# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

## FACULTAD DE CIENCIAS

### PERTURBACIONES DE SOLUCIONES EXACTAS TIPO D DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN-MAXWELL

## TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS CON ESPECIALIDAD EN FÍSICA

Presenta

URIEL ANTONIO FILOBELLO NIÑO

posgrado en ciencias físicas
unam

Asesor

Gerardo F. Torres del Castillo

México, D.F.



Mayo 2002

# Agradecimiento

Este trabajo fue desarrollado con el apoyo del Conacyt a través del proyecto 1807P-E.

# Resumen

Se estudian las perturbaciones electromagnéticas y gravitacionales de algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein–Maxwell usando el hecho de que, para las soluciones consideradas, dichas perturbaciones están determinadas por cuatro potenciales complejos que obedecen un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. Los potenciales permiten calcular tanto las perturbaciones de la curvatura y del campo electromagnético, así como de la métrica y del potencial vectorial. Las soluciones de fondo consideradas se escogen de forma que el sistema de ecuaciones para los potenciales se pueda resolver por separación de variables.

# Índice


1. Introducción 1

2. El formalismo de Newman–Penrose 6

3. Las soluciones exactas tipo D de las ecuaciones de Einstein–Maxwell con campo alineado 17

   3.1. Descripción en el formalismo de Newman–Penrose 17

   3.2. Relaciones de conmutación y operadores de escalera 21

4. Las ecuaciones de Einstein–Maxwell linealizadas 27

   4.1. El método de operadores adjuntos 27

   4.2. Perturbaciones de soluciones de las ecuaciones de Einstein–Maxwell 32

   4.3. El caso límite del espacio-tiempo plano 38

5. Pertubaciones de algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein–Maxwell 40

   5.1. Perturbaciones de la solución de Carter CB(+) 41

   5.2. Perturbaciones de la solución $g^*{}_{\mathrm{RN}}$ 43

Conclusiones 46

Bibliografía 47

# Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones de Einstein–Maxwell describen la interacción del campo gravitacional y el campo electromagnético en el marco de la teoría de la relatividad general, de acuerdo con la cual el campo gravitacional corresponde a la curvatura del espacio-tiempo. Dichas ecuaciones constituyen un sistema acoplado de 14 ecuaciones diferenciales parciales no lineales que gobiernan las 10 componentes del tensor métrico y las 4 componentes del potencial electromagnético, por lo que hallar soluciones para este sistema es un problema muy complicado.

Sin embargo, tal como ocurre en otras áreas de la física, existe información útil que puede obtenerse por medio de un tratamiento perturbativo de las ecuaciones; al linealizar las ecuaciones de Einstein–Maxwell alrededor de una solución exacta, el problema se vuelve algo más sencillo, siendo un sistema de ecuaciones lineales, pero el alto número de ecuaciones (14) y de incógnitas (14) hace que, a pesar de la linealidad, sean pocas las soluciones exactas para las que se hayan resuelto las ecuaciones linealizadas. El caso más importante tratado hasta ahora es el de la solución de Reissner–Nordström (RN), que corresponde a un agujero negro cargado, sin rotación, y, gracias a la relativa simplicidad de esta solución, se cuenta con varios resultados acerca de sus perturbaciones (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1983). El hecho de que la solución RN sea esféricamente simétrica y estática, además de algebraicamente especial, permite aplicar diversos métodos para resolver las ecuaciones para las perturbaciones; de cualquier manera, el máximo avance consiste en reducir todo el problema a dos ecuaciones diferenciales ordinarias tipo Schrödinger (Torres del Castillo 1987).

Cuando la solución de fondo es algebraicamente especial y una de las direcciones principales del campo electromagnético es geodésica y sin distorsión, las perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas pueden expresarse en términos de cuatro potenciales complejos que deben satisfacer un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales parciales de primer orden (Torres del Castillo 1988a). Dicho sistema de ecuaciones es soluble por separación de variables en el caso de la solución RN pero, al parecer, no lo es en el caso más interesante aún de la solución de Kerr–Newman, la cual corresponde a un agujero negro cargado, con rotación.

Las perturbaciones gravitacionales estudiadas en la aproximación lineal de las ecuaciones de Einstein–Maxwell describen radiación gravitacional, la cual es una de las diversas predicciones de la teoría de la gravitación de Einstein pero que, a diferencia de otras, no se ha verificado en forma directa. En la actualidad se realizan muchos esfuerzos para llegar a comprobar directamente la existencia de las ondas gravitacionales. La aproximación lineal empleada aquí permite analizar muchas de las características que la radiación gravitacional tiene de acuerdo con la relatividad general, tales como la conversión mutua de ondas gravitacionales y electromagnéticas.

A pesar de tratarse de una aproximación, el tratamiento perturbativo es muy útil en virtud de la debilidad de las perturbaciones gravitacionales que llegan a nuestra vecindad, las cuales deben producirse en diversos fenómenos astrofísicos (explosiones estelares, coalescencia de agujeros negros, por ejemplo). Así, junto con el interés intrínseco del estudio de las perturbaciones en la relatividad general, como un método para investigar las predicciones de la teoría, existen efectos detectables de importancia en la astrofísica. El estudio de las perturbaciones de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein se ha empleado para determinar la estabilidad de dichas soluciones y, en el caso específico de los agujeros negros, ha llevado a efectos tales como la superradiancia (consistente en que la energía reflejada por un agujero negro rotante resulta ser mayor que la energía incidente), la conversión de radiación gravitacional en electromagnética y viceversa, y los cambios en la polarización de la radiación producidos por la dispersión (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1983, Frolov and Novikov 1998, Torres del Castillo and Cartas Fuentevilla 1996).

En este trabajo se estudian las perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas de algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein–Maxwell por medio de los potenciales escalares mencionados arriba. Las soluciones exactas consideradas aquí, al igual que la solución RN y la de Kerr–Newman, pertenecen al tipo D en la clasificación de Petrov–Penrose. Las métricas de este tipo se distinguen por el hecho de que diversas ecuaciones son solubles por separación de variables (ver, por ejemplo, Kamran and McLenaghan 1987, Torres del Castillo 1988b). Un campo sin masa de espín $s$ ($s = 0, 1/2, 1, \ldots$) se representa por $2s+1$ componentes, $\phi_n$ ($n = -s, -s+1, \ldots, s$), que, en el caso de un espacio-tiempo curvo, obedecen un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Para las soluciones tipo D de las ecuaciones de Einstein para el vacío o de las ecuaciones de Einstein–Maxwell, eligiendo convenientemente la base, al menos dos de estas componentes, $\phi_s$ y $\phi_{-s}$, satisfacen ecuaciones desacopladas de segundo orden que, además, pueden resolverse por separación de variables.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias a las que se reducen estas ecuaciones desacopladas involucran ciertos operadores diferenciales, denotados por $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_n^\dagger$, $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}_n^\dagger$, los cuales tienen la propiedad de que al ser aplicados $2s$ veces a las funciones de una variable que aparecen en $\phi_{\pm s}$ reproducen las que aparecen en $\phi_{\mp s}$ (tales relaciones reciben el nombre de identidades de Teukolsky–Starobinsky, ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1983, Torres del Castillo 1988b). Esto significa que los operadores $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_n^\dagger$, $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}_n^\dagger$ actúan como operadores de subida y bajada, similares a los que se obtienen en relación con ciertas ecuaciones diferenciales (ver, por ejemplo, Piña 1995) con la diferencia de que, si $s > 1/2$, al aplicar los operadores $\mathcal{L}_n$, $\mathcal{L}_n^\dagger$, $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}_n^\dagger$ una sola vez a las funciones separadas no se obtiene en todos los casos alguna función relevante.

En las perturbaciones de una solución de las ecuaciones de Einstein–Maxwell, las perturbaciones electromagnéticas están acopladas con las perturbaciones gravitacionales, por lo que es necesario considerar ambas perturbaciones simultáneamente. Puesto que estas perturbaciones corresponden a campos de espín 1 y 2 es conveniente que, tal como ocurre con la solución RN, para asegurar la separabilidad de las ecuaciones a considerar, se restrinja el estudio a aquellas soluciones tipo D para las que los operadores $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{L}_n^\dagger$ o $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}_n^\dagger$, actúen como operadores de subida y bajada.

Los resultados existentes sobre perturbaciones de las soluciones de las ecuaciones de Einstein–Maxwell son bastante escasos; aparte de los relacionados con la solución RN y los resultados parciales acerca de la solución de Kerr–Newman, se han estudiado las perturbaciones de soluciones que representan ondas colisionantes (ver, por ejemplo, Chandrasekhar and Xanthopoulos 1985, Torres del Castillo and Mendoza Barrera 1996).

Desde el punto de vista astrofísico, la solución tipo D de las ecuaciones de Einstein–Maxwell con campo electromagnético alineado de mayor interés es la solución de Kerr–Newman, por lo que sería deseable resolver las ecuaciones para las perturbaciones de esta solución y es de esperarse que, al igual que en el estudio de las perturbaciones de las demás soluciones que representan agujeros negros, resulten fenómenos sumamente interesantes para la física teórica; sin embargo, los intentos realizados hasta ahora no han permitido obtener un avance similar al logrado en los casos de las soluciones de Schwarzschild, Reissner–Nordström y Kerr. Como se señaló arriba, esta situación se debe a que el método de separación de variables, que ha sido útil en los otros casos, no parece aplicable para hallar las perturbaciones de la solución de Kerr–Newman.

Se espera que el estudio presentado aquí pueda servir para desarrollar alguna técnica alternativa partiendo del estudio de las perturbaciones de otras soluciones del mismo tipo.

Este trabajo está organizado en la siguiente forma. En el capítulo 2 se presentan los elementos esenciales del formalismo de Newman–Penrose, el cual se emplea en el resto del trabajo y en muchas de las referencias citadas. En el capítulo 3 se da la información básica acerca de las soluciones exactas tipo D de las ecuaciones de Einstein–Maxwell con campo electromagnético alineado. La Sección 3.2 contiene contribuciones originales de este trabajo, relacionadas con los operadores de escalera ya mencionados. En el capítulo 4 se reproduce la deducción de las expresiones para las perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas en términos de potenciales de Debye. *Como otra contibución de este trabajo, en la Sección 4.3 se muestra cómo* en el límite del espacio-tiempo plano, se obtienen los resultados ya conocidos para las perturbaciones (desacopladas) del espacio de Minkowski, los cuales, entre otras cosas, permiten deducir el desarrollo multipolar usual para el campo electromagnético. En el capítulo 5 se aplican finalmente los resultados de los capítulos previos en el estudio de las perturbaciones de algunas de las soluciones exactas presentadas en la Sección 3.1, hasta llegar a sistemas de ecuaciones ordinarias cuyas soluciones determinan en forma completa las perturbaciones de las soluciones consideradas.

# Capítulo 2

## EL FORMALISMO DE NEWMAN–PENROSE

En este formalismo (Newman y Penrose 1966), en cada punto del espacio-tiempo se introduce una base "luxoide" (*null*) formada por cuatro vectores $l^\mu$, $n^\mu$, $m^\mu$ y $\overline{m}^\mu$, tales que $l^\mu$ y $n^\mu$ son reales, mientras que $m^\mu$ y $\overline{m}^\mu$ son conjugados entre sí, de tal forma que las únicas contracciones entre ellos distintas de cero están dadas por las expresiones:

$$l^\mu n_\mu = 1, \qquad m^\mu \overline{m}_\mu = -1 \tag{2.1}$$

Estas condiciones requieren que la signatura de la métrica sea $(+ - - -)$ e implican que el tensor métrico mismo esté dado por

$$ds^2 = (l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu)\, dx^\mu dx^\nu, \tag{2.2}$$

es decir,

$$g_{\mu\nu} = l_\mu n_\nu + n_\mu l_\nu - m_\mu \overline{m}_\nu - \overline{m}_\mu m_\nu. \tag{2.3}$$

Los coeficientes de rotación de Ricci correspondientes a la tétrada anterior equivalen a las doce funciones complejas, llamadas *coeficientes de espín*, las cuales están dadas por (ver, por ejemplo, Stewart 1990)

$$
\begin{aligned}
\kappa &= m^{\mu} l_{\mu;\nu} l^{\nu} = -l^{\mu} m_{\mu;\nu} l^{\nu}, \\
\sigma &= m^{\mu} l_{\mu;\nu} m^{\nu} = -l^{\mu} m_{\mu;\nu} m^{\nu}, \\
\rho &= m^{\mu} l_{\mu;\nu} \overline{m}^{\nu} = -l^{\mu} m_{\mu;\nu} \overline{m}^{\nu}, \\
\tau &= m^{\mu} l_{\mu;\nu} n^{\nu} = -l^{\mu} m_{\mu;\nu} n^{\nu}, \\
\epsilon &= \tfrac{1}{2}(n^{\mu} l_{\mu;\nu} l^{\nu} + m^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} l^{\nu}), \\
\beta &= \tfrac{1}{2}(n^{\mu} l_{\mu;\nu} m^{\nu} + m^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} m^{\nu}), \\
\alpha &= \tfrac{1}{2}(n^{\mu} l_{\mu;\nu} \overline{m}^{\nu} + m^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} \overline{m}^{\nu}), \\
\gamma &= \tfrac{1}{2}(n^{\mu} l_{\mu;\nu} n^{\nu} + m^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} n^{\nu}), \\
\pi &= n^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} l^{\nu} = -\overline{m}^{\mu} n_{\mu;\nu} l^{\nu}, \\
\mu &= n^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} m^{\nu} = -\overline{m}^{\mu} n_{\mu;\nu} m^{\nu}, \\
\lambda &= n^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} \overline{m}^{\nu} = -\overline{m}^{\mu} n_{\mu;\nu} \overline{m}^{\nu}, \\
\nu &= n^{\mu} \overline{m}_{\mu;\nu} n^{\nu} = -\overline{m}^{\mu} n_{\mu;\nu} n^{\nu},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

donde ";" significa derivación covariante.

De las ecuaciones (2.3) y (2.4), las derivadas de los vectores de la tétrada en las direcciones de éstos se pueden expresar en términos de los coeficientes de espín, por las relaciones

$$
\begin{aligned}
l^{\nu}\, l_{\mu;\nu} &= (\epsilon + \overline{\epsilon})\, l_{\mu} - \overline{\kappa}\, m_{\mu} - \kappa\, \overline{m}_{\mu}, \\
n^{\nu}\, l_{\mu;\nu} &= (\gamma + \overline{\gamma})\, l_{\mu} - \overline{\tau}\, m_{\mu} - \tau\, \overline{m}_{\mu}, \\
m^{\nu}\, l_{\mu;\nu} &= (\beta + \overline{\alpha})\, l_{\mu} - \overline{\rho}\, m_{\mu} - \sigma\, \overline{m}_{\mu}, \\
l^{\nu}\, n_{\mu;\nu} &= -(\epsilon + \overline{\epsilon})\, n_{\mu} + \pi\, m_{\mu} + \overline{\pi}\, \overline{m}_{\mu}, \\
n^{\nu}\, n_{\mu;\nu} &= -(\gamma + \overline{\gamma})\, n_{\mu} + \nu\, m_{\mu} + \overline{\nu}\, \overline{m}_{\mu},
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

$$\begin{aligned}
m^\nu n_{\mu;\nu} &= -(\beta+\overline{\alpha})\, n_\mu + \mu\, m_\mu + \overline{\lambda}\, \overline{m}_\mu, \\
l^\nu m_{\mu;\nu} &= \overline{\pi}\, l_\mu - \kappa\, n_\mu + (\epsilon - \overline{\epsilon})\, m_\mu, \\
n^\nu m_{\mu;\nu} &= \overline{\nu}\, l_\mu - \tau\, n_\mu + (\gamma - \overline{\gamma})\, m_\mu, \\
m^\nu m_{\mu;\nu} &= \overline{\lambda}\, l_\mu - \sigma\, n_\mu + (\beta - \overline{\alpha})\, m_\mu, \\
\overline{m}^\nu m_{\mu;\nu} &= \overline{\mu}\, l_\mu - \rho\, n_\mu + (\alpha - \overline{\beta})\, m_\mu.
\end{aligned}$$

Las derivadas direccionales a lo largo de los vectores de la tétrada se representan por los símbolos $D$, $\Delta$, $\delta$, y $\overline{\delta}$:

$$D = l^\mu\, \partial_\mu, \qquad \Delta = n^\mu\, \partial_\mu, \qquad \delta = m^\mu\, \partial_\mu, \qquad \overline{\delta} = \overline{m}^\mu\, \partial_\mu, \tag{2.6}$$

de tal forma que de (2.5), (2.6) y de la relación $[X^\mu\, \partial_\mu, Y^\nu\, \partial_\nu] = (X^\mu\, Y^\nu{}_{;\mu} - Y^\mu\, X^\nu{}_{;\mu})\, \partial_\nu$, se obtienen las relaciones de conmutación

$$\begin{aligned}
[\Delta, D] &= (\gamma + \overline{\gamma}) D + (\epsilon + \overline{\epsilon})\Delta - (\overline{\tau} + \pi)\delta - (\tau + \overline{\pi})\overline{\delta}, \\
[\delta, D] &= (\overline{\alpha} + \beta - \overline{\pi}) D + \kappa\Delta - (\overline{\rho} + \epsilon - \overline{\epsilon})\delta - \sigma\overline{\delta}, \\
[\delta, \Delta] &= -\overline{\nu} D + (\tau - \overline{\alpha} - \beta)\Delta + (\mu - \gamma + \overline{\gamma})\delta + \overline{\lambda}\overline{\delta}, \\
[\overline{\delta}, \delta] &= (\overline{\mu} - \mu) D + (\overline{\rho} - \rho)\Delta + (\alpha - \overline{\beta})\delta - (\overline{\alpha} - \beta)\overline{\delta}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Estas relaciones son útiles para calcular los coeficientes de espín para una tétrada dada.

La curvatura del espacio–tiempo está representada por el tensor de curvatura de Riemann, el cual se determina a partir de la no conmutatividad de las derivadas covariantes. En lo que sigue se hace uso de la convención dada por

$$T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots;\gamma\delta} - T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots;\delta\gamma} = R_{\gamma\delta\sigma}{}^{\alpha} T^{\sigma\ldots}_{\beta\ldots} + \cdots - R_{\gamma\delta\beta}{}^{\sigma} T^{\alpha\ldots}_{\sigma\ldots} - \cdots, \tag{2.8}$$

donde $T^{\alpha\ldots}_{\beta\ldots}$ son las componentes de un campo tensorial y $R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma}$ es tensor de curvatura de Riemann. Estas expresiones son llamadas fórmulas o identidades de Ricci en el formalismo tensorial.

El tensor de Riemann se puede descomponer en términos del tensor de Weyl (llamado de curvatura conforme), $C_{\mu\nu\rho\sigma}$, el tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, y la curvatura escalar, $R$, (estos dos últimos determinados por las ecuaciones de Einstein):

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + \tfrac{1}{2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho}) - \tfrac{1}{6}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma})R. \quad (2.9)$$

donde

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}, \quad (2.10)$$

y

$$R = R^{\mu}{}_{\mu}. \quad (2.11)$$

En el formalismo de Newman–Penrose, las componentes independientes del tensor de Weyl están combinadas en cinco escalares complejos dados por (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1983, Stewart 1990)

$$\begin{aligned}
\Psi_0 &= C_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\mu} m^{\nu} l^{\rho} m^{\sigma}, \\
\Psi_1 &= C_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\mu} n^{\nu} l^{\rho} m^{\sigma}, \\
\Psi_2 &= C_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\mu} m^{\nu} \overline{m}^{\rho} n^{\sigma}, \\
\Psi_3 &= C_{\mu\nu\rho\sigma} l^{\mu} n^{\nu} \overline{m}^{\rho} n^{\sigma}, \\
\Psi_4 &= C_{\mu\nu\rho\sigma} n^{\mu} \overline{m}^{\nu} n^{\rho} \overline{m}^{\sigma},
\end{aligned} \quad (2.12)$$

(equivalentemente, $\Psi_2$ puede expresarse como $\Psi_2 = \frac{1}{2}C_{\mu\nu\rho\sigma}(l^{\mu}m^{\nu}\overline{m}^{\rho}n^{\sigma} - l^{\mu}n^{\nu}l^{\rho}n^{\sigma})$ lo cual sigue del hecho de que todas las trazas de $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ son cero).

Los campos gravitacionales se clasifican considerando la estructura algebraica del tensor de Weyl. La llamada clasificación de Petrov–Penrose se puede obtener determinando la multiplicidad de las raíces del polinomio de cuarto grado

$$\Psi_0 + 4\Psi_1 z + 6\Psi_2 z^2 + 4\Psi_3 z^3 + \Psi_4 z^4 = 0, \quad (2.13)$$

donde $\Psi_0$, $\Psi_1$, $\Psi_2$, $\Psi_3$, $\Psi_4$ son los escalares de Weyl [ec. (2.12)] y $z$ es una variable compleja. El polinomio anterior se obtiene del efecto de la siguiente transformación sobre el escalar de Weyl $\Psi_0$

$$n \to n, \quad l \to l + \overline{z}m + z\overline{m} + z\overline{z}n, \quad m \to m + zn, \quad \overline{m} \to \overline{m} + \overline{z}n,$$

donde $z$ es una variable compleja y $\overline{z}$ es su compleja conjugada (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1983).

Encontrar la multiplicidad de las raices del polinomio de cuarto grado anterior es equivalente a determinar la multiplicidad de las direcciones luxoides principales del tensor de Weyl, las cuales se definen por

$$\begin{aligned} k_{[\rho}C_{\kappa]\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^{\lambda}k^{\mu} &= 0, \\ C_{\kappa\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^{\lambda}k^{\mu} &= 0, \\ C_{\kappa\lambda\mu[\nu}k_{\sigma]}k^{\mu} &= 0, \\ C_{\kappa\lambda\mu\nu}k^{\mu} &= 0, \end{aligned}$$

donde $k^{\mu}$ es un vector luxoide y los corchetes denotan antisimetrización sobre los índices encerrados.

Hay a lo más cuatro direcciones luxoides principales y de acuerdo con éstas se tiene la siguiente clasificación.

Tipo I o {1,1,1,1}. Ninguna de las cuatro direcciones principales coincide. Este es llamado el caso algebraicamente general.

Tipo II o {2,1,1}. Dos direcciones luxoides principales coinciden.

Tipo D o {2,2}. Hay dos (diferentes) pares de direcciones luxoides principales repetidas.

Tipo III o {3,1}. Tres direcciones luxoides principales coinciden.

Tipo N o {4}. Las cuatro direcciones luxoides principales coinciden.

Si el tensor de Weyl es cero, el espacio-tiempo es conformalmente plano o de tipo O. Los casos II, D, III, N y O son llamados *algebraicamente especiales* (tienen direcciones luxoides principales repetidas).

Si alguno de los dos vectores base $l^\mu$ o $n^\mu$ está alineado con una dirección luxoide principal, entonces $\Psi_0 = 0$ o $\Psi_4 = 0$, respectivamente. Si el vector $l^\mu$ está alineado con la dirección luxoide principal repetida de un espacio-tiempo algebraicamente especial, entonces $\Psi_0 = \Psi_1 = 0$. Si la dirección luxoide principal se repite dos, tres o cuatro veces, las únicas componentes distintas de cero son los conjuntos $(\Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)$, $(\Psi_3, \Psi_4)$ o $\Psi_4$, respectivamente. Finalmente, si $l^\mu$ y $n^\mu$ están ambos alineados con las distintas direcciones luxoides principales de un espacio-tiempo tipo D, entonces la única componente distinta de cero del tensor de Weyl es $\Psi_2$.

La parte sin traza del tensor de Ricci se define en términos de los siguientes escalares (Chandrasekhar 1983, Stewart 1990)

$$\begin{aligned} \Phi_{00} &= \Phi_{\mu\nu} l^\mu l^\nu, & \Phi_{01} &= \Phi_{\mu\nu} l^\mu m^\nu, & \Phi_{02} &= \Phi_{\mu\nu} m^\mu m^\nu, \\ \Phi_{10} &= \Phi_{\mu\nu} l^\mu \overline{m}^\nu, & \Phi_{11} &= \Phi_{\mu\nu} l^\mu n^\nu, & \Phi_{12} &= \Phi_{\mu\nu} m^\mu n^\nu, \\ \Phi_{20} &= \Phi_{\mu\nu} \overline{m}^\mu \overline{m}^\nu, & \Phi_{21} &= \Phi_{\mu\nu} \overline{m}^\mu n^\nu, & \Phi_{22} &= \Phi_{\mu\nu} n^\mu n^\nu, \end{aligned} \tag{2.14}$$

(equivalentemente, $\Phi_{11}$ puede expresarse como $\Phi_{11} = \frac{1}{2}\Phi_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu - m^\mu \overline{m}^\nu)$ lo cual sigue del hecho de que la traza de $\Phi_{\mu\nu}$ es cero), donde

$$\Phi_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}R g_{\mu\nu}). \tag{2.15}$$

Las componentes tetradiales de la curvatura [ecs. (2.12) y (2.14)], están relacionadas con los coeficientes de espín a través de las identidades de Ricci. En el contexto estándar del formalismo de tétradas se obtienen 36 ecuaciones de las identidades de Ricci, pero en el formalismo de Newman–Penrose es suficiente con escribir sólo la mitad de estas ecuaciones (las 18 ecuaciones que se escriben a continuación), las 18 ecuaciones restantes se obtienen tomando el complejo conjugado de cada una de las ecuaciones siguientes

$$
\begin{aligned}
(D - 3\epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})\sigma - (\delta - 3\beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi})\kappa &= \Psi_0, \\
(D - \epsilon - \bar{\epsilon} - \rho)\rho - (\bar{\delta} - 3\alpha - \bar{\beta} + \pi)\kappa - \sigma\bar{\sigma} + \tau\bar{\kappa} &= \Phi_{00}, \\
(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho)\tau - (\Delta - 3\gamma - \bar{\gamma})\kappa - \sigma(\pi + \bar{\tau}) - \rho\bar{\pi} &= \Psi_1 + \Phi_{01}, \\
(\delta - \beta - \bar{\alpha} - \tau)\rho - (\bar{\delta} - 3\alpha + \bar{\beta})\sigma + \tau\bar{\rho} + \kappa(\bar{\mu} - \mu) &= -\Psi_1 + \Phi_{01}, \\
(\delta - \beta + \bar{\alpha} - \tau)\tau - (\Delta - 3\gamma + \bar{\gamma} + \mu)\sigma - \rho\bar{\lambda} + \kappa\bar{\nu} &= \Phi_{02}, \\
(\bar{\delta} - \alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\tau - (\Delta - \gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu})\rho - \sigma\lambda + \nu\kappa &= \Psi_2 + 2\Lambda, \\
(D - \epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\rho})\beta - (\delta - \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi})\epsilon - \sigma(\alpha + \pi) + \kappa(\mu + \gamma) &= \Psi_1, \\
(D + \epsilon - \bar{\epsilon} - \rho)\alpha - (\bar{\delta} - \alpha - \bar{\beta} + \pi)\epsilon - \beta\bar{\sigma} + \kappa\lambda + \gamma\bar{\kappa} - \pi\rho &= \Phi_{10}, \\
(D + \epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\Delta - \gamma - \bar{\gamma})\epsilon - \alpha(\tau + \bar{\pi}) - \beta(\pi + \bar{\tau}) - \tau\pi + \nu\kappa &= \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda, \\
(\delta + \beta - \bar{\alpha})\alpha - (\bar{\delta} - \alpha + \bar{\beta})\beta + \gamma(\bar{\rho} - \rho) + \epsilon(\bar{\mu} - \mu) + \lambda\sigma - \mu\rho &= -\Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda, \\
(\delta + \beta - \bar{\alpha} - \tau)\gamma - (\Delta - \gamma + \bar{\gamma} + \mu)\beta - \alpha\bar{\lambda} + \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \mu\tau &= \Phi_{12}, \qquad (2.16) \\
(\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + \bar{\mu})\alpha - \lambda(\beta + \tau) + \nu(\rho + \epsilon) &= \Psi_3, \\
(D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\rho})\mu - (\delta + \beta - \bar{\alpha} + \bar{\pi})\pi - \sigma\lambda + \nu\kappa &= \Psi_2 + 2\Lambda, \\
(D + 3\epsilon - \bar{\epsilon} - \rho)\lambda - (\bar{\delta} + \alpha - \bar{\beta} + \pi)\pi - \mu\bar{\sigma} + \nu\bar{\kappa} &= \Phi_{20}, \\
(\delta + 3\beta - \bar{\alpha})\lambda - (\bar{\delta} + \alpha + \bar{\beta} + \pi)\mu + \pi\bar{\mu} + \nu(\bar{\rho} - \rho) &= -\Psi_3 + \Phi_{21}, \\
(D + 3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu - (\Delta + \gamma - \bar{\gamma} + \mu)\pi - \lambda(\tau + \bar{\pi}) - \mu\bar{\tau} &= \Psi_3 + \Phi_{21}, \\
(\delta + 3\beta + \bar{\alpha} - \tau)\nu - (\Delta + \gamma + \bar{\gamma} + \mu)\mu - \lambda\bar{\lambda} + \pi\bar{\nu} &= \Phi_{22}, \\
(\bar{\delta} + 3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - (\Delta + 3\gamma - \bar{\gamma} + \mu + \bar{\mu})\lambda &= \Psi_4,
\end{aligned}
$$

donde

$$\Lambda \equiv \frac{R}{24} \qquad (2.17)$$

Las identidades de Bianchi están dadas de manera explícita por las relaciones:

$$
\begin{aligned}
&(D-2\epsilon-4\rho)\Psi_1-(\overline{\delta}-4\alpha+\pi)\Psi_0+3\kappa\Psi_2-(D-2\epsilon-2\overline{\rho})\Phi_{01}\\
&\qquad+(\delta-2\beta-2\overline{\alpha}+\overline{\pi})\Phi_{00}+2\sigma\Phi_{10}-2\kappa\Phi_{11}-\overline{\kappa}\Phi_{02}=0,\\
&(D-3\rho)\Psi_2-(\overline{\delta}-2\alpha+2\pi)\Psi_1+\lambda\Psi_0+2\kappa\Psi_3\\
&\qquad+(\Delta-2\gamma-2\overline{\gamma}+\overline{\mu})\Phi_{00}-(\overline{\delta}-2\alpha-2\overline{\tau})\Phi_{01}+2\tau\Phi_{10}\\
&\qquad-2\rho\Phi_{11}-\overline{\sigma}\Phi_{02}+2D\Lambda=0,\\
&(D+2\epsilon-2\rho)\Psi_3-(\overline{\delta}+3\pi)\Psi_2+2\lambda\Psi_1+\kappa\Psi_4-(D+2\epsilon-2\overline{\rho})\Phi_{21}\\
&\qquad+(\delta+2\beta-2\overline{\alpha}+\overline{\pi})\Phi_{20}-2\mu\Phi_{10}+2\pi\Phi_{11}-\overline{\kappa}\Phi_{22}-2\overline{\delta}\Lambda=0,\\
&(D+4\epsilon-\rho)\Psi_4-(\overline{\delta}+2\alpha+4\pi)\Psi_3+3\lambda\Psi_2+(\Delta+2\gamma-2\overline{\gamma}+\overline{\mu})\Phi_{20}\\
&\qquad-(\overline{\delta}+2\alpha-2\overline{\tau})\Phi_{21}-2\nu\Phi_{10}+2\lambda\Phi_{11}-\overline{\sigma}\Phi_{22}=0,\\
&(\Delta-4\gamma+\mu)\Psi_0-(\delta-2\beta-4\tau)\Psi_1-3\sigma\Psi_2+(D-2\epsilon+2\overline{\epsilon}-\overline{\rho})\Phi_{02}\\
&\qquad-(\delta-2\beta+2\overline{\pi})\Phi_{01}+2\kappa\Phi_{12}-2\sigma\Phi_{11}+\overline{\lambda}\Phi_{00}=0,\\
&(\Delta-2\gamma+2\mu)\Psi_1-(\delta-3\tau)\Psi_2-2\sigma\Psi_3-\nu\Psi_0-(\Delta-2\gamma+2\overline{\mu})\Phi_{01}\\
&\qquad+(\overline{\delta}-2\alpha+2\overline{\beta}-\overline{\tau})\Phi_{02}+2\rho\Phi_{12}-2\tau\Phi_{11}+\overline{\nu}\Phi_{00}-2\delta\Lambda=0,\\
&(\Delta+3\mu)\Psi_2-(\delta+2\beta-2\tau)\Psi_3-\sigma\Psi_4-2\nu\Psi_1\\
&\qquad+(D+2\epsilon+2\overline{\epsilon}-\overline{\rho})\Phi_{22}-(\delta+2\beta+2\overline{\pi})\Phi_{21}-2\pi\Phi_{12}\\
&\qquad+2\mu\Phi_{11}+\overline{\lambda}\Phi_{20}+2\Delta\Lambda=0,\\
&(\Delta+2\gamma+4\mu)\Psi_3-(\delta+4\beta-\tau)\Psi_4-3\nu\Psi_2-(\Delta+2\gamma+2\overline{\mu})\Phi_{21}\\
&\qquad+(\overline{\delta}+2\alpha+2\overline{\beta}-\overline{\tau})\Phi_{22}-2\lambda\Phi_{12}+2\nu\Phi_{11}+\overline{\nu}\Phi_{20}=0,
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(D-2\rho-2\overline{\rho})\Phi_{11}-(\delta-2\overline{\alpha}-2\tau+\overline{\pi})\Phi_{10}\\
+(\Delta-2\gamma-2\overline{\gamma}+\mu+\overline{\mu})\Phi_{00}-(\overline{\delta}-2\alpha+\pi-2\overline{\tau})\Phi_{01}\\
-\overline{\sigma}\Phi_{02}-\sigma\Phi_{20}+\overline{\kappa}\Phi_{12}+\kappa\Phi_{21}+3D\Lambda=0,\\
(D+2\overline{\epsilon}-2\rho-\overline{\rho})\Phi_{12}-(\delta-2\tau+2\overline{\pi})\Phi_{11}+(\Delta-2\gamma+\mu+2\overline{\mu})\Phi_{01}\\
-(\overline{\delta}-2\alpha+2\overline{\beta}+\pi-\overline{\tau})\Phi_{02}-\overline{\nu}\Phi_{00}+\overline{\lambda}\Phi_{10}-\sigma\Phi_{21}+\kappa\Phi_{22}+3\delta\Lambda=0,\\
(D+2\epsilon+2\overline{\epsilon}-\rho-\overline{\rho})\Phi_{22}-(\delta+2\beta-\tau+2\overline{\pi})\Phi_{21}\\
+(\Delta+2\mu+2\overline{\mu})\Phi_{11}-(\overline{\delta}+2\overline{\beta}+2\pi-\overline{\tau})\Phi_{12}\\
+\overline{\lambda}\Phi_{20}+\lambda\Phi_{02}-\overline{\nu}\Phi_{10}-\nu\Phi_{01}+3\Delta\Lambda=0.
\end{aligned}
\tag{2.19}
$$

De particular interés para el problema que se trata, es lo referente a las ecuaciones de Maxwell y las de Einstein con un campo electromagnético como fuente. En el formalismo de Newman–Penrose, el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ se reemplaza por los tres escalares complejos:

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= F_{\mu\nu}l^\mu m^\nu,\\
\phi_1 &= \tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}(l^\mu n^\nu+\overline{m}^\mu m^\nu),\\
\phi_2 &= F_{\mu\nu}\overline{m}^\mu n^\nu,
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

[cf. ec. (2.12)] de tal forma que las ecuaciones de Maxwell están dadas por:

$$
\begin{aligned}
(\overline{\delta}-2\alpha+\pi)\phi_0-(D-2\rho)\phi_1-\kappa\phi_2 &= l^\mu 2\pi j_\mu,\\
(\Delta-2\gamma+\mu)\phi_0-(\delta-2\tau)\phi_1-\sigma\phi_2 &= m^\mu 2\pi j_\mu,\\
(\overline{\delta}+2\pi)\phi_1-(D+2\epsilon-\rho)\phi_2-\lambda\phi_0 &= \overline{m}^\mu 2\pi j_\mu,\\
(\Delta+2\mu)\phi_1-(\delta+2\beta-\tau)\phi_2-\nu\phi_0 &= n^\mu 2\pi j_\mu,
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

en un sistema de unidades tal que $c = 1$, donde $j_\mu$ son las componentes de la cuadricorriente (el factor $\pi$ que acompaña a $j_\mu$ no debe confundirse con el coeficiente de espín representado por el mismo símbolo). Por otra parte, las ecuaciones de Einstein con un campo electromagnético como fuente, que en el lenguaje tensorial se escriben como:

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 2(F_{\mu\rho}F_\nu{}^\rho - \tfrac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}), \tag{2.22}$$

en unidades tales que $G = 1 = c$, equivalen a

$$\Phi_{ij} = 2\phi_i\overline{\phi_j}, \qquad (i, j = 0, 1, 2). \tag{2.23}$$

El tensor de campo electromagnético, $F_{\mu\nu}$, también puede clasificarse algebraicamente tomando en cuenta las posibles coincidencias de sus *direcciones principales luxoides*. Un cuadrivector $k^\mu$ distinto de cero define una dirección principal de $F_{\mu\nu}$ si

$$k^\mu F_{\mu[\nu}k_{\rho]} = 0.$$

Esta condición implica que $k^\mu$ sea luxoide y en cada punto del espacio-tiempo donde $F_{\mu\nu}$ no se anule existen dos direcciones principales reales; $F_{\mu\nu}$ es algebraicamente general si estas dos direcciones principales son distintas o algebraicamente especial si las dos direcciones principales coinciden. Equivalentemente, la clasificación del tensor de campo electromagnético puede hacerse con base en la multiplicidad de las raíces del polinomio

$$\phi_0 + 2\phi_1 z + \phi_2 z^2,$$

donde $z$ es una variable compleja [cf. (2.13)]. Si las dos raíces de este polinomio son distintas, el campo electromagnético es algebraicamente general, mientras que si las dos raíces coinciden, el campo electromagnético es algebraicamente especial.

Se puede probar que el vector $l^\mu$ de la tétrada es una dirección principal de $F_{\mu\nu}$ si y sólo si $\phi_0 = 0$ y que $l^\mu$ es una dirección principal repetida si y sólo si $\phi_0 = 0 = \phi_1$.

Cuando el campo electromagnético es algebraicamente general, los vectores $l^\mu$ y $n^\mu$ pueden escogerse de tal manera que sólo $\phi_1$ sea distinto de cero.

A algunos de los coeficientes de espín se les puede dar un significado geométrico relacionado con las curvas integrales de los vectores de la tétrada (ver, por ejemplo, Chandrasekhar 1983, Stewart 1990). En particular, $\kappa = 0$ si y sólo si $l^\mu$ es tangente a una familia de curvas geodésicas luxoides. Si además $\sigma = 0$, dicha familia no tiene distorsión (*shear*), lo que significa que las curvas de esta familia pueden girar, divergir o convergir, pero de tal forma que, a primer orden, no cambia la forma del perfil de un haz de estas curvas.

# Capítulo 3

# LAS SOLUCIONES EXACTAS TIPO D DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN–MAXWELL CON CAMPO ALINEADO

Además de las propiedades de las métricas tipo D ya mencionadas en la Introducción, las métricas de este tipo se distinguen por el hecho de que todas aquellas que satisfacen las ecuaciones de Einstein para el vacío se han hallado explícitamente, lo mismo que las que satisfacen las ecuaciones de Einstein–Maxwell, si el campo electromagnético es algebraicamente general y sus direcciones principales coinciden con las de la curvatura conforme (en cuyo caso se dice que el campo electromagnético está alineado) (ver, por ejemplo, García Díaz 1984, Debever et al. 1984).

## 3.1. Descripción en el formalismo de Newman–Penrose

Escogiendo la tétrada de tal forma que $l^\mu$ y $n^\mu$ apunten en las direcciones principales del campo electromagnético y de la curvatura conforme, se tiene $\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0$ y $\phi_0 = \phi_2 = 0$; de las ecuaciones de Maxwell (2.21) resulta entonces que

$$\phi_1 = \tfrac{1}{2}(e + ig)\phi^2, \tag{3.1}$$

donde $e$ y $g$ son dos constantes reales arbitrarias, que pueden interpretarse como cargas eléctrica y magnética, respectivamente, mientras que $\phi$ es una función tal que

$$\rho = D \ln \phi, \qquad \tau = \delta \ln \phi, \qquad \pi = -\overline{\delta} \ln \phi, \qquad \mu = -\Delta \ln \phi. \tag{3.2}$$

De las condiciones impuestas sigue que ambas direcciones principales son tangentes a familias de geodésicas sin distorsión, es decir,

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = 0, \tag{3.3}$$

y que los coeficientes de espín restantes se pueden expresar en la forma

$$\epsilon = D \ln \zeta, \qquad \beta = \delta \ln \zeta, \qquad \alpha = -\overline{\delta} \ln \xi, \qquad \gamma = -\Delta \ln \xi, \tag{3.4}$$

donde $\zeta$ y $\xi$ son algunas funciones.

Para todas las soluciones tipo D de las ecuaciones de Einstein–Maxwell con campo alineado existen sistemas de coordenadas, $\{x, y, u, v\}$, tales que $u$ y $v$ son ignorables; de hecho, todas las métricas de esta clase se pueden expresar en la forma

$$ds^2 = (\phi\overline{\phi})^{-1} \left\{ \frac{Q(p_2 du - p_1 dv)^2}{(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2} - \frac{dy^2}{Q} - \frac{P(q_2 du - q_1 dv)^2}{(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2} - \frac{dx^2}{P} \right\}, \tag{3.5}$$

o por expresiones derivadas de ésta por un proceso de límite, donde $\phi$ está definida por (3.1); $p_1 = p_1(x)$ y $q_1 = q_1(y)$ son polinomios de grado no mayor que 2; $p_2$ y $q_2$ son constantes; $P = P(x)$ y $Q = Q(y)$ son polinomios de grado no mayor que 4, los cuales contienen los parámetros arbitrarios presentes en estas soluciones, que representan, por ejemplo, carga eléctrica, masa y momento angular.

Una tétrada luxoide para la métrica (3.5) tal que $l^\mu$ y $n^\mu$ son direcciones principales de la curvatura conforme está dada por

$$\begin{aligned} D &= \partial_y + (1/Q)(q_1 \partial_u + q_2 \partial_v), \\ \Delta &= -\tfrac{1}{2}\phi\overline{\phi} Q(\partial_y - (1/Q)(q_1 \partial_u + q_2 \partial_v)), \\ \delta &= (P/2)^{1/2}\, \overline{\phi}\, (\partial_x + (i/P)(p_1 \partial_u + p_2 \partial_v)), \\ \overline{\delta} &= (P/2)^{1/2}\, \phi\, (\partial_x - (i/P)(p_1 \partial_u + p_2 \partial_v)). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Es posible definir $D$ y $\Delta$ de tal forma que sus expresiones sean más simétricas (distribuyendo entre los dos el factor $\frac{1}{2}\phi\overline{\phi}Q$); la definición (3.6) se adopta para que se reduzca a las expresiones dadas en Chandrasekhar (1983), para las métricas tratadas allí.

Puesto que las coordenadas $u$ y $v$ son ignorables, al resolver ecuaciones diferenciales parciales (como las ecuaciones para campos sin masa) en un espacio-tiempo con una métrica de la forma (3.5), se supone que las funciones a determinar dependen de $u$ y $v$ a través de un factor de la forma

$$e^{i(ku+lv)}, \tag{3.7}$$

donde $k$ y $l$ son constantes. Luego, cuando se aplican los operadores diferenciales (3.6) a una función cuya dependencia en $u$ y $v$ esté dada por el factor $e^{i(ku+lv)}$, éstos se reemplazarán de acuerdo con

$$\begin{aligned} D &\to \mathcal{D}_0, & \Delta &\to -\tfrac{1}{2}\phi\overline{\phi}Q\mathcal{D}_0^\dagger, \\ \delta &\to \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\phi}\mathcal{L}_0^\dagger, & \overline{\delta} &\to \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\mathcal{L}_0, \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n &\equiv \partial_y + i\frac{q}{Q} + n\frac{Q'}{Q} = Q^{-n}\mathcal{D}_0\, Q^n, \\ \mathcal{D}_n^\dagger &\equiv \partial_y - i\frac{q}{Q} + n\frac{Q'}{Q} = Q^{-n}\mathcal{D}_0^\dagger\, Q^n, \\ \mathcal{L}_n &\equiv \sqrt{P}\left(\partial_x + \frac{p}{P} + \frac{n}{2}\frac{P'}{P}\right) = P^{-n/2}\mathcal{L}_0\, P^{n/2}, \\ \mathcal{L}_n^\dagger &\equiv \sqrt{P}\left(\partial_x - \frac{p}{P} + \frac{n}{2}\frac{P'}{P}\right) = P^{-n/2}\mathcal{L}_0^\dagger\, P^{n/2}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

y

$$p(x) \equiv p_1(x)k + p_2 l, \qquad q(y) \equiv q_1(y)k + q_2 l. \tag{3.10}$$

En la Tabla I se da la expresión explícita de los polinomios $p(x)$, $q(y)$, $P(x)$ y $Q(y)$. Las abreviaciones que aparecen en la primera columna de la Tabla I significan:

gRN solución de Reissner–Nordström generalizada, g*RN "anti" Reissner–Nordström

Tabla I. Expresión explícita de los polinomios que determinan la métrica (3.5).

| Métrica | $p(x)$ | $q(y)$ | $P(x)$ | $Q(y)$ |
|---|---|---|---|---|
| gRN | $k+l$ | $k$ | $1-\epsilon_0 x^2$ | $\epsilon_0 y^2 - 2my^3 + (e^2+g^2)y^4$ |
| g*RN | $k+l$ | $k$ | $-\epsilon_0 x^2 + 2nx^3 - (e^2+g^2)x^4$ | $1+\epsilon_0 y^2$ |
| gC | $k+l$ | $k$ | $b-\epsilon_0 x^2 - 2mx^3 - (e^2+g^2)x^4$ | $-b+\epsilon_0 y^2 - 2my^3 + (e^2+g^2)y^4$ |
| CB(+) | $l+2akx$ | $-k(a^2+y^2)$ | $1-\epsilon_0 x^2$ | $e^2+g^2-2my+\epsilon_0(y^2-a^2)$ |
| CB(−) | $k(a^2+x^2)$ | $-l-2aky$ | $-e^2-g^2+2nx-\epsilon_0(x^2-a^2)$ | $1+\epsilon_0 y^2$ |
| CA | $l+kx^2$ | $l-ky^2$ | $b-g^2+2nx-\epsilon_0 x^2$ | $b+e^2-2my+\epsilon_0 y^2$ |
| P–D | $l+kx^2$ | $l-ky^2$ | $-g^2+\gamma_0+2nx-\epsilon_0 x^2$ | $e^2+\gamma_0-2my+\epsilon_0 y^2$ |
| | | | $+2mx^3-(e^2+\gamma_0)x^4$ | $-2ny^3+(g^2-\gamma_0)y^4$ |

Tabla II. Expresión explícita de las funciones que determinan los coeficientes de espín y la curvatura conforme.

| Métrica | $\phi$ | $\zeta$ | $\xi$ | $\Psi_2$ |
|---|---|---|---|---|
| gRN | $y$ | $P^{1/4}y^{-1}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}$ | $[-m+(e^2+g^2)\phi]\phi^3$ |
| g*RN | $-ix$ | $P^{1/4}x^{-1}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}$ | $[-in+(e^2+g^2)\overline{\phi}]\phi^3$ |
| gC | $x+y$ | $P^{1/4}(x+y)^{-1}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}$ | $[-m+(e^2+g^2)(y-x)]\phi^3$ |
| CB(+) | $(y+ia)^{-1}$ | $P^{1/4}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}(y+ia)^{-1}$ | $[-(m+i\epsilon_0 a)+(e^2+g^2)\overline{\phi}]\phi^3$ |
| CB(−) | $(a+ix)^{-1}$ | $P^{1/4}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}(a+ix)^{-1}$ | $[-(in+\epsilon_0 a)+(e^2+g^2)\overline{\phi}]\phi^3$ |
| CA | $(y+ix)^{-1}$ | $P^{1/4}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}(y+ix)^{-1}$ | $[-(m+in)+(e^2+g^2)\overline{\phi}]\phi^3$ |
| P–D | $\dfrac{1-xy}{y+ix}$ | $P^{1/4}(1-xy)^{-1}$ | $P^{1/4}Q^{1/2}(y+ix)^{-1}$ | $\left[-(m+in)+(e^2+g^2)\dfrac{1+xy}{y-ix}\right]\phi^3$ |

generalizada, gC "métrica C" generalizada, CB(+), CB(−) y CA son las soluciones de Carter y P–D es la solución de Plebański–Demiański.

### 3.2. Relaciones de conmutación y operadores de escalera

De las definiciones (3.9), mediante un cálculo directo, se puede ver que

$$
\begin{aligned}
Q\,\mathcal{D}_{1-s}\mathcal{D}_0^\dagger &= Q^{s+1}\mathcal{D}_{s+1}^\dagger\mathcal{D}_0\,Q^{-s} - 2iq' + sQ'',\\
\mathcal{L}_{1-s}\mathcal{L}_s^\dagger &= \mathcal{L}_{s+1}^\dagger\mathcal{L}_{-s} - 2p' + sP'',
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

para cualquier valor de $s$. Buscando condiciones que garanticen la separabilidad de las ecuaciones a considerar en los siguientes capítulos, basándose en lo que ocurre en el caso de la solución de RN, se trata de ver qué condiciones son necesarias para que los operadores $\mathcal{L}_n$ y $\mathcal{L}_n^\dagger$ o $\mathcal{D}_n$ y $\mathcal{D}_n^\dagger$ actúen como operadores de escalera. Si existe un conjunto de funciones $S_s(x)$ tales que

$$
\mathcal{L}_s\,S_s = C(s)S_{s-1}, \qquad \mathcal{L}_s^\dagger\,S_{-s} = -\widetilde{C}(s)S_{-s+1}, \tag{3.12}
$$

donde $C(s)$ y $\widetilde{C}(s)$ son constantes dependientes de $s$ (así como de los polinomios $p(x)$ y $P(x)$, que se consideran fijos), de la segunda identidad en la ec. (3.11) sigue que

$$
\mathcal{L}_{1-s}\mathcal{L}_s^\dagger\,S_{-s} = \mathcal{L}_{s+1}^\dagger\mathcal{L}_{-s}\,S_{-s} - 2p'S_{-s} + sP''S_{-s},
$$

lo que, de acuerdo con las ecs. (3.12), lleva a

$$
-\widetilde{C}(s)\mathcal{L}_{1-s}\,S_{1-s} = C(-s)\mathcal{L}_{s+1}^\dagger\,S_{-s-1} - 2p'S_{-s} + sP''S_{-s}
$$

y, finalmente,

$$
C(1-s)\widetilde{C}(s) = C(-s)\widetilde{C}(s+1) + 2p' - sP''. \tag{3.13}
$$

(Nótese la concordancia en los valores de los subíndices, tal como requieren las ecs. (3.12).) La consistencia de la ec. (3.13) implica que la combinación $2p' - sP''$ no dependa de $x$; pero, para que $2p' - sP''$ sea independiente de $x$ para todo valor de $s$, es necesario que $p'$ y $P''$ sean, separadamente, constantes, lo cual significa que $p(x)$ y $P(x)$ sean polinomios de grados, a lo más, 1 y 2, respectivamente, lo cual se supondrá en el resto de este capítulo. (Puede notarse que la solución de RN cumple estas condiciones, ver la Tabla I.)

Combinando las ecs. (3.12) se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$\mathcal{L}^{\dagger}_{1-s}\mathcal{L}_s\, S_s = -C(s)\widetilde{C}(1-s)S_s$$

que en forma explícita es

$$\frac{d}{dx}\left(P\frac{dS_s}{dx}\right) + \left(p' - \frac{p^2}{P} - s\frac{pP'}{P} + \frac{s}{2}P'' - \frac{s^2}{4}\frac{(P')^2}{P}\right)S_s = -A_s S_s, \tag{3.14}$$

donde

$$A_s \equiv C(s)\widetilde{C}(1-s). \tag{3.15}$$

La ecuación (3.13) puede verse como una relación de recurrencia para los "eigenvalores" $A_s$, a saber: $A_{1-s} = A_{-s} + 2p' - sP''$ o, sustituyendo $s$ por $-s$,

$$A_{s+1} = A_s + 2p' + sP''. \tag{3.16}$$

De la relación (3.16) se deduce que

$$A_s = A_0 + 2sp' + \frac{s(s-1)}{2}P'', \tag{3.17}$$

para $s$ entero.

Un ejemplo ilustrativo, que será útil más adelante, se tiene haciendo $p(x) = l + 2akx$, $P(x) = 1 - x^2$, que corresponden a la solución CB(+) en la Tabla I, con $\epsilon_0 = 1$ y, en el límite $a \to 0$, corresponden a la solución de RN. De la ec. (3.14) se tiene

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dS_s}{dx}\right) + \left(2ak - \frac{(l+2akx)^2}{1-x^2} + 2s\frac{(l+2akx)x}{1-x^2} - s - \frac{s^2x^2}{1-x^2}\right)S_s = -A_s S_s$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dS_s}{dx}\right)+\left(2ak-s-\frac{(2ak-s)^2x^2+2(2ak-s)lx+l^2}{1-x^2}\right)S_s=-A_sS_s. \tag{3.18}$$

Esta ecuación se reduce a la ecuación de Legendre cuando $l=0=2ak-s$; si solamente una de las constantes $l$ o $2ak-s$ vale cero, entonces la ec. (3.18) coincide con la ecuación asociada de Legendre. Por ejemplo, para $l=0$ la solución regular de la ec. (3.18) en $x=\pm 1$ es la función asociada de Legendre $P_n^m(x)$ con $m=2ak-s$ y, por lo tanto, $A_s=n(n+1)-m(m+1)$, donde $n$ es algún número entero. Los operadores $\mathcal{L}_s$ y $\mathcal{L}_s^\dagger$ son en este caso [ver las ecs. (3.9)]

$$\mathcal{L}_s=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}+\frac{mx}{1-x^2}\right),\qquad \mathcal{L}_{-s}^\dagger=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}-\frac{mx}{1-x^2}\right), \tag{3.19}$$

donde $m=2ak-s$, lo que coincide con las expresiones para los operadores de escalera encontrados en el tratamiento del momento angular en mecánica cuántica, haciendo $x=\cos\theta$. Finalmente, si $l$ y $2ak-s$ son distintas de cero, la ec. (3.18) coincide con la ecuación que satisfacen los armónicos esféricos con peso de espín (ver, por ejemplo, Torres del Castillo 1990) y los operadores

$$\mathcal{L}_s=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}+\frac{l+(2ak-s)x}{1-x^2}\right),\qquad \mathcal{L}_{-s}^\dagger=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{d}{dx}-\frac{l+(2ak-s)x}{1-x^2}\right), \tag{3.20}$$

son los operadores de subida y bajada del peso de espín.

La ecuación (3.18) puede relacionarse también con la ecuación que obedecen los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, la cual está dada por

$$\left\{(1-x^2)\left(\frac{d}{dx}\right)^2+[(\beta-\alpha)-(\alpha+\beta+2)x]\frac{d}{dx}+n(n+\alpha+\beta+1)\right\}P_n^{(\alpha,\beta)}=0. \tag{3.21}$$

Se puede ver que $(1-x)^{\alpha/2}(1+x)^{\beta/2}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ satisface la ec. (3.18) si $\alpha=|2ak-s+l|$, $\beta=|2ak-s-l|$ y $A_s=-2ak+s-\frac{1}{2}[(2ak-s)^2-l^2-\alpha\beta-\alpha-\beta]+n(n+\alpha+\beta+1)$.

De esta manera, los operadores (3.20) dan lugar a operadores de subida y bajada para los polinomios de Jacobi.

Si se toma $p(x) = l - 2akx$, $P(x) = 1$, que corresponde a la solución CB(+) con $\epsilon_0 = 0$ y, en el límite $a \to 0$, a una de las ramas de la solución gRN (ver la Tabla I), entonces la ec. (3.14) se convierte en

$$\frac{d^2S_s}{dx^2} + \left(2ak - (l + 2akx)^2\right) S_s = -A_s S_s. \tag{3.22}$$

Suponiendo que $ak$ es diferente de cero, el cambio de variable $z \equiv (l + 2akx)/\sqrt{|2ak|}$ convierte la ec. (3.22) en

$$\frac{d^2S_s}{dz^2} - z^2 S_s = -\frac{A_s + 2ak}{|2ak|} S_s \tag{3.23}$$

mientras que los operadores $\mathcal{L}_s$ y $\mathcal{L}_s^\dagger$ (que ahora no dependen de $s$) son

$$\mathcal{L} = \sqrt{|2ak|}\left(\varpi \frac{d}{dz} + z\right), \qquad \mathcal{L}^\dagger = \sqrt{|2ak|}\left(\varpi \frac{d}{dz} - z\right), \tag{3.24}$$

donde $\varpi \equiv \operatorname{sgn}(ak) = ak/|ak|$. Así, salvo por un factor constante, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}^\dagger$ son los operadores de subida y bajada usuales asociados con el problema del oscilador armónico cuántico unidimensional y la ec. (3.23) es básicamente la ecuación de Schrödinger correspondiente, cuyas soluciones son las funciones parabólicas cilíndricas. Las soluciones de la ec. (3.23) acotadas para $x \to \pm\infty$ son proporcionales a $e^{-z^2/2}H_n(z)$, donde $H_n$ es un polinomio de Hermite, $n$ es un entero mayor que o igual a cero y, entonces, $A_s = |2ak|(2n + 1) - 2ak$.

En lugar de que los operadores $\mathcal{L}_s$ y $\mathcal{L}_s^\dagger$ actúen como operadores de subida y bajada, lo cual, como se ha mostrado, implica que los grados de los polinomios $p(x)$ y $P(x)$ no excedan de 1 y 2, respectivamente, se puede buscar que $\mathcal{D}_s$ y $\mathcal{D}_s^\dagger$ actúen como operadores de subida y bajada. En tal caso, en lugar de las ecs. (3.12), se supondrá la existencia de funciones $R_s(y)$ tales que

$$\mathcal{D}_0\, R_s = D(s) R_{s+1}, \qquad Q\, \mathcal{D}_s^\dagger\, R_s = \widetilde{D}(s) R_{s-1}, \tag{3.25}$$

donde $D(s)$ y $\widetilde{D}(s)$ son constantes. Puesto que $\mathcal{D}_s^\dagger = Q^{-s}\mathcal{D}_0^\dagger Q^s$, las ecuaciones (3.25) pueden expresarse también en la forma

$$\mathcal{D}_0 R_s = D(s) R_{s+1}, \qquad \mathcal{D}_0^\dagger (Q^s R_s) = \widetilde{D}(s) Q^{s-1} R_{s-1}. \tag{3.26}$$

Aplicando la primera de las identidades en (3.11) a $Q^s R_s$ se tiene

$$Q\,\mathcal{D}_{1-s}\mathcal{D}_0^\dagger (Q^s R_s) = Q^{s+1}\mathcal{D}_{s+1}^\dagger \mathcal{D}_0 R_s - 2iq' Q^s R_s + sQ'' Q^s R_s,$$

lo que, de acuerdo con las ecs. (3.25) y (3.26), equivale a

$$D(s-1)\widetilde{D}(s) = D(s)\widetilde{D}(s+1) - 2iq' + sQ'' \tag{3.27}$$

[cf. (3.13)]. La validez de esta última relación para cualquier valor de $s$ implica que $q'$ y $Q''$ sean constantes, por lo que $q(y)$ y $Q(y)$ deben ser polinomios de grados 1 y 2, respectivamente, a lo más.

De las ecs. (3.25) resulta que $R_s$ satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$\mathcal{D}_0\, Q\, \mathcal{D}_s^\dagger R_s = D(s-1)\widetilde{D}(s) R_s,$$

que equivale a

$$Q\frac{d^2 R_s}{dy^2} + (s+1)Q'\frac{dR_s}{dy} + \left(-iq' + sQ'' + \frac{q^2}{Q} + isq\frac{Q'}{Q}\right) R_s = D(s-1)\widetilde{D}(s) R_s. \tag{3.28}$$

Esta ecuación puede expresarse en una forma similar a la de la ec. (3.14), que es

$$\frac{d}{dy}\left(Q\frac{d}{dy}(Q^{s/2}R_s)\right) + \left(-iq' + \frac{q^2}{Q} + is\frac{qQ'}{Q} + \frac{s}{2}Q'' - \frac{s^2}{4}\frac{(Q')^2}{Q}\right) Q^{s/2}R_s = B_s Q^{s/2} R_s, \tag{3.29}$$

donde

$$B_s \equiv D(s-1)\widetilde{D}(s). \tag{3.30}$$

De la ec. (3.29), conjugando y cambiando $s$ por $-s$, se obtienen, respectivamente,

$$\frac{d}{dy}\left(Q\frac{d}{dy}(Q^{s/2}\overline{R_s})\right) + \left(iq' + \frac{q^2}{Q} - is\frac{qQ'}{Q} + \frac{s}{2}Q'' - \frac{s^2}{4}\frac{(Q')^2}{Q}\right) Q^{s/2}\overline{R_s} = \overline{B_s} Q^{s/2}\overline{R_s} \tag{3.31}$$

y

$$\frac{d}{dy}\left(Q\frac{d}{dy}(Q^{-s/2}R_{-s})\right)+\left(-iq'+\frac{q^2}{Q}-is\frac{qQ'}{Q}-\frac{s}{2}Q''-\frac{s^2}{4}\frac{(Q')^2}{Q}\right)Q^{-s/2}R_{-s}=B_{-s}Q^{-s/2}R_{-s}, \tag{3.32}$$

lo que significa que $Q^{s/2}\overline{R_s}$ y $Q^{-s/2}R_{-s}$ *satisfacen la misma ecuación diferencial*, y además

$$\overline{B_s}=B_{-s}+2iq'+sQ'' \tag{3.33}$$

(nótese que, para esta identificación, es importante que $q'$ y $Q''$ sean constantes). De las ecs. (3.27) y (3.30) se tiene, por otra parte, $B_s=B_{s+1}-2iq'+sQ''$, o, cambiando $s$ por $-s$,

$$B_{-s}=B_{1-s}-2iq'-sQ'' \tag{3.34}$$

luego, de las ecs. (3.33) y (3.34),

$$\overline{B_s}=B_{1-s}. \tag{3.35}$$

Si, por ejemplo, $q(y)=-l-2aky$ y $Q(y)=1+y^2$, lo que corresponde a la solución CB($-$) con $\epsilon_0=1$, la ec. (3.29) es

$$\frac{d}{dy}\left((1+y^2)\frac{d}{dy}(Q^{s/2}R_s)\right)$$
$$+\left(2iak+s-\frac{(2iak+s)^2y^2+2(2iak+s)ily+(il)^2}{1+y^2}\right)Q^{s/2}R_s=B_sQ^{s/2}R_s. \tag{3.36}$$

Puede notarse que la ec. (3.36) se obtiene de la ec. (3.18) haciendo en esta última las sustituciones $x\to iy$, $a\to -ia$, por lo que las soluciones de la ec. (3.36) se pueden obtener de las de la ec. (3.18) mediante estas sustituciones.

# Capítulo 4

# LAS ECUACIONES DE EINSTEIN–MAXWELL LINEALIZADAS

## 4.1. El método de operadores adjuntos

El método de operadores adjuntos fue introducido por Wald (1978) y se utiliza para obtener soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales lineales por medio de potenciales. Si, con ciertas condiciones que se especifican más adelante, de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales se obtiene una ecuación desacoplada $\mathcal{O}(\chi) = 0$, entonces una solución de $\mathcal{O}^\dagger(\psi) = 0$, donde $\mathcal{O}^\dagger$ denota el adjunto del operador $\mathcal{O}$, genera una solución completa del sistema propuesto.

Una descripción más detallada del método se expone a continuación. Supóngase que $f_{\alpha\beta\ldots}$ son las componentes de un campo tensorial de rango $n$, que satisface un sistema de ecuaciones diferenciales parciales lineales que se expresan como

$$[\mathcal{E}(f_{\alpha\beta\ldots})]_{\mu\nu\ldots} = 0, \tag{4.1}$$

donde $\mathcal{E}$ es un operador diferencial que aplica campos tensoriales de rango $n$ en campos tensoriales de rango $m$. Si $\mathcal{S}$ es un operador diferencial lineal que aplica campos tensoriales de rango $m$ en campos escalares, de tal forma que

$$\mathcal{S}\mathcal{E} = \mathcal{O}\mathcal{T}, \tag{4.2}$$

donde $\mathcal{T}$ es un operador diferencial lineal que aplica campos tensoriales de rango $n$ en campos escalares y $\mathcal{O}$ es un operador diferencial lineal que aplica campos escalares en campos escalares, entonces de (4.1) es claro que

$$\chi \equiv \mathcal{T}(f_{\alpha\beta\ldots})$$

debe satisfacer la *ecuación desacoplada*

$$\mathcal{O}(\chi) = 0, \tag{4.3}$$

pues de (4.1) y (4.2)

$$0 = \mathcal{S}\mathcal{E}(f_{\alpha\beta\ldots}) = \mathcal{O}(\mathcal{T}(f_{\alpha\beta\ldots})) = \mathcal{O}(\chi).$$

Definiendo el adjunto de $\mathcal{E}$ como aquel operador lineal, $\mathcal{E}^\dagger$, que aplica campos tensoriales de rango $m$ en campos tensoriales de rango $n$ y

$$h^{\mu\nu\ldots}[\mathcal{E}(f_{\alpha\beta\ldots})]_{\mu\nu\ldots} - f_{\alpha\beta\ldots}[\mathcal{E}^\dagger(h^{\mu\nu\ldots})]^{\alpha\beta\ldots} = \nabla_\alpha s^\alpha, \tag{4.4}$$

para cualesquier campos tensoriales $f_{\alpha\beta\ldots}$ y $h^{\mu\nu\ldots}$, donde $s^\alpha$ es algún campo vectorial, se comprueba que $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\dagger = \mathcal{A}^\dagger + \mathcal{B}^\dagger$ y $(\mathcal{A}\mathcal{B})^\dagger = \mathcal{B}^\dagger\mathcal{A}^\dagger$. Luego, de (4.2) se obtiene la identidad

$$\mathcal{E}^\dagger\mathcal{S}^\dagger = \mathcal{T}^\dagger\mathcal{O}^\dagger \tag{4.5}$$

y de aquí se deduce que si la función $\psi$ satisface la ecuación

$$\mathcal{O}^\dagger(\psi) = 0, \tag{4.6}$$

entonces $\mathcal{S}^\dagger(\psi)$ satisface

$$\mathcal{E}^\dagger(\mathcal{S}^\dagger(\psi)) = 0 \tag{4.7}$$

por lo que si $\mathcal{E}$ es *autoadjunto* (o bien *antiautoadjunto*) (i.e., $\mathcal{E}^\dagger = \pm\mathcal{E}$), de (4.7) se concluye que $\mathcal{S}(\psi)$ satisface la ec. (4.1).

Para un sistema de ecuaciones dado, los operadores $\mathcal{S}$, $\mathcal{O}$ y $\mathcal{T}$ pueden hallarse fácilmente una vez que se obtiene una ecuación desacoplada de la forma (4.3). Entonces, si $\mathcal{E}$ es autoadjunto o antiautoadjunto, al encontrar el potencial $\psi$, que satisface la ecuación (4.6), éste determina la solución completa del sistema (4.1) por medio de $f_{\alpha\beta\ldots} = [\mathcal{S}^\dagger(\psi)]_{\alpha\beta\ldots}$. Todo lo anterior es válido cuando, en lugar de campos tensoriales, se consideran vectores o matrices formados por campos tensoriales o espinoriales.

A continuación, siguiendo Torres del Castillo (1988a) y Torres del Castillo and Flores Urbina (1999), se muestra la forma en que el método de operadores adjuntos sirve para reducir el problema de resolver las ecuaciones de Einstein–Maxwell linealizadas alrededor de una solución exacta que posea un campo electromagnético algebraicamente general, una de cuyas direcciones principales sea geodésica y sin distorsión. Cuando la métrica del espacio-tiempo, $g_{\mu\nu}$, se sustituye por $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, entonces las variaciones a primer orden en la perturbación métrica $h_{\mu\nu}$ de $g^{\mu\nu}$, los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann están dadas por

$$\delta g^{\mu\nu} = -h^{\mu\nu}, \qquad \delta\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \tfrac{1}{2}(\nabla_\nu h_\lambda{}^\mu + \nabla_\lambda h_\nu{}^\mu - \nabla^\mu h_{\nu\lambda}) \tag{4.8}$$

y

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = h_{\lambda[\mu} R^\lambda{}_{\nu]\rho\sigma} + \nabla_\rho \nabla_{[\mu} h_{\nu]\sigma} - \nabla_\sigma \nabla_{[\mu} h_{\nu]\rho}, \tag{4.9}$$

donde los índices son subidos y bajados mediante $g^{\mu\nu}$ and $g_{\mu\nu}$, $\nabla_\rho$ denota la derivada covariante compatible con $g_{\mu\nu}$ y, como en el Capítulo 2, los corchetes indican antisimetrización sobre los índices encerrados. De las ecuaciones anteriores sigue que la variación del tensor de Einstein tensor está dado por

$$\begin{aligned}\delta(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma}) \;=\; & -\nabla^\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)\rho} + \tfrac{1}{2}\nabla_\rho \nabla^\rho h_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\nabla_\mu \nabla_\nu h \\ & + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu}(\nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma} - \nabla_\rho \nabla^\rho h + R_{\rho\sigma} h^{\rho\sigma}) - \tfrac{1}{2} R h_{\mu\nu},\end{aligned} \tag{4.10}$$

donde $h \equiv h_\rho{}^\rho$ y los paréntesis denotan simetrización sobre los índices encerrados.

Usando las ecs. (4.8), se puede ver que si $F_{\mu\nu}$ satisface las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, $\nabla^\mu F_{\mu\nu} = 0$, y $F_{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu}$ satisface también dichas ecuaciones con respecto a la métrica $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, entonces, reteniendo sólo los términos a primer orden en $h_{\mu\nu}$

así como en la perturbación del campo electromagnético $\delta F_{\mu\nu}$,

$$\nabla^\mu \delta F_{\mu\nu} - \nabla_\rho (F_{\mu\nu} h^{\rho\mu}) - F_{\mu\rho} \nabla^\mu h^\rho{}_\nu + \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} \nabla^\mu h = 0, \tag{4.11}$$

donde $\delta F_{\mu\nu}$ está dado en términos de la perturbación del potencial vectorial, $b_\mu \equiv \delta A_\mu$, como

$$\delta F_{\mu\nu} = \nabla_\mu b_\nu - \nabla_\nu b_\mu = \partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu. \tag{4.12}$$

Por otra parte, suponiendo que los campos de fondo, $g_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$, satisfacen las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 2(F_{\mu\rho} F_\nu{}^\rho - \tfrac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}), \tag{4.13}$$

de las ecs. (4.10) y (4.13) se deduce que

$$\begin{aligned} -\nabla^\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)\rho} + \tfrac{1}{2} \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu h + \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma} - \nabla_\rho \nabla^\rho h - \tfrac{1}{2} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} h \\ + 2F^{\rho\sigma} \delta F_{\rho\sigma}) + \tfrac{1}{2} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} h_{\mu\nu} + 2F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} h^{\rho\sigma} - 4F_{(\mu}{}^\rho \delta F_{\nu)\rho} = 0 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Las ecuaciones (4.11) y (4.14) forman dos sistemas de ecuaciones para $h_{\mu\nu}$ y $b_\mu$, por lo que conviene definir el operador diferencial

$$\mathcal{E} \begin{bmatrix} (h_{\mu\nu}) \\ (b_\mu) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} (8\pi T_{\mu\nu}) \\ (16\pi j_\mu) \end{bmatrix}, \tag{4.15}$$

donde

$$\begin{aligned} 8\pi T_{\mu\nu} \equiv\ & \nabla^\rho \nabla_{(\mu} h_{\nu)\rho} - \tfrac{1}{2} \nabla_\rho \nabla^\rho h_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} \nabla_\mu \nabla_\nu h - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla^\rho \nabla^\sigma h_{\rho\sigma} - \nabla_\rho \nabla^\rho h \\ & - \tfrac{1}{2} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} h + 4F^{\rho\sigma} \nabla_\rho b_\sigma) - \tfrac{1}{2} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} h_{\mu\nu} - 2F_{\mu\rho} F_{\nu\sigma} h^{\rho\sigma} \\ & + 4F_{(\mu}{}^\rho \nabla_{\nu)} b_\rho + 4F_{\rho(\mu} \nabla^\rho b_{\nu)} \end{aligned} \tag{4.16}$$

y

$$4\pi j_\nu \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu b_\nu - \nabla^\mu \nabla_\nu b_\mu - \nabla_\rho (F_{\mu\nu} h^{\rho\mu}) - F_{\mu\rho} \nabla^\mu h^\rho{}_\nu + \tfrac{1}{2} F_{\mu\nu} \nabla^\mu h, \tag{4.17}$$

[cf. ecs. (4.14), (4.11) y (4.12)]. Los tensores $T_{\mu\nu}$ y $j_\nu$ sirven para abreviar las ecuaciones (4.14) y (4.11), y, físicamente, pueden representar fuentes adicionales para los campos gravitacional y electromagnético. Luego, las ecuaciones linealizadas de Einstein–Maxwell están dadas por

$$\mathcal{E}\begin{bmatrix} (h_{\mu\nu}) \\ (b_\mu) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.18}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\mathrm{G}} & \mathcal{E}_{\mathrm{GE}} \\ \mathcal{E}_{\mathrm{EG}} & \mathcal{E}_{\mathrm{E}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (h_{\mu\nu}) \\ (b_\mu) \end{bmatrix} = 0 \tag{4.19}$$

donde $\mathcal{E}_{\mathrm{G}}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{GE}}$, $\mathcal{E}_{\mathrm{GE}}$ y $\mathcal{E}_{\mathrm{E}}$ son operadores parciales lineales que involucran los campos de fondo. Además, como se muestra más adelante, de las ecuaciones de Einstein–Maxwell linealizadas se obtiene un conjunto de ecuaciones desacopladas que pueden ser expresadas en forma matricial, por lo cual se deben considerar matrices formadas por operadores diferenciales lineales

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{r1} & \cdots & \mathcal{A}_{rs} \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

El adjunto de un operador de la forma (4.20) se define por

$$[f_1 \cdots f_r]\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{r1} & \cdots & \mathcal{A}_{rs} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_s \end{bmatrix} - [g_1 \cdots g_s]\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{r1} & \cdots & \mathcal{A}_{rs} \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{bmatrix} = \nabla_\alpha t^\alpha, \tag{4.21}$$

donde $t^\alpha$ es algún campo vectorial, con una definición análoga que involucra contracciones en el caso donde los operadores $\mathcal{A}_{ij}$ apliquen campos tensoriales o espinoriales sobre sí mismos. Se encuentra entonces que

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & \cdots & \mathcal{A}_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{r1} & \cdots & \mathcal{A}_{rs} \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11}^{\dagger} & \cdots & \mathcal{A}_{r1}^{\dagger} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathcal{A}_{1s}^{\dagger} & \cdots & \mathcal{A}_{rs}^{\dagger} \end{bmatrix}. \tag{4.22}$$

En el caso en el que el operador que aparece en la ec. (4.1) sea una matriz formada por operadores diferenciales lineales, todas las conclusiones obtenidas permanecen válidas; simplemente se reemplazan $\chi$ y $\psi$ por matrices. Se puede probar que el operador $\mathcal{E}$ definido por la ec. (4.15) es autoadjunto (la relación entre los factores constantes incluidos en el lado derecho de la ec. (4.15) se escoge para este propósito). Finalmente, en términos de la notación de Newman–Penrose, los adjuntos de los elementos de una tétrada están dados por

$$\begin{aligned} D^{\dagger} &= -(D + \epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho}), \\ \Delta^{\dagger} &= -(\Delta - \gamma - \bar{\gamma} + \mu + \bar{\mu}), \\ \delta^{\dagger} &= -(\delta + \beta - \bar{\alpha} - \tau + \bar{\pi}), \\ \bar{\delta}^{\dagger} &= -(\bar{\delta} - \alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau}), \end{aligned} \tag{4.23}$$

mientras que en el caso de una función $f$, se tiene de inmediato que

$$f^{\dagger} = f. \tag{4.24}$$

## 4.2. Perturbaciones de soluciones de las ecuaciones de Einstein–Maxwell

Se considerará ahora una solución exacta de las ecuaciones de Einstein–Maxwell tal que el campo electromagnético sea algebraicamente general y una de sus direcciones principales sea geodésica y sin distorsión. Estas restricciones se imponen porque permiten hallar un sistema de ecuaciones desacopladas del tipo requerido en el método de operadores adjuntos. Algunas soluciones que cumplen las restricciones anteriores se han dado explícitamente en el capítulo anterior. Las condiciones impuestas implican que el espacio-tiempo sea algebraicamente especial y que si se escoge el vector $l^\mu$ de la tétrada de forma que sea la dirección principal geodésica y sin distorsión del campo electromagnético, entonces, $\phi_0 = 0$, $\kappa = 0 = \sigma$ y $\Psi_0 = 0 = \Psi_1$ [ver la primera ecuación en (2.16) y la ec. (4.25)]. Resulta conveniente elegir el vector $n^\mu$ como la otra dirección principal del campo electromagnético, de tal manera que $\phi_2$ también sea igual a cero. Luego, de la ec. (2.23) sigue que la única componente $\Phi_{ij}$ distinta de cero es $\Phi_{11} = 2\phi_1\overline{\phi_1}$. (Debe notarse que todas las soluciones consideradas en el capítulo 3 y la tétrada empleada allí cumplen estas condiciones.)

Sin restricción alguna, de las ecuaciones de Maxwell (2.21), las relaciones de conmutación (2.7) y las identidades (2.16), sigue que

$$\begin{aligned}
&[(\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})(\overline{\delta} - 2\alpha + \pi) - (D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})(\Delta - 2\gamma + \mu)]\phi_0 \\
&\quad = 2\phi_1[(\Delta - 3\gamma + \overline{\gamma} - 2\mu + \overline{\mu})\kappa - (\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} - 2\pi - \overline{\tau})\sigma + 2\Psi_1] - \Psi_0\phi_2 \\
&\qquad + \kappa[(\Delta + 2\mu)\phi_1 + (\delta + 2\beta - \tau)\phi_2] - \sigma[(\overline{\delta} + 2\pi)\phi_1 + (D + 2\epsilon - \rho)\phi_2] \\
&\qquad + (\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})l^\mu 2\pi j_\mu - (D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})m^\mu 2\pi j_\mu,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

luego, suponiendo que $\kappa$, $\sigma$, $\Psi_0$, $\Psi_1$, $\phi_0$, $\phi_2$ y $j_\mu$ valen cero, de las ecuaciones de Maxwell (2.21) se tiene

$$(D - 2\rho)\phi_1 = 0, \qquad (\delta - 2\tau)\phi_1 = 0, \qquad (\overline{\delta} + 2\pi) = 0, \qquad (\Delta + 2\mu)\phi_1 = 0, \tag{4.26}$$

y denotando mediante un superíndice B las variaciones a primer orden de las cantidades respectivas, de las ecs. (4.25) y (4.26) se llega a la siguiente relación entre perturbaciones de cantidades que se anulan en la solución de fondo:

$$[(\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})(\overline{\delta} - 2\alpha + \pi) - (D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})(\Delta - 2\gamma + \mu)]\phi_0^{\mathrm{B}}$$

$$= 2\phi_1[(\Delta - 3\gamma - \overline{\gamma} - 2\mu + \overline{\mu})\kappa^{\rm B} - (\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} - 2\pi - \overline{\tau})\sigma^{\rm B} + 2\Psi_1^{\rm B}]$$
$$+(\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})l^\mu 2\pi j_\mu^{\rm B} - (D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})m^\mu 2\pi j_\mu^{\rm B}. \qquad (4.27)$$

Otras relaciones similares a ésta se obtienen de la primera ecuación en (2.16):

$$(\delta - 3\beta - \overline{\alpha} - \tau + \overline{\pi})\kappa^{\rm B} - (D - 3\epsilon + \overline{\epsilon} - \rho - \overline{\rho})\sigma^{\rm B} + \Psi_0^{\rm B} = 0 \qquad (4.28)$$

y de la primera y quinta ecuación en (2.18), usando la ec. (2.23),

$$(\overline{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0^{\rm B} - (D - 2\epsilon - 4\rho)\Psi_1^{\rm B} + 2(D - 2\epsilon - 2\overline{\rho})\overline{\phi_1}\phi_0^{\rm B}$$
$$+ (D - 2\epsilon - 2\overline{\rho})l^\mu m^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\rm B} - (\delta - 2\beta - 2\overline{\alpha} + \overline{\pi})l^\mu l^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\rm B} = (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\kappa^{\rm B},$$
$$(\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0^{\rm B} - (\delta - 2\beta - 4\tau)\Psi_1^{\rm B} - 2(\delta - 2\beta + 2\overline{\pi})\overline{\phi_1}\phi_0^{\rm B} + \overline{\lambda}l^\mu l^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\rm B}$$
$$+ (D - 2\epsilon + 2\overline{\epsilon} - \overline{\rho})m^\mu m^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\rm B} - (\delta - 2\beta + 2\overline{\pi})l^\mu m^\mu 4\pi T_{\mu\nu}^{\rm B} = (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\sigma^{\rm B}, \qquad (4.29)$$

donde se ha incluido una posible fuente para las perturbaciones gravitacionales, $T_{\mu\nu}^{\rm B}$, (adicional a la contribución procedente de las perturbaciones electromagnéticas), que será útil más adelante.

Haciendo $j_\mu^{\rm B} = 0$ y $T_{\mu\nu}^{\rm B} = 0$, las ecs. (4.27)–(4.29) forman un sistema de cuatro ecuaciones lineales para las perturbaciones $\kappa^{\rm B}$, $\sigma^{\rm B}$, $\Psi_0^{\rm B}$, $\Psi_1^{\rm B}$ y $\phi_0^{\rm B}$ de cualquier solución exacta de las ecuaciones de Einstein–Maxwell perteneciente a la clase considerada aquí. Este sistema se puede expresar de tal manera que involucre sólo cuatro combinaciones de estas perturbaciones. Primero, notando que con $\kappa = \sigma = \Psi_1 = 0$, en virtud de las ecs. (2.7) y (2.16), se cumple que

$$(\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})(\overline{\delta} - 2\alpha + \pi) - (D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})(\Delta - 2\gamma + \mu)$$
$$= (\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} - \overline{\tau})(\delta - 2\beta - 3\tau) - (\Delta - 3\gamma - \overline{\gamma} + \overline{\mu})(D - 2\epsilon - 3\rho) + 6\Psi_2,$$

y empleando las ecs. (4.26) se halla que el lado izquierdo de la ec. (4.27) equivale a

$$2\phi_1[(\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} - 2\pi - \overline{\tau})(\delta - 2\beta - \tau) - (\Delta - 3\gamma - \overline{\gamma} - 2\mu + \overline{\mu})(D - 2\epsilon - \rho) + 6\Psi_2](\phi_0^{\rm B}/2\phi_1)$$

con lo que la ec. (4.27) se puede expresar como

$$
\begin{aligned}
&2\phi_1[2\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}} + (\Delta - 3\gamma - \overline{\gamma} - 2\mu + \overline{\mu})\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}} - (\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} - 2\pi - \overline{\tau})\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}}] \\
&\quad = (D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})m^\mu 2\pi j_\mu^{\mathrm{B}} - (\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})l^\mu 2\pi j_\mu^{\mathrm{B}}, \qquad (4.30)
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}} &= (2\phi_1 \Psi_1^{\mathrm{B}} - 3\Psi_2 \phi_0^{\mathrm{B}})/(2\phi_1), \\
\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}} &= \kappa^{\mathrm{B}} + (D - 2\epsilon - \rho)(\phi_0^{\mathrm{B}}/2\phi_1), \qquad (4.31) \\
\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}} &= \sigma^{\mathrm{B}} + (\delta - 2\beta - \tau)(\phi_0^{\mathrm{B}}/2\phi_1).
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones (4.28) y (4.29) también pueden expresarse en términos de las cantidades (4.31); usando las ecs. (2.7), (2.16) y (2.18) se halla que

$$
\begin{aligned}
&(\delta - 3\beta - \overline{\alpha} - \tau + \overline{\pi})\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}} - (D - 3\epsilon + \overline{\epsilon} - \rho - \overline{\rho})\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}} + \Psi_0^{\mathrm{B}} = 0, \\
&\quad(\overline{\delta} - 4\alpha + \pi)\Psi_0^{\mathrm{B}} - (D - 2\epsilon - 4\rho)\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}} - (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}} = (\delta - 2\beta - 2\overline{\alpha} + \overline{\pi})l^\mu l^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} \\
&\qquad - (D - 2\epsilon - 2\overline{\rho})l^\mu m^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}}, \quad (4.32) \\
&\quad(\Delta - 4\gamma + \mu)\Psi_0^{\mathrm{B}} - (\delta - 2\beta - 4\tau)\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}} - (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}} = (\delta - 2\beta + 2\overline{\pi})l^\mu m^\mu 4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} \\
&\qquad - (D - 2\epsilon + 2\overline{\epsilon} - \overline{\rho})m^\mu m^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} - \overline{\lambda} l^\mu l^\nu 4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}}.
\end{aligned}
$$

Definiendo el operador

$$
\mathcal{O} \equiv \begin{bmatrix}
(\overline{\delta} - 4\alpha + \pi) & (D - 2\epsilon - 4\rho) & -(3\Psi_2 - 2\Phi_{11})/\phi_1 & 0 \\
(\Delta - 4\gamma + \mu) & (\delta - 2\beta - 4\tau) & 0 & (3\Psi_2 + 2\Phi_{11})/\phi_1 \\
2\phi_1 & 0 & 2(\delta - 3\beta - \overline{\alpha} - 3\tau + \overline{\pi}) & 2(D - 3\epsilon + \overline{\epsilon} - 3\rho - \overline{\rho}) \\
0 & -4\phi_1 & 2(\Delta - 3\gamma - \overline{\gamma} + \overline{\mu}) & 2(\overline{\delta} - 3\alpha + \overline{\beta} - \overline{\tau})
\end{bmatrix} \qquad (4.33)
$$

y usando las ecs. (4.26) se halla que las ecs. (4.30) y (4.32) se pueden escribir en la forma matricial

$$\mathcal{O}\begin{bmatrix} \Psi_0^{\mathrm{B}} \\ -\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}} \\ \phi_1\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}} \\ -\phi_1\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [(\delta - 2\beta - 2\overline{\alpha} + \overline{\pi})l^\mu l^\nu - (D - 2\epsilon - 2\overline{\rho})l^\mu m^\nu]4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} \\ [(\delta - 2\beta + 2\overline{\pi})l^\mu m^\mu - (D - 2\epsilon + 2\overline{\epsilon} - \overline{\rho})m^\mu m^\nu - \overline{\lambda}l^\mu l^\nu]4\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} \\ 0 \\ [(D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})m^\mu - (\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})l^\mu]2\pi j_\mu^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

que corresponde a una identidad de la forma (4.2) con

$$\begin{bmatrix} \Psi_0^{\mathrm{B}} \\ -\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}} \\ \phi_1\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}} \\ -\phi_1\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}} \end{bmatrix} \equiv \mathcal{T}\begin{bmatrix} (h_{\mu\nu}) \\ (b_\mu) \end{bmatrix}$$

(puesto que las perturbaciones $\Psi_0^{\mathrm{B}}$, $\tilde{\Psi}_1^{\mathrm{B}}$, $\tilde{\kappa}^{\mathrm{B}}$ y $\tilde{\sigma}^{\mathrm{B}}$ dependen linealmente de las perturbaciones métricas y del potencial vectorial y de sus derivadas) y, tomando en cuenta la ec. (4.15),

$$\mathcal{S}\begin{bmatrix} (8\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}}) \\ (16\pi j_\mu^{\mathrm{B}}) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2[(\delta - 2\beta - 2\overline{\alpha} + \overline{\pi})l^\mu l^\nu - (D - 2\epsilon - 2\overline{\rho})l^\mu m^\nu]8\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} \\ 2[(\delta - 2\beta + 2\overline{\pi})l^\mu m^\mu - (D - 2\epsilon + 2\overline{\epsilon} - \overline{\rho})m^\mu m^\nu - \overline{\lambda}l^\mu l^\nu]8\pi T_{\mu\nu}^{\mathrm{B}} \\ 0 \\ \frac{1}{2}[(D - \epsilon + \overline{\epsilon} - 2\rho - \overline{\rho})m^\mu - (\delta - \beta - \overline{\alpha} - 2\tau + \overline{\pi})l^\mu]16\pi j_\mu^{\mathrm{B}} \end{bmatrix},$$

con $\mathcal{E}$ definido por la ec. (4.15)

Usando las ecs. (4.22), (4.23) y (4.24) se halla que $-\mathcal{O}^\dagger$ está dado por

$$\begin{bmatrix} (\overline{\delta} + 3\alpha + \overline{\beta} - \overline{\tau}) & (\Delta + 3\gamma - \overline{\gamma} + \overline{\mu}) & -2\phi_1 & 0 \\ (D + 3\epsilon + \overline{\epsilon} + 3\rho - \overline{\rho}) & (\delta + 3\beta - \overline{\alpha} + 3\tau + \overline{\pi}) & 0 & 4\phi_1 \\ (3\Psi_2 - 2\Phi_{11})/\phi_1 & 0 & 2(\delta + 4\beta + 2\tau) & 2(\Delta + 2\gamma + \mu) \\ 0 & -(3\Psi_2 + 2\Phi_{11})/\phi_1 & 2(D + 4\epsilon + 2\rho) & (\overline{\delta} + 2\alpha + \pi) \end{bmatrix}$$

y, en forma similar,

$$\mathcal{S}^{\dagger} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2[l^{(\mu}m^{\nu)}(D+3\epsilon+\overline{\epsilon}-\rho+\overline{\rho}) - l^{\mu}l^{\nu}(\delta+3\beta+\overline{\alpha}-\tau)] \\ 2[m^{\mu}m^{\nu}(D+3\epsilon-\overline{\epsilon}-\rho) - l^{(\mu}m^{\nu)}(\delta+3\beta-\overline{\alpha}-\tau-\overline{\pi}) - l^{\mu}l^{\nu}\overline{\lambda}] \\ 0 \\ \frac{1}{2}[l^{\mu}(\delta+2\beta+\tau) - m^{\mu}(D+2\epsilon+\rho)] \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

El potencial $\psi$ en la ec. (4.6) es ahora una columna de cuatro componentes, que se denotarán por $M_{1'}$, $-M_{0'}$, $\psi_{\mathrm{G}}$ y $-\psi_{\mathrm{E}}$, por lo que la ec. (4.6) corresponde al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\overline{\delta}+3\alpha+\overline{\beta}-\overline{\tau})M_{1'} - (\Delta+3\gamma-\overline{\gamma}+\overline{\mu})M_{0'} &= 2\phi_1\psi_{\mathrm{G}}, \\ (D+3\epsilon+\overline{\epsilon}+3\rho-\overline{\rho})M_{1'} - (\delta+3\beta-\overline{\alpha}+3\tau+\overline{\pi})M_{0'} &= 4\phi_1\psi_{\mathrm{E}}, \\ 2\phi_1[(\Delta+2\gamma+\mu)\psi_{\mathrm{E}} - (\delta+4\beta+2\tau)\psi_{\mathrm{G}}] &= (3\Psi_2-2\Phi_{11})M_{1'}, \\ 2\phi_1[(\overline{\delta}+2\alpha+\pi)\psi_{\mathrm{E}} - (D+4\epsilon+2\rho)\psi_{\mathrm{G}}] &= (3\Psi_2+2\Phi_{11})M_{0'}. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Cualquier solución de este sistema de ecuaciones genera una solución completa de las ecuaciones de Einstein–Maxwell linealizadas [ecs. (4.18)] dada por

$$\begin{bmatrix} (h_{\mu\nu}) \\ (b_{\mu}) \end{bmatrix} = \mathcal{S}^{\dagger}\begin{bmatrix} M_{1'} \\ -M_{0'} \\ \psi_{\mathrm{G}} \\ -\psi_{\mathrm{E}} \end{bmatrix},$$

la cual puede ser compleja, pero tomando en cuenta que las ecuaciones linealizadas de Einstein–Maxwell son reales, de la ec. (4.35) sigue que (omitiendo un factor global de 1/4)

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= 2\{l_{\mu}l_{\nu}[(\delta+3\beta+\overline{\alpha}-\tau)M_{1'} - \overline{\lambda}M_{0'}] + m_{\mu}m_{\nu}(D+3\epsilon+\overline{\epsilon}-\rho)M_{0'} \\ &\qquad - l_{(\mu}m_{\nu)}[(D+3\epsilon+\overline{\epsilon}-\rho+\overline{\rho})M_{1'} + (\delta+3\beta-\overline{\alpha}-\tau-\overline{\pi})M_{0'}]\} + \text{c.c.}, \\ b_{\mu} &= \tfrac{1}{2}[l_{\mu}(\delta+2\beta+\tau) - m_{\mu}(D+2\epsilon+\rho)]\psi_{\mathrm{E}} + \text{c.c.}, \end{aligned} \tag{4.37}$$

es una solución real de las ecuaciones de Einstein–Maxwell linealizadas.

En resumen, dada una solución exacta de las ecuaciones de Einstein–Maxwell con las restricciones establecidas al inicio de esta sección, los potenciales complejos que satisfacen las ecs. (4.36) generan soluciones de las ecuaciones de Einstein–Maxwell linealizadas alrededor de la solución dada, mediante las ecs. (4.37). De esta manera, el problema de resolver las 14 ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden para las 14 componentes de las perturbaciones, $h_{\mu\nu}$ y $b_\mu$, se reduce a resolver el sistema (4.36), que equivale a un sistema de sólo dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden para los dos potenciales $\psi_{\mathrm{E}}$ y $\psi_{\mathrm{G}}$ (de las últimas dos ecuaciones en (4.36) se puede expresar $M_{0'}$ y $M_{1'}$ en función de $\psi_{\mathrm{E}}$ y $\psi_{\mathrm{G}}$ y sustituyendo en las primeras dos ecuaciones se obtienen dos ecuaciones de segundo orden para $\psi_{\mathrm{E}}$ y $\psi_{\mathrm{G}}$). El sistema (4.36) ha sido resuelto anteriormente para la solución de RN (Torres del Castillo 1987) y para la solución de Bell–Szekeres (Torres del Castillo and Mendoza Barrera 1996).

### 4.3. El caso límite del espacio-tiempo plano

A pesar de que las expresiones presentadas en este capítulo se obtienen suponiendo que existe un campo electromagnético de fondo algebraicamente general, de las ecs. (4.36) y (4.37) se pueden deducir expresiones para las perturbaciones electromagnéticas y gravitacionales del espacio-tiempo plano (Wald 1978).

En efecto, usando el segundo par de ecuaciones (4.36), se pueden escribir los potenciales $M_{0'}$ y $M_{1'}$ en términos de $\psi_{\mathrm{G}}$ y $\psi_{\mathrm{E}}$ y sustituyendo tales expresiones en las primeras dos ecuaciones (4.36) se llega a un sistema de dos ecuaciones acopladas de segundo orden para los potenciales $\psi_{\mathrm{G}}$ y $\psi_{\mathrm{E}}$. Dividiendo las ecuaciones así obtenidas entre $\phi_1$ y considerando entonces el límite en que $\phi_1 \to 0$, lo cual implica que $\Phi_{11} \to 0$

[ver ec. (2.23)], por medio de las identidades de Bianchi (2.18), las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (2.21) y la identidad

$$(D+(p-1)\epsilon+\bar{\epsilon}+q\rho-\bar{\rho})(\delta+p\beta+q\tau)=(\delta+(p-1)\beta-\bar{\alpha}+q\tau+\bar{\pi})(D+p\epsilon+q\rho),$$

la cual es válida para valores arbitrarios de las constantes $p$ y $q$ y se deduce de (2.7) y (2.16), se halla la ecuación desacoplada

$$[(D+3\epsilon+\bar{\epsilon}+2\rho-\bar{\rho})(\Delta+2\gamma+\mu)-(\delta+3\beta-\bar{\alpha}+2\tau+\bar{\pi})(\bar{\delta}+2\alpha+\pi)-6\Psi_2]\psi_{\mathrm{E}}=0.$$

Conmutando los operadores diferenciales, usando nuevamente las identidades del Capítulo 2, resulta que la ecuación anterior es equivalente a

$$[(\Delta+\gamma-\bar{\gamma}+\bar{\mu})(D+2\epsilon+\rho)-(\bar{\delta}+\alpha+\bar{\beta}-\bar{\tau})(\delta+2\beta+\tau)]\psi_{\mathrm{E}}=0 \qquad (4.38)$$

(cf. Wald 1978).

La ecuación (4.38) es equivalente a las ecuaciones para los potenciales escalares usados en la electrodinámica clásica en el estudio de la radiación multipolar (Jackson 1975, Cap. 16); cada multipolo resulta de las soluciones separables de (4.38) en coordenadas esféricas.

# Capítulo 5

## PERTURBACIONES DE ALGUNAS SOLUCIONES EXACTAS DE LAS ECUACIONES DE EINSTEIN–MAXWELL

Aplicando los resultados presentados en el capítulo anterior, a continuación se considerarán las perturbaciones de algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein–Maxwell dadas en el capítulo 3. Sustituyendo las expresiones (3.1), (3.2), (3.4) y (3.8) en el sistema de ecuaciones para los potenciales (4.36), suponiendo que todos los potenciales tienen una dependencia en las coordenadas ignorables $u$ y $v$ dada por el factor $e^{i(ku+lv)}$ [ec. (3.7)], se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que sólo involucra derivadas parciales con respecto a las coordenadas $x$ y $y$

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}\,\phi\overline{\phi}\,\overline{\zeta}^{-1}\xi^{3}\mathcal{L}_0\,(\overline{\phi}^{-1}\overline{\zeta}\xi^{-3}M_{1'}) + \phi\overline{\phi}^{2}\xi^{3}\overline{\xi}^{-1}Q\,\mathcal{D}_0^{\dagger}\,(\overline{\phi}^{-1}\xi^{-3}\overline{\xi}M_{0'}) = 2(e+ig)\phi^{2}\psi_{\mathrm{G}},\\
\sqrt{2}\,\phi^{-3}\overline{\phi}\zeta^{-3}\overline{\zeta}^{-1}\mathcal{D}_0\,(\phi^{3}\overline{\phi}^{-1}\zeta^{3}\overline{\zeta}M_{1'}) - \phi^{-3}\overline{\phi}^{2}\zeta^{-3}\overline{\xi}^{-1}\mathcal{L}_0^{\dagger}\,(\phi^{3}\overline{\phi}^{-1}\zeta^{3}\overline{\xi}M_{0'}) = 2\sqrt{2}\,(e+ig)\phi^{2}\psi_{\mathrm{E}},\\
(e+ig)\phi^{2}[\sqrt{2}\phi^{2}\overline{\phi}\xi^{2}Q\,\mathcal{D}_0^{\dagger}\,(\phi^{-1}\xi^{-2}\psi_{\mathrm{E}}) + 2\phi^{-2}\overline{\phi}\zeta^{-4}\mathcal{L}_0^{\dagger}\,(\phi^{2}\zeta^{4}\psi_{\mathrm{G}})] = -2\sqrt{2}\,(3\Psi_2 - 2\Phi_{11})M_{1'},\\
(e+ig)\phi^{2}[\sqrt{2}\phi^{2}\xi^{2}\mathcal{L}_0\,(\phi^{-1}\xi^{-2}\psi_{\mathrm{E}}) - 2\phi^{-2}\zeta^{-4}\mathcal{D}_0\,(\phi^{2}\zeta^{4}\psi_{\mathrm{G}})] = 2(3\Psi_2 + 2\Phi_{11})M_{0'}.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Se muestra enseguida que este sistema de ecuaciones se puede resolver por separación de variables en aquellos casos en que los polinomios $p(x)$ y $P(x)$ (o $q(y)$ y $Q(y)$) son a lo más de grados 1 y 2, respectivamente.

## 5.1. Perturbaciones de la solución de Carter CB(+)

En las Tablas I y II dadas en el capítulo 3 (pág. 20) se halla que para la solución denotada por CB(+), las funciones que determinan los coeficientes de espín son

$$\phi = (y + ia)^{-1}, \qquad \zeta = P^{1/4}, \qquad \xi = P^{1/4}Q^{1/2}\phi \tag{5.2}$$

donde

$$P(x) = 1 - \epsilon_0 x^2, \qquad Q(y) = e^2 + g^2 - 2my + \epsilon_0(y^2 - a^2). \tag{5.3}$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.1) y recordando que $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_0^\dagger$ sólo contienen derivadas con respecto a $x$, mientras que $\mathcal{D}_0$ y $\mathcal{D}_0^\dagger$ sólo contienen derivadas con respecto a $y$, se tiene

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}\,\phi\,\mathcal{L}_{-1}\,M_{1'} + \phi^4\overline{\phi}\,Q\,\mathcal{D}_{-1}^\dagger\,(\phi^{-3}M_{0'}) = 2(e+ig)\phi^2\psi_{\rm G},\\
\sqrt{2}\,\phi^{-3}\overline{\phi}\,\mathcal{D}_0\,(\phi^3\overline{\phi}^{-1}M_{1'}) - \overline{\phi}\,\mathcal{L}_2^\dagger\,M_{0'} = 2\sqrt{2}\,(e+ig)\phi^2\psi_{\rm E},\\
(e+ig)\phi^2[\sqrt{2}\,\phi^4\overline{\phi}\,Q\,\mathcal{D}_{-1}^\dagger\,(\phi^{-3}\psi_{\rm E}) + 2\overline{\phi}\,\mathcal{L}_2^\dagger\,\psi_{\rm G}] = -2\sqrt{2}\,(3\Psi_2 - 2\Phi_{11})M_{1'},\\
(e+ig)\phi^2[\sqrt{2}\,\phi\,\mathcal{L}_{-1}\,\psi_{\rm E} - 2\phi^{-2}\,\mathcal{D}_0\,(\phi^2\psi_{\rm G})] = 2(3\Psi_2 + 2\Phi_{11})M_{0'}.
\end{gathered} \tag{5.4}$$

Este sistema de ecuaciones admite soluciones de la forma

$$\begin{aligned}
M_{0'} &= 2(e+ig)S_{-2}(x)R_1(y)e^{i(ku+lv)},\\
M_{1'} &= \sqrt{2}\,(e+ig)S_{-1}(x)R_2(y)e^{i(ku+lv)},\\
\psi_{\rm G} &= S_{-2}(x)R_3(y)e^{i(ku+lv)},\\
\psi_{\rm E} &= \sqrt{2}\,S_{-1}(x)R_4(y)e^{i(ku+lv)},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

donde las funciones $S_{-1}$ y $S_2$ satisfacen las relaciones (3.12), es decir,

$$\mathcal{L}_{-1}\,S_{-1} = C(-1)S_{-2}, \qquad \mathcal{L}_2^\dagger\,S_{-2} = -\widetilde{C}(2)S_{-1}. \tag{5.6}$$

Luego, $\mathcal{L}_{-1}\sqrt{\widetilde{C}(2)}\,S_{-1} = \sqrt{C(-1)\widetilde{C}(2)}\,\sqrt{C(-1)}\,S_{-2}$ y, similarmente, $\mathcal{L}_2^\dagger\sqrt{C(-1)}\,S_{-1} = -\sqrt{C(-1)\widetilde{C}(2)}\,\sqrt{\widetilde{C}(2)}\,S_{-1}$, por lo que, absorbiendo los factores constantes $\sqrt{\widetilde{C}(2)}$ y

$\sqrt{C(-1)}$ en las funciones $S_{-1}$ y $S_{-2}$, respectivamente, la ec. (5.6) se convierte en

$$\mathcal{L}_{-1}\, S_{-1} = C S_{-2}, \qquad \mathcal{L}_2^\dagger\, S_{-2} = -C S_{-1}, \tag{5.7}$$

con $C = \sqrt{C(-1)\widetilde{C}(2)}$. Entonces, sustituyendo las expresiones (5.5) en las ecs. (5.4), usando (5.7) se obtiene el siguiente sistema de cuatro ecuaciones *ordinarias* que sólo contiene funciones dependientes de $y$ (de acuerdo con la Tabla II, pág. 20, $\Psi_2 = [-(m + i\epsilon_0 a) + (e^2 + g^2)\overline{\phi}]\phi^3$, mientras que $\Phi_{11} = \frac{1}{2}|(e + ig)\phi^2|^2$)

$$\begin{aligned} C\phi R_2 + \phi^4\overline{\phi}\, Q\, \mathcal{D}_{-1}^\dagger\, (\phi^{-3} R_1) &= \phi^2 R_3, \\ \phi^{-3}\overline{\phi}\, \mathcal{D}_0\, (\phi^3 \overline{\phi}^{-1} R_2) + C\overline{\phi}\, R_1 &= 2\phi^2 R_4, \\ \phi^2[\phi^4\overline{\phi}\, Q\, \mathcal{D}_{-1}^\dagger\, (\phi^{-3} R_4) - C\overline{\phi} R_3] &= -2(3\Psi_2 - 2\Phi_{11}) R_2, \\ \phi^2[C\phi R_4 - \phi^{-2}\, \mathcal{D}_0\, (\phi^2 R_3)] &= 2(3\Psi_2 + 2\Phi_{11}) R_1. \end{aligned} \tag{5.8}$$

En el caso en el que el parámetro $a$ es igual a cero, se puede conseguir una simplificación del sistema de ecuaciones anterior. Introduciendo las dos constantes

$$q_1 = 3m + \sqrt{9m^2 + 4(e^2 + g^2)C^2}, \qquad q_2 = 3m - \sqrt{9m^2 + 4(e^2 + g^2)C^2}, \tag{5.9}$$

así que

$$q_1 + q_2 = 6m, \qquad q_1 q_2 = -4(e^2 + g^2)C^2 \tag{5.10}$$

y tomando en cuenta que en este caso $\phi = \overline{\phi}$, de las ecuaciones (5.8) se halla que

$$\begin{aligned} Q\mathcal{D}_{-1}^\dagger \left(\phi^{-3} R_4 + \frac{q_j}{C}\phi^{-3} R_1\right) &= \left(C\phi^{-6} + \frac{q_j}{C}\phi^{-5}\right)\left(\phi^2 R_3 + \frac{q_k}{C}\phi^2 R_2\right), (j, k = 1, 2; j \neq k) \\ \mathcal{D}_0 \left(\phi^2 R_3 + \frac{q_k}{C}\phi^2 R_2\right) &= \left(C\phi^6 + \frac{2q_k}{C}\phi^7\right)\left(\phi^{-3} R_4 + \frac{q_j}{C}\phi^{-3} R_1\right), \end{aligned} \tag{5.11}$$

de esta manera se tienen dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas cada uno.

### 5.2. Perturbaciones de la solución g*RN

Para la solución g*RN, de las Tablas I y II (pág. 20) se tiene

$$\phi = -ix, \qquad \zeta = P^{1/4}x^{-1}, \qquad \xi = P^{1/4}Q^{1/2} \tag{5.12}$$

con

$$P(x) = -\epsilon_0 x^2 + 2nx^3 - (e^2+g^2)x^4, \qquad Q(y) = 1+\epsilon_0 y^2. \tag{5.13}$$

Sustituyendo las ecs. (5.12) en las ecs. (5.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
-i\sqrt{2}\,x^3\mathcal{L}_{-1}\,(x^{-2}M_{1'}) + x^2\,Q\,\mathcal{D}_{-1}^{\dagger}\,M_{0'} &= -2(e+ig)x^2\psi_{\mathrm{G}},\\
\sqrt{2}\,\mathcal{D}_0\,M_{1'} - ix^2\,\mathcal{L}_2^{\dagger}\,(x^{-1}M_{0'}) &= -2\sqrt{2}\,(e+ig)x^2\psi_{\mathrm{E}},\\
(e+ig)x^2[\sqrt{2}\,x^2\,Q\,\mathcal{D}_{-1}^{\dagger}\,\psi_{\mathrm{E}} + 2ix^3\,\mathcal{L}_2^{\dagger}\,(x^{-2}\psi_{\mathrm{G}})] &= 2\sqrt{2}\,(3\Psi_2 - 2\Phi_{11})M_{1'},\\
(e+ig)x^2[i\sqrt{2}\,x^2\,\mathcal{L}_{-1}\,(x^{-1}\psi_{\mathrm{E}}) + 2\mathcal{D}_0\,\psi_{\mathrm{G}}] &= 2(3\Psi_2 + 2\Phi_{11})M_{0'},
\end{aligned} \tag{5.14}$$

por lo que en este caso, tomando en cuenta que los polinomios $q(y)$ y $Q(y)$ satisfacen las condiciones halladas en el capítulo 3, se buscarán soluciones separables de la forma

$$\begin{aligned}
M_{0'} &= 2(e+ig)S_1(x)R_{-1}(y)e^{i(ku+lv)},\\
M_{1'} &= i\sqrt{2}\,(e+ig)S_2(x)R_{-2}(y)e^{i(ku+lv)},\\
\psi_{\mathrm{G}} &= S_3(x)R_{-2}(y)e^{i(ku+lv)},\\
\psi_{\mathrm{E}} &= i\sqrt{2}\,S_4(x)R_{-1}(y)e^{i(ku+lv)},
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde $R_{-1}(y)$ y $R_{-2}(y)$ satisfacen las relaciones [ver la ec. (3.25)]

$$\mathcal{D}_0\,R_{-2} = D(-2)R_{-1}, \qquad Q\,\mathcal{D}_{-1}^{\dagger}\,R_{-1} = \widetilde{D}(-1)R_{-2}. \tag{5.16}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que con las ecs. (5.6), las funciones $R_{-1}$ y $R_{-2}$ pueden normalizarse de tal manera que $D(-2)$ y $\widetilde{D}(-1)$ tengan un mismo valor, que se denotará por $D$. Entonces, sustituyendo las ecs. (5.15) en (5.14), usando (5.16) se llega al sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned}
x^3\,\mathcal{L}_{-1}\,(x^{-2}S_2) + Dx^2S_1 &= -x^2S_3, \\
DS_2 - x^2\,\mathcal{L}_2^\dagger\,(x^{-1}S_1) &= -2x^2S_4, \\
x^2[Dx^2S_4 + x^3\,\mathcal{L}_2^\dagger\,(x^{-2}S_3)] &= 2(3\Psi_2 - 2\Phi_{11})S_2, \\
x^2[-x^2\,\mathcal{L}_{-1}\,(x^{-1}S_4) + DS_3] &= 2(3\Psi_2 + 2\Phi_{11})S_1,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

con

$$\Psi_2 = nx^3 - (e^2+g^2)x^4, \qquad \Phi_{11} = \tfrac{1}{2}(e^2+g^2)x^4 \tag{5.18}$$

(ver la Tabla II, pág. 20), que son funciones de $x$ solamente.

Al igual que con la solución de RN (Torres del Castillo 1987), el sistema de ecuaciones ordinarias que queda por resolver se puede desacoplar parcialmente, convirtiéndolo en dos sistemas de dos ecuaciones cada uno. Definiendo las constantes

$$q_1 = -3n + \sqrt{9n^2 + 4(e^2+g^2)D^2}, \qquad q_2 = -3n - \sqrt{9n^2 + 4(e^2+g^2)D^2}, \tag{5.19}$$

de tal manera que

$$q_1 + q_2 = -6n, \qquad q_1q_2 = -4(e^2+g^2)D^2, \tag{5.20}$$

de las ecs. (5.17) y (5.18) se halla que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{-1}\left(x^{-1}S_4 + \frac{q_j}{D}x^{-2}S_2\right) &= \left(D - \frac{q_j}{D}x\right)\left(x^{-2}S_3 + \frac{q_k}{D}x^{-1}S_1\right), \qquad (j,k = 1,2; j \neq k) \\
\mathcal{L}_2^\dagger\left(x^{-2}S_3 + \frac{q_k}{D}x^{-1}S_1\right) &= -\left(D - \frac{2q_k}{D}x\right)\left(x^{-1}S_4 + \frac{q_j}{D}x^{-2}S_2\right)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

[cf. ecs. (5.6)]. Esta reducción se aplica siempre y cuando $D$ sea diferente de cero. Sin embargo, cuando $D = 0$, las ecs. (5.17) de inmediato se reducen a dos sistemas de dos ecuaciones, uno para $S_2$ y $S_3$ y otro para $S_1$ y $S_4$.

Los pares de ecuaciones (5.11) y (5.21) se pueden combinar para obtener ecuaciones de segundo orden con una sola incógnita y tales ecuaciones se pueden llevar, mediante cambios de variable, a la forma de la ecuación de Schrödinger (ver Chandrasekhar 1983), lo que resulta útil para relacionar el problema de la interacción de las perturbaciones gravitacionales y electromagnéticas con la solución de fondo con el problema de la ecuación de Schrödinger para una barrera de potencial en una sola dimensión. Cualquiera que sea el procedimiento que se use para analizar o para obtener soluciones de las ecs. (5.8), (5.17) o (5.21), las expresiones para los potenciales (5.5) o (5.15) dan las perturbaciones completas del potencial vectorial y del tensor métrico por medio de las ecs. (4.37).

# Conclusiones

Este trabajo presenta nuevos resultados que extienden lo conocido acerca de las perturbaciones lineales de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein–Maxwell, gracias al empleo del conjunto de potenciales complejos presentado en el capítulo 4. Puesto que las soluciones de las ecs. (5.8) y (5.21), al igual que las de las ecuaciones análogas obtenidas en los casos previamente estudiados, no se conocen explícitamente, no se dan expresiones explícitas para las perturbaciones relevantes. Sin embargo, el hecho de que la solución de estas pocas ecuaciones diferenciales ordinarias dé la solución completa del problema original de 14 ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden para 14 incógnitas es un resultado notable.

Entre los problemas que quedan abiertos para futuras investigaciones está el estudio de propiedades de las soluciones de las ecs. (5.8) y (5.21) (análogas a las estudiadas en el capítulo 3), así como el cálculo de factores de absorción y reflexión y de conversión de ondas gravitacionales en electromagnéticas y viceversa. En el caso de soluciones que representan agujeros negros, el hecho de que el campo gravitacional exterior al agujero produzca dispersión de las ondas electromagnéticas, en particular, hace que estos agujeros no sean del todo negros. La radiación electromagnética incidente (o la gravitacional, tomando en cuenta el fenómeno de la conversión de un tipo de ondas en el otro) da lugar a ondas reflejadas en el exterior del agujero, de tal forma que habría un patrón bien definido de ondas reflejadas, para una onda incidente dada, lo que en principio permitiría distinguir el campo gravitacional que produce la dispersión.

# Bibliografía

Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Clarendon Press, Oxford).

Chandrasekhar, S. and Xanthopoulos, B. (1985). "On colliding waves in the Einstein–Maxwell theory", *Proc. R. Soc. London* A **398**, 223.

Debever, R., Kamran, N., and McLenaghan, R.G. (1984). "Exhaustive integration and a single expression for the general solution of the type D vacuum and electrovac field equations with cosmological constant for a nonsingular aligned Maxwell field", *J. Math. Phys.* **25**, 1955.

Frolov, V.P. and Novikov, I. (1998). *Black Hole Physics, Basic Concepts and New Developments*, (Kluwer, Dordrecht).

García Díaz, A. (1984). "Electrovac type D solutions with cosmological constant", *J. Math. Phys.* **25**, 1951.

Jackson, J.D. (1975). *Classical Electrodynamics*, (Wiley, New York).

Kamran, N. and McLenaghan, R.G. (1987). En *Gravitation and Geometry: A Volume in Honor of I. Robinson*, W. Rindler and A. Trautman, eds. (Bibliopolis, Naples), pp. 279–292.

Newman, E.T. and Penrose, R. (1962). "An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients", *J. Math. Phys.* **3**, 566.

Piña, E. (1995). "Algunas propiedades de los operadores de escalera", *Rev. Mex. Fís.* **41**, 913.

Stewart, J. (1990). *Advanced General Relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge).

Torres del Castillo, G.F. (1987). "Gravitational and electromagnetic perturbations of the Reissner–Nordström solution", *Class. Quantum Grav.* **4**, 1133.

Torres del Castillo, G.F. (1988a). "Perturbations of solutions of the Einstein equations with sources", *Class. Quantum Grav.* **5**, 649.

Torres del Castillo, G.F. (1988b). "The Teukolsky–Starobinsky identities in type D vacuum backgrounds with cosmological constant", *J. Math. Phys.* **29**, 2078.

Torres del Castillo, G.F. (1989). "Spin-3/2 perturbations of algebraically special solutions of the Einstein–Maxwell equations", *J. Math. Phys.* **30**, 2114.

Torres del Castillo, G.F. (1990). "Una introducción a los armónicos esféricos espinoriales, *Rev. Mex. Fís.* **36**, 446.

Torres del Castillo, G.F. and Cartas Fuentevilla, R. (1996). "Scattering by a Reissner–Nordström black hole", *Phys. Rev.* D **54**, 4886.

Torres del Castillo, G.F. and Flores Urbina, J.C. (1999). "Self-adjoint operators and symplectic currents", *Gen. Rel. Grav.* **31**, 1315.

Torres del Castillo, G.F. and Mendoza Barrera, C. (1996). "Perturbations of the Bell–Szekeres solution", *Class. Quantum Grav.* **13**, 3245.

Torres del Castillo, G.F. and Pérez Pérez, J.C. (1998). "Perturbations of solutions of the Einstein–Weyl equations: An example", *Phys. Rev.* D **58**, 047501.

Torres del Castillo, G.F. (1999). "Debye potentials for self-dual fields", *Gen. Rel. Grav.* **31**, 205.

Wald, R.M. (1978). "Construction of solutions of gravitational, electromagnetic, or other perturbation equations from solutions of decoupled equations", *Phys. Rev. Lett.* **41**, 203.