

92

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

"ESTIMADOR CRAMER-LUNDBERG PARA  
EL PROBLEMA DE LA RUINA"

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
A C T U A R I O  
P R E S E N T A :

DAVID CONSTANTINO PLASCENCIA PERDOMO

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA EMILIA CABALLERO ACOSTA



2002



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



REPUBLICA DE CHILE  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

**M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

“ESTIMADOR CRAMER-LUNDBERG PARA EL PROBLEMA DE LA RUINA”

realizado por David Constantino Plascencia Perdomo

con número de cuenta 9203788-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario Dra. María Emilia Caballero Acosta  
Propietario Mat. Margarita Elvira Chávez Cano  
Propietario M. en C. Beatriz Rodríguez Fernández  
Suplente Act. Jaime Vázquez Alamilla  
Suplente Dr. Alberto Contreras Cristián

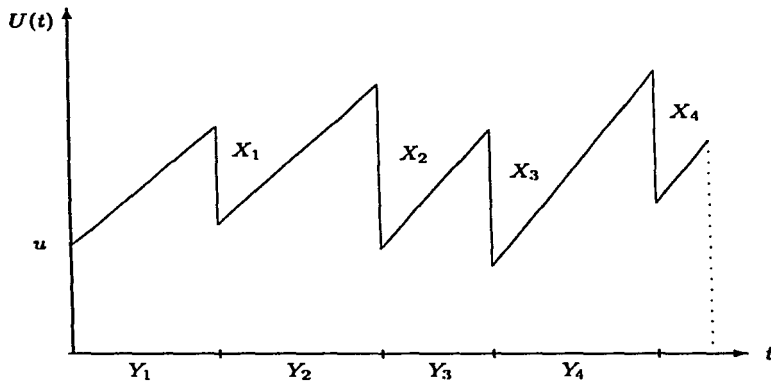
*M. E. Caballero*  
*M. E. Chávez*  
*Beatriz Rodríguez F.*  
*[Signature]*  
*[Signature]*

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz



# Estimador Cramér-Lundberg para el Problema de la Ruina



David C. Plascencia Perdomo

# Agradecimientos.

Esta tesis no estaría culminada sin la ayuda emocional e intelectual de las siguientes personas:

Primeramente quiero agradecer infinitamente a *María Emilia Caballero*, por su paciencia, apoyo valioso en este trabajo y su virtuosa forma de transmitir conocimientos.

También quiero agradecer, con toda mi admiración y cariño, a *Margarita Chávez y Beatriz Rodríguez* quienes además de sus valiosas observaciones, comentarios y correcciones me mostraron lo fascinante de la Estadística y Probabilidad, me brindaron la oportunidad de incursionar en la docencia y sobre todo por su gran calidad humanitaria.

Deseo expresar mi sincero agradecimiento a Jaime Vázquez y Alberto Contreras por sus valiosas observaciones y su labor docente.

Gracias a Mamá y Papá, *Ofelia y Constantino*; por darme la vida, su inextinguible amor y enseñanza.

A mis Hermanos: *Nelly, Omar y Juan Carlos*; por lo mucho que aprendo de sus vidas.

A *Carmen*, quien ha contribuido a alimentar mi inspiración.

A mis queridos amigos de la Facultad de Ciencias: *Ana, Greta, Karla, Roberta, Rocío, Ruth, Uri, Vanesa, Xochitl, Alberto, Cesar, Daniel, Dónovan, Eduardo, Jaime, Juan Carlos, Mario, Mauricio, Ramsés, Renato, Ricardo, Rodrigo, Rogelio, Salvador y Víctor*.

A la UNAM.

# Introducción.

Simbiótica a la actividad de los seres vivos y las cosas se encuentra oculto el riesgo. La humanidad se ha ocupado de cuantificarlo y predecirlo, suscitando que la Ciencia Actuarial haya prosperado, ya que dentro de las necesidades actuales de la sociedad, sobresale la de contar de manera efectiva con la seguridad de remediar una posible pérdida. Dicha necesidad ha conducido a los especialistas de la *Teoría del Riesgo* a desarrollar técnicas perfectamente fundamentadas en los Procesos Estocásticos, encaminadas a estimar en lo económico y de manera convincente la pérdida en cuestión.

La *Teoría de la Ruina* es una rama Actuarial de interés permanente, lo cual se debe a que la probabilidad de ruina se utiliza en las Compañías Aseguradoras como una medida relacionada con el riesgo de incumplimiento en finanzas. En los últimos cien años se han desarrollado matemáticas eficaces de esta teoría, lo cual dota a la Teoría de la Ruina de interés teórico y de importancia práctica.

La intención principal de esta Tesis es el exponer una aplicación de los Procesos Estocásticos en el ámbito Actuarial introduciendo al lector al estudio de los conceptos y métodos estándares de la Teoría de riesgo, para lo cual se trabaja con el modelo de la ruina.

Algunas personas ayudaron en la revisión de esta tesis, sin embargo, la decisión final estuvo en mis manos, por lo que también la responsabilidad total en el resultado final.

---

# Índice General

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>i</b>
<b>Introducción</b>	<b>ii</b>
<b>Abreviaciones y Símbolos</b>	<b>vii</b>
<b>1 Teoría del Riesgo</b>	<b>1</b>
§1.1 El problema de la ruina . . . . .	1
§1.2 El Estimador Cramér-Lundberg . . . . .	13
§1.3 Detección de distribuciones de cola pesada . . . . .	25
§1.3.1 Demandas grandes . . . . .	25
§1.3.2 Gráficas de cuantiles . . . . .	26
§1.4 Teoría de Ruina para Distribuciones de Colas Pesadas . . . . .	31
§1.4.1 Algunos resultados preliminares . . . . .	31
§1.4.2 Teoría de Cramér-Lundberg para Distribuciones Subexponenciales . . . . .	35
§1.4.3 El Monto Total de las Demandas en el Caso Subexponencial . . . . .	40
§1.5 Teoría de Cramér-Lundberg para demandas grandes: Discusión . . . . .	45
§1.5.1 Algunas clases relacionadas con las distribuciones de colas pesadas . . . . .	45
§1.5.2 Otra visión sobre Colas pesadas Cramér-Lundberg . . . . .	49
<b>A Fundamentos</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>61</b>

---

## ABREVIACIONES Y SÍMBOLOS PRINCIPALES

---

$a \wedge b$	mínimo entre $a$ y $b$
$c$	capital inicial
c.s.	casi seguramente
$cov(X, Y)$	covarianza entre la v.a. $X$ y $Y$
$\mathcal{D}$	clase de funciones de variación dominada
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	convergencia en distribución
$\stackrel{\mathcal{D}}{=}$	equivalencia en distribución
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{IP})$	espacio de probabilidad filtrado
$\mathbb{E}$	esperanza
$\mathbb{E}(X G)$	esperanza condicional
$Exp(\lambda)$	distribución exponencial con parámetro $\lambda$
$F$	fd y distribución de una v.a.
$F_I$	distribución de la cola integrada $F_I(x) = \mu^{-1} \int_0^x \bar{F}(y) dy$
$\bar{F}$	cola de $F$
$F^{-1}(y)$	función inversa generalizada
$f(t)$	función de densidad
$F^{n*}(x)$	$n$ -ésima convolución de $F$ ; $F^{1*} = F$ , $F^{0*} = \delta_0$
fd	función de distribución
iid	independiente e idénticamente distribuidas
$\mu$	esperanza de una v.a.
$\{N_t\}$	proceso de conteo
$\rightsquigarrow$	función de
$\mathbb{1}_A$	función indicadora de $A$
$\mathbb{IP}$	medida de probabilidad
$\mathbb{IP}_X$	distribución de $X$
$\psi(u)$	probabilidad de ruina cuando se parte con un capital $u$
$\mathbb{N}$	el conjunto de números naturales
$o(1)$	$a(x) = o(b(x))$ cuando $x \rightarrow \infty$ significa que $\lim_{x \rightarrow \infty} a(x)/b(x) = 0$
$\mathbb{R}$	el conjunto de números reales
$\mathbb{R}^+$	el conjunto de números reales no negativos
$X_{(n)}$	$n$ -ésima estadística de orden



$\rho$	tasa de riesgo premio
$\nu$	exponente de Lundberg
$Q(y)$	función cuantil
$\mathcal{R}_\alpha$	funciones de variación regular con índice $\alpha$
$\mathcal{S}$	familia de distribuciones subexponenciales
$u$	capital inicial
v.a.	variable aleatoria
$\emptyset$	conjunto vacío
$\perp$	independencia
$\ \cdot\ $	norma euclidiana

---

## Capítulo 1

---

# Teoría del Riesgo

### §1.1 El problema de la ruina

El modelo básico de *riesgo* se remota al trabajo de Filip Lundberg quien mediante su tesis en Upsala (1903) estableció las bases de la *teoría de riesgo actuarial*. Lundberg visualizó que los Procesos Poisson se encuentran en el corazón de los modelos de seguros (no~vida). Por medio de una transformación adecuada al tiempo (*tiempo operacional*) fué capaz de restringir su análisis a los Procesos Poisson homogéneos. Este descubrimiento es tan importante como el de Bachelier en 1900; en el cual, al movimiento Browniano se le consideró la herramienta clave para la construcción de modelos financieros.

Harald Cramér y su escuela en Estocolmo, incorporaron las ideas de Lundberg dentro de la teoría en surgimiento de Procesos Estocásticos. Al hacer esto Cramér contribuyó adicionalmente a establecer las bases de las matemáticas para seguros concernientes a no~vida, y con ello contribuyó también de manera importante al desarrollo de la teoría de probabilidad.

El modelo básico que será llamado *Modelo de Cramér-Lundberg* tiene la siguiente estructura:

**Definición 1.1.** El modelo *Cramér-Lundberg* está dado por las condiciones siguientes :

(a) *El proceso del tamaño de la demanda:*

Los tamaños de la demanda  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  son variables aleatorias iid positivas con distribución común  $F$ , media finita  $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ , y varianza

$$\sigma^2 = \text{var}[X_1] < \infty.$$

(b) *Los tiempos de demandas:*

Las demandas ocurren en los instantes aleatorios del tiempo

$$0 < T_1 < T_2 < T_3 \dots$$

(c) *El proceso de llegada de las demandas:*

Es el número de demandas en el intervalo  $[0, t]$  y se denota por:

$$N_t = \sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}, \quad t \geq 0,$$

en donde, por convención,  $\sup \emptyset = 0$ .

(d) *Los tiempos inter-llegadas*

$$(1.1) \quad Y_1 = T_1, \quad Y_k = T_k - T_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots,$$

Son independientes e idénticamente distribuidos (*iid*) y tienen distribución exponencial con media finita  $\mathbb{E}[Y_1] = \frac{1}{\lambda}$

(e) Las sucesiones  $(X_k)$  y  $(Y_k)$  son independientes.

El modelo de renovación estaría dado por (a), (b), (c), (e) y

(d') Los tiempos inter-llegadas  $Y_k$  dados en (1.1) son *iid* con media finita  $\mathbb{E}[Y_1] = \frac{1}{\lambda}$ .

**Observación 1.1.** El modelo de renovación es una ligera generalización del modelo *Cramér-Lundberg* el cual permite un proceso de renovación para el proceso llegada de demandas. Sin embargo en esta tesis solo serán considerados aspectos en torno al modelo *Cramér-Lundberg*.  $\triangle$

**Teorema 1.1.** En el modelo *Cramér-Lundberg*  $(N_t)$  es un proceso *Poisson* homogéneo con intensidad  $\lambda > 0$  por lo que:

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que  $Y_1, \dots, Y_n$  son variables aleatorias independientes con distribución exponencial con parámetro  $\lambda$ , es decir,

$$\mathbf{IP}(Y_i \leq y_i) = \begin{cases} 1 - \exp\{-\lambda y_i\} & \text{si } y_i \geq 0, \\ 0 & \text{si } y_i < 0, \end{cases} \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  representa los tiempos inter-llegadas, esto es,  $Y_1$  es el tiempo en que ocurre el primer evento ( $T_1$ ) y  $Y_n$  es el tiempo de llegada entre el  $(n-1)$ -ésimo y el  $n$ -ésimo evento ( $T_n - T_{n-1}$ ). La variable aleatoria  $T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  representa el tiempo de ocurrencia del  $n$ -ésimo evento, donde por definición,  $T_0 = 0$ .

Como:

$$\mathbf{IE}(e^{itY_k}) = \int_0^\infty e^{ity_k} \lambda e^{-\lambda y_k} dy_k = \frac{\lambda}{(\lambda - it)} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Se tiene que:

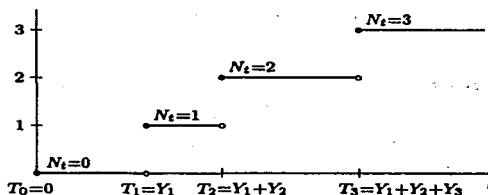
$$\begin{aligned} \mathbf{IE}(e^{itT_n}) &= \mathbf{IE} \left( \exp \left\{ it \sum_{k=1}^n Y_k \right\} \right) \\ &= \mathbf{IE} \left( \prod_{k=1}^n \exp \{ itY_k \} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{IE} (\exp \{ itY_k \}) \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^n \end{aligned}$$

Esta función representa la función característica de una variable aleatoria con distribución Gamma( $n, \lambda$ ), esto es,

$$\mathbf{F}_{T_n}(y) = \mathbf{IP}(T_n \leq y) = \begin{cases} \int_0^y \frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda u} du & \text{para toda } y \geq 0, \\ 0 & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

$N_t$  representa el número de llegadas que ocurren en el intervalo de tiempo  $[0, t]$ .

Figura 1: Proceso Poisson



Como consecuencia de esta definición se tiene que:

“El número de demandas al instante  $t$  es cero” si “El tiempo en el que ocurre la primer demanda es después de  $t$ ”

$$\{N_t = 0\} \quad \text{si} \quad \{t < T_1\}$$

En particular  $N_0 = 0$ . Además

“El número de demandas al instante  $t$  es al menos  $n$ ”  $\Leftrightarrow$  “El tiempo en el que ocurre la  $n$ -ésima llegada es a lo más en el instante  $t$ ”

$$(1.2) \quad \{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

$$\begin{aligned} \{T_n \leq t < T_{n+1}\} &= \{T_n \leq t\} \cap \{t < T_{(n+1)}\} \\ &= \{N_t \geq n\} \cap \{t \geq T_{(n+1)}\}^c \\ &= \{N_t \geq n\} \cap \{N_t \geq (n+1)\}^c \\ &= \{N_t \geq n\} \cap \{N_t < (n+1)\} \\ &= \{N_t = n\} \end{aligned}$$

por lo tanto :

$$(1.3) \quad \{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

⇒

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(T_n \leq t < T_{n+1}) \\
 &= \mathbb{P}(T_n \leq t, Y_{n+1} > t - T_n) \\
 &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \mathbb{1}_{\{Y_{n+1} > t - T_n, T_n \leq t\}} \sigma(Y_{n+1}) \right] \right] \\
 &\stackrel{\text{Lema A.1}}{=} \mathbb{E} \left[ \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{Y_{n+1} > t - w\}} \mathbb{1}_{\{w \leq t\}} \mathbb{P}_{T_n}(dw) \right] \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{Y_{n+1} > t - w\}}) \mathbb{1}_{\{w \leq t\}} \left[ \lambda^n \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda w} \right] dw \\
 &= \int_{\{0 \leq w \leq t\}} \mathbb{P}(Y_{n+1} > t - w) \mathbb{P}_{T_n}(dw) \\
 &= \int_0^t e^{-\lambda(t-w)} \left[ \lambda^n \frac{w^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda w} \right] dw \\
 &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t w^{n-1} dw \\
 &= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!},
 \end{aligned}$$

Es decir,  $N_t$  tiene una distribución Poisson con parámetro  $\lambda t$ ,  $(N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson con intensidad  $\lambda$ .

- i) Para  $0 < t_1 < \dots < t_k$  los incrementos  $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$  son independientes.
- ii) Para toda  $0 \leq s < t$  y  $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = \frac{(\lambda(t-s))^k e^{-\lambda(t-s)}}{k!}$$

Sea  $t$  fija y considérense los eventos que ocurren después de  $t$ . El primer tiempo de llegada después de  $t$  es  $T_{N_t+1} - t$  ya que  $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$ ; el tiempo de llegada entre el primero y el segundo después de  $t$  es  $Y_{N_t+2}$ , etc. Entonces los tiempos de llegada después de  $t$  son:

$$(1.4) \quad Y_1^{(t)} = T_{N_t+1} - t, Y_2^{(t)} = Y_{N_t+2}, \dots, Y_n^{(t)} = Y_{N_t+n}, \dots$$

Ahora, si  $s > 0$  y  $m \in \mathbb{N}$  por (1.2)

$$\begin{aligned} \{N_{t+s} - N_t \geq m\} &= \{N_{t+s} \geq N_t + m\} \\ &= \{T_{N_t+m} \leq t + s\} \\ &= \{T_{N_t+1} + Y_{N_t+2} + \dots + Y_{N_t+m} \leq t + s\} \\ &= \{Y_1^{(t)} + Y_2^{(t)} + \dots + Y_m^{(t)} \leq s\} \end{aligned}$$

entonces

$$(1.5) \quad N_{t+s} - N_t = \max \left\{ m \in \mathbb{N} : Y_1^{(t)} + \dots + Y_m^{(t)} \leq s \right\}$$

y

$$\{N_{t+s} - N_t = m\} = \left\{ Y_1^{(t)} + \dots + Y_m^{(t)} \leq s < Y_1^{(t)} + \dots + Y_{m+1}^{(t)} \right\}$$

Se pretende demostrar que las variables aleatorias (1.4) son independientes y exponenciales condicionadas al evento  $\{N_t = n\}$ .

Sea  $y \geq 0$  y  $\mathbb{IP}_{T_n}$  la distribución de  $T_n$ , como  $Y_{n+1}$  tiene distribución exponencial

$$\begin{aligned} \mathbb{IP} \left( N_t = n, Y_1^{(t)} > y \right) &= \mathbb{IP} \left( T_n \leq t < T_{n+1}, T_{n+1} - t > y \right) \\ &= \mathbb{IP} \left( T_n \leq t, T_{n+1} > t + y \right) \\ &= \mathbb{IP} \left( T_n \leq t, Y_{n+1} > t + y - T_n \right) \\ &= \int_{\{x \leq t\}} \mathbb{IP} \left( Y_{n+1} > t + y - x \right) \mathbb{IP}_{T_n}(dx) \\ &= \int_{\{x \leq t\}} e^{-\lambda(t+y-x)} \mathbb{IP}_{T_n}(dx) \\ &= e^{-\lambda y} \int_{\{x \leq t\}} \mathbb{IP} \left( Y_{n+1} > t - x \right) \mathbb{IP}_{T_n}(dx) \\ &= e^{-\lambda y} \mathbb{IP} \left( T_n \leq t < T_{n+1} \right) \\ &= \mathbb{IP} \left( N_t = n \right) e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

Ahora, como las variables  $Y_n$  son independientes

$$\mathbb{IP} \left( N_t = n, Y_1^{(t)} > y_1, \dots, Y_j^{(t)} > y_j \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{IP} (N_t = n, T_{N_t+1} - t > y_1, Y_{N_t+2} > y_2, \dots, Y_{N_t+j} > y_j) \\
 &= \mathbf{IP} (T_n \leq t < T_{n+1}, T_{n+1} - t > y_1, Y_{n+2} > y_2, \dots, Y_{n+j} > y_j) \\
 &= \mathbf{IP} (T_n \leq t, T_{n+1} - t > y_1) e^{-\lambda y_2} \dots e^{-\lambda y_j} \\
 &= \mathbf{IP} (N_t = n) e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda y_2} \dots e^{-\lambda y_j}
 \end{aligned}$$

si se toma  $H = (y_1, \infty) \times \dots \times (y_j, \infty)$  entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{IP} (N_t = n, (Y_1^{(t)}, \dots, Y_j^{(t)}) \in H) &= \mathbf{IP}(N_t = n) \mathbf{IP} ((Y_1, \dots, Y_j) \in H) \\
 &= \mathbf{IP}(N_t = n) e^{-\lambda y_1} e^{-\lambda y_2} \dots e^{-\lambda y_j}
 \end{aligned}$$

y por el Lema de clases monótonas se cumple para todo  $H \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^j)$ .

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{IP} (N_t = n, N_{t+s_i} - N_t = m_i, 1 \leq i \leq u) &= \mathbf{IP} (N_t = n) \cdot \\
 &\mathbf{IP} (N_{s_i} = m_i, 1 \leq i \leq u)
 \end{aligned}$$

de aquí por inducción sobre  $k$ , si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$

$$\mathbf{IP} (N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = n_i, 1 \leq i \leq k) = \prod_{i=1}^k \mathbf{IP} (N_{t_i - t_{i-1}} = n_i)$$

lo cual demuestra (i) y como  $\mathbf{IP} (N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$  se cumple (ii). ■

Lo cual significa que los incrementos sobre intervalos de tiempo disjuntos son variables aleatorias independientes. Por ejemplo, un portafolio de automóviles usualmente satisface esta condición. Sin embargo, el número de accidentes severos en plataformas petroleras no, puesto que la imposición de normas de seguridad posteriores cambiará la distribución de accidentes similares en periodos futuros.

**Definición 1.2.** El proceso *Monto total en las demandas* o *Monto agregado en demandas*  $(S(t))_{t \geq 0}$  del portafolio subyacente se define como:



$$(1.6) \quad S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N_t} X_i & \text{si } N_t > 0, \\ 0 & \text{si } N_t = 0. \end{cases}$$

**Lema 1.1.** La distribución de  $S(t)$  está dada por  $G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{n*}(x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ , donde  $\mathbf{F}^{n*}(x) = \mathbf{IP}(\sum_{i=1}^n X_i \leq x)$  representa la  $n$ -ésima convolución de  $\mathbf{F}$ .

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} G_t(x) &= \mathbf{IP}(S(t) \leq x) = \mathbf{IP}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{IP}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq x, N_t = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{IP}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \leq x | N_t = n\right) \mathbf{IP}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{IP}\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq x\right) \mathbf{IP}(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{n*}(x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$(1.7) \quad G_t(x) = \mathbf{IP}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}^{n*}(x) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

**Observación 1.2.** Durante todo el texto, para una fd general  $\mathbf{H}$  sobre  $(-\infty, \infty)$ ,

$$\mathbf{H}^{0*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

△

El proceso de riesgo resultante  $(U(t))_{t \geq 0}$  se define como

$$(1.8) \quad U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0$$

En (1.8),  $u \geq 0$  denota *el capital inicial* y  $c > 0$  una *tasa premio de utilidad*.

La siguiente definición introduce una herramienta útil en la medición de riesgo de una reserva,

**Definición 1.3.** (Ruina)

La probabilidad de ruina en tiempo finito (o con horizonte finito) es:

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(U(t) < 0 \text{ para algún } t \leq T), \quad 0 < T < \infty, \quad u \geq 0.$$

La probabilidad de ruina en tiempo infinito (o con horizonte infinito) es:

$$\psi(u) = \psi(u, \infty), \quad u \geq 0.$$

Los *tiempos de ruina*:

$$\tau(T) = \inf\{t : 0 \leq t \leq T, \quad U(t) < 0\}, \quad 0 < T \leq \infty$$

Donde, por convención,  $\inf \emptyset = \infty$ . Habitualmente se denota por  $\tau = \tau(\infty)$  el tiempo de ruina con horizonte infinito.

Observe que  $\psi(u)$  es una cota superior para  $\psi(u, T)$

El siguiente resultado es elemental.

**Lema 1.2.** Para el modelo de renovación,

$$(1.9) \quad \mathbb{E}[U(t)] = u + ct - \mu \mathbb{E}[N_t].$$

Para el modelo Cramér-Lundberg,

$$(1.10) \quad \mathbb{E}[U(t)] = u + ct - \lambda \mu t.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que  $\mathbb{IE}[U(t)] = u + ct - \mathbb{IE}[S(t)]$  y

$$\begin{aligned}
 \mathbb{IE}[S(t)] &= \mathbb{IE}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i\right) \\
 &= \mathbb{IE}\left(\mathbb{IE}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t\right)\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{IE}\left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i \mid N_t = k\right) \mathbb{IP}(N_t = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{IE}\left(\sum_{i=1}^k X_i\right) \mathbb{IP}(N_t = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \mathbb{IE}(X_i) \mathbb{IP}(N_t = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \mu \mathbb{IP}(N_t = k) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mu \mathbb{IP}(N_t = k) \\
 &= \mu \mathbb{IE}(N_t)
 \end{aligned}$$

Para el modelo *Cramér-Lundberg*  $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$  por lo que:

$$\mathbb{IE}(S(t)) = \mu \lambda t$$

Este lema elemental es de gran utilidad ya que proporciona la determinación de una tasa premio  $c$ . La determinación de una tasa adecuada obviamente depende del criterio utilizado para definir "adecuada". A grandes rasgos depende de la medida de solvencia que se desea optimizar sobre un periodo de tiempo dado. La medida obvia (lo cual no significa que sea la única) disponible en este caso es la probabilidad de ruina  $\psi(u, T)$  con  $T \leq \infty$ . La tasa premio  $c$  debe ser elegida de tal forma que resulte una  $\psi(u, T)$  pequeña para  $u, T$  fijos. Un primer paso en esta dirección es pedir que  $\psi(u) < 1 \quad \forall u \geq 0$ . Sin embargo, puesto que  $\psi(u) = \mathbb{IP}(\tau < \infty)$ , esto es equivalente a pedir que  $\mathbb{IP}(\tau = \infty) > 0$ .

Como una consecuencia inmediata de (1.10) se tiene que en el modelo de

Cramér-Lundberg, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{IE}(U(t)) &= u + (c - \lambda\mu)t(1 + o(1)) \\ &= u + \left(\frac{c}{\lambda\mu} - 1\right) \lambda\mu t(1 + o(1)).\end{aligned}$$

Por consiguiente,  $\frac{\mathbf{IE}(U(t))}{t} \rightarrow c - \lambda\mu$ , de tal forma que una condición obvia con respecto a la solvencia será pedir que  $c - \lambda\mu > 0$ , lo cual garantiza que  $U(t)$  tenga tendencia positiva para  $t$  grande. Esto último conduce a la *condición básica de ganancia neta* en el modelo de renovación:

$$(1.11) \quad \rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0.$$

La constante  $\rho$  se conoce como “*safety loading*”, la cual se interpreta como una *tasa de riesgo premio*, por lo que la utilidad premio sobre el periodo  $[0, t]$  debe ser igual a  $ct = (1 + \rho)\mathbf{IE}(N_t)\mathbf{IE}(X_t) = (1 + \rho)\lambda\mu t$ .

Por definición del proceso de riesgo, la ruina puede ocurrir únicamente en los tiempos de demanda  $T_i$ , por lo tanto para  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \mathbf{IP}(u + ct - S(t) < 0 \text{ para algún } t \geq 0) \\ &= \mathbf{IP}(u + cT_n - S(T_n) < 0 \text{ para alguna } n \geq 1) \\ &= \mathbf{IP}\left(u + c \sum_{k=1}^n Y_k - \sum_{k=1}^n X_k < 0 \text{ para alguna } n \geq 1\right) \\ &= \mathbf{IP}\left(u + \sum_{k=1}^n (cY_k - X_k) < 0 \text{ para alguna } n \geq 1\right) \\ &= \mathbf{IP}\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) > u\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\psi(u) < 1$  equivale a la condición

$$(1.12) \quad 1 - \psi(u) = \mathbf{IP}\left(\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u\right) > 0 \quad u \geq 0.$$

De (1.12) es posible deducir que, en el modelo de renovación, la determinación de la probabilidad de no-ruina  $1 - \psi(u)$  se reduce al estudio de la fd del último

máximo de una caminata aleatoria, de hecho, considérese la sucesión de v.a. iid.

$$Z_k = X_k - cY_k, \quad k \geq 1,$$

y la caminata aleatoria correspondiente

$$(1.13) \quad R_0 = 0, \quad R_n = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad n \geq 1.$$

Observe que  $\mathbb{E}[Z_1] = \mu - c/\lambda < 0$  es precisamente la condición básica de ganancia neta ( 1.11 ), lo cual indica que la caminata aleatoria  $R_n$  tiene tendencia negativa, por lo tanto la probabilidad de no-ruina está dada por:

$$1 - \psi(u) = \mathbb{IP} \left( \sup_{n \geq 1} R_n \leq u \right)$$

Esta probabilidad puede ser determinada por medio de la *identidad de Spitzer*, la cual para una caminata aleatoria general, proporciona la distribución de este último supremo. Una aplicación de este último resultado permite expresar la probabilidad de no-ruina como una función de distribución geométrica compuesta, i.e.

$$(1.14) \quad 1 - \psi(u) = (1 - \alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n H^{n*}(u)$$

para alguna constante  $\alpha \in (0, 1)$  y una fd  $H$ . Como se definió anteriormente  $H^{n*}(u)$  representa la  $n$ -ésima convolución de  $H$ . Ambas  $\alpha$  y  $H$  pueden ser determinadas en general por medio de la teoría clásica de *Wiener-Hopf*.

Las estimaciones de  $\psi(u)$  se pueden adecuar mediante una gran categoría de modelos que aplican una variedad de técnicas (principalmente analíticas), las cuales arrojan relaciones funcionales como la de (1.14). Vá mas allá de los objetivos de esta tesis el revisar estas metodologías en detalle. Además de la metodología *Wiener-Hopf* para el cálculo de  $\psi(u)$ , la teoría de renovación también produce estimadores relevantes, como se mostrará en la siguiente sección. De hecho el estudio se enfoca en el modelo *Cramér-Lundberg*, mostrando primeramente como se ven los estimadores en un "régimen de demandas pequeñas". Posteriormente se discutirá que teoría debe ser utilizada con el fin de proporcionar estimadores cuando las demandas son "grandes".

## §1.2 El Estimador Cramér-Lundberg

En la sección previa se mencionó un método general para obtener estimadores de la probabilidad de ruina  $\psi(u)$  en el modelo de renovación. Si el estudio se limita al modelo *Cramér-Lundberg* se puede obtener una fórmula para  $\psi(u)$  contemplando explícitamente la función de distribución  $F$  del tamaño de la demanda. Para el modelo de *Cramér-Lundberg* bajo la condición de ganancia neta  $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 > 0$  se cumple que:

$$(1.15) \quad 1 - \psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} F_I^{n*}(u),$$

donde

$$(1.16) \quad F_I(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy, \quad x \geq 0,$$

denota la *distribución de la cola integrada* y

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad x \geq 0,$$

Denota la cola de la fd  $F$ . Posteriormente se revela como es que la fórmula (1.15) es la herramienta fundamental para estimar probabilidades de ruina bajo la suposición de demandas grandes. Adicionalmente se dará una prueba de (1.15) en el Teorema (1.2). En el resultado, la noción de *transformada de Laplace-Stieltjes* desempeña un papel crucial.

**Definición 1.4.** (*Transformada de Laplace-Stieltjes*)

Si  $H$  es una fd concentrada en  $(0, \infty)$ , entonces

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dH(x), \quad s \in \mathbb{R},$$

denota la *Transformada de Laplace-Stieltjes* de  $H$ .

**Observación 1.3.** Dependiendo del comportamiento de  $\bar{H}(x)$  para  $x$  grande,  $\hat{h}(s)$  puede ser finita para un conjunto de valores mas grande que  $s \geq 0$ . En general,  $\hat{h}(s) < \infty$  para  $s > -\gamma$  digamos, donde  $0 \leq \gamma < \infty$  es la abscisa de convergencia para  $\hat{h}(s)$ .  $\triangle$

Los siguientes estimadores de *Cramér-Lundberg* de las probabilidades de ruina  $\psi(u)$  son fundamentales en la teoría de riesgo.

**Teorema 1.2.** (*Teorema de Cramér-Lundberg*)

Considérese el modelo *Cramér-Lundberg* incluyendo la condición de ganancia neta  $\rho > 0$ . Supongase que existe  $\nu > 0$  tal que,

$$(1.17) \quad \hat{f}_I(-\nu) = \int_0^{\infty} e^{\nu x} dF_I(x) = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \rho$$

Entonces las siguientes relaciones son válidas:

(a) Para toda  $u \geq 0$

$$(1.18) \quad \psi(u) \leq e^{-\nu u}$$

(b) Si, además

$$(1.19) \quad \int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx < \infty$$

entonces

$$(1.20) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} \psi(u) = C < \infty$$

donde

$$(1.21) \quad C = \left[ \frac{\nu}{\rho\mu} \int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx \right]^{-1}$$

(c) En el caso de una función de distribución exponencial,  $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu}}$

(1.15) se reduce a

$$(1.22) \quad \psi(u) = \frac{1}{1 + \rho} \exp \left\{ -\frac{\rho}{\mu(1 + \rho)} u \right\} \quad u \geq 0$$

**Observación 1.4.** La condición fundamental, llamada también *condición de Cramér-Lundberg* (1.17), se puede expresar alternativamente mediante la siguiente identidad:

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}$$

△

**Observación 1.5.** Se obtiene inmediatamente de la definición de transformada de Laplace-Stieltjes que, siempre que  $\nu$  en (1.17) exista, se determina de manera única.  $\triangle$

DEMOSTRACIÓN. de (b)

Sea  $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ . Por (1.12) que  $\delta(u)$  se puede expresar por medio de la caminata aleatoria generada por  $(X_i - cY_i)$ . De manera que:

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \mathbf{IP}(S(t) - ct \leq u \quad \forall t > 0) \\ &= \mathbf{IP}\left(\sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u \quad \forall n \geq 1\right) \\ &= \mathbf{IP}\left(\sum_{k=2}^n (X_k - cY_k) \leq u + cY_1 - X_1 \quad \forall n \geq 2, X_1 - cY_1 \leq u\right) \\ &= \mathbf{IP}(S_1(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \quad \forall t > 0, X_1 - cY_1 \leq u), \end{aligned}$$

Donde  $S_1(t)$  es una copia independiente de  $S$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \delta(u) &= \mathbf{IE}\left(\mathbf{IE}\left(\mathbb{1}_{S_1(t)-ct \leq u + cY_1 - X_1} \quad \forall t > 0, X_1 - cY_1 \leq u \mid Y_1, X_1\right)\right) \\ &= \mathbf{IE}\left(\mathbf{IP}\left(S_1(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \quad \forall t > 0, X_1 - cY_1 \leq u \mid Y_1, X_1\right)\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{u+cs} \mathbf{IP}(S_1(t) - ct \leq u + cY_1 - X_1 \quad \forall t > 0) d\mathbf{F}(x) \lambda e^{-\lambda s} ds \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \int_0^{u+cs} \delta(u + cs - x) d\mathbf{F}(x) ds \\ &= \int_u^\infty \lambda e^{-\lambda\left(\frac{z-u}{c}\right)} \int_0^{u+c\left(\frac{z-u}{c}\right)} \delta\left(u + c\left(\frac{z-u}{c}\right) - x\right) d\mathbf{F}(x) \frac{1}{c} dz \\ &= \frac{\lambda}{c} e^{\frac{u\lambda}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[ \int_0^z \delta(z-x) d\mathbf{F}(x) \right] dz \end{aligned}$$

Se empleó el cambio de variable  $u + cs = z \Rightarrow ds = dz/c$

$$(1.23) \quad \delta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{u\lambda}{c}} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda z}{c}} \left[ \int_0^z \delta(z-x) d\mathbf{F}(x) \right] dz$$

Lo cual ilustra que  $\delta$  es absolutamente continua con densidad

$$(1.24) \quad \delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) d\mathbf{F}(x)$$



Para esta ecuación de  $1 - \psi(u)$  puede desarrollarse la teoría concerniente a la ruina en el modelo clásico *Cramér-Lundberg*. Un punto clave es que la integral en (1.24) es de tipo convolución; lo cual abre las puertas a la teoría de renovación.

Al integrar (1.24) de 0 a  $t$  con respecto a la medida de Lebesgue se obtiene

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \int_0^u \delta(u-x) d\mathbf{F}(x) du \\ &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-x) \mathbf{F}(x) dx.\end{aligned}$$

Finalmente se llega a la solución,

$$(1.25) \quad \delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-x) \bar{\mathbf{F}}(x) dx.$$

Obsérvese que  $\delta(0)$  sigue siendo desconocida. Sin embargo, al considerar que  $t \uparrow \infty$  en (1.25) y al emplear la condición de ganancia neta ( $\delta(\infty) = 1 - \psi(\infty) = 1$ ) ocurre que:

$$\begin{aligned}\delta(\infty) &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \delta(\infty-x) \bar{\mathbf{F}}(x) dx. \\ \Rightarrow 1 &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \bar{\mathbf{F}}(x) dx \\ \Rightarrow 1 &= \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \mathbf{IE}(X) \\ \Rightarrow 1 &= \delta(0) + \frac{\lambda\mu}{c} \\ \Rightarrow \delta(0) &= 1 - \frac{\lambda\mu}{c} = \frac{\rho}{(1+\rho)} \quad \text{consecuentemente,}\end{aligned}$$

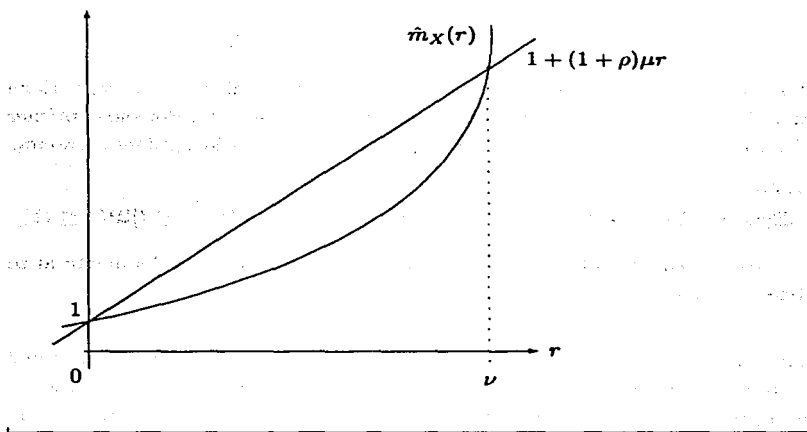
$$(1.26) \quad \delta(t) = \frac{\rho}{1+\rho} + \frac{1}{1+\rho} \int_0^t \delta(t-x) d\mathbf{F}_I(x),$$

Donde la distribución de la cola integrada  $\mathbf{F}_I$  se definió en (1.16). Obsérvese que de (1.26), al usar la transformada de Laplace-Stieltjes se puede obtener la fórmula (1.15). La ecuación (1.26) parece una ecuación de renovación; ésta

es sin embargo una diferencia crucial y es exactamente el punto en la demostración donde se considera una condición de demandas pequeñas de tipo (1.17).

Existe una conexión intrínseca entre el coeficiente de ajustamiento y la probabilidad de ruina, lo cual se verá en el siguiente teorema.

Figura : Coeficiente de ajustamiento  $\nu$



**Teorema 1.3.** Para  $u \geq 0$ ,

$$(1.27) \quad \psi(u) = \frac{e^{-\nu u}}{\mathbb{E}\left[e^{-\nu U(\tau)} \mid \tau < \infty\right]}$$

DEMOSTRACIÓN. Para  $t > 0$  y  $r > 0$  considérese

(1.28)

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = \mathbb{E}[e^{-rU(t)} | \tau \leq t] \mathbb{P}(\tau \leq t) + \mathbb{E}[e^{-rU(t)} | \tau > t] \mathbb{P}(\tau > t)$$

Puesto que  $U(t) = u + ct - S(t)$ , el término del lado izquierdo es

(1.29) 
$$\exp\{-ru - rct + \lambda t[\hat{m}_X(r) - 1]\}.$$

El primer término del lado derecho, se escribe así:

$$\begin{aligned} U(t) &= U(\tau) + [U(t) - U(\tau)] \\ &= U(\tau) + c(t - \tau) - [S(t) - S(\tau)]. \end{aligned}$$

Para una  $\tau$  dada, el término en corchetes es independiente de  $U(\tau)$  y tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro  $\lambda(t - \tau)$ . Por eso el primer término del lado derecho de (1.28) se puede escribir de la siguiente manera:

(1.30)

$$\mathbb{E}[\exp(-rU(\tau)) \exp\{-rc(t - \tau) + \lambda(t - \tau)[\hat{m}_X(r) - 1]\} | \tau \leq t] \mathbb{P}(\tau \leq t).$$

Las expresiones (1.29) y (1.30) pueden simplificarse notablemente si se elige  $\tau$  tal que

$$-rc + \lambda[\hat{m}_X(r) - 1] = 0$$

Existen dos soluciones. La solución  $r = 0$  proporciona una identidad trivial cuando sustituimos en (1.28) mientras que la otra solución,  $r = \nu$ , servirá para el propósito. Si, con  $r = \nu$ , se sustituye en (1.28) la expresión queda de la siguiente forma:

(1.31) 
$$e^{-\nu u} = \mathbb{E}[e^{-\nu U(\tau)} | \tau \leq t] \mathbb{P}(\tau \leq t) + \mathbb{E}[e^{-\nu U(t)} | \tau > t] \mathbb{P}(\tau > t).$$

Al considerar que  $t \rightarrow \infty$ . El primer término del lado derecho converge a

$$\mathbb{E}[e^{-\nu U(\tau)} | \tau < \infty] \psi(u).$$

El teorema (1.3) se cumple si es posible demostrar que el segundo término del lado derecho tiende a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ . Lo cual se demuestra como sigue.

Sea  $\alpha = c - \lambda \mathbf{E}(X)$ ,  $\beta^2 = \lambda \mathbf{E}(X^2)$ . De esta manera

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[U(t)] &= \mathbf{E}[u + ct - S(t)] = u + \alpha t \\ \text{Var}[U(t)] &= \text{Var}[S(t)] = \beta^2 t.\end{aligned}$$

Considérese la función  $u + \alpha t - \beta t^{2/3}$ , la cual es positiva para  $t$  suficientemente grande. Ahora hay que dividir el segundo término del lado derecho de la ecuación (1.31) haciendo distinción cuando  $U(t)$  es menor o mayor que  $u + \alpha t - \beta t^{2/3}$ . Con esta partición, se tiene:

$$\begin{aligned}& \mathbf{E}[e^{-\nu U(t)} | \tau > t, 0 \leq U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{2/3}] \mathbf{P}[\tau > t, 0 \leq U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{2/3}] \\ & + \mathbf{E}[e^{-\nu U(t)} | \tau > t, U(t) > u + \alpha t - \beta t^{2/3}] \mathbf{P}[\tau > t, U(t) > u + \alpha t - \beta t^{2/3}] \\ & \leq \mathbf{P}[U(t) \leq u + \alpha t - \beta t^{2/3}] + \exp[-\nu(u + \alpha t - \beta t^{2/3})] \\ & \leq t^{-1/3} + \exp[-\nu(u + \alpha t - \beta t^{2/3})]\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Chebyshev.

Con esta cota superior, el segundo término del lado derecho en (1.31) desaparece cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Ahora hay que reescribir (1.26) como sigue en términos de  $\psi(u) = 1 - \delta(u)$ , tomando  $\alpha = \frac{1}{1+\rho} < 1$ ,

$$(1.32) \quad \psi(u) = \alpha \bar{\mathbf{F}}_I(u) + \int_0^u \psi(u-x) d(\alpha \mathbf{F}_I(x)).$$

Ya que  $0 < \alpha < 1$ , la ecuación anterior se le llama *ecuación de renovación defectuosa*.

**Definición 1.5.** Se define la fd transformada de Esscher como:

$$d\mathbf{F}_{I,\nu}(x) = e^{\nu x} d(\alpha \mathbf{F}_I(x)),$$

donde  $\nu$  es el exponente que aparece en la condición (1.17). Al usar esta notación, de (1.32) se obtiene que:

$$e^{\nu u} \psi(u) = \alpha e^{\nu u} \bar{\mathbf{F}}_I(u) + \int_0^u e^{\nu(u-x)} \psi(u-x) d\mathbf{F}_{I,\nu}(x),$$

la cual, por la condición (1.17), es una ecuación de renovación estándar. Una aplicación del *teorema clave de la teoría de renovación*, Teorema A4.3(b) [12] produce:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} e^{\nu u} \psi(u) = \left[ \frac{\nu}{\rho \mu} \int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx \right]^{-1}$$

la cual es exactamente (1.20)-(1.21). Se verifican las condiciones necesarias para aplicar el *teorema clave de renovación* de Smith, A4.3 [12] por integración por partes y al usar (1.19),

$$\alpha e^{\nu u} \bar{F}_I(u) = \int_u^{\infty} e^{\nu x} d(\alpha F_I(x)) - \nu \int_u^{\infty} \alpha \bar{F}_I(x) e^{\nu x} dx.$$

Ya que  $\alpha e^{\nu u} \bar{F}_I(u)$  es la diferencia de dos funciones no crecientes Riemann integrables, y por consiguiente es directamente Riemann integrable. Por otra parte,

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{\nu u} \bar{F}_I(u) du = \alpha \frac{1 - \hat{f}_I(-\nu)}{-\nu} = \frac{\rho}{\nu(1 + \rho)} < \infty,$$

y

$$\int_0^{\infty} x dF_{I,\nu}(x) = \frac{1}{\mu(1 + \rho)} \int_0^{\infty} x e^{\nu x} \bar{F}(x) dx < \infty,$$

por (1.19). ■

Debido a la importancia considerable de asegurar una solución,  $\nu$  de (1.17) tiene un nombre especial:

**Definición 1.6.** (*Exponente de Lundberg*)

Dada una fd  $F$  correspondiente al tamaño de la demanda, la constante  $\nu > 0$  de (1.17) que satisface

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda},$$

Se conoce como *Exponente de Lundberg* o *Coefficiente de ajustamiento* del proceso de riesgo subyacente.

Regresando a (1.17), la existencia de  $\nu$  asegura que  $\hat{f}_I(s)$  exista en una vecindad no vacía de 0 causando que la cola  $\bar{F}_I$  de la fd (correspondiente al

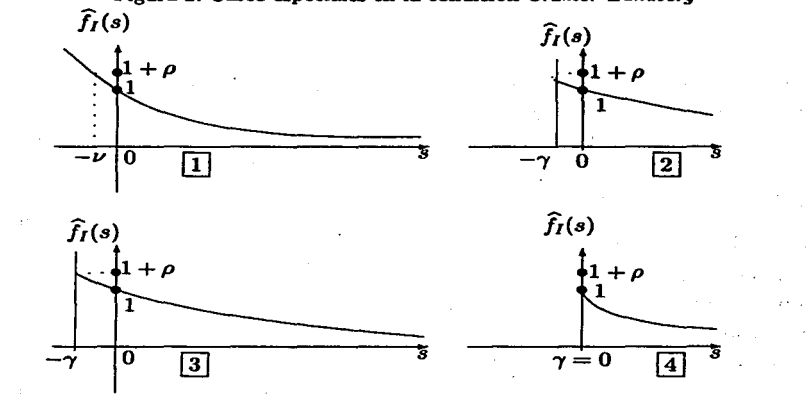
tamaño de la demanda) integrada, y de ahí también la cola  $\bar{F}$ , esté acotada exponencialmente. De hecho, se sigue de la desigualdad de Markov que:

$$\bar{F}(x) \leq e^{-\nu x} \mathbf{E} [e^{\nu X_1}], \quad x > 0.$$

Esta desigualdad significa que las demandas grandes son muy improbables (probabilidades exponencialmente pequeñas) de ocurrir. Por esta razón la condición (1.17) se conoce comúnmente como *condición de demandas pequeñas*. La condición *Cramér-Lundberg* se puede discutir gráficamente. La existencia de  $\nu$  en (1.17) depende crucialmente sobre la abscisa de convergencia izquierda  $\gamma$  de  $\hat{f}_1$ . Varias situaciones pueden ocurrir tal como se indica en la figura (2). El caso más común y sin duda uno de los que se cubren completamente por el Teorema (1.2) corresponde a la figura (2.1). Las funciones de distribución y densidades ( $f$ ) típicas correspondientes al tamaño de demanda cubiertas por este régimen se presentan en la tabla (1.1). No se discutirán en detalle los casos intermedios, los cuales no son importantes para aplicaciones, y que se ilustran en las figuras (2.2 y 2.3). Si se indaga en la literatura con la siguiente pregunta en mente:

¿ *Cuáles distribuciones se ajustan a los datos del tamaño de la demanda?*

Figura 2: Casos especiales en la condición Cramér-Lundberg



Las fd más frecuentes se encuentran listadas en la tabla (1.2) Todas las fd de la tabla (1.1) permiten la construcción del exponente de Lundberg. Sin embargo este exponente no existe para las listadas en la tabla (1.2). Por esta razón se han etiquetado a las tablas (1.1) y (1.2) con los nombres “demandas pequeñas” y “demandas grandes” respectivamente. Una discusión mas precisa de las distribuciones, se tendrá en la sección 1.5.

Supóngase que se tiene un portafolio que se puede ajustar de acuerdo al modelo *Cramér-Lundberg*, para el cual el tamaño de demanda es posible modelarlo con una fd Pareto(1)

$$\bar{F}(x) = (1+x)^{-\alpha}, \quad x \geq 0 \quad \alpha > 1.$$

Por consiguiente tenemos que  $\mathbb{IE}(X_1) = \int_0^{\infty} (1+x)^{-\alpha} dx = (\alpha-1)^{-1}$ , la condición de ganancia neta equivale a  $\rho = \frac{(\alpha-1)}{\lambda} - 1 > 0$ .

¿ Es posible trabajar fuera del estimador exponencial Cramér-Lundberg en este caso, para una tasa premio  $c$  que satisface la condición anterior ?

La respuesta es no. De hecho, en este caso, para toda  $\nu > 0$

$$\int_0^{\infty} e^{\nu x}(1+x)^{-\alpha} dx = \infty,$$

i.e. no se tiene un estimador exponencial *Cramér-Lundberg*. Gráficamente este caso se representa con la figura (2.4), donde cero es una singularidad esencial de  $\hat{f}_I(-\epsilon) = \infty$  para todo  $\epsilon > 0$ .

En la siguiente sección se discutirá en detalle la clase de *distribuciones subexponenciales*, las cuales son las candidatas para las distribuciones de pérdida en el caso colas-pesadas. Una discusión detallada de la teoría de distribuciones subexponenciales es bastante técnica, por lo que será satisfactorio el presentar una perspectiva general de la parte de la teoría que es aplicable particularmente dentro de la teoría de riesgo y en general en finanzas. En la sección 1.4 se presentarán las demandas grandes equivalentes al estimador *Cramér-Lundberg*, ver por ejemplo el Teorema (1.4).

Nombre	Cola $\bar{F}$ o densidad $f$	Parámetros
Exponencial	$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$	$\lambda > 0$
Gamma	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0, \tau \geq 1$
Normal truncada	$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}$	—

Tabla 1.1: Funciones de distribución para el tamaño de la demanda: "Demandas pequeñas". Todas las fd tienen soporte en  $(0, \infty)$



Nombre	Cola $\bar{F}$ o densidad $f$	Parámetros
Lognormal	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x}} e^{-(\ln x - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Pareto	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x}\right)^\alpha$	$\alpha, k > 0$
Burr	$\bar{F}(x) = \left(\frac{k}{k+x^\tau}\right)^\alpha$	$\alpha, k, \tau > 0$
Benktander tipo-I	$\bar{F}(x) = (1 + 2(\beta/\alpha) \ln x) e^{-\beta(\ln x)^2 - (\alpha+1) \ln x}$	$\alpha, \beta > 0$
Benktander tipo-II	$\bar{F}(x) = e^{\alpha/\beta} x^{-(1-\beta)} e^{-\alpha x^\beta / \beta}$	$\alpha > 0$ $0 < \beta < 1$
Weibull	$\bar{F}(x) = e^{-cx^\tau}$	$c > 0$ $0 < \tau < 1$
Loggamma	$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$\alpha, \beta > 0$
$\alpha$ -estable truncada	$\bar{F}(x) = \mathbb{P}( X  > x)$ Donde $X$ es una v.a. $\alpha$ -estable	$1 < \alpha < 2$

Tabla 1.2: Funciones de distribución para el tamaño de la demanda: "Demandas grandes". Todas las  $f_d$  tienen soporte en  $(0, \infty)$  excepto para los casos Benktander y loggamma con soporte  $(1, \infty)$

## §1.3 Detección de distribuciones de cola pesada

### §1.3.1 Demandas grandes

Muchos expertos tienen un concepto personal de lo que pueden llamar “demanda grande”. Sin embargo una concepción personal no es siempre obvia matemáticamente, se requiere de la introducción de notación adecuada.

Sean  $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$  las demandas sucesivas en un portafolio. El monto total es  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , recordando que  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  denota la sucesión de demandas ordenadas, donde:

$$\min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

Comúnmente una demanda es llamada grande, cuando el monto total de las demandas se determina predominantemente por tal demanda.

Esta formulación vaga se puede interpretar en una variedad de formas. A continuación se dan algunos ejemplos.

- En algunas ocasiones, se dice que una demanda dentro de un portafolio se considera grande si la magnitud de tal valor es experimentado cada determinado número de años. No es necesario explicar que tal tipo de descripción no puede encajar como una definición eficaz.
- Otra interpretación puede ser que el ratio de  $X_{(n)}$  y  $S_n$  es bastante grande. Lo cual se interpreta como la condición  $X_{(n)}/S_n \stackrel{D}{=} Z$ , donde la distribución de  $Z$  tiene su masa concentrada en uno.
- Generalmente, una demanda es grande si esta consume más de cierta proporción  $p$  del monto total de las demandas. Lo cual significa que llamaremos a  $X_{(m)}$  grande si  $m \geq \min\{k : X_{(k)} > pS_n\}$ .
- Cuando los expertos tratan de estimar la media o la varianza de la distribución del tamaño de demanda, comúnmente se usan técnicas de remuestreo para obtener un estimador fidedigno. Sin embargo, ocurre que la sucesión de valores no converge a un valor límite promedio. Una posible razón teóricamente comprensible es que la media o varianza de la distribución del tamaño de demanda no existe, ya que se tiene mucha

masa en la cola. Una distribución paramétrica causante de este tipo de fenómeno es cualquier distribución Pareto con exponente  $\alpha$  pequeño.

### §1.3.2 Gráficas de cuantiles

La filosofía general de las gráficas de cuantiles se basa en la observación de que la linealidad en una gráfica se puede verificar mediante la cuantificación de un coeficiente de correlación. Para explicar lo esencial del método, se considera la distribución exponencial estándar  $G$  con cola  $\overline{G}(x) = \exp(-x)$  para  $x \geq 0$ .

Se desea saber cuándo una distribución muestral de tamaño de demandas  $F$  tiene la misma forma básica que  $G$ , salvo tal vez por un factor de escala. Más específicamente se desea saber cuándo  $\overline{F}(x) = \exp(-\lambda x)$  para alguna  $\lambda > 0$  es un modelo aceptable para  $F$ . La respuesta se puede encontrar en los datos  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  que se tengan a disposición, el parámetro  $\lambda$  solo añade algo de flexibilidad al procedimiento.

De acuerdo a la definición de distribución de cola pesada, parece más adecuado comparar una distribución muestral con una referencia exponencial, esta tendrá una cola más ligera a la exponencial cuando  $F$  satisfaga la desigualdad.

$$1 - F(x) \leq ce^{-ax} \quad \forall x \geq 0$$

y algunas constantes  $a, c > 0$

A continuación se describirá un método que permite comparar una muestra con una distribución estándar, en particular con la distribución exponencial.

**Definición 1.7.** Para una función creciente y continua por la derecha  $F(x)$  se define la *función inversa generalizada*  $F^{-1}(y)$  como

$$F^{-1}(y) = \inf\{x : F(x) \geq y\}$$

Si  $F$  es una función de distribución, a la función  $Q_F$  definida por  $Q_F(y) = F^{-1}(y)$  se le llama la *función cuantil* de  $F$ . Simultáneamente se construye la versión empírica de la función cuantil, considerando la inversa generalizada de la distribución empírica, donde la función empírica se define de la siguiente

manera:

$$F_n(x) = n^{-1} \max\{i : X_i \leq x\}$$

Más específicamente  $Q_n(y) = Q_{F_n}(y)$ , por lo que para la muestra ordenada  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  se tiene que:

$$\{Q_n(y) = X_{(k)}\} = \{(k-1)n^{-1} < y \leq kn^{-1}\}.$$

Para la distribución exponencial  $G$ , la función cuantil tiene la forma  $Q_G(y) = -\log(1-y)$  con  $0 < y < 1$ .

Si se desea comparar los valores muestrales con los de una exponencial estándar, es suficiente con comparar las dos funciones cuantiles, para hacer correctamente esto, se grafican ambas funciones  $Q_G$  y  $Q_n$  en un sistema de coordenadas ortogonales.

Si los datos provienen de una distribución exponencial (no necesariamente estándar) se espera que la gráfica resultante muestre una forma lineal, ya que la función cuantil de una distribución exponencial con parámetro  $\lambda$  se expresa de la siguiente manera:

$$Q_F(y) = -\lambda^{-1} \log(1-y).$$

La pendiente de la línea es  $\lambda^{-1}$ , lo cual ofrece un posible estimador para el parámetro desconocido.

Si los datos provienen de una distribución con cola más pesada que la exponencial, la gráfica crecerá más rápido que una línea recta. Si la cola es menos pesada, entonces el crecimiento será menor. La gráfica cuantil resultante describe inmediatamente si los datos provienen de una distribución que es o no cercana a una exponencial.

De acuerdo a la definición de función cuantil empírica  $Q_n(y)$ , se tiene que la función cuantil es no decreciente y escalonada, sus únicos puntos de crecimiento están situados en los valores  $\{k/n : 1 \leq k \leq n\}$ , los cuales forman una colección sobre el eje horizontal positivo. Es suficiente con graficar en los puntos  $y \in \{k/n, 1 \leq k \leq n\}$ . Sin embargo, existe un pequeño problema en el extremo derecho de la gráfica, ya que para  $k=n$  se tiene que  $Q_G(k/n) = \infty$ . Por esta razón siempre se aplica una corrección de continuidad graficando el diagrama de dispersión en los puntos  $\{k/(n+1), 1 \leq k \leq n\}$ . Se abundará al respecto al final de esta sección.

Además de la conclusión visual obtenida a partir de la gráfica de cuantiles es posible deducir información cuantitativa de la gráfica. Si la distribución exponencial es representativa de los datos, se puede ajustar una línea recta al diagrama de dispersión usando el método tradicional de mínimos cuadrados. La pendiente  $\lambda^{-1}$  de la línea recta será la consecuencia de minimizar la suma de cuadrados  $\sum_{k=1}^n (X_{(k)} + \lambda^{-1} \log(1 - k/(n+1)))^2$ . Lo cual proporciona la forma clásica para el estadístico de mínimos cuadrados  $\hat{\lambda}^{-1}$

$$\hat{\lambda}^{-1} = \frac{\sum_{k=1}^n (X_{(k)} Q_G(k/(n+1)))}{\sum_{k=1}^n (Q_G(k/(n+1)))^2}.$$

El ajuste puede cuantificarse al observar el valor del coeficiente de correlación empírico  $r(x_1, \dots, x_n)$ , el cual se calcula con los datos experimentales  $x_1, \dots, x_n$  mediante la siguiente fórmula:

$$r(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_{(k)} - \bar{x})(Q_G(\frac{k}{n+1}) - \bar{Q}_G)}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (Q_G(\frac{k}{n+1}) - \bar{Q}_G)^2 \sum_{k=1}^n (x_{(k)} - \bar{x})^2}}$$

donde  $\bar{x} = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_k = n^{-1} \sum_{k=1}^n x_{(k)}$  y

$$\bar{Q}_G = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q_G\left(\frac{k}{n+1}\right) = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$$

Se sabe que  $|r(x_1, \dots, x_n)| \leq 1$ , cuando  $r(x_1, \dots, x_n) = \pm 1$  los puntos  $(1, x_1), \dots, (n, x_n)$  yacen sobre una línea recta.

En la práctica actuarial ocurre comúnmente que los datos son truncados del lado izquierdo, derecho o en ambos. Por ejemplo una compañía reaseguradora, no tiene conocimiento en general de las demandas por debajo del deducible. Supóngase que la demanda  $X$  se distribuye exponencialmente con parámetro  $\lambda$ . De manera tal que para  $a > 0$ , la distribución exponencial truncada  $F_{[0,a]}$  es de la forma :

$$\bar{F}_{[0,a]}(x) = \mathbf{IP}(X > x | X > a) = \frac{\mathbf{IP}(X > x)}{\mathbf{IP}(X > a)} = e^{-\lambda(x-a)}, \quad x > a.$$

La función cuantil correspondiente está dada por:

$$Q_{[0,a]}(y) = a - \frac{1}{\lambda} \log(1 - y), \quad 0 < y < 1.$$

Si los datos provienen de una distribución exponencial truncada, la intercepción de la gráfica de cuantiles al origen  $y = 0$  proporciona un estimador del parámetro  $a$ . Si los datos no se presentan adecuadamente por una distribución exponencial, es posible desde luego elegir otros candidatos. Los candidatos más populares en un contexto actuarial son las distribuciones: Normal, Lognormal, Pareto y en menores dimensiones la distribución Weibull.

A continuación se describen los cuatro casos separadamente:

- *Gráfica cuantil normal.* La función de distribución normal estándar se expresa como:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy.$$

SI  $\Phi^{-1}(y)$  es la función cuantil correspondiente. La gráfica cuantil normal estándar representa los puntos:

$$\{(\Phi^{-1}(k/(n+1)), X_{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Donde la distribución normal general  $N(\mu, \sigma^2)$  tiene función cuantil  $Q(y) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(y)$ . Así, si resulta un patrón lineal en la gráfica, la pendiente de la recta proporciona un estimador para el parámetro  $\sigma$ , mientras que la intersección en el eje de las ordenadas estima el parámetro  $\mu$ .

- *Gráfica cuantil lognormal.* Esta se define fácilmente, ya que  $X$  será lognormal siempre y cuando  $\log(X)$  tenga distribución normal. Por lo que el diagrama de dispersión es el siguiente:

$$\{(\Phi^{-1}(k/(n+1)), \log X_{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

La distribución lognormal se relaciona frecuentemente con las demandas ligadas a accidentes automovilísticos.

- *Gráfica cuantil Pareto.* Es una herramienta actuarial importante. Para una demanda  $X$  con distribución Pareto  $\text{Par}(\alpha, c)$  se tiene que  $\text{IP}(X \leq$

$x) = 1 - (x/c)^{-\alpha}$  para  $x \geq c$ , por lo que  $\log Q(y) = \log c - \alpha^{-1} \log(1 - y)$  la cual se asemeja a la distribución exponencial truncada. La gráfica cuantil Pareto se obtiene al graficar los puntos

$$\{(-\log(1 - k/(n + 1)), \log X_{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Si los datos provienen de una distribución Pareto la gráfica resultante tiene forma lineal con intersección en  $\log c$  y pendiente  $\alpha^{-1}$ . La distribución Pareto es popular entre los especialistas cuando se modelan datos de demandas concernientes a incendios o cualquier otro tipo de demanda con colas muy pesadas.

- *Gráfica cuantil Weibull.* En este caso  $\bar{F}(x) = \exp(-cx^r)$ . La función cuantil es obviamente  $Q(y) = (-c^{-1} \log(1 - y))^{1/r}$  para  $0 < y < 1$ . Si se toma una vez más el logaritmo de esta expresión, se obtiene que  $\log Q(y) = -r^{-1} \log c + r^{-1} \log(-\log(1 - y))$ , lo cual conduce automáticamente a la gráfica cuantil Weibull

$$\{(\log(-\log(1 - k/(n + 1))), \log X_{(k)}), \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Bajo el modelo Weibull se espera un comportamiento lineal donde la pendiente estima el parámetro  $r^{-1}$ . Adicionalmente la intersección estima la cantidad  $-r \log c$ .

## §1.4 Teoría de Ruina para Distribuciones de Colas Pesadas

En esta sección, todas las variables aleatorias son positivas con soporte infinito, i.e.  $F(x) < 1$  para toda  $x > 0$ . Ya se vio que la distribución Pareto viola la condición de *Cramér-Lundberg* (1.17) por lo que el Teorema (1.2) no es aplicable para tal distribución. ¿Qué metodología alternativa se puede usar? La respuesta se encuentra en la representación (1.15) y el lema 1.3.

Antes de proceder. Denótese por  $\mathcal{R}_\alpha$  la clase de funciones de variación regular con índice  $\alpha \in \mathbb{R}$ . El caso  $\alpha = 0$  corresponde a las funciones de variación regular lentas. En la sección 1.4.2 la clase de distribuciones subexponenciales jugarán un papel fundamental, para lo cual, no existe un tratamiento completo en los libros de texto. Debido a la importancia del modelaje para demandas grandes, se ha incluido un análisis de las propiedades. Los resultados requeridos inmediatamente para los estimadores de ruina en el caso de colas pesadas se presentan en este capítulo. Las ideas principales concernientes a subexponencialidad se presentan en esta sección 1.4.2;

### §1.4.1 Algunos resultados preliminares

Se inicia la discusión con una propiedad de cerradura en la convolución para fd de variación regular. Enfatizando que  $L$  pertenece a  $\mathcal{R}_0$ , i.e.  $L$  es de variación regular lenta, siempre que  $\forall t > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

**Lema 1.3.** (Cerradura en la convolución para fd con colas de variación regular) Si  $F_1, F_2$  son dos fd tales que  $\bar{F}_i(x) = x^{-\alpha} L_i(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $L_i \in \mathcal{R}_0, i = 1, 2$ , entonces la convolución  $G = F_1 * F_2$  tiene una cola de variación regular tal que

$$\bar{G}(x) \sim x^{-\alpha} (L_1(x) + L_2(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

**DEMOSTRACIÓN.** Si  $X_1, X_2$  son variables aleatorias independientes con fd  $F_1$  y  $F_2$  respectivamente, se tiene que  $\{X_1 + X_2 > x\} \supset \{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\}$



por lo que se puede verificar que:

$$\overline{G}(x) \geq (\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x))$$

si  $0 < \delta < 1/2$ , entonces de

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1 - \delta)x\} \cup \{X_2 > (1 - \delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\},$$

se tiene que:

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) &\leq \overline{F}_1((1 - \delta)x) + \overline{F}_2((1 - \delta)x) + \overline{F}_1(\delta x)\overline{F}_2(\delta x) \\ &= (\overline{F}_1((1 - \delta)x) + \overline{F}_2((1 - \delta)x)) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$1 \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{G}(x)}{\overline{F}_1(x) + \overline{F}_2(x)} \leq (1 - \delta)^{-\alpha},$$

Con lo que se demuestra una vez que se hace tender  $\delta \downarrow 0$

Un corolario importante que se obtiene por medio de inducción sobre  $n$  es el siguiente:

**Corolario 1.1.** Si  $\overline{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $L \in \mathcal{R}_0$ , entonces para toda  $n \geq 1$ ,

$$\overline{F}^{n*}(x) \sim n\overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Supóngase ahora que  $X_1, \dots, X_n$  como en el corolario anterior son v.a. iid con fd  $F$  si se denota la suma parcial de  $X_1, \dots, X_n$  por  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  y su máximo por  $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ , entonces para toda  $n \geq 2$ ,

$$\mathbb{P}(S_n > x) = \overline{F}^{n*}(x) \sim n\overline{F}(x)$$

$$\mathbb{P}(M_n > x) = 1 - [\mathbb{P}(X \leq x)]^n = \overline{F}^n(x)$$

$$= \overline{F}(x) \sum_{k=0}^{n-1} F^k(x)$$

$$\sim n\overline{F}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Se tiene entonces que:

$$(1.33) \quad \mathbb{P}(S_n > x) \sim n\bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Por consiguiente, con la notación anterior, el corolario (1.1) puede reformularse como

$$\begin{aligned} \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \\ \text{implica} \\ \mathbb{P}(S_n > x) \sim \mathbb{P}(M_n > x), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Lo cual implica que para fd con colas de variación regular, la cola de la fd correspondiente a la suma  $S_n$  se determina principalmente por la cola de la fd correspondiente al máximo  $M_n$ . Esta es exactamente una de las nociones intuitivas de las distribuciones de colas pesadas o demandas grandes.

De una forma vaga se puede decir que:

Bajo la suposición de variación regular, la cola del máximo determina la cola de la suma.

Enfatizando que en el modelo *Cramér-Lundberg* la siguiente relación se cumple; ver (1.15):

$$\psi(u) = \frac{\rho}{1 + \rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \rho)^{-n} \bar{F}_I^{n*}(u), \quad u \geq 0,$$

donde  $F_I(x) = \mu^{-1} \int_0^x \bar{F}(y) dy$  es la distribución de la cola integrada, bajo la condición  $\bar{F}_I \in \mathcal{R}_{-\alpha}$  para algún  $\alpha \geq 0$ , se debe esperar que los siguientes estimadores asintóticos sean válidos:

$$(1.34) \quad \frac{\psi(u)}{\bar{F}_I(u)} = \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} \frac{\bar{F}_I^{n*}(u)}{\bar{F}_I(u)}$$

$$(1.35) \quad \rightarrow \frac{\rho}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1+\rho)^{-n} n$$

$$(1.36) \quad = \frac{\rho}{1+\rho} \frac{1}{1+\rho} \sum_{n=0}^{\infty} n \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^{n-1}$$

$$(1.37) \quad = -\rho \frac{d}{dp} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1+\rho} \right)^n \right)$$

$$(1.38) \quad = -\rho \frac{d}{dp} \left( \frac{1+\rho}{\rho} \right) = \rho^{-1}, \quad u \rightarrow \infty.$$

Un estimador natural para la ruina es (1.38) siempre que  $\bar{F}_I$  sea de variación regular. Se mostró con anterioridad que un estimador similar se cumple para una amplia clase de funciones de distribución. Es posible reformular (1.38) de la siguiente manera:

Para distribuciones de demanda con colas de variación regular fundamentalmente, la ruina  $\psi(u)$  para un capital inicial grande  $u$  se determina esencialmente por la cola  $\bar{F}(y)$  de la distribución del tamaño de la demanda para valores grandes de  $y$  i.e.

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\rho\mu} \int_u^{\infty} \bar{F}(y) dy, \quad u \rightarrow \infty.$$

De la tabla (1.2) se obtienen las siguientes distribuciones típicas correspondientes al tamaño de demanda cubiertas por los resultados precedentes.

- Pareto
- Burr
- Loggamma
- Distribuciones estables truncadas

### §1.4.2 Teoría de Cramér-Lundberg para Distribuciones Subexponenciales

Como se manifestó anteriormente, el paso crucial para obtener (1.38) es la propiedad  $\overline{F}_I^{n*}(x) \sim n\overline{F}_I(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$  y  $n \geq 2$ . Esto, naturalmente se da para una clase de funciones de distribución que se permiten dentro de un régimen de demandas grandes. El resultado principal en esta estructura es el Teorema (1.4), el cual se menciona posteriormene.

**Definición 1.8.** (Función de distribución subexponencial)

Una fd  $F$  con soporte  $(0, \infty)$  es subexponencial, si para toda  $n \geq 2$ ,

$$(1.39) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{n*}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

La clase de funciones de distribución subexponenciales será denotada por  $S$ .

**Observación 1.6.** La relación (1.39) produce la siguiente caracterización de subexponencialidad; ver (1.33).

$$(1.40) \quad \text{Para toda } n \geq 2, \quad \mathbb{IP}(S_n > x) \sim \mathbb{IP}(M_n > x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Vale la pena hacer notar que para verificar subexponencialidad, no es necesario mostrar (1.39) para toda  $n \geq 2$ . Lo cual se enuncia en el siguiente lema.

**Lema 1.4.** (Una condición suficiente para subexponencialidad)

Si  $\limsup_{x \rightarrow \infty} \overline{F}^{2*}(x)/\overline{F}(x) \leq 2$ , entonces  $F \in S$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $F$  representa la fd de una v.a. positiva, se tiene inmediatamente que  $F^{2*}(x) \leq F^2(x)$  i.e.  $\overline{F}^{2*}(x) \geq \overline{F}^2(x)$  para todo  $x \geq 0$ . Por consiguiente,  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \overline{F}^{2*}(x)/\overline{F}(x) \geq 2$ , y gracias a la condición del lema, (1.39) es válida con  $n = 2$ . La demostración es por inducción sobre  $n$ .

Para  $x \geq y > 0$ ,

$$(1.41a) \quad \frac{\overline{F^{(n+1)^*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 1 + \frac{F(x) - F^{(n+1)^*}(x)}{\overline{F}(x)}$$

$$(1.41b) \quad = 1 + \int_0^x \frac{(1 - F^{n*}(x-t))}{\overline{F}(x)} dF(t)$$

$$(1.41c) \quad = 1 + \int_0^x \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t)$$

$$(1.41d) \quad = 1 + \left( \int_0^{x-y} + \int_{x-y}^x \right) \left( \frac{\overline{F^{n*}}(x-t)}{\overline{F}(x-t)} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} \right) dF(x)$$

$$(1.41e) \quad = 1 + I_1(x) + I_2(x).$$

A base de insertar  $-n+n$  en  $I_1$  y notando que  $(\overline{F^{n*}}(x-t)/\overline{F}(x-t) - n)$  se puede hacer arbitrariamente pequeña para  $0 \leq t \leq x-y$  y  $y$  suficientemente grande, se sigue que:

$$I_1(x) = (n + o(1)) \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t).$$

Ahora

$$\begin{aligned} \int_0^{x-y} \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) &= \frac{F(x) - F^{2^*}(x)}{\overline{F}(x)} - \int_{x-y}^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &= \frac{F(x) - F^{2^*}(x)}{\overline{F}(x)} - J(x, y) \\ &= (1 + o(1)) - J(x, y), \end{aligned}$$

donde  $J(x, y) \leq (F(x) - F(x-y))/\overline{F}(x) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$  por el Lema 1.4 (a) que se verá posteriormente. Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_1(x) = n$ .

Finalmente, puesto que  $\overline{F^{n*}}(x-t)/\overline{F}(x-t)$  es acotada para  $x-y \leq t \leq x$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} J(x, y) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} I_2(x) = 0$ , se completa la demostración. ■

**Observación 1.7.** La condición en el Lema 1.4 es trivialmente necesaria para que  $F \in \mathcal{S}$ . △

En el inicio de la demostración anterior se usó que para la fd  $F$  de una v.a. positiva, siempre  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \overline{F^{2^*}}(x)/\overline{F}(x) \geq 2$  fácilmente se muestra en este caso que, para toda  $n \geq 2$ ,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \overline{F^{n^*}}(x)/\overline{F}(x) \geq n.$$

De hecho  $S_n \geq M_n$ , por eso  $\overline{F^{n^*}}(x) = \mathbb{P}(S_n > x) \geq \mathbb{P}(M_n > x) = \overline{F^n}$ . Por lo tanto

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n^*}}(x)}{\overline{F}(x)} \geq \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^n}(x)}{\overline{F}(x)} = n.$$

El siguiente lema es crucial si se desea obtener (1.38) de (1.34) para  $F_I$  subexponencial.

**Lema 1.5.** (Algunas propiedades de distribuciones subexponenciales)

(a) Si  $F \in S$ , entonces sobre  $y$ -conjuntos compactos en  $(0, \infty)$  uniformemente,

$$(1.42) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

(b) Si (1.42) se cumple entonces, para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$e^{\epsilon x} \overline{F}(x) \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty.$$

(c) Si  $F \in S$  entonces, dada  $\epsilon > 0$ , existe una constante finita  $K$  tal que para toda  $n \geq 2$ ,

$$(1.43) \quad \frac{\overline{F^{n^*}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(1+\epsilon)^n, \quad x \geq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. (a) Para  $x \geq y > 0$ , por (1.41a),

$$\begin{aligned} \frac{\overline{F^{2^*}}(x)}{\overline{F}(x)} &= 1 + \int_0^y \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) + \int_y^x \frac{\overline{F}(x-t)}{\overline{F}(x)} dF(t) \\ &\geq 1 + F(y) + \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} (F(x) - F(y)). \end{aligned}$$

Así que, tomando  $x$  suficientemente grande para que  $\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(y) \neq 0$ ,

$$1 \leq \frac{\overline{\mathbf{F}}(x-y)}{\overline{\mathbf{F}}(x)} \leq \left( \frac{\overline{\mathbf{F}}^{2^*}(x)}{\overline{\mathbf{F}}(x)} - 1 - \mathbf{F}(y) \right) (\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}(y))^{-1}.$$

En el último cálculo, el lado derecho tiende a 1 cuando  $x \rightarrow \infty$ . Se obtiene inmediata uniformidad de la monotonía en  $y$ . La propiedad (1.42) se puede reformular como  $\overline{\mathbf{F}} \circ \ln \in \mathcal{R}_0$  para que converja uniformemente como consecuencia del teorema de convergencia uniforme para funciones de variación regular (Ver [12], Teorema A3.2);

(b) Por (a),  $\overline{\mathbf{F}} \circ \ln \in \mathcal{R}_0$ , la conclusión de que  $x^c \overline{\mathbf{F}}(\ln x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$  resulta ser la consecuencia inmediata del *teorema de representación* para  $\mathcal{R}_0$  (Ver [12], Teorema A3.3);

(c) Sea  $\alpha_n = \sup_{x \geq 0} \overline{\mathbf{F}}^{n^*}(x) / \overline{\mathbf{F}}(x)$ , al usar (1.41a) se obtiene que para toda  $T < \infty$ ,

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &\leq 1 + \sup_{0 \leq x \leq T} \int_0^x \frac{\overline{\mathbf{F}}^{n^*}(x-y)}{\overline{\mathbf{F}}(x)} d\mathbf{F}(y) \\ &\quad + \sup_{x \geq T} \int_0^x \frac{\overline{\mathbf{F}}^{n^*}(x-y)}{\overline{\mathbf{F}}(x-y)} \frac{\overline{\mathbf{F}}(x-y)}{\overline{\mathbf{F}}(x)} d\mathbf{F}(y) \\ &\leq 1 + A_T + \alpha_n \sup_{x \geq T} \frac{\mathbf{F}(x) - \mathbf{F}^{2^*}(x)}{\overline{\mathbf{F}}(x)}, \end{aligned}$$

donde  $A_T = (\overline{\mathbf{F}}(T))^{-1} < \infty$ . Ahora, puesto que  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$  es posible dar cualquier  $\epsilon > 0$ , con una  $T$  tal que

$$\alpha_{n+1} \leq 1 + A_T + \alpha_n(1 + \epsilon).$$

de ahí

$$\alpha_n \leq (1 + A_T)\epsilon^{-1} + (1 + \epsilon)^n,$$

lo cual implica (1.43). ■

**Observación 1.8.** El Lema 1.5.(b) justifica el nombre subexponencial para  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$ ; de hecho  $\overline{\mathbf{F}}(x)$  decae a 0 mas despacio que cualquier exponencial  $e^{-\epsilon x}$

para  $\epsilon > 0$ . Además, ya que para cualquier  $\epsilon > 0$ :

$$\int_y^\infty e^{\epsilon x} d\mathbf{F}(x) \geq e^{\epsilon y} \overline{\mathbf{F}}(y), \quad y \geq 0,$$

Por el Lema 1.5.(b) se tiene como consecuencia que cuando  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$ ,  $\hat{f}(-\epsilon) = \infty$  para todo  $\epsilon > 0$ . Por consiguiente la transformada de Laplace Stieltjes de una fd subexponencial tiene una singularidad esencial en 0. Este resultado se demostró primeramente por (Chistyakov [5], Teorema 2). Como una consecuencia de la demostración del Lema 1.4.(b) la propiedad anterior se cumple para una amplia clase de funciones de distribución que satisfacen (1.42). Para una discusión futura sobre estas clases ver la Sección 1.5.  $\triangle$

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es la siguiente:

**Teorema 1.4.** (Teorema de Cramér-Lundberg para demandas grandes, I)  
 Considérese el modelo Cramér-Lundberg con la condición de ganancia neta  $\rho > 0$  y  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ , entonces

$$(1.44) \quad \psi(u) \sim \rho^{-1} \overline{\mathbf{F}}_I(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que  $(1+\rho)^{-1} < 1$ , existe una  $\epsilon > 0$  tal que  $(1+\rho)^{-1}(1+\epsilon) < 1$ . De ahí debido a (1.43),

$$(1+\rho)^{-n} \frac{\mathbf{F}_I^{n*}(u)}{\overline{\mathbf{F}}_I(u)} \leq (1+\rho)^{-n} K(1+\epsilon)^n, \quad u \geq 0,$$

El intercambio de la sumatoria y el límite en (1.34), se permite por convergencia dominada y produce el resultado deseado. ■

Con esto esencialmente se finaliza con la tarea de encontrar estimadores tipo *Cramér-Lundberg* en el caso de colas pesadas.

Para distribuciones de tamaño de demanda con distribución subexponencial de su cola integrada la ruina,  $\psi(u)$  está dada por (1.44).



Además para las fd con colas de variación regular, los siguientes ejemplos de la tabla 1.2 producen el estimador (1.44). Lo cual se demuestra en la sección 1.5.

- Lognormal
- Benktander tipo I
- Benktander tipo II
- Weibull ( $0 < \tau < 1$ ).

Desde un punto de vista matemático, el resultado en el Teorema 1.4 puede mejorarse sustancialmente, de hecho, al utilizar un resultado de Embrechts [12], Corolario A3.21, se produce el siguiente resultado.

**Teorema 1.5.** (*Teorema de Cramér-Lundberg para demandas grandes, II*)  
 Considérese el modelo Cramér-Lundberg con la condición de ganancia neta  $\rho > 0$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a)  $F_I \in \mathcal{S}$ ,
- (b)  $1 - \psi(u) \in \mathcal{S}$ ,
- (c)  $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) / \bar{F}_I(u) = \rho^{-1}$ .

Consecuentemente, el estimador (1.44) es aplicable solamente bajo la condición  $F_I \in \mathcal{S}$ , en el caso de la teoría de *Cramér-Lundberg*,  $\mathcal{S}$  es la clase natural cuando se pretende estimar la ruina en el caso de que la condición *Cramér-Lundberg* (1.17) se viole. En la sección 1.5 se retomará la condición  $F_I \in \mathcal{S}$ , relacionándola con la condición de  $F$  misma.

### §1.4.3 El Monto Total de las Demandas en el Caso Subexponencial

En la sección 1.4.2 se destacó la importancia de la clase  $\mathcal{S}$  en la estimación de las probabilidades de ruina cuando las demandas son grandes. Desde un punto de vista matemático es importante que en el modelo *Cramér-Lundberg*,  $1 - \psi(u)$  se puede expresar como una suma geométrica compuesta; ver (1.15).

El mismo método que se usó para demostrar el Teorema 1.4 produce un estimador de la distribución del monto total de demanda cuando las demandas son grandes. De hecho, en la sección 1.1 se observó que, dentro del modelo *Cramér-Lundberg*, para todo  $t \geq 0$ ,

$$(1.45) \quad G_t(x) = \mathbb{P}(S(t) \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbf{F}^{n*}(x), \quad x \geq 0,$$

donde  $S(t) = \sum_{k=1}^{N_t} X_k$  es el monto total (o agregado) de demandas hasta el tiempo  $t$ . El proceso arribo de demandas  $(N_t)_{t \geq 0}$  en (1.45) es un proceso Poisson homogéneo con intensidad  $\lambda > 0$ ,

$$(1.46) \quad \mathbb{P}(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Para un proceso general de arribo de demandas (en el que se supone independencia con el proceso tamaño de las demandas  $(X_k)$ ) se obtiene la fórmula

$$(1.47) \quad G_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_t(n) \mathbf{F}^{n*}(x), \quad x \geq 0,$$

donde

$$p_t(n) = \mathbb{P}(N_t = n), \quad n \in \mathbb{N},$$

define una medida de probabilidad sobre  $\mathbb{N}$ . En el caso de una fd  $\mathbf{F}$  subexponencial el mismo argumento que se dió para la demostración del Teorema 1.4 produce el siguiente resultado.

**Teorema 1.6.** (*Monto total de demandas en el caso subexponencial*)  
 Considérese (1.47) con  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$ ,  $t > 0$  fija, y supongase que  $(p_t(n))$  satisface

$$(1.48) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \epsilon)^n p_t(n) < \infty$$

para alguna  $\epsilon > 0$ . Entonces  $G_t \in \mathcal{S}$  y

$$(1.49) \quad \overline{G}_t(x) \sim \mathbb{I}\mathbb{E}(N_t) \overline{\mathbf{F}}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

**Observación 1.9.** La condición (1.48) es equivalente al hecho de que la función generatriz  $\sum_{n=0}^{\infty} p_t(n)s^n$  sea analítica en una vecindad de  $s = 1$ .

△

**Observación 1.10.** La formulación más general del teorema 1.6 se encuentra en Cline [7], Teorema 2.13.

△

**Ejemplo 1.1.** (El monto total de demandas en el modelo *Cramér-Lundberg*) Supóngase que  $(N_t)$  es un proceso Poisson homogéneo con probabilidades individuales (1.47) ya que trivialmente  $p_t(n)$  satisface (1.48). Entonces, para  $F \in \mathcal{S}$ ,

$$\bar{G}_t(x) \sim \lambda t \bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

**Ejemplo 1.2.** (El monto total de las demandas en el caso binomial negativo) El proceso binomial negativo es un proceso de llegada de demandas el cual satisface

$$(1.50) \quad p_t(n) = \binom{\gamma + n - 1}{n} \left( \frac{\beta}{\beta + t} \right)^\gamma \left( \frac{t}{\beta + t} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \beta, \gamma > 0.$$

Seal [23, 24] considera que, además del proceso Poisson homogéneo, este proceso es el modelo principal para la distribución del número de demandas en aplicaciones concernientes a seguros.

Fácilmente se verifica que:

$$\mathbf{IE}(N_t) = \gamma t / \beta, \quad \text{var}(N_t) = \gamma t (1 + t / \beta) / \beta.$$

Al denotar  $q = \beta / (\beta + t)$  y  $p = t / (\beta + t)$  y utilizar la fórmula de Stirling  $\Gamma(x + 1) \sim \sqrt{2\pi x} (x/e)^x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , se obtiene de (1.50) que

$$p_t(n) \sim p^n n^{\gamma-1} q^\gamma / \Gamma(\gamma), \quad n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto la condición (1.48) se cumple, por lo que para  $F \in \mathcal{S}$ ,

$$\bar{G}_t(x) \sim \frac{\gamma t}{\beta} \bar{F}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Enfatizando que en el caso Poisson homogéneo,  $\mathbb{E}(N_t) = \lambda t = \text{var}(N_t)$ . Para el proceso binomial negativo se tiene que:

$$(1.51) \quad \text{Var}(N_t) = \left(1 + \frac{t}{\beta}\right) \mathbb{E}(N_t) > \mathbb{E}(N_t), \quad t > 0.$$

La condición (1.51) se refiere a la sobre-dispersión del proceso  $N_t$ ; la sobre-dispersión puede producirse en un diverso número de formas, por ejemplo:

- (a) Por preferir observar un proceso Poisson en un intervalo cuya longitud es aleatoria en vez de fija.
- (b) cuando los datos se producen por un proceso Poisson agrupado, o
- (c) en estudios de comportamiento y en accidentes de propensidad cuando existe variabilidad entre sujetos.

Principalmente (c) se encuentra con frecuencia en el análisis de datos concernientes a siniestros asegurables. Las características mencionadas bajo (c) se pueden modelar con un proceso Poisson mezclado.

La definición formal es motivada por el siguiente ejemplo. Supóngase que  $\Lambda$  es una v.a. la cual se distribuye  $\Gamma(\gamma, \beta)$  con densidad

$$f_{\Lambda}(x) = \frac{\beta^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Entonces

$$\int_0^{\infty} e^{-xt} \frac{(xt)^n}{n!} f_{\Lambda}(x) dx = \frac{\Gamma(n+\gamma)}{n! \Gamma(\gamma)} \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^{\gamma} \left(\frac{t}{\beta+t}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esta fórmula es igual a  $p_t(n)$  en (1.50). Mediante este procedimiento se obtienen las probabilidades binomiales negativas, al aleatorizar el parámetro Poisson  $\lambda$  sobre la distribución Gamma. Esto es exactamente un ejemplo de lo que se puede entender como un proceso Poisson mezclado.

**Definición 1.9.** (Proceso Poisson mezclado)

Supóngase que  $\Lambda$  es una v.a. con  $\mathbb{P}(\Lambda > 0) = 1$ , y también que  $N = (N_t)_{t \geq 0}$  es un proceso Poisson homogéneo con intensidad 1, e independiente de  $\Lambda$ . El proceso  $(N(\Lambda t))_{t \geq 0}$  es llamado Poisson mezclado.

La v.a.  $\Lambda$  en la definición anterior se puede interpretar como un cambio a tiempo aleatorio. Procesos más generales que el proceso Poisson mezclado, por ejemplo el proceso Cox, son parte de las herramientas actuariales que se han empleado a lo largo del tiempo. Los procesos Poisson mezclados se estudian en todos los textos estándar sobre Teoría de Riesgo. El proceso Poisson homogéneo con intensidad  $\lambda > 0$  se obtiene para  $\Lambda$  degenerada en  $\lambda$ , i.e.  $\mathbb{IP}(\Lambda = \lambda) = 1$ .

## §1.5 Teoría de Cramér-Lundberg para demandas grandes: Discusión

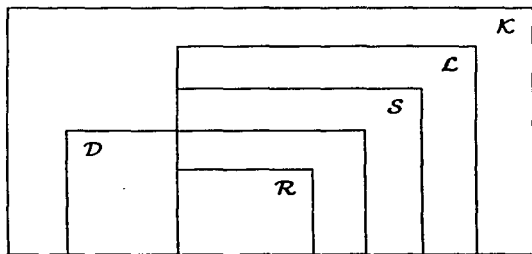
### §1.5.1 Algunas clases relacionadas con las distribuciones de colas pesadas

Con la finalidad de obtener condiciones directas sobre  $F$  con tal de que el estimador *Cramér-Lundberg* para demandas grandes en el Teorema 1.4 se cumpla, se estudiarán primeramente algunas clases relacionadas con las funciones de distribución de colas pesadas.

La clase de distribuciones de variación dominada se define como:

$$D = \left\{ F \text{ fd en } (0, \infty) : \limsup_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x/2)/\bar{F}(x) < \infty \right\}.$$

Figura 3: Clases de distribuciones de colas pesadas



Se han encontrado miembros de las siguientes tres familias:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left\{ F \text{ fd en } (0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}(x-y)/\bar{F}(x) = 1 \quad \forall y > 0 \right\}, \\ \mathcal{R} &= \left\{ F \text{ fd en } (0, \infty) : \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha} \text{ para alguna } \alpha \geq 0 \right\}, \\ \mathcal{K} &= \left\{ F \text{ fd en } (0, \infty) : \hat{f}(-\epsilon) = \int_0^{\infty} e^{\epsilon x} dF(x) = \infty \quad \forall \epsilon > 0 \right\}. \end{aligned}$$

De la definición de función de variación lenta, resulta ser que  $F \in \mathcal{L}$  si y solo si  $\bar{F} \circ \ln \in \mathcal{R}_0$ .

Las siguientes relaciones se cumplen:

- (a)  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  y  $\mathcal{R} \subset \mathcal{D}$ ,  
 (b)  $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ ,  
 (c)  $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{S}$  y  $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{D}$ .

La situación se resume en la figura 3. Una discusión detallada de las interrelaciones se encuentra en Embrechts and Omey[10]; ver también Klüppelberg[15]. Muchas de las implicaciones son fáciles, y de hecho algunas de estas ya se demostraron ( $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  en el Corolario 1.1,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  en la observación después de la demostración del Lema 1.4). Un error que se encuentra comúnmente en la literatura es la afirmación:  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ ; la siguiente fd proporciona un contraejemplo.

**Ejemplo 1.3.** (La distribución Peter y Paul) Considérese un juego donde el primer jugador (Peter) lanza una moneda repetidamente hasta que esta cae sol por primera vez, recibiendo por el segundo jugador (Paul)  $2^k$  pesos si esto ocurre en el lanzamiento  $k$ . La fd de la ganancia de Peter es:

$$F(x) = \sum_{k: 2^k \leq x} 2^{-k}, \quad x \geq 0.$$

El problema detrás de este juego es la famosa paradoja de San Petersburgo; ver por ejemplo Feller[13], Sección X.4. inmediatamente resulta que para toda  $k \in \mathbb{N}$ ,  $F(2^k - 1)/F(2^k) = 2$  por lo que  $F \notin \mathcal{L}$  y como consecuencia  $F \notin \mathcal{S}$ . Por otra parte, se puede demostrar que  $F \in \mathcal{D}$ . Para un análisis rápido ver Goldie[14]. ■

El resultado  $\mathcal{S} \neq \mathcal{L}$  no es trivial; ejemplos relevantes se pueden encontrar en Embrechts & Goldie[9] y Pitman[19]. Con respecto a la relación entre  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{S}$ , considere para  $x \geq 0$ ,

$$\frac{F^{2^*}(x)}{F(x)} = 1 + \int_0^x \frac{F(x-y)}{F(x)} dF(y).$$

Por definición,  $F \in \mathcal{L}$  implica que la integral anterior converge a 1 para toda  $y$  fija. Por el teorema de convergencia uniforme para funciones de variación

regular lentas, Embrechts[12], Teorema A3.2, esta convergencia se cumple también uniformemente en  $y$ -intervalos compactos. Sin embargo, para que sea posible intercambiar límites e integrales es necesaria una condición de integrabilidad uniforme (convergencia dominada, monotonía en  $x$ , ...). En general (i.e. para  $\mathbf{F} \in \mathcal{L}$ ) estas condiciones fallan.

Primeramente obsérvese a los miembros de  $\mathcal{S}$ . Ya se estableció que  $\mathcal{R} \subset \mathcal{S}$  y  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  (Lema 1.5 (a)), esto último implica que para toda  $\epsilon > 0$ ,  $\exp\{\epsilon x\}\overline{\mathbf{F}}(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . De aquí resulta que la fd exponencial  $\mathbf{F}(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}$  no es miembro de  $\mathcal{S}$ . Desde luego que esto se puede comprobar directamente, o bien, usar el hecho de que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$  y advertir inmediatamente que  $\mathbf{F} \notin \mathcal{L}$ .

Por ahora se sabe que las fd con comportamiento de ley potencia en la cola (i.e.  $\mathbf{F} \in \mathcal{R}$ ) pertenecen a  $\mathcal{S}$ . Por otra parte, las distribuciones exponenciales (y de hecho las fd  $\mathbf{F}$  con comportamiento más rápido al exponencial en la cola) no pertenecen a  $\mathcal{S}$ . ¿Qué se puede decir de las clases "intermedias" tales como la clase importante de variables tipo Weibull donde  $\overline{\mathbf{F}}(x) \sim \exp\{-x^\tau\}$  con  $0 < \tau < 1$ ? La proposición A3.16 de [12], que se formula en términos de la densidad  $f$  de  $\mathbf{F}$ , la *tasa de riesgo* (hazard rate)  $f/\overline{\mathbf{F}}$  y la función de riesgo  $Q(x) = \int_0^x q(y)dy$  proporciona los siguientes ejemplos en  $\mathcal{S}$ . Al usar la notación anterior,  $\overline{\mathbf{F}}(x) = \exp\{-Q(x)\}$ .

#### Ejemplo 1.4. (Ejemplos de distribuciones subexponenciales)

- (a) Considérese una distribución Weibull  $\mathbf{F}$  con parámetros  $0 < \tau < 1$  y  $c > 0$ , i.e.

$$\overline{\mathbf{F}}(x) = e^{-cx^\tau}, \quad x \geq 0.$$

Entonces  $f(x) = c\tau x^{\tau-1}e^{-cx^\tau}$ ,  $Q(x) = cx^\tau$  y  $q(x) = c\tau x^{\tau-1}$  la cual decrece a 0 si  $\tau < 1$ . Podemos aplicar inmediatamente la proposición A3.16(b) de Embrechts [12] ya que:

$$x \mapsto e^{xq(x)}f(x) = e^{c(\tau-1)x^\tau} c\tau x^{\tau-1}$$

es integrable en  $(0, \infty)$  para  $0 < \tau < 1$ . Por lo tanto  $\mathbf{F} \in \mathcal{S}$ .



(b) Al usar la proposición A3.16[12], también se puede demostrar para

$$\bar{F}(x) \sim e^{-x(\ln x)^{-\beta}}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \beta > 0,$$

que  $F \in \mathcal{S}$ . Este ejemplo muestra que es posible estar bastante cerca al comportamiento de la cola exponencial mientras se permanezca en  $\mathcal{S}$ .

(c) Hasta este punto, es posible esperar que para

$$\bar{F}(x) \sim e^{-x^\tau} L(x), \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 \leq \tau < 1, \quad L \in \mathcal{R}_0,$$

$F$  se encuentre en  $\mathcal{S}$ . Nuevamente, en esta generalidad la respuesta es no. Es posible construir ejemplos de  $L \in \mathcal{R}_0$  en los cuales la  $F$  correspondiente no se encuentre en  $\mathcal{L}$ . Un ejemplo para  $\tau = 0$  se publicó en Charles Goldie; ver también Cline [6] donde se dan contraejemplos cuando  $0 < \tau < 1$ .

Un resultado útil es el siguiente

**Proposición 1.1.** (*Variación dominada y subexponencialidad*)

(a) Si  $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ , entonces  $F \in \mathcal{S}$ .

(b) Si  $F$  tiene media finita  $\mu$  y  $F \in \mathcal{D}$  entonces,  $F_I \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ . Consecuentemente, por (a),  $F_I \in \mathcal{S}$ .

DEMOSTRACIÓN. (a) Debido a Embrechts [12], (A.17), para  $x \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}^{2*}(x)}{\bar{F}(x)} &= 2 \int_0^{x/2} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + \frac{(\bar{F}(x/2))^2}{\bar{F}(x)} \\ &= 2 \int_0^{x/2} \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} dF(y) + o(1), \end{aligned}$$

donde la  $o(1)$  es consecuencia de que  $F \in \mathcal{D}$ . Ahora para toda  $0 \leq y \leq x/2$ ,

$$\frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)} \leq \frac{\bar{F}(x/2)}{\bar{F}(x)},$$

por lo que debido a que  $F \in \mathcal{D}$ , es posible aplicar convergencia dominada, lo cual produce para  $F \in \mathcal{L}$  la convergencia de la integral a 1. De ahí  $F \in \mathcal{S}$ . (b)

Por facilidad de notación, y sin pérdida de generalidad, considérese  $\mu = 1$ . Puesto que, para toda  $x \geq 0$ ,

$$(1.52) \quad \bar{F}_I(x) = \int_x^\infty \bar{F}(y) dy \geq \int_x^{2x} \bar{F}(y) dy \geq x\bar{F}(2x),$$

Se tiene como una consecuencia de que  $F \in \mathcal{D}$

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x\bar{F}(x)}{\bar{F}_I(x)} \leq \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(2x)} < \infty.$$

además,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}_I(x/2)}{\bar{F}_I(x)} &= \frac{\int_{x/2}^\infty \bar{F}(y) dy}{\int_x^\infty \bar{F}(y) dy} = 1 + \frac{\int_{x/2}^x \bar{F}(y) dy}{\int_x^\infty \bar{F}(y) dy} \leq 1 + \frac{\bar{F}(x/2)x/2}{\bar{F}_I(x)} \\ &= 1 + 2^{-1} \frac{\bar{F}(x/2)}{\bar{F}(x)} \frac{x\bar{F}(x)}{\bar{F}_I(x)}, \end{aligned}$$

de donde

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}_I(x/2)}{\bar{F}_I(x)} < \infty,$$

i.e.  $F_I \in \mathcal{D}$ . Al tomar  $y \geq 0$ , se tiene que para  $x \geq 0$

$$1 = \frac{\int_x^{x+y} \bar{F}(u) du + \int_{x+y}^\infty \bar{F}(u) du}{\bar{F}_I(x)},$$

y por (1.52),

$$1 \leq \frac{y\bar{F}(x)}{\bar{F}_I(x)} + \frac{\bar{F}_I(x+y)}{\bar{F}_I(x)} \leq \frac{y\bar{F}(x)}{x\bar{F}(2x)} + \frac{\bar{F}_I(x+y)}{\bar{F}_I(x)}.$$

i.e.  $F \in \mathcal{L}$ . ■

### §1.5.2 Otra visión sobre Colas pesadas Cramér-Lundberg

Hasta aquí se ha visto que, desde un punto de vista analítico, la clase  $\mathcal{R}$  y  $\mathcal{S}$  producen modelos naturales de distribuciones de tamaño de demanda para los cuales la condición *Cramér-Lundberg* (1.17) se viola.

En Seal [24], el cálculo numérico de  $\psi(u)$  se discute para varias clases de funciones de distribución concernientes al tamaños de la demanda. Después

de enfatizar el hecho de que en general el proceso Poisson mezclado, el proceso Poisson homogéneo y en particular el proceso binomial negativo, son los únicos procesos de llegada de demandas que se ajustan a datos reales de seguros, Seal continúa diciendo:

*En la historia actuarial los tipos de distribuciones de tamaños de demanda independientes son limitadas, aparte de las distribuciones Pareto y Lognormal, no estamos informados de que alguna otra distribución se pueda ajustar exitosamente a los tamaños de demanda.*

Aunque quizá se manifestó en una forma bastante extremista, más de diez años después el punto principal de esta frase permanece vigente; ver por ejemplo Schnieper [22], Benabbou y Partrat [2] y Ramlam-Hansen[20, 21].

En esta sección se discuten los miembros de  $\mathcal{S}$  con respecto a las clases estándar de fd dadas anteriormente. Se trabaja en el modelo *Cramér-Lundberg* con tal de ilustrar de cómo funciona la nueva metodología.

Se recuerda en el siguiente recuadro el resultado más importante de la sección 1.4, i.e. El Teorema 1.5.

$$\text{Si } F_I \in \mathcal{S} \text{ entonces } \psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_I(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

Los estimadores Exponenciales *Cramér-Lundberg* (1.18), (1.20) bajo la condición de demandas pequeñas (1.17), producen estimadores sorprendentemente buenos para  $\psi(u)$ , tanto para  $u$  moderada como pequeña. El estimador para demandas grandes  $\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_I(u)$  es de gran valor teórico y sin embargo puede ser mejorado. Un primer problema con respecto a la aplicabilidad tiene que ver con la condición  $F_I \in \mathcal{S}$ . Una pregunta natural en este punto es:

$$(1) \text{ ¿} F \in \mathcal{S} \text{ implica que } F_I \in \mathcal{S} ?$$

Y, aunque menos importante como propósito:

$$(2) \text{ ¿} F_I \in \mathcal{S} \text{ implica que } F \in \mathcal{S} ?$$

en general y desafortunadamente la respuesta a las dos preguntas es *no*. Esto conduce inmediatamente a la siguiente tarea:

*Dar condiciones necesarias a  $\mathbf{F}$  con la finalidad de que  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ .*

Para el problema anterior, hay un sinnúmero de respuestas que se pueden encontrar en la literatura. Solo se discutirán algunas. Las diversas clases de funciones de distribución introducidas en la sección previa juegan un papel importante aquí.

Una consecuencia inmediata de la proposición 1.1 es el siguiente resultado.

**Corolario 1.2.** *(Teorema de Cramér-Lundberg para demandas grandes III) Considérese el modelo Cramér-Lundberg con la condición de ganancia neta  $\rho > 0$  y  $\mathbf{F} \in \mathcal{D}$  entonces*

$$\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{\mathbf{F}}_I(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

■

La condición  $\mathbf{F} \in \mathcal{D}$  se puede verificar para todos los ejemplos relevantes; esto contrasta a la tarea no trivial de verificar que  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ . Se demuestra en Seneta [25], Apendice A3, que cualquier  $\mathbf{F} \in \mathcal{D}$ . Tiene la propiedad de que existe  $k \in \mathbb{N}$  de manera tal que  $\int_0^\infty x^k d\mathbf{F}(x) = \infty$ , i.e. siempre existen momentos divergentes (más grandes). Del teorema de Karamata, Embrechts [12] (Teorema A3.6), resulta como consecuencia de que  $\mathbf{F} \in \mathcal{R}$  implica que  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{R}$  y de ahí  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ . Para estimaciones detalladas en el modelo *Cramér-Lundberg* de colas pesadas ver Klüppelberg [16]. En este último, se dan varias condiciones suficientes para que  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ , tales condiciones son dadas en términos de la *tasa de riesgo*  $q(x) = f(x)/\bar{\mathbf{F}}(x)$  para  $\mathbf{F}$  con densidad  $f$  o de la *función de riesgo*  $Q = -\ln \bar{\mathbf{F}}$ ; ver también Cline [6].

**Lema 1.6.** *(Condiciones suficientes para que  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ ) Si una de las siguientes condiciones se cumple, entonces  $\mathbf{F}_I \in \mathcal{S}$ .*

- (a)  $\limsup_{x \rightarrow \infty} xq(x) < \infty$ ,
- (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} xq(x) = \infty$ , y alguno de los siguientes puntos se cumpla:

- (1)  $\limsup_{x \rightarrow \infty} xq(x)/Q(x) < 1$ ,
- (2)  $q \in \mathcal{R}_\delta, -1 \leq \delta < 0$ ,
- (3)  $Q \in \mathcal{R}_\delta, 0 < \delta < 1$ ,  $y$   $q$  es eventualmente decreciente,
- (4)  $q$  es eventualmente decreciente a 0,  $q \in \mathcal{R}_0$  y  $Q(x) - xq(x) \in \mathcal{R}_1$ .

En Klüppelberg [15], Teorema 3.6, un resultado tipo Pitman (Ver Proposición A3.16 Embrechts [12]) se presenta al caracterizar  $F_I \in \mathcal{S}$  para cierta función absolutamente continua  $F$  con *tasa de riesgo*  $q$  decreciente a cero.

**Ejemplo 1.5.** (Ejemplos de  $F_I \in \mathcal{S}$ )

Al usar el Lemma 1.5.(b)(2), se puede ver que  $F_I \in \mathcal{S}$  en los siguientes casos:

- Weibull con parametro  $\tau \in (0, 1)$
- Benktander tipo I y II
- Lognormal.

**Corolario 1.3.** (*Teorema Cramér-Lundberg para demandas grandes, IV*)

Considérese el modelo Cramér-Lundberg con la condición de ganancia neta  $\rho > 0$  y con una fd  $F$  que satisface alguna de las condiciones (a), (b) del Lemma 1.6; entonces

$$\psi(u) \sim \rho^{-1} \bar{F}_I(u), \quad u \rightarrow \infty.$$

No se contestaron las preguntas anteriores (1) y (2). Con respecto a la pregunta (2) ( $\dot{i} F_I \in \mathcal{S}$  implica que  $F \in \mathcal{S}$ ?), usando la Proposición 1.1 (b) se puede ver que una modificación directa de la distribución Peter y Paul proporciona un ejemplo de una fd  $F$  con media finita tal que  $F_I \in \mathcal{S}$  pero  $F \notin \mathcal{S}$ . Para detalles ver Klüppelberg [15], donde también se encuentra una discusión de la pregunta (1) ( $\dot{i}$  Si  $F \in \mathcal{S}$  con media finita implica que

$F_I \in \mathcal{S}$ ?).

El lector posiblemente esté algo confundido en lo que se refiere a las propiedades de  $\mathcal{S}$ . Por una parte, se argumentó que esta es la clase adecuada de fd a considerar en teoría de riesgo bajo la condición de demandas grandes; ver el Teorema 1.5 (c) implica (a). Por otra parte, se debe ser extremadamente cuidadosos en hacer declaraciones generales acerca de  $\mathcal{S}$  y sus relaciones con otras clases de fd.

Como un logro inmediato es suficiente con resaltar que para distribuciones  $F$  con media finita pertenecientes a las familias: *Pareto*, *Weibull* ( $\tau < 1$ ), *Lognormal*, *Banktander-typo-I* y *II*, *Burr*, *Loggamma*,

$$F \in \mathcal{S} \quad \text{y} \quad F_I \in \mathcal{S}.$$

En lo que se refiere a la definición de  $\mathcal{S}$ , no se tiene una razón previa para suponer que el límite de  $\overline{F}^{2^*}(x)/\overline{F}(x)$  sea igual a 2; una clase interesante de distribuciones que resultan de permitir que este límite tome valores más grandes que 2 es la siguiente:

**Definición 1.10.** Una función de distribución definida en  $(0, \infty)$  se encuentra en la clase  $\mathcal{S}(\gamma)$ ,  $\gamma \geq 0$ , si

- (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{F}^{2^*}(x)/\overline{F}(x) = 2d < \infty$ ,  
 (b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{F}(x - y)/\overline{F}(x) = e^{\gamma y}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . ■

Se puede demostrar que  $d = \int_0^\infty e^{\gamma y} dF(y) = \hat{f}(-\gamma)$  de manera que  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(0)$ . Estas clases de fd se ilustran en las figuras 2.(2) y 2.(3).

Para un análisis crítico de la aproximación  $\psi(u) \sim k\overline{F}_I(u)$  para alguna constante  $k$  y  $u \rightarrow \infty$  ver De Vylder y Goovaerts [8]. Es posible obtener mejoras si se impone la condición  $F_I \in \mathcal{S}$ . En general  $G \in \mathcal{S}$  significa que  $\overline{G}^{2^*}(x) \sim 2\overline{G}(x)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ; versiones de orden superior para  $\mathcal{S}$  contemplan condiciones sobre el comportamiento asintótico de  $\overline{G}^{2^*}(x) - 2\overline{G}(x)$

cuando  $x \rightarrow \infty$ . Para detalles sobre estas técnicas ver Omeij y Willekens [17, 18], y también Bingham [3]. Con respecto al estimador de ruina para colas pesadas  $\psi(u) \sim \rho^{-1}\bar{F}_I(u)$ , suposiciones de segundo orden sobre  $F$  conducen a estimadores asintóticos para  $\psi(u) - \rho^{-1}\bar{F}_I(u)$  cuando  $u \rightarrow \infty$ . Una comparación numérica de tales resultados y un detallado estudio de simulación para eventos raros en seguros, se puede encontrar en Asmussen & Binswanger [1] y Binswanger [4].

**Observación 1.11.** Los resultados que se presentaron dan un primer concepto, de estimación de ruina en el caso de colas pesadas. El lector debe ver esto como un ejemplo de como es que la clase  $S$  y las diversas clases con las que se relaciona, ofrecen una herramienta apropiada con respecto al "Cálculo de colas pesadas".

---

## Apéndice A

---

# Fundamentos

En esta parte se enuncian algunos resultados importantes para este trabajo.

### A.1.

#### TRANSFORMADAS

Sea  $I = \{s \in \mathbb{R} : \mathbf{IE}[e^{sX}] < \infty\}$ . Obsérvese que  $I$  es un intervalo que puede ser el eje real  $\mathbb{R}$ , medio eje o inclusive el unitario  $\{0\}$ . La *función generadora*  $\hat{m} : I \rightarrow \mathbb{R}$  de  $X$  se define como  $\hat{m}(s) = \mathbf{IE}[e^{sX}]$ . Obsérvese la diferencia entre la función generadora y la *Transformada de Laplace-Stieltjes*,  $\hat{l}(s) = \mathbf{IE}[e^{-sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} d\mathbf{F}$ , de  $X$  o de la función de distribución  $\mathbf{F}$  de  $X$ . Además de la transformada de Laplace-Stieltjes, en ocasiones se considera la transformada de Laplace  $\hat{L}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} c(x) dx$  de una función  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Claramente, si la función de distribución  $F$  es continua con densidad  $f$ , entonces su transformada de Laplace-Stieltjes es igual a su transformada de Laplace de  $f$ . No es difícil demostrar que la transformada de Laplace-Stieltjes  $\hat{l}(s)$  de una distribución en  $\mathbb{R}_+$  es *completamente monótona*, i.e. para todos los valores enteros de  $n$ ,  $(-1)^n \hat{l}^{(n)}(s) \geq 0$ . Para variables aleatorias discretas en  $\mathbb{N}$  con función de probabilidad  $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$  adicionalmente se usa la noción de *función generadora de probabilidad*  $\hat{g} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\hat{g}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k = \mathbf{IE}[s^X]$ . Sea  $X$  una variable aleatoria real con distribución  $F$ . La *función característica*  $\hat{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de  $X$  se define de la siguiente manera:

$$\hat{\varphi}(s) = \mathbf{IE}[e^{isX}].$$



En particular, si  $F$  es absolutamente continua con densidad  $f$ , entonces

$$\hat{\varphi}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(sx) f(x) dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(sx) f(x) dx.$$

En este caso,  $\hat{\varphi}$  es la Transformada de Fourier de  $f$ . Si  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  es una variable aleatoria discreta con función de probabilidad  $\{p_k\}$ , entonces:

$$\hat{\varphi}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{isk} p_k.$$

Obsérvese que las siguientes relaciones se cumplen  $\hat{g}(e^s) = \hat{l}(-s) = \hat{m}(s)$ . Similarmenete  $\hat{\varphi}(s) = \hat{g}(e^{is})$ . Sin embargo, es mas delicado decidir para qué argumentos  $s$  las transformadas  $\hat{m}(s)$  y  $\hat{l}(s)$  están bien definidas. Por ejemplo si  $X$  es no negativa, entonces  $\hat{m}(s)$  está bien definida para todo  $s \leq 0$  mientras que  $\hat{l}(s)$  lo está para toda  $s \geq 0$ . Pero algunos ejemplos muestran que  $\hat{m}(s)$  puede ser  $\infty$  para toda  $s > 0$ , mientras que otros muestran que  $\hat{m}(s)$  es finita en  $(-\infty, a)$  para algún  $a > 0$ .

## A.2.

### CONVOLUCIÓN

**Definición A.1.** El operador convolución para distribuciones permite calcular la distribución de la suma  $X+Y$  de dos variables aleatorias independientes  $X$  y  $Y$  a partir de sus respectivas distribuciones  $F, G$ . La convolución  $F * G$  de dos funciones de distribución  $F$  y  $G$ , se define:

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-u) dG(u), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Obsérvese que  $F * G$  es absolutamente continua a condición de que al menos una de las distribuciones  $F, G$  sea absolutamente continua. Si tanto  $X$  como  $Y$  tienen densidades  $f$  y  $g$ , respectivamente, entonces la densidad de la suma  $X+Y$  está dada por la convolución  $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u) g(u) du$  para  $x \in \mathbb{R}$ . La convolución discreta de dos funciones de probabilidad  $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$  y  $\{p'_k, k \in \mathbb{N}\}$  se define:

$$(p * p')_k = \sum_{i, j \in \mathbb{N}; i+j=k} p_i p'_j, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La  $n$ -ésima convolución de  $\mathbf{F}$ , denotada por  $\mathbf{F}^{n*}$  se define iterativamente: Para  $n = 0$ ,  $\mathbf{F}^{0*} = \delta_0(x)$  con  $\delta_0(x) = 0$  si  $x < 0$ ; para  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{F}^{n*} = \mathbf{F}^{(n-1)*} * \mathbf{F} = \mathbf{F} * \dots * \mathbf{F}$  ( $n$  veces). La  $n$ -ésima convolución de otras funciones se define y denota similarmente, para la cola de  $\mathbf{F}^{n*}$  se escribe  $\overline{\mathbf{F}^{n*}} = 1 - \mathbf{F}^{n*}(x)$ .

A.3.

#### LEMA DE ESPERANZA CONDICIONAL

**Lema A.1.** Si  $X$  y  $Y$  son dos v.a. tales que  $X \perp Y$  entonces para  $f : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  boreliana y acotada se cumple que  $\mathbb{E}(f(X, Y)|\sigma(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(X, Y) \mathbb{P}_X(dx)$

A.4.

#### CONVERGENCIA EN DISTRIBUCIÓN

**Definición A.2.** Se dice que  $(A_n)$  converge en distribución o converge débilmente a la v.a.  $A$  ( $A_n \xrightarrow{D} A$ ) si para toda función continua y acotada  $f$  la relación:

$$\mathbb{E}(A_n) \rightarrow \mathbb{E}(A), \quad n \rightarrow \infty,$$

se cumple. La convergencia débil se puede describir en términos de las funciones de distribución  $F_{A_n}$  y  $F_A$  de  $A_n$  y  $A$  respectivamente: Se cumple que  $A_n \xrightarrow{D} A$  si y solo si para todo punto de continuidad  $y$  de la fd  $F_A$  la relación

$$(A.1) \quad F_{A_n}(y) \rightarrow F_A(y), \quad n \rightarrow \infty,$$

se satisface. Además, si  $F_A$  es continua, entonces (A.1) puede fortalecerse, obteniendo convergencia uniforme:

$$\sup_x |F_{A_n}(x) - F_A(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

## A.5.

## PROCESO DE RENOVACIÓN

**Definición A.3.** Un *proceso de renovación*  $\{N(t), t \geq 0\}$  es un proceso estocástico entero y no negativo que registra las ocurrencias sucesivas de un evento durante el intervalo  $(0, t]$ , donde la duración del tiempo entre eventos consecutivos son variables aleatorias positivas, independientes e idénticamente distribuidas. Dado que los tiempos interocurrencias se denotan por  $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$  y su función de distribución común por

$$F(y) = \mathbb{P}(Y_k \leq x), \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Una estipulación fundamental para un proceso de renovación es pedir que  $F(0) = 0$ , lo cual significa que  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  son v.a. positivas.

La sucesión  $\{\sigma_n, n \in \mathbb{N}\}$  con  $\sigma_0 = 0$  y  $\sigma_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  para  $n = 1, 2, \dots$  se le llama proceso de renovación puntual y a  $\sigma_n$  la  $n$ -ésima época de renovación.

Otra descripción matemática equivalente del proceso de renovación  $\{\sigma_n\}$  es el proceso de conteo renovacional  $\{N(t), t \geq 0\}$ , donde

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\sigma_n \leq t\}}$$

es el número de épocas de renovación en el intervalo  $(0, t]$ . La equivalencia de los dos procesos  $\{\sigma_n\}$  y  $\{N(t)\}$  se debe a que:

$$N(t) = n \quad \text{si y solo si} \quad \{\sigma_n \leq t < \sigma_{n+1}\}$$

## A.6.

## DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Si  $\mathbb{E}(X^2)$  existe, entonces

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq t^{-2} \mathbb{E}(X^2) \quad t > 0$$

En particular, si  $\mathbb{E}(X) = m$  y  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ ,

$$\mathbb{P}(|X - m| \geq t) \leq \sigma^2/t^2.$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $F$  representa la fd de  $X$ .

$$\mathbb{E}(X^2) \geq \int_{|x| \geq t} x^2 dF(x) \geq t^2 \int_{|x| \geq t} dF(x)$$

■

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 551

PROBLEM SET 1

\*

PHYSICS 551  
PROBLEM SET 1

---

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] ASMUSSEN, S AND BINSWANGER, K . *Simulation of ruin probabilities for subexponential claims* . ASTIN Bulletin **27**, 1997.
- [2] BENABBOU, Z. AND PARTRAT, C. " *Grand " sinistres et lois mélanges*. I. In: Proceedings XXV ASTIN Colloquium, Canes, 1994.
- [3] BINGHAM, N.H., GOLDIE, C.M. AND TEUGELS, J.L. *Regular Variation* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [4] BINSWANGER, K *Rare Events in Insurance*. PhD thesis, ETH Zürich, 1997.
- [5] CHISTYAKOV, V.P.. *A theorem on sums of independent positive random variables and its applications to branching random processes*. Theory Probab. Appl. **9**, 1964.
- [6] CLINE, D.B.H. *Convolutions tails, products tails and domains of attraction* . Probab. theory related Fields **72**, 1986.
- [7] CLINE, D.B.H. *Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails* . J. Austral. Math. Soc. Ser. A **43**, 1987.
- [8] DE VYLDER, F. AND GOOVAERTS, M. *Bounds for classical ruin probabilities* . Insurance: Math. Econom. **3**, 1984.
- [9] EMBRECHTS, P. AND GOLDIE, C.M. *On closure and factorization theorems for subexponentials and related distributions*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A **29**, 1980.
- [10] EMBRECHTS, P. AND OMEY, E. *A property of longtailed distributions*. J. Appl. Probab. **21**, 1984.

- [11] JACOD JEAN. *Stochastic Calculus and Finance*. Taller de Matemáticas y Finanzas, 1999.
- [12] PAUL EMBRECHTS, CLAUDIA KLÜPPELBERG AND TOMAS MIKOSCH. *Modelling Extremal Events*. Applications of Mathematics 33 Springer-Verlag, 1997.
- [13] WILLIAM FELLER. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1971.
- [14] GOLDIE, C.M. *Subexponential distributions and dominated-variation tails* .J. Appl. Probab 15, 1978.
- [15] KLÜPPELBERG CLAUDIA. *Subexponential distributions and integrated tails* J. Appl. Probab 25, 1988.
- [16] KLÜPPELBERG CLAUDIA. *Estimation of of ruin probabilities by means of hazard rates*. Insurance: Math. Econom. 8, 1989.
- [17] OMEY,E. AND WILLEKENS, E. *Second order behaviour of the tail of a subordinated probability distribution*. Stoch. Proc. Appl. 21, 1986
- [18] OMEY,E. AND WILLEKENS, E. *Second order behaviour of distributions subordinate to a distribution with finite mean*. Commun. Statist. Stochastic Models . 3, 1987
- [19] PITMAN, E.J.G . *Subexponential distribution functions* J. Austral. Math. Soc. Ser. A 29, 1980
- [20] RAMLAU-HANSEN, H. *A solvency study in non-life insurance. Part. 1: Analysis of fire, windstorm, and glass claims* Scand. Actuar. J., 1988
- [21] RAMLAU-HANSEN, H. *A solvency study in non-life insurance. Part. 2: Solvency margin requirements*. Scand. Actuar. J., 1988
- [22] SCHINIEFER,R. *Praktische Erfahrungen mit Grossschadenverteilungen*. Mitteilungen SVVM, 1993.
- [23] SEAL H.L. *Survival probabilities. The Goal of Risk Theory*. Wiley, Chichester., 1978.

- 
- [24] SEAL H.L. *Numerical probabilities of ruin when expected claim numbers are large*. Mitteilungen SVVM, 1983.
- [25] SENETA, E. *Functions of Regular Variation*. Lecture Notes in Mathematics 506, Springer , New York, 1980.
- [26] SIDNEY I. RESNICK. *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser, 1994.



---

## ÍNDICE DE MATERIAS

---

- absolutamente continua, 15, 56
- caminata aleatoria, 12
- cerradura en la convolución, 31
- completamente monótona, 55
- condición básica de ganancia neta,  
11
- condición de Cramér-Lundberg, 14
- condición de demandas pequeñas,  
21
- condición de ganancia neta, 14, 39
- convergencia en distribución, 57
- convolución, 8, 56 .
- demandas grandes, 22, 25
- demandas pequeñas, 22
- desigualdad de Chebyshev, 58
- desigualdad de Markov, 21
- distribución de la cola integrada,  
13, 33
- distribución Gamma, 3
- distribuciones Subexponenciales, 34
- distribuciones subexponenciales, 23
- ecuación de renovación defectuosa,  
19
- exponente de Lundberg, 20
- Filip Lundberg, 1
- función analítica, 42
- función cuantil, 26
- función inversa generalizada, 26
- gráficas de cuantiles, 26
- identidad de Spitzer, 12
- Lema de clases monótonas, 7
- lema de esperanza condicional, 57
- medida de Lebesgue, 16
- Modelo de *Cramér-Lundberg*, 1
- modelo de renovación, 2
- Monto agregado en demandas, 7
- Monto total en las demandas, 7
- paradoja de San Petersburgo, 46
- probabilidad de ruina, 9
- proceso de renovación, 2, 58
- proceso de riesgo resultante, 9
- tilde no de la demanda, 1
- proceso Poisson homogéneo, 2
- proceso Poisson mezclado, 43
- riesgo, 1
- safety loading, 11
- sobre-dispersión, 43
- tasa de riesgo, 47

tasa de riesgo premio, 11  
tasa premio, 10  
teoría clásica de Wiener-Hopf, 12  
teoría de renovación, 12, 16  
teoría de riesgo actuarial, 1  
teorema de representación, 38  
tiempos de demandas, 2  
tiempos inter-llegadas, 2  
transformada de Esscher, 19  
transformada de Fourier, 56  
Transformada de Laplace-Stieltjes,  
13  
transformadas, 55  
transformada de Laplace-Stieltjes, 55  
variación dominada, 45  
variación lenta, 45  
variación regular, 31