45

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CADENAS DE MARKOV; UNA APLICACION"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

LUZ PATRICIA GONZALEZ ANDRADE

DIRECTOR DE TESIS: M. en C. MA. ARACELI BERNABE ROCHA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Cadenas de Markov; una aplicación."

realizado por **LUZ PATRICIA GONZÁLEZ ANDRADE**

con número de cuenta **8420293-4**, quien cubrió los créditos de la carrera de **Actuaría**

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	**M. en C. Ma. Araceli Bernabé Rocha**
Propietario	**Dr. Arturo Lorenzo Valdés**
Propietario	**M. en C. Virginia Abrín Batule** Virginia Abrín Batule
Suplente	**Act. Eric Manuel Rodríguez Herrera**
Suplente	**Mat. Adrián Girard Islas**

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis tres hijas :

Anna Rosa, Luz Stephanya y Dalia Avilia .

Por su comprensión y apoyo, porque a pesar de todo el tiempo que las he dejado solas, siempre me han apoyado y motivado en todo lo que hago.

Un agradecimiento muy especial a mis padres por ayudarme tanto en la vida.

Mis más sinceras gracias a mi directora de tesis:

M. en C. Ma. Araceli Bernabé Rocha

INDICE

"Cadenas de Markov; una aplicación"

INTRODUCCION

Cuantas veces, en esa época del año en que las lluvias son frecuentes, nos hemos preguntado, ¿qué será más conveniente, llevar o no el parguas?; seguramente todos hemos adoptado una u otra decisión a partir del clima en los días pasados, el reporte del metereológico o simplemente por nuestra intuición.

Basar nuestras decisones en intuiciones no es malo; pero ¿usted confiaría los ahorros de toda su vida a una persona que toma sus decisiones de inversión de acuerdo a sus corazonadas?, independientemente de cual será su respuesta le deseamos mucha suerte.

En general, construir un portafolio de inversión requiere de varios factores inherentes al tipo de inversión que se desea y a las necesidades del inversionista. Los requerimientos de líquidez, la aversión al riesgo, las expectativas de rendimiento, el monto inicial de la inversión, entre otros, son factores que determinan los instrumentos de inversión que componen el portafolio. No obstante que conocer esta información es importante, esto no resulve el problema; para poder cubrir los requerimientos de líquidez y satisfacer las espectativas del inversionista es necesario conocer el rendimiento esperado de los instrumentos o bien su precio futuro. En este conocimiento estará basada la decisión de inversión; comprar, vender o mantener dentro del portafolio un instrumento.

No obstante que determinar cuál será el precio de un Cete es tan incierto como saber si mañana lloverá o no; resulta más atractivo (por el efecto económico) poder determinar cuanto valdrá un instrumento financiero en el futuro.

Dentro de la práctica bursátil, para determinar una inversión, es necesario conocer los estados financieros de la empresa emisora, el sector al que pertenece, los proyectos de inversión de la empresa y en general, monitorear todos aquellos factores que pueden influir en la variación del precio de un instrumento financiero, además de no poder omitir la experiencia del analista bursátil.

Como podemos ver, predecir el precio de un instrumento es complicado. Sin embargo en el presente trabajo desarrollamos una técnica pobabilística (mediante Procesos de Markov), que sí bien no determina al cien por ciento el comportamiento futuro de los precios, sí puede ser considerado como un factor más que ayude a tomar una decisión de inversión.

Iniciamos el capítulo 1 con una breve descripción de los procesos de Markov, introduciendo algunos conceptos y notación que usaremos en los capítulos posteriores. En el capítulo 2, se emplean los procesos de Markov como una herramienta para predecir movimientos futuros de los procesos estocásticos, ejemplificando su uso en la posible realización de una auditoría a un contribuyente.

En el capítulo 3 se centra la atención en la aplicación de las cadenas de Markov, a la predicción de movimientos futuros de acciones de tres empresas mexicanas que cotizan en Wall Street. Empleando para ello información histórica del comportamiento de estas acciones.

Por último, en el capítulo 4, se realiza un análisis complementario al efectuado en el capítulo anterior. En éste, se da importancia no únicamente a las variaciones en el comportamiento de las acciones sino además, en la magnitud de éstas. Finalmente, incluimos las conclusiones referentes al trabajo y la bibliografía correspondiente.

Capítulo 1

Cadenas de Markov

El análisis de Markov tuvo su origen en los estudios de A.A. Markov (1906-1907) sobre la secuencia de experimentos conectados en cadena, en los primeros intentos por describir matemáticamente los fenómenos físicos conocidos como movimiento browniano. La primera construcción matemática realizada correctamente de un proceso de Markov con trayectorias continuas se debe a N. Wiener en 1923. Mientras que la teoría general de los procesos de Markov se desarrolló en las décadas de 1930 y 1940 por A.N. Kolmagoron, W. Feller, W. Doeblin, P. Levy, J.L. Doob y otros.

El análisis de Markov proporciona una forma de analizar el comportamiento actual de alguna variable, a fin de pronosticar el comportamiento futuro de la misma. Así este método se comenzó a usar en los últimos años como instrumento de investigación en mercadotécnia, para examinar y pronosticar su comportamiento de los clientes ante la lealtad a una marca o bien de sus formas de cambio a otras.

Proceso Estocástico: Un proceso estocástico es una sucesión de eventos en el tiempo con resultados aleatorios. Una definición ligeramente más restrictiva de un proceso estocástico es que se trata de un suceso indexado por el tiempo.

Si se realiza un mismo suceso en intervalos de tiempo en el cual se pueden obtener resultados aleatorios en cada realización entonces se tiene un proceso estocástico con ensayos, horarios y probables resultados.

Por ejemplo, los precios de cierre en Wall Street pueden ser considerados como resultados de un proceso estocástico. Ya que los precios obtenidos al final de cada día o jornada de operación, de todos los productos financieros que ahí se cotizan, es aleatorio. Estos precios pueden tener una variación diaria o pueden no variar, pero exista o no esta variación es totalmente aleatorio.

En un contexto general, al valor específico que puede tomar las variable aleatoria se le denomina estado y a la variable aleatoria, variable de estado.

1.1 Familia de variables aleatorias

Considérense los puntos discretos en el tiempo x_t con $t = 1, 2, ...$; y sea X_t una variable aleatoria que caracteriza el estado del sistema en x_t, entonces la familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ forma un proceso estocástico.

Para ejemplificar el concepto consideremos que se observan los días de la semana y se clasifican en dos, día lluvioso o día sin lluvia. En este caso $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ representa la semana y por lo tanto, la variable aleatoria X_t con dos valores:

$$\begin{array}{lcl} X_t = & 1 & = \{\textit{Día lluvioso}\} \\ & \text{ó} & \\ X_t = & 2 & = \{\textit{Día no lluvioso}\} \end{array}$$

Es decir, $X_t = \{1, 2\}$ representa la familia de variables aleatorias y por lo tanto forma un proceso estocástico.

1.2 Proceso de Markov

Un proceso de Markov es un sistema estocástico en el cual la ocurrencia de un estado en el futuro depende del estado inmediatamente precedente. Es decir, si $x_0 < x_1 < ... < x_n$ representan puntos en el tiempo, entonces la familia de variables aleatorias $\{X_t\}$ es un proceso de Markov, si posee la siguiente **propiedad markoviana:**

"Si el estado actual se conoce y la probabilidad condicional del próximo estado es independiente de los estados anteriores al actual.

1.2.1 Probabilidad de transición

Ahora bien, dado un estado y un proceso estocástico discreto*[1], se define la probabilidad condicional, de un estado específico, de pasar de un periodo de tiempo a otro como la probabilidad con la que la variable aleatoria X_t pasa de un valor a otro en cada periodo de tiempo.

En este momento es necesario incorporar alguna notación. La letra máyuscula representará la variable aleatoria mientras que la letra minúscula representará un valor específico de la variable y por lo tanto un estado del proceso estocástico. Si x_t representa el valor que toma la variable aleatoria X en un periodo de tiempo t entonces $X_t = x_t$ y, $X_0 = x_0$, $X_1 = x_1$, ...,$X_{t-1} = x_{t-1}$, representan los valores que tomó la variable aleatoria X con anterioridad a X_t en periodos anteriores al tiempo t, la propiedad markoviana garantiza que la probabilidad de pasar a un estado X_t dado X_{t-1} es independiente de los valores que toma la variable aleatoria X desde 0 hasta $t-2$. Por ello, la probabilidad condicional del próximo estado x_t dado el estado presente x_{t-1} se determina como:

$$P\{X_t = x_t/X_{t-1} = x_{t-1}, ..., X_0 = x_0\} = P\{X_t = x_t/X_{t-1} = x_{t-1}\}$$

para todos los posibles valores de $X_1, X_2, ..., X_n$. En lo subsecuente, la probabilidad condicional, también conocida como probabilidad de transición, será denotada por:

$$Px_{n-1}\,,\, x_n \;=\; P\,\{X_n = x_n/X_{n-1} = x_{n-1}\}$$

y representa la probabilidad condicional de que el sistema se encuentre en x_n en el periodo de tiempo t_n, dado que estaba en x_{n-1} en t_{n-1}. Por definición, esta probabilidad describe el comportamiento del sistema entre t_{n-1} y t_n por lo que también se conoce como probabilidad de transición de un paso.

Con una idea similar, se define la probabilidad de transición de m pasos como:

$$Px_n\,, x_{n+m} \;=\; P\,\{X_{n+m} \;=\; x_{n+m}\,/\,X_n = x_n\}$$

Como se ha mencionado, un proceso de Markov basado en el tiempo es un proceso donde la probabilidad de un estado para el siguiente periodo de tiempo depende únicamente de lo que ocurre en el periodo de tiempo actual y no de cómo se llegó al estado presente.

[1] Un proceso estocástico discreto es aquel en el cual los eventos ocurren en periodos de tiempo discretos, como puede ser cada hora, cada día, cada año, etcetera.

1.3 Matriz estocástica

Para simplificar la notación y considerando que todos los estados del sistema pueden ser identificados únicamente por un índice, en lo subsecuente, las probabilidades de transición de un paso serán denotadas como:

$$P_{ij} = P\{X_n = j/X_{n-1} = i\}$$

Como se muestra a continuación, estas probabilidades pueden ser arregladas en forma matricial como se muestra a continuación:

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \cdots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \cdots \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Donde la entrada ij, P_{ij}, representa la probabilidad de que el sistema estando en el estado i, en el tiempo n; pase al estado j en el tiempo $n+1$.

Esta matriz recibe el nombre de matriz estocástica.

1.4 Cadena de Markov

Un caso particular de los procesos estocásticos, son las cadenas de Markov, en donde todas las probabilidades de transición P_{ij} son fijas e independientes del tiempo y satisfacen que:

$$\begin{aligned} \sum P_{ij} &= 1, \quad \text{para toda i} \\ \text{y} \qquad P_{ij} &\geq 0 \quad \text{para toda i y j} \end{aligned}$$

Así, una cadena de Markov es un proceso estocástico con las siguientes características:

1.-Un espacio de estados discreto,
2.-Propiedad Markoviana y,

3.-Probabilidades de transición de un paso que permanecen constantes a través del tiempo (también llamadas probabilidades de transición estacionaria).

Si además el espacio de estados es discreto y finito, entonces se define una cadena de Markov con estados finitos.

De la definición, una cadena de Markov queda determinada completamente una vez que se especifica la matriz de transición y el conjunto de probabilidades incondicionales para los estados iniciales. El conocimiento de estos dos conjuntos de probabilidades permitirá el pronóstico probabilístico de estados específicos futuros.

1.4.1 Procesos de Markov en la dinámica de un sistema

Los procesos de Markov describen la dinámica de un sistema. Específicamente, describen el movimiento entre los diferentes estados como una función del tiempo.

Los movimientos de personas, inventario y el dinero son ejemplos de procesos de Markov. No obstante, existen procesos que pueden ser considerados de Markov, y no de Markov simultaneamente, por ejemplo:

Proceso de Markov: La probabilidad de que un paciente en un hospital tenga un determinado estado de salud (satisfactoria, buena, crítica, etc.) en un día en particular, depende únicamente de la condición del paciente el día previo.

No proceso de Markov. La probabilidad de que un paciente en un hospital tenga un determinado estado de salud, en un día en particular, depende no solamente de la condición del día previo sino además de la condición del paciente durante su estancia en el hospital así, como del número de recaídas que haya tenido con la enfermedad.

1.5 Cálculo de la matriz estocástica (Mátriz de probabilidades)

En la práctica real la matriz estocástica, P, es desconocida. Por lo que el procedimiento usual para determinarla, consiste en conocer primero si existe un histórico observado del proceso estocástico, si este es el caso, se estiman las probabilidades de transición sobre las probabilidades empíricas obtenidas de una tabla de eventualidad.

Como el proceso estocástico histórico está dado por la familia:

$$\{X_t\} = \{x_1, x_2, x_3, ...\}.$$

entonces cada uno de los valores que toma la familia de variables aleatorias representa un estado del proceso estocástico descrito. Así, se puede definir P en términos de la probabilidad de pasar de un estado a otro en el proceso estocástico observado.

La matriz de probabilidades tendrá tantos renglones como estados existan en el sistema analizado y tantas columnas como estados, de esta forma se tiene una matriz cuadrada de mxm, donde m representa el número de estados

Como el objetivo es observar la probabilidad de pasar de un estado en el tiempo t_{n-1} a otro estado en el tiempo t_n, se analiza el fenómeno durante un periodo de tiempo que permita tener varias observaciones. De esta información se forma la tabla de eventualidad que describe el comportamiento del sistema, se realiza un conteo de en cuántas ocasiones el sistema pasó de uno de los estados a otro, en periodos de tiempo consecutivos, de esta forma se construye una primera tabla en la que se anotan los casos favorables para cada estado en el sistema.

Próximo periodo

Periodo anterior		estado i	estado j	estado l
	estado i	n_1	n_2	n_3
	estado j	n_4	n_5	n_6
	estado l	n_7	n_8	n_9

La primera entrada de la matriz, es decir, la entrada P_{11} esta definida por el cociente de n_1 entre la suma del primer renglón de la tabla anterior (casos favorables entre casos totales), P_{12} por el cociente de n_2 entre la suma del primer renglón y así sucesivamente para todos los P_{1i} de la matriz. De forma similar se definen las entradas P_{2i} de la matriz sólo que ahora la división se hará entre la suma de las entradas del renglón dos de la tabla.

A continuación se muestra un ejemplo para ilustrar este método:

Considérese que la siguiente tabla está asociada a un proceso estocástico cualquiera, al cual denotaremos como Y, con tres estados, $Y_t = \{1, 2, 3\}$. En un periodo de tiempo de 20 días, $t = \{1, 2, 3, ..., 20\}$, y como las observaciones asociadas a cada uno de los estados, los datos de la siguiente tabla donde la ocurrencia -1 corresponde al estado 1, el 0 al estado 2 y el 1 al estado 3.

Día	Ocurrencia	Estado
1	1	3
2	-1	1
3	-1	1
4	0	2
5	1	3
6	1	3
7	1	3
8	0	2
9	0	2
10	-1	1
11	0	2
12	1	3
13	-1	1
14	-1	1
15	1	3
16	1	3
17	-1	1
18	0	2
19	1	3
20	-1	1

Con la finalidad de construir la siguiente tabla:

	Estado 1	Estado 2	Estado 3
Estado 1	n_1	n_2	n_3
Estado 2	n_4	n_5	n_6
Estado 3	n_7	n_8	n_9

se cuenta en cuantas ocasiones el sistema paso del estado 1 al estado 1 en forma repetida (se observarán en la tabla dos 1 consecuentemente), si este es el caso el valor se anotá en la celda correspondiente a n_1, en caso contrario se anotá un cero indicando que tal hecho nunca ocurrió. Para el ejemplo, se tiene que ocurrió en los siguientes casos:

$$\begin{array}{cccc} & \text{de} & X_2 & \text{a} & X_3 \\ \text{y} & \text{de} & X_{13} & \text{a} & X_{14} \end{array}$$

es decir, ocurrió en dos ocasiones y por lo tanto el valor de n_1 es 2. Si se procede a contar en cuantas ocasiones se pasó del estado 1 al 2, se observa que fue:

$$\begin{array}{ccccc} & \text{De} & X_3 & \text{a} & X_4, \\ & \text{de} & X_{10} & \text{a} & X_{11} \\ \text{y} & \text{de} & X_{17} & \text{a} & X_{18} \end{array}$$

En esta ocasión ocurrió 3 veces , por lo que n_2 es igual a 3. De forma similar se calculan los valores correspondientes al resto de la tabla los cuales se muestran a continuación:

	Estado 1	Estado 2	Estado 3
Estado 1	2	3	1
Estado 2	1	1	3
Estado 3	4	1	3

Una vez que se obtiene esta tabla, se procede a formar la matriz estocástica. Recordemos que la entrada P_{11} está determinada por el cociente de n_1 entre la suma del primer renglón es decir; $P_{11} = \frac{2}{6}$; la entrada P_{12} como el cociente de n_2 entre la suma del primer renglón $P_{12} = \frac{3}{6}$, y así sucesivamente para el resto de las entradas de la mátriz $P_{21} = \frac{1}{5}, \ldots,\ P_{32} = \frac{1}{8},\ P_{33} = \frac{3}{8}$, de tal forma que:

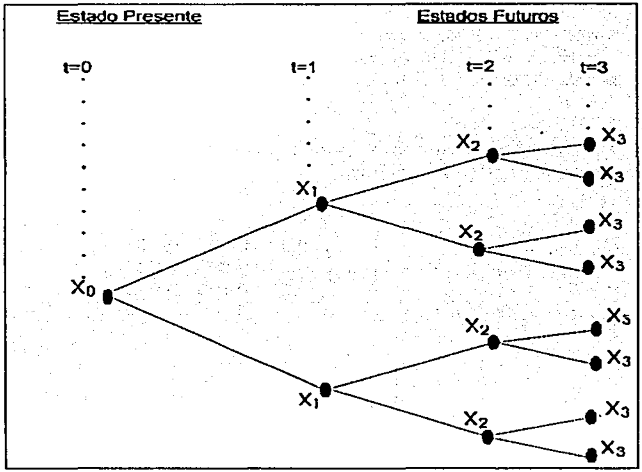
$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

Nótese que cada renglón de la matriz suma 1, y que $P \geq 0$.

Así la definición de P representa la probabilidad de pasar de un estado a otro.

1.6 Árbol de probabilidades

Por medio del árbol de probabilidades se puede asociar la probabilidad de transición de cualquier estado futuro dado un estado presente. Un árbol de probabilidad es una gráfica formada por nodos y arcos; cada nodo del árbol representa un estado específico en el periodo de tiempo t. Visualmente se observa a continuación:



Se puede partir de un estado cualquiera y tomarlo como nodo inicial del proceso estocástico de donde se desprenderán las siguientes ramificaciones, en un número igual al número de estados que se tengan en el sistema y, de cada nodo siguiente se desprenderán el mismo número de ramificaciones; a cada ramificación se asignará la probabilidad de pasar de un estado en t_{n-1} a otro estado en t_n. Se puede partir de un nodo de la gráfica y pasar a un estado siguiente en el subsecuente periodo de tiempo; las probabilidades asociadas a cada una de las ramificaciones correspondientes para cada periodo deben sumar la unidad y corresponden a un renglón de la matriz del proceso estocástico.

El método gráfico para calcular probabilidades trascendentes es constructivo pero engorroso, por eso empleamos un método más eficiente, la aplicación de multiplicación de matrices.

1.7 Método de Multiplicación de matrices.

Para cálcular las probabilidades en cada periodo, simplemente se multiplica P por sí misma tantas veces como se quiera avanzar en periodos de tiempo, en la predicción del comportamiento del proceso estocástico estudiado. La entrada P^k_{11} de la matriz P^k, representará tamiento del proceso estocástico estudiado. La entrada P_{11}^k de la matriz P^k, representará la probabilidad de encontrarse en el estado correspondiente a esa entrada de la matrix, dentro de k periodos. Al ir incrementando el número de veces que se multiplica la matriz P, esta tiende a volverse estacionaria; es decir, las probabilidades transitorias tienden a permanecer constantes a través del tiempo.

Ejemplo.

Continuando con el ejemplo anterior, para el cual se calculó la mátriz estocástica, se realizará el cálculo de $P^{(k)}$ para 8 periodos:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.50 & 0.17 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.50 & 0.125 & 0.275 \end{pmatrix}$$

$$P^{(1)} =: \begin{pmatrix} 0.33 & 0.50 & 0.17 \\ 0.20 & 0.20 & 0.60 \\ 0.50 & 0.125 & 0.275 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} =: \begin{pmatrix} 0.2939 & 0.2862 & 0.4028 \\ 0.4060 & 0.2150 & 0.3190 \\ 0.3275 & 0.3093 & 0.2356 \end{pmatrix}$$

$$P^{(3)} =: \begin{pmatrix} 0.3556 & 0.2545 & 0.3325 \\ 0.3364 & 0.2858 & 0.2857 \\ 0.2877 & 0.2550 & 0.3061 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} =: \begin{pmatrix} 0.3345 & 0.2703 & 0.3046 \\ 0.3110 & 0.2611 & 0.3073 \\ 0.2990 & 0.2331 & 0.2861 \end{pmatrix}$$

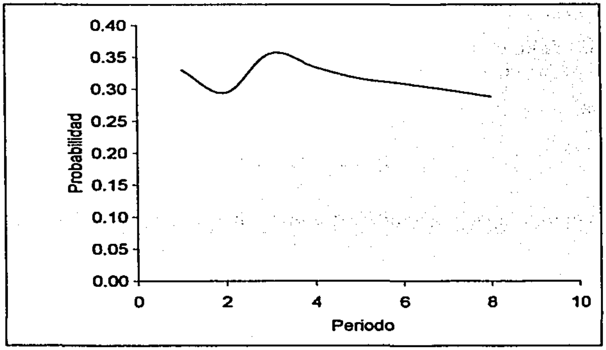
$$P^{(5)} =: \begin{pmatrix} 0.3167 & 0.2594 & 0.3028 \\ 0.3085 & 0.2461 & 0.2940 \\ 0.2883 & 0.2319 & 0.2694 \end{pmatrix}$$

$$P^{(6)} =: \begin{pmatrix} 0.3078 & 0.2481 & 0.2927 \\ 0.2980 & 0.2402 & 0.2810 \\ 0.2762 & 0.2242 & 0.2622 \end{pmatrix}$$

$$P^{(7)} =: \begin{pmatrix} 0.2976 & 0.2401 & 0.2817 \\ 0.2869 & 0.2322 & 0.2721 \\ 0.2671 & 0.2157 & 0.2536 \end{pmatrix}$$

$$P^{(8)} =: \begin{pmatrix} 0.2871 & 0.2320 & 0.2721 \\ 0.2771 & 0.2239 & 0.2629 \\ 0.2581 & 0.2084 & 0.2446 \end{pmatrix}$$

Como se observa los datos se apróximan a un cierto valor a través del tiempo. Por ejemplo, consideremos los datos de la entrada (1,1) de todas las matrices anteriores y gráfiquemos estos datos, se puede observar más claramente que los datos se vuelven asintóticos a través del tiempo (ver la siguiente gráfica).



1.8 Vector de probabilidades iniciales

Se ha definido $P_{ij}^{(k)}$ como la k-ésima probabilidad de transición de pasar del estado i al estado j. Mientras que la probabilidad incondicional o absoluta del estado j después de k transiciones denotada por $(u_j^{(k)})$, estará determinada por el producto:

$$u^{(k)} = u^{(0)} * P^k$$

Donde $u^{(k)} = [u_1^{(k)} u_2^{(k)} ... u_n^{(k)}]$ es el vector renglón de probabilidades incondicionales después de k transiciones, $u^{(0)}$ es el vector de probabilidades incondicionales iniciales y P^k es la matriz de transición después de k pasos. Cada una de las entradas de este vector indica la probabilidad de transición para k pasos, dicho vector corresponde a un renglón de la matriz estocástica. Por ejemplo, si se toma el primer renglón de la matriz éste corresponde al estado 1 en el sistema y si se toma el renglón 2 entonces corresponde al estado 2.

1.9 Comó hacer un pronóstico probabilístico a partir del vector $u^{(k)}$

Obteniendo el vector de probabilidades iniciales $u^{(0)}$, el modelo de predicción para un periodo de tiempo estará dado de la forma siguiente:

$$u^{(1)} = u^{(0)} * P$$

En donde al obtener el vector $u^{(1)}$ se tendrá el comportamiento del sistema para el periodo siguiente del modelo.

Y el vector $u^{(2)}$:

$$u^{(2)} = u^{(0)} * P^2$$

Proporcionará el vector de probabilidades incondicionales para dentro de dos periodos.

Así, se tiene que:

$$u^{(k)} = u^{(0)} * P^k$$

proporciona el vector de probabilidades incondiciones para dentro de k periodos.

Las probabilidades incondicionales reflejadas en este vector pueden o no ser ciertas, ya que depende de que las condiciones del sistema en los siguientes periodos, para los cuales se obtuvo el vector de predicción, sean iguales a las presentadas en el modelo del cual se obtuvo el vector de probabilidades incondicionales iniciales; es decir, la mátriz estocástica P inicial de la cual se partió para obtener el primer vector $u^{(0)}$.

Después de obtener las probabilidades en el vector $u^{(k)}$ se prosigue a realizar la decisión, ya que en dicho vector se tendrá el comportamiento del sistema dentro de k periodos dado un determinado estado inicial del sistema.

1.10 Estructura de como realizar la predicción

La decisión se realiza mediante políticas de decisión las cuales describen el comportamiento del sistema para cada estado.

Sea (D_m) una decisión cualquiera a tomar dentro de un proceso estocástico. Dado que se está hablando de un proceso estocástico discreto, (D_m) es discreta ya que se realiza una decisión para el periodo de tiempo t.

Ahora sea $\{(D_1, D_2, ..., D_m)\}$ el conjunto de decisiones de interés en una estructura markoviana. Cada política de decisión específica $D_1, D_2, ..., D_m$ tiene asignado un posible valor de la variable de estado (X_t).

Asi, sea $Z(D_{m,}X_t)$ el criterio de decisión, que es afectado por el estado del proceso markoviano y por la decisión que se realiza, es decir este criterio tiene asociada una decisión para cada estado en el tiempo t.

También es necesario mencionar al conjunto de políticas, definidas como$(Q_1, ..., Q_l)$, en donde cada política depende de las diferentes decisiones que se tienen dado el estado que se observa la política que se elíge es aquella perfeccioné el críterio $Z(D_{m,}X_t)$. Es decir, es necesario encontrar el punto óptimo en donde se puede decir que se obtiene el mejor resultado.

1.11 Solución por enumeración completa de las políticas

Cuando el número de políticas es pequeño se lleva a cabo la evaluación de los valores esperados para el criterio, dada cada política posible. En este caso, se encuentra la política óptima en donde se máximiza o mínimiza según sea el caso, la siguiente esperanza:

$$E[Z(D_m, X_t)].$$

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el problema de los días lluviosos, en una determinada época del año en el Distrito Federal, en la que es común que llueva algunos días. De tal forma que un individuo que todos los días se traslada a su trabajo caminando, debe tomar la decisión de salir a la calle con o sin paraguas, ya que si toma taxi le implica un costo de $13.00. Se harán algunas suposiciones que pueden parecer exageradas para el hecho de cargar o no con un paraguas, pero que sin embargo para el fin de ejemplificar la toma de la decisión óptima a partir de varias políticas de decisión será útil.

Se tienen las siguientes políticas de decisión:

$$\begin{aligned} D_1 &= \text{ No llevar paraguas} \\ D_2 &= \text{ Llevar paraguas} \end{aligned}$$

Estas políticas tienen costos implícitos, por ejemplo:

—Si la persona lleva paraguas, no toma taxi y camina con su paraguas hasta el lugar en donde trabaja; y además no llueve ese día entonces, únicamente habrá cargado envano, pero el costo asociado será de \$0.00.

—Sin embargo, si no lleva el paraguas y tanto de ida como de regreso llueve y decide tomar el taxi, entonces tendrá que pagar \$26.00.

—O bien, si no lleva el paraguas y sólo llueve de ida o de regreso, entonces le generará un costo de \$13.00.

Estas opciones son útiles para ilustrar el método de enumeración de políticas.

Una vez que se han determinado todos los costos que pueden implicarse en cada una de las políticas de decisión, debe determinarse la política que minímiza los costos esperados resultantes para cada persona, por el hecho de cargar o no un paraguas y si llueve o no llueve.

La variable aleatoria X_t puede tomar dos valores diferentes en forma aleatoria dentro de este contexto de los días lluviosos. Sea:

$$\begin{aligned} X_t = \quad 1 \quad &= \{\textit{Día lluvioso}\} \\ X_t = \quad 2 \quad &= \{\textit{Día}\ \text{no}\ \textit{lluvioso}\} \end{aligned}$$

Así, en este caso $X_t = \{1, 2\}$ representa la familia de variables aleatorias y $\{X_t\}$ forma el proceso estocástico de los días lluviosos. Ahora se plantea este proceso como markoviano con dos estados diferentes: llover y no llover, en donde la decisión puede depender de sí hubo lluvia o no el día anterior:

$$\begin{aligned} X_{t-1} = \quad 1 \quad &\text{sí llovío} \\ X_{t-1} = \quad 2 \quad &\text{sí no llovío} \end{aligned}$$

Para cualquier política de decisión los costos diarios esperados en el día t se encuentran en función de la decisión de cargar o no con un paraguas y el hecho de que realmente llueva en el día t.

Por medio de las desiciones D_1 y D_2, la persona debe determinar la política que mínimice los costos diarios esperados, cargando o no con el paraguas y si llueve o no el día anterior, su decisión dependerá de lo ocurrido el día anterior.

Las políticas de decisión son todas las combinaciones posibles de las desiciones D_1 y D_2, dependiendo de lo ocurrido en X_{t-1}.

De esta forma la primer política Q_1 será la combinación de llevar o no el paraguas dado que llovío o no el día anterior.

	$X_{t-1} = 1$	$X_{t-1} = 2$
Q_1	$D_2 - no\, llevar\, paraguas$	$D_1 - llevar\, paraguas$

Se mencionó anteriormente, el críterio $Z(D_m, X_t)$, es afectado por el estado de un proceso markoviano y por una decisión que se ha realizado, es decir este criterio tiene asociada una decisión a un estado en el tiempo t. Nuestro objetivo es determinar la política que perfeccione el críterio $Z(D_m, X_t)$, dicha política representa el punto óptimo en donde se puede decir que se obtiene el mejor resultado, en este caso el mejor costo económico.

Por ejemplo, para la política Q_1 se tiene que:

$Z(D_1$ =llevar paraguas, $X_t = 1)$

Tiene un costo de \$0.00, ya que si llueve y la persona lleva el paraguas no tiene gasto económico.

Y dentro de esta misma política Q_1
$Z(D_2 =$ no llevar paraguas, $X_t = 1)$
Tiene un costo de \$26.00

Dentro de este contexto se enumeran a continuación la combinación de los casos posibles de las decisiones, dependiendo del posible valor de X_{t-1}

Políticas	$X_{t-1} = 1$	$X_{t-1} = 2$
Q_1	$D_2 - no\, llevar\, paraguas$	$D_1 - llevar\, paraguas$
Q_2	$D_1 - llevar\, paraguas$	$D_2 - no\, llevar\, paraguas$
Q_3	$D_1 - llevar\, paraguas$	$D_1 - llevar\, paraguas$
Q_4	$D_2 - no\, llevar\, paraguas$	$D_2 - no\, llevar\, paraguas$

A continuación se muestran en el criterio $Z(D_m, X_t)$ todas las combinaciones que se pueden tener con las políticas:

$$Z(D_1, X_t = 1)$$
$$Z(D_2, X_t = 1)$$
$$Z(D_1, X_t = 2)$$
$$Z(D_2, X_t = 2)$$

El costo díario asociado a cada política queda expresado por:

$$E[Z_L(D_m, X_t)] \qquad L = 1, 2, 3, ...$$

Con un costo diario esperado asociado a la política de:

$$\begin{aligned} Z_1(D_1, X_t = 1) &= \$0.00 \\ Z_2(D_2, X_t = 1) &= \$26.00 \\ Z_3(D_1, X_t = 2) &= \$0.00 \\ Z_4(D_2, X_t = 2) &= \$0.00 \end{aligned}$$

Los datos anteriores tienen una correspondencia con los elementos de la siguiente tabla.

Estado

Decisión	$X_t = 1$	$X_t = 2$
D_1	\$0.00	\$0.00
D_2	\$26.00	\$0.00

Cuando el número de políticas de decisión es pequeño se lleva a cabo la evaluación de los valores esperados para el criterio y cada política posible, y se determina la política de decisión óptima*.[2]

[2]*Ver cap. II. Realización de una Auditoría. (Costo esperado asociado a cada política).

Capítulo 2

Predicción de una auditoría

Con el fin de aplicar la teoría desarrollada en el Capítulo 1, presentamos a continuación un ejemplo:

Se tiene a una persona que es dueña de un negocio de fabricación y venta de dulces, anualmente esta persona presenta sus declaraciones del Impuesto Sobre la Renta (ISR) a la Secretaria de Hacienda y Crédito Público (SHCP). Cada año la SHCP realiza auditorías a los contribuyentes, eligiendo al azar a un conjunto de personas físicas y morales para realizarlas. La tabla siguiente muestra los registros de auditoría y no auditorías que dicha persona ha tenido a lo largo de los últimos 10 años:

año (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
auditoría	No	No	No	Si	No	No	Si	Si	Si	No

En esta tabla se puede observar por ejemplo que en los años $t = 1, 2, 3, 5, 6$ y 10 el contribuyente no tuvo auditoría, mientras que en los años $t = 4, 7, 8$ y 9 si tuvo una auditoría.

Ahora, se planteará este problema como un proceso markoviano.

En este caso la variable de estado es discreta y puede tomar valores sobre uno de las dos posibilidades, sea $X_t = 0$ si no se lleva a cabo alguna auditoría y sea $X_t = 1$ si se efectua una auditoría en el año t, $\{X_t\}$ forma entonces la familia de variables aleatorias, con un estado discreto y parámetro de un proceso estocástico discreto donde $S = \{0, 1\}$ y $T = \{1, 2, ...\}$. Para el periodo de 10 años $\{X_t\} = \{X_1, X_2, ..., X_{10}\}$ es una representación general de este proceso estocástico y $\{0,0,0,1,0,0,1,1,1,0\}$ es la realización del proceso estocástico.

Supóngase que el contribuyente se encuentra en el año 10, por la tabla anterior, ya se sabe que en ese año él no tuvo ninguna auditoría por parte de la SHCP; ahora él desea saber que tan probable es que para el siguiente año, el año 11, le realicen una auditoría dado que en el año 10 no la tuvo.

Según la propiedad markoviana, la probabilidad de una revisión en el siguiente año $X_{11} = 1$ esta determinada por la ecuación,

$$P(X_{11} = 1/X_1 = 0, X_2 = 0, ..., X_{10} = 0) = P(X_{11} = 1/X_{10} = 0)$$

La probabilidad de que una revisión ocurra en el año 11 está condicionada únicamente a la dependencia sobre el hecho de que ninguna revisión ocurrió en el año anterior.

Antes de determinar la matrix P observamos que en el problema de las auditorías existen dos estados en el sistema, el de auditoría y el de no auditoría, por lo que se asigna 1 al primero y 0 al segundo; de esta forma se determina la familia de variables aleatorias $\{X_t\}$.

A continuación se muestra la tabla en donde se asignan los valores a cada estado:

año (t)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
auditoría	No	No	No	Si	No	No	Si	Si	Si	No
$\{X_t\}$	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0

2.1 Formación de la matriz estocástica

De la tabla anterior se obtendrá la matriz estocástica. En el capítulo I ya se explicó el procedimiento para obtener dicha matriz, primero se construye una tabla en donde se anota la ocurrencia de los estados al pasar de un periodo a otro. Por ejemplo, se observa que en 3 años consecutivos no hubo auditoría:

$$\begin{array}{l} \text{de } X_1 = 0 \quad \text{a} \quad X_2 = 0, \\ \text{de } X_2 = 0 \quad \text{a} \quad X_3 = 0 \ \text{ y} \\ \text{de } X_5 = 0 \quad \text{a} \quad X_6 = 0 \end{array}$$

Estos fueron los casos en que no hubo auditoría dado que en el periodo anterior tampoco la hubo.

Ahora, los casos en los que sí hubo auditoría dado que en el periodo anterior no la hubo son:

$$\begin{array}{l} \text{de } X_3 \quad \text{a} \quad X_4 \quad \text{y} \\ \text{de } X_6 \quad \text{a} \quad X_7 \end{array}$$

De la misma manera se pueden observar los casos para otras combinaciones posibles:

a)De auditoría a auditoría

b)De auditoría a no auditoría.

De este modo se obtiene la siguiente tabla:

	No auditoría	Auditoría
No auditoría	3	2
Auditoría	2	2

Siguiendo el método explicado en el capítulo 1, para formar las entradas de la matriz estocástica se divide cada entrada de la tabla anterior entre la suma del renglón correspondiente a esa entrada; es decir, casos favorables entre casos totales.

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} = 3/5 & P_{12} = 2/5 \\ P_{21} = 2/4 & P_{22} = 2/4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la mátriz de transición entre los años 10 y 11 queda definida por:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} .$$

Esta es la matriz estocástica del sistema y representa la transición del año 10 al año 11, para los estados de auditoría y no auditoría. Por ejemplo $P_{11} = 3/5$ representa la probabilidad de que ninguna auditoría ocurra en el año 11 dado que ninguna auditoría ocurrió en el año 10; y $P_{21} = 2/4$ representa la probabilidad de que ninguna auditoría ocurra en al año 11 dado que en el año 10 ocurrió una auditoría.

Ahora bien, los estados E_i en este problema son:

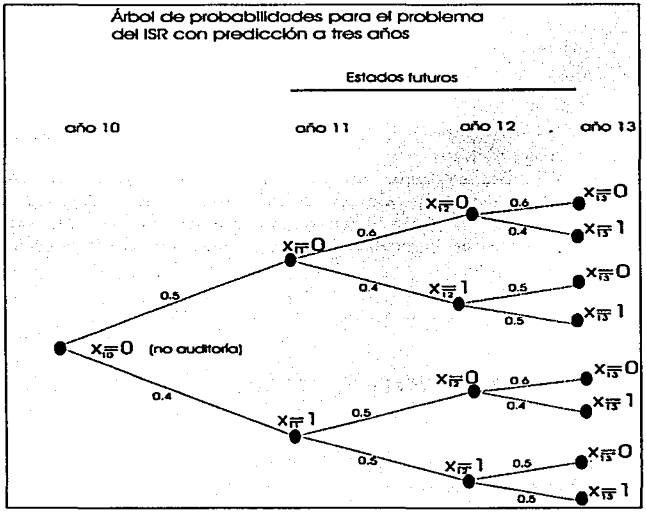
E_1=1 que representa el estado de no auditoría en el año 10, y

E_2=2 que representa el estado de revisión en el año 10.

Estos estados pueden ser acomodados en la siguiente tabla para observar mejor los valores asociados a cada estado:

		Año11	
		No auditoría	Auditoría
Año 10	No auditoría	0.6	0.4
	Auditoría	0.5	0.5

El árbol de probabilidades se muestra a continuación:



Se pueden calcular las probabilidades condicionales para k periodos obteniendo P^k de la P que ahora tenemos, por ejemplo si se desea obtener P^2:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}$$

Aquí se tiene por ejemplo que $P_{11}^{(2)} = 0.56$ es la probabilidad de que ninguna auditoría ocurra de aquí a dos periodos de tiempo posteriores (dos años) dado que en el año actual no se efectuo auditoría. De la misma forma la entrada $P_{12}^{(2)} = 0.44$ es la probabilidad de que ocurra una auditoría dentro de dos años, dado que en el año actual no se auditó al contribuyente.

Considérense:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.556 & 0.444 \\ 0.555 & 0.445 \end{pmatrix}$$

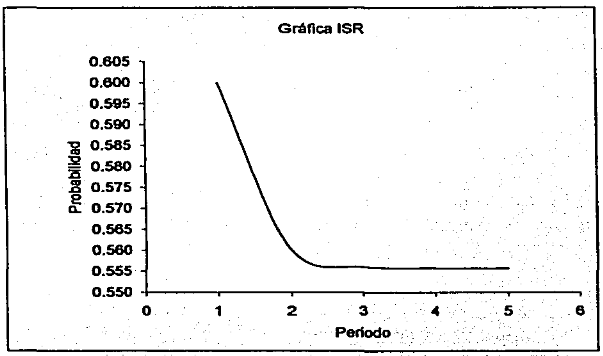
$$P^4 = \begin{pmatrix} 0.5556 & 0.4444 \\ 0.5555 & 0.4445 \end{pmatrix}$$

$$P^5 = \begin{pmatrix} 0.5555 & 0.4444 \\ 0.5555 & 0.4444 \end{pmatrix}$$

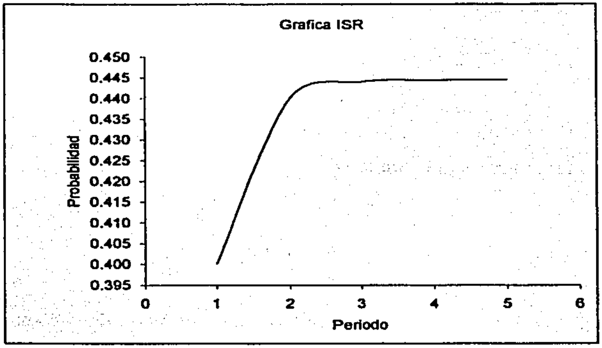
Como se observa las soluciones tienden a volverse asintóticas hacia un cierto valor al paso del tiempo; es decir, tienden hacia un cierto estado en forma constante. Se puede notar que las probabilidades cambian por incrementos menores a cada paso; es decir, las P_{ij}^k abordan asintóticamente un valor constante; los renglones llegan a ser idénticos, por ejemplo los renglones de P^5 y P^4 llegan a ser idénticos en tres dígitos significativos. Esto ilustra el fenómeno de que la probabilidad de cualquier estado futuro llegará a ser independiente del estado inicial.

2.2 Representación gráfica de P^k

Mostrando gráficamente estos valores para el caso de las entrada P_{11} de cada una de las matrices mostradas anteriormente, se obtiene la siguiente grafica:



Ilustrando ahora el caso de las entrada P_{12} de las matrices se realiza la graficación:



En las dos gráficas se puede observar el comportamiento asintótico de los valores, al realizar la predicción a 5 periodos las probabilidades tienden a ser constantes al paso del tiempo.

2.3 Predicción de una auditoría a partir del vector $u^{(k)}$

Se ha definido $P_{ij}^{(k)}$ como la k-ésima probabilidad de transición de pasar del estado i al estado j. Si se conoce la probabilidad incondicional o absoluta del estado j después de k transiciones, $(u_j^{(k)})$, se puede obtener dicha probabilidad con la siguiente fórmula:

$$u^{(k)}=u^{(0)}*P^k$$

así, esta misma fórmula se emplea para encontrar el vector renglón de probabilidades incondicionales para toda n después de k transiciones. En este caso, si se quiere realizar una predicción utilizando este método por ejemplo para efectuar el cálculo de $u^{(1)}$, se debe realizar la siguiente operación:

De la matirz estócastica inicial:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Se toma $u^{(0)}$, el primer renglón de la matriz:

$$\mathrm{u}^{(0)}=(0.6, 0.4)$$

Este vector $u^{(0)}$ representa el vector de probabilidades incondicionales iniciales para el estado 1; es decir, dado que hubó auditoría.

De esta forma se calculará la probabilidad para el siguiente periodo dado que en el periodo actual hubo auditoría, y se realiza el cálculo para el próximo año:

$$u^{(1)} = (\ 0.6,\ \ 0.4\ ) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = (\ 0.56,\ \ 0.44\ )$$

De la misma forma se puede calcular la probabilidad para el siguiente periodo, para el caso en que $u^{(0)} = (\ 0.5,\ \ 0.5\ )$ que representa el vector de probabilidades incondicionales iniciales dado que no hubó auditoría:

$$u^{(1)} = (\ 0.5,\ \ 0.5\ ) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = (\ 0.55,\ \ 0.45\ )$$

Realizando los cálculos para dentro de 5 periodos, del vector de probabilidades incondicionales iniciales $u^{(0)} = (\ 0.6,\ \ 0.4\ )$, se obtienen los siguientes resultados:

$$u^{(1)} = (\ 0.6,\ \ 0.4\ ) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = (\ 0.56,\ \ 0.44\ )$$
$$u^{(2)} = (\ 0.6,\ \ 0.4\ ) \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.55 & 0.45 \end{pmatrix} = (\ 0.556,\ \ 0.444\ )$$
$$u^{(3)} = (\ 0.6,\ \ 0.4\ ) \begin{pmatrix} 0.556 & 0.444 \\ 0.555 & 0.445 \end{pmatrix} = (\ 0.5556,\ \ 0.4444\ )$$

$$u^{(4)} = \begin{pmatrix} 0.6, & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5556 & 0.4444 \\ 0.5555 & 0.4445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.55556, & 0.44444 \end{pmatrix}$$

$$u^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.6, & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.55556 & 0.44444 \\ 0.55555 & 0.44445 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.555556, & 0.444444 \end{pmatrix}$$

2.4 Probabilidades a través del tiempo

De la forma ya ilustrada, se puede calcular el vector $u^{(k)}$ para cualquier periodo de tiempo futuro, este vector refleja la probabilidad futura de los estados en el sistema, esto puede ser vigente sólo si el sistema sigue presentando las mismas características con las cuales se obtuvo la matirz P inicial. Las condiciones de estados constantes a través del tiempo nunca se logran en la práctica real a causa de errores al estimar P, los cambios que P puede presentar al paso del tiempo, así como también de los cambios en la naturaleza de dependencia relacionales entre los estados a lo largo del tiempo.

En el caso de este ejemplo ya se ha notado cómo esta matriz se presta al análisis de propiedades de estados constantes. Así mismo, se ha observado cómo a través del tiempo la matriz $P^{(k)}$ se vuelve constante. De esta forma la probabilidad de cualquier estado futuro llega a ser independiente del estado inicial a medida que pasa el tiempo.

2.5 Modelo de decisión markoviano

Regresando a nuestro ejemplo, una vez que el dueño del negocio obtiene estas probabilidades le surge la siguiente pregunta: ¿qué decisión tomar dados los valores de predicción obtenidos en el problema del ISR?. Para tomar la decisión más conveniente se pueden plantear algunas políticas, y agrega a este problema la conveniencia de contratar a un Contador para que prepare el ejercicio fiscal, previniendo la posible auditoría. La SHCP comúnmente cobra multas a los contribuyentes a los que se les realiza una auditoría, y en general podemos considerar que el recaudo promedio por parte de la SHCP es de \$50.00 en caso de que el contribuyente haya contratado un contador y en el caso de no haber contratado un contador la multa asciende a \$500.00.

De aquí se desprenden las decisiones que permiten desglozar la estructura del modelo del cual tiene que partir el dueño del negocio.

D_1 =Contratar un contador con un costo de \$250.00 y

D_2 =No contratar un contador, con un costo de \$0.00

Con estas dos políticas de decisión el dueño del negocio debe determinar la política que le mínimice los costos anuales esperados, contratando o no a un contador.

Dado que el problema se planteó como un proceso markoviano la decisión para el dueño del negocio depende de sí hubo o no auditoría en el periodo anterior.

En la siguiente tabla encontramos las combinaciones entre las políticas de decisión y los estados del sistema.

Políticas	$X_{t-1} = 0$	$X_{t-1} = 1$
Q_1	D_2 no contratar al contador	D_1 contratar al contador
Q_2	D_1 contratar al contador	D_2 no contratar al contador
Q_3	D_1 contratar al contador	D_1 contratar al contador
Q_4	D_2 no contratar al contador	D_2 no contratar al contador

Para cualquier política los costos anuales esperados en el año t son una función de la decisión de contratar o no a un contador público y que realmente se lleve al cabo una revisión en el año t.

En la siguiente tabla se pueden obtener los costos asociados a cada decisión.

Decisión	$X_t = 0$	$X_t = 1$
D_1	250	300
D_2	0	500

Tenemos las siguientes dos opciones, $Z(D_1, 1)$ y $Z(D_2, 1)$.

Entonces $Z(D_1, 1) = 300$ que significa contratar al contador cuando ocurre el estado 1; es decir, en caso de que se realice una auditoría. El costo total que tendrá el contribuyente es de \$300.00 de los cuales \$250.00 son los que cobra el contador y \$50.00 los que cobra la SHCP al contribuyente.

Sin embargo, $Z(D_2, 1) = 500$ significa que no se contrata al contador aunque se realiza una auditoría. El costo total es de \$500.00 que es lo que la SHCP cobra al contribuyente cuando la auditoría no fue preparada por un contador.

Lo que interesa al contribuyente es mínimizar el costo anual esperado asociado a la política. Por medio de un proceso markoviano el dueño del negocio de fabricación y venta de dulces, ya tiene una perspectiva para saber que es lo que más le conviene en los siguientes años en caso de decidir contratar o no a un contador por si acaso la SHCP le realiza una auditoría.

Capítulo 3

Precio de acciones que cotizan en una Bolsa de Valores

Como se mencionó en el Capítulo 1, los precios de cierre de Wall Street pueden ser considerados el resultado de un proceso estocástico. En este capítulo se tomarán los precios de cierre de algunas acciones mexicanas que cotizan en Wall Street, con el fin de mostrar una aplicación de las cadenas de Markov.

Los precios de cierre en una bolsa de valores son un proceso estocástico que puede ser visto como markoviano, porque: lo único que se necesita es conocer el estado de la variable aleatoria (el precio) en un tiempo t y ésta se considera como la única variable para predecir su futuro; su estado anterior y su evolución histórica no afectan a las predicciones sobre su futuro. Este motivo induce a que el precio de las acciones en el tiempo t sea la herramienta necesaria para aplicar el modelo markoviano, después de obtener la mátriz estocástica para el periodo de tiempo en el cual se realizarón las observaciones de los precios.

Sabemos que en cualquier bolsa de valores del mundo existen riesgos, todas están sujetas a variaciones en forma constante, pero en algunas existen menos riesgos que en otras, esto se debe a cuestiones de política monetaria, fiscal o regulatoria; o bien por el tipo de moneda o por el número de empresas que cotizan en esa bolsa. Por esta razón, se eligió una de las bolsas en las que cotizan la mayor parte de las empresas de todo el mundo, en la cual existen movimientos y variaciones todos los días.

La suposición convencional es que los precios de los activos financieros siguen procesos de Markov y toda la información que afecta su precio está contenida en su valor en un tiempo t; no se pueden hacer predicciones sobre su evolución ni obtener información adicional sobre la forma de su distribución de probabilidad basándose únicamente en el pasado. El valor actual (o en un tiempo determinado t) es la única variable que cuenta. Se puede utilizar el pasado para obtener información de naturaleza estadística, como puede ser la desviación estándar, pero el camino exacto seguido por los precios hasta el presente (tiempo t) no importa.

El párrafo anterior formula la llamada "eficiencia débil" de un mercado, hipótesis según la cual el precio de un activo contiene toda la información disponible sobre dicho instrumento. Como es sabido los analistas de acciones, bonos o divisas utilizan esta información para obtener rendimientos sobre una inversión. Cabe señalar que ningún estudio hasta la fecha, ha demostrado de manera definitiva la posibilidad de obtener ganancias utilizando métodos de análisis técnico, pero por otra parte, tampoco se ha demostrado de manera concluyente la imposibilidad de hacerlo, por eso muchos "traders" profesionales son grandes devotos del análisis técnico.

Para el caso a tratar, se consideran los precios de cierre*[1] de las acciones de Bimbo A, Telmex L y Televisa. Para formar el proceso de Markov correspondiente, se consideran como estados del sistema la variación diaria en los precios de cierre: subir, permanecer igual o bajar.

3.1 Formación de la matriz estocástica de acciones Bimbo A

El periodo de tiempo a considerar es diario; así, X_t está dada por $X_t = \{1, 2, 3\}$ y $T = \{\text{los días hábiles}\}$, donde

$$X_t = \begin{cases} 1 & \text{si el precio de la acción sube de un periodo a otro} \\ 2 & \text{si el precio de la acción permanece igual de un periodo a otro} \\ 3 & \text{si el precio de la acción baja de un periodo a otro} \end{cases}$$

Como se muestra en la tabla siguiente, se asigna 0 al primer estado, por considerar que no existe un valor al inicio del periodo.

[1] Los datos fueron tomados de The Wall Street Journal (Hemeroteca de la Facultad de Economía de la UNAM) correspondientes al mes de marzo de 1998.

Fecha	Precio de cierre	Variación	Estado
9/03/98	20.30	——	0
10/03/98	20.10	-0.20	3
11/03/98	19.90	-0.20	3
12/03/98	19.70	-0.20	3
13/03/98	19.70	0.00	2
16/03/98	20.40	0.70	1
17/03/98	20.20	-0.20	3
18/03/98	19.60	-0.60	3
19/03/98	20.70	1.10	1
20/03/98	20.35	-0.35	3
23/03/98	20.30	-0.05	3
24/03/98	21.00	0.70	1
25/03/98	20.80	-0.20	3
26/03/98	20.70	-0.10	3
27/03/98	21.00	0.30	1
30/03/98	21.85	0.85	1
31/03/98	22.20	0.35	1

La matriz estocástica se obtiene de la tabla de frecuencias que se presenta a continuación correspondiente al periodo en el cual se realizarón las observaciones de los precios de las acciones.

Tabla de frecuencias

	Subir	Igual	Bajar
Subir	2	0	3
Igual	1	0	0
Bajar	3	1	5

La tabla anterior permite construir la matriz estocástica correspondiente.

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3/9 & 1/9 & 5/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.6 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.\bar{3} & 0.\bar{1} & 0.\bar{5} \end{pmatrix}$$

La cual satisface que:

$$\begin{aligned} \sum P_{ij} &= 1, \quad \text{para toda i} \\ P_{ij} &\geq 0 \quad \text{para toda i y j} \end{aligned}$$

3.1.1 Predicción para un periodo de 5 días a partir del vector inicial $u^{(0)}$

Se puede dar una interpretación de las entradas de la matriz estocástica, por ejemplo, la entrada $P_{11} = 0.4$ es la probabilidad de que el precio de las acciones de BimboA suba dado que el día anterior subío; y la entrada $P_{33} = 0.56$ representa la probabilidad de que el precio de las acciones baje dado que el día anterior dicho precio bajo.

Si se desea predecir la probabilidad del comportamiento de los precios (de acuerdo a los estados que se han definido) para los periodos futuros de 1,2,3,4 y 5 días, entonces se debe realizar el cálculo del vector $u = (u_1, u_2, u_3)$ de probabilidades incondicionales. Para realizar el cálculo de la predicción para el primer periodo se realiza la siguiente operación:

$$u^{(0)} * P = \begin{pmatrix} 0.40, & 0.00, & 0.60 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0.40 & 0.00 & 0.60 \\ 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.33 & 0.11 & 0.56 \end{pmatrix}$$

Para este caso, y dado que en el periodo anterior las acciones subieron, se toma el vector $u^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.4, & 0.0, & 0.6 \end{pmatrix}$ que corresponde, en la mátriz estocástica, a la predicción basada en que el precio de las acciones subió en el periodo anterior. Al realizar las operaciones correspondientes se obtiene:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0.4 * 0.4 + 0 * 1 + 0.6 * 0.33 = 0.358 \\ u_2 &= 0.4 * 0.0 + 0 * 0 + 0.6 * 0.11 = 0.066 \\ u_3 &= 0.4 * 0.6 + 0 * 0 + 0.6 * 0.56 = 0.576 \end{aligned}$$

De aquí que $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.358, & 0.066, & 0.576 \end{pmatrix}$

Este vector indica las probabilidades para el próximo periodo, dado que en el periodo actual las acciones subieron; así pues 0.358 representa la probabilidad de que el precio de las acciones suba, 0.066 representa la probabilidad de que para el siguiente periodo el precio permanezca igual y 0.576 representa la probabilidad de que el precio baje. De esta forma se puede apreciar que lo más probable, para el primer día hábil de abril de 1998, era que el precio de las acciones de Bimbo A bajara dado que el día 31 de marzo del mismo año su precio había subido.

Siguiendo este mismo procedimiento se calcula el vector $u^{(2)}$ de probabilidades incondicionales para dentro de dos periodos, dado que en el periodo actual el precio de las acciones subió.

$$u^{(2)} = u * P^2$$

Donde

$$u = (\ 0.4,\ \ 0.0,\ \ 0.6\ )$$

y

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.358 & 0.066 & 0.576 \\ 0.400 & 0.000 & 0.600 \\ 0.426 & 0.061 & 0.511 \end{pmatrix}$$

Realizando un procedimiento similar al anterior, se calcula

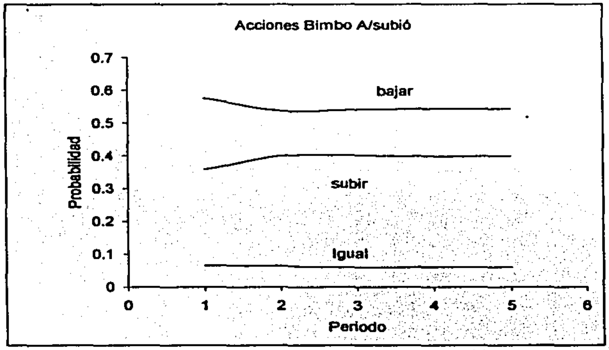
$$u^{(2)} = (\ 0.3992,\ \ 0.0633,\ \ 0.5373\ )$$

Y de forma equivalente se realiza el cálculo para dentro de 3,4 y 5 días. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

Periodo	Subir/Subió	Igual/Subió	Bajar/Subió
1	0.3580	0.0660	0.5760
2	0.3992	0.0633	0.5373
3	0.4004	0.0591	0.5404
4	0.3976	0.0594	0.5429
5	0.3976	0.0597	0.5426

3.1.2 Representación gráfica

Si graficamos los datos de la tabla anterior (periodo vs. probabilidad) para cada una de las posibles alternativas se tiene:



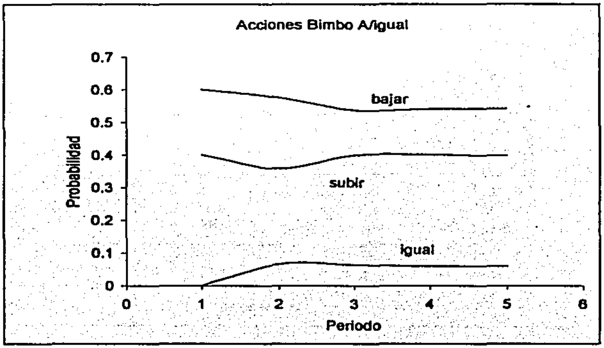
La gráfica anterior muestra como las probabilidades se van volviendo estacionarias a través del tiempo, tienden a ser asintóticas.

Para realizar la predicción basada en que en el periodo anterior el precio de las acciones permanezca igual, se considera a $u^{(0)} = (\ 1,\ \ 0.0,\ \ 0.0\ )$ y se efectuan los mismos cálculos que en el caso anterior.

La tabla siguiente contiene los valores correspondientes a cada periodo de la predicción:

Periodo	Subir/Igual	Igual/Igual	Bajar/Igual
1	0.4000	0.0000	0.6000
2	0.3580	0.0660	0.5760
3	0.3992	0.0633	0.5373
4	0.4004	0.0591	0.5404
5	0.3976	0.0594	0.5429

Y la gráfica siguiente, muestra la tendencia de los valores:

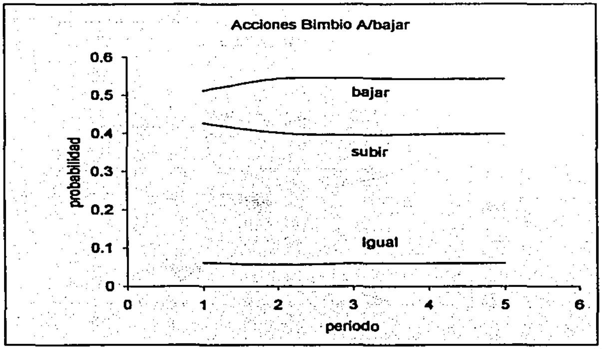


Ahora, para el caso de predicción dado que en el periodo anterior las acciones bajaron, se toma el vector:

$$u^0 = (\ 0.\bar{3},\ \ 0.\bar{1},\ \ 0.\bar{5}\ )$$

De donde se obtuvo la siguiente tabla de valores y su respectiva gráfica:

Periodo	Subir/Bajó	Igual/Bajó	Bajar/Bajó
1	0.4268	0.0616	0.5116
2	0.4011	0.0562	0.5425
3	0.3957	0.0596	0.5445
4	0.3976	0.0598	0.5424
5	0.3979	0.0596	0.5423



Como se pudo observar, todas las gráficas muestran un comportamiento asintótico de los valores conforme avanza el tiempo, las probabilidades se vuelven estacionarias.

3.1.3 Comparación con los datos reales

Después de haber realizado el análisis de predicción y obteniendo los datos reales, referidos al periodo de tiempo para el cual se hizo la predicción, se pudo constatar que tan acertado fué el pronóstico.

La tabla, que a continuación se muestra, contiene el precio de cierre de las acciones de Bimbo A y sus variaciones.

Fecha	Precio observado	Variacion
1/04/98	22.60	0.40
2/04/98	22.50	-0.10
3/04/98	22.90	0.40
4/04/98	22.90	——
5/04/98	22.90	——

El día primero de abril de 1998 las acciones de BimboA tuvieron un aumento de 0.40; con respecto al día anterior.

Como se puede observar si recordamos los datos iniciales del sistema:

Fecha	Precio	Variación	Estado
31/03/98	22.20	0.35	1

y comparamos el valor correspondiente en la tabla:

Fecha	Precio	Variación	Estado
1/04/98	22.60	0.40	1

La predicción realizada para un periodo posterior dado que en el periodo anterior las acciones habían subido, dió como resultado el siguiente vector de probabilidades incondicionales iniciales:

$$u^{(1)} = (\ 0.358,\ \ 0.066,\ \ 0.576\ )$$

Este vector, indicaba que con probabilidad de 0.358 las acciones subirían para el siguiente periodo, con probabilidad de 0.066 el precio de las acciones permanecería igual y con probabilidad de 0.576 las acciones bajarían. Como se puede apreciar, la predicción daba mayor probabilidad a que el precio bajara; sin embargo como se muestra en la tabla de valores observados, el precio de las acciones subió en el primer día. Se podría atribuir este resultado al hecho de que la probabilidad de que subiera el precio era muy significativo (0.358).

En la predicción para dos periodos, dado que en el periodo inicial las acciones habían subido, se obtuvo el siguiente vector de probabilidades incondicionales:

$$u^{(2)} = (\ 0.3992,\ \ 0.0633,\ \ 0.5373\ )$$

Lo cual indicaba que para el dos de abril de 1998, con probabilidad de 0.5373, el precio de las acciones bajaría. El precio obtenido para esa fecha fue:

Fecha	Precio	Variación
02/04/98	22.50	-0.10

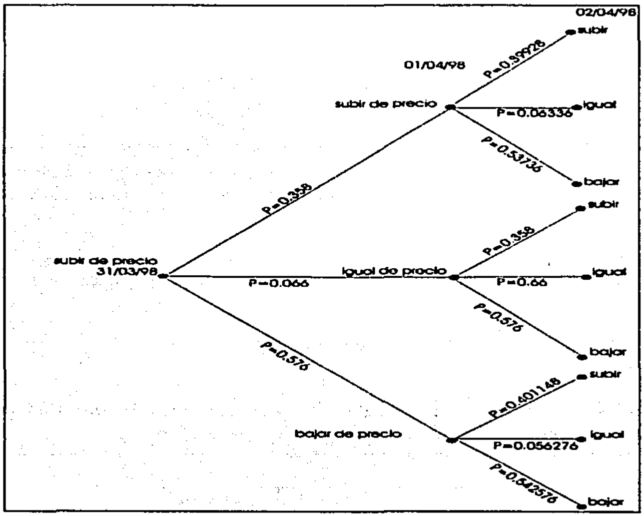
efectivamente, el precio mostró una variación negativa como lo indicaba el vector de probabilidades.

Ahora bien, el vector de probabilidades para dentro de tres periodos, después del 31 de marzo de 1998 $u^{(3)} = (\ 0.4004,\ \ 0.0591,\ \ 0.5404\ )$ mostraba que la probabilidad de que el precio de las acciones bajara era mayor. En este caso, el dato real referido al día 3 de abril de 1998 mostró una variación positiva.

Fecha	Precio	Variación
03/04/98	22.90	0.40

Hubo una ganancia, y por lo tanto la predicción no resultó verdadera. Para los periodos posteriores al 3 de abril, el vector de probabilidades incondicionales se vuelve asintótico hacia la probabilidad de que el precio de las acciones baje no obstante que en los valores reales se puede apreciar que esto no fue lo que realmente ocurrió; ya que el precio se incrementó.

Gráficamente, se pueden observar los posibles comportamientos de los precios así como en el árbol de probabilidades, las probabilidades asociadas.



3.2 Formación de la matriz estocástica de acciones Televisa

A continuación se presenta un análisis similar al presentado para las acciones de Bimbo A, pero ahora para las acciones de Televisa. Primero consideremos los datos observados para el periodo de tiempo correspondiente al mes de marzo de 1998.

Fecha	Precio de cierre	Variación	Estado
9/03/98	149.00	——	0
10/03/98	148.00	-1.00	3
11/03/98	143.50	-4.50	3
12/03/98	144.90	1.40	1
13/03/98	142.50	-2.40	3
16/03/98	144.70	2.20	1
17/03/98	143.20	-1.50	3
18/03/98	143.50	0.30	1
19/03/98	146.00	2.50	1
20/03/98	147.50	1.50	1
23/03/98	152.70	5.20	1
24/03/98	156.00	3.30	1
25/03/98	159.30	3.30	1
26/03/98	158.40	-0.90	3
27/03/98	157.00	-1.40	3
30/03/98	157.90	0.90	1
31/03/98	155.50	-2.40	3

De la misma forma que en el caso anterior asignamos un "cero" al estado en el primer día, en este caso sólo se tendrán dos estados "subir" o "bajar", ya que como se observa los datos sólo presentan estas posibilidades. La siguiente tabla muestra el número de ocasiones en las que se observan los distintos comportamientos del precio.

	Subir	Bajar
Subir	5	4
Bajar	4	2

La matriz estocástica correspondiente queda definida como:

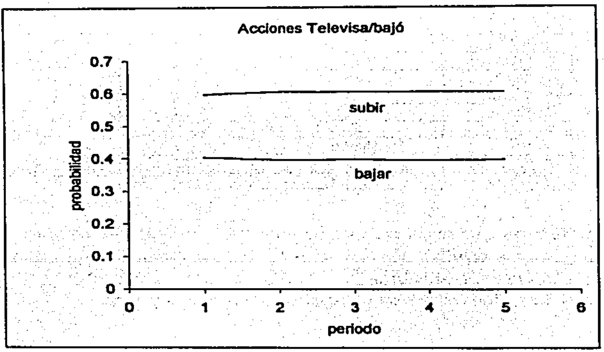
$$P = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.67 & 0.33 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Predicción para un periodo de 5 días.

Para realizar el pronóstico probabilístico en el precio de las acciones, en los siguientes cinco días, es necesario obtener las probabilidades condicionales. Dichas probabilidades se muestran en la siguiente tabla.

Periodo	Subir/Bajó	Bajar/Bajó
1	0.5963	0.4037
2	0.6044	0.3955
3	0.6035	0.3964
4	0.6036	0.3937
5	0.6036	0.3963

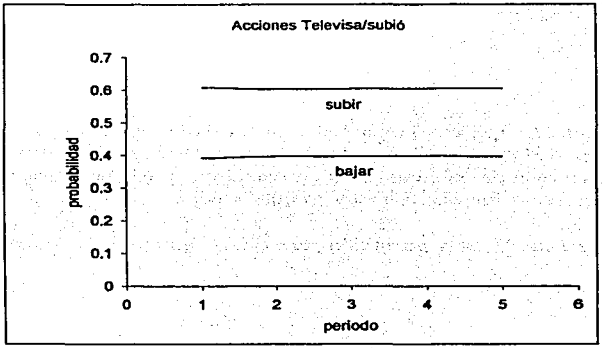
Así tambien, se muestra la gráfica correspondiente:



Ahora bien, si se considera que el precio de las acciones subió en el periodo inicial, la predicción para los cinco periodos siguientes despliega los datos mostrados en la siguiente tabla.

Periodo	Subir/Subió	Bajar/Subió
1	0.6084	0.3916
2	0.6030	0.3969
3	0.6036	0.3963
4	0.6036	0.3963
5	0.6036	0.3939

La gráfica correspondiente a estos datos se muestra a continuación.



Como en los casos anteriores, se observa que los datos al paso del tiempo se vuelven asintóticos.

3.2.2 Comparación con los datos reales.

De la misma forma que para el caso de las acciones de Bimbo A, se obtuvieron los datos del comportamiento en el precio de las acciones de Televisa correspondientes a los primeros cinco días hábiles del mes de abril, en los cuales se realizó la predicción.

Fecha	Precio	Variación
01/04/98	156.70	1.20
02/04/98	156.00	-0.70
03/04/98	158.00	2.00
06/04/98	156.00	-2.00
07/04/98	154.00	-2.00

Esta tabla muestra que para el día primero de abril de 1998 las acciones de Televisa tuvieron una ganancia de 1.20 dado que en el periodo inicial, es decir el día 31 de marzo de 1998, el dato referido era:

Fecha	Precio	Variación	Estado
31/03/98	155.50	-2.40	3

El sistema se encontrabá en el estado 3 (bajar). La predicción para un periodo posterior, dado que en el periodo inicial las acciones bajaron, dió como resultado el vector de probabilidades incondicionales iniciales:

$$u^{(1)} = (\ 0.5963,\quad 0.4037\ )$$

Este vector indicaba que con probabilidad de 0.5963 el precio de las acciones subiría para el siguiente periodo y que con probabilidad de 0.4037 el precio de las acciones volvería a bajar. En éste caso, la probabilidad de subir era mayor que la de bajar, que contrastado con los datos observados fué efectivamente lo que sucedió.

Revisando el resultado de la predicción para el siguiente periodo se obtuvo el vector

$$u^{(2)} = (\ 0.6044,\quad 0.3955\ )$$

En éste caso, se observa que la probabilidad de que el precio de las acciones subiera para el 2 de abril de 1998 dado que el 31 de marzo el precio bajó, era de 0.6044 y de que el precio bajara, para ese mismo periodo, era de 0.3955. Mientras que el precio real de las acciones al 2 de abril fué:

Fecha	Precio	Variación
02/04/98	156.00	-0.70

Es decir, el precio de las acciones bajó pese a que la probabilidad de que subiera era 0.6044. Como ya se explicó, las condiciones del mercado no son siempre las mismas y la predicción para un periodo es más factible que sea verdadera que sí se hace una predicción de largo plazo.

3.3 Formación de la matriz estocástica de acciones Telmex L

Otra de las acciones que se consideraron para hacer este análisis son las de Telmex L.

Los datos relativos a estas acciones se muestran a continuación.

Fecha	Precio de cierre	Variación	Estado
9/03/98	22.80	------	0
10/03/98	22.45	-0.35	3
11/03/98	22.25	-0.20	3
12/03/98	22.40	0.15	1
13/03/98	22.45	0.05	1
16/03/98	22.75	0.30	1
17/03/98	22.50	-0.25	3
18/03/98	23.50	1.00	1
19/03/98	23.55	0.05	1
20/03/98	23.30	-0.25	3
23/03/98	23.65	0.35	1
24/03/98	24.30	0.65	1
25/03/98	24.60	0.30	1
26/03/98	24.40	-0.20	3
27/03/98	24.20	-0.20	3
30/03/98	24.45	0.25	1
31/03/98	24.25	-0.20	3

Para este caso, sólo se tienen dos estados "subir" o "bajar". La siguiente tabla muestra el número de ocasiones en las que se observan las distintas variaciones en los precios.

	Subir	Bajar
Subir	5	4
Bajar	4	2

Como resultado de la información anterior se obtienen la matriz estocástica.

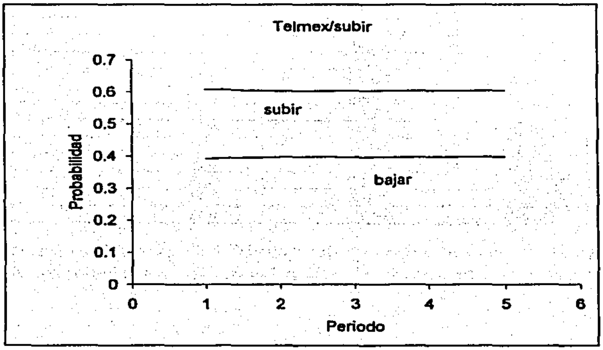
$$P = \begin{pmatrix} 5/9 & 4/9 \\ 4/6 & 2/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.67 & 0.33 \end{pmatrix}$$

3.3.1 Predicción para un periodo de 5 días

Realizando cálculos similares a los efectuados en los casos anteriores, se obtuvieron los resultados que se muestran en la siguiente tabla.

Periodo	Subir/Subió	Bajar/Subió
1	0.6084	0.3916
2	0.6030	0.3969
3	0.6036	0.3963
4	0.6036	0.3963
5	0.6036	0.3963

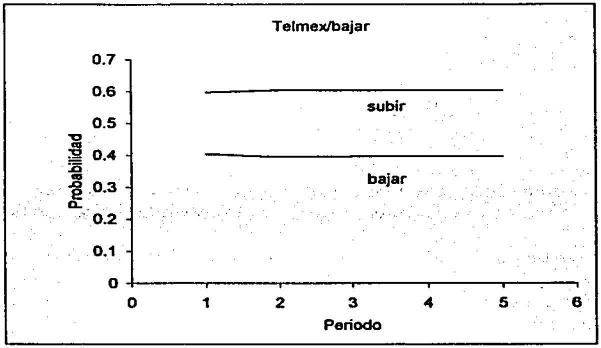
La gráfica correspondiente a estos datos se puede observar en la siguiente figura.



Como en los casos anteriores, si se considera que el precio de las acciones de Telmex L en el periodo inicial bajó, se obtiene la predicción para periodos futuros.

Periodo	Subir/Bajó	Bajr/Bajó
1	0.5963	0.4037
2	0.6044	0.3955
3	0.6035	0.3964
4	0.6036	0.3963
5	0.6036	0.3963

El comportamiento asintótico de los valores a través del tiempo se muestra gráficamente.



3.3.2 Comparación con los datos reales

Al realizar la observación de los precios correspondientes al periodo de prónostico, se obtuvieron los datos mostrados en la tabla siguiente.

Fecha	Precio	Variación
01/04/98	24.10	-0.15
02/04/98	23.95	-0.15
03/04/98	23.90	-0.05
06/04/98	23.50	-0.40
07/08/98	23.50	——

El vector obtenido para predecir el comportamiento del precio para el primero de abril de 1998, dado que el día 31 de marzo de 1998 las acciones de Telmex L bajaron, fue:

$$u^{(1)} = (\ 0.5963,\ \ 0.4037\ )$$

El precio de estas acciones, el 31 de marzo de 1998, era:

Fecha	Precio	Variación	Estado
31/03/98	24.25	-0.20	3

Y se observó que el primero de abril el precio bajó:

Fecha	Precio	Variación
01/04/98	24.10	-0.15

Lo que implica una disminución en el precio de las acciones aún cuando la probabilidad de que las acciones subieran resultó ser mayor que la probabilidad de que bajaran de precio.

En éste caso, se observó que en los cinco periodos de tiempo de predicción, el precio de las acciones permaneció a la baja y para el último día no hubo variación en el precio (ver la tabla de los datos reales); al compararlos se observa que para el caso de estas acciones la predicción no resultó ser verdadera en ninguno de los periodos de tiempo.

Del análisis de las probabilidades realizado en este capítulo, se observa que el método no funcionó favorablemente en la predicción de alza, baja o permanencia sin cambio en el precio de las acciones, podemos concluir que este método no es adecuado para realizar este tipo de predicciones. Esto motiva a realizar un análisis más detallado basado en la magnitud de cambio del precio de las acciones, al pasar de un periodo de tiempo a otro.

Este análisis se basará en los precios observados de las acciones. En las tablas que contienen los datos, existe una columna referida a la variación en el precio. En este factor se basará el análisis que se presenta a continuación.

Capítulo 4

Magnitud de cambio.

En este capítulo se hará un análisis pensando en la importancia de la magnitud del cambio al pasar de un periodo de tiempo a otro, es decir; que tanto bajó o subió el precio de las acciones de un día a otro y así poder considerar dicho cambio como una alza o una baja significativa en el precio, lo cual puede ser usado como punto de referencia ante la decisión al vender o comprar acciones. El criterio que se usará en este caso como regla de decisión está basado en la media y la desviación estándar de las variaciones en el precio, con esta regla se formará un intervalo de fluctuación alrededor del precio observado.

A continuación se asignarán estados a las variaciones de los precios (nótese que en cada uno de los ejemplos que se mostraron en el capítulo anterior, en las tablas de precios, aparece una columna de las variaciones) es decir, si la variación cae dentro del intervalo obtenido por medio de la regla de decisión se considerará que el precio de las acciones queda invariante, si cae a la derecha del intervalo el precio se considerará que subió, si cae a la izquierda del intervalo se considerará que el precio bajó.

Para determinar el estado en el cual se encontrará el sistema, dadas las variaciones en los precios, comparamos d_t con $\bar{d} + 0.5\sigma_{\bar{d}}$.

Donde d_t denota la diferencia entre precios, las variaciones en el precio de las acciones, de un día a otro.

$\sigma_{\bar{d}}$ representa la desviación estándar de las variaciones y

$\bar{d}$ representa la media de las variaciones.

4.1 Reglas de decisión para determinar los estados del sistema.

Si se estandarizan los datos se tiene

$$\frac{|d_t - \bar{d}\,|}{\sigma_{\bar{d}}} < 0.5$$

Indicando que se está permitiendo que los datos tengan una variación no mayor del 0.5 alrededor de su media sin que se considere un incremento o decremento real en los precios.

Una interpretación alternativa se genera al poder reescribir la desigualdad anterior como:

$$|d_t - \bar{d}\,| < 0.5\sigma_{\bar{d}}$$

Equivalentemente que

$$d_t - \bar{d} > 0.5\sigma_{\bar{d}}$$
$$\text{y}$$
$$d_t - \bar{d} < -0.5\sigma_{\bar{d}}$$

Definiendo un intervalo en torno a la media de las variaciones de longitud $\sigma_{\bar{d}}$.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ - 0.5\sigma_{\bar{d}}(\_\_\_\_\_\_\bar{d}\_\_\_\_\_\_\_)0.5\sigma_{\bar{d}}\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

De donde se definen los criterios en los cuales se basan las reglas de decisión.

a) Si $d_t > \bar{d} + 0.5\sigma_{\bar{d}}$ entonces $X_t = 1$.

Esta regla indica que si la variación en el precio es mayor que la media más 0.5 por la desviación estándar entonces el sistema se encuentra en el estado 1 ($X_t = 1$) de tal forma que se puede considerar que las acciones tuvieron un alza en su precio.

b) Si $d_t < \bar{d} - 0.5\sigma_{\bar{d}}$ *entonces* $X_t = 3$

En este caso, si la variación es menor que el valor obtenido dada la media y la desviación estándar, entonces $X_t = 3$, es decir el sistema estará en el estado 3.

c) Si por el contrario, no se da alguna de las condiciones anteriores entonces $X_t = 2$, es decir, se considera que no hubo una variación considerable en el precio.

A continuación se llevará a cabo el empleo de estas reglas para determinar el intervalo de decisión para cada uno de los casos análizados en el capítulo anterior.

4.2 Bimbo A.

Continuando con el análisis de los precios de las acciones, se determinará la media y la desviación estándar de las variaciones*[1] de los precios de las acciones de Bimbo A.

La media de las variaciones es $\bar{d} = 0.1058$
y
la desviación estándar vale $\sigma_{\hat{d}} = 0.2105$

Las reglas de decisión mencionadas hacen necesario calcular:

$$\bar{d} + 0.5\sigma_{\hat{d}} = 0.2110$$
y
$$\bar{d} - 0.5\sigma_{\hat{d}} = 0.0005$$

Estos valores marcan el intervalo dentro del cual se definen los estados de cambio del precio de las acciones: subir, bajar, o quedar igual.

_____________0.0005(________0.1058________)0.2110____________
$X_t = 3$ $X_t = 2$ $X_t = 1$

Este intervalo establece que si la variación del precio es menor de 0.0005 entonces el sistema se encuentra en el estado 3 es decir, el precio de las acciones baja; si es mayor de 0.2110 entonces el estado asignado es 1, el precio de las acciones se considera que subió y por último, si la variación cae dentro del intervalo que encierran estos dos valores, el estado asignado es 2 es decir, se considera que no existe variación en el precio.

El empleo de estas reglas, en el análisis de la variación de los precios de las acciones de Bimbo A, generan la información mostrada en la siguiente tabla.

[1] Información obtenida en base a los datos presentados en el capítulo anterior.

Variación	Estado
-0.10	3
-0.20	3
-0.20	3
-0.20	3
0.00	3
0.70	1
-0.20	3
-0.60	3
1.10	1
-0.35	3
-0.05	3
0.70	1
-0.20	3
-0.10	3
0.30	1
0.85	1
0.35	1

4.2.1 Formación de la matriz estocástica

Esta nueva información permite realizar un análisis similar al presentado en el capítulo anterior, excepto que en este caso estamos incorporando la magnitud de la variación.

Con estos nuevos datos se obtiene una nueva matriz estocástica, empleando para ello los datos de la siguiente tabla.

	Subir	Igual	Bajar
Subir	2	0	3
Igual	0	0	0
Bajar	4	0	7

No obstante que se observan únicamente dos estados (subir y bajar) es conveniente, para realizar el comparativo entre los dos modelos, incluir en este análisis el estado "permanecer igual".La mátriz P se muestra a continuación:

$$P = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4/11 & 0 & 7/11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4000 & 0.0000 & 0.6000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3636 & 0.0000 & 0.6363 \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo método de predicción que en un proceso markoviano estándar es necesario calcular $u * P$, para el caso en el que en el periodo inicial el precio de las acciones se hubiera incrementado.

$$u^{(1)} = (\ 0.4,\ \ 0.0,\ \ 0.6\ ) * \begin{pmatrix} 0.4000 & 0.0000 & 0.6000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.3636 & 0.0000 & 0.6363 \end{pmatrix}$$

Obteniéndose de esta forma el siguiente vector:

$$u^{(1)} = (\ 0.3781,\ \ 0.0000,\ \ 0.6217\ )$$

Este nuevo resultado nos indica que dado que en el periodo anterior las acciones subieron, el prónostico para el siguiente periodo (día) es que con mayor probabilidad las acciones bajarán de precio.

Recordemos que el vector obtenido en el capítulo 3, en donde no se consideró la magnitud de cambio (capítulo anterior) fue:

$$u^{(1)} = (\ 0.358,\ \ 0.066,\ \ 0.576\ )$$

este vector también indica las probabilidades para un periodo próximo, dado que en el periodo anterior las acciones subieron.

4.2.2 Comparación de los dos modelos

Ahora podemos realizar una comparación de los dos modelos, el modelo del capítulo anterior y el mostrado en este capítulo. Los vectores correspondientes a la predicción para el primer periodo de cada modelo son:

$$\begin{array}{lll} u^{(1)} = & (\ 0.3580,\ \ 0.0660,\ \ 0.5760\ ) & \text{primer modelo} \\ u^{(1)} = & (\ 0.3781,\ \ 0.0000,\ \ 0.6217\ ) & \text{segundo modelo} \end{array}$$

El primero, indica que dado que en el periodo inicial las acciones subieron, para el siguiente periodo lo más probable es que las acciones bajen; en el segundo vector se aprecia esta misma tendencia pero con una probabilidad mayor. El primer módelo sólo indica la probabilidad de que el precio baje; sin embargo, el segundo modelo proporciona información adicional, la probabilidad de que el precio tenga un decremento significativo. Ahora, si se comparan los resultados con el precio observado el primero de abril de 1998 ($22.60) se tiene que las acciones incrementaron su precio con respecto al día anterior, por lo cual la predicción no resultó acertada.

4.2.3 Predicción a 5 días

Para realizar la predicción, se hicieron los cálculos para los siguientes días: del 2 al 7 de abril de 1998, considerando como datos los siguientes:

Periodo	u^*
1	(0.3781, 0.0000, 0.6217)
2	(0.3773, 0.0000, 0.6225)
3	(0.3772, 0.0000, 0.6224)
4	(0.3772, 0.0000, 0.6224)
5	(0.2743, 0.0000, 0.4526)

Los datos reales referidos al periodo de predicción fueron:

Fecha	Precio	Variación	Estado
01/04/98	22.60	+0.40	1
02/04/98	22.50	-0.10	3
03/04/98	22.90	+0.40	1
06/04/98	22.90	——	3
07/04/98	22.90	——	3

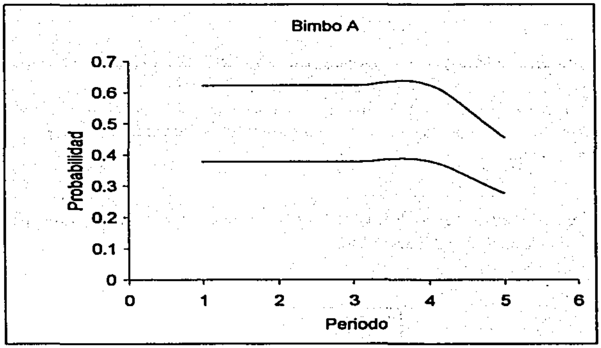
Para cada caso se realizó el siguente cálculo, dependiendo del estado al que migraba una vez que se avanzaba un día, recordemos que no importa el comportamiento histórico de los datos sino lo acontecido en el periodo anterior (propiedad markoviana).

Observando los resultados de la predicción del primero de abril al día 2 de abril y asumiendo que el primer día las acciones subierón se indicaba una tendencia pribabilística mayor a que las acciones bajaran (probabilidad de 0.6225) y efectivamente el día 2 el precio de las acciones tuvo una baja de 0.10 centavos.

La predicción para el día 3 de abril fue, que con probabilidad de 0.6224, el precio de las acciones volvería a bajar. Para este día el precio de las acciones subió 0.40 pesos, este valor se encuentra a la derecha del intervalo determinado por las reglas de decisión por lo que la predicción no resulta acertada. De igual forma, para el día 6 de abril, el preicio de las acciones permaneció sin cambio, mientras que probabilísticamente era imposible que ésto sucediera.

La predicción para el día 7 de abril indicaba que lo más probable (probabilidad 0.4526) era que el precio de las acciones bajará y no obstante del precio de las acciones no bajó sino que se mantuvo, por segundo día consecutivo, sin variación.

La representación gráfica de los valores se muestra a continuación.



4.3 Televisa

Analizando de forma similar el caso de las acciones de Televisa en primer lugar se cálcula la media de las variaciones y la desviación estándar de las mismas, así que:

La media de las variaciones es $\bar{d} = 0.3705$
y
la desviación estándar es igual a $\hat{\sigma_d} = 6.2239$

Las reglas de decisión están definidas dados los valores de:

$$\begin{aligned} \bar{d} + 0.5\hat{\sigma_d} &= 3.4824 \\ \bar{d} - 0.5\hat{\sigma_d} &= -2.749 \end{aligned}$$

Estos valores marcan el intervalo dentro del cual se definirán los estados para las variaciones en los precios de las acciones: subir, bajar, o quedar igual.

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \underset{X_t=3}{-2.749(}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \underset{X_t=2}{0.3705}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\underset{X_t=1}{)3.4824}\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Por lo tanto si la variación del precio es menor de -2.749 entonces el sistema se encuentra en el estado 3 es decir, el precio de las acciones baja y si es mayor a 3.4824 entonces el estado es 1, el precio de las acciones subió; y si por el contrario, cae dentro del intervalo que encierran estos dos valores el estado es 2 es decir, se considera que no existe variación en el precio de las acciones.

El empleo de estas reglas, en el análisis de la variación de los precios de las acciones de Televisa, genera la siguiente información:

Variación	Estado
-0.20	2
-1.00	2
-4.50	3
1.40	2
-2.40	2
2.20	2
-1.50	2
0.30	2
2.50	2
1.50	2
5.20	1
3.30	2
3.30	2
-0.90	2
-1.40	2
0.90	2
-2.40	2

4.3.1 Formación de la matriz estocástica

Con los datos asignados a las variaciones del precio de las acciones, se obtienen los estados para cada periodo de tiempo. Esto permite la obtención de la matriz estocástica.

Empleando la información de la tabla siguiente,

	Subir	Igual	Bajar
Subir	0	1	0
Igual	1	12	1
Bajar	0	1	0

se calcula la matriz estocástica P asociada al sistema.

$$P = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 1/14 & 12/14 & 1/14 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0714 & 0.8571 & 0.0714 \\ 0.0000 & 1.0000 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

4.3.2 Predicción a 5 días

Empleando el mismo método de predicción que antes, se obtienen los resultados siguientes para un periodo de cinco días.

Periodo	u*
1	$(0.0714,\ 0.8571,\ 0.0714)$
2	$(0.0062,\ 0.8744,\ 0.0062)$
3	$(0.0062,\ 0.8747,\ 0.0062)$
4	$(0.0062,\ 0.8746,\ 0.0062)$
5	$(0.0062,\ 0.8745,\ 0.0062)$

Los datos reales referidos al periodo de predicción fuerón:

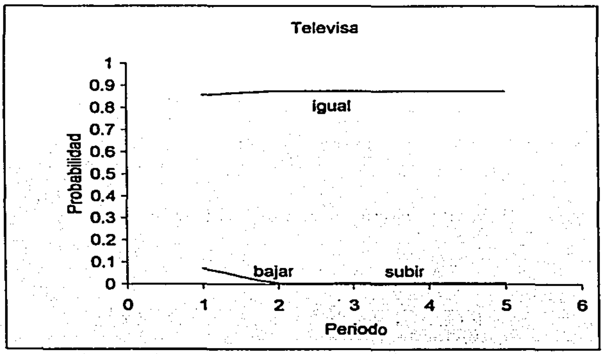
Fecha	Precio	Variación	Estado
01/04/98	156.70	+1.20	2
02/04/98	156.00	-0.70	2
03/04/98	158.00	+2.00	2
06/04/98	156.00	-2.00	2
07/04/98	154.00	-2.00	2

En donde para cada caso, se realizó el cálculo dependiendo del estado al que migraba el precio, una vez que se conocía el hecho del día.

En estos datos se observa que para el primer periodo, con probabilidad de 0.8571, se indicaba una mayor tendencia a que el precio se mantuvierá sin variación y, al realizar la comparación con los datos referidos a las fechas de las predicciones, se observó que efectivamente fue así; la variación en el precio para ese día fue de 1.20 que por las reglas de decisión el precio se debió considerar sin variación.

Para el siguiente día de predicción las probabilidades indicarón una mayor tendencia a que el precio permaneciera igual (probabilidad de 0.8744) al revisar los datos se observa que no se consideró variación en el precio, por lo cual en este caso la predicción resultó acertada.

Para los dos últimos días de predicción, las probabilidades indicaban que no habría una variación que pudiera considerarse como apreciación o depreciación en el precio y aunque se observó (en ambos días) una variación real negativa de -2.00 se consideró, dadas las reglas de decisión, que el precio se mantuvo constante. Por lo tanto, la predicción resultó ser acertada. A continuación se muestra la representación gráfica de los valores.



4.4 Telmex L

En el caso de las acciones de Telmex L, realizamos un análisis similar al ya realizado con las acciones de Bimbo A y Televia.

Empleando la información mostrada anteriormente para las acciones de Telmex L, se calculó la media y la desviación estándar de las variaciones, obteniendose que.

La media de las variaciones es $\bar{d} = 0.1205$
y
la desviación estándar vale $\hat{\sigma_d} = 0.2003$

Con ellos obtuvimos los valores en los cuales estará sustentada la regla de decisión, así,

$$\begin{aligned} \bar{d} + 0.5\hat{\sigma_d} &= 0.2206 \\ \bar{d} - 0.5\hat{\sigma_d} &= 0.0203 \end{aligned}$$

Recordemos que estos valores marcan el intervalo dentro del cual se definen los estados del sistema: subir, bajar, o quedar igual.

____________0.2203(__________0.1205__________)0.2206____________
$X_t = 3$ $X_t = 2$ $X_t = 1$

El intervalo marca que sí la variación del precio es menor de 0.0203 entonces el sistema se encuentra en el estado 3 es decir, el precio de las acciones baja, si es mayor a 0.2206 entonces el estado asignado es 1, el precio de las acciones subió; y por último si cae dentro del intervalo que determinan estos dos valores, el estado es 2; considerando que la variación en el precio de las acciones no es significativo y se considera sin cambio.

El empleo de estas reglas, en el análisis de la variación del precio de las acciones genera la siguiente información:

Variación	Estado
0.60	1
-0.35	3
0.00	3
-0.05	3
0.05	2
0.30	1
-0.25	3
1.00	1
0.05	2
-0.25	3
0.35	1
0.65	1
0.30	1
-0.20	3
-0.20	3
0.25	1
-0.20	3

4.4.1 Formación de la matriz estocástica

Con estos datos construimos la matriz estocástica, apoyados en la frecuencia con la que se observa cada movimiento en el periodo observado.

	Subir	Igual	Bajar
Subir	2	1	4
Igual	1	0	1
Bajar	3	1	3

La matriz estocástica de este proceso está determinada por:

$$P = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 & 4/7 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/7 & 1/7 & 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2857 & 0.1428 & 0.5714 \\ 0.5000 & 0.0000 & 0.5000 \\ 0.4285 & 0..1428 & 0.4285 \end{pmatrix}$$

4.4.2 Predicción a 5 días

Así, que para un horizonte de tiempo de cinco periodos (días) se obtienen los resultados siguientes:

Periodo	u^*
1	$(0.3774,\ 0.1223,\ 0.4998)$
2	$(0.3832,\ 0.1252,\ 0.4910)$
3	$(0.3825,\ 0.1248,\ 0.4920)$
4	$(0.3825,\ 0.1248,\ 0.4918)$
5	$(0.3824,\ 0.1248,\ 0.4917)$

que comparados con los valores observados arrojan resultados interesantes.

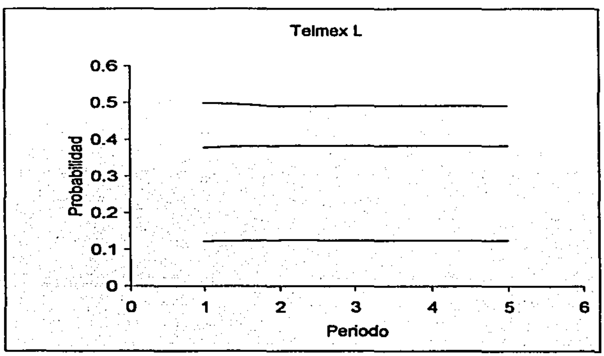
Iniciemos con un vistazo a los datos correspondientes al periodo de predicción:

Fecha	Precio	Variación	Estado
01/04/98	24.10	-0.15	3
02/04/98	23.95	-0.15	3
03/04/98	23.90	-0.05	3
06/04/98	23.50	-0.40	3
07/04/98	23.50	——	2

Con base en el estado al que migró conforme transcurrió cada día de la operación se obtuvieron las siguientes observaciones:

Para el primer día de la predicción se obtuvo una probabilidad de 0.4998 asociada a que la variación del precio de las acciones fuera negativa y observando que el precio bajó 0.15, la predicción resultó verdadera. Un comportamiento similar se observó para los tres días siguientes de predicción, el precio bajó y la probabilidad asociada a este evento era mayor a que subiera o permaneciera igual.

No obstante, si analizamos el vector de probabilidades para el último día de predicción. $u^{(5)} = \begin{pmatrix} 0.3824, & 0.1248, & 0.4917 \end{pmatrix}$ observamos que las probabilidades indicaban mayor tendencia a que el precio mostrara una variación, aunque los datos no mostraran variación; es decir, la predicción no resultó verdadera. Los datos referidos a estas observaciones se muestran gráficamente a continuación:



Notesé que en el análisis realizado en este capítulo, el comportamiento de las gráficas y los valores es no asintótico en todos los casos, a diferencia del capítulo anterior en donde se observa una tendencia asintótica. Debido a que la predicción en cada periodo subsecuente se realiza en base a lo ocurrido en el periodo anterior; es decir, si el precio baja en el periodo actual, entonces es considerado en la predicción del periodo siguiente.

Por otra parte, en el primer método la predicción se realizaba para cada estado del sistema; es decir, una predicción a 5 días para el caso en que el precio de las acciones subieran; otra predicción a 5 días para el caso en que el precio de las acciones no tuvieran variación, y lo mismo para el caso en que el precio de las acciones bajara. De esta forma los datos se volvían asintóticos hacia un mismo valor a través del tiempo.

En el segundo método, se obtienen resultados más variados, los resultados no tienden a acercarse hacia un mismo valor, la predicción para el siguiente periodo se realiza dependiendo de lo sucedido en el periodo anterior, ya que los estados son independientes a través del tiempo, lo que inhibe la posibilidad de un comportamiento asintótico, a menos que efectivamente las acciones sean poco líquidas.

Adicionalmente el segundo método mostró predicciones un poco más acertadas que el primero, esto debido a un análisis basado en la variación en el precio. Aunque las predicciones efectivamente no son acertadas en todos los casos, se obtuvieron resultados más interesantes porque no se observaba siempre un comportamiento asintótico en los valores de las probabilidades, aunque esto no significa que los resultados hayan sido completamente satisfactorios.

CONCLUSIONES

El análisis presentado en este trabajo de tesis, pretende mostrar que las Cadenas de Markov pueden ser una herramienta en la modelación de diferentes procesos. Tal es el caso de la realización de una auditoría a un contribuyente o bien, el comportamiento del precio de las acciones.

Como pudimos observar, en una cadena de Markov, las probabilidades de transición tienden a volverse asintóticas a través del tiempo, un fenómeno que en la práctica no es presentado por los sistemas o procesos. En particular, los precios de las acciones no siempre tienden a bajar o a subir y sólo en casos muy particulares los precios de las acciones premanecen invariantes. Así, que si un inversionisrta desea comprar o vender acciones, recomendamos no basar su decisión en el análisis presentado en esta tesis.

Como se pudo apreciar, para el análisis de precios de acciones se emplearon dos modelos: el primero, basado únicamente en el cambio en el precio, presentó predicciones generalmente erróneas, mientras que el segundo, el cual incluye una redefinición de los estados basada en la magnitud de cambio, arrojó resultados más favorables en cuanto a las predicciones.

Consideramos que el desarrollo de los ejemplos aquí mostrados son buenos para observar una aplicación del método de las cadenas de Markov, pero no podemos concluir que es un buen método para realizar predicciones de los precios de las acciones en una bolsa de valores.

Lo que si podemos afirmar es que es un método sencillo para predecir probabilidades de ocurrencia de ciertos eventos a través del tiempo, que puede servir para ver el comportamiento a corto y a largo plazo de ciertos sistemas estocásticos, así como para análizar el movimiento actual de alguna variable, con el fin de prónosticar el comportamiento futuro de la misma.

BIBLIOGRAFIA

[1] Albright, S.C., and W. W. Winston.
"Markov Models of Advertising and Princing Decisions"
Operations Research

[2] Bharucha Preid
"Elements of the theory of Markov Processes and their application."
McGraw-Hill 1960.

[3] Bodie Kane Marcus.
Investments
Irwin McGraw-Hill

[4] Elwood S. Buffa
Ciencias de la Administración e Investigación de Operaciones
"Formulación de modelos y métodos de solución"
Universidad de California
Ed. Lumisa

[5] Feller Willian
An introduction to Probability Theory and its aplications.
USA John Wiley and Sons.
(2 vols.) 3rd. edition

[6] Frank S. Budnick
Principles of operations Research for managament
Segunda Ed.

[7] G.F. Lawler
Introduction to stochastic Processes
First Edition

[8] Hillier, Frederick
"A Markovian Analysis"
The Behavior of Stock Price Relatives
Operations Research 1973.

[9] Howard, Ronald A
Dynamic Programming and Markov
First Edition

[10] Miller, David
"Executive decisions and operations research"
Investigación de Operaciones

[11] Levin, Rubin, Stinson
Quantitative approaches to management
Primera Ed. 1989

Publicaciones

The Wall Street Journal
Hemeroteca de la Facultad de Economía de la UNAM
Marzo 1998.