

01162 10



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**DRENAJE DE UNA COLUMNA DE SUELO SUJETA A
UNA CONDICION DE RADIACION LINEAL**

ING. MARGARITA ELIZABETH PRECIADO JIMENEZ

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN INGENIERIA (HIDRAULICA)

DIRECTOR DE TESIS: DR. CARLOS FUENTES RUIZ



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIA

A MIS PADRES

J. JESÚS PRECIADO RINCÓN

MA. GUADALUPE JIMÉNEZ DE PRECIADO

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. Carlos Fuentes Ruiz director de esta tesis, por su amistad y paciencia.

Al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua, de manera muy especial a su director general el Dr. Álvaro Alberto Aldama Rodríguez por su apoyo y consejos.

Al Dr. Aldo Iván Ramírez Orozco por sus valiosos consejos y colaboración desinteresada.

Al M.I. Heber Eleazar Saucedo Rojas por su amistad y apoyo incondicional.

Al M.I. Mauricio de Jesús Escalante Estrada por su amistad y apoyo en la revisión de este trabajo.

Al M.I. Carlos Gutiérrez Ojeda por su revisión y comentarios a este trabajo.

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico en mis estudios.

Y a todas y cada una de las personas que hicieron posible la realización de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO I. TEORÍA HIDRODINÁMICA	5
1.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES	6
1.1.1 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	6
1.1.2 LEY DE DARCY	6
1.1.3 ECUACIÓN DE RICHARDS (POTENCIAL DE PRESIÓN)	8
1.1.4 ECUACIÓN TIPO FOKKER-PLANCK (CONTENIDO DE HUMEDAD)	9
1.2 CARACTERÍSTICAS HIDRODINÁMICAS	11
CAPITULO II. SOLUCIÓN NUMÉRICA	13
2.1 TRANSPORTE DE AGUA	16
2.2 ALGORITMO DE THOMAS	19
2.3 CONDICIONES DE FRONTERA	20
2.3.1 CONDICIÓN DE PRIMER ORDEN (DIRICHLET)	20
2.3.2 CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN (NEUMANN)	21
2.4 SELECCIÓN DE LOS INCREMENTOS ESPACIAL (ΔZ) Y TEMPORAL (ΔT)	23
CAPITULO III. CARACTERIZACIÓN HIDRODINÁMICA DEL SUELO	26
3.1 INTRODUCCIÓN	27
3.2 EL MODELO DE ARYA Y PARIS	30
3.3 MODELO FRACIAL DE FUENTES	36

3.4	COMPARACIÓN EXPERIMENTAL	38
3.5	ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS A PARTIR DE LA CURVA GRANULOMÉTRICA	40
	CAPITULO IV. CONDICIÓN DE RADIACION LINEAL	44
4.1	APROXIMACIÓN TEÓRICA DE LOS PARÁMETROS	49
	CAPITULO V. RESULTADOS	51
5.1	COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA Y EL EXPERIMENTO DE LABORATORIO	52
5.2	COMPARACIÓN DE LA SOLUCIÓN NUMÉRICA Y LOS DATOS DE CAMPO	55
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	60
	BIBLIOGRAFIA	62

INDICE DE FIGURAS Y TABLAS

FIGURA 2.1	DISCRETIZACIÓN DEL MEDIO	17
FIGURA 3.1	CURVA GRANULOMETRICA DE LA ARENA DE TEZOYUCA, MORELOS	41
FIGURA 3.2	COMPARACIÓN DE LAS LÁMINAS DE INFILTRACIÓN MEDIDA Y CALCULADA	43
FIGURA 4.1	HIDROGRAMA DE DESCARGA DE UN DREN Y PRESIÓN EN LA BASE DE LA COLUMNA DE SUELO	49
FIGURA 5.1	PERFIL DE HUMEDAD EN EL SUELO. DATOS LABORATORIO	53
FIGURA 5.2	EVOLUCIÓN DE LA LÁMINA DRENADA. DATOS DE LABORATORIO	54
FIGURA 5.3	HIDROGRAMA DE SALIDA DE LA COLUMNA DE SUELO. DATOS DE LABORATORIO.	55
FIGURA 5.4	PERFIL DE HUMEDAD EN EL SUELO. DATOS DE CAMPO	57
FIGURA 5.5	EVOLUCIÓN DE LA LÁMINA DRENADA. DATOS DE CAMPO	58
FIGURA 5.6	HIDROGRAMA DE SALIDA DE LA COLUMNA DE SUELO. DATOS DE CAMPO	59
TABLA 3.1	VALORES DE BASE	39
TABLA 3.2	COMPARACIÓN EXPERIMENTAL DEL PARÁMETRO α	39

INTRODUCCIÓN

INTRODUCCIÓN

La descripción de la transferencia de agua en el suelo se vuelve importante cuando se trata de resolver problemas ligados a las ciencias tales como la hidrología, hidrogeología, agronomía, climatología, ingeniería civil y sanitaria, etc. Es en este dominio físico donde se encuentran las reservas de agua y de sustancias nutritivas para las plantas, y en donde tienen lugar las fases más importantes de la evapotranspiración, la infiltración y la recarga de los mantos freáticos. Esta capa de suelo es también el lugar de las transformaciones bio-físico-químicas de los compuestos minerales y orgánicos.

El estudio de los fenómenos relacionados con el drenaje parcelario adquiere una verdadera importancia para la sociedad en general, si se tiene en cuenta que dichos sistemas son la herramienta básica para reducir los problemas que los niveles freáticos someros representan para el desarrollo de las plantas de interés agrícola.

Para atacar estos problemas se han desarrollado investigaciones que involucran la solución de problemas de transferencia de agua en el suelo utilizando datos conocidos tales como la lámina de agua sobre la superficie del suelo, la posición del manto freático estático, el flujo de agua en la superficie del suelo y el flujo en los drenes del sistema.

En este documento se presenta un modelo numérico el cual simula el movimiento del agua en un dren para esto, se utiliza una condición de frontera superior de segundo orden o de Neumann (flujo nulo en la superficie); y una condición de frontera inferior de radiación lineal de Newton conocida también como condición de Robbins la cual permite obtener el hidrograma de salida del dren.

Los resultados del modelo fueron validados utilizando datos obtenidos en un experimento de campo y en un experimento de laboratorio.

Una de las componentes más importantes en el desarrollo del modelo consiste en el planteamiento de cómo estimar de la mejor manera los parámetros involucrados en la condición de radiación lineal para un dren subterráneo. La aplicación de los resultados obtenidos del modelo se podrán utilizar para el mejoramiento de los sistemas de drenaje tanto en la planeación como en el diseño de los mismos.

En el capítulo I se describe el estado físico del agua en el suelo, se plantean las ecuaciones de Darcy y de Richards, además de diferentes propuestas para la definición de las características hidrodinámicas.

El capítulo II se definen diferentes esquemas para la solución de la ecuación de Richards y se establece la solución numérica del modelo unidimensional del transporte de agua en diferencias finitas. Se presenta además, la selección de los pasos de tiempo y espacio para el esquema numérico utilizado.

En el capítulo III se presenta la estimación de las características hidrodinámicas del suelo empleado en un experimento de laboratorio y los valores con los cuales se calculan las características de van Genuchten (1980) y la función de la conductividad hidráulica del suelo de Brooks y Corey (1964), con los cuales se calibra el modelo.

En el capítulo IV se deduce de la frontera inferior utilizando la condición de radiación lineal de Newton (Robbins) y una aproximación teórica de los parámetros que la componen.

En el capítulo V se presentan los resultados obtenidos utilizando el modelo de simulación numérica el cual se calibró con datos de una parcela del Centro Nacional de Transferencia de Tecnología de Riego y Drenaje (CENATyD) ubicado en el Valle del Carrizo Sinaloa, así como aquellos obtenidos mediante un experimento de laboratorio en las instalaciones de la DEPMI-UNAM Campus Morelos.

CAPÍTULO I

TEORÍA HIDRODINÁMICA

1. TEORÍA HIDRODINÁMICA

1.1 ECUACIONES FUNDAMENTALES

1.1.1 Ecuación de continuidad

La aplicación del principio de conservación de masa a un volumen elemental de suelo, considerado indeformable, conduce a la ecuación de continuidad siguiente (Fuentes, 1992):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_w + S_w = 0 \quad (1.1)$$

donde $\mathbf{q}_w [L^3 T^{-1}]$ es el volumen de agua que atraviesa en la unidad de tiempo (gasto volumétrico) una superficie unitaria de suelo expuesta perpendicularmente a la dirección del movimiento o flujo del agua; $\theta [L^3 L^{-3}]$ es el contenido volumétrico de agua y es una función del potencial de presión, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ es el operador gradiente; x, y, z son las coordenadas espaciales, t el tiempo y $S_w [L^3 T^{-1}]$ es un término que representa la extracción del agua por las plantas.

1.1.2 Ley de Darcy

La ley de Darcy establece que el flujo de agua en un medio poroso parcialmente saturado es proporcional al gradiente hidráulico (Fuentes, 1992):

$$\mathbf{q}_w = -K(\psi) \nabla H \quad ; \quad H = \psi - z \quad (1.2)$$

donde $H [L]$ es el potencial hidráulico, igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo (ψ) $[L]$ expresado como la altura de una columna equivalente de agua (positivo en la zona saturada y negativo en la zona no saturada del suelo) y del potencial gravitacional asimilado a la coordenada vertical (z) orientada positivamente hacia abajo; $K(\psi) [LT^{-1}]$ es un coeficiente empírico denominado conductividad hidráulica.

La ecuación (1.2) asume dos hipótesis fundamentales:

1. La fuerza que provoca el flujo isotérmico del agua en un suelo rígido y no saturado, es la suma del potencial matricial (de presión), el potencial gravitacional y el potencial de presión de aire, este último se asume generalmente igual a cero.
2. La conductividad hidráulica del suelo no saturado es función del contenido de agua o del potencial de presión.

En forma unidimensional la ley de Darcy para una columna vertical de suelo se expresa de la siguiente manera:

$$q_w(z, t) = -K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + K(\psi) \quad (1.3)$$

Por su parte la ecuación (1.1) se escribe en forma unidimensional:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + S_w = 0 \quad (1.4)$$

El sustituir la ecuación (1.2) en la ecuación (1.4) permite obtener la ecuación general para el flujo del agua en suelos parcialmente saturados.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla (\psi - z)] - S_w \quad (1.5)$$

La ecuación diferencial (1.5) contiene explícitamente dos variables independientes: el contenido de humedad (θ) y el potencial de presión (ψ). Sin embargo, la existencia de una relación entre ellas, $\theta = \theta(\psi)$, conocida como la característica de humedad del suelo o curva de retención de humedad, permite expresar la ecuación diferencial en términos de una sola variable independiente. El conjunto formado por las relaciones $\theta = \theta(\psi)$ y $K = K(\psi)$ es conocido con el nombre genérico de *características hidrodinámicas del suelo* y su estudio constituye una de las ramas de la Física de Suelos.

1.1.3 Ecuación de Richards (Potencial de presión)

El flujo en un medio poroso no saturado ha sido tradicionalmente descrito con la ecuación de Richards la cual esta basada en la ecuación de flujo de Darcy-Buckingham.

Al introducir la capacidad específica definida como la pendiente de la curva de retención (Jury, 1991):

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (1.6)$$

en la ecuación (1.5) se obtiene la ecuación de Richards (1931) en la cual la variable dependiente es el potencial de presión.

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla (\psi - z)] - S_w \quad (1.7)$$

Ahora bien, para describir la transferencia del agua en una columna vertical de suelo, se considera la forma unidimensional siguiente:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] - S_w \quad (1.8)$$

Cuando se conocen las funciones $C(\psi)$ y $K(\psi)$ la ecuación (1.8) puede resolverse si se especifican dos condiciones de frontera y la condición inicial.

1.1.4 Ecuación tipo Fokker-Planck (contenido de humedad)

Al definir la difusividad hidráulica como (Jury, 1991):

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (1.9)$$

La ecuación (1.5) se transforma en:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + S_w \quad (1.10)$$

La cual es conocida bajo el nombre de ecuación de Fokker-Planck y cuya variable dependiente es el contenido de humedad.

Para el estudio de la transferencia de agua en una columna vertical de suelo se utiliza la ecuación tipo Fokker-Planck unidimensional (Fuentes, 1992):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1.11)$$

cuya solución puede ser expandida en potencias de $t^{1/2}$, cuando se sujeta la ecuación (1.11) a las siguientes condiciones auxiliares:

$$\theta = \theta_s \quad \text{en } z = 0 \quad \text{para } t > 0 \quad (1.12)$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{en } z = \infty \quad \text{para } t > 0 \quad (1.13)$$

$$\theta = \theta_0 \quad \text{en } z > 0 \quad \text{para } t = 0 \quad (1.14)$$

donde θ_s es el contenido de humedad a saturación natural, θ_0 es el contenido inicial de humedad, z (cm) es la profundidad positiva hacia abajo y t (s) es el tiempo.

En particular la infiltración acumulada I (cm) se puede escribir como (Philip, 1957):

$$I(t) = S_s t + At + O\left(t^{3/2}\right) \quad (1.15)$$

donde S es la sorbilidad (Philip, 1957b), proporcionada por:

$$S(\theta_s, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \phi(\theta) d\theta \quad (1.16)$$

y

$$A(\theta_s, \theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_s} \chi(\theta) d\theta \quad (1.17)$$

donde ϕ es la variable de Boltzmann (1894) y χ es el segundo término de la serie de tiempo de Philip (1957).

Para resolver la ecuación (1.11) se deben especificar dos condiciones de frontera y la condición inicial y por supuesto las funciones $D(\theta)$ y $K(\theta)$.

1.2 CARACTERÍSTICAS HIDRODINÁMICAS

Para la resolución de la ecuación de transporte, ya sea de forma analítica o numéricamente, es indispensable representar las propiedades hidrodinámicas del suelo expresando el potencial de presión (ψ) y la conductividad hidráulica (K) como funciones del contenido de humedad del agua (θ).

El grado de saturación del suelo con un fluido tiene un profundo impacto en el transporte de sustancias a través del medio poroso. Una gran parte de este proceso se debe a la habilidad del medio poroso de retener y transmitir el agua. Esta habilidad está caracterizada por la relación entre el contenido de humedad (θ) la carga de presión (ψ) y la conductividad hidráulica (K). El movimiento del agua en la zona vadosa y el intercambio de calor y masa a través de la frontera suelo-atmósfera son influenciadas por las *propiedades hidrodinámicas del suelo*.

El reconocimiento de las propiedades hidráulicas de los suelos, expresadas en carga de presión de agua, ψ (cm), como una función del contenido volumétrico de agua, θ (cm^3/cm^3) y la conductividad hidráulica K (cm/h) como una función de (θ), es de primordial importancia en muchos estudios de campo al tratar con el transporte de agua en la zona no saturada del suelo.

La solución a la ecuación del transporte (ecuación de Fokker Plank) requiere de solo dos relaciones funcionales, pero el número de arreglos de los parámetros involucrados pueden ser del orden de cuatro o cinco dependiendo de las relaciones escogidas. Para afrontar el problema, algunos autores (por ejemplo Brooks y Corey, 1964; Brutsaert, 1967; van Genuchten, 1980), desarrollaron relaciones entre dos de los parámetros usados en $\psi(\theta)$ y $K(\theta)$, basados en el uso de modelos de capilaridad. (e.g. Childs y Collis-George, 1950; Burdine, 1953).

Muchos de los parámetros son arreglos puros, sin ningún significado físico. En el pasado, poca atención le dieron los autores a las restricciones de los arreglos de los parámetros cuando se usaban ecuaciones de transporte, solo Brutsaert (1974) estudió el problema para las primeras etapas de la infiltración considerando las limitaciones de la sorbilidad finita.

Las mediciones de campo o de laboratorio de los valores de $\theta(\psi)$ y $K(\theta)$ son dados como puntos experimentales dispersos. Como el modelo en estudio requiere relaciones continuas, expresiones de forma cerrada son usadas para una convergencia de los puntos experimentales. Existen muchas relaciones propuestas en la literatura las cuales pueden ser divididas en cuatro grandes grupos basados en sus variables dependientes como se muestra a continuación:

- $\theta(\psi)$ Brooks y Corey, (1964); King, (1965); Brutsaert, (1966); Farrel y Larson (1972); Van Genuchten, (1980); Haverkamp y Vauclin (1981); Haverkamp y Parlange (1986).
- $K(\theta)$ Averyanov (1950); Irmay (1954); Brooks y Corey (1964); Simmons *et al.* 1979; Van Genuchten (1980); Broadbridge y White (1988); Sander *et al.* 1988.
- $K(\psi)$ Wind (1955), Rijtema (1965), Gardner (1958).
- $D(\theta)$ Fujita (1952); Gardner y Mayhugh (1958).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO II

SOLUCIÓN NUMÉRICA

2. SOLUCIÓN NUMÉRICA

En este capítulo se muestra la forma de como se resuelve numéricamente la ecuación de Richards en su versión unidimensional. Aunque en el método ilustrado para resolver la ecuación unidimensional de Richards se considera el término S_w el cual corresponde a la extracción por las plantas, éste es ignorado en todos los casos ilustrados en los resultados.

En las dos décadas pasadas se han desarrollado varias rutinas de resolución de la ecuación de Richards. Aún así, la solución numérica de la ecuación de Richards se continúa investigando.

Dicha ecuación es difícil de resolver debido a la alta no linealidad de las características hidrodinámicas. Además los cambios abruptos de las condiciones de humedad cerca de la superficie del suelo, lo cual causa frentes húmedos muy pronunciados en suelos secos o frentes secos muy pronunciados en suelos húmedos, pueden plantear problemas adicionales.

El resultado entonces es que la simulación del flujo de agua en el suelo puede depender en gran parte de la estructura del esquema numérico, del Δt (incrementos en el tiempo) y del Δx (incrementos en el espacio). (van Genuchten, 1982; Milly, 1985; Celia *et al.* 1990; Warrick, 1991; Zaidel y Russo, 1992; Baker, 1995; Pan *et al.*, 1996; Miller *et al.*, 1998; Romano *et al.*, 1998).

Existen diversos métodos numéricos con los cuales es posible resolver la ecuación de Richards unidimensional, por ejemplo se pueden utilizar el método de diferencias finitas o el método de elementos finitos, los cuales son realmente sencillos de aplicar (Feddes *et al.*, 1988; Celia *et al.*, 1990; Pan *et al.*, 1996).

El método de elementos finitos tiene ventajas con respecto al de diferencias finitas cuando se utiliza en geometrías irregulares y flujos bidimensionales o tridimensionales. Por otro lado, la ventaja que presenta el método de diferencias finitas contra el de elementos finitos se manifiesta en flujos unidimensionales debido a que no necesita agregar masa para prevenir las oscilaciones (van Genuchten, (1982); Pan *et al.*, 1996) y es realmente fácil de concebir e implementar en rutinas numéricas.

Un método popular para resolver la ecuación de Richards ha sido un esquema numérico implícito, con una linealización explícita de $K(\psi)$ y $C(\psi)$, descrito por Haverkamp *et al.* (1977) y Belmans *et al.* (1983). Existen también métodos de resolución de la ecuación de Richards desarrollados por Celia *et al.* (1990), el cual se basa en un método modificado de Picard que involucra la carga de presión transformada h , y el método de transformación de ϕ desarrollado por Kirkland *et al.* (1992). Pan y Wierenga desarrollaron en 1995 un método de solución que involucra una presión transformada no lineal P_1 , con el método de Picard.

A continuación se mencionan algunos métodos para la solución de la ecuación de Richards, entre ellos se encuentra el método de interpolación integral para obtener el esquema en diferencias finitas de la ecuación de Richards (Arroyo, 1994), en donde las integrales se evalúan expresándolas con factores de peso en sus extremos. El esquema así obtenido, es un esquema en diferencias finitas implícito.

También se han desarrollado esquemas numéricos con elementos finitos para condiciones de frontera en el dren tanto del tipo Dirichlet como del tipo Robbins (Saucedo, 1997) en el cual se aplica el método de Galerkin, que es un caso especial del método de los residuales ponderados o pesados.

El método de van Dam y Feddes (2000) propone un balance de masa preciso y el cual converge rápidamente a la solución teórica correcta. Este esquema es relativamente fácil de implementar. El esquema se desarrolla en diferencias finitas hacia atrás.

Entre los más recientes se encuentra el método localizado adjunto Euleriano-Lagrangiano para la ecuación de Richards (Arroyo y Aldama, 2000). Este método se basa en utilizar una expansión tipo Taylor-Fréchet a lo largo de las características sobre el operador no lineal de la ecuación de Richards en la dirección vertical.

2.1 Transporte de agua

Para construir la solución numérica, el perfil del suelo se divide en compartimentos de espesor Δz constante como se muestra en la figura 2.1

Los factores de peso en el espacio (γ) y tiempo (ω) se definen como:

$$\gamma = \frac{z_{i+\gamma} - z_i}{z_{i+1} - z_i} \quad ; \quad \omega = \frac{t_{j+\omega} - t_j}{t_{j+1} - t_j} \quad (2.1)$$

donde se tiene que $0 < \gamma < 1$ y $0 < \omega < 1$; $i = 1, 2, \dots$ y $j = 1, 2, \dots$, son los índices para el espacio y el tiempo respectivamente. Para discretizar las ecuaciones de transporte se supone que los factores de ponderación existen y son independientes del espacio y el tiempo.

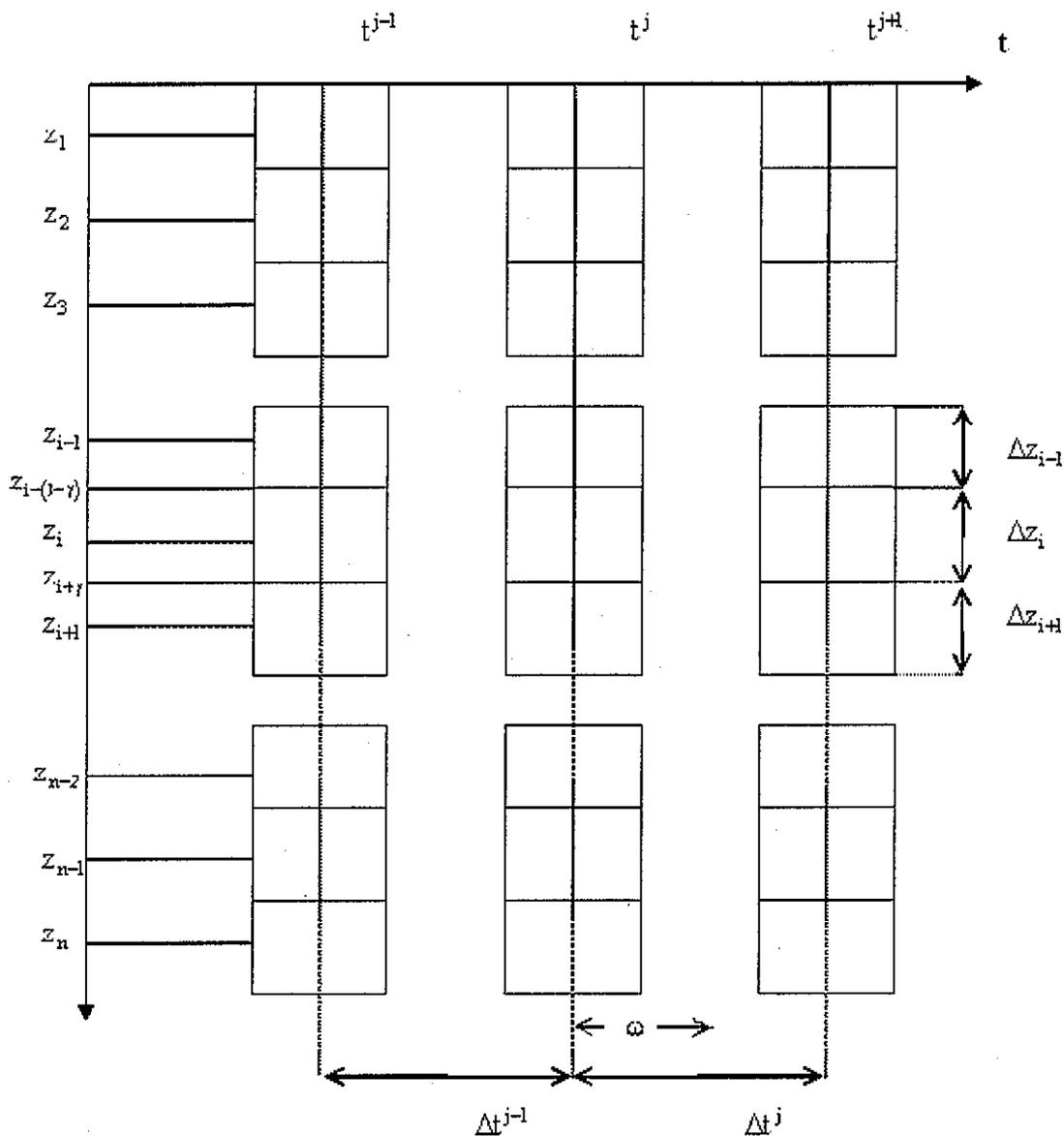


Figura 2.1 Discretización del medio

La presión en el nodo intermedio $i+\gamma$, para todo tiempo (j), se evalúa con: *

$$\psi_{i+\gamma}^j = (1-\gamma)\psi_i^j + \gamma\psi_{i+1}^j$$

Mientras que la presión en el tiempo intermedio $j + \omega$ para todo nodo (i), se evalúa:

$$\psi_i^{j+\omega} = (1 - \omega)\psi_i^j + \omega\psi_i^{j+1} \quad (2.3)$$

Las aproximaciones de las derivadas de la ecuación unidimensional de Richards correspondientes al nodo i -ésimo se calculan como sigue:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_i^{j+\omega} = C(\psi_i^{j+\omega}) \frac{\psi_i^{j+1} - \psi_i^j}{\Delta t_j}; \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial q_w}{\partial z} \Big|_i^{j+\omega} = \frac{q_w^{j+\omega}[i+\gamma] - q_w^{j+\omega}[i-\gamma]}{\Delta z_i}; \quad \Delta z_i = (1 - \gamma)(z_i - z_{i-1}) + \gamma(z_{i+1} - z_i) \quad (2.5)$$

De la ecuación unidimensional de la ley de Darcy

$q_w(z, t) = -K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial z} + K(\psi)$ se deduce:

$$q_w^{j+\omega}(i+\gamma) = -K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) \left(\frac{\psi_{i+1}^{j+\omega} - \psi_i^{j+\omega}}{z_{i+1} - z_i} - 1 \right) \quad (2.6)$$

$$q_w^{j+\omega}(i-(1-\gamma)) = -K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \left(\frac{\psi_i^{j+\omega} - \psi_{i-1}^{j+\omega}}{z_i - z_{i-1}} - 1 \right) \quad (2.7)$$

La sustitución de las ecuaciones (2.2) a (2.7) en la ecuación (1.8) conduce al sistema de ecuaciones algebraicas siguiente:

$$A_i \psi_{i-1}^{j+1} + B_i \psi_i^{j+1} + D_i \psi_{i+1}^{j+1} = E_i; \quad 2 \leq i \leq (n-1) \quad (2.8)$$

donde:

$$A_i = - \left[\frac{\omega K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega})}{\Delta z_i (z_i - z_{i-1})} \right] \quad (2.9a)$$

$$D_i = - \left[\frac{\omega K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega})}{\Delta z_i (z_{i+1} - z_i)} \right] \quad (2.9b)$$

$$B_i = \frac{C(\psi_i^{j+\omega})}{\Delta t} - A_i - D_i \quad (2.9c)$$

$$E_i = \frac{C(\psi_i^{j+\omega})}{\Delta t} + \frac{(1-\omega)}{\Delta z_i} \left\{ \left[K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) \frac{\psi_{i+1}^j - \psi_i^j}{z_{i+1} - z_i} \right] - \left[\left[K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) \frac{\psi_i^j - \psi_{i-1}^j}{z_i - z_{i-1}} \right] \right] \right\} \quad (2.9d)$$

$$+ \frac{1}{\Delta z_i} \left[K(\psi_{i-(1-\gamma)}^{j+\omega}) - K(\psi_{i+\gamma}^{j+\omega}) \right] - S_{w(i)}^{j+\omega}$$

Una vez especificadas las condiciones iniciales y de frontera, el sistema de ecuaciones que produce (2.8) puede resolverse de manera eficiente con el algoritmo de Thomas (Burden y Faires, 1985).

2.2 Algoritmo de Thomas

Para resolver eficientemente el sistema (2.8), cuyos coeficientes forman matrices tridiagonales, se aplica el algoritmo de Thomas. Este algoritmo requiere que se establezcan las reglas recursivas siguientes:

Transporte de agua:

$$\psi_i^{j+1} = F_i - G_i \psi_{i+1}^j; \quad i=1 \dots n \quad (2.10)$$

de donde:

$$F_i = \frac{E_i - A F_{i-1}}{B_i - A_i G_{i-1}}; \quad i = 2 \dots n - 1 \quad (2.11)$$

$$G_i = \frac{D_i}{B_i - A_i G_{i-1}}; \quad i = 2 \dots n - 1 \quad (2.12)$$

El procedimiento para resolver el sistema de ecuaciones es el siguiente:

1. Se define la condición inicial de humedad en el perfil del suelo.
2. Se definen F_1 y G_1 para la frontera superior, es decir, en la superficie del suelo.
3. Se calculan F_i y G_i para $i = 2, \dots, n - 1$ con las ecuaciones (2.11)-(2.12) (barrido hacia adelante).
4. Se define ψ_n^{j+1} de la condición de frontera inferior.
5. Se determinan ψ_i^{j+1} para $i = n - 1, \dots, 1$ con la ecuación (2.10) (barrido hacia atrás).

2.3 CONDICIONES DE FRONTERA

2.3.1 Condición de primer orden (Dirichlet)

Esta condición se aplica cuando el valor de la función (ψ) se conoce para todo tiempo en la superficie del suelo, por ejemplo, cuando existe una lámina constante de agua.

1) Frontera superior

Haciendo $i = 1$ en la ecuación (2.10) se tiene:

$$\psi_1^{j+1} = F_1 - G_1 \psi_2^{j+1} \quad (2.13)$$

Debido a que ψ_1 es la lámina sobre la superficie, independiente de ψ_2 , se tiene:

$$F_1 = \psi_1^{j+1} \text{ y } G_1 = 0 \quad (2.14)$$

2) Frontera inferior

La condición de Dirichlet en la frontera inferior se utiliza cuando se considera una columna semi-infinita y el potencial de presión en la frontera inferior corresponden a la condición inicial.

La condición en la frontera inferior se introduce de manera análoga a la frontera superior.

Haciendo $i = n - 1$ en la ecuación (2.10) se tiene:

$$\psi_{n-1}^{j+1} = F_{n-1} - G_{n-1} \psi_n^{j+1} \quad (2.15)$$

2.3.2 Condición de segundo orden (Neumann)

Esta condición se aplica cuando se conoce la derivada de la función, es decir, el flujo de agua es conocido para todo tiempo y el valor de ψ_1 se calcula utilizando las leyes de flujo.

1) Frontera superior:

$$q_{w[l]} = -K_{l+\gamma}^{j+\omega} \left(\frac{\psi_2^{j+1} - \psi_1^{j+1}}{z_2 - z_1} - 1 \right) \quad (2.16)$$

Despejando a ψ_1^{j+1} de la ecuación (2.16) resulta:

$$\psi_1^{j+1} = (z_2 - z_1) \left(\frac{q_{w[l]}}{K_{l+\gamma}^{j+\omega}} - 1 \right) + \psi_2^{j+1} \quad (2.17)$$

De acuerdo con la ecuación (2.10) se obtiene que:

$$F_1 = (z_2 - z_1) \left(\frac{q_{w[l]}}{K_{l+\gamma}^{j+\omega}} - 1 \right) \text{ y } G_1 = -1; \quad (2.18)$$

2) Frontera inferior

Esta condición se aplica cuando se conoce el flujo de drenaje $q_{w(n)}$. Aquí el valor de ψ_n se obtiene a partir de las leyes de flujo.

$$q_{w(n)} = -K(\psi_{n-[i-\gamma]}^{j+\omega}) \left(\frac{\psi_n^{j+1} - \psi_{n-1}^{j+1}}{z_n - z_{n-1}} - 1 \right) \quad (2.19)$$

Despejando a ψ_{n-1}^{j+1} de la ecuación (2.19) resulta:

$$\Psi_{n-1}^{j+1} = (z_n - z_{n-1}) \left(\frac{q_w[n]}{K_{n-(1-\gamma)}^{j+\omega}} - 1 \right) + \Psi_n^{j+1} \quad (2.20)$$

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (2.10) y (2.20) se determinan Ψ_n y Ψ_{n-1} .

2.4 Selección de los incrementos espacial (Δz) y temporal (Δt)

La solución de una ecuación diferencial obtenida mediante un esquema en diferencias finitas debe satisfacer una serie de condiciones que garanticen su convergencia hacia la solución de la ecuación diferencial de partida. Para lograr esto, es común realizar estudios de convergencia y estabilidad de los esquemas respecto a la ecuación diferencial y de propagación de errores.

El método de Von Neumann, basado en el análisis de Fourier, es ampliamente utilizado para el estudio de la estabilidad de un esquema numérico, sin embargo, la no linealidad de las características hidrodinámicas del suelo dificulta considerablemente su aplicación. Para garantizar una precisión aceptable de los resultados se establecen las siguientes condiciones (Arroyo, 1994):

$$D_0 \frac{\Delta t}{\Delta z^2} \leq 0.25 ; C_r \leq 0.5 \text{ y } P \leq 2 \quad (2.21)$$

donde D_0 es el valor de la difusividad hidráulica mas desfavorable que se presenta en el perfil hidrodinámico P es el número de Péclet que en este caso esta dado por $P = \frac{C_r}{0.25}$ y C_r el número de Courant. A través de una serie de pruebas numéricas, Arroyo establece que estas condiciones garantizan una buena precisión de los resultados a través de un modelo en diferencias finitas implícito.

Una alternativa para seleccionar los pasos de tiempo y espacio en la discretización es presentada por Vauclin (1979) y Haverkamp y Vauclin (1981). Estos autores comparan el esquema original de Laasonen con la media geométrica para la conductividad hidráulica internodal sugerida por Haverkamp *et al.* (1977), aplicando una columna semi - infinita de suelo sujeta a una presión constante (ψ_1) en la superficie del suelo y a una presión inicial constante (ψ_0), con la solución cuasi-analítica presentada por Philip (1957a y 1957b), es decir, la solución en serie con nueve términos recomendado por Haverkamp (1983) para los “tiempos cortos” y la solución asintótica válida para los “tiempos largos”.

Definiendo:

$$M = \frac{K_s(\psi_1 - \psi_0)}{(\theta_1 - \theta_0)} \left(\frac{\Delta t}{\Delta z^2} \right) \quad (2.22)$$

donde $\theta_1 = \theta(\psi_1)$ es el contenido de humedad asociado con la presión ψ_1 impuesta en la superficie del suelo, $\theta_0 = \theta(\psi_0)$ es el contenido de humedad asociado con la presión inicial en la superficie del suelo y $K_1 = K(\psi)$ es la conductividad hidráulica correspondiente a ψ_1 .

Haverkamp y Vauclin (1981) concluyen que los valores de $M = 0.5$ para un suelo arcilloso, y $M = 9.0$ para un suelo arenoso, hacen coincidir la solución numérica y la cuasi-analítica.

A partir de un análisis sobre el comportamiento del volumen infiltrado en los tiempos cortos, en una columna semi- infinita sujeta a una condición de Dirichlet en la frontera superior, se propuso la siguiente relación (Zataráin, 1996):

$$M = \frac{2(K_s - K_0)\lambda_c}{\theta_s - \theta_0} \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \quad (2.23)$$

donde $K_0 = K(\psi_0)$ es la conductividad hidráulica correspondiente a ψ_0 .

En el presente trabajo, para la determinación de Δt se utiliza la ecuación (2.23).

CAPÍTULO III
CARACTERIZACIÓN
HIDRODINÁMICA DEL SUELO

3. CARACTERIZACIÓN HIDRODINÁMICA DEL SUELO

3.1. Introducción

Las características hidrodinámicas de la ley de Darcy se pueden estimar a partir de información proporcionada por la curva granulométrica del suelo y un evento transitorio del flujo del agua en el suelo, como es una prueba de infiltración o una prueba de drenaje.

Para la descripción del proceso de drenaje de una columna de suelo con la solución numérica es necesaria la caracterización hidrodinámica del suelo. Como se señala por Fuentes *et al*, (1992), la combinación de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange es conveniente en estudios teóricos, como la construcción de soluciones analíticas exactas, pero en estudios experimentales es más conveniente la utilización de la combinación de la curva de retención propuesta por van Genuchten (1980), con la restricción de Burdine (1953), con la curva de conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964), debido a que satisfacen las propiedades integrales de la infiltración y a la facilidad para la identificación de sus parámetros.

La curva de retención propuesta por van Genuchten (1980) se escribe como:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (3.1)$$

donde ψ_d es un valor característico de la presión del agua, m y n son dos parámetros de forma empíricos relacionados por la restricción de Burdine (1953): $m = 1 - 2/n$, con $0 < m < 1$ y $n > 2$.

La conductividad hidráulica propuesta por Brooks y Corey (1964) se representa como:

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (3.2)$$

donde η es un parámetro de forma empírico y positivo.

Para estimar los parámetros m y η que aparecen en las características hidrodinámicas a partir de la curva granulométrica del suelo se tiene como base el estudio de la Ley de Laplace.

La ley de Laplace establece la relación entre el potencial de presión (ψ), expresado como una altura equivalente de agua, y el radio medio de curvatura r_c formado por la interfaz aire-agua:

$$\psi = \frac{2\sigma}{\rho_w g r_c} \quad (3.3)$$

donde $\psi = \psi_{\text{air}} - \psi_{\text{agu}}$, ψ_{air} y ψ_{agu} son respectivamente las presiones del aire y del agua en el suelo; σ es el coeficiente de tensión superficial (dinas/cm), ρ_w es la masa volumétrica del agua (gr/cm^3) y g la aceleración gravitacional (cm/s^2). Con la hipótesis de que la presión del aire en el suelo es igual a la presión atmosférica, de la ecuación (3.3) se puede hacer $\psi_{\text{air}} = 0$, por lo tanto $\psi = -\psi_{\text{agu}}$.

Esta relación puede ser simplificada observando que el grandor definido por $\lambda_L = (2\sigma / \rho_w g)^{1/2}$ es dimensionalmente homogéneo a una longitud y vale para el agua a 20°C $\lambda_L = 0.386$ cm. El radio de curvatura puede ser expresado con la ayuda del ángulo de contacto o de mojado α_c (formado por la interfaz y el sólido) y el diámetro de poro: $r_c = R / 2 \cos(\alpha_c)$. Finalmente:

$$\psi = \frac{2\lambda_L^2}{R} \cos(\alpha_c) \quad (3.4.)$$

La ley de Laplace indica que la presión del agua define una “escala característica” del medio poroso, pero esta ley no nos indica algo sobre el significado geométrico de dicha escala característica.

Se introducen las dos funciones de distribución que permiten definir el contenido volumétrico de agua en función de los tamaños de poros y partículas respectivamente (Haverkamp y Parlange, 1986; Fuentes, 1992).

1) La función $S(R)$ se define como la función de distribución del volumen de poros relativa al volumen de vacíos total, desde los poros de tamaño $r = 0$ hasta los poros de tamaño $r = R$:

$$\theta = \phi S(R) \quad \text{donde} \quad 0 \leq S(R) \leq 1 \quad (3.5)$$

en tanto que la función $S(R)$ es estimada a partir de la presión, la función $S(h)$ es relacionada al grado de saturación.

2) La función $F(D)$ es definida como la función de distribución del volumen de sólidos relativo al volumen total de los sólidos, desde las partículas de tamaño $d = 0$ hasta las partículas de tamaño $d = D$:

$$\theta = \phi F(D) \quad \text{donde} \quad 0 \leq F(D) \leq 1 \quad (3.6.)$$

A continuación se expone brevemente el modelo de Arya y Paris (1981) que constituye el modelo empírico que proporciona la mayor información sobre las escalas que determina la presión del agua en el suelo. Para su exposición es necesario introducir la definición de la relación de vacíos.

La relación de vacíos (e) se define como el volumen total de vacíos (V_v) relacionado a un volumen total de sólidos (V_s). En tanto que el volumen total del suelo es $V_t = V_v + V_s$, la relación entre e y la porosidad total del suelo ($\phi = V_v / V_t$) es proporcionada por:

$$e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{\phi}{1 - \phi} \quad (3.7)$$

3.2. El modelo de Arya y Paris

La curva granulométrica es normalmente ordenada de tal forma que:

$$0 = D_0 < D_1 < \dots < D_i < D_{i+1} < \dots < D_N = \infty \quad (3.8.1)$$

$$0 = F_0 < F_1 < \dots < F_i < F_{i+1} < \dots < F_N = 1 \quad (3.8.2)$$

donde $F_i = F(D_i)$ para $i = 0, 1, 2, \dots, N$.

La frecuencia acumulada F_i es definida como la masa acumulada desde las partículas de tamaño $D=0$ hasta las partículas de tamaño $D=D_i$, relacionadas a la unidad de masa del suelo.

Arya y Paris (1981) dividen el dominio ordenando los diámetros de partículas en N clases, de forma tal que el tamaño D_i representa la clase $(D_{i-1/2}, D_{i+1/2})$, para $i=0,1,2 \dots N$.

El volumen de partículas de la clase i se calcula considerando una masa unitaria de suelo, a partir de:

$$V_{si} = \frac{1}{\rho_o} F_{fi} \quad (3.9.1)$$

siendo

$$F_{fi} = F(D_{i+1/2}) - F(D_{i-1/2}) \quad (3.9.2)$$



Arya y Paris han supuesto que el índice de vacíos definido por la ecuación (3.7) es el mismo en cada clase i , siendo:

$$e = \frac{V_{vi}}{V_{si}} \quad (3.10)$$

donde V_{vi} es el volumen de vacíos asociado con la clase i .

Para ligar el contenido volumétrico de agua a la curva granulométrica, se acumula el volumen de vacíos desde la clase $j=1$ hasta la clase $j=i$, siendo:

$$\theta_i = \frac{1}{V_t} \sum_{j=1}^{i-1} V_{vj} \quad (3.11)$$

para $i = 0, 1, 2 \dots N$.

La forma de cálculo de la densidad total del suelo $\rho_t = M_t / V_t$, donde M_t es la masa total de suelo seco y ρ_t la densidad total del suelo seco, permite expresar el volumen total como $V_t = 1/\rho_t$ si se considera una masa unitaria de suelo. La combinación de las ecuaciones (3.11)-(3.13) permite obtener la relación entre θ_i y la curva granulométrica:

$$\theta_i = \phi \sum_{j=1}^{i-1} F_{fj} \quad (3.12)$$

que es equivalente a:

$$\theta_i = \phi F(D_i) \quad (3.13)$$

La relación anterior también es usada por Haverkamp y Parlange (1986).

Así, para la estimación de la curva $\theta(\psi)$ vía la ley de Laplace, es necesaria una relación entre el tamaño de las partículas y el tamaño de los poros.

Aceptando que el tamaño de las partículas se puede representar por el diámetro de una esfera, el volumen de partículas de la clase i es:

$$V_{si} = \frac{\pi}{6} D_i^3 N_i \quad (3.14)$$

donde N_i es el número de partículas de la clase i . N_i es estimado a partir de la igualdad de las ecuaciones (3.9) y (3.14), siendo:

$$N_i = \frac{6F_{fi}}{\pi\rho_s D_i^3} \quad (3.15)$$

Para calcular el volumen de vacíos asociado a la clase de partículas i , Arya y Paris hacen dos hipótesis: i) El espacio vacío puede ser asimilado a un tubo cilíndrico, siendo su longitud L_{vi} y ii) las partículas son ubicadas en un eje paralelo al eje del tubo. Estas hipótesis implican de una parte que $V_{vi} = (\pi/4)R_i^2 L_{vi}$, donde R_i es el diámetro del poro correspondiente a D_i , y de otra parte que $L_{vi} = N_i D_i$. Arya y Paris consideran que en razón de la irregularidad de la forma geométrica de las partículas, es necesario aumentar el número de partículas para lo cual se introduce un parámetro más grande que la unidad, $\alpha > 1$, de suerte que:

$$L_{vi} = N_i^\alpha D_i \quad (3.16)$$

Finalmente V_{vi} se expresa como:

$$V_{vi} = \frac{\pi}{4} R_i^2 N_i^\alpha D_i \quad (3.17)$$

La introducción de las ecuaciones (3.14) y (3.17) en la ecuación (3.10) permite obtener la relación siguiente entre el diámetro de la partícula y el diámetro de poro:

$$R_i = D_i \sqrt[3]{\frac{2e}{3N_i^{\alpha-1}}} \quad (3.18)$$

La estimación de la curva $\theta(h)$ depende del conocimiento del exponente α :

- i) la presión h_i puede ser estimada indirectamente, vía la ley de Laplace, a partir de D_i , y
- ii) el contenido de agua a partir de la frecuencia acumulada $F(D_i)$, utilizando la expresión $\theta_i = \phi F(D_i)$.

Es claro que la relación R – D proporcionada por la ecuación (3.18) es únicamente conceptual. En el modelo de Arya y Paris no se propone alguna relación que ligue el parámetro α con las propiedades del suelo. Este parámetro se ha calibrado para cinco suelos diferentes. Se señalan las principales características de la información experimental:

- (i) Datos de $F(D)$
 - Suelos bien graduados.
 - Dominio de los tamaños de las partículas: $2 < D < 1000 \mu\text{m}$.
- (ii) Datos de $\theta(\psi)$
 - La curva utilizada corresponde a la curva principal de drenado.
 - Dominio de la presión: $-15000 < h < -5 \text{ cm de H}_2\text{O}$.

Se ha recomendado el valor medio $\alpha = 1.38$.

En tanto que el valor $\alpha = 1.38$ es efectivamente superior a la unidad, la experiencia de Arya y Paris ha puesto en evidencia que: *la relación entre la escala de Laplace y la escala de Stokes no es lineal.*

Lo que es necesario recordar de la relación (3.18) es su naturaleza funcional. Eliminando índices, esta se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{R}{R_M} = \left(\frac{D}{D_M} \right) \left(\frac{N_M}{N} \right)^{(\alpha-1)/2} \quad (3.19)$$

donde R_M , D_M y N_M son los valores de referencia que permiten satisfacer la ecuación (3.18).

De la misma manera, la ecuación (3.15) es escrita como sigue:

$$\frac{N}{N_M} = \frac{F}{F_M} \left(\frac{D_M}{D} \right)^3 \quad (3.20)$$

donde N_M y F_M son los valores de referencia.

Una relación directa entre R y D puede obtenerse partiendo del hecho de que Arya y Paris han dividido conforme a su experiencia la curva granulométrica de una manera muy fina. Por tanto, puede suponer que la masa asignada a cada clase es la misma, en consecuencia:

$$N = N_M \left(\frac{D_M}{D} \right)^3 \quad (3.21)$$

La introducción de la ecuación (3.21) en la ecuación (3.19) conduce a:

$$\frac{R}{R_M} = \left(\frac{D}{D_M} \right)^{1+3(\alpha-1)/2} \quad (3.22)$$

Es decir, la relación entre R y D es una función potencia.

3.3. Modelo fractal de Fuentes (1992)

A partir de los conceptos de la geometría fractal de Mandelbrot (1982), Fuentes (1992) propone la siguiente relación entre los tamaños de poro y partículas

$$R = \frac{D}{I} \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_s} \right) \quad (3.23)$$

Las escalas λ_s y λ_v se pueden definir considerando que una unidad de masa de suelo seco ($M_t = 1$) se puede asimilar a una esfera de diámetro λ_t , es decir:

$$\lambda_t = \left(\frac{6M_t}{\pi\rho_t} \right)^{1/3} \quad (3.24)$$

$$\lambda_v = \lambda_t \phi^{1/3} \quad (3.25)$$

$$\lambda_s = \lambda_t (1 - \phi)^{1/3} \quad (3.26)$$

El factor de tortuosidad I es proporcionado por:

$$I = \left(\frac{\lambda_v}{R} \right)^\delta = \left(\frac{\lambda_s}{D} \right)^\kappa \quad (3.27)$$

donde

$$\delta = 2s - 1 \quad (3.28)$$

$$\kappa = \frac{2s-1}{2(1-s)} \quad (3.29)$$

en la cual $s = D_f / E$, donde D_f es la dimensión fractal del suelo y $E = 3$ la dimensión euclídeana del espacio físico, es definida de manera implícita en función de la porosidad volumétrica total del suelo por:

$$(1-\phi)^s + \phi^{2s} = 1 \quad (3.30)$$

Comparemos ahora la estructura de la ecuación (3.23) con referencia a la estructura de la ecuación (3.18) de Arya y Paris.

La introducción de la ecuaciones (3.25) y (3.26), considerando la ecuación (3.7), en la ecuación (3.23) conduce a:

$$R = \frac{D}{T} e^{1/3} \quad (3.31)$$

Se debe señalar que en la ecuación (3.31) figura el término $e^{1/3}$ que corresponde a una longitud mientras que en la ecuación (3.18) figura el término $(2e/3)^{1/2}$ proveniente de la transformación del espacio de vacíos correspondiente a $E=3$ en el espacio de vacíos correspondiente a $E=2$ (tubo cilíndrico). Para los cinco suelos de Arya y Paris las diferencias de hecho no son sustanciales. Tomando el valor medio de la porosidad $\phi \approx 0.4514$, se tiene un índice de vacíos $e_m \approx 0.8244$, se obtiene: $(2e_m/3)^{1/2} \approx 0.7413$ y $e_m^{1/3} \approx 0.9376$ [ver tabla 3.1].

Expresión para α de Arya y Paris:

La expresión para α se obtiene a partir de las ecuaciones (3.22) y (3.29), resulta:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{3} \left[\frac{2s-1}{1-s} \right] \quad (3.32)$$

En virtud de que $1/2 \leq s \leq 1$, se deduce la desigualdad siguiente:

$$1 \leq \alpha < \infty \quad (3.33)$$

El límite inferior corresponde a $\phi=0$ y el límite superior a $\phi=1$. Se debe observar que el parámetro α crece sin límites conforme la porosidad se aproxima a la unidad.

3.4. Comparación experimental

La ecuación (3.32) es probada para los cinco suelos de Arya y Paris (1981). Estos autores han designado los suelos por las letras B, C, D, E y F.

Se calcula la porosidad volumétrica (ϕ) en función de la densidad total (ρ_t) y la densidad concentrada de los sólidos (ρ_s) teniendo en cuenta que $\rho_s / \rho_t = 1/(1-\phi)$. Puesto que ρ_s no ha sido proporcionado se utiliza la densidad de las partículas de cuarzo $\rho_s = 2.65 \text{ g cm}^3$. La dimensión relativa s se calcula en función de (ϕ) por la ecuación (3.30). Finalmente se calcula $\delta = 2s - 1$. Los resultados así obtenidos son proporcionados en la tabla 3.1.

Suelo	ρ_t	ϕ	α	s	δ
B	1.400	0.4717	1.390	0.6883	0.3766
C	1.416	0.4657	1.362	0.6870	0.3741
D	1.480	0.4415	1.381	0.6820	0.3640
E	1.456	0.4506	1.349	0.6839	0.3678
F	1.517	0.4275	1.389	0.6791	0.3583

Tabla 3.1. Valores de base

Teniendo en cuenta los valores proporcionados por la Tabla (3.1), se muestra abajo la comparación entre los valores de α de Arya y Paris y los valores predichos por la ecuación (3.51).

Suelo	α (Arya y Paris)	α (ecuación 3.32)
B	1.390	1.4027
C	1.362	1.3984
D	1.381	1.3816
E	1.349	1.3878
F	1.389	1.3722

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Tabla 3.2. Comparación experimental de α

A partir de esta comparación parece que la ecuación (3.32) explica correctamente los valores experimentales de α obtenidos por Arya y Paris. Sin embargo, se debe señalar que los suelos de Arya y Paris están concentrados en un

intervalo muy limitado de la porosidad. Este hecho hace que no sea posible afirmar de manera categórica que la ecuación (3.32) sea correcta sobre todo el dominio de la porosidad.

3.5. Estimación de parámetros a partir de la curva granulométrica

Las características hidrodinámicas presentan seis parámetros desconocidos, a saber: $\{\theta_r, \theta_s, \psi_d, K_s, m, \eta\}$. El contenido volumétrico de agua residual puede ser supuesta igual a cero de acuerdo con Fuentes *et al.*, (1992): $\theta_r = 0 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$.

El contenido volumétrico de agua a saturación puede ser tomado como la porosidad total del suelo (ϕ), si se asume que no queda aire atrapado en el suelo saturado. La porosidad total del suelo (ϕ) es estimada con la fórmula clásica $\phi = 1 - \rho_t / \rho_s$, donde ρ_t es la densidad volumétrica del suelo seco (o densidad aparente) y ρ_s la densidad de las partículas sólidas.

El suelo utilizado en el experimento de infiltración y drenaje en laboratorio es una arena de la región de Tezoyuca, Morelos. Con la densidad medida para la Arena Tezoyuca de $\rho_t = 1.357 \text{ g cm}^{-3}$, y la densidad $\rho_s = 2.65 \text{ g cm}^{-3}$ de las partículas de cuarzo, se obtiene $\phi = 0.488 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$.

Para estimar el contenido volumétrico de agua a saturación se mide el volumen de agua necesario para saturar la columna de suelo, este valor se divide entre el volumen total de la columna, el resultado así obtenido es $\theta_s = 0.45 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$. La diferencia entre la porosidad y el contenido volumétrico a saturación se debe al volumen de aire atrapado después de la saturación de la columna de suelo.

El parámetro de forma m puede ser estimado a partir de la curva granulométrica y de la porosidad total de acuerdo con un procedimiento sugerido por Fuentes (1992) y que resulta de la consideración de las ecuaciones (3.12), (3.13) y (3.27)-(3.29) en la ecuación (3.1).

La curva granulométrica experimental se ajusta con una función similar a la presentada en la ecuación (3.1):

$$F(D) = \left[1 + \left(\frac{D_g}{D} \right)^N \right]^{-M}, \quad (3.34)$$

donde $F(D)$ es la frecuencia acumulada basada en el peso de las partículas cuyos tamaños son inferiores o iguales a D , D_g es un tamaño característico del tamaño de las partículas, M y N son dos parámetros de forma empíricos, y por congruencia: $M = 1 - 2N$, con $0 < M < 1$ y $N > 2$. Un buen ajuste de la curva granulométrica por la ecuación (3.34), $R^2 = 0.9922$, en la Arena Tezoyuca se muestra en la Figura 3.1 con: $D_g = 225 \mu\text{m}$ y $M = 0.5$.

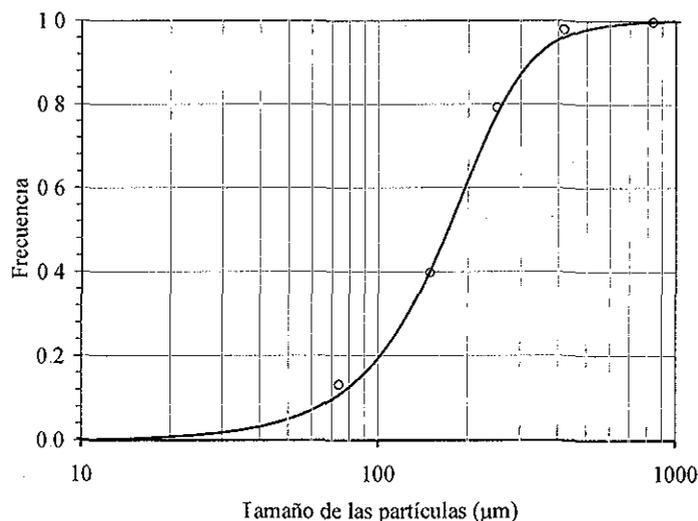


Figura 3.1. Curva granulométrica de la Arena de Tezoyuca y la función definida por la ecuación (3.34): $D_g = 225 \mu\text{m}$ y $M = 0.5$; $R^2 = 0.9975$.

Haciendo $\lambda = mn$ y $\mu = MN$ el parámetro de forma m puede ser relacionado con M a través de la fórmula (Fuentes, 1992):

$$\frac{\mu}{\lambda} \cong 1 + \kappa = 1 + \frac{2s-1}{2(1-s)}, \quad (3.35)$$

De la arena de Tezoyuca se obtiene $s = 0.692$ con el valor de $\mu = MN = 2.0$ y por lo tanto $\lambda = mn = 1.233$, de donde $m = 0.0381$.

En la ecuación de Brooks y Corey el parámetro η se puede estimar con la relación propuesta por Fuentes *et al.* (2001) $\eta = 2s(2\lambda + 1)$. Con los valores precedentes se obtiene: $\eta = 3.63$.

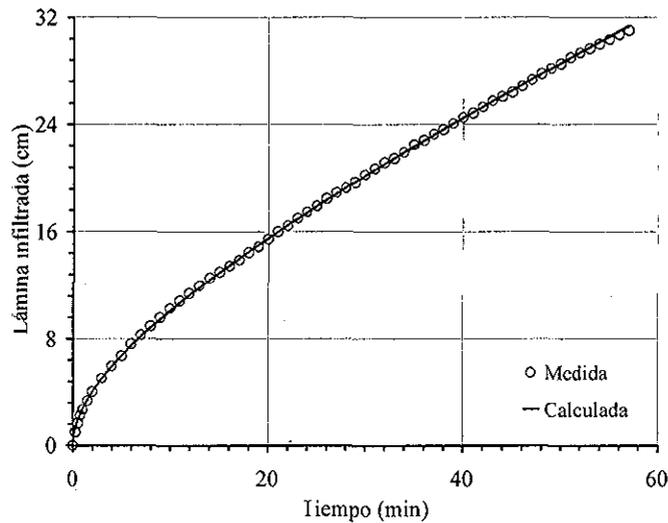
Los parámetros de escala de las características hidrodinámicas (ψ_d y K_s) se pueden estimar a partir de la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada en una prueba de infiltración realizada en la columna de suelo. Para una carga de agua constante sobre la superficie de una columna finita de suelo, el proceso de infiltración se modela sujetando la ecuación de Richards (ecuación 1.8) a las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$\theta = \theta_{ini}; \quad \text{para } 0 \leq z \leq L; \quad t = 0 \quad (3.36)$$

$$\psi = \psi_{cte}; \quad \text{para } z = 0; \quad t > 0 \quad (3.37.1)$$

$$q = -K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = L; \quad t > 0 \quad (3.37.2)$$

con $\theta_{ini} = 0.008 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$, $L = 75 \text{ cm}$ y $\psi_{cte} = 6.5 \text{ cm}$.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 3.2. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con:

$$\psi_d = -18.5 \text{ cm y } K_s = 18.2 \text{ cm h, con } R^2 = 0.9988.$$

Se utiliza la solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional presentada en el capítulo 2 con los valores de m , η , θ_s y θ_r previamente estimados para calibrar los valores de ψ_d y K_s de manera de reproducir las observaciones experimentales (Figura 3.2). Los valores así obtenidos son: $\psi_d = -18.5 \text{ cm}$ y $K_s = 18.2 \text{ cm h}$, con $R^2 = 0.9988$.

CAPÍTULO IV

CONDICIÓN DE RADIACIÓN LINEAL

4. CONDICIÓN DE RADIACIÓN LINEAL

Dada una distribución hidrostática de presiones, H definida como:

$$H = \psi - z \quad (4.1)$$

La condición de radiación lineal de Newton también conocida como condición de Robbins, establece que el flujo de materia por la frontera es proporcional a la diferencia de energía entre las regiones interna y externa inmediatamente vecinas a la frontera (Fuentes, 1997).

Por continuidad, el flujo en el suelo calculado según la ley de Darcy debe ser igual al flujo fuera del suelo calculado según la ley de Ohm:

$$q = -K \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{K_t}{\lambda} (H_0 - H_i) \quad (4.2)$$

siendo H_0 la energía en la región externa definida como:

$$H_0 = h - z_0 \quad (4.3)$$

y H_i la energía en la región interna, definida como

$$H_i = \psi - z_i \quad (4.4)$$

Al restar las ecuaciones (4.3) y (4.4) se obtiene:

$$H_0 - H_i = h - \psi - \lambda \quad , \quad \text{donde } \lambda = (z_0 - z_i) \quad (4.5)$$

Dando como resultado un flujo definido por la condición de Radiación el cual involucra parámetros que deberán ser identificados al resolver dicha ecuación:

$$q = -\frac{K_t}{\lambda} (h - \psi - \lambda) \quad (4.6)$$

Definiendo la conductividad de la interfase suelo-tubo K_t como:

$$K_t = \gamma K(\psi) = \gamma K_s K_r(\psi) \quad (4.7)$$

donde K_s igual a la conductividad hidráulica a saturación, γ un coeficiente de conductancia adimensional, y $K_r(\psi)$ la conductividad hidráulica a saturación relativa, definida por:

$$K_r = \frac{K(\psi)}{K_s} \quad (4.8)$$

sustituyendo la ecuación (4.7) en la ecuación (4.6) se obtiene:

$$q = -\frac{\gamma K_s K_r(\psi)}{\lambda} (h - \psi - \lambda) \quad (4.9)$$

Definiendo R como una resistencia del suelo; se dice que:

$$R = \frac{\lambda}{\gamma K_s} ; RK_s = \frac{\lambda}{\gamma} \quad (4.10)$$

si se hace:

$$h_e = h - \lambda \quad (4.11)$$

La sustitución de las ecuaciones (4.10) y (4.11) en la ecuación (4.9) da como resultado:

$$q = -\frac{K_r(\psi)}{R}(h_e - \psi) \quad (4.12)$$

Por otro lado, el flujo definido según la ley de Darcy es:

$$q = -K(\psi) \frac{\partial}{\partial z} (\psi - z) \quad (4.13)$$

Igualando las ecuaciones (4.11) y (4.13) se obtiene:

$$-\frac{K_r(\psi)}{R}(h_e - \psi) = -K(\psi) \frac{\partial}{\partial z} (\psi - z)$$

Obteniendo así:

$$-\frac{1}{R}(h_e - \psi) = -K_s \frac{\partial}{\partial z} (\psi - z) \quad (4.14)$$

que es la condición de frontera tipo radiación.

Discretizando la ecuación (4.14) en diferencias finitas se obtiene:

$$\frac{1}{R}(h_e - \psi_n^{j+1}) = K_s \left(\frac{\psi_n^{j+1} - \psi_{n-1}^{j+1}}{z_n - z_{n-1}} \right) \quad (4.15)$$

Por lo que despejando ψ_{n-1}^{j+1} de la ecuación (4.15) se tiene que:

$$\psi_{n-1}^{j+1} = \psi_n^{j+1} + \frac{z_n - z_{n-1}}{K_s R} (\psi_n^{j+1} - h_e) \quad (4.16)$$

Aplicando la ecuación (2.10) a los potenciales de presión indicados en la ecuación (4.16) se obtiene finalmente:

$$\psi_n^{j+1} = \frac{\frac{z_n - z_{n-1}}{RK_s} h_e - F_{n-1}}{1 + \frac{z_n - z_{n-1}}{RK_s} + G_{n-1}} \quad (4.17)$$

que es la expresión utilizada en la frontera inferior para resolver el esquema que calcula el flujo de agua en el dren.

4.1 Aproximación teórica de los parámetros

Dado un hidrograma de descarga de un dren en su fase de recesión (figura 4.1a) es posible aproximar su forma utilizando una función exponencial, por lo que se tiene que:

$$\frac{dq}{dt} = -\alpha q \quad (4.18)$$

de donde:

$$q = q_0 \exp(-\alpha t) \quad (4.19)$$

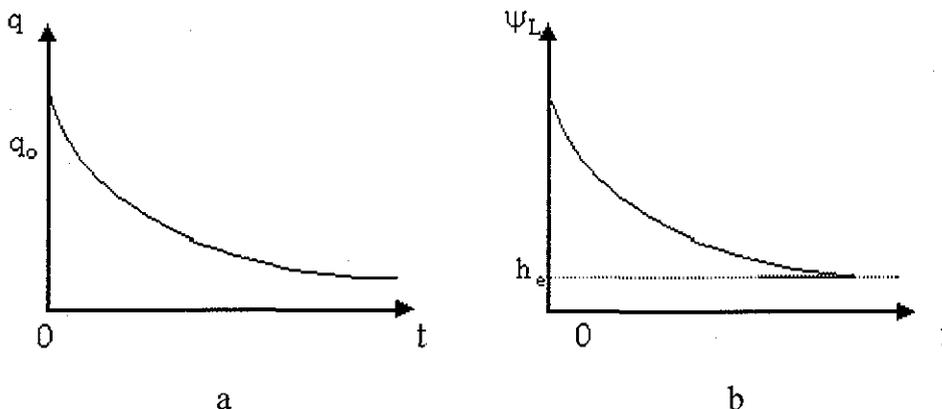


Figura 4.1 a y 4.1 b Hidrograma de descarga de un dren y presión en la base de la columna de suelo

Igualando la ecuación (4.12) con la ecuación (4.19) se obtiene:

$$\psi = h_e + \frac{Rq_0}{K_{rt}} \exp(-\alpha t) \quad (4.20)$$

donde K_{rt} es la conductividad del tubo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En el límite cuando t tiende a cero en la ecuación (4.20) se obtiene:

$$\psi_L = h_e + \frac{Rq_0}{K_{rt}} \cong L \quad (4.21)$$

Siendo L igual a la longitud de la columna o profundidad del dren y q_0 el gasto inicial en el hidrograma de salida del dren y entonces la ecuación (4.20) puede expresarse como:

$$\psi = h_e + (\psi_L - h_e)\exp(-\alpha t) \quad (4.22)$$

Para tener un estimador inicial del valor de la resistencia puede considerarse $K_{rt} = 1$ y $h_e = 0$ entonces: $Rq_0 \cong L$ de donde:

$$R \cong \frac{L}{q_0} \quad (4.23)$$

Dando por lo tanto una aproximación de la resistencia R la cual es un parámetro a estimar.

CAPÍTULO V

RESULTADOS

5. RESULTADOS

En este capítulo se comparan los resultados obtenidos con la aplicación del modelo numérico contra los obtenidos tanto en laboratorio como en campo

El modelo numérico de simulación se programó en lenguaje pascal bajo ambiente de programación Windows llamado Delphi Borland. El programa resuelve la ecuación de Richards unidimensional, en el cual se utilizan las características de van Genuchten y Brooks y Corey. Para la resolución de la ecuación se utiliza un esquema en diferencias finitas utilizando una frontera superior de segundo orden (Neumann) de flujo nulo y una frontera inferior de radiación lineal.

La deducción de los parámetros involucrados en la condición de radiación lineal (Robbins), se obtuvo comenzando con los datos obtenidos de la aproximación teórica descrita en el apartado 4.2.1. Se determinaron la resistencia del suelo R y la energía en la región externa del tubo h por el método de mínimos cuadrados entre los puntos medidos experimentalmente y la curva simulada.

5.1 Comparación de la solución numérica y el experimento de laboratorio

Los datos de laboratorio con los cuales se calibró el modelo fueron obtenidos en un experimento que se realizó en las instalaciones del laboratorio de hidráulica de la DEPMI-UNAM Campus Morelos.

La simulación se realizó con las características hidrodinámicas estimadas en el apartado 3.5. La evolución del contenido de agua se presenta en la figura 5.1, siendo la condición inicial $\theta(z = 0, t) = \theta_s = 0.45 \text{ cm}^3 \text{ cm}^{-3}$ (suelo saturado).

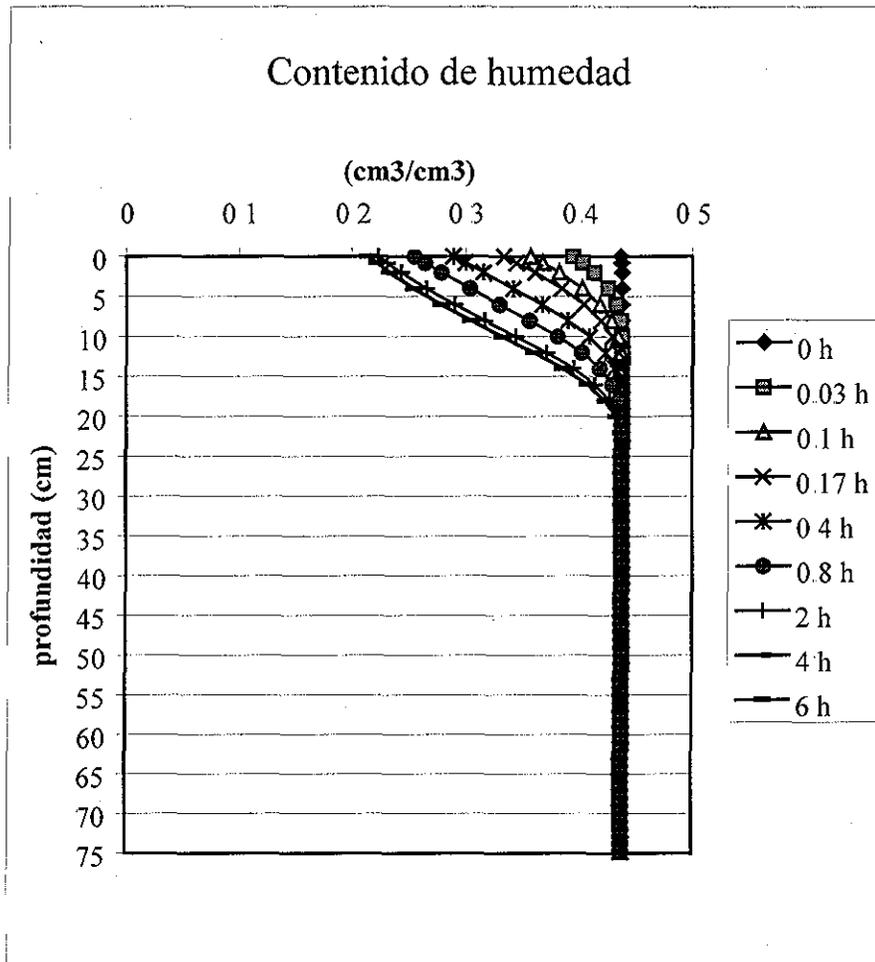


Figura 5.1 Perfil de humedad en el suelo

La Figura 5.2 muestra la lámina drenada de la columna de suelo. La expresión para el cálculo de la lámina drenada se escribe a continuación:

$$Ld_{i+1} = [(1 - \omega) q_i + q_{i+1}] \cdot (t_{i+1} - t_i) \quad (5.1)$$

donde:

Ld_{i+1} es la lámina drenada en el nodo $i+1$

ω es un factor de peso igual a 0.5

q_i es el gasto en el nodo i

q_{i+1} es el gasto en el nodo $i+1$

t_i es el tiempo en el nodo i

t_{i+1} es el tiempo en el nodo $i+1$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

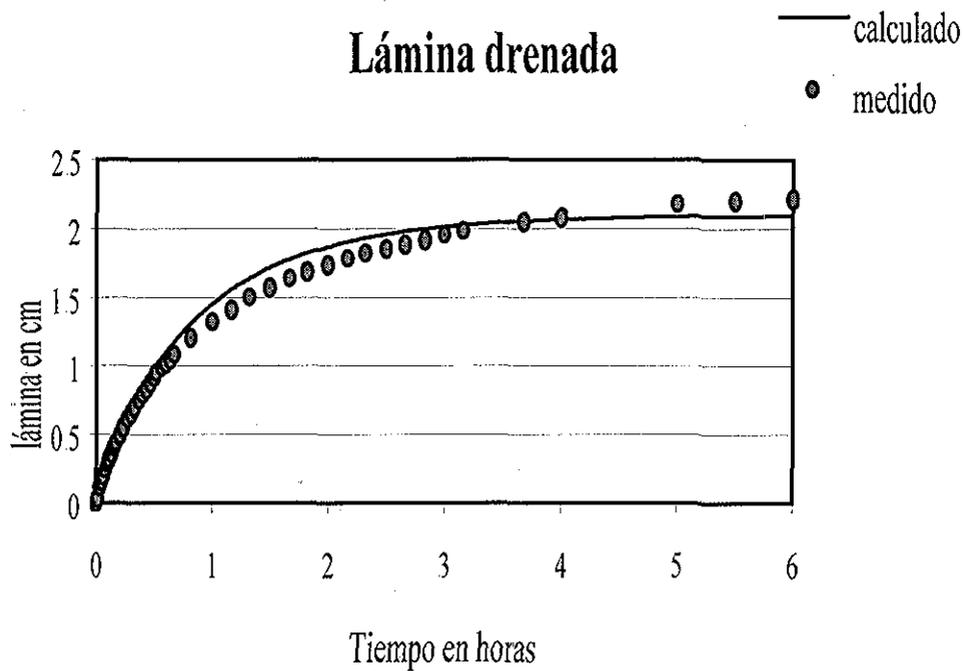


Figura 5.2 Evolución de la lámina drenada

La Figura 5.3 muestra el hidrograma de salida del dren. El valor de los parámetros involucrados en la condición de radiación lineal son $R = 0.25$ horas y $h = 49.5$ cm obtenidos por el modelo de simulación numérica.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

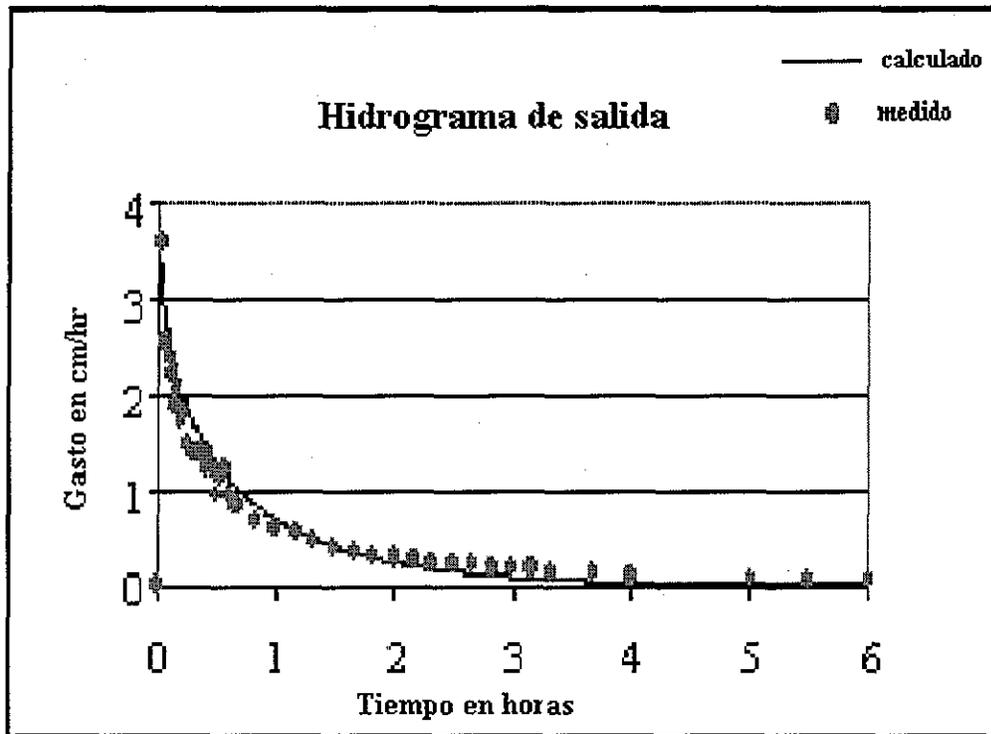


Figura 5.3 Hidrograma de salida de la columna de suelo

Las Figuras 5.2 y 5.3 muestran que el ajuste de las curvas simuladas con los datos medidos en el laboratorio es bastante acertado, aunque con pequeñas discrepancias. Elrick *et al.* (1971) atribuye la pequeña variabilidad en los datos experimentales al aire atrapado durante el humedecimiento de la columna de suelo.

5.2 Comparación de la solución numérica y el experimento de campo

Los datos de campo con los cuales se calibró el modelo de simulación fueron obtenidos en un experimento de campo efectuado en la parcela del Centro Nacional de Transferencia de Tecnología de Riego y Drenaje (CENATRYD) la cual se ubica en el valle del Carrizo, Sinaloa, México, los datos fueron medidos por personal del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) y reportados por Fuentes *et al.*, (1997).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para simular el flujo del agua se utilizaron las siguientes características hidrodinámicas en la modelación:

van Genuchten:

θ_s (cm ³ cm ³)	θ_r (cm ³ cm ³)	ψ_d (cm)	m	n
0.5	0.0	-23.6	0.0432	2.0904

Brooks y Corey:

K_s (cm/h)	η
2.4	33

Se consideró una línea del sistema de drenaje con una longitud de 235 m y una separación interdrenes de 50 m, el diámetro de la tubería es de 7.62 cm.

La simulación se efectuó con los datos del suelo obtenidos en campo. La evolución del contenido volumétrico del agua en el suelo se presenta en la figura 5.4. usando una condición inicial de $\theta(z=0,t)=\theta_s = 0.5 \text{ cm}^3 \text{ cm}^3$ (suelo saturado).

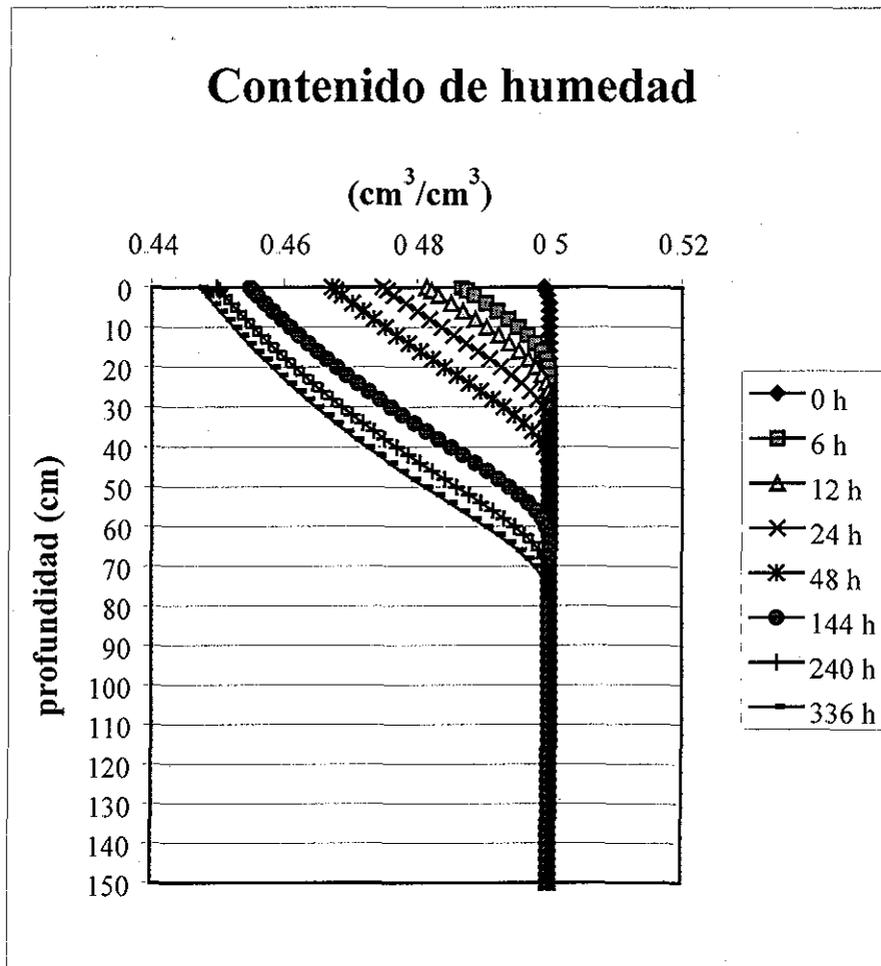


Figura 5.4 Perfil de humedad en el suelo

La comparación entre los resultados obtenidos de la simulación y los datos experimentales se realizan para 14 días, la discretización en el espacio se realizó con $\Delta z = 2 \text{ cm}$, y en el tiempo con $\Delta t = 0.01 \text{ h}$ que corresponde a un valor $M = 1$ (ecuación 2.23).

La figura 5.5 muestra la lámina que se drena a través del dren.

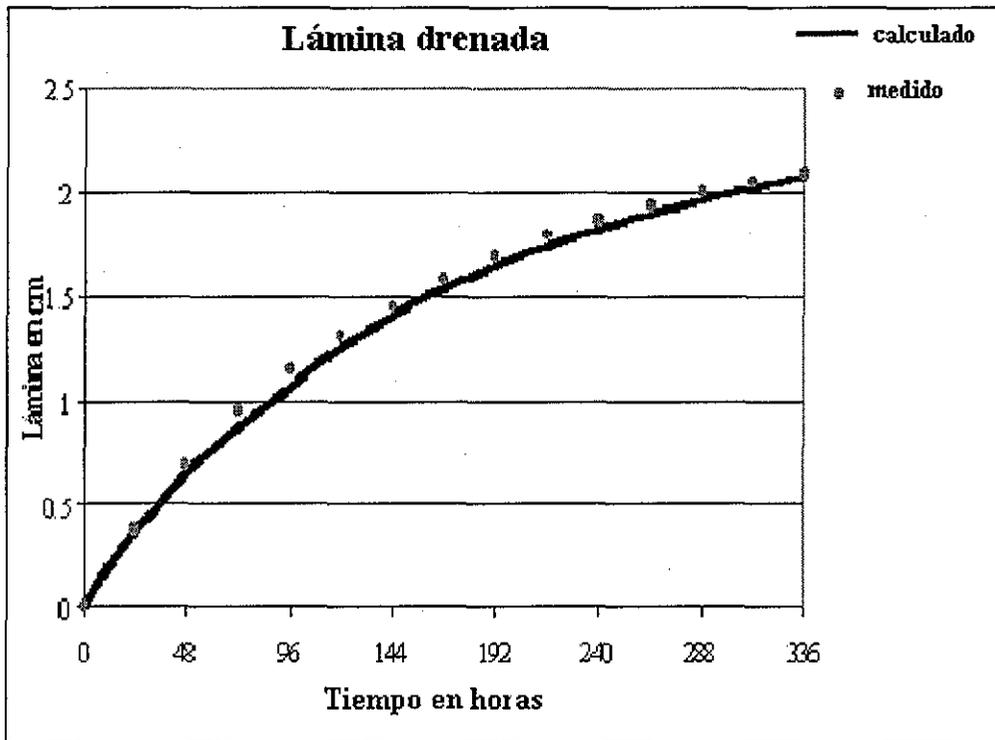
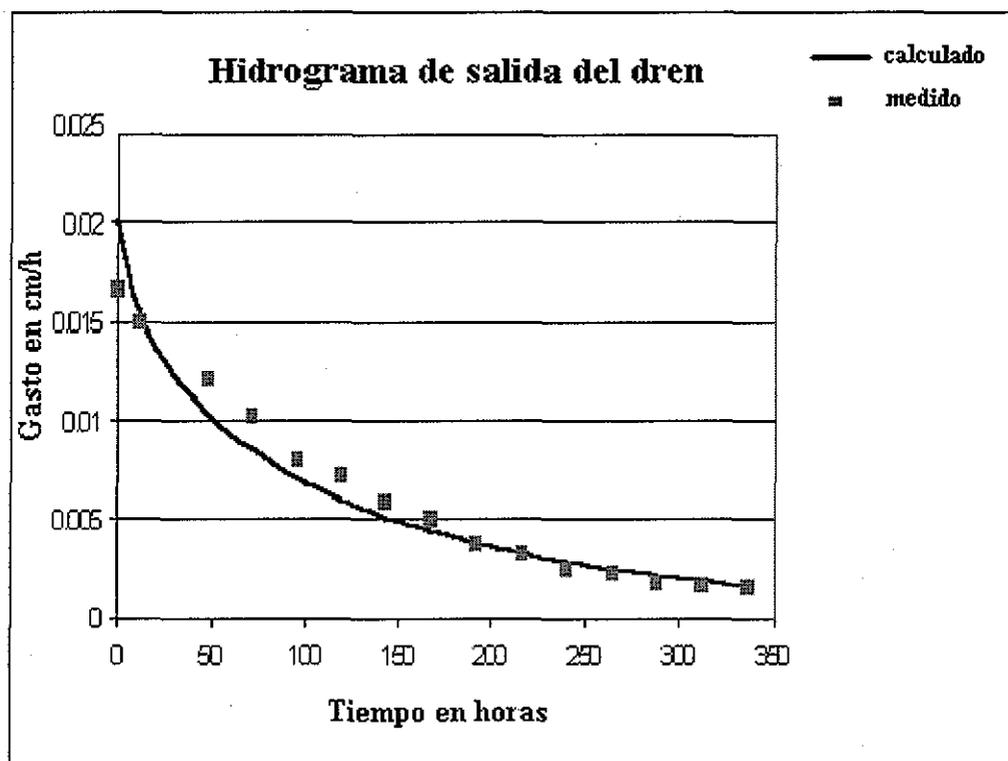


Figura 5.5 Evolución de la lámina drenada

La Figura 5.6 muestra la comparación de hidrogramas de salida del dren. El valor de los parámetros involucrados en la condición de radiación, son para $R = 3330$ horas y $h = 69$ cm.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 5.6 Hidrogramas de salida del dren

Aunque con pequeñas discrepancias, el ajuste de las curvas simuladas con los datos experimentales se puede considerar adecuado si se toma en cuenta que el suelo en condiciones de campo no es homogéneo y que pueden existir muchas fuentes de variación en la toma de los datos.

**ESTA TESIS NO SALIR
DE LA BIBLIOTECA**

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado una solución numérica unidimensional de la ecuación de Richards para estudiar el fenómeno de drenaje de una columna de suelo utilizando las características hidrodinámicas de van Genuchten (1980) para la curva $\theta(\psi)$ y Brooks y Corey (1964) para la relación $K(\theta)$.

Los resultados de los datos obtenidos de los experimentos de campo y laboratorio son bien representados por el modelo numérico.

El procedimiento implícito en el esquema numérico reduce considerablemente los efectos de dispersión numérica en la simulación.

El enfoque mecanicista en la descripción del fenómeno de transporte de agua es apropiado cuando los parámetros son seleccionados adecuadamente.

Con base en lo estudiado en el capítulo III se recomienda el uso de las características hidrodinámicas de van Genuchten (1982) para la curva $\theta(\psi)$ y Brooks y Corey (1964) para la relación $K(\theta)$.

Se recomienda realizar investigación acerca de la solución numérica bidimensional de la ecuación de Richards para estudiar el fenómeno de la infiltración del agua en el suelo así como también agregar a las ecuaciones la extracción del agua por las plantas.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

1. Arroyo, V.M., 1994. Modelo unidimensional de simulación numérica para drenaje agrícola. Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPMI Campus Morelos, UNAM. México. 155p.
2. Arroyo, V.M., y A. Aldama, 2000. Un método localizado adjunto Euleriano – Lagrangiano para la ecuación de Richards. Memorias del X Congreso Nacional de Irrigación. 126-135. Chihuahua, Chih., México.
3. Baker, D.L., 1995. Darcian Weighted interblock conductivity means for vertical unsaturated flow. *Groundwater* 33: 385-390.
4. Belmans, C., J.G. Wesseling, y R.A. Feddes, 1983. Simulation of the water balance of a cropped soil: SWATRE. *Journal of Hydrology*. 63, 271-286.
5. Brooks, R.H., y A.T. Corey, 1964. Hydraulic properties of porous media. *Hydrology Paper*. 3, Colorado State University, Fort Collins.
6. Brutsaert, W., 1974. The concise formulation of diffusive sorption of water in dry soil. *Water Resources Research*, 12: 1118-1124.
7. Burden, R.L., y J.D. Faires, 1985. Análisis Numérico. Grupo Editorial Iberoamericano, 210 p.
8. Burdine, N.T., 1953. Relative permeability calculation from size distribution data. *Trans. AIME*, 198: 71-78.

9. Celia, M.A., E.T. Boulountas, y R.L. Zarba, 1990. A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resources Research*, 26: 1483-1496.
10. Elrick, D.E., K.B. Laryea, y Y. Groenevelt, 1979. Hydrodynamic dispersion during infiltration of water into soil. *Soil Sci Am. Soc.*, 43:856-865.
11. Feddes, R.A., P. Kabat, P.J.T. van Bakel, J.J.K.B. Bronswijk, J. Halbertsma, 1988. Modelling soil water dynamics in the unsaturated zone- state of the art. *Journal of Hydrology*, 100: 69-111.
12. Fuentes, C., R. Haverkamp, y J.-Y. Parlange, 1992. Parameter constraints on closed-form soil-water relationship. *Journal of Hydrology*, 134: 117-142.
13. Fuentes, C., R. Namuche, L. Rendón, R. Patrón, O. Palacios, F. Brambila, y A. González, 1997. Solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio en el drenaje agrícola bajo condiciones de radiación. El caso del valle del Carrizo, Sinaloa. Memorias del VII Congreso nacional de Irrigación, 3: 146-152. México.
14. Haverkamp, R., M. Vauclin, J. Touma, P.J. Wierenga, y G. Vachaud, 1977. A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 45: 13-20.
15. Haverkamp R., y M. Vauclin, 1981. A comparative study of three forms of the Richards equation used for predicting one dimensional infiltration in unsaturated soil. *Soil Sci Am. J.*, 45: 113-20.

16. Haverkamp, R., 1983. Resolution de l'équation de l'infiltration de l'eau dans le sol. Approches analytiques et numériques. Thèse de Docteur ès-Sciences Physiques. Université Scientifique et Médicale de Grenoble. France.
17. Jury, W.A., W.R. Gardner, y W.H. Gardner, 1991. *Soils Physics*. John Wiley and Sons, Inc. USA. 220p.
18. Kirkland, M.R., R.G. Hills, y P.J. Wierenga, 1992. Algorithms for solving Richards' equation for variability saturated soils. *Water Resources Research*, 28: 2049-2058.
19. Pan, L., y P.J. Wierenga, 1995. A transformed pressure head based approach to solve Richards equation for variability saturated soils. *Water Resources Research*, 31: 925-931.
20. Miller, C.T., G.W. Williams, C.T. Kelly, y M.D. Tocci, 1998. Robust solution of Richards Equation for nonuniform porous media. *Water Resources Research*, 34: 2599-2610.
21. Milly, P.C.D., 1985. A mass conservative procedure for time-stepping in models of unsaturated flow. *Adv. Water Resour.*, 8: 32-36.
22. Pan, L., y P.J. Wierenga, 1995. A transformed head based approach to solve Richards equation for variability saturated soils. *Water Resources Research*, 31: 925-931.
23. Pan, L., A.W. Warrick, y Wierenga, 1996. Finite elements methods for modelling water flow in variably saturated porous media: numerical oscillation and mass distributed schemes. *Water Resources Research*, 32: 1883-1889.

24. Philip, J.R., 1957a. The theory of infiltration: 1. The infiltration equation and its solutions. *Soil Sci.*, 83: 345-357.
25. Philip, J.R., 1957b. The theory of infiltration: 4. Sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil Sci.*, 84: 257-264.
26. Philip, J.R., 1969. The theory of infiltration. *Adv. In Hydrosci.* 5: 245-296.
27. Richards, L.A., 1931. Capillary conduction of liquids through porous media. *Physics*, 1: 318-333.
28. Romano, N., B. Brunone B., y A. Santini, 1998. Numerical Analysis of one dimensional unsaturated flow in layered soils. *Adv. Water Resour.*, 21: 315-324.
29. Saucedo, H., y C. Fuentes, 1998. Modelación de la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo. *Memorias del VIII Congreso nacional de Irrigación*, 3: 135-148. México.
30. Saucedo, H., 1997. Flujo de agua hacia drenes subterráneos. Tesis de Maestría en Ingeniería. DEPMI Campus Morelos, UNAM. México. 70 p
31. Van Dam, J.C., y R.A. Feddes, 2000. Numerical simulation of infiltration, evaporation and shallow groundwater levels with the Richards equation. *Journal of Hydrology*, 233: 72-85.
32. Van Genuchten, M.Th., 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44: 892-898.

33. Van Genuchten, M.Th., 1982. A comparison of numerical solutions of the one dimensional unsaturated-saturated flow and transport equations. *Adv. Water Resour.*, 5: 47-55.
34. Van Genuchten, M.Th, F.J. Leij, y L. Wu, 1997. Characterization and measurement of the hydraulic properties of unsaturated porous media. U.S. Salinity laboratory Agricultural research service. University of California. Riverside, California Part 1 and 2.
35. Vauclin, M., R. Haverkamp, y G. Vachaud, 1979. Resolution numérique d'une équation de diffusion non-linéaire. *Presses Universitaires de Grenoble*. France.
36. Warrick, A.W., 1991. Numerical approximations of Darcian flow through unsaturated soil *Water Resources Research*, 27: 1215-1222.
37. Zaidel J., y D. Russo, 1992. Estimation of finite difference interblock conductivities for simulation of infiltration into initially dry soils. *Water Resources Research*, 28: 2885-2295.
38. Zatarain F., 1996. Transporte unidimensional de agua y solutos en el suelo. Tesis de Maestría en Ciencias. Colegio de Postgraduados. México. 91 p.