

29



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DUALIDAD Y LAS ECUACIONES GENERALIZADAS DE EINSTEIN

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FISICO PRESENTA: BENJAMIN GUTIERREZ GARCIA



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. FERNANDO QUEVEDO RODRIGUEZ

2002

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

MAT. MARGARITA ELVIRA CHÁVEZ CANO
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo de Tesis:
"Dualidad y las Ecuaciones Generalizadas de Einstein"

realizado por GUTIERREZ GARCIA BENJAMIN

con número de cuenta 0355000-9 , pasante de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

DR. FERNANDO QUEVEDO RODRIGUEZ

Propietario

DR. MARTI RUIZ ALTABA

Propietario

DR. MANUEL TORRES LABANSAT

Suplente

DR. ROSOLFO PATRICIO MARTINEZ Y ROMERO

Suplente

DR. ROBERTO SUSSMAN LIVOVSKY

Consejo Departamental de Física

DR. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura Física

FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Contenido

Agradecimientos	7
Introducción	11
1 Preliminares sobre la cuerda bosónica	25
1.1 Teoría clásica y la acción de Polyakov	25
1.2 Cuantización	36
1.2.1 Cuantización covariante tradicional	37
1.2.2 Cuantización en el gauge del cono de luz	39
1.3 Espectro de la cuerda bosónica	42
1.3.1 Espectro de la cuerda abierta	42
1.3.2 Espectro de la cuerda cerrada	43
1.4 Interacciones	45
2 Cuerdas en espaciotiempos curvos	47
2.1 Acción de cuerda efectiva y modelo sigma no lineal	48
2.2 Invariancia de Weyl	50
2.3 Ecuaciones para los campos de fondo	54
2.3.1 Expansión del producto de operadores y el álgebra de Virasoro	54
2.3.2 Modelos Sigma	56
2.3.3 Expansión en campos de fondo y coordenadas normales	58
2.3.4 Cálculo al orden más bajo de la anomalía de Weyl	64
2.3.5 Acoplamiento de dilatón	68
2.4 Generalización de las ecuaciones de Einstein	75
3 Dualidad T en teoría de cuerdas	79
3.1 ¿Qué es la dualidad?	79
3.2 Compactificaciones toroidales y dualidad $R \leftrightarrow 1/R$	80
3.3 Efectos típicos de una transformación de dualidad T	82
3.4 Dualidad-T abeliana	84
3.5 Transformaciones de Buscher	90

4	Dualidad-T y soluciones efectivas en cuerdas	91
4.1	Soluciones de baja energía de cuerdas	91
4.2	Agujero negro en 2D	92
4.3	Agujero negro de Schwarzschild 4D	97
4.4	El agujero negro BTZ y su dual	104
5	Dualidad-T y soluciones cilíndricas	113
5.1	Motivaciones para el estudio de la simetría cilíndrica	113
5.2	Espaciotiempo con simetría cilíndrica general	114
5.3	Espaciotiempo de Levi-Civita y su dual	117
	Conclusiones	123
	A Maple y GRTensorII	125
	Bibliografía	130

Lista de Figuras

1	La interacción de dos gravitones puntuales es reemplazada por una interacción extendida entre cuerdas	14
2	La expansión en el genus de las superficies de Riemann es equivalente a la expansión perturbativa a lazos de la teoría de campo	14
3	Podemos ver que la teoría de cuerdas es más que sólo una teoría de cuerdas!	24
4.1	Diagrama de Kuskal del agujero negro. Tenemos las regiones $uv \leq 0, 0 \leq uv \leq 1$ y $uv \geq 1$	98
4.2	Diagrama de Kruskal donde se muestra el efecto de la transformación de dualidad: ésta intercambia regiones de gran curvatura y baja curvatura, lo que se traduce en intercambiar el horizonte por la singularidad, a pesar de que este objeto es autodual.	98

Agradecimientos

Esta tesis está dedicada a la memoria de mi papá, a mi mamá y a mi hermana Karla, a quienes agradezco su amor, cariño y comprensión durante toda la vida. Desgraciadamente mi papá no está aquí para ver la consolidación de este trabajo, cosa que lamento infinitamente, y solo me consuela cumplir mi compromiso con él de finalizar este proyecto.

Quiero expresar un profundo agradecimiento al Dr. Fernando Quevedo Rodríguez, director de esta tesis, por toda su paciencia y atención, por toda la física que me enseñó y por su continuo apoyo durante estos años, tanto personal como académico. Ha sido un honor estar bajo su supervisión y aprender como debe ser un ser humano y un físico.

Agradezco a mis sinodales la atención de revisar mi trabajo: al Dr. Martí Ruíz Altaba, por su apoyo y sus atenciones, al Dr. Manuel Torres Labansat, quien a pesar de sus múltiples responsabilidades en el IFUNAM me ha proporcionado el tiempo y la atención necesarias, al Dr. Rodolfo Martínez y Romero, también por su apoyo y tiempo; al Dr. Roberto Sussman, por las discusiones sobre Maple y GRTensor. Quisiera mencionar al Dr. Alberto Guijosa y agradecerle por las continuas discusiones y su paciencia para contestar mis preguntas, además de la grata expiación que nos está proporcionando en el curso de cuerdas de la primavera del 2002.

Agradezco de forma muy especial a mis amigos de toda la vida, Freddy Pérez, Luis, Jorge y Carlos Marin, por su apoyo y amistad. A mis amigos de la vocacional Gustavo, Rodrigo, Gabriel, Claudia, Fernando, Carlos, Miguel, Ricardo y a todo el 51M. A mis amigos durante la carrera, a Magda, Rubén Alfaro, Ian Sigal, Carlos Ruíz, Foco, Fidel, Leandro Chericoff, Verónica Ontiveros, Rogelio Murillo; a Belem, Ady, León, Cristina, Rodolfo, Eli Echevarria y Alejandro Reyes.

Todos aquellos que pasamos por la Facultad de ciencias de la UNAM nos sentimos muy afortunados de haber contado con profesores de gran calidad, comprometidos con la educación pública en México y con mantener viva la ciencia en nuestro país. Quisiera nombrar a algunos de ellos, a quienes agradezco mi formación: Darío Moreno, Gabriela del Valle, Beatriz Fuentes, Patricia Goldstein, Alipio Calles, Rocio Jauregui y Matias Moreno.

A mis amigos del IFUNAM, Federico, Roberto, Bety, Elizabeth, Tony, Miguel Pérez, Jorge Ramón Soto y Rosario, Juan, Ruben Arroyo, Cuauhutemoc, Victor Gopar, Moises, Martha, Liz, Carlos Mejia, Maximino Aldana.

Gabriela Murguía, Catalina, Verónica Riquers, Erika Zavala, Erika Alvarez, Norma Quiroz del CINVESTAV, y a don Mario de la biblioteca.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a la Dra. María Esther Brandan y al Dr. Arturo Menchaca, por su atención, su tiempo, y por transmitirme un renovado gusto por la física, la enseñanza de siempre mantener un punto de vista objetivo y muy especialmente por su continuo apoyo y su guía.

Agradezco en forma muy especial a la Sociedad Mexicana de Física por hacer posible mi visita al CERN en 1996, en especial a el Dr. Hernando Quevedo y el Dr. Marcelo Salgado, quienes me apoyaron con su recomendación; a Heriberto Castilla, Gerardo Herrera, Miguel Ángel Pérez y Juan Carlos D'Olivo, del comité organizador de veranos. A la gente del CERN, de la que aprendí mucho y con la que compartí momentos muy agradables: mi asesor Dr. Karsten Eggert, Gaiane y Vardán Karapetián, Andreas Morsch, Manuel Calderón de la Barca, Juan José Blanco-Pillado, Sonia, Jesús Román, Ana, Lola, Sven Kircher, Markus Cristianziani, Kirsten Holtz, Daniele Bonacorsi y Alessandra Fanifani.

A los amigos del ICN, José Antonio González Cervera, Alexis Aguilar, Igor, Dario Nuñez, Axel Weber y Chris Stephens.

A los amigos del IMUNAM, en especial al Dr. Javier Elizondo; al Dr. Micho Durevich, por leer la versión preliminar de la tesis; a Carlos Rivera, Griselda Cedillo, Martha Cerrila, Gabriela Ramírez, Laura Elena, Emilio Lluís Puebla, Emilio Lluís Riera, Marcelo Aguilar, Carlos Prieto, Gloria Colmenares, Eva Lara, Ernesto Rosales y Laura Ortiz, don Jesús, don Luis, Vero, Marcos, José Malagón, Pañales, Elhoim Sumano, Itnuit Janovitz, Octavio, Paola Romeu, Cruz, Muckuy, Paty Souza, y al instituto en especial por hacer posible mi visita a Vancouver el pasado verano del 2001. Especialmente me gustaría agradecer a Paola Ronquillo por su amistad y su apoyo en los momentos difíciles, a Victor Hugo, Arturo, Lalo Sacristán y la Mancha. Gracias a todos.

Agradezco en forma muy especial a la Dra. Lucia Hernández Cervantes por su continuo apoyo durante estos años.

A los amigos de Fisiología, Gerardo Coello, Juan e Ivette.

Durante este largo tiempo he contado con el consejo, ayuda y comentarios profesionales de varias personas, a quienes quisiera mencionar, y agradecer por su tiempo e invaluable colaboración. Ellos son Mathias Blau, del ICTP; Kummar Gupta, del Saha Institute, Hugo García Compeán del CINVESTAV; Clifford Johnson, de Durham; Barton Zwiebach del MIT, Matthew Choptuik de UBC, y Walter Benenson de MSU. Durante el LASS 2000 tomé por primera vez una clase de teoría de cuerdas, donde finalmente me di cuenta de que se trataba todo esto, que no hubiera sido posible sin la estupenda exposición de la Dra. Carmen Nuñez.

Quiero agradecer a los diferentes miembros de mi numerosa familia que siempre, de una u otra forma, nos han apoyado a mis padres, a mi hermana

y a mi: los Tripolitanos y la familia de Juchitepec. Y también gracias a Jean Vicent Marin y su familia.

Finalmente agradezco a la UNAM por la oportunidad que me ha dado de recibir una educación de alta calidad.

Introducción

La teoría de supercuerdas es actualmente uno de los candidatos más prometedores para una descripción unificada de las interacciones fundamentales, incluyendo a la gravitación, extendiendo nuestros conocimientos más allá del Modelo Estándar (ME) de la física de partículas y la relatividad general [12]. Existen una serie de problemas relacionados con el ME que nos hacen considerarlo un límite de baja energía de una descripción más general y profunda. Entre estas objeciones se encuentran el problema de la jerarquía y el exceso de parámetros libres.

La unificación de la relatividad general y la teoría cuántica de campo presenta diversos problemas. El teórico de campo estará preocupado por la pérdida de renormalizabilidad (las singularidades a cortas distancias se vuelven tan severas que los métodos usuales para removerlas simplemente no funcionan). Al reemplazar partículas puntuales por objetos unidimensionales (como son las cuerdas) como bloques fundamentales, la teoría de supercuerdas soluciona el problema de la no renormalizabilidad a nivel perturbativo. Un teórico relativista resaltará un conjunto diferente de problemas, entre los cuales está el comprender la estructura causal del espacio-tiempo cuando la métrica presenta excitaciones cuánticas. También existe un cúmulo de problemas asociados con agujeros negros tales como el origen fundamental de sus propiedades termodinámicas, la aparente pérdida de coherencia cuántica y la paradoja de la información [12].

El conjunto de objeciones del teórico relativista no puede plantearse correctamente en una formulación perturbativa, por lo que los recientes descubrimientos de mediados de los 90's permiten vislumbrar cómo estos problemas pueden resolverse, o por lo menos como llevar a cabo las preguntas correctas.

Cuando se propone un conjunto innovador de ideas, como lo es una teoría física, se desea poder identificar predicciones experimentales distintivas. En el caso de las supercuerdas no se han calculado en detalle propiedades de partículas elementales o de la estructura del universo en forma convincente, aunque han existido varios intentos muy valiosos. La teoría no se entiende lo suficientemente bien como para llevar a cabo tales predicciones. Es muy difícil decir si faltan décadas para lograr este entendimiento o si se encuentra a la vuelta de la esquina. En ausencia de predicciones cuantitativas, tenemos solo tres predicciones "generales" cualitativas, muy motivantes por

cierto. La primera es que la gravitación se encuentra dentro de la teoría aproximada a bajas energías por la relatividad general. Ninguna teoría cuántica de la gravitación hasta ahora tiene ésta propiedad. La segunda es el hecho de que los vacíos de supercuerdas generalmente incluyen teorías de gauge¹ de Yang-Mills, como las que conforman el modelo estándar. La tercera predicción general, aún no comprobada experimentalmente, es la existencia de supersimetría a bajas energías (a la escala electrodébil, alrededor a 1 TeV). Nuestras esperanzas hoy día en febrero del 2002 es que aparezca en el LHC en CERN en cuanto el proyecto entre en operación, o bien si Fermilab produce algo inesperado.

La teoría de (super)cuerdas es la teoría más ambiciosa de la física de partículas. Pretende describir el origen de las cuatro interacciones conocidas a partir de prescindir los bloques fundamentales de la materia no como objetos puntuales, sino como objetos extendidos, unidimensionales, es decir, cuerdas. La teoría de supercuerdas no sólo deja a un lado los problemas previamente encontrados al combinar la gravedad con la mecánica cuántica, sino también permite considerar a las cuatro fuerzas fundamentales como diferentes aspectos de un mismo principio subyacente. Esta unificación se lleva a cabo con el simple hecho de pedir que la teoría sea internamente consistente, lo que ha conducido a una nueva y vigorosa interacción entre la física y las matemáticas. Muchos de los descubrimientos más recientes en matemáticas han contribuido al entendimiento de la teoría; y a cambio las teorías de cuerdas conducen al desarrollo de nuevos campos de las matemáticas puras.

La historia de las supercuerdas es fascinante, con muchos cambios de rumbo y situaciones extrañas. Aunque en ese momento la electrodinámica cuántica había tenido un éxito y una exactitud impresionantes en sus predicciones experimentales, no pasaba lo mismo al tratar de construir teorías de gauge para describir las interacciones fuertes, por lo que muchos teóricos comenzaron a preguntarse si la estrategia de aplicar la teoría de campo a las interacciones fundamentales realmente era correcta. La teoría de cuerdas surgió a finales de los 60's de los llamados *modelos de resonancia dual*, los cuales intentaban describir las interacciones nucleares fuertes. Así estaban las cosas cuando Gabriele Veneziano simplemente adivinó una fórmula, sin tener relación alguna con las teorías de gauge y que describía varias características de la física de los hadrones. Subsecuentemente Yoichiro Nambu (Universidad de Chicago), T.Goto, Holger Nielsen (Instituto Niels Bohr, Copenhage) y Leonard Suskind (Stanford U.) mostraron que el aplicar la fórmula de Veneziano era equivalente a considerar a los hadrones como cuerdas, donde los diferentes armónicos de éstas corresponderían a los diferentes hadrones observados. Algo así como si las cuerdas mantuvieran ligados a

¹Decidimos usar el término "gauge" debido a que las traducciones al español que se han usado, tales como calibre, norma, etc. no reflejan exactamente el significado contenido.

los quarks que componen a cada protón, o neutrón u otro hadrón.

Los modelos de resonancia dual originales sólo podían describir hadrones que fueran bosones (como el mesón π), por lo que en 1971 Pierre Ramond (Univ. of Florida), André Neveu (École normale Supérieure, París) y John Schwarz (Caltech) sugirieron una variante que incluía fermiones conocida como "*spinning-string theory*". precursora de las actuales teorías supersimétricas.

Los dos principales problemas que dieron al traste con las cuerdas para describir hadrones fueron, primero, que la teoría requería la existencia de una partícula no deseada (sin masa y con dos unidades de *spin*). Su existencia era muy genérica y muy frustrante. el segundo problema consistía en que la consistencia de la teoría exigía que el espaciotiempo tuviera diez dimensiones (nueve espaciales y una temporal), cuando sabemos que en la realidad tiene cuatro dimensiones. Y finalmente alrededor de 1973 apareció la cromodinámica cuántica (QCD, por sus siglas en inglés y de uso cotidiano), la cual es mucho más exitosa que los modelos duales en describir las interacciones fuertes. Este enfoque para estudiar los hadrones tuvo gran actividad durante cerca de cinco años, hasta que se abandonó debido a varias dificultades teóricas y a la aparición de la QCD.

Un hecho curioso de la teoría de cuerdas del periodo 1968 – 1973 es que tomó dos años de estudio de las amplitudes de interacción para que varias personas se dieran cuenta de que éstas amplitudes describían las interacciones de objetos extendidos unidimensionales.

Posteriormente, Joël Scherk y John Schwarz sugirieron que la teoría se reinterpretara como una teoría de unificación de las fuerzas fundamentales, haciendo de sus defectos grandes virtudes y convirtiéndola en un buen candidato para una teoría de gravedad cuántica. Como mencionamos anteriormente la idea principal de este teoría es reemplazar la descripción de partículas puntuales de las interacciones por objetos unidimensionales, cuerdas con la longitud de Planck del orden de 10^{-33} cm. Este cambio aparentemente simple tiene profundas implicaciones para la física. Hasta ahora solo tenemos evidencia de consistencia interna de la teoría debido a que la escala tan pequeña de las cuerdas no nos permite llevar a cabo ningún sondeo experimental. Pero es el mejor candidato que tenemos hasta ahora. La primera consecuencia importante de la teoría de cuerdas es la existencia de modos de vibración de la cuerda. Estos corresponden al espectro físico de las partículas. Para la fenomenología la parte relevante viene de los modos no masivos, debido a que los masivos son excitados a energías del orden de la masa de Planck l_p^{-1} . A bajas energías todos los modos masivos se desacoplan y terminamos con una teoría cuántica de campo efectiva para los modos no masivos. En el espectro no masivo de la cuerda cerrada, existe una partícula de espín dos. Es el gravitón. De aquí que esta teoría incluya a la gravedad naturalmente. Si encontramos la manera de construir una teoría de cuerdas cuántica consistente y fenomenológicamente satisfactoria,

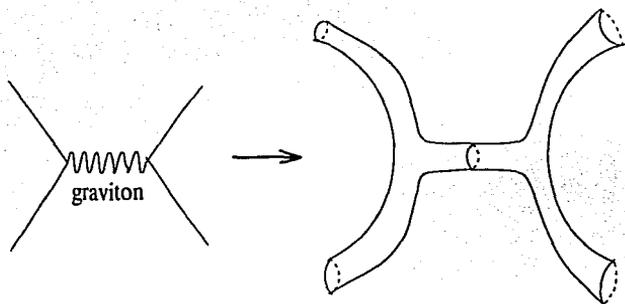


Figura 1: La interacción de dos gravitones puntuales es reemplazada por una interacción extendida entre cuerdas

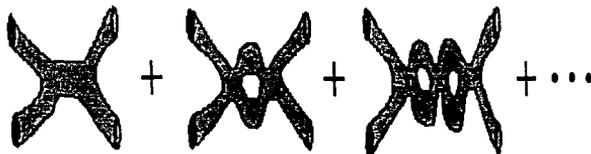


Figura 2: La expansión en el genus de las superficies de Riemann es equivalente a la expansión perturbativa a lazos de la teoría de campo

entonces tendríamos gravedad cuántica.

Hasta ahora, la teoría de cuerdas esta bien entendida solo a nivel perturbativo. Los diagramas de teoría de campo son reemplazados por superficies de Riemann, con la expansión de lazos llevada a cabo por una expansión en el genus de las superficies. Es una formulación de primera cuantización, donde la integral de camino se pondera o pesa por el área de la superficie de Riemann y los estados externos se incluyen por la inserción de los operadores de vértice apropiados. La constante de acoplamiento perturbativo de las cuerdas está determinada por el valor de expectación del vacío de un campo escalar no masivo, llamado *dilatón*, a través de la relación $g_s = \exp \langle s \rangle$. El 'engrosamiento' de los diagramas de Feynman a 'diagramas de superficie' mejora considerablemente el comportamiento ultravioleta de la teoría. La teoría de cuerdas es finita en el límite ultravioleta.

La tercera consecuencia importante es la introducción de la supersimetría.

Para la cuerda bosónica, el modo de vibración más bajo corresponde a un taquión. Esto indica que estamos usando teoría de perturbaciones alrededor de un mínimo inestable. La supersimetría (SUSY) nos proporciona una solución muy económica a este problema.

La idea de simetría ha sido una guía fundamental en estos desarrollos, y en especial la simetría de gauge, que consiste en la invariancia del Lagrangiano que describe nuestra teoría ante transformaciones continuas (que forman un *grupo de Lie*), cuyos parámetros son funciones del espaciotiempo. Ejemplos de simetrías de gauge no rotas son el grupo abeliano $U(1)$ que describe la interacción entre fotones y partículas cargadas y el grupo no abeliano $SU(3)_c$ que describe las interacciones entre quarks y gluones (y entre los mismos gluones). Ejemplos de simetrías rotas espontáneamente son el grupo $SU(2)_L \times U(1)$ del modelo GSW para interacciones electrodébiles y los grupos de modelos de gran unificación $SU(5)$, $SO(10)$, etc. Una simetría de gauge requiere la existencia de campos de gauge vectoriales no masivos (fotones, gluones, W 's, Z , X , Y etc). El rompimiento espontáneo de simetría proporciona masa a algunos de ellos.

El término invariancia de gauge fue introducido por Weil en 1919 (Eich-invarianz), y lo uso en el mismo sentido que invariancia de escala. Posteriormente, cuando la mecánica cuántica hizo su aparición, la invariancia de gauge fué definida como la transformación simultánea de la fase de la función de onda $\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi e^{i\alpha(x)}$, y del potencial electromagnético $A_\mu = A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \alpha$. Con esto en mente podemos entender mejor lo que es una supersimetría.

Supersimetría

La supersimetría, o simetría entre fermiones y bosones, no ha sido observada en la naturaleza hasta ahora. La supersimetría se introduce como una solución al problema fenomenológico de la *jerarquía*, que se resuelve gracias a las cancelaciones entre bosones y fermiones. Esto implica que los compañeros supersimétricos de las partículas conocidas del modelo estándar deben aparecer alrededor de energías de 1 TeV.

A pesar de las diferencias que existen entre las simetrías que encontramos en la física de partículas (Isoespín, color, electrodébil, gran unificación, etc), todas ellas comparten algo en común: son simetrías internas. Esto significa que sus correspondientes transformaciones no afectan las propiedades espacio temporales de los estados sobre los que actúan. Por ejemplo, las rotaciones de isoespín pueden transformar un protón en un neutrón, una partícula con el mismo espín, pero no en, digamos, un meson π . En forma similar las transformaciones $SU(5)$ pueden convertir un leptón en un quark, y otra vez observamos que el estado inicial y final tienen el mismo espín (y la misma helicidad).

A diferencia de éstas simetrías internas, la SUSY transforma fermiones

en bosones y viceversa. Pueden convertir un escalar en una partícula espinorial, o ésta en una vectorial. Estas transformaciones no son nada triviales, ya que los campos dentro del supermultiplete tienen dimensiones distintas: m para el bosón y $m^{3/2}$ para el fermión. Q y \bar{Q} obedecen las siguientes relaciones:

$$\{Q, \bar{Q}\} \equiv Q\bar{Q} + \bar{Q}Q = -2P_\mu \gamma_\mu, \quad [Q, P_\mu] = 0, \quad (1)$$

Donde P_μ (cuadrimento) es el generador de traslaciones en el espacio, y γ_μ son las matrices de Dirac. P_μ y los generadores de rotaciones $M_{\mu\nu}$ forman, junto con los generadores Q , el álgebra graduada de la SUSY (álgebra de SuperPoincaré), que contiene a la de Poincaré como subálgebra (Se dice que un álgebra es graduada si contiene anticonmutadores así como conmutadores, es decir, podemos graduar o distinguir a los operadores como, digamos, pares y nones).

Debido a que Q es un operador espinorial, los α 's en $e^{iQ\alpha}$ deben ser espinores también (de la misma manera que en las rotaciones, donde $e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}$ es el generador de rotaciones y $\vec{\theta}$ debe ser un vector). Además, debido a que los $e^{iQ\alpha}$ con diferentes valores para α obedecen relaciones de conmutación (a pesar de que Q obedece anticonmutadores), las entradas en α no son números ordinarios, ya que deben anticonmutar². Por tanto, estos no son los tipos de grupos de simetría considerados en el pasado, lo que explica porqué se pensaba que ninguna simetría podía relacionar bosones y fermiones.

Versiones supersimétricas de varias teorías de gran unificación han sido construidas y estudiadas; a menudo son referidas como SUSY-GUTs. De hecho, para las SUSY- $SU(5)$, la convergencia de las constantes de acoplamiento es más exacta (dentro de los límites experimentales) que en GUT's ordinarias y a un valor un poco mayor (10^{16} GeV). Ese valor incrementado (además de nuevos canales de decaimiento) es la causa de que este modelo tenga una predicción para la vida media del protón mayor a la del modelo $SU(5)$ original, la cual ya no está en conflicto con la cota experimental inferior ($\sim 10^{33}$ años). La existencia de nuevos canales de decaimiento con *branching ratios* significativos (branching ratio es la proporción de cada canal de decaimiento) sugiere patrones únicos a buscar en futuros experimentos de decaimiento del protón, además de que éste modelo produce un mecanismo de Higgs natural.

Una característica importante de estos modelos es la presencia de un tipo de bosón y un tipo de fermión con la misma energía, por lo que éstos aparecieron en pares con la misma masa (es decir, en supermultiplete), ya que en cualquier teoría cuántica SUSY el número de grados de libertad fermiónicos es el mismo que el de los bosónicos. Esta es la razón de que esperamos encontrar un compañero bosónico para cada leptón y quark, y uno fermiónico para cada bosón de gauge y Higgs. Hasta ahora no hay traza

²Llamados números de Grassman

de ninguno de ellos en los experimentos, pero dada la belleza teórica de la SUSY y todas sus bondades no se ha renunciado a ella, y han aparecido modelos de SUSY rota, en donde los compañeros SUSY de los integrantes del modelo estándar son muy pesados para ser detectados en los aceleradores actuales. Sin embargo, se predice una masa de alrededor de 1 TeV para ellos, por lo que esperamos observarlos en el LHC³.

Los compañeros de los fermiones fundamentales tienen espín cero y se llaman *squarks y sleptons, selectrón, squark, scalar-quark, etc.* Los fermiones de gauge compañeros de los bosones de gauge tienen espín $1/2$ y se nombran usando el sufijo "ino": *photino, gluino, wino, bino, zino, etc.*; colectivamente se denominan *gauginos*. El compañero $J = 1/2$ del Higgs es el *Higgsino*, del *gravitino* del gravitón. Los gauginos y higgsinos cargados se llaman *charginos*, y los neutros *neutralinos*. La existencia de un compañero SUSY para las partículas conocidas produce contribuciones de distinto signo en los loops de las correcciones radiativas a sus masas y valores de expectación del vacío, eliminando efectos indeseables de la renormalización y produciendo de manera natural la jerarquía de las diferentes escalas en GUTs.

Actualmente se piensa que los modelos SUSY-gauge y la SUGRA son sólo teorías efectivas del límite de baja energía de las supercuerdas...

La cuarta consecuencia importante de la teoría de cuerdas es la predicción del número de dimensiones del espacio target donde la cuerda perturbativa se propaga. La invariancia de Lorentz en el espacio target o invariancia conforme de la hoja de mundo fija las dimensiones espaciotemporales (26 para la cuerda bosónica y 10 para las supercuerdas). Como nuestro mundo de baja energía es 4D, la teoría de cuerdas incorpora la idea propuesta por Theodor Kaluza y Oscar Klein en los años veinte de modo natural. Esta consiste en que es posible que nuestro espaciotiempo tenga más de las 4 dimensiones que observamos, siempre y cuando las dimensiones extra estén curvadas sobre sí mismas, comprimidas o *compactificadas*. Así estas dimensiones compactificadas serían invisibles a simple vista, e incluso usando potentes microscopios (digamos un acelerador de partículas de la última generación) estas pasarían desapercibidas.

La quinta consecuencia importante viene de la cancelación de anomalías espaciotemporales, es decir, efectos cuánticos que hacen que una teoría sea inconsistente. Las hay de gauge, gravitacionales y mixtas. Esto conduce a que solo existan cinco teorías de supercuerdas libres de anomalías en 10 dimensiones espaciotemporales:

³El LHC, Large Hadron Collider, o gran colisionador de hadrones, es el acelerador que el Laboratorio Europeo de Partículas elementales (CERN) proyecta tener listo para el 2006, con una energía de centro de masa de 14 TeV , suficiente para observar supercompañeros.

- *Tipo I SO(32)*

Esta es una teoría que contiene *supercuerdas abiertas*. Tiene una supersimetría ($N=1$) en 10D. Las cuerdas abiertas pueden transportar grados de libertad de gauge en sus extremos, y la cancelación de anomalías restringe de forma única el grupo de gauge a $SO(32)$.

- *Tipo IIA*

Esta es una teoría de *supercuerdas cerradas* que tiene dos supersimetrías ($N=2$) en 10D. Los dos *gravitinos* (compañeros SUSY del gravitón) se mueven en direcciones opuestas de la hoja de mundo de la cuerda cerrada y tienen quiralidades opuestas bajo el grupo de Lorentz 10 dimensional, por tanto es una teoría no quiral.

- *Tipo IIB*

También es una teoría de *supercuerdas cerradas* con $N=2$. Sin embargo en este caso los gravitinos tienen las mismas quiralidades bajo el grupo de Lorentz 10 dimensional, así que ésta es una teoría chiral. Tampoco tiene grupo de gauge.

- *Heterótica SO(32)*

Es una teoría de *supercuerdas cerradas* con campos de la hoja de mundo moviéndose en la misma dirección del campo supersimétrico, y campos moviéndose en la dirección opuesta que no tiene supersimetría (bosónicos). El resultado es SUSY $N=1$ en 10D. Los campos bosónicos contribuyen con bosones vectoriales sin masa al espectro, los cuales, debido a la cancelación de anomalías, requieren como grupo de simetría de gauge al $SO(32)$.

- *Heterótica $E_8 \times E_8$*

Esta teoría es idéntica a aquella de la supercuerda heterótica $SO(32)$, excepto que el grupo de gauge permitido por la cancelación de anomalías es el $E_8 \times E_8$.

	Tipo IIB	Tipo IIA	$E_8 \times E_8$ Heterótica	$SO(32)$ Heterótica	Tipo I
Tipo de cuerda	Cerrada	Cerrada	Cerrada	Cerrada	A y C
10D SUSY	$N=2$ quiral	$N=2$ No quiral	$N=1$	$N=1$	$N=1$
Grupos de gauge 10D	ninguno	ninguno	$E_8 \times E_8$	$SO(32)$	$SO(32)$

La cuerda heterótica $E_8 \times E_8$ históricamente ha sido considerada como la teoría de cuerdas más prometedora para describir la física más allá del modelo estándar. Fué descubierta en 1987 por Gross, Harvey, Martinec y Rohm

y por mucho tiempo se pensó que era la única teoría de supercuerdas relevante para describir nuestro universo. La razón es que al compactificar a $4D$, el primer grupo de gauge E_8 da lugar a modelos del llamado sector "observable" con $N = 1$ y está contenido el grupo de gauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ del modelo estándar. El segundo E_8 proporciona un sector 'escondido' donde la materia contenida en él no interactuaría excepto a través de la gravedad, y se visualizaba como una solución potencial al problema de la materia oscura en astrofísica. Técnicamente se dice que este sector escondido rompe la supersimetría a una escala intermedia de 10^{12} GeV y la gravedad juega el papel de mensajero del rompimiento de la SUSY al sector observable, que siente tal rompimiento a la escala electrodébil de 10^2 GeV.

Así que para hacer contacto con nuestro mundo en $4D$ necesitamos compactificar la teoría de supercuerdas en $10D$ a un producto de un espacio $4D$ y una variedad compacta de $6D$. La idea de Kaluza-Klein que describimos anteriormente se vuelve un poco más complicada. Podríamos simplemente poner las seis dimensiones extra en círculos, es decir, en un toro en $6D$. Pues resulta que esto preserva demasiada supersimetría. Por supuesto creemos que existe SUSY a bajas energías alrededor de 1 TeV (Donde esperamos que el Tevatrón, el LHC o algún futuro colisionador lineal la encuentren), pero sólo necesitamos preservar una mínima cantidad de SUSY, es decir, $N=1$ en $4D$. Esta condición nos lleva a que tenemos que compactificar en un tipo especial de variedad en $6D$ llamada *variedad de Calabi-Yau*.

Las propiedades de los espacios de Calabi-Yau pueden tener importantes implicaciones para la física de baja energía tales como el tipo de partículas observadas, sus masas y números cuánticos, y el número de generaciones. Uno de los problemas más importantes en el campo lo ha constituido la degeneración de vacíos o soluciones de la teoría. Esto se debe a que existen muchos espacios de Calabi-Yau (de hecho son miles y miles) que podemos usar y no sabemos cual es el indicado. Comenzamos con una teoría de cuerdas virtualmente única en $10D$ y encontramos que las posibles extensiones en $4D$ están lejos de ser únicas, por lo menos al nivel de nuestro (incompleto) conocimiento. La vieja esperanza de los teóricos de supercuerdas descansa en que un detallado conocimiento de la estructura no perturbativa completa de la teoría nos conducirá a una explicación de como y porque nuestro universo paso de la física de $10D$ que probablemente existió durante la fase de alta energía del big bang, a la física de baja energía en $4D$ que hoy observamos (Posiblemente encontraremos un único espacio de Calabi-Yau que haga el truco). Un importante avance en esta dirección lo constituye el trabajo de Andrew Strominger, en el que muestra que los espacios de Calabi-Yau pueden conectarse en forma continua unos a otros a través de *transiciones conifold* y que podemos pasar de un Calabi-Yau a otro variando parámetros de la teoría. Esto sugiere la posibilidad de que varias teorías en $4D$ originadas en diferentes espacios de Calabi-Yau podrían en realidad ser diferentes fases de una única teoría subyacente.

Dualidad y la segunda revolución

La segunda revolución de supercuerdas (1994—) ha traído importantes avances en la física de cuerdas no perturbativa. Los descubrimientos clave fueron, por un lado, el reconocimiento de las sorprendentes *simetrías de dualidad*, las cuales nos han mostrado que lo que veíamos como cinco modelos de cuerdas consistentes independientes, son de hecho cinco diferentes expansiones perturbativas de una teoría subyacente, alrededor de cinco puntos diferentes. Ahora es claro que esta teoría subyacente existe, aunque parece permitir distintos vacíos. Por otro lado tenemos que en la arena no perturbativa, los objetos de más de una dimensión (membranas o “p-branas” de orden mayor) juegan un papel central y son tan fundamentales como las cuerdas.

Se han identificado tres tipos de dualidades: S , T y U . Sucede que una teoría A en acoplamiento fuerte es equivalente a una teoría B en acoplamiento débil, y en esta situación decimos que son S -duales. En forma similar, una teoría A compactificada en un espacio de volumen pequeño, es equivalente a una teoría B compactificada en un volumen grande, y se dice que son T -duales. Combinando estas ideas, si la teoría A compactificada en un volumen grande (pequeño) es equivalente a la teoría B en acoplamiento fuerte (débil), entonces se dice que son U -duales. Si las teorías A y B son la misma, entonces la dualidad se convierte en auto-dualidad, y puede verse como una simetría de gauge. La dualidad T , a diferencia de la S o la U , puede entenderse en forma perturbativa, y por ello ya se tenían indicios de la misma antes de la segunda revolución.

La naturaleza unidimensional de la cuerda produce una gran diferencia entre el comportamiento de la teoría de campo y la teoría de cuerdas. La reducción dimensional de una teoría de campo en D dimensiones espaciotemporales es otra teoría de campo en $D - 1$ dimensiones. El efecto de un radio finito no nulo R para la dimensión compactificada es simplemente un torre de estados de Kaluza-Klein con masas n/R . Pero en cuerdas la cuerda puede enrollarse m veces en la dirección compacta. Este proceso da una contribución al momento de la cuerda proporcional al radio compacto, mR/α' . Estos estados cuánticos se vuelven ligeros cuando $R \rightarrow 0$. La reducción dimensional de una teoría de cuerdas en D dimensiones es otra teoría de cuerdas en D dimensiones. Esta “invariancia” ante una reducción dimensional es el origen de la dualidad- T , que estudiaremos con cierto detalle en este trabajo.

El caso más sencillo de compactación es aquel en que una sola dimensión está curvada formando un círculo muy pequeño de radio R , por lo que no notamos su existencia. Más adelante se verificará que la energía de una

cuerda cerrada en esta dimensión está dada por:

$$E^2 = \frac{m^2}{R^2} + n^2 T^4 R^2 \quad (2)$$

n y m son enteros, T es la tensión de la cuerda y R es el radio del círculo en el que esta compactificada la dimensión. El primer término de esta ecuación es consecuencia de la cuantización: todos los sistemas cuánticos en los que una partícula esta confinada presentan una energía inversamente proporcional al cuadrado de la coordenada restringida (recordemos el pozo infinito de potencial), y una cuerda clásica macroscópica también presenta una dependencia similar de su frecuencia de vibración con la longitud de la cuerda. El segundo término, en cambio, es consecuencia única del hecho de que estamos hablando de cuerdas (esto se observa claramente por la presencia de la tensión de la cuerda T). Una cuerda puede enrollarse varias veces alrededor de la coordenada compacta, digamos n veces. La tensión de la cuerda depende del radio R en forma directa, porque para una longitud de la cuerda dada, entre mas grande sea el círculo la tensión aumentará, exactamente como ocurriría si en un cilindro enrollamos una liga de hule y ensanchamos el cilindro.

Ahora, ésta ecuación presenta una simetría que fue observada por primera vez por Keiji Kikkawa (Universidad de Osaka) y M. Yamanaka en 1984. Por simplicidad tomemos unidades de energía en las que $T = 1$. Si aplicamos la siguiente transformación de la ecuación (2):

$$m \leftrightarrow n \quad R \leftrightarrow \frac{1}{R} \quad (3)$$

Esto es algo sorprendente desde el punto de vista clásico de todos los días, debido a lo siguiente. Esta invariancia nos indica que la energía de las excitaciones de una cuerda, cuando hay una dimensión extra de radio R , es la misma que obtendríamos si el radio fuera $1/R$. Esta propiedad se extiende a todas las características físicas de ambos sistemas. Estamos acostumbrados a que las cosas grandes (R , digamos) son diferentes, o se comportan de diferente manera que cosas pequeñas ($1/R$). Para una cuerda esto no ocurre. Posteriormente se analizará esta simetría y algunas de sus aplicaciones con cierto detalle.

Supongamos que tenemos un par de teorías (A y B) que son S -duales. Esto significa que si f es una observable física, y λ es la constante de acoplamiento, entonces $f_A(\lambda) = f_B(1/\lambda)$. Esta dualidad generaliza la dualidad eléctrica-magnética de la teoría de Maxwell. Dado que la condición de cuantización de Dirac implica que la unidad básica de carga magnética es inversamente proporcional a la unidad de carga eléctrica, éstas intercambian sus valores en una inversión de carga (que es la constante de acoplamiento). La dualidad S relaciona la teoría tipo I con la heterótica y la teoría IIB consigo misma. Esto explica el comportamiento en acoplamiento fuerte de

estas tres teorías. El entendimiento de como las teorías *IIA* y heterótica se comportan en acoplamiento fuerte, que actualmente esta bien establecido, fué una verdadera sorpresa. En cada caso existe una dimensión, la decimoprimeras, que se vuelve grande en acoplamiento fuerte, con una ley de escalamiento $L_{11} \sim \lambda^{2/3}$. En el caso de la *IIA* la decimoprimeras dimensión es un círculo, mientras que en el caso de la cuerda heterótica es un intervalo de tiempo. El límite de acoplamiento fuerte de cada una de estas teorías proporciona un espaciotiempo de Minkowski de 11 dimensiones. La descripción de 11 dimensiones de la teoría subyacente se conoce como *teoría M*. Al día de hoy se entiende menos que las cinco teorías de cuerdas originales en 10D.

Otra fuente de progreso la constituye el estudio de un tipo especial de *p*-branas conocidas como *p-branas de Dirichlet*, o *D-branas*. El nombre proviene de las condiciones de frontera asignadas a los extremos de cuerdas abiertas. Las cuerdas abiertas usuales de la teoría tipo I tienen condiciones de frontera de Neumann en sus extremos, pero la dualidad-T implica la existencia de cuerdas abiertas duales con condiciones a la frontera de Dirichlet en las dimensiones que son T-transformadas. En form más general, en teorías tipo II, se pueden considerar cuerdas abiertas con

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} &= 0 & \mu &= 0, 1, \dots, p \\ x^\mu \Big|_{\sigma=0} &= x^\mu_0 & \mu &= p + 1, \dots, 9. \end{aligned} \quad (4)$$

aparentemente esto rompe la invariancia de Lorentz de la teoría, lo cual es paradójico. La solución es que las cuerdas terminen en un objeto dinámico *p*-dimensional, es decir, una *D-brana*. Estas habían sido estudiadas por varios años, pero Polchinski fué el que realmente se dio cuenta de su importancia alrededor de 1995. Son importantes porque hacen posible el analizar las excitaciones de la brana usando teoría de campo bidimensional de la cuerda abierta (que es renormalizable) en lugar de la teoría no renormalizable del volumen de mundo de la brana misma. De este modo se hace posible calcular fenómenos no perturbativos usando métodos perturbativos, lo cual es sorprendente. Muchas (pero no todas) de las *p*-branas previamente identificadas son *D-branas*. Otras están relacionadas con ellas por simetrías de dualidad, por lo que también pueden caer bajo control matemático.

Las *D-branas* han conducido a una serie de progresos importantes, como la descripción de Strominger y Vafa de los microestados asociados a las propiedades termodinámicas de los agujeros negros, los descubrimientos de Seiberg y Witten sobre teorías de gauge supersimétricas y teoría de cuerdas; la conjetura de Maldacena, las branas dieléctricas; la geometría no conmutativa y su uso para describir fenómenos tan interesantes como el efecto Hall cuántico; la clasificación de las cargas RR de branas usando K-Teoría; avances en fenomenología de supercuerdas, mundos brana, y muchas cosas más. La teoría de cuerdas ha pasado a ser una teoría no solo de éstas, sino de muchos objetos más. Si bien las críticas a la teoría son numerosas,

y muchas de las objeciones son razonables, personalmente encuentro todo esto altamente estimulante y creo que es un juego que debemos jugar.

El presente trabajo tiene como objetivos el entender en forma general lo que es la simetría de dualidad en la teoría de cuerdas y en particular la naturaleza y las aplicaciones de la dualidad-T para encontrar soluciones duales para las ecuaciones de los campos de fondo de cuerdas. Estas ecuaciones son la generalización de las ecuaciones de Einstein de la relatividad General, que incluyen además de la métrica dos campos más, un tensor antisimétrico B_{mn} y el campo escalar ϕ dilatón. Las principales aplicaciones que se revisarán son agujeros negros y soluciones cilíndricas de relatividad general.

El primer capítulo es una breve exposición de los conceptos básicos sobre la cuerda bosónica, necesarios para comprender como se obtiene el espectro de la cuerda cerrada, que es el origen de los campos de fondo que mencionamos.

El capítulo 2 aborda el problema de la propagación de una cuerda en presencia de campos de fondo no triviales. Veremos que al cuantizar la acción clásica de Polyakov aparece la anomalía de Weyl, debido a que la invariancia conforme no se mantiene. El imponer ésta invariancia a nivel cuántico nos conduce a ciertas condiciones sobre los campos de fondo, y que constituyen las ecuaciones generalizadas de Einstein.

El capítulo 3 presenta a la dualidad-T, comenzando por su descubrimiento en las compactificaciones toroidales en cuerdas y su generalización a un modelo sigma (o modelo- σ) con una isometría. También se describen las ecuaciones de fondo de las cuerdas y de donde provienen, para entender mejor el contexto en el que se presenta la dualidad-T, y se describe su extensión a teorías con tensores antisimétricos en general. Finalmente se describen las transformaciones de Buscher que nos permitirán obtener los duales de las soluciones que ya conoceremos en los subsecuentes capítulos.

La aplicación de la dualidad-T a las soluciones de baja energía de cuerdas se describe en el capítulo 4. Se aborda el tema de los agujeros negros en 2D. Se explica cómo se encontró una teoría de campo conforme que describe un agujero negro en 2D, originándose en un modelo Wess-Zumino-Witten 'gauged' con $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$. También se muestra en detalle la importante propiedad de este objeto de intercambiar el horizonte por la singularidad, aún cuando es autodual, y por último se describe la geometría dual del agujero negro de Schwarzschild y se verifica que realmente sea una solución de las ecuaciones generalizadas de Einstein. En forma complementaria se calculan algunos escalares de curvatura de ambos espacios. También reviso brevemente el agujero negro BTZ, en relatividad general en 3D, obtengo su dual y describo algunos aspectos del mismo.

El capítulo 5 presenta la aplicación de la dualidad-T para simetría cilíndrica. Se exponen las motivaciones para emprender el estudio de esta configuración y se describe con algún detalle el espaciotiempo cilíndrico

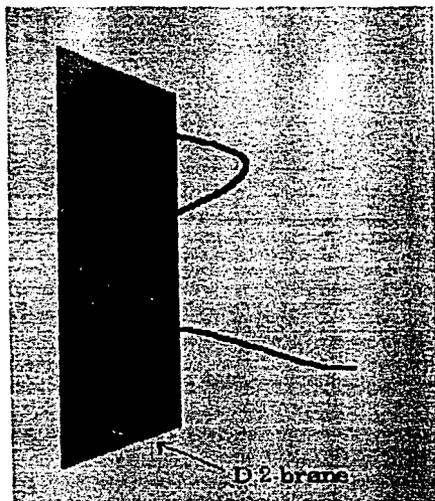


Figura 3: Podemos ver que la teoría de cuerdas es más que sólo una teoría de cuerdas!

más general. Posteriormente se aborda el espaciotiempo de Levi-Civita y su dual, se comparan en términos de sus geodésicas y de otros aspectos.

Capítulo 1

Preliminares sobre la cuerda bosónica

En este capítulo pretendo exponer una breve introducción a los aspectos básicos de la teoría de cuerdas perturbativa (excelentes y extensivas introducciones se pueden encontrar en [3],[6],[7] y [4]) en el caso bosónico, que no pretende ser exhaustiva. La idea es armar al lector con los conceptos básicos para comprender el material subsecuente, en particular lo importante es entender de donde proviene el espectro de la cuerda bosónica y los campos de fondo $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$ y ϕ .

1.1 Teoría clásica y la acción de Polyakov

Una cuerda es un objeto unidimensional. Puede ser cerrada o abierta. Su evolución en el tiempo traza una superficie bidimensional en el espaciotiempo, llamada *hoja de mundo* de la cuerda, y representa la contraparte unidimensional de la línea de mundo para una partícula puntual. Antes de describir la teoría clásica de cuerdas es conveniente revisar la mecánica clásica de un objeto sin dimensiones, es decir, una partícula puntual relativista.

La posición de la partícula puede especificarse en términos de $D - 1$ funciones del tiempo, $X^1(X^0)$, pero esto oculta la covariancia de la teoría, por lo que es mejor introducir el parámetro τ a lo largo de la línea de mundo de la partícula y describir el movimiento a través del espaciotiempo por D funciones $X^\mu(\tau)$. La parametrización es arbitraria: una parametrización diferente de la misma trayectoria es físicamente equivalente, y todas las observables físicas deben ser independientes de ésta elección. En otras palabras, bajo $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$, debemos tener $X^\tau(\tau'(\tau)) = X^\tau$.

La acción más simple que posee invariancia de Poincaré y bajo reparametrizaciones es proporcional al tiempo propio a lo largo de la línea de

mundo es,

$$S = -m \int d\tau (-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu)^{1/2} \quad (1.1)$$

donde m es la masa de la partícula y el punto denota derivada con respecto de τ . La variación de la acción es

$$\delta S = -m \int d\tau \dot{u}_\mu \delta X^\mu \quad (1.2)$$

donde $\dot{u}^\mu = \dot{X}^\mu (-\dot{X}^\nu \dot{X}_\nu)^{1/2}$ es la D -velocidad normalizada. La ecuación de movimiento $\dot{u}^\mu = 0$ por lo tanto, describe movimiento libre. Por simplicidad asumimos que el espaciotiempo es de Minkowski (plano) con métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(- + \dots +)$.

Vamos a introducir el momento conjugado canónico

$$p_\mu = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^\mu} = \frac{m \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \quad (1.3)$$

Es fácil mostrar que las componentes de p_μ no son todas independientes. De hecho satisfacen la restricción

$$p^2 + m^2 = 0 \quad (1.4)$$

que se conoce como la condición de "cascara de masa" (mass shell). Esta ecuación de restricción puede obtenerse como una ecuación clásica de movimiento a partir de la acción,

$$S = \int d\tau [p_\mu \dot{X}^\mu - \frac{1}{2} e(p^2 + m^2)], \quad (1.5)$$

variando respecto a e . Desde el punto de vista cuántico, sin embargo, ésta restricción se impone llevando a cabo la integral funcional sobre e ,

$$\int D e \exp[-i \int d\tau \frac{1}{2} e(p^2 + m^2)] \sim \delta(p^2 + m^2) \quad (1.6)$$

Si en vez de ello integramos funcionalmente (1.5) sobre p obtenemos otra versión de la acción,

$$S = \frac{1}{2} \int d\tau (e^{-1} \dot{X}^2 - e m^2) \quad (1.7)$$

Esta acción posee varias ventajas sobre (1.1). No incluye derivadas dentro del radical, es cuadrática en derivadas (y por tanto su integral de trayectoria puede evaluarse fácilmente) y no es singular para partículas sin masa mientras que (1.1) no funciona en tal caso.

La equivalencia clásica entre (1.1) y (1.7) puede visualizarse reemplazando la ecuación de movimiento para e ,

$$e^2 = -\frac{1}{m^2} \dot{X}^\mu \dot{X}_\mu \quad (1.8)$$

en la acción (1.7). Desde el aspecto cuántico, es más fácil trabajar con la segunda forma de la acción.

Ahora se puede generalizar el análisis de la partícula puntual a un objeto unidimensional. Esto trazará una hoja de mundo bidimensional, que puede describirse en términos de dos parámetros, τ y ω .

Las coordenadas espaciotemporales de la cuerda son $X^\mu(\tau, \sigma)$. Los vectores tangentes a la hoja de mundo están dados por las derivadas de las coordenadas, $\partial X^\mu / \partial \tau$; $\partial X^\mu / \partial \sigma$. La contracción de dos de estos vectores tangente genera una métrica, la métrica inducida en la hoja de mundo,

$$g_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu \quad (1.9)$$

donde las variables τ, σ son reemplazadas por $\eta^{a,b}$, $a, b = 0, 1$. El área infinitesimal de esta superficie puede escribirse como

$$dArea \sim \sqrt{\det |g_{ab}|} \, d\sigma d\tau \quad (1.10)$$

En analogía al caso de la partícula puntual, donde la acción es la longitud recorrida por el punto, la acción de la cuerda ahora se define como el área de la superficie de la hoja de mundo,

$$S_{NG} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int \sqrt{(\dot{X}^2 X'^2 - \dot{X} \cdot X')^2} d\sigma d\tau \quad (1.11)$$

donde la prima denota derivada con respecto de σ y el punto con respecto de τ . La constante α' se conoce como la *pendiente de Regge*. Tiene unidades de longitud espaciotemporal al cuadrado y se relaciona con la tensión de la cuerda por

$$T = \frac{1}{2\pi\alpha'} \quad (1.12)$$

La acción (1.11) se denomina la *acción de Nambu-Goto*. Vamos a listar sus simetrías, es decir, las transformaciones de $X^\mu(\tau, \sigma)$ que dejan la acción invariante. Estas son,

1. Invariancia de Poincaré en D -dimensiones

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + a^\mu \quad (1.13)$$

donde Λ^μ_ν es una transformación Lorentz y a^μ es una traslación.

2. Invariancia ante reparametrizaciones en $2D$, usualmente llamada invariancia ante difeomorfismos (*diff*). Para nuevas coordenadas $\tau'(\tau, \sigma)$ y $\sigma'(\tau', \sigma')$, la transformación es

$$X'^\mu(\tau', \sigma') = X^\mu(\tau, \sigma) \quad (1.14)$$

La acción de Nambu-Goto es análoga a la acción (1.1) para la partícula puntual, con derivadas en el radical. Nuevamente podemos simplificarla para deshacernos del mismo. Como antes, podemos escribir el momento canónico conjugado de la teoría,

$$P_{\mu} = \frac{\delta L}{\delta \dot{X}^{\mu}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^{\nu} \dot{X}_{\mu} - (\dot{X}_{\nu} X'^{\nu}) X'_{\mu}}{\sqrt{\det|\partial_a X^{\nu} \partial_b X_{\nu}|}} \quad (1.15)$$

y es fácil ver que las componentes de este momento no son todas independientes. De hecho, satisfacen dos identidades,

$$P^2 + \frac{1}{(2\pi\alpha')^2} X'^2 = 0 \quad (1.16)$$

$$P_{\mu} X'^{\mu} = 0 \quad (1.17)$$

Además, en forma similar al caso de la partícula puntual, el hamiltoniano del sistema ($H = P_{\mu} \dot{X}^{\mu} - L$), es idénticamente cero. Estas son indicaciones de que estamos tratando con un sistema que posee infinita redundancia, y que existe otra forma de la acción expresada en términos de un campo auxiliar, que llamaremos h_{ab} (el análogo al multiplicador de Lagrange e en el caso cero dimensional). Esta forma es la conocida *acción de Polyakov*,

$$S_P = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int \sqrt{h} h^{ab} \partial_a X_{\mu} \partial_b X^{\mu} d\sigma d\tau \quad (1.18)$$

Fué originalmente descubierta simultáneamente por Brink, Di Vecchia y Howe, por un lado, y por otro por Deser y Zumino, al intentar derivar una generalización de esta discusión con supersimetría local en la hoja de mundo. Sin embargo, sus virtudes en la formulación de la integral de trayectoria fueron enfatizadas por Polyakov. Esta es la contraparte de cuerdas de la acción para la partícula puntual (1.7) y es completamente equivalente a nivel clásico a la acción de Nambu-Goto que revisamos anteriormente. La "métrica" de la hoja de mundo h_{ab} tiene signatura Lorentziana (+, -). Notemos que existen dos métricas en la acción de Polyakov: la métrica bidimensional de la hoja de mundo h_{ab} , ($a, b = 0, 1$) y la métrica del espaciotiempo, $\eta_{\mu\nu}$, ($\mu, \nu = 0, \dots, D-1$) (por simplicidad vamos a considerar la propagación de la cuerda en el espaciotiempo plano de Minkowski, posteriormente abordaremos la generalización a una métrica arbitraria $G_{\mu\nu}$, que es precisamente el tema principal de ésta tesis). Observemos también que h_{ab} no es la métrica inducida g_{ab} definida en (1.9). La equivalencia clásica entre S_{NG} y S_P puede ser fácilmente derivada.

La acción S_P posee las siguientes simetrías,

1. Invariancia de Poincaré en D -dimensiones

$$X'^{\mu}(\tau, \sigma) = \Lambda_{\nu}^{\mu} X^{\nu}(\tau, \sigma) + a^{\mu} \quad (1.19)$$

$$h'_{ab}(\tau, \sigma) = h_{ab}(\tau, \sigma). \quad (1.20)$$

2. Invariancia ante reparametrizaciones en $2D$, o invariancia Diff.

$$X'^{\mu}(\tau', \sigma') = X^{\mu}(\tau, \sigma) \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \xi^c}{\partial \xi^a} \frac{\partial \xi^d}{\partial \xi^b} h'_{cd}(\tau', \sigma') = h_{ab}(\tau, \sigma) \quad (1.22)$$

para nuevas coordenadas $\xi'^a(\tau, \sigma)$.

3. Invariancia de Weyl en $2D$

$$X'^{\mu}(\tau, \sigma) = X^{\mu}(\tau, \sigma) \quad (1.23)$$

$$h'_{ab}(\tau, \sigma) = e^{2\rho(\tau, \sigma)} h_{ab}(\tau, \sigma) \quad (1.24)$$

la variación de la acción con respecto a la métrica define el *tensor de energía-momento*,

$$T_{ab}(\tau, \sigma) = -4\pi(-h)^{1/2} \frac{\delta}{\delta h^{ab}} S_P \quad (1.25)$$

$$= -\frac{1}{\alpha'} (\partial_a X^\mu \partial_b X^\mu - \frac{1}{2} h_{ab} \partial_c X^\mu \partial_c X^\mu) \quad (1.26)$$

T_{ab} se conserva, $\nabla^a T_{ab} = 0$, como consecuencia de la invariancia ante difeos, y su traza es nula, $T^a_a = 0$, como consecuencia de la invariancia de Weyl de S_P .

Las acciones S_{NG} y S_P definen teorías de campo en dos dimensiones en la hoja de mundo de la cuerda. Gran parte de la maquinaria que usamos en teoría de cuerdas perturbativa es bidimensional. Desde el punto de vista de la hoja de mundo, la ley de transformación de coordenadas (1.21) define a $X^\mu(\tau, \sigma)$ como campos escalares. Desde el punto de vista bidimensional S_P describe campos escalares de Klein-Gordon no masivos acoplados en forma covariante a la métrica h_{ab} . La invariancia de Poincaré es una simetría interna, lo que significa que actúa en los campos con τ y σ fijos. X^μ se comportan como vectores bajo las transformaciones de Poincaré.

Variando h_{ab} en la acción proporciona la ecuación de movimiento,

$$T_{ab} = 0 \quad (1.27)$$

Notemos que no existen derivadas de h_{ab} en la acción, por lo que ésta ecuación de movimiento es más bien una restricción.

Variando con respecto a X^μ da la siguiente ecuación de movimiento,

$$\partial_a(-h)^{1/2} h^{ab} \partial_b X^\mu = (-h)^{1/2} \nabla^2 X^\mu = 0 \quad (1.28)$$

Para hojas de mundo con frontera existe también un término de superficie en la variación de la acción. Tomemos la región de coordenadas como

$$-\infty \leq \tau \leq \infty, \quad 0 \leq \sigma \leq l \quad (1.29)$$

Entonces,

$$\delta S_P = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_0^l d\sigma (-h)^{1/2} h^{ab} \delta X_\mu \nabla^2 X^\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau (-h)^{1/2} \delta X_\mu \partial^\sigma X^\mu \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=l}. \quad (1.30)$$

el término de frontera se anula si

$$\partial^\sigma X^\mu(\tau, 0) = \partial^\sigma X^\mu(\tau, l) = 0 \quad (1.31)$$

Estas son condiciones de frontera tipo *Neumann* en X^μ . En forma más covariante,

$$n^\alpha \partial_\alpha X^\mu = 0 \quad \text{sobre } \partial M \quad (1.32)$$

donde n^α es la normal a la superficie ∂M . Los extremos de la cuerda abierta se mueven libremente en el espaciotiempo.

El término de superficie en la ecuación de movimiento también se anula si imponemos

$$X^\mu(\tau, l) = X^\mu(\tau, 0) \quad , \quad \partial^\sigma X^\mu(\tau, l), \quad (1.33)$$

$$h_{ab}(\tau, l) = h_{ab}(\tau, 0) \quad (1.34)$$

Es decir, los campos son periodicos. No existe una frontera; los extremos están unidos para formar un camino cerrado.

La condición de frontera de cuerda abierta (1.31) y de cuerda cerrada (1.33) son las únicas posibilidades consistentes con invariancia de Poincaré en D dimensiones y con las ecuaciones de movimiento. Si relajamos la condición de invariancia de Poincaré entonces podemos tener una condición de frontera tipo *Dirichlet*:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, l. \quad (1.35)$$

Esta condición puede integrarse, y entonces especifica una ubicación en el espaciotiempo en la que la cuerda termina. La única forma en la que esto tiene sentido es si la cuerda abierta termina en un objeto físico: una D -brana (D viene de Dirichlet). Si todas las condiciones de frontera de la cuerda abierta fueran de Neumann, los extremos de la cuerda podrían estar en cualquier lugar del espaciotiempo, y esto significa que se encuentran presentes D -branas cubriendo el espaciotiempo.

S_P no es la acción más general consistente con todas las simetrías de la teoría. Si pedimos que las simetrías se mantengan y que la acción sea polinomial en las derivadas, podemos generalizar ésta acción. Invariancia global de Weyl, $\rho = (\tau, \sigma) = \text{constante}$, requiere que la acción tenga un factor h^{ab} adicional que cancele la variación de $(-h)^{1/2}$. La invariancia de coordenadas y la de Poincaré permiten un término extra,

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \int_M d\tau d\sigma (-h)^{1/2} R \quad (1.36)$$

donde R es el escalar de Ricci en dos dimensiones construido a partir de h_{ab} . Bajo una redefinición de la escala local de Weyl, tenemos,

$$(-h')^{1/2} R' = (-h)^{1/2} (R - 2\nabla^2 \rho). \quad (1.37)$$

La variación es una derivada total, debido a que $(-h)^{1/2} \nabla_a v^a = \partial_a ((-h)^{1/2} v^a)$ para cualquier v^a . La integral (1.36) es por tanto invariante para una hoja de mundo sin frontera. Si existen fronteras se debe agregar un término extra de superficie.

Como χ es compatible con las simetrías vamos a incluirlo en la acción,

$$S'_P = S_P + \lambda \chi = - \int_M d\tau d\sigma (-h)^{1/2} \left(\frac{1}{4\pi\alpha'} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu + \frac{\lambda}{4\pi} R \right) \quad (1.38)$$

Esta es la acción más general con invariancia (*DifflxWeyl*) más invariancia de Poincaré con estos campos y simetrías. Por el momento la discusión de simetrías es clásica, y estamos ignorando posibles anomalías cuánticas, las que consideraremos más adelante con detalle.

La acción S'_P se parece a la acción de Hilbert para la métrica, $\int (-h)^{1/2} R$, acopla en forma mínima a D campos escalares no masivos X^μ . Sin embargo, en dos dimensiones, la acción de Hilbert depende únicamente de la topología de la hoja de mundo y no proporciona ninguna dinámica a la métrica. Para ver esto, recordemos que su variación es proporcional a $R_{ab} - \frac{1}{2} h_{ab} R$. En dos dimensiones, las simetrías del tensor de curvatura implican que $R_{ab} = \frac{1}{2} h_{ab} R$ y por tanto esto se anula: la acción de Hilbert es invariante bajo cualquier cambio continuo de la métrica.

Las invariancias locales de la acción S_P permiten una selección del gauge adecuada para la métrica de la hoja de mundo h_{ab} , que se conoce como *gauge conforme*. Podemos usar la invariancia ante reparametrizaciones para elegir coordenadas tales que localmente $h_{ab} = \Omega^2(\tau, \sigma) \eta_{ab}$. Se puede usar entonces la invariancia de Weyl para ver que $h_{ab} = \eta_{ab}$. Es fácil ver que el gauge conforme es una característica particular de dos dimensiones. En dimensiones $d > 2$, una métrica h_{ab} , simétrica, tiene $d(d+1)/2$ componentes independientes. La invariancia ante reparametrizaciones permite fijar d de ellos dejando $d(d-1)/2$ componentes. En dos dimensiones es suficiente para fijar el gauge conforme. Aún tenemos una simetría extra local, es decir, las transformaciones de Weyl, lo que permite eliminar el componente sobrante de la métrica.

La solución general de la ecuación de onda (1.28) esta dada por una suma de "osciladores derechos" y "osciladores izquierdos",

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma) \quad (1.39)$$

Consideremos el caso de la cuerda cerrada primero. Los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ deben ser reales y deben satisfacer la condición de periodicidad $X^\mu(\tau, \sigma +$

$l) = X^\mu(\tau, \sigma)$. Estas dos condiciones pueden resolverse explícitamente en términos de las series de Fourier:

$$\begin{aligned} X_R^\mu &= \frac{1}{2}x^\mu + \alpha'p^\mu(\tau - \sigma) \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp\left[\frac{-2i\pi n(\tau - \sigma)}{l}\right] \\ X_L^\mu &= \frac{1}{2}x^\mu + \alpha'p^\mu(\tau + \sigma) \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp\left[\frac{-2i\pi n(\tau + \sigma)}{l}\right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

$\alpha_n^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ son los componentes de Fourier que interpretamos como osciladores de las coordenadas. x^μ y p^μ pueden interpretarse como la posición y el momento del centro de masa de la cuerda. La condición de realidad implica que x^μ y p^μ son reales y

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^\dagger \quad ; \quad \tilde{\alpha}_{-n}^\mu = (\tilde{\alpha}_n^\mu)^\dagger \quad (1.41)$$

Es usual definir la convención $\alpha_0^\mu = \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}p^\mu$.

Los paréntesis de Poisson de los α_n^μ pueden calcularse fácilmente a partir de los paréntesis de Poisson de X^μ y X^μ en el mismo τ y son,

$$[p^\mu, x^\nu]_{PP} = \eta^{\mu\nu} \quad (1.42)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu]_{PP} = im\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \quad (1.43)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu]_{PP} = 0 \quad (1.44)$$

por lo que los modos de Fourier α_n^μ para $n \neq 0$ son coordenadas de oscilador armónico.

En el caso de la cuerda abierta la solución a la ecuación de onda con condiciones a la frontera de Neumann es,

$$X_R^\mu = x^\mu + 2\alpha'p^\mu\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \exp\left[\frac{-\pi in\tau}{l}\right] \cos\frac{n\pi\sigma}{l} \quad (1.45)$$

(Esto puede obtenerse a partir de la solución para la cuerda cerrada imponiendo $X'^\mu = 0$ en $\sigma = 0, l$; los componentes izquierdos y derechos se combinan en ondas estacionarias). Por tanto, a diferencia del caso de la cuerda cerrada, existe sólamante un conjunto de modos en la cuerda abierta. En este caso se acostumbra identificar al momento del centro de masa con el modo cero $\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'}p^\mu$.

Consideremos la invariancia de Poincaré en D dimensiones. Dado que las transformaciones de Poincaré son simetrías globales desde el punto de vista de la teoría bidimensional, están asociadas a corrientes conservadas. Usando el conocido procedimiento de Nöther, la corriente asociada con la invariancia traslacional puede obtenerse a partir de,

$$P_a^\mu = T\partial_a X^\mu \quad (1.46)$$

mientras la corriente asociada con la invariancia de Lorentz es

$$J_a^{\mu\nu} = T(X^\mu \partial_a X^\nu - X^\nu \partial_a X^\mu). \quad (1.47)$$

Estas corrientes se conservan

$$\partial_a P^{a\mu} = \partial_a J^{a\mu\nu} = 0 \quad (1.48)$$

Y describen el momento lineal y angular en D dimensiones de la cuerda. El momento total conservado y el momento angular de una cuerda se obtienen integrando estas corrientes sobre σ con $\tau = 0$, por ejemplo,

$$P^\mu = T \int_0^l d\sigma \frac{dX^\mu(\sigma)}{d\tau} \quad (1.49)$$

y

$$J^{\mu\nu} = T \int_0^l d\sigma \left(X^\mu \frac{dX^\nu}{d\tau} - \frac{X^\nu dX^\mu}{d\tau} \right) \quad (1.50)$$

La ecuación de onda debe completarse con la restricción (1.27)

$$T_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X_\mu - \frac{1}{2} h_{ab} h^{cd} \partial_c X^\mu \partial_d X_\mu = 0 \quad (1.51)$$

En componentes,

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X'^2) = 0 \quad (1.52)$$

$$T_{01} = T_{10} = \dot{X} \cdot X' = 0 \quad (1.53)$$

Notemos que la traza se anula idénticamente, $h^{ab} T_{ab} = 0$. El hamiltoniano de la teoría es,

$$H = \int_0^l d\sigma (\dot{X} \cdot P - L) = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^l d\sigma (\dot{X}^2 + X'^2) \quad (1.54)$$

que puede escribirse en términos de osciladores, para la cuerda abierta tenemos,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_n \sum_m \alpha_n \cdot \alpha_m e^{-1(m+n)\tau} \int_0^l d\sigma \cos \frac{n\pi\sigma}{l} \cos \frac{m\pi\sigma}{l} \\ &\quad - \sum_{n \neq 0} \sum_{m \neq 0} \alpha_n \cdot \alpha_m e^{-1(n+m)\tau} \int_0^l d\sigma \sin n\sigma \sin m\sigma \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \alpha_n \cdot \alpha_{-n} \end{aligned} \quad (1.55)$$

En el caso de la cuerda cerrada el mismo procedimiento nos conduce a

$$H = \frac{1}{2} \sum_n (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n}) \quad (1.56)$$

La restricción $H = 0$ permite escribir la masa de la cuerda en términos de los modos de osciladores. Para la cuerda abierta tenemos

$$0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} \quad (1.57)$$

por lo que obtenemos la condición de cascara de masa

$$-\alpha' p^2 \alpha' M^2 = \sum_{n>0} \alpha_n \cdot \alpha_{-n} \quad (1.58)$$

y

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n} \cdot \alpha_n + \tilde{\alpha}_n \cdot \tilde{\alpha}_{-n}) \quad (1.59)$$

para cuerdas cerradas.

Un parte importante de los cálculos en cuerdas se llevan a cabo en una hoja de mundo euclidiana donde la métrica de la misma, h_{ab} , se reemplaza por δ_{ab} . Consideremos la hoja de mundo de una cuerda cerrada, el cilindro parametrizado por $\sigma \in [0, 2\pi]$ y $\tau \in [-\infty, +\infty]$. Vamos a aplicar una rotación de Wick $\tau \rightarrow -i\tau$ de forma que $\xi^\pm = \tau \pm \sigma \rightarrow -i(\tau \pm i\sigma)$. En éste caso es útil introducir coordenadas complejas,

$$z' = \tau - i\sigma \quad , \quad \bar{z}' = \tau + i\sigma \quad (1.60)$$

Podemos ahora mapear el cilindro en el plano complejo por

$$z = e^{z'} = e^{\tau - i\sigma} \quad , \quad \bar{z} = e^{\bar{z}'} = e^{\tau + i\sigma} \quad (1.61)$$

Al definir la teoría en el plano complejo podemos aplicar técnicas de análisis complejo, que son muy poderosas. Las líneas con tiempo constante τ son mapeadas a círculos con centro en el origen. Las integrales sobre σ son reemplazadas por integrales de contorno alrededor del origen. El pasado infinito se mapea a $z = 0$ y el futuro infinito a $z = \infty$. Las traslaciones en σ se convierten en rotaciones y las traslaciones en el tiempo en dilataciones.

Los índices complejos se suben y bajan con

$$h_{z\bar{z}} = h_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \quad h_{zz} = h_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad h^{z\bar{z}} = h^{\bar{z}z} = 2, \quad h^{zz} = h_{\bar{z}\bar{z}} \quad (1.62)$$

También observemos que

$$d^2 z = 2 d\sigma d\tau \quad (1.63)$$

con el factor 2 que se obtiene del jacobiano de la transformación ($d^2 z = |\det g|^{1/2} d\sigma d\tau$).

En ésta notación la acción es

$$S_P = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2 z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \quad (1.64)$$

y la ecuación clásica de movimiento es

$$\partial\bar{\partial}X^\mu(z, \bar{z}) = 0. \quad (1.65)$$

Esta última ecuación se puede escribir como

$$\partial(\bar{\partial}X^\mu) = \bar{\partial}(\partial X^\mu) = 0 \quad (1.66)$$

y de aquí se puede apreciar que ∂X^μ es holomórfica y $\bar{\partial}X^\mu$ es antiholomórfica (holomórfica en \bar{z}). Bajo la continuación de Minkowski $\tau \rightarrow i\tau$, un campo holomórfico se vuelve una función sólo de $\tau - \sigma$ y el campo antiholomórfico una función de $\tau + \sigma$. Por ello, podemos usar como sinónimos

$$\begin{aligned} \text{holomórfico} &= \text{osciladores derechos} \\ \text{antiholomórfico} &= \text{osciladores izquierdos} \end{aligned} \quad (1.67)$$

En coordenadas complejas, las restricciones (1.51) son $T_{z\bar{z}} = 0$, $\bar{T}_{\bar{z}z} = 0$ y la traza es $T_{z\bar{z}} = 0$. La ley de conservación $\partial^a T_{ab} = 0$ toma la forma,

$$\begin{aligned} \partial_z T_{z\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} T_{\bar{z}z} &= 0 \\ \partial_z T_{\bar{z}z} + \partial_{\bar{z}} T_{zz} &= 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

Dado que $T_{z\bar{z}} = 0$, éstas ecuaciones implican que $T_{zz}(T_{\bar{z}\bar{z}})$ es una función holomórfica (antiholomórfica). Por ello puede obtenerse su expansión de Laurent como

$$T_{zz}(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{L_m}{z^{m-2}}; T_{\bar{z}\bar{z}}(\bar{z}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{L}_m}{\bar{z}^{m-2}} \quad (1.69)$$

Los coeficientes de la serie se denominan *generadores de Virasoro* y pueden obtenerse invirtiendo estas expresiones¹

$$L_m = \int_C \frac{dz}{2\pi iz} z^{m+2} T_{zz}(z) \quad (1.70)$$

y en forma similar expresamos \bar{L}_m . C es cualquier contorno que encierre el origen en dirección opuesta a las manecillas del reloj. Es lo mismo que la expansión de Fourier ordinaria en coordenadas w en $\tau = 0$.

El que la traza de T se anule es típico de una teoría con invariancia conforme. La ley de conservación (1.68) corresponde a la existencia de un conjunto infinito de cantidades conservadas. Es la simetría infinita generada por las corrientes

$$j(z) = v(z)T(z)\bar{j}(\bar{z}) = v(\bar{z})T(\bar{z})^*(\bar{z}) \quad (1.71)$$

Estas cantidades conservadas corresponden a simetrías residuales que sobreviven después de fijar el gauge conforme, bajo difeomorfismos $\delta h_{ab} =$

¹Usando el teorema de Cauchy, es un ejercicio estándar de FETI

$\partial_a \xi_b = \partial_b \xi_a$, y bajo transformaciones de Weyl $\delta h_{ab} = \Lambda h_{ab}$. Aún después de fijar el gauge conforme es posible mantener la métrica plana combinando transformaciones de coordenadas y de Weyl. La simetría residual nos será útil para introducir el gauge del cono de luz más adelante.

Reemplazando las expansiones en modos (1.40) en (1.70) obtenemos

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n, \quad \tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \cdot \tilde{\alpha}_n \quad (1.72)$$

Notemos que $H = L_0$ para cuerdas abiertas y $H = L_0 + \tilde{L}_0$ para cuerdas cerradas.

La combinación de $L_0 + \tilde{L}_0$ debe anularse de acuerdo con las ecuaciones de restricción. Esto implica que los dos términos en (1.56) contribuyen de igual forma.

Los paréntesis de Poisson de los operadores de Virasoro pueden calcularse fácilmente a partir de los paréntesis de Poisson de los osciladores, y de aquí se obtiene el álgebra de Virasoro

$$[L_m, L_n]_{PP} = i(m-n)L_{m+n} \quad (1.73)$$

y de forma análoga para \tilde{L}_m . Esta es el álgebra que satisfacen los generadores de las simetrías residuales que preservan la condición del gauge conforme (difeomorfismos infinitesimales de S^1). Esta álgebra se modifica cuando aparecen anomalías cuánticas, como se verá más adelante.

1.2 Cuantización

Discutiremos la primera cuantización de la cuerda. Debemos tener presente que esto no es lo mismo que la segunda cuantización de la cuerda, que constituye la llamada *teoría de campos de cuerdas*, la cual está basada en operadores que crean y destruyen cuerdas completas.

Existen varios formalismos posibles para cuantizar la teoría de cuerdas y es útil revisar las características básicas de los mismos. Tenemos dos cuantizaciones covariantes. Una esta basada en las coordenadas X^μ , que son consideradas los operadores cuánticos. La otra es la moderna cuantización por integral de trayectoria, que tiene una base geométrica más profunda y es más conveniente para calcular diagramas de lazos. El tercer formalismo es la cuantización en el gauge del cono de luz, que no es invariante de Lorentz en forma *manifiesta*, pero proporciona una teoría unitaria manifiesta, libre de *fantasmas*. En nuestro caso vamos a describir el primero y tercer formalismos con cierto detalle. El último nos interesa para obtener en forma rápida la dimensión crítica y en espectro de la cuerda. Hablaremos de la formulación por integral de trayectoria en el siguiente capítulo cuando calculemos la anomalía de Weyl a primer orden, aunque lo haremos de una forma práctica.

1.2.1 Cuantización covariante tradicional

Una forma estándar de ir de la teoría clásica a la cuántica consiste en reemplazar los paréntesis de Poisson por conmutadores, sustituyendo

$$[\dots]_{PP} \rightarrow -i[\dots] \quad (1.74)$$

Por tanto, de (1.44) obtenemos los conmutadores,

$$[p^\mu, x^\nu] = \eta^{\mu\nu} \quad (1.75)$$

$$[\alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu] = [\tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = m\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu} \quad (1.76)$$

$$[\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu] = 0 \quad (1.77)$$

Los operadores $\alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\mu$ pueden interpretarse naturalmente como osciladores de subida y de bajada para $m > 0$ ó $n > 0$, respectivamente. El estado base $|0; k\rangle$ se define como el estado que es aniquilado por los operadores de bajada y es un eigenestado del momento del centro de masa,

$$\alpha_m^\mu |0; k\rangle = 0, \quad m > 0 \quad (1.78)$$

$$p^\mu |0; k\rangle = k^\mu |0; k\rangle. \quad (1.79)$$

los osciladores α_m^μ están relacionados con los operadores convencionales del oscilador armónico por $\alpha_m^\mu = \sqrt{m} a_m^\mu$, $\alpha_{-m}^\mu = \sqrt{m} a_m^{\mu\dagger}$, para $m > 0$. Observemos que $|0; 0\rangle$ es el estado base de la teoría de una cuerda individual con momento cero, no es el vacío de la teoría.

Un estado en general puede construirse aplicando los operadores de creación $\alpha_m^{\mu\dagger}$ al estado base $|0; k\rangle$. El espacio de Fock definido de esta manera no es positivo definido. Las relaciones de conmutación de los componentes temporales,

$$[a_m^0, a_m^{0\dagger}] = -1 \quad (1.80)$$

implican que el estado $a_m^{0\dagger}|0; k\rangle$ tiene norma negativa porque

$$\langle 0|a_m^0 a_m^{0\dagger}|0\rangle = -1 \quad (1.81)$$

Estos estados se denominan *fantasmas* y conducen a un conflicto con la interpretación probabilística de la mecánica cuántica.

Sin embargo, el espacio físico *real* es más pequeño. Aún no hemos impuesto las restricciones que encontramos en la teoría clásica, es decir, la anulación del tensor de energía-momento $T_{ab} = 0$. Debemos implementarlas como operadores, como condiciones subsidiarias en los estados. Habiéndolas implementado ya podemos esperar que los fantasmas se desacoplen del espacio de Hilbert físico.

Recordemos que los modos de Fourier de T_{ab} son los generadores de Virasoro,

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \cdot \alpha_n \quad (1.82)$$

Ahora que los α_m^μ son operadores, debemos resolver las ambigüedades respecto al ordenamiento normal. Como α_{m-n}^μ conmuta con α_n^ν a menos que $m = 0$, la única ambigüedad se origina de L_0 . Definimos,

$$\tilde{L}_0 = \frac{1}{2}\alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n - A \quad (1.83)$$

es decir, hemos colocado los operadores de bajada a la derecha y los de subida a la izquierda, e incluido una constante desconocida A de los conmutadores. En la teoría clásica, las condiciones de restricción son responsables de la anulación de los componentes de Fourier de T_{ab} . $L_m - \tilde{L}_m = 0, \forall m$. En el contexto cuántico esto puede extenderse en forma natural imponiendo la condición de que L_m aniquile los estados físicos.

Antes de llevar esto a cabo, debemos determinar el álgebra de los L_m . Debido al ordenamiento normal el cálculo debe hacerse con mucho cuidado. El álgebra que se encuentra es [6]

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m+n} \quad (1.84)$$

c es denominada la *carga central*, y se original como un efecto cuántico. Aquí $c = D$, la dimensión del espaciotiempo. Esto significa que cada escalar libre contribuye con una unidad a la carga central. Más adelante determinaremos la contribución de otros campos.

Ahora es más sencillo ver que aunque en la teoría clásica las restricciones son $L_m = 0, \forall m$, esto no puede implementarse sobre los estados $|\phi\rangle$ debido a que

$$\langle \phi | [L_m, L_{-m}] | \phi \rangle = \langle \phi | 2mL_0 | \phi \rangle + \frac{D}{12}m(m^2 - 1) \langle \phi | \phi \rangle \quad (1.85)$$

es decir, no podemos pedir que $L_m|\phi\rangle = 0, \forall m$. Lo más que podemos hacer es demandar que sobre los estados físicos

$$L_m|\text{físico}\rangle = 0, m \geq 0 \quad (1.86)$$

Para la cuerda cerrada también tenemos los \tilde{L}_m 's, y también satisfacen el álgebra de Virasoro y conmutan con los L_m 's. entonces imponemos las condiciones (1.86) para los \tilde{L}_m 's y además

$$(L_0 - \tilde{L}_0)|\text{físico}\rangle = 0 \quad (1.87)$$

(Esto requiere que $A = \tilde{A}$). El operador $U_\epsilon = e^{i(L_0 - \tilde{L}_0)}$ genera traslaciones rígidas en σ (es decir, satisface $U_\epsilon^\dagger X^\mu(\sigma, \tau) U_\epsilon = X^\mu(\sigma + \epsilon, \tau)$). Como ningún punto en una cuerda cerrada es privilegiado, debemos imponer (1.87).

En la teoría clásica, la condición L_0 da la masa de la cuerda en términos de osciladores. Aquí, para la cuerda abierta

$$L_0 = \alpha' p^\mu p_\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \cdot \alpha_n = A. \quad (1.88)$$

Por lo que $M^2 = p^\mu p_\mu$ y la restricción $L_0|\text{físico}\rangle = 0$ implica que la masa de los estados físicos esta dada por

$$M^2|\text{físico}\rangle = \frac{1}{\alpha'}(N - A)|\text{físico}\rangle \quad (1.89)$$

donde hemos definido el número de nivel $N = \sum_{m>0} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m$.

Para la cuerda cerrada obtenemos a partir de las expresiones para L_0 y \tilde{L}_0

$$M^2 = M_L^2 + M_R^2 = \frac{2}{\alpha'}(\tilde{N} + N - 2A) \quad (1.90)$$

$$M_L^2 = M_R^2 \quad (1.91)$$

La segunda ecuación es consecuencia de (1.87).

La masa del estado base es determinada, tanto en la teoría de la cuerda abierta como de la cerrada, por las constantes de ordenamiento normal. Estas constantes se anulan en las expresiones para los operadores de momento angular y el álgebra de Poincaré se mantiene a nivel cuántico. Además, como $[L_m, J^{\mu\nu}] = 0$, las condiciones de estado físico son invariantes bajo transformaciones de Lorentz y los estados físicos forman multipletes de Lorentz.

Se puede demostrar un teorema de "no fantasmas" que establece que los fantasmas se desacoplan en 26 dimensiones si $A = 1$. En este formalismo covariante sólo se pueden ver indicaciones de una simetría extra para estos valores. Se llega a la misma conclusión a partir de la cuantización en el gauge del cono de luz y de la cuantización por integral de trayectoria. En este trabajo solo revisaremos la primera de éstas.

1.2.2 Cuantización en el gauge del cono de luz

Cuando fijamos el gauge conforme $h_{ab} = \eta_{ab}$ vemos que aún existen simetrías residuales. Estas pueden utilizarse para elegir otros gauges. En el gauge del cono de luz, las ecuaciones de restricción de Virasoro pueden resolverse explícitamente y la teoría contiene únicamente estados físicos. No es covariante en forma manifiesta pero no contiene fantasmas. Puede mostrarse que el espectro es equivalente al obtenido en la formulación covariante. En esta tesis obtendré el espectro a partir del gauge del cono de luz, por ser la forma más sencilla de hacerlo.

Primero vamos a introducir coordenadas del cono de luz en el espacio-tiempo

$$X^+ = \frac{X^0 + X^{D-1}}{\sqrt{2}}, \quad X^- = \frac{X^0 - X^{D-1}}{\sqrt{2}} \quad (1.92)$$

donde hemos escogido en forma arbitraria, en forma no covariante, X^{D-1} . Las coordenadas restantes $X^i, i = 1, \dots, D-2$, son coordenadas trasversas.

El gauge del cono de luz fija las simetrías residuales que sobreviven después de fijar el gauge conforme, y esta libertad residual se usa para escoger $\tau \propto X^+$. Recordemos que las parametrizaciones que satisfacen $\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha \propto h_{ab}$ pueden compensarse con un reescalamiento de Weyl. Expresados en coordenadas del cono de luz ($\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$) los difeomorfismos que preservan el gauge satisfacen $\partial_+ \xi^- = \partial_- \xi^+ = 0$, es decir, $\xi^\pm = \xi^\pm(\sigma^\pm)$. La simetría residual corresponde a la posibilidad de reparametrizar $\sigma^+ \rightarrow \tilde{\sigma}^+(\sigma^+)$, $\sigma^- \rightarrow \tilde{\sigma}^-(\sigma^-)$, o infinitesimalmente, $\tilde{\sigma}^\pm = \sigma^\pm + \xi^\pm(\sigma^\pm)$. En términos de $\tau = \frac{1}{2}(\sigma^+ + \sigma^-)$ y $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma^+ - \sigma^-)$

$$\tilde{\tau} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^+ - \tilde{\sigma}^-) \quad (1.93)$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}^+ - \tilde{\sigma}^-) \quad (1.94)$$

La primera ecuación establece que $\tilde{\tau}$ puede ser una solución arbitraria de la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\right)\tilde{\tau} = 0 \quad (1.95)$$

Esta es la ecuación que las coordenadas del espaciotiempo $X^\mu(\tau, \sigma)$ obedecen (en el gauge conforme). Por tanto, la libertad de gauge corresponde al hecho de que podemos hacer una reparametrización de forma tal que $\tilde{\tau}$ sea igual a una de las X^μ . $\tilde{\tau} = \frac{X^+}{p^+} + \text{const.}$ Esto se expresa usualmente como

$$X^+(\tau, \sigma) = x^+ + p^+ \tau \quad (1.96)$$

clásicamente corresponde a escoger los osciladores $\alpha_n^+ = 0$ para $n \neq 0$.

Ahora las condiciones de Virasoro $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ se expresan como

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{2p^+}(\dot{X}^i \pm X'^i)^2 \quad (1.97)$$

donde usamos el hecho de que los componentes diferentes de cero de la métrica de Minkowski son $\eta_{+-} = \eta_{-+} = -1$, $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, y $\dot{X}^i = p^+$. Esta ecuación puede resolverse para X^- como función de X^i , de manera tal que en el gauge del cono de luz X^+ y X^- pueden eliminarse, dejando solamente osciladores transversos X^i . Usando la expansión en modos de X^i

$$X^- = x^- + p^- \tau + i \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma \quad (1.98)$$

la solución explícita de (1.97) es

$$\bar{\alpha}_n^- = \frac{1}{p^+} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} : \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i : - a \delta_n \right) \quad (1.99)$$

donde introducimos una constante de ordenamiento normal para α_0^- . La condición de cascara de masa en el gauge del cono de luz se obtiene usando la identificación de α_0^- con p^- . Para $n = 0$

$$p^+ p^- = \frac{1}{2} \alpha_0^i \alpha_0^i + \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i - a \quad (1.100)$$

Por tanto,

$$M^2 = 2p^+ p^- - p_i p_i = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{-m}^i \alpha_m^i - a \quad (1.101)$$

donde $N = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i$ solamente incluye contribuciones de los osciladores transversos.

En el gauge del cono de luz todas las excitaciones de cuerdas son generadas por los osciladores transversos α_n^i . El primer estado excitado es

$$\alpha_{-1}^i |0; k\rangle \quad (1.102)$$

que es una representación vectorial de $(D-2)$ componentes del grupo de rotaciones transversas $SO(D-2)$. Un vector polarizado en forma transversa, sometido a una transformación de Lorentz, adquiere una polarización longitudinal en general, a menos de sea no masivo. Esto responde al hecho de que una partícula no masiva corresponde a una representación irreducible de $SO(D-2)$. Entonces, el gauge del cono de luz no puede proporcionar una teoría invariante de Lorentz a menos que el estado vectorial (1.102) sea no masivo, es decir, el parámetro a debe ser igual a 1.

Intentemos establecer una restricción sobre D . Primero consideremos un argumento heurístico que utiliza el resultado anterior de que $A = 1$ debido a la invariancia de Lorentz. La constante de ordenamiento normal puede calcularse directamente de

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}^i \alpha_n^i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{D-2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{-n}^i \alpha_n^i : + \frac{D-2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (1.103)$$

La suma infinita sobre n arriba debe ser regularizada. Empleando la *regularización de la función zeta* obtenemos $\sum_{n=1}^{\infty} n = -1/12$. Por tanto,

$$A = 1 = \frac{D-2}{2} \quad (1.104)$$

lo que implica que $D = 26$. Este resultado, $A = 1$ y $D = 26$, son condiciones necesarias y suficientes para tener invariancia de Lorentz, y puede ser probado en forma más rigurosa por un estudio sistemático de los generadores de Lorentz $J^{\mu\nu}$,

$$J^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (1.105)$$

Las relaciones de conmutación entre los $J^{\mu\nu}$ pueden calcularse explícitamente en el gauge del cono de luz, y como resultado aparece una anomalía en $[J^{i-}, J^{j-}]$. La invariancia de Lorentz requiere que este conmutador se anule. El cálculo directo de este conmutador nos proporciona

$$[J^{i-}, J^{j-}] = -\frac{1}{(p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} \Delta_m (\alpha_{-m}^i \alpha_m^j - \alpha_{-m}^j \alpha_m^i) \quad (1.106)$$

con

$$\Delta_m = m \left(\frac{26-D}{12} \right) + \frac{1}{m} \left(\frac{D-26}{12} + 2(1-A) \right) \quad (1.107)$$

Si pedimos que $\Delta_M = 0, \forall m$, obtenemos $D-26$ y $A-1$, como esperabamos.

1.3 Espectro de la cuerda bosónica

Los estados de la teoría se generan actuando con los osciladores transversos sobre el estado base. Debemos distinguir entre la cuerda abierta y la cerrada.

1.3.1 Espectro de la cuerda abierta

El estado base es $|0; k \rangle$. Su masa esta dada por el operador $\alpha' M^2 |0; k \rangle = -A |0; k \rangle$, y como $A = 1$, este estado es un *taquión*. La presencia de una taquión en el espectro significa que el vacío es inestable y la teoría puede ser inconsistente. Si se incluyen grados fermiónicos de libertad en la hoja de mundo en forma supersimétrica y si requerimos supersimetría en el espaciotiempo, el taquión desaparece.

El primer estado excitado $\alpha_{-1}^i |0; k \rangle$, es un vector sin masa de $D-2$ dimensiones perteniente al grupo de rotaciones trasversas $SO(D-2)$. La invariancia de Lorentz requiere que los estados físicos sean representaciones del *pequeño grupo* del grupo de Lorentz $SO(D-1, 1)$, el cual es $SO(D-1)$ para una partícula masiva y $SO(D-2)$ para partículas sin masa. El gauge del cono de luz tiene la desventaja de proporcionar los estados como multipletes de $SO(D-2)$, a pesar de que la demostración de invariancia de Lorentz, que es válida en $D = 26$, garantiza que los niveles masivos llenan completamente los multipletes de $SO(D-1)$.

Los estados excitados más altos de la cuerda, que son masivos, efectivamente forman representaciones completas de $SO(D-1)$. Se puede confirmar esto a mano para algunos pocos niveles, y en un análisis más completo ésta propiedad resulta de la existencia del conjunto completo de generadores de Lorentz.

Los primeros estados con masa positiva ocurren en el nivel 1, y están dados por

$$\alpha_{-2}^i |0; k \rangle \quad y \quad \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j |0; k \rangle \quad (1.108)$$

Estos son $D - 2$ y $(D - 2)(D - 1)/2$ estados, respectivamente. La suma $(D - 2)(D + 1)/2$ es la dimensionalidad de una representación simétrica sin traza de $SO(D - 1)$, que debe ser la respuesta completa entonces.

En el nivel $M^2 = 2/\alpha'$ los estados posibles son

$$\alpha_{-3}^i |0; k \rangle, \quad \alpha_{-2}^i \alpha_{-1}^j |0; k \rangle, \quad \alpha_{-1}^i \alpha_{-1}^j \alpha_{-1}^k |0; k \rangle \quad (1.109)$$

un total de $24 + 576 + 2600 = 3200$ estados. Estos se combinan para formar representaciones de $SO(25)$. En forma similar, para $\alpha' M^2 = 3$ se obtiene un total de 25650 estados. Los extremos de la cuerda abierta son puntos especiales, por lo que es posible asignarles grados de libertad no dinámicos. Por ejemplo, se les puede asociar "cargas": un "quark" en un extremo y un "antiquark" en el otro, e introducir un grupo de simetría $U(n)$ bajo el cual el "quark" y el "antiquark" se transforman en las representaciones n y \bar{n} respectivamente. En este caso, una base de estados de cuerdas $|k; ij \rangle$, donde $i, j = 1, \dots, n$, corresponde a los estados $U(n)$ de un "quark" y un "antiquark". Ahora tenemos n^2 estados no masivos y los operadores correspondientes contienen $U(n)$ generadores λ_{ij}^a , conocidos como *factores de Chan-Paton*.

1.3.2 Espectro de la cuerda cerrada

El espectro de estados de la cuerda cerrada es fácilmente deducido del de la cuerda abierta. Las cuerdas cerradas en el gauge del cono de luz se describen por dos conjuntos de osciladores transversos, α_n^i y $\bar{\alpha}_n^i$. Además existe la restricción de que $L_0 = \bar{L}_0$, conocida como la condición de coincidencia de niveles. Por tanto el multiplete de la cuerda cerrada con $\alpha' M^2 = 4(N - 1)$ esta dado por los productos tensoriales de los estados de cuerdas abiertas con ellos mismos, teniendo $\alpha' M^2 = N - 1$.

El estado base es un taquión con $\alpha' M^2 = -4$. El siguiente nivel es un conjunto de estados no masivos de la forma

$$\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0; k \rangle \quad (1.110)$$

con $SO(24)$ números cuánticos correspondientes al producto tensorial de un vector no masivo de $SO(24)$ perteneciente a los modos izquierdos con un vector no masivo de $SO(24)$ proveniente de los modos derechos. Este estado puede descomponerse en forma natural en representaciones irreducibles del pequeño grupo $SO(24)$:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0; k \rangle = & \alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j |0; k \rangle + \left(\alpha_{-1}^i \bar{\alpha}_{-1}^j - \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \bar{\alpha}_{-1}^k \right) |0; k \rangle \\ & + \frac{1}{D-2} \delta^{ij} \alpha_{-1}^k \bar{\alpha}_{-1}^k |0; k \rangle \end{aligned} \quad (1.111)$$

La parte de (1.111) que es simétrica y sin traza en i y j se transforma bajo $SO(24)$ como una partícula no masiva de spin 2: *el gravitón*. La traza

$\delta_{ij}\alpha_{-1}^i\alpha_{-1}^j|0; k\rangle$ es un escalar no masivo, usualmente denominado *el dilatón*. Finalmente, la parte antisimétrica se transforma bajo $SO(24)$ como un tensor antisimétrico de segundo rango. Uno puede también describir estados de cuerdas cerradas de masa positiva al cuadrado tomando los productos adecuados de estados de cuerdas abiertas derechos e izquierdos.

El espectro descrito anteriormente es aquel de las cuerdas cerradas *orientables*. También es posible restringir el espectro a estados correspondientes a una cuerda no orientada. Físicamente, la cuerda orientada posee una "flecha intrínseca" mientras la cuerda no orientada no tiene dirección. Matemáticamente, una cuerda no orientada es una cuerda cuya función de onda $\Psi(X^\mu(\sigma))$ es invariante ante $\sigma \rightarrow -\sigma$. La función de onda cuántica de una cuerda orientable no tiene tal restricción, por lo que deducimos que hasta ahora hemos descrito teoría de cuerdas cerradas orientables. Vamos describir el caso no orientado brevemente. El concepto de orientabilidad puede hacerse preciso definiendo un operador T que revierte la orientación de una cuerda, es decir, $T^\dagger X^\mu(\sigma, \tau)T = X^\mu(l - \sigma, \tau)$. Dado que $\sigma \rightarrow -\sigma$ intercambia osciladores izquierdos y derechos, el estado $|\Psi\rangle$ de una cuerda no orientable debe ser simétrico bajo el intercambio de los dos conjuntos de osciladores. Por ejemplo, en el nivel no masivo el término del tensor antisimétrico debe ser removido, mientras que el gravitón y el dilatón deben conservarse. Para la cuerda abierta, la teoría no orientada contiene estados con un número de modos par, es decir, los estados impares están ausentes y en forma particular, no tiene estados no masivos. En términos de osciladores esto se expresa como

$$T^\dagger \alpha_n^\mu T = (-1)^n X^\mu \alpha_n^\mu \quad (\text{cuerda abierta}) \quad (1.112)$$

$$T^\dagger \tilde{\alpha}_n^\mu T = \tilde{\alpha}_n^\mu \quad (\text{cuerda cerrada}) \quad (1.113)$$

Hemos visto que es posible introducir grupos de gauge en la teoría de cuerdas abiertas, por ejemplo $U(n)$. Clásicamente otros grupos son igualmente posibles si se consideran cuerdas abiertas no orientadas, en particular $SO(n)$ y $Sp(n)$. Todas las teorías de cuerdas bosónicas están enfermas así como están formuladas, debido a que su espectro contiene al taquión. Este indica que uno está haciendo teoría de perturbaciones alrededor de un vacío inestable. Es concebible que el taquión de la cuerda cerrada se *condense* en una forma análoga al mecanismo de Higgs: en el caso de un extremo con simetría no rota para el potencial de Higgs en el modelo estándar existe un mínimo estable, donde el campo de Higgs adquiere un valor de expectación del vacío. Recientemente se ha tenido éxito en demostrar que taquiones de la cuerda abierta se condensan en un mínimo estable, pero el destino de los taquiones de la cuerda cerrada es aún un problema abierto. Para poder interpretar el espectro que obtuvimos, debemos considerar interacciones de cuerdas.

1.4 Interacciones

En esta sección vamos a exponer brevemente la noción de cuerdas que interactúan. El caso más sencillo es el de la cuerda cerrada. Así como se hace en teoría de campo, las amplitudes de interacción se describen mediante un desarrollo perturbativo usando la técnica de diagramas de Feynman, sólo que ahora la extendemos a objetos de una dimensión. Hasta 1995 sólo era posible describir a la teoría de cuerdas mediante métodos perturbativos.

La amplitud vacío-vacío A esta dada por

$$A \sim \int Dh_{ab} DX^I e^{iS_p[X^I, h_{ab}]} \quad (1.114)$$

Para calcularla, debemos sumar sobre todos los diagramas de lazo. Para una cuerda cerrada esto significa que debemos sumar sobre todas las superficies orientables compactas. En dos dimensiones éstas superficies se caracterizan en forma completa por el *número de Euler*, es decir, el número de agujeros,

$$\chi(\Sigma) = \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R^{(2)} \quad (1.115)$$

ahora generalizamos la acción de Polyakov agregando el un término topológico así:

$$S = S_p[X^I, h_{ab}] + \frac{\phi(X^I)}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{h} R^{(2)} \quad (1.116)$$

donde $\phi(X^I)$ es el campo escalar del dilatón, y vemos que el papel que juega corresponde al acoplamiento de las interacciones gravitacionales del lagrangiano en $2D$ de Einstein-Hilbert. Si definimos la *constante de acoplamiento de la cuerda* como $g_s = e^\phi$, la ecuación (1.114) se generaliza a,

$$A \sim \sum_{\chi} g_s^{\chi(\Sigma)} \int \int Dh_{ab} DX^I e^{iS_p[X^I, h_{ab}]} \quad (1.117)$$

la amplitud definida en la cascara de masa corresponde a $g = 0$ y el resto ($g \geq 1$) corresponde a correcciones a g -lazos. Para definir funciones de correlación de operadores se requiere el concepto del *operador de vértice*, W_Λ .

$$\nu_\Lambda(k) = \int d^2\sigma \sqrt{h} W_\Lambda(\sigma, \tau) e^{i k \cdot X} \quad (1.118)$$

donde $W_\Lambda(\sigma, \tau)$ (con Λ un campo no masivo genérico del espectro bosónico) es un operador local asignado a un estado específico de la teoría. Por ejemplo, para el taquión tenemos que $W_T(\sigma, \tau) = \partial_a X_I \partial^a X^I$, mientras que para el gravitón G con polarización ξ_{ij} es $W_G(\sigma, \tau) = \xi_{ij} \partial_a X_i \partial^a X^j$. Los operadores ν_Λ son invariantes conformes, y por tanto más apropiados para definir

amplitudes de dispersión. Entonces se puede obtener la amplitud de dispersión de los operadores de vértice en función de los operadores invariantes, ν_Λ . En forma perturbativa, la amplitud esta dada por,

$$A(\Lambda_1, k_1; \dots \Lambda_n, k_n) \sim \sum_X g_s^{X(\Sigma)} \int \int Dh_{ab} DX^I e^{iS_p[X^I, h_{ab}]} \prod_{i=1}^N \nu_{\Lambda_i}(K_i) \quad (1.119)$$

La amplitud de dispersión es, por supuesto, proporcional a la función de correlación del producto de N operadores invariantes $\nu_{\Lambda_i}(K_i)$ de la siguiente manera,

$$A(\Lambda_1, k_1; \dots \Lambda_n, k_n) \propto \left\langle \prod_{i=1}^N \nu_{\Lambda_i}(K_i) \right\rangle \quad (1.120)$$

Capítulo 2

Cuerdas en espaciotiempos curvos

Hasta ahora se ha discutido la cuerda en un espacio plano de Minkowski de 26 dimensiones,

$$S_0 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

donde h_{ab} es la métrica de la hoja de mundo, que puede ser considerada como una variable dinámica, y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski en el espaciotiempo. Vamos a considerar la propagación de la cuerda en un espacio con curvatura no trivial, es decir, una variedad en general de 26 dimensiones M con una métrica $G_{\mu\nu}$. La generalización obvia de (2.1) es reemplazar la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ por $G_{\mu\nu}$,

$$S_0 = -\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{-h} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu G_{\mu\nu}(X^\rho) \quad (2.2)$$

Esta acción es la generalización más natural de (2.1), y de hecho pareciera innecesario derivarla de alguna otra forma, pero es más interesante ver de donde proviene. Supongamos que tenemos la métrica plana más una pequeña perturbación,

$$G_{\mu\nu}(X^\rho) = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(X^\rho), \quad (2.3)$$

donde $f_{\mu\nu}(X^\rho)$ representa una desviación del espaciotiempo de Minkowski. La integral de trayectoria de la hoja de mundo derivada de (2.1) es.

$$Z_0 = \int DX^\mu Dh_{ab} e^{-S_0} \quad (2.4)$$

mientras que la derivada de (2.2) es

$$Z = \int DX^\mu Dh_{ab} e^{-S} = \int DX^\mu Dh_{ab} e^{-S_0} \left(1 + \frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{|h|} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu f_{\mu\nu}(X^\rho) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{|h|} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu f_{\mu\nu}(X^\rho) \right]^2 + \dots \right) \quad (2.5)$$

donde

$$\frac{1}{2\pi} \int d^2\sigma \sqrt{|h|} h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu f_{\mu\nu}(X^\rho) \quad (2.6)$$

es el operador de vértice V para la emisión de un gravitón con función de onda $f_{\mu\nu}(X^\rho)$ (estamos considerando un gravitón cuya función de onda es una onda plana $f_{\mu\nu}(X^\rho) = \xi_{\mu\nu} e^{ik \cdot X}$, y esto no representa pérdida de generalidad porque cualquier función de onda la podemos ver como una superposición de ondas planas). La inserción de V en la integral de trayectoria Minkowskiana Z_0 en (2.4) describiría interacciones entre cuerdas con una función de onda externa de gravitón $f_{\mu\nu}$. La inserción de e^V en (2.4) describiría la interacción con un estado coherente de gravitones en ésta función de onda, y esto corresponde precisamente a la propagación de la cuerda en la métrica $G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}$.

2.1 Acción de cuerda efectiva y modelo sigma no lineal

Vamos a describir algunas propiedades simples de (2.2). Tanto (2.1) como (2.2) son ambas teorías de campo en dos dimensiones, pero existe una diferencia esencial. Mientras la acción (2.1) se convierte en una teoría de campo libre en el gauge conforme,

$$h_{ab} = \eta_{ab} \quad (2.7)$$

la acción (2.2) no lo hace, sino que se reduce a

$$S' = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial^a X^\nu G_{\mu\nu}(X^\rho) \quad (2.8)$$

Esta es una teoría de campo no trivial, conocida como un *modelo sigma no lineal*.¹ La no linealidad reside en el hecho de que el término cinético depende de los campos (coordenadas). Los modelos sigma no lineales tienen muchas aplicaciones en la física de partículas y la teoría cuántica de campo.

¹nos conviene recuperar la dependencia en α' , anteriormente usamos $\alpha' = 1/2$.

Por ejemplo, los campos de piones neutros y cargados pueden considerarse con buena aproximación coordenadas en el grupo de Lie (variedad) $SU(2)$.

Los argumentos anteriores sugieren otra generalización natural: incluir los términos (fondos) correspondientes a los demás modos no masivos de la cuerda cerrada. De la forma de los operadores de vértice tenemos

$$S_\sigma = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_M g^{1/2} [(g^{ab} G_{\mu\nu}(X) + i\epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X)) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \alpha' R\phi(X)] \quad (2.9)$$

Vamos a mencionar las invariancias de gauge del espaciotiempo que tiene esta acción. Bajo un cambio de variables en la integral de trayectoria correspondiente a una redefinición del campo $X^\mu(X)$, la acción (2.9) es invariante con $G_{\mu\nu}$ y $B_{\mu\nu}$ transformandose como tensores y ϕ como escalar. Desde el punto de vista del espaciotiempo, ésta es una transformación de coordenadas. La acción también es invariante bajo

$$\delta B_{\mu\nu}(X) = \partial_\mu \xi_\nu(X) - \partial_\nu \xi_\mu(X), \quad (2.10)$$

la cual agrega una derivada total a la densidad lagrangiana. Esta es una generalización de la transformación de gauge del electromagnetismo a un potencial con dos índices antisimétricos. La intensidad de campo es, por tanto, de tres índices,

$$H_{\omega\mu\nu} = \partial_\omega B_{\mu\nu} + \partial_\mu B_{\nu\omega} + \partial_\nu B_{\omega\mu} \quad (2.11)$$

y es invariante. Existe una generalización similar a un potencial n -tensorial antisimétrico, que juega un papel importante en la supercuerda.

La teoría depende únicamente de objetos invariantes de gauge construidos a partir de la métrica y los otros campos. Recordemos que los campos X^μ son coordenadas en la variedad. Esta variedad, que es el espaciotiempo en sí, se denomina también *espacio target*, porque los X^μ definen una correspondencia *hoja de mundo* \rightarrow *target*.

La acción del modelo sigma no lineal ya no es cuadrática en X^μ , por lo que la integral de trayectoria es ahora una teoría de campo en $2D$ con *interacciones*. Expandamos la integral de trayectoria alrededor de una solución clásica $X^\mu(\sigma) = x_0^\mu$ para cualquier punto x_0^μ seleccionado. Con $X^\mu(\sigma) = x_0^\mu + Y^\mu(\sigma)$;

$$G_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu = \left[G_{\mu\nu}(x_0) + G_{\mu\nu,\omega}(x_0) Y^\omega + \frac{1}{2} G_{\mu\nu,\omega\rho}(x_0) Y^\omega Y^\rho + \dots \right] \partial_a Y^\mu \partial_b Y^\nu \quad (2.12)$$

el primer término de la expansión es cinético y cuadrático para el campo Y^μ . El siguiente es una interacción cúbica, y así sucesivamente. Las constantes de acoplamiento $G_{\mu\nu,\omega}(x_0)$ etc., involucran derivadas la métrica en x_0 . En

un espacio target con un radio característico de curvatura R_c , las derivadas de la métrica son del orden R_c^{-1} . El acoplamiento efectivo adimensional en la teoría es, por tanto, $\alpha'^{1/2} R_c^{-1}$. Si R_c es mucho mayor que la escala característica de longitud de la cuerda, entonces el acoplamiento es pequeño y podemos usar teoría de perturbaciones en en la teoría de campo en $2D$. Observemos que en este mismo régimen podemos usar otra herramienta. Dado que la longitud característica es grande comparada con la cuerda, podemos ignorar la estructura interna y usar *teoría de campo efectiva de baja energía*. La teoría de cuerdas determina la acción efectiva de baja energía para los campos. También hemos usado de manera implícita que $\alpha'^{1/2} R_c^{-1} \ll 1$ cuando restringimos nuestra atención a fondos *no masivos*: cuando las longitudes de onda son grandes comparadas con la escala de la cuerda, estados con masa no se crean.

2.2 Invariancia de Weyl

Dependiendo de la forma de $G_{\mu\nu}$, la invariancia de escala se rompe en (2.8), porque no hay forma de regularizarla y al mismo tiempo preservar invariancia conforme en la hoja de mundo. El método de regularización de Pauli-Villars (que consiste en sustraer en cada lazo la contribución de un campo masivo regulador) viola la invariancia de escala. La ecuación (2.8) puede regularizarse usando regularización dimensional, pero esto viola invariancia de escala porque el modelo sigma bidimensional (2.8) es únicamente invariante de escala en $2D$.

El rompimiento de invariancia de escala en teoría cuántica de campo se describe usualmente en términos de la *función beta* (β). De una u otra forma, dependiendo del formalismo que se use para definir la función- β , ésta proviene de las divergencias ultravioletas en los diagramas de Feynman. En teoría de cuerdas, la función beta y las divergencias ultravioletas no son los aspectos esenciales; la cuestión básica es si (2.8) es invariante de Weyl si se formula en una hoja de mundo con curvatura distinta de cero. La invariancia de Weyl implica invariancia de escala global, que a su vez implica la nulidad de la función beta y por tanto, la finitud ultravioleta (módulo alguna posible renormalización de la función de onda). Históricamente, la ecuación de Callan-Symanzik fué originalmente obtenida mediante el estudio de la identidad de Ward asociada con la traza del tensor de energía-momento, o en otras palabras, con la identidad de Ward asociada con las transformaciones de Weyl.

Lo que nos interesa es que ambos cálculos, finitud e invariancia de Weyl, son *esencialmente equivalentes*. Demandar invariancia de Weyl en una hoja de mundo curva necesariamente implica la nulidad de la función beta del grupo de renormalización, y por lo tanto, finitud.

Para mí, el cálculo de la función beta para nuestra teoría en particular

presenta un grado de dificultad mayor que el cálculo de la anomalía de Weyl a primer orden. Por ello decidí proseguir con este último ejercicio, dado que son equivalentes. En el resto de este capítulo calculo la anomalía de Weyl a primer orden y la uso para obtener las ecuaciones de fondo de cuerdas, que son nuestro objetivo.

Vamos a fijar nuestra atención en la formulación por integral de camino cuántica de la teoría, y veamos que efecto tienen las transformaciones conformes y de Weyl en ella. El resultado de llevar a cabo la integral de trayectoria sobre las X 's con nuestra acción clásica define una función de partición del sistema, que puede ser escrita, según la prescripción usual, como la exponencial de una funcional generadora conexas,

$$Z[\gamma] = \int [DX]_{\gamma} e^{-A[X,\gamma]} = e^{-W[\gamma]} \quad (2.13)$$

Sólo integramos sobre las X 's y tomamos la métrica de la hoja de mundo como un fondo fijo (pero arbitrario). Por otro lado, la acción efectiva, W , ciertamente depende de la métrica de la hoja de mundo que elijamos. La acción clásica es explícitamente una funcional de γ_{ab} pero la medida de las X 's también, en forma implícita, depende de ella. Necesitamos introducir algún tipo de producto interno con el fin de medir elementos de volumen del espacio de funciones de las X 's. Si lo hacemos en una forma invariante ante reparametrizaciones, desde el punto de vista de la hoja de mundo, inevitablemente involucramos a la métrica en $2D$. Cuando trabajamos con la acción de Polyakov, una opción natural de producto interno es

$$\|\delta X^2\| = \int d^2\xi \sqrt{\gamma(\xi)} \delta X^{\mu} \delta X^{\nu} G_{\mu\nu}(X) \quad (2.14)$$

que de hecho involucra tanto a γ_{ab} como a $G_{\mu\nu}$, la métrica del espaciotiempo.

Hacer la integral de camino no es algo trivial, y el único método general que conocemos es calcularla en alguna forma perturbativa. Vamos a analizar algunas propiedades generales de la acción efectiva cuántica, suponiendo que tenemos información no perturbativa, aunque los cálculos en realidad siempre proporcionan resultados perturbativos. Esperamos que W sea invariante ante reparametrizaciones de la hoja de mundo, y como sólo depende de la métrica en $2D$, insistimos en que

$$0 = \int d^2\xi \frac{\delta W}{\delta \gamma^{ab}} (\nabla^a v^b + \nabla^b v^a) \quad (2.15)$$

En el gauge conforme esto se expresa como

$$0 = \int d^2\xi \left[\frac{\delta W}{\delta \gamma^{zz}} \nabla^z v^z + \frac{\delta W}{\delta \gamma^{\bar{z}\bar{z}}} \nabla^{\bar{z}} v^{\bar{z}} - \frac{\delta W}{\delta \phi} (\nabla_z v^z + \nabla_{\bar{z}} v^{\bar{z}}) \right] \quad (2.16)$$

integrando los diferentes términos por partes podemos factorizar las derivadas covariantes en v^z y $v^{\bar{z}}$ para obtener

$$0 = \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \left[(\nabla_z \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \phi} \right) - \nabla^z \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \gamma^{zz}} \right) v^z + (\nabla_{\bar{z}} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \phi} \right) - \nabla^{\bar{z}} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \gamma^{\bar{z}\bar{z}}} \right) v^{\bar{z}}) \right] \quad (2.17)$$

Las funciones v^z y $v^{\bar{z}}$ son arbitrarias, por lo que conculimos que

$$\nabla_z \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \phi} \right) = \nabla^z \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \gamma^{zz}} \right) \quad (2.18)$$

y la correspondiente a \bar{z} . Esta identidad es el análogo cuántico a la conservación clásica $\nabla^a T_{ab} = 0$, si pensamos en la variación de la acción efectiva, W , con respecto a la métrica bidimensional en el papel del tensor de energía-momento. Podemos justificar que el lado derecho de (2.18) es el ∇^z del valor de expectación del componente zz del tensor de energía -momento. El razonamiento es el siguiente: cuando variamos W respecto de γ^{zz} obtenemos

$$\frac{\delta W}{\delta \gamma^{zz}} = - \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta \gamma^{zz}} \quad (2.19)$$

La función de partición depende de la métrica bidimensional tanto a través de la acción clásica como de la medida de la integral de trayectoria. La variación de la acción clásica genera un factor en el tensor de energía-momento clásico dentro de la integral de trayectoria, lo que nos da un valor de expectación cuando dividimos entre Z . La pregunta es si algún término no deseado aparece de la variación de la medida de la integral de camino. Se define una medida invariante ante reparametrizaciones usando el producto interno (2.14), el cual únicamente depende del determinante de la métrica de la hoja de mundo. En el gauge conforme la forma de la métrica más su variación es

$$\begin{pmatrix} \delta\gamma_{zz} & \gamma_{z\bar{z}} + \delta\gamma_{z\bar{z}} \\ \gamma_{\bar{z}z} + \delta\gamma_{\bar{z}z} & \delta\gamma_{\bar{z}\bar{z}} \end{pmatrix}$$

De aquí es aparente que una variación de primer orden del determinante de la métrica con respecto a γ^{zz} es cero, y por ello la medida de la integral de trayectoria es invariante a tal variación. Esto significa que podemos escribir

$$\nabla^z \left(\frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \gamma^{zz}} \right) = \nabla^z \langle T_{zz} \rangle \quad (2.20)$$

Sería natural identificar, en forma similar, al lado izquierdo de (2.18) con $\nabla_{\bar{z}}$ del valor de expectación de la traza del tensor de energía-momento. En una teoría con invariancia conforme la traza del tensor de energía -momento es nula, y (2.18) nos estaría diciendo que $\partial_{\bar{z}} \langle T_{zz} \rangle = 0$, algo que sería muy

útil y muy poderoso. En la realidad, sin embargo, las cosas no funcionan así. Desafortunadamente el lado izquierdo de (2.18) en general no es cero debido a que, al aparecer una anomalía cuántica, la variación de la medida de la integral de trayectoria con respecto a ϕ no es nula. Sin embargo, sí sabemos que el lado izquierdo de (2.18) es la derivada con respecto a z de algo. Si asumimos que este "algo" es local en la hoja de mundo, podemos averiguar bastante sobre su estructura. El lado derecho de (2.18) es un tensor del tipo t_z , bajo reparametrizaciones conformes, y tiene dimensión de escala 1 en la hoja de mundo. En la ausencia de algún parámetro dimensional exótico, la única función local de γ_{ab} que posee éstas propiedades de transformación y dimensiones escalares es una derivada con respecto a z de la *curvatura escalar*, $R^{(2)}$. Nuestra suposición de localidad combinada con el análisis dimensional nos dice que la forma del lado izquierdo de (2.18) es,

$$\nabla_z \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \phi} \right) = \frac{\lambda}{48\pi} \nabla_z R^{(2)} \quad (2.21)$$

No podemos determinar la constante de proporcionalidad λ a partir de las propiedades generales, ya que precisamente tal constante es específica de la teoría. La normalización $\frac{1}{48}$ tiene origen histórico. El hecho de que podamos tener algo distinto de cero a la derecha de (2.21) establece que la simetría conforme es generalmente anómala en teoría de campo en dos dimensiones, y hemos logrado parametrizar esta anomalía potencial de una forma particularmente sencilla. De (2.21) podemos obtener la forma de la parte anómala de la acción efectiva misma. Primero integramos ambos lados con respecto a z

$$\frac{\delta W}{\delta \phi} = \frac{\lambda}{48\pi} \sqrt{\gamma} (R^{(2)} + \mu^2) \quad (2.22)$$

Ahora recordemos que el factor de escala conforme siempre compara a la métrica con otra métrica de referencia

$$\gamma_{ab} = e^{\Phi} \hat{\gamma}_{ab}. \quad (2.23)$$

(en el gauge conforme $\hat{\gamma}$ es la métrica plana). Con esto en mente se verifica que (2.22) se satisface con

$$W = \frac{\lambda}{48\pi} \int d^2\xi \sqrt{\hat{\gamma}} \left(\frac{1}{2} \hat{\gamma}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + \mu^2 e^{\Phi} \right) + \text{términos invariantes conformes} \quad (2.24)$$

La suposición de que la anomalía es local nos permitió caracterizar la parte no invariante conforme de la acción cuántica efectiva mediante un parámetro adimensional, λ , y un parámetro dimensional μ (que finalmente no juega ningún papel en nuestras consideraciones). Los términos en W que dependen de el factor de escala bidimensional, Φ , se conocen como la *acción de*

Liouville. Desde el punto de vista de la teoría de cuerdas, es incómodo que W dependa de nuestra elección de métrica de la hoja de mundo después de todo, y se han llevado a cabo muchos esfuerzos por deshacerse de esta dependencia de varias formas. Como veremos más adelante, en el cálculo explícito de la anomalía, el coeficiente λ no es cero aún en la teoría libre, y menos cuando introducimos interacciones. El hecho de que la integral de camino no es invariante de Weyl es genérico a la teoría de campo conforme en $2D$.

2.3 Ecuaciones para los campos de fondo

2.3.1 Expansión del producto de operadores y el álgebra de Virasoro

Combinando (2.18) y (2.21) se puede ver que el valor de expectación de T_{zz} no es analítico debido a la anomalía de Weyl (o anomalía conforme):

$$\gamma^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\langle T_{zz}\rangle = \nabla^z\langle T_{zz}\rangle = \frac{\lambda}{48\pi}\nabla_z R^{(2)} \quad (2.25)$$

Sin embargo, es posible “mejorar” el tensor de energía-momento para hacer que su valor de expectación sea analítico. Podemos usar ciertas identidades conformes [8] para mostrar que,

$$\nabla_z R^{(2)} = \nabla^z(-2\partial_z\partial_{\bar{z}}\phi + \partial_z\phi\partial_{\bar{z}}\phi). \quad (2.26)$$

Esto significa que si definimos el componente zz del tensor de energía-momento “mejorado” como

$$T_{zz}^0 = T_{zz} + \frac{\lambda}{48\pi}(2\partial_z^2\phi - (\partial_z\phi)^2), \quad (2.27)$$

entonces su valor de expectación es analítico

$$\gamma^{z\bar{z}}\partial_{\bar{z}}\langle T_{zz}^{(0)}\rangle = \nabla^z\langle T_{zz}^{(0)}\rangle = 0. \quad (2.28)$$

Dado el papel especial de las reparametrizaciones analíticas, y el poder de la teoría de funciones analíticas, es muy conveniente tener operadores con valores de expectación analíticos.

En el resto de la sección vamos a obtener una expansión del producto de operadores para este tensor de energía-momento “mejorado” e indicaremos como puede ser convertido en un álgebra de Virasoro. Notemos que el valor de expectación (2.28) se refiere a una métrica de la hoja de mundo específica. La ecuación es válida, por supuesto, para cualquier elección de la métrica, y podemos, si es necesario, calcular la variación con respecto a la misma. La

variación de la acción clásica dentro de la integral de trayectoria genera un segundo factor del tensor de energía-momento en el valor de expectación. La variación, claro está, también actúa en las derivadas covariantes y en la curvatura escalar y por eso se generan otros términos. Supongamos que la variación es con respecto a γ^{zz} en un punto w , diferente del punto en que el $T_{zz}(z)$ original es evaluado. Esto resulta en una ecuación que involucra una función de correlación diferenciada de dos T 's. Después de hacer la integral y reemplazar el tensor de energía-momento con el "mejorado", tenemos que

$$\langle T_{zz}^{(0)} T_{ww}^{(0)} \rangle = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{(z-w)^4} + \frac{\langle T_{ww}^{(0)} \rangle}{(z-w)^4} + \frac{\partial_w \langle T_{ww}^{(0)} \rangle}{(z-w)} + \text{términos regulares} \quad (2.29)$$

El resto de los términos son regulares en el sentido de que no tienen singularidades cuando z se acerca a w . El coeficiente de la singularidad de mayor orden es precisamente la λ que caracteriza la ausencia de invariancia conforme per sé. Tal ausencia se manifiesta como un término anómalo en la expansión de corta distancia de un producto de tensores de energía-momento.

(2.29) tiene el mismo contenido que la expansión del producto de operadores de energía-momento que encontramos en las teorías de campo conformes. De hecho puede usarse para generar el álgebra de Virasoro. Expandiendo a $T_{zz}^{(0)}$ en una serie de Laurent tenemos,

$$T_{zz}^{(0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n \quad (2.30)$$

Los coeficientes, L_n , son los famosos generadores de Virasoro. Integrando a lo largo de contornos elegidos en forma ingeniosa y haciendo uso de la estructura de singularidades de los diversos términos de la expansión podemos hacer que (2.29) nos de información acerca de los conmutadores de los L_n 's, es decir, que satisfacen el álgebra:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{\lambda}{12} n(n^2-1)\delta_{m,-n} \quad (2.31)$$

Hasta ahora hemos ignorado al componente antianalítico T_{zz} , que es un objeto independiente y define otro conjunto de operadores, los \bar{L}_n 's. Ellos también satisfacen el álgebra anterior pero conmutan con los L_n 's.

Finalmente podemos establecer cómo la restricción clásica sobre la nulidad de los componentes del tensor de energía-momento se implementa a nivel cuántico. Debido a las anomalías de Weyl, en general podemos esperar complicaciones dado que la traza del tensor de energía-momento no es cero. A pesar de ello, si la anomalía tiene una forma simple local caracterizada por un único número c , aún podemos encontrar qué valores de expectación de los otros componentes independientes del tensor son analíticos. Con el fin de aplicar las ecuaciones de restricción restantes, nos gustaría hacer

cero a T_{zz} y $T_{\bar{z}\bar{z}}$, lo que equivale a que los operadores L_n y \bar{L}_n aniquilen a todos los estados. Sin embargo, esto no es consistente con el álgebra que los operadores satisfacen. Esta álgebra nos permite que la mitad de ellos sean cero. Los estados físicos se definen como aquellos que son aniquilados por L_n y \bar{L}_n con $n > 0$ y no por los operadores de n negativa. Esto significa que los valores de expectación de los generadores de Virasoro, excepto quizá por L_0 y \bar{L}_0 , son cero para estados físicos. En una teoría saludable sólo los estados físicos contribuyen a los elementos de la matriz S .

Por ello, si comenzamos con una teoría bidimensional que sea invariante conforme a nivel clásico se debe estar consciente que la simetría conforme será anómala, y la anomalía aparecerá en la traza del tensor de energía-momento. En la siguiente sección vamos a calcular explícitamente la anomalía para una forma específica de la acción efectiva $A[X, \gamma]$, con interacciones no triviales en ella. Lo que tratamos de mostrar en ésta sección es que aún cuando existe una anomalía, gran parte de la física que queremos extraer de la teoría es válida. También tenemos al tensor de energía-momento "mejorado", cuyos componentes poseen expansiones de corta distancia adecuadas, analíticas y anti-analíticas, de las que obtenemos un álgebra para los generadores de Virasoro y ésta nos permite definir estados físicos que dan valores de expectación cero de los componentes analíticos y antianalíticos del tensor de e.e. Aún con la presencia de anomalías, éstas no son catastróficas y en el caso de nuestro interés, dejarán intacta la física de las teorías de campo conformes en $2D$.

2.3.2 Modelos Sigma

La acción de Polyakov es invariante de Weyl. El único término que podemos agregar y continuar gozando de ésta simetría posee una función de acoplamiento del espaciotiempo antisimétrica en los índices:

$$S_{AS} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu B_{\mu\nu} \quad (2.32)$$

Aquí ϵ^{ab} es un símbolo de Levi-Civita antisimétrico en dos dimensiones. Es una densidad tensorial más bien que un tensor, por lo que no necesitamos un factor $\sqrt{\gamma}$ para la medida invariante ante reparametrizaciones.

En general podemos esperar que la renormalización haga aparecer todos los posibles términos de la misma (o menor) dimensión que S_P y S_{AS} . En una hoja de mundo curva, podemos escribir otro término más de dimensión dos: el término topológico:

$$S_D = \frac{1}{8\pi} \int d^2X \sqrt{\gamma} R^{(2)} \phi(X) \quad (2.33)$$

Este término es invariante ante reparametrizaciones y el acoplamiento $\phi(X)$ es una función escalar del espaciotiempo. Por otro lado, este término no

es invariante de Weyl. Como queremos que nuestra teoría clásica sea invariante de Weyl, la idea es ver a S_D actuar a ordenes mayores de lazo que donde actúan los otros términos, y cancelar su variación a nivel de árbol con las anomalías de Weyl a primer orden que generan los otros, y así sucesivamente. Este papel de S_D es congruente con el análisis dimensional en el espaciotiempo. La función de acoplamiento $\phi(X)$ es adimensional, por lo que no necesitamos un factor α' en la normalización de S_D . Como α' es el parámetro que cuenta los lazos, esto significa que S_D contribuye a primer orden y no a nivel clásico. Este proceder quizá parezca poco claro pero al final veremos que conduce a resultados consistentes al describir física razonable en el espaciotiempo.

No existen otros términos invariantes ante reparametrizaciones, de dimensión dos, que podamos agregar a la acción. Las funciones de acoplamiento $G_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$ y $\phi(X)$ corresponden a condensados de los estados sin masa de la teoría de cuerda bosónica: gravitones, tensores antisimétricos y dilatones. Por ello el enfoque del modelo sigma es conocido como el estudio de las cuerdas en campos de fondo y veremos que el identificar estos condensados con funciones de acoplamiento tiene sentido.

La renormalización no solamente mezcla términos de dimensión dos, sino también involucra términos de dimensión menor. Es posible concebir otro término de dimensión cero para la acción:

$$S_T = \frac{1}{4\pi} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} T(X) \quad (2.34)$$

el cual describe el acoplamiento a un campo taquiónico de fondo. Es invariante ante reparametrizaciones pero no de Weyl. Los contratérminos de ésta forma son de hecho necesarios para cancelar divergencias cuadráticas en los diagramas de vacío de la teoría. Naturalmente no son necesarios en la supercuerda, y finalmente se descubrió que no juegan ningún papel importante en la discusión de teoría bosónica, por lo que no lo vamos a incluir.

No hemos dicho nada aún sobre la topología de la hoja de mundo. Primero debemos decidir si vamos a incluir cuerdas abiertas o no. Una hoja de mundo de una cuerda abierta tiene fronteras donde debemos especificar condiciones de borde para las X 's. De hecho puede existir en la frontera un acoplamiento a un condensado de estados sin masa de cuerdas abiertas, es decir, un acoplamiento de línea de Wilson a un campo de gauge:

$$S_A = i \oint ds A_\mu(X) \frac{dX^\mu}{ds} \quad (2.35)$$

donde $X^\mu(s)$ es el mapeo de la frontera al espaciotiempo. Una cuerda abierta puede tener únicamente cargas de gauge en los extremos, de manera que cualquier interacción con un campo de gauge de fondo necesariamente

tiene lugar ahí. El mantener invariancia conforme a nivel cuántico, con interacciones tanto en el interior de la hoja de mundo como en las fronteras, genera restricciones en todos los acoplamientos del espaciotiempo. Sin embargo, se puede estudiar la cuerda cerrada en forma consistente ya que las teorías de cuerdas más prometedoras no tienen cuerdas abiertas. Por simplicidad, trabajaremos con fondos para cuerdas cerradas y supondremos que la hoja de mundo no tiene fronteras.

La hoja de mundo de una cuerda cerrada puede tener agujeros, o asas. La cuantización de Polyakov de la teoría de cuerdas nos dice que debemos sumar sobre amplitudes en superficies de todo genus. Nos enfocaremos únicamente en la teoría de cuerdas a nivel árbol, porque para nuestros cálculos vamos a suponer que la hoja de mundo es equivalente conforme a la esfera de Riemann, es decir, que no tiene agujeros. Por otro lado, vamos a calcular una anomalía, que describe física ultravioleta, o de corta distancia, del modelo sigma no lineal. El resultado no depende de las propiedades globales de la hoja de mundo. Desde el punto de vista en $2D$, la estructura de una anomalía local es indiferente del número de asas en un punto lejano de la hoja de mundo. Como el requisito de que la anomalía de Weyl se anule establece las restricciones en los campos del espaciotiempo, esto parecería decirnos que la física del espaciotiempo está completamente determinada a nivel árbol sin correcciones de las amplitudes de lazo de la cuerda (es decir correcciones cuánticas). Esto no es satisfactorio, y por ello se llevaron a cabo esfuerzos considerables por calcular correcciones cuánticas de los lazos, en las llamadas integraciones modulares, asociadas con superficies de un mayor genus. El lector interesado puede consultar las referencias[8]. Ahora regresemos al modelo sigma no lineal.

2.3.3 Expansión en campos de fondo y coordenadas normales

En la sección anterior determinamos los tres posibles términos de la acción invariantes ante reparametrizaciones de dimensión de escala dos. Consideremos una teoría de campo bidimensional con una acción clásica que incluye estos términos:

$$A[X, \gamma] = S_P + S_{AS} + S_D \quad (2.36)$$

Esta acción define un modelo sigma no lineal general bosónico, y usualmente es el punto de partida de un estudio sistemático de la teoría de cuerdas en campos de fondo no triviales. Las tres funciones de acoplamiento $G_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$ y $\phi(X)$ se transforman en forma covariante bajo transformaciones de coordenadas generales de espaciotiempo y además, como mencionamos al principio, S_{AS} es invariante ante "transformaciones de gauge" del espaciotiempo

$$B_{\mu\nu} \rightarrow B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Delta_\nu + \partial_\nu \Delta_\mu \quad (2.37)$$

donde Δ_μ es alguna función vectorial. Es deseable arreglar la expansión perturbativa de manera que estas simetrías del espaciotiempo sean *manifiestas*. Esto significa que queremos calcular diagramas usando vértices y propagadores covariantes y debemos usar un procedimiento de regularización de las integrales de lazo divergentes que sea compatible con la covariancia general del espaciotiempo. Así cualquier contratérmino que encontremos también será covariante y la anomalía conforme será expresada de una forma invariante de coordenadas del espaciotiempo. La forma de logarlo es a través de un truco, llamada *expansión covariante en campos de fondo*. La idea básica es separar los campos bidimensionales en una parte de "fondo" y una parte "cuántica",

$$X^\mu(\xi) = X_0^\mu(\xi) + \pi^\mu(\xi) \quad (2.38)$$

y después hacer que la integral de trayectoria sea sobre los π^μ 's únicamente (que es la razón por la que los llamamos campos cuánticos). Los campos de fondo viven en la teoría en $2D$ y no deben confundirse con los campos de fondo descritos por las funciones de acoplamiento. Definimos una función de partición de fondo:

$$\Omega[X_0, \gamma] = \int [D\pi] \exp \left(- (A[X_0 + \pi] - A[X_0] - \int d^2\xi \frac{\delta A}{\delta x_0^\mu(\xi)} \pi^\mu(\xi)) \right) \quad (2.39)$$

El siguiente paso es expandir la acción clásica en potencias del campo cuántico, π^μ , y derivar reglas de Feynman para los diagramas. Como es usual el propagador se obtiene del término cuadrático. Depende de los fondos X_0^μ 's, considerados funciones clásicas aquí. Los términos de orden cúbicos o de orden mayor en la expansión dan lugar a vértices de interacción dependientes de los fondos con aún más patas. $\Omega[X_0, \gamma]$ puede verse como la funcional generadora de diagramas de lazo con todos los árboles externos amputados. A primer orden, la cancelación de la parte divergente de la cantidad $-\log \Omega[X_0, \gamma]$ proporciona los contratérminos necesarios para la acción efectiva. A dos lazos debemos calcular todos los diagramas irreducibles de una partícula a segundo orden y también todos los diagramas a primer orden que involucran inserciones de los contratérminos obtenidos en el lazo.

Quedan pendientes algunas cosas antes de proceder. Mientras ésta expresión diagramática conduce a una teoría de perturbaciones bien definida, y sin duda proporcionará resultados correctos, no es covariante manifiesta desde el punto de vista del espaciotiempo. La razón es que el campo cuántico $\pi^\mu(\xi)$, es definido como una diferencia de coordenadas en el espaciotiempo (entre el valor del campo completo X^μ y el campo de fondo $X_0^\mu(\xi)$) y por tanto no se transforma como un vector bajo transformaciones generales de coordenadas. Necesitamos reemplazarlo con una variable de integración, en la integral de trayectoria, que sea un vector en el espaciotiempo. Una

opción natural es un vector tangente a la geodésica del espaciotiempo que conecta los puntos X_0^μ y $X_0^\mu + \pi^\mu$. Vamos a suponer que tal geodésica es única, $\lambda^\mu(t)$ y vamos a elegir el parámetro afin t tal que $\lambda^\mu(0) = X_0^\mu(\xi)$ y $\lambda^\mu(1) = X_0^\mu(\xi) + \pi^\mu$. Ahora sea η^μ el vector tangente a $\lambda^\mu(t)$ en X_0^μ , es decir $\eta^\mu = \dot{\lambda}^\mu(0)$, donde el punto indica derivada con respecto a t . La ecuación geodésica para $\lambda^\mu(t)$ es

$$\ddot{\lambda}^\mu(t) + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \dot{\lambda}^\nu(t) \dot{\lambda}^\sigma(t) = 0. \quad (2.40)$$

Es uso repetido de esta ecuación nos permite escribir la expansión de Taylor de $\lambda^\mu(0)$ alrededor de $t = 0$, en términos de η^μ y símbolos de Christoffel del espaciotiempo,

$$\lambda^\mu(t) = X_0^\mu + \eta^\mu t - \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma_1\sigma_2}^\mu \eta^{\sigma_1} \eta^{\sigma_2} t^2 - \frac{1}{3} \Gamma_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}^\mu \eta^{\sigma_1} \eta^{\sigma_2} \eta^{\sigma_3} t^3 + \dots \quad (2.41)$$

Los símbolos Γ de orden mayor denotan símbolos de Christoffel diferenciados, $\Gamma_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^\mu \equiv \nabla'_{\sigma_1} \dots \nabla'_{\sigma_{n-2}} \Gamma_{\sigma_{n-1} \sigma_n}^\mu$ donde ∇'_σ es una derivada covariante formal actuando en los índices inferiores. En $t = 1$ (2.41) define una transformación de coordenadas en la vecindad de X_0^μ de un conjunto de coordenadas η^μ , que se denominan *coordenadas normales de Riemann*. El viejo campo cuántico π^μ se expresa como una serie de potencias de éstas coordenadas,

$$\pi^\mu = \eta^\nu - \frac{1}{2} \Gamma_{\sigma_1\sigma_2}^\mu + \dots \quad (2.42)$$

Si hubieramos comenzado en el sistema de coordenadas normales de todas formas hubieramos pasado por los argumentos que conducen a (2.42) pero ahora el primer término del lado derecho estaría presente. Esto nos permite deducir algunas propiedades convenientes del sistema de coordenadas normales. En este sistema todos los componentes de los símbolos de Christoffel se anulan y más aún, todos los $\Gamma_{\sigma_1 \dots \sigma_n}^\mu$ de orden mayor también se anulan cuando simetrizamos sus índices inferiores

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\sigma\rho}^\mu &= 0 \\ \bar{\Gamma}_{(\sigma_1 \dots \sigma_n)}^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Las barras indican que éstas relaciones sólo se mantienen en el sistema normal. La expresión del tensor de curvatura también se simplifica en coordenadas normales,

$$\bar{R}_{\nu\sigma\rho}^\mu = \partial_\sigma \bar{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu - \partial_\rho \bar{\Gamma}_{\nu\sigma}^\mu \quad (2.44)$$

y podemos combinar (2.44) con (2.43), con $n = 3$, para expresar las derivadas de los símbolos de Christoffel en términos del tensor de Riemann:

$$\partial_\nu \bar{\Gamma}_{\sigma\rho}^\mu = \frac{1}{3} (\bar{R}_{\sigma\nu\rho}^\mu + \bar{R}_{\rho\nu\sigma}^\mu). \quad (2.45)$$

Usando (2.43) para $n > 3$ se pueden derivar fórmulas que relacionen derivadas de orden mayor simetrizadas de símbolos de Christoffel con derivadas covariantes del tensor de curvatura, pero no las vamos a obtener aquí.

Una vez que estas relaciones en coordenadas normales han quedado establecidas, podemos "covarianizar" la expansión de Taylor de un tensor arbitrario. En el sistema de coordenadas normales, la expansión de Taylor queda como

$$\bar{T}_{\mu_1 \dots \mu_n}(X_0 + \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_m} \bar{T}_{\mu_1 \dots \mu_n}(X_0)) \eta^{\nu_1} \dots \eta^{\nu_m} \quad (2.46)$$

reemplazando las derivadas en los coeficientes de Taylor por derivadas covariantes se generan términos que involucran derivadas (simetrizadas) de la conexión. Entonces podemos usar (2.45) y sus contrapartes de mayor orden, para reescribirlos en términos del tensor de curvatura y sus derivadas covariantes. Por ejemplo, en el caso de un tensor de segundo orden obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{T}_{\mu\nu}(X_0 + \eta) &= \bar{T}_{\mu\nu}(X_0) + \nabla_\lambda \bar{T}_{\mu\nu}(X_0) \eta^\lambda \\ &+ \frac{1}{2} \{ \nabla_\lambda \nabla_\sigma \bar{T}_{\mu\nu}(X_0) - \frac{1}{3} \bar{R}_{\lambda\mu\sigma}^{\rho} \bar{T}_{\rho\nu}(X_0) - \frac{1}{3} \bar{R}_{\lambda\nu\sigma}^{\rho} \bar{T}_{\mu\rho}(X_0) \} \eta^\lambda \eta^\sigma + \dots \end{aligned} \quad (2.47)$$

Esta expansión involucra únicamente tensores del espaciotiempo y derivadas covariantes, por lo que es válida en cualquier sistema de coordenadas (siempre y cuando η sea un vector), a pesar de que usamos coordenadas normales para derivarla. Es una expresión covariante general de $T_{\mu\nu}(X_0 + \pi)$ y podemos remover las barras de la notación.

Ahora encontremos la expansión covariante de los distintos términos de nuestro modelo sigma. Primero consideremos la acción de Polyakov. La métrica del espaciotiempo tiene una expansión particularmente simple porque es simétrica y su derivada covariante es cero. En tal caso, (2.47) se reduce a:

$$G_{\mu\nu}(X_0 + \pi) = G_{\mu\nu}(X_0) + \frac{1}{3} R_{\mu\lambda\sigma\nu}(X_0) \eta^\lambda \eta^\sigma + \dots \quad (2.48)$$

Con el fin de expandir $\partial_a(X_0^\mu + \pi^\mu)$ tomamos la derivada ∂_a en ambos lados de (2.42) y aplicamos (2.45) para obtener:

$$\partial_a(X_0^\mu + \pi^\mu) = \partial_a X_0^\mu + \nabla_a \eta^\mu + \frac{1}{3} R_{\lambda\sigma\nu}^\mu(X_0) \partial_a X_0^\lambda \eta^\sigma + \dots \quad (2.49)$$

donde $\nabla_a \eta^\mu \equiv \partial_a \eta^\mu + \Gamma_{\lambda\sigma}^\mu(X_0) \partial_a X_0^\lambda \eta^\sigma$. Combinando (2.48) y (2.49) tenemos

$$\begin{aligned} S_F[X_0 + \pi] &= S_F(X_0) + \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} G_{\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu \nabla_b \eta^\nu \\ &+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \{ G_{\mu\nu}(X_0) \nabla_a \eta^\mu \nabla_b \eta^\nu + R_{\mu\lambda\sigma\nu} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\lambda \eta^\sigma \eta^\nu \} \\ &+ \frac{1}{3\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} R_{\mu\lambda\sigma\nu} \partial_a X_0^\mu \eta^\lambda \eta^\sigma \nabla_b \eta^\nu \\ &+ \frac{1}{12\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} R_{\mu\lambda\sigma\nu} \eta^\lambda \eta^\sigma \nabla_a \eta^\mu \nabla_b \eta^\nu \quad (2.50) \end{aligned}$$

el término lineal en $\eta^{\mu\nu}$ no nos interesa. Tenemos la libertad de elegir cualquier fondo X_0^μ y si arreglamos que satisfaga las ecuaciones clásicas de movimiento que se obtienen de la acción de Polyakov, el término lineal se anula. El primero de los términos cuadráticos en (2.50) involucra dos derivadas de los campos cuánticos, y por tanto es el término cinético de la teoría. Por otro lado involucra la métrica del espaciotiempo, que es una función del campo de fondo X_0^μ , por lo que el propagador derivado de este término será no trivial. El modo de librarnos de este obstáculo es introducir un vielbein, $e_\mu^i(X_0)$, $i = 1, \dots, D$, el cual refiere los vectores η^μ a un marco de referencia local de Lorentz,

$$\eta^i = e_\mu^i(X_0) \eta^\mu. \quad (2.51)$$

El vielbein satisface

$$e_\mu^i(X_0) e_\mu^j(X_0) \delta_{ij} = G_{\mu\nu}(X_0) \quad (2.52)$$

donde δ_{ij} es una métrica plana en D dimensiones. El término cinético es diagonal en el sistema de coordenadas η^i

$$G_{\mu\nu}(X_0) \nabla_a \eta^\mu \nabla_b \eta^\nu = (\nabla_a \eta)^i (\nabla_b)^i. \quad (2.53)$$

Aquí $(\nabla_b)^i = \partial_a \eta^i + \omega_\mu^{ij} \partial_a X_0^\mu \eta^j$ y ω_μ^{ij} es la conexión de spin del espaciotiempo. La invariancia de coordenadas general en el espaciotiempo es una simetría interna $SO(D-1, 1)$ desde el punto de vista del modelo sigma bidimensional y el campo $A_a^{ij}(X_0) = \omega_\mu^{ij}(X_0) \partial_a X_0^\mu$ se transforma como un potencial de gauge de Yang-Mills bajo transformaciones locales de Lorentz. Por supuesto, debemos romper la invariancia de gauge para definir el propagador para el η^i , pero el objetivo de la expansión en campos de fondo covariantes es el mantener la covariancia de gauge en términos de los campos de fondo X_0^μ . Algo que simplifica nuestro trabajo en forma considerable es el hecho de que los diagramas que involucran inserciones del potencial de gauge $A_a(X_0)$ tiene que combinarse para dar objetos covariantes de gauge (tales como el tensor de curvatura del espaciotiempo) para proporcionar una contribución distinta de cero.

Estas consideraciones, junto con la fortuna de que el propagador de la parte $\partial_A \eta^i \partial^A \eta^j$ de (2.53) es particularmente simple, son buenas razones para cambiar las variables en la integral de trayectoria e integrar sobre los campos del marco de Lorentz local η^i . La medida de integración se define de forma invariante ante cambios de coordenadas en el espaciotiempo para que el cambio de variables de π^μ a η^μ y después a η^i no la afecte.

Regresemos a la expansión covariante de la acción. (2.50) incluye los términos de la expansión hasta primer orden en la curvatura espaciotemporal. Para diagramas de primer orden sólo usamos los términos de segundo orden en η^i pero necesitaremos el término cuártico para un cálculo a segundo orden más adelante. Usando el método que describimos arriba inmediatamente generamos términos extra que involucran derivadas de la métrica del espaciotiempo de orden mayor, pero el procedimiento se vuelve tedioso rápidamente. En nuestros cálculos no vamos a ocupar esos términos de orden mayor, pero si el lector se interesa en realizar cálculos más allá de primer orden en la curvatura, tales términos son necesarios. Afortunadamente existe una forma más sencilla de obtenerlos. En [11] se describe un sencillo algoritmo recursivo que permite derivar cada orden sucesivo en la expansión covariante de S_P a partir del anterior, y se calculan términos hasta sexto orden en η^μ .

La expansión covariante de la acción del tensor antisimétrico hasta segundo orden en η^i es

$$\begin{aligned}
 S_{AS}[X_0 + \pi] &= S_{AS}(X_0) + \\
 &\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \{ B_{\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu \nabla_b \eta^\nu + \frac{1}{2} \nabla_\lambda B_{\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \eta^\lambda \} \\
 &+ \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} \{ B_{\mu\nu}(X_0 \nabla_a \eta^\mu) \nabla_b \eta^\nu + 2 \nabla_\lambda B_{\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu \nabla_b \eta^\nu \} \eta^\lambda \\
 &+ \frac{1}{2} \left[\nabla_\lambda \nabla_\sigma B_{\mu\nu}(X_0) + B_{\mu\rho}(X_0) R_{\lambda\sigma\nu}^\rho + B_{\rho\nu}(X_0) R_{\lambda\sigma\mu}^\rho \right] \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \eta^\lambda \eta^\sigma \\
 &+ \dots \quad (2.54)
 \end{aligned}$$

De nuevo, suponemos que el campo de fondo satisface la ecuación clásica de movimiento y no consideramos los términos lineales. Es conveniente escribir la parte cuadrática en términos de la intensidad de campo del tensor antisimétrico $H_{\mu\nu\lambda} \equiv \nabla_\mu B_{\nu\lambda} + \nabla_\nu B_{\lambda\mu} + \nabla_\lambda B_{\mu\nu}$. Debido a la invariancia ante transformaciones del tipo (2.37) la física en el espaciotiempo del campo tensorial antisimétrico sólo depende de su intensidad, la cual es invariante de gauge. Después de integrar por partes y reacomodar términos en la parte cuártica de (2.54), la expresión toma la forma,

$$\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \epsilon^{ab} \{ H_{\mu\nu j}(X_0) \partial_a X_0^\mu \nabla_b \eta^i \eta^j + \frac{1}{2} \nabla_i H_{\mu\nu j} \partial_a X_0^\mu \partial_b X_0^\nu \eta^i \eta^j \}. \quad (2.55)$$

El algoritmo de la referencia [11] puede aplicarse también para generar términos de orden mayor a partir de este. En particular la existencia de tal

procedimiento recursivo asegura que a cada orden en la expansión covariante sólo la combinación invariante de gauge $H_{\mu\nu\lambda}$ aparece. El único término de orden mayor que usaremos en nuestros cálculos es cúbico en η^i e involucra la intensidad de campo sin derivadas:

$$\frac{1}{12\pi\alpha'} \int d^2\xi \epsilon^{ab} H_{ijk}(X_0) \eta^i \nabla_a \eta^j \nabla_b \eta^k \quad (2.56)$$

La función de acoplamiento del dilatón es un escalar del espaciotiempo, por lo que la expansión de S_D es muy sencilla,

$$\begin{aligned} S_D[X_0 + \pi] = S_D(X_0) + \frac{1}{4\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} R^{(2)} \nabla_i \phi(X_0) \eta^i \\ + \frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma \sqrt{\gamma} R^{(2)} \nabla_i \nabla_j \phi(X_0) \eta^i \eta^j \\ + \dots \end{aligned} \quad (2.57)$$

Armados con éstas expansiones covariantes de los términos de la acción clásica y con el término diagonal cinético para los campos cuánticos ahora podemos escribir reglas de Feynman para diagramas y comenzar a hacer teoría de perturbaciones. Pero primero debemos verificar si los cálculos perturbativos tendrán algún sentido en esta teoría. Un requisito necesario es que exista un parámetro pequeño y adimensional en donde hacer la expansión. Todos los términos de interacción en nuestra expansión covariante involucran una o más derivadas de las funciones de acoplamiento del espaciotiempo. La teoría es por tanto de acoplamiento débil únicamente si hacemos la suposición de que los campos de fondo del espaciotiempo cambian lentamente en la escala de longitud definida por α' .

2.3.4 Cálculo al orden más bajo de la anomalía de Weyl

En esta sección llevaremos a cabo un cálculo simple para obtener la anomalía de Weyl a primer orden del modelo sigma usando la expansión en campos covariantes de fondo. De nuevo emplearemos un truco para hacerlo sencillo. Estamos tras la variación de la acción efectiva, con respecto al factor de escala de la métrica de la hoja de mundo. En lugar de intentar un cálculo directo la vamos a obtener via la ecuación de conservación (2.18). Identifiquemos el tensor de energía-momento en la teoría cuántica con la variación de la acción efectiva con respecto a la métrica bidimensional,

$$\langle T_{ab} \rangle = \frac{4\pi}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta W}{\delta \gamma^{ab}} \quad (2.58)$$

El argumento que conduce a (2.20) nos dice que esto es válido para los componentes zz y $\bar{z}\bar{z}$. Argumentos generales de renormalización garantizan que

(2.58) es también una buena definición de $\langle T_{zz} \rangle$ aún cuando este objeto se anula en forma clásica. Con esta identificación la ecuación de conservación (2.18) toma una forma más familiar,

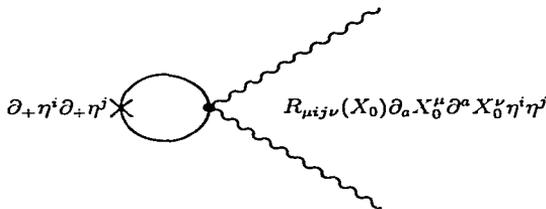
$$\nabla^z \langle T_{zz} \rangle + \nabla^z \langle T_{zz} \rangle = 0. \quad (2.59)$$

El truco es la observación de que $\langle T_{zz} \rangle$ es finito, y por tanto bien definido por lo que (2.59) puede usarse para inferir el valor de $\langle T_{zz} \rangle$. Veremos que el valor a primer orden de $\langle T_{zz} \rangle$ es tal que el de $\langle T_{zz} \rangle$ no puede ser cero si insistimos en la conservación del tensor de energía-momento en dos dimensiones. Usualmente cuando se encuentra una anomalía se tiene que renunciar a alguna simetría en el sistema cuántico, pero generalmente existen varias opciones. Aquí las alternativas son la invariancia de Weyl, que implica que $\langle T_{zz} \rangle = 0$, y la invariancia ante reparametrizaciones, la cual está asociada a la conservación del tensor de energía-momento. Definitivamente escogemos invariancia de éste tensor, pero el precio es un $\langle T_{zz} \rangle = 0$ distinto de cero.

Pasemos al cálculo propiamente dicho. Por simplicidad primero obtendremos la anomalía usando una métrica plana de la hoja de mundo, y después consideremos el efecto de la curvatura en tal superficie. Con el fin de evaluar los diagramas de Feynmann es conveniente que la signatura de la hoja de mundo sea de Minkowski, y debemos pasar al espacio de momento en dos dimensiones. La ecuación de conservación queda como:

$$q + \langle T_{-+} \rangle + q \langle T_{++} \rangle = 0 \quad (2.60)$$

Primero calculemos la contribución a $\langle T_{++} \rangle$ de S_P . A primer orden en la curvatura del espaciotiempo sólo necesitamos calcular un diagrama:



El $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$ viene de la inserción de T_{++} y el vértice que involucra la curvatura del espaciotiempo viene de la expansión de S_P . La inserción de T_{++} también tiene partes que involucran el potencial de gauge de $SO(D-1, 1)$ (porque tenemos derivadas covariantes, $\nabla_+ \eta^i \nabla_+ \eta^j$, en (2.50)) y una parte que involucra la curvatura del espaciotiempo. Los diagramas con inserciones del espaciotiempo no pueden combinarse para dar un resultado covariante (porque también se necesita una derivada de la conexión para formar un

tensor de curvatura) por lo que su contribución debe anularse y la vamos a ignorar. El diagrama con dos inserciones del tensor de curvatura (una de T_{++} y una de S_P) puede despreciarse si se está trabajando a primer orden en $R_{\mu\lambda\sigma\nu}$.

La contribución del diagrama anterior es

$$\int \frac{d^2 l}{2\pi} \frac{l_+(l_+ + q_+)}{l^2(l+q)^2} \{R_{\mu\nu} \partial_a X_0^\mu \partial^a X_0^\nu\}(q) \quad (2.61)$$

Aquí l es el momento de lazo y q es el momento con el que insertamos $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$. La conservación del momento nos dice que el momento q se lo llevan los campos de fondo $\partial_a X_0^\mu$'s a la derecha del diagrama. $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci de la métrica del espaciotiempo y como estamos trabajando en el espacio de momento de la hoja de mundo tenemos una transformada de Fourier del producto de funciones dentro del paréntesis curvo.

La integral de momento (2.61) es logarítmicamente divergente en forma superficial, pero el carácter tensorial de $++$ del diagrama indica que el resultado debe tener el equivalente a dos factores de q_+ , y el diagrama es de hecho, finito. Esta es toda la idea de definir T_{-+} a partir de T_{++} via conservación. La integral es sencilla, por ejemplo, usando fórmulas de regularización dimensional estándar [14] se obtiene

$$\int \frac{d^2 l}{2\pi} \frac{l_+(l_+ + q_+)}{l^2(l+q)^2} = -\frac{1}{4} \frac{q_+}{q_-} \quad (2.62)$$

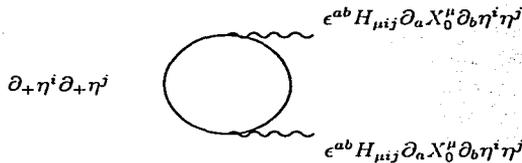
Habiendo obtenido la contribución a un lazo de $\langle T_{-+} \rangle$ de S_P ahora podemos usar la ecuación de conservación (2.60) para obtener

$$\langle T_{-+}(\xi) \rangle = \frac{1}{4} R_{\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^\mu(\xi) \partial^a X_0^\nu(\xi) \quad (2.63)$$

Esta es la anomalía conforme. La traza del tensor de energía-momento es diferente de cero aún si empezamos con una acción clásica invariante conforme y hemos descubierto a un lazo que el $\langle T_{-+} \rangle$ anómalo depende de la curvatura del espaciotiempo. Si escogemos nuestra función de acoplamiento del espaciotiempo $G_{\mu\nu}(X_0)$ tal que $R_{\mu\nu}(X_0) = 0$ la anomalía desaparece, y eventualmente heramos algo así.

La anomalía (2.63) no tiene ninguna potencia de α' enfrente. La inserción del tensor de energía-momento y el término de interacción en el lagrangiano tienen ambos un $\frac{1}{\alpha'}$ enfrente y cada propagador tiene un α' , por lo que los α' se cancelan en el diagrama. Esto es de esperarse si α' es el parámetro que cuenta los lazos, porque a nivel árbol en tensor de energía-momento tiene un $\frac{1}{\alpha'}$ enfrente.

Aún no tenemos la anomalía completa. Dos diagramas derivados de S_{AS} también contribuyen. Uno tiene dos vértices que involucran la intensidad de campo $H_{\mu\nu\lambda}$:

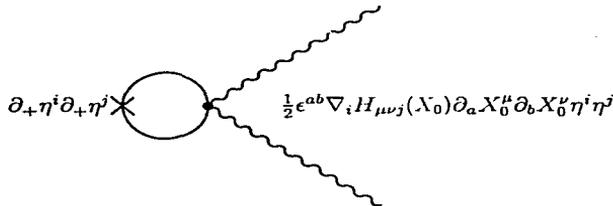


Analizando las potencias, el grado superficial de divergencia es el mismo que en diagrama derivado para S_P , pero de nuevo, el caracter ++ del diagrama nos dice que es finito. El cálculo es análogo al que ya hicimos, y muestra que este diagrama produce una anomalía también,

$$\langle T_{-+} \rangle = -\frac{1}{16} H_{\mu\lambda\sigma}(X_0) H_{\mu}^{\lambda\sigma}(X_0) \partial_a X_0^\mu(\xi) \partial^a X_0^\nu(\xi) \quad (2.64)$$

El cual tiene la misma forma que (2.63) con el tensor de Ricci reemplazado por el cuadrado de la intensidad de campo del tensor antisimétrico.

El otro diagrama derivado de S_{AS} que contribuye a éste orden es,



Esta vez la integral de lazo de momento es idéntica a (2.62) e inmediatamente encontramos que la anomalía recibe la contribución:

$$\langle T_{-+} \rangle = \frac{1}{8} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu}(X_0) \partial_b X_0^\nu \partial^a X_0^\nu \epsilon^{ab} \quad (2.65)$$

que involucra una combinación antisimétrica (a diferencia de las anteriores que son simétricas) de derivadas en la hoja de mundo de los campos de fondo X_0^μ .

Los términos que acabamos de calcular, que forman la anomalía de Weyl, pueden obtenerse de una forma muy distinta, lo que revela la física que contienen desde otro punto de vista. Sucede que son los mismos que las funciones beta del grupo de renormalización para S_P y S_{AS} . La función simétrica $G_{\mu\nu}$ y la función antisimétrica $B_{\mu\nu}$ juegan el papel de constantes de acoplamiento en el modelo sigma no lineal y se puede hacer un cálculo de grupo de renormalización para obtener las funciones beta asociadas. Lo que se encuentra es que $\beta_{\mu\nu}^C$ es obtenida de la suma de (2.63) y (2.64) mientras que $\beta_{\mu\nu}^B$ esta dada por (2.65). Una imagen muy interesante ésta tomando

forma. La anomalía de Weyl puede expresarse en términos de tensores del espaciotiempo contruidos a partir de la curvatura y la intensidad del tensor antisimétrico, y puede identificarse con las funciones beta de los acoplamientos de la teoría. Pero aún falta un elemento clave. Existe un tercer acoplamiento que se origina en el dilatón. Apareció en la acción clásica como un término no estándar que incluye la curvatura de la hoja de mundo, y su influencia no es fácil de ver desde el punto de vista del grupo de renormalización. Sin embargo, los cálculos que resultaron la anomalía a un lazo pueden generalizarse para incluir el efecto del término del dilatón. Veremos que su presencia agrega piezas extra a los términos de la anomalía que corresponden a $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ más un nuevo tipo de anomalía, que puede verse como la generalización de la carga central del álgebra de Virasoro, y puede también interpretarse como la función beta del acoplamiento del dilatón mismo.

Si sólomente consideramos teoría de campo en dos dimensiones, $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ son la anomalía completa a un loop. En general son dos tensores independientes y si queremos que la anomalía se anule los dos deben igualarse a cero por separado. Existen excepciones a esto. Si la variedad del espacio target (el espaciotiempo) es una variedad de grupo el tensor de Ricci no se anula pero la anomalía de Weyl de S_P puede cancelarse por una astuta elección de campo tensorial antisimétrico en S_{AS} . El la literatura el acoplamiento de tensor antisimétrico se conoce como el *término de Wess-Zumino*. No tocaremos el tema de variedades de grupo dado que queremos estudiar teoría de cuerdas en un espaciotiempo general.

2.3.5 Acoplamiento de dilatón

En la sección anterior establecimos las contribuciones de S_P y S_{AS} a la anomalía de Weyl a un loop. Calculamos el valor de expectación de la traza del tensor de energía-momento en $2D$, en presencia de campos de fondo en el espaciotiempo, con una hoja de mundo plana. Ahora vamos a obtener la contribución de término de dilatón (2.33) de la acción clásica a la anomalía de Weyl. En S_D el dilatón del espaciotiempo está acoplado a la curvatura en $2D$, pero podemos calcular la anomalía sin tener que hacer todos los cálculos en una hoja de mundo curva. Aunque el acoplamiento de dilatón se anula en el límite de una hoja de mundo plana, su variación con respecto a la métrica de la hoja de mundo no lo hace. En otras palabras, al incluir este término en la acción original en una hoja de mundo curva hemos cambiado el tensor de energía-momento en $2D$ aún en una hoja plana. Este tensor es siempre la respuesta de la acción a una variación infinitesimal de la métrica y el acoplamiento del dilatón afecta ésta respuesta aún cuando el término en sí mismo en el lagrangiano se anula. Con algo de álgebra encontramos que esta adición al tensor de energía-momento es

$$T_{ab}^{dil} = (\partial_a \partial_b - \delta_{ab} \square) \phi(X) \quad (2.66)$$

Debe ser lineal en ϕ , su divergencia debe ser nula (es decir, ser una cantidad conservada) y debe ser de dimensión dos. Observamos que ésta parte del tensor de energía-momento tiene una traza distinta de cero.

$$T_{-+}^{du} = \square_{\xi} \phi(X(\xi)) \quad (2.67)$$

El subíndice ξ está ahí para recordarnos que el operador que actúa sobre ϕ es del D'Alembertiano en la hoja de mundo, y no en el espaciotiempo. Esto es de esperarse dado que S_D no es invariante de Weyl, aún a nivel clásico. Como discutimos anteriormente la idea es cancelar esta contribución a nivel árbol a la traza del tensor de energía-momento contra las anomalías a un lazo provenientes de términos en la acción que son invariantes de Weyl a nivel clásico. Las potencias del parámetro que cuenta los lazos α' enfrente de los diferentes términos en la acción obedecen a que a nivel árbol la traza del tensor de energía-momento que viene de S_D entre al mismo orden que las partes a primer orden calculadas en la sección anterior (es decir de orden $(\alpha')^0$). Lo que tenemos que calcular es simplemente la traza clásica de (2.67) en el campo de fondo X_0^{μ} . Existen dos términos:

$$\square_{\xi} \phi(X_0) = \square X_0^{\mu} \partial_{\mu} \phi(X_0) + \partial_a X_0^{\mu} \partial^a X_0^{\nu} \partial_{\nu} \phi(X_0) \quad (2.68)$$

Estos términos no son covariantes desde el punto de vista del espaciotiempo y se debe tener cuidado de escribir las derivadas parciales en lugar de intentar hacer covariante la expresión en esta etapa. Ahora usemos la ecuación clásica de movimiento para X_0^{μ} para reescribirla. Como aún estamos trabajando en una hoja de mundo plana la ecuación relevante de movimiento se deriva de S_P y S_{AS} juntas, sin incluir a S_D :

$$\square X_0^{\mu} = \Gamma_{\lambda\sigma}^{\mu} \partial_a X_0^{\lambda} \partial^a X_0^{\sigma} - \frac{1}{2} H_{\lambda\sigma}^{\mu} \partial_a X_0^{\lambda} \partial_b X_0^{\sigma} \epsilon^{ab} \quad (2.69)$$

Si insertamos ésta ecuación en (2.68) las cosas se combinan de tal forma que obtenemos un resultado covariante en el espaciotiempo,

$$\square_{\xi} \phi(X_0) = \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi(X_0) \partial_a X_0^{\mu} \partial^a X_0^{\nu} - \frac{1}{2} \nabla^{\lambda} \phi(X_0) H_{\lambda\mu\nu}(X_0) \partial_a X_0^{\mu} \partial_b X_0^{\nu} \epsilon^{ab} \quad (2.70)$$

Estos términos tienen la misma estructura que los de la anomalía de primer orden provenientes de S_P y S_{AS} , calculados anteriormente, y podemos concluir que la traza del tensor de energía-momento completo en una hoja de mundo plana se obtiene sumando éstos dos términos a lo que hemos llamado $\beta_{\mu\nu}^{\alpha}$ y $\beta_{\mu\nu}^{\beta}$.

$$\begin{aligned} \langle T_{-+} \rangle = & \frac{1}{4} \{ R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_{\mu\nu}^2 + 2 \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi \} \partial_a X_0^{\mu} \partial_b X_0^{\nu} \sqrt{-\gamma} \epsilon^{ab} \\ & + \frac{1}{8} \{ \nabla^{\lambda} H_{\lambda\mu\nu} - 2 \nabla^{\lambda} \phi H_{\lambda\mu\nu} \} \partial_a X_0^{\mu} \partial_b X_0^{\nu} \epsilon^{ab} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Los objetos dentro del paréntesis curvo son $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ con el efecto del dilatón incluido;

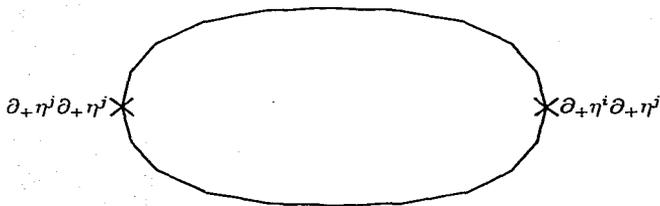
$$\begin{aligned}\beta_{\mu\nu}^G &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}H_{\mu\nu}^2 + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \phi, \\ \beta_{\mu\nu}^B &= \frac{1}{2}\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} - 2\nabla^\lambda \phi H_{\lambda\mu\nu}.\end{aligned}\quad (2.72)$$

Estos son los coeficientes de la anomalía de Weyl, aunque los etiquetamos como las funciones beta del modelo sigma. La equivalencia formal entre ambos ha sido establecida formalmente [8].

Ya tenemos la contribución del acoplamiento del dilatón a los coeficientes de la anomalía de Weyl, pero la evaluación del tensor de energía-momento en (2.71) se llevó a cabo en una hoja de mundo plana. Para que el modelo sigma no lineal sea invariante de Weyl a nivel cuántico debemos imponer que la traza del tensor de energía-momento se anule en cualquier hoja de mundo. También quisieramos evitar las complicaciones que implica hacer el cálculo en un espacio de $2D$ con curvatura arbitraria. Afortunadamente podemos calcular la parte de la anomalía en una hoja curva calculando funciones de dos puntos del tensor de energía-momento en una hoja plana. Recordemos que localmente en la hoja de mundo siempre podemos escribir una métrica curva como el producto de un factor de escala conforme y una métrica plana, $\gamma_{ab} = e^\Phi \delta_{ab}$. El tener invariancia conforme significa que la traza del tensor de energía-momento, evaluada usando la métrica γ_{ab} , se anula sin importar el factor de escala Φ . Un requisito mínimo es que su primera variación con respecto de Φ sea igual a cero. Si evaluamos la variación en una hoja de mundo plana formalmente tenemos una función de dos puntos de la traza del tensor de energía-momento.

$$\frac{\delta}{\delta\Phi(\xi)} \langle T_{-+}(0) \rangle_{e^\Phi \delta_{ab}} |_{\Phi=0} = -\frac{1}{4\pi} \langle T_{-+}(\xi) T_{-+}(0) \rangle_{\delta_{ab}} \quad (2.73)$$

Consideremos por el momento la parte de la teoría que es invariante de Weyl en forma clásica y posteriormente incluiremos el acoplamiento del dilatón. en tal caso la función de dos puntos en (2.73) es algo que se anula a nivel clásico y es distinto de cero sólomente porque la teoría es anómala. Usaremos la conservación del tensor de energía-momento para definir su valor en forma similar a como definimos el valor de expectación de su traza. A nivel clásico las únicas funciones de dos puntos no nulas del tensor de energía-momento son $\langle T_{++} T_{++} \rangle$ y aquella con todos los subíndices menos. Es inmediato el cálculo de $\langle T_{++} T_{++} \rangle$. Al orden más bajo en α' sólo un diagrama necesita ser evaluado,



Es la misma historia que antes. El diagrama es superficialmente divergente pero la respuesta debe tener un caracter tensorial $++$ y esto significa que en realidad, es finito. Es conveniente llevar a cabo una transformada de Fourier y calcular el diagrama en el espacio de momento. La conservación del momento nos dice que las dos inserciones $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$ deben tener momento opuesto. La integral de momento de lazo es relativamente simple:

$$\langle T_{++}(q) T_{++}(-q) \rangle = 2D \int d^2l \frac{l_+^2 (l_+ + q_+)^2}{l^2 (l_+ + q)^2} = -\frac{\pi D}{6} \frac{q_+^3}{q_-} \quad (2.74)$$

El factor D esta ahí porque existe una contribución independiente de lazo de cada componente del campo η^i . Como en los otros diagramas a un lazo, los factores de α' se cancelan entre las inserciones de $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$ y los propagadores.

Ahora obtendremos valores a un lazo para las funciones a dos puntos que se anulan en la teoría clásica implementando la conservación del tensor de energía-momento,

$$q_+ T_{-+} + q_- T_{++} = 0 \quad (2.75)$$

Aplicando esta ecuación de conservación una vez en (2.74) tenemos

$$\langle T_{-+}(q) T_{++}(-q) \rangle = \frac{\pi D}{6} q_+^2 \quad (2.76)$$

Este es un polinomio en q , un término de contacto sin singularidad. Puede verse como proveniente de una parte finita de la sustracción de renormalización. Una función de dos puntos del tensor de energía-momento con el caracter tensorial de (2.76) es logarítmicamente divergente por conteo de potencias y podemos agregarle cualquier número finito veces q_+^2 . Usualmente se invocan principios de simetría para fijar partes finitas de contraterminos. La invariancia de Weyl nos dice que esta función de dos puntos es igual a cero pero nos encontramos con que la conservación del tensor de energía-momento (que consideramos más fundamental que la invariancia de Weyl) no lo permite. El asunto es que $\langle T_{++} T_{++} \rangle$ es finita y por ende no tenemos la libertad de agregarle algo y la ecuación de conservación entonces fija un valor único para $\langle T_{-+} T_{++} \rangle$. Entonces usamos (2.75) otra vez para obtener

la función de dos puntos de la traza del tensor de energía-momento con él mismo,

$$\langle T_{-+}(q)T_{-+}(-q) \rangle = -\frac{\pi D}{6} q_+ q_- \quad (2.77)$$

Claramente es distinto de cero, por lo que existe una anomalía. El producto $q_+ q_-$ es un escalar de Lorentz en la hoja de mundo. Simplemente se convierte en el D'Alembertiano cuando regresamos al espacio de coordenadas y dado que el lado derecho de (2.77) es una constante, actuará sobre una función δ de localización,

$$\langle T_{-+}(\xi)T_{-+}(0) \rangle = \frac{\pi D}{12} \square \delta^{(2)}(\xi) \quad (2.78)$$

Esta función de dos puntos es la respuesta de T_{-+} a la variación del factor de escala métrica, evaluado en una hoja plana. Usando (2.78) podemos integrar (2.73) para obtener la traza del tensor de energía-momento

$$\langle T_{-+}(\xi) \rangle_{e^\phi \delta_{ab}} = -\frac{D}{48} \square \phi \quad (2.79)$$

El D'Alembertiano del factor de escala es la curvatura bidimensional de la hoja de mundo, y si usamos identidades conocidas [8] podemos reescribir la ecuación anterior como

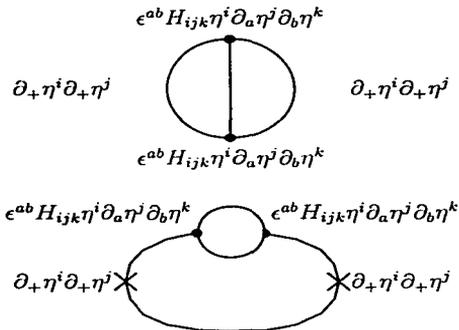
$$\langle T_{-+}(\xi) \rangle_{e^\phi \delta_{ab}} = \frac{D}{24} \sqrt{\gamma} R^{(2)} \quad (2.80)$$

De nuevo encontramos una anomalía pero esta contribución a la traza del tensor de energía-momento es de una forma diferente que las partes obtenidas en la sección anterior. Como el acoplamiento del dilatón, es proporcional a la curvatura en $2D$ y llamaremos al coeficiente de proporcionalidad β^ϕ . Esta anomalía únicamente depende de D , la dimensión del espaciotiempo, pero no parece involucrar los campos que viven en él. Claro que sólo obtuvimos esta anomalía a orden cero en α' . Para ver alguna dependencia en las funciones de acoplamiento del modelo sigma debemos ir a primer orden en α' y calcular diagramas a dos lazos. En esta etapa estamos considerando la contribución a la anomalía de la parte invariante de Weyl a nivel clásico de la teoría, por lo que los vértices de interacción en los diagramas a dos lazos son aquellos derivados de S_P y S_{AS} . Existen varios diagramas a dos lazos que podemos escribir pero sólo tres de ellos son relevantes para el cálculo de β^ϕ .

$$R_{ijkl} \eta^j \eta^k \partial^a \eta^i \partial_a \eta^l$$

$\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^i$

 $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^i$



Los vértices de estos diagramas vienen de los términos de interacción, en la expansión en campos de fondo, que escribimos en (2.50) y (2.54). Todos los demás diagramas a dos lazos ya sea contribuyen sólo a $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ o bien se demuestra que no son relevantes [8] por argumentos de simetría. En nuestro cálculo tenemos dos diagramas a dos lazos, que contribuyen a $\langle T_{++} T_{++} \rangle$. Pueden tener subdivergencias que necesitan ser renormalizadas adecuadamente, por lo que tenemos diagramas de contratérminos que deben ser considerados, y así sucesivamente. No llevaremos a cabo los detalles aquí, pero siendo cuidadosos y sustrayendo las divergencias en forma que se respete la conservación del tensor de energía-momento en la hoja de mundo, cada diagrama al final proporciona una respuesta única y finita. El principio guía es la conservación del tensor de energía-momento, y nos permite definir cada diagrama sin ambigüedades. La estructura del momento de los tres diagramas anteriores resulta ser idéntica a la que teníamos en el caso a un lazo, q_+^3/q_+ , pero ahora tenemos coeficientes que dependen de los campos de fondo del espaciotiempo. Los índices de los vértices en las gráficas se contraen de modo que proporcionan escalares en el espaciotiempo. Haciendo los cálculos de lazo, por tanto, debe resultar en un término que contenga al escalar de Ricci y otro con el cuadrado de $H_{\mu\nu\lambda}$, que también es escalar. El argumento de conservación que usamos para obtener $\langle T_{--} T_{--} \rangle$ a partir de $\langle T_{++} T_{++} \rangle$ depende solamente de la estructura del momento de un diagrama dado, pero no de su coeficiente. Si seguimos el argumento hasta el final encontramos un nuevo conjunto de términos, que contienen a R y H^2 , sumados a β^ϕ . Se puede verificar, contando vértices y propagadores, que los diagramas a dos lazos entran a orden α' y es cuestión de detalle el obtener los números exactos enfrente.

Ahora tenemos la contribución de orden α' a β^ϕ proveniente de la métrica y el tensor antisimétrico del espaciotiempo, pero aún falta una pieza que proviene del dilatón mismo. Y es natural porque sólo calculamos funciones de dos puntos de la parte invariante de Weyl clásica del tensor de energía-momento. También hay una contribución explícita del dilatón (2.67) a la

traza del tensor de energía-momento que llamamos T_{-+}^{dil} . Recordemos que esta expresión tiene una potencia extra de α' comparada con el tensor de energía-momento clásico derivado de los términos invariantes de Weyl en la acción, por lo que contribuye de dos formas a nivel de dos lazos. Una es a través de una función de dos puntos de T_{-+}^{dil} consigo mismo a nivel árbol, y la otra viene de un diagrama a un lazo con una inserción de T_{-+}^{dil} y una inserción de $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$.

El único diagrama de árbol relevante al cálculo de β^ϕ , conecta dos vértices $\nabla_\mu \phi \square X_0^\mu$ con un propagador. (En un diagrama de árbol se considera a X_0^μ como campo cuántico).

$$\nabla_\mu \phi \square X_0^\mu \bullet \text{---} \bullet \nabla_\mu \phi \square X_0^\mu$$

El propagador cancela uno de los D'Alembertianos y contribuye con un factor de α' para dar:

$$\langle T_{-+}^{dil}(\xi) T_{-+}^{dil}(0) \rangle = \pi \alpha' (\nabla \phi)^2 \square \delta^{(2)}(\xi) \quad (2.81)$$

El único diagrama de un lazo que proporciona una contribución del dilatón a β^ϕ tiene una inserción $\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$ y un vértice $\nabla_i \nabla_j \partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$, y viene de de la expansión en campos de fondo de T_{++}^{dil} .

$$\partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j \times \text{---} \text{---} \text{---} \nabla_i \nabla_j \partial_+ \eta^i \partial_+ \eta^j$$

Ahora usamos el mismo procedimiento de conservación para definir $\langle T_{-+} T_{-+}^{dil} \rangle$ a partir de $\langle T_{++} T_{++}^{dil} \rangle$, y obtenemos:

$$\langle T_{-+}(\xi) T_{-+}^{dil}(0) \rangle = -\pi \alpha' \nabla^2 \phi \square \delta^{(2)}(\xi) \quad (2.82)$$

Vemos que β^ϕ recibe dos términos del acoplamiento del dilatón, uno contiene a $(\nabla \phi)^2$ y el otro es proporcional a $\nabla^2 \phi$. Juntando todas las piezas de β^ϕ que encontramos llegamos al resultado,

$$\beta^\phi = \frac{D}{6} + \frac{\alpha'}{2} \left\{ -R + \frac{H^2}{12} + 4(\nabla \phi)^2 - 4\nabla^2 \phi \right\} \quad (2.83)$$

No pueden haber contribuciones extra a la anomalía de Weyl a este orden en la expansión perturbativa. La traza del tensor de energía-momento

es de dimensión de escalamiento dos y los únicos objetos que pueden dar una anomalía son operadores de dimensión dos. Al comenzar la sección de modelos sigma argumentamos que existían únicamente tres estructuras independientes de dimensión dos en el modelo sigma bidimensional y los coeficientes $\beta_{\mu\nu}^G$, $\beta_{\mu\nu}^B$ y β^ϕ son precisamente los coeficientes de esos objetos,

$$T_a^\alpha = -\frac{1}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu}^G h^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{i}{2\alpha'} \beta_{\mu\nu}^B \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu - \frac{1}{2} \beta^\phi R^{(2)} \quad (2.84)$$

Obtuvimos a β^ϕ a orden α' pero $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ sólo a orden $(\alpha')^0$. Sin embargo, todos los coeficientes han sido calculados al mismo orden físico porque contienen segundas derivadas de las funciones de acoplamiento del espacio-tiempo.

2.4 Generalización de las ecuaciones de Einstein

En teoría de cuerdas queremos que el modelo sigma no lineal sea invariante de Weyl, por lo que debemos imponer la condición de que los coeficientes de la anomalía de Weyl se hagan cero: $\beta_{\mu\nu}^G = \beta_{\mu\nu}^B = \beta^\phi = 0$. La parte de orden cero β^ϕ no depende para nada de los fondos del espaciotiempo y está presente aún en el caso de espaciotiempo plano y vacío. De hecho se cancela por la contribución proveniente de los campos fantasma conformes que se necesitan para fijar la métrica bidimensional en la integral de trayectoria de cuerdas original. No discutimos los fantasmas aquí porque forman un sistema libre, completamente desacoplado de los grados de libertad que estamos buscando. Desde nuestro punto de vista su única virtud es que contribuyen con una parte constante de β^ϕ que es $-\frac{26}{6}$ en nuestras unidades. La parte de β^ϕ de orden $(\alpha')^0$, por tanto, se elimina si escogemos el número de campos escalares en el modelo sigma (es decir, la dimensión del espacio-tiempo), igual a 26.

Elegir $D = 26$ es todo lo necesario para eliminar la anomalía de Weyl en una teoría libre bidimensional, pero en el modelo sigma no lineal general existen términos adicionales. La pregunta es si existe una configuración de la métrica, el tensor antisimétrico y el dilatón (en el espaciotiempo) tal que los tres coeficientes de la anomalía de Weyl se anulen. Debemos tener en mente que calculamos estos coeficientes a primer orden en la serie de potencias de α' . Realmente, la serie de potencias completa es la que se debe igualar a cero, estrictamente la función que aproxima. Mostraremos explícitamente la respuesta a esta pregunta en el contexto de nuestros cálculos a primer orden. Un procedimiento similar puede llevarse a cabo incluyendo correcciones de orden mayor pero no llegaremos a tanto detalle en ésta tesis.

Primero debemos atender un aspecto potencialmente problemático. En un modelo sigma no lineal general, β^ϕ juega el papel de la carga central

del álgebra de Virasoro. Esencialmente es el parámetro λ que discutimos anteriormente. encontramos que en una teoría de campo conforme genérica en $2D$ la acción efectiva depende de la elección de la métrica bidimensional. Su variación con respecto al factor conforme de la métrica es de la forma: un número, λ , multiplicado por la curvatura en $2D$, y éste coeficiente de $R^{(2)}$ es precisamente lo que llamamos β^ϕ en el modelo sigma. El asunto que nos preocupa es que mientras λ es simplemente un número que caracteriza la teoría, β^ϕ en (2.83) tiene el aspecto de un operador que depende de la posición y del espaciotiempo. La métrica del espaciotiempo, el campo tensorial antisimétrico y el campo del dilatación son en general funciones complicadas en el espaciotiempo. ¿Qué nos garantiza que β^ϕ es sólo un número?

La teoría resuelve este problema de forma interesante. Si queremos que el modelo sigma no lineal sea una teoría de campo conforme *cuántica*, debemos definitivamente imponer que $\beta_{\mu\nu}^G = \beta_{\mu\nu}^B = 0$. De otra forma se presenta la anomalía conforme aún en una hoja de mundo plana. El hecho sobresaliente es que esta condición en sí implica que β^ϕ es una constante. Si $\beta_{\mu\nu}^G(X_0)$ es idénticamente cero entonces el su divergencia espaciotemporal también se anula. Por otro lado $\beta_{\mu\nu}^B = 0$ se puede mostrar que la divergencia de $\beta_{\mu\nu}^G$ es en realidad igual al gradiente de β^ϕ ;

$$0 = \nabla^\mu \beta_{\mu\nu}^G(X_0) = \nabla_\nu \beta^\phi(X_0) \quad (2.85)$$

A partir de la nulidad de $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ obtenemos que β^ϕ es una constante. Se puede pensar que este argumento funciona debido a la forma específica de los distintos coeficientes β a primer orden, y que podría venirse abajo al agregar correcciones de orden mayor. Sin embargo, argumentos generales [8] muestran que la nulidad de $\beta_{\mu\nu}^G$ y $\beta_{\mu\nu}^B$ al mismo tiempo implica una β^ϕ constante a todos los ordenes en teoría de perturbaciones.

Aún falta demostrar que los tres coeficientes de la anomalía de Weyl pueden igualarse a cero en forma consistente. Si escribimos un conjunto arbitrario de ecuaciones para las funciones de acoplamiento del espaciotiempo, no podemos esperar que todas ellas se satisfagan en forma simultánea, en particular debido a que $R_{\mu\lambda\sigma\nu}$ y $H_{\mu\nu\lambda}$ son objetos restringidos derivados de potenciales. Sin embargo, las condiciones de la anomalía de Weyl son mutuamente consistentes. Un modo de entender esto es que todas ellas pueden derivarse de una misma acción del espaciotiempo. Mientras probamos ésta afirmación, veremos en forma más explícita como la invariancia conforme en la hoja de mundo conduce a la gravitación de Einstein en el espaciotiempo. Primero reordenemos las ecuaciones de la anomalía de Weyl en una forma

más sugestiva:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R = \frac{1}{4}[H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}G_{\mu\nu}H^2] - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2G_{\mu\nu}\nabla^2\phi$$

$$\nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} = 2\nabla^\lambda\phi H_{\lambda\mu\nu}.$$

$$\nabla^2\phi - 2(\nabla\phi)^2 = -\frac{1}{2}H^2. \quad (2.86)$$

Usamos la traza de la primera ecuación para eliminar R del final de la última ecuación $\beta^\phi = 0$. Las tres ecuaciones anteriores son completamente equivalentes a imponer $\beta_{\mu\nu}^G = \beta_{\mu\nu}^B = 0$ pero ahora el lado izquierdo de la primera ecuación es el tensor de Einstein en el espaciotiempo y las dos siguientes pueden verse como ecuaciones de movimiento para los campos tensorial antisimétrico y dilatónico en el espaciotiempo. Podemos definir el tensor de energía-momento del espaciotiempo como el lado derecho de la primera ecuación:

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{1}{4}[H_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{6}G_{\mu\nu}H^2] - 2\nabla_\mu\nabla_\nu\phi + 2G_{\mu\nu}\nabla^2\phi \quad (2.87)$$

Es un tensor simétrico y más le vale que se conserve, porque el tensor de Einstein siempre se conserva como resultado de una identidad de Bianchi para $R_{\mu\lambda\sigma\nu}$. Para $H_{\mu\nu\lambda}$ y ϕ generales no hay razón para que (2.87) sea un tensor conservado, pero es fácil ver que cuando los campos del espaciotiempo satisfacen las ecuaciones de movimiento (2.86), entonces $\nabla^\mu\Theta_{\mu\nu} = 0$. En otras palabras la nulidad de la anomalía conforme es equivalente a las ecuaciones de Einstein en el espaciotiempo con un término covariante de fuente conservada. El sistema de ecuaciones es por tanto ciertamente consistente y de hecho proviene de un principio variacional. La acción covariante D dimensional cuyas ecuaciones de movimiento son (2.86) es

$$S_D = \int d^D X \sqrt{G}e^{-2\phi}\{R + 4(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{12}H^2\} \quad (2.88)$$

Esta acción se puede escribir en forma más familiar haciendo un reescalamiento de Weyl para la métrica del espaciotiempo

$$G_{\mu\nu} = \tilde{G}_{\mu\nu}e^{\frac{4}{D-2}\phi} \quad (2.89)$$

Si redefinimos en esta forma nuestro tensor métrico del espaciotiempo tenemos

$$S_D = \int d^D X \sqrt{\tilde{G}}\{\tilde{R} + 4(\tilde{\nabla}\phi)^2 - \frac{1}{12}e^{\frac{8\phi}{D-2}}\tilde{H}^2\} \quad (2.90)$$

Las tildes indican que estos escalares involucran contracciones de los índices del espaciotiempo llevadas a cabo con la nueva métrica. Ahora la acción del espaciotiempo tiene un aspecto más familiar. Es simplemente la acción de Einstein con un término cinético para el campo del dilatón y un término

cinético tipo Maxwell para el campo tensorial antisimétrico. Existe una complicación en que el análogo de la intensidad de la constante de acoplamiento para el tensor antisimétrico ahora depende del campo del dilatón.

Cuando estudiamos el modelo sigma no lineal general encontramos finalmente una acción del espaciotiempo de la que podemos derivar las condiciones de la anomalía de Weyl. Esto refleja la profunda conexión entre el modelo sigma y la teoría de cuerdas, lo cual no es válido para todas las teorías de campo cuánticas renormalizables. De nuevo, podemos preguntarnos si esto es verdadero a todos los ordenes de la teoría de perturbaciones, o si es un caso especial de la aproximación a primer orden. La respuesta completa es desconocida, y quizá los nuevos desarrollos en dualidad y formulaciones no perturbativas arrojen algo de luz en este aspecto. Funciona a tres lazos de aproximación [8]. Basándose en ellos es generalmente aceptado que la expansión completa en serie de potencias de α' de los coeficientes de la anomalía de Weyl puede derivarse de una acción maestra del espaciotiempo. Los términos de orden mayor en α' involucran derivadas de orden mayor de las funciones de acoplamiento del espaciotiempo y dan lugar a correcciones a corta distancia (es decir, a la escala de Planck) a las ecuaciones de Einstein y a las ecuaciones de movimiento para los campos de materia.

Existe una relación directa de todo esto con la teoría de cuerdas. Si tomamos la acción del espaciotiempo (2.90) como una acción efectiva para los campos gravitacional, antisimétrico tensorial y dilatónico, entonces genera precisamente la matriz S de teoría de cuerdas (a nivel árbol de cuerdas). Significa que si tomamos la acción, la expandemos en potencias de los campos del gravitón linearizado, el tensor antisimétrico y el dilatón para generar los propagadores en el espaciotiempo y los vértices de interacción, y calculamos todos los diagramas de árbol resultantes (usualmente para una acción efectiva sólo se calculan diagramas de árbol porque las interacciones efectivas por lo general no son renormalizables), entonces los elementos de la matriz S resultantes son exactamente aquellos obtenidos para los estados no masivos de la cuerda bosónica, a partir del formalismo estándar de teoría de cuerdas. Esta conexión debe convencernos de que el gravitón descrito por el tensor métrico del espaciotiempo del modelo sigma es efectivamente el mismo gravitón de cuerdas. Se ha revisado hasta ordenes suficientemente grandes en perturbaciones del modelo sigma para tener confianza en que (y quizá ya se haya probado a todo orden [8]) la acción efectiva del espaciotiempo es la funcional generadora de la matriz S de cuerdas.

Las ecuaciones de fondo de cuerdas toman la forma[9] ,

$$\begin{aligned}
 R_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{4} H_\mu^{\lambda\sigma} H_{\nu\lambda\sigma} &= 0, \\
 \nabla_\lambda H_{\mu\nu}^\lambda - (\nabla_\lambda \phi) H_{\mu\nu}^\lambda &= 0, \\
 R - (\nabla\phi)^2 + 2\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\sigma} H^{\mu\nu\sigma} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

Capítulo 3

Dualidad T en teoría de cuerdas

3.1 ¿Qué es la dualidad?

Las transformaciones de dualidad son un tipo especial de cambio de variable que parece tener un papel muy importante en la interpretación física de la teoría de cuerdas y algunas teorías de campo. Esta simetría hasta ahora ha aparecido en diferentes contextos a lo largo del desarrollo de la física teórica. Algunos ejemplos son: la dualidad de Kramers-Wannier, dualidad Hodge, mapeos duales, dualidad escalar-tensor, dualidad eléctrica-magnética, dualidad Montonen-Olive, la dualidad de Seiberg-Witten y las recientes dualidades T y S en teoría de cuerdas.

En 1977 Claus Montonen y David Olive [13] descubrieron una sorprendente simetría entre la electricidad y el magnetismo en el límite clásico de ciertas teorías de campo en cuatro dimensiones (se trataba de un caso límite de lo que en ese entonces era un modelo de corrientes para interacciones débiles). Montonen y Olive se dieron cuenta de que en este modelo la masa M de cualquier partícula con cargas eléctrica y magnética q y m respectivamente estaba dada por la siguiente relación:

$$M = \langle \phi \rangle \sqrt{q^2 + m^2} \quad (3.1)$$

donde $\langle \phi \rangle$ es una constante que mide el rompimiento de simetría de gauge (valor de expectación del vacío). *Ellos conjeturaron que la teoría poseía una simetría exacta que intercambiaba q por m .*

Una simetría que intercambia las cargas eléctricas y magnéticas debe intercambiar el cuanto fundamental e de carga eléctrica con un múltiplo del cuanto fundamental de carga magnética. Por ejemplo, en el caso de Montonen-Olive la transformación es:

$$e \leftrightarrow \frac{4\pi c}{e} \quad (3.2)$$

(donde c es la velocidad de la luz en el vacío) Y por tanto la constante de acoplamiento va a su recíproco. Tal simetría intercambia los campos eléctricos y magnéticos, de manera que un observador clásico vería la dualidad de las ecuaciones de Maxwell. Finalmente, esta simetría intercambia los cuantos elementales con excitaciones colectivas¹ debido a que para acoplamiento débil, las cargas eléctricas actúan como cuantos fundamentales y las magnéticas como excitaciones colectivas. Esta es la razón por la que, para el estudio de la dualidad, son importantes algunos *objetos topológicos como los solitones*, que precisamente representan excitaciones colectivas. *En general la dualidad se entiende como la existencia de dos descripciones equivalentes de un modelo usando campos diferentes en cada una.* Vamos a basar nuestra siguiente discusión en [23].

3.2 Compactificaciones toroidales y dualidad $R \leftrightarrow 1/R$

La solución más simple de (2.91) es el espaciotiempo plano de 26D con valores constantes para todos los campos. Para este caso tenemos una teoría libre bidimensional, la cual puede cuantizarse fácilmente resolviendo la ecuación de onda $\partial^\mu \partial_\mu X^M = 0$, los campos X^M pueden escribirse como:

$$X^M(\sigma, \tau) = X_R^M(\tau - \sigma) + X_L^M(\tau + \sigma) \quad (3.3)$$

X_R^M y X_L^M representan modos de la cuerda moviéndose a la derecha e izquierda respectivamente, con la siguiente expansión de Fourier (la solución general de la ecuación de Laplace con condiciones de frontera de Neumann):

$$\begin{aligned} X_R^M(\tau - \sigma) &= x_R^M + p_R^M(\tau - \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^M e^{-2in(\tau - \sigma)} \\ X_L^M(\tau + \sigma) &= x_L^M + p_L^M(\tau + \sigma) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^M e^{-2in(\tau + \sigma)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

x_R^M y x_L^M son las coordenadas del centro de masa, $p_R^M = (1/\sqrt{2\alpha'})\alpha_n^M$ y $p_L^M = (1/\sqrt{2\alpha'})\bar{\alpha}_n^M$ son los momentos derechos e izquierdos respectivamente. Como se trata de una teoría libre, la cuantización asigna relaciones de

¹Estas excitaciones son efectos originados por el comportamiento colectivo de los objetos fundamentales del modelo y en la no linealidad de las ecuaciones que lo describen.

conmutación canónicas para los coeficientes de Fourier $\alpha_m^N, \bar{\alpha}_m^N$,² como los osciladores de un oscilador armónico. El hamiltoniano da lugar a la fórmula de masa:

$$M^2 = N_R + N_L - 2. \quad (3.5)$$

Donde $N_{R,L}$ se refiere a los números de ocupación para los modos derechos e izquierdos y la condición para la asignación de niveles requiere $N_L = N_R$ para que exista consistencia. Resalta el hecho de que el estado de "vacío" ($N_L = N_R = 0$) es un taquión y el siguiente estado requiere un oscilador moviéndose a la izquierda como uno moviéndose a la derecha ($N_L = N_R = 1$). Debido a que ambos osciladores llevan un índice que corre en el target space, el estado corresponde a un tensor arbitrario de dos índices $\alpha_m^M, \bar{\alpha}_{-1}^N |0\rangle$ para el que la parte simétrica es la métrica G_{MN} , la parte antisimétrica es B_{MN} y la traza es el dilatón Φ . Podemos ver que no tienen masa y que siempre están presentes.

El estado taquiónico se elimina utilizando supersimetría (Proyección GSO) y esto se verifica en la cuerda heterótica, en la que únicamente los modos derechos tiene un compañero fermiónico y la consistencia exige que vivan en un espacio de 10 dimensiones en lugar del espacio de 26D de la cuerda bosónica. Los modos izquierdos son puramente bosónicos, pero el espacio de 26D que les corresponde tiene la peculiaridad de que las 16 dimensiones extra están compactificadas toroidalmente, y esto da lugar a estados masivos vectoriales extra y corresponden a los campos de gauge del $SO(32)$ ó del $E_8 \otimes E_8$.

Para construir modelos de cuerdas realistas, es decir en menos de 10D, necesitamos llevar a cabo una compactificación de las dimensiones extra de la teoría. La compactificación más simple corresponde a que las dimensiones extra sean círculos y su generalización a más dimensiones.

Veamos el caso del círculo. Esto significa que el espacio de 10D esta representado por el producto de un espaciotiempo plano de 9D y un círculo S^1 . Sabemos que un círculo es simplemente la recta real identificando todos los números que difieran en $2\pi R$, donde R es el radio de un círculo. Así que la diferencia con el espacio plano discutido arriba son las condiciones iniciales. La solución a las ecuaciones de onda es como en (3.4), pero ahora en $p_R = m/2R - nR$ y $p_L = m/2R + nR$, m es un entero, reflejando el hecho de que el momento en la dirección compactificada está cuantizado con el fin de obtener una función de onda univaluada. El entero n , sin embargo, proviene del hecho de que la cuerda puede enrollarse varias veces en la dimensión compactificada y, por tanto, nos referimos a él como el *número de enrollamiento* (winding number). La fórmula de masa es entonces:

$$M^2 = N_R + N_L - 2 + \frac{m^2}{4R^2} + n^2 R^2, \quad N_R - N_L = mn. \quad (3.6)$$

²Estas son $[x^M, p^N] = i\eta^{MN}$; $[\alpha_n^M, \alpha_m^M] = n\delta_{n+m,0}$; $[\bar{\alpha}_n^M, \bar{\alpha}_m^M] = n\delta_{n+m,0}$

Podemos resaltar varias características especiales de esta fórmula. En primer lugar, para $n = 0$ y variando m , obtenemos una torre infinita de estados masivos con masas $\sim 1/R$; estos son los 'estados de momento' estándar o de las compactificaciones de Kaluza-Klein en teoría de campo. En particular los estados sin masa con $n = m = 0$ y un oscilador en la dirección compactificada son campos vectoriales en las dimensiones extra dando lugar a una simetría de gauge Kaluza-Klein $U(1)_L \otimes U(1)_R$. Los estados con $n \neq 0$ son los estados de enrollamiento y provienen exclusivamente de propiedades de la cuerda; representan estados de la cuerda enrollándose en el círculo, tienen una masa $\sim R$. En segundo lugar, existen valores especiales de m y n que pueden dar lugar a estados masivos extra. En particular para $m = n = \pm 1$ podemos ver que cuando el radio vale $R^2 = 1/2$ en unidades de α' , existen estados sin masa con un sólo oscilador $N_R = 1, N_L = 0$ correspondiente a los vectores no masivos que en este caso generan $SU(2)_R \times SU(2)_L$. Esto significa que el punto especial en el espacio de los 'moduli' del círculo $R^2 = 1/2$ es un punto con una simetría acrecentada. La simetría original de Kaluza-Klein $U(1)_R \times U(1)_L$ de la compactificación en un círculo pasa a una mayor simetría $SU(2)_R \times SU(2)_L$. Este es un efecto muy típico de las cuerdas porque depende en forma crucial de la existencia de los modos de enrollamiento ($n \neq 0$). La tercera característica especial de esta compactificación es que el espectro es invariante bajo las siguientes transformaciones de 'dualidad' [16]:

$$R \leftrightarrow \frac{1}{2R} \quad m \leftrightarrow n. \quad (3.7)$$

3.3 Efectos típicos de una transformación de dualidad T

Esto también es una propiedad típica de las cuerdas. Intercambia pequeñas distancias con grandes distancias, y al mismo tiempo intercambia estados de momento (Kaluza-Klein) con estados de enrollamiento. Se puede demostrar que esta simetría se mantiene no sólo para el espectro sino también para las interacciones y por lo tanto es una simetría exacta de la teoría perturbativa de cuerdas.

Extendamos la compactificación a dos dimensiones, es decir, que el espaciotiempo de 26D es el producto de un espaciotiempo plano de 24D y la generalización bidimensional de un círculo, el toro T^2 . De nuevo la única diferencia con el espacio plano son las condiciones de frontera. Las dos dimensiones compactificadas se identifican con vectores en una red bidimensional, definiendo el toro T^2 . A partir de las tres componentes independientes de la métrica compactificada G_{11}, G_{22}, G_{12} y la única componente

de B_{MN} que es B_{12} , podemos construir dos campos 'moduli' complejos:

$$U \equiv \frac{G_{12}}{G_{22}} + i \frac{\sqrt{G}}{G_{22}} \quad T \equiv B_{12} + i \sqrt{G}$$

U es el parámetro modular estándar de cualquier toro geométrico bidimensional y usualmente se identifica como el módulo de 'estructura compleja'. T representa el módulo de 'estructura de Kähler' (ya que T^2 es un espacio complejo de Kähler) y su parte imaginaria mide el tamaño total del toro, debido a que \sqrt{G} es el determinante de la métrica bidimensional. Juega el mismo papel que R juega para el círculo unidimensional.

Consideremos en detalle de donde proviene T . El término en la acción que involucra a B_{12} es:

$$\frac{1}{4\pi} B_{12} \int d^2z (\partial X^1 \bar{\partial} X^2 - \bar{\partial} X^1 \partial X^2)$$

Esta integral es un derivada total, $\partial(X^1 \bar{\partial} X^2) - \bar{\partial}(X^1 \partial X^2)$, o término topológico, lo que quiere decir que no contribuye a las ecuaciones de movimiento. Esto parece implicar que la teoría es independiente de B_{12} , pero se debe tener cuidado porque $X^{1,2}$ no son necesariamente periódicas en la hoja de mundo. Consideremos una hoja de mundo toroidal enrollada una vez sobre el espaciotiempo toroidal, $X^1 = \text{Re}(\bar{z})$, $X^2 = \text{Im}(z)/\text{Im}(U)$. El término que contiene al tensor antisimétrico se convierte en $i\pi B_{12}$, de forma que el peso de la integral de camino es $e^{i\pi B_{12}}$, el cual es invariante bajo el *corrimiento discreto*,

$$B_{12} \rightarrow B_{12} + \text{entero}$$

En términos de T y U podemos escribir los momentos izquierdos y derechos como:

$$\begin{aligned} p_L^2 &= \frac{1}{2U_2 T_2} \|(n_1 - n_2 U) - T(m_2 + m_1 U)\|^2 \\ p_R^2 &= \frac{1}{2U_2 T_2} \|(n_1 - n_2 U) - T^*(m_2 + m_1 U)\|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

La fórmula de masa, dependiendo de $p_L^2 + p_R^2$, otra vez muestra que hay puntos de simetría ampliada para valores especiales de T y U . También muestra las siguientes simetrías:

$$U \rightarrow \frac{aU + b}{cU + d} \quad T \rightarrow \frac{aT + b}{cT + d} \quad T \leftrightarrow U. \quad (3.10)$$

Donde a, b, c, d son enteros que satisfacen $ad - bc = 1$. La primera transformación es la simetría 'modular' estándar $SL(2, \mathbb{Z})_U$ del toro bidimensional y es independiente de la teoría de cuerdas; es decir, es puramente geométrica. La segunda transformación es típica de las cuerdas: $SL(2, \mathbb{Z})_T$,

conocida como dualidad- T^3 . Como ya sabemos, esta es una simetría siempre y cuando también transformemos el momento m_1, m_2 con arrollamiento n_1, n_2 . La tercera simetría intercambia la estructura compleja U con la estructura de Kähler T y se designa como 'Simetría de Espejo' (mirror symmetry). Si U y T parametrizan un plano complejo $SL(2, \mathbb{R})/O(2)$, la simetría de dualidad implica que ellos pueden vivir únicamente en el dominio fundamental definido por todos los puntos del producto de los espacios complejos $SL(2, \mathbb{R})/O(2) \otimes SL(2, \mathbb{R})/O(2) \cong O(2, 2, \mathbb{R})/(O(2) \times O(2))$ identificados bajo el grupo de dualidad $SL(2, \mathbb{Z})_U \times SL(2, \mathbb{Z})_T = O(2, 2, \mathbb{Z})$. Esta es la situación que se generaliza a más dimensiones. En general, la compactificación en un toro d -dimensional tiene el espacio moduli $\mathcal{M} = O(d, d, \mathbb{R})/O(d) \times O(d)$ con puntos identificados bajo el grupo de dualidad $O(d, d, \mathbb{Z})$. Para la cuerda heterótica con 16 coordenadas extra moviéndose a la izquierda $\mathcal{M} = O(d+16, d, \mathbb{R})/O(d+16) \times O(d)$ con una modificación similar al grupo de dualidad. Los momentos izquierdos y derechos p_L, p_R viven en una red autodial uniforme de signatura $(22, 6)$, la cual es usualmente llamada *Red de Narain* $\Lambda_{22,6}$. Esto generaliza la red $\Lambda_{2,2}$ definida por los enteros $m_1, m_2; n_1, n_2$ de (3.3).

Se puede verificar fácilmente en este caso que la dimensión de \mathcal{M} es $d(d+16)$, que corresponde al número de componentes independientes de G_{mn}, B_{mn}, A'_m con $m, n = 1 \dots d; I = 1, \dots, 16$. Para $d = 6$ tenemos un modelo de cuerdas de 4D con un espacio moduli de dimensión 132. A esto debemos agregar el campo del dilatón ϕ el cual, junto con las componentes del espaciotiempo del tensor antisimétrico $B_{\mu\nu}$, pueden combinarse en un nuevo parámetro modular:

$$S \equiv a + i e^\phi. \quad (3.11)$$

El campo acción a se define como $\nabla_\mu a \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\nu B^{\rho\sigma}$. S parametriza de nuevo el coset $SL(2, \mathbb{R})/O(2)$. Es natural pensar que el campo S posee también la simetría de dualidad del tipo $SL(2, \mathbb{Z})$; por analogía al caso de T y U .

3.4 Dualidad-T abeliana

Las transformaciones discretas que actúan sobre el espacio moduli de las teorías son usualmente conocidas como transformaciones de dualidad. La dualidad que acabamos de estudiar en la sección anterior es conocida como dualidad- T o *Dualidad del Espacio Target* (*Target Space duality*), debido a que es una dualidad entre diferentes datos geométricos en el espacio Target. Así como la dualidad eléctrica-magnética intercambia modos eléctricos con modos magnéticos, la dualidad- T también intercambia modos. Para la

³Aunque la designación "T" pudiera asociarse con el toro, el origen de esta etiqueta para esta transformación no tiene nada que ver con el toro.

transformación particular que acabamos de estudiar el intercambio se realiza entre los modos de enrollamiento, con números cuánticos m , y modos de momento Kaluza-Klein, con números cuánticos n . De hecho los modos de enrollamiento pueden ser considerados modos magnéticos desde el punto de vista de la hoja de mundo, debido a que son sectores topológicos no triviales de instantones en la hoja de mundo.

Seguindo ciertos progresos en supergravedad, la dualidad ' $r \rightarrow 1/r$ ' encontrada en compactificaciones toroidales que se describió en la sección anterior fué generalizada [17] para cualquier solución a las ecuaciones de fondo de cuerdas para la cual la métrica en la acción de la hoja de mundo tuviera al menos una isometría. En otras palabras, se probó que *La dualidad T, o dualidad del espacio 'Target', es una propiedad general de los vacíos de cuerdas siempre y cuando exista al menos una isometría*. La acción de la hoja de mundo para la cuerda bosónica en alguna solución de fondo con N isometrías que conmutan puede escribirse de la siguiente forma:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2z \left(Q_{\mu\nu}(X_\alpha) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + Q_{\mu n}(X_\alpha) \partial X^\mu \bar{\partial} X^n + Q_{n\mu}(X_\alpha) \partial X^\mu \bar{\partial} X^n + Q_{mn}(X_\alpha) \partial X^m \bar{\partial} X^n + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \phi(X_\alpha) \right) \quad (3.12)$$

Donde $Q_{MN} \equiv G_{MN} + B_{MN}$ y los índices latinos en minúscula m, n etiquetan las direcciones de la isometría. Debido a que la acción (3.12) depende de las X^m sólo a través de sus derivadas, podemos introducir a primer orden las variables A^m y así agregamos un término extra a la acción $\Lambda_m(\partial \bar{A}^m - \bar{\partial} A^m)$ lo cual impone la restricción $A^m = \partial X^m$.

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2z \left(Q_{\mu\nu}(X_\alpha) \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + Q_{\mu n}(X_\alpha) \partial X^\mu \bar{\partial} X^n + Q_{n\mu}(X_\alpha) \partial X^\mu \bar{\partial} X^n + Q_{mn}(X_\alpha) \partial X^m \bar{\partial} X^n + \Lambda_m(\partial \bar{A}^m - \bar{\partial} A^m) + \frac{\alpha'}{2} R^{(2)} \Phi(X_\alpha) \right) \quad (3.13)$$

Integrando sobre los multiplicadores de Lagrange Λ_m llegamos a la acción original (3.12). Por otro lado, llevando a cabo la integración parcial y resolviendo para A^m y \bar{A}^m , encontramos la acción dual S' que tiene la misma forma que S pero con el fondo dual dado por [17, 18]

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{mn} &= (Q^{-1})_{mn} \\ \tilde{Q}_{\mu\nu} &= Q_{\mu\nu} - Q_{\mu m} (Q^{-1})^{mn} Q_{n\nu} \\ \tilde{Q}_{n\mu} &= (Q^{-1})_n^m Q_{\mu m} \\ \tilde{Q}_{\mu n} &= -Q_{\mu m} (Q^{-1})_n^m. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El dilatón debe transformarse de acuerdo a la siguiente relación con el fin de mantener la invariancia conforme [17, ?] $\phi' = \phi - \log \det G_{mn}$. Es un

efecto a primer orden. Por tanto, si Q y ϕ satisfacen las ecuaciones (2.91), \bar{Q} y ϕ' también lo harán. Estas ecuaciones se reducen a las transformaciones de dualidad para compactificaciones toroidales usuales [21] cuando $Q_{m\mu} = Q_{\mu m} = 0$ y pueden mapear un espacio sin torsión ($Q_{m\mu} = Q_{\mu m}$) a uno que si la tenga ($Q'_{m\mu} = -Q'_{\mu m}$). Para el caso de una sola isometría ($m = n = 0$) las ecuaciones (3.14) proporcionan las transformaciones de dualidad explícitas encontradas por Buscher en [17], y que son conocidas precisamente como las *Transformaciones de Buscher* que se detallaran en la siguiente sección, las cuales constituyen una especie de receta general de dualidad- T abeliana en cuerdas para obtener la solución dual a una ya conocida, dada por lo menos una isometría. El formalismo de primer orden no se aplica para cada dirección de la isometría debido a que no tenemos que llevar a cabo una transformación de dualidad para todas ellas. Podemos integrar sobre un subconjunto de multiplicadores de Lagrange Λ_m y, para las restantes direcciones de la isometría integramos los correspondientes campos de gauge A^m . Los índices m, n en las ecuaciones (3.14) corren sobre las variables con isometrías que han sido dualizadas. El grupo completo de dualidad incluye éstas transformaciones así como corrimientos en el campo tensorial antisimétrico $B \rightarrow B + \text{entero}$ y es equivalente a $SO(N, N, \mathbf{Z})$ [22].

Veamos como se aplica este procedimiento en el caso sencillo en que el unico elemento de la acción es:

$$S = \int d^2z Q_{mn} \partial X^m \bar{\partial} X^n \quad (3.15)$$

donde $Q_{mn} = G_{mn} + B_{mn}$ son la métrica y el tensor antisimétrico de la target space theory, y se interpretan como los acoplamientos en la teoría de 2D. X^m son los campos escalares de la teoría 2D que corresponden a las coordenadas en el target space.

Debido a que la acción depende de las variables X^m solo a través de sus derivadas (existe una simetría abeliana global $X^m \rightarrow X^m + \text{constante}$), realicé una integración parcial sobre los términos con multiplicadores de Lagrange λ_m y obtengo la variación con respecto a las variables A^m y \bar{A}^m ,

$$S = \int d^2z (Q_{mn} \partial X^m \bar{\partial} \bar{X}^n - \lambda_m (\partial \bar{A}^m - \bar{\partial} A^m)) \quad (3.16)$$

Esto conduce a la acción dual \bar{S} ,

$$\bar{S} = \int d^2z \bar{Q}_{mn} \partial X^m \bar{\partial} X^n \quad (3.17)$$

Sustituyendo $A^m = \partial X^m$ y $\bar{A}^m = \bar{\partial} X^m$ y con la integración parcial obtengo,

$$S = \int d^2z Q_{mn} A^m \bar{A}^n - (A^m \bar{\partial} \lambda_m - \bar{A}^m \partial \lambda_m) \quad (3.18)$$

La variación de la acción con respecto a A^m y \bar{A}^m es:

$$\frac{\delta S}{\delta A^m} = Q_{mn} \bar{A}^n - \bar{\partial} \lambda_m = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \bar{A}^m} = Q_{mn} A^m + \partial \lambda_m = 0 \quad (3.20)$$

Entonces resolviendo para A^m y \bar{A}^m tenemos:

$$A_n = -Q_{mn}^{-1} \partial \lambda^m \quad (3.21)$$

$$\bar{A}_n = Q_{mn}^{-1} \bar{\partial} \lambda^m \quad (3.22)$$

Sustituyendo estos resultados en la acción original tenemos...

$$\bar{S} = \int d^2 z [Q_{mn} Q_{ml}^{-1} \partial \lambda^l Q_{kn}^{-1} \bar{\partial} \lambda^k - (Q_{mn}^{-1} \partial \lambda^m \bar{\partial} \lambda^n - Q_{mn}^{-1} \bar{\partial} \lambda^m \partial \lambda^n)] \quad (3.23)$$

$$\bar{S} = \int d^2 z Q_{mn}^{-1} \partial \lambda^m \bar{\partial} \lambda^n \quad (3.24)$$

Por ejemplo, para dos isometrías (dimensiones 0 y 1) Q_{mn} sería de la siguiente forma (Expresando a G_{mn} y B_{mn} por componentes):

$$Q_{mn} = \begin{pmatrix} G_{00} & G_{01} + B_{01} \\ G_{01} - B_{01} & G_{11} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

Y la matriz dual está dada por la inversa:

$$Q_{mn}^{-1} = \frac{1}{\det Q_{mn}} \begin{pmatrix} G_{11} & -(G_{01} + B_{01}) \\ -(G_{01} - B_{01}) & G_{00} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Por tanto, $\bar{Q}_{mn} = Q_{mn}^{-1}$:

$$\det Q = G_{00} G_{11} - G_{01}^2 + B_{01}^2 \quad (3.27)$$

Existe una interpretación equivalente del proceso de dualización que acabamos de describir dada en [19]. En la acción original se fija un gauge reemplazando ∂X^m con $DX^m = \partial X^m + A^m$ y el término $\int d^2 z \Lambda_m (\partial \bar{A}^m - \bar{\partial} A^m)$ se agrega a la acción. Este término extra impone que la intensidad F de los campos de gauge sea nula después de la integración sobre los multiplicadores de Lagrange Λ_m . Esto implica que el campo de gauge debe ser de gauge pura, $A^m = \partial \bar{X}^m$. La imposición de un gauge puede hacerse ya sea eligiendo campos de gauge que se nulifiquen o tomando $X^m = 0$ (gauge unitario). En ambos casos esto reproduce la acción original. La teoría dual se obtiene integrando los campos de gauge, i.e. fijando el gauge. Este procedimiento es el utilizado para generalizar las transformaciones de dualidad al caso de isometrías no abelianas [20].

La existencia de esta dualidad implica una simetría global no compacta a nivel clásico que *intercambia las ecuaciones de movimiento de la teoría original con las identidades de Bianchi de la teoría dual*.

Esta característica del proceso de dualidad descrito se aplica más también al electromagnetismo [24], el cual requiere la generalización a tensores antisimétricos arbitrarios que se detalla en la siguiente sección.

Para el caso de modelos- σ bidimensionales en el contexto de la teoría de cuerdas, se encontró [?] que esta simetría es un $SO(N, N)$. Una referencia excelente para ir más allá en la relación entre simetrías globales y la dualidad- T se constituye en [25].

Ahora aplicaremos lo que hemos aprendido sobre la dualidad- T abeliana a un tensor antisimétrico cualquiera de rango $j-1$, T_{j-1} D -dimensional [25], cuya acción se expresa como:

$$S = \int d^D x \left(\frac{1}{g^2} (\partial_{M_1} T_{M_2 \dots M_j})^2 + \dots \right) \quad (3.28)$$

Existe invariancia bajo una forma general de transformación del campo de gauge A , la cual incluye a la simetría local definida por $d\Omega$ y a la global dada por el corrimiento del campo por cualquier forma cerrada K , lo que se expresa por $\delta T_{j-1} = d\Omega_{j-1} + K_j$ con K_j una forma armónica arbitraria. Esta es la simetría global que necesitamos para la dualización. Aprendimos que para dualizar necesitamos una simetría global, por lo que usaremos la definida por el shift de K . Ahora, fijamos el gauge usando al tensor antisimétrico de rango j , A_j (que resulta ser el campo de gauge). Se construye una acción a primer orden sustituyendo dT en la acción por A_j imponiendo la restricción $dA_j = 0$ al agregar un multiplicador de Lagrange Λ_{D-j-1} .

$$S_G = \int d^D x \left(\frac{1}{g^2} (A_j)^2 + \Lambda_{D-j-1} \cdot (dA_j) \right). \quad (3.29)$$

Tomando el caso mas sencillo definimos

$$\Lambda_{D-j-1} \cdot (dA_j) = \epsilon^{M_1 \dots M_D} \partial_{M_2} A_{M_2 \dots \Lambda_{j+1}} \Lambda_{M_{j+2} \dots M_D} \quad (3.30)$$

Si integramos Λ_{D-j-1} obtendríamos la acción de la que partimos, pero si integramos los A_j llegamos a la acción dual

$$S = \int d^D x \left(g^2 (\partial_{M_1} \Lambda_{M_2 \dots \Lambda_{D-j}})^2 + \dots \right). \quad (3.31)$$

Obsérvese que la constante de acoplamiento pasa de g a $1/g$. De ésta forma podemos expresar la transformación dual $R \leftrightarrow 1/R$ que estudiamos en las secciones anteriores a partir de la compactificación de dimensiones extras en cuerdas para múltiples dimensiones. Otro punto importante reside en el hecho de que ahora consideramos teorías de campos tensoriales antisimétricos con un grupo de simetría de gauge $U(1)$ compacto, en lugar de la recta real

(es decir, consideramos coordenadas periódicas en donde se da la dualización) [26]. De modo similar al caso en 2D, los campos podrían redefinirse para absorber la constante de acoplamiento g , involucrandose entonces en la periodicidad de los mismos. En tal caso las dos variables duales están relacionadas por una dualidad de Poincaré: $d\Lambda = *dB$, y la dualidad intercambia ecuaciones de campo con identidades de Bianchi. Por ejemplo, para la Electrodinámica Cuántica (QED) en 4D, esto implica que la dualidad intercambia campos eléctricos y magnéticos, la cual es la dualidad original de las Ecuaciones de Maxwell en el vacío que mencionamos anteriormente. De manera similar al caso bidimensional, podemos considerar a A_j como el campo de gauge de la simetría global y al multiplicador de Lagrange como el término que impone la condición de que la intensidad del campo sea nula. Podríamos ser más rigurosos e introducir acoplamientos a corrientes externas en la acción de forma tal que la integral de camino sea una función de tal corriente [25]. La dualidad entonces se mantiene para cualquier función de correlación. Otra vez, como en el caso de dos dimensiones, donde la transformación del dilatón se impuso, si consideramos espaciotiempos topológicamente no triviales, aparecería un término extra proporcional al número de Euler de la variedad, generalizando la transformación del dilatón del caso bidimensional.

Así como un campo de gauge se acopla naturalmente a una partícula puntual cargada mediante el término $\int A_\mu dx^\mu$, el campo B_{h-1} se acopla naturalmente a un objeto de dimensión $h-2$, es decir, una p -brana ($p = h-2$) que representa el análogo de la carga eléctrica en QED.

El campo tensorial antisimétrico B_{h-1} representa la generalización del acoplamiento de gauge A_μ para objetos multidimensionales (cuerdas, branas, etc) cargados. En mi opinión esta es una manera muy intuitiva de comprender el origen y el papel que juega el tensor antisimétrico B_{mn} de Kalb-Ramond, que parece tener un origen un poco oscuro a primera vista.

El caso en el que el tensor antisimétrico de la acción (3.28) tiene un solo índice corresponde al electromagnetismo. Se observan las características principales de esta proceso, que podemos resumir en lo siguiente:

- La constante de acoplamiento (o bien la escala geométrica de la teoría) va a su recíproco
- El campo fundamental se intercambia por el multiplicador de Lagrange
- Las ecuaciones de movimiento y las identidades de Bianchi se intercambian (intercambio de modos fundamentales y modos colectivos, e.g. cargas eléctricas y monopolos magnéticos)

Para el caso de objetos multidimensionales observamos que el campo dual $\tilde{B}_{d-h} \equiv \Lambda_{D-h-1}$ se acopla a una brana magnética de dimensión $D-h-2$

análoga a un monopolo magnético. La dualidad entre cargas eléctricas y monopolos magnéticos se generaliza a una dualidad entre $(h - 2)$ -branas eléctricas y $(D - h - 2)$ -branas magnéticas [25].

3.5 Transformaciones de Buscher

Como vimos, el proceso para encontrar la solución de "fondo" dual a una solución de fondo dada ésta dado por las ecuaciones (3.14). En nuestro caso usaremos sólo una isometría global en la dirección X^0 , lo que implica que $m = n = 0$ en tales ecuaciones. Así obtendremos las transformaciones explícitas encontradas por Buscher en [17], y podremos usarlas para el siguiente capítulo. De (3.14) tenemos, como caso particular para una isometría:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{00} &= \frac{1}{G_{00}} & (3.32) \\
 \tilde{G}_{0i} &= -\frac{B_{0i}}{G_{00}} \\
 \tilde{G}_{ij} &= G_{ij} - \frac{G_{0i}G_{0j} - B_{0i}B_{0j}}{G_{00}} \\
 \tilde{B}_{0i} &= -\frac{G_{0i}}{G_{00}} \\
 \tilde{B}_{ij} &= B_{ij} - \frac{G_{0i}B_{0j} - G_{0j}B_{0i}}{G_{00}}
 \end{aligned}$$

Y por supuesto si queremos que la teoría dual sea invariante conforme el dilatón debe transformarse como $\tilde{\phi} = \phi - \log(G_{00})$.

Capítulo 4

Dualidad-T y soluciones efectivas en cuerdas

4.1 Soluciones de baja energía de cuerdas

En la introducción hablamos de la existencia de cinco teorías de cuerdas consistentes en 10D. Nos interesa construir modelos de cuerdas realistas y ésta tarea es equivalente a buscar la forma explícita de las soluciones de las ecuaciones de los campos de Fondo correspondientes a los diferentes modos no masivos de la cuerda. Estas soluciones reciben el nombre de *vacíos* de la teoría.

En teoría de cuerdas, la simetría de dualidad fue originalmente descubierta en compactificaciones toroidales y se encontró que intercambiaba estados de 'enrollamiento' por estados de momento (Kaluza-Klein) en la teoría compactificada [28]. Por ello me interesa presentar una descripción de estas compactificaciones para ilustrar el origen de la dualidad-T.

Una compactificación toroidal es un caso particular de modelo- σ con isometrías y por tanto contiene esta simetría en forma manifiesta. El intercambio de estados de enrollamiento y estados de momento manifiesta ésta simetría de dualidad en esta solución de fondo particular pero no es necesariamente una característica genérica de la dualidad, así que podemos esperar dualidad en soluciones de fondo en donde modos de enrollamiento no estén presentes. Un ejemplo claro de esto es el Agujero Negro en 2D que se describirá más adelante [29].

Soluciones a éstas ecuaciones son lo que llamamos *vacíos de cuerdas* o soluciones de fondo, y por tanto podemos decir que existe una correspondencia entre los vacíos de cuerdas y ciertas CFTs en dos dimensiones. El principal objetivo de esta tesis es encontrar soluciones duales de fondo que satisfagan precisamente éstas ecuaciones.

Un ejemplo ilustrativo de los efectos de las transformaciones de dualidad de Buscher es el Toro. Consideremos un espaciotiempo con la geometría del toro, para el que la métrica es plana y los demás campos de fondo se toman

triviales. La isometría se toma en la coordenada de las traslaciones a lo largo de la dirección compacta del toro, que llamamos s . Entonces las transformaciones nos dicen que

$$G_{ss} \rightarrow \frac{1}{G_{ss}}, \quad \phi_0 \rightarrow \phi_0 + \log |G_{ss}|. \quad (4.1)$$

Tanto G_{ss} como ϕ_0 son constantes. La configuración dual también es un toro, solo que debido a las ecuaciones (4.1), si el radio de la dirección s original es R , el radio de la dirección dual es entonces α^2/R . El espectro completo de las fluctuaciones de la cuerda es conocido, y la correspondencia de estados en la teoría dual puede conocerse explícitamente. Los estados se etiquetan por los enteros n y m (además de otros números cuánticos), donde m representa el momento cuantizado en la dirección s y n nos dice el número de veces que la cuerda se enrolla en ésta dirección. Como ya sabemos, la dualidad intercambia m y n , y deja los demás números cuánticos fijos. El importante papel que juegan los modos de enrollamiento, para los que $n \neq 0$ enfatiza la naturaleza 'cuerdista' intrínseca de la simetría de dualidad.

Cuando la dirección asociada con la isometría es compacta (periódica), tal como en este caso del toro, los modelos- σ y sus configuraciones duales son completamente equivalentes, y por tanto describen *exactamente* la misma física [22]. Entonces las transformaciones de Buscher pueden considerarse como simetrías cuánticas completas de la teoría de cuerdas.

En el caso no compacto no necesariamente existe tal equivalencia [27].

4.2 Agujero negro en 2D

Gran parte del progreso llevado a cabo en teoría de cuerdas de fines de los 80's y principios de los 90's se basó en la observación de que teorías de cuerdas consistentes pueden construirse en dimensiones mucho menores que la dimensión crítica. Esto permitió el estudio de modelos de 'juguete' de cuerdas, por ejemplo, en una dimensión espacial, y para los que la aplicación de modelos matriciales ha resultado muy exitosa [29]. Estas teorías de cuerdas 'no críticas' son usualmente formuladas en una hoja de mundo como una teoría de campo conforme $c = 1$ acoplada a gravedad en 2D. Sin embargo, su interpretación espaciotemporal es más clara si uno piensa en estos modelos como teorías de cuerdas críticas en un fondo o 'background' no trivial de $1 + 1$ dimensiones.

En [30, 32] se encontró una solución de fondo que exhibe las características de la geometría de un agujero negro en 2D. En particular (refiriéndose al diagrama de Kruskal de este espacio tiempo [29]) posee un horizonte en $uv = 0$ y una singularidad en la curvatura en $uv = 1$ en forma

similar a la solución del agujero negro de Schwarzschild. Esta solución está dada por ($x^i = (u, v)$):

$$ds^2 = \frac{dudv}{(1-uv)} \quad \phi = \log 1 - uv, \quad (4.2)$$

El hecho interesante es que representa una teoría de campo conforme exacta que corresponde a un modelo de Wess-Zumino-Witten (WZW)¹. Este es un modelo sobre una variedad de grupo G a nivel k . La acción de este modelo es

$$S[g] = \frac{k}{4\pi} I[g] + \frac{k}{8\pi} \Gamma[g], \quad (4.3)$$

en donde

$$I[g] = \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{h} h^{ij} Tr(e_i e_j), \quad \Gamma[g] = \int_{B, \partial B = \Sigma} d^3\sigma \epsilon^{ijk} Tr(e_i e_j e_k), \quad (4.4)$$

Σ es la hoja de mundo con coordenadas σ_i y métrica h_{ij} , y $e_i \equiv g^{-1} \partial_i g$, donde el campo g es un mapeo de la hoja de mundo a la variedad de grupo G ; puede considerarse una matriz en la representación fundamental de G . La traza en (4.4) es una forma invariante del álgebra de Lie de G , y el término de Wess-Zumino, $\Gamma[g]$, produce un fondo antisimétrico en la hoja de mundo Σ , después de integrar sobre la tercera coordenada de B . Explícitamente, en la representación matricial T para el álgebra de Lie,

$$[T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c, \quad Tr(T_a T_b) = \eta_{ab}, \quad a, b, c = 1, \dots, \dim G, \quad (4.5)$$

y parametrizando $g(X) \in G$ en un conjunto de coordenadas $X^A(\sigma_i)$, $A = 1, \dots, \dim G$ (es decir, $X \in$ álgebra, $g \in$ grupo y $g \sim e^X$), tenemos

$$S[X] = \frac{1}{4\pi} \int d^2 [\sqrt{h} h^{ij} G_{AB}(X) \partial_i X^B \partial_j X^B + \epsilon^{ij} B_{AB}(X) \partial_i X^B \partial_j X^B], \quad (4.6)$$

donde $G_{AB}(X)$, $B_{AB}(X)$ están dadas por los invariantes izquierdos vielbeins, $e_A(X)$,

$$\begin{aligned} e_A &\equiv g^{-1} \partial_A g = e_{aA} T_a & \partial_A e_B^c - \partial_B e_A^c &= e_A^a e_B^b f_{ab}^c \\ & & G_{AB} &= k \eta_{ab} e_A^a e_B^b \\ k Tr(e_A [e_B, e_C]) &= \partial_A B_{BC} + \partial_B B_{CA} + \partial_C B_{AB}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

El modelo WZW sirve como punto de partida para generar otras teorías de campo conformes. Desde el punto de vista algebraico, esto se hace con un modelo *coset*. Dado un modelo WZW con carga central c_G , un subgrupo

¹También conocido como modelo WZNW, donde la N viene de Novikov

$H_{k'}$ (de nivel k' apropiado y carga central c_H) puede usarse para generar una nueva álgebra de Virasoro de carga central $c_{G/H} = c_G - c_H$.

Una formulación lagrangiana para este método se encontró haciendo local la simetría global (proceso conocido como "gauging", o hacer una simetría de gauge) obteniendo un subgrupo libre de anomalías² $H \subset G$. El lagrangiano no contiene término cinético para los campos de gauge. En la ausencia de estos términos, la teoría de gauge es también conforme. La invariancia modular del modelo G garantiza invariancia modular para el espacio coset. El lagrangiano del modelo coset reproduce la carga central $c_{G/H}$ y el espectro apropiado. El WZW "gauged" (es decir, que la simetría paso de global a local) tiene como campos básicos los correspondientes a la materia, y que aparecen en el modelo de G , y los campos de gauge. Uno puede reescribir el modelo "gauged" en términos de variables del modelo- σ no lineal. Esto se hace integrando sobre los campos de gauge. Por último, si la formulación es a un lazo, se necesita agregar a los campos de fondo el dilatón.

Estos modelos representan una técnica para generar soluciones de fondo D -dimensionales curvas, independientes de d -coordenadas, a partir de espacios coset G/H y sus duales.

La teoría de campo conforme exacta que describe un agujero negro en 2D es un modelo WZW "gauged" con el coset $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ [30]. Para obtener una signatura euclidiana, uno puede llevar a cabo el proceso de "gauging" para el subgrupo $U(1)$ generado infinitesimalmente por:

$$\delta g = \gamma(Jg + gJ) \quad (4.8)$$

donde γ es un pequeño parámetro, $g \in SL(2, \mathbb{R})$ y $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Para hacer gauge esta simetría, introducimos el campo de gauge abeliano A con,

$$\delta A = -\partial_i \gamma \quad (4.9)$$

La generalización invariante de gauge de la acción WZW [30] en coordenadas locales complejas z, \bar{z} es

$$L'(g, A) = I(g) + \frac{k}{2\pi} \int (d^2z (\bar{A} \text{Tr} Jg^{-1} \partial g + A \text{Tr} J \bar{\partial} g g^{-1} + A \bar{A} (-2 + \text{Tr} Jg Jg^{-1}))), \quad (4.10)$$

donde $I(g)$ es la acción no gauge del modelo $SL(2, \mathbb{R})$ WZW [31]. Es conveniente fijar la gauge "gauging away" un componente de g (de manera similar a una gauge unitaria). La invariancia de gauge puede fijarse en forma precisa eligiendo el conjunto

$$g = \cosh \rho + \text{sen} h \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

²Una anomalía resulta cuando tenemos una simetría a nivel clásico y al proceder a la cuantización de la teoría la simetría no se mantiene.

Como el lagrangiano es cuadrático en A , la parte cuadrática es invertible y no derivable, por lo que podemos integrar A . Una corrección finita proveniente de la medida de integración sobre A da lugar al campo del dilatón en el espacio target. Finalmente, la representación invariante conforme de la acción clásica para ρ y θ es

$$S(\rho, \theta) = \frac{k}{4\pi} \int d^2x \sqrt{h} h^{ij} (\partial_i \rho \partial_j \rho + \tanh^2 \rho \partial_i \theta \partial_j \theta) - \frac{1}{8\pi} \int d^2z \sqrt{h} \Phi(\rho, \theta) R^{(2)}. \quad (4.12)$$

donde $R^{(2)}$ es la curvatura de la métrica en la hoja de mundo h_{ij} y Φ es el campo del dilatón. Hasta correcciones del orden de $1/k$, el campo del dilatón está determinado por la ecuación de fondo

$$R_{ab} = D_a D_b \Phi \quad (4.13)$$

Donde R_{ab} es el tensor de Ricci del espacio target. Con esto se obtiene

$$\Phi = \ln(\cosh^2 \rho) + a, \quad (4.14)$$

donde a es una constante. La carga central del modelo $SL(2, \mathbb{R})/U(1)$ es

$$c = 2 + \frac{6}{k-2} = 2 + 12 + \epsilon^2 + o(\epsilon^3) \quad (4.15)$$

donde

$$\epsilon = \sqrt{2/k} \quad (4.16)$$

También es conveniente absorber el factor total $k/2$ en la coordenada ρ . Definiendo $r = \rho/\epsilon$, uno tiene

$$S(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{h} h^{ij} (\partial_i r \partial_j r + \frac{\tanh^2 \epsilon r}{\epsilon^2} \partial_i \theta \partial_j \theta) - \frac{1}{8\pi} \int d^2z \sqrt{h} \Phi(r, \theta) R^{(2)} \quad (4.17)$$

donde

$$\Phi = \ln(\cosh^2 \epsilon r) + a. \quad (4.18)$$

Esta acción describe un modelo sigma con curvatura escalar

$$R(r) = \frac{4\epsilon^2}{\cosh^2 \epsilon r} \quad (4.19)$$

y una métrica descrita por el elemento de línea

$$ds^2 = dr^2 + \frac{\tanh^2 \epsilon r}{\epsilon^2} d\theta^2 \quad (4.20)$$

En [29] se propone una solución independiente de ϵ que tiene la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{2}(k-2)[dr^2 + \beta^2(r)d\theta^2], \quad (4.21)$$

y el dilatón tiene la forma

$$\Phi = \log(\sinh r / \beta) \quad (4.22)$$

donde $\beta(r)$ esta dada por

$$\beta(r) = 2(\coth^2 \frac{r}{2} - \frac{2}{k})^{-1/2} \quad (4.23)$$

La solución que nos interesa es aquella en el límite para k grande, es decir

$$\beta(r) = 2(\coth^{-1} \frac{r}{2}) \quad (4.24)$$

De donde obtenemos el elemento de línea para que nos representa un agujero negro Euclidiano

$$ds^2 = dr^2 + \tanh^2 d\theta^2 \quad (4.25)$$

Para obtener un agujero negro Lorentziano (es decir, con signatura $+-$), debemos aplicar una *rotación de Wick*, es decir, definir $\theta = it$, de donde obtenemos

$$ds^2 = dr^2 - \tanh^2 dt^2 \quad (4.26)$$

Este es el agujero negro que pretendemos dualizar. Para ello debemos aplicar el procedimiento descrito en el capítulo anterior, es decir, aplicar las transformaciones de Buscher a esta métrica.

Cuando tenemos la métrica en coordenadas de Kruskal como en (4.2), es difícil apreciar cual es la isometría que usaremos para aplicar la dualización que hemos aprendido. Esta métrica es claramente no diagonal. Este elemento de línea define tres regiones en el diagrama de Kruskal (Fig 3.1). La única isometría abelianan que vemos es la temporal, ya que es una métrica estática. Con el fin de verlo más claro podemos aplicar la parametrización a (4.2) por regiones $uv \leq 0, 0 \leq uv \leq 1$ y $uv \geq 1$:

$$\text{Región } uv \leq 0: u = \sinh r e^t, \quad v = -\sinh r e^{-t}$$

entonces $uv = -\sinh^2 r$ y como $du = \frac{\partial u}{\partial v} dt + \frac{\partial u}{\partial r} dr \dots$

$$du = \sinh e^t dt + \cosh r e^t dr \quad du = e^t (\sinh r dt + \cosh r dr)$$

De forma equivalente, aplicando $dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial r} dr$ tenemos:

$$dv = e^{-t} (\sinh r dt - \cosh r dr)$$

Con esta reparametrización obtenemos el elemento de línea para ésta región que es (4.26). Para las dos regiones restantes el cambio de variable es:

$$\text{Región } 0 \leq uv \leq 1: u = \sinh t e^r, \quad v = \sinh t e^{-r}$$

$$ds^2 = -dt^2 + \tanh^2 t dr^2$$

$$\text{Región } uv \geq 1: u = \cosh r e^t, \quad v = \cosh r e^{-t} \quad ds^2 = dr^2 - \coth^2 r dt^2$$

En donde los elementos de línea se obtienen sustituyendo las parametrizaciones respectivas en la métrica con coordenadas de Kruskal. Ahora es sencillo obtener el dual de cada región por separado, usando la isometría $t \rightarrow t+c$. y por las transformaciones de Buscher el coeficiente del componente temporal pasa a su inverso. El resultado es

Regiones	original	dual
$uv \leq 0$	$dr^2 - \tanh^2 r dt^2$	$dr^2 - \coth^2 r dt^2$
$0 \leq uv \leq 1$	$-dt^2 + \tanh^2 t dr^2$	$-dt^2 - \tanh^2 t dr^2$
$uv \geq 1$	$dr^2 - \coth^2 r dt^2$	$dr^2 - \tanh^2 r dt^2$

Si usamos las nuevas métricas duales de cada región podemos construir de nuevo la métrica en coordenadas de Kruskal, y el hecho es que obtenemos lo mismo! esto significa que este objeto es *autodual*. ¿Entonces que se gana con obtener el dual del objeto original? Bueno, pues para ello analizaremos la tabla anterior. Si definimos el horizonte del agujero negro como la frontera entre las regiones I y II del diagrama de la figura (4.1), y la singularidad como la frontera entre las regiones II y V, observamos que los tipos de espaciotiempo se intercambian, es decir, el tipo de espaciotiempo que tiene la región $uv \leq 0$, que llamamos I, ó IV, en la parte dual de la tabla aparece cambiado a el tipo de espaciotiempo que tiene la región V y VI, por lo que concluimos que estas regiones se intercambian, de acuerdo a lo que definimos por horizonte y singularidad. Podemos interpretar esto como un cambio de regiones de acoplamiento, lo que quiere decir que una región con gran curvatura se intercambia por una región de baja curvatura, un comportamiento familiar de la dualidad. Las expectativas para estos modelos incluyen el poder explotar esta propiedad de intercambio de acoplamientos para en un futuro obtener información sobre la región de gran curvatura (más allá de la singularidad) y así poder entender mejor a la gravedad. y en particular a los agujeros negros, en el marco de la teoría de cuerdas.

4.3 Agujero negro de Schwarzschild 4D

Ahora podemos estudiar la métrica De Schwarzschild en 4D:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.27)$$

Donde Ω^2 es el elemento de línea esférico $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. Esta representa una solución a nuestras ecuaciones de fondo con el dilatón Φ constante y sin tensor antisimétrico B_{mn} (es decir son interacciones de gauge y sin torsión H , ya que su derivada es cero). Aquí se pueden llevar a cabo dos dualizaciones, una abeliana, usando la isometría dada por las traslaciones temporales (la métrica es estática) y otra en la simetría rotacional de la

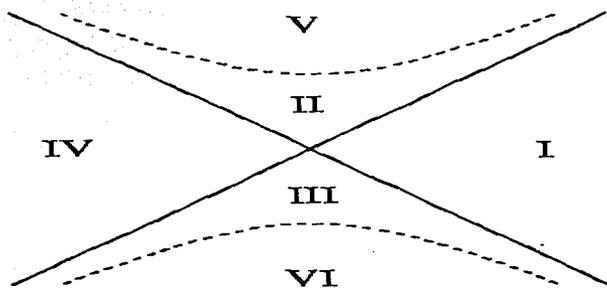


Figura 4.1: Diagrama de Kruskal del agujero negro. Tenemos las regiones $uv \leq 0$, $0 \leq uv \leq 1$ y $uv \geq 1$.

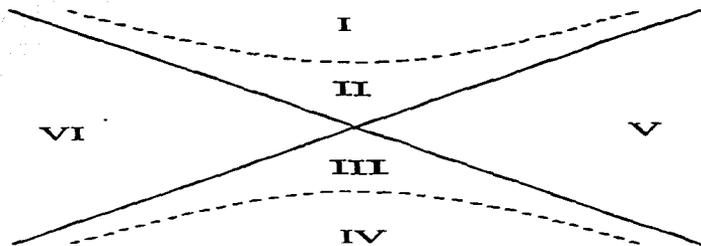


Figura 4.2: Diagrama de Kruskal donde se muestra el efecto de la transformación de dualidad: ésta intercambia regiones de gran curvatura y baja curvatura, lo que se traduce en intercambiar el horizonte por la singularidad, a pesar de que este objeto es autodual.

parte angular, que genera un $SO(3)$. La prescripción para transformaciones de dualidad- T *no abeliana* ha sido estudiada en diversos trabajos como [20]. En nuestro caso sólo nos interesa la isometría abeliana. Por ello aplicaremos las transformaciones de Buscher (3.32) a ésta métrica, de donde obtenemos la siguiente *métrica dual* a la de Schwarzschild:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)^{-1} dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.28)$$

Y el dilatón se define como:

$$\Phi' = \Phi - \ln\left(1 - 2\frac{M}{r}\right) \quad (4.29)$$

Para comenzar el análisis de este nuevo objeto primeron verifiquemos que es solución a las ecuaciones de fondo en cuerdas (2.91) que se trataron en el capítulo 2. El agujero negro de Schwarzschild es solución de las mismas ya que su torsión es nula, el dilatón es una constante y,

Coordenadas

$x(up)$

$x^a = [r \theta \phi t]$

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - 2\frac{m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2 + \left(-1 + 2\frac{m}{r}\right) dt^2$$

Ricci Covariante

$R(dn, dn)$

$R_{ab} = \text{Todos los componentes son cero}$

Escalar de Ricci

$R = 0$

Vamos a verificar que éste objeto dual es una solución a tales ecuaciones. Con torsión nula e igualando la constante cosmológica Λ a cero, las ecuaciones de fondo (2.91) se reducen a

$$R_{MN} + D_M D_N \Phi = 0$$

$$R - (D\Phi)^2 + 2D_M D^M \Phi = 0 \quad (4.30)$$

Para ver si nuestra métrica dual satisface estas ecuaciones vamos a recurrir al software MAPLE y a un conjunto de bibliotecas desarrollado para manejar tensores conocido como GRTensor (en el apéndice A se describe con detalle el uso de éstas herramientas para los cálculos que se presentan a continuación). Necesitamos calcular los componentes covariantes del tensor de Ricci y algunas derivadas covariantes (lo que implica el cálculo de los Símbolos de Christoffel no nulos de esta métrica), que son:

*Simbolos de Christoffel de segundo orden
(simetricos en los primeros dos indices)*

$$\Gamma_{tt}{}^r = -\frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma_{tr}{}^t = -\frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma_{rr}{}^r = -\frac{m}{r(r-2m)}$$

$$\Gamma_{r\theta}{}^\theta = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{r\phi}{}^\phi = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}{}^r = -r + 2m$$

$$\Gamma_{\theta\phi}{}^\phi = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}{}^r = -(r-2m)\sin(\theta)^2$$

$$\Gamma_{\phi\phi}{}^\theta = -\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Coordenadas

$$x^a = [tr\theta\phi]$$

Métrica Dual de Schwarzschild

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{1-2\frac{m}{r}} + \frac{dr^2}{1-2\frac{m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2$$

El dilatón dual, como sabemos a partir de las transformaciones de Buscher, esta dado por

$$\Phi' = \Phi - \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (4.31)$$

Primero obtenemos su gradiente (es una función escalar)

$$J(dn)$$

$$J_a = \left[0 - 2\frac{m}{r(r-2m)} 0 0\right]$$

Ahora obtenemos su derivada covariante, la cual es:

$$J(dn, cdn)$$

$$J_{a;b} = \begin{bmatrix} -2 \frac{m^2}{r^2 (r - 2m)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{m(2r - 3m)}{r^2 (r - 2m)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \frac{m}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \frac{\sin(\theta)^2 m}{r} \end{bmatrix}$$

El cálculo del tensor de Ricci covariante nos conduce a:

Ricci Covariante

$R(dn, dn)$

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} 2 \frac{m^2}{r^2 (r - 2m)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 \frac{m(2r - 3m)}{r^2 (r - 2m)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{m}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \frac{\sin(\theta)^2 m}{r} \end{bmatrix}$$

Como se observa, la suma de ambos tensores es cero, por tanto la primera ecuación de (4.30) se satisface.

Como siguiente paso calculemos los términos de la segunda ecuación a verificar de (4.30). Primero necesitamos el escalar de curvatura de Ricci R ,

Escalar de Ricci

$$R = -4 \frac{m^2}{r^3 (r - 2m)}$$

A continuación calculemos el escalar $D_M D^M$ al cual designaremos por comodidad como J^a ; b . Para ello primero calculamos el gradiente contravariante del dilatón:

$J(up)$

$$J^a = \left[0, -2 \frac{m}{r^2}, 0, 0 \right]$$

Para $(D\Phi')^2$ ³ tenemos el resultado:

³Este operador se define como $(D_\mu \Phi')(D^\mu \Phi')$, y puede obtenerse también como $(g_{\mu\nu} D^\nu \Phi')(D^\mu \Phi') = g_{\mu\nu} (D^\nu \Phi')^2$

$$J_a J^b = \left(\frac{-2m}{r(r-2m)} \right) \left(\frac{-2m}{r^2} \right) = \frac{4m^2}{r^3(r-2m)}$$

El cual identificamos con $-R$. Ahora calculemos la derivada covariante del vector contravariante J^a :

$$J^a{}_{;b} = \begin{bmatrix} 2 \frac{m^2}{r^3(r-2m)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{m(2r-3m)}{r^3(r-2m)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \frac{m}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \frac{m}{r^3} \end{bmatrix}$$

Ahora tomemos la traza de éste tensor, que es lo mismo que contraer sus índices,

$$\begin{aligned} & \frac{2m^2}{r^3(r-2m)} + \frac{2m(2r-3m)}{r^3(r-2m)} - \frac{4m}{r^3} \\ & \frac{2m^2 + 4mr - 6m^2}{r^3(r-2m)} - \frac{4m}{r^3} \\ & \frac{-4m^2 + 4mr}{r^3(r-2m)} - \frac{4m}{r^3} \\ & \frac{-4m^2 + 4mr - 4m(r-2m)}{r^3(r-2m)} \\ & \frac{-4m^2 + 4mr - 4mr + 8m^2}{r^3(r-2m)} = \frac{4m^2}{r^3(r-2m)} \end{aligned}$$

Notamos que la traza de J^a_b es igual a $-R$, es decir el escalar de Ricci con signo menos. Ahora vamos a sustituir estos elementos en la segunda ecuación de (4.30),

$$R - (D\Phi)^2 + 2D_M D^M \Phi = 0$$

$$R - (-R) + 2(-R) = 2R - 2R = 0$$

Con esto queda verificado que el espaciotiempo dual de Schwarzschild (4.28) es solución a las ecuaciones de Fondo de cuerdas (2.91) (sin torsión y $\Lambda = 0$).

Del escalar de curvatura de Ricci podemos observar que existen singularidades desnudas en $r = 0$ y $r = 2M$.

$$R = -\frac{4M^2}{(r - 2M)r^3} \quad (4.32)$$

Por tanto podemos decir que este objeto dual no corresponde a un agujero negro. La existencia de singularidades que están ausentes de la métrica original nos indica que es un objeto distinto, es decir, una geometría distinta en base a los escalares (en forma local).

El cálculo de escalares de curvatura adicionales nos garantiza que tampoco se puede llegar a la nueva solución dual por medio de una transformación conforme de la métrica original de Schwarzschild. Calcularemos (de nuevo con ayuda de MAPLE y GRTensor) cuatro escalares polinomiales invariantes del tensor de Riemann (Reales) llamados *escalares CM* (*Carminati-McLenaghan*) [37]. Uno de ellos ya lo conocemos, es el escalar de Ricci, los demás están definidos por medio del tensor de Ricci sin traza S_{ab} :

$$\begin{array}{ll} R & R_a^b \\ R1 & (1/4)S_a^b S_b^a \\ R2 & (-1/8)S_a^b S_b^c S_c^a \\ R3 & S_a^b S_b^c S_c^d S_d^a / 16 \end{array}$$

También es útil calcular el escalar que resulta de la contracción completa del tensor de Riemann, es decir $R_{abcd}R^{abcd}$.

Para la métrica de Schwarzschild estos son:

Escalar de Ricci

$$R = 0$$

invariante CM R1

$$R1 = 0$$

invariante CM R2

$$R2 = 0$$

invariante CM R3

$$R3 = 0$$

Contracción Completa del Tensor de Riemann

$$K = 48 \frac{m^2}{r^6}$$

Para la métrica dual de Schwarzschild estos escalares son:

Ricci scalar

$$R = -4 \frac{m^2}{(r - 2m)^2 r^3}$$

invariante CM R1

$$R1 = \frac{m^2 (17m^2 + 6r^2 - 20mr)}{(r - 2m)^2 r^6}$$

invariante CM R2

$$R2 = 3 \frac{(2r - 3m)m^3}{r^9 (r - 2m)}$$

invariante CM R3

$$R3 = \frac{1}{4} \frac{m^4 (641m^4 + 72r^4 - 496r^3m + 1284r^2m^2 - 1480rm^3)}{(r - 2m)^4 r^{12}}$$

Contracción Completa del Tensor de Riemann

$$K = 16 \frac{m^2 (3r^2 - 10mr + 9m^2)}{(r - 2m)^2 r^6}$$

Se observa que los mismos tipos de escalares para cada métrica son distintos. Así que podemos estar seguros de que tenemos una solución distinta a la de partida después de aplicar las transformaciones de Buscher, en este caso. Esto sucede para otras métricas como veremos más adelante en el caso de soluciones de las ecuaciones de Einstein con simetría cilíndrica conocidas como Espacio tiempo de Levi-Civita.

Hemos visto que dos geometrías totalmente distintas están relacionadas por medio de las transformaciones de dualidad-T abeliana, así como radios grandes se relacionan con radios pequeños (y viceversa) por medio de ésta dualidad. ¿Cuál es el significado de ésta relación, o mejor dicho, de ésta simetría? más adelante, cuando se presenten las conclusiones de este trabajo hablaremos sobre la dirección a donde parece conducirnos la dualidad-T.

4.4 El agujero negro BTZ y su dual

Bañados et.al. mostraron que existe una solución de agujero negro a la relatividad general en tres dimensiones con una constante cosmológica negativa [33]. Este resultado es sorprendente porque las ecuaciones de campo de esta teoría requieren que la curvatura sea constante en forma local. Sin embargo, identificando ciertos puntos en un espacio de anti-de Sitter en $3D$,

se obtiene una solución de agujero negro con casi todas las características típicas de estos objetos. De hecho, se encontró una familia de parámetros de identificaciones no equivalentes que conducen a agujeros negros con masa M y momento angular J . Aunque la curvatura es constante, las soluciones tienen superficies atrapadas, un horizonte de eventos y una temperatura de Hawking distinta de cero. Cuando $J \neq 0$ también presentan una ergósfera, y un horizonte interno. Todas las soluciones son asintóticamente anti-de Sitter (sin identificaciones).

Con una modificación sencilla se obtiene una solución exacta de las ecuaciones de cuerdas. Sólo se necesita agregar un campo tensorial antisimétrico $H_{\mu\nu\rho}$ proporcional a la forma de volumen de $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. Esto obedece a que existe la construcción de WZW para obtener una teoría de campo conforme que describe la propagación de una cuerda en un grupo de Lie. La métrica natural del grupo es $SL(2, R)$, precisamente la métrica de anti-de Sitter en $3D$, por lo que el modelo WZW es una teoría de campo conforme exacta que describe la propagación de una cuerda en el espacio de anti-de Sitter. El campo $H_{\mu\nu\rho}$ se necesita por el término de Wess-Zumino, y debe elegirse de forma que su conexión con torsión $H_{\mu\nu\rho}$ sea plana. Para obtener un agujero negro, se aplica el procedimiento de orbifold para obtener la teoría de campo conforme que describe la propagación de la cuerda en el espacio cociente. Esto filtra los estados que son invariantes bajo el grupo discreto, y agrega los estados de enrollamiento. Bajo dualidad T éste agujero es equivalente a la solución conocida como *cuerda negra cargada* [33]. Vamos a considerar algunas de las implicaciones de ésta equivalencia y su relación con el problema de la constante cosmológica.

Revisemos primero la solución de agujero negro descubierta por Bañados, et.al, que por cierto recibe la denominación de agujero negro *BTZ*. El espacio de anti-de Sitter puede representarse como la superficie

$$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -l^2 \quad (4.33)$$

con signatura plana (---++)

$$ds^2 = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (4.34)$$

Tiene curvatura $R_{\mu\nu} = -(2/l^2)g_{\mu\nu}$. Este espacio es invariante bajo $SO(2, 2)$. Los seis vectores de Killing independientes consisten en dos rotaciones (en los planos (0, 1) y (2, 3)) y cuatro boosts de Lorentz. Una forma adecuada de parametrizar la superficie es escoger dos vectores de Killing que conmuten y hacer que dos de las coordenadas sean parámetros a lo largo de éstas direcciones de simetría. Si t y ϕ son parámetros a lo largo de dos rotaciones, la métrica toma una forma más familiar:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (4.35)$$

Para obtener el agujero negro, definimos \hat{t} y $\hat{\varphi}$ como parámetros a lo largo de los boosts en los planos (0,3) y (1,2). En forma explícita,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cosh \hat{\varphi} & x_0 &= \sqrt{l^2 - \hat{r}^2} \cosh(\hat{t}/l) & x_2 &= r \sinh \hat{\varphi} \\ x_3 &= \sqrt{l^2 - \hat{r}^2} \sinh(\hat{t}/l) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Nótese que $\hat{r}^2 > 0$ únicamente cubre la región $x_1^2 - x_2^2 > 0$. Debido a que esto no es el espacio completo, sería más natural usar la coordenada radial $\rho = \hat{r}^2$ que toma tanto valores positivos como negativos. Por ahora continuaremos usando \hat{r} para mantener consistencia con la notación estándar. El espacio de anti-de Sitter toma la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\hat{r}^2}{l^2}\right) d\hat{t}^2 + \left(\frac{\hat{r}^2}{l^2} - 1\right)^{-1} d\hat{r}^2 + \hat{r}^2 d\hat{\varphi}^2 \quad (4.37)$$

Como \hat{t} y $\hat{\varphi}$ son ambos parámetros a lo largo de un boost, pueden tomar cualquier valor real. Si identificamos $\hat{\varphi} = \hat{\varphi} + 2\pi$, (4.37) describe un agujero negro. Las superficies de \hat{t} y $\hat{r} < l$ constantes son ahora superficies compactas *atrapadas*. Se podría identificar también a $\hat{\varphi}$ con un periodo distinto de 2π . Resulta que esto corresponde a cambiar la masa del agujero negro. Esto es análogo al hecho de que en ausencia de constante cosmológica, la masa (en tres dimensiones) esta relacionada con el déficit de ángulo al infinito. Para agregar momento angular, se identifica en forma periódica una combinación lineal de $\hat{\varphi}$ y \hat{t} , en lugar del mismo $\hat{\varphi}$.

Para ser más explícitos, escojamos dos constantes r_+ , r_- e introduzcamos nuevas coordenadas $\hat{t} = (r_+ t/l) - r_- \varphi$, $\hat{\varphi} = (r_+ \varphi/l) - (r_- t/l^2)$, $\hat{r}^2 = l^2(r^2 - r_-^2)/(r_+^2 - r_-^2)$. La métrica toma la forma

$$ds^2 = \left(M - \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 - J dt d\varphi + r^2 d\varphi^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2}\right)^{-1} dr^2 \quad (4.38)$$

donde las constantes M y J están relacionadas con r_{\pm} mediante

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{l^2} \quad J = \frac{2r_+ r_-}{l} \quad (4.39)$$

Identificando φ con $\varphi + 2\pi$, obtenemos una familia de agujeros negros de dos parámetros. Si ponemos espacial atención a los términos de superficie en el análisis hamiltoniano de [35], se encuentra que M es la masa y J es el momento angular de la solución. En general, existen dos horizontes donde $\nabla_{\mu} r$ se vuelve nulo, y están localizados en $r = r_{\pm}$. Estos dos horizontes coinciden cuando $|J| = Ml$, es decir, en el límite extremal. El agujero negro extremal, así como la solución no masiva $M = J = 0$, no pueden obtenerse por las identificaciones anteriores. En lugar de ellas se deben usar boosts nulos. El espacio de anti-de Sitter original (4.33) se recupera cuando $M = -1$ y $J = 0$.

El vector de Killing $\partial/\partial t$ se vuelve nulo en $r^2 = Ml^2$ que está fuera del horizonte de eventos $r = r_-$ cuando $J \neq 0$. Esto es similar a la ergósfera en la solución de Kerr. La interpretación física que podemos dar es un observador no puede permanecer en reposo con respecto al infinito cuando está cerca del horizonte.

¿Cómo es el espaciotiempo cerca de $r = 0$? Como la curvatura es constante, no puede existir una singularidad en ella. Cuando $J = 0$ y $M > 0$, la simetría traslacional φ tiene un punto fijo en el plano (1,2). Esto causa que la solución cerca de $r = 0$ tenga geodésicas nulas incompletas. Sin embargo, cuando $J \neq 0$, la simetría no tiene puntos fijos y el espaciotiempo es completamente no singular. Esto es consistente con los teoremas sobre singularidades, aunque el espaciotiempo tiene superficies atrapadas y satisface la condición de energía fuerte, porque existen curvas tipo tiempo cerradas (recordemos que continuar más allá de $r = 0$ consiste en que r^2 se vuelva negativo, por lo que φ se vuelve tipo tiempo).

En [35], Bañados et. al. argumentan que el espaciotiempo debe terminar en $r = 0$, lo que evita el problema causal pero crea geodésicas incompletas. Sin embargo, esto parece poco natural. La solución en 4D de Kerr también tiene curvas tipo tiempo cerradas dentro del horizonte interno (aunque el vector interno $\partial/\partial\varphi$ es tipo tiempo únicamente para $r < 0$ en Kerr, existen curvas tipo tiempo cerradas a través de todo punto con $r < r_-$. Parece que un resultado similar es válido en nuestro caso). No esperamos que las curvas tipo tiempo cerradas produzcan alguna violación física de la causalidad debido a la inestabilidad del horizonte interno. La teoría de cuerdas proporciona otra razón para no terminar el espaciotiempo en $r = 0$. La construcción WZW claramente incluye todas las regiones del espaciotiempo, incluyendo $r^2 < 0$.

Por simple valor pedagógico vamos a analizar brevemente la a temperatura de Hawking para este agujero negro,

$$T = \frac{r_+^2 - r_-^2}{2\pi r_+ l^2} \quad (4.40)$$

(El factor de l^2 fué omitido en [35].) Estos agujeros negros no se evaporan completamente en un tiempo finito. Para ver esto, notemos que debido a que la temperatura es reducida por la rotación, podemos obtener un límite bajo del tiempo de vida asignando $r_- = 0$. La temperatura y el tamaño del horizonte son proporcionales a $r_+ \sim \sqrt{M}$. En tres dimensiones, el flujo de energía térmica en forma de radiación es proporcional a T^3 , por lo que $\dot{M} \propto M^2$ que implica $M(t) \propto 1/t$. Como el tiempo de vida es infinito, los agujeros negros pequeños se comportarán como remanentes estables.

Vamos a la teoría de cuerdas. Primero consideremos estos agujeros negros en el contexto de la aproximación de baja energía. En tres dimensiones

la acción efectiva de cuerdas tiene la forma

$$S = \int d^3x \sqrt{-g} e^{-2\Phi} \left[\frac{4}{k} + R + 4(\nabla\Phi)^2 - \frac{1}{12} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right] \quad (4.41)$$

Las ecuaciones de movimiento obtenidas de esta acción son

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{4} H_{\mu\lambda\sigma} H_\nu{}^{\lambda\sigma} &= 0 \\ \nabla^\mu (e^{-2\Phi} H_{\mu\nu\rho}) &= 0 \\ 4\nabla^2 \Phi - 4(\nabla\Phi)^2 + \frac{4}{k} + R - \frac{1}{12} H^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

Una propiedad especial en las tres dimensiones es que $H_{\mu\nu\rho}$ debe ser proporcional a la forma de volumen $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. Si asumimos que $\Phi = 0$, entonces la segunda ecuación proporciona $H_{\mu\nu\rho} = (2/l)\epsilon_{\mu\nu\rho}$, donde l es una constante con dimensiones de longitud. Sustituyendo ésta forma de H en la primera ecuación, tenemos

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{l^2} g_{\mu\nu} \quad (4.43)$$

que es precisamente la ecuación de Einstein con una constante cosmológica negativa. La tercera ecuación de movimiento en (4.42) también se satisface si $k = l^2$. Por tanto, toda solución de la relatividad general en tres dimensiones con constante cosmológica negativa es una solución de la teoría de cuerdas de baja energía con $\Phi = 0$, $H_{\mu\nu\rho} = (2/l)\epsilon_{\mu\nu\rho}$ y $k = l^2$. En particular, la familia de agujeros negros de dos parámetros que encontramos anteriormente (4.38) con

$$B_{\varphi t} = \frac{r^2}{l}, \quad \Phi = 0 \quad (4.44)$$

donde $H = dB$. Un argumento anterior de Horowitz [34] donde se afirmaba que las soluciones en 3D de agujero negro a (4.42) no existían, asumía que $H_{\mu\nu\rho} = 0$. Strominger sugirió a Horowitz que un $H_{\mu\nu\rho} \neq 0$ podría alterar el resultado [33].

Consideremos el T -dual de ésta solución. La dualidad mapea cualquier solución de baja energía a las ecuaciones para los fondos (4.42) con una simetría traslacional, a otra solución (bajo ciertas condiciones ambas soluciones corresponden a una teoría de campo conforme equivalente [22]). Dada una solución $(g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi)$ que es independiente de una coordenada, digamos x , entonces $(\tilde{g}_{\mu\nu}, \tilde{B}_{\mu\nu}, \tilde{\Phi})$ es también solución, obtenida usando las transformaciones de Buscher (3.32).

Aplicando ésta transformación a la simetría traslacional φ de la solución de agujero negro (4.44)(4.38) tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{ds}^2 &= \left(M - \frac{J^2}{4r^2} \right) dt^2 + \frac{2}{l} dt d\varphi + \frac{1}{r^2} d\varphi^2 + \left(\frac{r^2}{l^2} - M + \frac{J^2}{4r^2} \right)^{-1} dr^2 \\ \tilde{B}_{\varphi t} &= -\frac{J}{2r^2} \quad \Phi = -\ln r \end{aligned} \quad (4.45)$$

Para entender mejor esta solución, vamos a diagonalizar la métrica. Sea

$$t = \frac{l(\hat{x} - \hat{t})}{(r_+^2 - r_-^2)^{1/2}}, \quad \varphi = \frac{r_+^2 \hat{t} - r_-^2 \hat{x}}{(r_+^2 - r_-^2)^{1/2}}, \quad r^2 = l\hat{r} \quad (4.46)$$

entonces la solución queda como

$$\begin{aligned} d\tilde{s}^2 = & - \left(1 - \frac{\mathcal{M}}{\hat{r}}\right) d\hat{t}^2 + \left(1 - \frac{\mathcal{Q}^2}{\mathcal{M}\hat{r}}\right) d\hat{x}^2 + \\ & \left(1 - \frac{\mathcal{M}}{\hat{r}}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\mathcal{Q}^2}{\mathcal{M}\hat{r}}\right)^{-1} \frac{l^2 d\hat{r}^2}{4\hat{r}^2} \\ \Phi = & -\frac{1}{2} \ln \hat{r}l, \quad B_{\hat{x}\hat{t}} = \frac{\mathcal{Q}}{\hat{r}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

donde $\mathcal{M} = r_+^2/l$ y $\mathcal{Q} = J/2$. Esta es precisamente la solución de la cuerda negra cargada en tres dimensiones [34]. Notemos que la carga de la cuerda negra es simplemente proporcional al momento angular del agujero negro. Los horizontes de la cuerda negra tienen la misma ubicación que en el agujero negro $r^2 = r_{\pm}^2$. Como φ i es periódica, tanto \hat{t} como \hat{x} serán en general periódicos. Para evitar curvas tipo tiempo cerradas, debemos ir al espacio cubierta.

Como el dual de el agujero negro es una cuerda negra, debe ser posible dualizarla y recobrar el agujero negro. Esto es ligeramente sutil, porque se ha demostrado que si se dualiza en \hat{x} , se obtiene una carga negra neutra con un boost [33]. La carga \mathcal{Q} es dual al momento en la dirección de simetría $P_{\hat{x}}$. Sin embargo, se puede aplicar la transformación de dualidad a cualquier simetría traslacional $\partial/\partial\hat{x} + \alpha\partial/\partial\hat{t}$. Si $\alpha < 1$, entonces el dual es de nuevo una cuerda negra cargada. Si $\alpha = 1$ el resultado es diferente. El vector de Killing $\partial/\partial\hat{x} + \partial/\partial\hat{t}$ tiene gauge $(\mathcal{M}^2 - \mathcal{Q}^2)/\mathcal{M}\hat{r}$, de manera que es tipo espacio en todas partes pero asintóticamente nulo. Se puede verificar sin muchas dificultades que el dual de la cuerda negra con respecto a ésta simetría, es precisamente el agujero negro *BTZ*.

Ahora consideremos algunos casos especiales. El dual de un agujero negro sin rotación $J = 0$ y $M > 0$, es la cuerda negra neutra. Este objeto es simplemente el agujero negro "cruz" S^1 . Para la solución de masa cero ($M = J = 0$) y límite extremal ($|J| = Ml$), el dual aún esta dado por (4.45), pero la transformación a la cuerda negra deja de funcionar. Los duales no son cuerdas negras de masa cero extremales, sino más bien éstas soluciones superpuestas con una onda de frente plano. Asignando $M = J = 0$ en (4.45), e introduciendo nuevas coordenadas $t = -v$, $\varphi = ul/2$, $r = e^{r/l}$, obtenemos

$$\tilde{d}s^2 = -dudv + d\hat{r}^2 + \frac{l^2}{4} e^{-2\hat{r}/l} du^2 \quad (4.48)$$

Esta es una onda de frente plano en la presencia del dilatón. Con $J^2 = M^2 l^2$ en (4.45), e introduciendo nuevas coordenadas $t = -v/M$, $\varphi = l(v +$

$Mu)/2, \rho^2 = l\tilde{r}$, la métrica toma la forma

$$\tilde{ds}^2 = - \left(1 - \frac{Ml}{2\tilde{r}} \right) dudv + \frac{l^2 d\tilde{r}^2}{4 \left(\tilde{r} - \frac{Ml}{2} \right)^2} + \frac{M^2 l}{4\tilde{r}} du^2 \quad (4.49)$$

Esto describe una onda de amplitud constante viajando a lo largo de una cuerda negra extremal.

Finalmente, recordemos que el espacio de anti-de Sitter completo corresponde a $J = 0$ y $M = -1$. Insertando estos valores en (4.45) y con $t = \tilde{t} + \varphi/l$ tenemos

$$\tilde{ds}^2 = -d\tilde{t}^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2} \right)^{-1} dr^2 + \left(\frac{r^2 + l^2}{r^2 l^2} \right) d\varphi^2 \quad (4.50)$$

que es el producto del tiempo y el dual del agujero euclidiano en dos dimensiones.

Las soluciones a las ecuaciones de campos de baja energía no son confiables en regiones de gran curvatura. Pero como el agujero negro en tres dimensiones tiene curvatura constante (que es pequeña para un k grande) debería ser una buena aproximación en todas partes. De hecho, para el modelo WZW, la métrica exacta difiere de la aproximación de baja energía por un rescalamiento total. Por tanto, la métrica exacta del agujero negro en tres dimensiones es simplemente proporcional a (4.38) y (para $J \neq 0$) es no singular (aunque la estabilidad del horizonte interno y el efecto de las curvas tipo tiempo cerradas permanece como un problema abierto). Al analizar este caso y el de $2D$ pareciera que tenemos evidencia de que los agujeros negros en teoría de cuerdas están libres de singularidades, pero no es conclusiva aún.

La principal consecuencia de la equivalencia entre el agujero negro y la cuerda negra es el hecho de que el agujero negro es asintóticamente anti-de Sitter, mientras la cuerda negra es asintóticamente plana. Como son equivalentes, esto sugiere que la constante cosmológica negativa no tiene efecto en las cuerdas en tres dimensiones. La razón de que la estructura asintótica del espaciotiempo cambie bajo la dualidad es que la longitud de los círculos parametrizados por φ no tiende a una constante en el infinito. Ya se conocían ejemplos de este fenómeno, pero la interpretación física del comportamiento asintótico del espacio dual no era simple. Por ejemplo, si tenemos el espaciotiempo de Minkowski en cuatro dimensiones, $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, y dualizamos sobre φ , la métrica es idéntica excepto que $g_{\varphi\varphi}$ cambia a $(r^2 \sin^2\theta)^{-1}$, que es singular a lo largo del eje $\theta = 0, \pi$. El agujero negro BTZ es el primer ejemplo en el cual dos diferentes comportamientos asintóticos tienen cada uno una interpretación física simple.

Esto solucionaría el problema de la constante cosmológica, porque una solución con constante cosmológica en teoría de cuerdas es equivalente a

una sin ella. A las cuerdas no les afectaría la constante cosmológica. Desafortunadamente no es posible generalizar este resultado al caso de más dimensiones. Se puede empezar con una cuerda negra cargada en D dimensiones que sea asintóticamente plana, y si la dualizamos con respecto a una simetría que sea tipo espacio pero asintóticamente nula, el resultado es una métrica que no es ni asintóticamente plana ni asintóticamente anti-de Sitter. No es posible relacionar una solución con constante cosmológica con una sin ella en D dimensiones. Pero dado nuestro entendimiento elemental de la dualidad en la teoría de cuerdas y de los aspectos no perturbativos de la misma, queda la esperanza de que éste efecto juegue algún papel para solucionar el problema de la constante cosmológica en el futuro.

Capítulo 5

Dualidad-T y soluciones cilíndricas

5.1 Motivaciones para el estudio de la simetría cilíndrica

Cuando aplicamos la teoría de la Gravitación de Newton para calcular el potencial gravitacional V_1 en las cercanías de una esfera sólida de materia, obtenemos

$$V_1 = \frac{-M}{r} \quad (5.1)$$

donde M es la masa de la esfera y R es la distancia entre el punto donde queremos calcular V_1 y el centro de la esfera. Ahora, en el marco de la Teoría de la Gravitación de Einstein obtendríamos una descripción en función de la métrica de Schwarzschild que ya estudiamos,

$$ds^2 = -(1 - 2V_1)dt^2 + (1 - 2V_1)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (5.2)$$

Se observa que la nueva formulación no introduce nada nuevo acerca de la fuente del campo gravitacional, seguimos describiendola por medio de la masa M .

Esto no es así en todos los casos. Si la forma de la fuente es diferente, digamos, un cilindro sólido de materia, obtendríamos un potencial (Newtoniano),

$$V_2 = 2\sigma \ln(r) \quad (5.3)$$

Donde σ es la densidad lineal de masa del cilindro y r es la distancia del eje de simetría del mismo al punto donde deseamos calcular V_2 . Ahora, usando Relatividad General obtendríamos:

$$ds^2 = -ae^{2V_2}dt^2 + \frac{1}{a}r^{4\sigma(2\sigma-1)}(dr^2 + dz^2) + \frac{1}{a}r^{2(2\sigma-1)}d\phi^2 \quad (5.4)$$

Esta es la métrica que Levi-Civita descubrió en 1917. En ella aparece el potencial gravitacional Newtoniano pero también aparece un segundo parámetro a . En la teoría de Einstein necesitamos dos parámetros para describir una fuente cilíndrica estática, mientras que la descripción Newtoniana solamente requiere uno.

En el caso de una descripción de estos dos sistemas (la esfera y el cilindro sólidos) considerando a la constante cosmológica Λ distinta de cero, la aparición de nuevos parámetros al pasar del modelo de Newton al de Einstein es más notoria [38]. De aquí se concluye que la descripción de Einstein de la Gravitación con simetría cilíndrica presenta una gran diferencia respecto a la descripción de Newton. Esta diferencia se manifiesta en la aparición de nuevos parámetros posteriores a la integración de las ecuaciones de campo. Actualmente existe un interés en la interpretación física de estos parámetros y en la posibilidad de que proporcionen nueva información sobre la interacción gravitacional, por lo menos a nivel clásico.

5.2 Espaciotiempo con simetría cilíndrica general

En 1917 Levi-Civita obtuvo una solución general de las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de un spaciotiempo vacío, estático y cilíndricamente simétrico (5.5). Esta métrica tiene dos parámetros independientes, cuyo significado físico ha sido recientemente clarificado [38].

El elemento de línea más general correspondiente a éste spaciotiempo esta dado por

$$ds^2 = -f dt^2 + e^\mu (dr^2 + dz^2) + l d\phi^2, \quad (5.5)$$

donde f , μ y l son funciones sólo de r , y los rangos de las coordenadas t , z y ϕ son:

$$-\infty \leq t \leq \infty, \quad -\infty \leq z \leq \infty, \quad -0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

Usando MAPLE y GRTensor presentaremos las ecuaciones de campo para este spaciotiempo. Estas obedecen:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (5.6)$$

Para (5.5) las componentes no idénticamente nulas de la métrica son:

$$\begin{aligned} 2e^\mu DR_{00} &= \left(\frac{l f'}{D} \right)' \\ 2e^\mu DR_{33} &= \left(\frac{l' f}{D} \right)' \\ 2R_{11} &= -\mu'' + \mu' \frac{D'}{D} - 2 \frac{D''}{D} + \frac{f'l'}{D^2} \\ 2r_{22} &= -\mu'' - \mu' \frac{D'}{D} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Las primas indican derivada con respecto a r y $D^2 = fl$. Las ecuaciones de las geodésicas se derivan del lagrangiano

$$2L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (5.8)$$

donde λ es un parámetro afín a lo largo de las trayectorias geodésicas, para las tipo tiempo λ resulta ser el tiempo propio. Como es sabido obteniendo la variación del lagrangiano anterior obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} \quad (5.9)$$

Y las geodésicas están dadas por.

$$\dot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma = 0 \quad (5.10)$$

Donde el punto indica derivación con respecto a λ . Para la métrica (5.5), el lagrangiano es:

$$2l = -f\dot{t}^2 + e^\mu(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + l\dot{\phi}^2, \quad (5.11)$$

Y las ecuaciones de las geodésicas dadas por (5.10) resultan ser,

$$D\ddot{t} + \frac{l f'}{D} \dot{t} \dot{r} = 0 \quad (5.12)$$

$$2\ddot{r} + e^{-\mu}(f'\dot{t}^2 - l') + \mu'(\dot{r} + \dot{z}^2) = 0 \quad (5.13)$$

$$\ddot{z} + \mu' \dot{r} \dot{z} = 0 \quad (5.14)$$

$$D\ddot{\phi} = \frac{f l'}{D} \dot{r} \dot{\phi} \quad (5.15)$$

Los momentos canónicos correspondientes al lagrangiano (5.11) son,

$$p_t \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = f\dot{t},$$

$$p_r \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = e^\mu \dot{r},$$

$$p_z \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = e^\mu \dot{z},$$

$$p_\phi \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = l\dot{\phi}, \quad (5.16)$$

Las integrales de movimiento se obtienen de las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.9),

$$\frac{dp_t}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (5.17)$$

$$\frac{dp_z}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \quad (5.18)$$

$$\frac{dp_\phi}{d\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (5.19)$$

Y las cantidades conservadas son,

$$p_t = E, \quad p_z = P, \quad p_\phi = L, \quad (5.20)$$

donde E , P y L representan la energía total de la partícula colocada en el campo gravitacional como prueba, el momento de la misma a lo largo del eje de simetría z y su momento angular a lo largo del mismo eje, respectivamente. Usando las ecuaciones (5.16)(5.20), obtenemos

$$\dot{t} = \frac{El}{D^2}, \quad (5.21)$$

$$\dot{z} = Pe^\mu, \quad (5.22)$$

$$\dot{\phi} = \frac{Lf}{D^2}, \quad (5.23)$$

En lugar de integrar (5.13), podemos usar el elemento de línea de ésta métrica para obtener,

$$-\epsilon = -f\dot{t}^2 + e^\mu(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) + l'\dot{\phi}^2 \quad (5.24)$$

donde $\epsilon = 0, 1$ ó -1 si las geodésicas son tipo luz, tipo tiempo o tipo espacio, respectivamente.

Ahora calculemos las geodésicas circulares. Vamos a hacer las siguientes suposiciones,

$$\dot{r} = \dot{z} = 0, \quad \ddot{t} = 0, \quad \ddot{\phi} = 0, \quad (5.25)$$

de modo que (5.13) resulta,

$$f'\dot{t}^2 - l'\dot{\phi}^2 = 0 \quad (5.26)$$

La velocidad angular de una partícula de prueba en ésta geodésica es,

$$\omega = \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} \quad (5.27)$$

Usando (5.26) podemos escribir esta velocidad angular como

$$\omega = \pm \left(\frac{f'}{l'} \right)^{1/2} \quad (5.28)$$

Ahora vamos a definir lo que es la *velocidad normal* de una partícula. Para un espaciotiempo estático, la velocidad normal W^μ se define como el cambio de desplazamiento normal a $\tau^\mu = (1, 0, 0, 0)$ respecto a su desplazamiento paralelo a τ^μ , donde τ^μ es un vector de Killing tipo tiempo, dado por

$$W^\mu = [(-G_{00})^{1/2} dx^0]^{-1} V^\mu \quad (5.29)$$

donde,

$$V^\mu = (0, dx^1, dx^2, dx^3) \quad (5.30)$$

Considerando la métrica (5.5) y nuestros resultados para ω (5.28), podemos escribir a W^μ como

$$W^\mu = (0, 0, 0, f^{-1/2}\omega) \quad (5.31)$$

El tamaño de W^μ está dado por $W^\mu W_\mu$, y mediante la ecuación anterior lo calculamos, y resulta ser,

$$W = \frac{D\omega}{f} \quad (5.32)$$

Ahora podemos escribir (5.24) usando la expresión para ω de (5.28),

$$\frac{\varepsilon}{i^2} = f - l\omega^2 \quad (5.33)$$

sustituyendo el tamaño del vector W^μ (5.32) en la ecuación anterior, obtenemos,

$$\frac{\varepsilon}{i^2} = Df(1 - W^2) \quad (5.34)$$

De aquí podemos ver que las geodésicas circulares pueden ser tipo tiempo ($W < 1$), tipo luz ($W = 1$) o tipo espacio ($W > 1$), respectivamente.

5.3 Espaciotiempo de Levi-Civita y su dual

La solución general de para la métrica es conocida como la métrica estática de Levi-Civita [36],

$$f = ar^{1-n} \quad e^\mu = r^{(n^2-1)/2} \quad l = \frac{1}{a}r^{1+n} \quad (5.35)$$

donde n y a son constantes.

Vamos a verificar que ésta solución satisface las ecuaciones de fondo de las cuerdas (2.91), obviamente esto implica que automáticamente se cumplen las ecuaciones de Einstein en el vacío. Como en el caso de simetría esférica la torsión es nula así como la constante cosmológica Λ , y el dilatón es constante, por lo que las ecuaciones de fondo se simplifican a (4.30). Nuestra métrica toma la forma:

Coordenadas

$$x(u, p)$$

$$x^a = [t, r, z, \phi]$$

Elemento de Línea

$$ds^2 = -ar^{(1-n)} dt^2 + r^{(1/2n^2-1/2)} dr^2 + r^{(1/2n^2-1/2)} dz^2 + \frac{r^{(1+n)} d\phi^2}{a}$$

*Espaciotiempo de Levi-Civita, Simetría Cilíndrica**Tensor de Ricci Covariante*

$$R(dn, dn)$$

$$R_{ab} = \text{Todos los componentes son cero}$$

Escalar de Ricci

$$R = 0$$

Por tanto las ecuaciones (4.30) se satisfacen, como es de esperarse. Ahora Calculemos los escalares CM y el escalar $R_{abcd}R^{abcd}$,

invariante CM R1

$$R1 = 0$$

CM invariant R2

$$R2 = 0$$

invariante CM R3

$$R3 = 0$$

Contracción Completa del Tensor de Riemann

$$K = \frac{1}{4} \frac{-5n^2 + n^4 + n^6 + 3}{(\tau^{(1/2n^2-1/2)})^2 r^4}$$

A continuación estudiaremos el espacio dual a esta métrica. De acuerdo con las transformaciones de Buscher la nueva métrica cambiará en su término temporal (recordemos que usamos la isometría $t \rightarrow t + c$ que presentan éstas soluciones), investigaremos si satisface las ecuaciones de fondo de las cuerdas, y calcularemos los escalares anteriores.

Coordenadas

$$x(u_p)$$

$$x^a = [t r z \phi]$$

Espaciotiempo de Levi-Civita Dual, Simetría Cilíndrica

$$ds^2 = -\frac{r^{(n-1)} dt^2}{a} + r^{(1/2n^2-1/2)} dr^2 + r^{(1/2n^2-1/2)} dz^2 + \frac{r^{(1+n)} d\phi^2}{a}$$

El nuevo dilatón esta dado por,

$$\Phi' = -\ln\left(\frac{1}{a}r^{n-1}\right) \quad (5.36)$$

Vamos a verificar la primera ecuación de fondo de cuerdas (4.30), que es,

$$R_{MN} + D_M D_N \Phi' = 0 \quad (5.37)$$

El tensor de Ricci es,

Tensor de Ricci Covariante

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} R(dn, dn) \\ \frac{1}{2} \frac{r^{(n-1)}(n-1)^2}{r^{(1/2n^2-1/2)} r^2 a}, 0, 0, 0 \\ 0, \frac{1}{4} \frac{3n-3-n^2+n^3}{r^2}, 0, 0 \\ 0, 0, -\frac{1}{4} \frac{n^3-n^2-n+1}{r^2}, 0 \\ 0, 0, 0, -\frac{1}{2} \frac{r^{(1+n)}(1+n)(n-1)}{r^{(1/2n^2-1/2)} r^2 a} \end{pmatrix}$$

Ahora calculemos el gradiente covariante del dilatón,

$J(dn)$

$$J_a = \left[0 - \frac{n-1}{r} \ 0 \ 0 \right]$$

Como siguiente paso calculemos su derivada covariante, es decir $D_M D_N \Phi' = J_{a;b}$,

$J(dn, cdn)$

$J(dn, cdn)$

$$J_{a;b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{r^{(n-1)}(n-1)^2}{r^{(1/2n^2-1/2)} r^2 a}, 0, 0, 0 \\ 0, -\frac{1}{4} \frac{3n-3-n^2+n^3}{r^2}, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{1}{4} \frac{(n-1)(n^2-1)}{r^2}, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{2} \frac{r^{(1+n)}(1+n)(n-1)}{r^{(1/2n^2-1/2)} r^2 a} \end{pmatrix}$$

Observando ambos tensores vemos que si los sumamos obtenemos cero, por tanto la ecuación (5.37) se satisface.

A continuación verifiquemos la segunda ecuación:

$$R - (D\Phi)^2 + 2D_M D^M \Phi = 0 \quad (5.38)$$

El escalar de curvatura R de Ricci esta dado por,

Escalar de Ricci

$$R = -\frac{n^2 - 2n + 1}{r(1/2 n^2 - 1/2) r^2} \quad (5.39)$$

Ahora calculemos el gradiente contravariante del dilatón J^a y su derivada covariante $D_M D^N \Phi' = J_{;b}^a$,

$J(up)$

$$J^a = \left[0 -\frac{n-1}{r(1/2 n^2 - 1/2) r} 0 0 \right]$$

$J(up, cdn)$

$J(up, cdn)$

$$J^a_{;b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{(n-1)^2}{r^2}, 0, 0, 0 \\ 0, -\frac{1}{4} \frac{3n-3-n^2+n^3}{r^2}, 0, 0 \\ 0, 0, \frac{1}{4} \frac{(n-1)(n^2-1)}{r^2}, 0 \\ 0, 0, 0, \frac{1}{2} \frac{(n-1)(1+n)}{r^2} \end{bmatrix}$$

$\%1 := r(1/2 n^2 - 1/2)$

Para el operador $(D\Phi')^2 = J_a J^a$ tenemos

$$J_a J^a = \left(-\frac{n-1}{r} \right) \left(-\frac{n-1}{r(1/2 n^2 - 1/2) r} \right) = \frac{1-2n+n^2}{r(1/2 n^2 - 1/2) r^2} \quad (5.40)$$

Comparando con el escalar de Ricci observamos que $J_a J^a = -R$.

De la derivada covariante $J_{;b}^a$ nos interesa tomar la traza, ya que queremos satisfacer una ecuación de escalares. La traza $J_{;a}^a$ resulta lo siguiente,

$$D_M D^M = J_{;a}^a = \frac{1}{2\%1 r^2} \left((n-1)^2 - \frac{1}{2}(-n^2 + 3n + n^3 - 3) + \frac{1}{2}(1 - n - n^2 + n^3) + n + n^2 - 1 - n \right) \quad (5.41)$$

$$\frac{1}{2\%1r^2} \left((n-1)^2 + \frac{1}{2}(n^2 - 3n - n^3 + 3 + 1 - n - n^2 + n^3) + (n^2 - 1) \right)$$

$$\frac{1}{2\%1r^2} \left((n-1)^2 + \frac{1}{2}(-4n + 4) + (n^2 - 1) \right)$$

$$\frac{1}{2\%1r^2} \left((n-1)^2 + \frac{1}{2}(n-1)^2 \right)$$

Tomando en cuenta que,

$$\%1 := r^{(1/2n^2-1/2)}$$

El resultado final es,

$$D_M D^M = \frac{1 - 2n + n^2}{r^{(1/2n^2-1/2)} r^2} \quad (5.42)$$

Lo que identificamos con $-R$. Por lo tanto, sustituyendo nuestros resultados (5.39)(5.40) y (5.42) en la ecuación (5.38) tenemos,

$$R - (-R) + 2(-R) = 0 \quad (5.43)$$

Y por tanto la métrica dual al espacio tiempo de Levi-Civita (5.3) satisface las ecuaciones de fondo de las cuerdas (2.91) con torsión nula y constante cosmológica $\Lambda = 0$. *Tenemos una nueva solución a tales ecuaciones generada mediante dualidad-T.*

Nos falta calcular los escalares de curvatura CM para el dual de Levi-Civita, y son los siguientes:

invariante CM R1

$$R1 = \frac{1}{32} \frac{5n^4 - 4n^3 + 3n^2 - 10n + 7 + n^6 - 2n^5}{(r^{(1/2n^2-1/2)})^2 r^4}$$

invariante CM R2

$$R2 = -\frac{3}{256} \frac{-2n^2 + 10n^3 - 6n - 4n^4 + 2n^6 - 2n^5 - 2n^7 + n^8 + 3}{(r^{(1/2n^2-1/2)})^3 r^6}$$

invariante CM R3

$$R3 = \frac{1}{2048} (80n^2 + 12n^3 - 128n + 49 + 16n^{10} + n^{12} - 4n^{11} + 23n^4 + 48n^6 - 64n^5 - 40n^7 - 32n^9 + 39n^8) / \left((r^{(1/2n^2-1/2)})^4 r^8 \right)$$

Contracción Completa del Tensor de Riemann

$$K = \frac{1}{4} \frac{15n^2 - 12n^3 - 18n + 9 + 7n^4 + n^6 - 2n^5}{(\tau^{(1/2)n^2 - 1/2})^2 \tau^4}$$

Si comparamos los escalares calculados para Levi-Civita y Levi-Civita dual, evidentemente son distintos. Este hecho nos muestra que realmente son dos geometrías distintas. Para el espacio original sólo el escalar de Riemann era singular en $\tau = 0$. Todos los escalares calculados para el Levi-Civita dual son singulares en el origen $\tau = 0$, y éstas singularidades sólo desaparecen si $n = \pm 1$.

Se sabe que los 14 invariantes polinomiales (como los que calculamos anteriormente) no son suficientes para caracterizar localmente en forma completa a una geometría. Existen ciertos escalares llamados Escalares de Cartán, los cuales son algo así como los componentes del tensor de Riemann y de sus derivadas covariantes hasta de 10° orden (aunque en la práctica hasta $3\epsilon r$ orden es suficiente) calculadas en un sistema constante [38, 39]. Se puede hacer una caracterización local completa de un espaciotiempo a través de ellos. El GRTensor no ofrece la posibilidad de calcular explícitamente estos escalares. Para hacerlo se necesita introducir una tétrada específica (la de Lorentz) y después en el formalismo spinorial calcular el tensor de Weyl y sus derivadas covariantes, cuyos componentes representarían los escalares de Cartan.

El hecho es que la métrica de Levi-Civita sí tiene una singularidad, la cual se hace evidente por medio de los escalares de Cartan sobre el eje z en $\tau = 0$ [38, 39]. De la singularidad se concluye que la fuente de ésta geometría del espaciotiempo es lineal, uniforme e infinita con densidad $0 \leq \sigma \leq 1/4$.

El espacio dual a Levi-Civita presenta la misma singularidad, manifestada en el cálculo "sencillo" de los escalares CM y de Riemann. La singularidad desaparece para $n = \pm 1$ (o $\sigma = 0$ y $1/2$). Pareciera que el dual de Levi-Civita nos proporciona información extra sobre el espaciotiempo dual, sin necesidad de recurrir a los relativamente complicados escalares de Cartan, como si hubieramos mapeado el problema a otro donde el comportamiento de la curvatura se puede calcular en forma simple. Esto es algo importante porque ésta es una de las motivaciones del estudio de la dualidad, esto es, una posible herramienta para aprender sobre sistemas complicados mapeando el problema a algo más sencillo.

Conclusiones

Sin duda la Dualidad es una de las ideas de mayor alcance y mayor profundidad que la física teórica de altas energías ha desarrollado en los últimos tiempos. Si bien la dualidad ha estado presente en diversas formas durante muchos años, hasta tiempos recientes se ha apreciado su profundidad y su capacidad de relacionar los diversos límites y teorías que de otra manera parecían independientes.

La dualidad- T en particular parece terminar con la distinción de grande y pequeño en la teoría de cuerdas. La relación que establece entre diferentes geometrías parece apuntar a que con Newton, el espaciotiempo era algo absoluto y estático; después con Einstein se le asignó una dinámica, y la geometría paso a primer plano; en las cuerdas parece que la geometría pierde su importancia a final de cuentas. La dualidad- T ya no distingue entre geometrías. El agujero negro en $2D$ es el caso que encuentro más impresionante, al intercambiar regiones de distinta curvatura. Aunque estos resultados son a primer orden, se espera que sirvan de guía en la búsqueda de la teoría completa y sirvan de base para ulteriores desarrollos.

Creo que los principales resultados de este trabajo los podemos resumir en lo siguiente. Las soluciones duales a las ecuaciones de fondo en cuerdas, o ecuaciones generalizadas de Einstein, pueden proporcionar información muy útil respecto a las originales, ya sea como una herramienta para hacer más fácil el cálculo de algun parámetro de nuestro sistema o bien para descubrir nuevas propiedades cualitativas del mismo. También está claro que la simetría cilíndrica se comporta de una forma más compleja que la esférica. Aún quedan por calcularse los escalares de Cartan para caracterizar definitivamente a cada espaciotiempo, original y dual, pero los diversos escalares que computamos nos proporcionan con seguridad argumentos para descartar la posibilidad de que se trate del mismo objeto.

El problema de definir cuando dos espaciotiempo son el mismo, o bien determinar en forma inequívoca que son distintos, no es nada trivial. El cálculo de escalares que llevo a cabo es sólo una primera aproximación. Un análisis más profundo requiere el estudio de propiedades globales de la métrica (causalidad), y el estudio de la propagación de campos de prueba en tal espacio. El problema de seguir un método local (como calcular escalares) es que de todas formas es difícil determinar si dos geometrías son la misma debido a la covariancia general. es decir, ¿como podemos estar

seguros de qué eventos específicos en una variedad serán comparados con eventos específicos en la otra? es por ello que las propiedades globales (la existencia de estructura de los horizontes, comportamiento asintótico, la existencia y propiedades de singularidades físicas, etc.) nos proporcionan más información en este contexto.

Otro aprendizaje importante que me llevo es sobre la relevancia de estudiar teorías como la relatividad general en bajas dimensiones. Como es usual, esta estrategia es útil para apreciar propiedades de la teoría que son difíciles de ver o calcular con el sistema físico completo. Se pueden considerar como modelos de juguete, y la simplificación creo que es muy útil para aprender aspectos cualitativos de la teoría bajo estudio.

La dualidad ha llevado a un progreso enorme y una gran actividad en el campo. El resurgimiento de los modelos de supercuerdas a consecuencia de la dualidad-S ha abierto toda una nueva etapa en el desarrollo de la física teórica, y seguramente nos llevará más lejos de lo que pensamos en la búsqueda de una visión unificada de nuestro Universo.

Apéndice A

Maple y GRTensorII

Maple [41] es un sistema integrado de computación simbólica y numérica que ofrece amplias posibilidades de visualización gráfica y experimentación matemática. Fue desarrollado originalmente por miembros del Symbolic Computation Group (SCG) en la University of Waterloo, y ahora es distribuido por Waterloo Maple Inc. Actualmente el desarrollo e investigación para la mejora y actualización del software son llevadas a cabo conjuntamente entre SCG, WMS, en colaboración con instituciones como el Centre for Experimental and Constructive Mathematics (CECM) en Burnaby, Canada, y el Institute für Wissenschaftliches Rechnen, ETH-Zentrum, en Zürich, Suiza. Desde 1993, la compañía Prescience Corp. se unió a WMS, por lo que esta última también vende y distribuye los programas Theorist/MathView y Expressionist.

GRTensorII [?] es una biblioteca para Maple que permite manipular tensores: obtener derivadas covariantes, calcular escalares de curvatura, etc. fué desarrollado por Peter Musgrave, Denis Pollney and Kayll Lake, en la Queen's University en Kingston, Ontario, Canada. Actualmente GRTensor es independiente de Maple (GRTensorJ) y también funciona con Mathematica.

Para usar la biblioteca GRTensorII se debe de cargar primero:

```
readlib(grii);
proc() end
```

El siguiente comando despliega la presentación:

```
grtensor();
```

GRTensorII Version 1.70 (R3)

31 May 1998

Developed by Peter Musgrave, Denis Pollney and Kayll Lake

Copyright 1994 - 1998 by the authors.

Latest version available from : <http://astro.queensu.ca/~grtensor/>

To initiate help type ?grtensor

Defaults read from C : MAPLEV3/lib/grtensor.ini

Defaults read from the local grtensor.ini

Este comando carga las bibliotecas de ayuda,

```
readlib(griihelp);
```

```
proc() end
```

El siguiente carga la métrica de Schwarzschild dual,

```
qload(schwdual);
```

Calculating ds for schwdual ... Done. (0.000000 sec.)

Default spacetime = schwdual

For the schwdual spacetime :

Coordinates

$x(up)$

$x^a = [t r \theta \phi]$

Line element

$$ds^2 = - \frac{dt^2}{1 - 2 \frac{m}{r}} + \frac{dr^2}{1 - 2 \frac{m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi^2$$

The Dual (Buscher) Schwarzschild metric in curvature coordinates

El siguiente comando define el vector covariante J_a ,

```
grdef('Jdn'); Created definition for J(dn)
```

Y este otro calcula sus componentes, es decir pide que se introduzcan...

```
grcalc(J(dn));
```

Enter components for object J(dn) If you wish to quit at any point and leave this object uninitialized, enter the string exit. REMEMBER to complete each entry with a semicolon. Calculating J(dn) for schwdual ...

J_t

0

J_r

$-(2*m)/(r*(r-2*m))$

J_θ

0

 J_a

0 Done. (0.000000 sec.)

CPU Time = 0

El siguiente comando despliega un objeto, en este caso el vector covariante J_a ,

```
grdisplay(J(up));
```

For the schwdual spacetime :

 $J(\text{up})$ $J(\text{up})$

$$J^a = \left[0 \quad -2 \frac{m}{r^2} \quad 0 \quad 0 \right]$$

Este comando calcula el vector contravariante J^a en base al covariante ya conocido..

```
grcalc(J(up));
```

CPU Time = 0

El siguiente comando calcula el Tensor de Ricci covariante,

```
grcalc(Ricci);
```

Esto es un reporte de la eficiencia del cálculo y pasos intermedios...

Calculating detg for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating g(up,up) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating g(dn,dn,pdn) for schwdual ... Done. (1.000000 sec.) Calculating Chr(dn,dn,dn) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating Chr(dn,dn,up) for schwdual ... Done. (0.000000sec.) Calculating R(dn,dn) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.)

CPU Time = 1.000

Esto calcula la derivada covariante del vector covariante J ,

```
grcalc(J(dn,cdn));
```

Created a definition for J(dn,cdn) Calculating J(dn,cdn) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.)

CPU Time = 0

Esto despliega el objeto calculado de forma más reciente..

```
grdisplay();
```

For the schwduial spacetime :

$$J(\text{dn}, \text{cdn})$$

$$J(\text{dn}, \text{cdn})$$

$$J_{a,ib} = \begin{bmatrix} -2 \frac{m^2}{r^2 (r-2m)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{m(2r-3m)}{r^2 (r-2m)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \frac{m}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \frac{\sin(\theta)^2 m}{r} \end{bmatrix}$$

Así se calcula el escalar de Ricci:

```
grcalc(Ricciscalar);
Calculating Ricciscalar for schwduial ... Done. (0.000000 sec.)
```

CPU Time = 0

```
Esto despliega la métrica
grdisplay(g(dn,dn));
```

For the schwduial spacetime :

Covariant metric tensor

$$g(\text{dn}, \text{dn})$$

$$g_{a,b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1-2\frac{m}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-2\frac{m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}$$

Y esta biblioteca calcula escalares invariantes..

```
grcalc(Rinvars);
```

```
Scalar invariant library. Last modified 25 March 1997. Created definition for S(up,dn) Calculating detg for schwduial ... Done. (0.000000 sec.) Calculating g(up,up) for schwduial ... Done. (0.000000 sec.) Calculating g(dn,dn,pdn) for schwduial ... Done. (0.000000 sec.) Calculating Chr(dn,dn,dn) for schwduial ... Done. (1.000000 sec.) Calculating Chr(dn,dn,up) for schwduial ... Done. (0.000000 sec.) Calculating R(dn,dn)
```

for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating Ricciscalar for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating S(dn,dn) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating S(up,dn) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating R1 for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating R2 for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating R3 for schwdual ... Done. (0.000000 sec.)

Esto calcula la contracción completa del tensor de Riemann..

grcalc(RiemSq);

Created definition for R(dn,dn,up,up) Calculating R(dn,dn,dn,dn) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating R(dn,dn,up,up) for schwdual ... Done. (0.000000 sec.) Calculating RiemSq for schwdual ... Done. (0.000000 sec.)

CPU Time = 0

La UNAM ha adquirido una licencia global para el campus C.U. desde diciembre de 1996. El apoyo técnico y mantenimiento de la licencia está a cargo del Dr. Roberto Sussman Livovsky, Consultor Académico y Representante en México en el Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM [42].

La versión más reciente de GRtensor es distribuida sin ningún costo [43]. GRtensorJ funciona en línea y requiere soporte para java como el de Netscape 4.76.

Bibliografía

- [1] L.E. Ibañez, "Unificación y Dualidad en Teoría de Cuerdas", *Investigación y ciencia*, Agosto 1998, p.26.
- [2] Physics Today, , February 1997, page 17.
- [3] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, "Superstring Theory. Vol. 1: Introduction," *Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics)*
- [4] J. Polchinski, "String Theory. Vol. 1: An Introduction To The Bosonic String," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1998) 402 p.*
- [5] J. Polchinski, *String Duality: a Colloquium, Rev. Mod. Phys.* **68** (1996) 1245, [arXiv:hep-th/9607050].
- [6] D. Lust and S. Theisen, *Lect. Notes Phys.* **346**, 1 (1989).
- [7] Carmen Nuñez , "Introduction to bosonic string theory," unpublished, LASS-2000 Lectures.
- [8] C. G. Callan and L. Thorlacius, "*Sigma Models And String Theory*," Preprint-89-0232 (PRINCETON) *In *Providence 1988, Proceedings, Particles, strings and supernovae, vol. 2* 795-878. (see Conference Index).*
- [9] C. G. Callan, "Strings In Background Fields," *Phys. Scripta* **T15**, 114 (1987).
- [10] C. Callan, D. Friedan, E. Martinec y M. Perry, *Nucl. Phys.* **B262** (1985) 593. S.F. Hassan, Notes of the Course *Introduction to Perturbative String Theory I: Superstrings*, Introductory School on String Theory, p.29, 8-19 Junio 1998, ICTP-Trieste.
- [11] S. Mukhi, "The Geometric Background Field Method, Renormalization And The Wess-Zumino Term In Nonlinear Sigma Models," *Nucl. Phys. B* **264**, 640 (1986).
- [12] J. H. Schwarz, "The second superstring revolution," [arXiv:hep-th/9607067].

- [13] Sergei V. Ketov, *Solitons, Monopoles and Duality: from Sine-Gordon to Seiberg-Witten*, [arXiv:hep-th/9611209].
- [14] P. Ramond, *Front. Phys.* **74**, 1 (1989).
- [15] L.H. Ryder, "*Quantum Field Theory*", Cambridge University Press, 1985.
- [16] A.Giveon, M.Porrati, E.Ravinovici, *Phys. Rep.* **244** (1994) 77.
- [17] T. Buscher, *Studies of the Two-dimensional nonlinear Sigma-model*, Ph.D.Thesis (1988)unpublished; *Path-Integral Derivation of Quantum Duality in Non-Linear Sigma-Models*, *Phys. Lett.* **B201** (1988) 466; *A symmetry of the String Background Field Equations*, *Phys. Lett.* **B194** (1987) 59.
- [18] P.Ginsparg y F.Quevedo, "Strings on curved Spacetimes: Black Holes, Torsion and Duality" *Nucl.Phys.* **B385** (1992) 527. [arXiv:hep-th/9202092].
- [19] F. Quevedo, "Abelian and non-abelian dualities in string backgrounds," [arXiv:hep-th/9305055].
- [20] X. de la Ossa y F.Quevedo, "Non-Abelian Isometries in String Theory" *Nucl.Phys.* **B403** (1993) 377. [arXiv:hep-th/9210021].
- [21] A. Giveon, E. Rabinovici y G. Veneziano; *Nucl.Phys.* **B322** (1989) 167, [arXiv:hep-th/9401139].
- [22] M. Roček and E. Verlinde, "Duality, Quotients, and Currents," *Nucl. Phys.*, **B373**, 630, 1992 [arXiv:hep-th/9110053]. A. Giveon and M. Roček, "Generalized Duality in Curved String Backgrounds", *Nucl. Phys.*, **B380**, 128, 1992..
- [23] F. Quevedo, "Lectures on superstring phenomenology," [arXiv:hep-th/9603074].
- [24] S.V. Hjeltnelund, U. Lindström, "Duality for the Non-Specialist", [arXiv:hep-th/9705122].
- [25] F. Quevedo, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **61A** (1998) 23-21. *Duality and Global Symmetries*, Curso impartido en la XXXIII Escuela De Invierno De Física Teórica Karpacz, Duality, strings and fields, Karpacz, Polonia, 13-22 Feb. 1997 [arXiv:hep-th/9706210].
- [26] A.M. Polyakov, "Gauge Fields and Strings" Harwood Academic Publishers (1987).
- [27] C.P. Burgess, R.C. Myers, F.Quevedo. [arXiv:hep-th/9508092].

- [28] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaumé y Y. Lozano, *Nucl. Phys B (Proc. Suppl.)* 41 (1995) 1-20, "An Introduction to T-Duality in String Theory".
- [29] R. Dijkgraaf, H. Verlinde y E. Verlinde, *Nucl. Phys B* 371 (1992) 269-314, "String Propagation in a Black Hole Geometry".
- [30] E. Witten, "String Theory and Black Holes". *Phys. Rev D* 44, 2 (1991) 314.
- [31] J. Wess y B. Zumino, *Phys. Lett B* 37, 95 (1971); E. Witten, *Comm. Math. Phys* 92, 455 (1984).
- [32] S. Elitzur, A. Forge y E. Rabinovici, preprint RI-143/90, 1990.
- [33] G. T. Horowitz and D. L. Welch, "Exact three-dimensional black holes in string theory," *Phys. Rev. Lett.* 71, 328 (1993) [arXiv:hep-th/9302126].
- [34] G. Horowitz, "The Dark Side of String Theory: Black Holes and Black Strings", UCSBTH-92-32, [arXiv:hep-th/9210119].
- [35] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "Black Hole in Three-Dimensional Spacetime", *Phys. Rev. Lett.*, 69, 1849, 1992; M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, "Geometry of the 2+1 Black Hole", *Phys. Rev. D* 48:1506-1525, 1993, [arXiv:gr-qc/9302012].
- [36] Levi-Civita T. 1917 *Recond. Ann. Lincei* 26, 307.
- [37] J. Carminati y R. G. McLenaghan, *J. Math. Phys.*, 32, 3135, (1991).
- [38] N.O. Santos. "Simetrías Cilíndricas en Relatividad General, Memorias de la Escuela Venezolana de Astrofísica, 1997.
- [39] M.F.A. da Silva, L. Herrera, F.M. Paiva y N.O. Santos, "The Levi-Civita Spacetime", [arXiv:gr-qc/9607058].
- [40] B. Linet, *Gen. Rel. Grav* 17, 1109.
- [41] <http://www.maplesoft.com>
- [42] <http://www.nuclecu.unam.mx/unamaple>
- [43] <http://grtensor.phy.queensu.ca/>