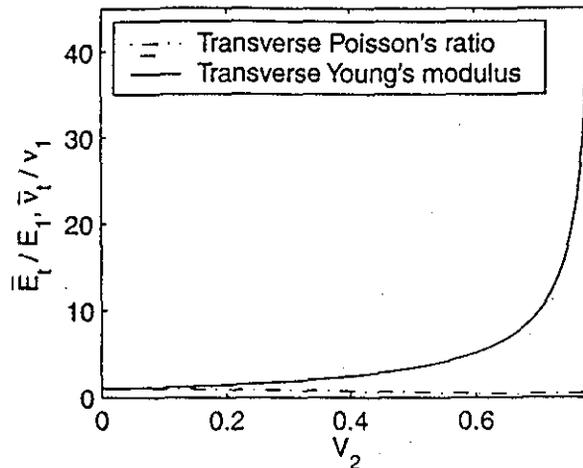


Fig. 11. Axial overall properties for rigid fibers against fiber volume fraction  $V_2$ . Young's modulus  $\bar{E}_t/E_1$ , the continuous line; Poisson's ratio  $\bar{\nu}_t/\nu_1$ , the dash-dotted line.

rather quickly. Not more than the second order of the infinite order vector and matrices are needed, because high powers of the radius of the circle  $R \leq 0.5$  are present.

The results presented include comparisons with known bounds: Hashin and Hill's for transversely isotropic composite and Bruno (1991) for dielectric material composite. In a large number of cases, the exact solution is very close to the bound in a certain interval of the fiber volume fraction  $V_2$  or in the ratio of fiber to matrix parameters. This kind of information may be useful where the use of the simple expression given by the bound can yield easily amenable results in a certain problem. For instance, see Talbot (1999), where Bruno's bounds can produce improved bounds for a nonlinear composite.

Some of the results presented here are corrections to the ones given in Meguid and Kalamkarov (1994). A misprint in their formulae is found. It says " $G_M/G_F$ " where it ought to say " $G_F/G_M$ " in their Eq. (35). A full check of their equations was not done. Incidentally, the same "misprint" appears in the book of Parton and Kudryavtsev (1993) in their Eq. (9.21), etc. and possible others, which were left unchecked, because it is beyond the scope of this paper.

The comparison of the exact solution with experimental data is also very good, even better than the curves produced using other methods (Aboudi, 1991; Luciano and Bisegna, 1994). These two methods produce curves which generally lie below the one for the exact solution, and lie close to the lower edge of the set of experimental data.

## Acknowledgements

This work was sponsored by CoNaCyT Project Numbers 32237-E, 27520-A, DGAPA-UNAM under grant IN 114999 and Project High Education Ministry of Cuba no. 03.50, 1999. One of the authors (FJS) would like to thank the John Simon Guggenheim Memorial Foundation for the award of one of its Fellowships. Thanks are due to Miss Ana Pérez Arteaga for computing support. The authors are also grateful to David R.S. Talbot for useful discussions and suggestions.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

278 Appendix A

279 Definition of parameters that appear in some equations of Appendix B and in Eqs. (3.1) and (3.2)

$$\begin{aligned}
 A_i &= (\kappa_1 \chi_\mu - \kappa_2) B_i / (\kappa_2 + \chi_\mu), \\
 B_i &= (1 - \chi_\mu) / (1 + \kappa_1 \chi_\mu), \\
 C_i &= [(\kappa_1 - 1) \chi_\mu - (\kappa_2 - 1)] B_i / F_i, \\
 D_i &= (\kappa_2 - 1) B_i / 2 F_i, \\
 E_i &= B_i / (1 - \chi_\mu), \\
 F_i &= V_1 \chi_\mu + (\kappa_2 - 1) G_i, \\
 G_i &= 1/2 + V_2 / (\kappa_1 - 1), \\
 \chi_\mu &= \mu_2 / \mu_1 \\
 \kappa_j &= (K_j + \frac{2}{3} \mu_j) / (K_j + \frac{1}{3} \mu_j), \quad j = 1, 2, \\
 \chi &= \|\mu\| / (\mu_1 + \mu_2).
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

Appendix B

282 The infinite order vectors and matrices of Eq. (3.2) are given as follows. Here  $t, s = 1, 2, 3, \dots$ . The vector  
 283  $\mathcal{V}_p(v_s)$ , matrix  $\mathcal{M}_p(m_{ts})$  and vector  $\tilde{\mathcal{V}}_p(\tilde{v}_t)$ , have components given by

$$\begin{aligned}
 v_s &= R^{8s} \eta_{14s-1}, \\
 m_{ts} &= \delta_{4t-14s-1} - \chi^2 R^{8s} \sum_{i=1}^{\infty} R^{8i} \eta_{4t-14i+1} \eta_{4i+14s-1}, \\
 \tilde{v}_t &= \eta_{4t-11},
 \end{aligned}
 \tag{B.1}$$

285 where  $\delta_{ts}$  is Kronecker's delta; it is equal to one, if  $t = s$  and zero otherwise. For a definition of  $\chi$  and the  
 286 parameters below  $A_i, B_i, C_i$ , see Appendix A.

287 Similarly, for  $\mathcal{V}_m(v_s^+)$ ,  $\mathcal{M}_m(m_{ts}^+)$ ,  $\tilde{\mathcal{V}}_m(\tilde{v}_t^+)$  and  $\mathcal{V}_m(v_s^-)$ ,  $\mathcal{M}_m(m_{ts}^-)$ ,  $\tilde{\mathcal{V}}_m(\tilde{v}_t^-)$ , the components are defined as  
 288 follows

$$\begin{aligned}
 v_s^\pm &= R^{8s+4} (\pm A_i r_{14s+1} + B_i g_{14s+1}), \\
 m_{ts}^\pm &= \delta_{4t+14s+1} + R^{8s+2} (A_i r_{4t+14s+1} \pm B_i g_{4t+14s+1}), \\
 \tilde{v}_t^\pm &= \pm A_i r_{4t+11} + B_i g_{4t+11},
 \end{aligned}
 \tag{B.2}$$

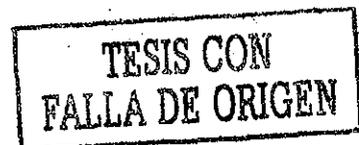
290 the matrix  $\mathcal{M}_k(m_{ts})$  has components defined next

$$m_{ts} = \delta_{4t-14s-1} + R^{8s-2} (A_i r_{4t-14s-1} + B_i g_{4t-14s-1} + C_i R^2 \eta_{4t-11} \eta_{14s-1}),
 \tag{B.3}$$

292 Finally,

$$H_i^\pm = A_i r_{11} + B_i [\pi (\kappa_1 \pm 5S_4 / \pi^2) \pm g_{11}].
 \tag{B.4}$$

294 The above formulae involve certain convergent series related to the doubly periodic elliptic functions of  
 295 periods  $\omega_1 = 1$  and  $\omega_2 = i$  defined below



$$\begin{aligned}
 S_{k+l} &= \sum'_{m,n} \beta_{mn}^{-k-l} && \text{for } k+l \geq 2, \\
 T_{k+l} &= \sum'_{m,n} \bar{\beta}_{mn} \beta_{mn}^{-k-l-1} && \text{for } k+l \geq 3, \\
 \eta_{kl} &= -C_{k+l-1}^l S_{k+l}, \\
 \eta'_{kl} &= C_{k+l}^l T_{k+l},
 \end{aligned} \tag{B.5}$$

297 where  $\beta_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , the prime on the sigma symbol denotes that the double sum-  
 298 mation excludes the term  $m = n = 0$  and  $C_k^l = k! / l!(k-l)!$ . Also,

$$\begin{aligned}
 r_{kl} &= \sum_{i=3}^{\infty} {}^o R^2 \eta_{ki} \eta_{il}, \\
 g_{kl} &= k \left( \frac{k+l+2}{l+1} R^2 \eta_{k+2l} + \eta'_{kl} \right),
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

300 for  $k, l = 1, 3, 5, \dots$ . The superindex  $o$  on the sigma symbol means that the summation is carried only over  
 301 odd indices. The double series  $\sum_{k,l} g_{kl}$  and  $\sum_{k,l} r_{kl}$  are absolutely convergent. The above series converge  
 302 very quickly.

## 03 References

- 04 Aboudi, J., 1991. Mechanics of Composite Materials. A Unified Micromechanical Approach. Elsevier, Amsterdam.  
 05 Avellaneda, M., Swart, P.J., 1998. Calculating the performance of 1–3 piezoelectric composites for hydrophone applications: an  
 06 effective medium approach. *J. Acoust. Soc. Am.* 103, 1449–1467.  
 07 Bensoussan, A., Lions, J.L., Papanicolaou, G., 1978. Asymptotic Analysis for Periodic Structures. North-Holland, Amsterdam.  
 08 Bakhvalov, N.S., Panasenko, G.P., 1989. Homogenization Averaging Processes in Periodic Media. Kluwer, Dordrecht.  
 09 Bruno, O., 1991. The effective conductivity of strongly heterogeneous composites. *Proc. R. Soc. Lond. A* 443, 353–381.  
 10 Christensen, R.M., 1991. Mechanics of Composite Materials. Krieger, Malabar, FL.  
 11 Hashin, Z., 1965. On elastic behaviour of fibre reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry. *J. Mech. Phys. Solids* 13,  
 12 119–134.  
 13 Hill, R., 1964. Theory of mechanical properties of fiber-strengthened materials: I. elastic behaviour. *J. Mech. Phys. Solids* 12, 199–212.  
 14 Iwakuma, T., Nemat-Nasser, S., 1983. Composites with periodic microstructure. *Int. J. Solids Struct.* 16, 13–19.  
 15 Kalamkarov, A.L., Kolpakov, A.G., 1997. Analysis, Design and Optimization of Composite Structures. Wiley, Chichester, UK.  
 16 Lions, J., 1981. Some Methods in the Mathematical Analysis. Analysis of Systems and their Control. Gordon and Breach, New York.  
 17 Luciano, R., Barbero, E.J., 1994. Formulas for the stiffness of composites with periodic microstructure. *Int. J. Solids Struct.* 31, 2933–  
 18 2944.  
 19 Meguid, S.A., Kalamkarov, A.L., 1994. Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure. *Int. J.*  
 20 *Solids Struct.* 31, 303–316.  
 21 Nemat-Nasser, S., Hori, M., 1999. Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials. North-Holland, Amsterdam.  
 22 Oleinik, O.A., Shamaev, A.S., Yosifian, G.A., 1992. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization. North-Holland,  
 23 Amsterdam.  
 24 Parton, V.Z., Kudryavtsev, B.A., 1993. Engineering Mechanics of Composite Structures. CRC Press, Boca Raton.  
 25 Pobedrya, B.E., 1984. Mechanics of Composite Materials. Moscow State University Press, Moscow (in Russian).  
 26 Rodríguez-Ramos, R., Sabina, F.J., Guinovart-Díaz, R., Bravo-Castillero, J., 2001. Closed-form expressions for the effective  
 27 coefficients of a fiber-reinforced composite with transversely isotropic constituents-I. Elastic and square symmetry. *Mech. Mat.*, in  
 28 press.  
 29 Sánchez-Palencia, E., 1980. Non homogeneous media and vibration theory. *Lecture Notes in Physics*, vol. 127, Springer, Berlin.  
 30 Talbot, D.R.S., 1999. Bounds which incorporate morphological information for a non linear composite dielectric. *Proc. Roy. Soc.*  
 1 *Lond. A* 455, 3617–3628.  
 2 Tsai, S.W., Hahn, H.T., 1980. Introduction to Composite Materials. Technomic, Westport.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN