

01174
9



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

FACULTAD DE INGENIERÍA

**CARACTERIZACIÓN GEOMÉTRICA DE MEDIOS
FRACTURADOS-VUGULARES A TRAVÉS DEL
FACTOR DE RESISTIVIDAD**

**TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA PETROLERA**

**PRESENTA
ADÁN MERCADO DÍAZ**

**TUTORES: Dr. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO
Fís. CANDELARIO PÉREZ ROSALES**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mi esposa Mónica Irlanda:

Por su constante apoyo, comprensión y cariño.

A mis hijos Yair Adán e Isaac Alberto:

Principales impulsores de mi superación personal y profesional.

Por ser ejemplo de fortaleza y sensibilidad, les dedico con orgullo este trabajo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A mis padres Rafael y Alicia:

Porque somos esencia de su ser persistente, perseverante y entusiasta.

A mis hermanos Rafael, Alma Rosa, Israel, Rubén y Úlises:

Por la amistad, apoyo y cariño que nos brindamos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos

Al Fis. Candelario Pérez Rosales y al Dr. Fernando Samaniego Verduzco por su constante apoyo, confianza, dirección y comentarios atinados en el trabajo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CONTENIDO

	Resumen	3
CAPÍTULO I	Introducción	4
CAPÍTULO II	Conducción Eléctrica en Medios Porosos: Estado del Arte	9
	2.1 Medios Homogéneos	10
	2.1.1 Relaciones empíricas	10
	2.1.2 Formulaciones teóricas	13
	2.2 Medios Fracturados	17
CAPÍTULO III	Conducción Eléctrica en Modelos Fracturados – Vugulares	24
	3.1 Desarrollos Teóricos	26
	3.2 Trabajo Experimental	37
	3.3 Validación del Modelo Analítico	47
CAPÍTULO IV	Generalización de las Expresiones Analíticas	51
	4.1 Formulaciones para rocas reales	52
	4.2 Métodos estadísticos como una solución para generalizar el modelo teórico	59
	4.3 Metodología	65

4.4 Programa de cómputo para la evaluación de la porosidad de fractura y de vugulo	67
CAPÍTULO V Aplicación a un Caso de Campo	70
5.1 Establecimiento de la aproximación física de la roca fracturada-vugular	71
5.2 Cuantificación de la porosidad de vugulo y de fractura del pozo 2079 del Complejo Cantarell	74
CAPÍTULO VI Análisis y Discusión de Resultados	81
CAPÍTULO VII Conclusiones	87
Nomenclatura	90
Referencias	93
Apéndice 1 Deducción de la Ecuación de Maxwell Tridimensional	98
Apéndice 2 Deducción Modificada de la Ecuación de Maxwell Bidimensional	104

Resumen

En este trabajo, se presenta un estudio teórico-experimental sobre la caracterización geométrica de medios fracturados-vugulares, con la idea de establecer nuevas formulaciones que relacionen el factor de resistividad con las porosidades de fractura y vugular. Con objeto de tener un control riguroso y simplificar el tratamiento analítico se considerará que un medio fracturado vugular se puede idealizar por un arreglo de cubos con cavidades hemisféricas en las caras de los cubos para representar los vúgulos. Cuando el espacio poroso está saturado con un fluido conductor, por ejemplo un electrolito, los vúgulos, por su gran volumen relativo, se constituyen en zonas de muy alta conductividad eléctrica en comparación con las fracturas que, en general, tienen una apertura muy estrecha. En los experimentos se observa que salvo algunos puntos experimentales que no se ajustan a las curvas teóricas, se considera que, en general, el acuerdo entre teoría y experimento es lo suficientemente bueno para concluir que las hipótesis consideradas en los desarrollos teóricos fueron las adecuadas. Los desarrollos teóricos conducen a una relación que expresa el factor de resistividad como el producto de dos factores; uno de ellos depende de la porosidad vugular y el otro de la porosidad de fractura. Además, se pueden manipular las expresiones analíticas para calcular la porosidad de fractura y de vugulo, a partir de información de campo. Se propone una metodología sencilla para calcular la porosidad de fractura y de vugulo. Las ventajas de la técnica propuesta con respecto a otros métodos son las siguientes: (1) calcula la porosidad vugular y de fractura, (2) los datos de entrada son fáciles de obtener, (3) No intervienen en la metodología el conocimiento empírico, por lo que los desarrollos presentados son totalmente analíticos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO I

Introducción

Las características de la roca que constituye un yacimiento dependen de su estado físico y de las diferentes transformaciones que ha experimentado. Algunas son del tipo intergranular, como la arenisca, que tiene una porosidad original o primaria, la cual se genera durante la formación de la roca. Los yacimientos continuos, con porosidad primaria, que tienen variaciones suaves en las propiedades de la roca se llaman yacimientos homogéneos. Por otra parte, la roca puede tener discontinuidades debidas a la existencia de fracturas naturales causadas por movimientos tectónicos, en cuyo caso se tiene un yacimiento naturalmente fracturado (YNF), el cual se caracteriza por manifestar doble porosidad: por un lado, presenta porosidad primaria asociada a los bloques de la roca y, por el otro, manifiesta porosidad secundaria, originada después a la formación de la roca. Este último tipo de yacimiento se caracteriza por su alta productividad. Normalmente, su producción por pozo es del orden de miles de barriles por día. Yacimientos de este tipo se presentan con frecuencia en Arabia Saudita, Irán, Iraq, México, Omán y Siria. Se considera que a nivel mundial el 20 % de las reservas de petróleo se encuentran en YNF.

En el caso de México, las áreas petroleras principales están en la Sonda de Campeche y en los estados de Chiapas y Tabasco, de las que se obtiene más del

Introducción

90% de la producción diaria de hidrocarburos. En esta zona los yacimientos están constituidos por rocas carbonatadas que presentan un alto grado de fracturamiento. Se estima que en esas áreas se localiza el 70 % de las reservas del país. Por esta razón, el desarrollo de técnicas y metodologías para caracterizar las formaciones fracturadas es tan importante para la industria petrolera nacional.

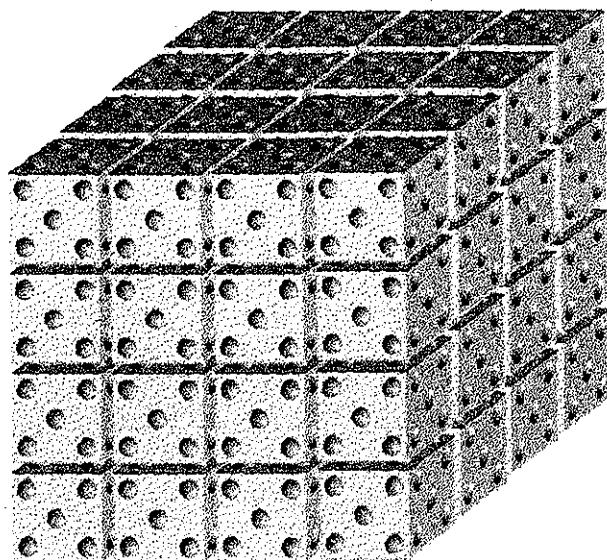
Existe evidencia de que la industria petrolera aún no dispone de los desarrollos teóricos ni experimentales para caracterizar adecuadamente a los yacimientos naturalmente fracturados, debido a la incertidumbre que existe en relación a sus propiedades dinámico-estructurales.

Muchos de los YNF son, además, vugulares, lo que los convierte en sistemas sumamente complejos, difíciles de someterse a estudios analíticos bien fundamentados. En la literatura especializada, prácticamente no hay antecedentes de estudios hechos a profundidad en este tema.

En este trabajo, se presenta un estudio teórico-experimental relacionado con la caracterización geométrica de medios fracturados-vugulares, con la idea de establecer nuevas formulaciones que relacionen el factor de resistividad con las porosidades de fractura y vugular, y así apoyar a la industria petrolera en la interpretación de registros geofísicos de pozo. Para tener un control riguroso de los parámetros geométricos, un medio fracturado-vugular se idealiza por medio del modelo de Towle (1962) o de Warren y Root (1963), el cual consiste en un arreglo

Capítulo I

de cubos con cavidades hemisféricas (vúgulos) que se perforan en sus caras de los cubos. En este tipo de sistema, los cubos representan los bloques matriciales, los espacios entre bloques representan fracturas, y las cavidades hemisféricas representan los vúgulos.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 1.1 Idealización de un medio fracturado-vugular a través de un arreglo de cubos, con cavidades hemisféricas en sus caras.

El sistema descrito puede dividirse en celdas unitarias idénticas, donde cada una tiene las mismas propiedades de flujo de corriente eléctrica, de modo que es posible usar una sola celda para estudiar el comportamiento de la corriente eléctrica a través de todo el sistema.

Los resultados obtenidos indican que los medios fracturados-vugulares tienen propiedades de flujo que difieren notablemente de las propiedades de los medios homogéneos y de los medios fracturados que no contienen vúgulos. En

Introducción

este trabajo se analizan con detalle esas propiedades y se indican cómo pueden aprovecharse en la interpretación de registros eléctricos de pozo.

En el Capítulo II se describen algunos trabajos, tanto experimentales como teóricos, que estudian la relación factor de resistividad-porosidad, para medios homogéneos y fracturados. El Capítulo III contiene una parte teórica y una parte experimental. En la parte teórica, se presentan formulaciones analíticas que relacionan el factor de resistividad con la porosidad de fractura y la porosidad vugular, para el caso del modelo idealizado mencionado previamente, y en la parte experimental se presentan resultados de laboratorio que fueron obtenidos con la ayuda de una celda de resistividad, diseñada especialmente para estudiar factores de resistividad de medios fracturados-vugulares. Los valores experimentales así obtenidos fueron utilizados para probar la validez de los desarrollos teóricos.

En el Capítulo IV, se manipulan las expresiones analíticas obtenidas, en esta tesis de tal manera que se pueda contar con información suficiente de campo para tener mayor control sobre la función que describe la porosidad; de esta forma se generaliza el modelo y se hace posible su aplicación a la caracterización geométrica de rocas fracturadas-vugulares. A su vez, se describen los métodos estadístico-matemáticos que se pueden utilizar para evaluar la porosidad de fractura y vugular, y así, plantear la metodología para automatizar los cálculos y reducir el tiempo de evaluación, a través de un programa de cómputo en Mathematica. Para ejemplificar y dar mayor claridad a las ideas desarrolladas, en

Capítulo I

el Capítulo V se hace una aplicación a la interpretación de registros eléctricos del pozo 2079 del Complejo Cantarell de la Región Marina.

En el Capítulo VI, se analizan los experimentos descritos y se observa que, salvo algunos puntos experimentales, en general, la concordancia entre teoría y experimentación es lo suficientemente bueno para concluir que las hipótesis hechas en los desarrollos teóricos fueron las adecuadas.

Por otra parte, si la porosidad vugular es diferente de cero, el número de vugulos permitido en el sistema o en la formación disminuye si la porosidad vugular crece, esto se cumple para un mismo valor del factor de resistividad.

Por último, en el Capítulo VII, se concluye que el factor de resistividad total de un medio fracturado vugular se puede expresar como el producto del factor de resistividad asociado a las fracturas (F_f), y un factor de resistividad debido a la presencia de vugulos (F_v). Además, Para una misma porosidad vugular, un medio fracturado vugular es mejor conductor a medida que los vugulos son más pequeños.

Las expresiones analíticas para calcular la porosidad de fractura y de vugulo, se pueden manipular a partir de información de campo. Se propone una metodología sencilla para calcular la porosidad de fractura y de vugulo. Las ventajas de la técnica propuesta con respecto a otros métodos son: (a) la

Introducción

porosidad vugular y de fractura se calcula facilmente;(b) los datos necesarios son fáciles de obtener; (c) no interviene en la metodología el conocimiento empírico, por lo que los desarrollos son totalmente analíticos.

CAPITULO II

Conducción Eléctrica en Medios Porosos: Estado del Arte

Las propiedades eléctricas de una roca dependen de la geometría de los espacios de los poros y los fluidos con que estos espacios están saturados. Los fluidos de los yacimientos petrolíferos son aceite, gas y agua; los dos primeros fluidos no son conductores. Por lo tanto, la corriente eléctrica en la roca del yacimiento es conducida por el agua a través del movimiento de iones. La conductividad eléctrica es una medida de la facilidad con que los electrones fluyen a lo largo de los materiales. La resistividad de los materiales es el recíproco de la conductividad y es más frecuente que aquélla se utilice para caracterizar la roca de los yacimientos.

El estudio de la resistividad de la formación de los yacimientos cuando todos los poros están saturados con agua es de interés, debido a que es un factor importante en la determinación y detección de las reservas de hidrocarburos a partir del uso de registros eléctricos. Además se han desarrollado correlaciones entre las propiedades eléctricas y la geometría interna del espacio poroso de la roca, que se pueden usar para caracterizar las formaciones de los yacimientos. Por ejemplo, el factor de resistividad, que se define como la resistividad de la roca saturada con algún electrolito a la resistividad de este mismo, es una función de la

Capítulo II

porosidad y la geometría interna del sistema; por esta razón es tan importante conocer el valor del factor de resistividad para caracterizar la geometría interna de la roca.

Por otra parte, se ha observado que la conductividad eléctrica de un sistema fracturado tiene un comportamiento diferente al de un sistema homogéneo. Así, en este capítulo se describen los principales trabajos realizados hasta la fecha en relación a la descripción de la geometría interna de la roca utilizando el factor de resistividad, para medios homogéneos y naturalmente fracturados.

2.1 Medios Homogéneos

2.1.1 Relaciones Empíricas

El concepto fundamental a considerar en las propiedades eléctricas de las rocas es el factor de resistividad. Este factor lo define Archie (1942) de la forma siguiente:

$$F = \frac{\rho_r}{\rho_w} \quad (2.1)$$

donde ρ_r es la resistividad de la roca saturada con agua de resistividad ρ_w .

Archie fue el primer investigador que estudió sistemáticamente en forma empírica, la relación entre factor de resistividad y la porosidad de las rocas. Del

análisis de un gran número de muestras encontró que para porosidades comprendidas entre 0.10 y 0.40, la mejor recta que se ajusta a los datos experimentales en una gráfica log-log conduce a la siguiente expresión:

$$F = \phi^{-m} \quad (2.2)$$

Este autor encontró que para arenas consolidadas en el laboratorio, m variaba de 1.8 a 2.0, y que para arenas limpias no consolidadas el valor de m era de aproximadamente 1.3. De estos resultados Archie infirió que m es un parámetro que depende del grado de cementación de la roca y, en consecuencia, se estableció que el calificativo más adecuado para esta variable es el de *exponente de cementación*.

Winsauer y cols. (1952) concluyeron que la Ec. 2.2 sólo puede dar resultados aproximados. Estos autores sugirieron que una fórmula más general, que se ajusta mejor a la realidad, es

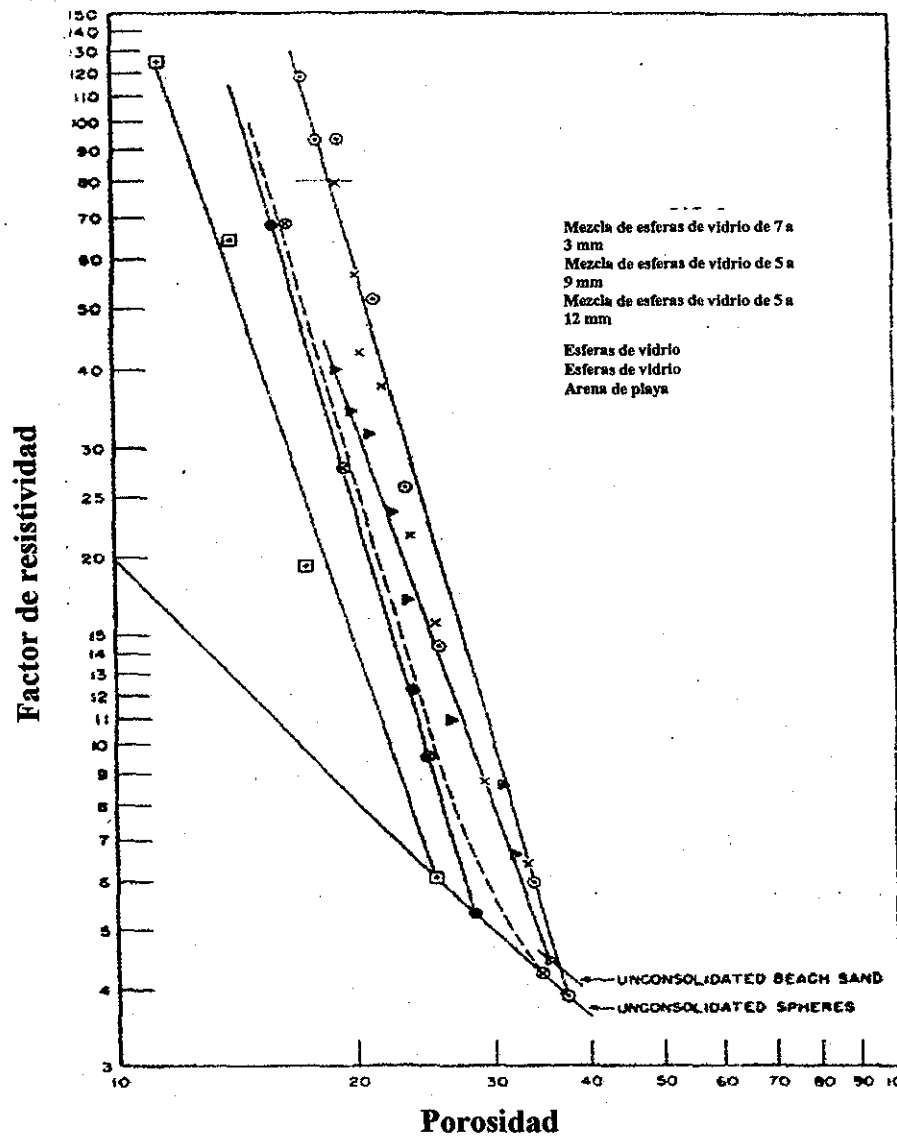
$$F = a\phi^{-m} \quad (2.3)$$

Para el caso de arenas naturales, experimentalmente se ha encontrado que los valores aproximados de a y m son 0.62 y 2.15, respectivamente. Cuando se usan estos valores en la Ec. 2.3, ésta toma el nombre de fórmula de Humble.

Finalmente, Wyllie y Gregory (1953) investigaron la influencia del tamaño de grano y el grado de cementación sobre el factor de formación en empacamientos consolidados y no consolidados, los granos de estos empacamientos tenían diferentes geometrías, como son esferas, cubos y cilindros. En la Fig. 2.1 se

Capítulo II

observan los efectos de cementación sobre el factor de resistividad en empacamientos que varían su porosidad y la geometría de los granos.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.1 Efectos de la cementación artificial en la relación factor de resistividad-porosidad de arenas consolidadas y no consolidadas (Wyllie y Gregory, 1953).

Wyllie y Gregory concluyeron que la forma general de la relación entre factor de resistividad y porosidad es:

$$F = C \phi^{-m}, \tag{2.4}$$

donde m es una constante dependiente de la cementación de la formación y C es una constante que depende de la porosidad de la matriz no consolidada, es decir, en condiciones previas a la cementación. Como se observa, Wyllie y Gregory confirmaron la validez de la Ec 2.3, que considera la relación de Archie como un caso particular.

La bibliografía que ha sido citada en esta sección no es exhaustiva. Aquí solo se han mencionado aquellos trabajos más sobresalientes de tipo experimental que tiene alguna conexión directa con la obtención de expresiones empíricas $F(\phi)$ a partir del análisis estadístico de datos experimentales del factor de resistividad y porosidad.

2.1.2 Formulaciones Teóricas

A finales del siglo pasado, Maxwell (1954) desarrolló el primer estudio sobre el fenómeno de conducción eléctrica a través de un medio homogéneo con dos fases de conducción, para lo cual utilizó un sistema constituido por esferas dieléctricas sólidas, dispersas y suspendidas en un medio conductor (electrolito). Con esta idealización obtuvo como resultado la expresión siguiente:

$$\sigma_r = \frac{2\sigma_w\phi}{3-\phi}, \quad (2.5)$$

donde, σ_r es la conductividad de la roca, y σ_w la conductividad del agua.

Capítulo II

A partir de esta relación y haciendo uso de la resistividad, que es el inverso de la conductividad, se deduce la llamada ecuación de Maxwell que en términos del factor de formación F se puede expresar como:

$$F = \frac{3 - \phi}{2\phi} \quad (2.6)$$

Su aplicación está limitada a sistemas idealizados de geometría sencilla y no puede emplearse para valores pequeños de porosidad, ya que una de las condiciones impuestas en su deducción es que la separación entre las esferas es tal que no tienen influencia las unas sobre las otras, es decir, que no se presentan fenómenos de interferencia. Sin embargo, debido a que las ideas de Maxwell desempeñan un papel fundamental en la teoría de la conducción eléctrica en medios fracturados vulgares, en el Apéndice A1 se presenta en detalle la deducción de la Ec. 2.6 a partir de principio físicos.

Posteriormente, en un desarrollo teórico, Fricke (1924) generalizó la ecuación de Maxwell para hacerla aplicable a sistemas dispersos de esferoides homogéneos en un medio infinito. Este autor encontró que el factor de resistividad se incrementa con el aumento de la irregularidad de los granos de la roca, planteándolo de forma analítica en la relación siguiente:

$$F = \frac{(x + 1) - \phi}{x\phi} \quad (2.7)$$

donde $x = 2$ para esferas y menor que 2 para esferoides.

Esta ecuación muestra que, para cualquier valor de porosidad, ϕ , el factor de resistividad es mínimo para esferas y aumenta al incrementar la irregularidad de los granos de la roca.

En 1976, Pérez-Rosales hizo notar que la fórmula de Maxwell para esferas y la ecuación de Fricke para elipsoides son hipérbolas equiláteras de la forma:

$$F = 1 + \frac{P(1-\phi)}{\phi} \quad (2.8)$$

donde P es un parámetro que depende de la geometría interna del medio poroso, cuyo valor aumenta conforme la esfericidad de las partículas aumenta. Posteriormente, en 1982, el mismo autor generalizó la Ec.2.8 mediante las siguientes consideraciones:

1. Debido a la complejidad e irregularidad de la geometría interna de una roca, existen entrapamientos o zonas de estancamiento por donde no circulan la corriente eléctrica. En consecuencia, la porosidad total se puede dividir en dos partes: una porosidad de flujo, ϕ_f , asociadas en las zonas conductoras, y una porosidad de estancamiento, ϕ_s , asociadas con las trampas; esto es

$$\phi = \phi_f + \phi_s \quad (2.9)$$

2. Teniendo en cuenta condiciones de frontera extremas, se postula que la relación entre porosidad de flujo y porosidad total es de la forma

$$\phi_f = \phi^m, \quad (2.10)$$

donde $m \geq 1$.

3. Se postula también que la Ec. 2.8 se puede generalizar para hacerla aplicable a otros sistemas, incluidas las rocas naturales, sustituyendo la porosidad total por la porosidad de flujo, y el parámetro P por un nuevo parámetro geométrico G .

Con los cambios propuestos en el párrafo anterior, la Ec. 2.8 toma la forma

$$F = 1 + \frac{G(1 - \phi_f)}{\phi_f} \quad (2.11)$$

Sustituyendo la Ec. 2.10 en la Ec 2.11 se llega a

$$F_R = 1 + G(\phi^{-m} - 1), \quad (2.12)$$

que es la ecuación general que relaciona el factor de resistividad con la porosidad total, y donde intervienen los parámetros G y m cuyos valores dependen del tipo de medio poroso considerado.

Mendoza (1985,1996) ha estudiado y aplicado exitosamente la Ec. 2.12 a una variedad de medios porosos, tales como suspensiones y empacamientos de esferas, suspensiones de esferoides, areniscas, rocas fracturadas, etc. En este trabajo se encontró que los parámetros G y m toman los valores que se presentan en la Tabla 2.1.

Además, haciendo uso de nuevos conceptos, encuentro que la Ec. 2.12 se puede usar para diferenciar entre porosidad primaria y porosidad secundaria. En la actualidad, esta ecuación está siendo aplicada con éxito en la interpretación de registros geofísicos de pozos de las regiones Sur y Marinas.

Tabla 2.1. Valores de los parámetros G y m de la Ec. 2.12, para diferentes tipos de medios porosos.

Tipo de sistema	m	G
Esferas	1.09	1.50
Esferoides	1.12	1.69
Cubos	1.26	1.39
Sedimentos marinos no consolidados	1.45	1.30
Areniscas	1.73	1.03
Calizas	1.87	1.12
Calizas Dolomitizadas	2.00	0.88
Dolomias	2.21	0.66

2.1 Medios Fracturados

Las deducciones empíricas y teóricas para caracterizar la roca a través del factor de resistividad, y que relacionan esta propiedad con la porosidad, están descritas en la sección anterior para rocas del tipo intergranular, como la arenisca. En esta parte se tratarán las expresiones más importantes encontradas en la literatura que relacionan el factor de resistividad con la porosidad para rocas que tienen discontinuidades debidas a la existencia de fracturas naturales causadas

Capítulo II

por movimientos tectónicos, en cuyo caso se tiene un yacimiento naturalmente fracturado (YNF), el cual se caracteriza por tener doble porosidad: por un lado, presenta porosidad primaria asociada a los bloques de la roca y, por el otro, manifiesta porosidad secundaria, originada después de la formación de la roca. Es frecuente que los YNF se les idealise como un arreglo cúbico de cubos, conocido como modelo de Warren y Root (ver Fig.2.2) donde los cubos representan bloques de matriz y los espacios entre éstos son las fracturas. Este modelo fue presentado por primera vez por Towle (1962) para estudiar los efectos de la geometría de poro sobre el factor de resistividad, donde establece la siguiente relación entre el factor de resistividad y porosidad para medios fracturados:

$$F = \frac{b}{(1-b^2)} + \frac{1-b}{D(1-b^2)} \quad (2.13)$$

con $\phi = 1 - b^3$

y $D = 10^{0.477b}$

donde la dimensión de cada cubo está dada por b/n , mientras que $1/n$ es la longitud de cada cubo más su distancia de separación, de tal forma que $b \leq 1$. D representa la distorsión que sufren las líneas de corriente eléctrica cuando atraviesan la separación entre los bloques vecinos.

Posteriormente, Aguilera (1974) propuso una metodología para caracterizar yacimientos naturalmente fracturados a partir de registros de resistividad y sísmicos. Él supone un modelo similar al presentado por Towle (1962) y por

Warren y Root (1963) para analizar el comportamiento de la presión en yacimientos naturalmente fracturados.

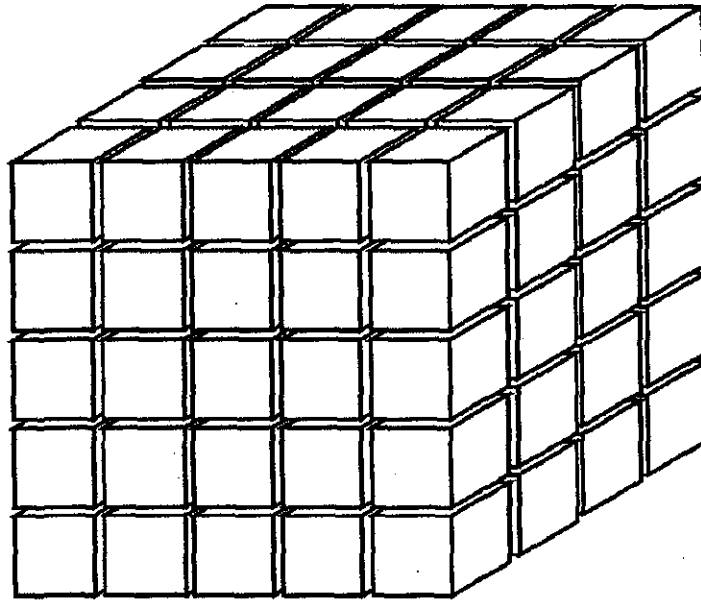


Fig. 2.2. Modelo de Towle o de Warren y Root

En un tratamiento similar al de Towle, Aguilera supone la existencia de una distorsión máxima en las líneas de corriente cuando éstas cruzan las fracturas perpendiculares al flujo de corriente, de modo que el valor del factor de resistividad se puede expresar como:

$$F = \frac{X}{(1-X^2)} + \frac{1}{(1+2X)}; \quad (2.14)$$

y para una distorsión mínima:

$$F = \frac{X}{(1-X^2)} + \frac{1}{(1+X)}, \quad (2.15)$$

donde X representa la separación entre bloques.

Capítulo II

De la definición de porosidad, las Ecs. 2.14 y 2.15 y la relación de Archie, el autor concluye que para este tipo de sistemas el valor del exponente de cementación, m , será relativamente pequeño y estará entre los valores de 1.1 a 1.3. Este criterio se utiliza para reconocer YNF. Además, el exponente m se obtiene a partir de registros de resistividad y sínicos.

En un trabajo posterior, Aguilera (1976) generalizó la metodología para todo tipo de registros convencionales, donde hace notar que el modelo anterior sólo toma en cuenta la porosidad de fractura y utiliza un coeficiente de partición para definir un modelo ideal de doble porosidad, compuesto por dos sistemas de porosidad arreglados en forma paralela. Analiza el sistema para tres diferentes casos. Primer caso: sólo existe porosidad de matriz; segundo caso: sólo existe porosidad de fractura y tercer caso: ambas porosidades están presentes. Del análisis concluye que la siguiente expresión es representativa de un medio fracturado:

$$F_t = \frac{I}{v\phi + (1-v)/F_m}, \quad (2.16)$$

donde F_t es el factor de resistividad total del sistema, ϕ la porosidad total del sistema, v el coeficiente de partición definido por Pirson (1957) y F_m es el factor de resistividad de la matriz.

Por otra parte, Waff (1974) investigó la conductividad eléctrica en el manto terrestre y sus aplicaciones en la geotermometría. En ese estudio se analizan los

efectos que las fusiones parciales de la corteza terrestre y el manto cercano a la corteza ejercen sobre la conductividad eléctrica total del sistema, con el objetivo de poder reconocer los gradientes de temperatura.

La formulación establecida por Waff, para la conductividad efectiva total, σ^* , esta dada por:

$$\sigma^* = \frac{\sigma_s \sigma_M (1 - C_M)^{2/3}}{\sigma_M (1 - C_M) + \sigma_M [1 - (1 - C_M)^m]} + \sigma_M [1 - (1 - C_M)^{2/3}] \quad (2.17)$$

donde, σ_s es la conductividad de los bloques cúbicos, σ_M la conductividad de la fase líquida (electrolito) y C_M es la fracción volumétrica de la fase líquida (porosidad).

Al igual que Towle, Aguilera y Waff, Pérez-Rosales y cols. (2000) también idealizaron la geometría interna de la roca fracturada como un arreglo cúbico de cubos donde los bloques representan la matriz y los espacios entre ellos las fracturas (Fig. 2.2). Este trabajo es un tratamiento teórico-experimental que se fundamenta en las propiedades físicas del sistema. Pérez-Rosales y cols. proponen que la mayor contribución al flujo de corriente eléctrica es a través de las fracturas paralelas a las líneas de corriente eléctrica, y que las fracturas perpendiculares prácticamente no participan en el flujo de cargas eléctricas. Con estas consideraciones, se demuestra que la relación factor de resistividad-porosidad se expresa como:

$$F = \frac{I}{1 - (1 - \phi)^{2/3}}, \quad (2.18)$$

para el caso donde se supone que el flujo de corriente eléctrica sólo es a través de las fracturas paralelas a la dirección de la corriente eléctrica. Sin embargo, la realidad es que las fracturas perpendiculares también participan parcialmente en el flujo de corriente eléctrica. Tomando este hecho en cuenta, se propone que la Ec. 2.18 se puede generalizar al sustituir el $2/3$ por un parámetro r ; así se obtiene

$$\ln\left(\frac{F-1}{F}\right) = r \ln(1-\phi), \quad (2.19)$$

donde F es el factor de resistividad y ϕ es la porosidad del sistema.

En un trabajo posterior, Mendoza Romero (2000) analiza los alcances logrados y las perspectivas que se vislumbran para los factores de resistividad en la interpretación de registros eléctricos de pozo para YNF. De hecho, estudia los desarrollos teóricos de Towle, Waff y Pérez-Rosales y cols. establecidos por diferentes vías para el mismo modelo. A partir de un análisis empírico propone que el significado físico de r , en la ecuación de Pérez-Rosales y cols. (2000), está relacionado con la conectividad y, además, que es inversamente proporcional a la tortuosidad τ y al exponente m de entrapamiento (cementación).

Hasta aquí se han comentado los desarrollos teóricos que idealizan una roca naturalmente fracturada como un arreglo cúbico de cubos para caracterizar la roca. Pero existe por lo menos otro modelo que idealiza los YNF como un conjunto

de M modelos de Maxwell, contenidos en una esfera más grande de radio a_k , cuya resistividad equivalente es R_M , como se muestra en la Fig. 2.3. Este modelo fue propuesto por Mendoza-Romero y Pérez-Rosales (1985), donde concluyen que la relación entre el factor de resistividad y porosidad, que en este caso es porosidad primaria y secundaria, se expresa como

$$F = \frac{3 - (\phi - \phi_1\phi_2)}{2(\phi - \phi_1\phi_2)}, \quad (2.20)$$

donde la variable ϕ representa la porosidad total, ϕ_1 la porosidad primaria, que en este caso es representativa de la porosidad de la matriz, ϕ_2 la porosidad de fractura.

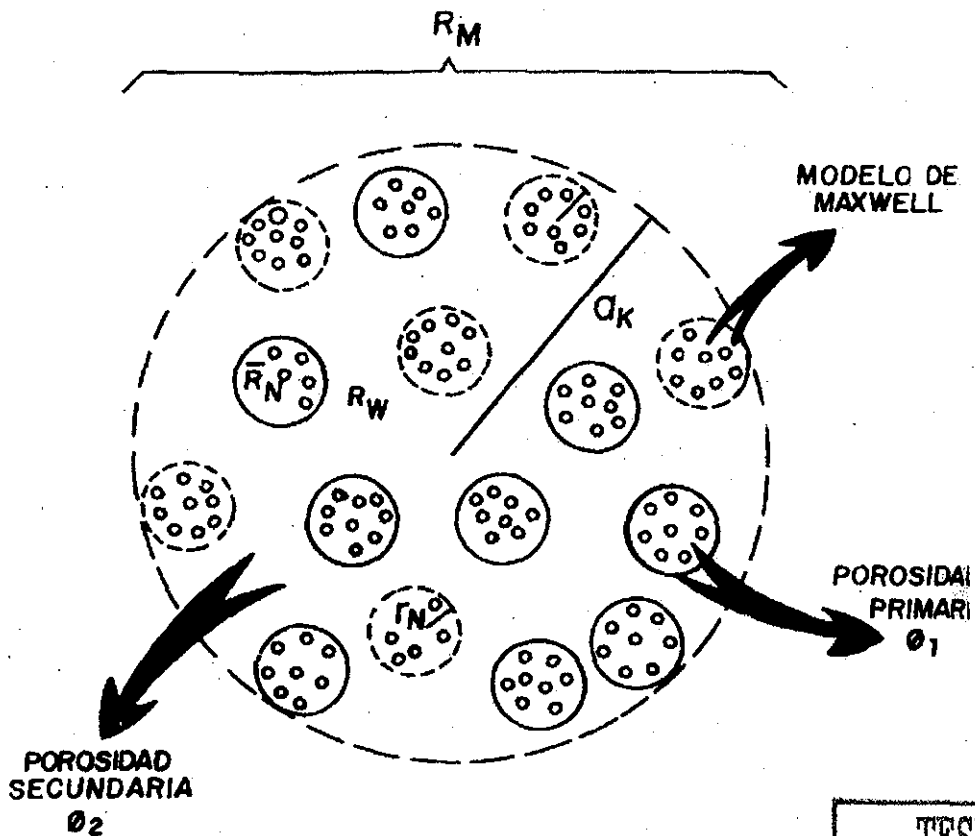


Fig. 2.3. Modelo teórico de doble porosidad.
(Mendoza-Romero y Pérez-Rosales, 1985)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO III

Conducción Eléctrica en Modelos Fracturados-Vugulares

Realizar la caracterización petrofísica de la roca que constituye un yacimiento es una labor muy compleja; de hecho, una mala caracterización de la formación tendrá implicaciones importantes tanto en cálculos de reservas de hidrocarburos e intervalos productores, como en el diseño de explotación y diagnóstico del comportamiento del yacimiento. Uno de los problemas más importantes relacionados con las propiedades petrofísicas es saber el tipo de porosidad que se tiene en el yacimiento. Se sabe que un medio homogéneo (con porosidad primaria) tiene propiedades dinámicas (como la convección, flujo de fluidos, difusión efectiva) muy diferentes a las de un YNF y, por supuesto, el comportamiento de estos dos medios será muy diferente al de un medio fracturado-vugular. Por lo tanto, una buena caracterización tendrá implicaciones importantes en la recuperación primaria y mejorada de los hidrocarburos.

Se conoce que hay avances significativos en la caracterización de medios homogéneos tanto teórica como experimental, debido a que son los que más se presentan en los Estados Unidos y a que estos yacimientos son más simples de tratar. Pero no todos los yacimientos son de estas características; por lo menos gran parte de los yacimientos de México y del Medio Oriente son del tipo

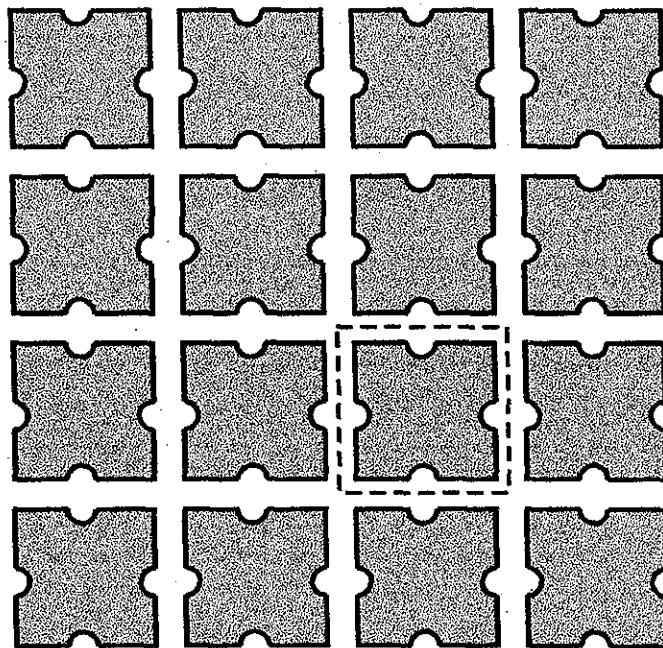
Capítulo III

fracturado-vugular. Por su complejidad, y falta de una cultura adecuada hacía la investigación en los países que tienen yacimientos fracturados-vugulares, no se han hecho avances importantes en la caracterización de este tipo de rocas, de ahí la importancia de realizar esfuerzos encaminados a desarrollar formulaciones analíticas que permitan describir, con un alto grado de certidumbre, la geometría del espacio poroso de la roca, su capacidad de almacenamiento y sus propiedades de flujo. Una manera práctica de conocer la geometría interna de un medio poroso es a través del llamado factor de resistividad (Archie, 1942). Conociendo su factor de resistividad se puede determinar, por ejemplo, la magnitud y tipo de porosidad, y la tortuosidad. Sin embargo, en el caso de medios fracturados vugulares, no hay antecedentes de la existencia de formulaciones bien sustentadas que relacionen el factor de resistividad con las porosidades de fractura y vugular.

En este capítulo, se desarrollan expresiones teóricas para caracterizar el medio fracturado-vugular a través del factor de resistividad, en términos de las porosidades de fractura y vugular; además, se describen los experimentos realizados para comprobar la teoría desarrollada. Para el establecimiento de estas formulaciones, el medio fracturado vugular se idealiza por medio de un arreglo cúbico de cubos, en cuyas caras se han perforado cavidades hemisféricas. En este modelo, los espacios entre los cubos representan fracturas y las cavidades hemisféricas representan vúgulos (Cruz-Hernández et al., 2000).

3.1 Desarrollos Teóricos

Debido a la complejidad geométrica de los medios fracturados vugulares, un estudio analítico riguroso de su factor de resistividad es una tarea difícil de realizar. Sin embargo, haciendo ciertas idealizaciones lógicas, es posible atacar este problema en forma relativamente simple (Pérez-Rosales y cols., 2001). Para simplificar el tratamiento analítico se considerará que: (1) un medio fracturado vugular se puede idealizar por un arreglo de cubos similar al modelo de Warren y Root (1963), pero con cavidades hemisféricas en las caras de los cubos para representar los vúgulos (Fig. 3.1), y (2) cuando el espacio poroso está saturado



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

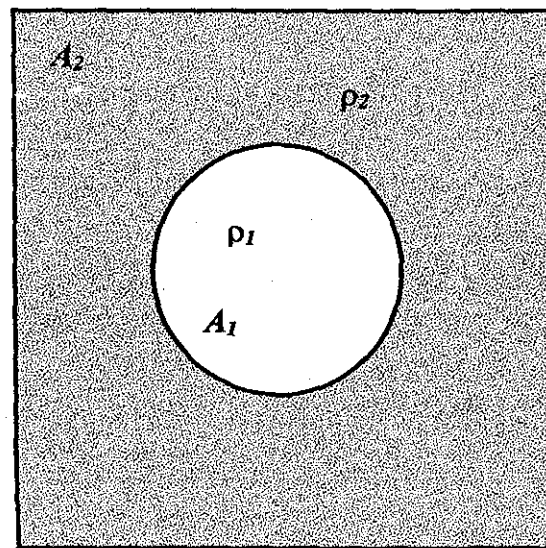
Fig. 3.1. Representación en 2D de un medio fracturado vugular, con un vúgulo por cara.

con un fluido conductor, por ejemplo un electrolito, los vúgulos, por su gran

Capítulo III

volumen relativo, son zonas de muy alta conductividad eléctrica en comparación con las fracturas que, en general, tienen una apertura muy estrecha.

Como punto de partida para los desarrollos teóricos, supóngase que los cubos tienen un vóculo por cara, y considérese una celda unitaria (Fig. 3.1, línea punteada), constituida por un cubo con sus fracturas asociadas (en realidad semifracturas, porque cada fractura es compartida por dos cubos vecinos). De esta celda unitaria, tómese una de las cuatro semifracturas con su vóculo asociado (por simplicidad, aquí no se tomarán en cuenta las pequeñas zonas de sección cuadrada de las esquinas, ya que en la práctica su volumen es despreciable en comparación con el resto del volumen poroso). Esta semifractura y su vóculo asociado constituyen un sistema tridimensional que, desde el punto de



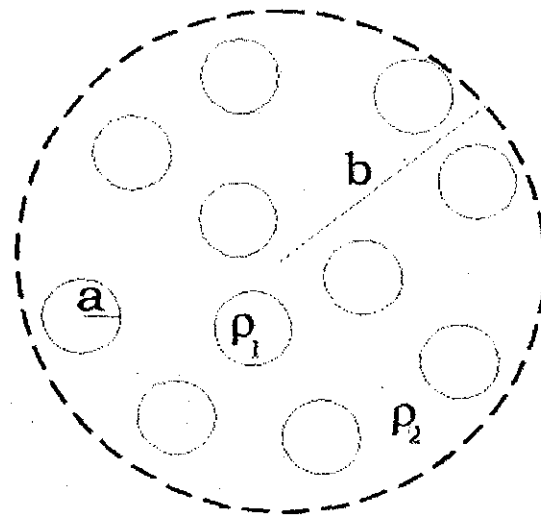
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 3.2. Representación en 2D de un medio fracturado vugular, donde el círculo es el vóculo y la placa la fractura.

vista del flujo de corriente eléctrica, se puede aproximar por un sistema bidimensional (Fig. 3.2) consistente en una placa conductora (la semifractura) de

resistividad ρ_2 y área A_2 , en cuyo centro se localiza un disco circular (el vúgulo) del mismo espesor que la placa, pero de área A_1 y resistividad ρ_1 mucho menor que ρ_2 .

Tomando como base el sistema de la Fig. 3.2, a continuación se desarrolla una expresión para el factor de resistividad de un sistema bidimensional compuesto por N discos de resistividad ρ_1 dispersos en un medio de resistividad ρ_2 , donde se considera que la separación entre los discos es tal que no existe interferencia entre ellos, Fig. 3.3. En la deducción se siguen las ideas básicas sugeridas por Maxwell (1954) para el caso de esferas dispersas en un medio homogéneo, y que han sido extendidas por Pérez-Rosales y Navarro (1974) al caso bidimensional (Apéndice A2).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 3.3. Conjunto de N discos dispersos de radio a y ρ_1 , distribuidos dentro de una circunferencia de radio b y resistividad ρ_2 .

Capítulo III

Pérez-Rosales y Navarro llegan a la siguiente expresión para el factor de resistividad

$$F_v = \frac{\bar{\rho}}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + f_v(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 + \rho_2 - f_v(\rho_1 - \rho_2)} \quad (3.1)$$

donde ρ_2 es la resistividad de las fracturas, ρ_1 es la resistividad de los vórgulos y f_v representa la fracción de área ocupada por los discos. Si se considera que la resistividad de los vórgulos al paso de la corriente eléctrica es mucho menor que la resistividad de las fracturas, $\rho_2 \gg \rho_1$, la Ec. 3.1 se puede simplificar a

$$F_v = \frac{1 - f_v}{1 + f_v}, \quad (3.2)$$

que expresa el factor de resistividad de la placa constituida por la fractura y los N discos de alta conductividad, donde, hay que recordarlo, f_v representa la fracción de área ocupada por los discos y, por lo tanto, f_v siempre es una cantidad menor que la unidad.

La Ec. 3.2 es un resultado teórico que se puede aplicar a la placa de la Fig. 3.2, independientemente del número de vórgulos presentes. Otra forma de obtener el factor de resistividad consiste en aplicar una diferencia de potencial entre extremos opuestos de la placa y medir la resistencia eléctrica R_v cuando el vórgulo está presente y luego la resistencia R_f cuando no hay vórgulo. En este caso, por definición,

$$F_v = \frac{R_v}{R_f}. \quad (3.3)$$

Combinando las Ecs. 3.2 y 3.3, se tiene

$$R_v = \frac{1 - f_v}{1 + f_v} R_f. \quad (3.4)$$

Por lo pronto, esto es suficiente con respecto a un sistema bidimensional; ahora se abordará el caso de un sistema tridimensional. Un arreglo cúbico de cubos se puede dividir en celdas unitarias idénticas como la mostrada en la Fig. 3.1. Cada una de estas celdas unitarias contiene un cubo con sus vugulos y sus fracturas circundantes. Una característica de estas celdas es que las propiedades de flujo son las mismas para todas ellas, de modo que una sola celda puede ser usada para estudiar el comportamiento del sistema en su conjunto.

En el caso de una celda unitaria, el factor de resistividad se puede obtener estableciendo una diferencia de potencial entre caras opuestas de la celda saturada con un electrolito, y midiendo su resistencia R_f cuando el cubo está dentro de la celda, y luego la resistencia R_c cuando sólo hay electrolito dentro de la celda. Así, el factor de resistividad del sistema está dado por

$$F_t = \frac{R_c}{R_f}. \quad (3.5)$$

Ahora bien, como ya se consideró anteriormente, cuando el cubo está dentro de la celda la corriente eléctrica fluye esencialmente a través de las semifracturas y vugulos que están en línea con la dirección del campo eléctrico. Haciendo referencia a la Fig. 3.2, si la dirección del campo eléctrico es perpendicular al plano de la figura, la conducción eléctrica se lleva a cabo por las cuatro semifracturas y vugulos señalados en la figura. Aquí se debe recordar que, para simplificar los desarrollos teóricos, no se han tomado en cuenta las pequeñas

zonas de las esquinas, ya que su volumen es despreciable en casos reales. Con estas consideraciones, las cuatro placas conductoras se pueden tratar como cuatro resistencias en paralelo cuya resistencia total está dada por

$$R_t = \frac{R_v}{4}, \quad (3.6)$$

donde R_v es la resistencia de cada placa vugulada. Y combinando las Ecs. 3.4, 3.5 y 3.6 se llega a

$$F_t = \left(\frac{1 - f_v}{1 + f_v} \right) \left(\frac{R_f}{4R_c} \right). \quad (3.7)$$

Por otra parte, la Ec. 2.19 se puede expresar como

$$F_f = \frac{1}{1 - (1 - \phi_f)^r}, \quad (3.8)$$

donde r es un parámetro que depende de las características del medio considerado. Por conveniencia, en la Ec. 3.8 se ha usado el subíndice f para indicar que las variables se refieren a las fracturas, y así distinguirlas de las variables asociadas a los vugulos, que serán utilizadas más adelante. A partir de la Ec. 3.8 se llega a una expresión que indica que el factor de resistividad debido a las fracturas se puede expresar como el producto de la tortuosidad por la porosidad de fracturas, como sigue (Pérez-Rosales y cols., 2001):

$$F_f = \tau_f \phi_f^{-1}. \quad (3.9)$$

El segundo factor de la ecuación 3.7 se identifica de inmediato como el factor de resistividad del sistema de fracturas (sin tomar en cuenta los vugulos), de

modo que al sustituir la Ec. 3.9 en la Ec. 3.8 se obtiene para el factor de resistividad total (debido a fracturas y vugulos)

$$F_t = \left(\frac{1 - f_v}{1 + f_v} \right) \left(\frac{\tau_f}{\phi_f} \right), \quad (3.10)$$

o bien, en forma simplificada, como

$$F_t = F_v \times F_f.$$

(3.11)

Esta ecuación indica que el factor de resistividad total de un medio fracturado vugular se puede expresar como el producto del factor de resistividad asociado a las fracturas (F_f), por un factor de resistividad debido a la presencia de vugulos (F_v). Aquí se debe hacer notar que F_f siempre es mayor que la unidad, en tanto que F_v siempre es menor que la unidad.

Por otra parte, de acuerdo con la Ec. 3.2, el factor de resistividad de los vugulos está en función de la fracción áreal, f_v , que ocupan los vugulos de las caras de un cubo. Pero también se puede expresar en términos de otras variables que se pueden medir con más facilidad en el laboratorio o en el campo, como se verá a continuación.

Para el caso de un cubo de longitud L que tiene N vugulos de radio a por cara, f_v está dada por la ecuación

$$f_v = \frac{\pi N a^2}{L^2}, \quad (3.12)$$

la que, al sustituirse en la Ec. 3.2, da

$$F_v = \frac{L^2 - \pi Na^2}{L^2 + \pi Na^2} \quad (3.13)$$

Otra forma más práctica de expresar F_v , se puede obtener como sigue. Por definición, considerando una celda unitaria, la porosidad vugular, ϕ_v , está dada por

$$\phi_v = \frac{V_v}{V_c}, \quad (3.14)$$

donde V_v es el volumen total de vúgulos hemisféricos contenidos en la celda y V_c es el volumen de la celda unitaria. Por otra parte, el radio de un vúgulo hemisférico se puede expresar como

$$a = \left(\frac{V_v}{4\pi N} \right)^{1/3} \quad (3.15)$$

Y sustituyendo la Ec. 3.14 en la Ec. 3.15, se tiene

$$a = \left(\frac{\phi_v V_c}{4\pi N} \right)^{1/3} \quad (3.16)$$

Para porosidades de fractura bajas, V_c es aproximadamente igual a L^3 , por lo que se puede establecer la igualdad

$$\frac{a^2}{L^2} = \left(\frac{\phi_v}{4\pi N} \right)^{2/3}, \quad (3.17)$$

Sustituyendo la Ec. 3.17 en la Ec. 3.12, se llega a

$$f_v = 0.581 N^{1/3} \phi_v^{2/3} \quad (3.18)$$

lo que quiere decir que, de acuerdo con la Ec. 3.2, el factor de resistividad vugular está dado por

$$F_v = \frac{1 - 0.581N^{1/3}\phi_v^{2/3}}{1 + 0.581N^{1/3}\phi_v^{2/3}} \quad (3.19)$$

y, en consecuencia, el factor de resistividad total para un medio fracturado vugular se puede expresar, de acuerdo con las Ecs. 3.10 y 3.19, como

$$F_t = \left(\frac{1 - 0.581N^{1/3}\phi_v^{2/3}}{1 + 0.581N^{1/3}\phi_v^{2/3}} \right) \left(\frac{\tau_f}{\phi_f} \right) \quad (3.20)$$

Antes de pasar a la validación experimental de la Ec. 3.20, es conveniente hacer un análisis del comportamiento de F_t cuando se varían N y ϕ_v . Para este fin, considérese que F_f (cantidad dentro de los segundos paréntesis) se mantiene constante e igual a 30. En la Fig. 3.4 se ha graficado F_t como una función de ϕ_v , para los casos $N = 1, 2, 4, 8$. Aquí se puede observar que, para un valor dado de ϕ_v , F_t disminuye cuando N crece; dicho de otra manera, para una misma porosidad vugular, un medio fracturado vugular es mejor conductor a medida que los vúgulos son más pequeños. Esta propiedad se ve con más claridad en la Fig. 3.5, donde se ha graficado F_t contra N , para los casos $\phi_v = 0.01, 0.02, 0.04, 0.08$. Aquí también se puede ver que para una misma curva (valor fijo de ϕ_v) el factor de resistividad total disminuye cuando N aumenta.

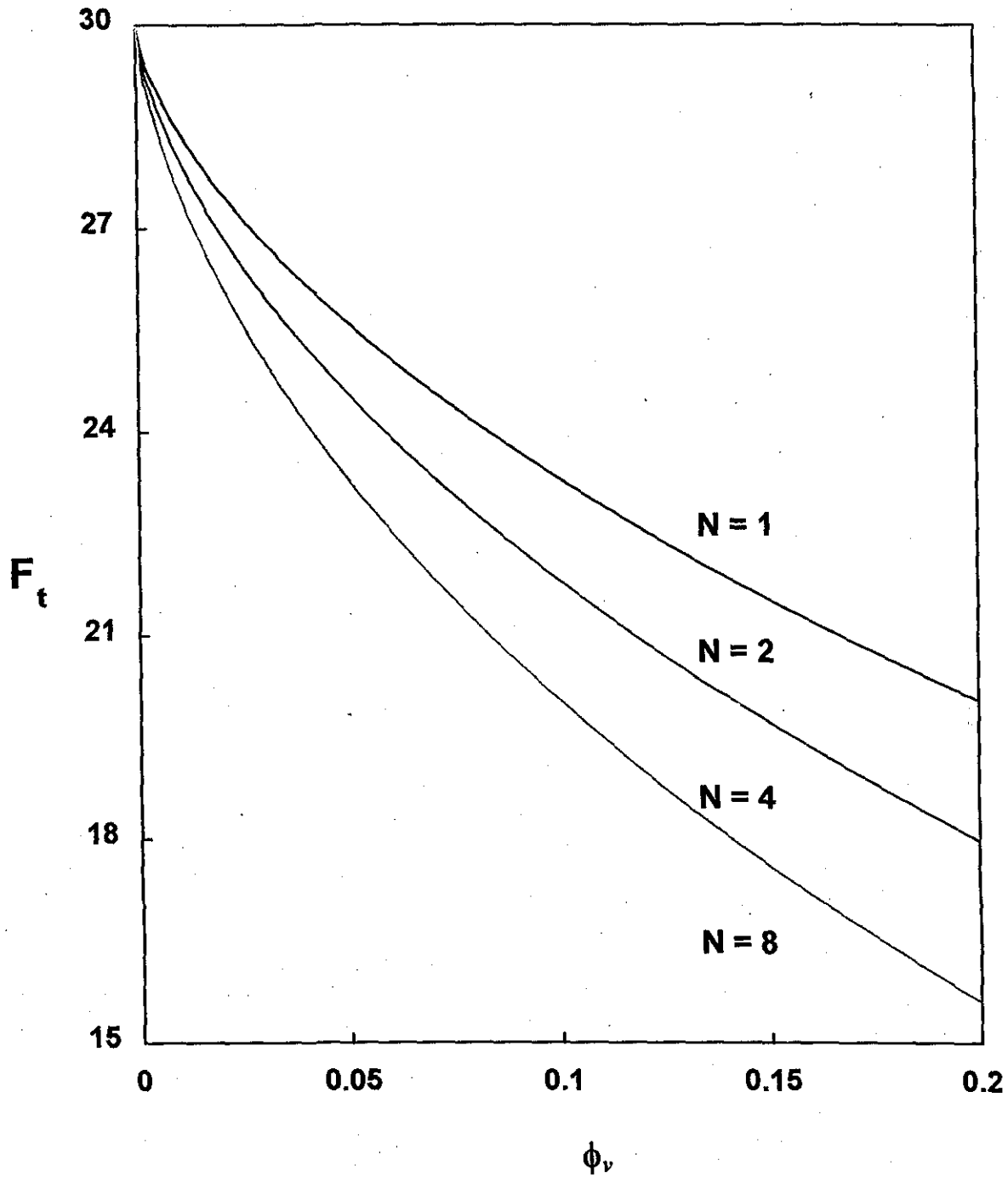


Fig. 3.4 Variación del factor de resistividad total con la porosidad vugular para un $F_j = 30$.

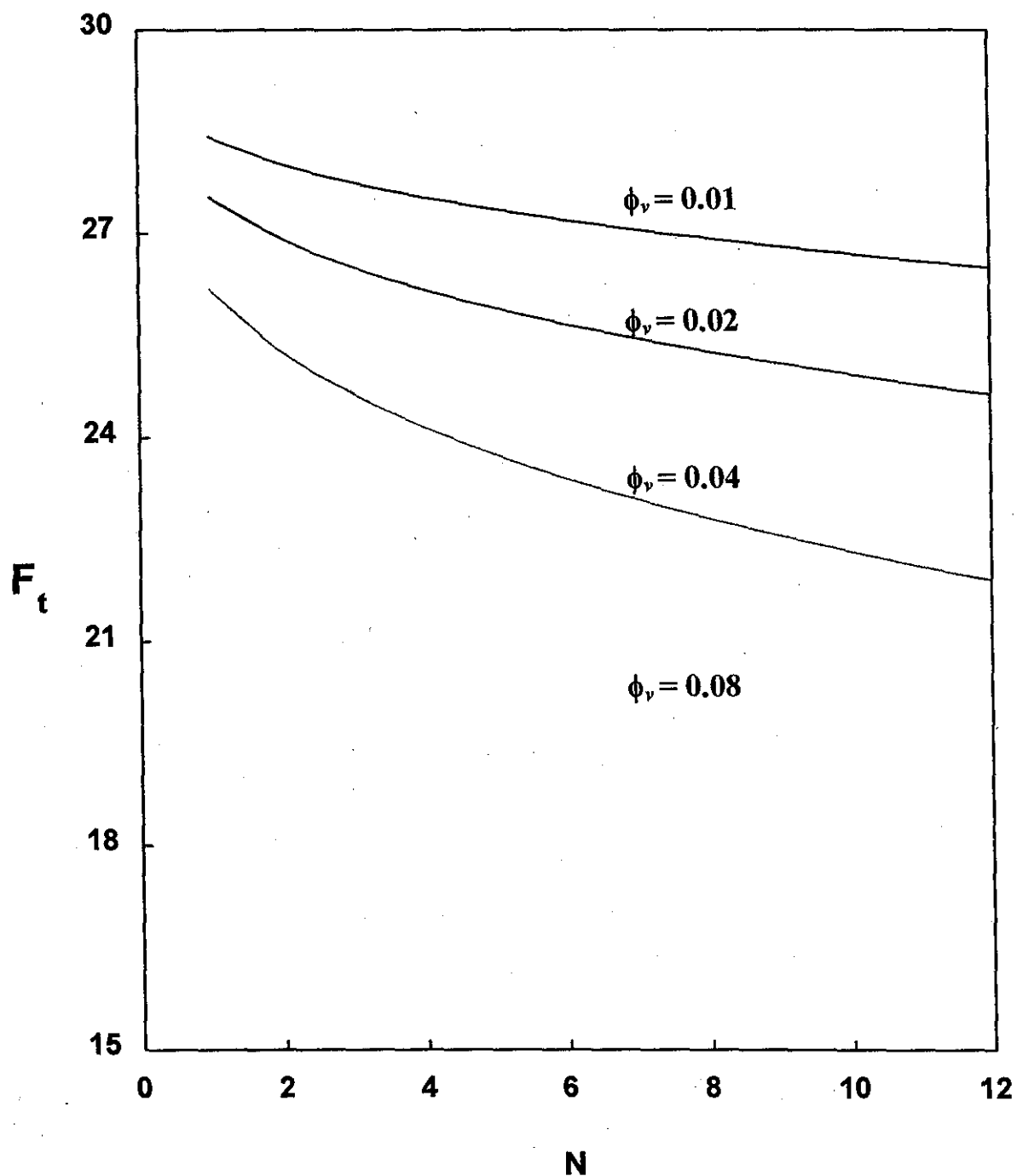


Fig. 3.5 Variación del factor de resistividad total con el número de vúgulos por cara para un $F_f = 30$.

3.2 Trabajo Experimental

Para comprobar la teoría desarrollada para el factor de resistividad de un yacimiento fracturado vugular, en esta sección se describe la metodología experimental utilizada para la determinación del factor de resistividad de un medio fracturado vugular a través de un modelo tipo Towle (1962) o de Warren y Root (1963), el cual consiste en un arreglo cúbico de cubos con cavidades hemisféricas (vúgulos) que se perforan en las caras de los cubos. En este tipo de sistema, los cubos representan los bloques matriciales, los espacios entre bloques representan fracturas, y las cavidades hemisféricas representan los vúgulos. En la Fig. 3.1 se presenta un corte transversal del medio idealizado en dos dimensiones donde se muestra un vúgulo por cada cara del cubo.

El sistema descrito puede ser dividido en celdas unitarias idénticas, donde cada una de las celdas tiene las mismas propiedades de flujo de corriente eléctrica, de modo que es posible usar una sola celda para estudiar el comportamiento de la corriente eléctrica a través de todo el sistema. Para este fin, se usó la celda de resistividad que se muestra en forma esquemática en la Fig. 3.6, la cual consiste de un contenedor de acrílico cúbico que tiene electrodos de acero inoxidable en la parte superior e inferior del contenedor. Un cubo de acrílico con vúgulos hemisféricos en cada cara se introduce dentro del contenedor de tal manera que los espacios libres entre las paredes del contenedor y el cubo representan las fracturas. Una solución de KCl de 3000 ppm es el electrolito que

Conducción Eléctrica en Modelos Fracturados-Vugulares

satura totalmente los espacios libres de la celda de resistividad. Los cambios en la porosidad se realizan cambiando el tamaño del cubo y de los vugulos. Para obtener el factor de resistividad, la resistencia entre los electrodos es medido cuando el cubo está adentro y fuera del contenedor, con el electrolito saturando siempre los espacios libres. La razón entre ambos valores determina el factor de resistividad.

Es factible calcular el factor de resistividad a través de la resistencia por que se tiene un control riguroso de la geometría del sistema, es decir, la proporcionalidad geométrica entre la resistividad y la resistencia se mantiene constante durante todo el experimento.

El proceso experimental fue el siguiente:

1. Se construyeron cuatro cubos de acrílico.
2. Se determinó la porosidad de fractura, restando al volumen de la celda el volumen del cubo de acrílico sin cavidades hemisféricas.
3. Se usó la celda de resistividad y un resistivímetro potenciométrico para determinar el factor de resistividad. Primero se midió la resistencia entre los electrodos de la celda con la ayuda del resistivímetro cuando la celda contiene un cubo de acrílico y salmuera saturando los espacios libres,

después se midió la resistencia sólo con la salmuera saturando el espacio del contenedor. La razón entre las resistencias es el factor de resistividad.

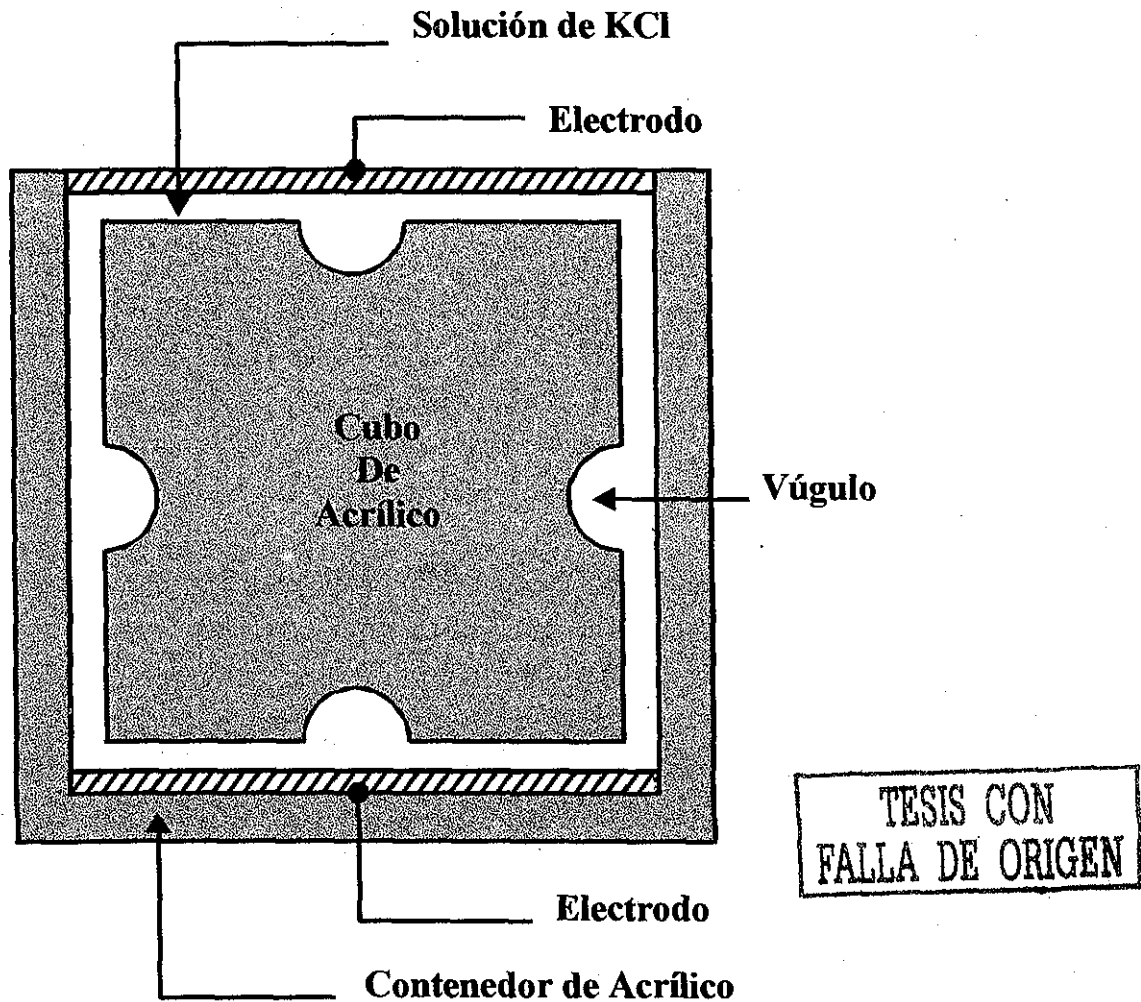


Fig. 3.6. Sección transversal de la celda de resistividad.

4. Se perforaron pequeños vugulos hemisféricos en las caras de cada cubo con la ayuda de un taladro con broca de punta hemisférica: un vugulo

por cara para el primer cubo, dos vúgulos por cara para el segundo cubo y así hasta llegar a cuatro vúgulos por cara.

5. Se determinó la porosidad de vúgulo con la ayuda de una balanza, de la manera siguiente: se midió la masa del cubo de acrílico con cavidades hemisféricas vacías, luego se midió la masa cuando el(los) vúgulo(s) de alguna cara del cubo se satura con agua, cuidando que el espacio de la cavidad hemisférica se llene hasta que el menisco coincida con la superficie del cubo. Este último paso se repite para cada una de las 6 caras del cubo de acrílico, se promedia la masa de las seis caras del cubo de acrílico saturado de agua y se le resta la masa del cubo. A partir de la masa promedio del agua que satura el(los) vúgulo(s) y la densidad del agua se puede obtener la porosidad vugular.

6. Se calculó el factor de resistividad para cada uno de los cubos con cavidades hemisféricas en sus caras, siguiendo el mismo proceso del paso 3.

7. Se incrementó el tamaño del vúgulo, y se repitieron los pasos 5 y 6 para los nuevos valores de porosidad vugular.

8. Nuevamente se incrementó el tamaño del vúgulo y se repitieron los pasos 5 y 6, hasta que se obtuvieron siete diferentes tamaños de

Capítulo III

vúgulos se obtienen para el cubo de acrílico con un vúgulo por cara. Para cada uno de los otros cubos, se obtuvieron seis tamaños diferentes de vúgulo.

Los resultados obtenidos para la porosidad total (fracturas más vúgulos), ϕ_t , porosidad vugular ϕ_v , radio del vúgulo, R_v , factor de resistividad, F , se muestran en la Tabla 3.1. En esta tabla, N representa el número de vúgulos por cara. Los valores de ϕ_t , en el primer renglón es la porosidad de fractura; es decir, corresponde al caso donde no están presentes los vúgulos (porosidad vugular cero); consecuentemente, los valores de F del primer renglón representan el factor de resistividad sólo de fracturas. El radio fue obtenido aplicando la siguiente relación

$$R_v = \left(\frac{V_c \phi_v}{4\pi N} \right)^{1/3} \quad (3.21)$$

donde V_c es el volumen de la celda, que en este caso fue de 99.250 cm³.

El análisis de los datos experimentales muestra varias propiedades interesantes de la conducción eléctrica en un medio fracturado vugular. En primer lugar, se investigó la validez de la ecuación de Archie (1942) que expresa el factor de resistividad en función de la porosidad como sigue:

$$F = \phi^m \quad (3.22)$$

donde m es el exponente de cementación, que es constante para un medio de características específicas. Para saber si la ecuación de Archie es válida para el

Conducción Eléctrica en Modelos Fracturados-Vugulares

medio en estudio, se calculó el exponente m a partir de los datos del factor de

Table 3.1 Resultados experimentales(J. Hernandez-Cruz y Cols. 2001)

N = 1				N = 2			
ϕ_t	ϕ_v	R_v (cm)	F_t	ϕ_t	ϕ_v	R_v (cm)	F_t
0.0447	0	0	30.21	0.0383	0	0	30.00
0.0467	0.0020	0.251	29.34	0.0419	0.0036	0.242	29.60
0.0499	0.0052	0.345	28.92	0.0475	0.0092	0.331	28.74
0.0585	0.0138	0.478	28.06	0.0656	0.0273	0.476	27.07
0.0648	0.0201	0.541	27.58	0.0760	0.0377	0.530	26.46
0.0775	0.0328	0.638	26.67	0.1001	0.0618	0.625	25.32
0.1016	0.0569	0.766	25.20	0.1520	0.1137	0.766	22.86
0.1588	0.1141	0.966	23.32				

N = 3				N = 4			
ϕ_t	ϕ_v	R_v (cm)	F_t	ϕ_t	ϕ_v	R_v (cm)	F_t
0.0458	0	0	28.54	0.0373	0	0	29.48
0.0511	0.0053	0.236	27.36	0.0444	0.0071	0.241	26.36
0.0616	0.0158	0.348	26.29	0.0567	0.0194	0.337	24.66
0.0859	0.0401	0.472	24.38	0.0897	0.0524	0.469	23.21
0.1067	0.0609	0.544	23.47	0.1117	0.0744	0.528	20.67
0.1404	0.0946	0.628	21.38	0.1708	0.1335	0.641	18.20
0.2263	0.1805	0.780	17.95	0.2649	0.2276	0.766	13.70

N = número de vugulos por cara; ϕ_t = porosidad total (porosidad de fractura + vugular); ϕ_v = porosidad vugular; R_v =radio del vugulo; F_t = factor de resistividad total.

resistividad y porosidad total de todos los datos experimentales. Los valores obtenidos fueron graficados vs. la porosidad total (ver Fig. 3.7). La recta que se ajusta a los datos tiene una correlación $r = 0.99$, lo que significa que m lejos de ser constante, se incrementa cuando la porosidad se incrementa. Por lo tanto, se concluye que la ecuación de Archie no es válida para este tipo de medios.

Por otra parte, cuando no hay vóculos presentes, el factor de resistividad corresponde a un medio fracturado, cuando se introducen los vóculos, se observa que el factor de resistividad disminuye conforme se incrementa el número de vóculos. A través del desarrollo teórico se encontró que el factor de resistividad total de un medio fracturado vugular se puede expresar como el producto del factor de resistividad debido exclusivamente a fracturas por un factor de resistividad debido a la influencia de los vóculos, es decir,

$$F_t = F_v \times F_f$$

Si esta ecuación es correcta, entonces

$$\ln F_t = \ln F_v + \ln F_f \quad (3.23)$$

Esto significa que si se grafica $\ln F$ vs $\ln F_v$ se debe obtener una línea recta con pendiente 1, cuando el factor de resistividad influenciado por vóculos es variable mientras el factor de resistividad de fracturas es constante, es decir, la porosidad de vóculos está cambiando mientras la porosidad de fractura es constante. Esto es precisamente lo que se obtuvo a partir de los datos de la Tabla 3.1, dando validez así a la teoría desarrollada. Cabe aquí aclarar que los valores del factor de resistividad debido a vóculos fueron calculados dividiendo

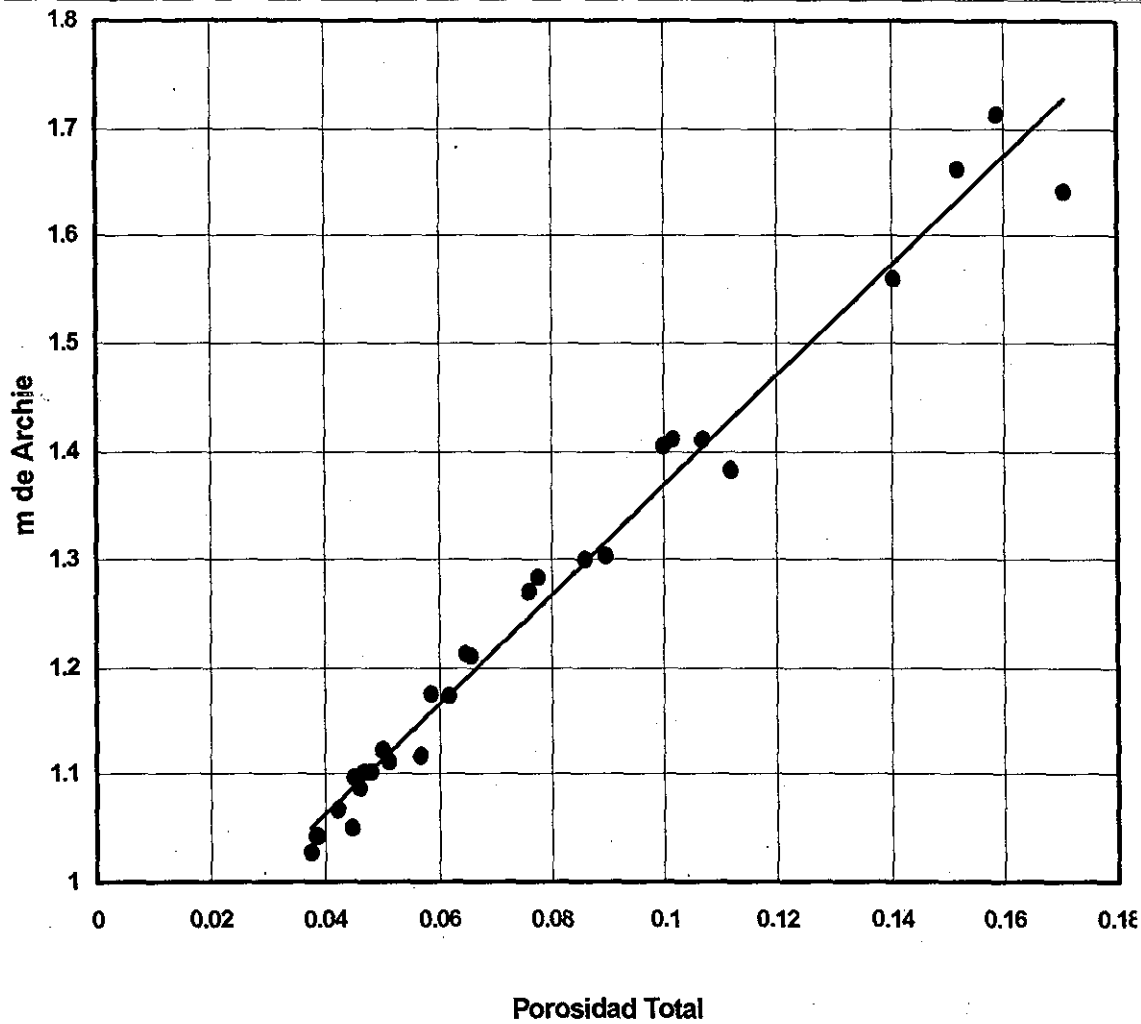


Fig. 3.7 Variación del exponente m de Archie con la porosidad, para todos los datos de la Tabla 3.1.

sucesivamente los valores de F_t del segundo hasta el octavo renglón de cada bloque de datos entre el valor de F_t del primer renglón de cada bloque de datos.

Otra propiedad interesante para investigar es cómo el factor de resistividad total varía en función del número de vugulos por cara, donde la porosidad de fractura es constante. Por este motivo y con fines de ilustración se gráfica F vs ϕ/N , en una hoja semilogarítmica, para observar que conforme el número de

vúgulos por cara aumenta el factor de resistividad disminuye, siempre y cuando

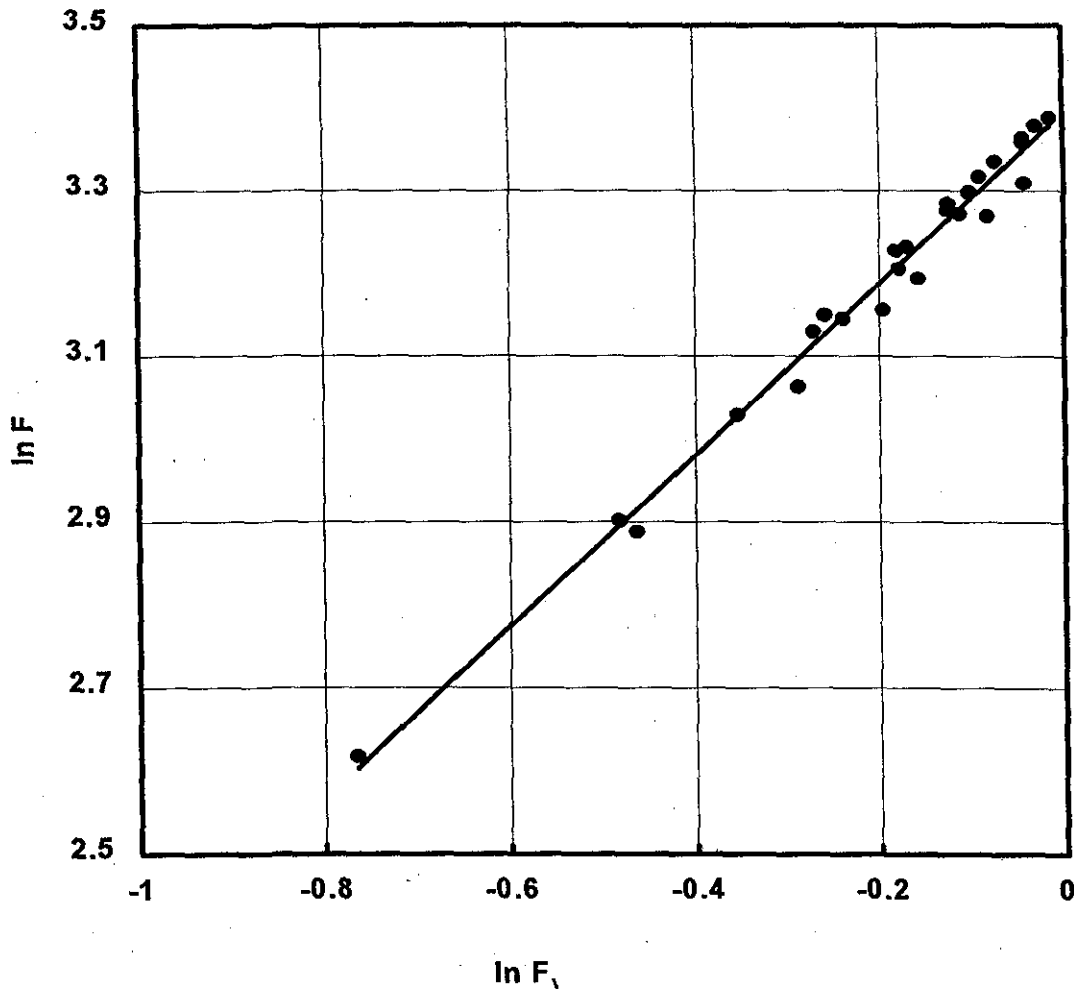


Fig. 3.8. Variación de $\ln F$, como función de $\ln F_v$ para los datos de la Tabla 3.1. Se comprueba que el factor de resistividad total se puede expresar como el producto del factor de resistividad debido a vúgulos por el factor de resistividad influenciado por fracturas.

los vúgulos estén interconectados, como se supuso en los experimentos. Por otra parte se observa que al ajustar la mejor curva, la porosidad por vúgulo disminuye conforme el número de vúgulos por cara aumenta para un mismo factor de resistividad.

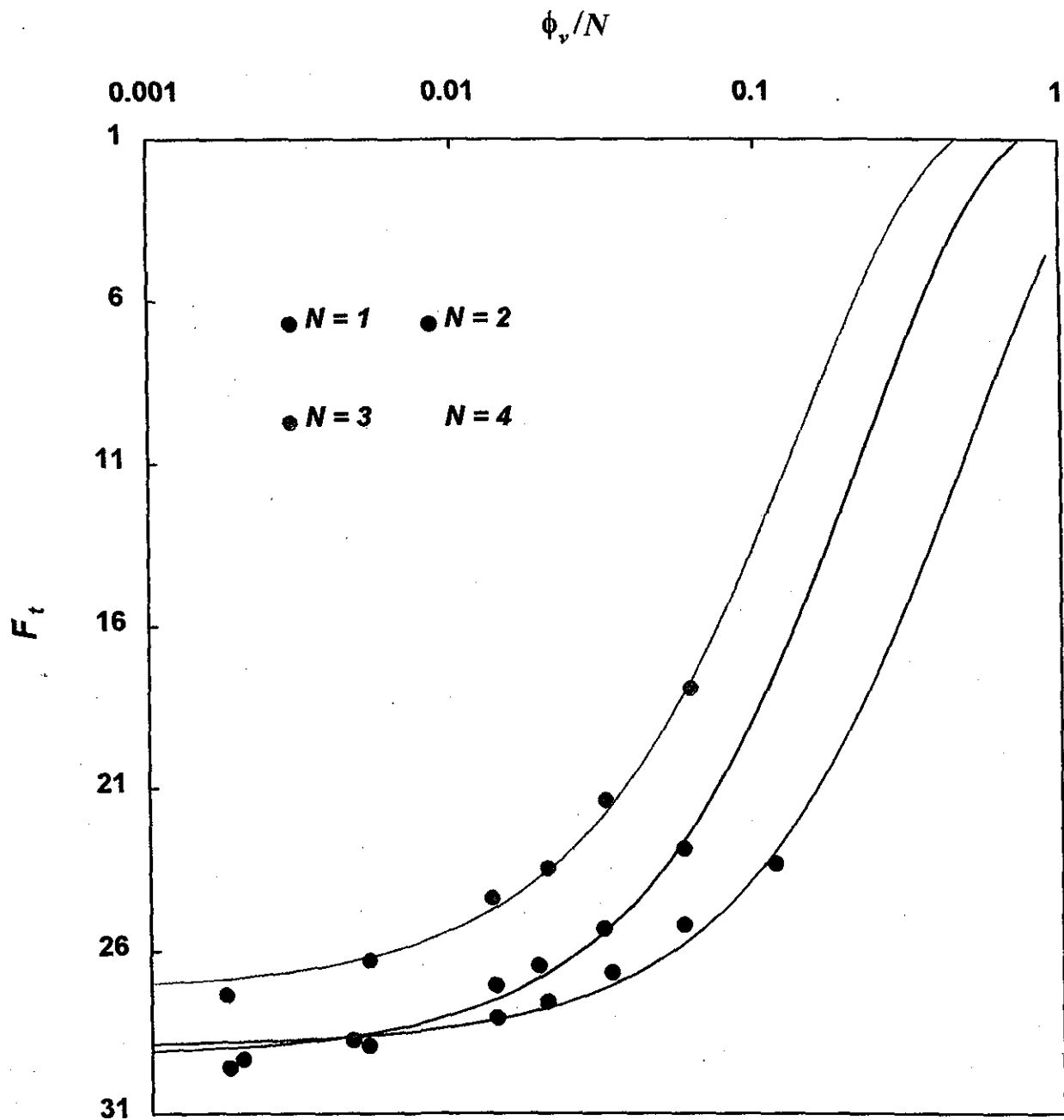


Fig. 3.9 Variación del factor de resistividad total en función del cociente de la porosidad vugular entre número de vúgulos por cara del cubo de acrílico.

3.3 Validación del Modelo Analítico

En esta sección se describe el trabajo experimental que fue realizado para probar la validez de los desarrollos teóricos que condujeron a la Ec. 3.20. Para este fin, se usó la celda de resistividad mostrada en la Fig. 3.6, la cual consiste, esencialmente, en un recipiente cúbico de acrílico de 100.105 cm^3 que tiene electrodos de acero inoxidable en la parte superior e inferior del recipiente. Estos electrodos permiten establecer una diferencia de potencial a través de la celda. Dentro del recipiente se coloca un cubo de acrílico que tiene vórgulos hemisféricos en cada una de sus caras, de modo que entre las paredes del recipiente y el cubo queda un espacio libre que representa las fracturas. El fluido conductor utilizado fue una solución de KCl (3000 ppm). Variando el tamaño del cubo y de los vórgulos, se pueden obtener diferentes valores para la porosidad de fractura y vugular. Para determinar el factor de resistividad, se mide la resistencia entre electrodos cuando el cubo está dentro y fuera del recipiente, con el electrolito siempre saturando el espacio libre. La razón del primer valor al segundo da el factor de resistividad.

Los experimentos se iniciaron con la construcción de tres cubos iguales de acrílico, con un volumen de 98.065 cm^3 cada uno, de modo que al introducirlos dentro de la celda se obtuvo una porosidad de fractura de 0.0204. Estos cubos fueron identificados como A, B y C, respectivamente. Luego se midió el factor de resistividad de fractura para cada cubo, obteniéndose los valores que aparecen en

el primer renglón de la Tabla 3.2. Como se puede ver, existen pequeñas diferencias entre los valores, debidas probablemente a errores experimentales.

Al cubo A se le perforaron 2 vugulos pequeños por cara; al cubo B, 4 vugulos; y al cubo C, 6 vugulos, y luego se determinó la porosidad vugular y el factor de resistividad total (segundo renglón de la Tabla 3.2). A continuación se incrementó el tamaño de los vugulos y se midió nuevamente la porosidad vugular y el factor de resistividad. Esta misma operación se repitió hasta tener un total de 7, 6 y 5 tamaños diferentes de vugulos para los cubos A, B y C, respectivamente. Los resultados globales aparecen en la Tabla 3.2.

En la Fig. 3.10, se comparan los resultados teóricos dados por la Ec. 3.20 (curvas continuas) con los resultados experimentales (círculos para el caso A, triángulos para el caso B, y cuadros para el caso C). Salvo algunos puntos experimentales que no se ajustan a las curvas teóricas, debido posiblemente a errores experimentales, se considera que, en general, el acuerdo entre teoría y experimento es lo suficientemente bueno para concluir que las hipótesis hechas en los desarrollos teóricos fueron las adecuadas.

Capítulo III

Tabla 3.2. Valores experimentales de porosidad vugular y factor de resistividad total para tres cubos con diferente número de vugulos por cara. La porosidad de fractura para los tres casos fue de 0.0204.

Cubo A N = 2		Cubo B N = 4		Cubo C N = 6	
ϕ_v	F_t	ϕ_v	F_t	ϕ_v	F_t
0	51.3	0	51.2	0	51.1
0.004	49.3	0.007	47.4	0.012	44.7
0.010	47.6	0.020	44.3	0.030	40.1
0.026	44.9	0.051	39.2	0.077	34.0
0.036	43.5	0.072	36.4	0.110	31.1
0.067	40.0	0.131	32.7	0.198	23.9
0.116	35.2	0.231	25.5		
0.206	29.7				

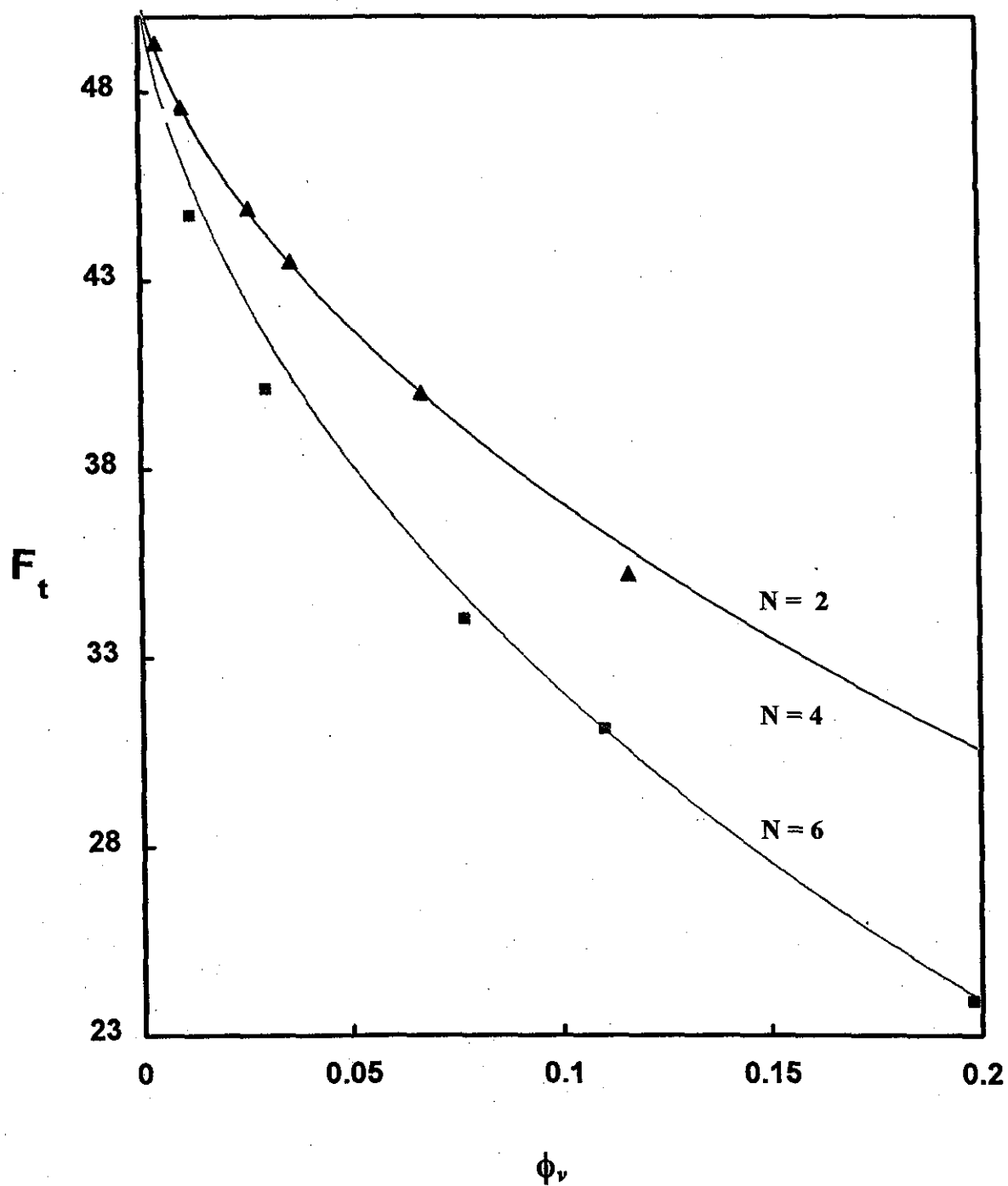


Fig. 3.10 Factor de resistividad total como una función de la porosidad vugular para los casos $N = 2$, $N = 4$ y $N = 6$. Comparación entre valores teóricos y experimentales.

CAPÍTULO IV

Generalización de las expresiones analíticas

La descripción de la teoría para caracterizar el modelo idealizado de un medio fracturado-vugular a través del factor de resistividad total se describe en el capítulo anterior y sus principales hipótesis son: (1) un medio fracturado vugular se puede idealizar por un arreglo cúbico de cubos con cavidades hemisféricas en las caras de los cubos y (2) cuando el espacio poroso está saturado con un fluido conductor, por ejemplo un electrolito, los vúgulos, por su gran volumen relativo, son zonas de muy alta conductividad eléctrica en comparación con las fracturas que, en general, tienen una apertura muy estrecha.

Los valores de porosidad y del factor de resistividad calculados a partir de las expresiones teóricas son muy parecidos a los experimentales, así se demuestra que una buena descripción del modelo físico se logra con las expresiones teóricas planteadas. Es importante destacar que un buen modelo idealizado no siempre se puede aplicar directamente a una roca real; de hecho, en algunas ocasiones el planteamiento teórico sólo funciona para un espectro de valores de porosidad, factor de resistividad total o para un cierto tipo de rocas. El problema de generalizar los desarrollos teóricos para hacerlos aplicables a rocas reales no tiene una solución trivial, debido a que la Ec. 3.20 es no lineal; además, depende de dos variables independientes que son la porosidad de fractura y la

Capítulo IV

vugular, $F_t(\phi_v, \phi_f)$, y contiene dos parámetros, el número de vugulos, N , y la tortuosidad, τ , que a su vez dependen de la porosidad de fractura, ϕ_f y vugular ϕ_v , y sólo es posible introducir un dato de campo, que es el factor de resistividad total. Por otra parte, como las rocas de los yacimientos son altamente heterogéneas, normalmente se cuenta con muy pocos datos de campo para caracterizar la roca del yacimiento. Por lo tanto, en este capítulo se discute la forma de generalizar las formulaciones para hacer posible su aplicación a la caracterización geométrica de rocas fracturadas-vugulares.

4.1 Formulaciones para rocas reales

La idea del presente trabajo es crear una teoría físicamente bien fundamentada que no requiere la participación empírica del ingeniero de campo; de hecho, la expresión analítica para el cálculo de la porosidad vugular y de fractura en el modelo idealizado son formulaciones totalmente analíticas que se fundamentan en el comportamiento de un medio poroso fracturado vugular, donde el espacio poroso está con un fluido conductor y se considera que los vugulos, por su gran volumen relativo, son zonas de muy alta conductividad eléctrica en comparación con las fracturas que, en general, tienen una apertura muy estrecha, pero en comparación a la conductividad eléctrica de matriz, la fractura conduce mucho mejor la corriente eléctrica. Ponderando de esta manera, es posible describir el factor de resistividad total como el producto del factor de resistividad debido a vugulos por el factor de resistividad en función de las fracturas. A su vez,

Generalización de las expresiones analíticas

el factor de resistividad de vúgulos es función de su porosidad, ϕ_v , y del número de vúgulos, N , y el factor de resistividad de fracturas es función de la tortuosidad, τ , y su porosidad ϕ_f . En general, las técnicas propuestas hasta ahora no permitían distinguir entre la porosidad de fractura y vugular, por lo que designan la suma de la porosidad de fractura y vugular como porosidad secundaria. Una ventaja de la teoría propuesta aquí es que permite diferenciar ambas porosidades, para lo cual solo se necesitan los datos de campo de la porosidad total y el factor de resistividad, que pueden obtenerse a partir de los registros convencionales de pozos, como son el registro de resistividad, en particular el microsfrico que sirve para el cálculo del factor de resistividad y los registros de densidad, snico y neutrón para el cálculo de la porosidad total. Se pueden utilizar otros tipos de registros, pero para fines prácticos sólo se contemplan los datos del factor de resistividad y porosidad total.

Para hacer extensivas las expresiones de un modelo ideal a una roca fracturada-vugular real, el punto de partida es la observación del comportamiento del factor de resistividad total teórico como función del número de vúgulos por cara y de la porosidad vugular, con una factor de resistividad constante. Para este fin, se gráfica el factor de resistividad total teórico dado por la ecuación

$$F_t = \frac{1 - 0.581N^{1/3}\phi_v^{2/3}}{1 + 0.581N^{1/3}\phi_v^{2/3}} F_f \quad (4.1)$$

El comportamiento teórico del medio poroso ideal muestra que, si se mantiene la porosidad vugular constante, entonces mientras más vúgulos estn

Capítulo IV

presentes en el sistema la conductividad eléctrica es mayor; este mismo comportamiento se observó en los experimentos.

Por otra parte, se ve que para un mismo valor del factor de resistividad de fracturas tenemos varias tendencias u opciones, (ver Fig. 4.1), por lo tanto, para simplificar el problema, se propone normalizar el factor de resistividad total como una función del producto de la raíz cuadrada del número de vugulos por la porosidad vugular, $N^{1/2}\phi_v$, de esta manera, en lugar de tener una serie de curvas se cuenta con una sola curva, la que es función del parámetro normalizado $f_N = N^{1/2}\phi_v$, así cuando mantenemos el factor de resistividad de fracturas constante, el factor de resistividad total es solo función de una sola variable o parámetro de hecho se puede expresar la Ec. 4.1 de la siguiente manera:

$$F_t = \frac{1 - 0.581 f_N^{2/3}}{1 + 0.581 f_N^{2/3}} F_f \quad (4.2)$$

Ahora si se varía además del número de vugulos y porosidad vugular, el factor de resistividad de fracturas que esta en función de la porosidad de fractura ϕ_f y la tortuosidad τ , obtenemos un conjunto de curvas y cada una de estas curvas representa un grupo de curvas que dependen como se comentó anteriormente del número de vugulos y de la porosidad vugular, para esto se gráfica, Fig. 4.2, Factor de resistividad total, F_t , en función de la variable normalizada, f_N , con la ayuda de la siguiente expresión:

$$F_t = \frac{1 - 0.581 f_N^{2/3}}{1 + 0.581 f_N^{2/3}} \left(\frac{\tau}{\phi_f} \right) \quad (4.3)$$

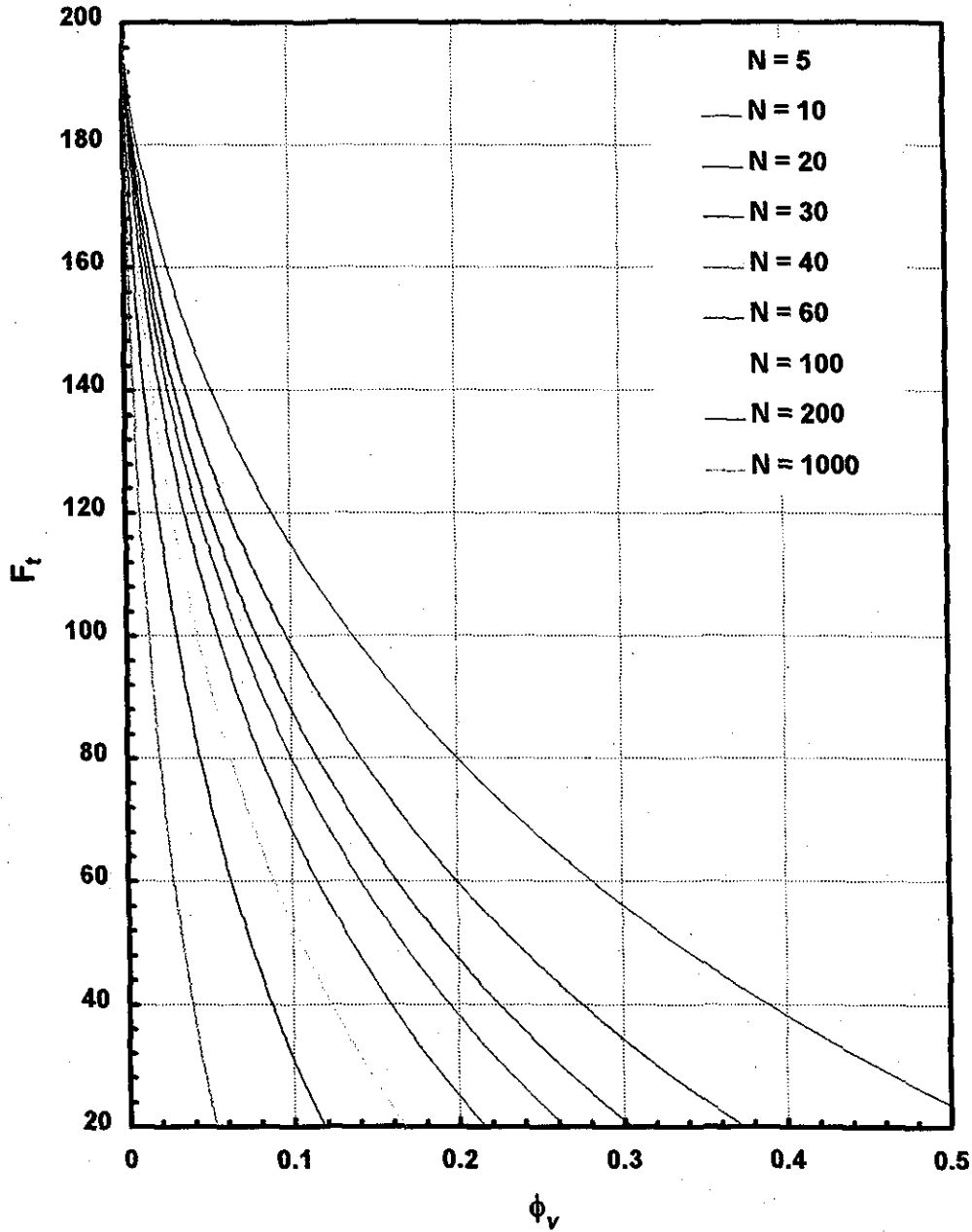


Fig. 4.1. Factor de resistividad total en función de la porosidad vugular ϕ_v y del número de vugulos N.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo IV

Esta expresión tiene la ventaja de reducir el número de variables de 4 a 3, además el espacio bidimensional donde se determina f_N , ϕ_f y τ esta bien definido, es decir, un punto cualquiera dentro del plano solo pasa una y solo una curva, se evita el problema de tener una serie de curvas que pasen por el mismo punto y así tener una indefinición, que se podría presentar si tratase de determinar la porosidad vugular y de fractura que se obtiene con otros métodos, en este sentido el factor de resistividad total es una propiedad petrofísica que por si sola no puede determinar el tipo de sistema que se esta estudiando, por otra parte, la desventaja de esta expresión es que sigue dependiendo de tres variables y sólo una de campo, por otra parte sabemos que la porosidad total es la suma de la porosidad de fractura más la porosidad de vugulo, $\phi_t = \phi_f + \phi_v$, si nosotros introducimos la porosidad de fractura como la sustracción de la porosidad total menos la porosidad vugular, $\phi_f = \phi_t - \phi_v$, y se sustituye en la Ec. 3.3 se expresa la Ec. 3.3 como

$$F_t = \frac{1 - 0.581 f_N^{2/3}}{1 + 0.581 f_N^{2/3}} \left(\frac{\tau}{\phi_t - \phi_v} \right) \quad (4.4)$$

La Ec. 4.4 es una expresión que depende de cuatro variables: la porosidad total ϕ_t , porosidad de vugulo ϕ_v , tortuosidad de fracturas τ_f y la variable normalizante f_N . Aparentemente en lugar de reducirse variables aumento, pero se necesita introducir más información de campo; por esta razón se deben de emplear datos medidos en campo tanto directa como indirectamente, y contandose con el registro de resistividad (microesférico o algún otro que estime la resistividad en la zona lavada), que mide la resistividad de la roca 100 % saturada

Generalización de las expresiones analíticas

del filtrado de lodo, y la resistividad del filtrado de lodo. Adicionalmente se dispone de los registros sónicos, la densidad y el de neutrónico, cuya información se manipula conjuntamente para determinar la porosidad total de la formación; por esta razón la Ec. 4.4 sigue dependiendo sólo de tres variables, conjuntamente se manipula para determinar la porosidad total de la formación; por esta razón la Ec. 4.4 sigue dependiendo sólo de tres variables, f_N , τ_f , ϕ_v , el factor de resistividad total y la porosidad total son datos de campo. Si se logran manipular alguna manera las tres variables que restan, se estaría dando un paso entre la idealización y la generalización a una formación real, ahora si esta manipulación fuera exitosa una manera de demostrar que no a sido solo matemática es reproduciendo el factor de resistividad total, calculado del registro de resistividad y la resistividad del filtrado de lodo.

Como la roca de yacimiento es altamente heterogénea y sus propiedades cambian de punto a punto, no es posible utilizar alguna ponderación o promedio de estas propiedades a lo largo y ancho a través de la cual se perfora la roca por donde pasa el pozo productor o de exploración según sea el caso, por estas razones se utilizarán métodos de estadística matemática para hacer el cálculo de la tortuosidad, τ , la porosidad ϕ_v , y el parámetro normalizado f_N .

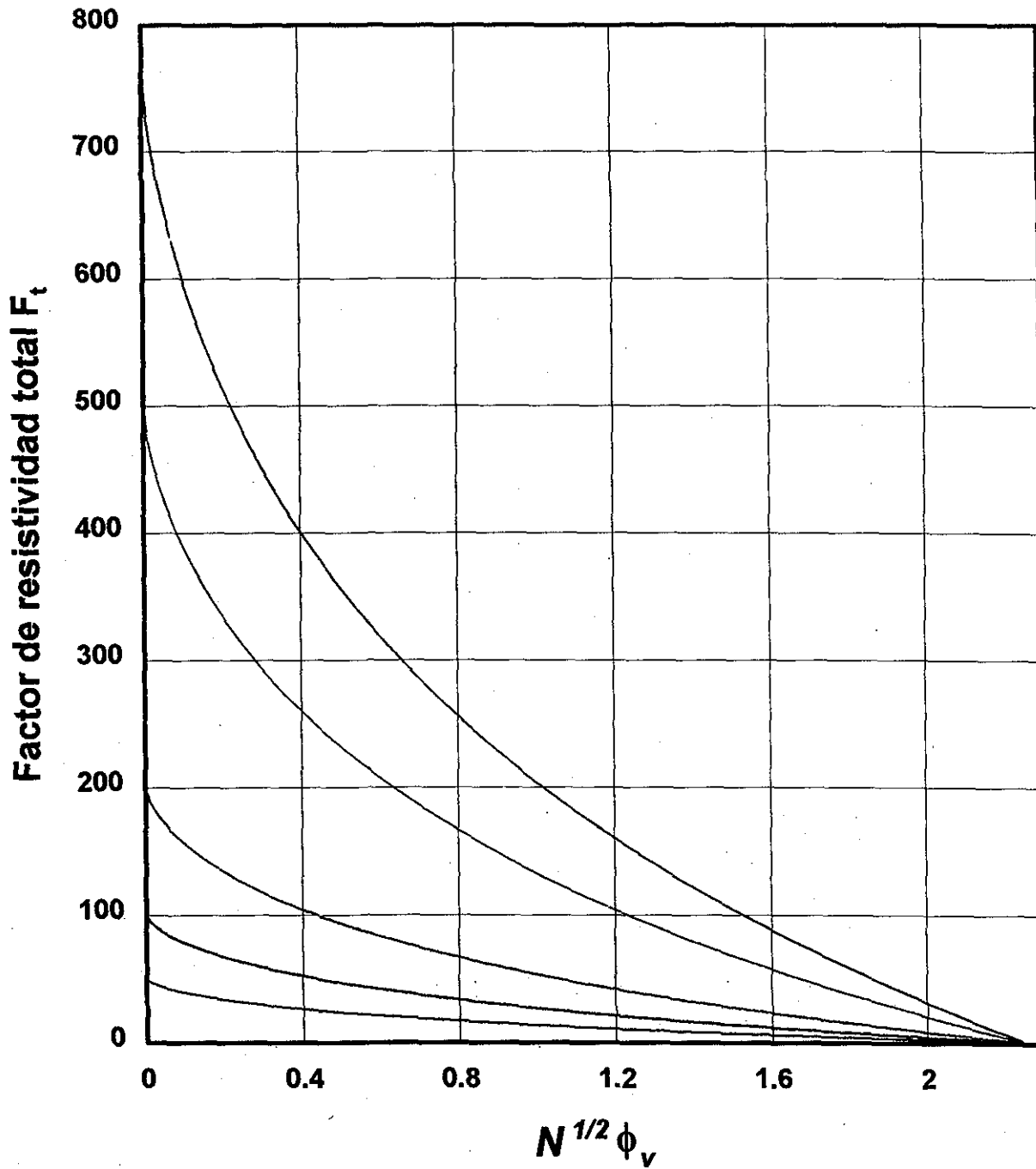


Fig. 4.2 El factor de resistividad total teórico como función de la variable normalizada f_N , la porosidad de fractura ϕ_f y la tortuosidad.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.2 Métodos estadísticos como una solución para generalizar el modelo teórico

Como se mencionó anteriormente, una roca natural es un medio demasiado complejo, que las ecuaciones generadas para caracterizar el medio poroso, ya sea homogéneo o fracturado-vugular, son ecuaciones no lineales; por esta causa, la forma más viable para resolver el problema es la aplicación de la estadística matemática. En esta rama de las matemáticas existen al menos tres métodos que son los más apropiados para la solución de problemas altamente no lineales; estos son el método de Newton-Gauss, el de mínima desviación estándar o "Steepest Descent" y el método de Marquardt.

A continuación se describe brevemente cada uno de los tres métodos, empezando por el método de Newton-Gauss (Hartley, 1961). Sea $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ una muestra dada, donde las X_i son los valores seleccionados de una variable ordinaria X , y las Y_i son valores observados de una variable aleatoria Y correspondiente a esos X_i . Por medio del método de mínimos cuadrados se ajusta una recta

$$Y(X) = a + bX, \quad (4.5)$$

donde se tiene que cumplir que la suma de los cuadrados de las diferencias verticales

$$q = \sum_{i=1}^n [Y_i - Y(X_i)]^2 \quad (4.6)$$

sea mínima. De la misma manera, en lugar de una recta podemos usar una curva. El tipo de esa curva dependerá en gran parte de la cantidad de información teórica disponible acerca de la dependencia de Y como función de X, procurando seleccionar un tipo sencillo de curva. Por ejemplo, es posible escoger un polinomio de grado m:

$$Y(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m, \quad (4.7)$$

si en cierto caso práctico ésta parece más conveniente que una recta, entonces se puede emplear el mismo método anterior descrito por la Ec. 4.6. Para tal propósito primero se sustituyen n expresiones

$$Y(X_i) = b_0 + b_1X_i + \dots + b_mX_i^m, \quad (4.8)$$

en la Ec. 4.6. Entonces q tiene un mínimo para los valores b_0, b_1, \dots, b_m que satisfacen las condiciones

$$\frac{\partial q}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial q}{\partial b_1} = 0, \dots, \frac{\partial q}{\partial b_m} = 0. \quad (4.9)$$

Estas m+1 ecuaciones lineales para las m+1 incógnitas b_0, \dots, b_m se llaman ecuaciones normales. Su solución proporciona los valores para los coeficientes que aparecen en la Ec. 4.8. Para el cálculo de los coeficientes se puede usar el método de eliminación de Gauss. En algunos casos no lineales es conveniente desarrollar un método para resolver las ecuaciones normales empleando una técnica de iteración. La modificación que se le hace al método de Gauss para implementar la técnica de iteración consiste en proporcionar valores iniciales $b_{10}, b_{11}, \dots, b_{1m}$ para los parámetros b_0, b_1, \dots, b_m , y observar a partir del nuevo coeficiente calculado por medio del método de Gauss si se minimiza la suma de

Generalización de las expresiones analíticas

los cuadrados de la distancias. Si esto no ocurre, los nuevos valores calculados para los parámetros b_0, b_1, \dots, b_m se sustituyen por los valores iniciales; ahora el valor de la inicialización es $b_{20}, b_{21}, \dots, b_{2m}$. Esto se repite hasta que se satisface la tolerancia especificada para la suma de cuadrados de la distancia. A este proceso se le conoce como Newton-Gauss. Algunos problemas que se pueden encontrar en este proceso es:

1. Puede converger muy lentamente, y se requiere un número muy grande de iteraciones antes de que el cuadrado de la suma de las distancias pueda decrecer consistentemente, conforme el número de iteraciones aumente.
2. Puede oscilar la suma de las diferencias de los cuadrados de tal manera que la solución no llega alcanzar la estabilización o simplemente no converge, si no diverge.

Un segundo método estadístico matemático se conoce con los nombres de desviación mínima estándar o "Steepest Descent" (Myers, 1990). El proceso es el siguiente: se inicia en una región particular del espacio definida por los parámetros b 's, la cual se selecciona arbitrariamente combinando n estimaciones de los parámetros; después para cada valor de las b 's se determina su valor promedio \bar{b} , la desviación estándar, s , y la desviación estándar normalizada, s/\bar{b} . Este proceso se repite hasta minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias

Capítulo IV

$q = \sum_{i=0}^n [Y_i - Y(X_i)]^2$. Generalmente se escogen las estimaciones de tal forma que los valores tengan la dirección contraria al gradiente de los parámetros, de esta forma se llega a minimizar la suma de los cuadrados de la distancia.

Su principales limitaciones son:

1. Es recomendable que en cualquier proceso estadístico se disponga de un conjunto mínimo de datos experimentales.
2. No es posible su uso cuando se trata de un medio altamente heterogéneo, por la cantidad de datos que requiere el proceso.

Por último, está el método de Marquardt (1963), el cual considera las mejores características del método de Newton-Gauss y el de desviación estándar mínima; este método no es el único que modifica al de Newton-Gauss, por ejemplo, el de Levenberg (1944) también es muy bueno, sólo que en este tipo de proceso se necesita un conocimiento avanzado de las derivadas de orden superior en la serie de Taylor, cerca de la región de la solución. El método de Marquardt (1963) hace una interpolación óptima entre el método de Newton-Gauss y el de desviación estándar mínima, la interpolación se basa sobre la máxima vecindad en la cual el truncamiento en la serie de Taylor proporciona una adecuada representación del modelo no lineal.

A continuación se presenta los principios teóricos del método:

Generalización de las expresiones analíticas

Se propone un conjunto de n estimaciones de $(k+1)$ observaciones con entradas $y_h; x_{1h}, x_{2h}, \dots, x_{kh} (h=1, \dots, n)$,

$$f(x; \theta) \equiv f(x_1, x_2, \dots, x_k; \theta_1, \dots, \theta_m); \quad (4.10)$$

se necesita determinar un conjunto de θ_i 's que permitan minimizar la suma de los cuadrados

$$Q(\theta) = \sum_{h=1}^n (y_h - f(x_h; \theta))^2 = \min \quad (4.11)$$

donde x_h es el vector con k elementos $x_{1h}, x_{2h}, \dots, x_{kh}$ y el símbolo θ es el vector con m elementos $\theta_1, \dots, \theta_m$. La función $f(x, \theta)$ satisface las condiciones siguientes:

a) Se calcula la primera y segunda derivada de $f(x, \theta)$ con respecto a θ_i como se indica a continuación:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_i} \equiv f_i(x, \theta); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = f_{ij}(x, \theta) \quad (4.12)$$

donde las f_i y f_{ij} son funciones continuas de θ para toda k en $x_h(1, 2, \dots, n)$.

La hipótesis anteriores permiten obtener las derivadas siguiente:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i} = Q_i(x; \theta) = -2 \sum_{h=1}^n (y_h - f(x_h; \theta)) f_i(x_h; \theta) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = Q_{ij}(x; \theta) = -2 \sum_{h=1}^n (y_h - f(x_h; \theta)) f_{ij}(x_h; \theta) + 2 \sum_{h=1}^n f_i(x_h; \theta) f_j(x_h; \theta)$$

b) Suponemos que para algún conjunto de u_i 's ($i=1, 2, \dots, m$), donde $\sum u_i^2 > 0$,

Capítulo IV

$$\sum_{h=1}^n \left(\sum_{i=1}^m u_i f_i(x_h; \theta) \right)^2 > 0, \quad (4.14)$$

para el vector observado x_h y para toda θ del conjunto S de soluciones del espacio de parámetros $\theta_1, \dots, \theta_m$.

El proceso se inicia con la estimación del vector ${}_0\theta$. El primer paso consiste en calcular las correcciones a los elementos ${}_0\theta_i$ del vector inicial ${}_0\theta$. Estas correcciones serán proporcional a la solución D_i de las correspondientes soluciones de las ecuaciones de Gauss-Newton 4.11. Las últimas ecuaciones son expresión final que se emplea en este método al sustituir la expansión en serie de Taylor de primer orden de la función $f(x, \theta)$ alrededor $\theta = {}_0\theta$ en la Ec. 4.11, derivadas de acuerdo al criterio de mínimos cuadrados lineal:

$$2 \sum \left\{ \sum_{h=1}^n f_i(x_h; {}_0\theta) f_i(x_h; {}_0\theta) \right\} D_i = -Q_i(x; {}_0\theta), \quad (4.15)$$

donde $Q_i(x; \theta)$ está definida por la Ec. 4.13. Debido a la hipótesis b), la determinación de la ecuación 4.15 tiene un rango de m (Ec. 4.7) y podrá resolverse, obteniendo los elementos de D_i del vector D como solución. Se considera la función

$$Q(v) = Q(x, {}_0\theta + vD), \quad \text{para } 0 \leq v \leq 1, \quad (4.16)$$

y denotamos como v' el valor de v para el cual $Q(v)$ adquiere el valor mínimo en el intervalo $0 \leq v \leq 1$. Definimos el vector

$${}_1\theta = {}_0\theta + v'D, \quad (4.17)$$

Generalización de las expresiones analíticas

con elementos ${}_1\theta_i = {}_0\theta_i + v'D_i$. Así se asegura que la solución se prolongue dentro de la región de soluciones, tal forma logramos que el cálculo anterior se repita hasta converger en la solución.

4.3 Metodología

Dentro del área de evaluación de formaciones, la detección de la existencia y naturaleza de algunas clases de heterogeneidades en las rocas almacenadoras de hidrocarburos, constituye el objetivo de importancia primordial en la caracterización o descripción petrofísica de yacimientos, ya que, a través de ésta, es posible obtener o inferir una imagen más completa de la estructura interna de las formaciones geológicas y, por consiguiente, se puede agilizar la selección de estratos o intervalos potencialmente productores de aceite.

El problema de la identificación y descripción del estado en que se encuentran y manifiestan las rocas sedimentarias, respecto a la presencia de porosidad secundaria en su seno, a través del uso de gráficas o nomogramas, ha sido estudiado desde hace algún tiempo. Aquí se presenta otra alternativa cuya finalidad primordial consiste en unificar estudios teóricos con trabajos experimentales, su formulación matemática es diferente y más general a la de las técnicas tradicionales. Esta nueva propuesta de interpretación se fundamenta en el uso de datos de factor de resistividad, F_r , y porosidad total, ϕ_r , derivados de registros de pozos u obtenidos a través de mediciones directas de laboratorio y es

Capítulo IV

capaz de cuantificar los valores de la porosidad debido a vóculos y fracturas; también permite estimar la tortuosidad y el número de vóculos promedio de la roca fracturada-vugular. Además es posible extender su aplicación a la determinación de tamaño de bloque, diámetro promedio del radio del vóculo y apertura promedio de las fracturas.

La metodología propuesta consta de los pasos siguientes:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- a) La caracterización petrofísica se obtiene a través de un solo procesamiento de datos.
- b) Se calcula el factor de resistividad total y la porosidad total de registros geofísicos de pozo, o de las propiedades petrofísicas de núcleos cortados durante la perforación, o se emplean valores proporcionados por el ingeniero de campo obtenidos a partir de otras fuentes.
- c) Se evalúa la porosidad vugular, el parámetro de normalización y la tortuosidad, directamente de la formulación generalizada, Ec. 4.4.
- d) La evaluación se hace a través de algunos de los métodos estadísticos, como podría ser el método de Newton-Gauss, el de mínima desviación estándar o el de Maquardt, dependiendo del criterio de convergencia requerido.

Generalización de las expresiones analíticas

- e) Se seleccionan la pareja de valores que de las porosidades vugular y total que permitan la mejor aproximación para el factor de resistividad calculado por los registros eléctricos, o al valor experimental de algún núcleo cortado durante la perforación.

- f) A partir del conocimiento de la porosidad vugular, y de la porosidad total, se puede calcular la porosidad de fractura.

- g) También conociendo el factor de normalización y la porosidad vugular, se puede calcular el número promedio de vúgulos.

- h) Por último, se utilizó el programa que se describe en la siguiente sección, el cual fue desarrollado para automatizar el cálculo de las variables a lo largo de todo el pozo.

4.4 Programa de cómputo para la evaluación de la porosidad de fractura y de vúgulo

Debido a la gran cantidad de información que se obtiene de los registros de pozo para caracterizar la roca de los yacimientos, se planteó la idea de automatizar el proceso para acelerar el tiempo de cálculo. Para este fin, se utilizó el software de Mathematica 3.0. Este software tiene la virtud de que permite programar utilizando algunas de las utilidades de su librería. A continuación se

Capítulo IV

describe, a través de un diagrama de flujo el algoritmo, Fig. 4.3, utilizado para la programación, y después se describe el código del programa.

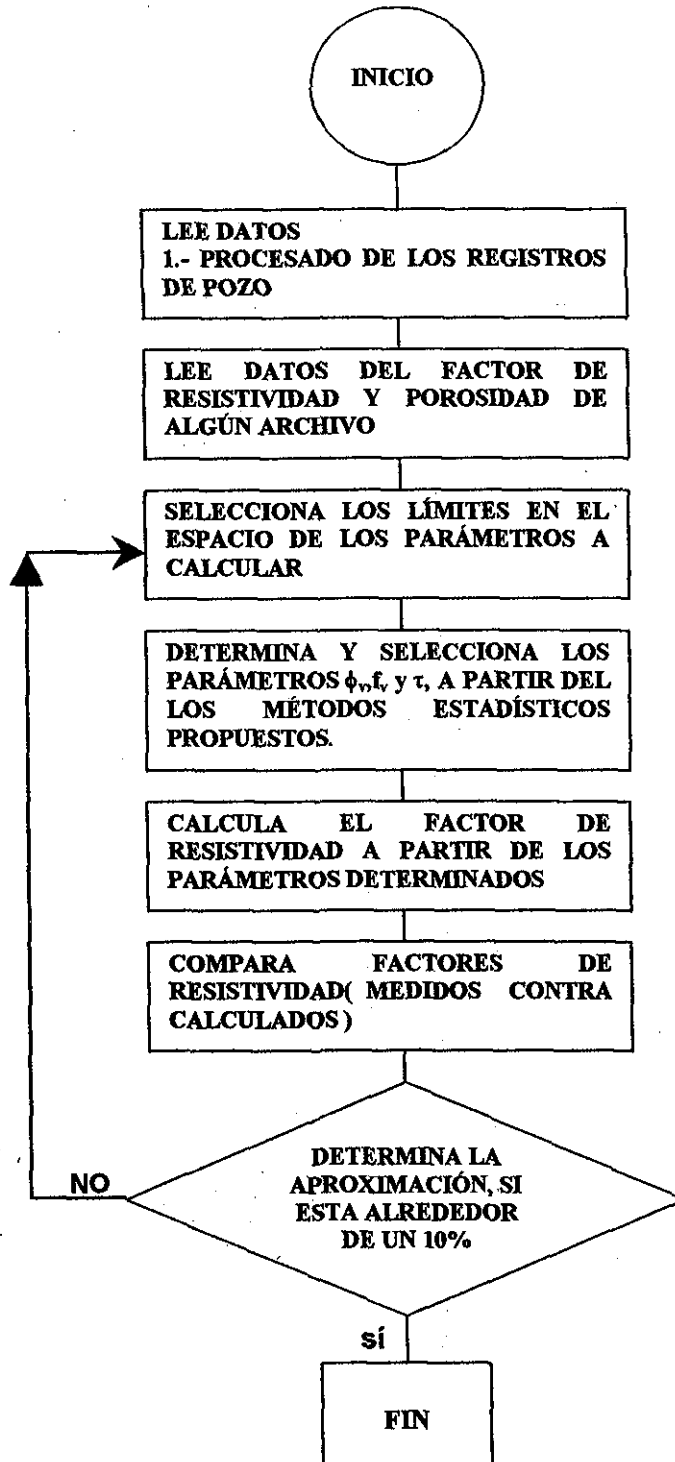


Fig. 4.3 Algoritmo en forma de diagrama de flujo que describe los pasos lógicos para calcular la porosidad vulgar y de fractura.

Generalización de las expresiones analíticas

```
Do[ data = {{registro[[i, 1]], registro[[i, 2]]}};
  Fdato = registro[[i, 2]];
  Fcalculado = registro[[i, 2]]/10;
  particion = 1.3; While[Abs[(Fdato/Fcalculado) - 1] > 0.5,
    parametros = NonlinearRegress[
      data, (((1 - 0.581*fv^(2/3)))/(1 + 0.581*fv^(2/3)))^
      ((tau/(porosidad - fi3))), {porosidad}, {{fv, 0.0, 10.0}, {fi3, 0, 1},
      {tau, 1, 100}}, In
    RegressionReport -> BestFitParameters, MaxIterations -> 20,
    AccuracyGoal -> 18];
  valores = Dispatch[parametros];
  valores1 = {fv, fi3, tau} /. valores[[1, 2]];
  Fcalculado = (((1 - 0.581*valores1[[1]]^(2/3)))/
    ((1 + 0.581*valores1[[1]]^(2/3))))^
    ((valores1[[3]]/(registro[[i, 1]] - valores1[[2]])));
  If[particion > 1.1, particion = particion - 0.03, particion =
particion - 0.1];
  If[particion < 1.01, Fdato = Fcalculado]; Print[valores1[[1]]];
  PutAppend[valores1[[1]], "\<Tablafx.dat>"];
  Print[valores1[[2]]];
  PutAppend[valores1[[2]], "\<tablav22.dat>"];
  Print[valores1[[3]]]; putAppend[valores1[[3]],
  "\<tabla22.dat>"]; Print[i, {i, 1, 1000}]
```

CAPÍTULO V

Aplicación a un Caso de Campo

Es fundamental que todo modelo teórico desarrollado para caracterizar las porosidades de las formaciones productoras sea representativo de la roca de yacimiento. Para estar seguros de que los desarrollos analíticos se aproximan a la realidad física de la roca fracturada-vugular, se evalúa el factor de resistividad total sustituyendo en la Ec. 3.20 los valores de porosidad de fractura, ϕ_f , porosidad de vugulos, ϕ_v , tortuosidad, τ y el número de vugulos, N , obtenidos a través de la metodología desarrollada. Si el valor del factor de resistividad total determinado a través de las expresiones analíticas se aproxima al valor medido directamente de registros eléctricos de pozos, o de experimentos, se puede decir que el modelo analítico es representativo de la realidad. En esta sección a través de la aplicación a un caso de campo, se demostrará que la teoría se aproxima mucho a una realidad física de la roca.

5.1 Establecimiento de la validez del modelo analítico para rocas fracturadas-vugulares

Los datos para la validación son resultados del análisis petrofísico efectuado en muestras de núcleos cortados durante la perforación de los pozos Cantarell 2279, 2239, 2075, 2058, 2011-D, 91 y 6. Estas muestras corresponden a las formaciones de la Brecha Paleoceno, Cretácico Superior, Cretácico Medio, Cretácico Inferior, Jurásico Tithoniano y Jurásico Superior Kimmeridgiano. Las propiedades medidas son la resistividad de los núcleos 100% saturados con una solución de NaCl, y la resistividad de la salmuera para el cálculo del factor de resistividad total y finalmente la porosidad total de cada uno de los núcleos. En la Tabla 5.1 se muestran los datos del factor de resistividad total, porosidad total y profundidad de la muestra. Con fines ilustrativos, se escogieron 23 datos al azar de los 200 datos de núcleos disponibles, con el objetivo de comprobar que el factor de resistividad calculado a partir del modelo propuesto es similar al estimado experimentalmente en los núcleos. Si es así, se habrá demostrado la validez del modelo analítico propuesto en este trabajo. En la tabla 5.2 se tabulan los resultados del modelo teórico propuesto, así como el factor de resistividad medido experimentalmente de los núcleos, la profundidad a la que se obtuvieron los núcleos, la porosidad total obtenida experimentalmente en los núcleos, la porosidad vugular calculada, porosidad de fractura calculada, el parámetro normalizado, la tortuosidad, el porcentaje de fractura, y la razón del factor de resistividad calculado con respecto al experimental. En la tabla 5.2 se observa que

Capítulo V

el valor calculado para el factor de resistividad total por el modelo propuesto es muy similar al valor experimental medido de los núcleos, con un error menor al 1 % , lo cual demuestra que el modelo propuesto en esta tesis puede aplicarse a yacimientos fracturados-vugulares.

Tabla 5.1 Resultados del análisis Petrofísico de porosidad y Factor de Resistividad Total de la muestras de núcleos de los pozos Cantarell 2279, 2239, 2075, 2058, 2011-D, 91 y 6.

Profundidad (m)	Porosidad (fracción)	Factor de Resistividad F_t
1975	0.0481	1016.04
1977	0.0766	3965.98
2423	0.0834	320.90
2423	0.0628	394.79
2423	0.0814	443.66
2425	0.1184	194.53
2555	0.0298	192.16
2678.0	0.0549	590.38
2678	0.0370	1091.67
2959	0.807	116.33
2959.5	0.0391	535.03
2961.5	0.1460	75.69
2962.5	0.0728	148.72
2963.5	0.0326	318.76
3038.0	0.1114	270.6
3081	0.1054	167.91
3100.5	0.02	105
3101.0	0.02	43
3103	0.03	540
3205	0.13	52
3209	0.07	72
3403	0.0181	242.33
3570	0.0528	469.51

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Aplicación a un caso de campo

Tabla 5.2. Resultados de las propiedades que se pueden estimar a partir del modelo propuesto empleando los datos experimentales que se incluyen en el modelo y la profundidad a la que pertenece cada núcleo, pozos Cantarell 2279, 2239, 2075, 2058, 2011-D, 91 y 6.

Profundidad	ϕ_e	F_t campo	f_n	ϕ_v	τ	ϕ_r	% de ϕ_r	F_t calculado	F_t está/ F_t campo
1975	0.0481	1016.04	0.25	0.0448	5.46	0.0033	7.47	1014.22	1.00
1977	0.0766	3965.98	0.33	0.0745	5.00	0.0021	2.83	3960.12	0.34
2423	0.0834	320.9	0.65	0.0771	5.11	0.0063	8.14	324.61	1.00
2423	0.0628	394.79	0.67	0.0580	4.98	0.0048	8.37	396.28	1.00
2423	0.0814	443.66	0.34	0.0751	4.98	0.0063	8.37	443.08	1.00
2425	0.1184	194.53	0.32	0.1094	3.05	0.0090	8.19	207.24	1.00
2555	0.0298	192.16	0.75	0.0248	2.73	0.0050	20.18	191.62	1.00
2678	0.0549	590.38	0.37	0.0505	4.80	0.0044	8.70	589.09	1.00
2678	0.037	1091.67	0.31	0.0342	5.16	0.0028	8.04	1089.68	1.00
2959	0.807	116.33	0.14	0.7673	6.29	0.0397	5.17	116.86	1.00
2959.5	0.0391	535.03	0.35	0.0360	2.95	0.0031	8.48	534.09	1.00
2961.5	0.146	75.69	0.33	0.1236	3.01	0.0224	18.14	79.20	1.00
2962.5	0.0728	148.72	0.34	0.0615	2.99	0.0113	18.29	150.38	1.00
2963.5	0.0326	318.76	0.35	0.0275	2.94	0.0051	18.58	318.01	1.00
3038	0.1114	270.6	0.61	0.1034	5.30	0.0080	7.78	270.03	1.00
3081	0.1054	167.91	0.34	0.0890	4.94	0.0164	18.43	182.52	1.00
3100.5	0.02	105	1.00	0.0154	1.83	0.0046	30.00	104.14	1.00
3101	0.02	43	1.00	0.0154	1.00	0.0046	30.00	42.74	1.34
3103	0.03	540	0.64	0.0277	3.07	0.0023	8.11	539.03	1.00
3205	0.13	52	0.70	0.1093	2.89	0.0207	18.95	51.88	1.00
3209	0.07	72	0.79	0.0578	2.61	0.0122	21.17	71.82	1.00
3403	0.0181	242.33	0.83	0.0148	2.48	0.0033	22.29	241.71	1.00
3570	0.0528	469.51	0.67	0.0487	4.98	0.0041	8.37	468.91	1.00

5.2 Cuantificación de la porosidad vugular y de fracturas del pozo Cantarell C-2079.

El campo Cantarell se ubica a 85 kms. al norte de Cd. del Carmen, la profundidad del mar en que se cubica el yacimiento varía de 35 a 40 mts. Para la explotación del campo, se cuenta actualmente con 17 plataformas periféricas, 3 complejos de producción y una plataforma modular y 49 ductos.

Cantarell es el complejo más importante de México y comprende 4 campos adyacentes que son Akal, Chac, Kutz y Nohoch. De éstos, el campo Akal es el mayor; contiene 92% del volumen original de este complejo y representa el 98 % de la producción total del mismo. Los campos Chac y Nohoch son más pequeños y aportan sólo el 2 % de la producción. El campo Kutz ubicado al noroeste, todavía no tiene producción comercial.

Geológicamente, la producción proviene de rocas de edad paleoceno, del Cretácico y del Jurásico. El espesor promedio de las formaciones varía de 141 a 908 mts. Las características productoras excepcionales del campo son resultado de un fracturamiento intenso con porosidad vugular, La característica principal del yacimiento es que es un anticlinar recumbente, con movimiento relativo del oeste hacia el este. El frente de la falla define el límite noroeste del campo.

Aplicación a un Caso de Campo

Debido a su naturaleza fracturada-vugular se escogió el Complejo Cantarell para el cálculo de la porosidad vugular y de fractura, y en particular se seleccionó el pozo 2079 del Campo Akal. Este pozo atraviesa las formaciones de la Brecha del Paleoceno y el Cretácico; los datos que se tienen son el registro de resistividad, la porosidad total, el diámetro de invasión, el volumen de arcilla, el diámetro del agujero y la profundidad a la que pertenecen estos datos.

El intervalo de estudio está a una profundidad de 2550-2580 m y en las Figuras 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4 se presentan los resultados más interesantes. En la Figura 5.1 se indican los valores de la porosidad total, vugular y de fractura como función de la profundidad, donde podemos observar que la porosidad de fractura es mucho menor que la porosidad vugular. En la Figura 5.2 se muestran la porosidad vugular y el número de vúgulos por cara en función de la profundidad, se observa que conforme aumenta la porosidad vugular el número de estos tiende a disminuir y viceversa. Este comportamiento hace pensar que conforme el número de "vúgulos" aumenta la formación tiende a un medio poroso pseudohomogéneo, con porosidad intergranular y fracturamiento.

En la Figura 5.3 se grafica el número de vúgulos por cara en función de la porosidad vugular. Aquí también se observa que conforme la porosidad vugular decrece, el número de vúgulos aumenta.

Capítulo V

Por último en la Figura 5.4 se grafica la porosidad vugular en función de la profundidad, así como la fracción de volumen del espacio poroso debido a fracturas y vúgulos en función de la profundidad; en este caso, como se espera que suceda podemos observar que conforme la porosidad vugular decrece la contribución al espacio que es debido a fracturas tiene una contribución mayor. Esto se debe a que conforme la formación es más compacta la roca del yacimiento tiende a fracturarse más fácilmente.

En el intervalo productor la porosidad promedio es de 11.84 %, y está constituida por 10.5 % de porosidad vugular y de 1.34 % de porosidad de fracturas.

En la Fig. 5.5 se muestra un núcleo del pozo Cantarell 2092D donde se visualiza que el volumen de los vúgulos es mayor que el de las fracturas, tal como considera en la metodología que se presenta en esta tesis, lo cual se corroboró con los resultados obtenidos.

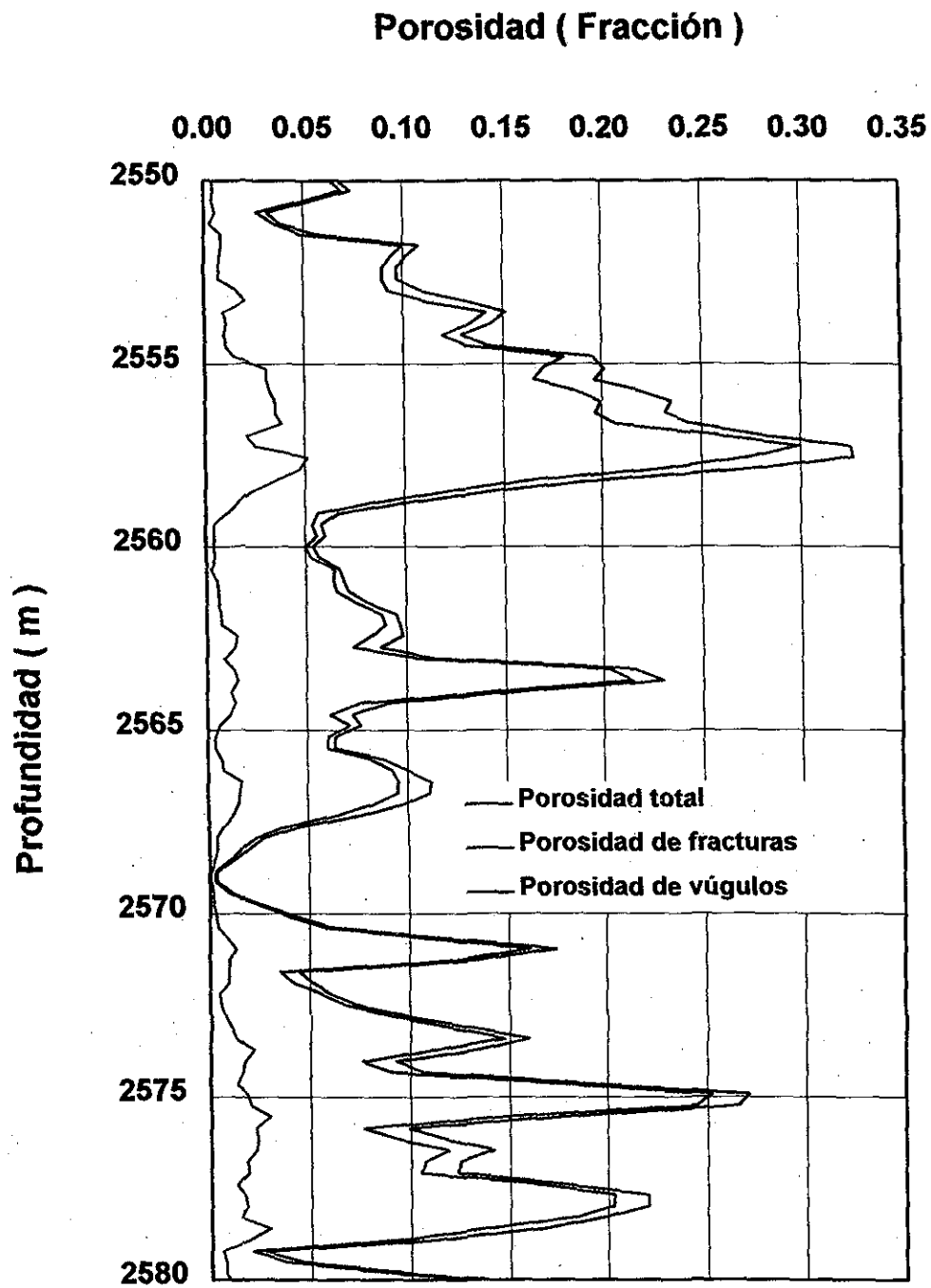


Fig. 5.1 Variación de la porosidad total, vugular y de fractura en función de la profundidad, pozo Cantarell 2079.

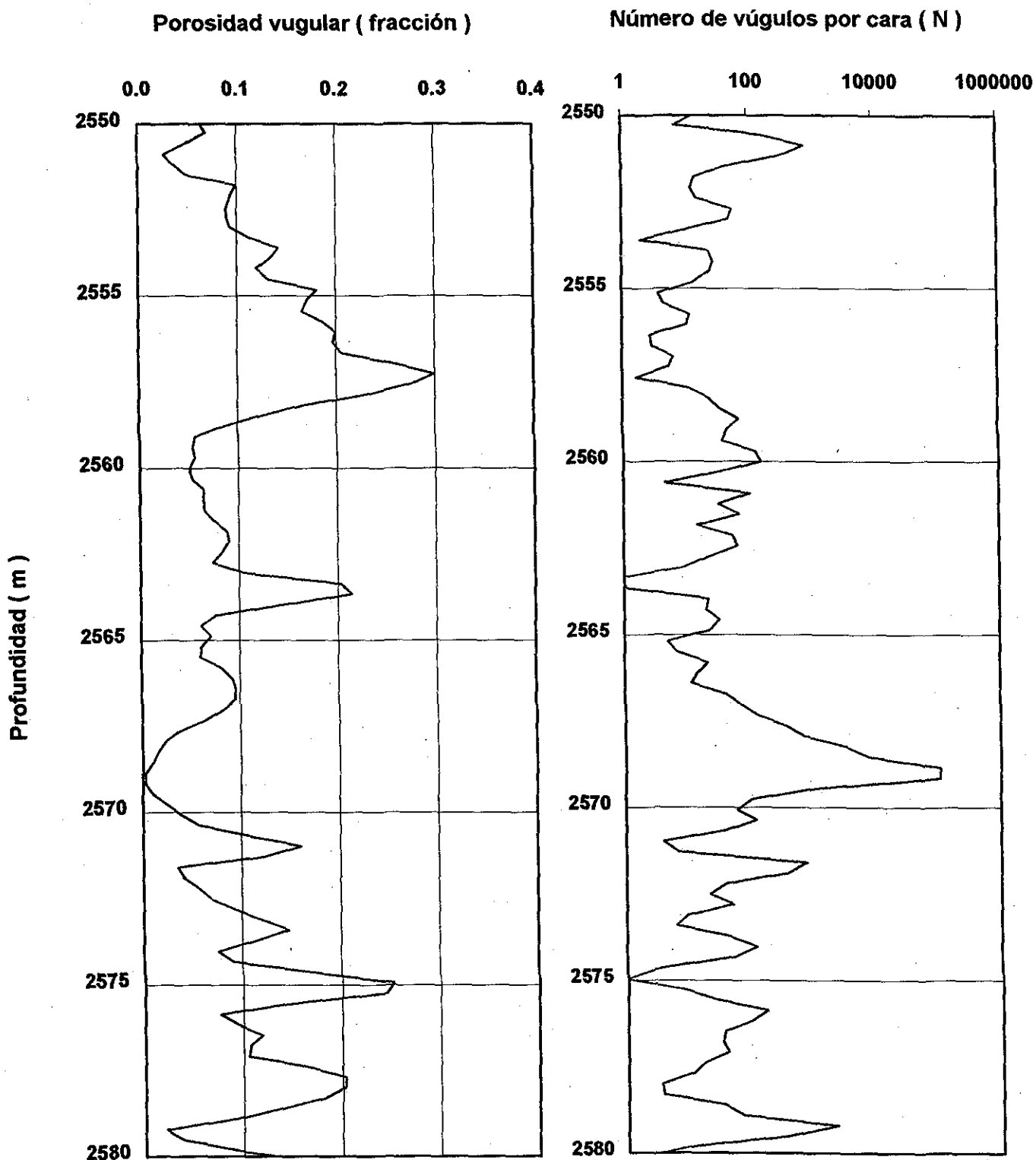


Fig. 5.2 Variación del número de vugulos y porosidad vugular en función de la profundidad, pozo Cantarell C-2079.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

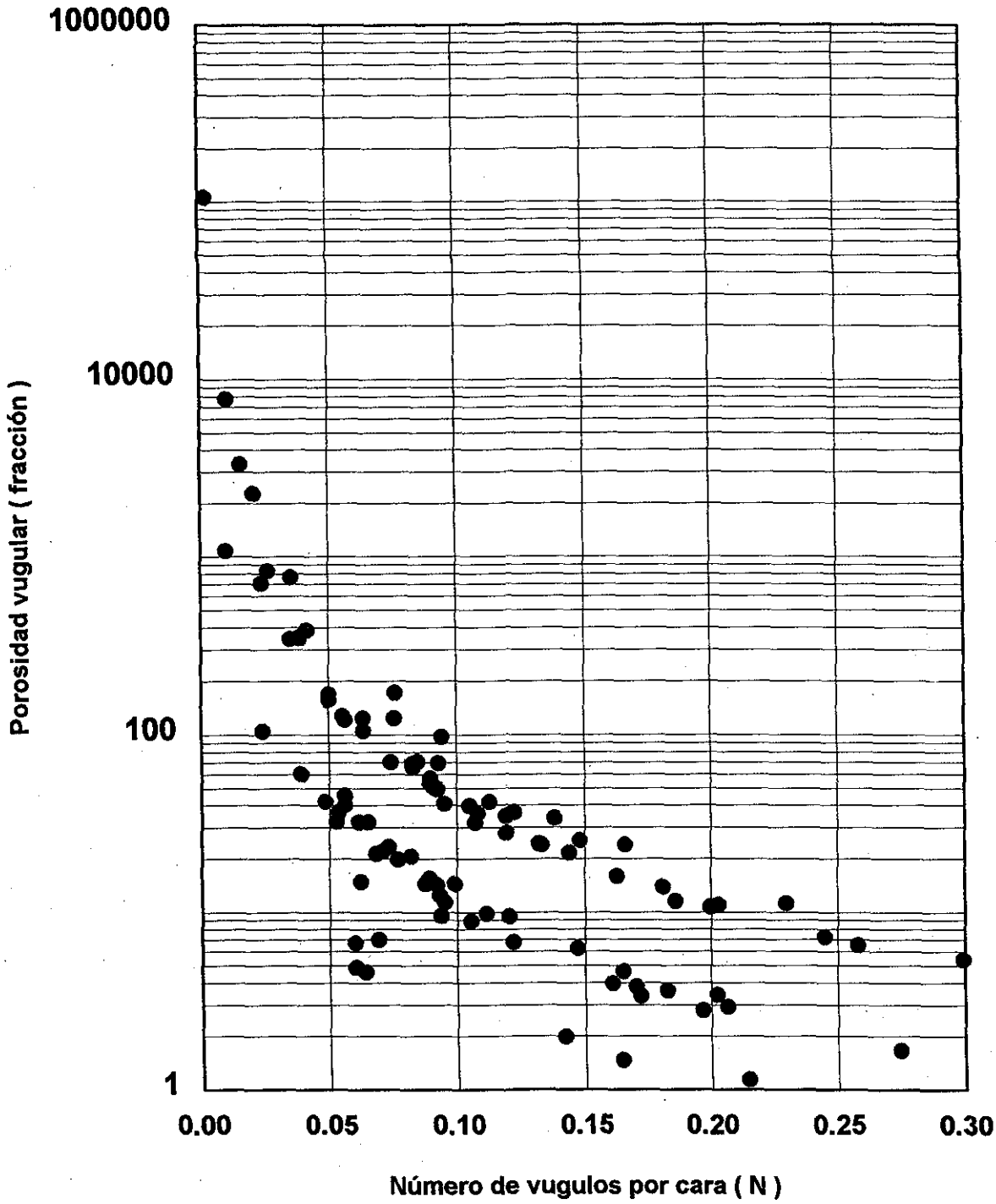


Fig. 5.3 Número de vugulos por cara, N, en función de la porosidad vugular, pozo Cantarell 2079.

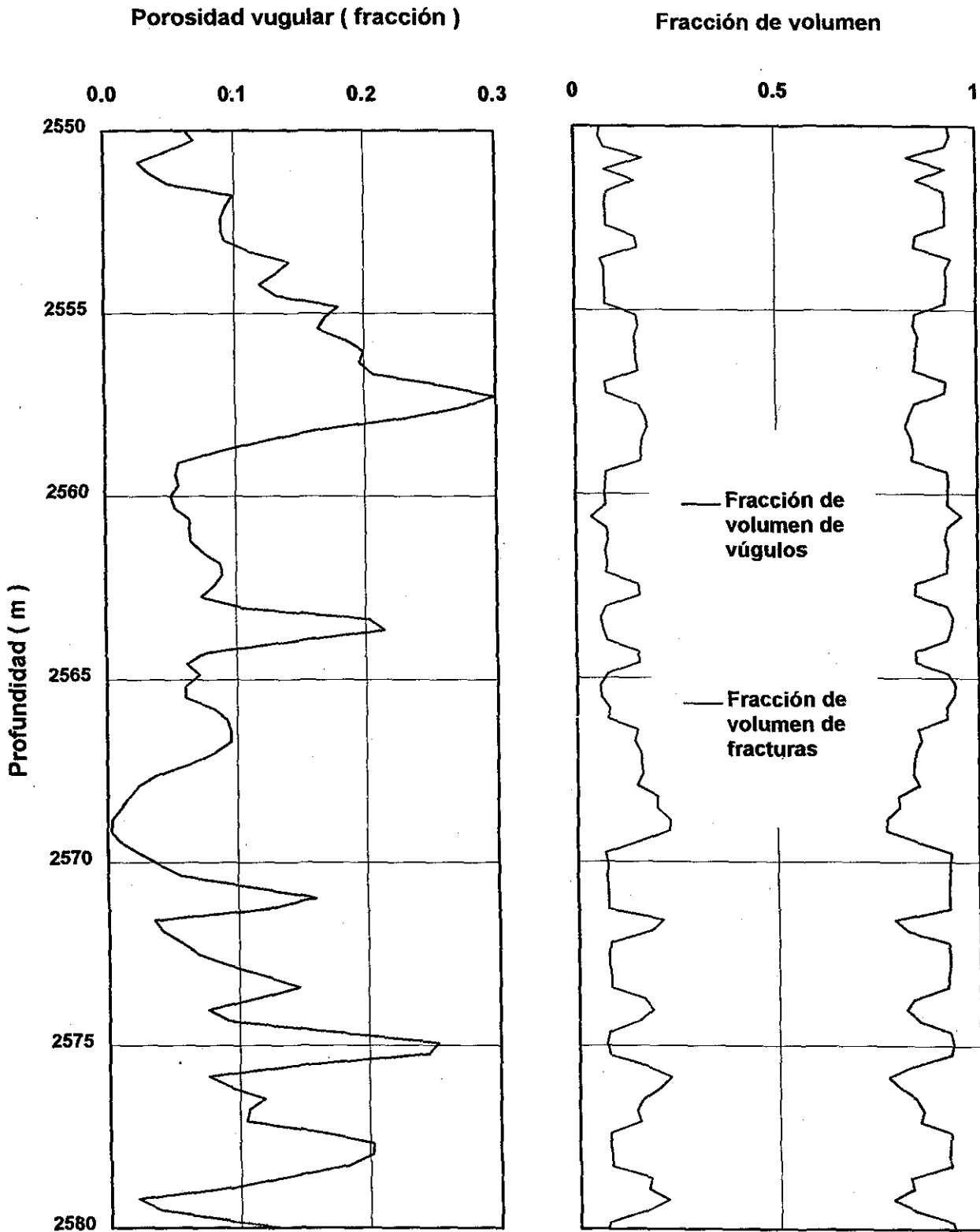
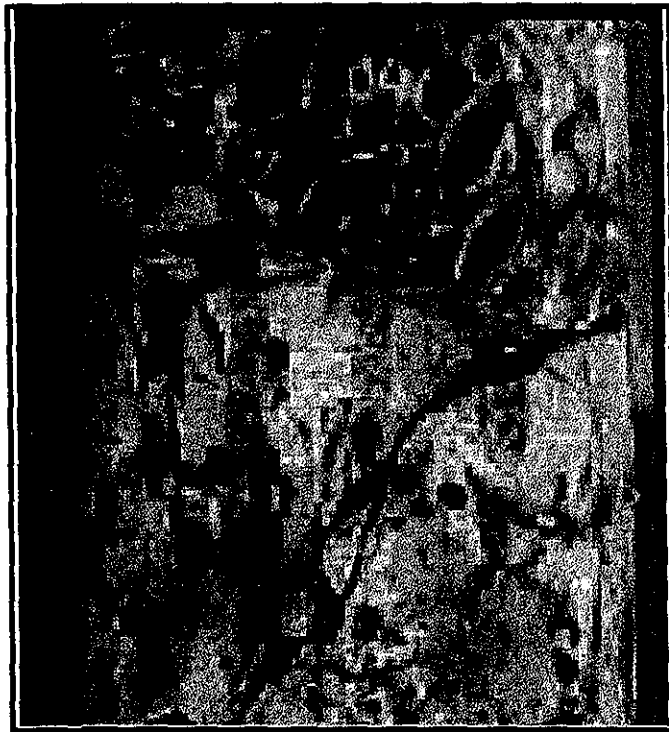


Fig. 5.4 Fracción del volumen de vúgulos y de fracturas en función de la porosidad vugular y profundidad, pozo Cantarell 2079.

Pozo: Cantarell 2092-D

Núcleo: 1 Intervalo: 2648-2656 mbmr



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Edad: Paleoceno Inf.- Cretácico Superior.

Litología: Brecha dolomitizada color gris oscuro, de fragmentos angulosos y subredondeados, de 1 a 8 cm de longitud, de dolomía, cementados en mesodolomita color gris claro, densamente fracturada. Presenta fracturas y vórgulos con buena impregnación de aceite pesado. Se aprecia un fragmento de Rudista en la parte superior.

Porosidad: Buena intercrystalina, vugular y en fracturas.

Fig. 5.5 Vista de un núcleo del pozo 2092D (Ramos-Rodriguez H. Y Morales-Suarez M., 2001).

CAPÍTULO VI

Análisis y Discusión de Resultados

En las secciones anteriores se han desarrollado expresiones teóricas para caracterizar el medio fracturado-vugular a través del factor de resistividad. Para el establecimiento de estas formulaciones, el medio fracturado vugular es idealizado por medio de un arreglo de cubos, en cuyas caras se perforaron cavidades hemisféricas. Para lograrlo se consideró que: (1) un medio fracturado vugular se puede idealizar por un arreglo de cubos similar al modelo de Warren y Root (1963), pero con cavidades hemisféricas en sus caras para representar los vúgulos (Fig. 3.1); y (2) cuando el espacio poroso está saturado con un fluido conductor, por ejemplo un electrolito, los vúgulos, por su gran volumen relativo, son zonas de muy alta conductividad eléctrica en comparación con las fracturas que, en general, tienen una apertura muy estrecha.

En los desarrollos teóricos de este trabajo se encontró que el factor de resistividad total de un medio fracturado vugular, puede expresarse como el producto del factor de resistividad debido exclusivamente a fracturas por un factor de resistividad debido a la influencia de los vúgulos.

A través de los experimentos descritos se observó, que salvo algunos puntos experimentales que no se ajustan a las curvas teóricas, debido

Análisis y Discusión de Resultados

posiblemente a errores experimentales, en general, la concordancia entre teoría y experimentos es lo suficientemente buena para concluir que las hipótesis empleadas en los desarrollos teóricos fueron las adecuadas.

La metodología desarrollada plantea manipular las expresiones analíticas de tal forma que disminuya el número de variables o de parámetros y aumente el número de datos de campo; de esta manera se pueden aplicar técnicas de estadística matemática, que permitan linealizar el problema y lograr que la evaluación de la porosidad de fractura y vugular tengan un grado de incertidumbre pequeño.

La verificación de esta metodología consiste en reproducir el factor de resistividad obtenido experimentalmente cuando procedemos en forma inversa; es decir, sustituyendo el parámetro de normalización, la porosidad de fractura y vugular, y la tortuosidad, se reprodujo el factor de resistividad calculado experimentalmente hasta en un 99.9 %. Para el caso práctico correspondiente al pozo C-2079 los datos del factor de resistividad y porosidad varían con respecto a la profundidad, y como los yacimientos a los que está orientado este estudio son altamente heterogéneos, la porosidad de vugulos y de fractura varían con la profundidad, se logra para el caso más heterogéneo como lo es un yacimiento real, reproducir el factor de resistividad calculado por los registros de resistividad hasta en un 99.9 %.

Capítulo VI

Se emplea de referencia el factor de resistividad para demostrar que las expresiones propuestas son validas, debido a que es una propiedad que se calcula directamente de los experimentos y no un resultado obtenido de una medición indirecta, como lo sería la porosidad total.

La gran mayoría de los procedimientos convencionales permiten, para la caracterización de formaciones naturalmente fracturadas, la detección de fracturas o la estimación del tipo de porosidad del medio poroso, como son las "gráficas cruzadas" que permiten una estimación de la existencia de porosidad vugular o fractura, pero cada gráfica por si sola, no proporciona una solución única en la determinación del tipo de porosidad que predomina en el intervalo en estudio y en ocasiones, pueden llegar a contradecirse en cuanto al tipo de porosidad que existe en la formación. Sólo una minoría de estos métodos proporciona valores de porosidad primaria/secundaria, como son los de Aguilera (1974,1976), Burcke-Campbell et al (1969), Gómez-Rivero (1978) y Mendoza-Romero (1985).

Debe tenerse en mente que los resultados derivados de los procesamientos de Aguilera (1974,1976) y de Burcke-Campbell y cols (1969). deben tomarse con reserva por la gran incertidumbre, esto ocasionado por la hipótesis planteadas en sus trabajos. Burcke-Campbell y Cols plantean que debido a que los vúgulos y fracturas están distribuidos aleatoriamente la onda de energía acústica que viaja a través de la formación observa la porosidad secundaria como si fuera matrix, por esta causa la medida del tiempo de viaje de la onda longitudinal será inferior al

Análisis y Discusión de Resultados

predicho por la porosidad total. Esto es totalmente erróneo, primero porque cualquier fluido que este saturando los espacios de los vugulos y las fracturas tienden a tener una diferente densidad que la roca; en segundo lugar, cuando la onda de energía acústica atraviesa los vugulos y fractura tiende a atenuarse de tal manera que ocasiona que el tiempo de registro de viaje tienda a incrementar y no a disminuir, como lo propone el autor. Por su parte, Aguilera comete varios errores en la deducción de sus ecuaciones para detectar y evaluar los yacimientos naturalmente fracturados, además se fundamenta en el exponente m de "cementación" para evaluar a los yacimientos naturalmente fracturados, cuando el factor de resistividad es multifuncional, es decir, depende de muchas variables, como es la tortuosidad, la porosidad, el tamaño de los granos, etc. En un trabajo posterior la porosidad total y de fractura y el coeficiente de partición son función de la porosidad, m (exponente de doble porosidad), y m_b (exponente de cementación de la matriz), esto es controversial porque en principio el exponente m no esta bien definido, algunos argumentan que es función de la cementación, del tamaño de grano y de su geometría y de la tortuosidad, por esta razón es muy aventurado definir variables que ni siquiera están físicamente bien entendidas.

Las metodologías de Gomez-Rivero (1978) y Mendoza-Romero (1985) dividen la porosidad en primaria y secundaria, además describen el tipo de sistema, pero no separan cuantitativamente la porosidad vugular de la porosidad de fracturas, sino que las integran dentro de la porosidad secundaria, y proponen

Capítulo VI

que los vógelos y las fracturas son altamente conductoras, lo cual impide su distinción.

Las ventajas de la técnica propuesta en esta tesis con respecto a los métodos señalados son las siguientes: (1) se calcula la porosidad vugular y de fractura; (2) los datos de entrada son fáciles de obtener; (3) la metodología no es empírica, sino que se apoya en desarrollos teóricos; y (4) la porosidad vugular y de fracturas se pueden calcular fácilmente.

En general, el trabajo presente permite caracterizar la formación fracturada-vugular suponiendo que la roca presenta una porosidad vugular comunicada a través de las fracturas; por esta razón, la expresión analítica incluye una singularidad al llevar al límite cero la apertura de fractura. Conforme disminuye la porosidad de fractura el factor de resistividad es infinito, físicamente es posible porque las líneas de corriente eléctrica no tienen por donde viajar, y la presencia de vógelos totalmente aislados no contribuyen al paso del flujo de corriente eléctrica; es decir para fines prácticos el cálculo de la resistividad de la roca saturada por algún electrolito en presencia de vógelos aislados se comporta como si no existieran éstos espacios porosos.

Por otra parte, si la comunicación no fuera causada por la presencia de fracturas sino por la intercomunicación entre vógelos, se estaría cometiendo un error, el cual se podría resolver expresando el factor de resistividad de fractura

Análisis y Discusión de Resultados

como la tortuosidad sobre la porosidad de fractura, empleando la Ec. 3.3, lo cual permitiría evitar esta singularidad.

Si la porosidad vugular fuera cero obtendríamos que las líneas de corriente viajan totalmente por la porosidad de fractura, y la estimación se reduce a la tortuosidad y la porosidad de fractura a partir del factor de resistividad; en cambio si la porosidad vugular es diferente de cero el número de vúgulos permitidos en el sistema o en la formación disminuye si la porosidad vugular crece. Por ejemplo, físicamente se espera que el número de poros en un medio homogéneo intergranular sea mayor que el número de poros(vugular) presentes en un medio fracturado-vugular.

Si se propone que los vúgulos de un medio poroso heterogéneo (fracturado) y poros de un medio intergranular homogéneo se diferencien sólo por el orden de magnitud del tamaño de estos, se podría diseñar un experimento para el caso donde el tamaño del poro poco a poco aumente de dimensiones; si esto llegara a pasar como una realidad física de la roca, el número de poros permitidos disminuiría. Esta misma propiedad física se observó para datos de campo y los resultados se pueden ver en la Fig. 5.2 y 5.3.

CAPITULO VII

Conclusiones

En este trabajo, se presentó un estudio teórico-experimental relacionado con la caracterización geométrica en medios fracturados-vugulares, a través del factor de resistividad. El medio fracturado-vugular se idealizó, empleando un arreglo cúbico de cubos similar al modelo de Warren y Root (1963), pero con cavidades hemisféricas en las caras de los cubos para representar los vúgulos (Fig. 3.1). Además, cuando el espacio poroso está saturado con un fluido conductor, por ejemplo un electrolito, los vúgulos debido a su gran volumen relativo constituyen zonas de muy alta conductividad eléctrica en comparación con las fracturas que, en general, tienen una apertura muy estrecha. También, se manipularon las expresiones analíticas para generalizar a rocas de yacimientos fracturados-vugulares, con la idea de establecer formulaciones nuevas que relacionen factor de resistividad con las porosidades de fractura y vugular, y así mejorar la interpretación de registros geofísicos de pozo. Los resultados del modelo desarrollado para una roca fracturada-vugular muestran que:

1. El factor de resistividad total de un medio fracturado-vugular, se puede expresar como el producto del factor de resistividad asociado a las fracturas (F_f), por un factor de resistividad debido a la presencia de vúgulos (F_v).

Capítulo VII

2. El factor de resistividad asociado a fracturas, (F_f), es función de la tortuosidad y de la porosidad de fractura, o puede ser función de la conectividad y la porosidad de fractura. Se ha encontrado que la tortuosidad es recíproco de la conectividad.
3. El factor de resistividad por la influencia de vógelos, (F_v), es función del número de vógelos, N , y de la porosidad vugular, ϕ_v . Por otra parte, de acuerdo con la Ec. 3.2, el factor de resistividad de los vógelos puede expresarse como función de la fracción areal, f_v , que ocupan los vógelos localizados en las caras de un cubo.
4. Para una porosidad vugular fija, un medio fracturado vugular es mejor conductor a medida que los vógelos son más pequeños.
5. El número de vógelos permitidos en el sistema o en la formación disminuye si la porosidad vugular crece si el factor de resistividad es constante.
6. La fracción de volumen debido a fracturas aumenta si la porosidad total disminuye.

Conclusiones

Los resultados obtenidos al aplicar el modelo propuesto en esta tesis para la caracterización de formaciones fracturadas-vugulares muestran que:

1. El modelo se aproxima mucho a la situación física de una roca fracturada-vugular.

2. Se pueden manipular las expresiones analíticas para calcular la porosidad de fractura y de vugulo, a partir de información de campo.

3. Se pudo desarrollar una metodología sencilla para calcular la porosidad de fractura y de vugulo, la cual tiene las ventajas siguientes con respecto a otros métodos: (a) calcula la porosidad vugular y de fractura;(b) los datos de entrada son fáciles de obtener, (c) no intervienen en la metodología el conocimiento empírico, es decir los desarrollos son totalmente analíticos; (d) es fácil calcular las porosidades vugulares y de fracturas.

Nomenclatura

a	=	Coefficiente de tortuosidad
A_1	=	Área de la placa
A_2	=	Área del disco circular
B	=	Tamaño del sistema
C	=	Coefficiente de tortuosidad
C_M	=	Fracción volumétrica de la fase líquida
D	=	Representa la distorsión que sufren las líneas de corriente cuando atraviesa la separación entre los bloques
E_0	=	Campo eléctrico
f_v	=	Fracción de área ocupada por los discos
f_N	=	Parámetro de normalización
F_t	=	Factor de resistividad total
F_m	=	Factor de resistividad de la matriz
F_v	=	Factor de resistividad de los vóculos
F_f	=	Factor de resistividad de las fracturas
G	=	Parámetro geométrico
L	=	Longitud de bloque
m	=	Exponente de cementación
n	=	Número de bloques

Conclusiones

N	=	Número de vúgulos
P	=	Parámetro que depende de la geometría interna del medio poroso
r	=	Conectividad
R_v	=	Resistencia de los vúgulos
R_f	=	Resistencia de las fracturas
R_v	=	Radio del vúgulo
v	=	El coeficiente de partición
V_v	=	Volumen total de vúgulos hemisféricos contenidos en la celda
V_c	=	Volumen de la celda unitaria
x	=	Coficiente que depende de la irregularidad de los granos de la roca
X	=	Separación entre bloques
ϕ	=	Porosidad total
ϕ_f	=	Porosidad de flujo
ϕ_f	=	Porosidad de fractura
ϕ_s	=	Porosidad de estancamiento o entrapamiento
ϕ_v	=	Porosidad de vúgulo
ϕ_1	=	Porosidad primaria
ϕ_2	=	Porosidad secundaria
ρ_r	=	Resistividad de la roca saturada de algún electrolito
ρ_w	=	Resistividad del electrolito
ρ_2	=	Resistividad de las fracturas
ρ_1	=	Resistividad de los vúgulos

Capítulo VII

σ_r	=	Conductividad de la roca
σ_w	=	Conductividad del agua
σ_s	=	Es la conductividad de los bloques cúbicos
σ_M	=	Conductividad de la fase líquida
σ^*	=	Conductividad efectiva total
τ	=	Tortuosidad

Subíndices

c	=	Celda
f	=	Fractura
f	=	Flujo de corriente eléctrica
m	=	Matriz de la roca
M	=	Parte de la roca que se fundió por las altas temperaturas del manto
N	=	Normalización
s	=	espacio donde no pasa la corriente eléctrica
t	=	Total
v	=	Vígulo
w	=	Salmuera o electrolito

Referencias

Aguilera, R., 1974. Analysis of naturally fractured reservoirs from sonic and resistivity logs. J. Pet. Technol. (Nov.), 1233-1238.

Aguilera, R., 1976. Analysis of naturally fractured reservoirs from conventional well logs. J. Pet. Technol. (Jul.), 764-772.

Archie, G.E., 1942. The electric resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. Trans., AIME, 146: 54-67.

Burke, J. A., Schmidt, A. W. y Campbell, R. L., 1969. The litho-porosity cross plot. The Log Analyst. (Nov.), 25-43.

Cox, D. R. 1970. Analysis, Chapman and Hall, second edition. New York

Cruz-Hernández, J., Pérez-Rosales, C., Islas-Juárez, R. y Mercado-Díaz, A., 2000. Trabajo pendiente de publicación.

Draper, N. R. y Smith, H. 1981. Applied regression analysis, John Wiley & Sons, second edition, New York.

Fricke, H., 1924. A mathematical treatment of the electric conductivity and capacity of disperse systems. *Phys. Rev.*, 24:575-587.

Gomez-Rivero, O. 1978. The F- ϕ -m cross plot- a new approach for detecting natures in complex reservoir rocks by well log analysis. *Proc., SPWLA 19th Annual Logging Symposium, Dallas, TX, Junio 13-16.*

Hartley, H.P. 1961. The modified Gauss-Newton method for the fitting of Non-linear regression functions by least Squares., *Technometrics*, (May), 269-280.

Levenberg, K. 1944. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Quarterly of applied Math*, 2,164-168.

Marquardt, D. W. 1963. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *Journal for the society of industrial and applied mathematics*, (Jun), 431-441.

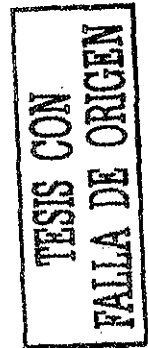
Maxwell, J. C., 1954. *A treatise on electricity and magnetism.* Dover Publications, Inc., New York.

Mendoza-Romero, G. y Pérez-Rosales, C., 1985. New relationship between formation resistivity factor and primary and secondary porosities, *Proc., SPWLA 26th Annual Logging Symposium, Dallas, TX, Junio 17-20.*

Mendoza-Romero, G. y Valle Gonzalez, V., 1996. Modelos petrofísicos para la descripción de yacimientos fracturados. Monografía, Instituto Politécnico Nacional.

Mendoza-Romero, G., 2000. Alcances y perspectivas de los factores de resistividad de sistemas fracturados. Congreso Anual de la UGM, 15 Oct.

Myers, R. H. 1990. Classical and modern regression with applications, Duxbury Press, second edition, Belmont, California.



Pérez-Rosales, C., Navarro, H.R., 1974. Factores de resistividad de sistemas dispersos bidimensionales. Revista del IMP, (Abril), 41-50.

Pérez-Rosales, C., 1976. Generalization of the Maxwell equation for formation resistivity factors. Soc. Pet. Eng. J. (Jul.), 819-824.

Pérez-Rosales, C., 1982. On the relationship between formation resistivity factor and porosity. Soc. Pet. Eng. J. (Ago.), 531-536.

Pérez-Rosales, C., Cruz-Hernández, J., Islas-Juárez, R., Mercado-Díaz, A., 2000. New formulation for formation resistivity factors of fractured porous media. Artículo SPE 58991 2000 SPE Int. Pet. Conf. and Exhib. in Mexico, Villahermosa, Mex., Feb. 1-3.

Pérez-Rosales, C., Mercado-Díaz, A., Cruz-Hernandez, J., Islas-Juarez, R., 2001.

Resistividad eléctrica de medios fracturados vulgares.(Trabajo pendiente de publicación).

Ramos-Rodriguez H. y Morales-Suarez M., 2001. Correlación de las brechas del paleoceno inferior y cretácico superior e imágenes. Segundo Congreso Nacional de Registros Geofísicos de Pozo. Villahermosa, Tabasco, Oct. 1-3.

Ramos-Rodriguez H. Y Morales-Suarez M., 2001. Correlación de las brechas del paleoceno inferior y cretácico superior e imágenes. Segundo congreso nacional de registros geofísicos de pozo. Villahermosa, Tabasco, Oct. 1-3.

Pirson, S. J., 1957. Log interpretation in rocks with multiple porosity types-water or oil wet. World Oil (Junio),196-198.

Towle, G., 1962. An analysis of the formation resistivity factor-porosity relationship of some assumed pore geometries. Presenta en el 3rd Annual Meeting of SPWLA, Houston, TX, May. 17-18.

Waff, H.S., 1974. Theoretical considerations of electrical conductivity in a partially molten mantle and implications of geothermometry. J. Geophys. Res., 79 (26): 4003-4010.

Warren, J.E., Root, P.J., 1963. The behavior of naturally fractured reservoirs. Soc. Pet. Eng. J. (Sep.), 245-255.

Winsauer, W.O., Shearin, H.M., Jr., Masson, P.H., Williams, M., 1952. Resistivity of brine-saturated sands in relation to pore geometry. AAPG Bull., 36 (2): 253-277.

Wyllie, M.R.J., Gregory, A.R., 1953. Formation factors of unconsolidated porous media: influence of particle shape and effect of cementation. Trans. AIME, 198: 103-110.

APÉNDICE A1

Deducción de la Ecuación de Maxwell Tridimensional.

Considérese una esfera de radio a y resistividad ρ_1 dentro de un electrolito de resistividad ρ_2 . Supóngase que el sistema está en presencia de un campo eléctrico uniforme E , cuyas líneas de fuerza tienen dirección $\phi_0 = \text{sen } \theta_0$ (figura A1.1)

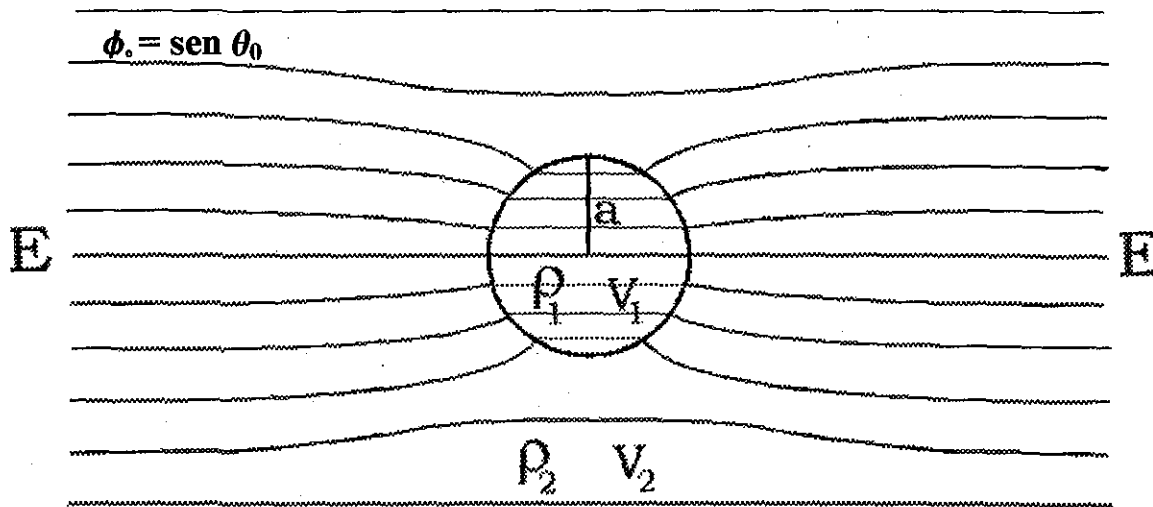


Fig. A1.1 Esfera de radio a y resistividad ρ_1 dentro de un electrolito de resistividad ρ_2 , en presencia de un campo eléctrico E uniforme.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Suponiendo que la densidad de carga es cero, el sistema satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (\text{A1.1})$$

Debido a la geometría del sistema, se utilizan coordenadas esféricas polares para resolver la ecuación de Laplace:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (\text{A1.2})$$

En este tipo de ecuaciones diferenciales parciales existen por lo menos tres métodos que se pueden usar para obtener su solución: transformada de Laplace, funciones generalizadas de Green y separación de variables. En esta tesis se selecciono el método de separación de variables para resolver el problema, en el cual se supone que la función del potencial eléctrico que es función de tres variables se puede representar por tres funciones independientes; así el potencial eléctrico se expresa como:

$$V(\theta, \phi, r) = \Theta(\theta) \Phi(\phi) R(r). \quad (\text{A1.3})$$

Sustituyendo la Ec. A1.3 en la Ec. A1.2 se obtiene

$$\frac{\Theta \Phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R \Phi}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{R \Theta}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{A1.4})$$

Dividiendo la Ec. A1.4 por $R\Theta\Phi$ y multiplicando por $r^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, resulta que:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (\text{A1.5})$$

Pasando las primeras dos derivadas parcial al lado derecho de la igualdad la Ec. A1.5 obtiene:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{\operatorname{sen} \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A1.6})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como las derivadas parciales del lado derecho y del izquierdo de la igualdad son funciones independientes, es válido la igualarlas a una constante; por consiguiente:

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = \lambda; \quad (\text{A1.7})$$

$$-\frac{\text{sen}^2 \theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) - \frac{\text{sen} \theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \lambda. \quad (\text{A1.8})$$

Suponemos que el potencial eléctrico es una función constante de ϕ ; por lo tanto, $\Phi(\phi) = \text{Cte}$. De esta manera, la ecuación diferencial parcial A1.7 tiene solución e implica que la constante λ sea igual a cero. Entonces la Ec. A1.8 se puede expresar como:

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \frac{1}{\Theta * \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A1.9})$$

La ecuación A1.9 implica que los miembros de cada lado de la igualdad son constantes; por lo tanto, la Ec. A1.9 se puede expresar como las dos ecuaciones diferenciales parciales

$$-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = \mu; \quad (\text{A1.10})$$

$$\frac{1}{\Theta * \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = \mu. \quad (\text{A1.11})$$

La solución para las Ecs. A1.10 puede obtenerse en función de polinomios de Legendre y de potencias de r , haciendo el cambio de variable $\theta = \cos \phi$, solución de la Ec. A1.11; por lo tanto la solución general del potencial eléctrico es:

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos \theta), \quad (\text{A1.12})$$

donde A_n y B_n son constantes y $P_n(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre de la forma:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d \cos^n \theta} (\cos^2 \theta - 1)^n$$

Por inspección, se sabe que el potencial eléctrico en la esfera es finito, y fuera de la esfera el potencial eléctrico es $V = E_0 r \cos \theta$, por lo tanto tenemos que

$$V_i = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos \theta) \quad (\text{A1.13})$$

para $r < r_i$, y

$$V_w = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n r^{-n-1} P_n(\cos \theta)) + E_0 r P_1(\cos \theta). \quad (\text{A1.14})$$

Las condiciones de frontera son las siguientes:

$$(V_i)_r = (V_w)_r, \quad (\text{A1.15})$$

y

$$\left(\frac{1}{R_i} \frac{\partial V_i}{\partial r} \right)_r = \left(\frac{1}{R_w} \frac{\partial V_w}{\partial r} \right)_r. \quad (\text{A1.16})$$

Aplicando estas condiciones de frontera, se obtienen los valores de las constantes, A_n y B_n , de la Ec. A1.12

Para $n \neq 1$, $A_n = B_n = 0$

y

Para $n = 1$

$$A_1 = -\frac{3E_0 R_i}{2R_i + R_w};$$

y (A1.17)

$$B_1 = -\frac{-r_i^3 E_0 (R_i - R_w)}{2R_i + R_w}$$

Sustituyendo los valores dados por A1.17 en las Ecs. A1.13 y A2.14;

$$V_i = \frac{3E_0 \cos \theta R_i}{2R_i + R_w} r \quad (A1.18)$$

y

$$V_w = \frac{-r_i^3 (R_i - R_w)}{(2R_i + R_w)r^2} E_0 \cos \theta - E_0 r \cos \theta. \quad (A1.19)$$

Estos resultados constituyen una solución analítica para la Ecuación de Laplace que describe la variación del potencial V , para el caso de una esfera inmersa en un medio infinito. Ahora supongamos que en lugar de una sola esfera se tienen N esferas de radio r_i , y que dichas esferas están acomodadas en una esfera de radio r_N . Además se considera que la interferencia eléctrica entre las esferas es despreciable (ver figura 3.3).

Entonces, de acuerdo a la ecuación A1.19, el potencial resultante fuera del sistema esférico debido a la presencia de las N esferas iguales está dado por:

$$V_w = \frac{-Nr_i^3 (R_i - R_w)}{(2R_i + R_w)r^2} E_0 \cos \theta - E_0 r \cos \theta. \quad (A1.20)$$

De manera similar, si \bar{R}_N representa la resistividad promedio de la esfera de radio r_N , el potencial fuera del sistema también puede expresarse como:

$$V_w = \frac{-r_N^3 (R_i - R_w)}{(2R_i + R_w)r^2} E_0 \cos \theta - E_0 r \cos \theta. \quad (\text{A1.21})$$

Igualando las Ecs. A1.20 y A1.21 se tiene que:

$$\bar{R}_N = \frac{R_w [r_N^3 (2R_i + R_w) + Nr_i^3 (R_i - R_w)]}{r_N^3 (2R_i + R_w) - 2Nr_i^3 (R_i - R_w)}. \quad (\text{A1.22})$$

Ahora de la definición de porosidad

$$Nr_i^3 = r_N^3 (1 - \phi). \quad (\text{A1.23})$$

Sustituyendo la Ec. A1.23 en A1.22 se tiene

$$\bar{R}_N = \frac{R_w [3R_i - \phi(R_i - R_w)]}{3R_w + 2\phi(R_i - R_w)}. \quad (\text{A1.24})$$

Si suponemos que las esferas son de material aislante, su resistividad puede considerarse como infinita; por lo tanto:

$$\bar{R}_N = \frac{R_w (3 - \phi)}{2\phi}. \quad (\text{A1.25})$$

Finalmente, por definición del factor de resistividad, de la Ec. A1.25

$$F = \frac{(3 - \phi)}{2\phi}. \quad (\text{A1.26})$$

Esta última ecuación se conoce como la ecuación de Maxwell.

APÉNDICE A2

Derivación Modificada de la Ecuación de Maxwell Bidimensional

Se desarrolló una expresión analítica que relaciona la conductividad eléctrica de los componentes que constituyen un medio bidimensional en función de sus áreas, aplicable a cualquier tipo de geometría de la frontera que delimita al medio bidimensional y a diferentes tamaños de granos. El medio se constituye básicamente por partículas circulares de conductividad σ_v , dispersas en el interior de un material de conductividad σ_r .

En la obtención de la solución analítica, se propone tratar el medio en diferentes escalas.

- a) Se considera como punto de partida a nivel de grano, dos círculos concéntricos localizados dentro de un campo eléctrico uniforme E_0 , en donde el círculo interior de radio r_a es de un material A, y conductividad σ_a , y el círculo exterior de radio r_b es de un material B, y conductividad σ_b , y que en promedio tienen una conductividad σ^* , ver Fig. A2.1.

- b) A nivel de roca, los granos que la componen conservan su proporcionalidad en el tamaño pero existen de diferentes radios, además se conforma el medio bidimensional con estos dos círculos concéntricos de diferente material.

Así esencialmente el medio se constituye de granos circulares de conductividad σ_v dispersos en el interior de un material de conductividad σ_f . Ver Fig. A2.2.

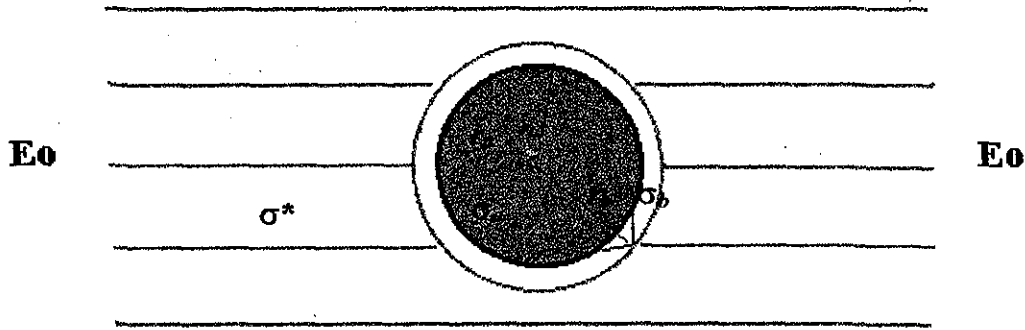


Fig. A2.1 Dos círculos concéntricos localizados adentro de un campo eléctrico E_0 uniforme, donde el círculo interior es de material A, radio r_a y conductividad σ_a , y el círculo exterior es de material B, radio r_b y conductividad σ_b ; En promedio tienen una conductividad σ^ .*

Desarrollo Teórico

A continuación se desarrolla una expresión analítica aplicable a sistemas de elementos circulares concéntricos localizados, adentro de un campo eléctrico E_0 uniforme, y que en promedio los granos tienen una conductividad σ^* . En la deducción se siguen las ideas básicas expuestas en la investigación de Waff (1974), relacionada con la conductividad eléctrica en el manto terrestre y sus aplicaciones en la geotermometría.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

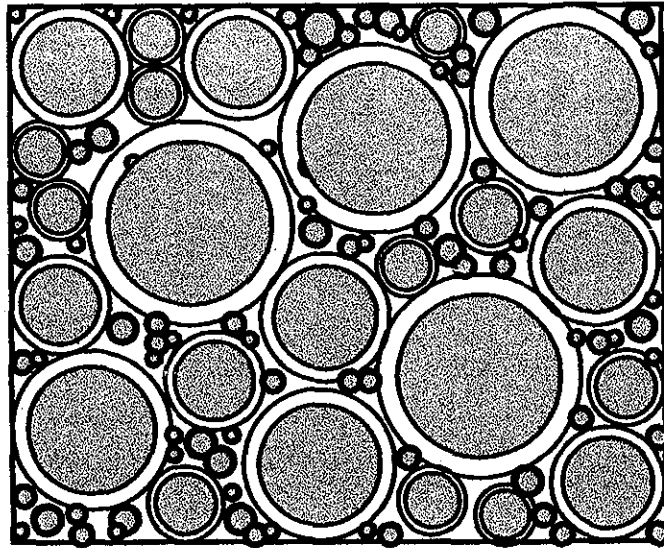


Fig. A2.2 El medio está completamente integrado de elementos constituidos por granos circulares concéntricos de diferente tamaño y material, pero con la misma proporción r_a/r_b .

El campo eléctrico fuera del círculo exterior y en su circunferencia permanece constante porque no hay cambio de energía; así al aplicar el teorema de la divergencia se tiene que el potencial eléctrico puede expresarse como:

$$V = -E_0 r \cos \theta, \quad (\text{A2.1})$$

para toda $r \geq r_b$.

Para derivar el potencial eléctrico en $r < r_b$, se aplica de nuevo el teorema de la divergencia, y debido a que el problema está sujeto a un estado estacionario obedece a la ecuación de Laplace. Debido a la geometría del problema se utilizan coordenadas polares r, θ , por lo que, se puede expresar la ecuación de Laplace en la forma siguiente:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0, \quad (\text{A2.2})$$

donde V es el potencial eléctrico que depende de r y de θ .

Al igual que el problema de Maxwell en tres dimensiones, se resolverá esta ecuación diferencial parcial por medio del método de separación de variables; por lo tanto, el potencial puede expresarse:

$$V(\theta, r) = \Theta(\theta)R(r). \quad (\text{A2.3})$$

sustituyendo A2.3 en la ecuación A2.2, se tiene:

$$\frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} = 0. \quad (\text{A2.4})$$

Los dos términos de esta ecuación deben ser individualmente iguales a una constante. Por lo tanto

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 R = 0, \quad (\text{A2.5})$$

y

$$\left(\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \right) + n^2 \Theta = 0. \quad (\text{A2.6})$$

La solución de la ecuación A2.6 es la siguiente:

$$\Theta_n = A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{Sen} n\theta, \quad (\text{A2.7})$$

La Ec. A2.5 se puede expresar como

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0, \quad (\text{A2.8})$$

la cual se puede transformar en otra ecuación, introduciendo una nueva variable independiente, t , definida por la expresión siguiente:

$$t = \ln r. \quad (\text{A2.9})$$

Por la regla de la cadena de diferenciación se tiene que

$$\frac{dR}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{dt}, \quad (\text{A2.10})$$

y

$$\frac{d^2R}{dr^2} = \frac{1}{r^2} \frac{d^2R}{dt^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dR}{dt}. \quad (\text{A2.11})$$

Al sustituir las Ecs. A2.10 y A2.11 en la Ec. A2.8 se llega a la Ec.

$$\frac{d^2R}{dt^2} - n^2 R = 0, \quad (\text{A2.12})$$

cuya solución es

$$R_n = C_n e^{\lambda t} + D_n e^{-\lambda t}. \quad (\text{A2.13})$$

Puesto que $t = \ln r$, la Ec. A2.13 se puede expresar

$$R_n = C_n r^n + D_n r^{-n}. \quad (\text{A2.14})$$

De acuerdo con la Ec. A2.3, toda función de la forma $R_n \Theta_n$ es una solución de la Ec. A1.2. Por lo tanto, la solución general se obtiene por una superposición de las soluciones fundamentales individuales; es decir,

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \Theta_n. \quad (\text{A2.15})$$

Entonces, considerando las Ecs. A2.7 y A2.14 tenemos que

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (\text{A2.16})$$

Esta expresión A2.16 permite estimar el potencial eléctrico V para los círculo exterior e interior; de hecho, por inspección de la Ec. A2.16 y teniendo en cuenta que V debe de adquirir un valor finito cuando r tiende a cero y que $V = -E_0 r \cos \theta$ cuando $r = r_b$ (Fig. A2.1), se tiene que para $r < r_a$:

$$V_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n) (A_n \cos n\theta + B_n \operatorname{Sen} n\theta), \quad (\text{A2.17})$$

y para $r_a < r < r_b$

$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n r^n + D_n r^{-n}) (A_n \cos n\theta). \quad (\text{A2.18})$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como

$$V_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (I_n \cos n\theta + J_n \operatorname{Sen} n\theta) r^n, \quad (\text{A2.19})$$

y

$$V_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n r^n + L_n r^{-n}) \cos n\theta. \quad (\text{A2.20})$$

El valor de las constantes se puede determinar tomando en consideración las condiciones de frontera en $r = r_a$ y $r = r_b$, las cuales se expresan

$$V_{ext}(r = r_b) = V_2(r = r_b), \quad (\text{A2.21})$$

$$V_2(r = r_a) = V_1(r = r_a). \quad (\text{A2.22})$$

Se debe cumplir la condición de continuidad de la densidad de corriente; por lo tanto, a través de la frontera también se debe de cumplir

$$\sigma^* \left(\frac{dV_{ext}}{dr} \right)_{r=r_b} = \sigma_b \left(\frac{dV_2}{dr} \right)_{r=r_b}, \quad (\text{A2.23})$$

y

$$\sigma_b \left(\frac{dV_2}{dr} \right)_{r=r_a} = \sigma_a \left(\frac{dV_1}{dr} \right)_{r=r_a} \quad (\text{A2.24})$$

Al aplicar las condiciones de frontera (Ecs. A2.21 y A2.22) y de continuidad (Ecs. A2.23 y A2.24) a las Ecs A2.20 y A2.19 se obtiene

$$-E_0 r_b \cos \theta = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n r_b^n + L_n r_b^{-n}) \cos n\theta, \quad (\text{A2.25})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (I_n \cos n\theta + J_n \sin n\theta) r_a^n = \sum_{n=1}^{\infty} (K_n r_a^n + L_n r_a^{-n}) \cos n\theta, \quad (\text{A2.26})$$

$$-\sigma^* E_0 \cos \theta = \sigma_b \sum_{n=1}^{\infty} (K_n n r_b^{n-1} - n L_n r_b^{-n-1}) \cos n\theta, \quad (\text{A2.27})$$

$$\sigma_a \sum_{n=1}^{\infty} (I_n \cos n\theta + J_n \sin n\theta) r_a^{n-1} = \sigma_b \sum_{n=1}^{\infty} (K_n n r_a^{n-1} - n L_n r_a^{-n-1}) \cos n\theta. \quad (\text{A2.28})$$

A partir de las Ecs. A2.25, A2.26, A2.27 y A2.28, se tiene que para $n > 2$

$$I_n = J_n = K_n = L_n = 0.$$

Para $n = 1$

$$J_1 = 0.$$

$$I_1 = -\frac{2E_0 r_b^2 \sigma_b}{r_a^2 (-\sigma_a + \sigma_b) + r_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)}, \quad (\text{A2.29})$$

$$K_1 = \frac{E_0 r_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)}{r_a^2 (\sigma_a - \sigma_b) - r_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)}, \quad (\text{A2.30})$$

$$L_1 = \frac{E_0 r_a^2 r_b^2 (-\sigma_a + \sigma_b)}{r_a^2 (\sigma_a - \sigma_b) - r_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)}. \quad (\text{A2.31})$$

Sustituyendo las Ecs. A2.29, A2.30 y A2.31 en las Ecs. A2.19 y A2.20 las potencias eléctricas pueden expresarse como

$$V_1 = -\frac{2E_0 n_b^2 \sigma_b}{r_a^2(-\sigma_a + \sigma_b) + n_b^2(\sigma_a + \sigma_b)} \text{Cos} \theta r^l \quad (\text{A2.32})$$

para $r < r_a$

$$V_2 = \left(\frac{E_0 n_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)}{r_a^2 (\sigma_a - \sigma_b) - n_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)} r + \frac{E_0 r_a^2 n_b^2 (-\sigma_a + \sigma_b)}{r_a^2 (\sigma_a - \sigma_b) - n_b^2 (\sigma_a + \sigma_b)} r^{-1} \right) \text{Cos} \theta \quad (\text{A2.33})$$

para $r_a < r < r_b$.

Por otra parte, del sistema de ecuaciones para resolver el potencial eléctrico, existe una ecuación extra para determinar la conductividad promedio del sistema, la cual expresa la conductividad promedio como

$$\sigma^* = \frac{-\sigma_a (r_a^2 + n_b^2) + \sigma_b (r_a^2 - n_b^2)}{\frac{\sigma_a}{\sigma_b} (r_a^2 - n_b^2) - (r_a^2 + n_b^2)} \quad (\text{A2.34})$$

Si todos los círculos concéntricos mantienen relaciones idénticas r_a/r_b , entonces r_a^2 representa el área total de todos los núcleos de radio r_a y la celda exterior de radio $r_a < r < r_b$ representa la porosidad; por lo tanto, la Ec. A2.34 puede expresarse como

$$\sigma^* = \frac{-\sigma_b \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_b} (2 - \phi) + \phi \right)}{\frac{\sigma_a}{\sigma_b} \phi - (2 - \phi)} \quad (\text{A2.35})$$

Si suponemos que $\sigma_a \ll \sigma_b$ y del concepto de factor de resistividad la Ec.

A2.35 se puede transformar en la ecuación siguiente:

$$F = \frac{2 - \phi}{\phi} \quad (\text{A2.36})$$