



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

FLUJO GRANULAR ALREDEDOR DE UN CILINDRO

T É S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE INGENIERO MECÁNICO

( AREA MECÁNICA )

P R E S E N T A :

DANIEL CHEHATA GÓMEZ



DIRECTOR DE TESIS: DR. ROBERTO ZENIT CAMACHO

MÉXICO, D. F.

2002.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

## *If*

*If you can keep your head when all about you  
Are losing theirs and blaming it on you.  
If you can trust yourself when all men doubt you,  
But make allowance for their doubting too;  
If you can wait and not be tired by waiting,  
Or being lied about, don't deal in lies,  
Or being hated, don't give way to hating,  
And yet don't look too good, nor talk too wise:*

*If you can dream – and not make dreams your master  
If you can think – and not make thoughts your aim  
If you can meet with Triumph and Disaster  
And treat those two impostors just the same;  
If you can bear to hear the truth you've spoken  
Twisted by knaves to make a trap for fools.  
Or watch the things you gave your life to, broken,  
And stoop and build em up with worn-out tools:*

*If you can make one heap of all your winnings  
And risk it on one turn of pitch-and-toss,  
And lose, and start again at your beginnings  
And never breathe a word about your loss;  
If you can force your heart and nerve and sinew  
To serve you turn long after they are gone,  
And so hold on when there is nothing in you  
Except the Will which says to them: "Hold on!"*

*If you can talk with crowds and keep your virtue,  
Or walk with kings – nor lose the common touch,  
If neither foes nor loving friends can hurt you,  
If all men count with you, but none too much;  
If you can fill the unforgiving minute  
With sixty seconds' worth of distance run,  
Yours is the Earth and everything that's in it,  
And – which is more- you'll be a Man, my son!*

Rudyard Kipling

**A mis padres.**

**A mi familia.**

**A mis amigos.**

**A todos aquellos que tienen un lugar  
en el saco de mi corazón.**

## Resumen

Se estudió el flujo alrededor de un cilindro inmerso en una corriente granular. Los experimentos se realizaron en un canal vertical de 1 metro de largo y 0.3 m de ancho. Dos vidrios gruesos con una separación de 5 cm se utilizaron para generar un flujo granular cuasi-bidimensional. La velocidad media del flujo se controló a través de la apertura de una tobera en la parte inferior. Un contenedor, de gran capacidad, se colocó en la parte superior del canal donde las partículas se almacenaban antes de entrar al canal. Se utilizaron esferas de vidrio de 3 y 6 mm de alta esfericidad y poca dispersión de tamaño. En el centro del canal se colocó un cilindro que se mantuvo estacionario. La fuerza ejercida sobre el cilindro fue medida directamente utilizando una celda de carga calibrada. Los datos de fuerza fueron capturados por un sistema de adquisición de datos montado en una PC. De manera simultánea el flujo fue videograbado utilizando una cámara de alta velocidad. Las imágenes fueron digitalizadas y un software de velocimetría tipo PIV fue utilizado para obtener mediciones del campo de velocidades alrededor del cilindro. Se realizaron experimentos para varios cilindros, dos tamaños de partículas y un intervalo amplio de velocidades.

Para el intervalo de velocidades estudiado, la fuerza de arrastre, en contraste con lo que se esperaría con un fluido ordinario, es independiente de la velocidad media del flujo. Se encontró que la fuerza de arrastre es proporcional al diámetro del cilindro e inversamente proporcional al diámetro de las partículas. Se identificó una zona de estancamiento de tamaño comparable al tamaño del cilindro. Se observó la formación de una estela en la parte posterior del cilindro, la cual se caracteriza por ser una zona de baja densidad muy bien definida. Se observó que el largo de la estela crece al aumentar la velocidad media del flujo. Las características del campo de velocidades difieren significativamente de las predicciones basadas en modelos clásicos de mecánica de fluidos.

## Agradecimientos

En primer lugar agradezco al Dr. Roberto Zenit, director de mi tesis por toda su colaboración, atención, dirección, dedicación, diversión, motivación, comprensión y corrección de este trabajo. He aprendido y espero seguir aprendiendo mucho de él. Agradezco su amistad y su genuino interés mostrado hacia todos los que trabajan con el. ¡Lástima que sea tan malo para el squash!

Gracias a toda la gente del laboratorio de Reología del IIM que hizo mucho y algunas veces deshizo un poco de este trabajo. Con cariño quedarán en mi memoria: Roberto Alcaraz, Isaí Alvarez, Toño "El Jefe" Córdova, Raúl Lima, Julián Martínez, Miguel Moctezuma y Angel Ruiz. Les agradezco su alegría y compañerismo en todo este tiempo en el que hemos convivido. Espero que nuestra relación perdure.

Un agradecimiento especial para Sandra Pascual por toda la ayuda prestada en la implementación del sistema de medición de fuerza. Su colaboración fue muy importante para llevar a este trabajo a feliz término.

Agradezco:

a Abraham Galindo y a Jorge Díaz, también del laboratorio de Reología por su amistad, ayuda y apoyo en todo este tiempo.

a los Doctores Guillermo Pulos y Enrique Geffroy por prestarme equipo y herramientas para la realización de esta tesis.

a los Doctores Juan Hernández, Ramón Herrera, Baltasar Mena, Ramón Peralta-Fabi y Francisco Solorio les agradezco sus comentarios y críticas a este trabajo.

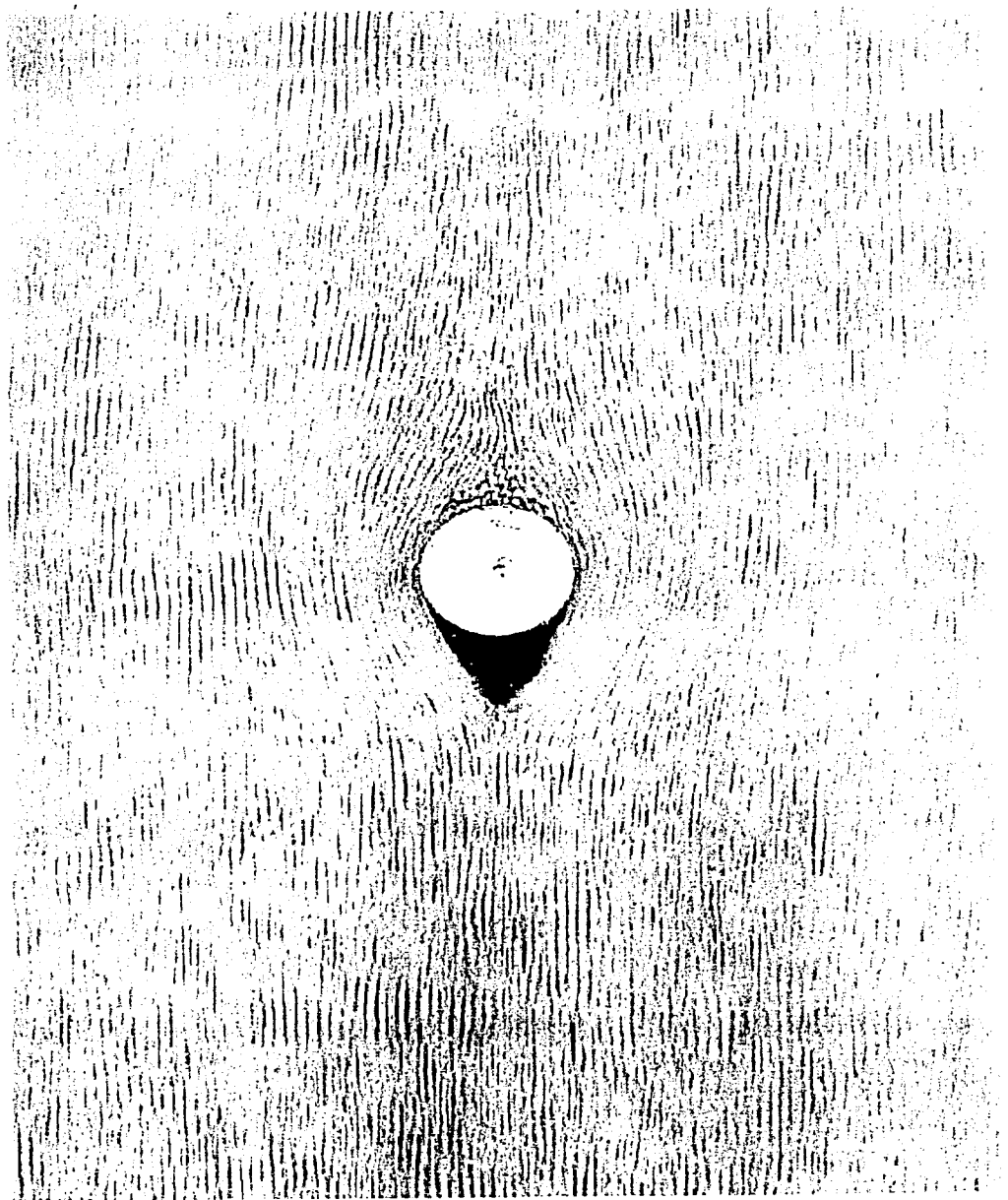
a toda la gente del IIM por su puntual ayuda en la fabricación del canal de flujo y por toda la ayuda ofrecida.

Gracias también a Cristina González por su ayuda con las copias, la impresora, digitalización de imágenes, y demás ayuda prestada.

Un agradecimiento especial a Cayi y a Ulises por su amistad y apoyo en todos estos años en la universidad.

Y por supuesto de todo corazón mi reconocimiento a todos aquellos buenos profesores de la Facultad de Ingeniería que sin duda han dejado huella en mi. Muchas gracias. Saben que no los defraudaré.

A toda la gente que hizo que este sueño fuera posible. MUCHAS GRACIAS.



Flujo granular denso alrededor de un cilindro. Diámetro del cilindro: 38.1 mm. Diámetro de partículas: 3mm. Velocidad del flujo: 0.47 m/s.



# Índice

**Página**

## **Capítulo 1. Introducción**

1.1	Conceptos previos .....	1
1.2	Antecedentes .....	4
1.3	Resistencia de cuerpos sumergidos en flujos convencionales .....	5
1.3.1	Coeficiente de arrastre .....	6
1.3.2	Regiones de flujo perturbado .....	7
1.3.3	La transición en regiones perturbadas .....	7
1.3.4	Parámetros principales y parámetros influyentes .....	8
1.3.5	Vorticidad .....	9
1.4	Colisiones inelásticas .....	9

## **Capítulo 2. Propiedades de los medios granulares.**

2.1	Ecuaciones de conservación para un medio granular .....	11
2.2	Densidad y compresibilidad .....	11
2.3	Tamaño de la partícula .....	12
2.4	Dilatancia .....	13
2.5	Materiales granulares en reposo .....	13
2.6	Ángulo de reposo .....	14
2.7	Flujo Granular .....	15
2.8	Temperatura granular .....	16
2.9	Distribución de velocidades .....	17
2.10	Transferencia de cantidad de movimiento y esfuerzos en medios granulares .....	22
2.11	Fuerza de arrastre en medios granulares .....	23
2.12	Diferencias entre un material granular y un gas .....	24

### **Capítulo 3. Desarrollo experimental**

3.1	Objetivo .....	25
3.2	Descripción del experimento .....	25
3.3	Descripción del material .....	29
3.4	Medición del gasto de material .....	29
3.5	Medición de fuerza .....	31
3.5.1	Calibración de la galga extensométrica .....	33
3.6	Determinación del campo de velocidades .....	34
3.7	Determinación del tamaño de la estela .....	35

### **Capítulo 4. Resultados**

4.1	Medición del gasto y cálculo de la velocidad media .....	36
4.2	Medición de fuerza .....	37
4.3	Comparación de la fuerza de arrastre entre el flujo granular estudiado y un flujo de vidrio fundido .....	42
4.4	Determinación del campo de velocidades .....	43
4.5	Cálculo del factor de empaquetamiento .....	49
4.6	Evolución del campo de velocidades .....	50
4.7	Determinación de la vorticidad .....	53
4.8	Resultados adimensionales .....	55
4.9	Longitud de la estela .....	56

<b>Conclusiones</b> .....	<b>58</b>
---------------------------	-----------

<b>Apéndice 1 Características de las esferas de vidrio</b> .....	<b>61</b>
--	-----------

<b>Apéndice 2 Características de la galga extensométrica</b> .....	<b>62</b>
--	-----------

<b>Apéndice 3 Presentaciones realizadas</b> .....	<b>63</b>
---	-----------

<b>Bibliografía y referencias</b> .....	<b>69</b>
---	-----------

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Conceptos previos

Un material granular es un medio bifásico el cual consiste de partículas dispersas rodeadas por un fluido intersticial o por vacío. Si los granos están secos, cualquier fluido intersticial, como por ejemplo el aire, puede ser despreciado para determinar muchas de las propiedades del material. Sin embargo, a pesar de esta aparente simplicidad, un material granular se comporta de una manera muy diferente a las formas convencionales de la materia; los sólidos, los líquidos o los gases. Es por esto que podemos considerar a los materiales granulares como un “estado peculiar” de la materia.

Si las partículas no presentan fuerzas cohesivas entonces las fuerzas entre las partículas serán de contacto (de tipo repulsivo), de tal manera que la forma del material está determinada por las condiciones de frontera y por la gravedad.

Un factor de distinción entre flujos granulares y otros flujos del tipo sólido-fluido consiste en que en el flujo granular la interacción directa de las partículas juega un rol fundamental. Una fracción importante de energía y cantidad de movimiento son transferidos debido al contacto que tienen las partículas entre sí y con las fronteras que lo rodean.

Cuando un material granular es sometido a un esfuerzo cortante las partículas que conforman al material pueden fluir o resistir este esfuerzo cortante como lo hace un material sólido. Esta dualidad en el comportamiento de estos materiales es la que los hace difíciles de estudiar.

Por ejemplo, si colocamos un montículo de arena en el cual su pendiente sea menor que su ángulo de reposo, el material se comporta como un sólido. El material se mantiene en reposo aún cuando la fuerza gravitacional crea esfuerzos macroscópicos en la superficie. Sin embargo si a este montículo se le da una inclinación de algunos grados más que su ángulo de reposo, los granos que lo componen comienzan a fluir. El problema es que el

flujo no se da como en un fluido convencional. En este caso el flujo se presenta en la capa superficial del montículo de arena, sin que se presente flujo en el interior del material.

Existen dos aspectos particularmente importantes que contribuyen a estas propiedades únicas de los materiales granulares: la temperatura no influye en el flujo y la interacción entre los granos es disipativa debido a la fricción estática y las colisiones inelásticas.

Inicialmente se puede suponer que un flujo granular es similar al comportamiento de un flujo de gas ya que ambos constan de partículas discretas con fuerzas cohesivas despreciables. Sin embargo en un material granular la escala de energía relevante es la energía potencial  $mgd$  de un grano de masa  $m$  elevada a su propio diámetro  $d$  en la gravedad de la tierra  $g$ , mientras que en un gas la escala de energía relevante está referida a la energía cinética de las partículas relacionada con el parámetro de temperatura  $kT$ . Donde  $k$  es la conductividad térmica y  $T$  es la temperatura del gas.

Los medios granulares los podemos encontrar en muchos sitios y circunstancias. En la agricultura pueden ser granos alimenticios como el arroz o el maíz. En la industria de la construcción los tenemos en casos como la arena, la grava o la tierra. En el procesamiento de productos químicos encontramos al carbón, pellets de plástico y en la industria farmacéutica. Otros ejemplos en referencia a este tipo de materiales y flujo son: los deslaves de montañas, la metalurgia de polvos, la formación de dunas, recubrimientos por aspersión de polvos, flujo de maíz o harina dentro de un silo y en general el manejo de muchas de las materias primas.

Un buen entendimiento del comportamiento físico de los materiales granulares nos llevará al diseño eficiente de sistemas de procesamiento y almacenamiento de materiales. Por citar algunos ejemplos podemos mencionar que en Estados Unidos, en lo que se refiere a la industria química, aproximadamente la mitad de los productos producidos y tres cuartas partes de las materias primas se presentan en forma granular (Nedderman 1992); así mismo, se estima que 61 mil millones de dólares en la industria química están relacionados con la tecnología de partículas (Ennis *et al* 1994). Aproximadamente 1.3% de la producción de energía eléctrica en Estados Unidos se emplea en triturar materiales para convertirlos en partículas. En aquel país anualmente se pierden alrededor de 1000 silos y tolvas. En México, de las aproximadamente 5 millones de toneladas de maíz que se manejan al año, el

30% de éste se pierde debido a los pésimos sistemas de manejo con los que se cuentan (Hernández-Cordero *et al.* 2000).

El flujo granular alrededor de objetos ocurre frecuentemente tanto en la naturaleza como en la industria. Estos flujos son comúnmente observados en dispositivos utilizados para almacenar, transportar y realizar pruebas en materiales granulares. Otros casos que podemos citar en los que hace falta un mejor conocimiento de la fuerza de arrastre en un material granular son:

- Cuchillas utilizadas en dispositivos mezcladores.
- Insertos utilizados como soportes estructurales y desviadores de flujo, utilizados para reducir esfuerzos dinámicos que se presentan durante el llenado y vaciado de silos.
- Equipos de construcción que requieren el movimiento de tierras, así como equipo para arado.
- Sondas de prueba para determinar las características de los suelos.
- Camas fluidizadas que contienen tubos los cuales actúan como intercambiadores de calor.

El conocimiento de la mecánica de estos flujos es esencial para mejorar tanto el transporte como el almacenaje de este tipo de materiales. En particular, los diseñadores están interesados en la predicción de fuerzas, el desgaste y los patrones de flujos alrededor de los objetos sumergidos. Para poder lograr mejoras en los diseños actuales es necesario realizar investigaciones que permitan comprender de una mejor manera el comportamiento de estos materiales.

### 1.2.1 Antecedentes

Refiriéndonos un poco a la historia de los medios granulares hay que decir que el estudio de estos medios tiene una larga historia. Han habido científicos famosos involucrados en estos estudios como Coulomb (1773), quien propuso las ideas de fricción estática. Faraday (1831) descubrió la inestabilidad convectiva en polvos con movimiento vibratorio, y Reynolds en 1885 introdujo el concepto de dilatación en un medio granular. En las últimas décadas ha resurgido el interés en el estudio del medio granular. El estudio de los montículos de arena ha servido para hacer analogías que permiten describir algunos fenómenos dinámicos disipativos que a menudo son microscópicos.

En lo que se refiere al estudio de fuerzas en cuerpos sumergidos en un medio granulado podemos citar los siguientes antecedentes. Weighardt (1974) fue el primero en realizar estudios de flujo granular alrededor de objetos. Él realizó una serie de experimentos en flujos granulares densos. En estos experimentos unos cilindros parcialmente inmersos en arena eran arrastrados a través de esta. Encontró que la dependencia entre la velocidad de traslación y la sección longitudinal del cilindro era pequeña, sin embargo existe una dependencia del tipo raíz cuadrada con el diámetro proyectado del cilindro. Él asoció estos resultados al hecho de que el arrastre generado sobre el cilindro era debido a la fricción entre las partículas; un mecanismo independiente de la velocidad. Recientemente Albert *et al.* (1998) revisaron este problema utilizando velocidades del orden de 1 mm/s, en lugar de las velocidades de 1-100 cm/s utilizadas por Weighardt. Ellos observaron resultados similares, aunque encontraron una dependencia lineal con respecto al diámetro proyectado del objeto en contraste con la relación reportada por Weighardt.

Atkinson *et al.* (1983) también investigaron el arrastre en objetos sumergidos en un flujo granular denso a bajas velocidades. Sus experimentos se enfocaron principalmente en las fuerzas generadas sobre objetos de gran longitud orientados de manera paralela al flujo. Ellos también encontraron que la fuerza de arrastre es independiente de la velocidad de flujo y nuevamente se atribuyó este fenómeno a las interacciones friccionales entre partículas.

Tüzün y Nedderman estudiaron los patrones de flujo alrededor de insertos en un silo y el esfuerzo en las paredes resultante de su presencia. Ellos llevaron a cabo experimentos con flujo granular denso en un silo vertical con obstáculos cuadrados y triangulares.

Encontraron que se formaban regiones de estancamiento aguas arriba de los objetos y una región vacía en la parte inferior de estos. Hernández-Cordero *et al.* (2000) realizaron experimentos con insertos en silos con granos. Encontraron que los insertos acarreaban mucho del esfuerzo dinámico durante el vaciado del silo, originando una reducción en la pérdida de granos. Por otro lado, estudios numéricos realizados recientemente (Wassgren *et al.* 2002) muestran que el arrastre en un flujo diluido aumenta con el cuadrado de la velocidad.

### **1.3 Resistencia de cuerpos sumergidos en flujos convencionales**

Cuando un cuerpo de forma arbitraria se sumerge en una corriente fluida, el fluido ejercerá sobre él fuerzas y momentos. Si el cuerpo tiene una forma y orientación no simétricas, las fuerzas y momentos que ejerce el fluido sobre él tienen componentes según los tres ejes coordenados. Es costumbre elegir un eje paralelo a la corriente no perturbada, positivo aguas abajo. La fuerza sobre el cuerpo según este eje se denomina resistencia o arrastre, y el momento alrededor de él momento de balanceo. La resistencia corresponde a una pérdida de cantidad de movimiento y debe vencerse de alguna manera si queremos que el cuerpo avance aguas arriba en la corriente fluida.

Una segunda componente de fuerza que aparece en el cuerpo es aquella que normalmente equilibra al peso. Se denomina sustentación y es perpendicular a la resistencia. El momento alrededor de este eje se denomina de guiñada.

La tercera componente, que no proporciona ni pérdida ni ganancia es la fuerza lateral y el momento alrededor de este eje es el de cabeceo.

Cuando el cuerpo es simétrico con respecto al plano formado por los ejes de sustentación y resistencia, la fuerza lateral y los momentos de guiñada y balanceo desaparecen, reduciéndose el problema a un caso bidimensional.

Hay una simplificación adicional cuando el cuerpo tiene dos planos de simetría. Una gran variedad de formas satisfacen esta condición como cilindros, alas y todos los cuerpos de revolución. Si la corriente no perturbada es paralela a la intersección de estos dos planos, denominada cuerda principal del cuerpo, hay resistencia pero no sustentación, ni fuerza

lateral, ni momentos (aun cuando cuerpos con torbellinos desprendidos, pueden tener una sustentación, fuerza lateral y momentos oscilantes, pero su valor medio es nulo). Si la corriente no perturbada no es paralela a la cuerda, el cuerpo tendrá una orientación no simétrica y, teóricamente, pueden aparecer todas las fuerzas y momentos (White 1998).

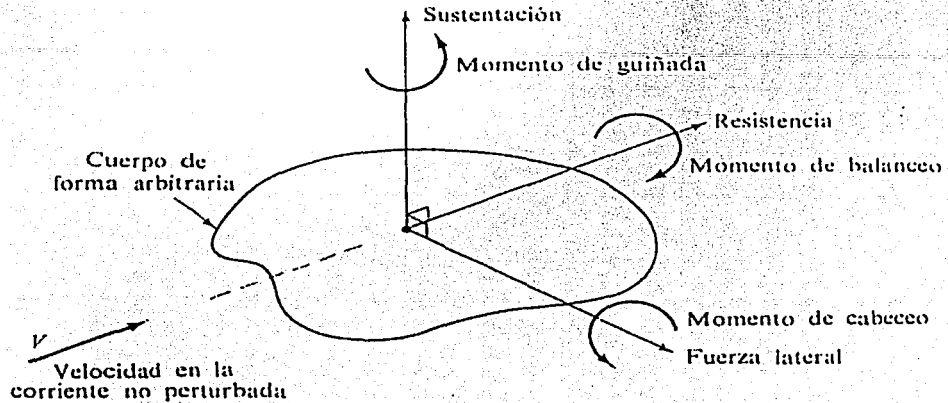


Fig 1.1 Fuerzas y momentos en un cuerpo sumergido en un fluido

### 1.3.1 Coeficiente de arrastre

La fuerza dinámica de arrastre depende de la presión dinámica  $\frac{1}{2} \rho V^2$ , y el área proyectada del cilindro expuesta a la corriente. La fuerza  $F$  puede entonces expresarse en función de un coeficiente adimensional llamado coeficiente de arrastre definido como:

$$C = 2F / \rho V^2 DL, \quad (1.1)$$

donde

$\rho =$  Densidad del fluido.

$V =$  Velocidad del fluido.

$F =$  Fuerza de arrastre.

$D, L =$  Longitudes características del sistema.



La fuerza de arrastre es producida por dos factores principales: la fricción viscosa a lo largo de la superficie  $C_{Df}$  y por una diferencia de presiones existente aguas arriba y aguas abajo del cilindro  $C_{Dp}$ . Esta ecuación muestra la manera más común de definir el coeficiente de arrastre.

### 1.3.2 Regiones de flujo perturbado

Cuando un fluido pasa alrededor de un cuerpo o cuando un cuerpo se mueve a través de un fluido en reposo, una región de flujo perturbado se forma siempre alrededor del objeto. La extensión de esta región de flujo perturbado depende en gran parte de la forma, orientación y tamaño del cuerpo, de la velocidad y viscosidad del fluido. También puede ser influenciado por una gran cantidad de pequeñas perturbaciones.

El flujo perturbado se caracteriza por la variación localizada de la velocidad en magnitud, dirección y tiempo. La velocidad local promedio puede ser mayor, igual, o menor que la velocidad del fluido aguas arriba.

### 1.3.3 La transición en regiones perturbadas

En 1883 Reynolds descubrió que la transición de un flujo laminar a un flujo turbulento, en una tubería lisa, depende de la densidad del fluido  $\rho$ , la viscosidad  $\mu$ , la velocidad  $V$  y el diámetro interno de la tubería  $d$ . El parámetro adimensional obtenido es conocido como número de Reynolds  $Re$  y representa la proporción existente entre las fuerzas inerciales y las fuerzas viscosas presentes en un flujo. Este parámetro se representa de la forma:

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad (1.2)$$

La transición de un flujo laminar a uno turbulento se da en un intervalo de números de Reynolds. Los valores máximos y mínimos de la transición reciben el nombre de valores críticos.

Rayleigh aplicó el análisis dimensional y extendió el uso del número de Reynolds al flujo alrededor de esferas y cilindros. El diámetro externo  $D$  del cilindro circular fue tomado como longitud característica. Los valores del número de Reynolds varían desde menos de uno para el caso de fibras delgadas en líquidos hasta cientos de millones para el caso de cohetes expuestos a vientos cruzados.

### **1.3.4 Parámetros principales y parámetros influyentes**

El número de Reynolds ha sido señalado como el parámetro principal para flujos idealizados sin perturbación alrededor de un cilindro bidimensional. Sin embargo, los flujos reales alrededor de cilindros en la mayoría de los casos es común que se vean afectados por una gran cantidad de perturbaciones que son convenientes de cuantificar por un conjunto apropiado de parámetros de influencia.

Todos los estados transitorios pueden ser descritos por el número de Reynolds, sin embargo su inicio prematuro o su posible modificación podrá estar determinada por estos parámetros influyentes. Cuando uno de estos parámetros de influencia excede cierta magnitud, este se convierte en un parámetro principal para algunos estados de transición.

Esta división conceptual entre parámetros principales y parámetros influyentes es útil para comprender la gran variación que existe en los datos obtenidos en flujos alrededor de cilindros. Sin embargo es difícil determinar cuando un parámetro de influencia se convierte en un parámetro principal.

Como ejemplo de los más frecuentes parámetros de influencia podemos mencionar las perturbaciones en el flujo, que pueden ser periódicas, irregulares o estacionarias. La más común de estas perturbaciones es la turbulencia. Otro tipo de perturbación irregular es la rugosidad de la superficie. Esta se caracteriza al menos por dos parámetros de influencia: la rugosidad relativa y la textura. La rugosidad relativa relaciona de manera adimensional la altura media de las irregularidades de una superficie con respecto a una longitud característica de esta. La textura se refiere a las desviaciones locales de una superficie con

respecto a su forma ideal. En general los experimentos se procuran hacer utilizando cilindros lisos para eliminar en lo posible estos dos parámetros de influencia.

### 1.3.5 Vorticidad

Una partícula de fluido en un campo de velocidad uniforme no puede rotar por la acción de fuerzas normales a su superficie. Para lograr la rotación de una partícula que inicialmente no presenta giro se requiere de la acción de esfuerzos cortantes en la superficie de la partícula. El esfuerzo cortante es proporcional a la velocidad de deformación angular. La viscosidad relaciona el esfuerzo cortante con la velocidad angular de deformación de la partícula fluida. La presencia de fuerzas viscosas implica que el flujo es rotacional.

La vorticidad se define matemáticamente como dos veces el rotacional, es decir:

$$\zeta = \nabla \times \mathcal{V} . \quad (1.3)$$

Donde  $\mathcal{V}$  es el campo de velocidad del fluido.

### 1.3 Colisiones inelásticas

Una colisión inelástica es aquella en la cuál la energía cinética del sistema de cuerpos en colisión no se conserva. Sin embargo, el momento lineal del sistema si se conserva. Si los cuerpos que colisionan quedan unidos, la colisión será completamente inelástica.

A lo largo de este trabajo se menciona la importancia de que las colisiones entre las partículas en un medio granular son del tipo inelásticas y a partir de este hecho, existen grandes diferencias en relación con los gases los cuales presentan colisiones elásticas entre sus componentes.

Cuando una partícula A con velocidad  $V_A$  choca contra una partícula B con velocidad  $V_B$ , después del impacto, las partículas tendrán velocidades  $V'_A$  y  $V'_B$ .

El coeficiente de restitución  $C_R$  se define como:

$$C_R = \frac{V'_B - V'_A}{V_A - V_B} \quad (1.4)$$

Si  $C_R = 0$ , la colisión es plástica. lo que indica que las partículas después del impacto permanecen unidas, es decir toda la energía cinética se transforma en energía de deformación. Si  $C_R = 1$ , la energía cinética total no cambia por el impacto, es decir no hay pérdidas de energía en el choque y se dice que la colisión es puramente elástica.

# CAPÍTULO 2

## Propiedades de los materiales granulares

### 2.1 Ecuaciones de conservación para un medio granular

De manera análoga a la definición de continuidad para fluidos ordinarios, es posible definir una ecuación similar para medios granulares, la cuál tiene la forma que se muestra a continuación:

$$\frac{D\rho_b}{Dt} = -\rho_b \nabla \cdot \bar{u}. \quad (2.1)$$

La ecuación de conservación de cantidad de movimiento para estos medios es de la forma:

$$\rho_b \frac{d\bar{u}}{dt} = -\nabla \cdot \tau + g\rho_b, \quad (2.2)$$

donde  $\bar{u}$  es el vector velocidad,  $\rho_b$  es la densidad del medio,  $\tau$  es el tensor de esfuerzos y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

### 2.2 Densidad y compresibilidad

Cuando se quiere medir la densidad de un material granular se encuentra un problema particular: existen dos densidades de interés, la densidad de las partículas sólidas a la cuál se le conoce como densidad del sólido y se denota por  $\rho_s$  y la densidad de la mezcla del sólido y el fluido intersticial la cuál se conoce como densidad del medio y se denota como  $\rho_b$ .

Estas dos densidades se relacionan por:

$$\rho_b = \rho_s (1 - \epsilon) + \rho_g \epsilon, \quad (2.3)$$

donde  $\epsilon$  es la fracción de vacantes definida como la fracción volumétrica del material ocupada ya sea por el fluido intersticial o por vacío. El término  $\rho_g$  es la densidad del fluido intersticial, y siendo muchas veces este fluido aire, su densidad generalmente es del orden de una centésima parte de la del sólido y por lo tanto es común despreciar este término de la ecuación. En el caso de que el medio intersticial sea vacío, la densidad del material granular será :

$$\rho_b = \rho_s (1 - \epsilon). \quad (2.4)$$

Mientras que las partículas pueden ser comprimidas por sí mismas, el cambio en la densidad del sólido en relación con el intervalo de esfuerzos es comúnmente bajo, lo cual implica que  $\rho_s$  es constante para un material, por otro lado la densidad conjunta varía significativamente con el esfuerzo aplicado debido principalmente al reacomodo de las partículas. Al disminuir el esfuerzo sobre el material, este no necesariamente se expandirá, teniendo como resultado que la densidad conjunta no depende únicamente del esfuerzo aplicado sobre el material en un único momento, sino que es resultado de todos los esfuerzos aplicados con anterioridad (Neederman 1992).

### 2.3 Tamaño de la partícula

La medición del diámetro de una sola partícula esférica no es ningún problema. Sin embargo los materiales granulares difícilmente están compuestos por partículas perfectamente esféricas. Es por ello que se utiliza el término de diámetro esférico equivalente  $D_s$ . Este está definido como el diámetro de la esfera que tiene el mismo volumen que la partícula,

$$D_s = \left( \frac{6V}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.5)$$

donde  $V$  es el volumen de la partícula. Adicionalmente existe otro parámetro conocido como el factor de forma  $\lambda_s$  que está definido como:

$$\lambda_s = \frac{A}{\pi D_s^2}, \quad (2.6)$$

donde  $A$  es la superficie de la partícula.

## 2.4 Dilatancia

En un artículo presentado por Reynolds en 1885, él observó que en un “material granular muy compactado colocado en una envoltura flexible, su volumen aumenta invariablemente cuando la envoltura es deformada. Si no es posible estirar la envoltura pero si deformarla, no es posible causar ninguna deformación hasta que se llegue a una fuerza tal que esta rompa la envoltura o se fracture el material granular” (Reynolds 1885). A este enunciado se le conoce como el principio de dilatancia de Reynolds. Este comportamiento indica que en un material granular la deformación cortante va acompañada de un cambio de volumen, en contraste con lo que sucede en sólidos ordinarios, los cuales presentan deformaciones a volumen constante.

## 2.5 Materiales granulares en reposo

Aún estando en reposo, los materiales granulares presentan comportamientos poco usuales en comparación con otros materiales. Por ejemplo, cuando un material granular como la arena se encuentra contenido dentro de un cilindro vertical alto, como podría ser un silo, la presión máxima que encontramos en el fondo del cilindro no crece indefinidamente

según va aumentando la columna de arena que se encuentra sobre este punto, como ocurriría en el caso de un fluido convencional. En vez de esto, encontramos que para una columna suficientemente alta, la presión alcanza un valor máximo independiente de la altura. Esto debido a las fuerzas de contacto entre los granos y las paredes del cilindro. Las paredes del cilindro son las encargadas de contener el resto del peso. Esta característica es la que permite que en los relojes de arena, ésta fluya a un ritmo constante.

Estudios en medios granulares (Knight *et al.* 1995) muestran que el asentamiento de estos materiales bajo condiciones de vibración en estos sistemas es logarítmicamente lenta. Puede ser que aún después de 100 000 ciclos de vibración, dependiendo de la intensidad de esta, un recipiente que contiene un material granular pueda no alcanzar aún su estado de máxima compactación.

También se ha observado que una vez alcanzado el estado permanente existen grandes fluctuaciones en la densidad (Ben-Naim *et al.* 1996).

## 2.6 Ángulo de reposo

Todos hemos visto que con un puñado de arena seca es imposible crear un montículo cuyas paredes sean perfectamente verticales. Tan pronto como la pendiente de la pila de arena llega a un cierto valor, la pila se colapsa hasta que la pendiente regresa a un ángulo  $\theta$ . Este ángulo es conocido como ángulo de reposo. Coulomb propuso una teoría, bastante aceptada, la cuál se basa en la idea de que dos capas de material granular no se pueden deslizar entre ellas a menos que el ángulo de inclinación  $\theta$  sea al menos igual a  $\tan^{-1}(\mu_s)$ . Sin embargo efectos de histéresis pueden complicar la definición de ángulo de reposo; de hecho, este ángulo puede no ser único. Este depende de varios factores, entre ellos la manera en que la pila del medio sea preparada.



## 2.7 Flujo Granular

Tal como sucede en un fluido, un medio granular puede deformarse bajo la acción de fuerzas externas. Un fluido newtoniano no soporta ninguna fuerza superficial tangencial, por lo tanto cualquier fuerza tangencial aplicada sobre el material provocará un flujo cortante que, según sea la magnitud de dicha fuerza tangencial, podrá transmitirse a toda la región ocupada por el medio fluido. En un medio granular, este mecanismo se origina a partir de fuerzas friccionales y puede generar distintos tipos de movimiento o flujo. El flujo lento o cuasi-estático se distingue principalmente porque se mantienen altas concentraciones de granos y pequeños gradientes de velocidad. Esto hace que la deformación del material sea inducida casi exclusivamente desde la superficie. La dinámica de la deformación puede ser bien descrita por ecuaciones de balance de fuerza en las cercanías de la superficie del material.

Cuando la magnitud de la fuerza tangencial superficial es muy grande, se genera un flujo rápido, en donde cada partícula se mueve independientemente de las demás. Existe un gradiente de velocidades considerable y la concentración de granos es pequeña. En este régimen de flujo rápido, también conocido como régimen de inercia de grano o flujo diluido, existe una dirección preferencial de flujo, una velocidad promedio y aparentemente, un movimiento aleatorio de los granos individuales con respecto al flujo principal. En este régimen la velocidad de cada partícula se puede descomponer en la suma de la velocidad media del material y una componente de velocidad aleatoria.

Es importante mencionar que en ambos regímenes de flujo existen fuerzas disipativas, que exigen una aportación constante de energía para mantener el movimiento. En la mayoría de los flujos granulares, una fuerte importante de aportación de energía es el campo gravitacional. Coulomb enunció la forma aproximada en que la presencia del campo gravitacional origina el movimiento superficial en un medio granulado, como una relación de proporcionalidad entre las fuerzas tangenciales y normales que actúan en un elemento de material granular. La formulación de modelos más detallados que tomen en cuenta los distintos modos de disipación para cualquier régimen de flujo constituye ahora una de las líneas de investigación más activas de la física.

## 2.8 Temperatura granular

Si las partículas en un medio granulado se encuentran empaçadas o si son significativamente más densas que el fluido intersticial, son éstas las que jugarán un rol preponderante en el transporte de cantidad de movimiento del material, y no el fluido o las interacciones entre el fluido y las partículas. En este caso el fluido intersticial puede ser despreciado para la descripción del flujo.

La analogía entre el movimiento aleatorio de las partículas en un medio granulado y el movimiento de las partículas que se presenta en la teoría cinética de los gases es tan fuerte que al valor medio de las velocidades aleatorias mencionadas en el apartado anterior, elevadas al cuadrado se le conoce generalmente como temperatura granular o simplemente temperatura. La temperatura granular y la temperatura termodinámica, tienen roles similares. En ambos casos la temperatura genera presión y regula el transporte de masa, cantidad de movimiento y energía.

Debido a que las colisiones entre partículas en un flujo granular son inelásticas la energía asociada con la temperatura granular es siempre disipada por colisiones entre partículas. Para mantener la temperatura granular, es necesario suministrar energía constantemente al sistema. De esta manera la temperatura granular se reduce a cero si no se da esta aplicación de energía.

Matemáticamente la temperatura granular se define como:

$$T_g = \text{Var}(u) + \text{Var}(v), \quad (2.7)$$

donde  $u$ ,  $v$  son las componentes del vector velocidad, y  $\text{Var}$  es la varianza de las componentes de la velocidad.

## 2.9 Distribución de velocidades

La predicción del perfil de velocidades en un silo descargando material granular es importante en la industria. Un conocimiento de las velocidades en estos flujos es requerido para determinar el tiempo en el cual el material se encontrará dentro del silo, las propiedades de mezclado del material, así como el desgaste que sufren las paredes del silo y los granos mismos.

Sin embargo lo más importante es saber si el silo descarga en forma de masa o con flujo interno.

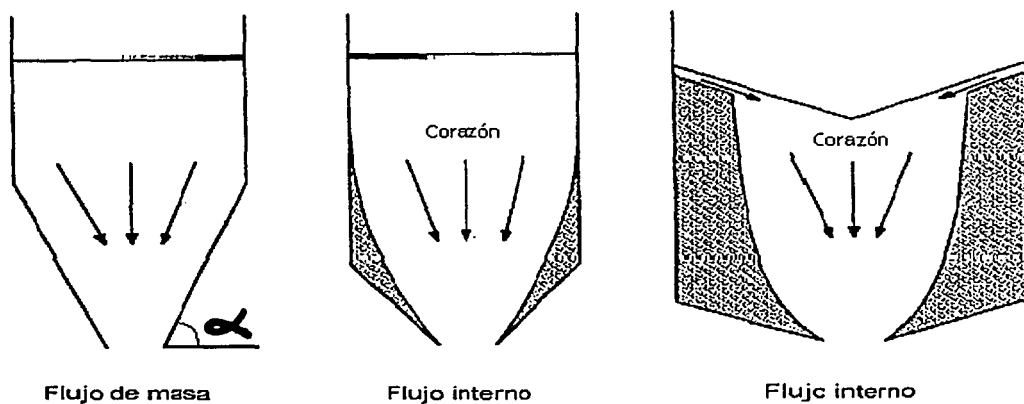


Fig 2.1 Tipos de flujo encontrados en un silo

Como podemos ver en la figura 2.1 en una descarga de masa todo el material se encuentra en movimiento. En este caso el material que entra primero es el primero en salir del silo. Este tipo de flujo ocurre únicamente en silos angostos. Si el ángulo de la tolva  $\alpha$  es grande, el flujo estará confinado a un flujo central rodeado por material que se encontrará estancado si el corazón del flujo es más angosto que el ancho del silo. En este caso el material ubicado en la parte superior caerá en forma de cascada sobre el corazón y será descargado después del material que se encuentra en un nivel inferior teniendo un patrón del tipo primera entrada última salida. El ancho del flujo central normalmente alcanzará las partes superiores de las paredes del silo.

Cada uno de estos tipos de flujo tiene sus ventajas y sus desventajas; es por ello que se desea poder predecir que tipo de flujo ocurrirá y que tan amplio será el flujo corazón. Estas predicciones no son posibles aún. Ha habido progreso en la predicción de la distribución de velocidades en un flujo de masa, pero no existe aún una explicación convincente del fenómeno de transición entre ambos tipos de flujo.

El principal problema radica en la formulación de los mecanismos que gobiernan el flujo. Los materiales granulares pueden fluir como los líquidos, y existen una gran variedad de modelos teóricos utilizados para describir estos flujos. A estos modelos se les conoce como modelos de hidrodinámica granular, en el sentido de que son teorías de medio continuo que consisten de ecuaciones diferenciales parciales, las cuales tienen analogías con las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos newtonianos. Un flujo granular lento, densamente empacado no es descriptible con estadística. Flujos más rápidos son complicados debido a fenómenos de agrupamiento, los cuales se presentan cuando el coeficiente de restitución de partículas en colisión es menor a la unidad. Incluso en dispositivos industriales como en un silo, el tamaño del sistema de análisis más grande puede ser de unos cuantos miles de diámetros de grano. Debido a que las cadenas de esfuerzos pueden expandirse en más de cien diámetros de grano, no hay razón por la cual pensar que el sistema es homogéneo, y por lo tanto no puede ser caracterizado por un modelo continuo.

Existen principalmente dos puntos de vista que intentan describir la distribución de velocidades en un flujo granular. El primero, conocido como modelado cinemático, supone que las partículas fluyen cayendo en los espacios vacíos dejado por las partículas que antes existían en la capa inferior a éstos. Si observamos la figura 2.2 podemos concluir que si una de las partículas de la capa inferior se mueve más rápidamente, existirá una tendencia de parte de las partículas superiores a moverse de la manera que se ilustra:

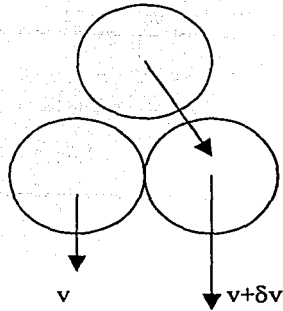


Fig 2.2 Esquema para realizar modelado cinemático

Con este enfoque se ha propuesto (Neederman *et. al.* 1980) que la velocidad horizontal  $u$ , es función del gradiente vertical de velocidad  $\frac{\partial v}{\partial x}$ :

$$u = f\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (2.8)$$

Este modelo sirve para describir flujos granulares cuando la densidad es baja. En este caso se debe de suministrar energía de manera continua, por ejemplo, agitando el medio. Cualquier cantidad dinámica que se desee considerar, como la energía cinética por ejemplo, se supone que consiste de una parte hidrodinámica, que varía lentamente, y una parte fluctuante. En este caso los perfiles de velocidad dependerían únicamente de factores geométricos y serían independientes de la distribución de esfuerzos. Existe un método similar conocido como método estocástico, el cuál propone un contraflujo de vacancias, las cuales se difunden hacia arriba del material ocasionando el flujo del mismo, este modelo propuesto por Mullins y Litwinitzyn es meramente cinemático en el sentido que el perfil de velocidades que se predice es independiente de la distribución de esfuerzos dentro del material. Estos dos enfoques indican que el perfil de velocidades en cualquier parte del flujo depende únicamente de las condiciones existentes debajo del nivel considerado y es independiente de cualquier condición existente por encima de este nivel.

La otra teoría de flujo se contempla desde el punto de vista de modelos de deformación plástica cuasi-estática, basada en el concepto de dilatación de Reynolds y en la idea de que las deformaciones en materiales compactados son generalmente irreversibles. La dilatación ocurre porque los granos se “amarran” cuando se les aplica un esfuerzo normal, y el material comenzará a deformarse cuando el esfuerzo cortante supere un valor de fluencia determinado por el esfuerzo normal aplicado. En el punto de fluencia, los granos comenzarán a deslizarse entre ellos. En este caso es necesario, en primera instancia, calcular la distribución de esfuerzos para posteriormente relacionar éstos con incrementos en deformaciones del material. Esto se logra utilizando un modelo de flujo. Cuando los efectos gravitacionales son dominantes, el cálculo de la distribución de esfuerzos debe de comenzar en la parte superior de la superficie. En este caso el estado de esfuerzos depende únicamente en las condiciones que prevalecen sobre el punto de interés.

Modelos específicos de esta teoría consisten en ecuaciones de conservación en forma de ecuaciones diferenciales parciales con sus correspondientes leyes constitutivas (Jackson 1983). Hasta este momento existe una ecuación de continuidad para la conservación de la masa, una ecuación de la energía y una ecuación de momento. Esta relaciona el tensor de esfuerzos  $T_{ij}$  y el tensor rapidez de deformación  $V_{ij}$ , definido con signo negativo ya que los materiales granulares se disgregan cuando se les somete a tensión.

Si definimos al tensor velocidad como:

$$V_{ij} = -(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i), \quad (2.9)$$

donde  $v_i$  es la  $i$ -ésima componente del campo de velocidades. En uno de los modelos más simples (Jackson 1983, Scaeffler, 1987):

$$T_{ij} = \sigma(\delta_{ij} + kV_{ij} / |V|), \quad (2.10)$$

en donde  $|V|^2 \equiv \sum V_{ij}^2$  y  $k$  es una constante característica de cada material. Más específicamente,  $k/2 = \text{sen } \delta$ , donde  $\delta$  es el ángulo de fricción interno.

Una comparación de esta ecuación con las ecuaciones de Navier-Stokes muestran que los términos comunes de viscosidad, proporcionales a la velocidad y el gradiente de

velocidad han sido reemplazados por términos independientes de la razón de corte. Esta razón de cambio independiente es importante ya que implica que un cambio de velocidad en todas las partículas mantiene el esfuerzo sin cambios. Esto también quiere decir que estas ecuaciones son matemáticamente más complejas que las ecuaciones de Navier-Stokes y que pueden utilizarse solamente cuando el material se está deformando. Modelos como el presentado en la última ecuación son utilizados en mecánica de sólidos y en el diseño de equipos, como por ejemplo las tolvas. Sin embargo, experimentos realizados en tolvas delgadas muestran que el comportamiento dinámico no es el que se presenta en los modelos comunes de plasticidad. Estos experimentos muestran además ondas de densidad para materiales rugosos, mismas que no se presentan en materiales lisos y esféricos (Lee 1994; Pouliquen y Gutfraind, 1996). Los experimentos muestran que la forma del grano juega un papel crucial en el flujo y que requiere de una mejor comprensión.

En un silo con una gran descarga de masa fluyendo libremente, las velocidades parecen ser continuas y reproducibles. Existen pequeñas fluctuaciones localizadas debido a que las partículas se empujan unas con otras, sin embargo es posible definir una velocidad promedio como en el caso de un flujo turbulento hablando de líquidos. En un flujo interno las mayores velocidades se encuentran en la línea central, con las velocidades disminuyendo hacia las paredes. Como resultado de esto, la parte central superior desciende con mayor rapidez que las regiones cercanas a las paredes, creando una depresión en el centro del silo. A medida que esta depresión central aumenta de tamaño, sus alrededores comienzan a tener una mayor pendiente y cuando esta alcanza en ángulo de reposo, el material cae en cascada hacia el centro de la depresión. De esta manera, la depresión es alimentada constantemente por las partículas que caen lentamente de los alrededores de dicha depresión.

En un recipiente, el cual tenga una tolva en su parte inferior, existen variaciones de velocidad las cuales se encuentran cercanas al plano de transición.

## **2.10 Transferencia de cantidad de movimiento y esfuerzos en medios granulares**

Los esfuerzos generados en un conjunto asociado de partículas sólidas deformadas están frecuentemente influenciadas por la naturaleza del fluido que ocupa los intersticios entre las partículas. Sin embargo cuando se habla de un material granular el estado de esfuerzos no depende significativamente del fluido intersticial. Esto es particularmente cierto cuando el fluido intersticial es un gas.

El estado de esfuerzos en un material granular se genera por tres mecanismos:

- I. Transporte de momentum que acompaña a la traslación de las partículas entre distintas capas con movimiento relativo.
- II. Transporte de momentum por colisiones entre partículas por distintas capas en movimiento relativo.
- III. Fuerzas entre partículas en puntos de contacto.

El primer mecanismo se asemeja al transporte de momentum en los gases. Este domina cuando la fracción de partículas sólidas es pequeña. Sin embargo, cuando la fracción de volumen de sólido aumenta, el movimiento de las partículas comienza a restringirse y el segundo y tercer mecanismos de transporte de esfuerzos dominan. El segundo mecanismo antes descrito es análogo al transporte molecular de momentum en los líquidos. El tercer mecanismo descrito no tiene ningún mecanismo molecular análogo. Este mecanismo se diferencia de los otros mecanismos de dos importantes maneras: en primer lugar se asocia con un esfuerzo de cedencia que no desaparece y en segundo lugar, cuando la fluencia ocurre esta genera esfuerzos los cuales son independientes de la velocidad de deformación. La fluencia se asocia al inicio del deslizamiento en los puntos de contacto entre las partículas; esto ocurre cuando las fuerzas tangenciales y normales sobrepasan la magnitud de las fuerzas de fricción. Mas allá de este punto las fuerzas de fricción son independientes de la velocidad de deslizamiento en los puntos de contacto. Es por esta razón que la correspondiente contribución de esfuerzos es independiente de la velocidad de deformación.



Para grandes fracciones de volumen de sólido, los esfuerzos por contacto dominarán al presentarse pequeñas velocidades de deformación y los esfuerzos colisionales dominarán a grandes velocidades de deformación .

La teoría del contacto o de esfuerzos friccionantes tiene sus orígenes en la mecánica de suelos y puede ser atribuida a Coulomb, quien trataba a los materiales como un continuo. El formuló la siguiente relación:

$$T = N \tan \phi + c , \quad (2.11)$$

donde T es el esfuerzo de corte, N es el esfuerzo normal,  $\phi$  y c son parámetros característicos del material. Si el parámetro c es positivo se dice que el material es cohesivo.

La relación anterior es empírica.

Por otro lado las teorías de transferencia de momentum por traslación y por colisiones están fundamentadas en la teoría cinética.

## 2.11 Fuerza de arrastre en medios granulares

Las propiedades de la fuerza de arrastre en un medio granular están determinadas por la naturaleza compleja de la propagación de esfuerzos en el medio ya que el arrastre no se origina únicamente en los granos que se encuentran inmediatamente frente al objeto sumergido en el medio, sino que se origina también en las capas sucesivas de granos que soportan a las partículas que están en contacto con el cuerpo.

Para apreciar la complejidad de la fuerza de arrastre en un medio granular , debemos de considerar que, en contraste con los fluidos, cualquier fuerza aplicada a un medio granulado encuentra una resistencia no homogénea y anisótropa de “cadenas” de granos .

Para que un objeto se pueda mover en un medio granular todos los granos que impiden su movimiento deberán ser apartados de su camino, lo que requiere de una reorganización del material en gran escala. La no homogeneidad de la propagación de la fuerza y la necesidad de reorganización de los granos en el medio provocan que la fuerza de arrastre dependan del “amarre” y el deslizamiento de los granos. Así pues la fuerza existente entre

los granos y el objeto fluctúa a medida que las cadenas de esfuerzo se generan para posteriormente liberarse.

Estudios realizados en mecánica de suelos sugieren que debido al origen friccional de la fuerza de arrastre, la dependencia de la velocidad en la fuerza de arrastre es menor que en los fluidos.

## **2.12 Diferencias entre un material granular y un gas**

Una diferencia muy importante entre los gases y los líquidos con respecto a los materiales granulares, que requiere de gran atención, es la interacción entre las partículas. En el caso de un flujo granular, la interacción entre los granos es inherentemente inelástica, es decir, en cada colisión se pierde algo de energía. Como resultado de esto, todas las aproximaciones basadas en interacciones meramente elásticas o de conservación de energía, como la teoría de los gases ideales, no pueden ser utilizadas. Es importante recordar que cualquier aparente comportamiento fluido de un material granular es solamente un fenómeno dinámico.

Las colisiones entre granos, como ya se mencionó, son de tipo inelástico, lo que provoca que, al carecer en este momento de una teoría que ilustre el comportamiento de todas las fuerzas disipativas involucradas, utilizando las leyes de Newton no se puedan describir acertadamente las interacciones entre las partículas.

Debido al carácter inelástico de las colisiones entre partículas sólidas macroscópicas, los sistemas granulares y moleculares tienen varias diferencias fundamentales. En particular, la energía asociada con la temperatura granular es disipada por colisiones entre partículas. De esta manera, si se deja de suministrar energía a un medio granulado, la temperatura granular se disipa rápidamente hasta alcanzar un valor nulo.

# Capítulo 3

## Desarrollo experimental

### 3.1 Objetivo

El objetivo de este trabajo experimental es conocer de qué manera varía la fuerza de arrastre sobre un objeto, originada por un flujo granular, al cambiar distintos parámetros. Los parámetros modificados son: tamaño de las partículas, tamaño de los cilindros y la velocidad media del flujo. Así mismo se obtendrán los campos de velocidad, vorticidad y temperatura granular para cada uno de los experimentos.

### 3.2 Descripción del experimento

El diseño conceptual del experimento se muestra en la figura 3.1.

Para lograr las mediciones de la fuerza de arrastre, la determinación del campo de velocidades y obtener las relaciones entre velocidades de flujo, fuerza de arrastre, tamaño y forma de las partículas, se construyó el dispositivo mostrado en la figura 3.2. El bastidor está fabricado en madera, mientras que el soporte (no se ilustra) de este consiste de perfiles de acero. El extremo anverso y el reverso del dispositivo fueron construidos de vidrio con el fin de poder observar, grabar y posteriormente digitalizar el flujo dentro del canal. La longitud del canal (1 m) es lo suficientemente larga como para permitir que el flujo se desarrolle completamente. El ancho del canal (5 cm) es tal que nos permite simplificar el estudio del flujo a un caso cuasi-bidimensional. Finalmente, el ancho del canal es lo suficientemente grande como para permitimos despreciar los efectos de pared del canal sobre el flujo, simplificando el problema. En la parte interna del canal, en los costados se colocaron cintas de papel batería, con el objeto de reducir el efecto de la rugosidad de la madera sobre el flujo. En la parte inferior de canal se encuentra una tobera con un ángulo

de 60°. Esta tiene como objetivo controlar la velocidad del flujo. La tobera en su parte mas baja posee un par de ranuras las cuales permiten regular el gasto de material.

En la parte superior del canal se colocó un recipiente del mismo ancho y largo del canal de flujo, con un orificio en su parte inferior, el cual embona perfectamente con la abertura superior del canal. En este recipiente se almacena el material granular. Cuando se abre la compuerta inferior de la tobera, se obtiene un tiempo largo de corrida del experimento, asegurando de esta manera que el flujo llegue a un estado estacionario.

La medición de la fuerza se lleva a cabo por medio de una galga extensométrica. La galga forma un puente de Wheastone que es alimentado por una fuente de poder de DC con un voltaje de 10 voltios. Las dos otras ramas del puente están conectadas a un multímetro digital el cual es capaz de realizar hasta 100 medidas por segundo. El multímetro se comunica con una computadora la cual, mediante un programa de cómputo (labview), recaba los datos y los almacena en un archivo para su posterior procesamiento.

Dentro del canal de flujo, se colocó en el centro el objeto de interés. Los objetos que se estudiaron fueron: un cilindro de aluminio de una pulgada y media de diámetro, un cilindro de aluminio de una pulgada de diámetro y un cilindro de latón de media pulgada de diámetro. Los cilindros tienen una longitud de 4.9 centímetros, esto con el fin de evitar el contacto entre los cilindros y las paredes de vidrio. Los cilindros se colocaron perpendicularmente al flujo mediante un perno. El perno esta sujeto en la parte posterior mediante una pequeña placa de material epóxico a la galga extensométrica, la cuál está unida al bastidor principal mediante un perfil metálico.

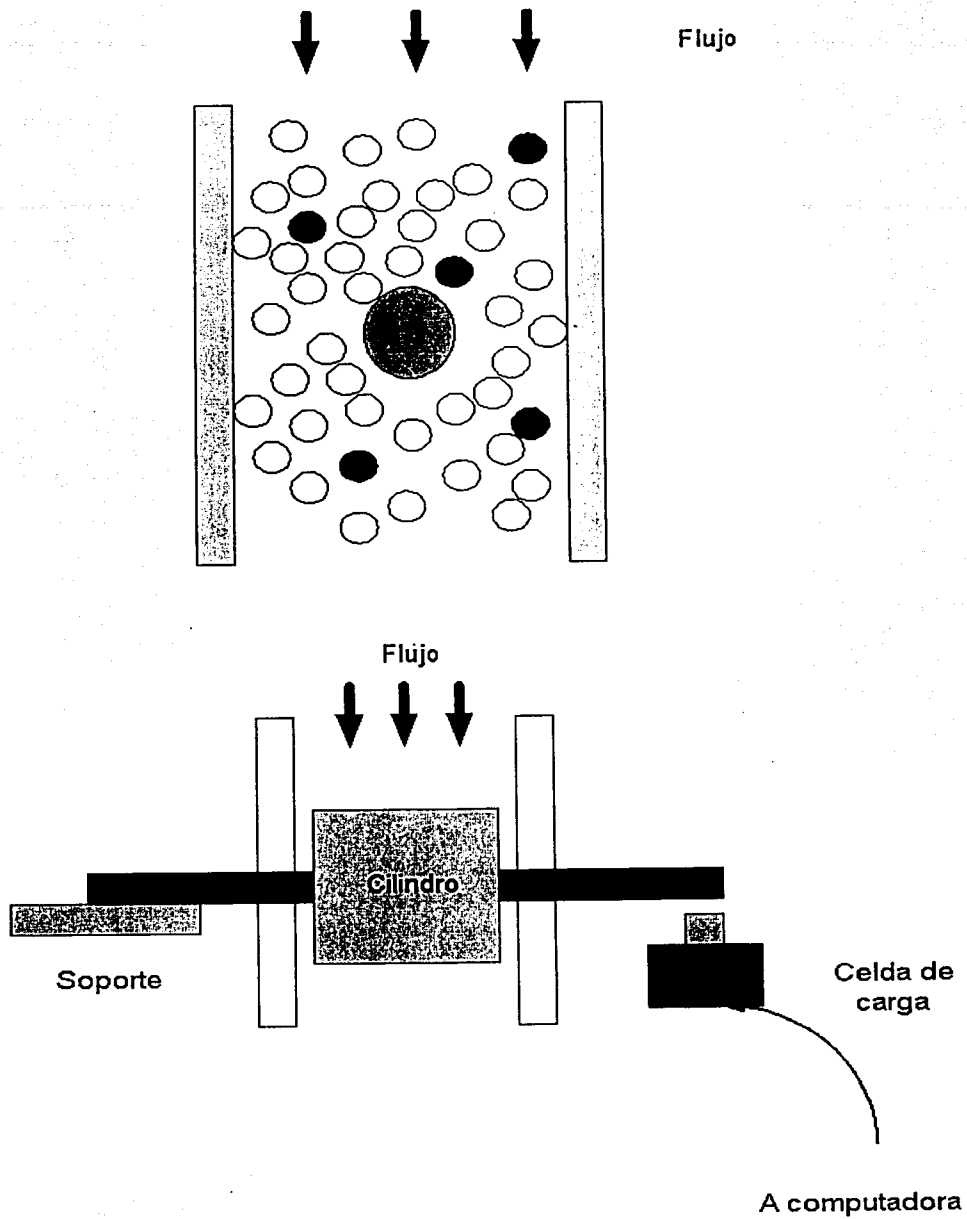
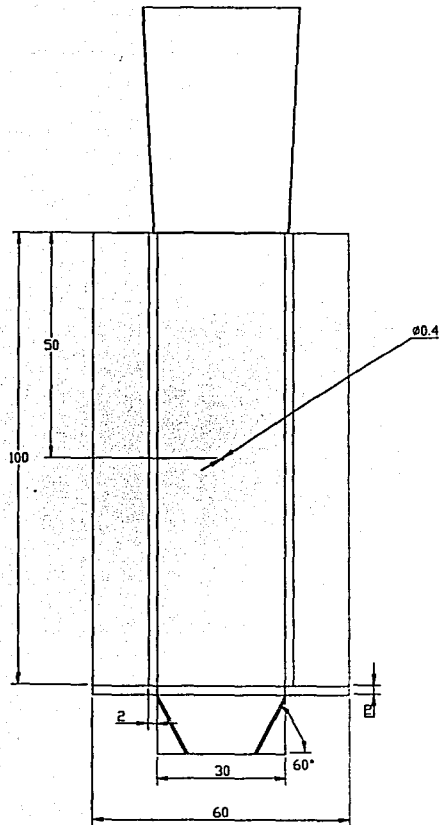


Fig 3.1

Esquema del dispositivo experimental



**Fig 3.2**  
**Canal de flujo**

### **3.3 Descripción del material**

Para la grabación de las imágenes se utilizó una cámara de alta velocidad Kodak Motion Corder Model 1000. Se utilizó una galga extensométrica Omega modelo LCL-010, la cual se encuentra compensada por temperatura. La alimentación de la galga extensométrica se hizo mediante el uso de una fuente de poder HP modelo E3631A. La medición de voltajes obtenidos por la galga se hizo mediante el uso de un multímetro HP modelo 34401A. La digitalización de las imágenes se realizó utilizando el programa de cómputo EPIX XCAP Std versión 2.1 para windows 2000. El procesamiento de las imágenes se realizó con el programa de cómputo FlowManager versión 3.50 de Dantec. Las partículas de vidrio esféricas tienen diámetros aproximados de 3 y 6mm.

### **3.4 Medición del gasto de material**

Para realizar la medición del gasto de flujo granular se precisó de una báscula de precisión y un cronómetro. El proceso para obtener el gasto es el siguiente:

1. Se colocan ambos vidrios del canal de flujo verificando que los dos asienten perfectamente en la parte inferior del canal.
2. Se coloca el papel batería en los costados internos del canal.
3. Se coloca la tolva superior.
4. En la tobera inferior, en la primera ranura de esta, se colocan las placas de metal dándose la abertura deseada. En la segunda ranura de la tobera se coloca una placa de metal que obstruye por completo la salida de la tobera.
5. Se pesa y coloca, debajo del canal de flujo, un recipiente lo suficientemente grande que permita albergar todo el material que cabe en el canal de flujo y la tolva superior.
6. Se llena el canal de flujo.

7. Se retira la placa de metal de la segunda ranura de la tobera inferior permitiéndose que el material granular comience a fluir. Al mismo tiempo se comienza a tomar el tiempo por medio del cronómetro.
8. Cuando se vacía el canal de flujo y la tolva superior, se detiene el cronómetro.
9. Se pesa el recipiente colocado en la parte inferior del canal con el material granular en su interior.

Con los datos obtenidos de tiempo y peso del material utilizado se procede a calcular la velocidad media del flujo de la siguiente manera:

$$\dot{m} = \frac{m_p}{t}, \quad (3.1)$$

$$Q = \frac{\dot{m}}{\rho_b}, \quad (3.2)$$

$$\rho_b = \rho_s(1-\epsilon) + \rho_g\epsilon, \quad (3.3)$$

$$\bar{v} = \frac{Q}{A}, \quad (3.4)$$

$$A = b * e. \quad (3.5)$$

Si definimos:

$\dot{m}$  = Gasto másico de material  $\left[ \frac{kg}{s} \right]$ ,

$m_p$  = Masa total de las partículas utilizadas  $[kg]$ ,

$t$  = Tiempo de descarga de la tolva  $[s]$ ,

$Q$  = Gasto volumétrico de material  $\left[ \frac{m^3}{s} \right]$ ,

$\bar{v}$  = Velocidad media del flujo  $\left[ \frac{m}{s} \right]$ ,

$A$  = Área transversal al flujo, es decir el área transversal del canal  $[m^2]$ ,



$b$  = Ancho del canal [m],

$e$  = espesor del canal [m].

Considerando que  $\rho_g \ll \rho_s$ , podemos hacer la siguiente simplificación:

$$\rho_b = \rho_s (1-\epsilon), \quad (3.6)$$

con :

$\rho_s$  = densidad del sólido  $\left[ \frac{kg}{m^3} \right]$ .

El término  $(1-\epsilon)$ , como se vio anteriormente es la fracción de sólido existente en un material granular. Experimentalmente (Forsyth *et. al.*) se ha comprobado que este factor es de 0.64. En la sección 4.1, al realizar la determinación del campo de velocidades, se obtuvo un cálculo directo de  $(1-\epsilon)$ ; en este cálculo se observa que la suposición de  $(1-\epsilon)=0.64$  es aceptable.

### 3.5 Medición de la fuerza

El presente apartado enuncia una metodología para que, teniendo un conocimiento básico del equipo, se puedan realizar y corroborar los resultados presentados en esta tesis. La metodología que se presenta es la que se siguió en la realización de todos los experimentos.

1. Se coloca el cristal posterior dentro del canal de flujo. Deberá verificarse que este quede perfectamente asentado en la parte inferior del canal.
2. Se inserta el cristal anterior al canal de flujo hasta que esté a aproximadamente la mitad de su recorrido. En este momento se coloca el objeto en estudio dentro del canal y pasar el perno a través de él.
3. Se baja el cristal anterior hasta el fondo del canal de flujo, verificando que el vidrio esté correctamente asentado sobre la parte inferior del canal.
4. Se sujeta al bastidor la placa que contiene la galga extensométrica. En este momento el perno descansará sobre esta placa.

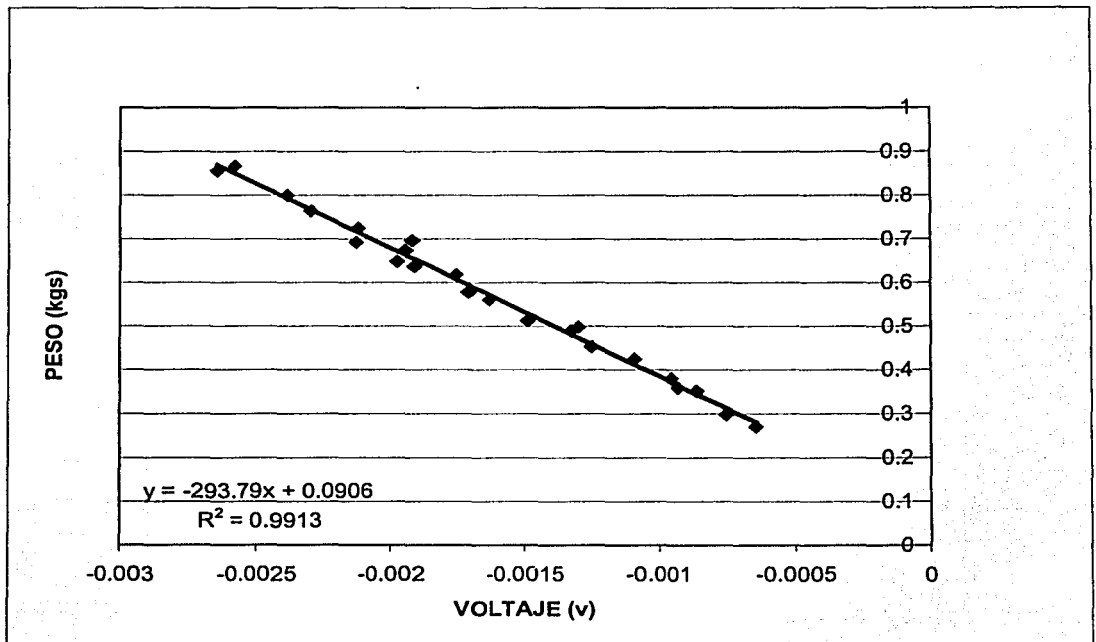
las caras de dicho objeto se encuentren paralelas a las paredes de cristal del canal de flujo. En caso de que alguna de estas dos condiciones no se presenten, se podrán hacer los ajustes pertinentes moviendo ligeramente el perno hasta lograr la posición deseada.

6. En los costados del canal de flujo y por su parte interior se coloca el papel batería, ajustándose este a las partes laterales del canal.
7. Se cierra la tolva inferior por medio de las placas metálicas provistas para este propósito.
8. Se coloca la tolva superior. Se verifica que ésta embone perfectamente con el canal de flujo
9. Se conecta la galga extensométrica al multímetro y a la fuente de poder de DC. Posteriormente se enciende la fuente de poder y se verifica que la computadora esté lista para recibir datos.
10. Se colocan en la tobera inferior, en la primera ranura, las placas de metal, dando con ellas la abertura deseada. En la segunda ranura se coloca otra placa de metal, la cuál abarca toda la longitud de la abertura de la tobera e impide que el medio granular se escape hasta que esta placa sea removida.
11. Se vacía el material granular desde la tolva superior hasta que el material alcanza aproximadamente la mitad de la altura del canal. El material granular no debe llegar hasta el nivel del objeto que se encuentra dentro del canal. Se verifica nuevamente que el cilindro se encuentra perpendicular al flujo.
12. Se continúa vaciando el material granular hasta llenar la tolva superior.
13. Se verifica que no exista contacto físico entre el perno y los cristales del canal de flujo.
14. Se abre la placa metálica ubicada en la segunda ranura de la tobera inferior.
15. Comienza la captura de datos
16. Una vez que todo el material granular haya salido del canal concluye la captura de datos.
17. Se verifica que no existan partículas de material entre el objeto en estudio y los cristales del canal de flujo.
18. Se apaga la fuente de poder y se desconecta la galga extensométrica del circuito.

### 3.5.1 Calibración de la galga extensométrica

Para una mejor comprensión del sistema de medición por medio de técnicas extensométricas se puede consultar en la bibliografía presentada a Holman J.P. Las técnicas de medición de fuerza por medio de extensometría implican generalmente la utilización de un puente de Wheastone. Un puente de Wheastone está en equilibrio cuando no registra voltaje entre sus terminales de medición. Al ser deformada una galga extensométrica, esta registrará un cambio en su resistencia, arrojando esto una diferencia de potencial que puede ser registrada fácilmente con un multímetro.

Para obtener la medición de la fuerza del sistema de galga extensométrica se obtuvo una calibración empírica. Se aplicaron pesos conocidos al sistema de medición y se determinó el voltaje producido para cada evento. Se obtuvo la siguiente gráfica:



Calibración de la galga extensométrica (Fig 3.3)

En la gráfica se muestra la ecuación mediante la cual se realizaron las conversiones de voltaje a peso. También se presenta el coeficiente de correlación de la recta, el cual es muy cercano a la unidad, lo que nos indica que los puntos de la gráfica se ajustan bastante bien a la ecuación generada con dichos puntos.

### **3.6 Determinación del campo de velocidades**

Para la determinación del campo de velocidades se utilizó una cámara de alta velocidad, un reproductor de video, un programa de cómputo para digitalización de imágenes y un programa de cómputo con procesamiento del tipo de velocimetría por imágenes de partículas.

El procedimiento para la determinación del campo de velocidades en el canal es similar al procedimiento descrito para la determinación de fuerzas, agregando únicamente los siguientes pasos:

1. Se instala la cámara de grabación verificándose iluminación, enfoque de la cámara y demás parámetros para lograr una grabación nítida.
2. Se realiza la filmación del experimento al comenzar el flujo del material granular. El término de la grabación estará dado por la memoria que posee la cámara de alta velocidad. Este tiempo es de aproximadamente 10 segundos. Las grabaciones se realizan a una velocidad de 240 imágenes por segundo (ips). Se decide utilizar esta velocidad de grabación después de realizar varias pruebas experimentales variando este parámetro.
3. Se realiza el procesamiento de las grabaciones mediante el uso del equipo de cómputo.

Con las imágenes que se obtienen, el programa de cómputo utilizado (FlowManager v3.1) permite además determinar el perfil de temperatura granular y la vorticidad del flujo. Este programa considera las siguientes definiciones:

Para el campo de velocidades  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ , (3.7)

Para el campo de la temperatura granular  $T_g = Var(u) + Var(v)$ , (3.8)

Para el campo de vorticidad  $\xi = rot V$ . (3.9)

### 3.7 Determinación del tamaño de la estela

Para la determinación del tamaño de la estela, que se presenta en la parte posterior del cilindro, se utilizan las imágenes recabadas en la determinación del campo de velocidades. La secuencia de imágenes es promediada mediante el uso de computadora y se mide, en la dirección paralela al flujo, el largo de la estela.

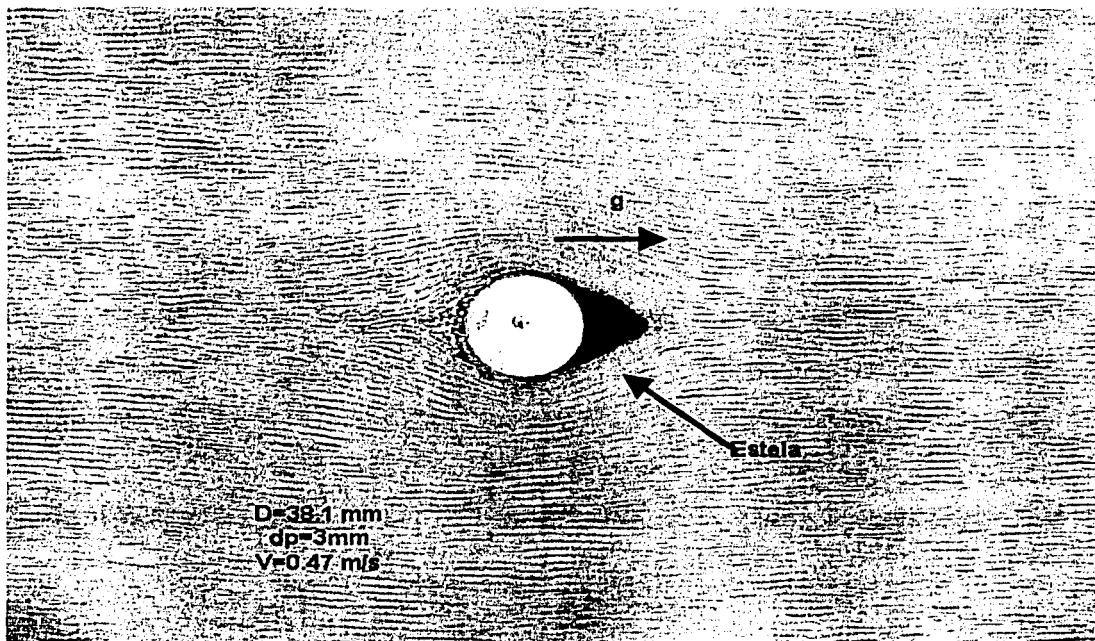


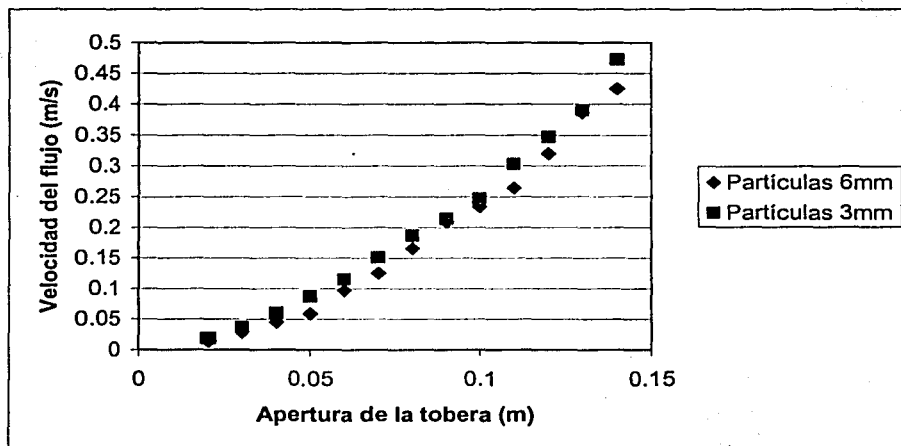
Fig 3.4. Medición del largo de la estela

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Medición del gasto y cálculo de la velocidad media

Siguiendo el procedimiento mencionado en el capítulo anterior, utilizando las ecuaciones 3.1-3.7 para la medición de gasto del material, se obtuvieron los siguientes resultados:



(Fig 4.1)

En el caso de las partículas de 6 mm con una apertura de tolva inferior de 1 cm se presentó el fenómeno de arqueado y por lo tanto el canal no se pudo vaciar.

## 4.2 Medición de fuerza

Al realizar los experimentos de medición de fuerzas de la manera en que fueron descritos en el capítulo anterior se obtienen gráficas como las mostradas a continuación:

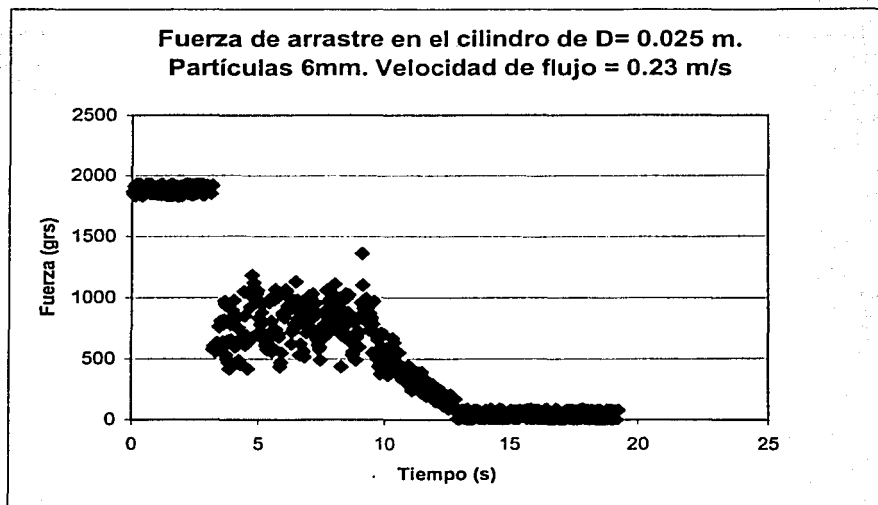


Fig 4.2

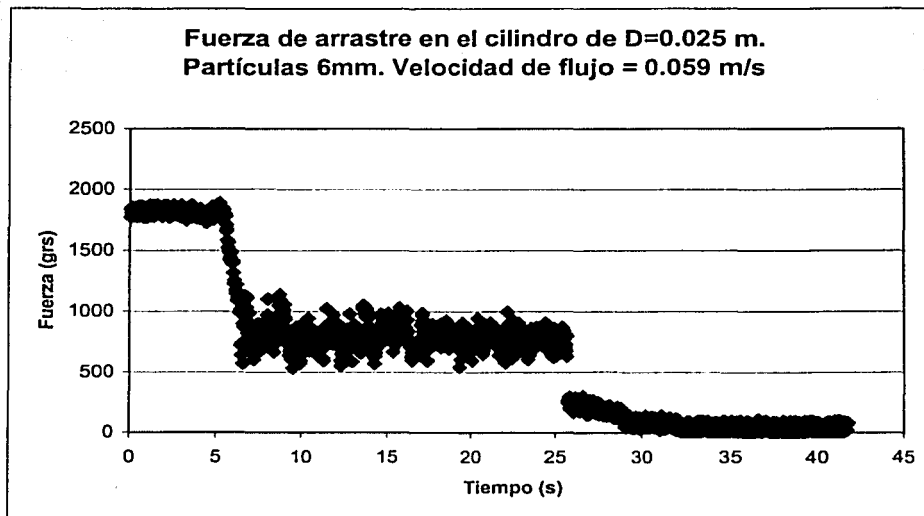


Fig 4.3

En estas gráficas podemos distinguir fácilmente 5 regiones. En la primera (refiriéndonos siempre de izquierda a derecha), observamos una región horizontal. En esta región no se ha comenzado la descarga del canal de flujo. En la siguiente región se observa para el segundo caso una línea diagonal, esta línea representa un régimen transitorio. A continuación se observa una región horizontal en la cuál se observa que la fuerza es constante. En este período comienza el flujo y alcanza su estado permanente. Es precisamente en esta región de donde se obtiene la medición de fuerza de arrastre. Una vez que finaliza esta región hallamos otra línea diagonal la cuál nos representa otro transitorio durante el cuál la cantidad de material existente sobre el cilindro termina de salir.

Finalmente en el extremo derecho de la gráfica observamos otra región de fuerza constante. En esta región, el canal ya terminó de vaciarse.

Se realizaron estos experimentos variando la velocidad del flujo, el tamaño de las partículas y el diámetro de los cilindros inmersos en el flujo. Con esto se obtuvieron la siguientes gráficas que resumen todas las mediciones realizadas:

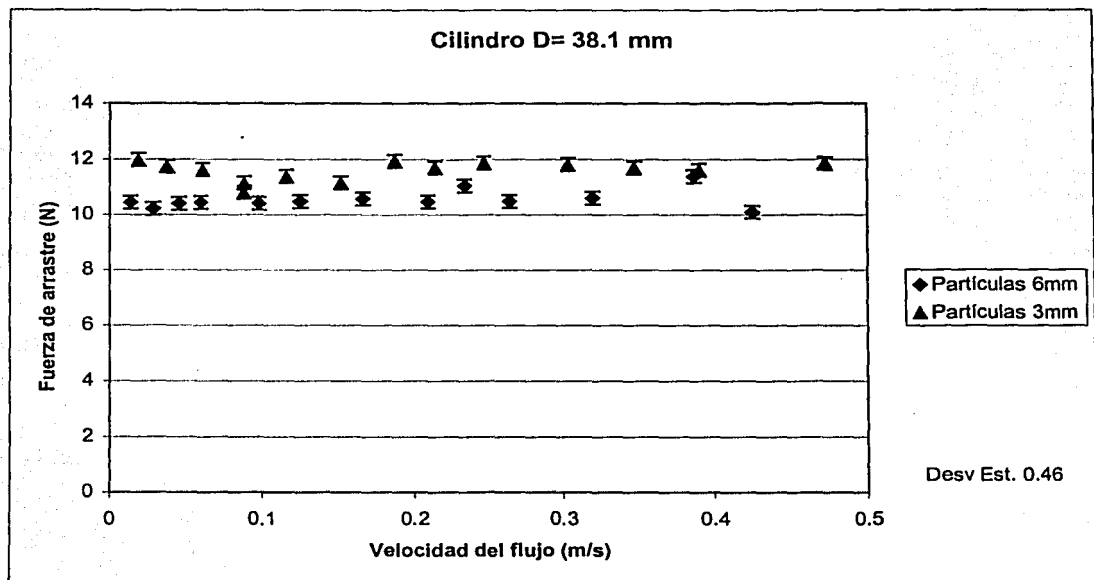
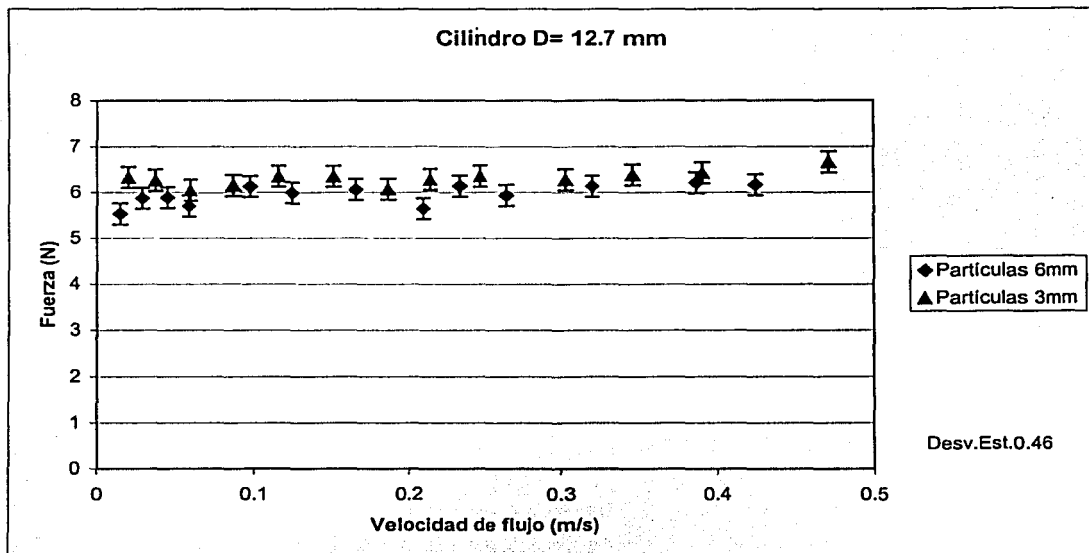
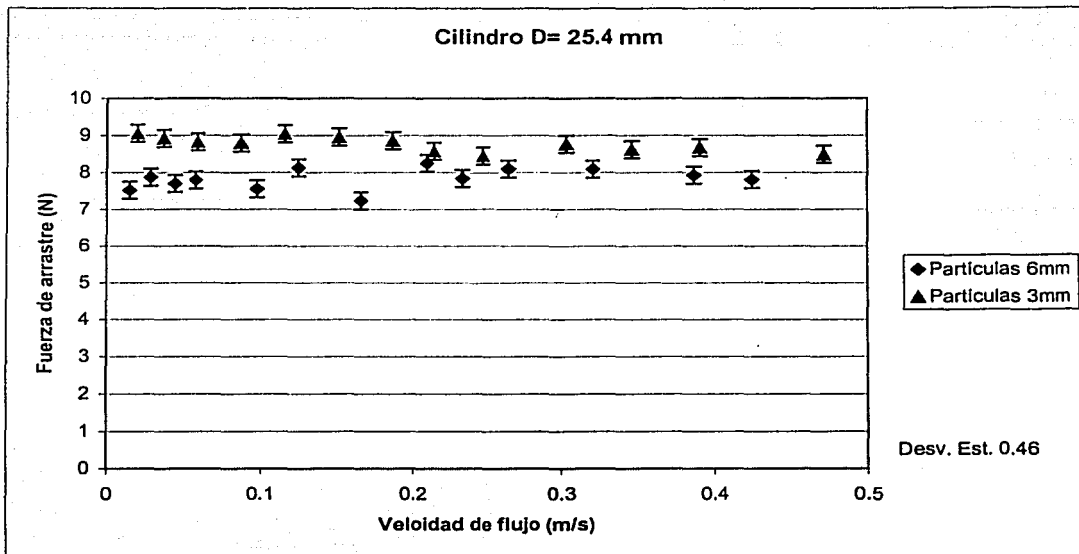


Fig 4.4





En estas figuras se observa que la fuerza de arrastre no depende de la velocidad del flujo. También se aprecia que las partículas de 3mm causan una fuerza ligeramente mayor que las partículas de 6mm para las mismas condiciones de flujo. Finalmente se distingue con facilidad el efecto del tamaño del cilindro sobre la fuerza de arrastre: a un mayor diámetro de cilindro, la fuerza de arrastre se incrementa.

Para el cálculo de la desviación estándar, utilizando partículas de  $d=6\text{mm}$  y el cilindro de  $D= 38.1 \text{ mm}$ , a una velocidad de  $0.425 \text{ m/s}$ , se realizaron 5 experimentos a partir de los cuales se determinó el valor de  $0.461$ .

Estos mismos datos se presentan a continuación graficados de manera adimensional, en escala logarítmica. Se definen un coeficiente de arrastre como:

$$C_d = \frac{2F}{\rho V^2 v \left( \frac{D}{d} + 1 \right) dl}, \quad (4.1)$$

y el número de Froude como:

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{g \left( \frac{D}{d} + 1 \right) d}}; \quad (4.2)$$

en este caso definimos  $d$  como el diámetro de la partícula,  $l$  la longitud del cilindro,  $D$  el diámetro del cilindro,  $V$  la velocidad media del flujo,  $g$  la aceleración de gravedad,  $v$  el factor de empaquetamiento del medio,  $\rho$  la densidad de bulto y  $F$  como la fuerza de arrastre. El parámetro  $F_r$  representa la relación entre las fuerzas inerciales y las fuerzas gravitacionales.

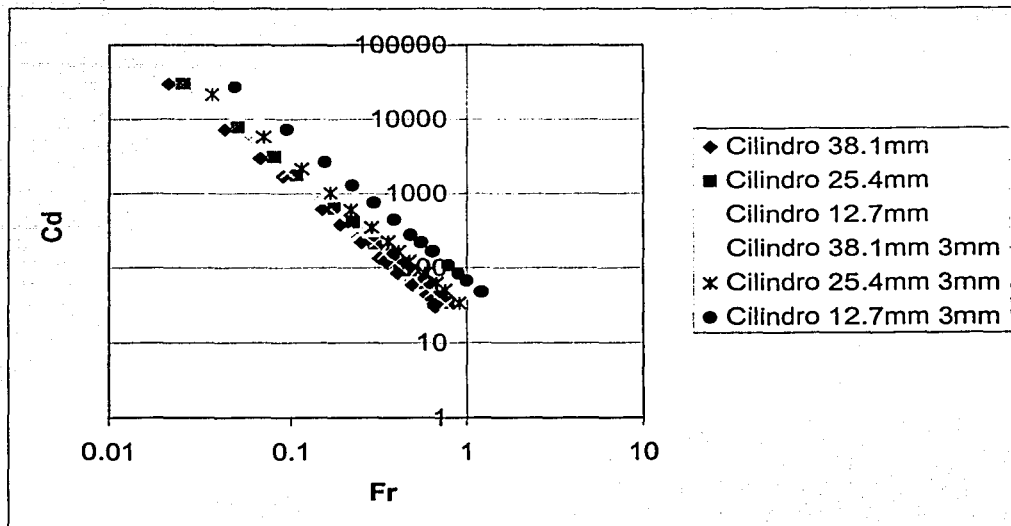


Fig 4.7

Para estos casos se consideró a  $D \cdot d$  como el diámetro efectivo del cilindro. No se consiguió colapsar los datos en una sola línea "universal". Una suposición es que esto se debe a los efectos de pared o a efectos tridimensionales.

### 4.3 Comparación de la fuerza de arrastre entre el flujo granular estudiado y un flujo de vidrio fundido

El siguiente apartado hace una comparación ilustrativa entre la fuerza de arrastre generada por un flujo granular y la fuerza de arrastre generada por un flujo viscoso ordinario. En ambos casos se consideró una misma velocidad de flujo y un mismo cilindro. Para el caso del flujo viscoso se consideró un valor de viscosidad del vidrio de  $10\text{kg}/\text{m}\cdot\text{s}$ ; dicho valor corresponde al valor de la viscosidad del vidrio fundido. Existen muchos tipos distintos de "vidrio" y su viscosidad se presenta en un gran intervalo de valores dependiendo de su composición y temperatura. El valor seleccionado fue un valor de viscosidad muy pequeño, esto con el fin de poder realizar la comparación. Para la determinación de la fuerza de arrastre en el caso del vidrio fundido se utilizó la ecuación 1.1, mientras que en el caso de las partículas de vidrio se utilizaron datos experimentales y la ecuación 4.1.

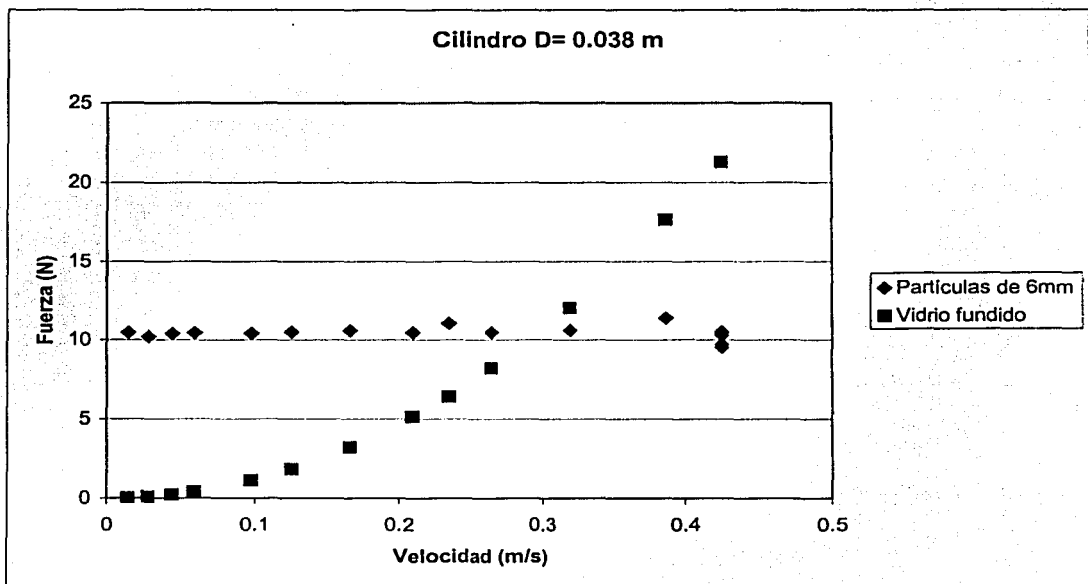


Fig 4.8

De esta gráfica podemos observar que si consideramos que el vidrio fundido se comporta como un fluido newtoniano, la fuerza de arrastre varía de manera cuadrática con la velocidad, mientras que en el caso de la fuerza de arrastre presente en un medio granular, como se discutió anteriormente, es constante. A diferencia del vidrio fundido, en el caso granular la fuerza de arrastre no tiende a cero cuando la velocidad tiende a cero. Esto es indicativo del esfuerzo de fluencia que se debe sobrepasar para provocar el flujo en un material granular.

#### 4.4 Determinación del campo de velocidades

A continuación se presentan algunos resultados del procesamiento de imágenes. En todos los casos el flujo se desarrolla de izquierda a derecha.

Del lado izquierdo se observa un flujo granular alrededor de un cilindro de diámetro  $D = 3.8 \cdot 10^{-2} \text{m}$ , diámetro de las partículas  $d_p = 6 \cdot 10^{-3} \text{m}$ , velocidad media del flujo  $= 0.32 \text{m/s}$ . Del lado derecho se observa un flujo granular alrededor de un cilindro del mismo diámetro y aproximadamente la misma velocidad media, pero con partículas de  $d_p = 3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Es preciso recordar que para una misma abertura en la tobera, la velocidad de las partículas de 3mm es ligeramente mayor. Se observa en orden descendente una fotografía del flujo, el campo de velocidades, el campo de vorticidad del flujo y el campo de temperatura granular. Todos los campos fueron obtenidos mediante la técnica de PIV.

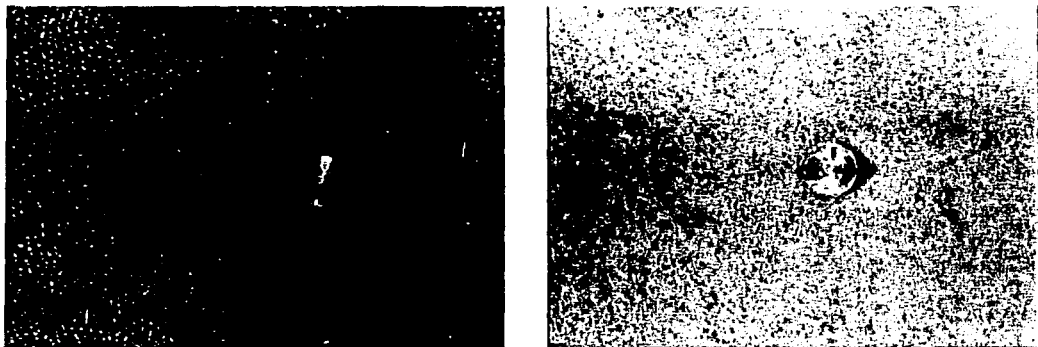


Fig 4.9. Flujo alrededor de un cilindro  $D = 3.8 \cdot 10^{-2} \text{m}$ .

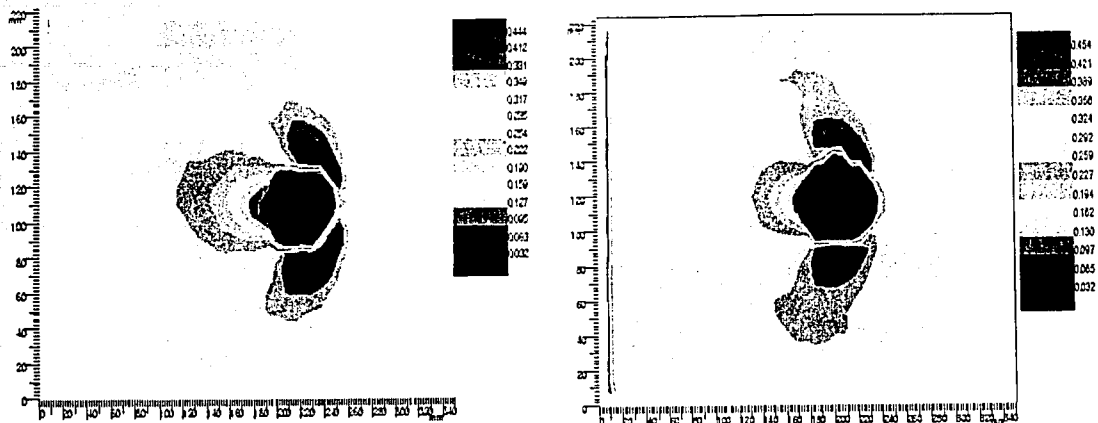


Fig 4.10. Campo de velocidad.

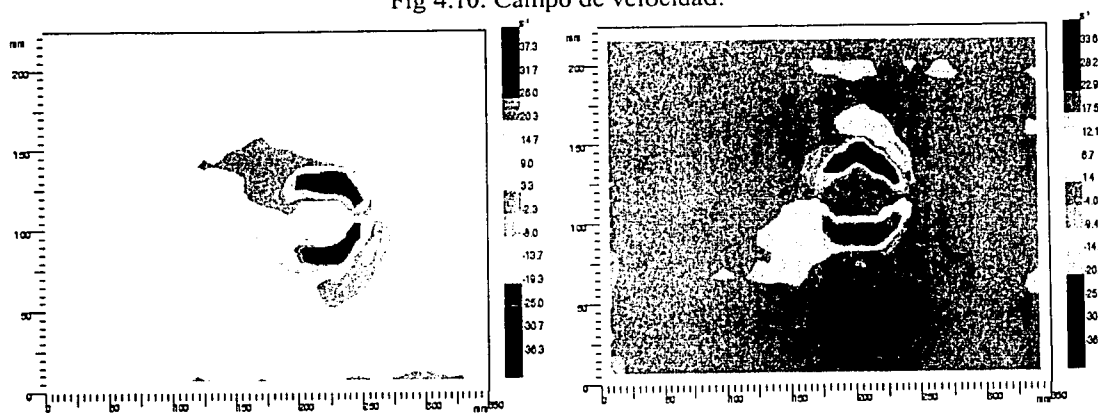


Fig 4.11 Campo de vorticidad.

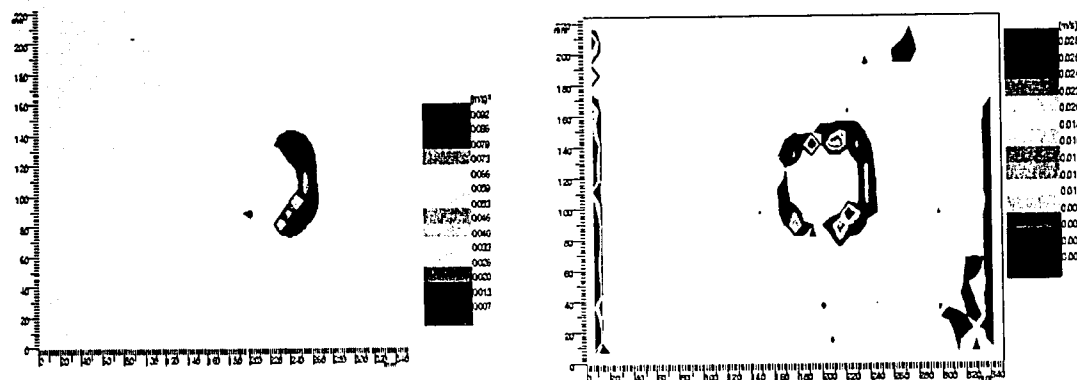


Fig 4.12. Campo de temperatura granular.

Se presenta a continuación una serie de figuras que, de manera similar a las anteriores, ilustran las diferencias en un flujo granular al utilizar un cilindro de menor diámetro. Del lado izquierdo se muestra un flujo granular alrededor de un cilindro de diámetro  $D=2.5 \cdot 10^{-2} \text{m}$ . El diámetro de las partículas  $d_p=6 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Velocidad media del flujo  $=0.32 \text{ m/s}$ . Del lado derecho se muestra un flujo granular alrededor de un cilindro del mismo diámetro y aproximadamente la misma velocidad media pero con partículas de  $3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ .

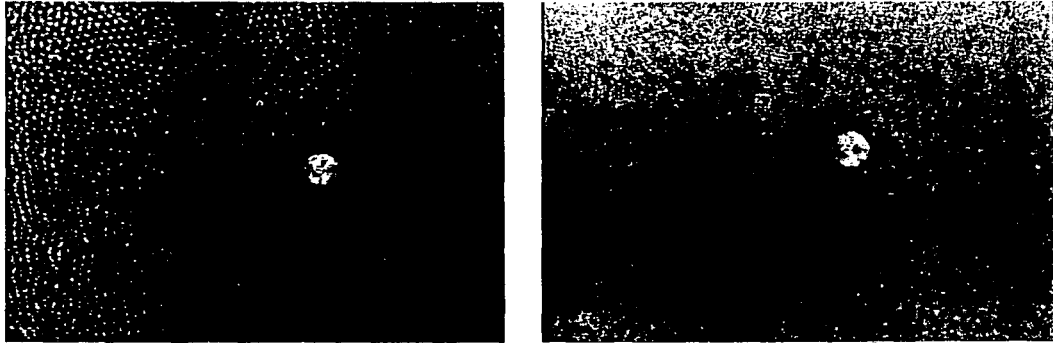


Fig 4.13. Flujo granular alrededor de un cilindro  $D=2.5 \cdot 10^{-2} \text{m}$ .

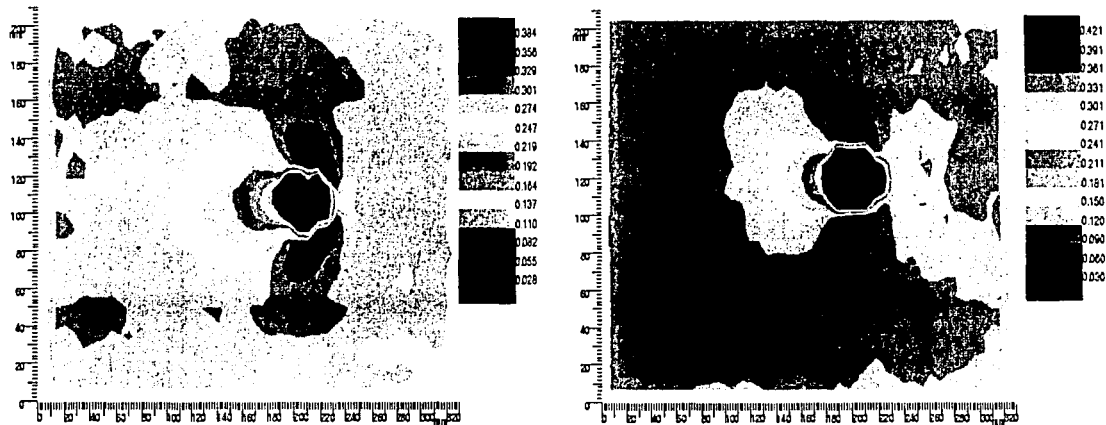


Fig 4.14. Campo de velocidad.

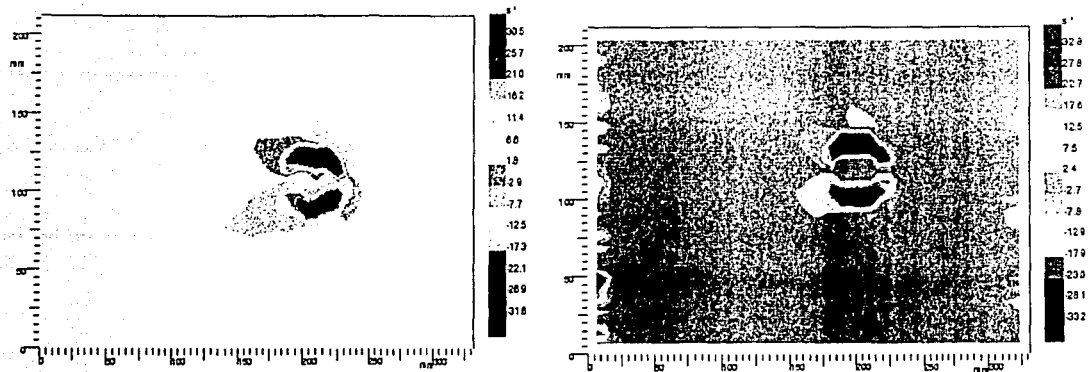


Fig 4.15. Campo de vorticidad.

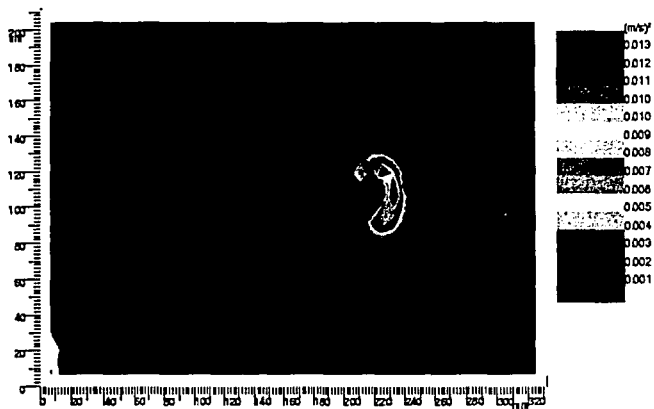


Fig 4.16. Campo de temperatura granular.

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Finalmente se presenta la visualización de un flujo granular alrededor de un cilindro de  $D= 1.2 \cdot 10^{-2}$  m. Del lado izquierdo se observan los resultados utilizando un diámetro de las partículas  $d_p= 6 \cdot 10^{-3}$  m y velocidad media del flujo  $=0.32$  m/s. Del lado derecho se observa un flujo granular alrededor de un cilindro del mismo diámetro y aproximadamente la misma velocidad media pero con partículas de  $3 \cdot 10^{-3}$  m.

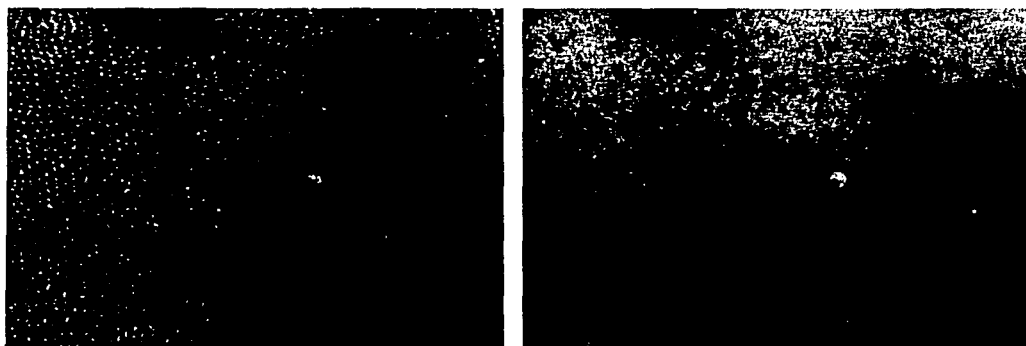


Fig 4.17. Flujo granular alrededor de un cilindro.  $D=1.2 \cdot 10^{-2}$  m.

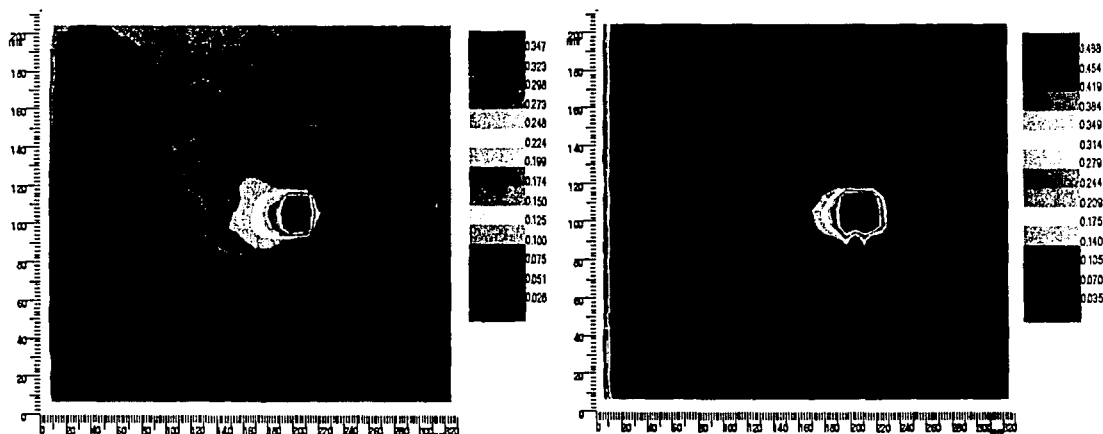


Fig 4.18. Campo de velocidad.

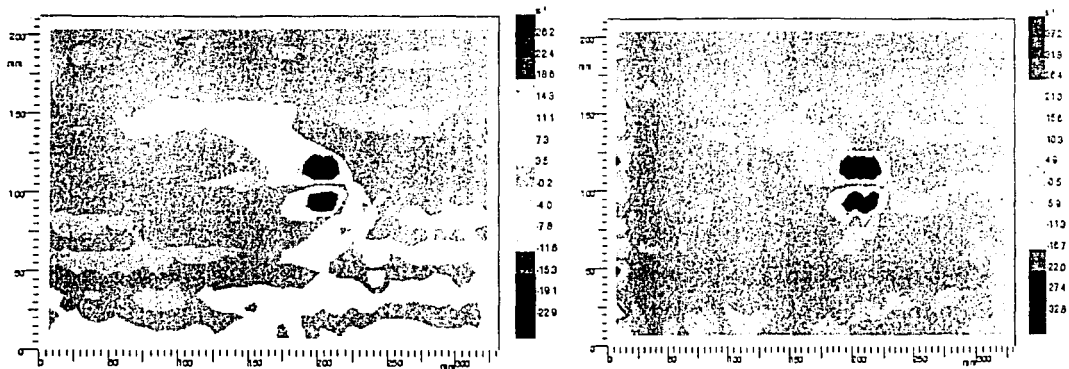


Fig 4.19. Campo de vorticidad.



Fig 4.20. Campo de temperatura granular.

Del conjunto de imágenes presentadas en este apartado se observa que en todos los casos la velocidad máxima de las partículas de  $3 \cdot 10^{-3} \text{m}$  es ligeramente mayor a la velocidad máxima de las partículas de  $6 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Las regiones de velocidad máxima son más pronunciadas en el caso de partículas de  $3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Observando estas imágenes nos percatamos que la región en la que el flujo comienza a disminuir su velocidad hasta llegar al punto de estancamiento (lado izquierdo del cilindro) es mayor con el cilindro de  $D = 3.8 \cdot 10^{-2} \text{m}$  y disminuye progresivamente hasta llegar al cilindro más pequeño. Así mismo podemos notar que las regiones donde se acelera el flujo (arriba y abajo del cilindro)

disminuyen de tamaño al disminuir el tamaño del cilindro. Se observa con claridad que el valor de la vorticidad es muy distinto de cero en los alrededores del cilindro, pero mas allá de la vecindad del cilindro la vorticidad es prácticamente nula. El valor de la vorticidad disminuye al decrecer el tamaño del cilindro. El valor de la vorticidad es similar para ambos tipos de partículas y el mismo tamaño de cilindro. La temperatura granular parece ser mayor para las partículas de  $6 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . De igual manera que con la vorticidad, la temperatura granular es prácticamente cero lejos del cilindro y sólo tiene valores grandes en la parte posterior del cilindro.

#### 4.5 Cálculo del factor de empaquetamiento.

Como se mencionó anteriormente, para realizar el cálculo de la velocidad media se supuso un valor de factor de empaquetamiento igual a 0.64. A continuación, utilizando el valor de velocidad media obtenido por medio del análisis de imágenes, con las ecuaciones 3.1-3.5 se muestra el cálculo del factor de empaquetamiento.

Tamaño de las partículas = 6mm		
Abertura (m)	1-e	% error
0.04	0.594	7.66
0.06	0.587	8.89
0.12	0.715	10.59

Tamaño de las partículas = 3mm		
Abertura (m)	1-e	% error
0.04	0.665	3.81
0.06	0.674	5.15
0.12	0.685	6.65

De esta tabla se puede observar que en el caso de las partículas de  $3 \cdot 10^{-3} \text{m}$  el factor de empaquetamiento supuesto es similar al obtenido después de haber realizado el análisis por medio de velocimetría. En el caso de las partículas de  $6 \cdot 10^{-3} \text{m}$  los valores se alejan un poco al valor supuesto. En general, al aumentar la abertura de la tolva inferior la densidad del flujo disminuye. El valor obtenido de 1-ε mostrado es un valor promedio.

## 4.6 Evolución del campo de velocidades

A continuación se presenta una comparación del campo de velocidades para un cilindro de  $D=3.8 \cdot 10^{-2}$  m y partículas de  $6 \cdot 10^{-3}$  m conforme aumenta la velocidad media del flujo. Las velocidades son: 0.32 m/s para el primer caso, 0.98 m/s para el caso intermedio y 0.45 m/s para el último caso.

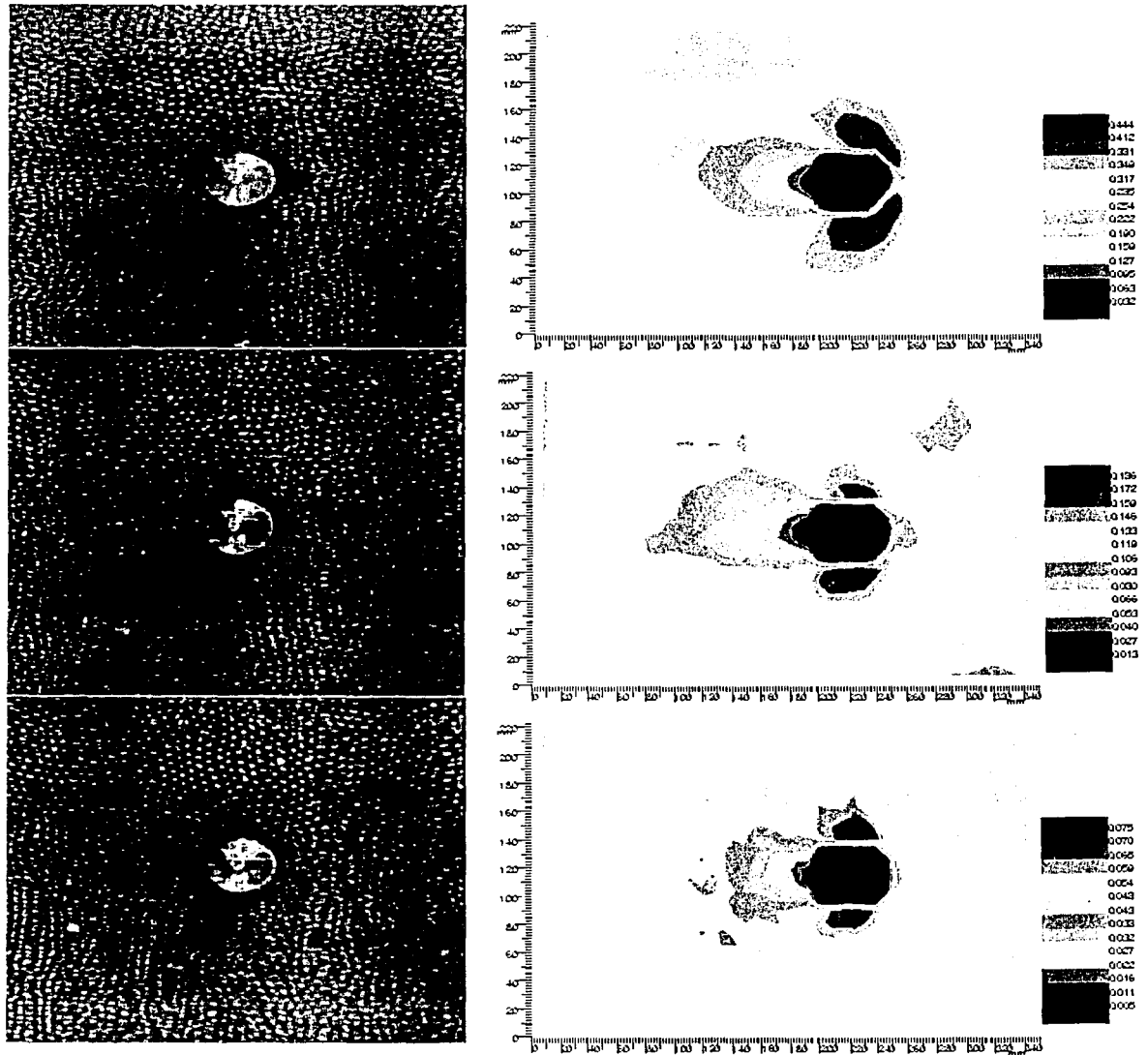


Fig 4.21. Desarrollo del campo de velocidad.  $D=3.8 \cdot 10^{-2}$  m.  $d_p=6 \cdot 10^{-3}$  m.

De manera similar, se presenta la evolución campo de velocidades para un cilindro de  $D= 3.8 \cdot 10^{-2} \text{m}$  y partículas de  $3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Las velocidades son 0.347 m/s para el primer caso, 0.116 m/s para el caso intermedio y 0.060 m/s para el último caso.

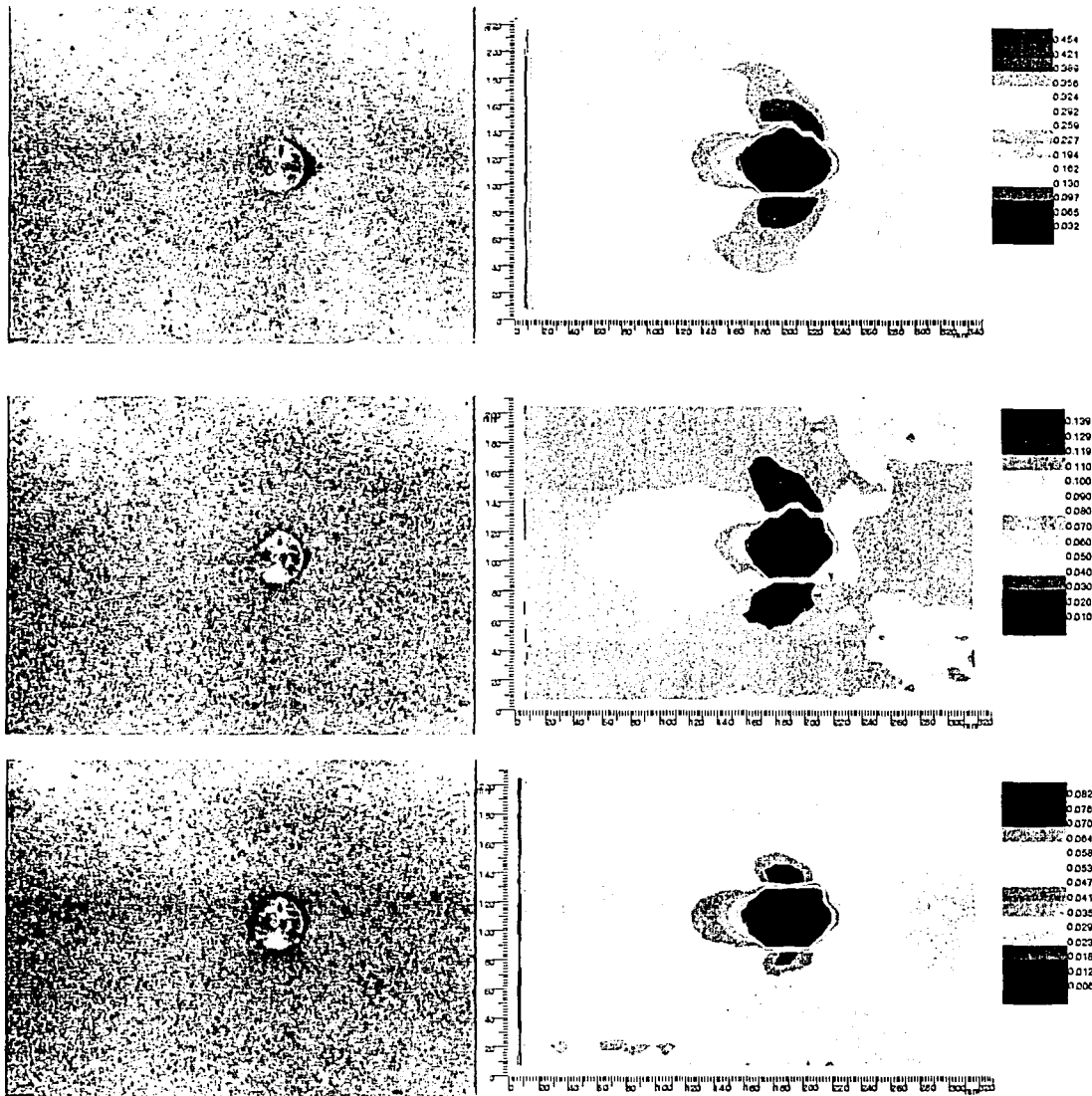


Fig 4.22. Desarrollo del campo de velocidad  $D=3.8 \cdot 10^{-2} \text{m}$ .  $d_p=3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ .

En las imágenes anteriores, se observa que aguas arriba del cilindro la velocidad es aproximadamente uniforme. Se puede apreciar una región de estancamiento sobre el

cilindro (lado izquierdo del cilindro). Se observa una disminución gradual de la velocidad de las partículas al acercarse a esta zona de estancamiento. La influencia del cilindro dentro del flujo se observa primordialmente en la parte anterior del cilindro. La región de estancamiento se extiende a varios diámetros de partículas sobre el cilindro. Esta zona es aproximadamente del mismo tamaño, independientemente del tamaño de partículas utilizadas. También se nota que con distintas velocidades de flujo, el tamaño de la zona de estancamiento y su extensión no varían significativamente.

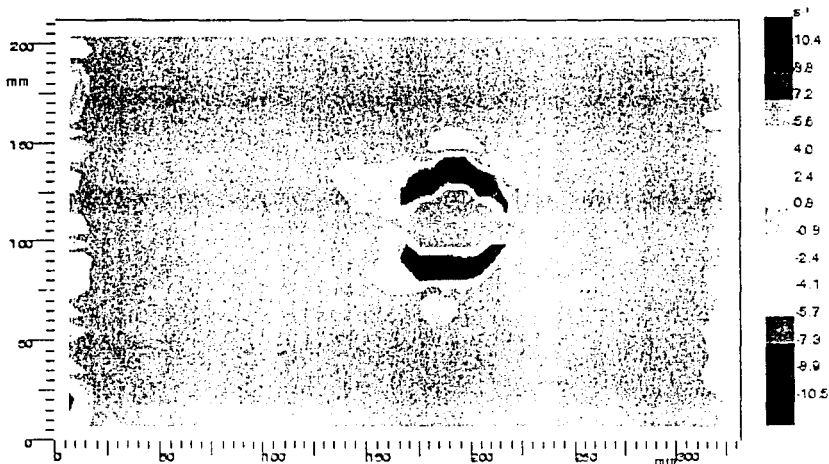
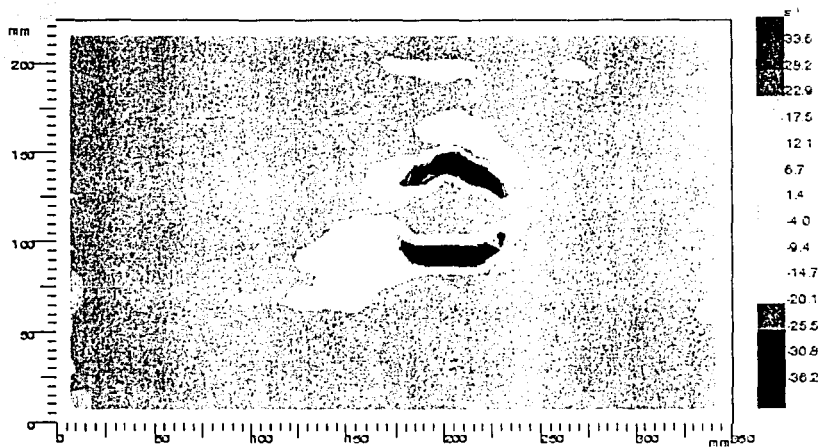
Se puede observar también que las partículas se aceleran al comenzar a rodear el cilindro alcanzando su mayor velocidad a 90 grados con respecto a la parte superior del cilindro. Se puede ver que la zona de máxima velocidad se extiende más hacia los costados al utilizar partículas de mayor tamaño.

En la parte posterior del cilindro se observa la existencia de una estela hueca.

Finalmente se observó que el tamaño de las partículas influye: las partículas de diámetro  $3 \cdot 10^{-3}$  m crean una zona de estancamiento de menor tamaño.

## 4.7 Determinación de la vorticidad

En seguida se presenta el cambio del perfil de vorticidad con la velocidad media para un cilindro de  $D= 3.8 \cdot 10^{-2} \text{m}$ . y partículas de  $3 \cdot 10^{-3} \text{m}$ . Las velocidades de flujo son: 0.347 m/s para el primer caso, 0.116 m/s para el caso intermedio y 0.060 m/s para el último caso.



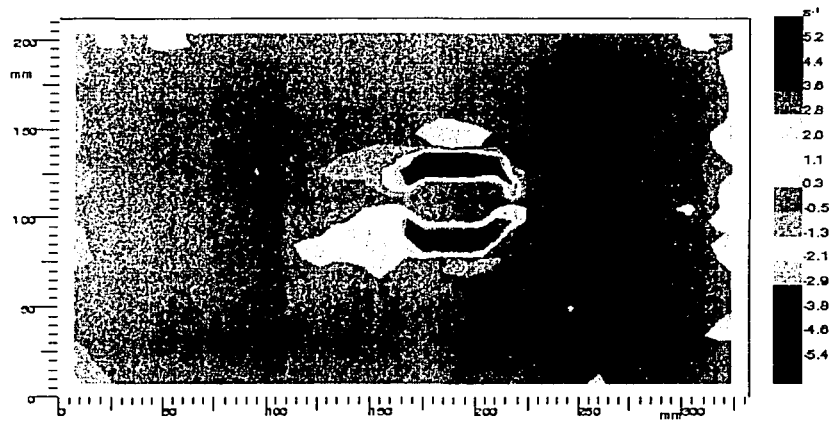


Fig 4.25. Desarrollo del perfil de vorticidad.  $D=3.8 \cdot 10^{-2}$  m.  $dp=3 \cdot 10^{-3}$  m.

Observamos en los tres casos que la vorticidad del flujo adquiere valores distintos de cero únicamente alrededor de donde se encuentra el cilindro. Los valores máximos de vorticidad disminuyen de manera importante al disminuir la velocidad del flujo. Este mismo fenómeno se presenta al utilizar las partículas de  $6 \cdot 10^{-3}$  m, cuyos valores son similares a los encontrados con las partículas de  $3 \cdot 10^{-3}$  m.



#### 4.8 Datos adimensionalizados

Los valores experimentales de vorticidad y temperatura granular se presentan a continuación de manera adimensional con el fin de mostrar la influencia de los parámetros geométricos sobre el flujo.

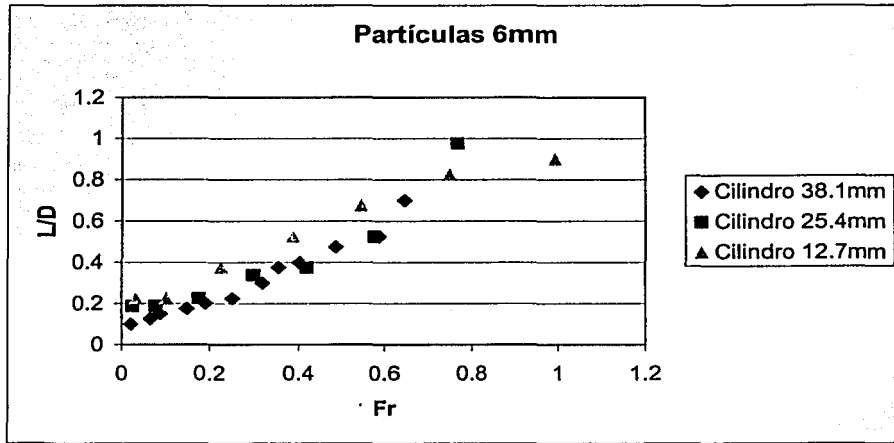
D	Dp	U	U <sub>max</sub>	$\xi_{\max}$	$\xi_{\max}(D+dp)/U$	T <sub>max</sub>	T <sub>max</sub> /U <sup>2</sup>	U <sub>max</sub> /U
0.0381	0.006	0.317	0.476	43	5.982018927	0.099	0.099	1.501577287
0.0381	0.006	0.133	0.199	14	4.642105263	0.003	0.003	1.496240602
0.0381	0.006	0.054	0.081	5.6	4.573333333	0	0	1.5
0.0381	0.003	0.356	0.486	39	4.50252809	0.03	0.03	1.365168539
0.0381	0.003	0.119	0.149	12	4.144537815	0.025	0.025	1.25210084
0.0381	0.003	0.064	0.088	6	3.853125	0.003	0.003	1.375
0.0254	0.006	0.301	0.411	35.3	3.682458472	0.014	0.014	1.365448505
0.0254	0.006	0.102	0.128	10.6	3.263137255	0	0	1.254901961
0.0254	0.006	0.053	0.073	5.6	3.317735849	0.002	0.002	1.377358491
0.0254	0.003	0.361	0.429	32.8	2.580387812	0.03	0.03	1.188365651
0.0254	0.003	0.137	0.159	11.3	2.342481752	0.004	0.004	1.160583942
0.0254	0.003	0.036	0.045	3.143	2.479477778	0	0	1.25
0.0127	0.006	0.323	0.372	29.9	1.731052632	0.009	0.009	1.151702786
0.0127	0.006	0.099	0.106	7.8	1.473333333	0.002	0.002	1.070707071
0.0127	0.006	0.05	0.058	4.378	1.637372	0.002	0.002	1.16
0.0127	0.003	0.488	0.523	42.6	1.370532787	0	0	1.071721311
0.0127	0.003	0.122	0.13	9.3	1.196803279	0.001	0.001	1.06557377
0.0127	0.003	0.054	0.062	4.428	1.2874	0.001	0.001	1.148148148

En esta tabla U es la velocidad media del flujo, U<sub>max</sub> es la velocidad máxima del flujo, T<sub>max</sub> es la temperatura granular máxima y  $\xi_{\max}$  es la vorticidad máxima del flujo.

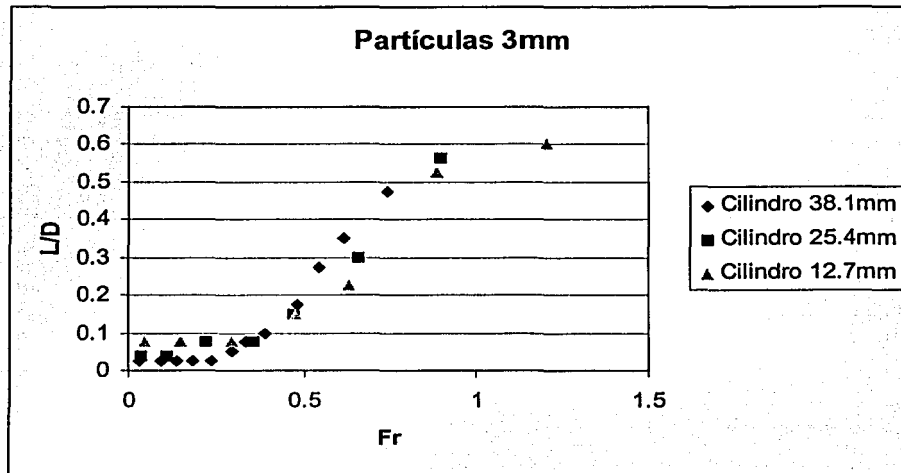
De la tabla anterior se observa que al disminuir el diámetro del cilindro la vorticidad adimensional del flujo disminuye. Lo mismo sucede con la temperatura granular y la velocidad. También se observa que los cambios de vorticidad, temperatura granular y velocidad dependen en menor grado del diámetro de las partículas.

## 4.9 Tamaño de la estela

Las figuras 4.23 y 4.24 muestran las mediciones del tamaño de la estela hueca que se forma aguas abajo del cilindro.



(Fig 4.23)



(Fig 4.24)

Claramente, el largo de la estela es proporcional a la velocidad del flujo. El tamaño de las partículas tiene también influencia en la extensión de la estela, siendo ligeramente mayor para las partículas mas grandes, bajo las mismas condiciones de flujo.

## Conclusiones

En este trabajo se obtuvieron mediciones de la fuerza de arrastre, campo de velocidad, campo de vorticidad y campo de temperatura granular para cilindros sumergidos en un flujo granular denso. Con este fin se construyó un canal que permitiera la formación de un flujo cuasi-bidimensional. Se variaron tanto el diámetro de los cilindros como el diámetro de las partículas. La velocidad media del flujo se aumentó progresivamente. Así mismo se midió la estela hueca generada por el flujo y se calculó el factor de empaquetamiento del medio granular.

De los experimentos conducidos se observaron los siguientes fenómenos:

- La fuerza de arrastre en un medio granulado no depende de la velocidad del flujo.
- La fuerza de arrastre depende del tamaño del cilindro sumergido dentro del medio granulado. La fuerza de arrastre aumenta linealmente con el tamaño del cilindro. Al observar los datos de descarga de la tolva se aprecia que la velocidad media de las partículas de 3mm es ligeramente mayor que la velocidad media de las partículas de 6mm.
- La fuerza de arrastre depende también, en menor grado, del tamaño de las partículas. Las partículas pequeñas causan una fuerza de arrastre ligeramente mayor (un 10% mayor en promedio).
- En lo que se refiere al campo de velocidades se observa que en las regiones anteriores y posteriores al cilindro tenemos una región de velocidad constante. Se puede apreciar una región de estancamiento sobre el cilindro. Esta región de estancamiento se extiende varios diámetros de partículas sobre el cilindro. Se observa una disminución gradual de la velocidad de las partículas al acercarse a esta zona de estancamiento. La influencia del cilindro dentro del flujo se observa primordialmente en la parte anterior del cilindro. Una vez sorteado el cilindro el fluido tiende a alcanzar nuevamente un valor de velocidad constante a lo ancho de todo el canal.

- Se puede observar también que las partículas se aceleran al comenzar a rodear el cilindro alcanzando su mayor velocidad a 90 grados aproximadamente con respecto a la parte superior del cilindro. Se ve que la zona de máxima velocidad es ligeramente mayor (15% en promedio) al utilizar partículas de menor tamaño.

- En la parte posterior del cilindro se observa la existencia de una estela hueca. El tamaño de esta estela depende de la velocidad del flujo. Cuanto mayor es la velocidad de éste, mayor es el tamaño de la estela. También es posible apreciar que el tamaño de esta estela es mayor (36.7% en promedio) al utilizar las partículas de 6 mm.

- En lo referente a la temperatura granular podemos apreciar que sólo existe agitación de las partículas en la región muy cercana al cilindro. En todas las demás regiones del flujo se aprecia una temperatura granular casi nula.

- Con respecto a la vorticidad, existen valores diferentes de cero únicamente en las cercanías del cilindro. En cualquier otra parte del flujo el valor de la vorticidad es cero.

Estos resultados son válidos cuando el material se encuentra densamente empacado (flujo granular denso). Resulta interesante notar que aún a velocidades relativamente altas, si el material se conserva empacado, la fuerza de arrastre continúa siendo independiente de la velocidad. Este comportamiento es indicativo de que el problema es dominado por contactos de fricción y que la contribución debida a choques entre partículas y el cilindro es mucho menor.

Al aumentar la velocidad del flujo se presenta una disminución en la densidad del material granular. Esto indica que existe una velocidad a la cual el flujo deja de ser denso para convertirse en diluido. A pesar de que observamos un cambio en la densidad del material, el arrastre sigue dependiendo primordialmente de la fricción entre las partículas. Como trabajo a futuro se puede investigar la velocidad a la que ocurre la transición entre estas dos condiciones de flujo. También es posible realizar experimentos con el fin de conocer el arrastre generado por un flujo granular diluido.

Se requiere realizar investigación utilizando geometrías distintas a los cilindros circulares utilizados en esta tesis con el fin de observar si los campos observados se comportan de igual manera que los aquí reportados.

El comportamiento de la fuerza de arrastre es esencialmente diferente a lo que ocurre en un fluido ordinario. Es importante que se considere este comportamiento en los cálculos de equipo que transportan, procesan y almacenan materiales granulares.

En este trabajo se utilizaron únicamente cuerpos que presentan simetría en la dirección del flujo. Es posible también analizar las fuerzas de sustentación que se esperaría se generaran en cuerpos no simétricos.

Las partículas utilizadas son otro parámetro que se puede variar en un futuro. Al inicio de este proyecto se utilizaron "pellets" de polietileno de alta densidad. Estos presentaban geometrías irregulares, además de ser muy rugosos en comparación de las partículas de vidrio. En algunos experimentos realizados se observó que el flujo se presentaba a manera de "brincos". Los experimentos no fueron continuados debido a que el canal no era lo suficientemente largo para lograr que el flujo alcanzara un estado estacionario.

**Dragonite Solid Glass Beads**

Our glass balls exceed the industry standards in all properties including: High Density, Abrasive Resistnace, Uniform Size, Completely Spherical, Ease of Cleaning, No slivers, Broken or Fused Pieces, High Impact Strength, High Crushing Strength, Corrosion Resistance, No contamination of Product, No Surface Cracks and Reduced Mill Ware.

**Glassbeads – type S; Art.**

**4500**

Solid glass beads, with a diameter range of 0.1 to 4.0 mm, are produced from high quality and pure-type soda lime glass, in a rounding process which we have developed ourselves. The unique washing and porshing process for this application purpose, without addition of environment endangering additives such as hydro-fluoric add, gives the beads a pure, uncontaminated, and shiry surface. The very narrow and exact slewing of the individual diameter sizes is achieved in the last production process with a screening unit.

**Grinding media in pearl mills:**

The development of this type of beads is primarily based on its use as grinding media in pearl mills for grinding and dispersing color pigments, paint, ink, agro chemicals, pharmaceuticals, minerals and magnetic coatings.

**Further applications:**

- As an agent used for treating metal, wood and synthetic surfaces, mechanical plating.

**Chemical characterization of soda lime glass:**

SiO <sub>2</sub>	72.0%	MgO	4.0%
Na <sub>2</sub> O			
CaO	9.0%	K <sub>2</sub> O, Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.05%

Slight deviations are possible. PbO free < 0.01 %

**Approximate technical and physical values:**

- Hardness according to Mobs : 6
- Elasticity module : 63 Gpa
- Specific weight : 2.5 kg/dm<sup>3</sup>
- Bulk weight : 1.5 kg/dm<sup>3</sup>
- Sphericity : Art. Nr. 5210 – 5223 . 80 %
- : Art Nr. 4501 – 4513 . 95%
- Abrasion after 100 h grinding : 1.5 – 1.8 %

**Quality and tolerance:**

	mm	N
5210	1.00 – 0.05	-
52	0.04 – 0.07	-
5212	0.07 – 0.11	-
5213	0.09 – 0.15	-
5214	0.10 – 0.20	-
5215	0.15 – 0.25	-
5216	0.20 – 0.30	-
5223	0.30 – 0.40	-
4501	0.25 – 0.50	-
45015	0.40 – 0.60	-
4502	0.50 – 0.75	-
4503	0.75 – 1.00	-
4504	1.00 – 1.25	200 – 300
4505	1.25 – 1.55	300 – 400
4506	1.55 – 1.85	400 – 550
4507	1.70 – 2.00	500 – 650
4508	2.00 – 2.30	650 – 800
4509	2.30 – 2.60	800 – 1000
4510	2.50 – 2.85	900 – 1100
4511	2.85 – 3.30	1100 – 1400
12	3.30 – 3.60	1400 – 1650
4513	3.70 – 4.10	1700 – 2000

All Jaygo's glass beads are available at Competitive prices. Call or write for sample.

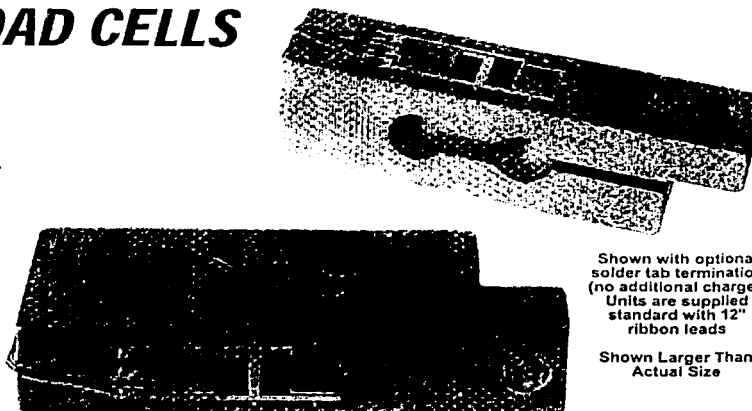
**JAYGO INCORPORATED**

675 Rahway Avenue, Union NJ 07083  
 908/688-3600 Fax 908/688-6060  
 E-Mail: jaygoinc@aol.com

# NEW LOW COST HALF-BRIDGE PLATFORM LOAD CELLS

**LCLA Series**  
Compression  
1 to 50 kg Capacities

LCLA Series  
**\$70**



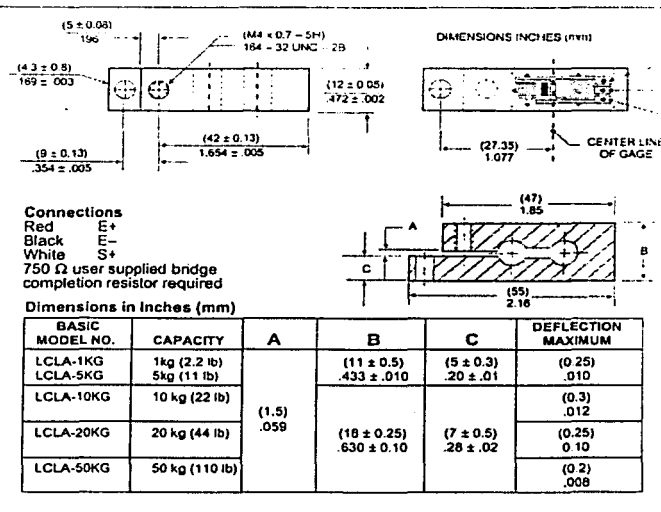
Shown with optional solder tab termination (no additional charge). Units are supplied standard with 12" ribbon leads

Shown Larger Than Actual Size

- ✓ Low Cost
- ✓ Small Size
- ✓ Built-in Overload Protection

**SPECIFICATIONS:**

Excitation: 10 Vdc recommended; 15 Vdc maximum  
 Full Scale Output: 1 mV/V ±0.1 mV  
 Bridge Configuration: Active half bridge, adjacent arms  
 Linearity: ≤0.1% FS  
 Hysteresis: ≤0.1% FS  
 Repeatability: ≤0.05% FS  
 Creep: 0.01% Load 5 min  
 Thermal Effects:  
 Zero 0.006% FS/°F  
 Span 0.035% Rdg/°F  
 Zero Balance: ≤1.0% FS  
 Insulation Resistance:  
 ≥ 1000 MΩ at 50 Vdc  
 Operating Temp Range:  
 -140 to 66°C (-40 to 151°F)  
 Compensated Temp Range:  
 -10 to 46°C (15 to 115°F)  
 Maximum Overload:  
 200% of rated capacity  
 Gage Resistance:  
 750 Ω ±75 Ω  
 Fatigue Life: >10 million cycles unidirectional  
 Electrical: 12" (0.3 m) 3-Conductor Flat Cable



**MOST POPULAR MODELS HIGHLIGHTED**

**To Order (Specify Model Number)**

RANGE KG (lb)	MODEL NO.	PRICE	COMPATIBLE METERS*
0 to 1 (2.2)	LCLA-1KG	70	DP41-S, DP25-S, DP302-S
0 to 5 (11)	LCLA-5KG	70	DP41-S, DP25-S, DP3002-S
0 to 10 (22)	LCLA-10KG	70	DP41-S, DP25-S, DP3002-S
0 to 20 (44)	LCLA-20KG	70	DP41-S, DP25-S, DP3002-S
0 to 50 (110)	LCLA-50KG	70	DP41-S, DP25-S, DP3002-S

\*See Section D For Compatible Meters  
 Two external 750 ohm resistors for bridge completion must be used with meters listed above  
 To order units with solder tabs, add suffix "-ST" to Model number, no extra charge.  
 Ordering Example: LCLA-5KG, half-bridge platform load cell with 5 kilogram capacity, \$70.  
 LCLA-1KG-ST, half-bridge platform load cell with 1 kilogram capacity and solder tabs, \$70.

**TESIS CON FALLA DE ORIGEN**



# BULLETIN

OF THE AMERICAN PHYSICAL SOCIETY

PROGRAM OF THE 54<sup>TH</sup> ANNUAL MEETING  
OF THE DIVISION OF FLUID DYNAMICS



**November 18-20, 2001**  
**San Diego, California**

**November 2001**  
**Volume 46, No. 10**

11:14

**BK 4 Granular force on a cylinder immersed in a dense granular flow** DANIEL CHEHATA, *Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autonoma de Mexico* ROBERTO ZENIT, *Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autonoma de Mexico* CARL WASSGREEN, *Mechanical Engineering Department, Purdue University* The flow around a fixed cylinder immersed in a uniform granular flow is studied experimentally. The experiments are performed in a 1.5 m long, 0.3 m wide vertical chute with a gap width between the front and back glass walls of 5 cm. A storage bin at the top of the chute feeds glass particles into the channel while the mean velocity of the flow is controlled by varying the exit width of a hopper at the bottom of the channel. Measurements of the drag force acting on fixed cylinder are made using a strain gage based force measurement system. The flow velocity field is also measured by videotaping the flow through the front wall using a high speed camera and PIV software. Experiments are performed for a range of mean particle velocities, cylinder diameters, and for two sizes of glass particles. For the range of velocities studied, the drag force acting on the cylinder is independent of the mean flow velocity; contrary to what is expected from any ordinary fluid. The drag force is found to increase with cylinder diameter and to decrease with particle diameter. A large stagnation zone is identified at the leading edge of the cylinder, while at the trailing edge, a wake is observed. The drag force on the cylinder does not change with the mean flow velocity although the characteristics of the flow appear to change significantly with increasing mean velocity.

# Gallery of Fluid Motion - Posters & Videos

---

*9. Three-dimensional Overturning Waves*

**Frederic Dias**  
Ecole Normale Supérieure

*10. Bubble Behavior in the Shear Layer of a Bubbly Jet*

**Dimitris Nikitopoulos**  
Louisiana State University

*11. Vorticity Filaments*

**Frederic Bottausci**  
PMMH-ESPCI

*12. Instability of Unequal Strength Counter-Rotating Trailing Vortices*

**Jason M. Ortega**  
Lawrence Livermore National Laboratory

*13. Unsteady Oscillation of Gortler Vortices*

**Ihab Girgis and Josephy Liu**  
Brown University

*14. Instabilities of Spheres Falling Through HPG*

**Patrick D. Weldman**  
University of Colorado

*15. Dense Granular Flow Around a Cylinder*

**D. Chehata, R. Zenit and C. Wasgreen**  
UNAM and Purdue University

*16. PIV Measurements Around a Submarine Model, ONR Body-1*

**Paisan Atsavapranee, Thomas C. Fu and David E. Hess**  
NSWCCD

*17. Air Entrainment from Falling Droplets*

**Stephan A. Koehler, Amy Q. Shen, Howard A. Stone and Shang-You Tee**  
Harvard University

SUPLEMENTO DEL BOL. SOC. MEX. FÍS. 15-3, 2001

# XLIV

## CONGRESO NACIONAL DE FÍSICA

Congreso de la División de Dinámica de Fluidos  
XIV Reunión Anual de la Academia Mexicana de Óptica (AMO)  
XVI Encuentro Nacional de Divulgación Científica

PROGRAMAS

Y

RESÚMENES



SEP

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## SIII.2

### Fuerza de arrastre sobre un cilindro inmerso en un flujo granular

*Daniel Chehata y Roberto Zenit, Instituto de Investigaciones en Materiales, Universidad Nacional Autónoma de México Apdo. Postal 70-360, Ciudad Universitaria, Coyoacán D.F. 04510, México*

Estudiamos el flujo alrededor de un cilindro inmerso en una corriente granular. Los experimentos se realizaron en un canal vertical 1 m de largo y 0.3 m de ancho. Dos vidrios gruesos con una separación de 5 cm se utilizaron para generar un flujo granular cuasi-bidimensional. La velocidad media del flujo se controló a través de la apertura de una tobera en la parte inferior. Un contenedor, de gran capacidad, se colocó en la parte superior del canal donde las partículas se almacenaban antes de entrar al canal. Se utilizaron esferas de vidrio de 3 y 6 mm de alta esfericidad y poca dispersión en tamaño. En el centro del canal se colocó un cilindro que se mantuvo estacionario. La fuerza ejercida sobre el cilindro fue medida directamente utilizando una celda de carga calibrada. Los datos de fuerza fueron capturados por un sistema de adquisición de datos montado en una PC. De manera simultánea el flujo fue video grabado utilizando una cámara de alta velocidad. Las imágenes fueron digitalizadas y un software de velocimetría tipo PIV fue utilizado para obtener mediciones del campo de velocidades alrededor del cilindro. Se realizaron experimentos para varios cilindros, dos tamaños de partículas y para un rango de velocidades amplio.

Para el rango de velocidades estudiado la fuerza de arrastre, en contraste con lo que se esperaría con un fluido ordinario, es independiente de la velocidad media del flujo. Se encontró que la fuerza de arrastre es proporcional al diámetro del cilindro e inversamente proporcional al diámetro de las partículas. Se identificó una zona de estancamiento de tamaño comparable al tamaño del cilindro. En la parte posterior del cilindro, la velocidad media de las partículas es más alta que en el flujo medio. Las características del campo de velocidades difieren significativamente de las predicciones basadas en modelos clásicos en mecánica de fluidos

# “SEMINARIO”

El Departamento de Reología y Mecánica de Materiales,  
le invita al Seminario:

## *“Flujo granular alrededor de un cilindro”*

Impartirá:

*Daniel Chehata Gómez*

Diréctor de Tesis Roberto Zenit Camacho

Se estudió el flujo alrededor de un cilindro inmerso en una corriente granular. Los experimentos se realizaron en un canal vertical de 1 metro de largo y 0.3 m de ancho. Dos vidrios gruesos con una separación de 5 cm se utilizaron para generar un flujo granular cuasi-bidimensional. La velocidad media del flujo se controló a través de la apertura de una tobera en la parte inferior. Un contenedor, de gran capacidad se colocó en la parte superior del canal donde las partículas se almacenaban antes de entrar al canal. Se utilizaron esferas de vidrio de 3 y 6 mm de alta esfericidad y poca dispersión de tamaño. En el centro del canal se colocó un cilindro que se mantuvo estacionario. La fuerza ejercida sobre el cilindro fue medida directamente utilizando una celda de carga calibrada. Los datos de fuerza fueron capturados por un sistema de adquisición de datos montado en una PC. De manera simultánea el flujo fue video grabado utilizando una cámara de alta velocidad. Las imágenes fueron digitalizadas y un software de velocimetría tipo PIV fue utilizado para obtener mediciones del campo de velocidades alrededor del cilindro. Se realizaron experimentos para varios cilindros, dos tamaños de partículas y una rango amplio de velocidades.

Para el rango de velocidades estudiado, la fuerza de arrastre, en contraste con lo que se esperaría con un fluido ordinario, es independiente de la velocidad media del flujo. Se encontró que la fuerza de arrastre es proporcional al diámetro del cilindro e inversamente proporcional al diámetro de las partículas. Se identificó una zona de estancamiento de tamaño comparable al tamaño del cilindro. Se observó la formación de una estela en la parte posterior del cilindro, la cual se caracteriza por ser una zona de baja densidad muy bien definida. Se observó que el largo de la estela crece al aumentar la velocidad media del flujo. Las características del campo de velocidades difieren significativamente de las predicciones basadas en modelos clásicos de mecánica de fluidos.

**El jueves 7 de febrero de 2002, a las 12:00 hrs., en la Sala de Conferencias del IIM.**

*\*Café y Galletas*

## BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

Albert R., Pfeifer, M. A., Barbasi, A., Schiffer, P. *Slow drag in a granular medium*. Phys. Rev. E. **82**, pp. 205-208. 1998.

Atkinson T. D., Butcher J.C., Izard M.J., Neederman R.M., *The forces on obstacles suspended in flowing granular materials*. Chem. Eng. Sci. **38**. 91-105. 1983.

Batchelor, G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 1991.

Ben-Naim, E., Knight, J.B., Nowak, E., Jaeger, H.M., Nagel S. R., *Slow relaxation in granular compaction*. Phys. Rev. E. **53**, pp. 782-794. 1996.

Bideau, D., Hansen, A. *Disorder and granular media* Amsterdam: North-Holland, 1993.

Cambou, B. *Behaviour of granular materials*. Udine: CISM courses and lectures, 1998.

Campbell, C. S. *Rapid Granular Flows*. Annu. Rev. Fluid Mech. **22**, pp. 57. 1990.

Duran, J. *Sands, powders and grains. An introduction to the physics of granular materials*. New York: Springer, 1997.

Ennis, B. J., Green, J., Davies, R., *The legacy of neglect in the U.S.* Chem. Eng. Prog. **90**, 4, pp. 32-43. 1994.

Epix. XCAP *Interactive image analysis*. version 2.0/2.1 Reference Manual. 2001.

Essick J. *Advanced Labview labs*. New jersey: Prentice Hall, 1994.

ESTA TESIS NO SALA  
DE LA BIBLIOTECA

Forsyth, A. J., Hutton, S.R., Osborne, C.F., Rhodes, M.J. *Effects of interparticle force on the packing of spherical granular material*. Phys. Rev. **87**, 24. 2001.

Fowler, B., Bedford, A., *Mecánica para ingenieros. Dinámica*. México: Addison-Wesley Iberoamericana, pp. 199-200. 1995.

Fox, R., McDonald, A. *Introducción a la mecánica de fluidos*. México: Nueva editorial interamericana, 1988.

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fundamentals of physics*. Ed. John Wiley & Sons. U.S.A. 1993.

Hernandez-Cordero, Zenit R., Geffroy E., Mena B. *Experiments on granular flow in a hexagonal silo: A design that minimizes dynamic stresses*. Korea-Australia J. of Rheol. **12**, 269-281. 2000.

Hlavac, J. *The technology of glass and ceramics. An introduction*. New York-Elsevier Science Publishing Company, 1983.

Holman, J.P. *Métodos experimentales para ingenieros*. USA- McGraw-Hill, 1971.

Jackson, R. *Some features of the flow of granular materials and aerated granular materials*. J. of Rheol., **30**, 1986.

Jackson, R., *The teory of dispersed multiphase flow*. New York, 1983.

Jaeger H. M., Nagel S. R.. *Granular solids, liquids, and gases*. Phys. Rev. E **68**, pp. 1259-1270. 1996.

Johnson, G. *Labview power programing*. New York: McGraw Hill, 1998.



Knight, J.B., Fändrich, C.G., Lau, C. N., Jaeger, H.M., Nagel, S. R. *Density relaxation in a vibrated granular material*. Phys. Rev. E 51, pp. 3957. 1995.

Leal G. *Laminar flow and convective transport processes*. Massachusetts, Butterworth-Heinemann, 1992.

Lee J. *Density waves in the flows of granular media*. Phys. Rev. E 49, pp. 281. 1994.

Litwinitzyn, J., *Bull. Acad. Pol., Ser. Sci. Tech.*, 9, 61, 1963.

Mehta, A. *Granular Matter. An interdisciplinary approach*. New York: Springer-Verlag, 1994.

Mullins, W. W., *Powder Tech.*, 9, 29, 1976.

Munson, B., Young, D., Okiishi, T., *Fundamentals of fluid mechanics*. Canada, John Wiley & sons. 1998.

Nedderman, R.M. *Statics and Kinematics of granular materials*. Cambridge, Cambridge University press, 1992.

Nedderman, R.M., Davies, S.T., Horton, D. J. *The flow of granular materials round obstacles*. Powder Technology, 25, pp. 215-223. 1980.

Pouliquen, O., Gutfraind R., *Stress fluctuations and shear zones in quasistatic granular chute flows*. Phys. Rev. E. 53, pp. 552. 1996.

Reynolds, O. *Phil. Mag. Ser. 5*, 20 pp. 469- 481. 1885.

Schaeffer, D. G., *Instability in the evolution-equations describing incompressible antigranulocytes flow*. J. Differ. Equ. 66, 19, 1987.

Tüzün, U., Nedderman, R.M. *Gravity flow of granular materials round obstacles*  
*II. Chemical engineering science*, Vol.40, No. 3, pp. 337-351. 1985.

Wassgren, C. R., Zenit, R., Karion, A. *Flow around a cylinder immersed in a collisional granular flow*. En revisión para publicación a *Physics of fluids*, 2002.

Weighardt, K. *Forces in a granular flow*. *Mech. Res. Comm.* Vol. 1. pp. 3-7. 1974.

White, F. *Mecánica de fluidos*. México: Mc Graw Hill, 1998.

Zdravkovich, M.M. *Flow around circular cylinders, vol1: fundamentals*. New York: Oxford University Press, 1997.