5

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNA PROPUESTA DEL METODO CIENTIFICO APLICADO A LAS MATEMATICAS EN EL C.C.H.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FRANCISCO JAVIER CORONA VAZQUEZ

DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA

2002

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: " UNA PROPUESTA DEL METODO CIENTIFICO APLICADO A LAS MATEMATICAS EN EL C.C.H. "

realizado por EL C. FRANCISCO JAVIER CORONA VAZQUEZ.

con número de cuenta 6410234-4 , quién cubrió los créditos de la carrera de MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. EN C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA.
Propietario	M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA.
Propietario	M. EN C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ.
Suplente	M. EN C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO.
Suplente	M. EN A. P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES.

Consejo Departamental de MATEMATICAS.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

Dedico este trabajo:

A Dios:
por haberle conocido plenamente desde mis días de universitario

A nuestra querida "Alma Mater":
La Universidad Nacional Autónoma de México

A nuestra casa de siempre:
La Facultad de Ciencias

A mis padres:
Los Sres. Javier Corona Corona y Bertha Vázquez de Corona

A mi esposa:
La Sra. Concepción Ochoa de Corona

A mis hijos e hija política:
Aysleth Corona Ochoa, Javier Corona Ochoa y Mónica Navarro González

A mis nietas:
Regina Corona Navarro y Sarah Corona Navarro

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

EL COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES se constituyó desde su creación en una entidad novedosa por un lado y como un organismo de permanente innovación por el otro.

Desde el año de 1971, se pretendió que las ciencias y las humanidades estuviesen vinculadas estrechamente acabando de una vez por todas con el mutuo aislamiento que siempre tuvieron.

Es por ello que también se luchó desde su inicio para que la INTERDISCIPLINA fuese el vínculo ideal para estas dos ramas de la ciencia .

LA INTERDISCIPLINA sin embargo, no debía de entenderse como una superposición desordenada de materias, sino que el hilo conductor que las uniese debía de ser EL MÉTODO CIENTÍFICO.

¿Que es el método científico? ¿Existe una sola forma de aplicarlo? ¿ Se puede aplicar en general para cualquier ciencia o varía de disciplina a disciplina?.

El propósito de este trabajo, mas que desarrollar un libro de Geometría para bachillerato, es el de procurar que el alumno entienda a la geometría como una ciencia ligada a todas las demás por el MÉTODO CIENTÍFICO.

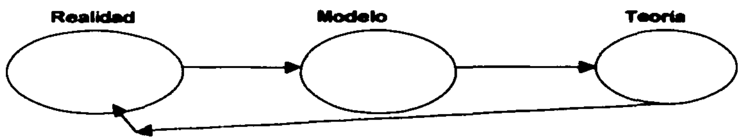
Por lo anterior, el siguiente trabajo inicia el capítulo I con una descripción del Método Científico en General; enseguida se lleva a cabo una exposición sobre el método científico en la matemática poniendo como ejemplo de éste a la Teoría de Gráficas.

En el capítulo II se habla de la Geometría Euclidiana y su gestación histórica, haciéndola resaltar en su aspecto empírico para después estudiarla desde el punto de vista formal hasta donde es posible en este nivel del bachillerato.

El trabajo presente tiene dos referentes, los cuales es importante señalar: por un lado, debo decir que el programa de la materia llamada Matemáticas III surgió como resultado de las sesiones de trabajo que los profesores del área sostuvimos con el Dr. Santiago López de Medrano, antes de implementarla en el salón de clase, es decir, que los contenidos y objetivos de este cuerpo de conocimientos a nivel bachillerato no fueron idea e iniciativa de un solo individuo, sino de un cuerpo colegiado; por otro lado, este escrito es una recopilación de las clases que me tocó impartir.
Era en este semestre(el tercero), que los contenidos de las demás materias curriculares enfatizaban la gran utilidad del Método científico para llegar a un conocimiento certero de la realidad, tal era el caso de Teoría de la Historia, Biología, Método experimental, etc. Por esta razón había que enseñarles a los alumnos la importancia que tienen la Matemáticas en cuanto a que:

a) Son una actividad que sistematiza y organiza el conocimiento humano.
b) No son un cúmulo de conocimientos invariables, sino que presentan una amplia gama de posibilidades de desarrollo y una serie de cuestiones que aún son objeto de estudio y sobre las que existen diferentes posiciones.
c) Muchos de los métodos matemáticos son aplicables a la mayoría de las disciplinas, de tal modo que ellos permiten descubrir analogías profundas entre distintas ramas del conocimiento humano y basándose en estas relaciones, proponer nuevos problemas y métodos.

Es por las razones anteriores que se tomó a la Teoría de Gráficas y a la Geometría como modelo de teorías deductivas que en algunos puntos fuesen muy parecidas a lo que se hacía en las otras ciencias o ramas del cocimiento.
Dentro de el proceso enseñanza-aprendizaje, procuraba que el alumno entendiera los principios de lo que se quería enseñar, a través de ejemplos sumamente sencillos, tratando de guiar la clase de tal manera que fuésemos hacia grados mas profundos de abstracción, usando generalmente el método inductivo(de una manera empírica) para teoremas en los que se tenía que demostrar alguna fórmula y el método deductivo para cuando el alumno junto con el profesor hubiésemos llegado a la axiomatización de la teoría. Lo anterior fue posible en la parte de Teoría de Gráficas. Por lo que concierne a la Geometría, se mencionaron directamente los axiomas planteados por Euclides, en virtud de que ya se sabía cómo llegar a sistematizar una teoría con la experiencia de la Teoría de Gráficas, en las siguientes clases combinaba siempre la inducción con la deducción pára descubrir nuevos teoremas, siguiendo siempre el siguiente esquema:



CAPÍTULO I.- EL MÉTODO CIENTÍFICO Y LAS MATEMÁTICAS

I.1.- El método científico en las Ciencias

Últimamente se ha dicho que "Las ciencias a medida que se desarrollan y se vuelven más teóricas, se confunden con Matemáticas". Esta idea va de acuerdo con la concepción general que en la actualidad se tiene respecto a la esencia del conocimiento científico que consiste en una "auténtica generalización de los hechos, en que tras de lo casual se descubre lo necesario, tras lo singular lo general y sobre esta base se lleva a cabo la previsión de los diferentes fenómenos, objetos y conocimientos"(1).[1]

La generalización de todo conocimiento pasa, como es de suponerse por todo un proceso que según algunos pensadores consiste en:

1. La observación directa del objeto de estudio como un conjunto en el que todo cambia y está interrelacionado.
2. El análisis del objeto, resaltando sus distintas facetas y estudiando sus elementos.
3. La reconstitución del cuadro de conjunto del objeto sobre la base de unir el Analisis y la Síntesis.

Lo anterior revela el método general de investigación en cualquier ciencia, sin embargo cada ciencia en particular va teniendo las singularidades que le confieren tanto el objeto de estudio como la forma de hacerlo.

En las ciencias que son llamadas "Experimentales" como la Física, Química. Biología, etc. se acostumbra seguir los siguientes pasos:

1. Observación
2. Hipótesis
3. Experimentación
4. Conclusión
5. Teoría
6. Ley
7. Principio

El método científico en las ciencias del Área Histórico Social, se encuentra en el llamado "Materialismo Histórico" el cual, como método de análisis se aplica a "Las sociedades para explicar su desarrollo utilizando leyes sacadas de la práctica social misma, así como conceptos o categorías que ayudan a comprender el devenir histórico, analizar la realidad vigente y tomar una posición ante ésta convirtiéndonos en agentes de cambio"(2).[2]

He deseado en este trabajo, resaltar los aspectos más importantes que caracterizan el método científico dentro de las áreas disciplinarias del Colegio de Ciencias y Humanidades, particularmente las de los dos primeros semestres, pues es en éstos donde se va a basar el desarrollo de las demás disciplinas impartidas en los demás semestres.

Se finalizará esta sección con la consideración del método científico dentro del Área de Talleres, especialmente en las materias de Taller de redacción y Taller de Lectura de Clásicos.

---

[1] M.B. Kedrov y A. Spirkin "La Ciencia"

[2] Memorias del Grupo Interdisiplinario C.C.H. 1974.

En Taller de redacción el método que se sigue es el siguiente:

1. Relación con el marco teórico al cual se recurre para fundamentar la necesidad y carácter de la investigación.
2. Planteamiento del problema, donde se precisa el objeto de estudio, señalando fines y limitaciones.
3. Formulación de la Hipótesis.
4. Desarrollo y verificación de las hipótesis.
5. Análisis y conclusiones.

En el Taller de Lectura de Clásicos, las etapas del método son las que a continuación se enlistan:

1. Descripción de los niveles determinados de un texto.
2. Explicación de los niveles prefijados a partir de los niveles determinantes que se encuentran dentro de un texto.
3. Explicación de los mismos niveles de una obra escrita, a través de los niveles principales de la sociedad(3).[3]

I.2. TEORÍA DE GRÁFICAS O UN EJEMPLO DEL MÉTODO CIENTÍFICO EN LAS MATEMÁTICAS.

Se iniciará el estudio citando algunos ejemplos como el siguiente:

En muchas de las situaciones con las que uno se puede enfrentar a diario son susceptibles de ser representadas por medio de gráficas como cuando se pregunta: ¿Cuales son las ramificaciones de una familia?, así :

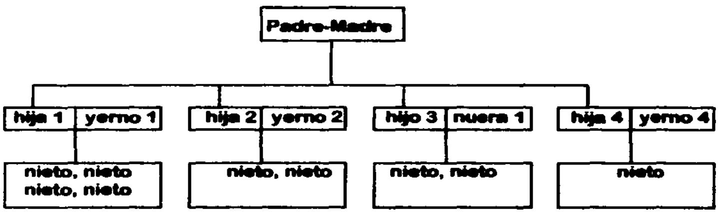


figura 1.1

[3] Memorias. Op. Cit.

Otro ejemplo es el de la conexión de resistencias en paralelo como se ve a continuación:

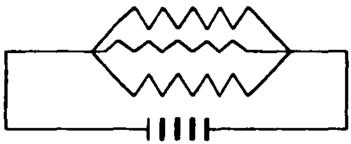


figura I.2

Otro ejemplo es el del monohibridismo en genética como se muestra en la siguiente figura:

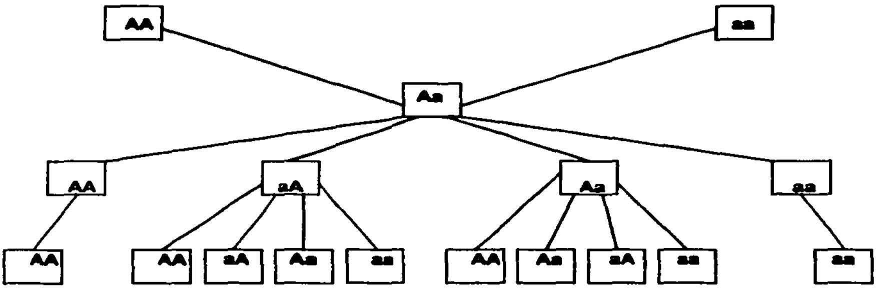


figura I.3

A las gráficas precedentes habría que agregar otra más familiar como la que representa un hipotético torneo pentagonal de Futbol Soccer, en el que cada punto(vértice) representa un equipo y cada línea (arista) representa el partido que se lleva a cabo entre dos equipos como se ve enseguida:

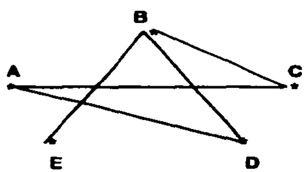


figura I.4

Se hará una observación importante: En la gráfica anterior, los cruces entre las aristas no forman otro vértice.

Las gráficas que se han dibujado sirven muy bien para el contexto ya señalado, pero para el objetivo que se persigue que es el de construir toda una teoría a partir de conceptos elementales, nos conviene ir hacia otro nivel mas alto de abstracción representándolas solamente con puntos (vértices) y líneas (aristas) y entonces las gráficas de las figuras I.1 a I.3 se verían de la siguiente manera:

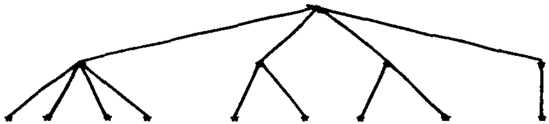


figura I.5.-Estructura de los lazos familiares

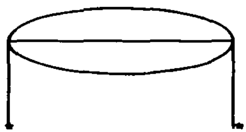


figura I.6.- conexión de tres resistencias

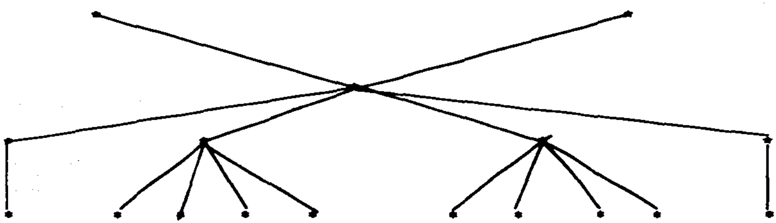


figura I.7.- Monohibridismo

Finalmente, otro ejemplo que uno encuentra muy a menudo es el de los mapas que representan las rutas de líneas aéreas como en el siguiente ejemplo donde los vértices serían las ciudades y las aristas son las rutas de vuelo:

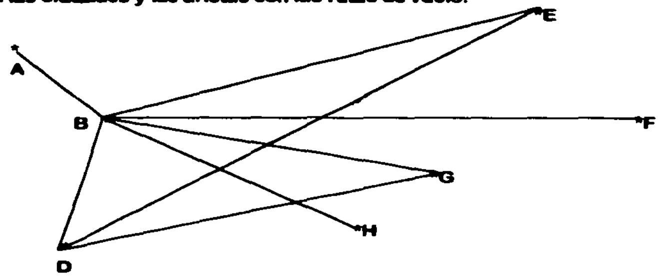


figura I.8.- Mapa de rutas aéreas.

Si se quisiera hacer una clasificación incipiente de las gráficas anteriores por simple observación se encontraría que hay dos tipos muy generales de ellas:

1. Aquellas cuyas aristas se cortan sólo en los vértices (planares).

2. Las gráficas cuyas aristas se cortan también fuera de los vértices.

Dentro del primer grupo se encuentran las gráficas de las figuras I.5 a I.7 y dentro del segundo grupo se tienen a las gráficas I.4 y I.8. Sin embargo se halla que las gráficas de las figuras I.5 y I.7 tienen una forma muy peculiar a la que se le da el nombre de "árbol"; por otro lado las gráficas de las figuras I.7 y I.8, sus aristas son flechas, es decir, se encuentran orientadas a las cuales se les llamará: "gráficas dirigidas" o "digráficas".

La clasificación propuesta podría quedar ilustrada de la siguiente manera:

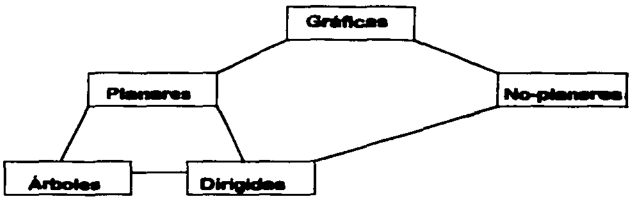


figura I.9

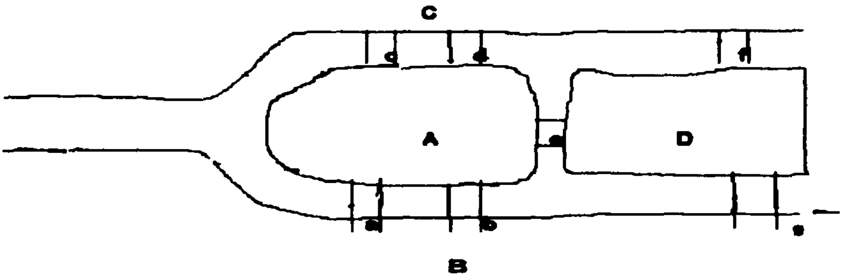
La anterior clasificación habrá que tenerla en cuenta pues servirá de punto de partida para la construcción de la teoría que se persigue a través del método científico.

I.2.1. El problema que dio origen a la Teoría de Gráficas.

La teoría de gráficas tiene mucho tiempo que nació a partir de un problema muy concreto, el cual será visto en esta sección.

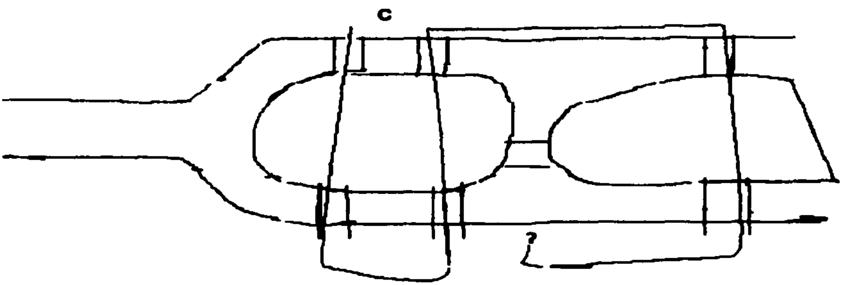
El problema que dio origen a la teoría de gráficas es el que se conoce con el nombre de: "Los puentes de Kögnigsberg" . Este problema se le propuso al matemático Leonardo Euler en el Siglo XVIII y su planteamiento parecía ser muy simple como se enuncia a continuación:

La Ciudad de Königsberg en Prusia Oriental, se encuentra asentada a las orillas del Río Pregel como se muestra en la figura I.10



Como puede observarse, la ciudad se encuentra asentada sobre cuatro partes, las cuales en la figura están señaladas por las letras mayúsculas A,B,C y D. Estas partes a su vez se encuentran unidas con siete puentes a los cuales se les pusieron letras minúsculas: a,b,c,...,g. Pues bien, el problema consistía en hacer un recorrido por los siete puentes sin pasar dos veces por un mismo puente.

Al lector se le propone hacer varios recorridos por los siete puentes, tratando de no repetir alguno, como el que se ve a continuación:

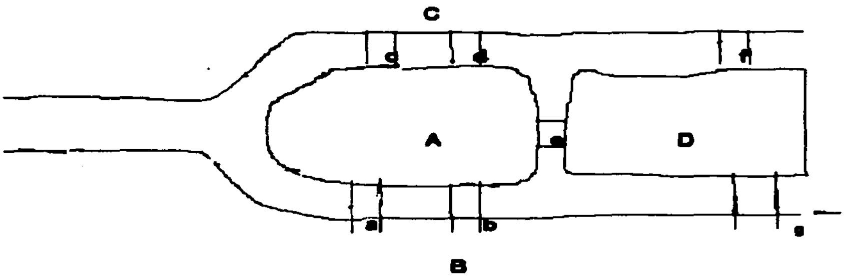


Es seguro que después de hacer varios intentos digamos que "no se puede"; sin embargo, ésta afirmación no puede tomarse como concluyente para una investigación científica, pues el problema consiste en dar los argumentos suficientes para saber si es o no posible tal recorrido.

Lo dicho en el párrafo anterior es importante si se pone uno a pensar que anteriormente hubo cosas que se decía que no podían ser como la transformación de plata en platino la cual hoy es posible realizar con ayuda del ciclotrón o como la transmisión de voces e imágenes a través del aire que hoy son perfectamente posibles, etc.

Enseguida se pregunta lo que hizo Euler para dar respuesta a este problema:

1. **Designar cada región separada por el agua con las letras mayúsculas A,B,C, D como se ve a continuación:**



2. **Sumar el número de puentes aumentando en una unidad el número resultante como vemos enseguida:**

$$N+1=7+1=8$$

3. **Escribir a continuación de cada letra de la ciudad, el número de puentes que llegan a ella:**

$$N+1=7+1=8$$

A 5
B 3
C 3
D 3

4. **Se marcan con asterisco las letras de las regiones que tienen números pares. Como se ve este paso no es posible llevarlo a cabo en este problema porque a todas las partes de la ciudad llega un número impar de puentes.**

5. Se anota la mitad de los números impares aumentados en 1 como se hace abajo:

N+1=7+1=8

A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2

Aquí el 3=(5+1)/2, 2=(3+1)/2, etc.

6. Se suman los números de la última columna y se contrasta este número con lo obtenido en el punto 2 como se ve en la siguiente tabla:

N+1=7+1=8

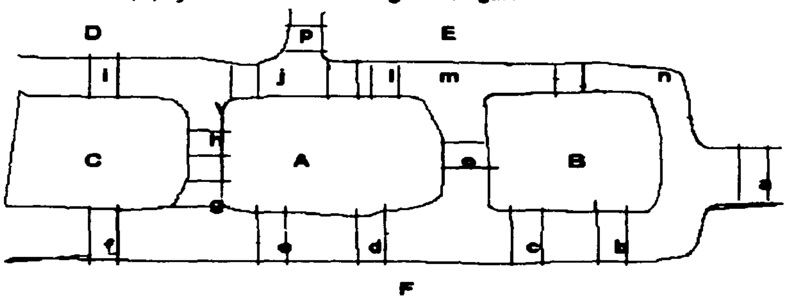
Partes de la ciudad	Puentes(P)	(P+1)/2
A	5	3
B	3	2
C	3	2
D	3	2
	Suma=	9

Aquí puede observarse que la suma obtenida (9) es mayor que lo calculado en el punto 2 que es 8.

Después de hacer otros experimentos más, habremos de establecer la posibilidad o imposibilidad de recorrer toda la ciudad sin repetir algún puente.

Como en toda investigación, Leonard Euler se planteó otros problemas como el siguiente:

Sean dos islas A y B rodeadas por ríos y con puentes que comunican a las otras partes de la ciudad: C,D,E y F como se ve en la siguiente figura:



En este problema también hubo de plantearse la cuestión de recorrer toda la ciudad sin pasar dos veces por el mismo puente siguiendo los pasos anteriores:

1. Enlistar las partes de la ciudad:

A
B
C
D
E
F

2. Calcular el número total de puentes más 1, es decir N+1=15+1=16

3 y 4. Contar el número de puentes que llegan a cada lugar señalando con asterisco las partes de la ciudad a las cuales llega un número par de puentes:

N+1=15+1

Partes de la ciudad	Puentes(P)
(*) A	8
(*) B	4
(*) C	4
D	3
E	5
(*) F	6

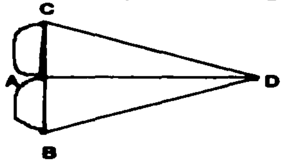
5 y 6. Agregar otra columna a la tabla anterior en donde se calcule la mitad de los números pares y/o la mitad de los impares más uno y sumando la columna agregada:

N+1=15+1=16

Partes de la Ciudad	Puentes(P)	P/2 o (P+1)/2
(*) A	8	4
(*) B	4	2
(*) C	4	2
D	3	2
E	5	3
(*) F	6	3
	Suma=	16

En este resultado observamos que N+1 es igual a la suma de la última columna de la tabla anterior y en este caso, aseguraba Euler, es posible hacer el recorrido por toda la ciudad sin pasar dos veces por un mismo puente. De ser posible, intente el lector este recorrido y verá que es cierto lo que se dice.

La gráfica del problema de los puentes de Kögnigsberg se dibuja a continuación:



Siguiendo los mismos pasos ejecutados anteriormente se arriba al resultado que ya se había obtenido y Euler concluyó: "Que no era posible el recorrido por los siete puentes en virtud de que la suma de la columna es 9 y N+1=8", es decir los números que salen, son distintos.

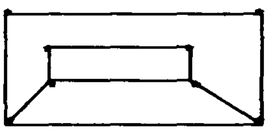
En términos de la teoría de gráficas se dice que la gráfica de los puentes de Kögnigsberg no es posible recorrerla toda sin pasar dos veces por la misma arista.

Otra gráfica importante para el desarrollo de la teoría de gráficas es la llamada: "Firma del diablo", la cual se ilustra a continuación y se pide al lector que intente recorrerla toda sin pasar dos veces por la misma arista, utilizando el método ilustrado mas arriba.

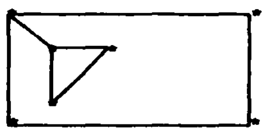
Ejercicios I.1

1.- Utilizando el método de Euler, determine cuales de las siguientes gráficas pueden recorrerse sin pasar dos veces por la misma arista

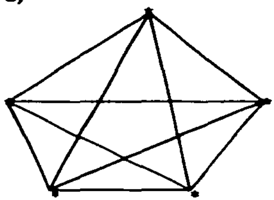
a)



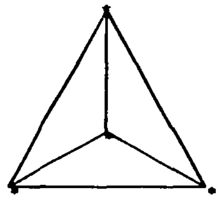
b)



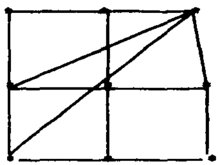
c)



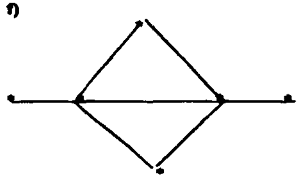
d)



e)



f)



De las gráficas anteriores que se pueden recorrer todas sin pasar dos veces por la misma arista decir:

a) ¿Cuáles comienzan su recorrido en un vértice y terminan en el mismo?.

b) ¿Cuáles inician su recorrido en un vértice y después de recorrerse todas sin pasar dos veces por la misma arista terminan en otro vértice distinto?.

c) ¿Qué características tienen <u>los vértices</u> de las gráficas que pueden recorrerse todas sin pasar dos veces por la misma arista y que características tienen los vértices de las gráficas que no pueden ser recorridas de la misma manera?.

A estas alturas que ya se ha trabajado con un buen número de gráficas, parece que faltan recursos para seguir adelante con el problema central que dice: ¿Bajo que condiciones se puede recorrer una gráfica sin pasar dos veces por la misma arista?

Sin embargo, es posible que en este punto ya se puede dar una respuesta a este problema haciendo más formal la teoría. Operando de una manera lógica podríamos empezar a definir los elementos con los que se han trabajado que son: Gráfica, valencia de un vértice, gráfica planar, gráfica no planar, gráfica dirigida, circuito, árbol, etc.

Se define entonces:

- **Gráfica : Es un conjunto de vértices y aristas.**

Esta definición es clara puesto que la gráfica está formada por elementos que se sabe intuitivamente qué son, es decir, no se necesita definir vértice ni arista puesto que se les ha llamado a los puntos y a las líneas.

- **Valencia de un vértice: Es el número de aristas que llegan a cada vértice.**

A partir de esta definición es claro que la valencia de un vértice puede ser par o impar.

- **Gráfica planar: Es aquella cuyas aristas se cortan sólo en los vértices.**
- **Gráfica no planar: Es aquella cuyas aristas, aparte de intersectarse en los vértices también se intersectan fuera de ellos(sin que las nuevas intersecciones sean vértices).**
- **Gráfica dirigida es aquella en la cual, las aristas están dirigidas.**
- **Circuito : Es aquella gráfica o parte de ella que puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista y el vértice de salida es el mismo que el de llegada.**
- **Árbol: Es aquella gráfica que no tiene circuitos.**
- **Gráfica conexa: Es aquella que consta de un sólo pedazo.**

Con todas estas definiciones es posible ya afirmar que:

Una gráfica puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista, si y solo si es conexa y todos sus vértices tienen valencia par o solo dos con valencia impar.

Esta afirmación debe dividirse a su vez en otras dos:

1.- Una gráfica puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista, si y solo si es conexa y todos sus vértices tienen valencia par.

2. - Una gráfica puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista si y solo si es conexa y tiene exactamente dos vértices impares.

Las afirmaciones a las que se han llegado ya no son definiciones; pero quizá alguien preguntará: ¿Entonces qué son? pues a estas afirmaciones se les da el nombre de teoremas. Y en la Matemática, un teorema es una afirmación que debe ser demostrada; pero podría surgir la duda para algunos: ¿ Pero con todo lo que se ha hecho no quedó ya demostrada?, la respuesta es no porque es necesario demostrarla para todas las gráficas y sólo se ha trabajado con casos particulares.

Sin embargo antes de demostrar el teorema al cual se ha arribado, todavía faltan algunos elementos que son aceptados sin demostración los cuales son llamados axiomas, éstos son afirmaciones primarias de toda teoría matemática y sobre los cuales se construye su edificio.

Aquí en el desarrollo del trabajo se ha llegado a lo siguiente:

Axioma 1.- Dos vértices determinan al menos una arista.

Axioma 2.- Una arista tiene por extremos a dos vértices.

Ya con estos elementos estamos en posibilidades de demostrar el teorema, el cual ya completo diría de la siguiente manera:

Teorema 1.- Una gráfica puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista si y solo si es conexa y tiene todos sus vértices con valencia par.

Primero se demostrará:

-Si una gráfica puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista entonces es conexa y tiene todos sus vértices con valencia par.

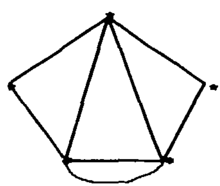
Demostración: Hay que suponer que se inicia el recorrido en un vértice cualquiera "N"; por el axioma No. 2 es posible llegar al vértice siguiente "M", llegando a "M" se puede salir por otra nueva arista ya que la suposición inicial asegura que es posible recorrer toda la gráfica sin pasar dos veces por la misma arista, esto es, cada vez que se entre a un vértice siempre se saldrá por una nueva arista y esto a su vez quiere decir que a cada entrada le corresponde una salida, en otras palabras, siempre se encontrará el par: "entrada-salida" y a la primera salida del vértice "N" corresponderá una última llegada al mismo, lo cual demuestra que la valencia de todos los vértices es par, además de que este tipo de recorridos asegura que la gráfica consta de un sólo pedazo, en otras palabras, es conexa.

En virtud de que la expresión "SI Y SOLO SI" implica la demostración del recíproco ahora será demostrado el inverso que dice:

-Si una gráfica es conexa y la valencia de sus vértices es par entonces puede recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista.

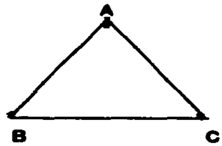
<u>Demostración</u>: Otra vez, suponer que iniciamos nuestro recorrido en un vértice arbitrario "N"; por el axioma No. 2 es posible llegar al siguiente vértice "M"; ya en él, podremos salir fácilmente hacia otro vértice que, por hipótesis ,tiene valencia par y así sucesivamente, cada vez que lleguemos a un vértice, en virtud de la conexidad de la gráfica llegaremos a otro con valencia par hasta que completemos toda la gráfica pues a la primera salida del vértice "N" corresponderá una última llegada a este, con esto, pues. se recorre toda la gráfica sin pasar dos veces por la misma arista.

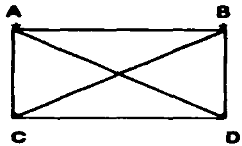
Teorema 2.- Éste teorema que se originó en la afirmación No. 2 es fácilmente demostrable utilizando una "arista falsa" que una los dos vértices con valencia impar y ya con esto, es posible recorrer toda la gráfica sin pasar dos veces por la misma arista como en el siguiente ejemplo:

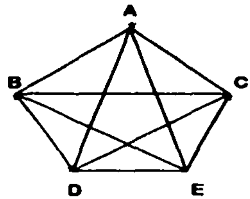


A este tipo de gráficas se les llamará Eulerianas.

Es posible seguir desarrollando la teoría de gráficas, poniendo más definiciones, por ejemplo, se puede agregar al edificio teórico algo que no se tenía hasta ahora como son las gráficas completas, en las cuales, cada uno de sus vértices está unido con todos los demás por una arista y como ejemplos se tienen a las siguientes gráficas completas:







etc.

En estas gráficas completas que son conexas, uno puede preguntarse, ¿Cuantas aristas tiene una gráfica completa de n vértices?.

Para contestar esta pregunta se procederá metodológicamente al contrario de los teoremas anteriores:

En la gráfica completa de 3 vértices , cada uno de ellos está unido con los otros dos; en la gráfica de 4 vértices cada uno de los cuatro vértices está unido con cada uno de los otros tres vértices, etc. , haciendo además la observación de que la arista AB es la misma que la arista BA para no contar dos veces el número de aristas. Con las observaciones anteriores se podrá hacer la siguiente tabla:

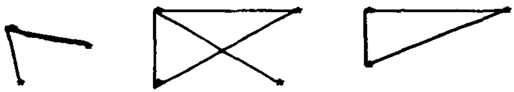
No. de vértices	No. de aristas
2	2(2-1)/2=1
3	3(3-1)/2=3
4	4(4-1)/2=6
5	5(5-1)/2=10
6	6(6-1)/2=?
7	7(7-1)/2=?
8	8(8-1)/2=?
...	
n	n(n-1)/2

Esta tabla puede escribirse en forma de teorema:

Teorema 3. Una gráfica completa de n vértices tiene $n(n-1)/2$ aristas.

La construcción de toda teoría axiomática como la que se ha logrado hasta aquí. puede desarrollarse en muchas direcciones, una de ellas es aquélla que considera los casos no conexos, es decir a las gráficas que constan de mas de un solo pedazo, y como ejemplos se presentan los siguientes:

a) 

b) 

Como puede verse, las gráficas anteriores son no-conexas, la (a) tiene dos componentes conexas, la (b) tiene tres componentes conexas y asi obtenemos más ejemplos de estos.

En este punto puede uno preguntarse lo siguiente: ¿Qué condiciones debe cumplir una gráfica para que pueda recorrerse toda sin pasar dos veces por la misma arista, levantando una sola vez el lápiz? . Aquí es claro que se deben tomar dos casos como son: el conexo y el no conexo.

También se pueden definir cosas como el llamado número ciclomático que es igual al número de aristas menos el número de vértices mas el número de componentes conexas; en símbolos se tiene:

$$Nc = Na - Nv + Ncc$$

Donde: Nc= número ciclomático,
Na= número de aristas.
Nv= número de aristas
Ncc= número de componentes conexas

Así, el número ciclomático de la gráfica (a) es igual a: $Nc=4 - 5 + 2 = 1$

El número ciclomático de la gráfica (b) es igual a : $Nc= 9 - 10 + 3 = 2$

Si uno observa un poco, el número ciclomático es igual al número de ciclos independientes, es decir, en la gráfica (a) hay un solo ciclo, en la (b) existen 2 ciclos independientes y así sucesivamente.

Ejercicios

1. Demostrar que una gráfica tiene un número par de vértices impares.

2. Demostrar que el número ciclomático de toda gráfica completa es igual a: $(n-1)(n-2)/2$.

3. Demostrar que en toda gráfica completa el número de vértices con valencia par es impar.

4. Establecer y demostrar el teorema que se ocupa del recorrido de una gráfica sin pasar dos veces por la misma arista, levantando una vez el lápiz(considerar el caso conexo y el no-conexo).

II.- GEOMETRIA

II. 1.- Antecedentes históricos

A diferencia de la teoría de gráficas, la geometría plana tiene una antigüedad de milenios, pues ya los Egipcios y Hebreos entre otros pueblos se ocuparon de ellas alcanzando grandes avances. A continuación se verán algunos de los problemas que estaban ya planteados desde mucho antes de que lo hicieran los Griegos, quienes fueron los que hicieron avanzar esta ciencia.

En diversos tratados como La Biblia se encuentran un sinnúmero de problemas, sin embargo uno de ellos llama la atención, es el de la cita encontrada en el primer libro de los reyes, capítulo 7 verso 23 que a la letra dice: "*Hizo asimismo un mar de fundición, de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo: su altura era de cinco codos, y ceñíalo alrededor un cordón de treinta codos*". Como se puede ver, ésta es ya, una aproximación al número pi y fue dada aproximadamente en el año 960 antes de nuestra era.

Otro tratado que llama la atención, es la del Papiro Rhind, hallado alrededor del año 1858 de esta era y entregado a un joven anticuario llamado A. Henry Rhind (de allí su nombre) y que contiene unos 85 problemas aritméticos, algebraicos y geométricos, los cuales revelan los avances que en la Matemática tenían los Egipcios; aquí se darán algunos ejemplos: unos de la aritmética y otros de la geometría, para ejemplificar cómo se resolvían en este pueblo de la antigüedad los problemas mencionados.

En éste Papiro Rhind se encuentra la forma primitiva de multiplicar, por ejemplo ¿como harían para obtener el producto de 17 por 6?:

1	17
\2	34
\4	68
6	102

Las diagonales colocadas a un lado de los números indican cuales suman 6 que es el multiplicador de 17.

En lo que concierne a la geometría, el área del triángulo se calculaba multiplicando la base por la altura o el lado(los estudiosos no se han puesto de acuerdo) y dividiendo el resultado entre 2.

Otro problema que llama la atención es el cálculo del área del circulo, del cual se obtiene una aproximación muy buena para el número pi. La fórmula que ellos daban era la siguiente:

$$A=(8/9\ d)^2$$

Ahora viendo la expresión ya conocida sobre el área del circulo en función del diámetro:

$$A=\pi * d^2/4$$

Igualando las dos fórmulas y despejando a π se tiene lo siguiente:

$$(8/9\ d)^2 = \pi * d^2/4$$

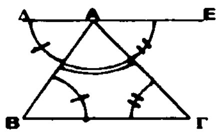
$$4(64/81) = \pi \quad \text{es decir:}$$

$$\pi = 256/81 = 3.16$$

Hay muchos otros ejemplos de problemas que aborda en Papiro Rhind, pero obviamente, no se considerarán todos, lo que sí es notable, es que se conociera el volumen de la pirámide truncada, y esto es digno de mencionarse ya que los Egipcios fueron grandes constructores de pirámides.

Matemáticos Griegos.- Los sabios de éste pueblo fueron los mas grandes de la antigüedad por los descubrimientos que en todas las ciencias lograron. Su razonamiento metódico los hizo llevar a la Geometría por ejemplo a grandes alturas y fue Euclides quien llevó a la Geometría a una gran perfección pues fue el primero en axiomatizarla.

En este punto se desarrollará una la demostración sobre el teorema que ellos demostraron sobre: *la suma de los ángulos interiores de un triángulo cualquiera es igual a dos rectos como se muestra en la siguiente figura:*



La demostración, como se verá, no ha variado desde aquel entonces (aproximadamente cinco siglos antes de nuestra era), aquí se tiene:

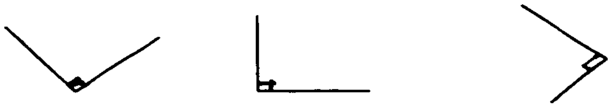
Sea el triángulo ABΓ y trácese por A una paralela ΔE a BΓ. Puesto que BΓ y ΔE son paralelas y los ángulos alterno internos son iguales, el ángulo ΔAB es igual al ángulo ABΓ y el ángulo EAΓ es igual a AΓB. Sumense BAΓ a ambos. Entonces los ángulos ΔAB, BAΓ, ΓAE equivalentes a ΔAB, BAE, que valen dos rectos, son iguales a los tres ángulos del triángulo ABΓ. Por lo tanto, los tres ángulos del triángulo son iguales a dos rectos (es decir a 180°).

Como ya se había dicho, lo más notable del trabajo de Euclides es sin duda, el haber axiomatizado la Geometría, es decir, construirla teniendo como base algunos postulados que se admiten sin demostración y que son como decía Euclides "evidentes por sí mismos", los cuales son:

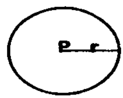
Postulado 1. Dos puntos determinan una y solo una recta:

Postulado 2. Una recta puede prolongarse indefinidamente en ambas direcciones:

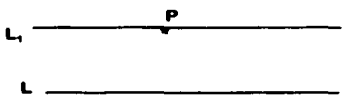
Postulado 3. Todos los ángulos rectos en el plano son iguales unos a los otros:



Postulado 4. Dado cualquier centro P y cualquier distancia r, es posible construir una circunferencia que tenga por centro a P y tenga como radio a r.



Postulado 5. Dada una recta L y un punto P exterior a ella, es posible construir una paralela L_1 a L que pase por P

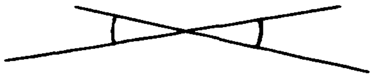


Hubo sin embargo, en el tiempo que se le dio un tratamiento axiomático a la Geometría, algunos errores sobre todo en la definición de ciertos entes geométricos como por ejemplo el punto, este se definía como algo que no tiene dimensiones, pero si se dibuja un punto, vemos que éste tiene dimensiones aunque sea muy pequeñas, lo mismo se trató de definir la línea y plano, pero estas entidades geométricas <u>no es posible definirlas.</u>

No obstante, hay que tener en cuenta algunas definiciones y propiedades que ayudarán a construir la Geometría plana que es el objeto de este trabajo.

II.2 Ángulos y tipos de ángulos

Ángulo Es la porción de plano limitada por dos líneas rectas que concurren en un punto llamado vértice.

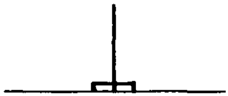


<u>Grado</u> Es la 360ava parte de un círculo.

Los ángulos se miden en grados y así se tienen algunos ángulos muy especiales que se deben considerar por ejemplo:

<u>Ángulo Recto como lo definía Euclides</u>: "Si una recta cae sobre otra de tal manera que se formen ángulos iguales, a los ángulos se les llamará rectos y a las rectas se les llama perpendiculares".

<u>Ángulo Recto</u>.- Es aquel que mide 90° como se ve a continuación:



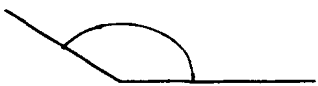
Nótese que en la definición de Euclides, se definen de una vez, el ángulo recto y las rectas perpendiculares.

<u>Ángulo llano</u> Es aquel que mide 180° o es igual la suma de dos ángulos rectos como se ve en la siguiente figura:

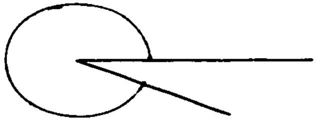
De aquí se tienen otras definiciones de ángulos como los que siguen:

<u>Ángulo agudo</u> Es aquel que mide más de 0° pero menos de 90°.

<u>Ángulo obtuso</u> Es aquel que mide más de 90° pero menos de 180° como se ve:



Ángulo cóncavo Es el ángulo que mide más de 180° pero menos de 360°.



Ejercicios

Contestar las siguientes preguntas:

1.- ¿Cuántos ángulos rectos tiene un ángulo llano?

2.- ¿Cuántos ángulos rectos tiene un ángulo de una vuelta?

3.- ¿Cuántos ángulos de 45° tiene un ángulo llano?

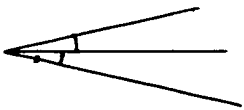
4.- ¿Cuántos ángulos llanos tiene el ángulo de una vuelta?

5.- ¿Cuánto mide en grados, medio ángulo recto?

6.- ¿Cuántos ángulos de 45° tiene medio ángulo llano?

II.2.1 Parejas de ángulos

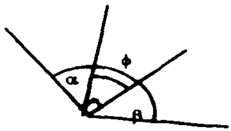
Ángulos adyacentes Son aquellos que tienen un vértice y un lado en común como se ve a continuación:



$\alpha + \beta = \beta + \delta$ de aquí restamos en ambos miembros la parte común y se tiene: $\alpha = \delta$ que era lo que se quería demostrar.

De aquí se siguen inmediatamente dos corolarios:

Corolario 1.- Dos ángulos que tienen el mismo ángulo complementario son iguales.



<u>Demostración</u>. Apoyándonos en la figura anterior se sigue que:

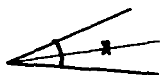
$\alpha + \phi = 90°$
$\beta + \phi = 90°$, por lo tanto:
$\alpha + \phi = \beta + \phi$, finalmente:
$\alpha = \beta$

Corolario 2.- Dos ángulos que tienen el mismo ángulo suplementario son iguales.

Para demostrar este corolario se siguen los mismos pasos que en el teorema 1 y el corolario 1, por lo tanto se deja de ejercicio al lector.

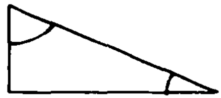
Otra definición que es útil es la siguiente:

<u>Bisectriz de un ángulo</u>. Es aquélla recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales como se observa a continuación:



__Ángulos complementarios__ Es un par de ángulos que suman 90° como se ve en la figura:

ángulos complementarios
adyacentes



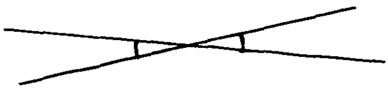
ángulos complementarios
no adyacentes

__Ángulos suplementarios__ Es un par de ángulos que suman 180°. También estos pueden ser suplementarios adyacentes y suplementarios no adyacentes como se ve a continuación:

ángulos suplementarios
adyacentes

ángulos suplementarios
no adyacentes

__Ángulos opuestos por el vértice__ Son los ángulos que tienen un vértice en común pero uno de ellos se forma con la prolongación de los lados del otro.

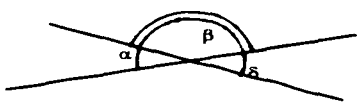


Con todas estas definiciones uno puede obtener el siguiente:

Teorema 1.- Los ángulos opuestos por el vértice son iguales:

__Aclaración__. En algunas ocasiones, para demostrar este teorema, se cae en la tentación de medir los ángulos, lo cual es incorrecto, pues cada vez que se tuvieran dos ángulos opuestos por el vértice se deberían de medir. Lo importante de la Geometría y de su estructura es el poder demostrar un teorema para cualquier pareja de ángulos opuestos por el vértice, independientemente de lo que midan.

__Demostración__. Basándose en una figura hecha al azar se encuentra lo siguiente:



Sumando las medidas $\alpha + \beta = 180°$ y

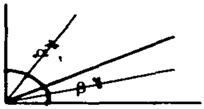
$\beta + \delta = 180°$ de donde, igualando los dos primeros miembros:

Ejercicios

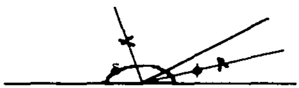
1. Si se tienen dos ángulos complementarios, uno mide x y el otro 4x, ¿cuánto miden los dos ángulos?

2. Se dibujan dos ángulos suplementarios, uno mide 7x y el otro mide 8x, ¿cuánto miden los dos ángulos?

3. En la siguiente figura se tienen dos ángulos adyacentes y complementarios α y β a los cuales se les trazan sus bisectrices. Mostrar que las bisectrices forman un ángulo de 45°.



4. Muy semejante al problema anterior; se dibujan dos ángulos adyacentes y suplementarios δ y ϕ, a los cuales se les han trazado sus bisectrices. Demostrar que estas bisectrices son perpendiculares.

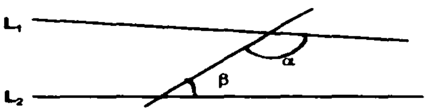


II.3 RECTAS PARALELAS

En la parte II.1, donde fue tratado el antecedente histórico de la Geometría, se mencionó del quinto postulado de Euclides, pues bien, originalmente, este postulado estaba redactado de la siguiente manera:

Sean dos rectas L_1 y L_2 en un mismo plano cortadas por una transversal, en donde consideran los ángulos α y β los cuales suman menos que dos ángulos rectos, es decir:

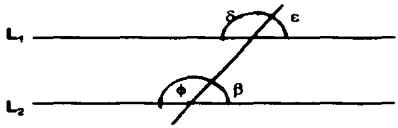
$$\alpha + \beta < 180°$$



entonces las rectas se intersectarán del lado de la transversal donde están α y β.

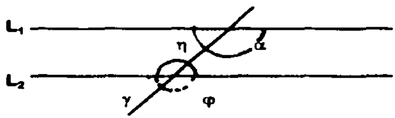
Del análisis del postulado de Euclides, puede surgir la siguiente pregunta: ¿Qué sucede si la suma de α y β es igual a dos rectos, es decir ¿que sucede con las rectas L_1 y L_2 si $\alpha + \beta = 180°$? . La respuesta: las rectas L_1 y L_2 <u>son paralelas</u>.

Si se consideran dos rectas L1 y L2 cortadas por una transversal, se forman 8 pares de ángulos, a 4 de ellos se les denominan:



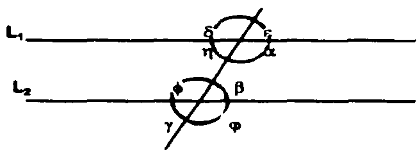
δ y ϕ se llaman ángulos correspondientes, lo mismo que ε y β .

Viendo a otros dos pares en esta misma figura:



η y γ se llaman también ángulos correspondientes lo mismo que α y φ.

Bien, pues aquí se tiene la figura completa y la denominación de los ángulos que nos faltan:



Los ángulos α y ϕ se llaman ángulos alterno-internos lo mismo que β y η.

Los ángulos δ y φ se llaman ángulos alterno externos, lo mismo que γ y ε.

En estas rectas paralelas cortadas por una transversal, se sabe que los ángulos alterno internos son iguales, tendremos la siguiente proposición:

Proposición 1. Si se tienen dos rectas cortadas por una transversal y los ángulos alterno-internos son iguales entonces los ángulos alterno-externos son iguales.

Nota: En este caso, demostrar una proposición es lo mismo que demostrar un teorema por tanto se tiene la:

<u>Demostración</u>: Suponga en la figura última que la medida α es igual a la medida ϕ y demostrará que las medidas δ y φ son iguales:

las medidas α y δ son iguales por ser los ángulos opuestos por el vértice;

las medidas ϕ y φ son iguales por ser los ángulos opuestos por el vértice;

de lo anterior tenemos la siguiente cadena de igualdades: $\delta = \alpha = \phi = \varphi$, por lo tanto:

$\delta = \varphi$ que era lo que se quería demostrar.

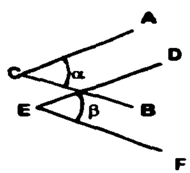
Proposición 2. Si se tienen dos rectas paralelas cortadas por una transversal y los ángulos alterno-internos son iguales, entonces los ángulos correspondientes también serán iguales.

Esta proposición se deja de ejercicio al lector

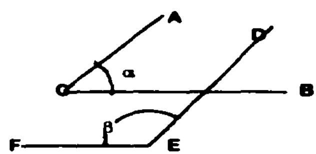
II.3.1 Ángulos con sus lados respectivamente paralelos

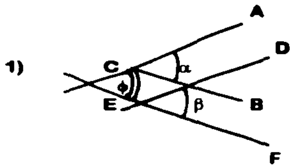
Los ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos pueden tener los siguientes aspectos principales:

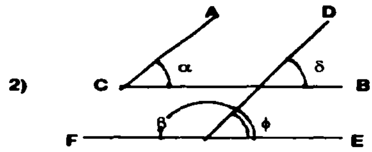
1).



2).







Para el caso No. 1 se prolongan los segmentos AC y FE obteniendo un ángulo auxiliar cuya medida es ϕ. Esta medida es igual a α ya que los segmentos de recta CB y EF son paralelos y los ángulos son correspondientes . Por la misma razón ϕ y β son iguales y por lo tanto α es igual a β.

Para el caso No. 2 se prolonga el segmento FE con una recta auxiliar formándose un ángulo auxiliar con medida ϕ, de aquí se tiene que las medidas:

$$\alpha = \delta = \phi \text{ por ser los ángulos correspondientes,}$$

por otra parte $\beta + \phi = 180°$, también $\beta + \alpha = 180°$ entonces los ángulos cuyas medidas son α y β son suplementarios.

Estas dos observaciones demuestran:

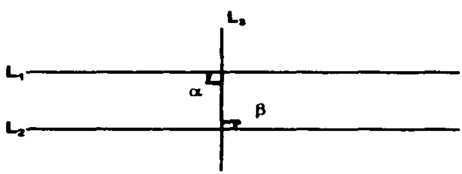
Teorema 1. Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales o suplementarios.

II.3.3 Ángulos con sus lados respectivamente perpendiculares

Como en el caso de los ángulos con sus lados respectivamente paralelos, dos ángulos pueden tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Antes de seguir adelante se demostrará el teorema siguiente:

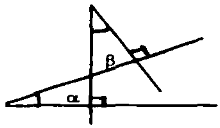
Teorema 1. Si dos líneas rectas distintas L_1 y L_2 son perpendiculares a una tercera recta L_3, entonces L_1 y L_2 son paralelas.



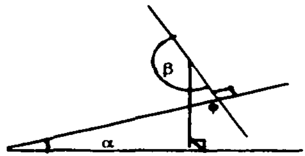
<u>Demostración</u>.- Auxiliándose en la figura anterior se observa que los ángulos alterno-internos con medidas α y β son iguales puesto que por hipótesis cada uno de ellos mide 90° ya que L_1 y L_2 son perpendiculares a L_3 . Se concluye entonces que las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

Las formas principales en que se presentan dos ángulos con sus lados respectivamente perpendiculares se muestran a continuación:

1)



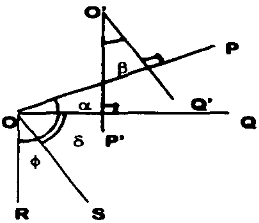
2)



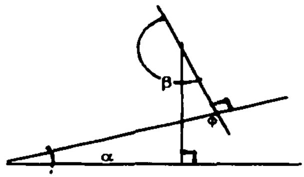
También el siguiente teorema se demuestra de manera semejante al anterior con los ángulos respectivamente paralelos y dice:

Teorema 2 Dos ángulos con sus lados respectivamente perpendiculares son iguales o suplementarios.

1)



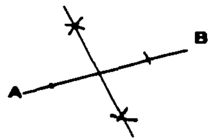
2)



<u>Demostración</u> Para el caso 1) se traza por el punto O del ángulo cuya medida es α un ángulo auxiliar ϕ de tal forma que OR es perpendicular a OQ y OS es perpendicular a OP, entonces por el teorema 1 de esta sección, los segmentos OR y O'P' son paralelos y los segmentos OS y O'Q' son también paralelos y por la proposición 1 de la sección anterior los ángulos con medidas ϕ y β son iguales. Pero también los ángulos con medidas α y ϕ son iguales por tener el mismo ángulo complementario con medida δ. Por lo tanto: los ángulos con medidas α y β son iguales que era lo que se quería demostrar.

Para el caso 2), se traza un ángulo auxiliar con medida ϕ, por el caso demostrado anteriormente, las medidas α y ϕ son iguales, pero los ángulos con medidas ϕ y β suman 180°, por lo tanto las medidas α y β suman también 180°, es decir, los ángulos en cuestión son suplementarios.

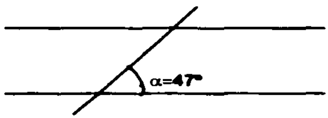
Definición: La mediatriz de un segmento de recta es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos del segmento, como se muestra a continuación:



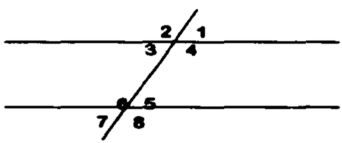
Como puede verse, la mediatriz es perpendicular al segmento y pasa por su punto medio.

Ejercicios

1. En la siguiente figura, dado la medida del ángulo α=47°, ¿cuanto miden los otros siete ángulos formados por las paralelas y la transversal?

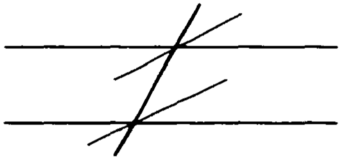


2.- Otra vez como en el problema anterior, se tienen dos rectas cortadas por una transversal en donde están numerados los ángulos que resultan, si el ángulo 1 mide la cuarta parte de l ángulo 4, encontrar las medidas de los ocho ángulos que se forman.

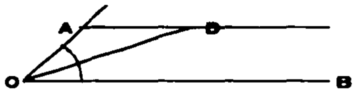


3 Demostrar la siguiente proposición: Si L_1 es paralela a L_3 y L_3 es paralela a L_2, entonces L_1 es paralela a L_2.

4 Suponga que se tienen dos rectas paralelas cortadas por una transversal y dos de sus ángulos correspondientes son iguales, demostrar que las bisectrices de esos ángulos correspondientes también son paralelas, véase la figura:

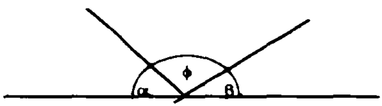


5 Sean dos paralelas cortadas por dos transversales como se muestra a continuación:

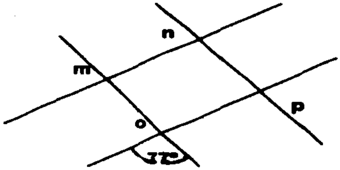


Si AO=AD , demostrar que OD es la bisectriz del ángulo AOB.

6 En la siguiente figura, el ángulo ϕ mide 90°, demostrar que los ángulos α y β son complementarios.



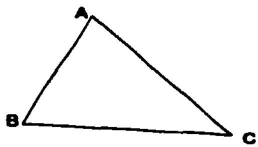
7 En la siguiente figura determinar la medida de los ángulos que se indican conociendo el ángulo que se da como dato, si las rectas son paralelas dos a dos.



II.4 Triángulos

Una de las figuras fundamentales para el estudio de la Geometría es sin duda el triángulo, pues casi todas las figuras planas que se conocen pueden triangularse y por ello es tan importante su consideración.

Definición.- Triángulo es una porción de plano limitada por tres rectas que se cortan dos a dos.



El triángulo será denotado por las letras mayúsculas que se colocan en sus vértices, en la figura anterior se tiene un triángulo ABC.

II.4.1 Clasificación de los triángulos

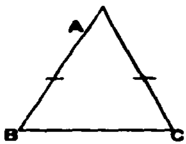
La clasificación de los triángulos se hace:

a) Según sus lados

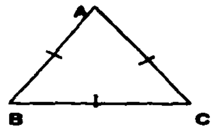
b) Según sus ángulos

Por sus lados se clasifican en :

- <u>Isósceles</u>. Son aquellos que tienen al menos dos lados iguales o congruentes. Dentro de estos se encuentran los triángulos equiláteros.

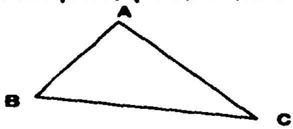


AB=AC



AB=BC=AC

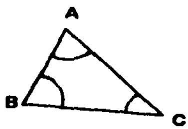
- <u>Escalenos</u> Son aquellos que tienen todos sus lados desiguales.



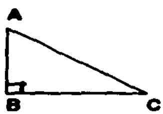
AB≠BC≠AC

Según sus ángulos se clasifican en:

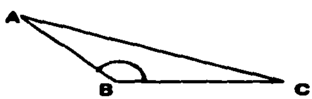
- <u>Acutángulos</u> Son aquellos que tienen todos sus ángulos agudos.



- <u>Rectángulos</u> Son aquellos que tienen un ángulo recto.



- <u>Obtusángulos</u> Son aquellos que tienen un ángulo obtuso



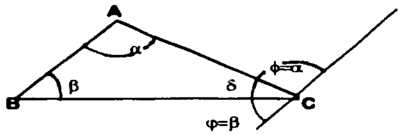
II.4.2 Algunas propiedades de los triángulos

Los triángulos tienen muchísimas propiedades, sin embargo aquí sólo se verán algunas de las más representativas, las cuales se usarán mas adelante. Estas serán vistas como enunciados de teoremas.

Teorema 1 La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

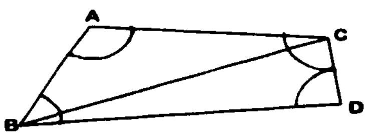
Aunque esta propiedad ya había sido demostrada en la parte histórica, se volverá a repetir la demostración:

Si se dibuja un triángulo ABC cualquiera y, suponiendo que por el punto C se dibuja una paralela a la recta AB. Se sabe que esto se puedes hacer gracias al quinto postulado de Euclides.



Con el auxilio de la figura anterior, se encuentra que las medidas: $\beta=\varphi$ y $\alpha=\phi$ por ser ángulos alterno internos, más la medida δ se completa un ángulo llano el cual, se sabe, mide 180°. Con esto se demuestra el teorema.

De este teorema se puede deducir cuánto suman los ángulos interiores de un polígono cualquiera, en efecto, viendo un cuadrilátero ABCD como el siguiente:



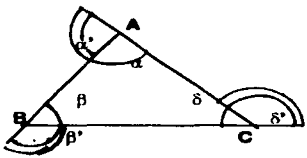
Como se ve, es posible dividir cualquier cuadrilátero en dos triángulos, cada uno de los cuales, sus ángulos internos suman 180°. Así, la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero sea igual a 360°.

Por lo visto anteriormente, cada vez que se tenga un polígono, se dive en triángulos y el número de triángulos que resulte, se multiplicará por 180° y de esta manera se tendrá la suma de los ángulos internos.

No. de lados	Suma de ángulos internos
3	(3-2)(180°)
4	(4-2)(180°)
5	(5-2)(180°)
6	?
7	?
...	...
...	...
n	(n-2)(180°)

Hasta este momento se ha visto, cuanto suman los ángulos internos de un polígono cualquiera, pero uno puede preguntarse: ¿cuanto suman los ángulos externos de un polígono cualquiera? Y, a todo esto, ¿cómo se define un ángulo externo, por ejemplo de un triángulo?.

analizando primero un triángulo al que se le han trazado los ángulos externos:



Como puede verse, un ángulo externo se forma con la prolongación de uno de los lados del ángulo interno adyacente.

Con el auxilio de la figura anterior, es posible sumar los ángulos internos con sus ángulos externos adyacentes respectivos obteniéndose la siguiente suma:

$$\alpha + \alpha' = 180°$$
$$\beta + \beta' = 180°$$
$$\delta + \delta' = 180°$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$(\alpha + \beta + \delta) + (\alpha' + \beta' + \delta') = 540°$$

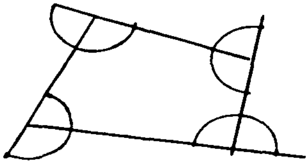
Pero se sabe que ($\alpha + \beta + \delta$) = 180°, este número se resta de ambos miembros en la igualdad anterior y resulta:

$$\alpha' + \beta' + \delta' = 360°$$

Este resultado demuestra el:

Teorema 2.- La suma de las medidas de los ángulos externos de un triángulo cualquiera es igual a: 360°.

De aquí se puede también establecer a que es igual la suma de las medidas de los ángulos externos de cualquier polígono. Por ejemplo el caso de un cuadrilátero, haciendo lo mismo que para el triángulo:



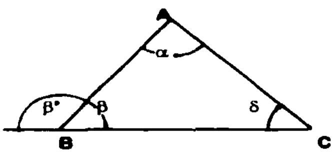
Como en el caso del triángulo se suma cada ángulo externo con su interno respectivo y se obtiene:

4(180°)= 720°, esto es lo que suman las medidas de los ángulos externos y sus internos adyacentes, pero si le resta la suma de los ángulos internos que es igual a 360° resultará:

720° - 360° = 360°, es decir "Los ángulos externos de un cuadrilátero suman 360°".

Este proceso puede seguirse con cualquier polígono encontrando que: "La suma de los ángulos externos de cualquier polígono es igual a 360°".

Relacionando ahora las medidas de los ángulos internos con los ángulos externos. Para esto, se considera la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo cualquiera y la suma de las medidas de un ángulo externo con su respectivo ángulo interno como se muestra en la siguiente figura:



Donde: $\beta + \beta' = \alpha + \beta + \delta$, porque ambos lados de la igualdad son iguales respectivamente a 180°. Restando la medida común β de cada lado de la igualdad:

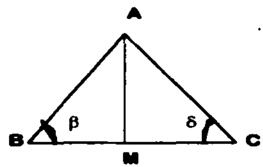
$\beta' = \alpha + \delta$, es decir, con esto se demuestra el:

Teorema 3. En todo triángulo, un ángulo externo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a el.

Uno de los teoremas más reconocidos es el de Tales de Mileto el cual dice:

Teorema 4. En todo triángulo isósceles, a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.

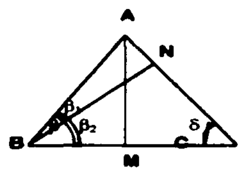
Se demuestra el primer enunciado: A lados iguales se oponen ángulos iguales. Considerar el siguiente triángulo que tiene sus dos lados iguales y al cual sele traza la perpendicular AM



Como puede verse, el segmento AM es mediatriz de BC puesto que es perpendicular a ella y pasa por su punto medio ya que AB=BC, de aquí entonces, se dobla el ángulo δ a lo largo de todo el segmento AM, se tiene que: MC coincide con BM y el segmento AC coincide con AB, es decir, el ángulo α coincide con β, demostrando el enunciado.

Ahora habrá de demostrarse que a ángulos iguales se oponen lados iguales. Para ello se utilizará el método de reducción al absurdo que consiste en negar la tesis y llegar a una contradicción:

Suponiendo que en el siguiente triángulo los ángulos α y β son iguales pero AB y AC son distintos, o bién AC>AB



Puesto que AC>AB, se toma sobre AC un punto N tal que: BN=BC, entonces, β se divide en dos ángulos β_1 y β_2 es decir:

$\beta = \beta 1 + \beta 2$, **pero como BN=BC, entonces:**
$\beta = \beta 1 + \delta$, **pero por hipótesis** $\beta = \delta$, **entonces :**
$\beta = \beta 1 + \beta > \beta$ **o bien:**
$\beta > \beta$ **, lo cual es una contradicción.**

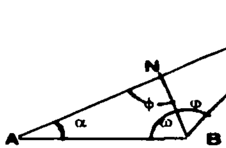
Esta contradicción cesa si se acepta que AB=AC, lo cual muestra la veracidad del enunciado.

Ahora, si se plantea el teorema en forma distinta, se tendrá el siguiente enunciado:

Teorema 5. En algún triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

Para la demostración de este teorema, se utilizará lo visto en la parte anterior respecto del triángulo isósceles.

Trazando un triángulo ABC en el que se supone que el lado AC es mayor que cualquiera de los otros dos, por ejemplo AB, como se muestra en la siguiente figura:



Si AC>AB , entonces se toma sobre AC un punto N tal que AB=AN, por lo que, se va a demostrar que el ángulo ABC es el ángulo mayor, en efecto :

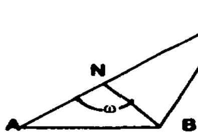
ángulo ABC= $\omega + \varphi$
ángulo ABC= $\phi + \varphi$ por ser isósceles el triangulo ABN.

Pero ϕ es un ángulo externo del triángulo BNC, por lo tanto, $\phi = \varphi + \delta$ por el teorema 3, entonces, sustituyendo el valor ϕ en la última igualdad:

ángulo ABC= $\varphi + \delta + \varphi$, por tanto:
ángulo ABC= $2\varphi + \delta > \delta$ y así
ángulo ABC > δ que es lo que se quería demostrar.

Se terminará esta sección demostrando el teorema que se conoce con el nombre de la "Desigualdad del triángulo"

Teorema 6. En todo triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.



En el triángulo ABC habrá que demostrar que AC < AB + BC. Para ello se toma sobre AC un punto N tal que NC=CB, por lo que el triángulo ACB es isósceles, por un lado, por otra parte AN<AB puesto que AB es el lado mayor del triángulo ANB pues se opone al ángulo mayor ω. Así pues:

AC=AN + NC, pero CN=CB por ser NCB isósceles, así
AC=AN + BC, pero AN<AB, por tanto:
AC=AN + BC< AB + BC y finalmente:
AC<AB + BC.

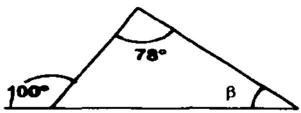
Ejercicios

1. Demostrar que un triángulo no puede tener dos ángulos rectos, o dos ángulos obtusos o un recto y un obtuso.

2. Demostrar el inverso del teorema 5, es decir: "A mayor ángulo se opone mayor lado ", usando el método de reducción al absurdo.

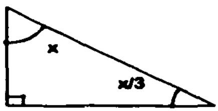
3. Demostrar que en todo triángulo rectángulo, los ángulos rectos son complementarios.

4. En la siguiente figura, calcular el ángulo que se indica:

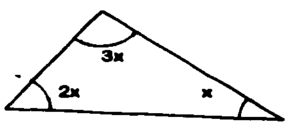


$\beta=?$

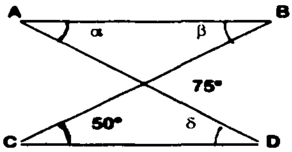
5. En el siguiente triángulo rectángulo calcular la medida de los ángulos agudos:



6. En el siguiente triángulo calcular la medida de cada uno de sus ángulos internos:

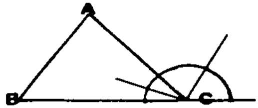


7. En la siguiente figura, el segmento AB es paralelo al segmento CD, encontrar la medida de los ángulos que se indican:

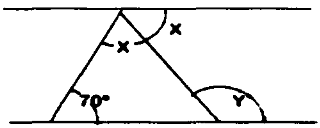


$\alpha=?$
$\beta=?$
$\delta=?$

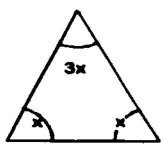
8. En el siguiente triángulo, se tiene un ángulo externo y su ángulo interior adyacente, mostrar que las bisectrices de estos ángulos son perpendiculares.



9. En la siguiente figura encontrar las medidas X y Y:



10. En el siguiente triángulo isósceles, encontrar las medidas de todos los ángulos internos:

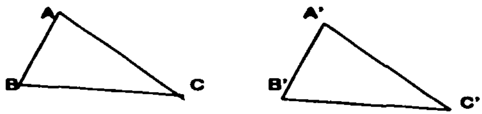


11. Demostrar que todo triángulo equilátero también es equiángulo.

II.5. Congruencia de triángulos

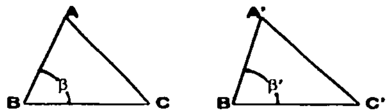
Una de las herramientas mas eficaces para muchas demostraciones en la Geometría lo constituye la igualdad o congruencia de triángulos. Así que, un cuestionamiento importante es: ¿En qué casos son iguales o congruentes dos triángulos?

<u>Primer caso</u>. Cuando tienen sus lados respectivamente iguales:



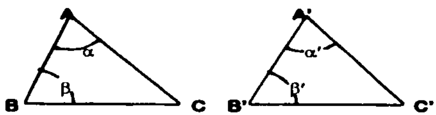
Es decir AB=A'B' , BC=B'C' y AC=A'C' ; se le llama criterio LLL, es decir: lado, lado, lado.

<u>Segundo caso</u>. Dos triángulos son iguales cuando tienen un ángulo igual, comprendido entre dos lados iguales como se muestra a continuación:



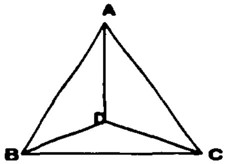
Es decir: AB=A'B' , BC=B'C' y ángulo β = ángulo β'; se le llama criterio LAL o bien: lado, ángulo, lado.

<u>Tercer caso</u>. Dos triángulos son iguales cuando tienen un lado igual adyascente a dos ángulos iguales como se ve en las siguientes figuras:



O bién: AB=A'B' , ángulo α=ángulo α' , ángulo β=ángulo β'; se le llama: ángulo, lado, ángulo.

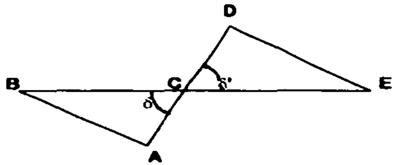
<u>Demostración 4</u>. Sean los triángulos ABC y ADC isósceles, demostrar que los triángulos ABD y CBD son iguales. Vea la figura:



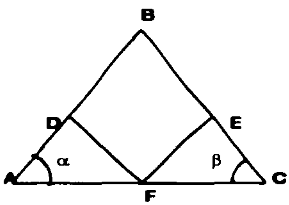
En virtud de que BD=DC por ser BDC isósceles, AB=AC por ser ABC isósceles y tener AD como lado común, los triángulos BDA y CDA son iguales por el criterio LLL.

EL siguiente ejercicio se deja al lector:

<u>Demostración 5</u>. En la siguiente figura C es el punto medio de los segmentos AD y BE, demostrar que los triángulos BAC y EDC son iguales o congruentes:



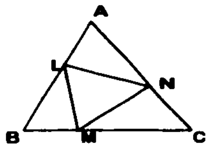
<u>Demostración 6</u>. En el siguiente triángulo isósceles: AB=BC, AD=EC y F es punto medio de AC, demostrar que los triángulos DAF y ECF son iguales:



Puesto que AD=EC son iguales, las medidas α y β son iguales por ser ABC un triángulo isósceles y AF=FC, entonces por LAL, los dos triángulos son congruentes.

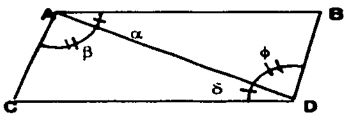
II.5.1. Algunas demostraciones usando congruencia de triángulos:

Demostración 1. Se tiene un triángulo equilátero ABC, en donde se toman distancias iguales AL=BM=CN, demostrar que el triángulo LMN resultante es también equilátero. De la siguiente figura:



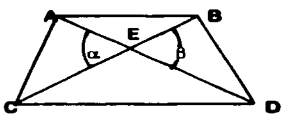
Se Demostrará que los triángulos ALN, BML y CNM son congruentes. Como AL=BM=CN y puesto que ABC es un triángulo equilátero, también LB, MC NA son iguales, pero también los ángulos en A en B y en C son iguales, pues cada uno de ellos mide 60°, entonces por el criterio LAL los triángulos son iguales, en particular, los lados: LM, MN y NL son iguales y por lo tanto el triángulo LMN es equilátero.

Demostración 2. Sea el siguiente, un paralelogramo ABCD, si se traza una diagonal, demostrar que los dos triángulos que se forman son cogruentes o iguales:



Lo primero que se nota en los triángulos ACD y DBA es que tienen el lado AD en común, por un lado, y por otro lado, los ángulos α y δ son iguales por ser ángulos alterno-internos ya que los segmentos AB y CD son paralelos y los ángulos β y ϕ son iguales por ser también ángulos alterno-internos pues los segmentos AC y BD son paralelos, entonces por el criterio ALA los dos triángulos son iguales o congruentes.

Demostración 3. Sea el siguiente trapecio isósceles ABCD en donde se han trazado las diagonales de modo que AE = EB y EC=ED, demostrar que los triángulos AEC y BED son iguales o congruentes.

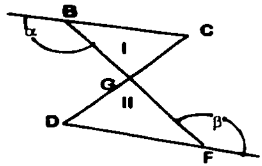


Puesto que AE=EB, EC=ED y $\alpha=\beta$ por ser opuestos por el vértice, los triángulos AEC y BED son iguales por el criterio LAL.

Ejercicios

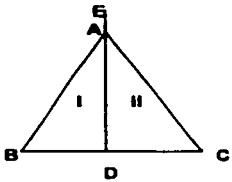
En los siguientes ejercicios establecer la igualdad o congruencia de los triángulos I y II, señalando que criterio de congruencia se utiliza:

a)



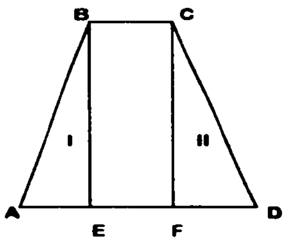
Datos: ángulo α = ángulo β
G punto medio de BF

b)



Datos: ángulo EAB=ángulo EAC
AD perpendicular a BC

c)

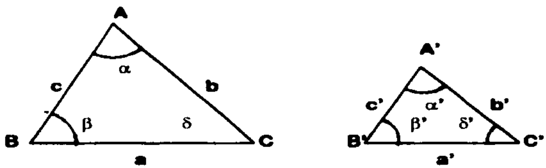


Datos: BE perpendicular a AD
CF perpendicular a AD
BE= CF y AE=EF=FD

II.6. Semejanza de triángulos

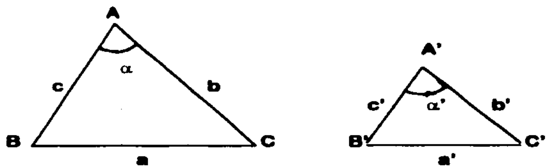
Intuitivamente se puede decir que dos triángulos son semejantes si "están hechos a escala", de la misma manera en que están fabricados los aviones, coches barcos, casas, etc. Se tiene también para los triángulos, tres casos de semejanza, que son los que se ilustrarán a continuación:

1. Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos respectivamente iguales, como se muestra enseguida:



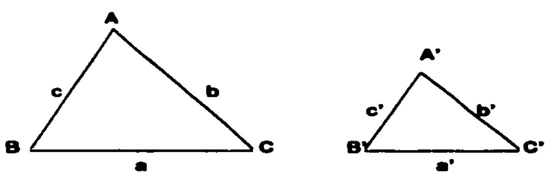
Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes pues $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\delta = \delta'$(criterio AAA, es decir: ángulo, ángulo, ángulo).

2. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual, comprendido entre dos lados proporcionales.



Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes pues $\alpha = \alpha'$ y $\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'}$ (criterio LAL, o bien: lado, ángulo lado)

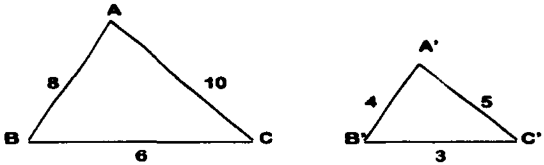
3. Dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.



Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes pues $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (criterio LLL, es decir: lado, lado, lado).

Algunas observaciones importantes respecto a la semejanza de dos triángulos:

Ejemplo 1. Observe los dos triángulos siguientes:

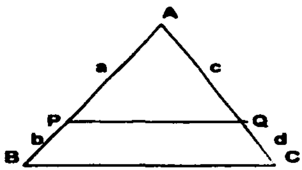


Por lo que se ve, los dos triángulos son semejantes por el hecho de que sus lados son proporcionales, es decir, al hacer las siguientes operaciones:

$$\frac{8}{4} = 2\,,\ \frac{10}{5} = 2\,,\ \frac{6}{3} = 2$$

se ve que hay una constante, esta constante es llamada "constante de proporcionalidad" y por lo visto, se obtiene, dividiendo las longitudes de los lados llamados homólogos.

Ejemplo 2. Si se dibuja un triángulo cualquiera ABC y se traza una paralela PQ a cualquiera de sus lados, se obtiene la siguiente figura:



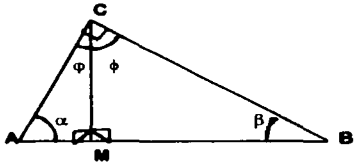
Se pueden obtener las siguientes proporciones:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ **y también:**

2. $\frac{a}{AB} = \frac{c}{AC}$ **, esto último por el hecho de que los triángulos ABC y APQ son semejantes.**

II.6.1. Algunas demostraciones usando la semejanza de triángulos.

Demostración 1.- Sea un triángulo rectángulo ACB, el cual tiene el ángulo recto en el punto C, desde el cual se traza una altura CM, los triángulos resultantes AMC y CMB son cada uno semejantes a ACB y semejantes entre si, veamos:

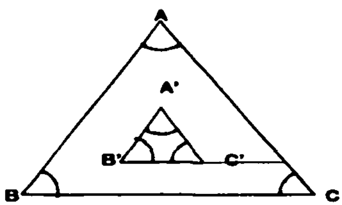


El triángulo AMC es semejante al triángulo ABC porque tienen un ángulo recto en M y en C respectivamente, tienen un ángulo común α y los ángulos φ y β son iguales porque tienen el mismo ángulo complementario ϕ .Son semejantes por el criterio AAA.

El triángulo CMB es semejante al triángulo ACB porque, como se vió anteriormente, tienen un ángulo recto en M y en C respectivamente, tienen un ángulo en común que es β y $\phi = \alpha$ por tener el mismo ángulo complementario. También son semejantes por el criterio AAA.

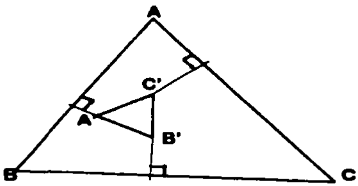
Se deja al lector demostrar que los triángulos AMC y CMB también son semejantes.

Demostración 2. Dos triángulos que tienen sus lados homólogos respectivamente paralelos, son semejantes, como se ve a continuación:



Los triángulos ABC y son semejantes puesto que tienen sus ángulos respectivamente iguales; esto se ve claramente por el hecho de que los ángulos señalados son iguales porque son correspondientes. O bien por el teorema que dice que: "Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos son iguales".

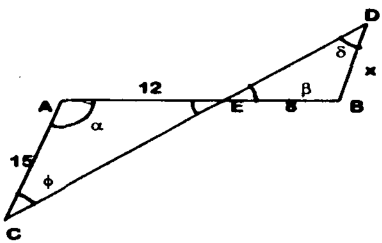
Demostración 3. Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son semejantes, como se puede observar en la siguiente figura:



Aquí también se aplica reiteradamente el teorema que dice:"Dos ángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares son iguales"; por lo que los dos triángulos ABC y A'B'C' son semejantes por AAA.

Ejemplos

1. Sean dos triángulos AEC y BED, donde AC es paralela a BD, $\alpha = \beta$, encontrar el valor de x



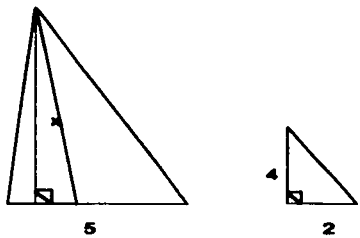
Solución, en virtud de que en los dos triángulos $\phi = \delta$ por ser alterno-internos, $\alpha = \beta$ por hipótesis y además tienen dos ángulos opuestos por el vértice, entonces por el criterio AAA los triángulos son semejantes y se cumple:

$$\frac{8}{12} = \frac{x}{15}$$

En donde, despejando a x tenemos: $x = \dfrac{8x15}{12} = 10$

2. Una torre, a cierta hora del día arroja una sombra de 6 mts. mientras, en el mismo momento, la sombra de una varilla de 4 mts. arroja una sombra de 2 mts. Encontrar la altura de la torre.

Dibujando la torre y la varilla en cuestión:

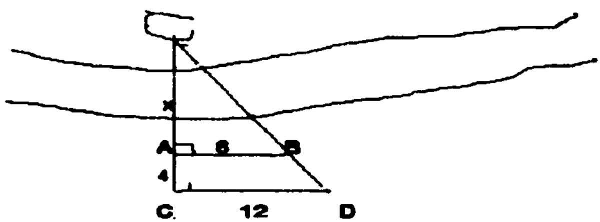


Puesto que los dos triángulos rectángulos son semejantes se cumple:

$$\frac{x}{5}=\frac{4}{2}$$

de donde, despejando a x: $x=\frac{20}{2}=10$

3. Se quiere saber cual es el ancho de una barranca inaccesible, seleccionando del otro lado un punto fijo, por ejemplo una roca y del lado accesible cuatro puntos como se muestra a continuación:



En virtud de que los dos triángulos rectángulos son semejantes tenemos la siguiente proporción:

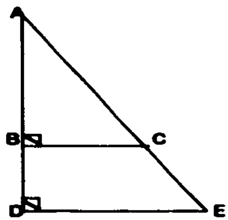
$$\frac{x}{x+4}=\frac{8}{12}$$

de donde, despejando a x: $12x=8(x+4)$, es decir: $x=8$

Ejercicios.

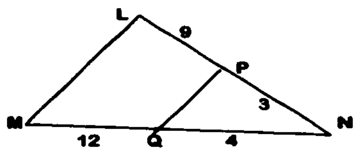
1. - En los siguientes ejercicios mostrar que el triángulos que se indican son semejantes:

a)



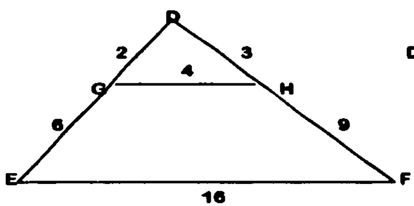
ABC y ADE

b)



LMN y PQN

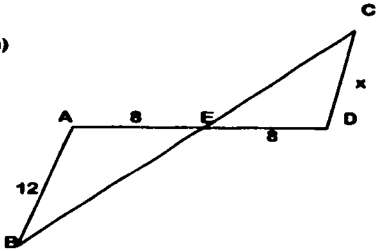
c)



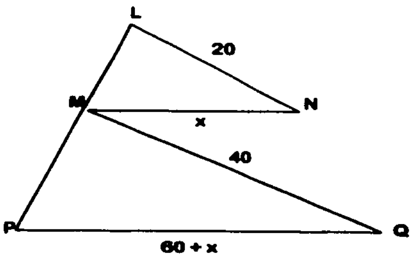
DEF y DGH

2. En los siguientes triángulos encontrar el valor de x:

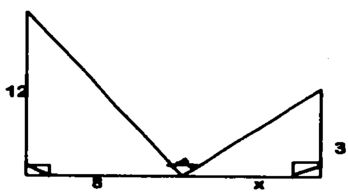
a)



b)

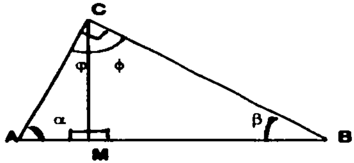


c)



II.6.2. Demostración del teorema de Pitágoras utilizando la semejanza de triángulos

Sea el triángulo rectángulo ACB, se tiene que demostrar que: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, es decir: "La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa"



Como se vio en la demostración 1, los tres triángulos que se forman, es decir el ACM, el CBM y el ACB son semejantes entre sí, por lo tanto, trabajando primero con los triángulos ACM y ABC. De sus lados homólogos se obtiene lo siguiente:

$\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{AB}$, de donde se obtiene: $AC^2 = (AM)(AB)$ 1

De la proporcionalidad de los lados de CMB y ABC:

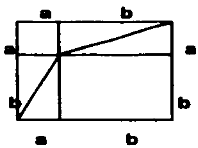
$\frac{MB}{CB} = \frac{CB}{AB}$, de donde: $CB^2 = (MB)(AB)$ 2

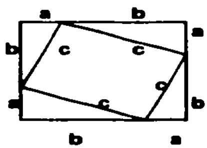
Sumando las igualdades 1 y 2: $AC^2 + CB^2 = AB(AM + MB)$, pero $AM + MB = AB$

por tanto: $AC^2 + CB^2 = (AB)(AB) = AB^2$ que era lo que se quería demostrar.

II.6.3. Otra demostración del teorema de Pitágoras

Sean dos números reales a y b Sean dos cuadrados cuya longitud de la base es igual a: $(a + b)$





Del cuadrado izquierdo se tiene: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$......................1

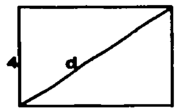
Del cuadrado derecho se tiene: $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$ 2

igualando 1 con 2, pues se trata de la misma superficie se tiene:

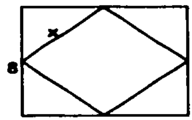
$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$, cancelando 2ab resulta: $a^2 + b^2 = c^2$

Ejercicios.

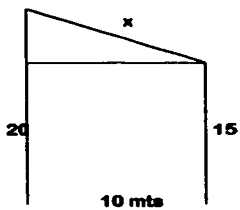
1. ¿Cuanto mide la diagonal de un cuadrado que mide 4 mts. de lado?



2. Un cuadrado se encuentra apoyado en los puntos medios de otro cuadrado de lado 8; ¿Cuanto mide el lado del cuadrado pequeño?



3. Dos postes están separados 10 mts., el primero tiene una longitud de 20 mts y el segundo mide 15 mts. ¿Cuantos metros mide un cable que los une en su parte superior?

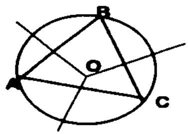


4. Calcular la altura de un triángulos isósceles si sus lados iguales miden 10 mts. cada uno y su base mide 6 mts.

II.7. Puntos y rectas notables en un triángulo

1.- Se dará otra definición de mediatriz : Mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

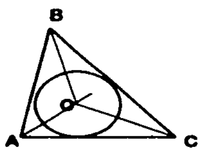
Basándose en esta definición podremos trazar las tres mediatrices de los lados de un triángulo ABC cualquiera; estas tres mediatrices se cortan en un punto llamado circuncentro por ser el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices, de la siguiente manera:



Estas mediatrices se cortan en un punto, puede verse esto porque al trazar la mediatriz de AB y la de BC, éstas se cortarán en un punto al que se le llama "O", el equidista de A y de B, pero también de B y de C, en particular equidista de A y de C, es decir, el punto "O" también pertenece a la mediatriz de AC, con lo cual se demuestra que las tres mediatrices se cortan en un sólo punto.

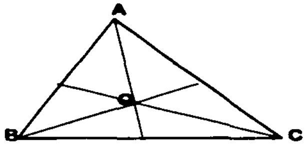
2. La definición de bisectriz de un ángulo: Bisectriz de un ángulo es el conjunto de puntos que equidistan de los lados del ángulo.

Tomando como base la definición y trazando las tres bisectrices de un triángulo, éstas se cortan en un punto llamado incentro por ser el centro de la circunferencia tangente a los tres lados del triángulo como sigue:

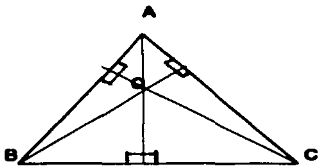


Haciendo una demostración semejante a la anterior, veremos que las bisectrices se cortan en un punto, porque si se trazan la bisectriz del ángulo en A y la bisectriz del ángulo en B, estas dos se cortan en un punto "O", el cual equidista del lado AB y del lado AC y de los lados AB y BC, esto implica en particular que equidista de los lados BC y AC, por lo cual el punto "O" también pertenece a la bisectriz del ángulo en C, lo cual demuestra que se cortan las tres bisectrices en "O".

3. La mediana de un triángulo, es aquel segmento de recta que une el vértice con el punto medio del lado opuesto. Como en los casos anteriores, es posible trazar las tres medianas de un triángulo ABC; las tres se cortarán en un punto que se llama baricentro, como se ve a continuación:



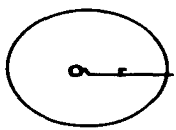
4.- La altura de un triángulo es el segmento de recta que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto. También las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto llamado ortocentro:



II.8. La circunferencia

La defincición de circunferencia es como sigue: Circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

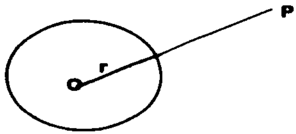
Como todos sabe y además se expresó en el postulado 4, sólo es necesario tener un punto como centro y una distancia cualquiera como radio para poder trazar sin problemas una circunferencia como la que se ve a continuación:



Considerando las posiciones mutuas entre una circunferencia y un punto P en el plano. Ya que la circunferencia divide al plano en dos regiones, una interior a la circunferencia y otra exterior a ella, puede suceder que:

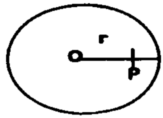
-El punto P se encuentre en el exterior de la circunferencia, es decir , sucede que:

$$OP > r$$



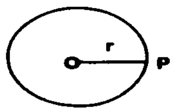
-El punto P se encuentre dentro de la circunferencia, es decir:

$$OP < r$$



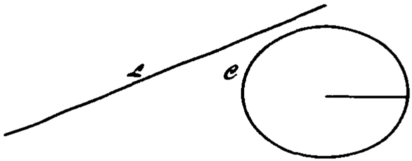
-Y como un caso especial, puede suceder que P esté en la circunferncia, en cuyo caso:

$$OP = r$$



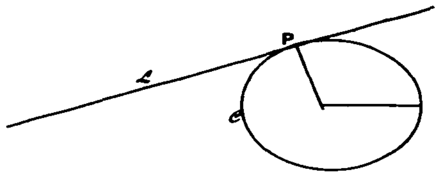
Se investigan las posiciones mutuas entre una recta y una circunferencia se tendrá que:

- La recta y la circunferencia no se intersectan, es decir que la intersección sea vacía, como se ve a continuación:



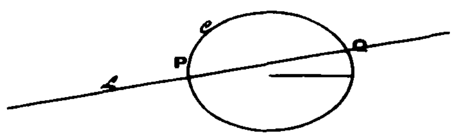
En notación de conjuntos: $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} = \emptyset$

-La recta y la circunferencia se intersectan en un punto, es decir, son tangentes:



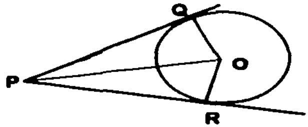
En notación de conjuntos: $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} = \{ P \}$. No debe olvidarse que la tangente a una circunferencia y el radio son perpendiculares en el punto de tangencia.

-La recta y la circunferencia se cortan en dos puntos:



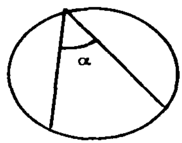
En notación de conjuntos: $\mathcal{L} \cap \mathcal{C} = \{ P,Q \}$

Un ángulo y una circunferencia pueden tener relaciones interesantes, como cuando los dos lados del ángulo son tangentes a la circunferencia, como se ve a continuación:



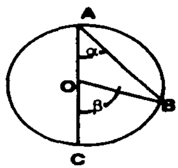
En este caso se tiene la siguiente igualdad: PQ = PR, en virtud de que los triángulos OPQ y OPR son rectángulos , tienen un lado en común y los lados OQ y OR son iguales por ser radios de la circunferencia.

Otra relación interesante entre una circunferencia y un ángulo, es aquella en la que el vértice del ángulo se encuentra en la circunferencia como se ve a continuación.



A éste se le llama ángulo inscrito, cuando el vértice del ángulo se encuentra en el centro de la circunferencia se le conoce ángulo central y tiene una relación muy importante con el ángulo inscrito que abarca el mismo arco, como dice en el siguiente teorema:
Teorema 1. Si α es un ángulo inscrito y β es un ángulo central que abarcan el mismo arco de circunferencia, entonces: $\beta = 2\alpha$.

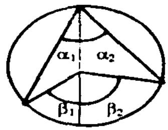
Este teorema será demostrado en dos partes. Primero considerando el ángulo inscrito, uno de cuyos lados coincide con el diámetro de la circunferencia como se muestra a continuación:



En la figura se tiene que el ángulo β es un ángulo inscrito del triángulo AOB que es isósceles por estar formado por dos radios de la circunferencia, entonces:

$\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$, que era lo que se quería demostrar.

Pero si se extiende al caso general, entonces: la figura considerada es la siguiente:



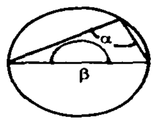
Uniendo los vértices del ángulo central y del inscrito con una línea auxiliar, se observa que los ángulos α_1 y β_1, α_2 y β_2 cumplen con las condiciones de la primera parte del teorema, entonces:

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$$

que era lo que se quería demostrar.

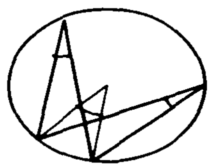
De aquí se deduce un corolario interesante,

Corolario 1. El ángulo que subtiende un diámetro mide 90°.



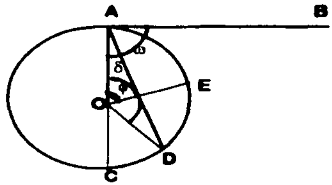
El ángulo central β mide 180°, pero como es el doble de α, entonces: $\alpha = 90°$

Corolario 2. Dos ángulos inscritos que abarcan el mismo arco de circunferencia tienen la misma medida.



En la figura se observa que los dos ángulos son iguales por tener el mismo ángulo central.

Por último se tiene un teorema referente al ángulo semiinscrito, el cual tiene un lado tangente a la circunferencia y en el punto de tangencia se traza el otro lado del ángulo, como se ve a continuación:



Teorema. El ángulo formado por una tangente y una cuerda, con vértice en el punto de contacto, es igual a la mitad del ángulo central opuesto al arco que subtiende la cuerda.

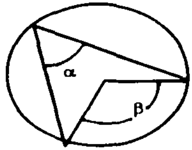
Para demostrarlo, considérese la figura anterior en donde, al ángulo central en O se le ha trazado la bisectriz OE. Se demostrará que el ángulo ϕ es igual al ángulo ω.

Los ángulos δ y ω forman un ángulo de 90°, pero también $\phi + \delta = 90°$, por lo que se da la igualdad:

$$\delta + \omega = \delta + \phi \text{ de donde } \omega = \phi$$

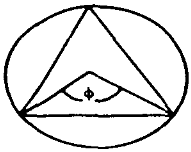
Ejercicios

1.- En la siguiente figura se d un ángulo central y su ángulo inscrito que abarcan el mismo arco:

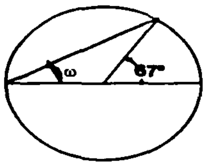


Si α = 43°, ¿cuanto mide β?.

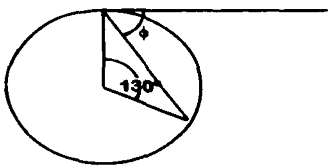
2. En la siguiente figura se da un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, ¿Cuanto mide el ángulo central ϕ ?



3. En la figura que se dibuja a continuación, encontrar cuantos grados mide el ángulo ω.



4. En la siguiente figura calcular la medida del ángulo ϕ.

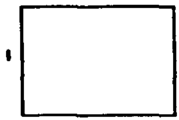


II.9. Áreas de figuras planas

Concepto de medir. Medir, es comparar una magnitud con otra que es considerada como unidad.

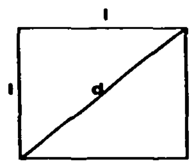
Medir un área es, conocer cuantas unidades cuadradas caben en ella, las cuales pueden ser, centímetros cuadrados, metros cuadrados, kilómetro cuadrados, etc.

Área de un cuadrado de lado l.- Como se sabe, esta área se calcula como l^2 como se ve en la figura que se da a continuación:



$A = l^2$

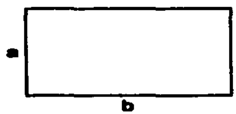
Pero, ¿que sucede si en lugar de conocer la longitud del lado se conoce la longitud de la diagonal del cuadrado?, veamos



Se tiene por el teorema de Pitágoras: $d^2 = l^2 + l^2 = 2l^2$, de donde:

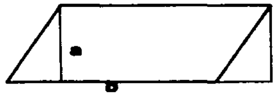
$$d^2/2 = l^2 \text{, por lo tanto } A = l^2 = d^2/2$$

<u>Área del rectángulo</u>. Ésta se calcula multiplicando la longitud de la base por la altura como se ve a continuación:



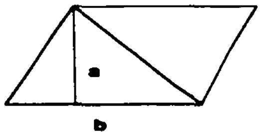
$A = bxa$

<u>Área de un paralelogramo</u>. También se calcula multiplicando la longitud de la base por su altura como se ve enseguida:



A = bxa

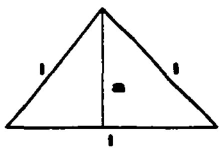
<u>Area de un triángulo</u>. Como sabemos desde la educación primaria, es decir: base por altura sobre 2. Pero ¿por que se calcula de esta manera?:



$$A = \frac{bxa}{2}$$

Por lo que se ve, para calcular el área de un triángulo, se completa con otro triángulo igual, el área de un paralelogramo, pero como ya conocemos como se calcula el área de un paralelogramo, para obtener el área requerida, simplemente se divide entre 2 esta área.

Sin embargo, es muy interesante calcular el área de un triángulo equilátero de lado l como se ve en la siguiente figura:



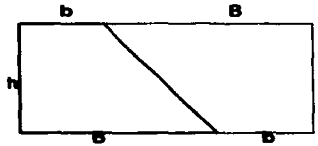
Para poder calcular esta área, primero calcularemos la longitud de la altura:

Por el teorema de Pitágoras $a^2 = l^2 - (\frac{l}{2})^2 = \frac{3}{4} l^2$ **, extrayendo raíz cuadrada:**

$a = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ **. Ahora, solamente habrá que aplicar la fórmula ya conocida por nosotros, es decir:**

Área= $\frac{\text{basexaltura}}{2}$ **y obtenido entonces:** $A = \frac{bxa}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$

<u>Área del trapecio</u>. Suponiendo que tenemos un trapecio que tiene base mayor = B ; base menor =b y altura h como se ve en la siguiente figura:

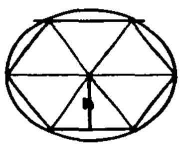


Ahora bien, para que se tenga un rectángulo, se agrega el mismo trapecio con línea punteada pero al revés como se ve en la figura anterior.

El área del rectángulo es igual a: (b + B)h pero, en virtud de que sólo interesa la mitad de dicha área, se obtiene finalmente:

$$A = \frac{(b + B)h}{2}$$

<u>Área de un polígono regular cualquiera</u>. Un polígono regular siempre es posible inscribirlo en una circunferencia y por consiguiente, triangularlo como se ve en el siguiente hexágono:

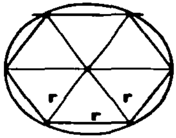


Para el hexágono inscrito, como para cualquier otro polígono, el área total, es igual a la suma de las áreas de los triángulos, es decir: Solo hay que multiplicar el *perímetro* por la altura(apotema) que es igual para todos los triángulos dividido entre 2, es decir:

$$A = \frac{p x h}{2}$$

Sin embargo, en el caso particular del *hexágono regular inscrito*, todos los triángulos que resultan son equiláteros de lado r = radio de la circunferencia, como se ve a continuación:

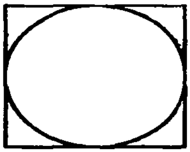
<u>Área de una circunferencia</u>.- Si la circunferencia tiene radio r, entonces su área se calcula : $A = \pi r^2$. Si su diámetro es d, entonces: $A = \pi d^2/4$



Pero como se conoce la forma de calcular el área de un triángulo equilátero, en este caso de lado r; entonces, el área total del hexágono regular inscrito quedaría como sigue:

$$A = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}r^2\right) \text{ o bien: } A = 3\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$$

<u>Algunas áreas combinadas</u>. Supóngase que se tiene un círculo de radio r = 4 inscrito en un cuadrado como se muestra a continuación:



¿Cuántas unidades cuadradas mide el área sombreada de gris?

Respuesta: Como puede verse, el área en cuestión es la diferencia entre el área del cuadrado menos la de la circunferencia, es decir:

$$A = 4^2 - \pi 2^2 = 16 - 4\pi = 3.43 \text{ unidades cuadradas}$$

Si se quisiera el área de solo una de las áreas sombreadas, se tendría que dividir el resultado anterior entre 4 y sería: 0.857 5 unidades cuadradas.

Ejercicios

1. Encontrar el área de un cuadrado:

a) cuya diagonal mide $\sqrt{8}$ unidades.

b) que tiene una circunferencia inscrita cuyo radio es r = 7 unidades.

c) que tiene una circunferencia circuscrita de radia r = 10 unidades.

d) si su perímetro es igual a 48 unidades.

2. Encontrar el área de un rectángulo:

a) si el largo mide el triple del ancho y su perímetro mide 24 unidades.

b) si el largo mide 8 unidades y la diagonal mide 10 unidades.

c) si el ancho mide 3 unidades y la diagonal 5 unidades.

3. Si el área de un cuadrado es igual a 144 u^2 encontrar:

a) la longitud del lado,

b) la longitud de su diagonal,

c) el área de circunferencia inscrita,

d) su perímetro,

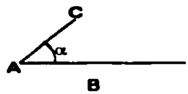
e) el radio de la circunferencia circunscrita.

APENDICE 1. Construcciones

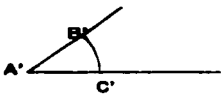
En Geometría es importante tener las nociones mínimas acerca de cómo se construyen, líneas, ángulos, triángulos, etc. Iniciaremos con los problemas mas sencillos:

1.- Construir un ángulo igual en magnitud a otro ángulo dado:

Sea el ángulo dado el siguiente:



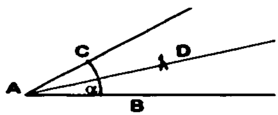
Haciendo centro en A, se traza el arco BC, el cual corta a los lados del ángulo α justamente en B y en C. A continuación, sobre una recta L se localiza el punto A' y se traza un arco B'C' haciendo centro en A' y con el radio AB=A'B'.



Después se toma la distancia BC con el compás y se traza la cuerda B'C' igual a la cuerda BC. Por último se une A' con C' y se concluye la construcción.

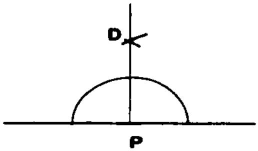
2. Bisectar un ángulo dado:

Sea un ángulo α cualquiera, como se ve a continuación:



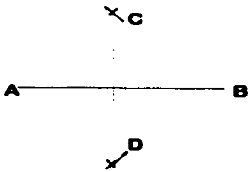
Con centro en A , se traza un arco BC, después, con centro en B y con el mismo radio AB se traza un arco al interior del ángulo, después con este mismo radio y haciendo centro en C, se corta el arco anterior en D. AD es la bisectriz pedida.

3. Construir una perpendicular a una recta dada en un punto dado P de esta.



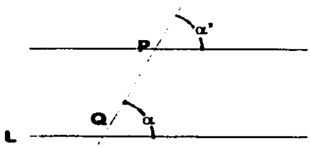
Utilizar la construcción No. 2 para trazar la bisectriz de un ángulo llano con vértice en P. Entonces PD es la perpendicular pedida.

4. Bisectar un segmento dado(construir la mediatriz del segmento y determinar su punto medio).



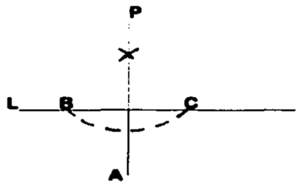
Haciendo centro en A, y abriendo el compás un poco mas de la mitad, se traza el arco CD. después con el mismo radio y haciendo centro en B se corta el arco anterior. El segmento CD es la mediatriz pedida; todos los puntos de ella equidistan de A y B, en particular el punto donde la mediatriz corta al segmento AB.

5. Dada una recta L y un punto P exterior a ella, trazar una paralela a L que pase por P



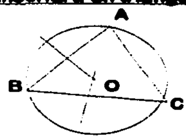
Por el punto P se traza una recta cualquiera que corte a L en Q, después con ayuda del problema 1, se traza el ángulo α' tomando como base la recta PQ y haciendo centro en P.

6. <u>Dada una recta L y un punto exterior a ella construir una perpendicular a L que pase por P.</u>



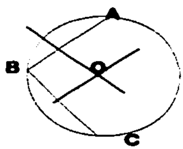
Con centro en P, se traza el arco BC, después, apoyando en B se abre el compás un poco mas de la mitad entre B y C y se traza un arco debajo de la recta L, después apoyando en C con el mismo radio se corta el arco anterior en el punto A. Finalmente, uniendo P con A, se obtiene la perpendicular deseada.

7. <u>Construir una circunferencia circunscrita a un triángulo ABC cualquiera</u>:



Se trazan la mediatrices de los segmentos AB y BC y al cortarse en el punto O, este será el centro de la circunferencia que pasa por los puntos A, B y C.

8. <u>Dada una circunferencia, encontrar el centro de la misma</u>.



En la circunferencia, se localizan tres puntos cualesquiera y después se trazan la mediatrices de los segmentos AB y BC. Al cortarse en el punto O, éste es el centro de la circunferencia.

Bibliografía

Ore, O. Teoría y aplicaciones de los gráficos. Biblioteca contemporánea de matemáticas. Norma. Colombia. 1963.

López de M. Santiago. Teoría de gráficas. ANUIES. México. 1973.

Flament Claude. Teoría de grafos y estructuras de grupo. Estructura y grupo. Tecnos. España. 1972.

Eves Howard. Estudio de las Geometrías. UTEHA. México. 1969.

AAboe Asger. Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo. Norma. Colombia. 1964:

Landaverde Felipe de J. Curso de Geometría. Progreso. México. 1970.

Wentworth J. Smith D. Geometría plana y del espacio. Porrúa. México. 1997.

Zubieta R. Fco. Geometría Razonada y Trigonometría. México.

Euclides. Elementos de Geometría I-II y III-V. Scriptorum Graecorum et Romanorum. UNAM. México. 1992.

Guzmán Abelardo. Geometría y Trigonometría. Cultural. México. 1986

Rich Barnett. Teoría y Problemas de Geometría Plana. Schaum. Mc. Graw-Hill. México. 1971.