22

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONTINUOS NO METRICOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

HERRERA ALVA JUAN GABRIEL

DIRECTOR DE TESIS: DR. ALEJANDRO ILLANES MEJIA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2002

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Continuos no métricos"

realizado por Herrera Alva Juan Gabriel

con número de cuenta 8920453-1 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Alejandro Illanes Mejía	
Propietario	Dr. Angel Tamariz Mascarúa	
Propietario	Dra. Isabel Puga Espinosa	
Suplente	Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco	
Suplente	M. en C. Verónica Martínez de la Vega y Mansilla	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

Continuos no métricos

Juan Gabriel Herrera Alva

Abril - 2002

Índice General

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mí madre.
Por todo tu apoyo, gracias.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Alejandro Illanes el haberme permitido trabajar con él en la elaboración de esta tesis. Agradezco a mis sinodales por sus valiosas sugerencias en el mejoramiento de este trabajo, en especial a Oscar Palmas. También quiero dar las gracias a los chicos del cubículo de becarios por las facilidades que siempre me otorgaron en el uso de las computadoras y la impresión; en especial a Miriam y Carlos Islas. Por último, agradezco a Rocío (Pilar) por haber hecho la mayoría de los dibujos de este trabajo.

Introducción

En el presente trabajo se asume que el lector tiene conocimientos de Análisis Matemático I y Topología I.

Las propiedades topológicas más importantes son la compacidad y la conexidad. No sólo en topología sino en otras ramas de las matemáticas como el Análisis Matemático y la Variable Compleja, los conjuntos que tienen estas dos propiedades juegan un papel relevante. Recordemos a manera de ejemplo el comportamiento que tienen las funciones continuas en los conjuntos compactos y métricos (alcanzan su máximo y su mínimo, son uniformemente continuas) o recordemos las regiones donde las integrales de las funciones complejas tienen un buen comportamiento.

Cuando esta clase de espacios son también metrizables, es decir, que la topología dada en ellos resulta ser inducida por una métrica, reciben el nombre especial de "continuos métricos" o simplemente "continuos". Algunas de las propiedades más importantes de esta clase de espacios son las siguientes:

Por ser metrizables, los continuos satisfacen todos los axiomas de separación, son regulares (separan puntos de cerrados), son normales (separan cerrados de cerrados), y en consecuencia, son completamente regulares (es decir, son espacios de Tychonoff). Por otra parte, recordemos que un espacio topológico es completamente normal si todo subespacio de éste es normal; también recordemos que un espacio es perfectamente normal si es normal y todos los conjuntos cerrados inducidos por la métrica son conjuntos G_δ. Es bien sabido que todo espacio métrico es perfectamente normal. Como la propiedad de ser un espacio perfectamente normal implica la de ser completamente normal, entonces todo espacio métrico también es completamente normal.

Por otro lado, si combinamos la propiedad de ser metrizable y la compacidad, tenemos propiedades muy fuertes, por ejemplo, éstos satisfacen el segundo axioma de numerabilidad, es decir, tienen una base numerable, y por consiguiente, también son separables, Lindelof y satisfacen el primer axioma de numerabilidad, entre otras.

Por último, la aportación de la conexidad a estos espacios, nos da como propiedad principal que todo continuo localmente conexo es arco conexo.

Cuando un espacio cumple ser de Hausdorff, compacto y conexo, pero no metrizable, éste recibe el nombre especial de "continuo no métrico". Lógicamente, estos espacios pierden un buen número de propiedades que ya se tenían por la metrización. En el presente trabajo hacemos un estudio de las propiedades más importantes de seis continuos no métricos que ilustran propiedades esenciales que se pierden por la ausencia de una métrica. Como primer ejemplo presentamos el cuadrado lexicográfico. el cual da un buen ejemplo de un espacio de Hausdorff. compacto, conexo y localmente conexo que falla en ser separable y arco conexo.

El segundo ejemplo es la línea larga y su extensión, las cuales denotamos por L y L^*, respectivamente. La línea larga en sí no es un continuo, pues no es un espacio compacto, pero su extensión sí lo es.

La línea larga es construida a partir del espacio ordinal $[0, w_1]$, (donde w_1 es el primer ordinal no numerable), y agregando una copia del intervalo de números reales $(0, 1)$ entre cada ordinal y su sucesor. En el capítulo cuatro hacemos la construcción formal de $[0, w_1]$, así como también de la línea larga y su extensión.

Al igual que el cuadrado lexicográfico, la línea larga extendida es un continuo no métrico que no es separable y que satisface ser localmente conexa pero no arco conexa, pues no es conexa por trayectorias.

El tercer ejemplo es el producto cartesiano $L^* \times L^*$. Aquí sólo demostramos que este espacio es un continuo que no es completamente normal. Esto se hace aprovechando las propiedades de la línea larga.

El cuarto ejemplo es el cuadrado de Alexandroff. Aquí demostramos que este espacio es un continuo que al igual que el producto cartesiano $L^* \times L^*$ no es completamente normal.

El quinto ejemplo es el producto cartesiano I^I. Éste ilustra que el producto cartesiano no numerable de un espacio topológico metrizable no es necesariamente un espacio metrizable. La demostración principal en este ejemplo es que I^I no es completamente normal. Por último, en el sexto ejemplo estudiamos un subespacio de I^I (el subconjunto de todas las funciones crecientes con su topología usual). Este espacio se conoce con el nombre de espacio de Helly, y resulta interesante ver que es separable.

Una característica común en los seis ejemplos desarrollados en este trabajo es que ninguno satisface ser perfectamente normal. Obviamente esta es una de las razones por la cual ninguno de estos espacios puede ser metrizable.

Para el estudio del cuadrado lexicográfico, la línea larga y su extensión, desarrollamos una parte fundamental de los espacios topológicos ordenados, pues tanto el cuadrado lexicográfico como la línea larga y su extensión lo son. Gran parte de este desarrollo es analizada desde el punto de vista de la convexidad; es por eso que en el primer capítulo de esta tesis definimos y demostramos algunas propiedades que tienen que ver con este concepto.

Parte I

Topología del Orden

Capítulo 1

Conjuntos ordenados

1.1 Definiciones y ejemplos

En este capítulo definiremos que es un orden parcial y un orden total, también daremos algunos ejemplos de conjuntos ordenados; posteriormente definiremos el concepto de convexidad y demostraremos algunos teoremas importantes sobre este concepto. Todo esto servirá para el estudio de la topología del orden que se define y se desarrolla en el siguiente capítulo.

De forma intuitiva, un *orden* es una relación entre los elementos de un conjunto que nos permite decidir si un elemento precede o antecede a otro.

Definiremos básicamente dos tipos de *orden*: un *orden parcial* y un *orden total*.

Definición 1.1 *Una relación $\preceq$ en un conjunto no vacío X es un* ***orden parcial*** *si la relación $\preceq$ satisface lo siguiente:*

i) Para cada $x \in X$, $x \preceq x$ (reflexividad);

ii) Si $x \preceq y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$ (transitividad);

iii) Si $x \preceq y$ y $y \preceq x$, entonces $x = y$ (antisimetría).

Al par $(X, \preceq)$ le llamaremos ***conjunto parcialmente ordenado.***

Definición 1.2 *Sea $(X, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado tal que para cualesquiera $x, y \in X$, $x \preceq y$ o $y \preceq x$, en tal caso diremos que $(X, \preceq)$ está* ***totalmente ordenado****. Algunos autores llaman a $\preceq$ un* ***orden lineal.***

Definición 1.3 *Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \preceq)$ tiene asociado un* ***orden estricto*** *dado por $x \prec y$ si y sólo si $x \preceq y$ y $x \neq y$.*

A continuación daremos algunos ejemplos de espacios ordenados:

1) Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea $\leq$ la relación de menor o igual en la recta real $\mathbb{R}$. Entonces, $(\mathbb{R}, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

2) Sea $2^{\mathbb{R}}$ el conjunto potencia de los números reales y sea $\preceq$ la inclusión de conjuntos; entonces, $(2^{\mathbb{R}}, \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado. Notemos que $(2^{\mathbb{R}}, \subseteq)$ no es un orden total, ya que existen elementos que no se relacionan entre sí, a saber, cualquier par de conjuntos no vacíos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$.

3) Sea $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y sean a, b, c y $d \in \mathbb{R}$. Definimos la relación de orden $\preceq$ entre los elementos de $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera:

Diremos que $\langle a, b\rangle \preceq \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a^2+b^2 < c^2+d^2$ ó $(a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $a < c)$ ó $(a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $a = c$ y $b \leq d)$.

Veamos que el orden que definimos en $\mathbb{R}^2$ es un orden total.

i) Reflexividad. Sea $\langle a, b\rangle \in \mathbb{R}^2$. Como $a^2 + b^2 = a^2 + b^2$ y $a = a$ y $b \leq b$, entonces $\langle a, b\rangle \preceq \langle a, b\rangle$.

ii) Transitividad. Sean a, b, c, d, e y $f \in \mathbb{R}$ tales que $\langle a, b\rangle \preceq \langle c, d\rangle$ y $\langle c, d\rangle \preceq \langle e, f\rangle$. Entonces, tenemos los siguientes seis casos:

Caso 1.

$a^2 + b^2 < c^2 + d^2$ y $c^2 + d^2 < e^2 + f^2$. Entonces $a^2 + b^2 < e^2 + f^2$. Así, $\langle a, b\rangle \preceq \langle e, f\rangle$.

Caso 2.

$a^2+b^2 < c^2+d^2$ y $(c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ y $c < e)$ ó $(c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ y $c = e$ y $d \leq f)$. Entonces, $a^2 + b^2 < e^2 + f^2$. Así, $\langle a, b\rangle \preceq \langle e, f\rangle$.

Caso 3.

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $[a < c$ ó $(a = c$ y $b \leq d)]$ y $c^2 + d^2 < e^2 + f^2$. Entonces, $a^2 + b^2 < e^2 + f^2$. Así, $\langle a, b\rangle \preceq \langle e, f\rangle$.

Caso 4.

$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $a < c$ y $c^2 + d^2 = e^2 + f^2$ y $c \leq e$. Entonces, $a^2 + b^2 = e^2 + f^2$ y $a < e$. Así, $\langle a, b\rangle \preceq \langle e, f\rangle$.

Caso 5.

Si $a^2+b^2=c^2+d^2$ y $a=c$ y $b\leq d$ y $c^2+d^2=e^2+f^2$ y $c<e$. Entonces, $a^2+b^2=e^2+f^2$ y $a=c<e$. Así, $\langle a,b\rangle \preceq \langle e,f\rangle$.

Caso 6.

$a^2+b^2=c^2+d^2$ y $a=c$ y $b\leq d$ y $c^2+d^2=e^2+f^2$ y $c=e$ y $d\leq f$. Entonces, $a^2+b^2=e^2+f^2$ y $a=c=e$ y $b\leq d\leq f$. Así, $\langle a,b\rangle \preceq \langle e,f\rangle$.

Por consiguiente, el orden definido en $\mathbb{R}^2$ es transitivo.

iii) Antisimetría. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ tales que $\langle a,b\rangle \preceq \langle c,d\rangle$ y $\langle c,d\rangle \preceq \langle a,b\rangle$. Bajo estas condiciones el único caso posible es $a^2+b^2=c^2+d^2$ y $a=c$ y $b\leq d$ y $c^2+d^2=a^2+b^2$ y $c=a$ y $d\leq b$. Entonces, $a=c$ y $b\leq d$ y $d\leq b$, por lo cual $b=d$. Así, $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$.

iv) Claramente cualquier par de elementos de $\mathbb{R}^2$ se relacionan entre sí.

Por tanto, el orden definido en $\mathbb{R}^2$ es un orden total.

4) *Orden lexicográfico.*

Sea $X=Z\times Y$, donde Z y Y son espacios totalmente ordenados y no vacíos. Definimos el **orden lexicográfico** en X de la siguiente manera:

Sean $\langle a,b\rangle$ y $\langle c,d\rangle$ puntos de X, decimos que $\langle a,b\rangle \preceq \langle c,d\rangle$ si y sólo si $a<c$ ó $a=c$ y $b\leq d$.

Veamos que el orden lexicográfico en X es un orden total.

i) Reflexividad. Sea $\langle a,b\rangle\in X$. Como $b\in Y$, entonces $b\leq b$, pues Y es un espacio totalmente ordenado. Así, $\langle a,b\rangle \preceq \langle a,b\rangle$. Por tanto, el orden lexicográfico es reflexivo.

ii) Transitividad. Sean $a,c,e\in Z$ y $b,d,f\in Y$ tales que $\langle a,b\rangle \preceq \langle c,d\rangle$ y $\langle c,d\rangle \preceq \langle e,f\rangle$. Entonces, tenemos los tres casos siguientes:

Caso 1. $a<c$ y $c\leq e$. Entonces, $a<e$. Por tanto $\langle a,b\rangle \preceq \langle e,f\rangle$.

Caso 2. $a=c$ y $c<e$. Entonces, $a<e$. Por tanto $\langle a,b\rangle \preceq \langle e,f\rangle$.

Caso 3. $a=c$ y $c=e$. Entonces, $a=e$ y $b\leq f$. Así, $\langle a,b\rangle \preceq \langle e,f\rangle$.

Por consiguiente, el orden lexicográfico es transitivo.

iii) Antisimetría. Sean $a,c\in Z$ y $b,d\in Y$ tales que $\langle a,b\rangle \preceq \langle c,d\rangle$ y $\langle c,d\rangle \preceq \langle a,b\rangle$. Entonces, por definición del orden lexicográfico, $a=c$ y $b=d$. Por tanto $\langle a,b\rangle=\langle c,d\rangle$.

Así, el orden lexicográfico es antisimétrico.

Por otra parte, observemos que todos los elementos en X pueden ser comparados entre sí, pues cada punto en X está formado por una pareja de elementos pertenecientes a espacios totalmente ordenados. Por tanto, el orden lexicográfico es un orden total.

1.2 Convexidad en conjuntos ordenados

Definición 1.4 *Sean X un conjunto parcialmente ordenado y $S \subset X$ un subconjunto no vacío de X. S es* ***convexo*** *si para cualesquiera $a, b \in S$ con $a < b$, los puntos que están entre a y b pertenecen a S; es decir, si $a, b \in S$ y $a < t < b$, entonces $t \in S$.*

Definición 1.5 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y no vacío, un* ***intervalo abierto*** *con extremos a y b es el conjunto denotado por (a, b) y definido como $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. Similarmente, un* ***intervalo cerrado*** *es el conjunto denotado por $[a, b]$ y definido como $[a, b] = \{x \in X : a \leq x \leq b\}$.*

Teorema 1.6 *Sean X un conjunto totalmente ordenado y no vacío; y $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos convexos con intersección no vacía, entonces $\bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es convexa.*

Demostración. Sean $p, q \in \bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ tales que $p < q$, veremos que el intervalo (p, q) está completamente contenido en $\bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Supongamos que $p \in C_{\alpha_0}$ para algún $\alpha_0 \in \Lambda$ y $q \in C_{\alpha_1}$ para algún $\alpha_1 \in \Lambda$. Como $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \neq \emptyset$, entonces existe $r \in C_{\alpha_0} \cap C_{\alpha_1}$ y tenemos los tres casos siguientes:

Caso 1. $q \leq r$. Entonces, como $p, r \in C_{\alpha_0}$ y por ser C_{α_0} convexo, $[p, r] \subset C_{\alpha_0}$. Pero $(p, q) \subset (p, r) \subset C_{\alpha_0}$. Así que $(p, q) \subset \bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Caso 2. $p < r < q$. Entonces, como $p, r \in C_{\alpha_0}$ y $r, q \in C_{\alpha_1}$, tenemos que $[p, r] \cup [r, q] \subset C_{\alpha_0} \cup C_{\alpha_1}$, es decir, $[p, q] \subset C_{\alpha_0} \cup C_{\alpha_1}$. Así, $(p, q) \subset \bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Caso 3. $r \leq p$. Entonces, como $r, q \in C_{\alpha_1}$ y por ser C_{α_1} convexo $[r, q] \subset C_{\alpha_1}$. De manera que $(p, q) \subset (r, q) \subset C_{\alpha_1}$. Así, $(p, q) \subset \bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Por tanto $\bigcup\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es convexa. ■

Teorema 1.7 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y no vacío; y sea $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos convexos con intersección no vacía, entonces $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es convexa.*

Demostración. Si $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\} = \{p\}$, entonces $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es convexa. En otro caso, sean $p, q \in X$ tales que $p < q$ y $p, q \in \bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Entonces, para cada $\alpha \in \Lambda$, $p, q \in C_\alpha$, y como C_α es convexo, el intervalo $(p,q) \subset C_\alpha$ para toda $\alpha \in \Lambda$. De manera que $(p,q) \subset \bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Por tanto, $\bigcap\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es convexa. ■

Lema 1.8 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y sea $S \subset X$ un subconjunto no vacío y convexo de X. Si $a, b \in X$ son tales que $a, b \notin S$ y $[a,b] \cap S \neq \emptyset$, entonces $S \subset [a,b]$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $S \not\subseteq [a,b]$. Sea $x \in S$ tal que $x \notin [a,b]$. Esto implica que $x < a$ ó $b < x$. Ahora elijamos un punto $y \in [a,b] \cap S$, y consideremos dos casos:

Caso 1.

$x < a$. Como $a \leq y$ y por ser S convexo, tenemos que $a \in S$, lo cual es una contradicción.

Caso 2.

$b < x$. Como $y \leq b$ nuevamente por la convexidad de S, $b \in S$, lo cual vuelve a contradecir nuestra hipótesis.

Por tanto, $S \subset [a,b]$. ■

Definición 1.9 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y sea $S \subset X$ un subconjunto no vacío de X. Definimos* ***la componente convexa*** *de $p \in S$ (o* ***conjunto convexo maximal*** *de p en S) denotado por C_p como la unión de todos los conjuntos convexos de X contenidos en S que contienen a p.*

Teorema 1.10 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y sea $S \subset X$ un subconjunto no vacío de X. Si $p, q \in S$ son tales que $C_q \cap C_p \neq \emptyset$, entonces $C_q = C_p$.*

Demostración. Como $C_p \cap C_q \neq \emptyset$, entonces por el Teorema 1.6, $C_p \cup C_q$ es también convexo, además $C_p \cup C_q$ contiene tanto a p como a q, así que $C_p \cup C_q \subset C_p$, y $C_p \cup C_q \subset C_q$. De aquí que $C_p = C_p \cup C_q = C_q$. ■

Observemos que en un conjunto totalmente ordenado cualquier subconjunto no vacío puede ser expresado de manera única como unión de componentes convexas. Precisamente, tenemos:

Teorema 1.11 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y sea $S \subset X$ un subconjunto no vacío de X, para cada $p \in S$, sea C_p la componente convexa de p en S. Entonces, $S = \bigcup\{C_p : p \in S\}$.*

Demostración. Por definición $C_p \subset S$, para todo $p \in S$. Entonces, $\bigcup\{C_p : p \in S\} \subset S$.

Sea $p \in S$. Como $\{p\}$ es convexo, entonces $\{p\} \subset C_p \subset \bigcup\{C_q : q \in S\}$.

Por tanto $S = \bigcup\{C_p : p \in S\}$. ■

Capítulo 2

Espacios topológicos ordenados

2.1 Topología del orden

En este capítulo definiremos la topología del orden y desarrollaremos una parte fundamental de los espacios topológicos ordenados. Esto con el único fin de estudiar posteriormente (capítulo 3 y 4) las propiedades más importantes de dos continuos no métricos (el cuadrado lexicográfico y la línea larga extendida) los cuales llevan la topología del orden.

Antes de entrar en el estudio de la topología del orden haremos algunas convenciones en notación.

Sea X un espacio completamente ordenado y no vacío. Con una flecha indicando hacia la derecha denotaremos a los elementos en X que sean mayores que un determinado punto $y \in X$, por ejemplo: el intervalo $(y, \rightarrow)$ representará a todos los elementos del espacio que sean mayores que y. Es decir, $(y, \rightarrow) = \{x \in X : y < x\}$.

Análogamente representaremos a los elementos en X que sean menores que un determinado punto y con una flecha indicando hacia la izquierda. Es decir, $(\leftarrow, y) = \{x \in X : x < y\}$.

Por otra parte, denotaremos la cardinalidad de un conjunto no vacío $A \subset X$ como $|A|$. Diremos que un conjunto A es *finito* si $|A| < \aleph_0$, *a lo más numerable* si $|A| \leq \aleph_0$ y *no numerable* si $|A| > \aleph_0$.

Teorema 2.1 *Sea X un conjunto totalmente ordenado y no vacío. Entonces, el conjunto $\beta = \{(y, \rightarrow) : y \in X\} \cup \{(\leftarrow, z) : z \in X\} \cup \{(y, z) : y, z \in X\} \cup \{X\}$ sirve de base para una topología τ en X.*

Demostración. Notemos que la unión de elementos de β es X.

Ahora es suficiente demostrar que si B_1 y $B_2 \in \beta$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \beta$. Para hacer esto consideraremos seis casos.

Caso 1.

$B_1 = (y, \rightarrow)$ y $B_2 = (x, \rightarrow)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (\max\{y, x\}, \rightarrow) \in \beta$.

Caso 2.

$B_1 = (\leftarrow, z)$ y $B_2 = (\leftarrow, y)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (\leftarrow, \min\{z, y\}) \in \beta$.

Caso 3.

$B_1 = (x, y)$ y $B_2 = (z, w)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (\max\{x, z\}, \min\{y, w\}) \in \beta$.

Caso 4.

$B_1 = (y, \rightarrow)$ y $B_2 = (\leftarrow, z)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (y, z) \in \beta$.

Caso 5.

$B_1 = (y, \rightarrow)$ y $B_2 = (x, z)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (\max\{y, x\}, z) \in \beta$.

Caso 6.

$B_1 = (\leftarrow, z)$ y $B_2 = (x, z)$. Entonces, $B_1 \cap B_2 = (x, \min\{y, z\}) \in \beta$.

Por tanto β sirve de base para una topología τ en X. A los elementos de β les llamaremos básicos canónicos. ■

Definición 2.2 *La topología inducida por β en el Teorema 2.1 es la* ***topología del orden****. Un conjunto totalmente ordenado será un* ***espacio topológico ordenado****, cuando lo consideremos con esta topología.*

Definición 2.3 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío; y sean $x, y \in X$. x y y son* ***puntos consecutivos*** *si $(x, y) = \emptyset$.*

Teorema 2.4 *Todo espacio topológico ordenado y no vacío X es de Hausdorff (T_2).*

Demostración. Sean $x, y \in X$ tales que $x < y$. Consideraremos dos casos:

Caso 1.

$(x, y) = \emptyset$. Entonces, los básicos $(\leftarrow, y)$ y $(x, \rightarrow)$ contienen a x y y, respectivamente y $(\leftarrow, y) \cap (x, \rightarrow) = \emptyset$.

Caso 2.

$(x, y) \neq \emptyset$. Entonces, existe $z \in X$ tal que $z \in (x, y)$. De manera que $(\leftarrow, z)$ y $(z, \rightarrow)$ contienen a x y y, respectivamente y $(\leftarrow, z) \cap (z, \rightarrow) = \emptyset$.

Por tanto X es un espacio de Hausdorff. ■

Recordemos que un par de conjuntos ajenos y no vacíos A, B son separados si $A \cap cl(B) = \emptyset$ y $B \cap cl(A) = \emptyset$. Así, tenemos la siguiente definición:

Definición 2.5 *Sea X un espacio topológico no vacío. X es* ***completamente normal*** *si para cualesquiera dos conjuntos no vacíos y separados A y B en X existen dos conjuntos abiertos y ajenos que contienen a A y B, respectivamente. En particular, si X es además un espacio topológico T_1, entonces diremos que X es* $\mathbf{T_5}$.

Lema 2.6 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío; y sean A y B subconjuntos separados y no vacíos de X. Si A^* es definido como:*

$$A^* = \bigcup \{[a,b] : a, b \in A \ y \ [a,b] \cap cl(B) = \emptyset\},$$

y B^* como:

$$B^* = \bigcup \{[a,b] : a, b \in B \ y \ [a,b] \cap cl(A) = \emptyset\}.$$

Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:

i) $A \subset A^*$ *y* $B \subset B^*$;

ii) $A^* \cap B^* = \emptyset$;

iii) $cl(A^*) = A^* \cup cl(A)$;

iv) A^* *y* B^* *son conjuntos separados.*

Demostración. *i*). Dado $p \in A$, sabemos que $p \notin cl(B)$. Así que, $[p,p] \cap cl(B) = \emptyset$. Esto muestra que $p \in A^*$.

De manera análoga se muestra que $B \subset B^*$.

ii). Supongamos por el contrario que existe $p \in A^* \cap B^*$. Entonces existen $a, b \in A$, y $c, d \in B$ tales que $p \in [a,b] \cap [c,d]$ con $[a,b] \cap cl(B) = \emptyset$ y $[c,d] \cap cl(A) = \emptyset$. En el caso en que $c \leq a$, tenemos que $c \leq a \leq p \leq d$. Así, $a \in [c,d] \cap cl(A)$, lo cual es absurdo.

En el caso en que $a \leq c$, tenemos que $a \leq c \leq p \leq b$. Esto implica que $c \in [a,b] \cap cl(B)$, lo que también es una contradicción.

Por tanto $A^* \cap B^* = \emptyset$.

iii). Por inciso (*i*), sabemos que $A \subset A^*$, de manera que $cl(A) \subset cl(A^*)$. Por tanto $A^* \cup cl(A) \subset cl(A^*)$.

Para demostrar la otra contención, tomemos un elemento $p \in X$ tal que $p \notin A^* \cup cl(A)$; entonces existe un básico canónico S de X que contiene a p y $S \cap cl(A) = \emptyset$.

Observemos que todos los básicos canónicos en un espacio topológico ordenado son convexos. Aseguramos que $S \cap A^* = \emptyset$. Supongamos por el contrario que existe un punto $q \in S \cap A^*$; entonces existen $a, b \in A$ tales que $[a, b] \cap cl(B) = \emptyset$ y $q \in [a, b]$; notemos que $a, b \notin S$, así que podemos aplicar el Lema 1.8 y obtener que $S \subset [a, b]$, de modo que $p \in [a, b]$, por lo que $p \in A^*$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Por tanto $S \cap A^* = \emptyset$, luego p no puede ser un punto límite de A^*, por consiguiente $p \notin cl(A^*)$.

iv). Como $cl(A^*) \subset A^* \cup cl(A)$, entonces $B^* \cap cl(A^*) \subset B^* \cap (A^* \cup cl(A))$, pero $B^* \cap (A^* \cup cl(A)) = (A^* \cap B^*) \cup (B^* \cap cl(A))$.

Por inciso (*ii*), se tiene que $A^* \cap B^* = \emptyset$. Entonces, $B^* \cap (A^* \cup cl(A)) = B^* \cap cl(A)$, así que $B^* \cap cl(A^*) \subset B^* \cap cl(A)$. Pero por definición de B^*, tenemos que $B^* \cap cl(A^*) = \emptyset$.

Similarmente tenemos que $A^* \cap cl(B^*) = \emptyset$.

Por tanto, A^* y B^* son conjuntos separados. ■

Por otra parte, recordemos que; por el Teorema 1.11, cualquier subconjunto no vacío de un conjunto totalmente ordenado puede ser expresado de manera única como unión de sus componentes convexas; de tal manera que si $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, $\{B_\beta : \beta \in \Gamma\}$ y $\{C_\gamma : \gamma \in \Psi\}$ representan las componentes convexas de A^*, B^* y $X \setminus (A^* \cup B^*)$, respectivamente, entonces:

$$A^* = \bigcup \{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}\,,\; B^* = \bigcup \{B_\beta : \beta \in \Gamma\} \text{ y } X \setminus (A^* \cup B^*) = \bigcup \{C_\gamma : \gamma \in \Psi\}.$$

Teorema 2.7 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío, entonces X es completamente normal.*

Demostración. Sean A y B subconjuntos separados y no vacíos de X, y sean A^* y B^* definidos como en el lema anterior. Entonces, Por inciso (*i*), tenemos que $A \subset A^*$ y $B \subset B^*$. Además, por inciso (iv), sabemos que A^* y B^* también están separados.

Definamos a $\mathcal{F}$ como la familia de componentes convexas de A^*, B^* y $X \setminus (A^* \cup B^*)$. Es decir:

$$\mathcal{F} = \{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \cup \{B_\beta : \beta \in \Gamma\} \cup \{C_\gamma : \gamma \in \Psi\}.$$

Observemos que $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos ajenos dos a dos.

Ahora definiremos un orden en $\mathcal{F}$.

Sean C y D elementos cualesquiera de $\mathcal{F}$, decimos que $C \preceq D$ si y sólo si existen $a \in C$ y $b \in D$ tales que $a \leq b$. En el caso en que $C \neq D$ diremos que C *precede* a D *estrictamente* $(C \prec D)$.

El sucesor inmediato en $\mathcal{F}$.

Sea C un conjunto no vacío en $\mathcal{F}$. Definimos el *sucesor inmediato* de C en $\mathcal{F}$ como el sucesor estricto de C que precede a todos los sucesores estrictos de C en $\mathcal{F}$.

Observemos que el sucesor inmediato de C en $\mathcal{F}$ es único (cuando existe).

Probaremos dos afirmaciones acerca de $\mathcal{F}$.

Afirmación 1. Sean C y $D \in \mathcal{F}$ conjuntos no vacíos. Entonces C precede a D estrictamente $(C \prec D)$ si y sólo si $a < b$ para todo $a \in C$ y para todo $b \in D$.

Como $C \prec D$, entonces $C \neq D$ y existen $a \in C$ y $b \in D$ tales que $a < b$. Supongamos que existe $t \in D$ tal que $t \leq s$ para alguna $s \in C$. Entonces, tenemos dos casos:

Caso 1.

$t < a$. Entonces, $t < a < b$ y como D es convexo en X, tenemos que $a \in D$, lo cual es absurdo.

Caso 2.

$a \leq t$. Entonces, $a \leq t \leq s$ y como C es convexo en X, tenemos que $t \in C$, lo cual también es absurdo.

Por tanto, $a < b$ para todo $a \in C$ y para todo $b \in D$.

Para probar la suficiencia, basta observar que $C \cap D = \emptyset$, pues todo elemento de D es cota superior estricta de C. De manera que $C \neq D$; así, $C \prec D$.

Afirmación 2. El orden de $\mathcal{F}$ es un orden total.

i) Reflexividad. Sea $C \in \mathcal{F}$ y elijamos un punto $a \in C$. Hacemos $b = c = a$. Entonces, $b \leq c$. Así, $C \preceq C$.

ii) Transitividad. Supongamos que $C \preceq D$ y $D \preceq E$. Entonces tenemos los cuatro casos siguientes:

Caso 1.

$C \prec D$ y $D \prec E$. Entonces para todo $a \in C$ y para todo $b \in D$, se tiene que $a < b$. También para todo $b \in D$ y para todo $c \in E$, se tiene que $b < c$. Por consiguiente $a < b < c$, para cualesquiera $a \in C$, $b \in D$ y $c \in E$. Por tanto $C \prec E$.

Caso 2.

$C \prec D$ y $D = E$. Entonces, $C \preceq E$.

Caso 3.

$C = D$ y $D \prec E$. Entonces, $C \preceq E$.

Caso 4.

$C = D = E$. Entonces, $C \preceq E$.

Por tanto el orden en $\mathcal{F}$ es transitivo.

iii) Antisimetría. Supongamos que $C \preceq D$ y $D \preceq C$.

Si $C \prec D$, entonces para todo $a \in C$ y para todo $b \in D$, se tiene que $a < b$, por consiguiente, no pueden existir $b \in D$ y $a \in C$ tales que $b \leq a$, lo que contradice la segunda hipótesis, por tanto $C = D$.

iv) Todos los elementos de $\mathcal{F}$ se relacionan entre sí, pues para cualesquiera conjuntos no vacíos C y D en $\mathcal{F}$, siempre es posible comparar sus elementos por pertenecer a X.

Por tanto, $\mathcal{F}$ es un espacio totalmente ordenado.

Por otro lado, para cada $\alpha \in \Lambda$ definamos a $S_\alpha \subset X$ como el conjunto de cotas superiores estrictas de A_α en X. Es decir:

$$S_\alpha = \{x \in X : x > a \text{ para toda } a \in A_\alpha\};$$

y sea $Q_\alpha \subset X$ el conjunto de cotas inferiores estrictas de A_α en X. Es decir:

$$Q_\alpha = \{x \in X : x < a \text{ para toda } a \in A_\alpha\}.$$

Similarmente, para cada $\beta \in \Gamma$, definamos:

$$S_\beta = \{x \in X : x > b \text{ para toda } b \in B_\beta\}; \text{ y}$$

$$Q_\beta = \{x \in X : x < b \text{ para toda } b \in B_\beta\}.$$

Probaremos que cada vez que $A_\alpha \cap cl(S_\alpha) \neq \emptyset$, entonces A_α tiene sucesor inmediato en $\mathcal{F}$ que es de la forma C_γ, con $\gamma \in \Psi$. Similarmente, cada vez que $A_\alpha \cap cl(Q_\alpha) \neq \emptyset$, A_α tiene predecesor inmediato en $\mathcal{F}$ que es de la forma C_γ, con $\gamma \in \Psi$.

Esto sucede de igual manera para cada conjunto B_β, pero sólo realizaremos la prueba para las A_α, la prueba para las B_β es análoga.

Supongamos que $A_\alpha \cap cl(S_\alpha) \neq \emptyset$, entonces existe $p \in A_\alpha$ tal que $p \in cl(S_\alpha)$, luego $p \in A^*$, por consiguiente existen $a, b \in A$ tales que $p \in [a, b]$ y $[a, b] \cap cl(B) = \emptyset$. Como $cl(B^*) = B^* \cup cl(B)$, entonces $p \notin cl(B^*)$. Por tanto, $p \in X \setminus cl(B^*)$. Esto implica que existe un básico canónico G en X tal que $p \in G \subset X \setminus cl(B^*)$.

Primero diremos por qué podemos suponer que G es de la forma $(\leftarrow, y)$ ó (x, y). Si G fuera de la forma $(x, \rightarrow)$, al ser $S_\alpha \neq \emptyset$ existiría una cota superior y de A_α (y entonces $p < y$). De manera que el básico (x, y) tiene a p y está contenido en $(x, \rightarrow)$. Por lo cual, hubieramos podido tomar a (x, y) en lugar de $(x, \rightarrow)$.

Observemos que $(p, y) \subset G$, y por ser p punto límite de S_α, entonces $(p, y) \cap S_\alpha \neq \emptyset$.

Para continuar con la prueba de esta afirmación necesitamos utilizar algunas observaciones.

Observación 1. $(p, y) \cap B^* = \emptyset$ y $(p, y) \cap cl(B) = \emptyset$.

Como $p \in G \subset X \setminus cl(B^*)$, entonces $(p, y) \subset X \setminus (B^* \cup cl(B))$, luego $(p, y) \cap (B^* \cup cl(B)) = \emptyset$, por consiguiente $(p, y) \cap cl(B) = \emptyset$ y $(p, y) \cap B^* = \emptyset$.

Observación 2. $p \in A$.

Notemos que si $a = b$, entonces $p \in A$.

Si $a < b$, afirmamos que $[a, b] \subset A_\alpha$.

Primero notemos que $[a, b] \subset A^*$, ahora notemos que A_α es componente convexa de p en A^*. Como $[a, b]$ es convexo y $p \in [a, b] \cap A_\alpha$, entonces $[a, b] \cup A_\alpha \subset A_\alpha$. Por tanto $[a, b] \subset A_\alpha$.

Ahora mostraremos que $p = b$.

Como $b \in A_\alpha$, entonces b no puede estar en S_α.

Si $p < b$. Entonces, como p es punto límite de S_α, el básico $(\leftarrow, b)$ que contiene a p satisface que $(\leftarrow, b) \cap S_\alpha \neq \emptyset$. De manera que existe $q \in (\leftarrow, b)$

tal que $q \in S_\alpha$, esto es, q es una cota superior estricta de A_α, por lo que $b < q$, lo cual es absurdo.

Por tanto $p = b$. En particular $p \in A$.

Observación 3. $(p, y) \cap cl(A) = \emptyset$.

Supongamos por el contrario que $(p, y) \cap cl(A) \neq \emptyset$. Esto implica que existe $t \in (p, y)$ tal que $t \in cl(A)$. Como (p, y) es una vecindad de t y $t \in cl(A)$, entonces $(p, y) \cap A \neq \emptyset$. Sea $s \in (p, y) \cap A$. Notemos que $[p, s] \subset [p, y)$, así que $[p, s] \cap cl(B) = \emptyset$. De aquí que $[p, s] \subset A^*$.

Entonces, $[p, s] \cup A_\alpha$ es un convexo contenido en A^* y como A_α es componente convexa de p tenemos que $[p, s] \cup A_\alpha = A_\alpha$. Pero $(\leftarrow, s)$ es una vecindad de p y $p \in cl(S_\alpha)$. Así que existe $q \in (\leftarrow, s) \cap S_\alpha$. Entonces, q es cota superior de A_α, por lo que $s < q$. Esta contradicción prueba la Observación 3.

Observación 4. $(p, y) \cap A^* = \emptyset$.

Supongamos por el contrario que $(p, y) \cap A^* \neq \emptyset$. Esto implica que existe $z \in (p, y)$ tal que $z \in A^*$. Así, existen $c, d \in A$ tales que $z \in [c, d]$ y $[c, d] \cap cl(B) = \emptyset$. Como $z \in (p, y) \cap [c, d]$ y por la Observación 3, $(p, y) \cap cl(A) = \emptyset$, podemos aplicar el Lema 1.8 y obtener que $(p, y) \subset [c, d]$. Así, $p < z < d$. De esta manera, y recordando que $p \in A$ (Observación 2), tenemos que $[p, d] \subset A^*$. Como A_α es la componente convexa de p en A^*, entonces $[p, b] \subset A_\alpha$. Pero por ser p un punto límite de S_α tenemos que $(\leftarrow, d) \cap S_\alpha \neq \emptyset$, por tanto existe $w \in (\leftarrow, d)$ tal que $w \in S_\alpha$, lo cual contradice que $w < d$.

Por tanto $(p, y) \cap A^* = \emptyset$.

De las Observaciones 1 y 4 podemos concluir que el intervalo abierto (p, y) está completamente contenido en $X \setminus (A^* \cup B^*)$. Esto es, $(p, y) \subset \bigcup\{C_\gamma : \gamma \in \Psi\}$. Notemos que $(p, y) \neq \emptyset$, pues el abierto $(\leftarrow, y)$ es una vecindad de p y entonces $(\leftarrow, y) \cap S_\alpha \neq \emptyset$. Dada $z \in (\leftarrow, y) \cap S_\alpha$, como $p \in A_\alpha$, $p < z$, así que $z \in (p, y)$.

Como los elementos de la familia $\{C_\gamma : \gamma \in \Psi\}$ son ajenos dos a dos, existe una única componente convexa que contiene totalmente a (p, y); denotaremos a esta componente como C_{γ_α} donde $\gamma_\alpha \in \Psi$.

Ahora es claro que C_{γ_α} es el candidato a ser el sucesor inmediato de A_α en $\mathcal{F}$.

Primero veamos que C_{γ_α} es un sucesor estricto de A_α. Recordemos que para cada $\alpha \in \Lambda$ y para cada $\gamma \in \Psi$ tenemos que $C_\gamma \cap A_\alpha = \emptyset$. Elijamos

$z \in (p, y)$, entonces $z \in C_{\gamma_\alpha}$, y como $p \in A_\alpha$, concluimos que $A_\alpha \prec C_{\gamma_\alpha}$, es decir, C_{γ_α} es un sucesor estricto de A_α en $\mathcal{F}$.

Ahora veamos que C_{γ_α} precede a cualquier otro sucesor estricto de A_α en $\mathcal{F}$.

Sea S un sucesor estricto de A_α en $\mathcal{F}$ tal que $A_\alpha \prec S \preceq C_{\gamma_\alpha}$ y sea $z \in (p, y)$. Consideraremos dos casos:

Caso 1.

$z \in S$. Entonces, como $z \in C_{\gamma_\alpha}$ y $z \leq z$, tenemos que $C_{\gamma_\alpha} \preceq S$. Por tanto $S = C_{\gamma_\alpha}$.

Caso 2.

$z \notin S$. Entonces, $S \neq C_{\gamma_\alpha}$, es decir, $S \prec C_{\gamma_\alpha}$. Como S es convexo, se tiene que para toda $s \in S$, $z < s$ ó $s < z$.

Si para toda $s \in S$, $z < s$, entonces $C_{\gamma_\alpha} \prec S$, lo cual contradice nuestra suposición.

Si para toda $s \in S$, $s < z$, como $A_\alpha \prec S$, entonces $p < s$ para toda $s \in S$. De manera que $S \subset (p, y) \subset C_{\gamma_\alpha}$, así, $S \subset C_{\gamma_\alpha}$, lo cual contradice que son ajenos.

Por tanto $S = C_{\gamma_\alpha}$.

Por consiguiente, C_{γ_α} es el sucesor inmediato de A_α en $\mathcal{F}$.

Análogamente, cada vez que $A_\alpha \cap cl(Q_\alpha) \neq \emptyset$ y procediendo de igual manera a la prueba, podemos ver que A_α también tiene predecesor inmediato en $\mathcal{F}$, al que llamaremos C_{λ_α}.

Para cada $\gamma \in \Psi$, elegimos un punto $k_\gamma \in C_\gamma$.

Cada vez que $A_\alpha \cap cl(S_\alpha) \neq \emptyset$, hagamos $I_\alpha = [p_\alpha, k_{\gamma_\alpha})$, donde $p_\alpha \in A_\alpha \cap cl(S_\alpha)$. En otro caso, sea $I_\alpha = \emptyset$.

De manera similar, cada vez que $A_\alpha \cap cl(Q_\alpha) \neq \emptyset$, sea $J_\alpha = (k_{\lambda_\alpha}, q_\alpha]$, donde $q_\alpha \in A_\alpha \cap cl(Q_\alpha)$. En otro caso, sea $J_\alpha = \emptyset$.

Por último, para cada $\alpha \in \Lambda$, hagamos $U_\alpha = J_\alpha \cup A_\alpha \cup I_\alpha$.

Para las componentes convexas $\{B_\beta : \beta \in \Gamma\}$ en $\mathcal{F}$, realizaremos una construcción similar. Es decir:

Cada vez que $B_\beta \cap cl(S_\beta) \neq \emptyset$, hagamos $I_\beta = [t_\beta, k_{\gamma_\beta})$, donde $t_\beta \in B_\beta \cap cl(S_\beta)$ y C_{γ_β} es el sucesor inmediato de B_β en $\mathcal{F}$. En otro caso, sea $I_\beta = \emptyset$; y cada vez que $B_\beta \cap cl(Q_\beta) \neq \emptyset$, sea $J_\beta = (k_{\lambda_\beta}, w_\beta]$, donde $w_\beta \in B_\beta \cap cl(Q_\beta)$ y C_{λ_β} es el predecesor inmediato de B_β en $\mathcal{F}$. En otro caso, sea $J_\beta = \emptyset$.

Por último, para cada $\beta \in \Gamma$, hagamos $V_\beta = J_\beta \cup B_\beta \cup I_\beta$.

Ahora demostraremos dos afirmaciones acerca de U_α y V_β.

Afirmación 1. Para cada $\alpha \in \Lambda$, U_α es abierto y convexo.
Realizaremos la prueba considerando cuatro casos.
Caso 1.
$J_\alpha \neq \emptyset$ y $I_\alpha \neq \emptyset$. Como $q_\alpha \in J_\alpha \cap A_\alpha$ y ambos conjuntos son convexos, entonces tenemos que $J_\alpha \cup A_\alpha$ es convexa. De manera similar, como $p_\alpha \in A_\alpha \cap I_\alpha$ y ambos son convexos, tenemos que $A_\alpha \cup I_\alpha$ es convexa. Así que $U_\alpha = J_\alpha \cup A_\alpha \cup I_\alpha = (k_{\lambda_\alpha}, k_{\gamma_\alpha})$ también es convexo, y claramente es abierto.
Caso 2.
$J_\alpha = \emptyset$ y $I_\alpha = \emptyset$. Entonces, $U_\alpha = A_\alpha$, así que U_α es convexo.
Como $A_\alpha \cap cl(S_\alpha) = \emptyset$, para cada $x \in A_\alpha$ existe un básico canónico G que contiene a x y está completamente contenido en $X \setminus S_\alpha$. Análogamente, como $A_\alpha \cap cl(Q_\alpha) = \emptyset$, existe un básico canónico H que contiene a x y está completamente contenido en $X \setminus Q_\alpha$. Como A_α es convexo, $X = Q_\alpha \cup A_\alpha \cup S_\alpha$. Así que $x \in G \cap H \subset (X \setminus S_\alpha) \cap (X \setminus Q_\alpha) \subset A_\alpha$.
Por consiguiente, A_α es abierto.
Caso 3.
$J_\alpha = \emptyset$ y $I_\alpha \neq \emptyset$. Entonces, $U_\alpha = A_\alpha \cup I_\alpha$, el cual es convexo (Caso 1). Sólo resta probar que U_α es abierto.
Sea $x \in A_\alpha \cup I_\alpha$. Si $p_\alpha < x$, entonces $x \in (p_\alpha, k_{\gamma_\alpha}) \subset A_\alpha \cup I_\alpha$.
Si $x \leq p_\alpha$, entonces $x \in A_\alpha$. Como $A_\alpha \cap cl(Q_\alpha) = \emptyset$, existe un básico canónico G que contiene a x y está completamente contenido en $X \setminus Q_\alpha$. Como $X \setminus Q_\alpha = A_\alpha \cup S_\alpha$, entonces $G \subset A_\alpha \cup S_\alpha$.
Si $Q_\alpha \neq \emptyset$. Entonces, A_α también está acotado inferiormente, de manera que existe $r \in X$ tal que $r < x$. Así que $x \in (r, k_{\gamma_\alpha}) \cap G \subset A_\alpha \cup I_\alpha$.
Si $Q_\alpha = \emptyset$. Entonces, $x \in (\leftarrow, k_{\gamma_\alpha}) = A_\alpha \cup I_\alpha$.
Por tanto $A_\alpha \cup I_\alpha$ es abierto.
Caso 4.
$J_\alpha \neq \emptyset$ y $I_\alpha = \emptyset$. Este caso es similar al Caso 3.
Por tanto, para cada $\alpha \in \Lambda$, U_α es abierto y convexo.
Similarmente tenemos que para cada $\beta \in \Gamma$, V_β es abierto y convexo.

Afirmación 2. Para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $\beta \in \Gamma$, $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$.
Sean $\alpha \in \Lambda$ y $\beta \in \Gamma$ tales que $A_\alpha \prec B_\beta$. Consideremos cuatro casos:
Caso 1.
$I_\alpha \neq \emptyset$ y $J_\beta \neq \emptyset$. En la prueba de la Observación 2 se mostró que $p_\alpha \in A_\alpha$. Por analogía $w_\beta \in B_\beta$. Ya que $A_\alpha \prec B_\beta$, tenemos que $p_\alpha < w_\beta$.

Ya que $(p_\alpha, k_{\gamma_\alpha}) \cap B^* = \emptyset$, tenemos que $w_\beta \notin (p_\alpha, k_{\gamma_\alpha})$. De manera que $p_\alpha < k_{\gamma_\alpha} < w_\beta$. Similarmente, $p_\alpha < k_{\lambda_\beta} < w_\beta$. Si ocurriera que $k_{\lambda_\beta} < k_{\gamma_\alpha}$, entonces $k_{\lambda_\beta} \in (p_\alpha, k_{\gamma_\alpha}) \subset C_{\gamma_\alpha}$. Ya que $k_{\lambda_\beta} \in C_{\lambda_\beta}$ y las componentes convexas de $X \setminus (A^* \cup B^*)$ son ajenas entre sí, tenemos que $C_{\lambda_\beta} = C_{\gamma_\alpha}$. De manera que $k_{\gamma_\alpha} = k_{\lambda_\beta}$. Ya que $U_\alpha \subset (\leftarrow, k_{\gamma_\alpha})$ y $V_\beta \subset (k_{\lambda_\beta}, \rightarrow)$, concluimos que $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Ahora, si ocurre que $k_{\gamma_\alpha} \leq k_{\lambda_\beta}$, como $U_\alpha \subset (\leftarrow, k_{\gamma_\alpha})$ y $V_\beta \subset (k_{\lambda_\beta}, \rightarrow)$, también obtenemos que $U_\alpha \cap V_\beta \subset (\leftarrow, k_{\gamma_\alpha}) \cap (k_{\lambda_\beta}, \rightarrow) = \emptyset$. Esto completa el análisis de este caso.

Caso 2.

$I_\alpha \neq \emptyset$ y $J_\beta = \emptyset$. Dada $b \in B_\beta$, por la prueba de la Observación 2, se tiene que $p_\alpha \in A_\alpha$, de manera que $p_\alpha < b$. Y como $(p_\alpha, k_{\gamma_\alpha}) \cap B^* = \emptyset$, tenemos que $b \notin (p_\alpha, k_{\gamma_\alpha})$. Por tanto $b > k_{\gamma_\alpha}$. De manera que la intersección $U_\alpha \cap V_\beta \subset (\leftarrow, k_{\gamma_\alpha}) \cap (k_{\gamma_\alpha}, \rightarrow) = \emptyset$.

Caso 3.

$I_\alpha = \emptyset$ y $J_\beta \neq \emptyset$. Este caso es similar al Caso 2.

Caso 4.

$I_\alpha = \emptyset$ y $J_\beta = \emptyset$. En este caso, fijamos $a \in A_\alpha$ y $b \in B_\beta$. Entonces, $U_\alpha \subset (\leftarrow, a) \cup A_\alpha$ y $V_\beta \subset (b, \rightarrow) \cup B_\beta$. De aquí que $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$.

Por tanto para cualesquiera $\alpha \in \Lambda$ y $\beta \in \Gamma$, $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$.

Por último, hagamos $U = \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ y $V = \bigcup\{V_\beta : \beta \in \Gamma\}$. Entonces, por las Afirmaciones 1 y 2 de U_α y V_β, tenemos que U y V son conjuntos abiertos y ajenos en X. Además, satisfacen que $A \subset A^* = \bigcup\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset U$ y $B \subset B^* = \bigcup\{B_\beta : \beta \in \Gamma\} \subset V$. Así, hemos construido un par de abiertos ajenos conteniendo a A y B, respectivamente.

Por tanto X es completamente normal. ■

Corolario 2.8 *Si X es un espacio topológico ordenado y no vacío, entonces X es T_5.*

Demostración. Como X es de Hausdorff, entonces X es T_1, y al ser completamente normal, X es T_5. ■

2.2 Propiedad del supremo y completez

Recordemos que para poder hablar de la mínima cota superior (*supremo*) de un conjunto no vacío es necesario que dicho conjunto tenga algún orden.

Sea X un espacio topológico ordenado; decimos que un subconjunto no vacío A de X está *acotado superiormente* si existe $\beta \in X$ tal que para toda $a \in A$ se satisface que $a \leq \beta$.

Similarmente, decimos que un subconjunto no vacío A de X está *acotado inferiormente* si existe $\alpha \in X$ tal que para toda $a \in A$ se satisface que $\alpha \leq a$.

Diremos que un subconjunto no vacío $A \subset X$ está *acotado* si A tiene cota superior y cota inferior.

Denotaremos a la máxima cota inferior y a la mínima cota superior de un conjunto no vacío A (cuando existen) por $\inf A$ y $\sup A$, respectivamente.

Teorema 2.9 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. Si todo subconjunto acotado superiormente y no vacío A de X tiene supremo, entonces todo subconjunto acotado inferiormente y no vacío A de X tiene ínfimo.*

Demostración. Sea A en X un subconjunto acotado inferiormente y no vacío. Consideremos el conjunto $C = \{x \in X : x \leq a$ para toda $a \in A\}$. Notemos que $C \neq \emptyset$, pues A está acotado inferiormente. Por hipótesis, C tiene supremo en X. Sea $\beta = \sup C$ y consideremos dos casos.

Caso 1.

$\beta \in C$. Entonces, para cada $a \in A$, $\beta \leq a$. De manera que β es una cota inferior de A y también es la máxima, pues $\beta = \sup C$.

Por tanto $\beta = \inf A$.

Caso 2.

$\beta \notin C$. Entonces, existe $a \in A$ tal que $a < \beta$. Notemos que a es una cota superior de C, lo cual contradice la elección de β, pues $\beta = \sup C$.

Por tanto, este segundo caso no se puede dar y, por el Caso 1, concluimos que A tiene ínfimo. ∎

Definición 2.10 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. X es **completo** si todo subconjunto acotado superiormente y no vacío de X tiene supremo.*

Teorema 2.11 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. Entonces X es compacto si y sólo si X es acotado y completo.*

Demostración. (Necesidad). Primero demostraremos que X es acotado. Supongamos primero por el contrario que X no es acotado superiormente; el caso en que X no sea acotado inferiormente se demuestra de manera similar. Consideremos a la familia $U = \{(\leftarrow, x) : x \in X\}$. Veamos que U es una cubierta abierta de X. Sea $y \in X$, entonces por hipótesis existe $x \in X$ tal que $y < x$, de manera que $y \in (\leftarrow, x)$. Por tanto, U es una cubierta abierta de X.

Notemos que cualquier subfamilia finita de U es de la forma $V = \{(\leftarrow, x) : x \in F\}$ con $F \subset X$ finito. Sea $\alpha = \max\{x \in X : x \in F\}$, entonces $\bigcup\{(\leftarrow, x) : x \in F\} = (\leftarrow, \alpha)$. Pero como X no es acotado, existe $x \in X$ tal que $\alpha < x$. Así que V no cubre a X; contradiciendo la compacidad del espacio. Por tanto X es acotado.

Ahora probaremos que X es completo por contrapuesta.

Supongamos que existe $A \subset X$ no vacío tal que A no tiene supremo. Como X es acotado, A también es acotado. De manera que podemos definir para cada cota superior β de A el conjunto $S_\beta = \{x \in X : \beta < x\}$, y hacer $B = \{\beta \in X : \beta$ es cota superior de $A\}$. También definamos para cada $\alpha \in A$, el conjunto $P_\alpha = \{x \in X : x < \alpha\}$ y consideremos a la colección C formada por todos los P_α y todos los S_β en X. Es decir:

$$C = \{P_\alpha : \alpha \in A\} \cup \{S_\beta : \beta \in B\}.$$

Probaremos que C es una cubierta abierta de X que no posee una subcubierta abierta finita.

Observemos que para cada $\alpha \in A$, P_α es abierto, y que para cada $\beta \in X$, S_β es abierto.

Probaremos que $X \subset (\bigcup\{P_\alpha : \alpha \in A\}) \cup (\bigcup\{S_\beta : \beta \in B\})$. Sea $x \in X$. Consideraremos dos casos:

Caso 1.

Existe alguna $\alpha_0 \in A$ tal que $x < \alpha_0$. Entonces:

$x \in P_{\alpha_0} \subset (\bigcup\{P_\alpha : \alpha \in A\}) \cup (\bigcup\{S_\beta : \beta \in B\})$.

Caso 2.

$\alpha \leq x$ para toda $\alpha \in A$. Entonces, x es cota superior de A. Además existe una cota superior β_0 de A tal que $\beta_0 < x$, de lo contrario x sería el supremo de A. Por consiguiente, $x \in S_{\beta_0} \subset (\bigcup\{P_\alpha : \alpha \in A\}) \cup (\bigcup\{S_\beta : \beta \in B\})$.

Por tanto, $X \subset (\bigcup\{P_\alpha : \alpha \in A\}) \cup (\bigcup\{S_\beta : \beta \in B\})$.

Ahora sólo resta demostrar que C no posee una subcubierta finita.

Notemos que cualquier subcubierta abierta finita de C es de la forma:

$$P_{\alpha_1} \cup \ldots \cup P_{\alpha_k} \cup S_{\beta_1} \ldots \cup S_{\beta_m},$$

donde $\alpha_k = \max\{\alpha_i \in A : i \in \{1, 2, ..., k\}\}$ y $\beta_m = \min\{\beta_j \in X : j \in \{1, 2, ..., m\}\}$.

Observemos que $X = P_{\alpha_1} \cup ... \cup P_{\alpha_k} \cup S_{\beta_1} ... \cup S_{\beta_m} = (\leftarrow, \alpha_k) \cup (\beta_m, \rightarrow)$. Así que $(\alpha_k, \beta_m) = \emptyset$. Pero esto implica que $\alpha \leq \alpha_k$ para toda $\alpha \in A$ y $\alpha_k \leq \beta$ para toda cota superior β de A. De aquí que α_k es el supremo de A, lo cual contradice la hipótesis de que A no tiene supremo.

Por tanto, C no posee una subcubierta abierta finita para X. Así, X no es compacto.

Esto prueba la necesidad.

Para probar la suficiencia, tomamos una cubierta abierta $U = \{C_i : i \in I\}$ de X. Sea $a = \inf X$ y definamos un conjunto S de la siguiente manera:

$$S = \{y \in X : \text{ existe un subconjunto finito } J \subset I \text{ tal que } [a, y) \subset \bigcup\{C_i : i \in J\}\}.$$

Notemos que $S \neq \emptyset$, pues para algún $j \in I$, tenemos que $a \in C_j$. De manera que existe un básico de la forma $[a, x)$ tal que $a \in [a, x) \subset C_j$. Así que para $J = \{j\}$, se satisface que $|J| = 1$ y $[a, x) \subset C_j = \bigcup\{C_i : i \in J\}$. Así, $x \in S$.

Por otro lado, como X es acotado, entonces S también es acotado y por ser X completo, S tiene supremo al cual llamaremos α.

Ahora probaremos que para toda $z \in X$ tal que $z < \alpha$, $z \in S$.

Primero notemos que para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $y \in S$ y $x < y$, se tiene que $x \in S$; pues existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $[a, y) \subset \bigcup\{C_i : i \in J\}$. Entonces, $[a, x) \subset [a, y) \subset \bigcup\{C_i : i \in J\}$. De esta manera, $x \in S$.

Sea $z \in X$ tal que $z < \alpha$. Entonces z no es cota superior de S, de manera que existe $w \in S$ tal que $z < w$. Por lo que probamos antes, $z \in S$. Esto muestra la afirmación.

Ahora demostraremos que $\alpha \in S$.

Como U es una cubierta de X, existe $k \in I$ tal que $\alpha \in C_k$; y como C_k es abierto, entonces existe un básico canónico $G \subset C_k$ tal que $\alpha \in G \subset C_k$.

Caso 1.

G es de la forma $G = (x, y)$. Entonces, por la observación anterior $x \in S$. De manera que existe un subconjunto finito $M \subset I$ tal que $[a, x) \subset \bigcup\{C_i : i \in M\}$. Nuevamente, como U es una cubierta de X, existe $l \in I$ tal que $x \in C_l$. De manera que $[a, x] \subset \bigcup\{C_i : i \in M \cup \{l\}\}$. Por tanto, $[a, \alpha) \subset \bigcup\{C_i : i \in M \cup \{l, k\}\}$, es decir, $\alpha \in S$.

Caso 2.

G es de la forma $G = (\leftarrow, y)$. Entonces, para $J = \{k\}$, $[a, \alpha) \subset \bigcup\{C_i : i \in J\} = (\leftarrow, y)$. Así que $\alpha \in S$.

Notemos que el caso $G = (x, \rightarrow)$ es similar al Caso 1.

Por tanto, $\alpha \in S$.

Ahora demostraremos que $\alpha = \sup X$.

Supongamos por el contrario que $\alpha < \sup X$. Sea nuevamente $k \in I$ tal que $\alpha \in G \subset C_k$. Consideremos tres casos.

Caso 1.

G es de la forma $G = (x, y)$. Como $\alpha \in S$, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $[a, \alpha) \subset \bigcup\{C_i : i \in J\}$. De manera que $J^* = J \cup \{k\}$ es un subconjunto finito de I. Por otro lado, notemos que $[a, \alpha) \cup (x, y) \subset [a, \alpha) \cup C_k \subset (\bigcup\{C_i : i \in J\}) \cup C_k = \bigcup\{C_i : i \in J^*\}$. Es decir, $[a, y) \subset \bigcup\{C_i : i \in J^*\}$. Así que $y \in S$, lo cual es imposible, pues $\alpha = \sup S$.

Caso 2.

G es de la forma $G = (\leftarrow, y)$. Este caso es similar al caso anterior.

Caso 3.

$G = (x, \rightarrow)$. Entonces, como $\alpha \in S$, similarmente al Caso 1, existe un subconjunto finito $J \subset I$ tal que $[a, \alpha) \subset \bigcup\{C_i : i \in J\}$. De manera que $J^* = J \cup \{k\}$ es un subconjunto finito de I. Entonces, $[a, \alpha) \cup (x, \rightarrow) = X \subset [a, \alpha) \cup C_k \subset (\bigcup\{C_i : i \in J\}) \cup C_k = \bigcup\{C_i : i \in J^*\}$. De manera que $[a, \sup X) \subset \bigcup\{C_i : i \in J^*\}$. Esto es absurdo, pues $\alpha < \sup X$. Con esta tercera contradicción obtenemos que α tiene que ser igual a $\sup X$. Por tanto $\sup X \in S$. De manera que $[a, \sup X)$ puede cubrirse con un número finito de elementos de U y como $\sup X$ se puede cubrir con un elemento de U, concluimos que $[a, \sup X]$ se puede cubrir por un número finito de elementos de U. Por tanto X es compacto. ∎

2.3 Conexidad, axioma de Dedekind y propiedad del supremo.

Sea X un espacio topológico ordenado no vacío. Decimos que $p \in X$ es un *punto de corte* de X si $X \setminus \{p\}$ puede ser separado por los conjuntos $M_p = (\leftarrow, p)$ y $N_p = (p, \rightarrow)$. Como estos conjuntos son abiertos y ajenos, en realidad sólo se pide que M_p y N_p sean no vacíos; es decir, que p no sea el mínimo ni el máximo de X.

Axioma 2.12 *(Axioma de Dedekind) Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. Decimos que X satisface el* **axioma de Dedekind** *si para cada A y B subconjuntos no vacíos y ajenos de X tales que $A \cup B = X$ y para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$ se tiene que $a < b$, existe $\xi \in X$ tal que $a \leq \xi$ para todo $a \in A$ y $\xi \leq b$ para todo $b \in B$.*

Notemos que en realidad ξ es el supremo de A y el ínfimo de B.

Teorema 2.13 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. Entonces, las siguientes tres propiedades son equivalentes.*

i) X satisface el axioma de Dedekind.

ii) X es conexo.

iii) X no tiene puntos consecutivos y todo subconjunto acotado superiormente tiene supremo.

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. Supongamos por el contrario que X es disconexo. Sea (U, V) una desconexión de X y sea $u \in U$ tal que $u < v$ para alguna $v \in V$. Sea E_u la componente convexa de U que contiene a u.

Sea $A = (\leftarrow, u] \cup E_u$. Entonces, A es convexo, pues es la unión de dos conjuntos convexos que se intersectan (Teorema 1.6).

Por la convexidad y la definición de A, tenemos que $a < b$ para toda $a \in A$ y toda $b \in X \setminus A$; por hipótesis, $\sup A = \inf X \setminus A$.

Sea $p = \sup A$. Entonces, $p \in A$ ó $p \in X \setminus A$.

Si $p \in A$, entonces $u \leq p$, así que $p \in E_u \subset U$. Así, E_u también es la componente convexa de p en U. Como U es abierto, existe un básico canónico $G \subset U$, tal que $p \in G \subset U$. Como los básicos canónicos en X son convexos, tenemos que $G \subset E_u$. Así, $p \in G \subset E_u \subset U$.

Como $p < v$ y $v \in V$, entonces G no puede ser de la forma $(z, \rightarrow)$; por lo cual G es de la forma (z, y) o $(\leftarrow, y)$, para algún $z < y$. Así, $(p, y) \subset G \subset E_u \subset A$.

Pero como $p = \sup A$, entonces $(p, y) = \emptyset$, es decir, p y y son puntos consecutivos. Así $X = (\leftarrow, p] \cup [y, \rightarrow)$ y $\sup\{x \in X : x \leq p\} \neq \inf\{x \in X : y \leq x\}$, lo que contradice el axioma de Dedekind. Por tanto $p \notin A$. Entonces, $p \in X \setminus A$.

Recordemos que $p \in U$ ó $p \in V$. Sea E_p la componente convexa de p contenida en U ó V. Entonces como U y V son abiertos, análogamente al caso anterior existe un básico canónico G tal que $p \in G \subset E_p$. Afirmamos que $E_p \subset X \setminus A$; de lo contrario existiría $z \in E_p$ tal que $z \notin X \setminus A$. Si $z \in E_u$, entonces $E_u = E_p$, lo cual es absurdo, pues $E_p \not\subseteq A$. Si $z \in (\leftarrow, u)$, entonces $z < u < p$, por lo que $u \in E_p$ y $E_u = E_p$, lo cual también es absurdo.

Por tanto $p \in G \subset E_p \subset X \setminus A$.

Como $G \subset X \setminus A$ y $u \in A$ y $p \in X \setminus A$, G no puede ser de la forma $(\leftarrow, y)$; por lo que G es de la forma (z, y) o $(z, \rightarrow)$. Así, $(z, p) \subset G \subset E_p \subset X \setminus A$. Pero al ser p el ínfimo de $X \setminus A$, tenemos que $(z, p) = \emptyset$. Por consiguiente, $X = (\leftarrow, z] \cup [p, \rightarrow)$ y $\sup\{x \in X : x \leq z\} \neq \inf\{x \in X : p \leq x\}$, lo que contradice nuevamente el axioma de Dedekind.

Por tanto p tampoco puede estar en $X \setminus A$. Así, $p \notin X$. Pero esto también contradice que X satisface el axioma de Dedekind.

Por tanto X no puede ser disconexo, luego X es conexo.

$ii) \Rightarrow iii)$. Por hipótesis X es conexo. Primero probaremos que X no tiene puntos consecutivos.

Supongamos por el contrario que existen α y β en X tales que $\alpha < \beta$ y $(\alpha, \beta) = \emptyset$. Entonces los conjuntos $(\leftarrow, \alpha]$ y $[\beta, \rightarrow)$ forman una desconexión de X. Por tanto X no puede tener puntos consecutivos.

Por otro lado, afirmamos que todo subconjunto acotado superiormente en X tiene supremo. Supongamos por el contrario que A es un subconjunto no vacío que está acotado superiormente en X y no tiene supremo. Sea $G = \{x \in X : a < x \text{ para toda } a \in A\}$, y para cada $a \in A$ definamos $H_a = (\leftarrow, a)$. Observemos que G y $\bigcup\{H_a : a \in A\}$ son conjuntos abiertos tales que $\bigcup\{H_a : a \in A\} \cap G = \emptyset$. Probemos que $\bigcup\{H_a : a \in A\} \cup G = X$. Por construcción de los conjuntos tenemos que $\bigcup\{H_a : a \in A\} \cup G \subset X$.

Sea $x \in X$.

Si $a < x$ para toda $a \in A$, entonces $x \in G \subset \bigcup\{H_a : a \in A\} \cup G$.

Si $x < a_0$ para alguna $a_0 \in A$, entonces $x \in H_{a_0} \subset \bigcup\{H_a : a \in A\} \cup G$.

Si $x = a_0$ para alguna $a_0 \in A$, entonces existe $a_1 \in A$ tal que $a_0 < a_1$, pues A no tiene supremo. De manera que $x \in H_{a_1} \subset \bigcup\{H_a : a \in A\} \cup G$.

Por tanto $X \subset \bigcup\{H_a : a \in A\} \cup G$. Así, G y $\bigcup\{H_a : a \in A\}$ forman una desconexión de X; pero esto contradice que el espacio es conexo.

Por tanto todo conjunto acotado superiormente en X tiene supremo.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Por hipótesis X no tiene puntos consecutivos y todo conjunto acotado superiormente en él tiene supremo. Sean A y B subconjuntos no vacíos y ajenos de X tales que $A \cup B = X$ y $a < b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Como A está acotado superiormente, A tiene supremo. Sea $\alpha = \sup A$. Como todo elemento de B es cota superior de A, entonces α es cota inferior de B. Sea $\beta = \inf B$. Como X no tiene puntos consecutivos, entonces $\alpha = \beta$.

Por tanto, X satisface el axioma de Dedekind. ■

Corolario 2.14 *Sea X un espacio topológico ordenado no vacío. Si X es compacto y no tiene puntos consecutivos, entonces X es conexo.*

Demostración. Como X es compacto, entonces por el Teorema 2.11, X es completo, y como X no tiene puntos consecutivos, por el teorema anterior X es conexo. ■

Corolario 2.15 *Sea X un espacio topológico ordenado no vacío. Si X es conexo y acotado, entonces X es compacto*

Demostración. Como X satisface la propiedad del supremo, entonces X es completo, además X es acotado. Así que por el Teorema 2.11, X es compacto. ■

Corolario 2.16 *Sea X un espacio topológico ordenado no vacío. Si $Y \subset X$ es conexo, entonces Y es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in Y$ y $z \in X$ tales que $x < z < y$. Si $z \notin Y$, entonces $Y \cap (\leftarrow, z)$ y $Y \cap (z, \rightarrow)$ son dos conjuntos abiertos, no vacíos y ajenos de Y tales que $Y = (Y \cap (\leftarrow, z)) \cup (Y \cap (z, \rightarrow))$. Esto contradice la conexidad de Y y muestra que $z \in Y$.

Por tanto Y es convexo. ■

Teorema 2.17 *Sea X un espacio topológico ordenado conexo y no vacío. Si $Y \subset X$ es convexo, entonces Y es conexo.*

Demostración. Si Y tiene dos puntos consecutivos $x < y$, aseguramos que éstos también son consecutivos en X; si esto no ocurre, entonces existe $z \in X$ tal que $x < z < y$. Por la convexidad de Y, $z \in Y$, lo que contradice que x y y son puntos consecutivos en Y. Por tanto, x y y son puntos consecutivos en X. Esto es imposible pues X es conexo. Por tanto, Y no tiene puntos consecutivos.

Sea $A \subset Y$ un subconjunto diferente de vacío y acotado superiormente en Y. Probaremos que A tiene supremo en Y.

Como A es acotado superiormente en Y, si z es una cota superior de A en Y, entonces z es una cota superior de A en X. Por el Teorema 2.13, existe $\alpha = \sup A$ (en X). Aseguramos que α también es el supremo de A en Y. Por definición $a \leq \alpha$ para toda $a \in A$. Si z es una cota superior de A en Y y $a \in Y$, por la convexidad de Y, tenemos que $[a, z] \subset Y$, de manera que $\alpha \in Y$. Sólo nos falta ver que $\alpha \leq s$ para toda cota superior s de A en X. Si por el contrario existiera una cota superior s de A en X tal que $s < \alpha$. Sea $a \in A$, por la convexidad de Y, $s \in [a, \alpha] \subset Y$, así que $s \in Y$, s es cota superior de A en Y y $s < \alpha$. Esto contradice el hecho de que α es el $\sup A$ en Y y prueba que α también es el $\sup A$ en Y. Por tanto, Y es conexo. ∎

Corolario 2.18 *Sea X un espacio topológico ordenado, conexo y no vacío, entonces X es localmente conexo.*

Demostración. Sea $p \in X$ y sea U un abierto en X tal que $p \in U \subset X$. Como U es abierto, existe un básico canónico G en X tal que $p \in G \subset U \subset X$. Como los básicos canónicos son convexos, el Teorema 2.17 aplicado a G, implica que G es conexo. Así, X es localmente conexo. ∎

Observemos que en un espacio topológico ordenado, conexo y no vacío los subconjuntos abiertos y conexos forman una base de X.

Teorema 2.19 *Sea X un espacio topológico ordenado, compacto, conexo, no degenerado y separable; entonces X es homeomorfo al intervalo* $[0, 1]$.

Demostración. Sea $A = \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto denso numerable en X, y sea D el conjunto de los números diádicos contenidos en el intervalo cerrado $[0, 1]$, definido por:

$$D = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 < k < 2^n \text{ y } k, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Demostraremos que existe un homeomorfismo f definido de $D \cup \{0,1\}$ en A, y posteriormente extenderemos el homeomorfismo a todo el intervalo $[0,1]$ y X.

Notemos que cualquier diádico $\frac{k}{2^n}$ puede ser expresado de la forma $\frac{2r+1}{2^{n+1}}$ con $r, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Consideraremos a los elementos mínimo y máximo de X como elementos del denso A, sólo que con subíndice 0 y -1, respectivamente; es decir, los elementos a_0 y a_{-1} representan el mínimo y el máximo de X.

f debe conservar el orden creciente entre los conjuntos A y D; de esta manera, podremos obtener la inyectividad de f. En otras palabras:

Sea $t = \frac{2r+1}{2^{n+1}} \in D$, notemos que $\frac{2r}{2^{n+1}} < \frac{2r+1}{2^{n+1}} < \frac{2r+2}{2^{n+1}}$. Así que $\frac{r}{2^n} < \frac{2r+1}{2^{n+1}} < \frac{r+1}{2^n}$.

Como queremos que f conserve el orden, debe ocurrir que:

$f\left(\frac{r}{2^n}\right) < f\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right) < f\left(\frac{r+1}{2^n}\right)$.

Definiremos a f como una función $f : D \cup \{0,1\} \to A \cup \{a_0, a_{-1}\}$. Para cada $t \in D \cup \{0,1\}$, escribiremos:

$f(t) = a_{m(t)}$, donde m es una función tal que $m : D \cup \{0,1\} \to \mathbb{N} \cup \{0,-1\}$;

y definida como:

$m(0) = 0$, $m(1) = -1$. Para $m : D \to \mathbb{N}$, definimos, inductivamente sobre n,

$$m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)} < a_{n^*} < a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}\right\}.$$

Entonces, $f(0) = \min X = a_0$ y $f(1) = \max X = a_{-1}$. Notemos que por ser A un conjunto denso en X, para todo $t \in D$, tenemos que $m(t)$ tiene sentido.

Probaremos que f conserva el orden. Es claro que $0 < 1$ y $a_{m(0)} < a_{m(1)}$.

Para el diádico $t = \frac{1}{2}$ tenemos:

$m\left(\frac{1}{2}\right) = m\left(\frac{2(0)+1}{2^{0+1}}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m\left(\frac{0}{2^0}\right)} < a_{n^*} < a_{m\left(\frac{0+1}{2^0}\right)}\right\}$.

Es decir, $m\left(\frac{1}{2}\right) = \min\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m(0)} < a_{n^*} < a_{m(1)}\}$. Así, $0 < \frac{1}{2} < 1$ y $\min X < a_{m\left(\frac{1}{2}\right)} < \max X$.

Para los diádicos $t = \frac{1}{4}$ y $t = \frac{3}{4}$ obtenemos:

$m\left(\frac{1}{4}\right) = m\left(\frac{2(0)+1}{2^{1+1}}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m\left(\frac{0}{2^1}\right)} < a_{n^*} < a_{m\left(\frac{0+1}{2^1}\right)}\right\}$, y

$m\left(\frac{3}{4}\right) = m\left(\frac{2(1)+1}{2^{1+1}}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m\left(\frac{1}{2^1}\right)} < a_{n^*} < a_{m\left(\frac{1+1}{2^1}\right)}\right\}$.

Es decir, $m\left(\frac{1}{4}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m(0)} < a_{n^*} < a_{m\left(\frac{1}{2}\right)}\right\}$ y

$m\left(\frac{3}{4}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m\left(\frac{1}{2}\right)} < a_{n^*} < a_{m(1)}\right\}$. Así, $0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$ y

$a_{m(0)} < a_{m\left(\frac{1}{4}\right)} < a_{m\left(\frac{1}{2}\right)} < a_{m\left(\frac{3}{4}\right)} < a_{m(1)}$.

Este proceso continúa inductivamente, acomodando a los diádicos de la manera siguiente:

Para $n = 1$, hacemos: $a_{m\left(\frac{0}{2^1}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^1}\right)}$.

Para $n = 2$, hacemos: $a_{m\left(\frac{0}{2^2}\right)} < a_{m\left(\frac{1}{2^2}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^2}\right)} < a_{m\left(\frac{3}{2^2}\right)} < a_{m\left(\frac{4}{2^2}\right)}$.

Para $n = 3$, tenemos: $a_{m\left(\frac{0}{2^3}\right)} < a_{m\left(\frac{1}{2^3}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^3}\right)} < \ldots < a_{m\left(\frac{7}{2^3}\right)} < a_{m\left(\frac{8}{2^3}\right)}$.

Suponemos válido para n:

$a_{m\left(\frac{0}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{1}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{3}{2^n}\right)} < \ldots < a_{m\left(\frac{2^n-1}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{2^n}{2^n}\right)}$.

Probaremos que estas desigualdades se cumplen para el sucesor $n+1$. Es decir:

$a_{m\left(\frac{0}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)} < \ldots < a_{m\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}$.

Notemos que nuestra hipótesis de inducción es equivalente a la expresión:

$a_{m\left(\frac{0}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{4}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{6}{2^{n+1}}\right)} < \ldots < a_{m\left(\frac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}$.

De manera que sólo resta demostrar que:

$a_{m\left(\frac{2r}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2r+2}{2^{n+1}}\right)}$ para todo $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $r \leq 2^n - 1$.

Es decir, sólo nos falta ver que:

$a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}$. Pero por hipótesis de inducción

$a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}$ y, precisamente, definimos a $a_{m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right)}$ de tal forma que

$a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}$.

Por tanto f conserva el orden.

Notemos que como consecuencia inmediata f es inyectiva, ya que si

$\frac{k}{2^n} < \frac{s}{2^m}$, entonces $k2^m < s2^n$, de manera que $\frac{k2^m}{2^{n+m}} < \frac{s2^n}{2^{n+m}}$, y por lo anterior, $a_{m\left(\frac{k2^m}{2^{n+m}}\right)} < a_{m\left(\frac{s2^n}{2^{n+m}}\right)}$, es decir, $a_{m\left(\frac{k}{2^n}\right)} < a_{m\left(\frac{s}{2^m}\right)}$. Por tanto f es inyectiva.

Nuestro siguiente paso es probar la suprayectividad de f.

Bastará probar que m es suprayectiva. Sea $m(D)$ la imagen de D en A. Probaremos que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\{1, ..., j+1\} \subset m(D)$. Supongamos, inductivamente, que para toda $i \in \{1, ..., j\}$, existe un diádico $\frac{k_i}{2^{n_i}}$ tal que $m\left(\frac{k_i}{2^{n_i}}\right) = i$. Sea $n = \max\{n_1, ..., n_j\}$.

Si $j+1 \in m\left(\left\{\frac{0}{2^n}, \frac{1}{2^n}, ..., \frac{2^n-1}{2^n}, \frac{2^n}{2^n}\right\}\right)$, entonces no hay nada que probar.

En otro caso, como sabemos que:

$$a_{m\left(\frac{0}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{3}{2^{n+1}}\right)} < \dots < a_{m\left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right)} < a_{m\left(\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}}\right)}$$

y como $a_{j+1} \in A$, entonces existen $\frac{r}{2^n}$, $\frac{r+1}{2^n} \in D$ tales que $a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)} < a_{j+1} < a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}$.

Recordemos que $m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right) = \min\left\{n^* \in \mathbb{N} : a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)} < a_{n^*} < a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}\right\}$. Entonces, $m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right) \leq j+1$.

Por otra parte, si $i \in \{1, ..., j\}$, entonces $a_i = a_{m\left(\frac{k_i}{2^{n_i}}\right)} = a_{m\left(\frac{2^{n-n_i}k_i}{2^n}\right)}$, por lo que no es posible que $a_i \in \left(a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)}, a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}\right)$. Por tanto, $j+1$ es el primer número tal que

$a_{j+1} \in \left(a_{m\left(\frac{r}{2^n}\right)}, a_{m\left(\frac{r+1}{2^n}\right)}\right)$. Es decir, $m\left(\frac{2r+1}{2^{n+1}}\right) = j+1$. Por tanto m es suprayectiva.

Por último probaremos que f es abierta y continua; para ello consideremos solamente los subbásicos de $D \cup \{0,1\}$ y de $A \cup \{a_0, a_{-1}\}$.

Sea $(\leftarrow, x)$ un subbásico de $D \cup \{0,1\}$. Como f conserva el orden, entonces $f((\leftarrow, x)) = (\leftarrow, f(x))$, el cual es un subbásico de $A \cup \{a_0, a_{-1}\}$. Así, f transforma abiertos de $D \cup \{0,1\}$ en abiertos de $A \cup \{a_0, a_{-1}\}$. Por tanto f es una función abierta.

Como f es biyectiva, entonces $f^{-1}((\leftarrow, f(x))) = f^{-1}(f((\leftarrow . x))) = (\leftarrow, x)$. Así, f es continua.

Por tanto $D \cup \{0,1\}$ y $A \cup \{a_0, a_{-1}\}$ son homeomorfos.

El siguiente paso es extender el homeomorfismo a X y al intervalo $[0,1]$, para lo cual definiremos la siguiente función:

Sea $F:[0,1] \to X$ la extensión de f definida como:

$$F(x) = \sup\{f(r) : r \leq x \text{ y } r \in D\}.$$

Probaremos que F está bien definida probando que conserva el orden creciente.

Sean $x, y \in [0,1]$ con $x < y$. Como D es un conjunto denso en $[0,1]$, entonces existen $s, t \in D$ tales que $x < s < t < y$. Así, como f es creciente, $f(s) < f(t)$ y por definición de F, $f(s) < f(t) \leq F(y)$.

Notemos que $f(s) = F(s)$ para todo $s \in D$.

Dada $r \in D$ tal que $r \leq x$, tenemos que $r < s$. De manera que $f(r) < f(s)$. Por tanto, $f(s)$ es cota superior del conjunto que define a $F(x)$. Esto muestra que $F(x) \leq f(s) < f(t) \leq F(y)$. De manera que $F(x) < F(y)$. Por tanto F conserva el orden. En particular, F es inyectiva.

Ahora probaremos que F es suprayectiva.

Sea $w \in X$, queremos encontrar $x \in [0,1]$ tal que $F(x) = w$. Para ello, definiremos $x = \sup\{r \in D : f(r) \leq w\}$ y consideraremos dos casos:

Caso 1.

$F(x) < w$. Entonces, como $A \cup \{a_0, a_{-1}\}$ es denso en X, existe $f(t) \in A$, con $t \in D$, tal que $F(x) < f(t) < w$. Es decir, $F(x) < F(t) < w$. Como F conserva el orden, tenemos que $x < t$, lo cual contradice la definición de x.

Caso 2.

$w < F(x)$. Como $A \cup \{a_0, a_{-1}\}$ es denso en X, existe $f(t) \in A$, con $t \in D$, tal que $w < f(t) < F(x)$. Como F conserva el orden, $t < x$. Entonces, t es una cota superior del conjunto $\{r \in D : f(r) \leq w\}$; de lo contrario existiría $r \in D$ tal que $t < r$ y $F(r) < w < F(t)$, lo cual es una contradicción. Así, t es una cota superior del conjunto $\{r \in D : f(r) \leq w\}$ contradiciendo que x es el supremo.

Por consiguiente, $F(x) = w$. Luego, F es sobre.

De manera similar a f, tenemos que F es abierta y continua, pues, es una función que conserva el orden entre espacios ordenados.

Por tanto X y el intervalo $[0,1]$ son homeomorfos. ■

Corolario 2.20 *Sea X un espacio topológico ordenado y conexo. Si para cualesquiera $x \neq y$ en X, el intervalo cerrado $[x,y]$ es separable, entonces X es arco conexo.*

Demostración. Como X es conexo y $[x, y]$ convexo, entonces por el Teorema 2.17, $[x, y]$ es conexo, y como es acotado, por el Corolario 2.15, $[x, y]$ es compacto. Así que $[x, y]$ cumple con las hipótesis del teorema anterior. Por tanto, $[x, y]$ es homeomorfo al intervalo $[0, 1]$. Por tanto, X es arco conexo. ■

Definición 2.21 *Sean X un espacio topológico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío. A es un conjunto* $\mathbf{G}_\delta$ *si A es la intersección de una colección numerable de abiertos de X.*

Teorema 2.22 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. Entonces, X es primero numerable si y sólo si todo conjunto unitario en X es G_δ.*

Demostración. (Necesidad). Sea $\gamma = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ una base local numerable de $p \in X$ y supongamos por el contrario que $\bigcap\{U_i : i \in \mathbb{N}\} \neq \{p\}$. De manera que existe $q \in X$ tal que $q \neq p$ y $q \in \bigcap\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Como X es un espacio de Hausdorff, por llevar la topología del orden, entonces existen abiertos ajenos V y U conteniendo a q y a p, respectivamente; como γ es base local de p, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in U_{i_0} \subset U$, así que $q \notin U_{i_0}$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $\{p\} = \bigcap\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. Por tanto $\{p\}$ es un conjunto G_δ.

Notemos que en la demostración de la necesidad sólo basta pedir que el espacio sea de Hausdorff.

(Suficiencia). Como $\{p\}$ es G_δ, existe una colección de abiertos $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\{p\} = \bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $V_n = U_1 \cap ... \cap U_n$. Entonces, $\{p\} = \bigcap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ya que cada U_n es abierto, podemos suponer que U_n es un básico canónico. Entonces por el Teorema 1.7 cada V_n es un convexo. Aseguramos que $\beta = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de p en X. Para ver esto, sea U un básico canónico que tiene a p. Consideremos los tres posibles casos para U.

Caso 1.

U es de la forma $U = (\leftarrow, x)$. En este caso, $p < x$. Como $x \neq p$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin V_n$. Aseguramos que $V_n \subset (\leftarrow, x)$. De no ser así, existe $u \in V_n$ tal que $x \leq u$. Ya que $p < x$ y V_n es convexo, $x \in (p, u] \subset V_n$ lo cual es absurdo. Por tanto $p \in V_n \subset (\leftarrow, x)$.

Caso 2.

U es de la forma $U = (y, \rightarrow)$. Este caso se demuestra de manera similar al Caso 1.

Caso 3.

U es de la forma $U = (x, y)$. Como $x, y \neq p$, existen $m \leq n$ tales que $y \notin V_m$ y $x \notin V_n$. Entonces $y, x \notin V_n$. Por el Lema 1.8, como V_n es convexo, $V_n \subset (x, y) = U$.

En cualquier caso existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $p \in V_n \subset U$. Por tanto β es una base local numerable de p en X. ■

Teorema 2.23 *Sea X un espacio topológico ordenado y no vacío. Si X es separable y tiene a lo más un número numerable de pares de puntos consecutivos, entonces X es segundo numerable.*

Demostración. Sea B el conjunto de todos los puntos en X que son parte de un par de puntos consecutivos en X y sea $A \subset X$ un subconjunto denso numerable. Entonces $A \cup B$ es un conjunto numerable.

Proponemos como base numerable para X al conjunto:

$$\gamma = \{(s, t) : s, t \in A \cup B\} \cup \{(s, \rightarrow) : s \in A \cup B\} \cup \{(\leftarrow, t) : t \in A \cup B\}.$$

Claramente γ es numerable. Para ver que γ es base de X, tomemos un básico canónico (x, y) de X y un punto $p \in (x, y)$.

Caso 1.

(x, y) tiene sólo un elemento de X. Entonces, x y $y \in B$. Por tanto $(x, y) \in \gamma$ y $p \in (x, y) \subset (x, y)$.

Caso 2.

(x, y) tiene dos o más elementos de X. Entonces, $(x, p) \neq \emptyset$ o $(p, y) \neq \emptyset$.

Si $(x, p) \neq \emptyset$ y $(p, y) \neq \emptyset$, entonces por ser A denso existen $a, b \in A$ tales que $a \in (x, p)$ y $b \in (p, y)$. Así, $p \in (a, b) \subset (x, y)$ y $(a, b) \in \gamma$.

Si $(x, p) \neq \emptyset$ y $(p, y) = \emptyset$, entonces por ser A denso existe $a \in A$ tal que $a \in (x, p)$. Por otro lado $y, p \in B$. Así, $p \in (a, y) \in \gamma$ y $(a, y) \subset (x, y)$.

El caso $(x, p) = \emptyset$ y $(p, y) \neq \emptyset$ es similar.

Por tanto (x, y) es unión de elementos de γ.

Análogamente los básicos canónicos $(x, \rightarrow)$ y $(\leftarrow, y)$ pueden ser expresados como uniones de elementos de γ. Así, X es segundo numerable. ■

Más adelante, veremos un ejemplo en el que se muestra que la hipótesis de la numerabilidad del conjunto de pares de puntos consecutivos es necesaria en el Teorema 2.23.

Parte II

Continuos no métricos

Capítulo 3

Cuadrado lexicográfico

3.1 Topología del cuadrado lexicográfico

En este capítulo definiremos el cuadrado lexicográfico y demostraremos que es un continuo no métrico que satisface el primer axioma de numerabilidad. Para demostrar la compacidad y la conexidad, utilizaremos algunas propiedades desarrolladas en el capítulo anterior. Veremos que, a diferencia de los continuos metrizables, el cuadrado lexicográfico es un continuo no métrico localmente conexo que no es conexo por trayectorias; y que además no satisface ser un espacio separable y perfectamente normal.

Recordemos que en el Ejemplo 4 de los conjuntos ordenados (página 4) definimos el orden lexicográfico, y probamos que es un orden total. En el caso particular de que $X = I \times I$, donde I es el intervalo unidad, el orden lexicográfico queda determinado de la siguiente manera:

Sean a, b, c y $d \in I$ y $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle \in X$. Entonces, $\langle a, b\rangle \preceq \langle c, d\rangle$ si y sólo si $a < c$ ó $a = c$ y $b \leq d$.

Entonces, el par ordenado (X, τ), donde τ es la topología del orden, es el *cuadrado lexicográfico.*

En la figura 3.1 presentamos un básico característico del cuadrado lexicográfico dado por la región sombreada incluyendo los segmentos AB y CD.

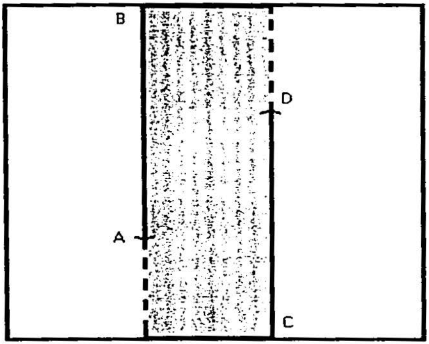


Figura 3.1

Teorema 3.1 *El cuadrado lexicográfico no tiene puntos consecutivos.*

Demostración. Sean $\alpha = \langle a, b\rangle$ y $\beta = \langle c, d\rangle \in X$ tales que $\alpha \prec \beta$.

Caso 1. $a < c$. Entonces, existe $t \in [0, 1]$ tal que $a < t < c$. Así, $\gamma = \langle t, b\rangle$ pertenece a X y $\alpha \prec \gamma < \beta$.

Caso 2. $a = c$ y $b < d$. Entonces, existe $s \in [0, 1]$ tal que $b < s < d$. Así, $\gamma = \langle a, s\rangle$ pertenece a X y $\alpha \prec \gamma < \beta$.

Por tanto X no tiene puntos consecutivos. ■

Teorema 3.2 *El cuadrado lexicográfico es compacto.*

Demostración. Recordemos que en el Teorema 2.11 probamos que un espacio con la topología del orden es compacto si y sólo si es completo y acotado.

Notemos que $\langle 0, 0\rangle$ es el mínimo de X y $\langle 1, 1\rangle$ es el máximo de X. Por tanto X es acotado.

Por otra parte, sea A un conjunto no vacío en X y sea:

$$C = \{x \in [0, 1] : \langle x, y\rangle \in A \text{ para algún } y \in [0, 1]\}.$$

Notemos que $C \subset [0,1]$ y $C \neq \emptyset$, por lo cual tiene supremo. Sea $\alpha = \sup C$.

Probaremos que si $A \cap \{\langle \alpha, y \rangle : 0 \leq y \leq 1\} = \emptyset$, entonces $\langle \alpha, 0 \rangle$ es el supremo de A.

Primero probaremos que $\langle \alpha, 0 \rangle$ es cota superior de A.

Como $\alpha = \sup C$ y $A \cap \{\langle \alpha, y \rangle : 0 \leq y \leq 1\} = \emptyset$, entonces para cada $\langle x, y \rangle \in A$ tenemos que $x < \alpha$. De manera que $\langle x, y \rangle \prec \langle \alpha, 0 \rangle$ para todo $\langle x, y \rangle \in A$. Por tanto $\langle \alpha, 0 \rangle$ es cota superior de A.

Ahora probaremos que $\langle \alpha, 0 \rangle$ es la mínima cota superior.

Si $\langle \alpha, 0 \rangle$ no fuera el supremo de A, entonces tomemos una cota superior $\langle \beta, v \rangle$ de A menor que $\langle \alpha, 0 \rangle$. Así, $u \leq \beta < \alpha$ para toda $u \in C$, pero esto contradice que α es el supremo de C. Por tanto $\langle \alpha, 0 \rangle$ es el supremo de A.

Ahora supongamos que $A \cap \{\langle \alpha, y \rangle : 0 \leq y \leq 1\} \neq \emptyset$. Sea $v = \sup\{y \in [0,1] : \langle \alpha, y \rangle \in A\}$.

Mostraremos que $\langle \alpha, v \rangle$ es el supremo de A.

Primero probaremos que $\langle \alpha, v \rangle$ es cota superior de A.

Sea $\langle x, y \rangle \in A$ y consideremos dos casos:

Caso 1. $x < \alpha$, claramente $\langle x, y \rangle \prec \langle \alpha, v \rangle$. Así, $\langle \alpha, v \rangle$ es cota superior de A.

Caso 2. $x = \alpha$. Entonces, como $v = \sup\{y \in [0,1] : \langle \alpha, y \rangle \in A\}$, tenemos que $y \leq v$. De manera que $\langle x, y \rangle \preceq \langle \alpha, v \rangle$. Así, $\langle \alpha, v \rangle$ es cota superior de A.

Ahora probaremos que $\langle \alpha, v \rangle$ es la mínima cota superior. Supongamos por el contrario que existe una cota superior $\langle \beta, z \rangle$ de A menor que $\langle \alpha, v \rangle$. Entonces, $\langle x, y \rangle \preceq \langle \beta, z \rangle \prec \langle \alpha, v \rangle$ para todo $\langle x, y \rangle \in A$, y, entonces $x \leq \beta$ para toda $x \in C$.

Si $\beta < \alpha$. Entonces, $\beta < \sup C$, lo cual es absurdo, pues α es el supremo de C.

Si $\beta = \alpha$. Entonces, para todo $\langle \alpha, y \rangle \in A$, tenemos que $y \leq z < v$. Lo cual también es absurdo, pues $v = \sup\{y \in [0,1] : \langle \alpha, y \rangle \in A\}$.

Por tanto $\langle \alpha, v \rangle$ es el supremo de A.

Así, hemos demostrado que todo subconjunto no vacío de X tiene supremo. Por tanto, X es completo, y por ser acotado es compacto. ■

Teorema 3.3 *El cuadrado lexicográfico es conexo y localmente conexo.*

Demostración. Observemos que el cuadrado lexicográfico cumple con las hipótesis del Corolario 2.14, por lo cual es conexo; y por el Corolario 2.18, también es localmente conexo. ■

Teorema 3.4 *El cuadrado lexicográfico es primero numerable.*

Demostración. Sea $p = \langle a, b\rangle$, donde $0 \leq a \leq b \leq 1$. Si $p \neq \langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle$, entonces los básicos del cuadrado lexicográfico que tienen a p pueden ser tomados de la forma (x, y). En el caso en que $p = \langle 0,0\rangle$, los básicos pueden ser tomados de la forma $(\leftarrow, y)$ y, en el caso en que $p = \langle 1,1\rangle$, pueden ser tomados de la forma $(y, \rightarrow)$.

Para probar nuestra afirmación consideraremos cinco casos y propondremos una base local numerable distinta para cada caso.

Caso 1. $0 \leq a \leq 1$ y $0 < b < 1$. Entonces, proponemos la familia:

$$\beta_1 = \{(\langle a, w\rangle, \langle a, z\rangle) : w, z \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \text{ y } w < b < z\}.$$

Caso 2. $0 < a \leq 1$ y $b = 0$. Proponemos la familia:

$$\beta_2 = \{(\langle t, 1\rangle, \langle a, z\rangle) : t \in [0, a) \cap \mathbb{Q} \text{ y } z \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Caso 3. $a = 0$ y $b = 0$. Entonces, proponemos la familia:

$$\beta_3 = \{(\leftarrow, \langle 0, z\rangle) : z \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Caso 4. $0 \leq a < 1$ y $b = 1$. Entonces, proponemos la familia:

$$\beta_4 = \{(\langle a, w\rangle, \langle t, 0\rangle) : w \in [0,1) \cap \mathbb{Q} \text{ y } t \in (a, 1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Caso 5. $a = 1$ y $b = 1$. Entonces, proponemos la familia:

$$\beta_5 = \{(\langle 1, w\rangle, \rightarrow) : w \in [0,1) \cap \mathbb{Q}\}.$$

Notemos que en cada caso, β_i sirve de base local numerable en p. Por tanto el cuadrado lexicográfico es primero numerable. ■

Teorema 3.5 *El cuadrado lexicográfico no es separable.*

Demostración. Sea L el subespacio de X definido por $C = \{\langle x, y\rangle : 0 \leq x \leq 1 \text{ y } y = \frac{1}{2}\}$ y para cada $x \in [0,1]$ sea U_x el abierto en X definido por $U_x = \{\langle x, y\rangle : \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}\}$. Entonces la familia de intervalos abiertos $\{U_x : 0 \leq x \leq 1\}$ es una colección no numerable de abiertos ajenos. Si D es un subconjunto denso de X, para cada $x \in [0,1]$, existe un punto $d_x \in D \cap U_x$. Si $x \neq w$, $d_x \neq d_w$ pues $U_x \cap U_w = \emptyset$. De manera que $\{d_x \in D : x \in [0,1]\}$

es no numerable. Por tanto D es no numerable. Esto demuestra que X no es separable. ■

Recordemos que en el Teorema 2.23 hicimos mención de que la hipótesis de la numerabilidad en el conjunto de pares de puntos consecutivos en un espacio ordenado y separable es necesaria para que este sea segundo numerable. A continuación daremos un ejemplo que muestra la necesidad de tal hipótesis.

Consideremos solamente la parte superior y la parte inferior del cuadrado lexicográfico, es decir, consideremos el conjunto $X = \{I \times \{0\}\} \cup \{I \times \{1\}\}$, donde I es el intervalo unitario.

Notemos que X tiene una infinidad de parejas de puntos consecutivos, a saber, la familia de todas las parejas de puntos de la forma $\{\langle x, 0\rangle$ y $\langle x, 1\rangle : 0 \leq x \leq 1\}$. Por otra parte, notemos que X es separable, pues el conjunto $D = \{(I \times \{0\}) \cap \mathbb{Q}\} \cup \{(I \times \{1\}) \cap \mathbb{Q}\}$ es un subconjunto denso y numerable de X.

Probaremos que X no es segundo numerable.

Supongamos por el contrario que X es segundo numerable. Entonces su subespacio $Y = [0, 1] \times \{0\}$ también es segundo numerable. Ahora veamos cual es la topología inducida en Y. Tomemos pues un elemento $p = \langle a, 0\rangle \in Y$ y sean $x = \langle u, v\rangle$ y $y = \langle w, z\rangle$ tales que $x < p < y$. Entonces $u < a$ (no es posible que $u = a$ y $v < 0$), además $a < w$ o $a = w$ y $0 < z$. Entonces, $u < a$ y existe $0 < q < 1$ tal que $p = \langle a, 0\rangle \prec \langle a, q\rangle \prec \langle w, z\rangle = y$. De manera que $p \in (\langle \frac{a+u}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \langle a, q\rangle) \subset (x, y)$. Notemos que $(\langle \frac{a+u}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \langle a, q\rangle) \cap Y = (\frac{a+u}{2}, a] \times \{0\}$. Por tanto, dado un punto de Y de la forma $\langle a, 0\rangle$ con $0 < a \leq 1$, una base local está constituida mediante los conjuntos de la forma $(t, a] \times \{0\}$ con $0 < t < a$. Similarmente, $\{\langle 0, 0\rangle\}$ es un abierto en Y. Por tanto, Y tiene la topología de la recta de Sorgenfrey restringida a un intervalo cerrado.

Como Y es segundo numerable y esta propiedad se hereda bajo productos finitos, tenemos que $Y \times Y$ es segundo numerable. Ahora consideremos el subespacio $\Delta = \{\langle x, -x+1\rangle : \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\}$. Entonces, la familia de básicos $\gamma = \{(a, u] \times (c, -u+1] : 0 < a < u$ y $0 < c < -u+1$ y $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{3}{4}\}$ inducen la topología discreta en Δ. De manera que Δ es un subespacio de $Y \times Y$ que no es segundo numerable. Por tanto, X no es segundo numerable.

Teorema 3.6 *El cuadrado lexicográfico no es conexo por trayectorias.*

Demostración. Recordemos que un espacio topológico X es conexo por trayectorias si para cualesquiera dos puntos $a, b \in X$ existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

Supongamos por el contrario que X es conexo por trayectorias. Entonces, en particular existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow X$ tal que $f(0) = \langle 0, 0 \rangle$ y $f(1) = \langle 1, 1 \rangle$. Por otro lado observemos que $f([0,1])$ cumple con las hipótesis del Corolario 2.16, es decir, $f([0,1])$ es conexo y está contenido en un espacio ordenado, por consiguiente es convexo. Así, $[f(0), f(1)] \subset f([0,1])$, es decir, $f([0,1]) = X$. Por tanto f es sobre.

Para cada $x \in [0,1]$ definamos el básico $U_x = \{\langle x, y \rangle : \frac{1}{4} < y < \frac{3}{4}\}$. Entonces, la familia $\{U_x : 0 \leq x \leq 1\}$ es una familia no numerable de básicos ajenos dos a dos en X. Como f es sobre, para cada $x \in [0,1]$, el abierto $f^{-1}(U_x)$ es diferente del vacío y al ser f continua tenemos que la familia $\{f^{-1}(U_x) : 0 \leq x \leq 1\}$ es una familia no numerable de abiertos no vacíos y ajenos dos a dos en $[0,1]$.

Como $f^{-1}(U_x)$ pertenece a la topología usual de $[0,1]$, existe un básico (a, b) no vacío de la topología usual de $\mathbb{R}$ tal que $(a, b) \subset f^{-1}(U_x) \subset [0,1]$. De manera que para cada $x \in [0,1]$ tenemos que $f^{-1}(U_x)$ tiene números racionales, contradiciendo el hecho de que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Por tanto el cuadrado lexicográfico no es conexo por trayectorias. ■

Teorema 3.7 *El cuadrado lexicográfico no es perfectamente normal.*

Demostración. Recordemos que un espacio topológico no vacío X es un *espacio* G_δ o *perfecto*, si todo subconjunto cerrado de X es un subconjunto G_δ. Llamamos a X un espacio topológico *perfectamente normal* si X es un espacio normal y G_δ.

Notemos que el cuadrado lexicográfico es un espacio normal, pues lleva la topología del orden, probaremos que este espacio no es un espacio G_δ. Para lo cual consideraremos nuevamente el subconjunto $Y = (I \times \{0\}) \cup (I \times \{1\})$, donde $I = [0,1]$.

Notemos que para todo punto $p = \langle a, b \rangle$ con $0 < b < 1$, la vecindad $(\langle a, \frac{b}{2} \rangle, \langle a, \frac{b+1}{2} \rangle)$ no intersecta a Y. Así que Y es cerrado en X.

Ahora, supongamos, por el contrario, que Y es un subconjunto G_δ, y sea $\mathcal{F} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de abiertos en X tales que $Y = \bigcap \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Para cada punto $p = \langle a, 1 \rangle$, con $0 \leq a \leq 1$, y cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un básico de la forma $B_{p,n} = (\langle a, w_{p,n} \rangle, \langle t_{p,n}, 0 \rangle)$ tal que $0 \leq w_{p,n} < 1$, $a < t_{p,n}$

y $p \in B_{p,n} \subset U_n$. Sea $V_{p,n} = B_{p,n} \cap \left(I \times \{\frac{1}{2}\}\right)$. Notemos que $V_{p,n} \subset U_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos el subconjunto $I \times \{\frac{1}{2}\}$ con la topología usual τ_u que hereda del plano, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $D_n = int_{\tau_u}(\bigcup\{V_{p,n} : p \in I \times \{1\}\})$. Entonces, $D_n \subset U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ahora probaremos que el subconjunto D_n es denso en $I \times \{\frac{1}{2}\}$ (con la topología τ_u). Sea $q = \langle a, \frac{1}{2}\rangle$ y G un básico de la topología usual de $I \times \{\frac{1}{2}\}$ de la forma $G = (x, y) \times \{\frac{1}{2}\}$ tal que $a \in (x, y)$ (los casos $G = [0, y) \times \{\frac{1}{2}\}$ y $G = (x, 1] \times \{\frac{1}{2}\}$ se demuestran de manera similar). Hacemos $p = \langle a, 1\rangle$. Como $a < y$ y $a < t_{p,n}$, podemos elegir un número $b \in (a, y) \cap (a, t_{p,n})$. Entonces $(b, \frac{1}{2}) \in G \cap int_{\tau_u}(V_{p,n}) \subset G \cap D_n$.

Así que la familia $D = \{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de subconjuntos densos en $I \times \{\frac{1}{2}\}$. Como cada D_n es abierto en $I \times \{\frac{1}{2}\}$ y $I \times \{\frac{1}{2}\}$ es un espacio de Baire, entonces $\bigcap\{D_n : n \in \mathbb{N}\}$ es densa en $I \times \{\frac{1}{2}\}$. Pero $\bigcap\{D_n : n \in \mathbb{N}\} \subset (\bigcap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}) \cap \left(I \times \{\frac{1}{2}\}\right) = \emptyset$, lo cual es un absurdo y muestra que Y no es G_δ.

Por tanto, X no es un espacio G_δ, así, X no es perfectamente normal. ■

Capítulo 4

La línea larga y su extensión

En este capítulo construiremos y definiremos los números ordinales, la línea larga y su extensión.

Demostraremos algunas propiedades importantes que satisfacen la línea larga y su extensión. Por otra parte, veremos que la línea larga extendida es un continuo no métrico que al igual que el cuadrado lexicográfico satisface ser localmente conexa, pero no arco conexa. También demostraremos que la línea larga extendida no es perfectamente normal.

Para finalizar este capítulo estudiaremos el producto cartesiano $L^{*} \times L^{*}$. Aquí sólo demostramos que este espacio es un continuo no métrico que, a diferencia de los continuos metrizables, no es completamente normal. Esto se hace aprovechando las propiedades estudiadas de la línea larga.

4.1 Construcción del espacio ordinal $[0, w_1]$

Sea X un conjunto no numerable; por el lema de Zorn podemos suponer que se le puede dar un buen orden. Consideremos un punto $p \notin X$. Extendemos el orden de X al conjunto $X^{*} = X \cup \{p\}$ imponiendo las condiciones siguientes:

1) $p \preceq p$;

2) Para cualquier $x \in X$, $x \prec p$.

Probaremos que X^{*} es un conjunto bien ordenado.

Sea A un subconjunto no vacío contenido en X^{*}. Entonces $A = \{p\}$ ó $A \cap X \neq \emptyset$.

Si $A = \{p\}$, entonces claramente A tiene primer elemento, el mismo p.

Si $A \cap X \neq \emptyset$, como $A \cap X$ es un subconjunto de X, entonces $A \cap X$ tiene primer elemento, el cual a su vez será el primer elemento de A visto como subconjunto de X^*. Por tanto, X^* también tiene un buen orden (el extendido por X).

Definamos como 0 al primer elemento de X^*.

Sea $w_1 = \min\{x \in X^* : [0, x]$ es no numerable$\}$. Observemos que dicho elemento debe existir debido a la existencia del punto p.

Notemos que el conjunto $[0, w_1]$ hereda el buen orden que ya se tenía del conjunto X^*.

A los elementos de $[0, w_1]$ les llamaremos *números ordinales.*

4.2 Los primeros elementos de $[0, w_1]$

Llamemos 1 al mínimo de $[0, w_1] \setminus \{0\}$. Observemos que $0 < 1$, y que no hay ningún elemento entre 0 y 1 (mayor que 0 y menor que 1). Ahora llamemos 2 al mínimo de $[0, w_1] \setminus \{0, 1\}$, notemos que no hay ningún elemento entre 1 y 2. Si seguimos con este proceso, podemos construir una copia ordenada de los números naturales en $[0, w_1]$, además los podemos colocar en orden: $0 < 1 < 2 < 3 < ...$ Notemos que no hemos agotado los elementos de $[0, w_1]$ pues este conjunto es no numerable. Entonces podemos tomar el mínimo del conjunto $[0, w_1] \setminus \{0, 1, 2, 3, ...\}$ y llamarle ω. Notemos que ω es mayor que todos los números naturales. Ahora podemos tomar el mínimo de $[0, w_1] \setminus (\{0, 1, 2, 3, ...\} \cup \{\omega\})$. A este elemento lo denotaremos por $\omega + 1$. Si continuamos por este camino, ahora podemos construir otra copia de los números naturales y acomodar a todos los elementos que llevamos de la siguiente manera: $0 < 1 < 2 < 3 < ...\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < ...$ Hasta ahora sólo hemos tomado una cantidad numerable de elementos de $[0, w_1]$, por lo que no hemos agotado a sus elementos. Podemos entonces llamar a $\omega 2$ al mínimo de $[0, w_1] \setminus (\{0, 1, 2. 3, ...\} \cup \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, ...\})$, y comenzar de nuevo el proceso. De esta manera podemos construir otra copia de los números naturales que quedará ordenada de la siguiente manera:

$0 < 1 < 2 < 3 < ...\omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < ... < \omega 2 < \omega 2 + 1 < \omega 2 + 2 < \omega 2 + 3 < ...$ Este proceso se puede continuar obteniendo más copias de los números naturales, y así construir $\omega 3$, $\omega 4$, $\omega 5$, etc. Una vez que se construyen todos los ωn, seguimos teniendo una cantidad numerable de elementos y el complemento $[0, w_1] \setminus (\{0, 1, 2, ...\} \cup \{\omega, \omega + 1, \omega + 2, ...\} \cup$

$\{\omega 2, \omega 2+1, \omega 2+2, ...\} \cup ... \cup \{wn, wn+1, wn+2, ...\})$, sigue siendo no numerable. Por lo que podemos llamar $\omega\omega$ al mínimo de dicho conjunto. Al elemento que le sigue se le llama $\omega\omega+1$. Notemos que este proceso no termina, porque si construimos inductivamente más elementos, siempre tendremos una cantidad numerable. De esta manera hemos mostrado cuáles son los primeros elementos de $[0, w_1]$.

Sean α y γ elementos cualesquiera en $[0, w_1]$, decimos que α *precede* a γ o que γ es un *sucesor* de α si $\alpha < \gamma$.

Decimos que α es el *predecesor inmediato* de γ (o que γ es el *sucesor inmediato* de α) si γ es el ordinal sucesor de α más pequeño (denotamos a γ como $\alpha+1$).

También decimos que α es un *ordinal límite* si $\alpha \neq 0$ y α no es un sucesor inmediato de nadie. Es decir, si para todo ordinal $\xi < \alpha$, se tiene que $\alpha \neq \xi + 1$.

Notemos que todo ordinal tiene un sucesor inmediato ($\alpha < \alpha + 1$), pero no todo ordinal tiene un predecesor inmediato, por ejemplo w y w_1 no lo tienen.

Denotaremos al espacio ordinal $[0, w_1]$ como Ω.

Si a Ω le damos la topología inducida por β (la base de la topología del orden), entonces Ω es un espacio topológico ordenado.

Cuando no consideremos al punto w_1 en Ω, entonces el subespacio $[0, w_1)$ será denotado como Ω_0.

4.3 Tres propiedades de Ω_0

Lema 4.1 *Todo subconjunto $A \subset \Omega_0$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.*

Demostración. Sea $C = \{\gamma \in \Omega_0 : \gamma$ es cota superior de $A\}$. Como $C \subset \Omega_0$, entonces C tiene primer elemento en $[0, w_1)$. Así, A tiene una cota superior mínima. ■

Teorema 4.2 *Todo subconjunto numerable $A \subset \Omega_0$ no vacío tiene supremo.*

Demostración. Dada $\alpha \in A$, el intervalo $[0, \alpha]$ es numerable, de lo contrario $w_1 \leq \alpha$, lo cual es absurdo. Así, el conjunto $B = \bigcup\{[0, \alpha] : \alpha \in A\}$ es numerable. De manera que $\Omega_0 \setminus B$ es no numerable y, en particular, tiene primer elemento γ. Como $\gamma \notin B$, entonces tampoco pertenece a ningún conjunto de la forma $[0, \alpha]$, donde $\alpha \in A$. Por tanto $\alpha < \gamma$ para toda $\alpha \in A$. Así, γ es una cota superior de A, y por el Lema 4.1, A tiene supremo. ∎

Teorema 4.3 *Si $f : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_0$ es tal que $f(0) = 0$ y para cada $\alpha \in \Omega_0 \setminus \{0\}$, $f(\alpha) < \alpha$, entonces, existe un punto $\beta_0 \in \Omega_0$ tal que para todo $\beta \in \Omega_0$, existe $\lambda \geq \beta$ tal que $f(\lambda) \leq \beta_0$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que para todo $\beta_0 \in \Omega_0$ existe β tal que para todo $\lambda \geq \beta$ se tiene que $f(\lambda) > \beta_0$. Dada $\beta_0 \in \Omega_0$, notemos que el conjunto $B = \{\beta \in \Omega_0 : \text{ para toda } \lambda \geq \beta,\ f(\lambda) > \beta_0\}$ está contenido en Ω_0, de manera que tiene primer elemento. Definamos las funciones $g : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_0$ por:

$$g(\beta_0) = \min\{\beta \in \Omega_0 : \text{ para toda } \lambda \geq \beta,\ f(\lambda) > \beta_0\},$$

y $h : [0, w) \longrightarrow \Omega_0$ dada por:

$$h(0) = 0 \text{ y } h(\alpha + 1) = g(h(\alpha)) \text{ para toda } \alpha \in [0, w).$$

Notemos que el conjunto $A = \{h(\alpha) : \alpha \in [0, w)\}$ es numerable y está contenido en Ω_0. De manera que por el Teorema 4.2, A tiene supremo, el cual llamaremos γ. Notemos que $g(0) = \min\{\beta \in \Omega_0 : \text{ para toda } \lambda \geq 0,\ f(\lambda) > 0\}$, como $f(0) = 0$, 0 no pertenece a este conjunto, así que $g(0) > 0$. Si ocurriera que $h(\alpha) = 0$ para alguna $\alpha \in [0, w)$, entonces $h(\alpha + 1) = g(0) > 0$. Así que $h(\alpha + 1) > 0$. Con esto hemos mostrado que $A \neq \{0\}$. Por tanto $\gamma > 0$. Entonces $f(\gamma) < \gamma$. Por otra parte, como $g(h(\alpha)) = h(\alpha + 1) \leq \gamma$ para toda $\alpha \in [0, w)$, entonces por definición $h(\alpha+1) = \xi$, donde $\xi = \min\{\beta \in \Omega_0 : \text{para toda } \lambda \geq \beta,\ f(\lambda) > h(\alpha)\}$; en particular como $\xi \leq \gamma$, entonces $f(\gamma) > h(\alpha)$ para toda $\alpha \in [0, w)$. Es decir, $f(\gamma)$ es una cota superior de A, así que $\gamma \leq f(\gamma)$, lo cual es absurdo, pues $f(\gamma) < \gamma$. Por tanto, existe un punto $\beta_0 \in \Omega_0$ tal que para todo $\beta \in \Omega_0$, existe $\lambda \geq \beta$ tal que $f(\lambda) \leq \beta_0$. ∎

4.4 La línea larga y su extensión

Consideremos el producto cartesiano $L = \Omega_0 \times [0,1)$, donde $[0,1)$ es el intervalo unidad de números reales abierto superiormente. Asignemos el orden lexicográfico a L. Entoces, L es un espacio topológico ordenado, al cual llamaremos *la línea larga.*

Similarmente, consideremos el producto cartesiano $L^* = \Omega \times [0,1) \setminus \{\langle w_1, t\rangle : 0 < t < 1\}$ y asignemos el orden lexicográfico a L^*. Llamaremos a L^* *la línea larga extendida.*

A continuación probaremos algunas de las propiedades más importantes de L y L^*.

Teorema 4.4 *La línea larga y su extensión no tienen puntos consecutivos.*

Demostración. Sean α y $\beta \in \Omega$ y sean x y $y \in [0,1)$. Consideremos los puntos $\langle\alpha, x\rangle$ y $\langle\beta, y\rangle \in L^*$ tales que $\langle\alpha, x\rangle \prec \langle\beta, y\rangle$.

Consideremos los siguientes dos casos:

Caso 1. $\alpha \prec \beta$. Entonces, existe $\frac{x+1}{2} \in (0,1)$ tal que $\langle\alpha, x\rangle \prec \langle\alpha, \frac{x+1}{2}\rangle \prec \langle\beta, y\rangle$ y $\langle\alpha, x\rangle, \langle\beta, y\rangle$ no son consecutivos.

Caso 2. $\alpha = \beta$. Entonces, $\langle\alpha, x\rangle \prec \langle\alpha, \frac{x+y}{2}\rangle \prec \langle\beta, y\rangle$, y $\langle\alpha, x\rangle, \langle\beta, y\rangle$ no son consecutivos.

Por tanto la línea larga y su extensión no tienen puntos consecutivos. ∎

Teorema 4.5 *La línea larga y su extensión satisfacen la propiedad del supremo.*

Demostración. Haremos la prueba para L, la demostración para L^* será entonces una consecuencia inmediata.

Sea $A \subset L$ un subconjunto no vacío y acotado superiormente, y sea

$$B = \{\alpha \in \Omega_0 : \text{ existe } x \in [0,1) \text{ tal que } \langle\alpha, x\rangle \in A\}.$$

Primero probaremos que B tiene supremo en Ω_0.

Como $A \neq \emptyset$ existe $\langle\alpha, x\rangle \in A$, de manera que $\alpha \in B$, así, B no es vacío.

Por otro lado, como A está acotado superiormente, existe $\langle\beta, z\rangle \in L$ tal que $\langle\alpha, x\rangle \preceq \langle\beta, z\rangle$ para todo $\langle\alpha, x\rangle \in A$. Luego $\alpha \leq \beta$ para toda $\alpha \in A$ y

β es cota superior de B, y como $B \subset \Omega_0$, entonces por el Lema 4.1, B tiene supremo.

Sea $\gamma = \sup B$. Analizaremos dos casos para probar que A tiene supremo en L.

Caso 1. $\gamma \notin B$. Entonces, $\langle \gamma, 0 \rangle$ es una cota superior de A, ya que no existe ningún elemento $x \in [0,1)$ tal que $\langle \gamma, x \rangle \in A$. Probaremos que $\langle \gamma, 0 \rangle$ es el supremo de A.

Supongamos por el contrario que existe un elemento $\langle \lambda, y \rangle \in L$ tal que $\langle \lambda, y \rangle \prec \langle \gamma, 0 \rangle$ y para todo $\langle \alpha, x \rangle \in A$, $\langle \alpha, x \rangle \preceq \langle \lambda, y \rangle$. Entonces $\lambda < \gamma$. De manera que λ es una cota superior de B menor que γ, lo cual contradice que γ es el supremo de B. Así, $\sup A = \langle \gamma, 0 \rangle$.

Caso 2. $\gamma \in B$. Entonces tenemos dos subcasos:

i) El conjunto $\{x \in [0,1) : \langle \gamma, x \rangle \in A\}$ está acotado superiormente en el intervalo $[0,1)$. Entonces, claramente el punto $\langle \gamma, \sup\{x \in [0,1) : \langle \gamma, x \rangle \in A\} \rangle$ es el supremo de A.

ii) El conjunto $\{x \in [0,1) : \langle \gamma, x \rangle \in A\}$ no está acotado superiormente en el intervalo $[0,1)$. Entonces, probaremos que el supremo de A es precisamente el punto $\langle \gamma + 1, 0 \rangle$.

Supongamos por el contrario que el punto $\langle \gamma + 1, 0 \rangle$ no es el supremo de A, entonces existe $\langle \gamma, y \rangle \in L$ tal que $\langle \gamma, y \rangle \prec \langle \gamma + 1, 0 \rangle$ y $\langle \gamma, x \rangle \preceq \langle \gamma, y \rangle$ para todo $\langle \gamma, x \rangle \in A$. Entonces, y sería una cota superior del conjunto $\{x \in [0,1) : \langle \gamma, x \rangle \in A\}$ en $[0,1)$, lo cual es contrario a nuestra suposición. Por tanto $\langle \gamma + 1, 0 \rangle$ es el supremo de A.

Por tanto L tiene la propiedad del supremo.

Para ver que L^* también satisface esta propiedad, consideremos un conjunto no vacío $A \subset L^*$. Claramente A tiene cota superior por estar contenido en L^*.

Si $A \subset L$, entonces por lo anterior A tiene supremo en L.

Si $A \cap \{w_1\} \neq \emptyset$, entonces claramente w_1 es el supremo de A.

Por tanto L^* también tiene la propiedad del supremo. ■

Teorema 4.6 *La cerradura de L es L^*.*

Demostración. Notemos que los básicos que contienen a w_1 son de la forma $(x, w_1]$ para alguna $x \in L$, de manera que w_1 es un punto de acumulación de L. Por consiguiente, $L^* = Cl(L)$. ■

Teorema 4.7 *La línea larga y su extensión son conexos.*

Demostración. Como L y L^* no tienen puntos consecutivos y cualquier subconjunto acotado superiormente en L y L^* tiene supremo en L y L^*, respectivamente, entonces, se cumplen las condiciones *iii*) del Teorema 2.13 del axioma de Dedekind.

Por tanto L y L^* son conexos. ■

Teorema 4.8 *Todo conjunto numerable en L tiene supremo en L.*

Demostración. Sea $C = \{\langle \alpha_n, x_n \rangle : \alpha_n \in \Omega_0 \text{ y } x_n \in [0,1) \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto numerable en L; y consideremos al conjunto:

$$B = \{\alpha_n \in \Omega_0 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Como C es numerable, entonces B es numerable. Por el Teorema 4.2, B tiene supremo en Ω_0. Sea β tal supremo; entonces C está acotado superiormente por $\beta + 1$. Como L satisface la propiedad del supremo, C tiene supremo en L. ■

Teorema 4.9 *La línea larga no es de Lindelof.*

Demostración. Probaremos que $C = \{(\leftarrow, \langle \alpha, 0 \rangle) : \alpha \in [0, w_1)\}$ es una cubierta abierta de L, la cual no posee una subcubierta numerable.

Sea $p = \langle \lambda, z \rangle \in L$. Entonces $p \prec \langle \lambda + 1, 0 \rangle$. Por tanto $p \in (\leftarrow, \langle \lambda + 1, 0 \rangle)$. Así, C es una cubierta abierta de L.

Por otro lado, C no puede tener una subcubierta numerable, pues de existir una, sería de la forma $\{(\leftarrow, \langle \alpha_i, 0 \rangle) : i \in \mathbb{N}\}$. Pero el conjunto $\{\alpha_i : i \in \mathbb{N}\}$ tiene una cota superior λ en $[0, w_1)$. Entonces, $\langle \lambda + 1, 0 \rangle$ no pertenece a ningún conjunto $(\leftarrow, \langle \alpha_i, 0 \rangle)$. Este absurdo completa la prueba de que la línea larga no es un espacio de Lindelof. ■

Teorema 4.10 *La línea larga no es separable.*

Demostración. L no puede contener un subconjunto denso numerable, pues todo conjunto numerable tiene supremo $\beta \in L$ tal que $\beta < w_1$ y $(\beta, w_1) \neq \emptyset$. ■

Teorema 4.11 *La línea larga es primero numerable.*

Demostración. Sea $p = \langle \lambda, z \rangle \in L$, consideremos dos casos:

Caso 1. $z > 0$. Entonces, proponemos como base local numerable de p a la familia:

$$\gamma = \left\{ \left(\langle \lambda, z - \frac{1}{n} \rangle, \langle \lambda, z + \frac{1}{n} \rangle \right) : n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} < 1 - z \text{ y } \frac{1}{z} < n \right\}.$$

Claramente γ es una base numerable para el punto p.

Caso 2. $z = 0$. Entonces:

Si λ es un ordinal sucesor en Ω_0, de modo que $\lambda = \alpha + 1$, proponemos como base local numerable de p a la familia:

$$\gamma = \left\{ \left(\langle \alpha, \frac{n-1}{n} \rangle, \langle \lambda, \frac{1}{n} \rangle \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Si λ es un ordinal límite en Ω_0, proponemos como base local numerable de p a la familia:

$$\gamma = \left\{ \left(\langle \alpha, 0 \rangle, \langle \lambda, \frac{1}{n} \rangle \right) : n \in \mathbb{N} \text{ y } \alpha < \lambda \right\}.$$

Comprobaremos, en este caso, que γ es una base local de p en X. Bastará probar que p es un punto de acumulación del conjunto $\{\langle \alpha, 0 \rangle \in L : \alpha < \lambda\}$ y de la sucesión $\{\langle \lambda, \frac{1}{n} \rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Claramente p es un punto de acumulación de la sucesión $\{\langle \lambda, \frac{1}{n} \rangle\}_{n=1}^{\infty}$, pues como $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0, ésta converge a p por la derecha. De manera que p es un punto de acumulación de $\{\langle \lambda, \frac{1}{n} \rangle\}_{n=1}^{\infty}$.

Por otra parte, como λ es un ordinal límite en Ω_0, dado un abierto U del punto p, tenemos que existe un básico de la forma $(\langle \alpha_0, x \rangle, \langle \lambda, y \rangle)$. donde $\alpha_0 < \lambda$, $x \in [0, 1)$ y $y > 0$. Entonces, $\alpha_0 + 1 < \lambda$ y $\langle \alpha_0 + 1, 0 \rangle \in (\langle \alpha_0 . x \rangle, \langle \lambda, y \rangle) \cap \{\langle \alpha, 0 \rangle \in L : \alpha < \lambda\}$. Así que p es un punto de acumulación del conjunto $\{\langle \alpha, 0 \rangle \in L : \alpha < \lambda\}$. Por tanto, cualquier abierto de p contiene un básico de la forma $(\langle \alpha, 0 \rangle, \langle \lambda, \frac{1}{n} \rangle)$.

Por tanto L es primero numerable. ■

Teorema 4.12 *La línea larga es arco conexa.*

Demostración. Dados cualesquiera dos puntos $\langle\alpha, x\rangle, \langle\beta, y\rangle \in L$ tales que $\langle\alpha, x\rangle \prec \langle\beta, y\rangle$, el conjunto

$$C = \{\langle\lambda, r\rangle : \lambda \in [\alpha, \beta] \text{ y } r \in [0,1) \cap \mathbb{Q}\} \cap [\langle\alpha, x\rangle, \langle\beta, y\rangle],$$

es un subconjunto denso y numerable del intervalo cerrado $[\langle\alpha, x\rangle, \langle\beta, y\rangle]$. Además, como L es conexa, L cumple con las hipótesis del Corolario 2.20, de manera que L es arco conexa. ■

Teorema 4.13 *La línea larga extendida es compacta.*

Demostración. Como L^* satisface la propiedad del supremo, L^* es completo. Además, todo subconjunto en L^* está acotado por $\langle 0, 0\rangle$ y $\langle\omega_1, 0\rangle$. De manera que cumple el Teorema 2.11, es decir, L^* es un espacio topológico ordenado, acotado y completo. Por tanto L^* es compacta. ■

Teorema 4.14 *La línea larga es numerablemente compacta.*

Demostración. Queremos probar que cualquier sucesión en L tiene punto de acumulación en L.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en L. Entonces, el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tiene supremo $\beta = \langle\alpha, z\rangle$. Como L^* es compacta, el intervalo cerrado $A = [\langle 0, 0\rangle, \langle\alpha, z\rangle]$ es cerrado en L^* y, por tanto, A es compacto. Además la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en A, por lo que tiene un punto de acumulación en $A \subset L$. Por tanto L es numerablemente compacta. ■

Teorema 4.15 *La línea larga extendida no es conexa por trayectorias.*

Demostración. Supongamos por el contrario que L^* es conexa por trayectorias. En parti-cular, existe una función continua $f : [0,1] \longrightarrow L^*$ tal que $f(0) = \langle 0, 0\rangle$ y $f(1) = \langle\omega_1, 0\rangle$. Notemos que $\{f^{-1}(\langle\omega_1, 0\rangle)\} \neq \emptyset$, pues $1 \in \{f^{-1}(\langle\omega_1, 0\rangle)\}$. Sea $t_0 = \min\{f^{-1}(\langle\omega_1, 0\rangle)\}$, y sea $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $[0,1]$ tal que $\{t_n\} \longrightarrow t_0$ y $t_n < t_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$. De manera que para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(t_n) \prec \langle\omega_1, 0\rangle$, de lo contrario t_0 no sería el mínimo del conjunto $\{f^{-1}(\langle\omega_1, 0\rangle)\}$. Así, $f(t_n) \in L$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Como todo conjunto numerable en L tiene supremo, entonces existe $\langle\lambda, z\rangle \in L$ tal que $f(t_n) \preceq \langle\lambda, z\rangle$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Sea $U_{\omega_1} = (\langle\lambda, z\rangle, \langle\omega_1, 0\rangle]$

un básico de $\langle w_1, 0\rangle$ en L^*. Entonces $t_0 \in f^{-1}(U_{w_1})$, y como, $f^{-1}(U_{w_1})$ es un abierto de t_0, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, si $n \geq k$, entonces $t_n \in f^{-1}(U_{w_1})$. De manera que para toda $n \geq k$, se tiene que $f(t_n) \in U_{w_1}$, lo cual es absurdo. Por tanto, no existe una función continua tal que $f(0) = \langle 0, 0\rangle$ y $f(1) = \langle w_1, 0\rangle$, lo cual muestra que la línea larga extendida no es conexa por trayectorias. ■

Teorema 4.16 *Sea f una función continua definida de L a un espacio métrico X, entonces f es constante a partir de algún punto.*

Demostración. Primero probemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $\langle \alpha_n, x\rangle \prec \langle w_1, 0\rangle$ tal que para todo $\langle \gamma, y\rangle \in L$, con $\langle \alpha_n, x\rangle \prec \langle \gamma, y\rangle$, se cumple $d(f(\langle \gamma, y\rangle), f(\langle \alpha_n, x\rangle)) < \frac{1}{n}$.

Supongamos por el contrario que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $\langle \alpha, x\rangle \prec \langle w_1, 0\rangle$, existe $\langle \gamma, y\rangle$, con $\langle \alpha, x\rangle \prec \langle \gamma, y\rangle$ y $d(f(\langle \gamma, y\rangle), f(\langle \alpha, x\rangle)) \geq \frac{1}{n_0}$.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de L que satisfacen lo anterior, es decir, $x_n < x_{n+1}$ y $d(f(x_n), f(x_{n+1})) \geq \frac{1}{n_0}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Como L es numerablemente compacta (Teorema 4.14) y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a su supremo, el cual llamaremos β. Por otra parte, como f es continua, es secuencialmente continua, de manera que $\lim f(x_n) = f(\beta)$. Así, para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n > N$, se tiene que $d(f(x_n), f(\beta)) < \varepsilon$. En particular, para $\varepsilon = \frac{1}{2n_0}$, tenemos que $d(f(x_n), f(\beta)) < \frac{1}{2n_0}$ y $d(f(x_{n+1}), f(\beta)) < \frac{1}{2n_0}$. Así, $d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq d(f(x_n), f(\beta)) + d(f(x_{n+1}), f(\beta)) < \frac{1}{n_0}$, lo cual contradice la elección de las x_n. Por tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, existe $\langle \alpha_n, x_n\rangle \prec \langle w_1, 0\rangle$ tal que para todo $\langle \gamma, y\rangle \in L$, con $\langle \alpha_n, x_n\rangle \prec \langle \gamma, y\rangle$, se cumple $d(f(\langle \gamma, y\rangle), f(\langle \alpha_n, x_n\rangle)) < \frac{1}{n}$.

Ahora consideremos una sucesión $\{\langle \alpha_n, x_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ en L que satisface la propiedad anterior y sea $\langle \alpha, z\rangle$ su supremo. Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $d(f(\langle \alpha, z\rangle), f(\langle \alpha_n, x_n\rangle)) < \frac{1}{n}$. De manera que dado $\langle \gamma, y\rangle \in L$, con $\langle \alpha, z\rangle \prec \langle \gamma, y\rangle$, tenemos que $d(f(\langle \gamma, y\rangle), f(\langle \alpha_n, x_n\rangle)) < \frac{1}{n}$. Así, $d(f(\langle \gamma, y\rangle), f(\langle \alpha, z\rangle)) < \frac{2}{n}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $f(\langle \gamma, y\rangle) = f(\langle \alpha, z\rangle)$, y f es constante. ■

Una consecuencia inmediata de este resultado es la siguiente:

Teorema 4.17 *Sea f una función continua definida de L a un espacio métrico X, entonces f tiene una extensión continua a L^*.*

Demostración. Por el teorema anterior, sabemos que existe un punto $\langle \alpha, z \rangle < \langle w_1, 0 \rangle$ tal que $f([\langle \alpha, z \rangle, \langle w_1, 0 \rangle)) = \{c\}$, donde $c \in X$. Definamos una nueva función $F : L^* \longrightarrow X$ de la siguiente manera:

$$F(\langle \gamma, x \rangle) = \begin{cases} f(\langle \gamma, x \rangle), & \text{si } \langle \gamma, x \rangle \prec \langle w_1, 0 \rangle, \\ c, & \text{si } \langle \gamma, x \rangle = \langle w_1, 0 \rangle. \end{cases}$$

Notemos que para probar que F es continua en L^* basta probar que F es continua en $\langle w_1, 0 \rangle$. Para esto, tomemos un abierto U del punto $c \in X$. Notemos que $(\langle \alpha, z \rangle, \langle w_1, 0 \rangle]$ es un abierto de $\langle w_1, 0 \rangle$ en L^*. Así que $F((\langle \alpha, z \rangle, \langle w_1, 0 \rangle]) \subset U$, pues $F((\langle \alpha, z \rangle, \langle w_1, 0 \rangle]) = \{c\}$. Por consiguiente, F es continua en $\langle w_1, 0 \rangle$ y F es continua en L^*. Así, F es una extensión continua de L a L^*. ∎

Teorema 4.18 *La línea larga y su extensión no son perfectamente normales.*

Demostración. Para ver que L^* no es perfectamente normal, consideremos al cerrado $\{\langle w_1, 0 \rangle\}$ y probaremos que no es posible ponerlo como una intersección numerable de abiertos de L^*.

Notemos que cada abierto de $\langle w_1, 0 \rangle$ contiene un básico de la forma $(\langle \alpha, x \rangle, \langle w_1, 0 \rangle]$, para algún $\langle \alpha, x \rangle \in L$. Veamos que $\{\langle w_1, 0 \rangle\}$ no es la intersección de una familia numerable de este tipo de básicos, para esto tomemos una familia $\{\langle \alpha_i, x_i \rangle : i \in \mathbb{N}\}$, donde $\langle \alpha_i, x_i \rangle \in L$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Sea $\langle \beta, y \rangle$ el supremo de $\{\langle \alpha_i, x_i \rangle : i \in \mathbb{N}\}$ (Teorema 4.8). Como $\langle \beta + 1, 0 \rangle \in \bigcap\{(\langle \alpha_i, x_i \rangle. \langle w_1, 0 \rangle] : i \in \mathbb{N}\} \setminus \{\langle w_1, 0 \rangle\}$, tenemos que $\bigcap\{(\langle \alpha_i, x_i \rangle, \langle w_1, 0 \rangle] : i \in \mathbb{N}\} \neq \{\langle w_1, 0 \rangle\}$.

Por tanto L^* no es un espacio G_δ, y en consecuencia no es perfectamente normal.

Para probar que L no es perfectamente normal, consideremos el conjunto de todos los ordinales límites en el espacio de ordinales $\Omega_0 = [0, w_1)$ que denotaremos como S_0. Sea $S = \{\langle \alpha, 0 \rangle \in L : \alpha \in S_0\}$. Probaremos que S es un subconjunto cerrado en L que no es G_δ.Sea $\langle \lambda, z \rangle \in L \setminus S$. Consideremos dos casos:

Caso 1. $z = 0$. Entonces, como $\langle \lambda, z \rangle \notin S$, existe $\alpha \in [0, w_1)$ tal que $\alpha + 1 = \lambda$, es decir, α es el predecesor inmediato de λ en Ω_0. De manera que $\langle \lambda, 0 \rangle \in (\langle \alpha, 0 \rangle, \langle \lambda + 1, 0 \rangle) \subset L \setminus S$.

Caso 2. $z \neq 0$. Entonces, $\langle \lambda, z \rangle \in \left(\langle \lambda, \frac{z}{2} \rangle, \langle \lambda, \frac{z+1}{2} \rangle\right) \subset (\langle \lambda, 0 \rangle, \langle \lambda + 1, 0 \rangle) \subset L \setminus S$.

Por tanto $L \setminus S$ es abierto, así, S es cerrado.

Por último consideremos a una familia numerable y cualquiera de abiertos $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ tales que $S \subset U_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Así, $S \cap (L \setminus U_i) = \emptyset$. Como L es normal, entonces para cada $i \in \mathbb{N}$, existe una función de Urysohn $f_i : L \longrightarrow [0,1]$ tal que $f_i(S) = \{0\}$ y $f_i(L \setminus U_i) = \{1\}$.

Por el Teorema 4.16, sabemos que toda función continua definida de L al intervalo $[0,1]$ es constante a partir de algún punto menor que $\langle w_1, 0\rangle$. De manera que para cada $i \in \mathbb{N}$, existe un elemento $\langle \alpha_i, 0\rangle \in L$ tal que $f_i \restriction_{[\langle \alpha_i, 0\rangle, \langle w_1, 0\rangle)}$ es constante. Sea $\langle \beta, 0\rangle$ el supremo de $\{\langle \alpha_i, 0\rangle : i \in \mathbb{N}\}$, así que para toda $i \in \mathbb{N}$, las funciones f_i son constantes en el intervalo $[\langle \beta, 0\rangle, \langle w_1, 0\rangle)$, y como en el intervalo $[\beta, w_1)$ existen ordinales límite, sea λ un ordinal límite en $[\beta, w_1)$ (por ejemplo, $\lambda = \min \bigcap\{[0, w_1) \setminus [0, \beta + k] : k \in \mathbb{N}\}$). Entonces, $f_i \restriction_{[\langle \beta, 0\rangle, \langle w_1, 0\rangle)} = \{f_i(\lambda)\} = \{0\}$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Pero entonces $f_i(\langle \lambda + 1, 0\rangle) = 0$, para toda $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\langle \lambda + 1, 0\rangle \in U_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ y entonces $\langle \lambda + 1, 0\rangle \in \bigcap\{U_i : i \in \mathbb{N}\} = S$. Esto es un absurdo que completa la prueba de que L no es G_δ. ■

4.5 Paracompacidad y metacompacidad. El caso de la línea larga.

En esta sección definiremos los conceptos de *paracompacidad* y *metacompacidad*. Veremos que la línea larga no es metacompacta y en consecuencia tampoco paracompacta. Haremos dos pruebas diferentes de esta propiedad. La primera consistirá en utilizar la naturaleza del espacio de ordinales y probar que todo subconjunto cerrado de un espacio paracompacto es paracompacto. La segunda será una demostración más general, para esto, demostraremos que todo espacio paracompacto y numerablemente compacto es compacto.

Sea X un espacio topológico no vacío, y sea $U = \{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de X. Decimos que la cubierta abierta $V = \{V_j : j \in J\}$, es un *refinamiento* de U si para cada $j \in J$, existe $i \in I$ tal que $V_j \subset U_i$.

Diremos que V es un *refinamiento localmente finito* de U, si V es un refinamiento de U y para cada $x \in X$, existe una vecindad que intersecta sólo a un número finito de elementos de V.

Diremos que V es un *refinamiento puntualmente finito* de U, si V es un refinamiento de U y cada $x \in X$ pertenece sólo a un número finito de elementos de V.

Decimos que un espacio topológico es *paracompacto* si cada cubierta abierta de X, posee un refinamiento localmente finito.

Similarmente, un espacio topológico es *metacompacto* si cada cubierta abierta de X, posee un refinamiento puntualmente finito.

Diremos que V es un *refinamiento puntualmente finito* de U, si V es un refinamiento de U y cada $x \in X$ pertenece sólo a un número finito de elementos de V.

Decimos que un espacio topológico es *paracompacto* si cada cubierta abierta de X, posee un refinamiento localmente finito.

Similarmente, un espacio topológico es *metacompacto* si cada cubierta abierta de X, posee un refinamiento puntualmente finito.

Teorema 4.19 *Sean X un espacio topológico paracompacto y K un subconjunto cerrado de X, entonces K con la topología usual es paracompacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_i : i \in I\}$ una cubierta abierta de K. Entonces, cada U_i es de la forma $G_i \cap K$ para algún conjunto abierto G_i de X. Notemos que $U^* = \{G_i : i \in I\} \cup \{X \setminus K\}$ es una cubierta abierta de X, y por ser paracompacto, U^* tiene un refinamiento localmente finito V. Así que $V^* = \{H \cap K : H \in V\}$ es un refinamiento localmente finito de U que cubre a K. Por tanto K es paracompacto. ■

Corolario 4.20 *La línea larga no es paracompacta.*

Demostración. Para ver que L no es paracompacta probaremos que $\Omega_0 \times \{0\} = \Omega_0$ es un subconjunto cerrado en L que visto como subespacio no es paracompacto.

Sea $\langle \lambda, z\rangle \in L \setminus \Omega_0$. De manera que $z \neq 0$. Entonces, $\langle \lambda, z\rangle \in \left(\langle \lambda, \frac{z}{2}\rangle, \langle \lambda, \frac{z+1}{2}\rangle\right) \subset (\langle \lambda, 0\rangle, \langle \lambda + 1, 0\rangle) \subset L \setminus \Omega_0$.

Así que $L \setminus \Omega_0$ es abierto, y por tanto Ω_0 es cerrado.

Ahora, supongamos por el contrario que Ω_0 es paracompacto, y consideremos la cubierta abierta $C = \{[0, \gamma) : \gamma \in \Omega_0\}$. De manera que existe un refinamiento localmente finito $V = \{V_a : a \in A\}$ de C. Así que dada $\alpha \in \Omega_0$, existe $a_\alpha \in A$ tal que $\alpha \in V_{a_\alpha}$. Como V_{a_α} es abierto, existe un básico $(y_\alpha, \alpha]$ de α con $y_\alpha < \alpha$ tal que $(y_\alpha, \alpha] \subset V_{a_\alpha}$. De manera que podemos definir una función $f : \Omega_0 \to \Omega_0$ tal que $f(0) = 0$ y para cada $\alpha \in \Omega_0 \setminus \{0\}$, $f(\alpha) = y_\alpha$.

Así que $f(\alpha) < \alpha$ para todo $\alpha \in \Omega_0 \setminus \{0\}$. Entonces, por el Teorema 4.3 tenemos que existe un punto $\beta_0 \in \Omega_0$ tal que para todo $\beta \in \Omega_0$, existe $\lambda \geq \beta$ tal que $f(\lambda) \leq \beta_0$. De manera que para todo $\beta \geq \beta_0 + 1$, existe $\lambda_\beta \geq \beta$ tal que $f(\lambda_\beta) \leq \beta_0$. Así que $\beta_0 + 1 \in (f(\lambda_\beta), \lambda_\beta] \subset V_{\alpha_{\lambda_\beta}} \in V$ para una infinidad de elementos de V. Por consiguiente, V no puede ser un refinamiento de punto finito, luego, tampoco puede ser un refinamiento localmente finito, contradiciendo lo supuesto. Por tanto Ω_0 no es paracompacto. Así, por el Teorema 4.19, L no es paracompacta. ■

La segunda forma de demostrar este resultado es la siguiente:

Teorema 4.21 *Sea X es un espacio topológico no vacío, metacompacto y numerablemente compacto, entonces X es compacto.*

Demostración. Sea $U = \{U_i : i \in I\}$ una cubierta de puntualmente finita de X. Primero probaremos que U tiene una subcubierta irreducible. Es decir, existe $J \subset I$ tal que $U^* = \{U_i : i \in J\}$ es una cubierta de X y para toda $i \in J$, $U^* \setminus U_i$ ya no es cubierta de X.

Consideremos a la familia:

$$\mathcal{F} = \{A \subset I : \{U_i : i \in I \setminus A\} \text{ es cubierta de } X\}.$$

Ordenemos a $\mathcal{F}$ usando la inclusión, es decir, $(\mathcal{F}, \subset)$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo la contención de conjuntos.

Notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, pues $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Sea $C = \{A_k : k \in K\}$ una cadena en $(\mathcal{F}, \subset)$. De manera que para todo $k \in K$, tenemos que $\{U_i : i \in I \setminus A_k\}$ es cubierta de X.

Consideremos el conjunto $A^* = \bigcup\{A_k : k \in K\}$. Entonces, afirmamos que $\{U_i : i \in I \setminus A^*\}$ es una cubierta de X, pues si $\{U_i : i \in I \setminus A^*\}$ no fuera una cubierta de X, existiría $x \in X$ tal que $x \notin \bigcup\{U_i : i \in I \setminus A^*\}$. De manera que para toda $i \in I \setminus A^*$, $x \notin U_i$.

Por otra parte, como U es una cubierta de X, entonces $x \in U_i$ para $i \in I$. Además, como U es puntualmente finito, x pertenece sólo a un número finito de elementos $\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\}$ de U. Entonces, $i_1 \notin I \setminus A^*$. Es decir, $i_1 \in A^*$, por lo que existe $k_1 \in K$ tal que $i_1 \in A_{k_1}$. Similarmente, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, existe $i_j \in K$ tal que $i_j \in A_{k_j}$. Como C es una cadena, entonces $\{i_1, ...i_n\} \subset A_l$ para algún $l \in K$. Por tanto $\{U_i : i \in I \setminus A_l\}$ no es cubierta de X, lo cual es absurdo, pues para todo $k \in K$, teníamos que $\{U_i : i \in I \setminus A_k\}$ es cubierta de X.

Por tanto $\{U_i : i \in I \setminus A^*\}$ es una cubierta de X.

Por tanto A^* es una cota superior de C en $(\mathcal{F}, \subset)$. Así que por el Lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal.

Sea A_0 un elemento maximal de $\mathcal{F}$. De manera que para $J = I \setminus A_0$, tenemos que $U^* = \{U_i : i \in J\}$ es cubierta de X y para toda $i \in J$, $U^* \setminus U_i$ ya no cubre a X.

Por tanto U^* es una cubierta irreducible.

Ahora probaremos la compacidad de X.

Sea $V = \{V_r : r \in R\}$ una cubierta abierta de X. Ya que X es metacompacto, existe un refinamiento puntualmente finito $U = \{U_i : i \in I\}$ de V. Sea $U^* = \{U_i : i \in J\}$ una subcubierta irreducible, extraida de U. Veremos que por ser U^* una subcubierta irreducible, para cada $i \in J$ existe $x \in U_i$ tal que x no pertenece a otro elemento distinto de U^*.

Supongamos por el contrario que para algún $i \in J$ todos sus elementos pertenecen al menos a otro elemento diferente de U_i en U^*. Así que $U^* \setminus U_i$ sigue siendo cubierta de X, lo cual es absurdo, pues U^* es una cubierta irreducible.

Por tanto, para cada $i \in J$, existe $x \in X$ tal que x no pertenece a otro elemento distinto de U_i en U^*.

Por último, probaremos que U^* es una subcubierta finita de U.

Supongamos por el contrario que U^* no es finita y construyamos un conjunto infinito en X de la manera siguiente:

Para cada $i \in J$, elegimos uno y sólo un punto $a_i \in U_i$ tal que para toda $j \neq i$, $a_i \notin U_j$, y sea $A = \{a_i : i \in J\}$. Entonces, A es un conjunto infinito, pues estamos tomando sólo un punto de cada elemento de la cubierta, el cual no está en dos o más elementos de ésta. Como X es numerablemente compacto, entonces A tiene un punto de acumulación p en X. De manera que existe $l \in J$ tal que $p \in U_l$, pues U^* es una cubierta de X. Como U_l es abierto, U_l contiene una infinidad de puntos de A, lo cual contradice la elección de estos, pues se eligieron de tal manera que en cada elemento de U^*, en particular de U_l, existiera uno y sólo un punto de A.

Por tanto, U^* es una subcubierta finita de U y por tanto X es compacto. ∎

Notemos que como L es numerablemente compacta (Teorema 4.14) y no es compacta, entonces por el teorema anterior, L no puede ser paracompacta.

4.6 El producto cartesiano $L^* \times L^*$

Consideremos el producto cartesiano $X = L^* \times L^*$ con la topología usual del producto.

Notemos que como L^* es un espacio compacto, conexo y Hausdorff, entonces X también lo es.

Teorema 4.22 *$L^* \times L^*$ no es completamente normal.*

Demostración. Sea $S = \{\langle \alpha, 0\rangle \in L : \alpha \in \mathbb{N} \cup \{w\}\}$. Probaremos que el subespacio $Y = L^* \times S \setminus \{\langle\langle w_1, 0\rangle, \langle w, 0\rangle\rangle\}$, no es normal.

Consideremos los subconjuntos $A = (L^* \times \{\langle w, 0\rangle\}) \cap Y$ y

$B = (\{\langle w_1, 0\rangle\} \times S) \cap Y$. Notemos que A es un subconjunto cerrado en Y, pues A es la intersección de un cerrado en $L^* \times L^*$ (a saber $L^* \times \{\langle w, 0\rangle\}$) con Y. Similarmente, como el subconjunto $\{\langle w_1, 0\rangle\} \times S$ contiene a su único punto de acumulación $\langle\langle w_1, 0\rangle, \langle w, 0\rangle\rangle$, entonces B es la intersección de un cerrado en $L^* \times L^*$ con Y.

Supongamos entonces que X es completamente normal, de manera que Y es un subespacio normal de X. Por consiguiente, existe una función de Urysohn $f : Y \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.

Para cada $\beta \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$, hagamos $L_\beta = L \times \{\beta\}$. Es claro que cada L_β es una copia de L. De manera que por el Teorema 4.16, para cada $\beta \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$ existe un elemento $\xi_\beta < w_1$ tal que $f\mid_{L_\beta} ([\langle\langle \xi_\beta, 0\rangle, \beta\rangle, \langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle)) = \{c_\beta\}$, para alguna $c_\beta \in [0, 1]$. Entonces, el conjunto $C = \{\langle \xi_\beta, 0\rangle : \beta \in S\} \subset L$, y como C es numerable, por el Teorema 4.8, tiene supremo en L.

Sea $\rho = \sup C$. Entonces, para cada $\beta \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$, tenemos que $f\mid_{L_\beta} ([\langle \rho, \beta\rangle, \langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle)) = \{c_\beta\}$. Por el Teorema 4.17, sabemos que para cada $\beta \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$, $f\mid_{L_\beta}$tiene una extensión continua $f\mid_{L^*_\beta}$. Así que para cada $\beta \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$, $f\mid_{L^*_\beta} (\langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle) = c_\beta$. Pero $\langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle \in B$, así que $f\mid_{L^*_\beta} (\langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle) = f(\langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle) = \{1\}$. Por consiguiente, para cada $\beta \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$, $f\mid_{L^*_\beta} ([\langle \rho, \beta\rangle, \langle\langle w_1, 0\rangle, \beta\rangle]) = \{1\}$.

Por otra parte, notemos que el punto $\langle \rho, \langle w, 0\rangle\rangle$ es un punto de acumulación del conjunto $P = \{\langle \rho, \langle \alpha, 0\rangle\rangle : \alpha \in \mathbb{N}\}$, y como $\langle \rho, \langle w, 0\rangle\rangle \in A \subset f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$, entonces $f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right) \cap P \neq \emptyset$, pues $f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right)$ es un conjunto abierto. Así que existe $\beta_\rho \in S \setminus \{\langle w, 0\rangle\}$ tal que $\langle \rho, \beta_\rho\rangle \in f^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right) \cap P$, de manera que $f(\langle \rho, \beta_\rho\rangle) \in [0, \frac{1}{2})$; pero $f(\langle \rho, \beta_\rho\rangle) = f\mid_{L_{\beta_\rho}} (\langle \rho, \beta_\rho\rangle)$ y $f\mid_{L_{\beta_\rho}} (\langle \rho, \beta_\rho\rangle) = 1$, lo cual es un absurdo y muestra que A y B no pueden ser separados por abiertos ajenos que contengan a A y a B, respectivamente. Por tanto Y no puede ser un subespacio normal. Así, X no es completamente normal. ■

Capítulo 5

Cuadrado de Alexandroff

5.1 Topología del cuadrado de Alexandroff

En este capítulo definiremos el cuadrado de Alexandroff y demostraremos que es un continuo no métrico que satisface ser conexo por trayectorias y secuencialmente compacto. Además, veremos que este espacio no es localmente conexo en los puntos de la diagonal. Por otra parte, demostraremos que, a diferencia de los continuos metrizables, el cuadrado de Alexandroff no es primero numerable y tampoco satisface ser completamente normal. Por último veremos que los subconjuntos unitarios contenidos en la diagonal son cerrados pero no G_δ.

Sea X el cuadrado unidad definido por el producto cartesiano del intervalo cerrado $[0,1]$ con él mismo. Sea $\Delta = \{\langle x, x\rangle : x \in [0,1]\}$ la diagonal de X.

Dado $s \in [0,1]$, $\varepsilon > 0$ y un conjunto $F \subset [0,1]$ tal que $|F| < \aleph_0$ y $s \notin F$, definimos las vecindades básicas del punto $\langle s, s\rangle$ de radio ε como:

$$M_\varepsilon(\langle s, s\rangle, F) = \{\langle x, y\rangle \in X : s - \varepsilon < y < s + \varepsilon \text{ y } x \notin F\}.$$

Para los puntos fuera de la diagonal de X, dada $\varepsilon > 0$ y $\langle s, t\rangle \in X \setminus \Delta$ definimos las vecindades básicas del punto $\langle s, t\rangle$ de radio ε tomando a:

$$N_\varepsilon(\langle s, t\rangle) = \{\langle s, y\rangle \in X \setminus \Delta : |t - y| < \varepsilon\}.$$

Probaremos que la familia de vecindades definida así en X sirve de base para una topología en X. Dicha topología recibirá el nombre de *topología de Alexandroff*.

Sea $\beta = \{M_\varepsilon(\langle s,s\rangle, F) : \langle s,s\rangle \in X,\ \varepsilon > 0,\ F$ es finito y $s \notin F\} \cup \{N_\varepsilon(\langle s,t\rangle) : \langle s,t\rangle \in X \setminus \Delta$ y $\varepsilon > 0\}$.

Notemos que para el punto $\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ y radio $\varepsilon = 1$ la vecindad $M_1(\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \{\emptyset\}) = \{\langle x,y\rangle \in X : x \in [0,1]$ y $y \in (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})\} = X$.

Ahora sólo nos falta demostrar que si B_1 y $B_2 \in \beta$ y $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \beta$. Para ello consideraremos 3 casos:

Caso 1.

$\langle s,s\rangle$ y $\langle r,t\rangle$ en X con $r \neq t$, y $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ y $F \subset I$ tal que F es finito y $s \notin F$. Como $M_\varepsilon(\langle s,s\rangle, F) \cap N_\delta(\langle r,t\rangle) \subset N_\delta(\langle r,t\rangle) \subset \{r\} \times [0,1]$, entonces $M_\varepsilon(\langle s,s\rangle, F) \cap N_\delta(\langle r,t\rangle) = [M_\varepsilon(\langle s,s\rangle, F) \cap (\{r\} \times [0,1])] \cap \{r\} \times (t-\delta, t+\delta)$, y esto a su vez es igual a $(X \setminus \Delta) \cap (\{r\} \times (t-\delta, t+\delta)) \cap (\{r\} \times [0,1])$. Esta intersección es un conjunto de la forma $(X \setminus \Delta) \cap (\{r\} \times (a,b)) \cap (\{r\} \times [0,1])$, que resulta ser de la forma $N_\lambda(\langle r,w\rangle)$. Por consiguiente, en este caso $B_1 \cap B_2 \in \beta$.

Caso 2.

$\langle s,t\rangle$ y $\langle s,w\rangle$ en X son tales que $s \neq t$ y $s \neq w$; y $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$. Como $N_\varepsilon(\langle s,t\rangle) \cap N_\delta(\langle s,w\rangle) = (X \setminus \Delta) \cap (\{s\} \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)) \cap (\{s\} \times (w-\delta, w+\delta)) \cap (\{s\} \times [0,1])$. Que es de la forma $N_\lambda(\langle s,r\rangle)$, entonces $B_1 \cap B_2 \in \beta$.

Caso 3.

$\langle s,s\rangle$ y $\langle r,r\rangle$ en X; $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ y F, J contenidos en $[0,1]$ son tales que F y J son finitos, $s \notin F$ y $r \notin J$. Notemos que $M_\varepsilon(\langle s,s\rangle, F) \cap M_\delta(\langle r,r\rangle, J) = M_\gamma(\langle w,w\rangle, F \cup J)$, para alguna $w \in [0,1]$ y $\gamma > 0$. Por tanto $B_1 \cap B_2 \in \beta$.

Por tanto β sirve de base para una topología en X, a saber, la topología de Alexandroff.

La figura 5.1 muestra un básico característico para un punto en la diagonal dado por la franja sombreada quitando un número finito de líneas verticales.

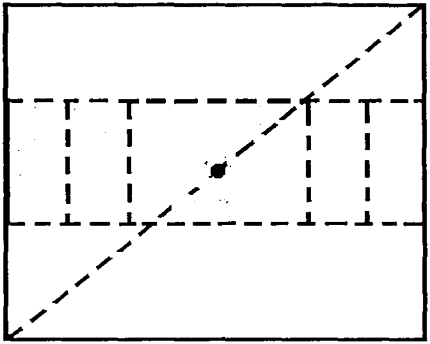


Figura 5.1

La figura 5.2 muestra un par de básicos para puntos fuera de la diagonal.

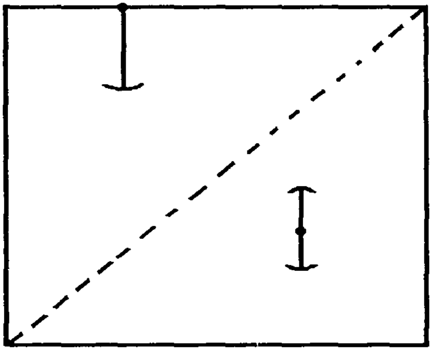


Figura 5.2

Teorema 5.1 *El cuadrado de Alexandroff es de Hausdorff.*

Demostración. Tomemos dos puntos arbitrarios $\langle s, t\rangle$ y $\langle r, z\rangle \in X$ y consideremos tres casos:

Caso 1. $t < z$. Entonces, el básico con centro en el punto $\langle s, t\rangle$ y radio $\frac{t+z}{2} - t$ tiene intersección vacía con el básico con centro en $\langle r, z\rangle$ y radio $z - \frac{t+z}{2}$.

Caso 2. $z < t$. Entonces, el básico con centro en el punto $\langle r, z\rangle$ y radio $\frac{t+z}{2} - z$ tiene intersección vacía con el básico con centro en $\langle s, t\rangle$ y radio $t - \frac{t+z}{2}$.

Caso 3. $t = z$. Entonces, $s \neq t$ o $r \neq z$.

Si $s \neq t$ y $r \neq z$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ y para cada $\delta > 0$, los básicos $N_\varepsilon(\langle s, t\rangle)$ y $N_\delta(\langle r, z\rangle)$ tienen intersección vacía.

Si $s \neq t$ y $r = z$, entonces dado $\varepsilon = 1$ y $F = \{s\}$, la vecindad $M_1(\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle, \{s\})$ contiene al punto $\langle r, z\rangle$ y la intersección con el básico $N_\varepsilon(\langle s, t\rangle)$ es vacía.

El caso en que $r \neq z$ se demuestra de manera análoga al caso anterior. Por tanto el cuadrado de Alexandroff es de Hausdorff. ∎

Teorema 5.2 *El cuadrado de Alexandroff es compacto.*

Demostración. Observemos que la topología inducida sobre Δ por la topología de Alexandroff es la topología usual que $\mathbb{R}^2$ le induce a Δ. Por lo que Δ resulta compacto.

Sea $C = \{U_i : i \in \Gamma\}$ una cubierta abierta de X. Entonces, existe una subfamilia finita $V = \{U_j : j \in J\}$ (J finito) que cubre a Δ. Observemos que los elementos de V son de la forma $M_\varepsilon(\langle s, s\rangle, F)$, pues estos son los únicos básicos que intersectan a la diagonal. Como cada uno de estos abiertos carece a lo más de un número finito de líneas verticales, y $\Delta \subset \bigcup\{U_j : j \in J \subset \Gamma$ y $|J| < \aleph_0\}$, entonces existen a lo más un número finito de segmentos cerrados verticales que no intersectan a Δ en X y que no son cubiertos por V. En ellos, la topología inducida es la misma que la que les hereda la topología usual de $\mathbb{R}^2$. De manera que estos segmentos de X pueden ser cubiertos con un número finito de básicos de la forma $N_\varepsilon(\langle s, t\rangle)$. Por tanto X es compacto. ∎

Teorema 5.3 *El cuadrado de Alexandroff es conexo por trayectorias.*

Demostración. Dado que cada segmento vertical de X así como la diagonal Δ tienen la misma topología que la heredada por la topología usual del plano, cada línea vertical y la diagonal son conectables por trayectorias. Por consiguiente cualquier par de puntos $\langle x, y\rangle$ y $\langle z, w\rangle$ en X pueden ser conectados mediante la función $f : [0, 1] \to X$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} (1-3t)\,\langle x, y\rangle + 3t\langle x, x\rangle, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ (2-3t)\langle x, x\rangle + (3t-1)\langle z, z\rangle, & \text{si } \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3}, \\ (3-3t)\langle z, z\rangle + (3t-2)\langle z, w\rangle, & \text{si } \frac{2}{3} < t \leq 1. \end{cases}$$

Claramente f es continua. Por tanto el cuadrado de Alexandroff es conexo por trayectorias. ■

La figura 5.3 muestra la imagen de f.

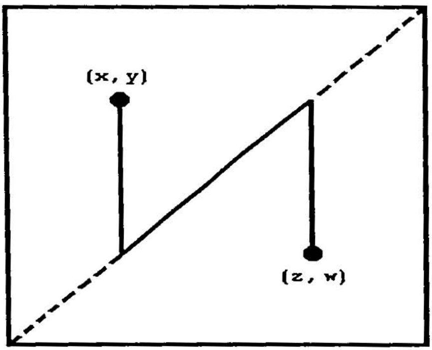


Figura 5.3

Teorema 5.4 *El cuadrado de Alexandroff es secuencialmente compacto.*

Demostración. Tomamos una sucesión cualquiera $\{\langle s_i, t_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ en X. Notemos que $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología euclideana es un espacio secuencialmente compacto. De manera que cualquier sucesión $\{\langle s_k, t_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ en X tiene una subsucesión convergente.

Sea pues $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{\langle s_k, t_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto $\langle s, t\rangle$, en la topología euclideana.

Si cada línea vertical de X posee un número finito de elementos de la subsucesión $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces, probaremos que $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ converge en la topología de Alexandroff al punto $\langle t, t\rangle$. En otro caso, si existe una línea vertical de X con un número infinito de elementos de la subsucesión $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces, tomaremos una subsucesión de $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$, la cual convergerá al punto $\langle s, t\rangle$ en la topología de Alexandroff. Esto significará que X es secuencialmente compacto en la topología de Alexandroff.

Caso 1.

Cada línea vertical de X posee un número finito de elementos de la subsucesión $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces, como para cada rectángulo $R_\varepsilon(\langle s, t\rangle) = (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ de la base de la topología euclideana de $\mathbb{R}^2$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle \in R_\varepsilon(\langle s, t\rangle)$, si $N \leq i$; dados $\varepsilon > 0$ y $F \subset [0,1]$ tales que $|J| < \aleph_0$ y $t \notin F$, tenemos que $R_\varepsilon(\langle s, t\rangle) \setminus \{\langle x, y\rangle \in F \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)\} \subset M_\varepsilon(\langle t, t\rangle, F)$. Además, $M_\varepsilon(\langle t, t\rangle, F)$ sigue teniendo a todos los elementos de la subsucesión $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ excepto a un número finito de ellos, pues únicamente quitamos un número finito de líneas verticales las cuales por hipótesis sólo poseen un número finito de elementos de la subsucesión. Por tanto, en este caso, la sucesión $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ converge al punto $\langle t, t\rangle$ en la topología de Alexandroff.

Caso 2.

Existe al menos una línea vertical de X con un número infinito de elementos de la subsucesión $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$. Entonces, no pueden existir dos o más líneas verticales de X con una cantidad infinita de elementos de $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ pues $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ converge al punto $\langle s, t\rangle$ en la topología euclideana. Notemos que la intersección $(\{s\} \times I) \cap \{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty} \neq \emptyset$ y además forma una nueva subsucesión de la sucesión original $\{\langle s_k, t_k\rangle\}_{k=1}^{\infty}$. Llamemos a esta nueva subsucesión $\{\langle s_{h(k(i))}, t_{h(k(i))}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$. También notemos que $\{\langle s_{h(k(i))}, t_{h(k(i))}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$converge al punto $\langle s, t\rangle$ en la topología euclideana, pues es una subsucesión de $\{\langle s_{k(i)}, t_{k(i)}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$. Así, como para cualquier rectángulo $R_\varepsilon(\langle s, t\rangle) = (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \times (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ de la base de la topología euclideana de $\mathbb{R}^2$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\langle s_{h(k(i))}, t_{h(k(i))}\rangle \in R_\varepsilon(\langle s, t\rangle)$, si $N \leq i$; dado $\varepsilon > 0$, tenemos que $\langle s_{h(k(i))}, t_{h(k(i))}\rangle \in R_\varepsilon(\langle s, t\rangle) \cap (\{s\} \times I) = N_\varepsilon(\langle s, t\rangle)$.

Por tanto, $\{\langle s_{h(k(i))}, t_{h(k(i))}\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $\langle s,t\rangle$ en la topología de Alexandroff.

Por tanto, el cuadrado de Alexandroff es secuencialmente compacto. ∎

Teorema 5.5 *El cuadrado de Alexandroff no es localmente conexo en los puntos de la diagonal.*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe un punto $p = \langle s,s\rangle$ tal que para cada abierto U que contiene a $\langle s,s\rangle$ existe un abierto conexo V tal que $\langle s,s\rangle \in V \subset U$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $s \notin \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. Entonces, dada $\varepsilon = \frac{1}{4}$ y el conjunto $F = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, existe un abierto conexo V de $\langle s,s\rangle$ contenido en la vecindad básica $M_{\frac{1}{4}}\left(\langle s,s\rangle, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}\right)$. Como V es abierto, entonces existe un básico $M_\delta\left(\langle s,s\rangle, H\right) \subset V$, donde $0 < \delta \leq \frac{1}{4}$, $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\} \subset H$, $s \notin H$ y $|H| < \aleph_0$. Así, $\langle s,s\rangle \in M_\delta\left(\langle s,s\rangle, H\right) \subset V \subset M_{\frac{1}{4}}\left(\langle s,s\rangle, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}\right)$.

Sea $D = \left\{x \in [0,1] : \left(\{x\} \times \left(s - \frac{1}{4}, s + \frac{1}{4}\right)\right) \cap \Delta = \emptyset\right\}$ y elijamos $w \in D$ tal que $w \notin H$. De manera que los abiertos $M_{\frac{1}{4}}\left(\langle s,s\rangle, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, w\}\right)$ y $N_{\frac{1}{4}}\left(\langle w,s\rangle\right)$ forman una desconexión de $M_{\frac{1}{4}}\left(\langle s,s\rangle, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}\right)$. Por consiguiente $M_\delta\left(\langle s,s\rangle, H\right) \subset V \subset M_{\frac{1}{4}}\left(\langle s,s\rangle, \{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, w\}\right)$, lo cual es absurdo, pues $\{w\} \times (s - \delta, s + \delta) \subset M_\delta\left(\langle s,s\rangle, H\right)$. Por tanto el cuadrado de Alexandroff no es localmente conexo en los puntos de la diagonal.

Sin embargo cualquier elemento fuera de la diagonal tiene una base local formada por conjuntos conexos, pues si $\langle s,t\rangle \notin \Delta$, entonces la familia $\{N_\varepsilon(\langle s,t\rangle) : \varepsilon > 0\}$ es una base local formada por conexos de $\langle s,t\rangle$ en X. ∎

Teorema 5.6 *El cuadrado de Alexandroff no es primero numerable en los puntos de la diagonal*

Demostración. Supongamos por el contrario que existe un punto $p = \langle s,s\rangle$ que tiene una base local numerable $\gamma = \{V_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Dada $i \in \mathbb{N}$, como V_i es un abierto que contiene a p, existen $\varepsilon_i > 0$ y $F_i \subset [0,1]$ tales que $|F_i| < \aleph_0$, $s \notin F_i$ y $M_{\varepsilon_i}(\langle s,s\rangle, F_i) \subset V_i$.

Hagamos $K = \bigcup\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$. De manera que K es a lo más numerable.

Elijamos un elemento $w \neq s$ tal que $w \in [0,1] \setminus K$ y hagamos $\varepsilon = 1$. Entonces, existe algún $j \in \mathbb{N}$ tal que $V_j \subset M_1(\langle s,s\rangle, \{w\}) \subset ([0,1] \times [0,1]) \setminus (\{w\} \times [0,1])$, pues γ es una base local de p. Por consiguiente, V_j no interseca al segmento $\{w\} \times [0,1]$. Pero por la elección de K, $w \notin F_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$, de manera que, $\langle w, s\rangle \in (\{w\} \times [0,1]) \cap M_{\varepsilon_i}(\langle s, s\rangle, F_i) \subset (\{w\} \times [0,1]) \cap V_j$. Esto es absurdo y completa la prueba de que el cuadrado de Alexandroff no puede ser primero numerable en los puntos de la diagonal. Sin embargo cualquier punto fuera de la diagonal tiene una base local numerable. Para ver esto basta notar que, si $\langle s, t\rangle \notin \Delta$, entonces la familia $\{N_{\frac{1}{n}}(\langle s, t\rangle) : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local numerable de $\langle s, t\rangle$ en X. ∎

Teorema 5.7 *El cuadrado de Alexandroff no es completamente normal.*

Demostración. Para demostrar esta afirmación consideremos el siguiente ejemplo:

Sean $A = \Delta \setminus \{\langle 0, 0\rangle\}$ y $B = \{\langle x, y\rangle : 0 < x \leq 1 \text{ y } y = 0\}$ en X. Probaremos que A y B son conjuntos separados que no pueden estar contenidos en abiertos ajenos.

Dada $\varepsilon > 0$ y un conjunto $F \subset (0, 1]$ tal que $|F| < \aleph_0$, la vecindad básica $M_\varepsilon(\langle 0, 0\rangle, F) \cap \Delta \neq \emptyset$, pues como $|F| < \aleph_0$, para alguna $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\varepsilon}{n} \notin F$ y $\frac{\varepsilon}{n} < 1$, así que el punto $\langle \frac{\varepsilon}{n}, \frac{\varepsilon}{n}\rangle \in M_\varepsilon(\langle 0, 0\rangle, F) \cap \Delta$. De manera que el punto $\langle 0, 0\rangle$ es un punto de acumulación del conjunto A. Notemos que los puntos fuera de la diagonal no son puntos de acumulación del conjunto A, pues los básicos para estos puntos son de la forma $N_\varepsilon(\langle s, t\rangle) = \{\langle s, y\rangle \in X \setminus \Delta : |t - y| < \varepsilon\}$. Por tanto $cl(A) = \Delta$.

Por otra parte, notemos que el punto $\langle 0, 0\rangle$ también es un punto de acumulación del conjunto B, pues como B es no numerable, dada $\varepsilon > 0$ y un conjunto $F \subset (0, 1]$ tal que $|F| < \aleph_0$, la vecindad básica $M_\varepsilon(\langle 0, 0\rangle, F) \cap B \neq \emptyset$. Observemos que cualquier punto $\langle s, t\rangle$ fuera del conjunto $[0, 1] \times \{0\}$ no es punto de acumulación de B, pues si dicho punto está sobre Δ, entonces dado $\varepsilon = \frac{s}{2}$ y $F \subset (0, 1]$ tal que $|F| < \aleph_0$, el básico $M_{\frac{s}{2}}(\langle s, s\rangle, F) \cap ([0, 1] \times \{0\}) = \emptyset$. Similarmente, si $\langle s, t\rangle \notin ([0, 1] \times \{0\})$ y $\langle s, t\rangle \notin \Delta$. Entonces, escogiendo $\varepsilon = \frac{t}{2}$, el básico $N_\varepsilon(\langle s, t\rangle) \cap ([0, 1] \times \{0\}) = \emptyset$. Por tanto $cl(B) = [0, 1] \times \{0\}$. Así, $cl(A) \cap B = \emptyset$ y $cl(B) \cap A = \emptyset$. Por tanto A y B son conjuntos separados.

Sólo resta probar que los conjuntos A y B no pueden ser separados por abiertos ajenos.

Supongamos por el contrario que existen conjuntos abiertos y ajenos U y V tales que contienen a A y B, respectivamente. Escojamos $\varepsilon_x > 0$ como el radio de una vecindad del punto $\langle x, 0\rangle \in B$ que está contenida en V. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto $B_n = \{x \in (0, 1] : \frac{1}{n} < \varepsilon_x\}$.

Probaremos que $(0, 1] \subset \bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $x \in (0,1]$. Si para toda $n \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_x < \frac{1}{n}$, entonces $\mathbb{N}$ estaría acotado superiormente, lo cual es absurdo. Así que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon_x$. Por tanto $x \in B_{n_0} \subset \bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ahora como $(0,1] \subset \bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$, debe existir $N \in \mathbb{N}$ tal que B_N es no numerable, pues de lo contrario $\bigcup\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ sería numerable.

Sean $\varepsilon > 0$ y $F \subset I$ tales que $|F| < \aleph_0$, $\frac{1}{N} \notin F$ y la vecindad $M_\varepsilon\left(\langle \frac{1}{N}, \frac{1}{N}\rangle, F\right)$ esté contenida en U. Por la elección de B_N, tenemos que $M_\varepsilon\left(\langle \frac{1}{N}, \frac{1}{N}\rangle, F\right)$ intersecta a una cantidad no numerable de vecindades de radio $\varepsilon_x > \frac{1}{N}$ contenidas en V. Así, $U \cap V \neq \emptyset$.

Por tanto, A y B no pueden ser separados por abiertos ajenos. Por tanto X no es completamente normal. ■

En la Figura 5.4 mostramos la intersección de una vecindad básica de un punto en la diagonal con básicos de radio ε_x.

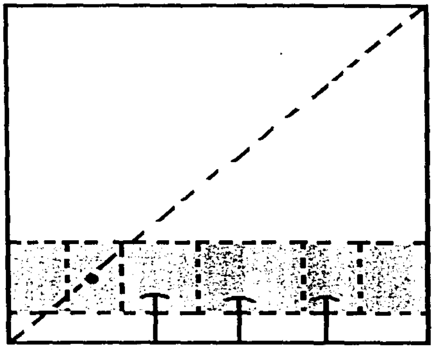
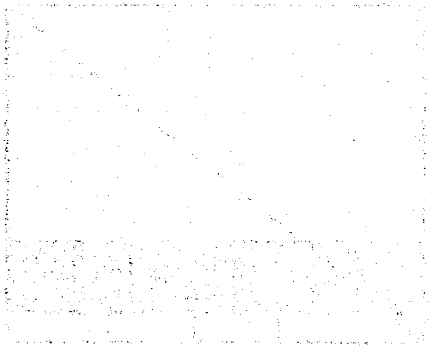


Figura 5.4

Notemos que como X no es completamente normal, entonces X no es perfectamente normal. A saber, una familia de cerrados que fallan en ser subconjuntos G_δ son los puntos en la diagonal. En efecto:

Sea $p \in \Delta$. Entonces, cualquier abierto de p contiene un básico $M_\varepsilon(\langle s,s\rangle, F) = \{\langle x,y\rangle \in X : s - \varepsilon < y < s + \varepsilon$ y $x \notin F\}$. Sea $\mathcal{F} = \{M_{\varepsilon_i}(\langle s,s\rangle, F_i) :$

$i \in \mathbb{N}\}$ una familia numerable de básicos que contienen a p y, hagamos $K = \bigcup\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$. Notemos que K es numerable, de manera que el conjunto $(I \times \{s\}) \setminus K \times \{s\}$ es no numerable y $(I \times \{s\}) \setminus K \times \{s\} \subset \bigcap\{M_{\varepsilon_i}(\langle s, s\rangle, F_i) : i \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, $\{p\}$ no es un conjunto G_δ.



Capítulo 6

Producto Cartesiano $\mathbf{I}^{\mathbf{I}}$

6.1 Topología de Tychonoff

El producto cartesiano I^I es un ejemplo clásico que ilustra que el producto cartesiano no numerable de un espacio topológico metrizable no resulta ser necesariamente un espacio metrizable. También veremos que a pesar de ser un espacio compacto no es secuencialmente compacto.

La demostración principal en este ejemplo será que I^I no es completamente normal. Por último, estudiamos un subespacio de I^I (el subconjunto de todas las funciones crecientes con su topología usual). Este espacio se conoce con el nombre de espacio de Helly, y resulta interesante ver que es separable.

A diferencia de los continuos metrizables, I^I y el espacio de Helly no satisfacen ser perfectamente normales. La demostración de que el espacio de Helly no es perfectamente normal no es incluída.

Sea I el intervalo cerrado $[0, 1]$, y para cada $i \in I$, sea I_i una copia de éste. Definimos el producto cartesiano de todos los conjuntos I_i con $i \in I$, como el conjunto de todas las funciones con dominio I y cuya imagen está contenida en I. Es decir:

$$I^I = \prod_{i \in I} I_i = \{f : I \to I : f \text{ es una función}\}.$$

Para referirnos a algún elemento del espacio coordenado I_i algunas veces escribiremos $f(i)$ o simplemente f_i. Así, entenderemos que el valor del elemento f en la i-ésima coordenada en el intervalo cerrado $[0,1]$, es precisamente $f(i)$.

Sea $\alpha \in I$, la función $\pi_\alpha : \prod_{i\in I} I_i \longrightarrow I_\alpha$ definida por $\pi_\alpha(f) = f_\alpha$ es la α-ésima proyección de f sobre el espacio coordenado I_α .

Si consideramos a cada I_i con su topología usual, definimos la topología en el espacio producto $\prod_{i\in I} I_i$ como la menos fina que hace continuas a todas las proyecciones, esto es, tomamos como base para la topología a los conjuntos de la forma $\prod U_i$, donde el conjunto U_i es un abierto del espacio coordenado I_i y $U_i = I_i$ para toda i, excepto para un número finito, es decir:

$\prod U_i = \pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$. Esta topología recibe el nombre de topología *producto* o topología de *Tychonoff*.

En la Figura 6.1 se muestra un elemento de una vecindad básica del producto dado por la función f.

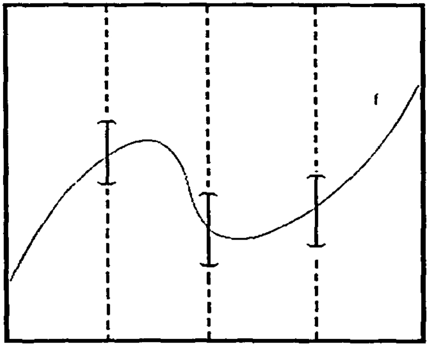


Figura 6.1

La Figura 6.2 muestra un básico del producto dado por la unión de todas las funciones $f : I \longrightarrow I$ tales que para las coordenadas x, y y z las proyecciones $\pi_x(f)$, $\pi_y(f)$ y $\pi_z(f)$ pertenecen a los básicos A, B y C, respectivamente.

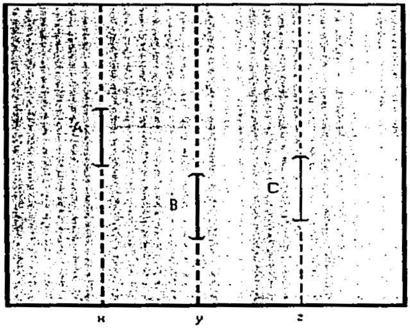


Figura 6.2

Es bien sabido que el producto de espacios compactos es compacto (Teorema de Tychonoff). También que la conexidad, la conexidad local, la conexidad por trayectorias y la propiedad de ser un espacio de Hausdorff, son invariantes del producto. De manera que I^I es compacto, conexo, localmente conexo, conexo por trayectorias y Hausdorff, pues I lo es. Notemos también que I^I resulta ser arco conexo, pues todo espacio de Hausdorff y conexo por trayectorias es arco conexo [Willard, S., Corolario 31.6, pag. 222].

Teorema 6.1 *I^I no es completamente normal.*

Demostración. Para cada $i \in I$, sea $B_i = \{\frac{1}{n} \in I : n \in \mathbb{N}\}$ y $Y = \prod_{i \in I} B_i \subset I^I$. Como cada B_i tiene la topología discreta, entonces para cada elemento $f \in Y$ denotaremos sus vecindades básicas en Y como $U(f; \alpha_1, ..., \alpha_n)$, donde $\alpha_j \in I$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Es decir, $U(f; \alpha_1, ..., \alpha_n)$ consiste de todas las funciones $g \in Y$ tales que $g(\alpha) = f(\alpha)$ para toda $\alpha \in \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto:

$$A_k = \left\{ f : I \to \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} : |f^{-1}\left(\{\frac{1}{m}\}\right)| \in \{0, 1\} \text{ para toda } m \in \mathbb{N} \setminus \{k\} \right\}.$$

Es decir, A_k consiste de todos los elementos de Y que envían ninguno o un elemento a los $\frac{1}{m}$, donde $m \neq k$. De esta manera, casi todos los elementos son enviados a $\frac{1}{k}$.

La Figura 6.3 muestra un posible conjunto A_4.

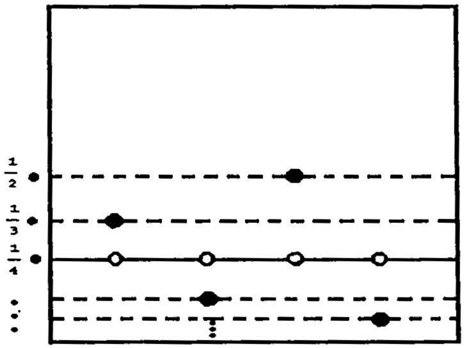


Figura 6.3

Probaremos dos afirmaciones sobre A_k.

Afirmación 1

Sean $k, r \in \mathbb{N}$ tales que $k \neq r$, entonces $A_k \cap A_r = \emptyset$.

Supongamos por el contrario que existe $g \in Y$ tal que $g \in A_k$ y $g \in A_r$. Como $g \in A_k$ y $k \neq r$, entonces $|g^{-1}(\{\frac{1}{r}\})| \in \{0, 1\}$. Similarmente, como $g \in A_r$ y $r \neq k$, entonces $|g^{-1}(\{\frac{1}{k}\})| \in \{0, 1\}$. De manera que para toda $m \in \{\mathbb{N}\setminus\{k\}\} \cup \{\mathbb{N}\setminus\{r\}\} = \mathbb{N}$, $|g^{-1}(\{\frac{1}{m}\})| \in \{0, 1\}$. Así que $g^{-1}(\bigcup\{\frac{1}{m} : m \in \mathbb{N}\}) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} g^{-1}(\{\frac{1}{m}\})$ es a lo más numerable, lo cual contradice que $g : I \to \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto $A_k \cap A_r = \emptyset$.

Afirmación 2

Para cada $k \in \mathbb{N}$, A_k es un subconjunto cerrado de Y.

Sea $p \in Y \setminus \{A_k\}$. Entonces:

$p \notin \{f : I \to \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} : |f^{-1}(\{\frac{1}{m}\})| \in \{0, 1\}$ para toda $m \in \mathbb{N}\}$. De manera que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \neq k$ y $|p^{-1}(\{\frac{1}{m}\})| \geq 2$. Por consiguiente, existen $\alpha_1, \alpha_2 \in I$ tales que $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $p(\alpha_1) = \frac{1}{m}$ y $p(\alpha_2) = \frac{1}{m}$. Así,

$U(p; \alpha_1, \alpha_2) = \{f : I \to \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} : f(\alpha_i) = p(\alpha_i)$ para cada $i \in \{1, 2\}\}$ es una vecindad de p en Y. Notemos que para toda $f \in U(p; \alpha_1, \alpha_2)$, $|f^{-1}(\{\frac{1}{m}\})| \geq 2$ y como $m \neq k$, entonces $f \notin A_k$. Así que $U(p; \alpha_1, \alpha_2) \cap A_k = \emptyset$. Por tanto A_k es cerrado en Y.

Así, hemos probado que la familia $\mathcal{F} = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ consiste solamente de conjuntos que son cerrados y ajenos dos a dos.

Ahora probaremos que no es posible encontrar conjuntos abiertos en Y y ajenos que contengan a A_1 y A_2, respectivamente.

Sea $U \subset Y$ un abierto en Y tal que $A_1 \subset U$, y consideremos la sucesión $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ de elementos de A_1 definidos de la siguiente manera:

Para $n = 1$, sea $f_1(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in I$. Notemos que f_1 es un punto interior de U. De manera que existen $\alpha_1, ..., \alpha_{n_1} \in I$ tales que $U(f_1; \alpha_1, ..., \alpha_{n_1}) \subset U$.

Para simplificar la notación haremos $\Lambda_1 = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n_1}\}$. De modo que $U(f_1; \alpha_1, ..., \alpha_{n_1}) = U(f_1; \Lambda_1)$.

Para $n = 2$, sea:

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n_1\}, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nuevamente por ser f_2 un punto interior de U, existen $\beta_1, ..., \beta_m \in I$ tales que $U(f_2; \beta_1, ..., \beta_m) \subset U$.

Hagamos $\Lambda_2 = \Lambda_1 \cup \{\beta_1, ..., \beta_m\}$. Así, reordenando los elementos de Λ_2, podemos escribir $\Lambda_2 = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, ..., \alpha_{n_2}\}$, donde $n_1 \leq n_2$. De manera que $U(f_2; \Lambda_2) \subset U$.

Similarmente, para $n = 3$, sea:

$$f_3(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n_2\}, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como f_3 es un punto interior de U, existen $\gamma_1, ..., \gamma_r \in I$ tales que $U(f_3; \gamma_1, ..., \gamma_r) \subset U$. Sea $\Lambda_3 = \Lambda_2 \cup \{\gamma_1, ..., \gamma_r\}$. Reordenando los elementos de Λ_3, podemos escribir $\Lambda_3 = \{\alpha_1, ... \alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, ..., \alpha_{n_2}, \alpha_{n_2+1}, ..., \alpha_{n_3}\}$, donde $n_2 \leq n_3$. Así, $U(f_3; \Lambda_3) \subset U$.

Así, podemos seguir construyendo de manera inductiva la sucesión de elementos de A_1 asignando a cada elemento f_k un conjunto abierto $U(f_k; \Lambda_k) \subset U$. De manera que el elemento $f_{k+1}(\alpha)$ de la sucesión queda definido como:

$$f_{k+1}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ..., n_k\}, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $g \in A_2$ definido de la siguiente manera:

$$g(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{i}, & \text{si } \alpha = \alpha_i \text{ para algún } i \in \{1, 2, ...\}, \\ \frac{1}{2}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Probaremos que para cualesquiera $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \in I$, $U(g; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \cap U \neq \emptyset$.

Sea $\Lambda = \bigcup\{\Lambda_n : n \in \mathbb{N}\} = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\}$ y supongamos que $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s\} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\} \cap \Lambda$. Demanera que para cada $j \in \{1, ..., s\}$, se tiene que $\lambda_j = \alpha_{i_j}$ para alguna $i_j \in \mathbb{N}$.

Sea $r = \max\{i_j \in \mathbb{N} : j \in \{1, ..., s\}\}$ y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\Lambda_k \supset \{\alpha_1, ...\alpha_r\}$. Entonces podemos escribir $\Lambda_k = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r\} \cup \{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_{n_k}\}$.

Definamos:

$$h(\alpha) = \begin{cases} g(\alpha), & \text{si } \alpha \in \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}, \\ f_{k+1}(\alpha), & \text{si } \alpha \in \Lambda_k \setminus \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}, \\ 1, & \text{si } \alpha \in I \setminus (\Lambda_k \cup \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}). \end{cases}$$

Probaremos que h pertenece a la intersección
$U(g; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \cap U(f_{k+1}; \Lambda_{k+1}) \subset U$.

Por definición, $h \in U(g; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$. Para probar que $h(\alpha) \in U(f_{k+1}; \Lambda_{k+1})$, consideraremos dos casos:

Caso 1. $\alpha \in \Lambda_k \cap \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$. Entonces, $\alpha = \lambda_j = \alpha_{i_j}$ y $i_j < r$. De manera que $g(\alpha) = g(\alpha_{i_j}) = \frac{1}{i_j}$. Y como $\alpha_{i_j} \in \Lambda_k$, también $f_{k+1}(\alpha) = f_{k+1}(\alpha_{i_j}) = \frac{1}{i_j}$. Por consiguiente $h(\alpha) = g(\alpha) = f_{k+1}(\alpha)$.

Caso 2. Si $\alpha \in \Lambda_{k+1} \setminus \Lambda_k$. Entonces, como $\Lambda_{k+1} \setminus \Lambda_k \subset \Lambda$ y $r = \max\{i_j \in \mathbb{N} : \lambda_j = \alpha_{i_j}\}$, tenemos que $\Lambda_{k+1} \setminus \Lambda_k \cap \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\} = \emptyset$. De manera que $\alpha \in I \setminus \Lambda_k \cup \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$, así que $h(\alpha) = 1 = f_{k+1}(\alpha)$.

Por tanto $h(\alpha) \in U(f_{k+1}; \Lambda_{k+1})$.

Así, $h(\alpha) \in U(g; \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \cap U(f_{k+1}; \Lambda_{k+1}) \subset U$. Por tanto no es posible encontrar un par de conjuntos abiertos y ajenos que contengan a A_1 y A_2, respectivamente. Es decir, Y no es normal. Por tanto I^I no es completamente normal. ∎

Teorema 6.2 *I^I no es primero numerable.*

Demostración. Supongamos por el contrario que $\beta = \{B_i(f) : i \in \mathbb{N}$ y $f \in X\}$ es una base local numerable alrededor de un elemento $f \in I^I$. Como $B_i(f)$ es un básico del producto, entonces, $B_i(f) = \pi_{\alpha_1}^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(V_{\alpha_n})$, donde V_{α_j} es un básico del punto $f(\alpha_j) \in I_{\alpha_j}$ para cada $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Notemos que $\pi_\alpha(B_i(f)) = I$ para toda $\alpha \in I$, excepto posiblemente para $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. De manera que existe $\alpha_0 \in I$ tal que $\pi_{\alpha_0}(B_i(f)) = I$ para toda $i \in \mathbb{N}$, pues I es no numerable. Sea $V_{\alpha_0} = \left(f(\alpha_0) - \frac{1}{4}, f(\alpha_0) + \frac{1}{4}\right)$. Notemos que $\pi_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$ es un abierto de f en X, el cual no contiene ningún elemento de β, pues de lo contrario

$I = \pi_{\alpha_0}(B_i(f)) \subset \pi_{\alpha_0}(v_{\alpha_0}) \subset \left(f(\alpha_0) - \frac{1}{4}, f(\alpha_0) + \frac{1}{4}\right)$. Así, I^I no es primero numerable. ■

Teorema 6.3 *I^I no es secuencialmente compacto.*

Demostración. Probaremos que la sucesión de funciones $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas por:

$$\alpha_n(x) = n\text{-ésimo dígito de la expansión binaria de } x \in I,$$

no tiene subsucesiones convergentes en I^I.

Para que α_n esté bien definida, supondremos que ningún número x tiene una cola infinita de unos en su expansión.

Supongamos por el contrario que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{\alpha_{k(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim \alpha_{k(n)} = \alpha$ para algún $\alpha \in X$. Entonces, para cada $x \in I$, la sucesión de números $\{\pi_x(\alpha_{k(n)})\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\pi_x(\alpha)$. Es decir, para toda $x \in I$. $\lim \pi_x(\alpha_{k(n)}) = \alpha(x)$. Notemos que $\alpha_{k(n)}(x) = k(n)$-ésimo término de la expansión binaria de x. Definimos un número $p \in I$ definiendo a sus dígitos (en expansión binaria). Para esto hacemos: $p(i) = i$-ésimo dígito de la expansión binaria de p deninido por:

$$p(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = k(n) \text{ para algún } n \text{ impar,} \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera que los primeros $k(1) - 1$ términos de la expansión binaria de p son unos. Luego, para la posición $k(1)$, el punto p tiene el valor de 0. Para los lugares $k(1) + 1$ hasta $k(3) - 1$, p tiene el valor de 1. Para la posición $k(3)$, p tiene el valor 0, y así sucesivamente.

Así que:

$$\alpha_{k(n)}(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 1, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Ya que $\lim \alpha_{k(n)} = \alpha$, entonces $\lim \alpha_{k(n)}(p) = \alpha(p)$.

Pero esto es imposible pues la sucesión $\left\{\alpha_{k(n)}(p)\right\}_{n=1}^{\infty}$ toma, alternadamente, los valores 1 y 0. Esta contradicción completa la prueba de que I^I no es secuencialmente compacto. ■

6.2 Espacio de Helly

El subespacio X de I^I que consiste de todas las funciones crecientes es el *espacio de Helly.*

Teorema 6.4 *El espacio de Helly es compacto.*

Demostración. Para mostrar que X es compacto, es suficiente probar que X es cerrado en I^I. Sea $f \in I^I \setminus X$. Entonces f no es creciente. De manera que existen puntos x y $y \in I$ tales que $x < y$ y $f(y) < f(x)$. Entonces, dada $\varepsilon < \frac{f(x)-f(y)}{2}$, los abiertos $B_\varepsilon(f(x)) \subset I$ y $B_\varepsilon(f(y)) \subset I$ sirven para formar el básico $\pi_x^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) \cap \pi_y^{-1}(B_\varepsilon(f(y)))$ de f que está completamente contenido en $I^I \setminus X$. Por tanto, $I^I \setminus X$ es abierto y X es cerrado. ■

Teorema 6.5 *El espacio de Helly es primero numerable.*

Demostración. Dada $f \in X$, sabemos que f tiene a lo más un conjunto de discontinuidades numerable [Rudín, W., Teorema 4.30, pag. 96]. Sea:

$$A_f = \{\alpha \in I : f \text{ es discontinua en } \alpha\} \cup (\mathbb{Q} \cap I).$$

Entonces, A_f es numerable.

Probaremos que el conjunto de todas las intersecciones finitas de elementos de la familia:

$$\mathcal{F} = \left\{\pi_\alpha^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(f(\alpha))\right) : \alpha \in A_f \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\},$$

es una base local numerable para f en X.

Notemos que es suficiente probar que cualquier subbásico $\pi_x^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$, donde $x \in I$ y $\varepsilon > 0$ contiene un elemento de la familia $\mathcal{F}$; para lo cual consideraremos dos casos:

Caso 1. $x \in A_f$. Entonces, elegimos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y observamos que

$\pi_x^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(f(x))\right) \subset \pi_x^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$.

Caso 2. $x \notin A_f$. Entonces, f es continua en x. De manera que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B_\delta(x)$, entonces $f(y) \in B_\varepsilon(f(x))$. Elegimos $\alpha \in (x, x+\delta) \cap \mathbb{Q}$ (en el caso en que $x = 1$, no hace falta elegir a α), así, $f(\alpha) \in B_\varepsilon(f(x))$ y elegimos un número natural n tal que $B_{\frac{1}{n}}(f(\alpha)) \subset B_\varepsilon(f(x))$.

De manera similar, tomamos $\beta \in (x-\delta, x) \cap \mathbb{Q}$ (si $x = 0$, tampoco elegimos a β). Así, $f(\beta) \in B_\varepsilon(f(x))$ y elegimos un natural m tal que $B_{\frac{1}{m}}(f(\beta)) \subset B_\varepsilon(f(x))$. Notemos que cualquier elemento $g \in \pi_\alpha^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(f(\alpha))\right)$ satisface que $g(x) \leq g(\alpha) \in B_\varepsilon(f(x))$ y cualquier elemento $g \in \pi_\beta^{-1}\left(B_{\frac{1}{m}}(f(\beta))\right)$ satisface que $g(x) \geq g(\beta) \in B_\varepsilon(f(x))$. De manera que cualquier

$$g \in \pi_\beta^{-1}\left(B_{\frac{1}{m}}(f(\beta))\right) \cap \pi_\alpha^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(f(\alpha))\right)$$

satisface $g(x) \in B_\varepsilon(f(x))$. De manera que

$$\pi_\beta^{-1}\left(B_{\frac{1}{m}}(f(\beta))\right) \cap \pi_\alpha^{-1}\left(B_{\frac{1}{n}}(f(\alpha))\right) \subset \pi_x^{-1}(B_\varepsilon(f(x))).$$

Por tanto el espacio de Helly es primero numerable. ■

Teorema 6.6 *El espacio de Helly es separable.*

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $A_i = \{\frac{0}{2^i}, \frac{1}{2^i}, ..., \frac{2^i-1}{2^i}, \frac{2^i}{2^i}\}$ un subconjunto de números diádicos en I. Entonces, para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, el conjunto A_i posee $2^i + 1$ elementos. Notemos que

$$D = \bigcup \{A_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

es el conjunto de todos los números diádicos en el intervalo $[0, 1]$. Sabemos que D es un subconjunto denso y numerable en I.

Para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $0 \leq k \leq 2^i + 1$, consideremos a la familia:

$$F = \left\{ f \in X : f \text{ es continua y } f\left(\frac{k+1}{2^i}\right), f\left(\frac{k}{2^i}\right) \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, hagamos:

$$Y_i = \left\{ f \in F : f(x)_{\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]} = 2^i \left(f\left(\frac{k+1}{2^i}\right) - f\left(\frac{k}{2^i}\right) \right) \left[x - \frac{k}{2^i} \right] + f\left(\frac{k}{2^i}\right) \right\};$$

donde en lo sucesivo $f(x)_{\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]}$ denotará la restricción de f en el intervalo $\left[\frac{k}{2^i}, \frac{k+1}{2^i}\right]$.

Como A_i tiene un número finito de elementos, cada elemento de Y_i puede verse como una unión finita de segmentos lineales con extremos $\langle \frac{k}{2^i}, f\left(\frac{k}{2^i}\right) \rangle$ y $\langle \frac{k+1}{2^i}, f\left(\frac{k+1}{2^i}\right) \rangle$ $(0 \leq k \leq 2^i + 1)$ y como los extremos de cada segmento lineal siempre intersecta a un número racional, entonces existen un número numerable de segmentos lineales. Por tanto Y_i es numerable. De manera que $Y = \bigcup\{Y_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es numerable.

Probaremos que Y es denso en X.

Sea $U = U(g; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ un básico de g en X, y sea V_{α_i} con $i \in \{1, 2, ..., m\}$ un básico del intervalo I_{α_i}. De manera que para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$, tenemos que $g(\alpha_i) \in V_{\alpha_i}$.

Sea $\gamma = \min\{d(\alpha_i, \alpha_{i+1}) : 1 \leq i \leq m - 1\}$. Entonces, como D es denso en I, existe un número natural r tal que $0 < \frac{1}{2^r} < \frac{\gamma}{2}$. Notemos que el intervalo $[0, 1]$ lo podemos representar en términos de una unión de intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{2^r}$. Es decir:

$[0, 1] = \left[\frac{0}{2^r}, \frac{1}{2^r}\right] \cup \left[\frac{1}{2^r}, \frac{2}{2^r}\right] \cup ... \cup \left[\frac{2^r - 1}{2^r}, \frac{2^r}{2^r}\right]$.

Sea $0 \leq k \leq 2^r + 1$, entonces $\frac{k}{2^r}$ es un diádico que pertenece a

$A_r \subset \bigcup\{A_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Como $d(\frac{k}{2^r}, \frac{k+1}{2^r}) = \frac{1}{2^r} < \frac{\gamma}{2} < \gamma \leq d(\alpha_i, \alpha_{i+1})$, entonces cada intervalo $\left[\frac{k}{2^r}, \frac{k+1}{2^r}\right]$ contiene a lo más un punto α_i para algún $i \in \{1, 2, ..., m\}$. También notemos que para cada i con $1 \leq i \leq m - 1$, existen al menos dos diádicos de A_r en el intervalo abierto (α_i, α_{i+1}), pues $\frac{1}{2^r} < \frac{\gamma}{2}$. De manera que si $\alpha_i \neq 0$, entonces α_i tiene un sucesor y un predecesor inmediato en A_r.

Denotaremos como $\frac{k_{\alpha_i}^-}{2^r}$ y $\frac{k_{\alpha_i}^+}{2^r}$ al predecesor y al sucesor inmediato de α_i en A_r, respectivamente.

Probaremos que U contiene un elemento f que pertenece a Y.

Para definir a f primero hagamos una partición del $[0,1]$ mediante la siguiente unión de intervalos:

$$\left[0,\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^+}{2^r}\right]\cup\ldots\cup\left[\frac{k_{\alpha_{m-1}}^-}{2^r},\frac{k_{\alpha_{m-1}}^+}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_{m-1}}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_m}^-}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_m}^-}{2^r},1\right].$$

Por otro lado, para cada $i\in\{1,\ldots m\}$, sea V_{α_i} el abierto del espacio coordenado I_{α_i} tal que $\pi_{\alpha_i}(U)=V_{\alpha_i}$ y sea $B_{\alpha_i}\subset V_{\alpha_i}\subset I_{\alpha_i}$ un básico tal que $\pi_{\alpha_i}(g)\in B_{\alpha_i}$ y $g(\alpha_{i-1})<\inf B_{\alpha_i}$. A continuación definamos a $f:I\to I$ en cada intervalo de la partición de la siguiente manera:

Para $f_{\left[0,\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r}\right]}$ fijamos un punto $P_1\in I_{\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r}}\cap\mathbb{Q}$ tal que $\inf B_{\alpha_1}<P_1<g(\alpha_1)$.

Posteriormente, trazamos la recta $f(x)=P_1$ para toda $x\in\left[0,\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r}\right]$.

Para definir a $f_{\left[\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^+}{2^r}\right]}$ consideremos dos casos:

Caso 1.

$g(\alpha_1)=g(\alpha_2)$. Entonces, prolongamos la recta $f(x)=P_1$ para toda $x\in\left[\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^+}{2^r}\right]$. Es decir, $f_{\left[0,\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^+}{2^r}\right]}=P_1$.

En otro caso, como $\alpha_1<\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r}$ y $\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}<\alpha_2$, entonces consideremos un básico $B_{\alpha_2}\subset V_{\alpha_2}\subset I_{\alpha_2}$ tal que $\pi_{\alpha_2}(g)\in B_{\alpha_2}$ y $g(\alpha_1)<\inf B_{\alpha_2}$. Elejimos un punto $P_2\in I_{\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}}\cap\mathbb{Q}$ tal que $\inf B_{\alpha_2}<P_2<g(\alpha_2)$ y hacemos $f(\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r})=P_2$.

Posteriormente, trazamos la recta $f(x)=2^r(\frac{P_2-P_1}{k_{\alpha_2}^--k_{\alpha_1}^+})(x-\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r})+P_1$ para $x\in\left[\frac{k_{\alpha_1}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r}\right]$; y para $x\in\left[\frac{k_{\alpha_2}^-}{2^r},\frac{k_{\alpha_2}^+}{2^r}\right]$ trazamos la constante $f(x)=P_2$.

Como en el intervalo (α_i,α_{i+1}) siempre existen al menos dos diádicos de A_r, este proceso lo podemos repetir inductivamente hasta llegar a α_m. Es decir:

Para definir a f en $\left[\frac{k_{\alpha_{m-1}}^+}{2^r},\frac{k_{\alpha_m}^-}{2^r}\right]\cup\left[\frac{k_{\alpha_m}^-}{2^r},1\right]$ consideremos dos casos:

Si $g(\alpha_{m-1})=g(\alpha_m)$, entonces prolongamos la recta $f(x)=P_{m-1}$ para toda

$x \in \left[\frac{k^+_{\alpha_{m-1}}}{2^r}, \frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}\right] \cup \left[\frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}, 1\right]$.

En otro caso, consideramos un básico $B_{\alpha_m} \subset V_{\alpha_m} \subset I_{\alpha_m}$ tal que $\pi_{\alpha_m}(g) \in B_{\alpha_m}$ y $g(\alpha_{m-1}) < \inf B_{\alpha_m}$.

Elegimos un punto $P_m \in I_{\frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}} \cap \mathbb{Q}$ tal que $\inf B_{\alpha_m} < P_m < g(\alpha_m)$ y hacemos $f(\frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}) = P_m$.

Posteriormente, trazamos la recta $f(x) = 2^r(\frac{P_m - P_{m-1}}{k^-_{\alpha_m} - k^+_{\alpha_{m-1}}})(x - \frac{k^+_{\alpha_{m-1}}}{2^r}) + P_{m-1}$ para $x \in \left[\frac{k^+_{\alpha_{m-1}}}{2^r}, \frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}\right]$, donde $P_{m-1} = f\left(\frac{k^+_{\alpha_{m-1}}}{2^r}\right)$ y $P_m = f\left(\frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}\right)$; y para $x \in \left[\frac{k^-_{\alpha_m}}{2^r}, 1\right]$ trazamos la recta $f(x) = P_m$.

Así, $f \in U(g; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \cap Y$.

Por tanto Y es denso en X. ■

En la figura 6.4 mostramos la construcción de f, para el abierto $U = U(g; \frac{1}{16}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{7}{8})$, donde $\gamma = \frac{1}{6}$ y $\frac{1}{2^r} = \frac{1}{16}$. Los puntos P_1, P_2, ...,P_7 representan una altura racional.

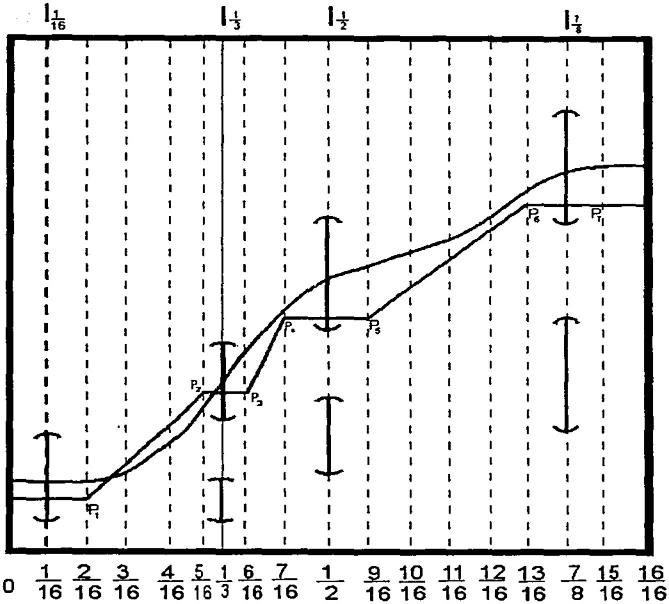


Figura 6.4

Teorema 6.7 *El espacio de Helly no es metrizable.*

Demostración. Consideremos la familia de funciones $\Phi = \{f_x : x \in I\}$ definida por:

$$f_x(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < x, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } t = x, \\ 1, & \text{si } t > x. \end{cases}$$

Demostraremos que esta familia con la topología relativa de X es un subespacio discreto.

Sea $B_\alpha = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ un básico del espacio coordenado I_α, entonces el elemento $f_\alpha(t)$ definido como:

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < \alpha, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } t = \alpha, \\ 1, & \text{si } t > \alpha; \end{cases}$$

pertenece a B_α.

Si $\alpha < x$. Entonces, $f_x(\alpha) = 0$, luego $f_x(\alpha) \notin B_\alpha$.

Si $x < \alpha$. Entonces, $f_x(\alpha) = 1$, luego $f_x(\alpha) \notin B_\alpha$. De manera que $\pi_x^{-1}(B_x) = \{f_\alpha(t)\}$.

Así, la familia Φ es un subespacio discreto no numerable, y por consiguiente Φ no es segundo numerable. Por tanto, X tampoco es segundo numerable, y al ser separable, no es metrizable. ■

Bibliografía

[1] Dugundji, James. Topology. Allyn and Bacen (1966).

[2] Steen, Lynn A. and Seebach Arthur Jr.. Counterexamples in topology, Dover (1995).

[3] Willard, Stephen. General Topology. Addison-Wesley (1970).