25

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTES DE LAS FÓRMULAS DE BLACK-SCHOLES

MAR. 11 2002
DEPTO. DE TITULOS
UNIDAD DE ADMINISTRACION ESCOLAR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

P R E S E N T A

ROMÁN VEGA MARTÍNEZ

ASESOR:
FIS.MAT. JORGE LUIS SUÁREZ MADARIAGA

MARZO,D.F. 2002.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Universidad Nacional Autónoma de México

UNAM

Biblioteca Central

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PLANTEAMIENTOS EQUIVALENTES DE LAS FORMULAS DE BLACK-SCHOLES

ROMAN VEGA MARTINEZ

Tesis de Licenciatura
Actuaría

ENEP-ACATLAN, UNAM
PROGRAMA DE ACTUARIA
México, D.F., 2002

AGRADECIMIENTOS

A mi esposa Guadalupe Valdez Castrejón (él amor de mi vida) por su amor y comprensión

A mi Hija Galia Verónica Vega Valdez por su amor incondicional (ojalá y yo fuera , como me ven sus ojos)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A mi madre Lourdes Martínez Ramírez por quien conocí lo grande que es esta vida.

Agradezco profundamente al Dr. Francisco Venegas Martínez por su grán apoyo en los momentos más dificiles.

Gracias al Maestro Jorge Luis Suárez Madariaga por ayudarme como asesor en este trabajo de tesis.

TABLA DE CONTENIDO

Página

CAPITULO 1. CONTRATOS DE OPCIONES

1.1 INTRODUCCION

En las finanzas modernas existen, a mi juicio, tres trabajos esenciales. Primeramente, el desarrollo de Markowitz de la teoría de portafolios en 1952. Markowitz utilizó teoría de la utilidad para modelar las preferencias de inversionistas individuales y construyó el modelo media-varianza para examinar las relaciones entre el rendimiento y el riesgo (explicado por la volatilidad del rendimiento de los activos)

Este trabajo motivó consecuentemente el desarrollo de Sharp, Linter y Treynor conocido como el CAPM por sus siglas en inglés (Capital Asset Pricing Model), un modelo de equilibrio sobre el rendimiento esperado en acciones. El CAPM introduce la "beta" como medida del riesgo diversificable, apoyando la creación de portafolios que minimizan los elementos de riesgo en los portafolios (Varianza)

El tercer gran desarrollo teórico fue la fórmula para encontrar el precio de una opción sobre acciones de Black-Scholes, la cual adicionalmente definía la estrategia para crear un portafolio de cobertura (libre de riesgo) del subyacente en cuestión. La derivación de esta fórmula original requirió la solución de la ecuación de difusión de calor (ampliamente utilizada en física), acompañada de un enfoque novedoso de aproximación en un entorno neutro a riesgo, que permitió la valuación de derivados. Sin duda, el alcance de este trabajo, ha rebasado por mucho las expectativas originales de sus autores y su repercusión en la operación diaria de los mercados financieros es innegable. De hecho, se ha vuelto el ejemplo estelar de la aplicación de la modelación matemática en finanzas.

En este trabajo pretendo recoger las ideas de las diversas aproximaciones que se han realizado para resolver el problema de valuar opciones sobre acciones. Lo cual contribuye a la utilización de los diversos enfoques en la modelación matemática para el caso concreto del trabajo de Black-Scholes.

Este trabajo está organizado en tres secciones que pretenden dar los elementos que permitan, la comprensión de los modelos usados, por diversos enfoques técnicos, para resolver este problema esencial en finanzas modernas.

En primer lugar se plantean los elementos básicos del análisis en los capítulos: 1.- Contratos de Opciones (qué son las opciones?), 2.- Tipos de Opciones (cómo operan estos mercados?), 3.-Valor del Dinero en el Tiempo (planteando la ecuación diferencial determinística clásica del crecimiento geométrico), 4.-Comportamiento de los Activos (el proceso de Winer como modelo del riesgo en los activos).

En la siguiente sección introduce los elementos del trabajo de Black-Scholes, capítulos 5.- Elementos de Cálculo Estocástico (exponiendo de manera intuitiva el fundamental Lema de Ito) 6.- Modelo de Black-Scholes. (El trabajo original construyendo la cobertura con un portafolio libre de riesgo) y, finalmente, los diversos planteamientos de la fórmula de Black-Scholes capítulos: 7.- Valores Esperados (la construcción de la solución como esperanza de la función de pago), 8.- La Ecuación de Calor (la conexión con la ecuación de difusión de calor), 9.- Martingalas (El planteamiento de cambio de Medida neutra a riesgo), 10.- Portafolios Replicantes (Valuación por replica de un portafolio sintético), 11.- Sustitución Directa (comprobando la solución en la Ecuación Diferencial Parcial)

Cada capítulo está pensado para ser leído como parte de un todo o de forma independiente, sin la necesidad de leer secciones anteriores, cada uno proporciona los elementos notacionales básicos necesarios para su completa comprensión. Finalmente, se dan algunos comentarios sobre la importancia de estos instrumentos en los mercados actuales.

En las últimas décadas, el desarrollo de los mercados financieros ha estado acompañado de una mayor disponibilidad de instrumentos de cobertura contra diferentes tipos de riesgos. Asimismo, en los últimos años, la medición y administración de riesgos se ha convertido en una práctica generalizada tanto de los intermediarios financieros como de los administradores de fondos de inversión. Con el desarrollo de las tecnologías de información, el uso de las opciones en el diseño de estrategias de cobertura se ha extendido rápidamente hacia las empresas no financieras (o productivas) y aún hacia los medianos y pequeños inversionistas.

El uso de las opciones para cubrir los riesgos del mercado, responde a la flexibilidad que estos instrumentos proporcionan a sus usuarios para entrar y salir rápidamente del mercado debido a su liquidez y apalancamiento. Las opciones financieras son herramientas útiles que permiten a los inversionistas administrar el riesgo de mercado con costos bajos de transacción. Asimismo, el riesgo de crédito -en bolsas de opciones- de estos instrumentos es mínimo, o casi nulo, debido a la asociación del mercado con una cámara de compensación que a cambio de una comisión, (que se cobra sólo a las posiciones cortas), garantiza el cumplimiento de estos contratos. En conclusión, las opciones son instrumentos que permiten a los inversionistas cubrir sus posiciones de riesgo (largas o cortas), en respuesta a sus expectativas económicas y financieras, reduciendo el riesgo y la incertidumbre del mercado con costos bajos de transacción.

La ausencia tan prolongada de mercados de instrumentos financieros de cobertura en México nos invita a evaluar sus efectos en los mercados financieros. En particular, en el episodio llamado "el error de diciembre" de 1994 o, mejor dicho, en la debacle financiera de 1995. Llama la atención la enorme exposición al riesgo de tasa de interés, de tipo de cambio y bursátil y la imposibilidad de administrarlo a falta de un mercado de coberturas contra contingencias financieras; situación que no permitió a los agentes económicos planear adecuada y oportunamente sus portafolios en el corto y mediano plazo. En la actualidad, se cuenta en México con un mercado organizado y reconocido por las autoridades fiscales y financieras en el que se negocian contratos a futuro estandarizados y que próximamente listará opciones. Cuando estos instrumentos se utilizan adecuadamente protegen a los inversionistas contra pérdidas potenciales ocasionadas por movimientos bruscos e inesperados de las variables subyacentes.

El primer mercado organizado y reconocido de opciones, el Chicago Board Options Exchange (CBOE), comenzó su operación en 1973. Poco tiempo después, mercados similares surgieron en Europa, Asia y, más recientemente, en América Latina. En el caso mexicano, se cuenta con el Mercado Mexicano de Derivados S.A. de C.V. (MEXDER).

1.2 OPCIONES FINANCIERAS

La generación de portafolios con un balance adecuado entre riesgo y rendimiento es una tarea fundamental de la ingeniería financiera. Una clase importante de instrumentos que actúan como seguros contra contingencias financieras son las opciones. En un ambiente de extrema volatilidad, estos instrumentos proporcionan al inversionista un mecanismo para inmunizar un portafolio contra fluctuaciones adversas en los precios de los subyacentes.

El surgimiento y crecimiento de las opciones en los mercados financieros está marcado por varias fechas importantes: En 1973, se bursatilizan opciones sobre acciones en el Chicago Board of Trade (CBOT). En el mismo año, se presenta un avance teórico importante con la aparición de la fórmula de Black-Scholes. En 1979, debido a un cambio de estrategia de la Reserva Federal de los Estados Unidos de Norte América se generó un nivel alto de volatilidad en los mercados financieros, los agentes se vieron en la necesidad de buscar nuevas técnicas financieras para contrarrestar su exposición al riesgo. Los inversionistas observaron que el empleo de las opciones reducía en forma eficiente la exposición al riesgo mercado.

Una opción es un producto derivado que por el pago de una prima da a su tenedor (comprador) el derecho, más no la obligación, de comprar o vender el activo subyacente (bienes, acciones, índices bursátiles, divisas, futuros, tasas de interés, etc.) a un precio determinado, llamado precio de ejercicio. La contraparte,-el emisor- de estos títulos tiene la obligación de vender o comprar el activo subyacente. En resumen, la utilidad de estos instrumentos consiste en asegurar un bien o servicio a través del pago de una prima cuyo monto dependerá de las probabilidades de que el bien o servicio experimente un cambio desfavorable para el interesado. Si esto ocurre, al interesado le cuesta únicamente el valor de la prima. En un contrato de opción se especifican cinco elementos:

1. Tipo de opción.- opción de compra o de venta (americana o europea).

2. Activo subyacente.

3. Cantidad del activo negociado.- es la cantidad, en unidades, del activo subyacente que está estipulado que se puede comprar o vender por cada contrato de opción.

4. Fecha de vencimiento.

5. Precio de ejercicio.

Hay otro elemento determinado por el mercado que no figura estipulado en el contrato, que es el precio a pagar por la opción, precio que se fija en el mercado organizado de opciones, siguiendo la ley de la oferta y la demanda. Este precio recibe el nombre de prima.

Es importante observar que en los contratos de opciones sólo se obliga al vendedor, mientras que el comprador tiene el derecho (opción) de ejercer el contrato, pero no está obligado a ello. Esto permite al poseedor de una opción, no sólo a cubrirse ante posibles pérdidas sino también la posibilidad de obtener un beneficio en caso de que la evolución del precio del activo asociado a la opción sea favorable.

Por otro lado, las opciones, al igual que los futuros son contratos estandarizados, permitiendo así que las transacciones se efectúen en mercados abiertos, organizados y con garantías de su cumplimiento. Esta característica genera liquidez para llevar a cabo distintas combinaciones y estrategias para ampliar y diversificar las carteras de inversión. A diferencia de los mercados de futuros, en las opciones, el comprador del contrato sólo está obligado al pago de una prima (precio de la opción) que recibirá el vendedor, quién aportará el margen inicial y de mantenimiento según la evolución del mercado.

La inversión en opciones también es una alternativa para especular (obtener ganancias extraordinarias asumiendo riesgos sobre tendencias inesperadas). Es también posible realizar operaciones de arbitraje aprovechando desequilibrios temporales en la prima de las opciones.

Las opciones financieras más comunes son las que tienen como subyacente a los títulos de capital (acciones), los índices de mercados accionarios, las divisas extranjeras, títulos de deuda pública y futuros. Se distinguen entre sí con base en tres criterios: tipo, clase y serie. El tipo nos indica si la opción es de compra (call) o de venta (put). Todas las opciones que sean del mismo tipo y que tengan una fecha de vencimiento común determinan una clase. Las opciones que pertenezcan a una clase y que tengan el mismo precio formarán una serie. En las opciones se presentan dos posiciones, las cuales nos indican la postura que presenta cada una con respecto al contrato:

Posición larga.- es la postura que presenta el comprador (quien paga la prima) de una opción, sin importar si ésta es un opción de compra o de venta.

Posición corta.- es la postura que presenta el emisor o vendedor de la opción (recibe la prima) de compra o de venta.

Una vez firmado un contrato de opciones, existen tres formas de cerrarlo:

a. El comprador ejerce su derecho.

b. El comprador permite que pase la fecha de vencimiento sin ejercer su derecho, dándose por terminado el contrato.

c. El comprador puede vender la opción a un tercero, o el emisor puede recomprar la opción al comprador, es decir, la opción se liquida.

1.2.1 OPCIONES DE COMPRA (CALL OPTIONS)

Una opción de compra otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de comprar al emisor el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha predeterminada o antes. El comprador tiene que pagar una prima al emisor en el momento de la realización del contrato. El contrato debe especificar entre otras cosas:

1. Concepto a negociar (activo subyacente).
2. La cantidad a negociar.
3. El precio de compra.
4. La fecha de vencimiento.

Este tipo de opciones presentan para el comprador ganancias ilimitadas al mismo tiempo que sus pérdidas se ven reducidas al valor de la prima que paga al firmar el contrato.

En cambio, el emisor presenta como ganancia máxima el valor de la prima y sus pérdidas son ilimitadas.

1.2.2 OPCIONES DE VENTA (PUT OPTIONS)

Una opción de venta otorga al comprador el derecho, más no la obligación, de vender el activo subyacente a un precio predeterminado en una fecha preestablecida o antes. El contrato especifica los mismos puntos que el de opciones de compra. En estos contratos al igual que en los de compra el emisor tiene una ganancia reducida a la prima y pérdidas ilimitadas, la situación del comprador es la contraria, es decir, presenta pérdidas reducidas a la prima y ganancias ilimitadas.

1.3 OPCIONES AMERICANAS Y EUROPEAS

Las opciones también se pueden clasificar de acuerdo al tiempo en que se puede ejercer el derecho que ellas otorgan, siendo estas:

1. Opciones americanas.- son aquellas en las que se puede ejercer el derecho a comprar o vender en cualquier fecha hasta el día de vencimiento, es decir, durante la vida de la opción.

2. Opciones europeas.- son aquellas que sólo pueden ser ejercidas en la fecha de vencimiento.

La mayoría de los contratos negociados en todo el mundo se realizan mediante opciones americanas. Pero estas presentan una mayor dificultad para su valuación que las europeas, y por lo mismo las propiedades de las americanas se derivan y explican a través de las propiedades de las europeas. [1]

1.4 OPCIONES DENTRO, FUERA Y EN EL DINERO

Las opciones pueden clasificarse, dependiendo de la relación que exista entre el precio pactado de ejercicio y el precio de mercado de la siguiente manera:

1. Dentro del dinero (in the money).- cuando el precio de mercado excede el precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio para una de venta.

2. Fuera del dinero (out of the money).- cuando sucede lo contrario, es decir, cuando el precio de mercado es menor al precio de ejercicio en una opción de compra; y cuando el precio de mercado es mayor al precio de ejercicio en una de venta.

3. En el dinero (at the money).- esto se da cuando el precio de mercado y el precio de ejercicio son el mismo, se cumple tanto para opciones de compra, como para las de venta.

[1] Para una descripción más detallada de los productos derivados, véase Hull (2000).

Esta clasificación determina el precio a pagar por comprar la opción, ya que las opciones que se encuentran dentro del dinero van a implicar necesariamente primas más altas, puesto que con estos contratos es muy probable que se logren ganancias si se ejercen al vencimiento, en cambio las opciones que se encuentran fuera del dinero implican primas muy bajas, ya que seguramente terminen sin ser ejercidas.

1.5 LIQUIDACION EN EFECTIVO Y EN ESPECIE

Las opciones también pueden clasificarse según su forma de liquidación, es decir, la forma de cumplimiento del contrato por parte de los vendedores de opciones:

1. En especie.
2. En efectivo.

En los mercados, la liquidación de los contratos muy rara vez llegan a la fecha de expiración (aproximadamente el 2% de las operaciones). Generalmente, se realiza cancelando diferenciales entre el precio de ejercicio y el precio de mercado (en efectivo).

Finalmente, es conveniente destacar que existen cuatro posiciones básicas para un inversionista que está interesado en la negociación de opciones:

1. Posición larga en una opción de compra.- ésta es una posición que se beneficia con movimientos a la alza en los precios. Ya que sus ganancias aumentan en relación a lo que aumente el mercado.
2. Posición larga en una opción de venta.- ésta considera movimientos a la baja en los precios. En esta posición al contrario, las ganancias van en relación a una contracción en los precios del mercado.
3. Posición corta en una opción de compra.- con esta posición obtienen beneficios los inversionistas que consideran movimientos moderados a la baja y movimientos neutrales.
4. Posición corta en una opción de venta.- con ella se encuentran los inversionistas que consideran movimientos moderados a la alza y movimientos neutrales.

1.6 VALOR INTRINSECO Y VALOR EN EL TIEMPO DE LAS OPCIONES

La fijación del precio de las opciones se realiza en los mercados de acuerdo a su oferta y demanda. Varios factores intervienen en dicho proceso. Su dinámica depende del tiempo y de las variaciones del precio del subyacente en el mercado. De ahí que las opciones tienen un valor intrínseco y un valor en el tiempo. El valor intrínseco es el valor que tendría la opción si expirara inmediatamente tomando en cuenta el precio del activo subyacente en el mercado en efectivo. Concretamente, es la cantidad por la cual la opción se encuentra dentro del dinero. Para las opciones de compra es la diferencia entre el precio de mercado del subyacente y el precio de ejercicio, si la diferencia es positiva, o de lo contrario es simplemente cero (pues al no estar dentro del dinero la opción no tiene ningún valor para el comprador). Por lo tanto, su valor es $c = \text{Max}(S_T - K, 0)$. Para las opciones de venta es la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de mercado del subyacente, si la diferencia es positiva, o simplemente cero en cualquier otro caso (la opción no tiene valor para el comprador porque no se ejerce). Por lo tanto, su valor es $p = \mathrm{Max}(K - S_T, 0)$.

El valor en el tiempo es la cantidad por la cual la prima o valor total de la acción excede el valor intrínseco. Este valor existe porque el precio del subyacente puede cambiar entre el presente y el vencimiento de la opción, existiendo por tanto el potencial de posibles beneficios. Esto es, el valor en el tiempo es la prima que los inversionistas están dispuestos a pagar por dicho potencial. De ahí que el valor en el tiempo sea igual a cero al vencimiento de la opción y el valor máximo de la opción que es ejercida es igual al valor intrínseco. En general, el valor en el tiempo se encuentra en su máximo valor cuando el precio del subyacente es igual al precio de ejercicio.

1.7 RELACIONES ENTRE OPCIONES DE COMPRA Y VENTA (CALL-PUT PARITY

Esta paridad es una relación que debe mantenerse para que no exista arbitraje. Considerando el caso de una opción europea al momento de su vencimiento, esta condición puede ser extendida para incluir el precio de ejercicio en la relación de equilibrio existente entre las opciones y su subyacente. A esta relación de equilibrio se le conoce como paridad de los precios entre opción de compra y opción de venta. Como una primera aproximación, sin tomar en cuenta el valor del dinero en el tiempo, el principio de la paridad de los precios de opciones de compra y venta, señala que en el caso de una opción europea que no paga dividendos, para que no exista arbitraje entre la compra del subyacente y las opciones de compra y de venta, al momento de su liquidación, el precio del subyacente menos el precio del ejercicio debe de ser igual al precio de la opción de compra menos el precio de la opción de venta, es decir

$$S_T - K = c(T, S_T) - p(T, S_T)$$

1.8 FACTORES PARA LA DETERMINACION DE LOS PRECIOS DE LAS OPCIONES

Los factores de los cuales depende el valor de una opción se enumeran y explican muy brevemente a continuación:

1. Precio actual del bien subyacente. Es el determinante más importante. Cuanto mayor es el precio del activo subyacente, mayor es el precio de la opción de compra (mayor probabilidad de encontrarse dentro del dinero) y menor el de la opción de venta (menor posibilidad de encontrarse dentro del dinero).

2. Precio de ejercicio de la opción. Cuánto más alto, más barata debe ser la opción de compra y más cara debe ser la opción de venta. Sin embargo, cabe recordar que el precio de una opción de compra no puede ser negativo aún si el precio de ejercicio es muy alto. Mientras la opción tenga aún cierta vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente exceda al precio de ejercicio antes de su vencimiento y la posición tiene algún valor en el tiempo. Análogamente, en el caso de una opción de

venta, su valor intrínseco no puede ser negativo, aún si el precio de ejercicio es muy bajo. Y mientras la opción de venta tenga vigencia, existe la posibilidad de que el precio del subyacente descienda más allá del precio de ejercicio y por tanto la opción tiene al menos cierto valor en el tiempo.

3. Tasa de interés libre de riesgo. Es el costo de oportunidad de la inversión en una opción, a medida que la tasa de interés libre de riesgo se incrementa, el precio de las opciones de compra aumenta y el precio de las opciones de venta disminuye. Este impacto no es tan evidente. Mientras más altas sean las tasas de interés, más bajo es el precio de ejercicio de una opción de compra. Así, las tasas de interés producen el mismo efecto que bajar el precio de ejercicio de la opción de compra.

4. Dividendos. Los pagos de dividendos en efectivo también alteran el precio de las opciones. En relación a las opciones sobre acciones, si se espera que la acción reparta altos dividendos, el valor de la opción de compra disminuye y el valor de la opción de venta aumenta. Esto debido a que el precio del subyacente desciende en el mercado en una cantidad similar al pago de dividendos.

5. Tiempo remanente de vigencia. Mientras mayor es el plazo que aún tiene de vigencia la opción, mayor es la posibilidad de ejercer, por lo tanto mayor será el precio de las opciones, tanto de compra como de venta.

6. Volatilidad del activo subyacente. La volatilidad se refiere al posible rango de variaciones de los precios del subyacente. Los incrementos en la volatilidad del precio del bien subyacente siempre tienen el efecto de que aumenta el precio de las opciones, sean estas de compra o venta, americanas o europeas, porque aumentan la posibilidad de que el precio del bien subyacente rebase el precio de ejercicio provocando que la opción sea ejercida.

Los cuatro primeros factores están relacionados con el valor intrínseco de la opción, en tanto que los dos últimos con el valor en el tiempo de la opción. Estas variables interactúan entre sí para determinar el valor de las opciones.

En resumen, se puede decir que el valor de una opción de compra generalmente aumenta cuando el precio actual de las acciones, el vencimiento, la volatilidad y el tipo de interés libre de riesgo aumentan. El valor de una opción de compra disminuye cuando aumentan el precio de ejercicio y los dividendos esperados. El valor de una opción de venta generalmente aumenta cuando el precio de ejercicio, el tiempo de expiración, la volatilidad, y los dividendos esperados aumentan. El valor de una opción de venta disminuye cuando el precio actual de las acciones y el tipo de interés libre de riesgo aumentan.

1.9 OPCIONES SOBRE ACCIONES QUE PAGAN DIVIDENDOS CONTINUAMENTE

Considere una acción que paga continuamente una tasa de dividendo (constante). Entonces el precio de una acción que paga este tipo de dividendo es el precio de la acción sin pago de dividendo descontado a dicha tasa de dividendos.

1.10 OPCIONES SOBRE INDICES ACCIONARIOS

Muchas de las bolsas del mundo cotizan opciones sobre índices accionarios. La Bolsa Mexicana de Valores no es la excepción y cotiza Warrants sobre el Indice de Precios y Cotizaciones. El mecanismo y la definición es como una opción sobre una acción, la única diferencia es que el subyacente es el índice bursátil. En la valuación de las opciones sobre índices accionarios el supuesto que se hace es el de promediar los dividendos que pagan las acciones que componen el índice (canasta de acciones). Con esto se aplica la fórmula de Black-Scholes adaptada para las opciones sobre acciones que pagan un dividendo conocido.

1.11 OPCIONES SOBRE DIVISAS

Las opciones sobre divisas pueden ser tratadas de manera análoga a las opciones sobre acciones, la única diferencia es que el activo subyacente es una divisa. Este instrumento tiene la propiedad de transferir el riesgo cambiario entre los participantes del mercado ofreciéndoles una amplia gama de posibilidades de rendimiento además de permitirles crear una cobertura contra el riesgo. Una opción sobre divisas proporciona una especie de seguro cambiario mientras que una cobertura (o un forward) cierra la operación futura a un tipo de cambio fijado el día de la adquisición del contrato. Por supuesto, el seguro no es gratuito y se tiene que pagar una prima por la opción, mientras que en el forward no existe tal prima.

1.12 OPCIONES SOBRE FUTUROS

Una opción sobre un futuro es una opción donde el subyacente es un futuro. Como en las otras opciones el comprador de la opción tiene el derecho, mas no la obligación, de ejercer la opción. Así, con una opción de compra puede ejercer la opción comprando un contrato de futuros al precio de ejercicio (es decir, tomar una posición larga en los futuros al precio de ejercicio), mientras que el comprador de la opción de venta puede ejercer vendiendo el contrato de futuros al precio de ejercicio. Todos los conceptos típicos de las opciones son válidos, por ejemplo, el tenedor de la opción de compra ejercerá el derecho de comprar un contrato de futuros sólo si eso le representa una ganancia o le reduce una pérdida.

Las opciones sobre los futuros tienen los siguientes beneficios sobre los contratos de futuros:

1. Las opciones le ponen un límite a la pérdida mientras que los futuros no lo hacen.
2. Las opciones sobre futuros le permiten a los productores de mercancías cubrir tanto el riesgo precio como el riesgo de cantidad mientras que los futuros permiten solo la cobertura del riesgo precio. [2]

1.13 MODELO DE BLACK-SCHOLES

El modelo de Black-Scholes es probablemente el más conocido y aplicado de los modelos de valuación de las finanzas. Inicialmente fue desarrollado en 1973 por Fisher Black y Myron Scholes. El modelo fue formulado para valuar opciones europeas para acciones sin pago de dividendos; trabajos posteriores de otros investigadores financieros han refinado el

[2] Los conceptos de este capítulo retoman los principales aspectos del libro de Hull (2000).

modelo y lo han hecho aplicable para el caso de opciones americanas, opciones con pago de dividendos por parte del activo subyacente, y opciones sobre otros instrumentos, como los futuros, divisas, entre otros. El método establece la siguiente fórmula para obtener el valor de las opciones europeas de compra. En la derivación de la fórmula original se hicieron los siguientes supuestos:

1. La tasa de interés a todos los plazos es constante.
2. El intercambio (o negociación) de estos instrumentos es continuo
3. Los costos de transacción e impuestos son cero.
4. La acción no paga dividendos.
5. Un inversionista puede ejercer la opción sólo al tiempo de vencimiento (opción tipo europea).
6. La volatilidad de la acción es conocida y no cambia durante la vida de la opción. [3]

Es de esperar que en la realidad varios de estos supuestos no se cumplan. No obstante, la fórmula arroja buenos resultados en la práctica. El supuesto más importante en el modelo es que los precios de los activos subyacentes son continuos lo cual descarta las discontinuidades en el patrón muestral, tales como los saltos que invalidan el argumento de cobertura continua en el modelo Black-Scholes. También este supuesto descarta una reversión de la media en el precio del activo subyacente, es decir, la convergencia hacia un valor fijo. Por lo tanto, el modelo de Black-Scholes no es estrictamente aplicable al mercado de renta fija, donde los precios de los bonos convergen hacia valores nominales.

Por otra parte, en el caso de subyacentes que no distribuyen dividendos u otros pagos en efectivo, el modelo de Black-Scholes es aplicable para el caso de opciones americanas. Debido a que una opción americana puede ser ejercida en cualquier momento su precio es mayor que el de una opción europea de igual precio de ejercicio y vencimiento; a la diferencia entre el precio de la opción americana y la opción europea se le denomina prima por derecho de ejercicio prematuro. En el caso de una opción americana cuyo subyacente no paga dividendos, no es recomendable que se ejerza antes del vencimiento. Si una opción europea está dentro del dinero su valor se aproxima al valor intrínseco.

El modelo de Black-Scholes continua siendo aplicable para el caso de opciones americanas de compra que pagan dividendos. Si la opción se ejerce antes de la fecha de vencimiento, se obtiene el valor de la opción de compra usando el tiempo correspondiente a la fecha de ejercicio. Es posible ejercer prematuramente una opción americana si la opción se encuentra profundamente dentro del dinero y el pago de dividendos es alto.

[3] Black, F. and M. Scholes, (1973), The Princing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, 81, pp. 637-654.

CAPITULO 2. TIPOS DE OPCIONES

2.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior presentamos algunos conceptos básicos de opciones. En éste trataremos con uno de los temas principales de la teoría de opciones. El capítulo no es técnico, sino más bien descriptivo, aquí se distinguen las características de un contrato de opciones más simples que se encuentran en el mercado, los cuales a su vez son los más comunes; asimismo, se da una explicación de la terminología estándar que se utiliza en el mercado.

2.2 OPCIONES

El dueño de un contrato forward o futuro, tiene la obligación de mantenerlo hasta el vencimiento del contrato, a menos que la posición sea cerrada antes del vencimiento, el dueño deberá tomar la posesión del bien, moneda o lo que cubra el contrato, sin importar cual sea el valor del activo.

Una opción simple proporciona al dueño el derecho de ejercer en el futuro a un precio previamente acordado, pero sin obligación. Por lo tanto, si la acción baja, no tenemos que comprarla. Una opción de compra (también llamada call) es el derecho de comprar un activo particular por un monto acordado en un tiempo específico. Deberemos ejercer la opción al vencimiento si la acción está por arriba del precio de ejercicio y no la debemos de ejercer en caso contrario.

Si usamos S_t como el precio de la acción y K como el precio de ejercicio entonces el valor de la opción al vencimiento será

$$\text{máx}\,(S_T - K, 0). \tag{2.1}$$

Esta función sobre el activo subyacente es llamada función de pagos.

¿Por qué deberíamos escoger una opción? Claramente, si se tiene una opción de compra se querrá que la acción suba lo más posible. Entre más alto sea el precio de la acción, más grande será el beneficio. Nuestra decisión de comprar dependerá de cuanto cueste.

¿Qué pasa si se cree que la acción va a bajar; existe un contrato que podamos comprar y con el que nos podamos beneficiar?

Una opción de venta(también llamada put) es el derecho de vender un activo particular por un monto acordado a un tiempo específico en el futuro.

El dueño de una opción de venta desea que el precio de la acción baje, vendiendo el activo a un precio mayor. La función de pagos de una opción de venta es

$$\text{máx}\,(K - S_T, 0). \tag{2.2}$$

Ahora la opción es ejercida solo si la acción está por debajo del precio de ejercicio.

Podemos ver que entre mas grande sea el precio de ejercicio, será menor el precio de los calls y mayor el de los puts, ésto tiene sentido ya que el call permite comprar el subyacente al precio de ejercicio, así que entre menor sea el precio de ejercicio más valor tendrá la opción. Lo contrario es cierto para un put, ya que permite vender el subyacente al precio de ejercicio.

¿Qué debe pasar cuando el tiempo de vencimiento disminuya? La respuesta es que como cada vez hay menos tiempo para que el activo subyacente se mueva, entonces el valor de la opción convergerá a la función de pagos.

Una de las características más importantes de los calls y puts es que no tienen una dependencia lineal con el activo subyacente. A diferencia de los futuros los cuales dependen linealmente del subyacente. La no-linealidad es muy importante en el precio de las opciones, la aleatoriedad en el activo subyacente y la curvatura en el valor de la opción con respecto al activo estan íntimamente relacionados.

Los calls y puts son dos de las opciones más simples. Por esta razón también se les llama vainilla por la obicuidad de ese sabor. Existen muchas clases de opciones, algunas de las que se examinarán más adelante. Otro término que se usa para describir contratos que dependen de algunos activos fundamentales es el de derivados.

2.3 DEFINICION DE TERMINOS COMUNES

Las matemáticas financieras y de teoría de derivados tienen un argot especial. El argot proviene del mundo matemático y del mundo financiero. Generalmente, el argot financiero tiene como objetivo el de simplificar la comunicación y poner a todos en igualdad. Aquí se muestran algunas de las definiciones más comunes.

Prima: La cantidad inicialmente pagada por el contrato.

Activo Subyacente: El instrumento financiero del cual depende el valor de la opción. Las acciones, bienes, monedas e índices serán denotados por S_t. El pago de la opción es definido como una función del activo subyacente al vencimiento.

Precio de Ejercicio: La cantidad por la que el activo subyacente puede ser comprado (call) o vendido (put). Será denotado por K. Esta definición se aplica realmente solo para calls y puts.

Fecha de Vencimiento: Es la fecha en la que la opción se puede ejercer o la fecha en la que la opción termina. Será denotado por T.

Valor Intrínseco: Es el pago que se recibiría si el precio del activo subyacente estuviera a su precio actual en la fecha de vencimiento.

Valor en el Tiempo: Cualquier valor en el que la opción esta por arriba de su valor intrínseco. La incertidumbre alrededor del valor futuro del activo subyacente significa que el valor de la opción es generalmente diferente del valor intrínseco.

Dentro del Dinero: Es una opción con valor intrínseco positivo. En una opción de compra es cuando el precio del activo está por arriba del precio de ejercicio $(S_t - K) > 0$, en una opción de venta es cuando el precio del activo está por abajo del precio de ejercicio $(K - S_t) > 0$.

Fuera del Dinero: Es una opción sin valor intrínseco solo con valor en el tiempo. En una opción de compra es cuando el precio del activo esta por abajo del precio de ejercicio $(S_t - K) < 0$, en una opción de venta es cuando el precio del activo esta por arriba del precio de ejercicio $(K - S_t) < 0$.

Sobre el Dinero:Es cuando el precio de ejercicio de un call y un put es igual al nivel actual del activo $(S_t - K) = 0 = (K - S_t)$.

Posición larga:Es un monto positivo de alguna cantidad, o una exposición positiva a una cantidad.

Posición corta:Es un monto negativo de alguna cantidad, o una exposición negativa a una cantidad. Muchos activos pueden ser vendidos en corto, con algunas restricciones del tiempo antes de ser regresados.

2.4 EMISION DE OPCIONES

Se ha hablado sobre los derechos de quien compra una opción. Pero para cada opción que es vendida, alguien en alguna parte debe ser responsable si la opción es ejercida. Si tenemos una opción de compra tenemos el derecho de comprar en algún tiempo en el futuro una acción. ¿A quién se la vamos a comprar? Al final, la acción debe ser entregada por la persona que emitió la opción. El emisor de una opción es una persona que se compromete a entregar el activo subyacente, si la opción es un call, o comprarlo, si la opción es un put. El emisor es la persona que recibe la prima.

En la práctica, la mayoría de las opciones, son adquiridas a través de una bolsa, de manera que el comprador de una opción no conoce quién es el emisor. El que tiene la opción puede venderla a alguien más, por medio de la Bolsa para cerrar su posición. Sin embargo, a pesar de quien sea el poseedor de la opción, o de quien la tenía, el emisor es la persona que tiene la obligación de entregar o comprar el subyacente.

El comprador de la opción obtiene derechos especiales mediante una prima y un resultado incierto. El emisor recibe un pago garantizado por adelantado, pero tiene obligaciones en el futuro.

2.5 MARGEN

La emisión de opciones es muy riesgosa. La pérdida de comprar una opción es en el peor de los casos la prima inicial, la ganancia puede ser ilimitada. La ganancia para el emisor de la opción es limitada pero la pérdida podría ser ilimitada. Por esta razón, para cubrir el riesgo de default en el evento de un resultado desfavorable, las cámaras de compensación, que registran y liquidan las opciones, insisten en el depósito de un margen por parte del emisor de las opciones. Las cámaras de compensación actúan como contraparte en cada transacción.

El margen aparece de dos maneras, el inicial y de matenimiento. El margen inicial es la cantidad depositada al comenzar el contrato. El margen total deberá estar arriba de un margen de mantenimiento preestablecido. Si está por abajo de éste nivel entonces más dinero (o el equivalente en valores) deberán ser depositados. Los niveles de estos márgenes varían en cada mercado.

2.6 CONVENCIONES DE MERCADO

La mayoría de los contratos de opciones más simples son comprados y vendidos a través de bolsas. Estas bolsas hacen más simple y más eficiente la localización de compradores para vendedores. Parte de esta simplificación envuelve las convenciones sobre las características de los contratos como las fechas de vencimiento y precios de ejercicio viables. Por ejemplo, los calls y puts aparecen en series. Esto se refiere a la fecha de vencimiento y al precio de ejercicio. Típicamente una bolsa tiene tres fechas de vencimiento en las que se pueden negociar. Una vez estandarizados los contratos a operar a través de la bolsa se promueve la liquidez de los instrumentos.

2.7 VALOR DE LA OPCION ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO

El contrato nos da derechos específicos pero no obligaciones. Dos cosas son claras sobre el valor del contrato antes del vencimiento: el valor dependerá de qué tan alto esté el precio del activo hoy, y cuanto tiempo falta para la fecha de vencimiento.

Entre más grande sea el precio del activo hoy, se esperará que sea más grande al vencimiento de la opción y, por tanto, más valor tendrá una opción de compra. Por otro lado, una opción de venta deberá ser más barata por el mismo razonamiento. Entre mayor sea el tiempo para vencimiento, más tiempo tendrá el subyacente para subir o bajar de precio. ¿Es eso bueno o malo si tenemos una opción de compra? aún más, entre más tengamos que esperar hasta obtener un pago, de menor valor será el pago simplemente por el valor del dinero en el tiempo.

El aspecto de encontrar un valor justo en el que nos enfocaremos por ahora es tomando en cuenta la dependencia en el precio del activo y el tiempo. Se usará c para denotar el valor de la opción y será una función del valor del activo subyacente S y el tiempo t. Se puede escribir $c(S,t)$ para el valor del contrato.

Conocemos el valor del contrato al vencimiento. Si usamos T para denotar la fecha de vencimiento entonces en $t = T$ la función c es conocida, y es la función de pagos. Por ejemplo si tenemos una opción de compra entonces

$$c(S,T) = \text{máx }(S_T - K, 0). \tag{2.3}$$

2.8 FACTORES QUE AFECTAN LOS PRECIOS

DE LOS DERIVADOS

Los dos factores que afectan más a los precios de las opciones son el valor del activo subyacente S y el tiempo al vencimiento t. Estas cantidades son variables, que significa que ellas cambian inevitablemente durante la vida del contrato; si el subyacente no cambiará entonces el precio sería trivial.

Así mismo, son parámetros que afectan al precio de la opción la tasa de interés y el precio de ejercicio. La tasa de interés tendrá un efecto en el valor de la opción por medio del valor del dinero en el tiempo, debido a que el pago será recibido en el futuro; la tasa de interés también juega otro papel que veremos más adelante. Claramente, el precio de ejercicio es importante: entre más grande sea el precio de ejercicio en un call, menor será el valor del call.

Si tenemos una opción en acciones entonces su valor dependerá de los dividendos que serán pagados durante la vida de la opción. Existe un parámetro importante que no se ha mencionado, y que tiene un impacto mayor en el valor de la opción. El parámetro es la volatilidad. La volatilidad es una medida del monto de fluctuación del activo subyacente, una medida de aleatoriedad.

La definición técnica de la volatilidad es la desviación estándar anualizada del rendimiento de los activos.

La volatilidad es particularmente un parámetro interesante porque es muy difícil de estimar. Una vez estimada, nos encontramos con que nunca permanece constante y que es impredecible. Una vez que se empiece a pensar que la volatilidad sigue una caminata aleatoria entonces parece natural tratarla como una variable.

2.9 ESPECULACION Y APALANCAMIENTO

Si se va a comprar una opción que está fuera del dinero (out of the money), quizás no cueste mucho, especialmente si no queda mucho tiempo para el vencimiento. Si la opción vence sin valor, entonces no se habría perdido mucho. Sin embargo, si hay un movimiento dramático en el subyacente, haciendo que la opción termine dentro del dinero (in the money), se podría tener un beneficio muy grande en relación con la inversión inicial. Veamos un ejemplo:

Ejemplo

La fecha de hoy es 5 de noviembre y el precio de la acción de la compañía MiCía es de \$666. El costo de una opción de compra con precio de ejercicio de \$680 y vencimiento el 22 de diciembre es de \$39. Se espera que la acción suba significativamente en diciembre. ¿Qué se tiene que hacer para beneficiarme si se cumple la expectativa?.

Comprar la acción

Supongamos que compro la acción a un precio de \$666. Supongamos que a mediados de agosto la acción sube a \$730. Tendré una ganacia de \$64 por acción. Aún más importante es el rendimiento obtenido, que esta dado por

$$\frac{730 - 666}{666} \times 100 = 9.6\%$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Comprar el call

Si se adquiere la opción de compra a \$39, entonces al vencimiento se podrá ejercer la opción call, pagando \$680 y recibiendo unas acciones con valor de \$730. He pagado \$39 y recibo \$50. Obteniendo un beneficio de \$11 por opción, en términos de rendimiento se tiene

$$\frac{\text{valor del activo al vencimiento} - \text{precio de ejercicio} - \text{costo del call}}{\text{costo del call}} \times 100$$

$$= \frac{730 - 680 - 39}{39} \times 100 = 28\%$$

Este es un ejemplo de apalancamiento. La opción fuera del dinero tiene un gran apalancamiento, un beneficio alto probable contra una pequeña inversión. La desventaja de este apalancamiento es que en una opción de compra es más probable que permanezca fuera del dinero y se pierda toda la inversión. Si la acción de MiCía permanece a \$666 entonces la inversión tendrá el mismo valor pero en la opción se pierde el 100% de la prima.

Los contratos con un apalancamiento alto son muy riesgosos para el emisor de la opción. El comprador sólo arriesga una cantidad pequeña, aunque es muy probable que la pierda, su pérdida está limitada a la prima inicial. Pero el emisor arriesga una gran pérdida contra la ganancia de un beneficio pequeño. El emisor tiene que pensarlo dos veces antes de hacer el trato a menos que pueda compensar el riesgo, comprando otros contratos. La compensación del riesgo al comprar otros contratos relacionados se conoce como cobertura.

El apalancamiento explica una de las razones de comprar opciones. Si se tiene un fuerte presentimiento acerca de la dirección del mercado entonces los derivados pueden ser explotados para obtener mejores rendimientos, si se está en lo correcto al comprar o vender el subyacente.

2.10 EJERCER ANTES DE LA FECHA DE VENCIMIENTO

Las opciones simples descritas anteriormente son ejemplos de opciones europeas porque el ejercicio sólo es permitido hasta la fecha de vencimiento. Algunos contratos permiten ser ejercidos en cualquier fecha antes del vencimiento, estos son llamados opciones americanas. Las opciones americanas dan al poseedor más derechos que la equivalente europea y, por lo tanto, tienen mayor valor. El principal punto de interés en las opciones americanas es cuándo ejercer la opción.

CAPITULO 3. VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

3.1 Introducción

En este capítulo se introduce el concepto del valor del dinero en el tiempo, el cual es fundamental en el desarrollo de la teoría de precios de activos. Asimismo, se presenta en forma breve una discusión sobre los modelos estocásticos de tasas de interés.

3.2 VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Uno de los conceptos fundamentales en finanzas es el del valor del dinero en el tiempo. De hecho, todas las fórmulas teóricas de valuación de activos utilizan este concepto implícita o explicítamente. Si hoy, al tiempo t, un individuo cuenta con B_t unidades monetarias, son varias las cosas que puede hacer ese dinero. Por ejemplo, puede guardarlas debajo del colchón o dentro del ropero, o bien invertirlas en una bolsa de valores. Si esto último es considerado por el individuo muy riesgoso, entonces puede prestarlo a alguien, a un vecino o compañero de trabajo, que voluntariamente asuma el riesgo del mercado, regresándole posteriormente, en T, su dinero, B_t, más una cantidad adicional, $\Delta B_t > 0$, llamada el interés (el cambio en B_t). Sin embargo, surge otra fuente de riesgo, el riesgo crédito (riesgo contraparte o de incuplimiento), es decir, el riesgo de que a quien se entrega el dinero no lo regrese, ya ni se digan los intereses. Los bancos son una alternativa para que el individuo preste su dinero y así reduzca su exposición al riesgo crédito, ya que estos intermediarios diversifican los recursos en diferentes fondos de inversión, además de existir mecanismos de protección para los ahorradores regulados por las autoridades financieras. Por otro lado, los bancos al tomar el dinero de muchos ahorradores, pueden invertir en proyectos que un sólo individuo no podría realizar. Por último, los bancos compiten por el dinero y dejan a las libres fuerzas del mercado, la oferta y la demanda de fondos, determinar la tasa de interés, por lo menos en teoría.

3.3 INTERES SIMPLE Y COMPUESTO

Se supone, por el momento, que la tasa de interés es constante en el tiempo y a todos los plazos.

Se dice que el interés es simple cuando éste se aplica en un solo período base sobre la cantidad que inicialmente se invirtió. Por ejemplo, si B_t es la cantidad inicial, r es la tasa de interés anualizada, y $T - t = 1$ es el período base igual a un año, entonces los intereses, al vencimiento, son $\Delta B_t = rB_t$ y el retorno de la inversión, $Q_{t,T}$, con interés simple al final del año está dado por

$$Q_{t,T} = B_t + \Delta B_t = B_t + rB_t = B_t(1 + r). \tag{3.1}$$

Mientras que el interés compuesto es aquel que se aplica conjuntamente sobre el interés y la inversión inicial en dos o más períodos base. Si en el ejemplo anterior, se consideran dos años, es decir, $T - t = 2$ entonces el retorno de la inversión con interés compuesto al final del segundo año está dado por:

$$\begin{aligned} Q_{t,T} =& B_t + \Delta B_t + \Delta(B_t + \Delta B_t) = B_t(1+r) + \Delta(B_t(1+r)) \\ =& B_t(1+r) + rB_t(1+r) = B_t(1+r)(1+r) = B_t(1+r)^{T-t}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

3.4 INTERES CONTINUAMENTE CAPITALIZABLE

Se supone ahora que durante $T-t$ se realizan m pagos de interés en m períodos de longitud $(T-t)/m$ a una tasa de $r(T-t)/m$. En este caso, al final de $T-t$ se tendrá un retorno igual a:

$$R_{t,T} = B_t\left(1 + \frac{r(T-t)}{m}\right)^m. \tag{3.3}$$

Si la frecuencia de estos m pagos de interés durante el año se incrementa y, en consecuencia, la longitud de los períodos de paga disminuye, entonces

$$R_{t,T} = B_t e^{T-t}. \tag{3.4}$$

cuando $m \to \infty$. En este caso $B_t e^{r(T-t)}$ representa el retorno en $T-t$ a una tasa de interés continuamente capitalizable r.

3.5 INTERES CONTINUAMENTE CAPITALIZABLE (ECUACIONES DIFERENCIALES)

Otra forma de obtener (3.4) es por medio de ecuaciones diferenciales. Se supone que se invierte una cantidad B_t al tiempo t. El incremento en B_t después de un tiempo $\mathrm{d}t$ se calcula como:

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t.$$

Equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}B_t}{B_t}\frac{1}{\mathrm{d}t} = r.$$

Es decir, el rendimiento (instantáneo) de la inversión por unidad de tiempo $\mathrm{d}t$ es constante e igual a r. La solución de esta ecuación diferencial está dada por

$$B_s = B_t e^{r(s-t)}, \quad s \geq t.$$

Esta ecuación relaciona el valor del dinero que tenemos hoy, t ,con su valor en el futuro s. De esta manera B_s proporciona el valor futuro de B_t. Recíprocamente, si B_T estará disponible hasta T, entonces su valor presente V_t, en $t < T$, está dado por

$$V_t = B_T e^{-r(T-t)}.$$

CAPITULO 4.
COMPORTAMIENTO DE LOS ACTIVOS

4.1. INTRODUCCION

En este capítulo se describe un modelo simple en tiempo continuo para acciones y otros instrumentos financieros, inspirado por el experimento del lanzamiento de una moneda. Esto nos lleva al mundo del cálculo estocástico y de los procesos de Wiener. A pesar de que existe una gran cantidad de teoría detrás de las ideas que se describen, se explicará todo de la manera más simple y accesible posible. Modelaremos el comportamiento de las acciones, tipos de cambio y bienes básicos, pero las ideas se aplican -también- dentro del mundo de los instrumentos de renta fija.

4.2. SIMILITUDES ENTRE ACCIONES, TIPOS DE CAMBIO, BIENES BASICOS E INDICES

Cuando se invierte en algo, ya sea en una acción, un bien básico, una pieza de arte o una carrera de caballos, la preocupación principal es tener un retorno satisfactorio sobre la inversión. Se entiende por retorno el incremento porcentual en el valor de la acción, junto con los dividendos acumulados en el mismo período.

$$\text{Retorno} = \frac{\text{Cambio en el valor de la acción} + \text{flujos de efectivo acumulados}}{\text{Valor original de la acción}} \tag{4.1}$$

Parte del trabajo de estimación de retornos para cada acción es calcular que tanta incertidumbre existe en el valor de la acción. En la siguiente sección se muestra que la aleatoriedad juega un papel importante dentro de los mercados financieros, y se empieza a construir un modelo para los retornos de las acciones incorporando dicha aleatoriedad.

4.3. RETORNOS DE ACTIVOS

Si se denota el valor de la acción en el día i por S_i entonces el retorno del día i al día $i+1$ está dado por

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}. \tag{4.2}$$

Se han ignorado los dividendos en este caso. Esto se permite, especialmente porque se pagan únicamente de dos a cuatro veces por año. La media de la distribución de retornos es

$$\bar{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} R_i, \tag{4.3}$$

y la desviación estándar muestral es

$$\sqrt{\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(R_i - \bar{R})^2}. \tag{4.4}$$

donde M es el número de retornos dentro de la muestra (uno menor que el número de precios de activos).

Suponiendo que los retornos empíricos son similares a una Normal estándar, entonces se asumen éstos como una variable aleatoria, distribuidos Normalmente con media y desviación estándar conocidas distintas de cero:

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \text{media} + \text{desviación estándar} \times \phi \tag{4.5}$$

donde ϕ es una variable normal estándar.

4.4. ESCALAS DE TIEMPO

Se denota al intervalo o incremento de tiempo por $\mathrm{d}t$. La media de los retornos es proporcional al tamaño de dicho intervalo. Esto es, entre más largo es el tiempo en cada observación de la muestra, mayor será el movimiento que la acción tendrá en promedio.

$$\text{Media} = \mu \mathrm{d}t, \tag{4.6}$$

para alguna μ la cual se supone que es constante.

Si por el momento no se considera la aleatoriedad, nuestro modelo es simplemente

$$\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \mathrm{d}t, \tag{4.7}$$

rescribiendo se obtiene que

$$S_{i+1} = S_i(1 + \mu \mathrm{d}t), \tag{4.8}$$

Si la acción comienza en S_0 en el tiempo $t = 0$ entonces después de transurrido un período de tiempo $\mathrm{d}t$ tenemos

$$S_1 = S_0(1 + \mu \mathrm{d}t), \tag{4.9}$$

Después de transcurridos dos períodos de tiempo, $2\mathrm{d}t$

$$S_2 = S_1(1 + \mu \mathrm{d}t) = S_0(1 + \mu \mathrm{d}t)^2, \tag{4.10}$$

y después de M intervalos de tiempo $t = M$, $\mathrm{d}t = T$

$$S_M = S_0(1 + \mu \mathrm{d}t)^M, \tag{4.11}$$

Esto es entonces

$$S_M = S_0(1 + \mu \mathrm{d}t)^M = S_0 e^{M Ln(1+\mu \mathrm{d}t)} \approx S_0 e^{\mu M \mathrm{d}t}. \tag{4.12}$$

El anterior resultado es importante por dos razones:

Primero, sin aleatoriedad la acción presenta un crecimiento exponencial, como el dinero en el banco. Segundo, el modelo es significativo cuando los intevalos de tiempo tienden a cero. Si hubiera elegido escalar la media de la distribución de los retornos con cualquier otra potencia de dt hubiera resultado un modelo trivial ($S_T = S_0$) o valores infinitos de la acción.

El segundo punto puede llevarnos a la alternativa de ajustar al componente aleatorio de los retornos. ¿Cómo se ajusta la desviación estándar de los retornos con el incremento de tiempo dt? De nuevo, considere qué pasa después de que $T/\mathrm{d}t$ incrementos de tiempo, cada uno de tamaño dt (i.e. después de un tiempo total T). Dentro de la raíz cuadrada en la expresión (4.4) existen un gran número de términos, T/t. Para que la desviación estándar sea finita mientras dt tiende a cero, cada uno de los elementos debe ser $O(\mathrm{d}t)$. Como cada término es el cuadrado de un retorno, la desviación estándar de los retornos de la acción sobre un periodo de tiempo dt debe ser $O(\mathrm{d}t^{\frac{1}{2}})$, $O(h)/h \to$ cte. , cuando $h \to 0$:

$$\text{Desviación estándar} = \sigma \mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}, \tag{4.14}$$

donde σ es un parámetro que mide la cantidad de aleatoriedad. Entre más grande es este término, más incierto es el retorno de la acción. Por el momento se asumirá como una constante. Incluyendo esto dentro del modelo

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \phi \mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}, \tag{4.15}$$

Se puede escribir la ecuación (4.15) como

$$S_{i+1} - S_i = \mu S_i \mathrm{d}t + \sigma S_i \phi \ \mathrm{d}t^{\frac{1}{2}}. \tag{4.16}$$

El lado izquierdo de la ecuación es el cambio en el precio de la acción del tiempo i al $i+1$. La parte de la derecha es el "modelo ". Podemos pensar en esta ecuación como el modelo para la caminata aleatoria del precio. Se conoce el valor de la acción hoy, pero el valor que tendrá mañana es desconocido. De acuerdo con (4.16), se distribuye con respecto al valor presente.

4.4.1. TASA DE CAMBIO

El parámetro μ se denomina tasa de cambio, el cambio esperado o la tasa de crecimiento del activo. Estadísticamente, es difícil de medir ya que la media se ajusta al parámetro dt y puede estimarse con

$$\mu = \frac{1}{M\,\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{M} R_i, \tag{4.17}$$

La unidad de tiempo que generalmente se utiliza es el año, en donde a μ se le denomina la tasa de cambio anualizada.

4.4.2. VOLATILIDAD

Al parámetro σ se le conoce como la volatilidad de la acción, y se estima mediante

$$\sqrt{\frac{1}{(M-1)\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{M}(R_i - R)^2}. \tag{4.18}$$

De nuevo, la volatilidad se da en términos anualizados.

La volatilidad es el valor más importante de la teoría de derivados. Debido a su ajuste con el tiempo, la tasa y la volatilidad tienen distintos efectos en la trayectoria del activo. La tasa no es aparente en períodos cortos de tiempo donde domina la volatilidad. En períodos más largos de tiempo, como por ejemplo décadas, la tasa de volatilidad adquiere mayor importancia.

4.5. PROCESO DE WIENER

Hasta ahora, tenemos un modelo que le permite a la acción tomar cualquier valor después de un intervalo de tiempo. Este es un avance pero aún no se ha llegado a tiempo continuo. Todavía tenemos un modelo de tiempo discreto. Esta sección es una breve introducción al tiempo continuo de ecuaciones como (4.15).

Se puede pensar en $\mathrm{d}W$ como una variable aleatoria determinada por una distribución Normal con media cero y varianza $\mathrm{d}t$:

$$E[\mathrm{d}W] = 0 \;\text{ y }\; E[\mathrm{d}W^2] = \mathrm{d}t.$$

Esto no es exactamente lo que se pretende, pero está cercano a la idea correcta. A esto se le denomina un proceso de Wiener. El punto importante es que podemos construir una teoría en tiempo contínuo utilizando un porceso de Wiener en lugar de distribuciones Normales y tiempo discreto.

4.6. EL MODELO MAS ACEPTADO PARA ACCIONES, TIPOS DE CAMBIO, BIENES BASICOS E INDICES

Nuestro modelo de precios de acciones en tiempo continuo, utilizando la notación de un proceso de Wiener, se puede escribir como

$$dS = \mu S_t dt + \sigma S dW_t. \tag{4.19}$$

Esta es la primera ecuación diferencial estocástica. Es un modelo en tiempo continuo de precios de los activos. Este es el modelo más aceptado para acciones, tipo de cambio, bienes básicos e índices, y el fundamento de la teoría financiera.

CAPITULO 5.
ELEMENTOS DEL CALCULO ESTOCASTICO

5.1. INTRODUCCION

En términos generales, el comportamiento de las variables financieras no es predecible y, en consecuencia, el adecuado modelado de las mismas requiere de variables aleatorias, o más generalmente de procesos estocásticos. Con respecto a lo anterior, el cálculo estocástico es una herramienta que ha mostrado ser de gran utilidad en el desarrollo de modelos matemáticos de valuación de activos. El objetivo de este capítulo es presentar en forma accesible e intuitiva dicha herramienta, de tal manera que el lector se familiarice con los conceptos y técnicas del cálculo estócastico, así como con la aplicación de los mismos en el estudio de los fenómenos financieros.

En la actualidad, la mayor parte de la literatura de investigación en finanzas tienen un contenido importante en herramientas del cálculo estocástico y el rigor matemático es la tendencia que prevalece en la teoría financiera. Sin embargo, la intuición e interpretación de los resultados debe acompañar, en todo momento, al marco teórico por sofisticado que éste sea.

5.2. MOTIVACION

Considere el experimento aleatorio $\mathcal{E}$ de lanzar una moneda. En este caso, el conjunto de posibles resultados, o espacio muestral, está dado por $\Omega = \{a, s\}$, donde a=águila y s=sol. Sea $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{s\}, \Omega\}$ el conjunto de todos los posibles eventos, es decir, todos los subconjuntos de Ω (también llamado el conjunto potencia de Ω). Defina ahora una función $P : \Omega \to [0, 1]$, de tal manera que $P(\{a\}) = P(\{b\}) = 1/2$ junto con $P(\Omega) = 1$. En este caso, la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ define un espacio de probabilidad asociado a $\mathcal{E}$. Suponga que se realizan n repeticiones independientes del experimento. Cada vez que el resultado del lanzamiento sea águila se gana $1/\sqrt{n}$ y cada vez que el resultado sea sol se pierde $1/\sqrt{n}$. Sea X_i la variable aleatoria que representa la ganancia o pérdida en el i-ésimo lanzamiento. Es decir, $X_i(a) = 1/\sqrt{n}$ y $X_i(s) = -1/\sqrt{n}$. En consecuencia, $P\{X_i = 1/\sqrt{n}\} = P\{X_i = -1/\sqrt{n}\} = 1/2$. En este caso, se cumple que:

$$\mathrm{E}[X_i] = 0, \quad \mathrm{Var}[X_i] = \mathrm{E}\left[X_i^2\right] = 1/n, \qquad i = 1, 2, ...n.$$

Asimismo, si $1 \leq i < j \leq n$, se cumple también que:

$$\mathrm{E}[X_i X_j] = 0$$

debido a la independencia estocástica de las variables. Es importante destacar que el resultado de cada experimento es irrelevante del pasado. En otras palabras, si resultan, por ejemplo, i águilas seguidas, en los primero i lanzamientos, ésto no afectará el resultado del lanzamiento $i+1$. Si se define $X_0 = 0$, el procedimiento descrito puede verse como una caminata aleatoria discreta y simétrica que parte de cero y que con la misma probabilidad se da un paso de longitud 1 a la derecha o un paso de longitud 1 a la izquierda.

Si se denota ahora a S_n como la ganancia acumulada hasta el n-ésimo lanzamiento, entonces se puede escribir

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{5.1}$$

donde el valor inicial $S_0 = X_0$ es cero. En este caso, el resultado de la ganancia acumulada sí depende del pasado. Específicamente, la esperanza y varianza incondicionales de S_n están dadas por:

$$\mathrm{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[X_i\right] = 0$$

y

$$\mathrm{Var}[S_n] = E\left[S_n^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} X_i X_j\right] = \sum_{i=1}^{n} E\left[X_i^2\right] = 1.$$

Sin embargo, si se supone ahora que ya han ocurrido $n-1$ lanzamientos. Claramente, se puede utilizar esta información para calcular la esperanza (condicional) de la ganancia acumulada en el lanzamiento n. En este caso, la esperanza condicional de S_n dada la ganancia acumulada de los $n-1$ primeros lanzamientos es

$$E[S_n|S_{n-1}] = E[S_n|S_0, S_1, ..., S_{n-1}] = S_{n-1}. \tag{5.2}$$

En efecto, basta notar que

$$P\left\{S_n = S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}\middle|S_{n-1}\right\} = P\left\{S_n = S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}\middle|S_0, S_1, ..., S_{n-1}\right\} = 1/2 \tag{5.3}$$

y

$$P\left\{S_n = S_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\middle|S_{n-1}\right\} = P\left\{S_n = S_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\middle|S_0, S_1, ..., S_{n-1}\right\} = 1/2 \tag{5.4}$$

Por lo tanto,

$$\mathrm{E}[S_n|S_{n-1}] = 1/2\left(S_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + 1/2\left(S_{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = S_{n-1}.$$

Equivalentemente, y en forma más simple,

$$\begin{aligned} E[S_n|S_{n-1}] &= E[S_{n-1} + X_n|S_{n-1}] = E[S_{n-1}|S_{n-1}] + E[X_n|S_{n-1}] \\ &= S_{n-1} + 0 = S_{n-1}. \end{aligned}$$

5.3. PROPIEDADES DE MARTINGALA Y DE MARKOV

Los resultados de la sección anterior son muy importantes en el modelado del comportamiento de muchas variables financieras. En la ecuación (5.2), la esperanza condicional de la variable aleatoria S_n dados sus valores pasados depende únicamente del valor inmediato anterior S_{n-1}. Esto significa que la esperanza condicional de las ganancias en el siguiente lanzamiento, es únicamente la cantidad con que se cuenta en ese momento. En este caso, se dice que el juego es justo. A esto se le conoce como la propiedad de Martingala. Por otro lado, en virtud de (5.3) y (5.4), el juego no tiene memoria mas allá de donde se encuentra en este momento. Esto se le llama propiedad de Markov. Estas propiedades son de gran importancia para modelar el comportamiento de muchas variables financieras y económicas, como se verá mas adelante.

5.4. CAMINATA ALEATORIA

El siguiente proceso estocástico se define para cada $n \in N$. Se supone que se llevan a cabo n lanzamientos en una unidad de tiempo, de tal manera que estos se realizan en intervalos de tiempo de magnitud $1/n$. La ganancia acumulada en el primer, segundo y n-ésimo lanzamiento, respectivamente, se definen como:

$$\begin{aligned} W_n\left(\frac{1}{n}\right) &= X_1, \\ W_n\left(\frac{2}{n}\right) &= W_n\left(\frac{1}{n}\right) + X_2, \\ &\vdots \\ W_n(1) &= W_n\left(\frac{n-1}{n}\right) + X_n. \end{aligned} \tag{5.5}$$

En general, se satisface que

$$W_n\left(\frac{i}{n}\right) = S_i. \tag{5.6}$$

donde, como antes, $S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i$. Se supone además que $W_n(0) = 0$ para toda n. Observe ahora que en virtud de (5.5) y dado que $\mathrm{E}[S_n] = 0$ y $\mathrm{Var}[S_n]$=1, se tiene que

$$W_n(1) = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}. \tag{5.7}$$

Por el Teorema del Límite Central, si $n \to \infty$,

$$W_n(1) = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

5.5 VARIACION CUADRATICA MEDIA

El concepto de variación cuadrática media es fundamental en el desarrollo del cálculo estocástico. Este concepto es imprescindible en la formulación de las reglas empíricas que han de cumplir las cantidades diferenciales de naturaleza estocástica. La variación cuadrática media de W_n se define mediante:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[W_n\left(\frac{i}{n}\right) - W_n\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}(S_i - S_{i-1})^2 \tag{5.8}$$

Por otro lado, observe que

$$|S_i - S_{i-1}| = 1/\sqrt{n}.$$

A partir de (5.8) y del resultado anterior se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n}\left[W_n\left(\frac{i}{n}\right) - W_n\left(\frac{i-1}{n}\right)\right]^2 = 1. \tag{5.9}$$

5.0 MOVIMIENTO BROWNIANO

En la sección anterior no se consideró el tiempo, de aquí en adelante el tiempo entre lanzamientos jugará un papel importante. Se supone que se llevan a cabo n lanzamientos en un tiempo t, de tal manera cada lanzamiento se realiza cada t/n unidades de tiempo. El monto de la apuesta también es modificado, ya no será 1, sino $\sqrt{t/n}$. En este caso, $\mathrm{E}[S_n] = 0$ y $\mathrm{Var}[S_n] = t$. Este es el único cambio de escala en las apuestas que permitirá que la caminata aleatoria se mantenga finita en un tiempo finito. Con cualquier otra escala la caminata aleatoria se tornaría infinita en un tiempo finito, o en el límite no existiría ningún movimiento.

Este nuevo experimento mantiene las propiedades de Martingala y de Markov. La ganancia estandarizada en el primero, segundo y n-ésimo lanzamiento está dada, respectivamente por:

$$\begin{aligned}
W_n\left(\frac{t}{n}\right) &= X_1, \\
W_n\left(\frac{2t}{n}\right) &= W_n\left(\frac{t}{n}\right) + X_2, \\
&\vdots \\
W_n(t) &= W_{n-1}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) + X_{n-1} = S_n
\end{aligned}$$

Así,

$$W_n(t) = \frac{S_n - \mathrm{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}\sqrt{t} \longrightarrow W_t \equiv \mathcal{N}(0,t) \text{ cuando } n \longrightarrow \infty$$

es decir, $W_n(t)$ converge en distribución a una variable aleatoría W_t normal con media cero y varianza t. Las trayectorias son continuas pues el movimiento Browniano es el límite en tiempo continuo de la caminata aleatoria discreta. Las propiedades de Martingala y de Markov son heredadas al movimiento Browniano Finalmente, $W_t - W_s = W_{t-s}$ se distribuye como una Normal con media cero y varianza $t-s$. Al considerar el tiempo, la variación cuadrática media satisface

$$\sum_{i=1}^{n}\left[W_n\left(\frac{it}{n}\right) - W_n\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}(S_i - S_{i-1})^2.$$

Pero

$$|S_i - S_{i-1}| = \sqrt{t/n}.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[W_n\left(\frac{it}{n}\right) - W_n\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\right]^2 = t. \tag{5.8}$$

5.7 UN PRIMER EJEMPLO DE INTEGRACION ESTOCASTICA

A continuación, se determina el límite V de la variación cuadrática media de la sucesión de variables aleatorias en términos de convergencia en error cuadrático medio cuando $n \to \infty$. Es decir, si

$$V_n = \sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$$

se tiene que encontrar V tal que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - V\right]^2 = 0. \tag{5.9}$$

En esta expresión, hay dos cuadrados: uno pertenece a la variable aleatoria V_n y el otro al tipo de límite que se está usando. Se propone como posible canditato del límite en cuestión a

$$V = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right].$$

En efecto, si se recuerda que $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ y se toman esperanzas, se tiene en vista de (5.8), que la cantidad efectivamente

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2\right] = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2] = \sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}) = t$$

es un buen candidato. Además, esta cantidad es independiente de n. En consecuencia,

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 - t\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^4 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(\Delta W_{t_i})^2(\Delta W_{t_j})^2 + t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2\right\}$$

donde $\Delta W_{t_i} = W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$. Considera ahora el lado derecho de la ecuación anterior. Dado los incrementos son independientes,

$$\mathrm{E}\left[(\Delta W_{t_i})^2(\Delta W_{t_j})^2\right] = (t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

y como

$$\mathrm{E}\,(\Delta W_{t_i})^4 = 3(t_i - t_{i-1})^2,$$

se tiene que

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 = 3\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1})$$

$$+t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1}).$$

Ahora se utiliza el hecho de que $t_i - t_{i-1} = t/n$, para toda i, es decir, todos los intervalos son del mismo tamaño, se tienen entonces los siguientes resultados:

$$\sum_{i=1}^{n} 3(t_i - t_{n-1})^2 = n3\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{3t^2}{n},$$

$$\sum_{1\leq j<n\leq n}(t_i - t_{i-1})(t_j - t_{j-1}) = \binom{n}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{t}{n}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2n}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2 - t\right]^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3t^2}{n} + t^2 - \frac{t^2}{n} + t^2 - 2t^2\right) = 0.$$

Lo anterior sugiere escribir el límite V como

$$V = \int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\Delta W_{t_i})^2,$$

donde el límite se interpreta de acuerdo a (5.9). En otras palabras,

$$\int_0^t (\mathrm{d}W_s)^2 = t.$$

Equivalentemente,

$$(\mathrm{d}W_t)^2 = \mathrm{d}t.$$

CAPITULO 6. MODELO DE BLACK-SCHOLES

6.1 INTRODUCCION

En este capítulo se inicia con un modelo de ecuaciones diferenciales estocásticas para explicar la correlación que existe entre una acción y una opción y con el fin de diseñar un portafolio libre de riesgo. Supondremos que no existe arbitraje al igualar los retornos de los portafolios con la tasa libre de riesgo.

6.2 UN PORTAFOLIO LIBRE DE RIESGO

En el capítulo 2 se describieron algunas características de las opciones y de los mercados de opciones. Se introdujo la idea del call(compra) y del put(venta) de las opciones, entre otros. El valor de un call (compra) de una opción es claramente una función de varios parámetros en el contrato, tales como, el precio de ejercicio K y al plazo de vencimiento $T - t$, donde T es la fecha de vencimiento y t es la fecha corriente. El valor también dependerá de propiedades de la activo subyacente, tales como su precio y sus cambios en rendimiento y volatilidad, así como la tasa de interés libre de riesgo. Podemos escribir el valor de una opción como:

$$c(S, t; \sigma, \mu; K, T; r) \tag{6.1}$$

Note que los puntos y coma separan los diferentes tipos de variables y parámetros:

- S y t son variables;
- σ y μ son parámetros asociados con el precio de la activo o bien subyacente;
- K y T son parámetros asociados con el detalle del contrato en particular;
- r es un parámetro asociado con la unidad monetaria en el cual el activo esta tasado

No mencionaremos todos los parámetros, excepto cuando sea importante. Por el momento utilizaremos $c(S, t)$ para denotar el valor de la opción.

Una simple observación es que el precio de la opción subirá si el precio del subyacente sube y bajará si el subyacente baja. Esto es claro porque un call tiene un mayor pago a medida que aumente el valor del subyacente al vencimiento. Esto es un ejemplo de correlación ente dos instrumentos financieros, en este caso la correlación es positiva. Un put y su subyacente tienen una correlación negativa.

Utilizaremos Π para denotar el valor de un portafolio con una posición larga de opciones y con una posición corta de alguna cantidad Δ del bien subyacente

$$\Pi = c(S, t) - \Delta S \tag{6.2}$$

El primer término de la derecha es la opción y el segundo término es la posición corta de alguna cantidad Δ. Note el signo negativo del segundo término. Por el momento Δ la tomaremos como una constante escogida por nosotros. Se asumirá que el bien subyacente sigue un proceso estocástico lognormal.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{6.3}$$

Es natural preguntar como el valor del portafolio cambia a través del tiempo de t a $t + dt$. El cambio en el valor del portafolio esta dado por una parte por los cambios en el valor de la opción y por otra en el cambio del subyacente.

$$d\Pi = dc - \Delta dS. \tag{6.4}$$

Note que Δ no cambió durante un período; no podemos anticiparnos al cambio en S. Del lema de Itô tenemos:

$$dc = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt. \tag{6.5}$$

Por tanto el cambio en el precio del portafolio esta dado por:

$$d\Pi = \frac{\partial c}{\partial t}dt + \frac{\partial c}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}dt - \Delta dS. \tag{6.6}$$

6.3 ELIMINACION DEL RIESGO: LA COBERTURA DELTA

La ecuación(6.6) contiene dos tipos de términos, el determinístico y el aleatorio. Los términos determinístico contienen dt y el aleatorio dS. Pretendamos por el momento que conocemos el valor de c y sus derivadas entonces conocemos todo acerca de (6.6) exccepto el valor de dS. Y esta cantidad nunca la conoceremos por adelantado.

El término aleatorio es el riesgo del portafolio. Se puede reducir o eliminar el riesgo escogiendo cuidadosamente a Δ.

$$\left(\frac{\partial c}{\partial S} - \Delta\right) dS. \tag{6.7}$$

Si escogemos

$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial S} \tag{6.8}$$

Entonces dicho término se hace cero.

Cualquier reducción aleatoria es generalmente un término de cobertura, la perfecta eliminación del riesgo, al analizar la correlación entre dos instrumentos (es el caso de una opción y su subyacente) es generalmente llamada cobertura delta.

La cobertura delta es un ejemplo de una estrategia de cobertura dinámica. De un periodo a otro la cantidad $\partial c/\partial S$ cambia, ya que ,es igual a c, una función con cambios en las variables S y t. Este concepto de cobertura perfecta debe ser equilibrada continuamente.

6.4 SIN ARBITRAJE

Después de haber escogido el valor de Δ como sugerimos anteriormente, tenemos que el cambio en el valor del portafolio esta dado por lo siguiente:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right) dt \tag{6.9}$$

Este cambio es completamente libre de riesgo. Si existiera un cambio libre de riesgo $d\Pi$ en el valor del portafolio Π, entonces obtendríamos el mísmo rendimiento equivalente que si se hubiera invertido el capital a una tasa libre de riesgo.

$$d\Pi = r\Pi dt \tag{6.10}$$

Este es un ejemplo del principio de no arbitraje. Para observar esto, consideremos el hecho de qué pasaría si la tasa de rendimiento del portafolio fuera, primero, más grande y después fuera menor que la tasa libre de riesgo. Si se pudiera garantizar que el rendimiento fuera más grande que r, que el portafolio con cobertura delta, entonces lo que se haría es pedir prestado al banco y pagar una tasa de interes r, invertiríamos en el portafolio de aciones/opciones y ganaríamos un beneficio. Si, por otra parte, el rendimiento fuera menor que la tasa libre de riesgo entonces no debemos usar la cobertura delta e invertir el dinero en el banco.

6.5 ECUACION DE BLACK-SCHOLES

Sustituyendo (6.2), (6.8), y (6.9) en (6.10) obtenemos que

$$\left(\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\right) dt = r\left(c - S\frac{\partial c}{\partial S}\right) dt. \tag{6.11}$$

Dividiendo por dt y reescribiendo obtenemos que

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0. \tag{6.12}$$

está es la ecuación de Black-Scholes.

La ecuación de Black-Scholes es una ecuación diferencial parcial lineal parabólica. De hecho casi todas las ecuaciones diferenciales parciales en finazas tienen forma similar. Generalmente son lineales, esto significa que si se tienen dos soluciones entonces la suma de ellas también es una solución. Las ecuaciones financieras también son generalmente parabólicas, éstas se relacionan con la ecuación de difusión de calor. Un ventaja de esto es que las ecuaciones se pueden resolver numéricamente.

La ecuación de Black-Scholes contiene todas las variables que determinan el valor del contrato y los parámetros tales como el activo subycente, el tiempo, la volatilidad, pero no se hace mención de la tasa de cambio μ. Cualquier dependencia sobre la tasa de cambio se anuló mientras eliminamos el componente dW del portafolio. El argumento económico para esto es que podemos perfectamente cubrir la opción con el subyacente y no debemos tomar un riesgo inecesario. Únicamente las tasa de rendimiento libre de riesgo aparece en la ecuación. Esto significa que si estamos de acuerdo con la volatilidad del activo entonces igualmente estamos de acuerdo con el valor de la opción aunque tengamos diferentes estimadores de la tasa de cambio.

Otra forma de ver el concepto de cobertura es preguntando qué pasa si tomamos un portafolio que tiene solamente una acción, una cantidad Δ y efectivo. si Δ es la derivada parcial de alguna opción entonces el portafolio tendrá un monto al vencimiento que es igual al pago de la opción. En otras palabras, podemos usar el mismo argumento del modelo Black-Scholes para replicar la opción con sólo comprar y vender el activo subyacente, esta idea se conoce como mercado completo.

6.6 HIPOTESIS DEL MODELO DE BLACK-SCHOLES

- El subyacente sigue una distribución lognormal. Esto no es completamente necesario. El "factor "σ no necesariamente tiene que ser constante para encontrar soluciones, pero debe ser dependiente del tiempo.

- La tasa de interés libre de riesgo es una función del tiempo. Esta restricción sólo nos ayuda a encontrar soluciones explícitas. Si r fuera constante nos facilitaría el trabajo.

- No existen dividendos sobre el subyacente.

- Cobertura delta se hace en tiempo continuo. Esto definitivamente es imposible. La cobertura debe hacerse en tiempo discreto. Frecuentemente el tiempo entre recoberturas dependerá del nivel de los costos de transacción en el mercado del subyacente. Para costos más pequeños lo más frecuente es la recobertura.

- No existen costos de transacción sobre el subyacente. La dinámica de la cobertura delta en realidad es costosa, ya que existe un spread de oferta y demanda sobre el subyacente.

- No existen oportunidades de arbitraje. Cuando existen oportunidades de arbitraje; mucha gente gana dinero al encontralas, es sumamente importante subrayar que excluimos el modelo que dependa del arbitraje. El arbitraje surge cuando dos flujos de efectivo idénticos tienen diferentes valores.

6.7 CONDICIONES FINALES

Se debe especificar el valor de la opción c como una función del subyacente en la fecha de vencimiento T. Esto es, tendremos que especificar el valor $c(S,T)$, para el pago.

Por ejemplo, si tenemos un opción call entonces sabemos que:

$$c(S,T) = \text{máx}(S_T - K, 0). \tag{6.13}$$

Para un put tenemos que:

$$c(S,T) = \text{máx}(K - S_T, 0). \tag{6.14}$$

CAPITULO 7. VALORES ESPERADOS Y LA FORMULA DE BLACK-SCHOLES

7.1 INTRODUCION

En este capítulo se calcula de manera exhaustiva la fórmula de Black-Scholes en términos de valores esperados. Se supone que el subyacente es una acción que sigue un Proceso Markoviano de Difusión, cuya parte estocástica es un proceso de Wiener.

7.2 FUNCION DE DENSIDAD DEL VALOR DEL SUBYACENTE

Enseguida se deduce la función de densidad del valor del subyacente en la fecha de vencimiento.

Suponga que la variable subyacente es una acción y sigue un proceso Markoviano de difusión (movimiento Browniano Geométrico):

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{7.1}$$

donde W_t es un proceso de Wiener , es decir, W_t tiene incrementos normales independientes con $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] = 0$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_t] = \mathrm{E}[(\mathrm{d}W_t)^2] = \mathrm{d}t$. En este caso se puede escribir

$$\mathrm{d}W_t = \mathcal{E}\sqrt{\mathrm{d}t} \qquad \text{con} \qquad \mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{7.2}$$

Dado que $\mathrm{E}[\mathrm{d}W_t] \approx \mathrm{d}W_t$ y $\mathrm{Var}[\mathrm{d}W_t] = \mathrm{E}[(\mathrm{d}W_t)^2] \approx (\mathrm{d}W_t)^2$, las siguientes reglas para el cálculo estocástico son válidas

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = 0, \qquad \mathrm{d}W_t\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0. \tag{7.3}$$

En virtud de (7.2), con $\mathrm{d}t = T - t$, se puede escribir que

$$\frac{S_T - S_t}{S_t} \sim \mathcal{N}(\mu(T-t), \sigma^2(T-t)). \tag{7.4}$$

Considere ahora una función $G = G(S_t, t)$. La expansión en una serie de Taylor hasta términos de segundo orden conduce a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G =& \frac{\partial G}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 + 2\frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial t}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right).\end{aligned} \tag{7.5}$$

La sustitución de (7.1) y (7.3) en (7.5) conduce a

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G =& \frac{\partial G}{\partial S_t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t) + \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2 + 2\frac{\partial^2 G}{\partial S_t\partial t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right) \\ =& \left(\frac{\partial G}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t.\end{aligned} \tag{7.6}$$

Observe que si $G = \log S_t$, entonces

$$\frac{\partial G}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}, \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial G}{\partial t} = 0. \tag{7.7}$$

En consecuencia,

$$\mathrm{d}\log S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \tag{7.8}$$

Para el caso discreto, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta \log S_t &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma \Delta W_t, \\
\log S_t - \log S_0 &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma \Delta W_t; \qquad \Delta W_t = \mathcal{E}\sqrt{\Delta t} \\
\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t) + \sigma \Delta W_t.
\end{aligned}$$

Para $t = 0$, se tiene

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma \Delta W_t.$$

De lo anterior se sigue que

$$\log S_t - \log S_0 = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T\right). \tag{7.9}$$

Bajo el supuesto de neutralidad al riesgo, se sigue que

$$\mu = r. \tag{7.10}$$

Considere una variable aleatoria normal $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es bien conocido que la función de densidad, $N(\epsilon)$, de $\mathcal{E}$ está dada por

$$N(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}. \tag{7.11}$$

Considere ahora una variable aleatoria de la forma

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left((r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)\right). \tag{7.12}$$

En este caso, se dice que $S_T/S_0 > 0$ tiene una distribución lognormal con media $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T$ y varianza $\sigma^2 T$. Por lo anterior,

$$\mathcal{E} = \frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{7.13}$$

En este caso,

$$S_T \equiv g(\epsilon) = S_0 \exp\left\{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\right\}$$

Si se define ahora

$$g^{-1}(S_T) \equiv \frac{\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \tag{7.14}$$

la función de densidad de S_T está dada por

$$f_{S_T}(s) = N_\epsilon(g^{-1}(S_T))\left|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(S_T)}{\mathrm{d}S_T}\right|. \tag{7.15}$$

A continuación se muestra que,

$$f_{S_T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}. \tag{7.16}$$

Para ello, note que

$$N(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}, \qquad \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Sea $S_T = S_0 \exp\left\{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right\} \Rightarrow g^{-1}(S_T) \equiv \dfrac{\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$;

$$\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim \mathcal{N}\left((r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)\right).$$

La función de densidad de S_T está dada por

$$f_{S_T}(s) = N_\epsilon(g^{-1}(S_T))|\frac{\mathrm{d}g^{-1}(S_T)}{\mathrm{d}S_T}|.$$

Entonces, $N(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \quad \Rightarrow N_\epsilon(g^{-1}(S_T)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{S}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}$

Por lo que,

$$f_{S_T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\left|\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\frac{1}{\frac{S_T}{S_0}}\frac{1}{S_0}\right|$$

Por lo tanto

$$f_{S_T}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}.$$

Observe ahora que la media de S_T satisface

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T) &= \int_0^\infty s f_{s_T}(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty s\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}S_0 e^{\epsilon\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon,
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

$$
\text{Note que, } \mathcal{E} = \frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad\Rightarrow\quad S_T = S_0 e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} \tag{7.18}
$$

Sea $S_T = s$. Se Calcula la diferencial de s, esto es

$$
\mathrm{d}s = S_0 e^{\epsilon\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon. \tag{7.19}
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T) &= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-2\sigma\sqrt{T}\epsilon+\sigma^2T)}e^{\frac{1}{2}\sigma^2T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{T})^2}e^{rT}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0e^{rT}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u \\
&= S_0e^{rT},
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

donde u se ha escogido como:

$$
u = \epsilon - \sigma\sqrt{T}. \tag{7.21}
$$

El segundo momento de S_T se calcula como sigue:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_T^2) &= \int_0^{\infty} s^2 f_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \frac{s^2}{\sqrt{2\pi T}\sigma s} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^{\infty} \frac{s}{\sqrt{2\pi T}\sigma} \exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{2[\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T]}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2+2\sigma\sqrt{T}\epsilon} e^{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\sigma\sqrt{T}\epsilon+4\sigma^2T)} e^{2[\sigma^2T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T]}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\sigma\sqrt{T}\epsilon+4\sigma^2T)} e^{2\sigma^2T+2rT-\sigma^2T}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-2\sigma\sqrt{T})^2} e^{\sigma^2T+2rT}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-2\sigma\sqrt{T})^2}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}w^2}\mathrm{d}w \\
&= S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT} \\
&= S_0^2 e^{[\sigma^2+2r]T},
\end{aligned}
\tag{7.22}
$$

donde

$$w = \epsilon - 2\sigma\sqrt{T}.$$

En consecuencia,

$$\mathrm{Var}(S_T) = \mathrm{E}(S_T^2) - \mathrm{E}[(S_T)]^2 = S_0^2 e^{\sigma^2T+2rT} - S_0^2 e^{2rT} = S_0^2 e^{2rT}(e^{\sigma^2T}-1). \tag{7.23}$$

El precio de una opción de compra de tipo europeo en $t=0$, $c = c(S_0, T, r, \sigma)$ está dado por

$$c = e^{-rT}\mathrm{E}[\max(S_T-K, 0)], \tag{7.24}$$

donde K es el precio de ejercicio. Así pues,

$$
\begin{aligned}
c =& e^{-rT}\mathrm{E}[\max(S_T-K,0)] \\
=& e^{-rT}\int_{-\infty}^{\infty}\max(S_T-K,0)f_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{K}^{\infty}(s-K)f_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{s>K}(s-K)f_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{s>K}sf_{S_T}(s)\mathrm{d}s-e^{-rT}\int_{s>K}Kf_{S_T}(s)\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}S_0\int_{s>K}s\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&-e^{-rT}\int_{s>K}K\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
=& e^{-rT}\int_{s>K}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&-e^{-rT}S_0\int_{s>K}\frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma s}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log\left(\frac{s}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
\tag{7.25}
$$

Recordemos que $\mathcal{E}=\frac{\log\left(\frac{S_T}{S_0}\right)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ entonces,

$$S_T=S_0e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}.$$

El subindice de la integral es $s>K \quad\Rightarrow\quad S_0\exp\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T>K$.

Note que,

$$\mathrm{d}s=S_0e^{\epsilon\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}\sigma\sqrt{T}\mathrm{d}\epsilon.$$

Por lo tanto, esto nos conduce a

$$
\begin{aligned}
c =& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi T}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} \sigma\sqrt{T} d\epsilon \\
&- e^{-rT} K \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} S_0 e^{\sigma\sqrt{T}\epsilon+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} d\epsilon \\
&- e^{-rT} K \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-2\sigma\sqrt{T}\epsilon+\sigma^2 T)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 T+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} d\epsilon \\
&- e^{-rT} K \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon \\
=& e^{-rT} S_0 \int_{\left\{\epsilon-\sigma\sqrt{T} > \frac{\log(K/S_0)-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-\sigma\sqrt{T})^2} e^{rT} d\epsilon \\
&- e^{-rT} K \int_{\left\{\epsilon > \frac{\log(K/S_0)-(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} d\epsilon.
\end{aligned}
$$

Note que en la cuarta línea de la ecuación anterior $s > K$ (ecuación 7.25). Esto es,

$$
S > K \quad \Rightarrow \quad S_0 e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} > K \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} e^{\mathcal{E}\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T} > \dfrac{K}{S_0} \\ \text{aplicando el logaritmo, se tiene} \\ \mathcal{E}\sigma\sqrt{T} + (r - \dfrac{1}{2}\sigma^2)T > \ln \dfrac{K}{S_0} \end{array} \right.
$$

Por lo tanto,

$$
\mathcal{E} > \frac{\log\left(\frac{K}{S_0}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
c =& S_0 \int_{\left\{-\infty<u<\frac{\log(S_0/K)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} \mathrm{d}u \\
& - e^{-rT} K \int_{\left\{-\infty<\epsilon<\frac{\log(S_0/K)+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon \\
=& S_0 N(d_1) - e^{-rT} K N(d_2).
\end{aligned} \tag{7.26}
$$

Por lo tanto,

$$c = S_0 N(d_1) - e^{-rT} K N(d_2),$$

donde,

$$d_1 = d_1(S_0, T, K, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{7.27}$$

y

$$d_2 = d_2(S_0, T, K, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \tag{7.28}$$

La función $N(d)$ es la función de distribución de $\mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir,

$$\Pr\{\mathcal{E} \le d\} = N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} \mathrm{d}\epsilon = 1 - N(-d). \tag{7.29}$$

A través de un procedimiento similar se puede mostrar que si $p = p(S_0, T, K, r, \sigma)$ es el precio de una opcion de venta de tipo europeo, entonces

$$p = e^{-rT} K N(-d_2) - S_0 N(-d_1). \tag{7.30}$$

A partir de (7.29) y (7.25) se puede establecer la condición de paridad de venta-compra

$$
\begin{aligned}
p + S_0 &= e^{-rT} K N(-d_2) - S_0 N(-d_1) + S_0 \\
&= e^{-rT} K N(-d_2) + S_0(1 - N(-d_1)) \\
&= e^{-rT} K(1 - N(d_2)) + S_0 N(d_1) \\
&= -e^{-rT} N(d_2)) + S_0 N(d_1) + e^{-rT} K \\
&= c + e^{-rT} K.
\end{aligned} \tag{7.31}
$$

Claramente, el análisis anterior puede ser repetido para $c = c(S_t, T-t, K, r, \sigma)$ y $p = p(S_t, T-t, K, r, \sigma)$. En cuyo caso, obtenemos

$$c = c(S_t, T-t, K, r, \sigma) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \tag{7.32}$$

y

$$p = p(S_t, T-t, K, r, \sigma) = e^{-r(T-t)} K N(-d_2) - S_t N(-d_1). \tag{7.33}$$

Por supuesto, d_1 y d_2 también se modifican. De hecho,

$$d_1 = d_1(S_t, T, K, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} \tag{7.34}$$

y

$$d_2 = d_2(S_t, T, K, r, \sigma) = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}. \tag{7.35}$$

La delta, $\Delta_c \equiv \partial c/\partial S_t$, para una opción de compra de tipo europeo está dada por

$$\begin{aligned}\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} &= \frac{\partial S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2)}{\partial S_t} \\ &= N(d_1) + S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} - K e^{-r(T-t)} N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_t} \\ &= N(d_1) + [S_t N'(d_1) - K e^{-r(T-t)} N'(d_2)]\frac{\partial d_1}{\partial S_t} \\ &= N(d_1).\end{aligned} \tag{7.36}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial S_t} = N(d_1),$$

ya que de $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}$, se sigue por un lado que

$$\frac{\partial d_2}{\partial S_t} = \frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{1}{\sigma S_t \sqrt{T - t}}, \tag{7.37}$$

mientras que por otro lado

$$
\begin{aligned}
d_2^2 &= (d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2 \\
&= d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}d_1 + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\left(\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right) + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\log\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2r(T-t) - \sigma^2(T-t) + \sigma^2(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\log\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2r(T-t) \\
&= d_1^2 - 2\log\left(\frac{S_t}{K}\right) - 2\log e^{r(T-t)} \\
&= d_1^2 - 2\left[\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \log\left(e^{r(T-t}\right)\right] \\
&= d_1^2 - 2\log\left[\left(\frac{S_t}{K}\right)\left(e^{r(T-t}\right)\right] \\
&= d_1^2 - 2\log\left[\left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ la ecuación anterior, se tiene

$$
-\frac{d_2^2}{2} = -\frac{d_1^2}{2} + \log\left[\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right]
$$

lo cual implica, a su vez, que

$$
e^{-\frac{1}{2}d_2^2} = e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\left(\frac{Se^{r(T-t)}}{K}\right), \tag{7.39}
$$

equivalentemente

$$
N'(d_2)Ke^{-r(T-t)} = N'(d_1)S, \tag{7.40}
$$

con lo que se sigue (7.35).

La gamma, $\Gamma_c \equiv \partial^2 c/\partial S_t^2$, de una opción de compra de tipo europeo satisface:

$$
\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t}\left[\frac{\partial c}{\partial S_t}\right] = \frac{\partial \Delta_c}{\partial S_t} = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S_t} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_t} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}}.
$$

Por lo tanto,

$$
\Gamma_c \equiv \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S_t\sqrt{T-t}} > 0. \tag{7.41}
$$

Ahora calculemos la variación de c con respecto de T, es decir

$$
\begin{aligned}
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= \frac{\partial\left[S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2)\right]}{\partial T} \\
&= S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial T} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - \left[e^{-r(T-t)} K \frac{\partial N(d_2)}{\partial T} + N(d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)} K}{\partial T}\right] \\
&= S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial T} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - e^{-r(T-t)} K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} - N(d_2) K e^{-r(T-t)}(-r) \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - e^{-r(T-t)} K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)},
\end{aligned}
$$

sabemos que $N'(d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(d_1)S_t$, entonces

$$
\begin{aligned}
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - e^{-r(T-t)} K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial T} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)} \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial T} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} - N'(d_1) S_t \frac{\partial d_2}{\partial T} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)} \\
&= S_t N'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)},
\end{aligned}
$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial T} \Rightarrow \left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T}\right] = \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial T}$.
Por lo tanto,

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}},$$

por lo que

$$
\begin{aligned}
\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} &= S_t N'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\partial d_2}{\partial T}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)} \\
&= S_t N'(d_1)\left[\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)}; \qquad \frac{\partial S_t}{\partial T} = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\Theta_c \equiv \frac{\partial c}{\partial T} = S_t N'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} + N(d_2) K r e^{-r(T-t)}. \tag{7.42}$$

La variación de c con respecto de σ, está dada por

$$
\begin{aligned}
\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= \frac{\partial\left[S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2)\right]}{\partial \sigma} \\
&= S_t \frac{\partial N(d_1)}{\partial \sigma} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} - e^{-r(T-t)} K \frac{\partial N(d_2)}{\partial \sigma} \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} - e^{-r(T-t)} K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}.
\end{aligned}
$$

Sabemos que $N'(d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} - e^{-r(T-t)}K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} - N'(d_1)S_t\frac{\partial d_2}{\partial \sigma} \\
&= S_t N'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}.
\end{aligned}$$

Note que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma} \Rightarrow \left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] = \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} &= S_t N'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \frac{\partial d_2}{\partial \sigma}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} \qquad \frac{\partial S_t}{\partial \sigma} = 0. \\
&= S_t N'(d_1)\left[\sqrt{T-t}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma};
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Vega}_c \equiv \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S_t N'(d_1)\sqrt{T-t}. \tag{7.43}$$

La variación de c con respecto de r, está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r} &= \frac{\partial\left[S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)}K N(d_2)\right]}{\partial r} \\
&= S_t\frac{\partial N(d_1)}{\partial r} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - \left[e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(d_2)}{\partial r} + N(d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}K}{\partial r}\right] \\
&= S_t\frac{\partial N(d_1)}{\partial r} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - e^{-r(T-t)}K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}(T-t)(-1) \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - e^{-r(T-t)}K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} + N(d_2)Ke^{-r(T-t)}(T-t).
\end{aligned}$$

Sabemos que $N'(d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial r} &= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - e^{-r(T-t)}K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial r} + N(d_2)Kre^{-r(T-t)}(T-t) \\
&= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial r} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} - N'(d_1)S_t\frac{\partial d_2}{\partial r} + N(d_2)Kre^{-r(T-t)}(T-t) \\
&= S_t N'(d_1)\left[\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r}\right] + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} + N(d_2)Kre^{-r(T-t)}(T-t),
\end{aligned}$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial d_2}{\partial r} = \frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial r} \Rightarrow \left[\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r}\right] = \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial r}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} - \frac{\partial d_2}{\partial r} = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial r} &= N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} + N(d_2)Kre^{-r(T-t)}(T-t)\\ &= N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r} + N(d_2)Kre^{-r(T-t)}(T-t); \qquad \frac{\partial S_t}{\partial r} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial c}{\partial r} = N(d_2)Kre^{-r(T-t)}(T-t) > 0. \tag{7.44}$$

La variación de c con respecto de K, está dada por

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial K} &= \frac{\partial\left[S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)\right]}{\partial K}\\ &= S_t\frac{\partial N(d_1)}{\partial K} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K} - \left[e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(d_2)}{\partial K} + N(d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}K}{\partial K}\right]\\ &= S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial K} + N(d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K} - e^{-r(T-t)}KN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial K} - N(d_2)e^{-r(T-t)}\\ &= -e^{-r(T-t)}N(d_2) < 0,\end{aligned}$$

ya que $N'(d_1) = 0, N'(d_2) = 0$ y $\frac{\partial S_t}{\partial K} = 0$. Recordemos que

$$p = p(S_t, T-t, K, r, \sigma) = e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

$$\begin{aligned}\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_t N(-d_1)\right]}{\partial S_t}\\ &= e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(-d_2)}{\partial S_t} - S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial S_t} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial S_t}\\ &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - S_t N'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} - N(-d_1),\end{aligned}$$

sabemos que $N'(-d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(-d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - S_t N'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} - N(-d_1)\\ &= S_t N'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - S_t N'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} - N(-d_1)\\ &= S_t N'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t}\right] - N(-d_1)\end{aligned}$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial S_t} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial S_t}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r} = 0,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} &= -N(-d_1) < 0\\ &= N(d_1) - 1 < 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Delta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial S_t} = -N(-d_1) < 0. \tag{7.45}$$

De la condición de paridad venta-compra se obtiene que

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial S_t} &= N(d_1) - 1\\ \frac{\partial c}{\partial S_t} &= N(d_1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial S_t} = \frac{\partial c}{\partial S_t} - 1$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial p}{\partial S_t} + 1 = \frac{\partial c}{\partial S_t}. \tag{7.46}$$

La elasticidad de c con respecto a S_t, está dada por

$$\epsilon_{c,S} = \frac{\partial \log(c)}{\partial \log(S_t)} = \frac{\frac{\partial c}{c}}{\frac{\partial S_t}{S_t}} = N(d_1)\frac{S_t}{c}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_p \equiv \frac{\partial^2 P}{\partial S_t^2} = \frac{\partial}{\partial S_t}\left[\frac{\partial P}{\partial S_t}\right] = \frac{\partial \Delta_p}{\partial S_t} &= \frac{\partial\left[-N(-d_1)\right]}{\partial S_t}\\ &= -N'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t},\end{aligned}$$

pero $d_1 = d_1(S_t, T, K, r, \sigma) = \frac{\log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \Rightarrow \frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} = \frac{-1}{\frac{S_t}{K}}\frac{1}{K}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right]$

Por lo tanto, $\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t} = \left[\frac{-1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\right]$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Gamma_p \equiv \frac{\partial \Delta_p}{\partial S_t} &= -N'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial S_t},\\ &= N'(-d_1)\left[\frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}}\right] > 0.\end{aligned} \tag{7.47}$$

Note que $\Gamma_p = \Gamma_c$.

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_tN(-d_1)\right]}{\partial \sigma} \\
&= e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(-d_2)}{\partial \sigma} - S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial \sigma} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} \\
&= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

sabemos que $N'(-d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(-d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} \\
&= S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma} \\
&= S_tN'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial S_t} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma}\right] - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}
\end{aligned}$$

recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma}\right] = \frac{\partial \sigma\sqrt{T-t}}{\partial \sigma}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial \sigma} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial \sigma} = \sqrt{T-t},$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} &= S_tN'(-d_1)\sqrt{T-t} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial \sigma}; \qquad \frac{\partial S_t}{\partial \sigma} = 0 \\
&= S_tN'(-d_1)\sqrt{T-t} > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Vega}_p \equiv \frac{\partial P}{\partial \sigma} = S_tN'(-d_1)\sqrt{T-t} > 0. \tag{7.48}$$

La variación de P con respecto de K, está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial K} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_tN(-d_1)\right]}{\partial \sigma} \\
&= e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(-d_2)}{\partial K} + N(-d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}K}{\partial K} - S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial K} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K} \\
&= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial K} + N(-d_2)e^{-r(T-t)} - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial K} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $N'(-d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(-d_1)S_t$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial K} &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial K} + N(-d_2)e^{-r(T-t)} - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial K} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K}.\\ &= S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial K} + N(-d_2)e^{-r(T-t)} - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial K} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K}\\ &= S_tN'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial K} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial K}\right] + N(-d_2)e^{-r(T-t)} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K}.\end{aligned}$$

Recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial K} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial K} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial K} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial K} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial K}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial K}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial K} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial K} = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial K} &= N(-d_2)e^{-r(T-t)} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial K}; \qquad \frac{\partial S_t}{\partial K} = 0,\\ &= N(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial P}{\partial K} = N(-d_2)e^{-r(T-t)} > 0. \tag{7.49}$$

La variación de P con respecto de r, es

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_tN(-d_1)\right]}{\partial r}\\ &= e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(-d_2)}{\partial r} + N(-d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}K}{\partial r} - S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial r} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial r}\\ &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} + N(-d_2)e^{-r(T-t)}(-)(T-t) - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial r}.\end{aligned}$$

Sabemos que $N'(-d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(-d_1)S_t$, y $\frac{\partial S_t}{\partial r} = 0$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial r} &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} + N(-d_2)e^{-r(T-t)}(-)(T-t) - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\\ &= S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} + N(-d_2)e^{-r(T-t)}(-)(T-t) - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\\ &= S_tN'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\right] - N(-d_2)e^{-r(T-t)}(T-t).\end{aligned}$$

Recordemos que, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial r} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial r} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial r} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial r}$. Entonces,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial r} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial r} = 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -N(-d_2)e^{-r(T-t)}(T-t) < 0. \tag{7.50}$$

Variación de P con respecto de T. Esto es,

$$\begin{aligned}
\Theta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial T} &= \frac{\partial\left[e^{-r(T-t)}KN(-d_2) - S_tN(-d_1)\right]}{\partial T} \\
&= e^{-r(T-t)}K\frac{\partial N(-d_2)}{\partial T} + N(-d_2)\frac{\partial e^{-r(T-t)}K}{\partial T} - S_t\frac{\partial N(-d_1)}{\partial T} - N(-d_1)\frac{\partial S_t}{\partial T} \\
&= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} + N(-d_2)e^{-r(T-t)}(-r) - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial T}.
\end{aligned}$$

Sabemos que $N'(-d_2)e^{-r(T-t)}K = N'(-d_1)S_t$, y $\frac{\partial S_t}{\partial T} = 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\Theta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial T} &= e^{-r(T-t)}KN'(-d_2)\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} + N(-d_2)e^{-r(T-t)}(-r) - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial T} \\
&= S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} + N(-d_2)Ke^{-r(T-t)}(-r) - S_tN'(-d_1)\frac{\partial(-d_1)}{\partial T} \\
&= S_tN'(-d_1)\left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial T}\right] - rN(-d_2)Ke^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Pero, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \Rightarrow \frac{\partial(-d_2)}{\partial T} = \frac{\partial(-d_1)}{\partial T} + \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial T} \Rightarrow \left[\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial T}\right] = \frac{\partial\sigma\sqrt{T-t}}{\partial T}$.
Entonces,

$$\frac{\partial(-d_2)}{\partial T} - \frac{\partial(-d_1)}{\partial T} = \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}.$$

Por lo tanto,

$$\Theta_p \equiv \frac{\partial P}{\partial T} = S_tN'(-d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rN(-d_2)Ke^{-r(T-t)}. \tag{7.51}$$

CAPITULO 8. LA ECUACION DE CALOR Y LA FORMULA BLACK-SCHOLES

8.1 INTRODUCION

En este capítulo se transforma la ecuación diferencial parcial determinísta de Black-Scholes en la ecuación de difusión de calor. Se analiza el caso de un call europeo, estableciendo para ello las condiciones de frontera y las condiciones iniciales.

8.2 DEDUCCION DE LA ECUACION DE CALOR

La ecuación diferencial parcial Black-Scholes y las condicones de frontera para un call, $c(S,t)$, Europeo estan dadas por

$$\frac{\partial c}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}+rS\frac{\partial c}{\partial S}-rc=0, \tag{8.1}$$

con

$$c(0,t)=0 \qquad c(S,t)\sim S \quad \text{cuando} \quad S \quad \rightarrow \quad \infty,$$

$$c(S,t)=\text{máx}(S-K,0)$$

Mediante cambios de variable, la ecuación anterior puede ser llevada a la ecuación de difusión o calor. Para ello, sea

$$S=Ke^x \qquad t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \qquad c(S,t)=K\nu(x,\tau)$$

$$\nu(x,0)=\text{máx}(e^x-1,0); \qquad k_1=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} c(S,t)&=\text{máx}(S-K,0)\\ &=\text{máx}(Ke^x-K,0)\\ &=\text{máx}(K(e^x-1),0)\\ &=K\,\text{máx}(e^x-1,0)\\ &=K\nu(x,0) \quad \text{donde} \quad \nu(x,0)=\text{máx}(e^x-1,0) \end{aligned}$$

Note que $S=Ke^x \Rightarrow x=\ln\left(\frac{S}{K}\right)$ y $t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}\Rightarrow \tau=\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$.

Las derivadas parciales de c con respecto de t y s, es decir $\frac{\partial c}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$ y $\frac{\partial c}{\partial S}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial K\nu(x,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial K\nu(\ln\left(\frac{S}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\partial t} \\
&= K\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial t} \\
&= K\left[\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\right]. \\
&= K\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\left[\frac{-1}{2}\sigma^2\right]
\end{aligned}
\tag{8.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial c}{\partial S} &= \frac{\partial K\nu(x,\tau)}{\partial S} = \frac{\partial K\nu(\ln\left(\frac{S}{K}\right), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))}{\partial S} \\
&= K\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial S} \\
&= K\left[\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}\right] \\
&= K\frac{\partial \nu}{\partial x}\left[\frac{1}{S}\right] \\
&= K\frac{\partial \nu}{\partial x}\left[\frac{1}{Ke^x}\right] \\
&= \frac{\partial \nu}{\partial x}e^{-x}.
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial K\nu(x,\tau)}{\partial S}\right) = \frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}e^{-x}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}e^{-x}\right)\frac{\partial x}{\partial S} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-x} - e^{-x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial S} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-x} - e^{-x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{1}{Ke^x} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-x} - e^{-x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{e^{-x}}{K} \\
&= \left(\frac{\partial^2 \nu(x,\tau)}{\partial x^2}e^{-2x} - e^{-2x}\frac{\partial \nu(x,\tau)}{\partial x}\right)\frac{1}{K}.
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

Sustituimos la ecuación (8.2), (8.3) y (8.4) en (8.1), esto es

$$\frac{\partial c}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0$$

$$K\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\left[\frac{-1}{2}\sigma^2\right] + \frac{1}{2}K^2 e^{2x}\sigma^2\left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}e^{-2x} - e^{-2x}\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)\frac{1}{K} + rKe^{x}\frac{\partial \nu}{\partial x}e^{-x} - rK\nu = 0$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\left[\frac{-1}{2}\sigma^2\right] + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial \nu}{\partial x} + r\frac{\partial \nu}{\partial x} - r\nu = 0$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu = 0$$

Despejando $\frac{\partial \nu}{\partial \tau}$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial \nu}{\partial x} - \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\nu; \qquad \text{sea } k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\\ &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x} + k_1\frac{\partial \nu}{\partial x} - k_1\nu\\ &= \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\frac{\partial \nu}{\partial x} - k_1\nu.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (k_1 - 1)\frac{\partial \nu}{\partial x} - k_1\nu. \tag{8.5}$$

El siguiente cambio de variable es

$$\nu = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau).$$

Se calculan las derivadas parciales de ν con respecto de τ y x, es decir $\frac{\partial \nu}{\partial \tau}$, $\frac{\partial \nu}{\partial x}$ y $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial x} &= \frac{\partial e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)}{\partial x}\\ &= e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}\alpha\\ &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha u(x,\tau)\right].\end{aligned} \tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \nu}{\partial x}\right]\\ &= e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}e^{\alpha x+\beta\tau}\alpha + u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}\alpha^2 + \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\\ &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha^2 u(x,\tau)\right].\end{aligned} \tag{8.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \tau} &= e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + u(x,\tau)e^{\alpha x+\beta\tau}\beta \\ &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \beta u(x,\tau)\right].\end{aligned} \tag{8.8}$$

Sustituimos las ecuaciones (8.6), (8.7) y (8.8) en la ecuación (8.5), esto es

$$\begin{aligned}e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \beta u(x,\tau)\right] &= e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha^2 u(x,\tau)\right] \\ &\quad + (k_1-1)e^{\alpha x+\beta\tau}\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha u(x,\tau)\right] - k_1 e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) \\ \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \beta u(x,\tau) &= \frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha^2 u(x,\tau) \\ &\quad + (k_1-1)\left[\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + \alpha u(x,\tau)\right] - k_1 u(x,\tau).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1-1)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right] - k_1 u. \tag{8.9}$$

O bien,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \beta u - \alpha^2 u - (k_1-1)\alpha u + k_1 u &= 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k_1-1)\frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + u[\beta - \alpha^2 - (k_1-1)\alpha + k_1] &= \frac{\partial u}{\partial x}[2\alpha + k_1 - 1] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

$$\text{Si} \quad \beta - \alpha^2 - (k_1-1)\alpha + k_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \alpha^2 + (k_1-1)\alpha - k_1. \tag{8.10}$$

Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial x}[2\alpha + k_1 - 1] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.11}$$

$$\text{Sea} \quad 2\alpha + k_1 - 1 = 0. \tag{8.12}$$

Por lo tanto, la ecuación de calor está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.13}$$

Note que de las ecuaciones (8.10) y (8.12), se tiene

$$\begin{cases} 2\alpha + k_1 - 1 = 0 \\ \alpha^2 + (k_1 - 1)\alpha - k_1 = \beta \end{cases} \Rightarrow \quad k_1 - 1 = -2\alpha \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{-1}{2}(k_1 - 1) \\ \alpha^2 &= \frac{1}{4}(k_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $k_1 - 1$ y el valor α^2 en β, se tiene

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha(-2\alpha) - k_1 &= \beta \\ \alpha^2 - 2\alpha^2 - k_1 &= \beta \\ -\alpha^2 - k_1 &= \beta \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \beta &= -k_1 - \alpha^2 = -k_1 - \frac{1}{4}(k_1 - 1)^2 = -k_1 - \frac{1}{4}(k_1^2 - 2k_1 + 1)^2 = -k_1 - \frac{1}{4}k_1^2 + \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{4}k_1^2 - \frac{1}{2}k_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}[k_1^2 + 2k_1 + 1] = -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{4}(k_1 + 1)^2 \\ \alpha &= \frac{-1}{2}(k_1 - 1) \end{aligned} \tag{8.14}$$

Sustituimos (8.14) en $\nu = e^{\alpha x + \beta\tau}u(x,\tau)$, entonces

$$\nu = e^{\frac{-1}{2}(k_1-1)x - \frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}u(x,\tau) \tag{8.15}$$

Por lo tanto, la ecuación de calor está dada por

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0,$$

con $u(x,0) = u_0(x) = \max\{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\}$.

La solución a la ecuación de difusión de calor, que es una ecuación diferencial parcial de segundo orden, lineal, parabólica, está dada por

$$u(x,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} \mathrm{d}s$$

donde

$$u_0(x) = \max\left\{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)x}, 0\right\}$$

Considérese el siguiente cambio de variable

$$x' = \frac{s-x}{\sqrt{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad s = x + \sqrt{2\tau}x'; \qquad \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}s = \sqrt{2\tau}\mathrm{d}x'$$

Note que $x'^2 = \frac{(s-x)^2}{2\tau} = \frac{(x-s)^2}{2\tau}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{\frac{-(x-s)^2}{4\tau}} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-x'^2 2\tau}{4\tau}} (\sqrt{2\tau}) \mathrm{d}x' \\
&= \frac{\sqrt{2\tau}}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \sqrt{\frac{2\tau}{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x'.
\end{aligned}$$

Sabemos que

$$u_0(s) = \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')}, 0 \right\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x + \sqrt{2\tau}x') e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \max\left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')}, 0 \right\} e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \left\{ e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} - e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')} \right\} e^{\frac{-1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \qquad (8.16) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')} e^{\frac{1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1-1)(x+\sqrt{2\tau}x')} e^{\frac{1}{2}x'^2} \mathrm{d}x' \\
&= \Psi_1 - \Psi_2.
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)(x+\sqrt{2\tau}x')}e^{\frac{-1}{2}x'^2}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}e^{\frac{-1}{2}x'^2+\frac{1}{2}(k_1+1)\sqrt{2\tau}x'}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x}e^{\frac{-1}{2}\left[x'^2-(k_1+1)\sqrt{2\tau}x'\right]}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}e^{\frac{-1}{2}\left[x'^2-(k_1+1)\sqrt{2\tau}x'+\frac{(k_1+1)^2\tau}{2}\right]}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}e^{\frac{-1}{2}\left[x'-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]^2}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}\left[x'-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]^2}\,\mathrm{d}x'.
\end{aligned}$$

Sea $w = x' - \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x'} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}w = \mathrm{d}x'$. Note que cuando x' toma el valor $x' = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}}$, w toma el valor $w = x' - \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2} = \frac{-x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}\left[x'-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]^2}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{-x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}w^2}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\left[\frac{x}{\sqrt{2\tau}}+\frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right]}^{\infty} e^{\frac{-1}{2}w^2}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}(k_1+1)x+\frac{1}{4}(k_1+1)^2}}{\sqrt{2\pi}}N_1(d_1),
\end{aligned} \tag{8.17}$$

donde, $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2}$ e $N_1(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{1}{2}s^2}\mathrm{d}s$ es la función de distribución acumulativa para la distribución normal. El cálculo para Ψ_2 es idéntico sólo que en lugar de k_1+1 es k_1-1. Recordemos que

$$\nu = e^{\frac{-1}{2}(k_1-1)x-\frac{1}{4}(k_1+1)^2\tau}u(x,\tau),$$

donde $k_1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad \Rightarrow \quad k_1+1 = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}+1 = \frac{r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}$.

Sea
$$x = \log\left(\frac{S}{K}\right); \qquad \tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t); \qquad c = cK\,\nu(x,t),$$
$$c(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$
Note que, $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \quad \Rightarrow \quad 2\tau = \sigma^2(T-t) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2\tau} = \sigma\sqrt{(T-t)}$.Entonces,

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{(k_1+1)\sqrt{2\tau}}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\frac{r+\frac{1}{2}\sigma^2}{\frac{1}{2}\sigma^2}\sqrt{2\tau}}{2} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)}{\sqrt{2\tau}} + \frac{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{2\tau}}{2\frac{1}{2}\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{2\tau}\sqrt{2\tau}}{\sqrt{2\tau}\sigma^2} \\
&= \frac{\sigma^2\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)2\tau}{\sqrt{2\tau}\sigma^2}; \qquad 2\tau = \sigma^2(T-t) \\
&= \frac{\sigma^2\left[\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\tau}\sigma^2} \\
&= \frac{\left[\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\tau}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,
$$d_1 = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]}{\sqrt{2\tau}}. \tag{8.18}$$

Analogamente para d_2.

CAPITULO 9. MARTINGALAS Y LA FORMULA BLACK-SCHOLES

9.1 INTRODUCCION

El objetivo fundamental de esta sección es desarrollar el modelo de Black-Scholes aplicando el método de martingalas que consiste en calcular el valor esperado condicional del valor presente del perfil de pagos de la opción bajo una medida neutral al riesgo y así obtener soluciones de forma cerrada de una manera más precisa y elegante con sencillos cálculos matemáticos para la valuación de productos derivados suponiendo el modelo de precios de Black-Scholes.

9.2 MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMETRICO

Un modelo comúnmente utilizado es el movimiento Browniano geométrico el cual está implícito en gran parte de la teoría de valuación de opciones. El modelo asume que las innovaciones de cambio o movimientos en el precio del activo subyacente no están correlacionados en el tiempo y que los movimientos pequeños en los precios pueden describirse por

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t. \tag{9.1}$$

El término $\mu \mathrm{d}t$, el cual se conoce como la tendencia instantánea nos indica que el retorno esperado anual de la acción S_t es μ cuando no hay pago de dividendos mientras que el segundo término $\sigma \mathrm{d}W_t$, también conocido como el término de difusión es una variable aleatoria que sigue un proceso de Wiener que se distribuye normal con media cero y varianza $\mathrm{d}t$ y además es no diferenciable.

A está clase de proceso estocástico también se le denomina proceso de difusión Markoviano debido a que los retornos son gobernados por un proceso cuyos movimientos son independientes de los movimientos pasados.

Por otra parte, vale la pena observar que la ecuación (9.1) asume que el coeficiente del término de difusión σ, el cual se conoce como la volatilidad anual o desviación estándar de los rendimientos de la acción es constante. En realidad, en la práctica este supuesto no tiene importancia cuando se valuan opciones europeas sencillas (plain vanilla). Sin embargo, cuando se valuan opciones americanas u opciones europeas exóticas este supuesto no es válido.

También para el caso del coeficiente de la tendencia instantánea μ, este supuesto es válido debido al hecho de que una opción puede ser replicada sin riesgo al construir un portafolio apropiado que consista de un activo con riesgo y un activo libre de riesgo (puede ser una inversión en el mercado de dinero) y que tenga la misma fecha de vencimiento que la opción.

Suponga que una variable sigue un proceso gobernado por la ecuación (9.1) entonces deseamos conocer el proceso seguido por el $\ln S_t$.

Supongamos que $G(t, S_t)$ es una función de S_t, entonces aplicando el Lema de Itô podemos encontrar la ecuación diferencial estocástica que describe la dinámica del valor del $\ln S_t$.

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}\left(\mathrm{d}S_t\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial t}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}t. \tag{9.2}$$

Sustituyendo (9.1) en (9.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}G =& \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S_t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2 \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\left(\mathrm{d}t\right)^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial S_t \partial t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Ahora aplicando las reglas del cálculo estocástico

$$\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t = 0, \quad \mathrm{d}W_t\mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0$$

donde

$$(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2 = \mu^2 S_t^2(\mathrm{d}t)^2 + 2\mu\sigma S_t^2\mathrm{d}W_t\mathrm{d}t + \sigma^2 S_t^2(\mathrm{d}W_t)^2 = \sigma^2 S_t^2\mathrm{d}t$$

entonces (9.3) se reduce a

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S_t}\mu S_t\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\mathrm{d}t + \frac{\partial G}{\partial S_t}\sigma S_t\mathrm{d}W_t. \tag{9.4}$$

Ahora se establece que $G(t, S_t) = \ln S_t$, entonces

$$\frac{\partial G}{\partial S_t} = \frac{1}{S_t}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

Sustituyendo las derivadas parciales en (9.4) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln S_t &= \left[\left(\frac{1}{S_t}\right)\mu S_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\sigma^2 S_t^2\right]\mathrm{d}t + \left(\frac{1}{S_t}\right)\sigma S_t\mathrm{d}W_t \\ &= \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W_t \\ \ln S_0 &= x \end{aligned}$$

Ahora la integral de Itô se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \int_0^t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma\mathrm{d}W_s \\ &= \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\int_0^t \mathrm{d}s + \sigma\int_0^t \mathrm{d}W_s \\ &= \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t \end{aligned}$$

entonces

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

es una solución de la ecuación (9.1), por lo que se deriva la siguiente proposición que es de gran utilidad para el modelo de Black-Scholes.

Proposición 9.1. El proceso $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$ definido como

$$S_t = x e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

es una solución de

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \mathrm{d}W_u.$$

Demostración.

Aplicando otra vez el Lema de Itô y definiendo a

$$G(t, W_t) = S_t = x e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

se tiene que

$$G(t, W_t) = G(0, W_0) + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial u}\mathrm{d}u + \int_0^t \frac{\partial G}{\partial W_u}\mathrm{d}W_u + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial W_u^2}\mathrm{d}u.$$

Suponiendo que $w = W_u$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial w} &= \frac{\partial}{\partial w}\left[x e^{\sigma w + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}\right] = \sigma x e^{\sigma w + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u} \\
\frac{\partial^2 G}{\partial w^2} &= \frac{\partial^2}{\partial w^2}\left[x e^{\sigma w + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}\right] = \sigma^2 x e^{\sigma w + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u} \\
\frac{\partial G}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\left[x e^{\sigma w + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}\right] = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) x e^{\sigma w + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}
\end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la integral de Itô se tiene que

$$\begin{aligned}
G(t, W_t) =& G(0, W_0) + \int_0^t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) x e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}\mathrm{d}u + \int_0^t \sigma x e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}\mathrm{d}W_u \\
&+ \int_0^t \sigma^2 x e^{\sigma W_u + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)u}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

donde

$$\mathrm{d}W_t^2 = \mathrm{d}t$$

entonces

$$S_t = x + \int_0^t \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_u \mathrm{d}u$$
$$= x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u$$

Teorema 9.1. Sea $\mu, \sigma \in R$, $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ un movimiento Browniano estándar y $T \in R^+$, entonces existe un único proceso de Itô $\{S_t\}_{0\leq t\leq T}$, tal que

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u$$

este proceso está dado por

$$S_t = xe^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Demostración.

Supongamos que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ y $\{\bar{S}_t\}_{t\geq 0}$ son dos procesos elementales tales que

$$S_t = x + \int_0^t \mu S_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma S_u \mathrm{d}W_u$$

$$\bar{S}_t = x + \int_0^t \mu \bar{S}_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \bar{S}_u \mathrm{d}W_u.$$

Por la proposición 9.1 sabemos que una solución de la ecuación (9.1) es

$$S_t = xe^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Ahora definimos un proceso estocástico $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ como:

$$Z_t = \frac{S_0}{S_t} = e^{-\sigma W_t + (\frac{1}{2}\sigma^2 - \mu)t}$$

si $\mu^* = \sigma^2 - \mu$ y $\sigma^* = -\sigma$, se tiene que

$$Z_t = e^{\sigma^* W_t + (\mu^* - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2)t}, \quad Z = \frac{S_0}{S_0} = 1$$

entonces de la proposición 9.1 se tiene que

$$Z_t = z + \int_0^t \mu^* Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^* Z_u \mathrm{d}W_u$$
$$= 1 + \int_0^t \mu^* Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^* Z_u \mathrm{d}W_u$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

el cual es un proceso de Itô.

Ahora de acuerdo con la fórmula de integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{S}_t Z_t =& xz + \int_0^t \mu^* \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma^* \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u \\ &+ \int_0^t \mu \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u + \int_0^t \sigma\sigma^* \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u \\ =& xz + \int_0^t \left(\sigma^2 - \mu\right) \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t (-\sigma) \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u \\ &+ \int_0^t \mu \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u + \int_0^t \sigma \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}W_u + \int_0^t \left(-\sigma^2\right) \bar{S}_t Z_u \mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bar{S}_t Z_t = xz \quad \forall t \geq 0 \quad \text{Pc.s.}$$

$$\bar{S}_t Z_t = x \frac{S_0}{S_0} = x$$

entonces

$$\bar{S}_t = \frac{x}{Z_t} = x \frac{S_t}{S_0} \quad \text{pero} \quad x = S_0$$

Por lo tanto

$$\bar{S}_t = S_t \quad \forall t \geq 0 \quad \text{Pc.s.}$$

Teorema 9.2. Sea $\mu, \sigma \in R$ y $\{S_t\}_{0 \leq t \leq T}$ un proceso estocástico tal que

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

entonces S_t es una variable aleatoria lognormal.

Demostración.

Sabemos que la única solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t$$

es

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

entonces

$$\ln S_t = \ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma W_t$$

dado que $W_t \sim N(0, t)$ podemos afirmar que

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma^2 t\right)$$

es decir,

$$S_t \sim \text{log normal}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma^2 t\right)$$

Ahora podemos calcular la media y la varianza de S_t

$$G_{S_t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma s} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{s}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\} \qquad 0 \leq s \leq \infty$$

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \int_0^\infty sG_{S_t}(s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{s}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

ya que

$$\ln S_t \sim N\left(\ln S_0 + \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right), \sigma t\right)$$

entonces

$$\epsilon = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}} \sim N(0,1)$$

donde

$$S_t = S_0 e^{\epsilon\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}s = S_0\sigma\sqrt{t}e^{\epsilon\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathrm{d}\epsilon$$

$$\begin{aligned} E[S_t] &= S_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2} e^{\epsilon\sigma\sqrt{t} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\mathrm{d}\epsilon \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2 - 2\epsilon\sigma\sqrt{t} + \sigma^2 t)}\mathrm{d}\epsilon \\ &= S_0 e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon - \sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}\epsilon \\ &= S_0 e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = S_0 e^{\mu t} \end{aligned}$$

donde

$$z = \epsilon - \sigma\sqrt{t} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}\epsilon.$$

El segundo momento de S_t se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
E\left[S_t^2\right] &= \int_0^\infty s^2 G_{S_t}(s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\infty \frac{s}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{s}{S_0}-(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2\right\}\mathrm{d}s \\
&= S_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\epsilon^2}e^{2(\epsilon\sigma\sqrt{t}+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2))t}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\epsilon\sigma\sqrt{t})}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t}e^{2\sigma^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^2-4\epsilon\sigma\sqrt{t}+4\sigma^2 t)}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\epsilon-2\epsilon\sigma\sqrt{t})^2}\mathrm{d}\epsilon \\
&= S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t}
\end{aligned}$$

donde

$$z = \epsilon - 2\sigma\sqrt{t} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}\epsilon.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S_t] &= E\left[S_t^2\right] - E^2\left[S_t\right] \\
&= S_0^2 e^{2\mu t+\sigma^2 t} - S_0^2 e^{2\mu t} \\
&= S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t}-1\right).
\end{aligned}$$

9.3 ESTRATEGIAS DE INVERSION AUTOFINANCIABLES

Una estrategia de inversión se define como un proceso $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T} = (H_t^*, H_t)$ en R^2 que es medible en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ del movimiento Browniano estándar. Los componentes H_t^* y H_t se definen como las cantidades de un activo libre de riesgo y de un activo con riesgo que son tomadas en un portafolio en el tiempo t.

El valor del portafolio en el tiempo t está dado por

$$V_t(\phi) = H_t^* B_t + H_t S_t \tag{9.5}$$

en tiempo discreto mientras que en tiempo continuo es igual a

$$\mathrm{d}V_t(\phi) = H_t^*\mathrm{d}B_t + H_t\mathrm{d}S_t. \tag{9.6}$$

El concepto de estrategia de inversión autofinanciable en el marco de Black-Scholes está basada fundamentalmente en la idea de la integral estocástica. Entonces para dar un significado a la expresión establecemos la condición

$$\int_0^T |H_t^*|\mathrm{d}t < \infty \quad \text{Pc.s.} \quad \text{y} \quad \int_0^T |H_t^2|\mathrm{d}t < \infty \quad \text{Pc.s.}$$

Entonces

$$\int_0^T H_t^*\mathrm{d}B_t = \int_0^T H_t^* r e^{rt}\mathrm{d}t \tag{9.7}$$

está bien definida como una integral estocástica

$$\int_0^T H_t\mathrm{d}S_t = \int_0^T \mu H_t S_t\mathrm{d}t + \int_0^T \sigma H_t S_t\mathrm{d}W_t$$

ya que $t \longmapsto S_t$ es continua y acotada en $[0,T]$.

Definición 9.1. Una estrategia de inversión autofinanciable $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T}$ está definida por dos procesos H_t^* y H_t que cumplen las siguientes condiciones:

1. $\int_0^T |H_t^*|\mathrm{d}t + \int_0^T H_t^2\mathrm{d}t < \infty$ Pc.s.

2. $$\begin{aligned} V_t(\phi) &= H_t^* B_t + H_t S_t \\ &= H_0^* B_0 + H_0 S_0 + \int_0^t H_u^*\mathrm{d}B_u + \int_0^t H_u^2\mathrm{d}S_u \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{Pc.s.} \end{aligned}$$

Nota: el proceso $\bar{S}_t = e^{-rt}S_t$ se denota como el valor presente de un activo con riesgo y $\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt}V_t(\phi)$ es el valor presente del valor del portafolio.

Proposición 9.2. Sea $\phi = \{\phi_t\}_{0\leq t\leq T} = (H_t^*, H_t)$ un par de procesos adoptados medibles que satisfacen a

$$\int_0^T |H_t^*|\mathrm{d}t + \int_0^T H_t^2\mathrm{d}t < \infty \quad \text{Pc.s.}$$

entonces ϕ es una estrategia de inversión autofinanciable si y sólo si

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u\mathrm{d}\bar{S}_u \quad \text{Pc.s.} \quad \forall t \in [0,T].$$

Demostración.

Supongamos que ϕ es una estrategia de inversión autofinanciable y aplicando la fórmula de integración por partes a $\bar{V}_t(\phi)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) &= \mathrm{d}\left(e^{-rt}V_t(\phi)\right) \\
&= e^{-rt}\mathrm{d}V_t(\phi) + V_t(\phi)\mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) + \frac{\partial^2\left(e^{-rt}V_t(\phi)\right)}{\partial V_t(\phi)\partial t}\mathrm{d}V_t(\phi)\mathrm{d}t \\
&= e^{-rt}\mathrm{d}V_t(\phi) - re^{-rt}V_t(\phi)\mathrm{d}t \\
&= e^{-rt}\mathrm{d}V_t(\phi) - r\bar{V}_t(\phi)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

donde

$$V_t(\phi)\mathrm{d}\left(e^{-rt}\right) = -re^{-rt}\mathrm{d}t \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\left(e^{-rt}V_t(\phi)\right)}{\partial V_t(\phi)\partial t}\mathrm{d}V_t(\phi)\mathrm{d}t. = 0$$

Sustituyendo (9.5) y (9.6) en la expresión anterior se tiene que

$$\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) = e^{-rt}\left(H_t^*\mathrm{d}B_t + H_t\mathrm{d}S_t\right) - re^{-rt}\left(H_t^*B_t + H_tS_t\right)\mathrm{d}t$$

por la ecuación (9.7) sabemos que $B_t = e^{rt}$, $\mathrm{d}B_t = re^{rt}\mathrm{d}t$ y $B_0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) &= e^{-rt}\left(H_t^*re^{rt}\mathrm{d}t + H_t\mathrm{d}S_t\right) - re^{-rt}\left(H_t^*e^{rt} + H_tS_t\right)\mathrm{d}t \\
&= \left(rH_t^*\mathrm{d}t + e^{-rt}H_t\mathrm{d}S_t\right) - \left(rH_t^*\mathrm{d}t + re^{-rt}H_tS_t\mathrm{d}t\right) \\
&= H_t\left(e^{-rt}\mathrm{d}S_t - re^{-rt}S_t\mathrm{d}t\right) \\
&= H_t\mathrm{d}\bar{S}_t
\end{aligned}$$

ya que

$$\mathrm{d}\bar{S}_t = \mathrm{d}\left(e^{-rt}S_t\right) = e^{-rt}\mathrm{d}S_t - re^{-rt}S_t\mathrm{d}t.$$

Ahora integrando $\mathrm{d}\bar{V}_t(\phi)$ de 0 a t

$$\int_0^t \mathrm{d}\bar{V}_t(\phi) = \int_0^t H_u\mathrm{d}\bar{S}_u$$

$$\bar{V}_t(\phi) - V_0(\phi) = \int_0^t H_u\mathrm{d}\bar{S}_u.$$

Por lo tanto

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u\mathrm{d}\bar{S}_u.$$

El reciproco se demuestra invirtiendo los pasos y usando

$$\bar{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t H_u\mathrm{d}\bar{S}_u.$$

En conclusión se puede afirmar que una estrategia de inversión autofinanciable es una oportunidad de arbitraje que incluyen los activos subyacentes al transformar una inversión igual a cero en un monto mayor de cero con probabilidad positiva. Por lo que no tendría sentido, valuar productos derivados basados en un modelo que permita tales desequilibrios en el mercado.

9.4 CAMBIO DE MEDIDA DE PROBABILIDAD

Cuando los inversionistas son indiferentes al riesgo financiero, no exigen una prima de riesgo ya que asumen que la tasa de retorno de todos los instrumentos financieros es igual a la tasa libre de riesgo. Sin embargo, ésto no sucede en la práctica debido al hecho de que en la mayoría de los casos se tiene que $r < \mu$, es decir, la tasa libre de riesgo es menor al retorno esperado de cualquier activo financiero con riesgo bajo la medida de probabilidad P. Esto se debe a que los inversionistas siempre demandan una prima de riesgo sobre los instrumentos financieros que tienen correlación positiva con el riesgo de mercado.

Para entender mejor ésto supongamos las dos siguientes expresiones:

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^{\mathbf{P}} \tag{9.8}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}}. \tag{9.9}$$

Se puede notar de (9.9) que la tasa de retorno esperada anual es igual a r, entonces al igualar (9.8) y (9.9) se tiene que

$$\mathrm{d}W_t^{\mathbf{P}} = \mathrm{d}W_t^{\mathbf{Q}} - \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right) \mathrm{d}t$$

la cual se conoce como un cambio de medida de probabilidad.

Pero es natural preguntar por que hacer este cambio de medida de probabilidad cuando se valuan opciones financieras. Resulta que cuando un inversionista compra una opción sobre una acción se dice que está asegurandose contra los cambios inesperados que pueden ocurrir en el mercado a cambio de pagar una prima por eso es que, la probabilidad de que los precios de la acción sean bajos, es decir, los precios futuros de la acción que tiene una tasa de retorno esperada menor a la tasa libre de riesgo, será mayor bajo la medida de probabilidad **Q** que bajo **P** debido a que los inversionistas son adversos al riesgo y están dispuestos a pagar más por las opciones que ocurren en condiciones pesimistas. De manera similar, la probabilidad de que los precios de la acción sean altos, es decir, los precios futuros de la acción que representan un retorno esperado mayor que r, será menor bajo la probabilidad **Q** que bajo **P** debido al hecho de que los inversionistas están dispuestos a pagar menos por las opciones que ocurren en condiciones optimistas.

Por lo tanto, el cambio de medida de probabilidad es de gran utilidad para los participantes de los mercados financieros ya que les permite eliminar la prima de riesgo de los instrumentos financieros sin necesidad de cambiar la estructura de la volatilidad del activo financiero.

9.5 MEDIDAS DE PROBABILIDAD EQUIVALENTES

Definición 9.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Se dice que una medida de probabilidad Q sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ es absolutamente continua con respecto a P (Q<<P) si para toda $A \in \mathcal{F}$, $\mathrm{P}(A) = 0$ implica que $\mathrm{Q}(A) = 0$.

Definición 9.3. Se dice que dos medidas de probabilidad P y Q son equivalentes si cada una de ellas es absolutamente continua con respecto de la otra.

Nota: es conveniente observar que si Q<<P y Z es la densidad de Q con respecto a P, entonces (P<<Q) son equivalentes si y sólo si $\mathrm{P}(Z > 0) = 1$.

9.6 TEOREMA DE GIRSANOV

La idea central es utilizar el resultado del teorema de Girsanov una vez que se haya encontrado un espacio equivalente de tal manera que bajo este espacio de probabilidad la tendencia instantánea del modelo de precios sea igual a cero, es decir, calcular la esperanza condicional sobre un término puramente Browniano ya que el efecto de un cambio de medida de probabilidad sobre un movimiento Browniano geométrico lo único que se altera es su tendencia instantánea dejando la desviación estándar intacta.

Teorema 9.3. (Teorema de Girsanov) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad. Si $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso estocástico adaptado tal que

$$\int_0^T \theta_s \mathrm{d}s < \infty$$

y tal que $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$, definido por

$$L_t = \exp\left\{-\int_0^t \theta_s \mathrm{d}W_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \mathrm{d}s\right\}$$

sea una martingala. Entonces bajo la probabilidad $\mathrm{Q}^{(L_T)}$ con densidad L_T con respecto a P, el proceso $\{\bar{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$, definido por

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s \mathrm{d}s$$

es un movimiento Browniano estándar.

Sea $\{W_t\}_{0\leq t\leq T}$ un movimiento Browniano estándar construido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ y $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$ su filtración natural.

Teorema 9.4. (Teorema de Representación de Martingalas) Sea $\{M_t\}_{0\leq t\leq T}$ una martingala cuadrado integrable con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{0\leq t\leq T}$. Entonces existe un proceso adoptado $\{H_t\}_{0\leq t\leq T}$ tal que

$$E\left[\int_0^T H_u^2 \mathrm{d}u\right] < \infty$$

y

$$\forall t \in [0,T] \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_u \mathrm{d}W_u \quad \text{Pc.s.}$$

Como se puede observar este teorema será una de las herramientas importantes y poderosas para controlar las tendencias instantáneas de cualquier movimiento Browniano geométrico y en particular para valuar productos derivados en base a la idea de una medida de no arbitraje o medida martingala.

9.7 MEDIDA MARTINGALA EQUIVALENTE

El objetivo de esta sección es probar que éxiste una medida de probabilidad equivalente a P bajo la cual el precio de un activo subyacente descontado por la tasa libre de riesgo es una martingala.

Consideremos el modelo de Black-Scholes que describe que la dinámica de los precios es un modelo continuo que está formado por activo con riesgo S_t y por un activo libre de riesgo B_t, es decir, un bono gubernamental. Supongamos que la dinámica de B_t está representada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t \tag{9.10}$$

donde $B_0 = 1$ y $r > 0$ es una constante.

Ahora asumiremos que la dinámica de S_t está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica.

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t \tag{9.11}$$

donde μ, σ son constantes y $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar.

Las soluciones de (9.10) y (9.11) son las siguientes:

$$B_t = e^{rt} \quad \text{con} \quad B_0 = 1 \tag{9.12}$$

y

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \tag{9.13}$$

respectivamente. Si suponemos que $\mu \in R$ y r, $\sigma \in R^+$ son constantes.

Ahora si definimos el valor presente de un activo con riesgo como el proceso

$$\tilde{S}_t = B_t^{-1}S_t = e^{-rt}S_t \tag{9.14}$$

se tiene la siguiente dinámica.

Aplicando la fórmula de integración por partes a $\bar{S}_t$ se tiene que

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t &= d\left(e^{-rt}S_t\right) \\ &= e^{-rt}dS_t + S_t d\left(e^{-rt}\right) + \frac{\partial^2\left(e^{-rt}S_t\right)}{\partial S_t \partial t} dS_t dt. \\ &= e^{-rt}dS_t - re^{-rt}S_t dt \\ &= e^{-rt}dS_t - r\bar{S}_t dt \end{aligned} \tag{9.15}$$

debido a que

$$d\left(e^{-rt}\right) = -re^{-rt}dt \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2\left(e^{-rt}S_t\right)}{\partial S_t \partial t} dS_t dt = 0.$$

Sustituyendo (9.11) en (9.15) se tiene que

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t &= e^{-rt}\left(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t\right) - re^{-rt}S_t dt \\ &= e^{-rt}\left[(\mu - r)S_t dt + \sigma S_t dW_t\right] \end{aligned} \tag{9.16}$$

Si hacemos la siguiente transformación

$$\bar{W}_t = W_t + \int_0^t \theta_s ds \tag{9.17}$$

entonces

$$W_t = \bar{W}_t - \int_0^t \theta_s ds \tag{9.18}$$

y

$$dW_t = d\bar{W}_t - \theta_t dt. \tag{9.19}$$

Sustituyendo (9.19) en (9.16) se tiene que

$$\begin{aligned} d\bar{S}_t &= e^{-rt}S_t\left[(\mu - r)dt + \sigma\left(d\bar{W}_t - \theta_t dt\right)\right] \\ &= \bar{S}_t\left[(\mu - r - \sigma\theta_t)dt + \sigma d\bar{W}_t\right] \end{aligned} \tag{9.20}$$

Si hacemos $\mu - r - \sigma\theta_t = 0$, es decir, $\theta_t = \frac{1}{\sigma}(\mu - r)$, entonces

$$d\bar{S}_t = \bar{S}_t \sigma d\bar{W}_t. \tag{9.21}$$

si

$$\bar{W}_t = W_t + \frac{1}{\sigma}(\mu - r)t. \tag{9.22}$$

Sustituyendo (9.22) en (9.14) se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{S}_t &= e^{-rt}S_t \\ &= S_0 e^{-rt} e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0 e^{-rt} e^{\sigma \bar{W}_t - (\mu - r)t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \\ &= S_0 e^{\sigma \bar{W}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}. \end{aligned} \tag{9.23}$$

Del teorema de Girsanov, con $\theta_t = \frac{1}{\sigma}(\mu - r)$, se tiene que demostrar que existe una medida de probabilidad Q equivalente a P bajo la cual $\{\bar{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un movimiento Browniano estándar y $\bar{S}_t$ es una martingala

Demostración.

La demostración se lleva acabo sólo cuando $\{\theta_t\}_{0\leq t\leq T}$ es un proceso constante θ, es decir

$$\bar{W}_t = W_t + \theta t.$$

i) Por demostrar que $\{\bar{W}_t\}_{t\geq 0}$ es continua en t.

La continuidad de la función $t \rightarrow \bar{W}_t(w)$ es clara, ya que el movimiento Browniano estándar W_t y la función θt son funciones continuas con respecto a t.

ii) Por demostrar que $\bar{W}_t$ tiene incrementos independientes.

La independencia de incrementos también es clara, puesto que $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y

$$\bar{W}_t - \bar{W}_s = W_t - W_s + \theta(t-s), \quad \forall s \leq t.$$

iii) Por demostrar que $\bar{W}_t$ es estacionario.

Para demostrar la estacionaridad del proceso $\bar{W}_t$ será necesario aplicar el teorema A.1 y las proposiciones A.2, A.3, A.4 A.5 y A.6 del apendice.

Primero tenemos que demostrar que la probabilidad Q es equivalente a P y $\{L_t\}_{0\leq t\leq T}$ es una martingala. Para eso sólamente se tiene que demostrar que $P(Z > 0) = 1$ ya que L_t es una martingala , si suponemos que $\sigma^* = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ entonces

$$L_t = e^{\sigma^* W_t - \frac{1}{2}(\sigma^*)^2 t}.$$

Por otra parte, sabemos que

$$L_t = e^{-(\frac{\mu-r}{\sigma})W_t - \frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 t}$$

ahora por teorema A.1 se tiene que

$$Q(A) = \int_A Z(w)dP(w)$$

entonces

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int_A e^{-(\frac{\mu-r}{\sigma})W_t - \frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 t} dP(w) \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\frac{\mu-r}{\sigma})^2 t} \int_A e^{-(\frac{\mu-r}{\sigma})W_t} dP(w). \end{aligned}$$

Pero como W_t se distribuye dim $\mathcal{N}(0,t)$, entonces

$$E\left[e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\right] = \int_A e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\mathrm{dP}(w)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)w}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2}{2t}}\mathrm{d}w$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2+2\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)wt}{2t}}\mathrm{d}w$$

$$E\left[e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\right] = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{w^2+2\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)wt+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2t^2}{2t}}\mathrm{d}w$$
$$= e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t}{\sqrt{t}}\right)^2}\mathrm{d}w$$

Si hacemos un cambio de variable

$$z = \frac{w+\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)t}{\sqrt{t}} \implies \sqrt{t}\mathrm{d}z = \mathrm{d}w,$$

$$E\left[e^{-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)W_t}\right] = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}$$

entonces

$$\mathrm{Q}(A) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t}\cdot e^{\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 t} = 1$$

Por lo tanto

Q es equivalente a P.

Por último sólo resta demostrar por las proposiciones A.5 y A.6 que para $0 \leq t \leq T$, la variable $\bar{W}_t - \bar{W}_s$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ y se distribuye dim $\mathcal{N}(0, t-s)$, entonces

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu(\bar{W}_t-\bar{W}_s)}\middle|\mathcal{F}_t\right] = e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)} \quad \forall u \in R^+.$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
E^{(L_T)}\left[e^{iu(\tilde{W}_t-\tilde{W}_s)}\Big|\mathcal{F}_t\right] &= E^{(L_T)}\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot L_T\Big|\mathcal{F}_t\right]}{L_s} \quad \text{por la proposición A.5} \\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot\frac{L_T}{L_s}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot e^{-\left(\theta(W_T-W_s)+\frac{1}{2}\theta^2(T-s)\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot\frac{e^{-\left(\theta(W_T-W_t)+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}}{e^{\left(\theta(W_t-W_s)+\frac{1}{2}\theta^2(t-s)\right)}}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot\frac{L_t}{L_s}\cdot e^{-\left(\theta W_{T-t}+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot\frac{L_t}{L_s}\Big|\mathcal{F}_t\right]E\left[e^{-\left(\theta W_{T-t}+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}\right].
\end{aligned}
$$

Pero sabemos que la esperanza de

$$
E\left[e^{-\left(\theta W_{T-t}+\frac{1}{2}\theta^2(T-t)\right)}\right]=1
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
E^{(L_T)}\left[e^{iu(\tilde{W}_t-\tilde{W}_s)}\Big|\mathcal{F}_t\right] &= E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot\frac{L_t}{L_s}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{1}{L_s}E\left[e^{iu(W_t-W_s+\theta(t-s))}\cdot e^{-\left(\theta W_t+\frac{1}{2}\theta^2 t\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{e^{-iu(W_s+\theta s)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{iu(W_t+\theta t)}\cdot e^{-\left(\theta W_t+\frac{1}{2}\theta^2 t\right)}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{e^{-iu(W_s+\theta s)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{(iu-\theta)W_t-\frac{1}{2}\left(\theta^2-2iu\theta\right)t}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{e^{-iu(W_s+\theta s)}\cdot e^{-\frac{1}{2}u^2 t}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{(iu-\theta)W_t-\frac{1}{2}\left(\theta^2-2iu\theta-u^2\right)t}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{e^{-\left(iu(W_s+\theta s)+\frac{1}{2}u^2 t\right)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}E\left[e^{(iu-\theta)W_t-\frac{1}{2}(\theta-iu)^2 t}\Big|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \frac{e^{-\left(iu(W_s+\theta s)+\frac{1}{2}u^2 t\right)}}{e^{-\left(\theta W_s+\frac{1}{2}\theta^2 s\right)}}\cdot e^{(iu-\theta)W_s-\frac{1}{2}(\theta-iu)^2 s}
\end{aligned}
$$

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu(\bar{W}_t-\bar{W}_s)}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \frac{e^{-\left(iu\theta s+\frac{1}{2}u^2t\right)}}{e^{-\theta W_s-\frac{1}{2}\theta^2 s}}\cdot e^{-\theta W_s-\frac{1}{2}\theta^2 s}\cdot e^{iu\theta s+\frac{1}{2}u^2 s}$$
$$= e^{-\left(iu\theta s+\frac{1}{2}u^2t\right)}\cdot e^{iu\theta s+\frac{1}{2}u^2 s}$$
$$= e^{\frac{1}{2}\left(u^2 s-u^2 t\right)}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)}$$

es la función característica de una variable aleatoria $N(0,t-s)$, para toda $0\leq t\leq T$ con lo cual se demuestra que $\bar{W}_t$ es un proceso estacionario.

Por lo tanto

$\{\bar{W}_t\}_{0\leq t\leq T}$, es un movimiento Browniano estándar.

Definición 9.4. Una estrategia $\phi=\{\phi_t\}_{0\leq t\leq T}$, es admisible si es autofinanciable y el valor presente del proceso

$$\bar{V}_t(\phi)=H_t^*+H_t\bar{S}_t$$

es cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

Una opción es replicable si su precio en la fecha de vencimiento es igual al valor final de una estrategia admisible.

Definición 9.5. Una opción europea es una variable aleatoria h positiva, $\mathcal{F}_t$-medible.

Proposición 9.3. Sea h una variable aleatoria positiva $\mathcal{F}_t$-medible y cuadrado integrable y x es su precio justo en el tiempo 0, entonces

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rt}h\right]<\infty \quad \text{y} \quad E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rt}h\right]\leq x$$

Demostración.

Primero demostraremos que $E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rt}h\right]<\infty$

Por la ecuación (9.23) sabemos que

$$\bar{S}_t=S_0e^{\sigma\bar{W}_t-\frac{1}{2}\sigma^2t}$$

entonces

$$E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-rT}h\right]=e^{-rT}E\left[h\right]$$
$$=e^{-rT}\frac{E\left[\bar{S}_Th\right]}{S_0} \quad \text{por la proposición A.5}$$
$$\leq\frac{e^{-rT}}{S_0}\left(E\left[\bar{S}_T^2\right]\right)^{1/2}\left(E\left[h^2\right]\right)^{1/2}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

entonces

$$\begin{aligned}
E\left[\bar{S}_T^2\right] &= E\left[S_0^2 e^{2\sigma \tilde{W}_T - \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T + 2(\mu - r)T - \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T + 2\mu T - 2rT - \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T - \frac{(2\sigma)^2}{2}} \cdot e^{2\mu T - 2rT + \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 E\left[e^{2\sigma W_T - \frac{(2\sigma)^2}{2}}\right] E\left[e^{2\mu T - 2rT + \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2\mu T - 2rT + \sigma^2 T} < \infty
\end{aligned}$$

entonces

$$E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-rT} h\right] < \infty.$$

Por otra parte, sabemos que para toda ϕ estrategia admisible que replica a $h(\phi \in \Phi)$

$$E^{\mathbf{Q}}\left[\bar{V}_T(\phi)\right] \leq V_0(\phi)$$

debido a que $\{\bar{V}_t(\phi)\}_{0 \leq t \leq T}$ es una supermartingala bajo Q y como $x = \inf_{\phi \in \Phi} V_0(\phi)$, entonces

$$E^{\mathbf{Q}}\left[\bar{V}_T(\phi)\right] \leq x \quad \text{pero} \quad h = \bar{V}_T(\phi).$$

Por lo tanto

$$E^{\mathbf{Q}}\left[e^{-rT} h\right] \leq x.$$

En el caso particular de una opción call o put se tiene que el valor en la fecha de ejercicio es una variable aleatoria cuadrado integrable.

Proposición 9.4. El precio de una opción call en la fecha de vencimiento T, es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

Demostración.

Por demostrar que $h = (S_T - K)_+$ es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

$$\begin{aligned}
E^{Q}\left[h^2\right] &= E^{Q}\left[(S_T - K)_+^2\right], \quad (S_T - K)_+ \le \bar{S}_T \\
&\le E^{Q}\left[\bar{S}_T^2\right] \\
&= E^{Q}\left[e^{2rT}\bar{S}_T^2\right] \\
&= e^{2rT}E^{Q}\left[\bar{S}_T^2\right] \\
&= e^{2rT}E^{Q}\left[\left(S_0 e^{\sigma\bar{W}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T}\right)^2\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT}E^{Q}\left[e^{2\sigma\bar{W}_T - \sigma^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT}E^{Q}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{4}\beta^2 T}\right], \quad \text{si} \quad \beta = 2\sigma \\
&= S_0^2 e^{2rT}E^{Q}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{2}\beta^2 T + \frac{1}{2}\beta^2 T - \frac{1}{4}\beta^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT + \frac{1}{4}\beta^2 T}E^{Q}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{2}\beta^2 T}\right] \\
&= S_0^2 e^{2rT + \frac{1}{4}\beta^2 T}
\end{aligned}$$

debido a que

$$E^{Q}\left[e^{\beta\bar{W}_T - \frac{1}{2}\beta^2 T}\right] = 1$$

Proposición 9.5. El precio de una opción put en la fecha de vencimiento T, es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

Demostración.

Por demostrar que $h = (K - S_T)_+$ es una variable aleatoria cuadrado integrable bajo la probabilidad Q.

$$\begin{aligned}
E^{Q}\left[h^2\right] &= E^{Q}\left[(K - S_T)_+^2\right]; \quad K \ge 0 \quad \text{y} \quad K \in R \\
&\le E^{Q}\left[K^2\right] \\
&= K^2 < \infty.
\end{aligned}$$

En conclusión, el valor de una opción call en el tiempo t está definida por la expresión

$$E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}h \middle| \mathcal{F}_t\right] \quad \text{donde} \quad h = (S_T - K)_+ = f(S_T)$$

9.8 MODELO DE BLACK-SCHOLES PARA OPCIONES SOBRE ACCIONES SIN DIVIDENDOS

El problema de la valuación de productos derivados consiste en proporcionar el precio justo a la opción financiera en cualquier momento del tiempo, ya qué cada producto derivado está definido con respecto a su pérfil de pagos terminal, el cual es positivo y $\mathcal{F}_t$-medible bajo la probabilidad Q. Por lo tanto, en cada intervalo de tiempo, el precio de la opción está dada por el valor esperado condicional terminal bajo la probabilidad Q.

Pero antes de calcular este valor esperado que nos servirá para derivar el modelo de Black-Scholes demostraremos la siguiente proposición que será de gran ayuda.

Proposición 9.6. Sea

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \quad \forall t \in [0,T] \quad \text{y} \quad \bar{W}_t = W_t + \left(\tfrac{\mu - r}{\sigma}\right) t$$

entonces

$$S_T = S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
S_T &= S_0 e^{\sigma W_T + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \\
&= S_0 e^{\sigma \bar{W}_T - (\mu - r)T + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \\
&= S_0 e^{\sigma \bar{W}_T + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T} \\
&= S_0 e^{\sigma \bar{W}_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \\
&= S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - r)t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \\
&= S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)} \\
&= S_t e^{r(T-t)} \cdot e^{\sigma(\bar{W}_T - \bar{W}_t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)}
\end{aligned}$$

Proprosición 9.7. El precio de una opción call europea en el tiempo t, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K está dado por

$$c(t, S_t) = S_t N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma(\bar{W}_T-\bar{W}_t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $(\bar{W}_T-\bar{W}_t)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de S_t y t.

$$\begin{aligned} c(t,S_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma(\bar{W}_T-\bar{W}_t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\bar{W}_{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0,T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$c(t,S_t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma w-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)}\mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t}=Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} c(t,S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-r(T-t)}f\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{-r(T-t)}\left(S_t e^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-K\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\tau=T-t$, entonces

$$\begin{aligned} c(t,S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-Ke^{-r\tau}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-Ke^{-r\tau}\right)_+\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau}-Ke^{-r\tau}\right)1_{S_T\geq K}\right]. \end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(S_T-K)_+\right]=E\left[(S_T-K)1_{S_T\geq K}\right]$$

donde

$$1_{S_T\geq K}=\begin{cases}1, & \text{si } S_T\geq K\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{S_T \geq K}$ es equivalente a:

$$
\begin{aligned}
1_{S_T \geq K} &= \left\{\omega \in \Omega : S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau} \geq 0\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : S_t e^{\sigma z\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} \geq Ke^{-r\tau}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\tau}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau} \geq \left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\tau \geq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\tau} \geq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\tau\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= \left\{\omega \in \Omega : z \geq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right\} \\
&= \{\omega \in \Omega : z \geq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \geq 0\}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
c(t, S_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z+d_2\geq 0\}}\right] \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\geq -d_2\}}\right]; \quad Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: -z\geq -d_2\}}\right]; \quad -Z \sim N(0,1) \text{ bajo Q} \\
&= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(S_t e^{z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}\right) 1_{\{\omega\in\Omega: z\leq d_2\}}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \left(S_t e^{-z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(S_t e^{-\frac{1}{2}z^2 - z\sigma\sqrt{\tau}-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} - Ke^{-r\tau}e^{-\frac{1}{2}z^2}\right) \mathrm{d}z \\
&= S_t \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z^2+2z\sigma\sqrt{\tau}+\sigma^2\tau)} \mathrm{d}z - Ke^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\
&= S_t \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z+\sigma\sqrt{\tau})^2} \mathrm{d}z - Ke^{-r\tau} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Sea $N(d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z$$

entonces

$$c(t, S_t) = S_t \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(z+\sigma\sqrt{\tau})^2} \mathrm{d}z - Ke^{-r\tau} N(d_2).$$

Para resolver la primera integral se tiene que hacer un cambio de variable.

Sea $v = z + \sigma\sqrt{\tau}$, $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z$ como $z \leq \mathrm{d}_2 \implies v \leq d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$, entonces

$$\begin{aligned} c(t, S_t) &= S_t \int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\tau}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}v^2} \mathrm{d}v - Ke^{-r\tau} N(d_2) \\ &= S_t N\left(d_2 + \sigma\sqrt{\tau}\right) - Ke^{-r\tau} N(d_2) \end{aligned}$$

si definimos $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau}$ y $\tau = T - t$, entonces

$$c(t, S_t) = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

El precio de una opción put se deriva de la misma forma sólo se tiene que cambiar el perfil de pagos terminal el cual está dado por su valor esperado condicional terminal bajo la probabilidad Q como sigue:

$$E^*\left[e^{-r(T-t)}h \mid F_t\right] = E^*\left[e^{-r(T-t)}f(S_T) \mid F_t\right] \quad \text{donde } h = (K - S_T)_+ = f(S_T)$$

Proprosición 9.8. El precio de una opción put europea en el tiempo t, con fecha de vencimiento T y precio de ejercicio K está dado por

$$p(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S_tN(-d_1)$$

donde

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}h\middle|\mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma(\bar{W}_T-\bar{W}_t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]. \end{aligned}$$

Puesto que S_t es una variable aleatoria $\mathcal{F}_t$-medible y $(\bar{W}_T - \bar{W}_t)$ es independiente de $\mathcal{F}_t$ bajo la probabilidad Q, es posible conocer su precio en el tiempo t como una función de S_t y t.

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma(\bar{W}_T-\bar{W}_t)-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma\bar{W}_{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\right] \end{aligned}$$

ya que $\bar{W}_{T-t}$ se distribuye $N(0, T-t)$ bajo la probabilidad Q, entonces

$$p(t, S_t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma w-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{T-t}\right)}\mathrm{d}w$$

cuando $\bar{W}_{T-t} = Z\sqrt{T-t}$ y Z se distribuye $N(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}f\left(S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r(T-t)}\left(K - S_te^{r(T-t)}\cdot e^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(Ke^{-r(T-t)} - S_te^{\sigma z\sqrt{T-t}-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}\right)_+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Supongamos que $\lambda = T - t$, entonces

$$\begin{aligned} p(t, S_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2} \mathrm{d}z \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)_+\right] \\ &= E^{\mathrm{Q}}\left[\left(Ke^{-r\lambda} - S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right) 1_{K \geq S_T}\right]. \end{aligned}$$

Usando el siguiente lema:

$$E\left[(K - S_T)_+\right] = E\left[(K - S_T) 1_{K \geq S_T}\right]$$

donde

$$1_{K \geq S_T} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad K \geq S_T \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es una función indicadora y la esperanza de una función indicadora es simplemente la probabilidad de que el evento representado por la función indicadora ocurra.

En este caso, la condición $1_{K \geq S_T}$ es equivalente a:

$$\begin{aligned} 1_{K \geq S_T} &= \left\{\omega \in \Omega : Ke^{-r\lambda} - S_t e^{z\sigma\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda} \geq 0\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : Ke^{-r\lambda} \geq S_t e^{\sigma z\sqrt{\lambda} - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : e^{z\sigma\sqrt{\lambda} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda} \leq \left(\tfrac{K}{S_t}\right)\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\lambda \leq \ln\left(\tfrac{K}{S_t}\right)\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z\sigma\sqrt{\lambda} \leq \ln\left(\tfrac{K}{S_t}\right) - (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\lambda\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z \leq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : z \leq -\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\lambda}{\sigma\sqrt{\lambda}}\right\} \\ &= \{\omega \in \Omega : z \leq -d_2\} = \{\omega \in \Omega : z + d_2 \leq 0\} \end{aligned}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
p(t,S_t) &= E^{Q}\left[\left(Ke^{-r\lambda}-S_te^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega:z+d_2\leq 0\}}\right]\\
&= E^{Q}\left[\left(Ke^{-r\lambda}-S_te^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)1_{\{\omega\in\Omega:z\leq -d_2\}}\right];\quad Z\sim N(0,1)\ \text{ bajo Q}\\
&= \int_{-\infty}^{-d_2}\left(Ke^{-r\lambda}-S_te^{z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\\
&= \int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(Ke^{-r\lambda}e^{-\frac{1}{2}z^2}-S_te^{-\frac{1}{2}z^2+z\sigma\sqrt{\lambda}-\frac{1}{2}\sigma^2\lambda}\right)\mathrm{d}z\\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z-S_t\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z^2-2z\sigma\sqrt{\lambda}+\sigma^2\lambda\right)}\mathrm{d}z\\
&= Ke^{-r\lambda}\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z-S_t\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Sea $N(-d)$ la función de distribución normal acumulada, es decir;

$$
N(-d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d}e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z
$$

entonces

$$
p(t,S_t)=Ke^{-r\lambda}N(-d_2)-S_t\int_{-\infty}^{-d_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(z-\sigma\sqrt{\lambda}\right)^2}\mathrm{d}z.
$$

Para resolver la segunda integral se tiene que hacer un cambio de variable. Sea $v=z-\sigma\sqrt{\lambda}$, $\mathrm{d}v=\mathrm{d}z$ como $z\leq -\mathrm{d}_2 \implies v\leq -\left(d_2+\sigma\sqrt{\lambda}\right)$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(t,S_t) &= Ke^{-r\lambda}N(-d_2)-S_t\int_{-\infty}^{-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}v^2}\mathrm{d}v\\
&= Ke^{-r\lambda}N(-d_2)-S_tN\left(-d_2-\sigma\sqrt{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

si definimos $d_1=d_2+\sigma\sqrt{\lambda}$ y $\lambda=T-t$, entonces

$$
p(t,S_t)=Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)-S_tN(-d_1)
$$

donde

$$
d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

y

$$
d_2=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.
$$

CAPITULO 10. PORTAFOLIOS REPLICANTES Y LA FORMULA BLACK-SCHOLES

10.1 INTRODUCION

Una de las razones por las que las fórmulas de valuación de Black-Scholes se popularizaron entre los participantes del mercado es por supuesto su uso como herramientas para la disminución de riesgos financieros. Más aún en este capítulo se presenta la metodología de portafolios replicantes, que utiliza un principio muy intuitivo, ¿Es posible encontrar el precio de un activo como combinación lineal de otros? , en su caso, ¿Qué características debe cumplir?. Si podemos modelar un portafolio que replique los cambios de valor de este "nuevo" activo a través del tiempo, encontraremos sintéticamente su valor con los precios de los otros activos valuados por el mercado.

10.2 ESTRATGIA DE PORTAFOLIOS REPLICANTES.

Recordando nuestro modelo de precios (movimiento Browniano Geométrico):

$$\mathrm{d}S_t = \mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t, \tag{10.1}$$

donde W_t es un proceso de Wiener , i.e. , es normal con media cero, varianza dt e incrementos independientes , o bien ,

$$\mathrm{d}W_t = \mathcal{E}\sqrt{\mathrm{d}t} \quad \text{con} \quad \mathcal{E} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Recordemos las reglas del cálculo estocástico

$$\mathrm{d}W_t \mathrm{d}t = 0, \qquad \mathrm{d}W_t \mathrm{d}W_t = \mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \mathrm{d}t\mathrm{d}t = 0. \tag{10.2}$$

Para una función $c = c(S_t, t)$. La expansión en una serie de Taylor hasta términos de segundo orden conduce a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}c =& \frac{\partial c}{\partial S_t}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}(\mathrm{d}S_t)^2 + 2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t \partial t}\mathrm{d}S_t\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right). \end{aligned} \tag{10.3}$$

Sustituyendo (10.1) y (10.2) en (10.3)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}c =& \frac{\partial c}{\partial S_t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t) + \frac{\partial c}{\partial t}\mathrm{d}t \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)^2 + 2\frac{\partial^2 c}{\partial S_t\partial t}(\mu S_t\mathrm{d}t + \sigma S_t\mathrm{d}W_t)\mathrm{d}t + \frac{\partial^2 c}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2\right) \\ =& \left(\frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2}\sigma^2 S_t^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t \mathrm{d}W_t. \end{aligned} \tag{10.4}$$

definamos ahora un bono cupón cero que sigue la siguiente ecuación libre de riesgo.

$$\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t.$$

entonces la solución esta dada por

$$B_s = B_t e^{r(s-t)}, \quad s \geq t. \tag{10.5}$$

Sea

$$c = \alpha S + \beta B$$

Un portafolio con α unidades del subyacente que sigue un modelo de precios Browniano Geométrico y β unidades de un bono cupón cero con el proceso determinístico de (10.5), encontraremos que debe cumplir nuestro portafolio para replicar el valor del activo c. tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}c =& \alpha \mathrm{d}S_t + \beta \mathrm{d}B_t \\ =& \alpha \left(\mu S_t \mathrm{d}t + \sigma S_t \mathrm{d}W_t\right) + \beta r B_t \mathrm{d}t \\ =& \alpha \left(\mu S_t + \beta r B_t\right) \mathrm{d}t + \alpha\sigma S_t \mathrm{d}W_t. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Igualando los componentes estocásticos de las ecuaciones (10.4) y (10.6)

$$\alpha\sigma S_t = \frac{\partial c}{\partial S_t}\sigma S_t.$$

Entonces

$$\alpha = \frac{\partial c}{\partial S_t.}$$

y

$$\frac{\beta = c - \alpha S_t}{B_t.}$$

Ahora bien

$$\alpha\mu S_t + \beta r B_t = \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + cr - \frac{\partial c}{\partial S_t} S_t r.$$

Igualando las componentes determinísticas de la ecuación (10.6) y (10.4)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} = \frac{\partial c}{\partial S_t}\mu S_t + cr - \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t.$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - cr = 0. \tag{10.7}$$

Que es la ecuación de Black-Scholes cuya solución conocida.

$$c = c(S_t, T-t, K, r, \sigma) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2).$$

Para un Call europeo y

$$p = p(S_t, T - t, K, r, \sigma) = e^{-r(T-t)} K N(-d_2) - S_t N(-d_1).$$

Para un Put europeo con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

y

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T - t}.$$

CAPITULO 11. SUSTITUCION DIRECTA EN LA FORMULA BLACK-SCHOLES

11.1 INTRODUCION

La solución al problema de encontrar el precio de una Opción Europea tipo Call , que fué presentada por Black-Scholes , por primera vez en 1973 , en su trabajo "The Pricing of Options and Corporate Labilities" en el Journal of Political Economy pp. 637-654. Representó un punto de inflexión en la teória y práctica de valuación de activos. En este capitulo se muestra en detalle que dicha formulación satisface la ecuación diferencial parcial lineal parabólica.

11.2 LA SOLUCION DE BLACK-SCHOLES.

La solución propuesta para un Call Europeo

$$c = c(S_t, T-t, K, r, \sigma) = S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2). \tag{11.1}$$

con

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{11.2}$$

y

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{11.3}$$

Satisface la ecuación:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial c}{\partial S_t} r S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S_t^2} - cr = 0. \tag{11.4}$$

Veamos algunas relaciones de utilidad

sabemos que :

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De aqui

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\partial d_1}{\partial t} + \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial d_1}{\partial t} - \frac{\partial d_2}{\partial t} = -\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} \tag{11.5}$$

Observemos que

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2}$$

$$\Rightarrow N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1{}^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t))}$$

$$\Rightarrow N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2} e^{d_1\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$\Rightarrow N'(d_2) = N(d_1) e^{d_1\sigma\sqrt{T-t}} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

y considerando la ecuación (11.2)

$$e^{d_1\sigma\sqrt{T-t}} = e^{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}$$

$$\Rightarrow e^{d_1\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{S_t}{K} e^{r(T-t)} e^{(\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}$$

Sustituyendo el resultado anterior en $N'(d_2)$

$$N'(d_2) = N'(d_1)\frac{S_t}{K} e^{r(T-t)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

de donde obtenemos:

$$N'(d_2) = N'(d_1)\frac{S_t}{K} e^{r(T-t)} \tag{11.6}$$

Veamos cada uno de los componentes de la ecuación (11.4)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - re^{-r(T-t)} K N(d_2) - e^{-r(T-t)} K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial t}$$

de la ecuación (11.6) podemos reescribir la ecuación anterior como sigue:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial t} - re^{-r(T-t)} K N(d_2) - N'(d_1) S_t\frac{\partial d_2}{\partial t}$$

factorizando los términos con $S_t N(d_1)$ y usando la expresión encontrada en(11.5)

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -S_t N'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - re^{-r(T-t)} K N(d_2) \tag{11.7}$$

Para $\frac{\partial c}{\partial S}$:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-r(T-t)} K N'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Haciendo uso de la relación (11.6), reescribimos la ecuación anterior como:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) + S_t N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - S_t N'(d_1)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

Dado que $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, se tiene que $\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{\partial d_1}{\partial S}$ por lo tanto, a partir de la ecuación anterior concluimos que:

$$\frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) \tag{11.8}$$

Finalmente para $\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}$, lo cual se simplifica considerando el último resultado, tenemos:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = N'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}$$

Pero tomando en cuenta (11.2) se sigue que $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$, de donde:

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = N'(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} \tag{11.9}$$

Para concluir, sustituyamos (11.7),(11.8),(11.9) y (11.1) en la ecuación (11.4):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS\frac{\partial c}{\partial S} - rc =$$

$$-SN'(d_1)\frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}} - re^{-r(T-t)}KN(d_2) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 N'(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} + rSN(d_1)$$

$$-r(SN(d_1) - e^{-r(T-t)}KN(d_2)) =$$

$$-\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - re^{-r(T-t)}KN(d_2) + \frac{\sigma SN'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rSN(d_1) - rSN(d_1) + re^{-r(T-t)}KN(d_2) = 0$$

Es la solución a la ecuación de Black-Scholes.

CONCLUSIONES

El Mercado de Derivados y en particular el de Opciones presenta una alternativa de inversión que está desarrollándose de manera importante en las economías emergentes, como es el caso de México, a través del Mercado Mexicano de Derivados S.A. de C.V. (MEXDER). Los diversos tipos de contratos listados que ofrece este mercado presentan básicamente los dos escenarios de inversión: el especulativo y el de cobertura. Desde la vertiente económica, los Derivados constituyen un contrapeso importante para equilibrar los mercados financieros. Así, los contratos de Futuros, Forwards y Opciones ayudan a cubrirse contra fluctuaciones adversas en los precios de acciones, divisas, tasas e índices, entre otros subyacentes.

En cuanto al desarrollo de la Teoría de Derivados, en el caso específico de las Opciones, se cuenta con herramientas que permiten valuar a los activos financieros. El modelo más conocido y utilizado es el objeto de este trabajo, la fórmula de valuación de opciones de Black-Scholes, desarrollada al principio de los 70's Hasta el momento, se han realizado una gran variedad de investigaciones tomando como base este modelo. Como resultado, se han generado un importante número de extensiones, donde la complejidad técnica es también digna de considerarse.

En este trabajo se presentaron cinco alternativas para encontrar y resolver la Fórmula de Black-Scholes que, a pesar de su complejidad, en la práctica, constituyen buenas herramientas de apoyo para la Valuación de Opciones. Hoy en día, el crecimiento acelerado de las llamadas Tecnologías de la Información, conjuntamente con el desarrollo de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales, constituye otra manera viable para enfrentar estos problemas. Sin duda, esta última alternativa, tendrá un campo importante de desarrollo como herramienta de apoyo para la toma de decisiones financieras. Sin soslayar la importancia de continuar investigando sobre la Teoría de Derivados.

Finalmente comentaré que el trabajo de Black-Scholes marcó un hito en los mercados financieros. Una de las razones por las que el comité Nobel decidió otorgarles el premio de economía en 1987 fue la riqueza teórica de su trabajo y su explosiva aplicación en la operación diaria de los mercados financieros en general y de productos derivados en lo especifico.Como hemos comentado, los planteamientos equivalentes de la formula de Black-Scholes motivados por diferentes enfoques técnicos contribuyeron al desarrollo de teorías generales de valuación de activos, al uso intensivo de las técnicas de valuación neutra a riesgo, la modelación de estructuras de tasas de interés, aproximaciones discretas por árboles binomiales, medición de valor en riesgo, simulación de montecarlo, la inmunización de portafolios y en general el manejo y administración de riesgos.

Como vimos en este trabajo, existe relación entre la distribución de los rendimientos de los activos y la ecuación diferencial parcial lineal parabólica planteada originalmente. Las técnicas de cálculo estocástico y de estrategias autofinanciables con los portafolios replicantes, no son sólo fascinantes en su estructura teórica formal, sino que son resultados que actualmente son ampliamente utilizados por las instituciones, para manejar adecuadamente la exposición a la volatilidad de sus inversiones.

El uso generalizado de estas técnicas de modelación se ha vuelto indispensable para la expansión y aprovechamiento de las nuevas oportunidades, surgidas en años recientes en nuestro mundo financiero globalizado.

APENDICE

Teorema A.1. Una medida de probabilidad Q es absolutamente continua con respecto a P si y sólo si existe una variable aleatoria que toma valores en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que

$$\forall A \in \mathcal{F} \quad Q(A) = \int_A Z(w)dP(w)$$

donde Z es la densidad de Q con respecto a P y que frecuentemente se denota por $\frac{dQ}{dP}$.

Proposición A.2. Si Q<<P y Z es la densidad de Q con respecto a P, entonces (P<<Q) son equivalentes si y sólo si Q<<P.

Demostración.

$\Longrightarrow$) Es trivial por teorema A.1.

$\Longleftarrow$) Si Q<<P y Q<<P.

Por demostrar que $\forall A \in \mathcal{F} \;\; Q(A) = 0 \implies P(A) = 0$.

Sea $A \in \mathcal{F}_t \;\; Q(A) = \int_A Z dP$, entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_A 1dP \\ &= \int_A \frac{Z}{Z} dP \\ &= \int_A \frac{1}{Z} Z dP \\ &= \int_A \frac{1}{Z} dQ = 0 \end{aligned}$$

Proposición A.3. Sea $L_t = e^{-\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}$, entonces $\{L_t\}_{0 \leq t \leq T}$ es una martingala y $E[L_t] = 1$ para toda $0 \leq s \leq t$.

Proposición A.4. Sea $Q^{(L_T)}$ con densidad L_T con respecto a la densidad inicial P, entonces la probabilidad $Q^{(L_T)}$ y $Q^{(L_t)}$ coinciden $\mathcal{F}_t$.

Demostración.

Por demostrar que $Q^{(L_T)}(A) = Q^{(L_t)}(A) \;\; \forall A \in \mathcal{F}_t$.

Sea $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{Q}^{(L_T)}(A) &= \int_A L_T \mathrm{dP} \\
&= E[1_A L_T] \\
&= E\left[E[1_A L_T|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= E\left[1_A E[L_T|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= \int_A E[L_T|\mathcal{F}_t]\mathrm{dP} \\
&= \int_A L_t \mathrm{dP} = \mathrm{Q}^{(L_t)}(A).
\end{aligned}$$

Efectivamente $\mathrm{Q}^{(L_t)}(A)$ es una medida de probabilidad, ya que si $A \in \mathcal{F}_t$, entonces

$$\mathrm{Q}^{(L_t)}(A) = \int_A L_t \mathrm{dP} \geq 0 \quad \text{si} \quad L_t > 0$$

y por el resultado de la proposición A.3 se tiene que $\mathrm{Q}^{(L_t)}(A) = 1$.

Proposición A.5. Sea Z una variable aleatiria acotada $\mathcal{F}_t$-medible, entonces la esperanza condicional Z, bajo la probabilidad $\mathrm{Q}^{(L_T)}$ con respecto a $\mathcal{F}_t$ está dada por

$$E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t] = \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}.$$

Demostración.

Sean W y Y dos variables aleatorias $\mathcal{F}_t$-medibles definidas como

$$W = E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t]$$

y

$$Y = \frac{E^{(L_t)}[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}$$

sólo se tiene que demostrar que

$$\forall A \in \mathcal{F}_t; \quad E^{(L_T)}[1_A W] = E^{(L_t)}[1_A Y]$$

$$
\begin{aligned}
E^{(L_T)}[1_A W] &= E^{(L_T)}\left[1_A E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= E^{(L_T)}[1_A Z] \\
&= \int_A Z \mathrm{dP}^{(L_T)} \\
&= \int_A Z L_T \mathrm{dP} \\
&= E[1_A Z L_T] \\
&= E\left[1_A E[Z L_T|\mathcal{F}_t]\right] \\
&= \int_A \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t] L_t}{L_t} \mathrm{dP} \\
&= \int_A \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t} \mathrm{dP}^{(L_t)} \\
&= E^{(L_t)}\left[1_A \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}\right] \\
&= E^{(L_t)}[1_A Y].
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$E^{(L_T)}[Z|\mathcal{F}_t] = \frac{E[Z L_T|\mathcal{F}_t]}{L_t}.$$

Proposición A.6. Sea $\tilde{W}_t = W_t + \theta t$; $\forall t \in [0,T]$, entonces $\forall u \in R$ y $\forall s,t \in [0,T]$ tal que $s \leq t$, entonces

$$E^{(L_T)}\left[e^{iu(\tilde{W}_t - \tilde{W}_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{1}{2}u(t-s)}.$$

BIBLIOGRAFIA

- Baxter, Martin. and Rennie Andrew; Edit. Cambridge University Press, 1996, Financial Calculus.USA.
- Black, Fisher and Scholes Marion; Journal of Political Economy,pp. 637-654. 1973, The Pricing of Options and Corporate Liabilities.USA.
- Hull, C. John; Edit. Prentice Hall, 2000, Options Futures and other Derivatives, Fourth Edition.USA.
- Mikosh, Thomas; Edit. World Scientific, 1998, Elemtary Stochastic Calculus with Finance in View, Advanced Series on Statistical Science and applied Probability Vol.6.USA
- Neftci, N. Salih; Edit. Academic Press, 1996, An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives.USA
- Sherve, Steven; Edit. Beta version Draft, 1997,Stochastic calculus and Finance.USA.
- Wilmot, Paul and Dewynne Jeff and Howison Sam; Edit.Cambridge University Press, 1997,The Mathematics of Financial Derivatives, a student Introdution.ENGLAND.
- Wilmot, Paul; Edit.Wiley, 1998,Derivatives, The Theory and Practice of Financial Engineering.ENGLAND.